



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Φυσικά προβλήματα με τη χρήση του ενοποιημένου
μετασχηματισμού

Διπλωματική Εργασία

Μάριος Ιωάννης Σπυρόπουλος

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Καλημέρης

Πάτρα 28/09/2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή «Μάριου Ιωάννη Σπυρόπουλου» που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Φυσικά προβλήματα με τη χρήση του ενοποιημένου
μετασχηματισμού

Διπλωματική Εργασία

Μάριος Ιωάννης Σπυρόπουλος

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Καλημέρης

Πάτρα 28/09/2026

Περίληψη

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι να εξετάσουμε προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) κάνοντας χρήση της μεθόδου του ενοποιημένου μετασχηματισμού (EM). Πιο συγκεκριμένα σκοπός της εργασίας είναι να δώσουμε λύσεις σε ΠΑΣΤ που δεν μπορούν να επιλυθούν με τις κλασικές μεθόδους, συζητώντας πιθανές εφαρμογές του EM σε προβλήματα φυσικής, για παράδειγμα προβλήματα διήθησης/στράγγισης στην γεωπονία, ενώ η συζήτηση επεκτείνεται με μία σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση σε προβλήματα συνοριακών τιμών (π.χ. εξ. Helmholtz) της ακουστικής ή/και ρευστομηχανικής, όπου η μέθοδος του Φωκά μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων που η λύση τους με κλασικές μεθόδους (σειρές Fourier, συναρτήσεις Green, χωρισμός μεταβλητών) αποτυγχάνουν, ενώ άλλες μέθοδοι οδηγούν σε χρονοβόρες (αριθμητική επίλυση με συνοριακά στοιχεία) και περίπλοκες (Wiener-Hopf) μεθόδους επίλυσης. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό θα δώσουμε το περίγραμμα αυτής της νέας ενοποιημένης μεθοδολογίας που εισήχθη από τον Α. Φωκά το 1997 και ξεπερνά σημαντικούς περιορισμούς που παρουσιάζονται σε αντίστοιχες παραδοσιακές μεθόδους· σε αυτό το πλαίσιο θα δοθεί μια σχετική συνοπτική επισκόπηση.

Λέξεις κλειδιά: ενοποιημένος μετασχηματισμός, προβλήματα Riemann-Hilbert, μερικές διαφορικές εξισώσεις, αεροακουστική

Abstract

The goal of the present Master's thesis is to study Initial Boundary Values Problems (IBVP) using the unified transform (UT) method. In particular, the aim of the present work is to solve IBVP for which the classical methods fail while discussing applications in physics, such as infiltration/drainage. A brief literature review follows, focusing on boundary value problems in fluid mechanics and acoustics (e.g., Helmholtz equation), where the Fokas method can be applied to solve complex problems that are not solvable using classical techniques (Fourier series expansions, Green functions, separation of variables), while alternative methods lead to solutions with a high computational cost (Wiener-Hopf technique). We furthermore give a brief overview of the UT that was introduced by Fokas in 1997.

Key words: unified transform, Riemann-Hilbert problems, partial differential equations, aeroacoustics

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	12
1.1	Ορισμοί και διάταξη της εργασίας	12
1.2	Σύντομη περιγραφή της μεθόδου	13
1.3	Παράδειγμα: Εξίσωση διάχυσης	18
1.3.1	Επίλυση με την μέθοδο του Φωκά σε ημιάπειρη ευθεία	18
1.3.2	Επίλυση σε ημιάπειρη ευθεία (μετασχηματισμός ημιτόνου/συνημιτόνου)	19
1.3.3	Επίλυση για πεπερασμένο διάστημα (μέθοδος χωρισμού μεταβλητών)	20
2	Εξίσωση διάχυσης με μη ομογενή σταθερό όρο	22
2.1	Επίλυση με τον EM	22
2.2	Αριθμητικός υπολογισμός της αναλυτικής λύσης	26
2.3	Εφαρμογές στην γεωπονία	28
2.3.1	Παραβολική αρχική συνθήκη	30
2.3.2	Σταθερή αρχική συνθήκη	32
2.4	Αριθμητικά παραδείγματα	32
2.4.1	Παραβολική αρχική συνθήκη	32
2.4.2	Σταθερή αρχική συνθήκη	32
2.4.3	Αποτελέσματα	32
3	Γραμμικοποιημένη εξίσωση KdV σε πεπερασμένο διάστημα	34
3.1	Επίλυση με τον EM	35
3.1.1	Υπολογισμός οριζουσών	37
3.1.2	Εναλλακτική μορφή της λύσης (ολοκληρώματα στο ∂D^+)	41
3.2	Επαλήθευση	42
4	Εφαρμογές στην αεροακουστική	46
4.1	Βασική θεωρία	46
4.2	Θόρυβος αεροτομών και ενοποιημένος μετασχηματισμός	47
4.2.1	Εφαρμογή EM σε ελλειπτικές εξισώσεις	48
A'	Εξίσωση διάχυσης	58
A'.1	Επαλήθευση της γενικής λύσης	58
A'.1.1	Επαλήθευση ικανοποίησης της διαφορικής εξίσωσης	59
A'.2	Υπολογισμοί όρων της λύσης	61

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Περιοχές $\pm$ δεξιά και αριστερά της C_L	15
2.1	Σύνορα των χωρίων στα οποία οι προς ολοκλήρωση ποσότητες του δεύτερου (∂D^-) και τρίτου (∂D^+) ολοκληρώματος της δεξιάς πλευράς της (2.3) είναι αναλυτικές. Οι πράσινες γραμμές αντιστοιχούν στην διαδρομή ολοκλήρωσης εντός του χωρίου που οι προς ολοκλήρωση ποσότητες είναι αναλυτικές.	24
2.2	Λύση ομογενούς εξίσωσης διάχυσης $u(x, t)$ για $q = 0$. Τα διαγράμματα της άνω σειράς αντιστοιχούν στην επαλήθευση της αρχικής συνθήκης και των 2 συνοριακών συνθηκών. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η λύση $u(x, t)$ που δίνεται από την (2.25), ενώ με τεθλασμένη κόκκινη γραμμή η συνοριακή συνθήκη.	28
2.3	Λύση μη ομογενούς εξίσωσης διάχυσης $u(x, t)$ για $q = -10$. Τα διαγράμματα της άνω σειράς αντιστοιχούν στην επαλήθευση της αρχικής συνθήκης και των 2 συνοριακών συνθηκών. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η λύση $u(x, t)$ που δίνεται από την (2.25), ενώ με τεθλασμένη κόκκινη γραμμή η συνοριακή συνθήκη.	29
2.4	Απεικόνιση του προβλήματος στράγγισης με όρο πηγής.	30
2.5	Αναπαράσταση της καμπύλης C^+ της (2.35) στο μιγαδικό επίπεδο (κόκκινη γραμμή). Η μαύρη περιοχή αντιστοιχεί στο χωρίο D^+	31
2.6	Σύγκριση της προκύπτουσας λύσης (μαύρη γραμμή) με τη λύση που εκφράζεται μέσω σειρών Fourier (χρησιμοποιώντας $N = 10$ όρους) από την εργασία [1].	33
2.7	Σύγκριση των αποτελεσμάτων για παραβολική και σταθερή αρχική συνθήκη.	33
3.1	ΜΔΕ: $u_t + u_{xxx} = 0$ σε ευθύγραμμο τμήμα.	35
3.2	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο άνω μιγαδικό επίπεδο. Οι κόκκινες ευθείες αντιστοιχούν στο σύνορο του χωρίου στο οποίο παραμορφώνεται η πραγματική ευθεία.	36
3.3	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο κάτω μιγαδικό επίπεδο. Οι κόκκινες ευθείες αντιστοιχούν στο σύνορο του χωρίου στο οποίο παραμορφώνεται η πραγματική ευθεία.	37
3.4	Παραμόρφωση χωρίων λόγω των μετασχηματισμών $k/\alpha, k/\alpha^2$. Με κόκκινο συμβολίζεται το χωρίο πριν τον μετασχηματισμό και με μπλε χρώμα το τελικό χωρίο αντίστοιχα.	40
4.1	Κυρτό πολύγωνο στο μιγαδικό επίπεδο.	50
4.2	Σχηματική αναπαράσταση σκέδασης ακουστικών κυμάτων στο εσωτερικό κοιλότητας με αυθαίρετη γεωμετρία. Οι κόκκινες γραμμές αντιστοιχούν σε πλευρές της κοιλότητας με απορροφητικό υλικό (διαφορετική συνοριακή συνθήκη).	51
A'.1	Καμπύλη C^+	62
A'.2	Παραμόρφωση της πραγματικής ευθείας στην καμπύλη C^+ λαμβάνοντας υπόψη τους πόλους $0, \pm\pi/L$	63

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο ενοποιημένος μετασχηματισμός (EM) εισήχθη από τον Φωκά το 1997 [2] και αποτελεί μία μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών για ολοκληρώσιμες (integrable) μη γραμμικές, μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) [3]. Αργότερα, έγινε αντιληπτό ότι μπορούσε να παραγάγει σημαντικά και καινοτόμα αποτελέσματα και σε κλασικές γραμμικές ΜΔΕ. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία έχει εφαρμοστεί ως επί το πλείστον σε εξισώσεις εξέλιξης [4], ελλειπτικές [5] καθώς και υπερβολικές εξισώσεις στην μία διάσταση [6],[7].

Τα κύρια προτερήματα της μεθόδου αυτής είναι ότι δίνει λύσεις οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα στο σύνορο, έχουν σχετικά απλή μορφή που διευκολύνει τον υπολογισμό της λύσης αριθμητικά, ενώ εφαρμόζεται ακόμη και σε προβλήματα που οι κλασικές μέθοδοι δεν δίνουν λύση [4].

Το εύρος των φυσικών εφαρμογών είναι αρκετά μεγάλο, ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες εφαρμογές όπως η εξίσωση διάχυσης σε ημιάπειρη και πεπερασμένη ευθεία [4], προβλήματα στράγγισης/ διήθησης του νερού στο έδαφος με εφαρμογές στην γεωπονία [8],[9],[10],[11], η περιγραφή της κίνησης των κυμάτων νερού [12], ενώ πιο πρόσφατα ο EM έχει εφαρμοστεί στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων ακουστικής σκέδασης με εφαρμογές στην αεροακουστική [13], [14].

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή του EM σε φυσικά προβλήματα. Ξεκινώντας από ένα ΠΑΣΤ που περιγράφεται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση, εφαρμόζουμε τον EM και καταλήγουμε στην γενική λύση σε ολοκληρωτική μορφή. Τέλος, η αναλυτική λύση του φυσικού προβλήματος εκφράζεται ως ολοκληρωτική αναπαράσταση που υπολογίζεται αριθμητικά, ανάλογα με τις δοθείσες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

1.1 Ορισμοί και διάταξη της εργασίας

Παρακάτω δίνουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται επανειλημμένα στα διαφορετικά κεφάλαια της εργασίας.

- **Μετασχηματισμός Fourier σε πεπερασμένο διάστημα:**

Για μία συνάρτηση $u(x, t)$, με $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t < \infty$ ορίζουμε το ζεύγος ευθέως και αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ως

$$\hat{u}(k, t) = \int_0^L u(x, t) e^{-ikx} dx \quad (1.1)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \quad (1.2)$$

Οι εξισώσεις (1.1), (1.2) θα εφαρμόζονται στο υπόλοιπο της εργασίας κάθε φορά που χρησιμοποιείται ο ευθύς ή αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

- **Θεώρημα του Cauchy:** Έστω $f(z)$, αναλυτική συνάρτηση στο χωρίο D . Τότε

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0,$$

όπου ∂D το σύνορο του D .

- **Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων:** Έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο χωρίο D , εκτός από το σημείο $z = z_0$, όπου η συνάρτηση παρουσιάζει πόλο. Γράφουμε την $f(z)$ ως

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (1.3)$$

όπου η $g(z)$ είναι αναλυτική στο D , και m η τάξη του πόλου. Τότε, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ γύρω από μία καμπύλη C που περιέχει το z_0 υπολογίζεται ως

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Residue}[f(z)]_{z=z_0}, \quad (1.4)$$

όπου

$$\text{Residue}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right]_{z=z_0}.$$

- **Λήμμα του Jordan:** Έστω C_R το ημικύκλιο που περικλείει το άνω μιγαδικό επίπεδο με κέντρο την αρχή των αξόνων $(x, y) = (0, 0)$ για $z = x + iy$ και συνάρτηση $f(z)$, αναλυτική μέσα στο C_R , τέτοια ώστε $f(z) \rightarrow 0$ για $R \rightarrow \infty$, δηλαδή

$$|f(z)| \leq K(R), \quad z \in C_R,$$

και $\lim_{R \rightarrow \infty} K(R) = 0$. Τότε

$$\int_{C_R} e^{iz\alpha} f(z) dz \rightarrow 0,$$

για $R \rightarrow \infty$ και $\alpha > 0$.

Το υπόλοιπο της εργασίας οργανώνεται ως εξής: Αρχικά, δίνουμε μία σύντομη περιγραφή της μεθόδου και συγκρίνουμε με τις ήδη υπάρχουσες τεχνικές επίλυσης ΜΔΕ. Στη συνέχεια ο ΕΜ εφαρμόζεται στην εξίσωση διάχυσης (Κεφ. 2) με μη ομογενή όρο πηγής, σε πεπερασμένο διάστημα. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές αυτής σε προβλήματα στράγγισης και διήθησης του νερού στο έδαφος. Στο Κεφάλαιο 3 επιλύεται η γραμμικοποιημένη εξίσωση Korteweg-de-Vries (KdV) σε πεπερασμένο διάστημα. Εκτός από εξισώσεις εξέλιξης, η μέθοδος του Φωκά βρίσκει εφαρμογή και σε άλλα προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση προβλημάτων αεροακουστικής και πώς η εφαρμογή του ενοποιημένου μετασχηματισμού συνεισφέρει στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων που άλλες μέθοδοι (π.χ. Wiener-Hopf) αποτυγχάνουν.

1.2 Σύντομη περιγραφή της μεθόδου

Για την επίλυση γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δύο μεταβλητών (x, t) σε διαχωρίσιμο σύνορο με την κλασική μέθοδο των μετασχηματισμών, χρειάζεται η επιλογή ενός μετασχηματισμού ως προς την μία εκ των δύο μεταβλητών. Για παράδειγμα, όπως θα δείξουμε και στη συνέχεια, για την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, το ΠΑΣΤ επιλύεται χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ημιτόνου (sine-transform) ως προς x ή τον μετασχηματισμό Laplace ως προς την μεταβλητή t . Όμως υπάρχουν εξισώσεις εξέλιξης για τις οποίες δεν μπορεί να βρεθεί μετασχηματισμός ως προς την μεταβλητή x [15], για παράδειγμα η

$$u_t + u_x + u_{xx} = 0.$$

Η μέθοδος του Φωκά αποτελεί μία γενική μέθοδο επίλυσης ΠΑΣΤ που βασίζεται στην εύρεση ενός γενικού μετασχηματισμού για ολοκληρώσιμες, γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος αυτή εκμεταλλεύεται την ύπαρξη των ζευγών Lax [16] και ο μετασχηματισμός προκύπτει από την φασματική ανάλυση αυτών και την επίλυση του προβλήματος Riemann-Hilbert (RH). Παρακάτω δίνουμε μία σύντομη αναφορά για τα ζεύγη Lax και τα προβλήματα Riemann-Hilbert.

Ζεύγη Lax

Έστω συνάρτηση $u(x, t)$ που ικανοποιεί μία γραμμική ΜΔΕ δύο μεταβλητών και τελεστής L , τέτοιος ώστε

$$Lu(x, t) = \lambda u(x, t), \quad (1.5)$$

όπου λ είναι οι σταθερές ιδιοτιμές του τελεστή L . Ο τελεστής L εξαρτάται από την u και την χωρική μεταβλητή x αλλά όχι άμεσα από την μεταβλητή t . Ψάχνουμε λοιπόν έναν τελεστή M , για τον οποίο ισχύει

$$u_t(x, t) = Mu(x, t). \quad (1.6)$$

Παραγωγίζοντας την (1.5)

$$Lu_t + L_t u = \lambda_t u + \lambda u_t, \quad (1.7)$$

και χρησιμοποιώντας την (1.6)

$$L_t u(x, t) + [L, M]u(x, t) = \lambda_t u(x, t), \quad (1.8)$$

όπου $[L, M] = LM - ML$. Για σταθερές ιδιοτιμές προκύπτει

$$L_t u + [L, M]u = 0, \quad (1.9)$$

και ονομάζεται αναπαράσταση Lax της ΜΔΕ (1.5).

Για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις εξέλιξης με σταθερούς συντελεστές

$$\partial_t u + \left(\sum_{n=0}^N \partial_x^n \right) u = 0 \quad (1.10)$$

ο Φωκάς [2] έδειξε ότι μπορούμε να γράψουμε το ζεύγος Lax ως δύο διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\mu_x + ik\mu = u \quad (1.11)$$

$$\mu_t + w(ik)\mu = F(\partial_x, ik, u), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (1.12)$$

όπου $F(\cdot)$ συνάρτηση που περιέχει τις μερικές παραγώγους και την παράμετρο k και η συνάρτηση $w(ik)$ ορίζεται ώστε το εκθετικό

$$e^{-ikx+w(ik)t}$$

να ικανοποιεί την (1.10). Τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$\left[e^{-ikx+w(ik)t} u \right]_t - \left[e^{-ikx+w(ik)t} F(\partial_x, ik, u) \right]_x = 0,$$

όπου η F δίνεται από την έκφραση [3]

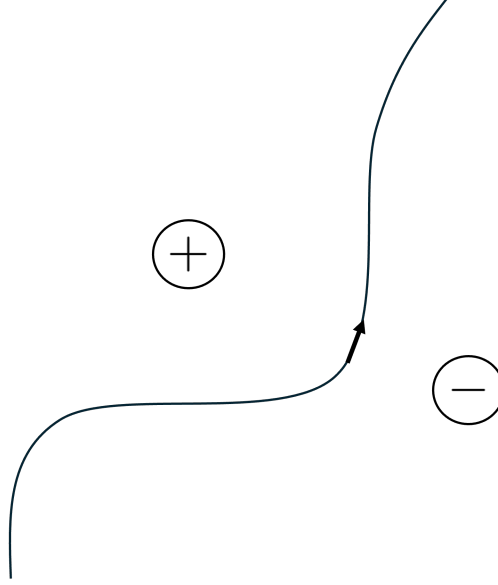
$$F = -i \frac{w(k) - w(-i\partial_x)}{k + i\partial_x} u \quad (1.13)$$

Τα αριστερά μέλη των (1.11), (1.12) αποτελούν ζεύγος Lax της ΜΔΕ (1.10) και η φασματική τους ανάλυση οδηγεί σε προβλήματα RH που από την επίλυσή τους προκύπτει η $u(x, t)$ ως ολοκληρωτική αναπαράσταση. Στην επόμενη παράγραφο περιγράφουμε συνοπτικά τα προβλήματα RH και τον τρόπο με τον οποίο ο EM μπορεί να προκύψει λύνοντας το πρόβλημα RH που προκύπτει από τις (1.11), (1.12).

Προβλήματα Riemann-Hilbert

Σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville, μία συνάρτηση που είναι αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο, συμπεριλαμβανοντας τις τιμές στο άπειρο, είναι σταθερή συνάρτηση. Μη-σταθερές συναρτήσεις στο μιγαδικό επίπεδο μπορούν να μην είναι αναλυτικές σε συγκεκριμένα σημεία (πόλους), σημεία διακλάδωσης ή τομές. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να σπάσουμε την αναλυτικότητα μίας συνάρτησης σε μία ευθεία C_L . Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_L} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \mathbb{C} - C_L,$$



Σχήμα 1.1: Περιοχές $\pm$ δεξιά και αριστερά της C_L .

όπου C_L μία λεία καμπύλη. Η συνάρτηση $f(\tau)$ ικανοποιεί την συνθήκη Hölder για $\tau \in C_L$

$$|f(\tau) - f(\tau_1)| \leq |\tau - \tau_1|^\lambda,$$

με $0 \leq \lambda \leq 1$. Η $F(z)$ είναι αναλυτική υπό την προϋπόθεση ότι το z δεν βρίσκεται πάνω στην C_L . Τα όρια της $F(z)$ καθώς προσεγγίζουμε την ευθεία C_L από δεξιά και αριστερά δίνονται από τους τύπους του Plemelj ως

$$F^+(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_L} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (1.14)$$

$$F^-(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_L} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (1.15)$$

Ορίσαμε λοιπόν μία κατά τμήματα αναλυτική συνάρτηση

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z), & z \in D^+ \\ F^-(z), & z \in D^-, \end{cases} \quad (1.16)$$

που παρουσιάζει άλμα για z πάνω στην C_L

$$F^+(z) - F^-(z) = f(z),$$

όπως προκύπτει από τους τύπους του Plemelj [15]. Η παραπάνω διαδικασία αντιστοιχεί στην επίλυση ενός απλού βαθμωτού προβλήματος Riemann-Hilbert, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Έστω ότι δίνεται μία κλειστή καμπύλη C_L που χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο (D) σε D^+ , D^- και μία συνάρτηση $f(t)$ που ικανοποιεί κάποια συνθήκη Hölder, μπορούμε να κατασκευάσουμε συναρτήσεις $F^+(z)$, $F^-(z)$ τέτοιες ώστε

- Οι $F^\pm(z)$ να είναι τα όρια όταν το z πλησιάζει την C_L από τα χωρία $D^\pm$. Οι $F^\pm(z)$ είναι αναλυτικές στα $D^\pm$ αντίστοιχα.
- $F^+(z) - F^-(z) = f(z)$, $z \in C_L$
- $F^\pm(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \rightarrow \infty$, $z \in D^\pm$

Ο μετασχηματισμός Fourier από την επίλυση προβλημάτων RH

Χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα το πρόβλημα

$$\mu_x - ik\mu = u \quad (1.17)$$

και θα δείξουμε ότι η επίλυσή του οδηγεί στην κατασκευή του μετασχηματισμού Fourier [3, 17]. Λύνοντας την ΣΔΕ γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu^+ &= \int_{-\infty}^x e^{ik(x-\xi)} u(\xi) d\xi, \quad \Im[k] \geq 0 \\ \mu^- &= - \int_x^{\infty} e^{ik(x-\xi)} u(\xi) d\xi, \quad \Im[k] \leq 0 \end{aligned}$$

για $x \in \mathbb{R}$. Η κατά-μήματα συνεχής συνάρτηση μ παρουσιάζει άλμα για $\Im[k] = 0$,

$$\mu^+ - \mu^- = e^{-ikx} \hat{u}(k),$$

όπου

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Από ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείχνουμε

$$\mu = O(1/k), \quad k \rightarrow \infty,$$

και άρα η επίλυση του προβλήματος RH δίνει

$$\mu(x, k) = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda - k} \hat{u}(\lambda) d\lambda, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (1.18)$$

Αντικαθιστώντας την (1.18) στην (1.17) προκύπτει το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier $[u, \hat{u}]$.

Ο EM από την επίλυση προβλημάτων RH

Στη συνέχεια θα σκιαγραφήσουμε την επίλυση του προβλήματος της εξίσωσης διάχυσης χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση σε ζεύγη Lax και την λύση προβλημάτων RH. Μέσω αυτής της διαδικασίας θα οδηγηθούμε στην έκφραση της λύσης που αντιστοιχεί στην εφαρμογή του ενοποιημένου μετασχηματισμού. Ακολουθώντας την εργασία του Φωκά [2], τα ζεύγη Lax για την εξίσωση διάχυσης, $u_t = u_{xx}$, γράφονται

$$\mu_x - ik\mu = u \quad (1.19)$$

$$\mu_t + k^2\mu = u_x + iku, \quad (1.20)$$

με $x \geq 0, t \geq 0$. Ορίζουμε

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = g_0(t), \quad u_x(0, t) = g_1(t).$$

Από τις (1.19), (1.20) γράφουμε

$$d \left(e^{-ikx+k^2t} \mu \right) = e^{-ikx+k^2t} (u dx + (u_x + iku) dt). \quad (1.21)$$

Ορίζουμε

$$\hat{u}_0(k) = \int_0^{\infty} e^{-ikx} u(x, 0) dx, \quad \tilde{g}(k, T) = \int_0^T e^{k^2 s} (u_x(0, s) + iku(0, s)) ds \quad (1.22)$$

Έστω τα χωρία D^+, E^+ τέτοια ώστε

$$D^+ = \{k : \Im[k] > 0, \Re[-k^2] < 0\} = \{\pi/4 \leq \arg(k) \leq 3\pi/4\}, \quad (1.23)$$

$$E^+ = \{k : \Im[k] > 0, \Re[-k^2] > 0\} = \{(0 < \arg(k) < \pi/4) \cup (3\pi/4 < \arg(k) < \pi)\}. \quad (1.24)$$

Από τις (1.19), (1.20) παίρνουμε την κατά-τιμήματα αναλυτική συνάρτηση

$$\mu = \begin{cases} \mu_1, & k \in D^+ \\ \mu_2, & k \in E^+ \\ \mu_3, & k \in \mathbb{C}^-. \end{cases}$$

Για $t = 0$, από την (1.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_0^x e^{-ik\xi} u(\xi, 0) d\xi, \\ \mu_3 &= - \int_x^\infty e^{-ik\xi} u(\xi, 0) d\xi, \end{aligned}$$

και αφού οι διαφορές των λύσεων της (1.21) είναι ανάλογες του e^{ikx-k^2t} , για $k \in \mathbb{R}$ προκύπτει το άλμμα

$$\mu^+ - \mu^- = e^{ikx-k^2t} \hat{u}_0(k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Με όμοιο τρόπο δουλεύουμε με την εξίσωση (1.20), όπου για $x = 0$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_0^t e^{-k^2(t-s)\xi} (u(0, s) + iku_x(0, s)) d\xi, & \Re[-k^2] < 0 \\ \mu_3 &= - \int_t^T e^{-k^2(t-s)\xi} (u(0, s) + iku_x(0, s)) d\xi, & \Re[-k^2] > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $k \in \partial D^+$ προκύπτει το άλμμα

$$\mu^+ - \mu^- = -e^{ikx-k^2t} \tilde{g}(k, T), \quad k \in \partial D^+.$$

Η λύση του προβλήματος RH γράφεται ως

$$\mu(x, t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \hat{u}_0(\lambda)}{\lambda - k} d\lambda - \int_{\partial D^+} \frac{e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \tilde{g}(k, T)}{\lambda - k} d\lambda. \quad (1.25)$$

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης δίνεται με αντικατάσταση της (1.25) στην (1.19),

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(k) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-k^2t} \tilde{g}(k, t) dk.$$

Η επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων μέσω των προβλημάτων RH θα συζητηθεί εκτενέστερα στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε σύντομα τον τρόπο εφαρμογής της μεθόδου και θα δοθεί μία σύγκριση σε σχέση με τις κλασικές τεχνικές επίλυσης ΠΑΣΤ.

Μεθοδολογία για την εφαρμογή του EM

Η μεθοδολογία για την επίλυση ΠΑΣΤ που περιγράφονται από μία εξίσωση εξέλιξης μπορεί να περιγραφεί αλγοριθμικά από τα εξής βήματα.

- Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier ως προς την χωρική μεταβλητή και παίρνουμε μία σχέση που συνδέει την λύση της εξίσωσης με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Η σχέση αυτή ονομάζεται γενική σχέση (global relation). Σημειώνεται ότι η γενική σχέση περιέχει όρους που δεν είναι γνωστοί από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.
- Γράφουμε την έκφραση της λύσης σε ολοκληρωτική μορφή. Παραμορφώνοντας την πραγματική ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων.
- Χρησιμοποιώντας την γενική σχέση υπολογίζουμε τους άγνωστους όρους συναρτήσεων των αρχικών και συνοριακών συνθηκών. Κάνοντας πράξεις απλοποιούμε την γενική μορφή της λύσης και την δίνουμε σε ολοκληρωτική μορφή.

Η περιγραφή της μεθόδου γίνεται κατά την επίλυση ενός γνωστού προβλήματος (εξίσωση διάχυσης σε ημιάπειρη ευθεία), ώστε να μπορεί η τελική λύση να συγκριθεί με τις κλασικές μεθόδους.

1.3 Παράδειγμα: Εξίσωση διάχυσης

Θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης,

$$u_t = u_{xx}, \quad (1.26)$$

με συνοριακές συνθήκες $u(0, t) = g_0(t)$, $u_x(0, t) = g_1(t)$ και αρχική συνθήκη $u(x, 0) = u_0(x)$, $t > 0$.

1.3.1 Επίλυση με την μέθοδο του Φωκά σε ημιάπειρη ευθεία

Θα επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Φωκά (EM) και θα δείξουμε πως η μέθοδος αυτή εμπεριέχει τους μετασχηματισμούς ημιτόνου και συνημιτόνου, ενώ ταυτόχρονα η λύση που προκύπτει συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνορο.

Ορίζουμε τον ευθύ και αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην ημιάπειρη ευθεία $x \geq 0$, όμοια με τις εξ. (1.1), (1.2),

$$\hat{u}(k, t) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad (1.27)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \quad (1.28)$$

και εφαρμόζουμε τα βήματα που παρουσιάστηκαν στην τελευταία παράγραφο της ενότητας §1.2.

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην (1.26)

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= \int_0^\infty u_{xx} e^{-ikx} dx \\ \hat{u}_t &= [u_x e^{-ikx}]_0^\infty + ik \int_0^\infty u_x e^{-ikx} dx \\ \hat{u}_t &= [u_x e^{-ikx}]_0^\infty + ik [u_x e^{-ikx}]_0^\infty - ik(-ik)\hat{u} \\ \hat{u}_t + k^2 \hat{u} &= [u_x e^{-ikx}]_0^\infty + ik [u_x e^{-ikx}]_0^\infty \\ \hat{u}_t + k^2 \hat{u} &= -g_1(t) - ik g_0(t) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Με κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα, $e^{k^2 t}$, λύνουμε την ΣΔΕ και παίρνουμε την γενική σχέση

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(0, t) e^{-k^2 t} - \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} (g_1(\tau) + ik g_0(\tau)) d\tau. \quad (1.30)$$

Λύση ως ολοκληρωτική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο

Με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$2\pi u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \hat{u}(0, t) e^{ikx-k^2 t} dk - \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} (g_1(\tau) + ik g_0(\tau)) d\tau dk. \quad (1.31)$$

Οι προς ολοκλήρωση ποσότητες της (1.31) είναι αναλυτικές για $\Im\{k\} > 0$, $\Re\{-k^2\} < 0$, επομένως, το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1.31) μπορεί να υπολογιστεί παραμορφώνοντας την πραγματική ευθεία στο σύνορο D^+ , όπου $D^+ = \{\Im\{k\} > 0, \Re\{-k^2\} > 0\}$. Γράφουμε λοιπόν,

$$2\pi u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \hat{u}(0, t) e^{ikx-k^2 t} dk - \int_{\partial D^+} e^{ikx-k^2 t} \int_0^t e^{k^2 \tau} (g_1(\tau) + ik g_0(\tau)) d\tau dk. \quad (1.32)$$

Περισσότερες λεπτομέρειες για την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης στο μιγαδικό επίπεδο δίνονται στα επόμενα κεφάλαια όπου ο EM θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση εξισώσεων εξέλιξης.

Απαλοιφή άγνωστων συνοριακών συνθηκών μέσω της γενικής σχέσης

Παρατηρούμε ότι η (1.32) περιέχει και τις δύο συνοριακές συνθήκες. Υπάρχει συνεπώς εξάρτηση ως προς μία άγνωστη μεταβλητή (άγνωστη συνοριακή συνθήκη), η οποία απαλείφεται χρησιμοποιώντας την γενική σχέση. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε τον μετασχηματισμό $\kappa = -k$ και γράφουμε την γενική σχέση για $\kappa = k, -k$

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(0, t)e^{-k^2 t} - \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} (g_1(\tau) + ikg_0(\tau)) d\tau, \quad (1.33)$$

$$\hat{u}(-k, t) = \hat{u}(0, t)e^{-k^2 t} - \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} (g_1(\tau) - ikg_0(\tau)) d\tau, \quad (1.34)$$

όπου συνδυάζοντας τις (1.34), (1.33) προκύπτει η άγνωστη συνοριακή συνθήκη ως συνδυασμός της λύσης $\hat{u}(k, t)$ και της γνωστής συνοριακής συνθήκης. Περισσότερες λεπτομέρειες θα δοθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού βρίσκει κανείς τους μετασχηματισμούς ημιτόνου/συνημιτόνου ως οριακές περιπτώσεις [17].

1.3.2 Επίλυση σε ημιάπειρη ευθεία (μετασχηματισμός ημιτόνου/συνημιτόνου)

Έστω $x \geq 0$, και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad (1.35)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1.36)$$

Ένας διαδεδομένος τρόπος επίλυσης της (1.26) στην ημιάπειρη ευθεία είναι με την μέθοδο των μετασχηματισμών ημιτόνου/συνημιτόνου (sine/cosine transforms). Για παράδειγμα για την συνοριακή συνθήκη $u(0, t) = g_0(t)$, ο μετασχηματισμός ημιτόνου (sine-transform) χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος. Για μία συνάρτηση $f(x)$, ορίζουμε τον ευθύ και αντίστροφο μετασχηματισμό ημιτόνου ως

$$\hat{f}_s(k) = \int_0^\infty \sin(kx) f(x) dx, \quad (1.37)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \hat{f}_s(k) dk. \quad (1.38)$$

Αντικαθιστώντας την

$$\hat{u}_s(k, t) = \int_0^\infty \sin(kx) u(x, t) dx$$

στην (1.26) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_s(k, t) = \int_0^\infty \sin(kx) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx. \quad (1.39)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.35), (1.36), προκύπτει

$$\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t}(k, t) + k^2 \hat{u}_s(k, t) = k g_0(t). \quad (1.40)$$

Η συνήθης διαφορική εξίσωση (1.40) επιλύεται με χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $e^{k^2 t}$ και προκύπτει

$$\hat{u}_s(k, t) = \hat{u}_s(k, 0)e^{-k^2 t} + k \int_0^t e^{k^2(\tau-t)} g_0(\tau) d\tau. \quad (1.41)$$

Η τελική λύση δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό ημιτόνου

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) e^{-k^2 t} \left[\hat{u}_s(k, 0) + k \int_0^t e^{k^2(\tau-t)} g_0(\tau) d\tau \right] dk. \quad (1.42)$$

Σημειώνεται ότι ενώ η (1.42) ικανοποιεί την (1.26) και την αρχική συνθήκη, δεν ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη για $x = 0$, εάν $g_0(t) \neq 0$. Συνεπώς η (1.42) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $x = 0$ και αυτό οδηγεί σε δυσκολίες στον αριθμητικό υπολογισμό της λύσης. Το παραπάνω παράδειγμα περιγράφεται με περισσότερες λεπτομέρειες στην αναφορά [17].

Επιπλέον, αναφέρουμε ότι για συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann, ο μετασχηματισμός ημιτόνου δεν μπορεί να εφαρμοστεί, λόγω της άγνωστης συνθήκης $u(0, t)$. Σε αυτή την περίπτωση η λύση δίνεται μέσω του μετασχηματισμού συνημιτόνου

$$\hat{f}_c(k) = \int_0^\infty \cos(kx)f(x)dx, \quad (1.43)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(kx)\hat{f}_c(k)dk. \quad (1.44)$$

Όμοια με τη μέθοδο του μετασχηματισμού ημιτόνου, η τελική λύση δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $x = 0$.

1.3.3 Επίλυση για πεπερασμένο διάστημα (μέθοδος χωρισμού μεταβλητών)

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα σε πεπερασμένο διάστημα, όπου $0 \leq x \leq L$. Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών αποτελεί κλασική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών. Αναζητούμε λύσεις της (1.26) της μορφής

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

και η (1.26) γίνεται

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}X}{X} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}T}{T}. \quad (1.45)$$

Το αριστερό και το δεξί μέλος της (1.46) εξαρτώνται από τις μεταβλητές x και t αντίστοιχα και επομένως για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}X}{X} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}T}{T} = -k^2, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (1.46)$$

Η μερική διαφορική εξίσωση ανάγεται σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0 \quad (1.47)$$

$$\frac{dT}{dt} + k^2T = 0 \quad (1.48)$$

Με την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών η (1.47) δίνει τις ιδιοτιμές, k_n , και ιδιοσυναρτήσεις, X_n , του προβλήματος. Τελικά η λύση εκφράζεται ως άπειρο άθροισμα της μορφής

$$u(x, t) = \sum_n A_n X_n(x) e^{-k_n^2 t}, \quad (1.49)$$

όπου οι συντελεστές A_n δίνονται με εφαρμογή της αρχικής συνθήκης. Για συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Neumann η επίλυση του προβλήματος είναι σχετικά απλή, ενώ για μικτές συνοριακές συνθήκες (Robin) η εξίσωση που δίνει τις ιδιοτιμές πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά. Στον πίνακα 1.1 παρουσιάζεται μία σύγκριση των ιδιοτιμών της (1.26) για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στο άκρο $x = L$.

Επομένως, το ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις (1.49) εξαρτάται από την συνοριακή συνθήκη και άρα, η διαδικασία της επίλυσης των (1.47), (1.48) επαναλαμβάνεται κάθε φορά για διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Επίσης, όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, η λύση δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνορο.

Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας θα εφαρμόσουμε τον ΕΜ για να επιλύσουμε εξισώσεις εξέλιξης σε πεπερασμένο διάστημα με μη-ομογενή, σταθερό όρο πηγής. Θα δείξουμε πως η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος είναι γενική και δεν εξαρτάται από την συνοριακή συνθήκη, ενώ η λύση δίνεται ως ολοκληρωτική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο που μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα υπολοίπων (Residue theorem).

	Dirichlet	Neumann	Robin
Συνοριακές συνθήκες ($x = 0$)	$u = 0$	$u = 0$	$u = 0$
Συνοριακές συνθήκες ($x = L$)	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$u = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$
Ιδιοτιμές k_n	$k_n = \frac{n\pi}{L}$	$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$	$\tan(k_n L) = \mu k_n$

Πίνακας 1.1: Τυπικές συνοριακές συνθήκες και υπολογισμός των ιδιοτιμών της $X'' + k^2 X = 0$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 2

Εξίσωση διάχυσης με μη ομογενή σταθερό όρο

Η εξίσωση διάχυσης αποτελεί μία από τις πιο γνωστές μερικές διαφορικές εξισώσεις με τεράστιο εύρος εφαρμογών. Εισήχθη από τον Joseph Fourier το 1822, ο οποίος δείχνοντας ότι η ροή θερμότητας εξαρτάται από την μεταβολή της θερμοκρασίας

$$\mathbf{q} = -k_c \nabla T,$$

κατέληξε στην γνωστή εξίσωση διάχυσης θερμότητας [18]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

όπου k_c η θερμική αγωγιμότητα και α η σταθερά θερμικής διάχυσης. Αργότερα χρησιμοποιήθηκε από τον Fick (1855) για να περιγράψει την διάδοση διαλυτών ουσιών μέσα σε ρευστά [19], ενώ το 1905 χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή της τυχαίας κίνησης των μορίων (κίνηση Brown) από τον Einstein [20].

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης σε μία χρονική και μία χωρική διάσταση (t, x) με σταθερό όρο πηγής. Αρχικά δείχνουμε την εφαρμογή του ενοποιημένου μετασχηματισμού σε ένα γενικό πρόβλημα (§2.1) και στη συνέχεια παρουσιάζουμε εφαρμογές αυτής σε προβλήματα γεωπονίας, πιο συγκεκριμένα την στράγγιση και την διήθηση νερού στο έδαφος (§2.3).

2.1 Επίλυση με τον EM

Δίνεται η

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x, t) \\ u(0, t), u(L, t) &: \text{γνωστές.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Η εξίσωση (2.1) θα λυθεί με την μέθοδο του ενοποιημένου μετασχηματισμού στο πεπερασμένο διάστημα $x \in [0, L], t \in [0, T]$. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην (2.1) και γράφουμε

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= \int_0^L u_{xx} e^{-ikx} dx + f(x, t) \\ \hat{u}_t &= [u_x e^{-ikx}]_0^L + ik \int_0^L u_x e^{-ikx} dx + \hat{f}(k, t) \\ \hat{u}_t &= [u_x e^{-ikx}]_0^L + ik [u_x e^{-ikx}]_0^L - ik(-ik)\hat{u} + \hat{f}(k, t) \\ \hat{u}_t + k^2 \hat{u} &= [u_x e^{-ikx}]_0^L + ik [u_x e^{-ikx}]_0^L + \hat{f}(k, t) \\ \hat{u}_t + k^2 \hat{u} &= h_1(t) e^{-ikL} - g_1(t) + ik h_0(t) e^{-ikL} - ik g_0(t) + \hat{f}(k, t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Λύνουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και προκύπτει η γενική σχέση

$$e^{k^2 t} \hat{u}(k, t) = v(k, t) + \tilde{h}_1(k^2, t) e^{-ikL} - \tilde{g}_1(k^2, t) + ik\tilde{h}_0(k^2, t) e^{-ikL} - ik\tilde{g}_0(k^2, t), \quad (2.3)$$

όπου

$$v(k, t) = \hat{u}(k, 0) + \tilde{f}(k^2, t), \quad (2.4)$$

και

$$\tilde{f}(k^2, t) = \int_0^t e^{k^2 \tau} \hat{f}(k, \tau) d\tau.$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx - k^2 t} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} h_1(\tau) d\tau + ik \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} h_0(\tau) d\tau \right) e^{ik(x-L)} dk \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau + ik \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} g_0(\tau) d\tau \right) e^{ikx} dk, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Γνωρίζουμε ότι για $\Im[k] < 0, \Re[-k^2] \leq 0$, οι προς ολοκλήρωση ποσότητες του δεύτερου ολοκληρώματος της δεξιάς πλευράς της (2.5) είναι αναλυτικές και φραγμένες, ενώ για το τρίτο ολοκλήρωμα για $\Im[k] > 0, \Re[-k^2] \leq 0$. Για $\Re[-k^2] \geq 0 \Rightarrow \cos(2\theta) \leq 0 \Rightarrow \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$. Τα δύο αυτά χωρία του άνω και κάτω μιγαδικού επιπέδου, στα οποία οι προς ολοκλήρωση ποσότητες δεν είναι αναλυτικές και φραγμένες, απεικονίζονται γραμμοσκιασμένα στο σχήμα 2.1.

Παραμορφώνοντας την πραγματική ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο (σχήμα 2.1) προκύπτει ότι

$$2\pi \hat{u}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx - k^2 t} dk - \int_{\partial D^-} \left(\tilde{h}_1(k^2, t) + ik\tilde{h}_0(k^2, t) \right) e^{ik(x-L) - k^2 t} dk - \int_{\partial D^+} \left(\tilde{g}_1(k^2, t) + ik\tilde{g}_0(k^2, t) \right) e^{ikx - k^2 t} dk. \quad (2.6)$$

Για την εύρεση των άγνωστων συνοριακών συνθηκών, θα χρησιμοποιήσουμε την γενική σχέση (2.3). Ο μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτο το k^2 , είναι $k_1 = -k$ και άρα γράφουμε

$$e^{k^2 t} \hat{u}(k, t) = v(k, t) + \tilde{h}_1(k^2, t) e^{-ikL} - \tilde{g}_1(k^2, t) + ik\tilde{h}_0(k^2, t) e^{-ikL} - ik\tilde{g}_0(k^2, t) \quad (2.7)$$

$$e^{k^2 t} \hat{u}(-k, t) = v(-k, t) + \tilde{h}_1(k^2, t) e^{ikL} - \tilde{g}_1(k^2, t) - ik\tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikL} + ik\tilde{g}_0(k^2, t). \quad (2.8)$$

Έστω ότι γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα (Dirichlet), αρκεί να λύσουμε ως προς $\tilde{g}_1, \tilde{h}_1$, δηλαδή θέλουμε να επιλύσουμε το σύστημα

$$\tilde{h}_1(k^2, t) e^{-ikL} - \tilde{g}_1(k^2, t) = e^{k^2 t} \hat{u}(k, t) - ik\tilde{h}_0(k^2, t) e^{-ikL} + ik\tilde{g}_0(k^2, t) - v(k, t) \quad (2.9)$$

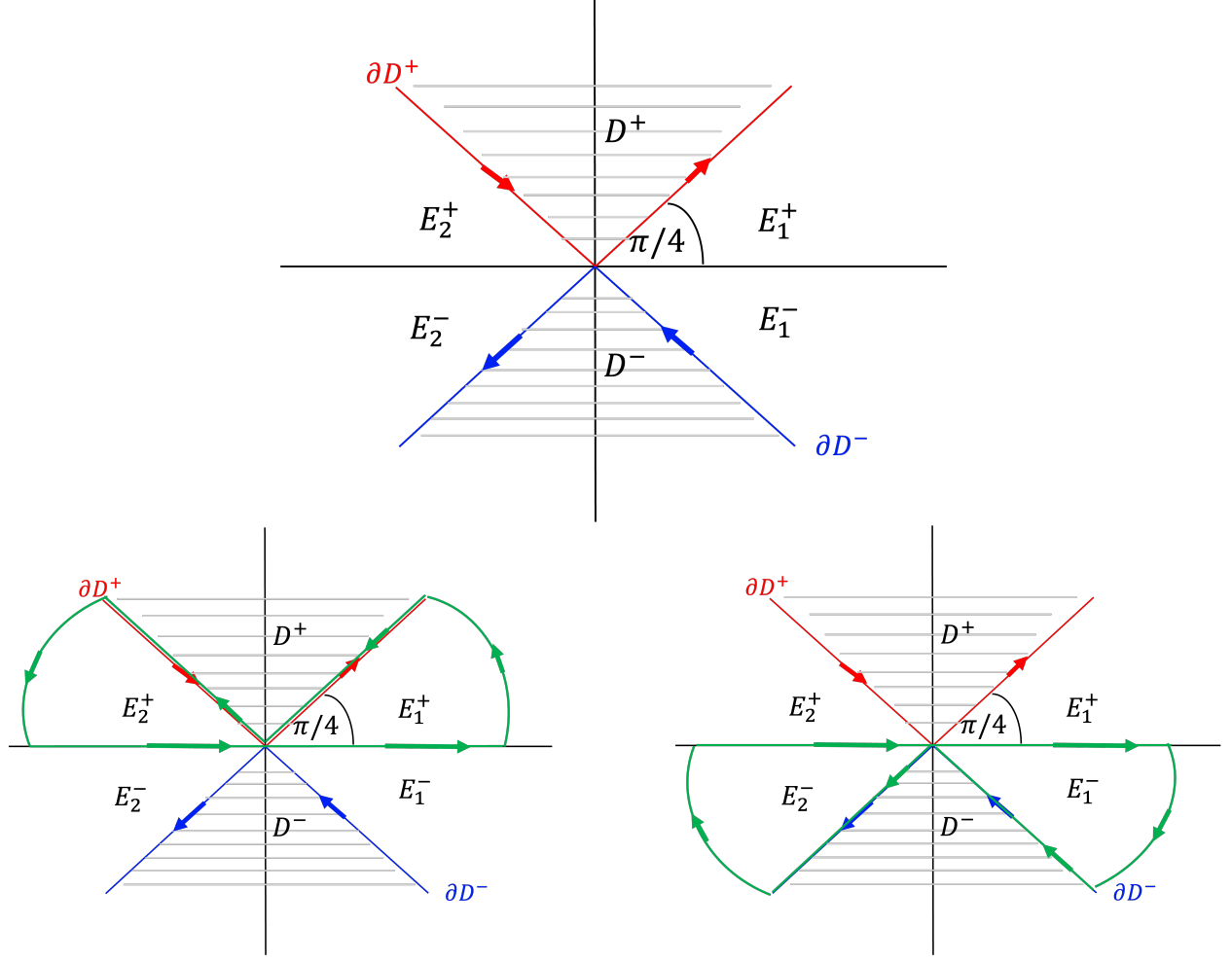
$$\tilde{h}_1(k^2, t) e^{ikL} - \tilde{g}_1(k^2, t) = e^{k^2 t} \hat{u}(-k, t) + ik\tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikL} - ik\tilde{g}_0(k^2, t) - v(-k, t). \quad (2.10)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2.9), (2.10)

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(k^2, t) &= e^{k^2 t} \frac{\hat{u}(k, t) - \hat{u}(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - \frac{v(k, t) - v(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - ik \frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) + \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) \\ \tilde{g}_1(k^2, t) &= \tilde{h}_1(k^2, t) e^{-ikL} - e^{k^2 t} \hat{u}(k, t) + ik\tilde{h}_0(k^2, t) e^{-ikL} - ik\tilde{g}_0(k^2, t) + v(k, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Πιο αναλυτικά υπολογίζουμε την $\tilde{g}_1$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(k^2, t) &= e^{k^2 t} \frac{-\hat{u}(-k, t) e^{-ikL} + \hat{u}(k, t) e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) + ik\tilde{g}_0(k^2, t) \left(\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) \\ &\quad + \frac{-v(k, t) e^{ikL} + v(-k, t) e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \end{aligned}$$



Σχήμα 2.1: Σύνορα των χωρίων στα οποία οι προς ολοκλήρωση ποσότητες του δεύτερου (∂D^-) και τρίτου (∂D^+) ολοκληρώματος της δεξιάς πλευράς της (2.3) είναι αναλυτικές. Οι πράσινες γραμμές αντιστοιχούν στην διαδρομή ολοκλήρωσης εντός του χωρίου που οι προς ολοκλήρωση ποσότητες είναι αναλυτικές.

Με αντικατάσταση στην (2.6) προκύπτει

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{u}(x,t) = & \int_{-\infty}^{\infty} v(k,t)e^{ikx-k^2t}dk - \int_{\partial D^-} ik\tilde{h}_0(k^2,t)e^{ik(x-L)-k^2t}dk - \int_{\partial D^+} ik\tilde{g}_0(k^2,t)e^{ikx-k^2t}dk \\
& - \int_{\partial D^+} \frac{-\hat{u}(-k,t)e^{-ikL} + \hat{u}(k,t)e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ikx}dk - \int_{\partial D^-} \frac{\hat{u}(k,t) - \hat{u}(-k,t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ik(x-L)}dk \\
& - \int_{\partial D^-} \left(-\frac{v(k,t) - v(-k,t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - ik\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2,t) + \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{g}_0(k^2,t) \right) e^{ik(x-L)-k^2t}dk \\
& - \int_{\partial D^+} \left(-\frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2,t) + ik\tilde{g}_0(k^2,t) \left(\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) + \frac{-v(k,t)e^{ikL} + v(-k,t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{ikx-k^2t}dk.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι οι όροι που περιέχουν $\hat{u}(k,t)$, $\hat{u}(-k,t)$, εξαφανίζονται. Για $\Im[k] \geq 0$, αν $k \rightarrow \infty$,

$e^{-ikL} \rightarrow \infty$ και άρα

$$\begin{aligned} \frac{-\hat{u}(-k, t)e^{-ikL} + \hat{u}(k, t)e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} &\rightarrow -\hat{u}(-k, t) + \frac{e^{ikL}\hat{u}(k, t)}{e^{-ikL}} \\ -\hat{u}(-k, t) + \frac{\hat{u}(k, t)}{e^{-ikL}} &= -\int_0^L u(x, t)e^{ikx} dx + e^{ikL} \int_0^L u(x, t)e^{ik(L-x)} dx. \end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t)e^{ikx} dx &\sim \frac{u(L, t)e^{ikL} - u(0, t)}{ik} \rightarrow 0, \Im[k] \rightarrow \infty \\ \int_0^L u(x, t)e^{ik(L-x)} dx &\sim -e^{ikL} \frac{u(L, t)e^{ikL} - u(0, t)}{ik} \rightarrow 0, \Im[k] \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για $\Im[k] \leq 0$, αν $k \rightarrow \infty$, $e^{ikL} \rightarrow \infty$ και άρα

$$\begin{aligned} \frac{-\hat{u}(-k, t) + \hat{u}(k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} &\rightarrow -e^{-ikL}\hat{u}(-k, t) + \frac{\hat{u}(k, t)}{e^{ikL}} \\ -e^{-ikL}\hat{u}(-k, t) + \frac{\hat{u}(k, t)}{e^{ikL}} &= -\int_0^L u(x, t)e^{-ik(L-x)} dx + e^{-ikL} \int_0^L u(x, t)e^{ikx} dx. \end{aligned}$$

Όμοια γράφουμε

$$-\int_0^L u(x, t)e^{-ik(L-x)} dx + e^{-ikL} \int_0^L u(x, t)e^{ikx} dx \sim \frac{e^{-ikL}}{ik} \rightarrow 0, \Im[k] \rightarrow -\infty.$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας το λήμμα του Jordan προκύπτει

$$-\int_{\partial D^+} \frac{-\hat{u}(-k, t)e^{-ikL} + \hat{u}(k, t)e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ikx} dk - \int_{\partial D^-} \frac{\hat{u}(k, t) - \hat{u}(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ik(x-L)} dk = 0$$

Η (2.12) απλοποιείται ως

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikx-k^2t} dk - \int_{\partial D^-} ik\tilde{h}_0(k^2, t)e^{ik(x-L)-k^2t} dk - \int_{\partial D^+} ik\tilde{g}_0(k^2, t)e^{ikx-k^2t} dk \\ &\quad - \int_{\partial D^-} \left(-\frac{v(k, t) - v(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - ik\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2, t) + \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{g}_0(k^2, t) \right) e^{ik(x-L)-k^2t} dk \\ &\quad - \int_{\partial D^+} \left(-\frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2, t) + ik\tilde{g}_0(k^2, t) \left(\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) + \frac{-v(k, t)e^{ikL} + v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{ikx-k^2t} dk. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Κάνοντας πράξεις οδηγούμαστε στην τελική μορφή

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(v(k, t)\frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v(-k, t)\frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ike^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{g}_0(k^2, t)e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ike^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{g}_0(k^2, t)e^{ikx-k^2t} dk \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2, t)e^{ikx-k^2t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2, t)e^{ikx-k^2t} dk. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Η επαλήθευση της (2.14) δίνεται στο παράρτημα Α'1.

2.2 Αριθμητικός υπολογισμός της αναλυτικής λύσης

Σε αυτό το σημείο, διαλέγουμε αυθαίρετες αρχικές και συνοριακές συνθήκες και δίνουμε μία αναλυτική/αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Γνωρίζουμε ότι

$$v(k, t) = \hat{u}(k, 0) + \tilde{f}(k^2, t), \quad (2.15)$$

$$\tilde{f}(k^2, t) = \int_0^t e^{k^2 \tau} \hat{f}(k, \tau) d\tau,$$

και

$$\tilde{g}_j(k^2, t) = \int_0^t e^{k^2 \tau} u(0, \tau) d\tau,$$

$$\tilde{h}_j(k^2, t) = \int_0^t e^{k^2 \tau} u(L, \tau) d\tau.$$

Έστω οι συνοριακές συνθήκες

$$u(x, 0) = \sin(\pi x/L)$$

$$g_0(t) = \sin(t)$$

$$h_0(t) = 1 - e^{-t}$$

$$f(x, t) = q$$

Οι μετασχηματισμένες ποσότητες δίνονται λοιπόν ως:

$$\tilde{g}_0(k^2, t) = \frac{e^{k^2 t} (k^2 \sin(t) - \cos(t)) + 1}{k^4 + 1}, \quad (2.16)$$

$$\tilde{h}_0(k^2, t) = \frac{e^{k^2 t} - 1}{k^2} - \frac{e^{k^2 t} e^{-t} - 1}{k^2 - 1} \quad (2.17)$$

$$\hat{u}(k, 0) = -\frac{\pi}{L} \frac{(1 + e^{-ikL})}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}} \quad (2.18)$$

$$\tilde{f}(k^2, t) = -\frac{iqe^{-ikL} (-1 + e^{ikL}) (e^{k^2 t} - 1)}{k^3} \quad (2.19)$$

$$v(k, t) = -\frac{\pi L (1 + e^{-ikL})}{k^2 L^2 - \pi^2} - \frac{iqe^{-ikL} (-1 + e^{ikL}) (e^{k^2 t} - 1)}{k^3} \quad (2.20)$$

$$v(-k, t) = -\frac{\pi L (1 + e^{ikL})}{k^2 L^2 - \pi^2} + \frac{iqe^{ikL} (-1 + e^{-ikL}) (e^{k^2 t} - 1)}{k^3} \quad (2.21)$$

Για να απλοποιηθεί η αριθμητική επίλυση, παραμορφώνουμε όλα τα ολοκληρώματα στο σύνορο ∂D^+ . Γνωρίζουμε ότι για $k_1 = -k$, $\partial D^- \Rightarrow \partial D^+$, συνεπώς,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx - k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(v(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2 t} dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{-2ik e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{-ikx - k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx - k^2 t} dk \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{-2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{-ikx - k^2 t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx - k^2 t} dk, \end{aligned} \quad (2.22)$$

και άρα η λύση γράφεται ως

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx} e^{-k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(v(k, t) \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} e^{ikL} + v(-k, t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right) e^{-k^2 t} dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{-k^2 t} dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(kx)}{\sin(kL)} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{-k^2 t} dk,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

με τις μετασχηματισμένες συνοριακές και αρχικές συνθήκες (2.16)–(2.21). Γράφουμε την λύση σε συμπαγή μορφή

$$u(x, t) = I_{v_1} + I_{v_2} + I_{\tilde{g}_0} + I_{\tilde{h}_0}, \tag{2.24}$$

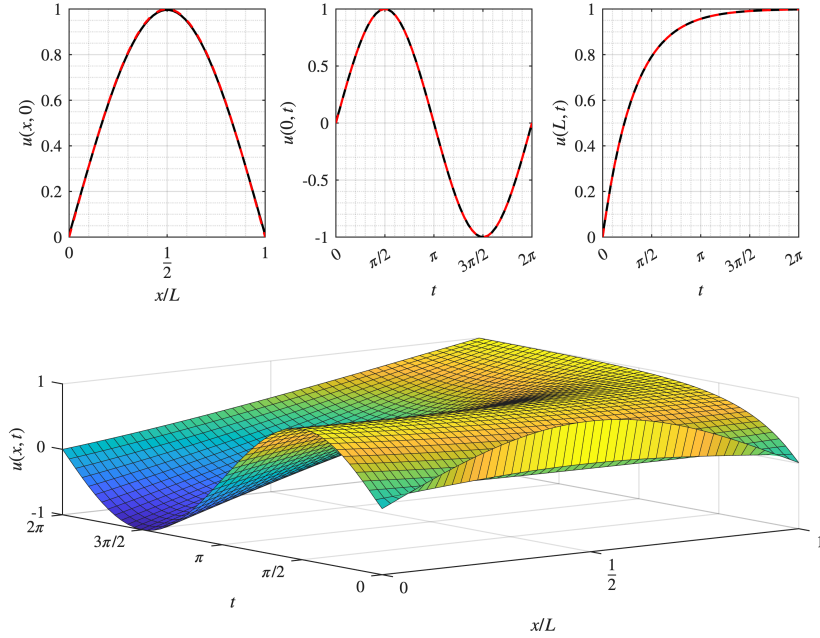
όπου

$$\begin{aligned}
I_{v_1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx} e^{-k^2 t} dk \\
I_{v_2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(v(k, t) \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} e^{ikL} + v(-k, t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right) e^{-k^2 t} dk \\
I_{\tilde{g}_0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \left(\frac{e^{k^2 t} (k^2 \sin(t) - \cos(t)) + 1}{k^4 + 1} \right) e^{-k^2 t} dk \\
I_{\tilde{h}_0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(kx)}{\sin(kL)} \left(\frac{e^{k^2 t} - 1}{k^2} - \frac{e^{k^2 t} e^{-t} - 1}{k^2 - 1} \right) e^{-k^2 t} dk.
\end{aligned}$$

Τα ολοκληρώματα I_{v_1}, I_{v_2} εξαρτώνται από την αρχική συνθήκη και τον μη-ομογενή όρο, ενώ τα $I_{\tilde{g}_0}, I_{\tilde{h}_0}$ από τις συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα. Μετά από πράξεις που δίνονται στο παράρτημα Α'2 η λύση δίνεται ως

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \sin(\pi x/L) + qt \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{\pi/L}{k^2 - \pi^2/L^2} e^{-k^2 t} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} - (1 + e^{-ikL}) \frac{\sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right) dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{iq}{k^3} e^{-k^2 t} \left(-e^{ikx} - e^{ik(L-x)} - (1 - e^{ikL}) \frac{\sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right) dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{2ike^{-k^2 t}}{\sin(kL)} \left(\frac{\sin(k(L-x))}{k^4 + 1} + \frac{\sin(kx)}{k^2(k^2 - 1)} \right) dk.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Τα σχήματα 2.2, 2.3 απεικονίζουν μία σύγκριση μεταξύ της λύσης και των αρχικών και οριακών συνθηκών (άνω διαγράμματα) καθώς και την λύση ως συνάρτηση της χρονικής (t) και χωρικής μεταβλητής (x) χωρίς και με όρο πηγής αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2: Λύση ομογενούς εξίσωσης διάχυσης $u(x, t)$ για $q = 0$. Τα διαγράμματα της άνω σειράς αντιστοιχούν στην επαλήθευση της αρχικής συνθήκης και των 2 συνοριακών συνθηκών. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η λύση $u(x, t)$ που δίνεται από την (2.25), ενώ με τεθλασμένη κόκκινη γραμμή η συνοριακή συνθήκη.

2.3 Εφαρμογές στην γεωπονία

Η κίνηση του νερού μεταξύ δύο στραγγιστηρίων σε ένα ομογενές και ισότροπο έδαφος μοντελοποιείται με τη χρήση της εξίσωσης Boussinesq. Έστω ότι $h(x, t)$ συμβολίζει το ύψος του υδροφόρου ορίζοντα από το οριζόντιο επίπεδο τη χρονική στιγμή t και σε απόσταση x ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{S}{K} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{r + q_0}{K}, \quad (2.26)$$

όπου S το ενεργό πορώδες του εδάφους (το πηλίκο του όγκου που στη φάση του κορεσμού μπορεί να κινηθεί στα διάκενα του μέσου εξαιτίας δυνάμεων βαρύτητας προς το συνολικό όγκο), r είναι η τροφοδοσία από βροχόπτωση ή άρδευση, K η υδραυλική αγωγιμότητα, L είναι η απόσταση μεταξύ των δύο στραγγιστηρίων και q_0 είναι ο ομοιόμορφος ανοδικός ρυθμός τροφοδοσίας ανά μονάδα επιφάνειας μέσω της ημιπερατής βάσης. Για αδιαπέρατη βάση ισχύει $q_0 = 0$. Το $H = h^2$ ικανοποιεί τη γραμμικοποιημένη εξίσωση [1]:

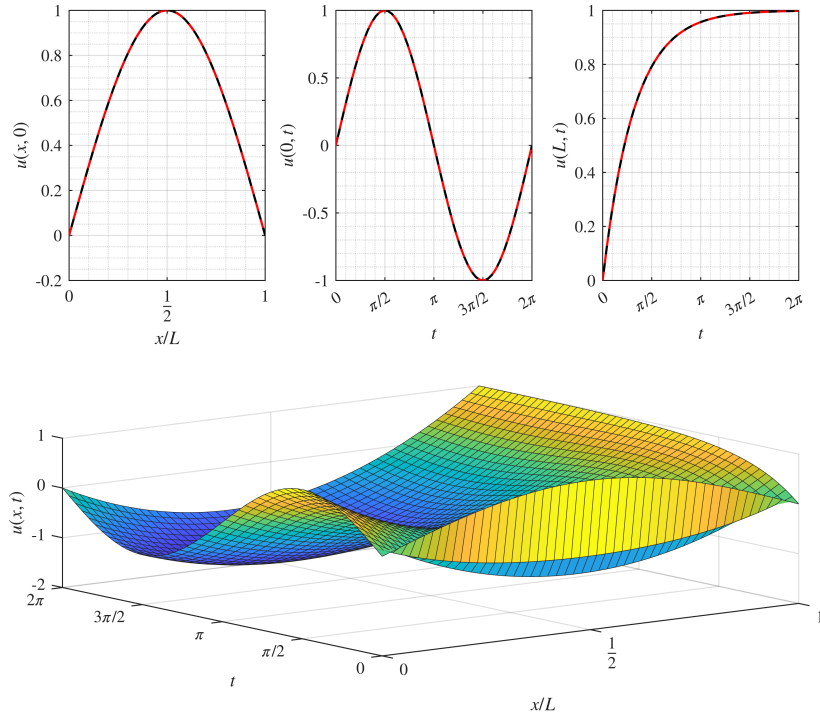
$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{2R}{K}, \quad \text{για } 0 < x < L, t > 0, \quad (2.27)$$

όπου $R = r + q_0$, $\alpha = K\bar{h}/S$ είναι μία θετική σταθερά και $\bar{h}$ ο σταθμισμένος μέσος όρος της στήλης νερού.

Η εξίσωση (2.27) εξετάζεται μαζί με την αρχική συνθήκη

$$H(x, 0) = D + H_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (2.28)$$

η οποία περιγράφει το αρχικό ύψος και το αρχικό σχήμα του υδροφόρου ορίζοντα, όπου $D = d^2$, με $d > 0$ να είναι η απόσταση μεταξύ του επιπέδου των στραγγιστηρίων και του αδιαπέρατου στρώματος (βλ. Σχήμα 2.4 για μια απεικόνιση). Το αρχικό προφίλ H_0 θεωρείται γνωστό και μπορεί να έχει τη μορφή μηδενικής, σταθερής ή τετραγωνικής συνάρτησης του x . Οι περιπτώσεις αυτές αντιστοιχούν σε έναν αρχικό υδροφόρο ορίζοντα που βρίσκεται στο επίπεδο των στραγγιστηρίων, είναι παράλληλος και πάνω από αυτό, ή έχει παραβολικό προφίλ τη



Σχήμα 2.3: Λύση μη ομογενούς εξίσωσης διάχυσης $u(x, t)$ για $q = -10$. Τα διαγράμματα της άνω σειράς αντιστοιχούν στην επαλήθευση της αρχικής συνθήκης και των 2 συνοριακών συνθηκών. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η λύση $u(x, t)$ που δίνεται από την (2.25), ενώ με τεθλασμένη κόκκινη γραμμή η συνοριακή συνθήκη.

χρονική στιγμή $t = 0$. Σε όλες τις περιπτώσεις, το αρχικό ύψος του υδροφόρου ορίζοντα στο μέσο μεταξύ των στραγγιστηρίων δίνεται από $f_0 = h(L/2, 0) - d$ [11].

Στις θέσεις των στραγγιστηρίων επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$H(0, t) = H(L, t) = D, \quad t > 0, \quad (2.29)$$

Απλοποιούμε το πρόβλημα θεωρώντας την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής

$$u(x, t) = H(x, t) - D,$$

και συνεπώς η εξίσωση (2.27) γίνεται

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q, \quad \text{για } 0 < x < L, t > 0, \quad (2.30)$$

όπου

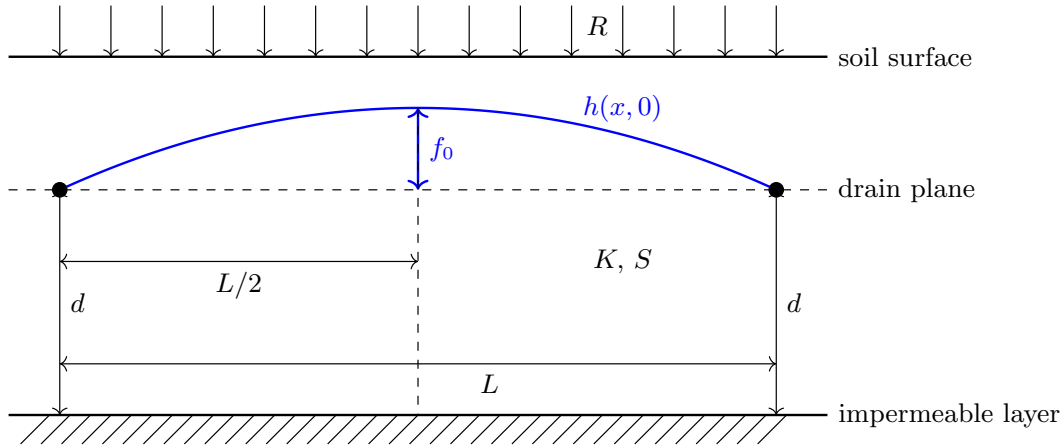
$$q = \frac{2\alpha R}{K}. \quad (2.31)$$

Οι αντίστοιχες αρχικές και συνοριακές συνθήκες γράφονται ως

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (2.32)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.33)$$

Το παραπάνω φυσικό πρόβλημα αντιστοιχεί στην εργασία των [1], οι οποίοι έδωσαν μία λύση σε ανάπτυγμα σειρών Fourier. Στη συνέχεια, λύνουμε το μη ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (2.30), (2.32), (2.33) με την μέθοδο του Φωκά. Η επίλυση της (2.30) με $q = 0$ δόθηκε από τους Καλημέρη & Μινδρινό [11].



Σχήμα 2.4: Απεικόνιση του προβλήματος στράγγισης με όρο πηγής.

Επίλυση για διαφορετικές αρχικές συνθήκες

Ακολουθώντας την παραπάνω μεθοδολογία προκύπτει

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx - \alpha k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{ikL} \sin(kx) v(k, t) + v(-k, t) \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} e^{-\alpha k^2 t} dk. \quad (2.34)$$

Στη συνέχεια, η εξίσωση (2.34) επιλύεται για μία παραβολική και μία σταθερή αρχική συνθήκη. Οι προκύπτουσες λύσεις αποτελούνται από ένα αναλυτικό μέρος και ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, το οποίο θα υπολογιστεί αριθμητικά. Για τη διευκόλυνση της αριθμητικής ολοκλήρωσης θα παραμορφώσουμε το σύνορο ∂D^+ σε μία καμπύλη, C^+ , η οποία διέρχεται μεταξύ της πραγματικής ευθείας και του ∂D^+ . Η καμπύλη C^+ παραμετροποιείται ως

$$C^+ := \left\{ k_1 = r e^{7i\pi/8}, r > 1 \right\} \cup \left\{ k_2 = r e^{i\pi/8}, r > 1 \right\} \cup \left\{ k_3 = s + e^{7i\pi/8}, s \in [0, 2 \cos(i\pi/8)] \right\}, \quad (2.35)$$

και παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5.

2.3.1 Παραβολική αρχική συνθήκη

Έστω

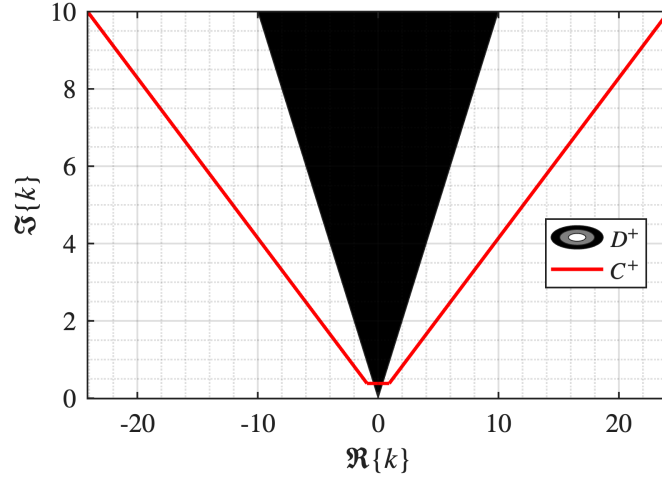
$$H_0(x) = 4f_0(f_0 + 2d) \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad (2.36)$$

ώστε $H_0(0) = H_0(L) = 0$ και από την Εξ. (2.28) λαμβάνουμε $H(L/2, 0) = D + H_0(L/2) = (d + f_0)^2$. Από την Εξ. (2.20) προκύπτει

$$v(k, t) = \frac{(iq + \alpha F_0(-2i - kL))}{\alpha k^3} + \frac{e^{-ikL}(\alpha F_0(-kL + 2i) - iq)}{\alpha k^3} - \frac{iqe^{\alpha k^2 t}}{\alpha k^3} + \frac{iqe^{-ikL}e^{\alpha k^2 t}}{\alpha k^3},$$

όπου

$$F_0 = 4f_0(f_0 + 2d)L^{-2}. \quad (2.37)$$



Σχήμα 2.5: Αναπαράσταση της καμπύλης C^+ της (2.35) στο μιγαδικό επίπεδο (κόκκινη γραμμή). Η μαύρη περιοχή αντιστοιχεί στο χωρίο D^+ .

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θέτουμε

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t), \\ u_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx - \alpha k^2 t} dk, \\ u_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{ikL} \sin(kx) v(k, t) + v(-k, t) \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} e^{-\alpha k^2 t} dk. \end{aligned}$$

Για τα u_1, u_2 βρίσκουμε

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iq - \alpha F_0 (2i + kL)}{\alpha k^3} (e^{ikx} + e^{ik(L-x)}) e^{-\alpha k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iq}{\alpha k^3} (e^{ikx} + e^{ik(L-x)}) dk. \quad (2.38)$$

Για να παραμορφώσουμε την πραγματική ευθεία στην καμπύλη C^+ πρέπει να λάβουμε υπόψη τη συνεισφορά του πόλου στο $k = 0$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα υπολοίπων. Τότε προκύπτει ότι

$$u_1(x, t) = F_0 (Lx - x^2) + (q - 2\alpha F_0)t + \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{iq - \alpha F_0 (2i + kL)}{\alpha k^3} (e^{ikx} + e^{ik(L-x)}) e^{-\alpha k^2 t} dk, \quad (2.39)$$

όπου, χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Jordan, λαμβάνουμε

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{iq}{\alpha k^3} (e^{ikx} + e^{ik(L-x)}) dk = 0.$$

Για το $u_2(x, t)$ οι συνεισφορές των πόλων των δύο ολοκληρωμάτων αλληλοαναιρούνται και συνεπώς

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{(iq - 2i\alpha F_0) (e^{ikL} - 1) - \alpha F_0 kL (e^{ikL} + 1) \sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\alpha k^3 \sin(kL)} e^{-\alpha k^2 t} dk. \quad (2.40)$$

Η λύση δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F_0 (Lx - x^2) + (q - 2\alpha F_0)t + \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{iq - \alpha F_0 (2i + kL)}{\alpha k^3} (e^{ikx} + e^{ik(L-x)}) e^{-\alpha k^2 t} dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{(iq - 2i\alpha F_0) (e^{ikL} - 1) - \alpha F_0 kL (e^{ikL} + 1) \sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\alpha k^3 \sin(kL)} e^{-\alpha k^2 t} dk, \end{aligned} \quad (2.41)$$

όπου οι παράμετροι q, F_0 δίνονται από τις σχέσεις (2.31), (2.37). Επαληθεύουμε ότι για $t = 0$ ανακτούμε την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = F_0 (Lx - x^2)$.

2.3.2 Σταθερή αρχική συνθήκη

Έστω

$$H_0(x) = c_0. \quad (2.42)$$

Από την Εξ. (2.20) προκύπτει

$$v(k, t) = -\frac{ic_0(1 - e^{-ikL})}{k} - \frac{iqe^{-ikL}(-1 + e^{ikL})(e^{\alpha k^2 t} - 1)}{\alpha k^3}.$$

$$u(x, t) = c_0 + qt + \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \left(\frac{iq}{\alpha k^3} - \frac{ic_0}{k} \right) \left(e^{ik(L-x)} + e^{ikx} - (e^{ikL} - 1) \frac{\sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right) e^{-\alpha k^2 t} dk \quad (2.43)$$

Ομοίως, για $t = 0$ ανακτούμε τη σταθερή αρχική συνθήκη $u(x, 0) = c_0$.

2.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μία σύγκριση μεταξύ της αναλυτικής μας λύσης και της κλασικής λύσης μέσω σειρών Fourier για δύο διαφορετικά φυσικά σενάρια. Οι επιλεγμένες παράμετροι υιοθετούνται από την εργασία [1], ώστε να είναι δυνατή η άμεση αναπαραγωγή και σύγκριση των αντίστοιχων σχημάτων.

2.4.1 Παραβολική αρχική συνθήκη

Έστω $R = 0$ και H_0 όπως δίνεται από την Εξ. (2.36). Τότε, η λύση σειρών Fourier στο μέσο του διαστήματος $x = \frac{L}{2}$ δίνεται από την [1]

$$H(L/2, t) = D + f_0(f_0 + 2d) \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2 t}{L^2}} \quad (2.44)$$

Θέτουμε $K = 0.25$ m/ημέρα, $S = 0.05$, $d = 3.2$ m και $f_0 = 1.2$ m. Τότε $\alpha = \frac{K(d+f_0/2)}{S} = 19$ m²/ημέρα. Έστω $L = 58$ m και $0 \leq t \leq 10$ ημέρες.

2.4.2 Σταθερή αρχική συνθήκη

Έστω $R \neq 0$ και H_0 όπως δίνεται από την Εξ. (2.43), με $c_0 = 0$. Τότε, η λύση μέσω σειράς Fourier δίνεται από την [1]

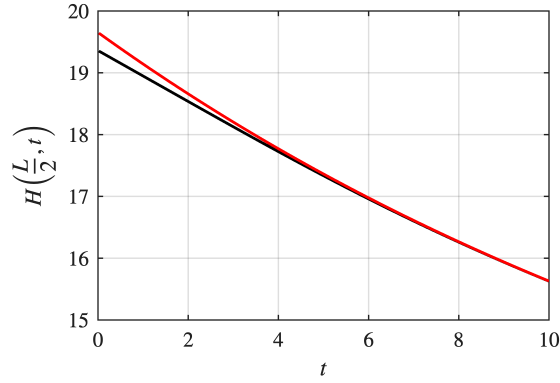
$$H(L/2, t) = D + \frac{qL^2}{8\alpha} - \frac{4qL^2}{\alpha\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2 t}{L^2}} \quad (2.45)$$

Θέτουμε $K = 0.5$ m/ημέρα, $S = 0.05$, $d = 1.024$ m και $R = 0.03$ m/ημέρα. Τότε, $f_0 = 1.63$ m και $\alpha = \frac{K(d+f_0/2)}{S} = 18.39$ m²/ημέρα. Στην περίπτωση αυτή η απόσταση είναι $L = 20$ m και $0 \leq t \leq 10$ ημέρες.

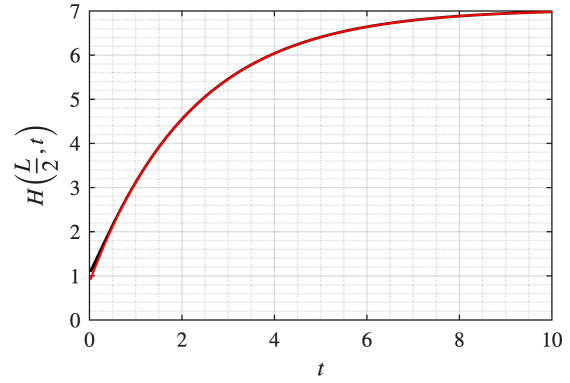
2.4.3 Αποτελέσματα

Η σύγκριση μεταξύ της λύσης που προκύπτει από τη μέθοδο του Φωκά (2.42) και της λύσης (2.45) δίνεται στο σχήμα 2.6. Σημειώνεται ότι παρατηρούνται διαφορές και στα δύο ΠΑΣΤ για μικρούς χρόνους, κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι οι λύσεις των [1] δεν ικανοποιούν την αρχική συνθήκη. Για μεγάλους χρόνους οι δύο λύσεις ταυτίζονται. Η εξέλιξη του ύψους του νερού ως συνάρτηση του χρόνου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.7α'. Για την παραβολική αρχική συνθήκη, ο όρος πηγής είναι ίσος με μηδέν και συνεπώς παρατηρούμε την επίδραση της στράγγισης (μείωση του ύψους του νερού) ως συνάρτηση του χρόνου (σχήμα 2.7α'), ενώ η απόκριση του συστήματος όταν υπάρχει τροφοδοσία φαίνεται στη λύση για σταθερή αρχική συνθήκη (σχήμα 2.7β').

Η εξέλιξη του ύψους του νερού ως συνάρτηση του χρόνου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.7β'. Εδώ, ο όρος πηγής είναι σταθερός και θετικός (τροφοδοσία), με αποτέλεσμα την αύξηση του ύψους του υδροφόρου ορίζοντα ως συνάρτηση του χρόνου, έως ότου φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος για $t \gg 1$ ημέρες.

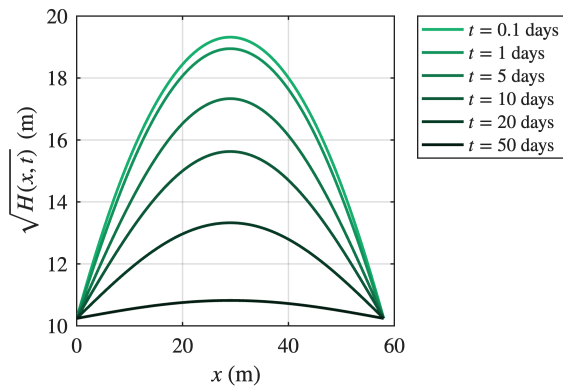


(α') Παραβολική αρχική συνθήκη, με όρο πηγής $q = 0$.

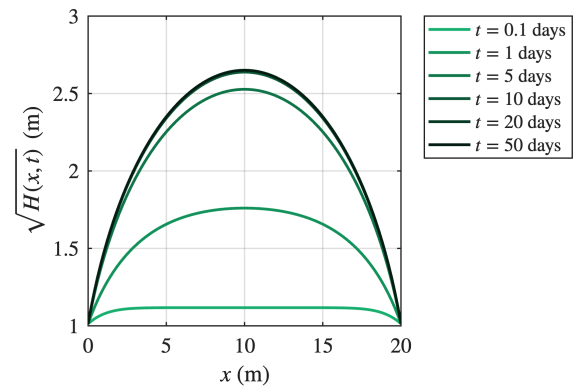


(β') Σταθερή αρχική συνθήκη με όρο πηγής $q > 0$.

Σχήμα 2.6: Σύγκριση της προκύπτουσας λύσης (μαύρη γραμμή) με τη λύση που εκφράζεται μέσω σειράς Fourier (χρησιμοποιώντας $N = 10$ όρους) από την εργασία [1].



(α') Εξέλιξη του ύψους του νερού ως συνάρτηση του χρόνου για παραβολική αρχική συνθήκη και $q = 0$, που αντιστοιχεί στην επίδραση της στράγγισης.



(β') Εξέλιξη του ύψους του νερού ως συνάρτηση του χρόνου για σταθερή αρχική συνθήκη και $q > 0$, που αντιστοιχεί σε σταθερή τροφοδοσία του υδροφόρου ορίζοντα.

Σχήμα 2.7: Σύγκριση των αποτελεσμάτων για παραβολική και σταθερή αρχική συνθήκη.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικοποιημένη εξίσωση KdV σε πεπερασμένο διάστημα

Η εξίσωση Korteweg-de Vries,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

εισήχθη για την περιγραφή μονοδιάστατων, περιοδικών κυμάτων σε ρηχά κανάλια νερού υπό τις υποθέσεις ασυμπίεστου και αστρόβιλου ρευστού. Η (3.1) παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην μαθηματική φυσική καθώς εκφράζει μία ειδική κατηγορία κυμάτων (σολιτόνια). Στην παρούσα εργασία ενδιαφερόμαστε για την επίλυσή της γραμμικοποιημένης εξίσωσης,

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (3.2)$$

σε ένα πεπερασμένο διάστημα $0 \leq x \leq L$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1, για $0 \leq t \leq T$. Πριν παρουσιάσουμε την επίλυση του ΠΑΣΤ που ορίζει η (3.2), έχει ενδιαφέρον μία ποιοτική ανάλυση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης KdV και η σύγκριση της με την εξίσωση διάχυσης. Έστω ότι η (3.2) περιγράφει διάδοση κυμάτων της μορφής

$$u = e^{i(kx - \omega t)},$$

τότε από την (3.2)

$$\begin{aligned} -i\omega - ik^3 &= 0 \\ \omega &= -k^3, \end{aligned}$$

και άρα η ομαδική ταχύτητα των κυμάτων δίνεται ως

$$c_g^{\text{γραμμ. KdV}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = -3k^2, \quad (3.3)$$

ενώ για την ταχύτητα φάσης $c_p^{\text{γραμμ. KdV}} = \omega/k = -k^2$. Το γεγονός ότι οι δύο αυτές ταχύτητες είναι διαφορετικές σημαίνει ότι η (3.2) περιγράφει κύματα διασποράς. Αντίθετα για την εξίσωση διάχυσης που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} -i\omega + k^2 &= 0 \\ \omega &= -ik^2, \end{aligned}$$

συνεπώς το κύμα αποσβάνει.

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η (3.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή διάδοσης κυμάτων νερού με μικρό πλάτος σε ρηχό κανάλι.



Σχήμα 3.1: ΜΔΕ: $u_t + u_{xxx} = 0$ σε ευθύγραμμο τμήμα.

3.1 Επίλυση με τον ΕΜ

Ορίζουμε τις συνοριακές συνθήκες ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, t) &= g_j(t) \\ \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(L, t) &= h_j(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου $j = 0, 1, 2$. Μετά από εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier (§1.1: (1.1),(1.2))

$$\hat{u}_t + \int_0^L e^{-ikx} u_{xxx} dx = 0$$

Προκύπτει,

$$\begin{aligned} \hat{u}_t - ik^3 \hat{u} &= g_2(t) + ikg_1(t) - k^2 g_0(t) - e^{-ikL} (h_2(t) + ikh_1(t) - k^2 h_0(t)) \\ \left(\hat{u} e^{-ik^3 t} \right)_t &= e^{-ik^3 t} (g_2(t) + ikg_1(t) - k^2 g_0(t) - e^{-ikL} (h_2(t) + ikh_1(t) - k^2 h_0(t))) \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση

$$\hat{u}(k, t) e^{-ik^3 t} - \hat{u}(k, 0) = \int_0^t e^{-ik^3 \tau} (g_2(\tau) + ikg_1(\tau) - k^2 g_0(\tau)) d\tau - e^{-ikL} \int_0^t e^{-ik^3 \tau} (h_2(\tau) + ikh_1(\tau) - k^2 h_0(\tau)) d\tau$$

$$\hat{u}(k, t) e^{-ik^3 t} - \hat{u}(k, 0) = (\tilde{g}_2(-ik^3, t) + ik\tilde{g}_1(-ik^3, t) - k^2 \tilde{g}_0(-ik^3, t)) - e^{-ikL} (\tilde{h}_2(-ik^3, t) + ik\tilde{h}_1(-ik^3, t) - k^2 \tilde{h}_0(-ik^3, t)), \quad (3.5)$$

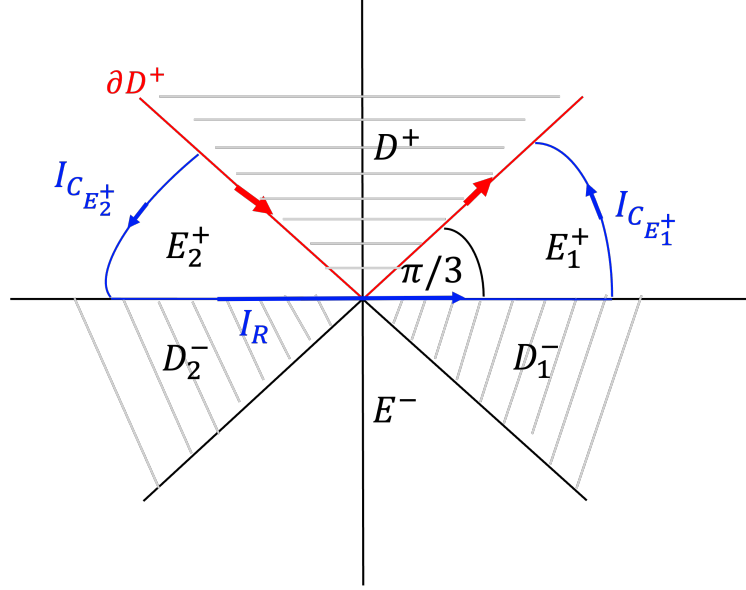
όπου

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j(\mu, t) &= \int_0^t e^{\mu\tau} \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, \tau) d\tau \\ \tilde{h}_j(\mu, t) &= \int_0^t e^{\mu\tau} \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(L, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Η εξίσωση (3.5) ονομάζεται γενική σχέση (global relation). Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx+ik^3 t} dk + \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{g}_2(-ik^3, t) + ik\tilde{g}_1(-ik^3, t) - k^2 \tilde{g}_0(-ik^3, t)) e^{ikx+ik^3 t} dk \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{h}_2(-ik^3, t) + ik\tilde{h}_1(-ik^3, t) - k^2 \tilde{h}_0(-ik^3, t)) e^{-ik(L-x)+ik^3 t} dk. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Παραμορφώνοντας την πραγματική ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο μπορούμε να δείξουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς της Εξίσωσης (3.6) υπολογίζεται στο ∂D^+ ενώ το τρίτο στο ∂D^- , όπως απεικονίζεται και στα σχήματα 3.2, 3.3.



Σχήμα 3.2: Υπολογισμός ολοκληρωμάτων στο άνω μιγαδικό επίπεδο. Οι κόκκινες ευθείες αντιστοιχούν στο σύνορο του χωρίου στο οποίο παραμορφώνεται η πραγματική ευθεία.

- Για το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{g}_2 + ik\tilde{g}_1 - k^2\tilde{g}_0) e^{ikx+ik^3t} dk$ (Σχήμα 3.2)

Η συνάρτηση είναι αναλυτική και φραγμένη στο χωρίο, όπου $\Re[ik^3] \leq 0$ και $\Im[k] \geq 0$. Στο χωρίο που η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι αναλυτική και φραγμένη, έχουμε

$$I_R + I_{C_{E_1^+}} + I_{C_{E_2^+}} - I_{\partial D^+} = 0 \Rightarrow I_R = I_{\partial D^+}.$$

- Για το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{h}_2 + ik\tilde{h}_1 - k^2\tilde{h}_0) e^{-ik(L-x)+ik^3t} dk$ (Σχήμα 3.3)

Η συνάρτηση είναι αναλυτική και φραγμένη στο χωρίο, όπου $\Re[ik^3] \leq 0$ και $\Im[k] \leq 0$. Στο χωρίο που η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι αναλυτική και φραγμένη, έχουμε

$$I_R + I'_{R_1} + I'_{R_2} + I_{C_{E^-}} = 0 \Rightarrow I_R = -I_{\partial D_1^-} - I_{\partial D_2^-} = -I_{\partial D_1^- \cup \partial D_2^-}.$$

Προκύπτει λοιπόν,

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx+ik^3t} dk + \int_{\partial D^+} (\tilde{g}_2(-ik^3, t) + ik\tilde{g}_1(-ik^3, t) - k^2\tilde{g}_0(-ik^3, t)) e^{ikx+ik^3t} dk \\ &+ \int_{\partial D^-} (\tilde{h}_2(-ik^3, t) + ik\tilde{h}_1(-ik^3, t) - k^2\tilde{h}_0(-ik^3, t)) e^{-ik(L-x)+ik^3t} dk. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Για την επίλυση του προβλήματος χρειαζόμαστε 3 συνοριακές συνθήκες, έστω $\tilde{g}_0, \tilde{h}_0, \tilde{g}_1$ γνωστές. Η (3.14) δίνει την λύση του προβλήματος αφού γίνει η απαλοιφή των άγνωστων συνοριακών συνθηκών $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_1, \tilde{h}_2)$. Θέλουμε λοιπόν να εκφράσουμε τις άγνωστες συνοριακές συνθήκες ως συνάρτηση της λύσης $\hat{u}(k, t)$ και των γνωστών συνοριακών συνθηκών. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή της γενικής σχέσης (global relation) (3.5). Για να επιτευχθεί η απαλοιφή των αγνώστων, ψάχνουμε μετασχηματισμούς v_1, v_2 που αφήνουν αναλλοίωτη την ποσότητα ik^3 , ώστε

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j(-iv_1^3) &= \tilde{g}_j(-iv_2^3) = \tilde{g}_j(-ik^3), \\ \tilde{h}_j(-iv_1^3) &= \tilde{h}_j(-iv_2^3) = \tilde{h}_j(-ik^3). \end{aligned} \quad (3.8)$$

και άρα

$$\begin{aligned}\tilde{g}_2 = & \frac{\left(\alpha e^{-i\alpha^2 kL} - \alpha^2 e^{-i\alpha kL}\right) G(k, t) + \left(\alpha^2 e^{-ikL} - e^{-i\alpha^2 kL}\right) G(\alpha k, t) + \left(e^{-i\alpha kL} - \alpha e^{-ikL}\right) G(\alpha^2 k, t)}{(1 - \alpha) \left(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL}\right)} \\ & + \frac{\hat{u}(k, t) \left(\alpha^2 e^{-i\alpha kL} - \alpha e^{-i\alpha^2 kL}\right) + \left(e^{-i\alpha^2 kL} - \alpha^2 e^{-ikL}\right) \hat{u}(\alpha k, t) + \left(\alpha e^{-ikL} - e^{-i\alpha kL}\right) \hat{u}(\alpha^2 k, t)}{(1 - \alpha) \left(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL}\right)} e^{-ik^3 t}\end{aligned}$$

• $ik\tilde{g}_1$

$$A_{ik\tilde{g}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -G(k, t) + e^{-ik^3 t} \hat{u}(k, t) & -e^{-ikL} \\ 1 & -G(\alpha k, t) + e^{-ik^3 t} \hat{u}(\alpha k, t) & -e^{-i\alpha kL} \\ 1 & -G(\alpha^2 k, t) + e^{-ik^3 t} \hat{u}(\alpha^2 k, t) & -e^{-i\alpha^2 kL} \end{pmatrix}$$

$$ik\tilde{g}_1 = \frac{\left(e^{-i\alpha kL} - e^{-i\alpha^2 kL}\right) G(k, t) + \left(e^{-i\alpha^2 kL} - e^{-ikL}\right) G(\alpha k, t) + \left(e^{-ikL} - e^{-i\alpha kL}\right) G(\alpha^2 k, t)}{(1 - \alpha) \left(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL}\right)} \quad (3.12)$$

$$+ \frac{\hat{u}(k, t) \left(e^{-i\alpha^2 kL} - e^{-i\alpha kL}\right) + \left(e^{-ikL} - e^{-i\alpha^2 kL}\right) \hat{u}(\alpha k, t) + \left(e^{-i\alpha kL} - e^{-ikL}\right) \hat{u}(\alpha^2 k, t)}{(1 - \alpha) \left(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL}\right)} e^{-ik^3 t} \quad (3.13)$$

• $\tilde{h}_2$

$$A_{\tilde{h}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -G(k, t) + e^{-ik^3 t} \hat{u}(k, t) \\ 1 & \alpha & -G(\alpha k, t) + e^{-ik^3 t} \hat{u}(\alpha k, t) \\ 1 & \alpha^2 & -G(\alpha^2 k, t) + e^{-ik^3 t} \hat{u}(\alpha^2 k, t) \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την συνάρτηση $\tilde{h}_2$

$$\tilde{h}_2 = \frac{\alpha G(k, t) + \alpha^2 G(\alpha k, t) + G(\alpha^2 k, t)}{\left(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL}\right)} - \frac{\alpha \hat{u}(k, t) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha k, t) + \hat{u}(\alpha^2 k, t)}{\left(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL}\right)} e^{-ik^3 t}$$

Συνεπώς η λύση γράφεται ως

$$\begin{aligned}2\pi u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} k^2 \tilde{g}_0 e^{ikx + ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \left(ik\tilde{h}_1 - k^2 \tilde{h}_0\right) e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk \\ & + \int_{\partial D^+} (\tilde{g}_2 + ik\tilde{g}_1) e^{ikx + ik^3 t} dk \\ & + \int_{\partial D^-} \tilde{h}_2 e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk.\end{aligned} \quad (3.14)$$

Από τον υπολογισμό των οριζουσών

$$\begin{aligned}\tilde{g}_2 + ik\tilde{g}_1 = & -G(k, t) + \frac{\alpha e^{-ikL}G(k, t) + \alpha^2 e^{-ikL}G(\alpha k, t) + e^{-ikL}G(\alpha^2 k, t)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} \\ & - \frac{(-e^{-i\alpha^2 kL} - \alpha^2 e^{-i\alpha kL})\hat{u}(k, t) + \alpha^2 e^{-ikL}\hat{u}(\alpha k, t) + e^{-ikL}\hat{u}(\alpha^2 k, t)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})}\end{aligned}$$

Η (3.14) γράφεται

$$\begin{aligned}2\pi u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx+ik^3t} dk - \int_{\partial D^+} k^2 \tilde{g}_0 e^{ikx+ik^3t} dk + \int_{\partial D^-} (ik\tilde{h}_1 - k^2\tilde{h}_0) e^{-ik(L-x)+ik^3t} dk \\ & - \int_{\partial D^+} (\hat{u}(k, 0) - k^2\tilde{g}_0 - ik e^{-ikL}\tilde{h}_1 + k^2 e^{-ikL}\tilde{h}_0) e^{ikx+ik^3t} dk \\ & + \int_{\partial D^+} \frac{\alpha e^{-ikL} (\hat{u}(k, 0) - k^2\tilde{g}_0 - ik e^{-ikL}\tilde{h}_1 + k^2 e^{-ikL}\tilde{h}_0)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{ikx+ik^3t} dk \\ & + \int_{\partial D^+} \frac{\alpha^2 e^{-ikL} (\hat{u}(\alpha k, 0) - \alpha^2 k^2\tilde{g}_0 - i\alpha k e^{-i\alpha kL}\tilde{h}_1 + \alpha^2 k^2 e^{-i\alpha kL}\tilde{h}_0)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{ikx+ik^3t} dk \\ & + \int_{\partial D^+} \frac{e^{-ikL} (\hat{u}(\alpha^2 k, 0) - \alpha k^2\tilde{g}_0 - i\alpha^2 k e^{-i\alpha^2 kL}\tilde{h}_1 + \alpha k^2 e^{-i\alpha^2 kL}\tilde{h}_0)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{ikx+ik^3t} dk \\ & + \int_{\partial D^-} \frac{\alpha (\hat{u}(k, 0) - k^2\tilde{g}_0 - ik e^{-ikL}\tilde{h}_1 + k^2 e^{-ikL}\tilde{h}_0)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{-ik(L-x)+ik^3t} dk \\ & + \int_{\partial D^-} \frac{\alpha^2 (\hat{u}(\alpha k, 0) - \alpha^2 k^2\tilde{g}_0 - i\alpha k e^{-i\alpha kL}\tilde{h}_1 + \alpha^2 k^2 e^{-i\alpha kL}\tilde{h}_0)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{-ik(L-x)+ik^3t} dk \\ & + \int_{\partial D^-} \frac{(\hat{u}(\alpha^2 k, 0) - \alpha k^2\tilde{g}_0 - i\alpha^2 k e^{-i\alpha^2 kL}\tilde{h}_1 + \alpha k^2 e^{-i\alpha^2 kL}\tilde{h}_0)}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{-ik(L-x)+ik^3t} dk\end{aligned}$$

Για $\alpha = e^{2i\pi/3}$ ισχύει ότι :

$$\begin{aligned}\alpha^4 &= \alpha, \\ \alpha^2 &= \frac{1}{\alpha} \\ 1 + \alpha + \alpha^2 &= 0\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς

$$k_1 = \alpha k \quad (3.15)$$

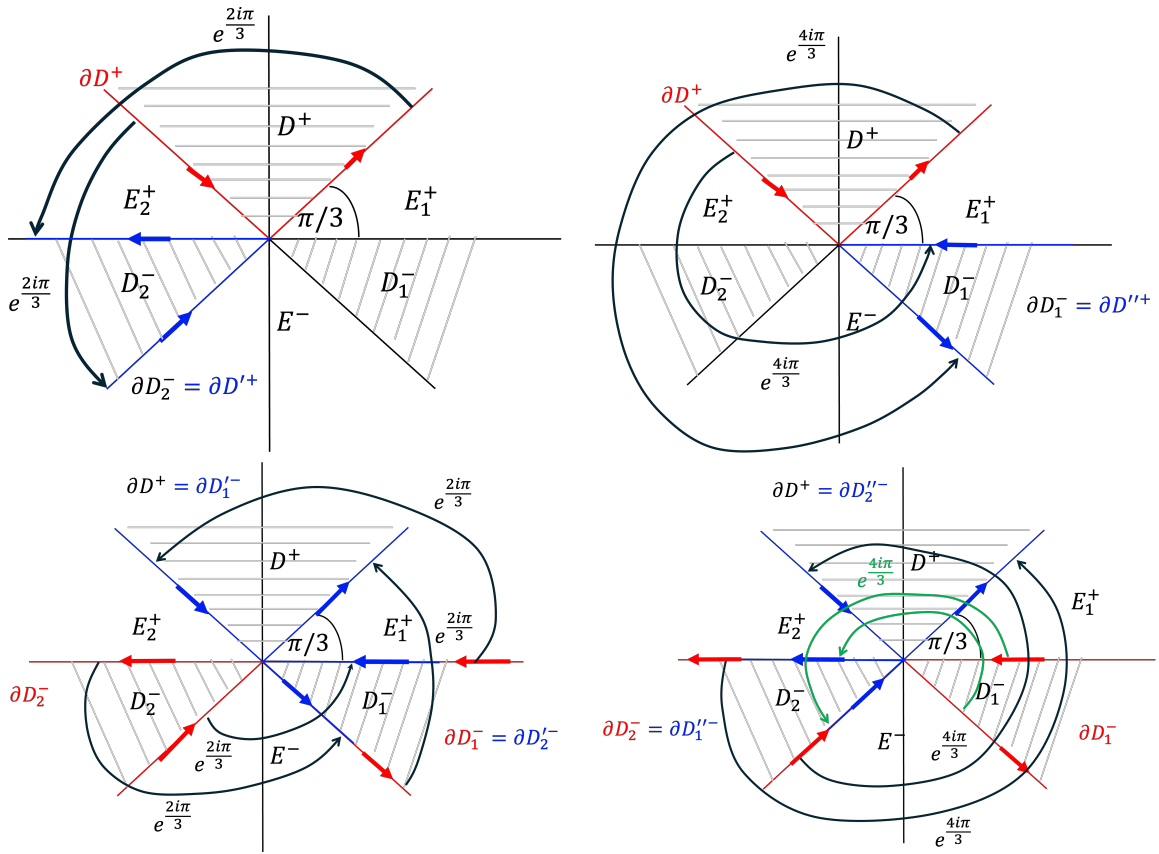
$$k_2 = \alpha^2 k \quad (3.16)$$

$$\partial D'^+ = \partial D_2^- \quad (3.17)$$

$$\partial D''^+ = \partial D_1^- \quad (3.18)$$

$$\partial D'^- = (\partial D_1^- \cup \partial D_2^-)' = \partial D_1'^- \cup \partial D_2'^- = \partial D^+ \cup \partial D_1^- \quad (3.19)$$

$$\partial D''^- = (\partial D_1^- \cup \partial D_2^-)'' = \partial D_1''^- \cup \partial D_2''^- = \partial D_2^- \cup \partial D^+, \quad (3.20)$$



Σχήμα 3.4: Παραμόρφωση χωρίων λόγω των μετασχηματισμών $k/\alpha, k/\alpha^2$. Με κόκκινο συμβολίζεται το χωρίο πριν τον μετασχηματισμό και με μπλε χρώμα το τελικό χωρίο αντίστοιχα.

Η λύση γράφεται ως

$$\begin{aligned}
2\pi u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk \\
& + \int_{\partial D^+} \frac{e^{-ik(L-x) + ik^3 t} + \alpha e^{-i\alpha k(L-x) + ik^3 t} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2 k(L-x) + ik^3 t}}{(e^{-ikL} + \alpha e^{-i\alpha kL} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2 kL})} \hat{u}(k, 0) dk \\
& + \int_{\partial D^-} \frac{e^{-ik(L-x) + ik^3 t} + \alpha e^{-i\alpha k(L-x) + ik^3 t} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2 k(L-x) + ik^3 t}}{(e^{-ikL} + \alpha e^{-i\alpha kL} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2 kL})} \hat{u}(k, 0) dk \\
& + \int_{\partial D^+} \frac{-3\alpha k^2 \tilde{g}_0 - ik \left(\alpha e^{-ikL} + e^{-i\alpha kL} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2 kL} \right) \tilde{h}_1 + k^2 \left(\alpha e^{-ikL} + \alpha e^{-i\alpha kL} + \alpha e^{-i\alpha^2 kL} \right) \tilde{h}_0}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk \\
& + \int_{\partial D^-} \frac{-3\alpha k^2 \tilde{g}_0 - ik \left(\alpha e^{-ikL} + e^{-i\alpha kL} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2 kL} \right) \tilde{h}_1 + k^2 \left(\alpha e^{-ikL} + \alpha e^{-i\alpha kL} + \alpha e^{-i\alpha^2 kL} \right) \tilde{h}_0}{(\alpha e^{-ikL} + \alpha^2 e^{-i\alpha kL} + e^{-i\alpha^2 kL})} e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk \\
& + \int_{\partial D^+} \left(ik \tilde{h}_1 - k^2 \tilde{h}_0 \right) e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \left(ik \tilde{h}_1 - k^2 \tilde{h}_0 \right) e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.1.2 Εναλλακτική μορφή της λύσης (ολοκληρώματα στο ∂D^+)

Μία πιο απλή και συμπαγής αναπαράσταση της λύσης επιτυγχάνεται παραμορφώνοντας τα χωρία ώστε η ολοκληρωτική αναπαράσταση να δοθεί σε ένα ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο ∂D^+ .

Αρχικά, γράφουμε την (3.21) ως

$$\begin{aligned}
2\pi u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk \\
& + \int_{\partial D^+} \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} \hat{u}(k, 0) dk + \int_{\partial D^-} \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} \hat{u}(k, 0) dk \\
& + \int_{\partial D^+} \frac{-3k^2 \tilde{g}_0 - ik \tilde{h}_1 \Xi(kL) + k^2 \tilde{h}_0 \Phi(kL)}{\Delta(kL)} e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \frac{-3k^2 \tilde{g}_0 - ik \tilde{h}_1 \Xi(kL) + k^2 \tilde{h}_0 \Phi(kL)}{\Delta(kL)} e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk \\
& + \int_{\partial D^+} \left(ik \tilde{h}_1 - k^2 \tilde{h}_0 \right) e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \left(ik \tilde{h}_1 - k^2 \tilde{h}_0 \right) e^{-ik(L-x) + ik^3 t} dk,
\end{aligned}$$

όπου

$$\Delta(\mu) = e^{-i\mu} + \alpha e^{-i\alpha\mu} + \alpha^2 e^{-i\alpha^2\mu}, \tag{3.22}$$

$$\Xi(\mu) = e^{-i\mu} + \alpha^2 e^{-i\alpha\mu} + \alpha e^{-i\alpha^2\mu}, \tag{3.23}$$

$$\Phi(\mu) = e^{-i\mu} + e^{-i\alpha\mu} + e^{-i\alpha^2\mu}, \tag{3.24}$$

με παραγώγους

$$\Delta'(\mu) = -i\Xi(\mu), \quad (3.25)$$

$$\Xi'(\mu) = -i\Phi(\mu), \quad (3.26)$$

$$\Phi'(\mu) = -i\Delta(\mu), \quad (3.27)$$

ενώ εύκολα αποδεικνύονται οι εξής ταυτότητες

$$\Delta(\alpha\mu) = \alpha^2\Delta(\mu), \quad (3.28)$$

$$\Delta(\alpha^2\mu) = \alpha\Delta(\mu), \quad (3.29)$$

$$\Xi(\alpha\mu) = \alpha\Xi(\mu) \quad (3.30)$$

$$\Xi(\alpha^2\mu) = \alpha^2\Xi(\mu) \quad (3.31)$$

$$\Phi(\mu) = \Phi(\alpha\mu) = \Phi(\alpha^2\mu), \quad (3.32)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με την αλλαγή μεταβλητής $k_1 = \alpha k$: $\partial D_1^- \rightarrow \partial D^+$ και αντίστοιχα με $k_2 = \alpha^2 k$: $\partial D_2^- \rightarrow \partial D^+$. Προκύπτει λοιπόν,

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ikx + ik^3 t} dk \\ & + \int_{\partial D^+} (\hat{u}(k, 0) + \alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk \\ & - \int_{\partial D^+} ik \tilde{h}_1 \frac{\Xi(kL) \Delta(k(L-x)) - \Xi(k(L-x)) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk \\ & + \int_{\partial D^+} k^2 \tilde{h}_0 \frac{\Phi(kL) \Delta(k(L-x)) - \Phi(k(L-x)) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk, \end{aligned} \quad (3.33)$$

όπου οι συναρτήσεις $\Delta(\cdot), \Xi(\cdot), \Phi(\cdot)$ δίνονται στις (3.22), (3.23), (3.24) αντίστοιχα.

3.2 Επαλήθευση

Για $t = 0$

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, 0) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk \\ & + \int_{\partial D^+} (\hat{u}(k, 0) + \alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} dk \\ & - \int_{\partial D^+} ik \tilde{h}_1 \frac{\Xi(kL) \Delta(k(L-x)) - \Xi(k(L-x)) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} dk \\ & + \int_{\partial D^+} k^2 \tilde{h}_0 \frac{\Phi(kL) \Delta(k(L-x)) - \Phi(k(L-x)) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} dk. \end{aligned}$$

Για $k \rightarrow \infty, \Im\{k\} > 0$:

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, 0) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) \left(e^{ikx} - \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} \right) dk \\ & + \int_{\partial D^+} (\alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} dk \\ & - \int_{\partial D^+} ik \tilde{h}_1 \frac{\Xi(kL) \Delta(k(L-x)) - \Xi(k(L-x)) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} dk \\ & + \int_{\partial D^+} k^2 \tilde{h}_0 \frac{\Phi(kL) \Delta(k(L-x)) - \Phi(k(L-x)) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} dk. \end{aligned} \quad (3.34)$$

- $\frac{\Xi(kL)\Delta(k(L-x))-\Xi(k(L-x))\Delta(kL)}{\Delta(kL)} \approx \frac{\Xi(kL)\Delta(kL)-\Xi(kL)\Delta(kL)}{\Delta(kL)} = 0$
- $\frac{\Phi(kL)\Delta(k(L-x))-\Phi(k(L-x))\Delta(kL)}{\Delta(kL)} = 0,$

και άρα η (3.34) γίνεται

$$2\pi u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) \left(e^{ikx} - \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} \right) dk + \int_{\partial D^+} (\alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} dk. \quad (3.35)$$

Η προς ολοκλήρωση ποσότητα του δεύτερου ολοκληρώματος της (3.35), απλοποιείται γράφοντας

$$e^{ikx} - \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} = \frac{e^{ikx}\Delta(kL) - \Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)},$$

όπου $\Delta(kL)e^{ikx} = e^{-ik(L-x)} + \alpha e^{-ik(\alpha L-x)} + \alpha^2 e^{-ik(\alpha^2 L-x)}$. Για $k \rightarrow \infty$, με $\Im\{k\} > 0$

$$\Delta(kL)e^{ikx} \sim e^{ik(L-x)}$$

και συνεπώς

$$e^{ikx} - \frac{\Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} = \frac{e^{ikx}\Delta(kL) - \Delta(k(L-x))}{\Delta(kL)} \sim \frac{e^{-ik(L-x)}}{e^{-ikL}} = e^{ikx} \rightarrow 0.$$

Αντίστοιχα για την ποσότητα

$$-3k^2 \tilde{g}_0 \frac{\Delta(K(L-x))}{\Delta(kL)} \sim -3k^2 \tilde{g}_0 e^{ikx} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \Im\{k\} > 0.$$

Κάνοντας χρήση του λήμματος Jordan, η (3.35) τελικά γίνεται

$$\boxed{u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk.} \quad (3.36)$$

Για $x = 0$

$$\begin{aligned} 2\pi u(0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk \\ &+ \int_{\partial D^+} (\hat{u}(k, 0) + \alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 e^{ik^3 t} dk \\ &- \int_{\partial D^+} ik \tilde{h}_1 \frac{\Xi(kL)\Delta(k(L)) - \Xi(k(L))\Delta(kL)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk \\ &+ \int_{\partial D^+} k^2 \tilde{h}_0 \frac{\Phi(kL)\Delta(k(L)) - \Phi(k(L))\Delta(kL)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk \\ &+ \int_{\partial D^+} (\hat{u}(k, 0) + \alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 e^{ik^3 t} dk \end{aligned} \quad (3.37)$$

Όπως δείξαμε προηγουμένως κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητής $k_1 = \alpha^2 k, k_2 = \alpha k$ παραμορφώνουμε το χωρίο ∂D^+ στα χωρία $\partial D_1^-, \partial D_2^-$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} (\hat{u}(k, 0) + \alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) e^{ik^3 t} dk &= \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk + \int_{\partial D^+} \hat{u}(\alpha k, 0) e^{ik^3 t} \alpha dk \\ &+ \int_{\partial D^+} \hat{u}(\alpha^2 k, 0) e^{ik^3 t} \alpha^2 dk \\ &= \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk + \int_{\partial D^+} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk.$$

Γράφουμε

$$\int_{\partial D^-} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk = - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk + \int_{\partial E^-} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk,$$

η ποσότητα $\hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t}$ είναι αναλυτική στο E^- και άρα από το θεώρημα Cauchy, το ολοκλήρωμα στο σύνορο ∂E^- έχει μηδενική συνεισφορά. Τελικά γράφουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk + \int_{\partial D^-} \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t} dk = 0,$$

και άρα η (3.37) γίνεται

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -3k^2 \tilde{g}_0 e^{ik^3 t} dk. \quad (3.38)$$

Για $x = L$

Ισχύει ότι $\Delta(0) = \Xi(0) = 0, \Phi(0) = 3$. Επίσης, παραμορφώνοντας το σύνορο ∂D^+ στην πραγματική ευθεία, προκύπτει

$$u(L, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -3k^2 \tilde{h}_0 e^{ik^3 t} dk. \quad (3.39)$$

Για $x = L$

Αποδεικνύουμε ότι η συνοριακή συνθήκη για την πρώτη παράγωγο ικανοποιείται

$$\begin{aligned} 2\pi u_x(L, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ik \hat{u}(k, 0) e^{ikL + ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} ik \hat{u}(k, 0) e^{ikL + ik^3 t} dk \\ &+ \int_{\partial D^+} k (\hat{u}(k, 0) + \alpha \hat{u}(\alpha k, 0) + \alpha^2 \hat{u}(\alpha^2 k, 0)) \frac{\Delta'(0)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk - \int_{\partial D^+} 3k^2 \tilde{g}_0 \frac{\Delta'(0)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk \\ &- \int_{\partial D^+} k^2 i \tilde{h}_1 \frac{\Xi(kL) \Delta'(0) - \Xi'(0) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk \\ &- \int_{\partial D^+} k^3 \tilde{h}_0 \frac{\Phi(kL) \Delta'(0) - \Phi'(0) \Delta(kL)}{\Delta(kL)} e^{ik^3 t} dk. \end{aligned}$$

Από τις (3.25), (3.26), (3.27) και παραμορφώνοντας το ∂D^+ στην πραγματική ευθεία

$$u_x(L, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -3k^2 \tilde{h}_1 e^{ik^3 t} dk \quad (3.40)$$

Για τις εξισώσεις (3.38), (3.39), (3.40), δείχνουμε ότι αντιστοιχούν στην κάθε συνοριακή συνθήκη κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$\omega = ik^3,$$

$$\frac{-3}{2\pi} \int_{\partial D^+} \int_0^t k^2 \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0, L} e^{-ik^3 \tau} e^{ik^3 t} d\tau dk = \frac{-i}{2\pi} \int_{\partial D^+} \int_0^t \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0, L} e^{-\omega \tau} e^{\omega t} d\tau d\omega,$$

ενώ παραμορφώνοντας το ∂D^+ στην πραγματική ευθεία και θεωρώντας $\omega = il$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{-i}{2\pi} \int_{\partial D^+} \int_0^t \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0,L} e^{-\omega\tau} e^{\omega t} d\tau d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0,L} e^{-il\tau} e^{ilt} d\tau dl \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0,L} e^{-il\tau} d\tau \right) e^{ilt} dl = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0,L}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται λοιπόν ότι η προτεινόμενη λύση ικανοποιεί την ΜΔΕ και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές στην αεροακουστική

Τις τελευταίες δεκαετίες, η ιδέα των ακουστικών αναλογιών (Lighthill, 1952) έχει καθιερωθεί ως ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη προβλημάτων παραγωγής αεροδυναμικού θορύβου, μέσω θεωρητικών μοντέλων, λεπτομερών αριθμητικών προσομοιώσεων και πειραμάτων. Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας των τυρβωδών ροών, το ερώτημα του προσδιορισμού της *ενέργειας που διαφεύγει από τη ροή ως ήχος* [21], παραμένει αναπάντητο για την πλειονότητα των αεροακουστικών προβλημάτων.

4.1 Βασική θεωρία

Έστω ένα ρευστό με πυκνότητα ρ , διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, το οποίο κινείται μέσα σε ένα ομοιόμορφο και ακίνητο μέσο (p_0, ρ_0) χωρίς πηγές μάζας, όπου η ταχύτητα του ήχου είναι c_0 . Αναδιατυπώνοντας τις εξισώσεις Navier–Stokes, ο Lighthill κατέληξε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (4.1)$$

όπου $\rho' = \rho - \rho_0$ η διαφορά της πυκνότητας, ρ , γύρω από την μέση πυκνότητα του ρευστού, ρ_0 και

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}),$$

όπου οι διπλοί δείκτες (i, j) υποδηλώνουν άθροισμα. Η ποσότητα $\mathbf{T}$ είναι ο τανυστής τάσεων του Lighthill, με

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

και δ_{ij} αντιστοιχεί στο δ του Kronecker. Ο μη-γραμμικός όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης εμφανίζεται ως όρος πηγής σε μια μη ομογενή κυματική εξίσωση και σχετίζεται με τις ιδιότητες της ροής. Υποθέτοντας ότι ο τανυστής T_{ij} είναι γνωστός, ο Lighthill πρότεινε μια γενική λύση για το ακουστικό πεδίο μακριά από την πηγή (far-field) της Εξ. (4.1) για ελεύθερες τυρβώδεις ροές, βασιζόμενος στις ακόλουθες παραδοχές: α) ο παρατηρητής βρίσκεται στο μακρινό πεδίο, δηλαδή σε απόσταση πολλών μηκών κύματος από την πηγή, και β) το ακουστικό μέσο είναι ομοιόμορφο.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επεκτείνονται και στο πεδίο συχνοτήτων κάνοντας την υπόθεση αρμονικών διαταραχών $\rho'(\mathbf{x}, \omega) = \Re\{\hat{\rho}(\mathbf{x}, t)e^{-i\omega t}\}$, όπου $\mathbf{x}$ το διάνυσμα θέσης ενός παρατηρητή. Η (4.1) γίνεται

$$\nabla^2 \hat{\rho} + k^2 \hat{\rho} = -\frac{\partial^2 \hat{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (4.3)$$

Η ακουστική πίεση στο μακρινό πεδίο συνδέεται με τις διακυμάνσεις της πυκνότητας μέσω της καταστατικής εξίσωσης $\hat{p} = c_0^2 \hat{\rho}$. Με χρήση του θεωρήματος Green

$$\begin{aligned}\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = & - \int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{y}, \omega) \hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \omega) dV(\mathbf{y}) \\ & + \int_S \left(\hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \hat{p}}{\partial n}(\mathbf{y}, \omega) - \hat{p}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \omega) \right) dS(\mathbf{y}).\end{aligned}\quad (4.4)$$

όπου $\mathbf{y}$ το διάνυσμα θέσης της πηγής, $\hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \omega)$ είναι η συνάρτηση Green για το ελεύθερο πεδίο (free-field Green's function) που ικανοποιεί την

$$\nabla^2 \hat{G} + k^2 \hat{G} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.5)$$

και την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld.

Ροές κοντά σε τοιχώματα: Η αναλογία του Curle

Ο Curle (1955) επέκτεινε την προσέγγιση του Lighthill για να περιγράψει τον ήχο που παράγεται από ροές κοντά σε στερεά σύνορα [22]. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, αμελώντας τους όρους που σχετίζονται με το ιξώδες ($\text{Re} \rightarrow \infty$), για χαμηλούς αριθμούς Mach και εφαρμόζοντας την συνθήκη μη-ολίσθησης στο τοίχωμα ($u_{i,j} = 0$), η (4.4) γίνεται [23]

$$\hat{p} \approx \int_S \left(\hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \hat{p}}{\partial n}(\mathbf{y}, \omega) - \hat{p}(\mathbf{y}, \omega) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \omega) \right) dS(\mathbf{y}). \quad (4.6)$$

4.2 Θόρυβος αεροτομών και ενοποιημένος μετασχηματισμός

Στο υπόλοιπο της ενότητας δείχνουμε την εφαρμογή του EM σε προβλήματα παραγωγής θορύβου όταν ροή αέρα αλληλεπιδρά με πτέρυγες.

Όταν το τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω στην αεροτομή αναπτύχθει πλήρως, το ακουστικό πεδίο δημιουργείται από την αλληλεπίδραση των τυρβωδών δινών με το χείλος εκφυγής [24, 25, 26]. Η σύνδεση μεταξύ των διακυμάνσεων πίεσης στο κοντινό (αεροδυναμικό) και μακρινό (ακουστικό) πεδίο προκύπτει μέσω της θεωρίας του Curle (4.6) και μίας στατιστικής περιγραφής της τύρβης. Η πλήρης παρουσίαση τέτοιων μοντέλων είναι εκτός του σκοπού της παρούσας εργασίας, ωστόσο ο αναγνώστης μπορεί να βρει λεπτομερείς περιγραφές στην βιβλιογραφία [27, 28, 29]. Παρ' όλα αυτά αναφέρουμε τις βασικές υποθέσεις οι οποίες είναι

- Υπόθεση παγωμένης τύρβης (frozen turbulence): Η προσπίπτουσα, τυρβώδης ροή δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη της αεροτομής
- Το πάχος της αεροτομής θεωρείται αμελητέο και άρα η πτέρυγα προσεγγίζεται ως μία ημιάπειρη λεπτή πλάκα.
- Το εκπέτασμα της πτέρυγας είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μπορούν να αγνοηθούν φαινόμενα κοντά στα άκρα.

Ακολουθώντας κλασικές πρακτικές στην βιβλιογραφία της αεροακουστικής, θεωρούμε ότι για αρκετά χαμηλούς αριθμούς Mach (ασυμπίεστη ροή) η κατανομή της πίεσης γύρω από την αεροτομή δίνεται από την κυματική εξίσωση που περιέχει όρους συναγωγής, άρα για την πίεση $p'(\mathbf{x}, t)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p'}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y_2^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p'}{Dt^2} = 0 \\ + \text{κατάλληλες συνοριακές συνθήκες}\end{aligned}$$

όπου $\frac{Dp'}{Dt} = \frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p'$, η ολική παράγωγος. Θεωρούμε ότι $\mathbf{U} = (U_1, 0, 0)$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$p'(y_1, y_2, t) = \hat{p}(y_1, y_2) e^{i \frac{kM}{\beta^2} y_1 + i \omega t},$$

όπου $\beta = \sqrt{1 - M^2}$, προκύπτει η εξίσωση Helmholtz για την μεταβλητή $\hat{p}$:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \tilde{y}_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \tilde{y}_2^2} + \mu^2 \hat{p} = 0, \quad (4.7)$$

όπου $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ και μ αδιάστατες συντεταγμένες και συχνότητα αντίστοιχα που προκύπτουν από την κανονικοποίηση του προβλήματος. Για το υπόλοιπο του κειμένου θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\tilde{y}_i \rightarrow y_i$ για αδιάστατες ποσότητες που περιγράφουν την απόσταση της πηγής.

Η επίλυση της (4.7) περιγράφει προβλήματα σκέδασης ηχητικών κυμάτων στο πεδίο των συχνοτήτων και έχει μελετηθεί εκτενώς για προβλήματα (αερο-)ακουστικής. Αναλυτικές λύσεις της (4.7) υπάρχουν για απλά σχήματα όπως κύλινδροι, ημιάπειρα επίπεδα, ημιάπειρες σφήνες [30], ενώ προσεγγιστικές λύσεις δίνονται για πιο περίπλοκες γεωμετρίες. Για το πρόβλημα μίας απείρων λεπτής αεροτομής με πεπερασμένη χορδή ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των [31, 28].

4.2.1 Εφαρμογή ΕΜ σε ελλειπτικές εξισώσεις

Η γενική σχέση (global relation) για τις εξισώσεις εξέλιξης, όπως αυτές που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, συνδέει την μετασχηματισμένη λύση της εξίσωσης με τις γνωστές και άγνωστες συνοριακές τιμές. Αυτό γίνεται λόγω του ότι σε τέτοια προβλήματα το σύνορο του χωρίου περιέχει την λύση του προβλήματος. Αντίθετα στην εξίσωση Helmholtz η γενική σχέση συνδέει μόνο τις άγνωστες και γνωστές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Το γεγονός ότι η λύση δεν εμπεριέχεται στην γενική σχέση κάνει πιο δύσκολη την επίλυση του προβλήματος αφού δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γενική σχέση για να καταλήξουμε σε μία ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης [4]. Όμως, για ένα κυρτό πολύγωνο είναι δυνατή η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης στο μιγαδικό επίπεδο.

Θεωρούμε λοιπόν την εξίσωση Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y_2^2} + \mu^2 \hat{p} = 0, \quad (4.8)$$

και $\hat{g}$ την λύση για το συζυγές πρόβλημα

$$\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y_2^2} + \mu^2 \hat{g} = 0. \quad (4.9)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.8) με g και την (4.9) με $\hat{p}$ και αφαιρώντας προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\hat{g} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y_1} - \hat{p} \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\hat{g} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y_2} - \hat{p} \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_2} \right) = 0, \quad (4.10)$$

και από το θεώρημα του Green

$$\int_{\partial D} \left[\left(\hat{g} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y_1} - \hat{p} \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_1} \right) dy_2 + \left(\hat{g} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y_2} - \hat{p} \frac{\partial \hat{g}}{\partial y_2} \right) dy_1 \right] = 0, \quad (4.11)$$

Για να εκφράσουμε την προς ολοκλήρωση ποσότητα της (4.11) ως προς τις συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιούμε την εξής παραμετροποίηση

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y_2} dy_2 = \hat{p}_t ds \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y_1} dy_2 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y_2} dy_1 = \hat{p}_n ds, \quad (4.13)$$

όπου οι (4.12), (4.13) αντιστοιχούν σε παραγωγή προς την εφαπτόμενη ($\hat{p}_t$) και κάθετη ($\hat{p}_n$) διεύθυνση του συνόρου. Συνεπώς η (4.11) γίνεται

$$\int_{\partial D} \left(\hat{g} \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} - \hat{p} \frac{\partial \hat{g}}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (4.14)$$

και αντιστοιχεί στην γενική σχέση. Επιπλέον, η (4.14) γράφεται σε πιο απλή μορφή γράφοντας την εξίσωση Helmholtz ως προς την μιγαδική μεταβλητή $z = y_1 + iy_2$, με συζυγή $\bar{z} = y_1 - iy_2$,

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z \partial \bar{z}} + \gamma^2 \hat{p} = 0, \quad (4.15)$$

όπου $\gamma = \mu/2$. Η $\hat{g} = e^{-i\gamma(\lambda z + \bar{z}/\lambda)}$ ικανοποιεί την (4.15) και άρα η γενική σχέση γράφεται

$$\int_{\partial D} e^{-i\gamma(\lambda z + \bar{z}/\lambda)} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} + \beta \left(\lambda \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\lambda} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) \hat{p} \right) ds = 0. \quad (4.16)$$

Η σχέση (4.16) περιέχει τα δεδομένα του προβλήματος στο σύνορο $(\hat{p}, \frac{\partial \hat{p}}{\partial n})$, την παραμετροποίηση του συνόρου μέσω των μιγαδικών μεταβλητών $z, \bar{z}$ και η παράμετρος λ , παίρνει τιμές στο μιγαδικό επίπεδο, τέτοιες ώστε η προς ολοκλήρωση ποσότητα να είναι αναλυτική και φραγμένη, δηλαδή $\Re\{-i\gamma(\lambda z + \bar{z}/\lambda)\} < 0$. Η αριθμητική επίλυση της (4.16) γίνεται χρησιμοποιώντας σημεία παρεμβολής για την άγνωστη συνοριακή συνθήκη και μέσω της θεωρίας του Curle (4.6), προκύπτει το μακρινό ακουστικό πεδίο [32, 13]. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε πληθώρα σύνθετων προβλημάτων που δίνουν το σκεδαζόμενο πεδίο γύρω από συστοιχεία πλακών πεπερασμένου μήκους και διαφορετικής ακουστικής εμπέδησης [32] ή παραγωγή ακουστικών κυμάτων από ελαστικές [33] και πολυστρωματικές [34] πλάκες. Η επίλυση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz δίνεται στην εργασία [35]. Στην συνέχεια, για λόγους παρουσίασης δείχνουμε την επίλυση της εξίσωσης Laplace [36, 15].

Για χαμηλές συχνότητες, τέτοιες ώστε $\mu \rightarrow 0$, η εξίσωση Helmholtz ανάγεται στην εξίσωση Laplace. Σε εφαρμογές της αεροακουστικής μία τέτοια προσέγγιση αποτελεί συννηθισμένη πρακτική καθώς με αυτόν τον τρόπο μοντελοποιείται η σκέδαση ακουστικών κυμάτων γύρω από σύνθετες γεωμετρίες με αναλυτικές ή ημι-αναλυτικές μεθόδους [37, 24, 38]. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου παρουσιάζουμε την επίλυση της εξίσωσης Laplace ως ένα πρόβλημα Riemann-Hilbert και κατασκευάζουμε την γενική σχέση (global relation), ακολουθώντας την αναφορά [17]. Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα

$$\hat{p}_{y_1 y_1} + \hat{p}_{y_2 y_2} = 0,$$

με $y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}$ και κατάλληλες οριακές συνθήκες στο εσωτερικό ενός κυρτού πολυγώνου Ω . Η επέκταση του προβλήματος εξωτερικά του πολυγώνου είναι εκτός του σκοπού της παρούσας εργασίας. Η $\hat{p}$ είναι αρμονική συνάρτηση και άρα ορίζοντας $z = y_1 + iy_2$, συνεπάγεται ότι η $\hat{p}_z$ είναι αναλυτική, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \hat{p}_z = 0.$$

Αφού η $\hat{p}_z$ είναι αναλυτική συνάρτηση, το ίδιο θα ισχύει και για την $e^{-ikz} \hat{p}_z, k \in \mathbb{C}$, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (e^{-ikz} \hat{p}_z) = 0.$$

Ολοκληρώνοντας στο χωρίο και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Cauchy προκύπτει η γενική σχέση (global relation)

$$\int_{\partial \Omega} e^{-ikz} \hat{p}_z dz = 0. \quad (4.17)$$

Για να βρούμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της $\hat{p}$ στο εσωτερικό ενός κυρτού πολύγωνου με κορυφές $z = z_1, z_2, \dots, z_j$, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $\mu(z, k)$, γράφουμε

$$d[\mu(z, k)e^{-ikz}] = e^{-ikz} \hat{p}_z dz. \quad (4.18)$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\mu(z, k) = \int_{z_j}^z e^{-ik(z-\zeta)} \hat{p}_\zeta d\zeta. \quad (4.19)$$

Ο όρος $e^{-ik(z-\zeta)}$ είναι φραγμένος για $k \rightarrow \infty$, συνεπώς προκύπτει ότι

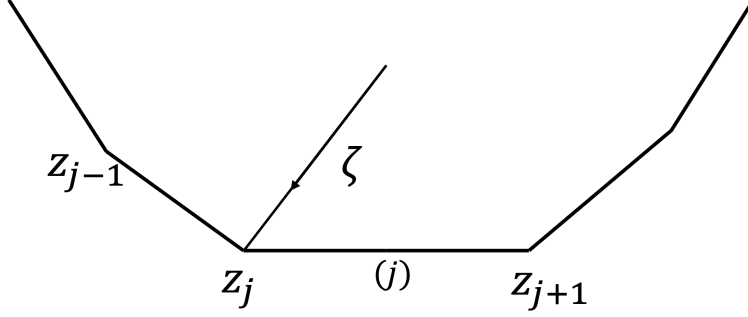
$$0 \leq \arg(k) + \arg(z - \zeta) \leq \pi.$$

Αν η μεταβλητή ζ βρίσκεται μέσα στο κυρτό πολύγωνο τότε από το σχ. 4.1 βλέπουμε ότι

$$\arg(z_{j+1} - z_j) \leq \arg(z - \zeta) \leq \arg(z_{j-1} - z_j),$$

και άρα προκύπτει η ανισότητα

$$-\arg(z_{j+1} - z_j) \leq \arg(k) \leq \pi - \arg(z_{j-1} - z_j).$$



Σχήμα 4.1: Κυρτό πολύγωνο στο μιγαδικό επίπεδο.

Για κάθε $\Sigma_j = \{k \in \mathbb{C} : -\arg(z_{j+1} - z_j) \leq \arg(k) \leq \pi - \arg(z_{j-1} - z_j)\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$ η συνάρτηση μ_j είναι αναλυτική με

$$\mu = O(1/k), k \rightarrow \infty,$$

και το άλμα προκύπτει στην τομή δύο πλευρών Σ_j, Σ_{j+1}

$$\mu_j - \mu_{j+1} = e^{ikz} \hat{p}_j(k), k \in l_j,$$

όπου $l_j = \{k \in \mathbb{C} : \arg(k) = -\arg(z_{j+1} - z_j)\}$ η ακτίνα που οι δύο πλευρές τέμνονται. Η επίλυση του προβλήματος RH δίνει

$$\mu = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^N \int_{l_j} e^{ilz} \hat{p}_j(l) \frac{dl}{l-k}.$$

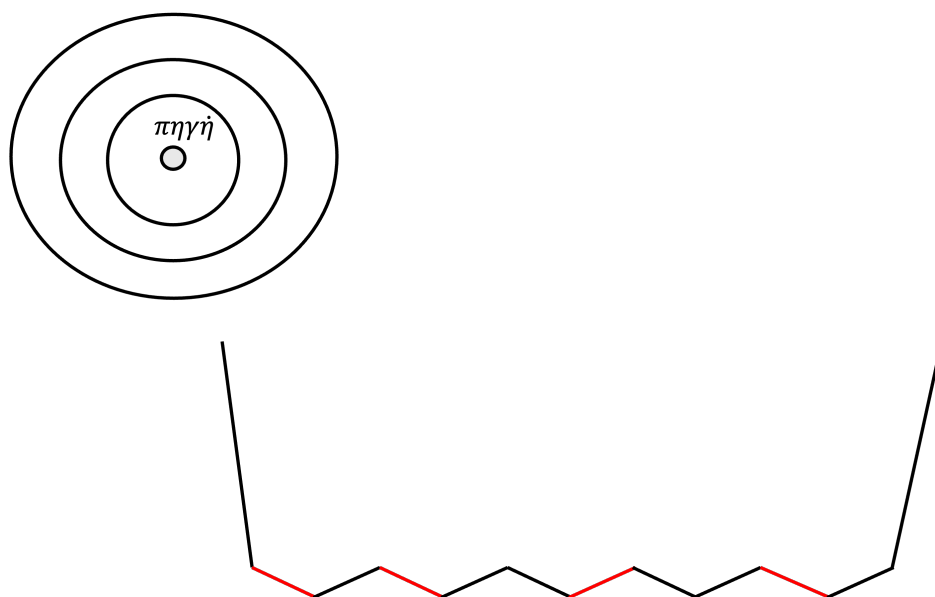
Με αντικατάσταση στην (4.18), προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση της παραγώγου της λύσης ως

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{l_j} e^{ikz} \hat{p}_j(k) dk.$$

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό παίρνουμε

$$\hat{p} = \frac{1}{2} \int_{z_j}^z e^{-ikz} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} ds. \quad (4.20)$$

Η παραπάνω λύση θα μπορούσε, ενδεχομένως, να εφαρμοστεί σε προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος στο εσωτερικό κοιλοτήτων, των οποίων η γεωμετρία προσεγγίζεται ως κυρτό πολύγωνο με N κορυφές. Μια συστηματική σύγκριση των λύσεων (4.20) για διαφορετικές γεωμετρίες θα μπορούσε να συμβάλει στη διερεύνηση της καταλληλότητας κοιλοτήτων με χαρακτηριστικά μείωσης του ακουστικού θορύβου. Η χρήση του EM επιτρέπει, επιπλέον, την επιλογή αυθαίρετων συνοριακών συνθηκών στο σύνορο, οδηγώντας στη μοντελοποίηση ακόμη πιο σύνθετων προβλημάτων, όπως η περίπτωση χρήσης απορροφητικών υλικών στον πυθμένα της κοιλότητας. Το πρόβλημα απεικονίζεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Σχηματική αναπαράσταση σκέδασης ακουστικών κυμάτων στο εσωτερικό κοιλότητας με αυθαίρετη γεωμετρία. Οι κόκκινες γραμμές αντιστοιχούν σε πλευρές της κοιλότητας με απορροφητικό υλικό (διαφορετική συνοριακή συνθήκη).

Σύνοψη και μελλοντική εργασία

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η μέθοδος του Φωκά (ενοποιημένου μετασχηματισμού) για την επίλυση ΠΑΣΤ που σχετίζονται με εξισώσεις εξέλιξης σε μία διάσταση καθώς επίσης και η εφαρμογή της σε ελλειπτικές εξισώσεις (Helmholtz, Laplace). Η μέθοδος αυτή επιλύει προβλήματα στα οποία οι κλασικές τεχνικές δεν μπορούν να εφαρμοστούν και δίνει αναλυτικές λύσεις με την μορφή ολοκληρωτικής αναπαράστασης που μπορούν εύκολα να υπολογιστούν αριθμητικά με κατάλληλη χρήση της μιγαδικής ανάλυσης (παραμόρφωση χωρίου ολοκλήρωσης, θεώρημα υπολοίπων).

Πιο συγκεκριμένα, οι κύριες συνεισφορές της εργασίας ήταν η επίλυση της εξίσωσης διάχυσης με σταθερό πηγαίο όρο σε πεπερασμένο διάστημα μίας χωρικής διάστασης και παρουσιάστηκαν εφαρμογές αυτού του μαθηματικού προβλήματος στην στράγγιση και διήθηση του νερού στο έδαφος. Στη συνέχεια, συζητήθηκε η γραμμικοποιημένη εξίσωση KdV και επιλύθηκε σε πεπερασμένο διάστημα.

Τέλος, στο τελευταίο μέρος της εργασίας γίνεται μία σύντομη βιβλιογραφική αναφορά στα προβλήματα αεροακουστικής και παρουσιάζονται κάποιες πρόσφατες εφαρμογές του ενοποιημένου μετασχηματισμού σε αυτά. Ο ΕΜ παρέχει το κατάλληλο πλαίσιο για την ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων αεροακουστικής.

Κάποιες προτάσεις για μελλοντική έρευνα είναι οι παρακάτω

- Κεφάλαιο 2: επίλυση της εξίσωσης διάχυσης με μη σταθερό όρο πηγής. Μία κατάλληλη φυσική εφαρμογή είναι η χρήση του όρου πηγής για να μοντελοποιηθούν βροχοπτώσεις σε υδρογεωλογικές εφαρμογές.
- Κεφάλαιο 3: αριθμητικός υπολογισμός της αναλυτικής λύσης για συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Βιβλιογραφία

- [1] Karamouzis, D. and Zissis, T. and Terzidis, G. Non-dimensional diagrams for unsteady drainage problems with or without recharge. *Agricultural Water Management*, 13:145–156, 1988.
- [2] Fokas, A. S. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 453(1962): 1411–1443, 1997.
- [3] Fokas, A. S. A new transform method for evolution partial differential equations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 67(6):559–590, 2002.
- [4] Fokas, A. and Kaxiras, E. *Modern Mathematical Methods for Scientists and Engineers: A Street-Smart Introduction*. World Scientific, 2023.
- [5] Fokas, A. S. and Kalimeris, K. Eigenvalues for the Laplace operator in the interior of an equilateral triangle. *Computational Methods and Function Theory*, 14(1):1–33, 2014.
- [6] Fokas, A. S. and Kalimeris, K. Extensions of the d’Alembert formulae to the half line and the finite interval obtained via the unified transform. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 87(6):1010–1042, 2022.
- [7] Kalimeris, K. and Mindrinos, L. Scattering problems for the wave equation in 1D: d’Alembert-type representations and a reconstruction method. *Partial Differential Equations and Applications*, 5(2):5, 2024.
- [8] Childs, E. O. and Collis-George, N. The permeability of porous materials. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1066):392–405, 1950.
- [9] Rubin, Jacob and Steinhardt, R. Soil water relations during rain infiltration: I. Theory. *Soil Science Society of America Journal*, 27(3):246–251, 1963.
- [10] Karamouzis, D. N. and Teloglou, I. S. Analytical solutions of unsteady drainage problems for soils subjected to variable recharge from a semi-confined aquifer. *Water Resources Management*, 7(2):153–168, 1993.
- [11] Kalimeris, K. and Mindrinos, L. An Analytical Solution to the 1D Drainage Problem. *Mathematics*, 13(20):3279, 2025.
- [12] Fokas, A. S. and Kalimeris, K. Water waves with moving boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 832: 641–665, 2017.
- [13] Colbrook, Matthew J. and Ayton, Lorna J. A spectral collocation method for acoustic scattering by multiple elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 461:114904, 2019.
- [14] Naqvi, S. B. and Ayton, L. J. A Periodic Extension to the Fokas Method for Acoustic Scattering by an Infinite Grating. MDPI, 2025.
- [15] Fokas, A. S. *A unified approach to boundary value problems*. SIAM, 2008.

- [16] Lax, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm Pure Appl Math*, 21, sep 1968.
- [17] Kalimeris, K. Lecture Notes for Boundary Value Problems for Linear PDEs.
- [18] Fourier J. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [19] Fick A. Über Diffusion. *Annalen der Physik*, 170(1):59–86, 1855.
- [20] Einstein, A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549–560, $\Theta\alpha\nu\nu\alpha\phi$ 1905.
- [21] Lighthill, M. J. On sound generated aerodynamically I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 211(1107):564–587, 1952.
- [22] Curle, N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 231(1187):505–514, 1955.
- [23] Gloerfelt, X and Pérot, F and Bailly, C and Juvé, D. Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low Mach numbers. *Journal of Sound and Vibration*, 287(1-2):129–151, 2005.
- [24] Howe, M. S. A review of the theory of trailing edge noise. *Journal of Sound and Vibration*, 61(3): 437–465, 1978.
- [25] Doolan, Con J. and Moreau, Danielle J. A review of airfoil trailing edge noise with some implications for wind turbines. *International Journal of Aeroacoustics*, 14(5-6):811–832, 2015.
- [26] Lee, S. and Ayton, L. and Bertagnolio, F. and Moreau, S. and Chong, T. P. and Joseph, P. Turbulent boundary layer trailing-edge noise: Theory, computation, experiment, and application. *Progress in Aerospace Sciences*, 126:100737, 2021.
- [27] Amiet, R. K. Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream. *Journal of Sound and Vibration*, 41(4):407–420, 1975.
- [28] Roger, M. and Moreau, S. Back-scattering correction and further extensions of Amiet’s trailing-edge noise model. Part 1: theory. *Journal of Sound and Vibration*, 286(3):477–506, 2005.
- [29] Hales, A. D.G. and Ayton, L. J. and Jiang, C. and Mahgoub, A. and Kisler, R. and Dixon, R. and de Silva, C. and Moreau, D. and Doolan, C. A mathematical model for the interaction of anisotropic turbulence with a rigid leading edge. *Journal of Fluid Mechanics*, 970:A29, 2023.
- [30] Bowman, J. J. and Senior, T. B.A. and Uslenghi, P. L.E. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes (Revised edition). *New York*, 1987.
- [31] Howe, M. S. Edge-source acoustic green’s function for an airfoil of arbitrary chord, with application to trailing-edge noise. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 54(1):139–155, 02 2001.
- [32] Colbrook, M. J. and Ayton, L. J. and Fokas, A. S. The unified transform for mixed boundary condition problems in unbounded domains. *Proc. R. Soc. A.*, 475(2222):20180605, 2019.
- [33] Colbrook, M. J. and Ayton, L. J. A spectral collocation method for acoustic scattering by multiple elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 461:114904, 2019.
- [34] S. B. Naqvi and L. J. Ayton. Acoustic scattering by multi-layered gratings. *Journal of Sound and Vibration*, 610:119083, 2025.
- [35] Kalimeris, K. and Fokas, A. S. The Modified Helmholtz Equation on a Regular Hexagon—The Symmetric Dirichlet Problem. *Axioms*, 9(3):89, 2020.
- [36]

- [37] Howe, M. S. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, 71(4):625–673, 1975.
- [38] Spiropoulos, M. I. and Margnat, F. and Valeau, V. and Jordan, P. Aeroacoustics of vortex–wedge interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 2025.

Παράρτημα Α΄

Εξίσωση διάχυσης

Α΄.1 Επαλήθευση της γενικής λύσης

Για $t = 0$

$$2\pi\hat{u}(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikx} dk - \int_{\partial D^-} \left(-\frac{v(k, t) - v(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{ik(x-L)} dk - \int_{\partial D^+} \left(\frac{-v(k, t)e^{ikL} + v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ikx} \right) dk. \quad (\text{A'.1})$$

Παραμορφώνουμε το χωρίο ∂D^- στο ∂D^+ , κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $k_1 = -k$ (στροφή κατά π).

$$2\pi\hat{u}(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikx} dk - \int_{\partial D^+} \left(\frac{v(-k, t) - v(k, t)}{e^{ikL} - e^{-ikL}} e^{ik(L-x)} \right) dk - \int_{\partial D^+} \left(\frac{-v(k, t)e^{ikL} + v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ikx} \right) dk,$$

Για $\Im\{k\} > 0, k \rightarrow \infty, |e^{-ikL}| \rightarrow \infty$ και $\tilde{g}_j(k^2, 0) = \tilde{h}_j(k^2, 0) = \tilde{f}(k^2, 0) = 0$, συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{v(-k, t) - v(k, t)}{e^{ikL} - e^{-ikL}} &\approx -\frac{v(-k, t) - v(k, t)}{e^{-ikL}} \\ v(-k, t) &= \hat{u}(-k, 0) + \hat{f}(-k, t) = \int_0^L (u(x, 0) + f(x, t)) e^{ikx} dx \\ v(-k, t) &\sim \frac{1}{ik} + O(1/k) \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\frac{-v(k, t)e^{ikL} + v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} e^{ikx} = -e^{ikL} \int_0^L (u(x, 0) + f(x, t)) e^{-ikx} dx + v(-k, t)$$

και άρα από λήμμα Jordan,

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikx} dk = u(x, 0).$$

Επαλήθευση της συνοριακής συνθήκης $u(0, t) = g_0(0, t)$

Εφαρμόζοντας την συνθήκη Dirichlet στο $x = 0$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{-k^2t} dk - \int_{\partial D^-} ik\tilde{h}_0(k^2, t)e^{-ikL-k^2t} dk - \int_{\partial D^+} ik\tilde{g}_0(k^2, t)e^{-k^2t} dk \\ &\quad - \int_{\partial D^-} \left(-\frac{v(k, t) - v(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - ik\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2, t) + \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{g}_0(k^2, t) \right) e^{-ikL-k^2t} dk \\ &\quad - \int_{\partial D^+} \left(-\frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}}\tilde{h}_0(k^2, t) + ik\tilde{g}_0(k^2, t) \left(\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) + \frac{-v(k, t)e^{ikL} + v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk. \end{aligned} \quad (\text{A'.2})$$

Παραμορφώνουμε το χωρίο ∂D^- στο ∂D^+ , κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $k_1 = -k$ ¹.

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(0, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{-k^2t}dk + \int_{\partial D^+} \left[\left(-ik e^{ikL} + ik \frac{e^{ikL} + e^{-ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} e^{ikL} + \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) \tilde{h}_0(k^2, t)e^{-k^2t} \right. \\ & - \left(ik + \frac{2ik}{e^{ikL} - e^{-ikL}} e^{ikL} + ik \frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) \tilde{g}_0(k^2, t)e^{-k^2t} \\ & \left. + \left(\frac{-v(-k, t)e^{ikL} + v(k, t)e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} - \frac{v(k, t)e^{ikL} - v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \right) e^{-k^2t} \right] dk. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(0, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{-k^2t}dk - \int_{\partial D^+} v(-k, t)e^{-k^2t}dk \\ & - \int_{\partial D^+} 2ik\tilde{g}_0(k^2, t)e^{-k^2t}dk. \end{aligned}$$

Παραμορφώνουμε το ∂D^+ στην πραγματική ευθεία και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $k_1 = -k$

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(0, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{-k^2t}dk + \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{-k^2t}dk \\ & - \int_{\partial D^+} 2ik\tilde{g}_0(k^2, t)e^{-k^2t}dk = - \int_{\partial D^+} 2ik\tilde{g}_0(k^2, t)e^{-k^2t}dk \end{aligned}$$

Επαλήθευση της συνοριακής συνθήκης $u(L, t) = h_0(k^2, t)$

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(L, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikL-k^2t}dk - \int_{\partial D^-} ik\tilde{h}_0(k^2, t)e^{-k^2t}dk - \int_{\partial D^+} ik\tilde{g}_0(k^2, t)e^{ikL-k^2t}dk \\ & - \int_{\partial D^-} \left(-\frac{v(k, t) - v(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} - ik \frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) + \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) \right) e^{-k^2t}dk \\ & - \int_{\partial D^+} \left(-\frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) + ik\tilde{g}_0(k^2, t) \left(\frac{e^{-ikL} + e^{ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) + \frac{-v(k, t)e^{ikL} + v(-k, t)e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{ikL-k^2t}dk. \end{aligned} \quad (A'.3)$$

Παραμορφώνουμε το χωρίο ∂D^- στο ∂D^+ , κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $k_1 = -k$ (στροφή κατά π).

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{u}(L, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t)e^{ikL-k^2t}dk - \int_{\partial D^+} v(k, t)e^{ikL-k^2t}dk \\ & + \int_{\partial D^+} \left(\frac{2ike^{-ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) - \frac{2ik}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) \right) e^{-k^2t}dk \\ & + \int_{\partial D^+} \left(-\frac{2ike^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) + \frac{2ik}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) \right) e^{-k^2t}dk = \int_{\partial D^+} -2ik\tilde{h}_0(k^2, t)e^{-k^2t}dk \end{aligned}$$

A'.1.1 Επαλήθευση ικανοποίησης της διαφορικής εξίσωσης

Υπολογίζουμε τις παραγώγους της λύσης

¹Σημειώνεται ότι αφού k, k_1 είναι μεταβλητές ολοκλήρωσης μπορούμε να εκφράσουμε την τελική μορφή του ολοκληρώματος ως προς k , θέτοντας $k_1 \equiv k$.

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(v(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Υπολογίζουμε την u_{xx}

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k^2 v(k, t) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -k^2 \left(v(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} -k^2 \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -k^2 \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} -k^2 \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -k^2 \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

και για την πρώτη παράγωγο της u ως προς τον χρόνο παίρνουμε

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -k^2 v(k, t) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -k^2 \left(v(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} -k^2 \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -k^2 \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{g}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} -k^2 \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} -k^2 \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \tilde{h}_0(k^2, t) e^{ikx-k^2t} dk \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_t(k, t) e^{ikx-k^2t} dk - \int_{\partial D^+} \left(v_t(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v_t(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \frac{\partial \tilde{g}_0}{\partial t} e^{ikx-k^2t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \frac{\partial \tilde{g}_0}{\partial t} e^{ikx-k^2t} dk \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial t} e^{ikx-k^2t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial t} e^{ikx-k^2t} dk
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Παραγωγίζοντας την (2.20)

$$v_t(k, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{k^2\tau} \left(\int_0^L f(x, \tau) e^{-ikx} dx \right) d\tau = e^{k^2t} \int_0^L f(x, t) e^{-ikx} dx, \tag{A.7}$$

$$v_t(-k, t) = e^{k^2t} \int_0^L f(x, t) e^{ikx} dx, \tag{A.8}$$

Για τα ολοκληρώματα που περιέχουν τις συναρτήσεις $v_t(\pm k)$ γράφουμε

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_t(k, t) e^{ikx-k^2t} dk = f(x, t) \tag{A.9}$$

$$I_2 = \int_{\partial D^+} \left(v_t(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + v_t(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) e^{-k^2t} dk \tag{A.10}$$

$$= \int_{\partial D^+} \left(\hat{f}(k, t) \frac{e^{ik(L-x)} - e^{ik(L+x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} + \hat{f}(-k, t) \frac{e^{-ik(L-x)} - e^{ik(L-x)}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \right) dk \tag{A.11}$$

Δείχνουμε ότι $I_2 = 0$ χρησιμοποιώντας το λήμμα Jordan. Αρχικά, γνωρίζουμε ότι για $\Im\{k\} > 0, k \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{f}(k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} = \frac{\int_0^L f(x, t) e^{-ikx} dx}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \sim -\frac{f(L, t)}{ik}$$

$$\frac{f(-k, t)}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \sim \frac{f(L, t) e^{ikL} - f(0, t)}{ike^{-ikL}}.$$

Συνεπώς η προς ολοκλήρωση ποσότητα του I_2 φθίνει για $\Im\{k\} > 0, k \rightarrow \infty$ και εφαρμόζοντας το λήμμα Jordan και άρα $I_2 = 0$.

Αντίστοιχα, για τα ολοκληρώματα που περιέχουν $\frac{\partial \tilde{h}_j}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial t}$, έχουμε

$$\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial t} = e^{k^2 t} g_j(t) \quad (\text{A'.12})$$

$$\frac{\partial \tilde{h}_j}{\partial t} = e^{k^2 t} h_j(t), \quad (\text{A'.13})$$

συνεπώς

$$I_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} g_0(t) e^{ikx} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik e^{-ikL}}{e^{-ikL} - e^{ikL}} g_0(t) e^{ikx} dk$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} h_0(t) e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik}{e^{-ikL} - e^{ikL}} h_0(t) e^{ikx} dk = 0 \quad (\text{A'.14})$$

Εφαρμόζουμε ξανά το λήμμα του Jordan.

- $\Im\{k\} > 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow |e^{-ikL}| \rightarrow \infty$
- $\Im[k] \rightarrow -\infty \Rightarrow |e^{ikL}| \rightarrow \infty$

και άρα $I_3 = 0$. Τέλος, από τις (A'.5), (A'.6), (A'.9), (A'.10) (A'.14) προκύπτει ότι

$$u_t = u_{xx} + f(x, t).$$

A'.2 Υπολογισμοί όρων της λύσης

Υπολογισμός I_{v_1}

$$I_{v_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx} e^{-k^2 t} dk$$

$$I_{v_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi L (1 + e^{-ikL})}{k^2 L^2 - \pi^2} + \frac{iq e^{-ikL} (-1 + e^{ikL}) (e^{k^2 t} - 1)}{k^3} \right) e^{ikx} e^{-k^2 t} dk$$

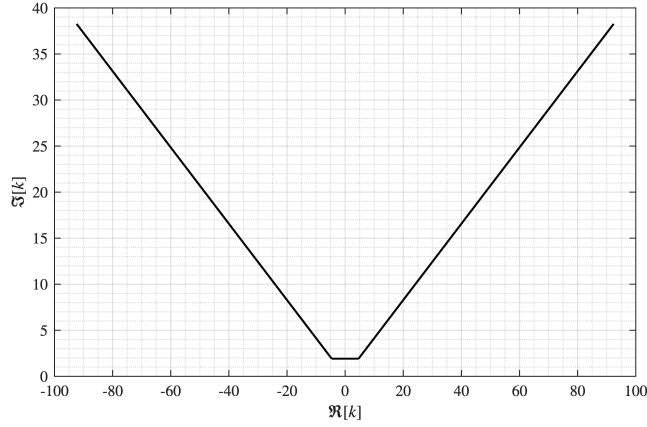
$$I_{v_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi L}{k^2 L^2 - \pi^2} e^{ikx - k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi L}{k^2 L^2 - \pi^2} e^{-ik(L-x) - k^2 t} dk$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iq}{k^3} e^{-ik(L-x) - k^2 t} (e^{k^2 t} - 1) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iq}{k^3} e^{ikx - k^2 t} (e^{k^2 t} - 1) dk \quad (\text{A'.15})$$

Οι πράξεις απλοποιούνται παραμορφώνοντας την πραγματική ευθεία στο σύνορο του ∂D^+ , το οποίο παραμορφώνεται στην καμπύλη C^+ (σχήμα A'.1) στην οποία θα γίνει η αριθμητική ολοκλήρωση. Ορίζουμε την C^+ ως

$$C^+ := \left\{ k_1 = re^{\frac{i7\pi}{8}}, r > 5 \right\} \cup \left\{ k_2 = re^{\frac{i\pi}{8}}, r > 5 \right\} \cup \left\{ k_3 = s + 5e^{7i\pi/8}, s \in [0, 10\Re\{e^{\frac{i\pi}{8}}\}] \right\}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $k = -k$, η (A'.15) γίνεται



Σχήμα Α'.1: Καμπύλη C^+ .

$$I_{v_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi L}{k^2 L^2 - \pi^2} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) e^{-k^2 t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iq}{k^3} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) e^{-k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iq}{k^3} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) dk. \quad (\text{A'.16})$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των υπολοίπων το ολοκλήρωμα της επιφάνειας του σχήματος (Α'.2) υπολογίζεται ως

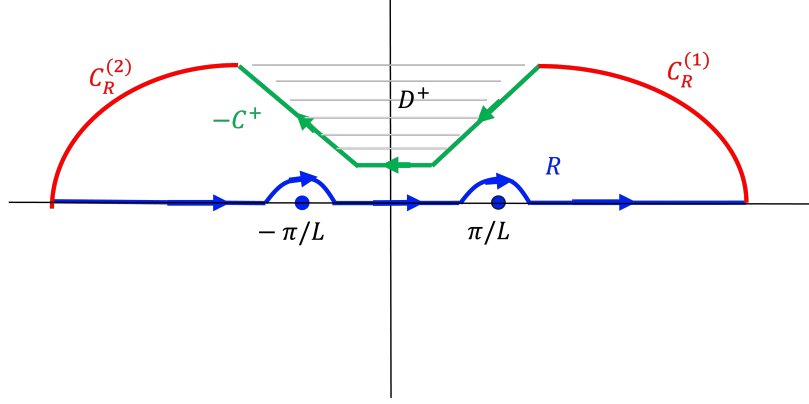
$$\begin{aligned} I_R - I_{C^+} + I_{C_R^{(1)}} + I_{C_R^{(2)}} &= i\pi \text{Res} \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{\pi/L (k - \pi/L)}{(k - \pi/L)(k + \pi/L)} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) e^{-k^2 t} \right]_{k=\pi/L} \\ &\quad + i\pi \text{Res} \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{\pi/L (k + \pi/L)}{(k - \pi/L)(k + \pi/L)} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) e^{-k^2 t} \right]_{k=-\pi/L} \\ I_R &= I_{C^+} - \frac{i}{4} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \left(\left(e^{i\frac{\pi}{L}x} + e^{i\frac{\pi}{L}(L-x)} \right) - \left(e^{-i\frac{\pi}{L}x} + e^{-i\frac{\pi}{L}(L-x)} \right) \right) \\ I_R &= I_{C^+} - \frac{i}{4} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} (2i \sin(\pi x/L) + 2i \sin(\pi - \pi x/L)) \\ I_R &= I_{C^+} + e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \sin(\pi x/L). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για το δεύτερο ολοκλήρωμα

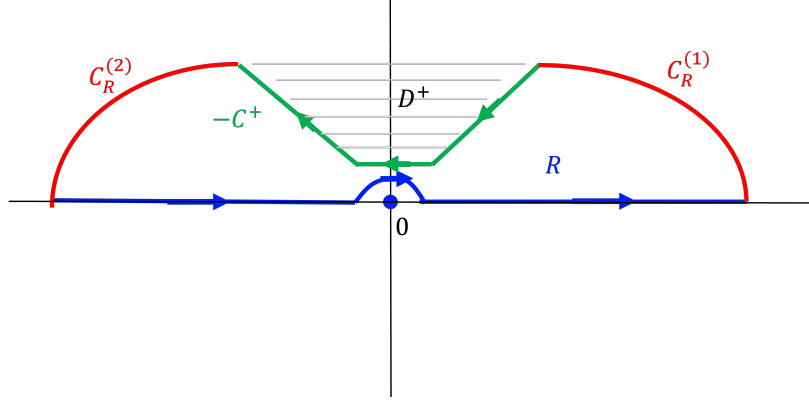
$$I_R = I_{C^+} + qt,$$

και τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} I_{v_1} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{\pi L}{k^2 L^2 - \pi^2} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) e^{-k^2 t} dk + \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \sin(\pi x/L) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{iq}{k^3} \left(e^{ikx} + e^{ik(L-x)} \right) e^{-k^2 t} dk + qt. \end{aligned} \quad (\text{A'.17})$$



(α') Πρώτο ολοκλήρωμα της (Α'.16).



(β') Δεύτερο ολοκλήρωμα της (Α'.16).

Σχήμα Α'.2: Παραμόρφωση της πραγματικής ευθείας στην καμπύλη C^+ λαμβάνοντας υπόψη τους πόλους $0, \pm\pi/L$.

Υπολογισμός I_{v_2}

$$I_{v_2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(v(k, t) \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} e^{ikL} + v(-k, t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \right) e^{-k^2 t} dk$$

$$I_{v_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(\frac{\pi L (1 + e^{-ikL})}{k^2 L^2 - \pi^2} + \frac{iq e^{-ikL} (-1 + e^{ikL}) (e^{k^2 t} - 1)}{k^3} \right) \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} e^{ikL} e^{-k^2 t} dk$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left(-\frac{\pi L (1 + e^{ikL})}{k^2 L^2 - \pi^2} + \frac{iq e^{ikL} (-1 + e^{-ikL}) (e^{k^2 t} - 1)}{k^3} \right) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} e^{-k^2 t} dk$$

$$I_{v_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{\pi L}{k^2 L^2 - \pi^2} (1 + e^{ikL}) \frac{\sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} e^{-k^2 t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{iq}{k^3} (e^{ikL} - 1) \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} dk$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{iq}{k^3} (e^{ikL} - 1) \frac{\sin(kx)}{\sin(kL)} e^{-k^2 t} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{iq}{k^3} (1 - e^{ikL}) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} dk$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{iq}{k^3} (1 - e^{ikL}) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} e^{-k^2 t} dk$$

Από εφαρμογή του Θ. Cauchy και του Θ. υπολοίπων

$$I_{v_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \left(\frac{\pi L (1 + e^{-ikL})}{k^2 L^2 - \pi^2} + \frac{i q (1 - e^{ikL})}{k^3} \right) \frac{\sin(kx) + \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} e^{-k^2 t} dk + \cancel{\frac{L^2 q}{32}} \cancel{\frac{L^2 q}{32}} \quad (\text{A'.18})$$

Υπολογισμός $I_{\tilde{g}_0}, I_{\tilde{h}_0}$

Τα ολοκληρώματα που σχετίζονται με τις συνοριακές συνθήκες γράφονται ως

$$\begin{aligned} I_{\tilde{g}_0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \left(\frac{e^{k^2 t} (k^2 \sin(t) - \cos(t)) + 1}{k^4 + 1} \right) e^{-k^2 t} dk \\ I_{\tilde{h}_0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(kx)}{\sin(kL)} \left(\frac{e^{k^2 t} - 1}{k^2} - \frac{e^{k^2 t} e^{-t} - 1}{k^2 - 1} \right) e^{-k^2 t} dk \\ I_{\tilde{g}_0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \left(\frac{(k^2 \sin(t) - \cos(t)) + e^{-k^2 t}}{k^4 + 1} \right) dk \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{2ik \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \left(\frac{(k^2 \sin(t) - \cos(t)) + e^{-k^2 t}}{k^4 + 1} \right) dk \\ I_{\tilde{h}_0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{2ik \sin(kx)}{\sin(kL)} \left(\frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} - \frac{e^{-t} - e^{-k^2 t}}{k^2 - 1} \right) dk \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{2ik \sin(kx)}{\sin(kL)} \left(\frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} - \frac{e^{-t} - e^{-k^2 t}}{k^2 - 1} \right) dk. \end{aligned}$$

Από θεώρημα Cauchy

$$I_{\tilde{g}_0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{2ik \sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \frac{e^{-k^2 t}}{k^4 + 1} dk \quad (\text{A'.19})$$

$$I_{\tilde{h}_0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{2ik \sin(kx)}{\sin(kL)} \frac{e^{-k^2 t}}{k^2 (k^2 - 1)} dk. \quad (\text{A'.20})$$

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα: Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.