



**ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ (ΔΙΠ)**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Εφαρμογή Διαγραμμάτων Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας σε  
Βιομηχανικές Διεργασίες**

**ΚΑΡΑΝΤΩΝΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ**

**ΑΛΕΒΙΖΑΚΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ**

**ΠΑΤΡΑ  
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2024**

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή/φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

## **Εφαρμογή Διαγραμμάτων Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας σε Βιομηχανικές Διεργασίες**

Βασιλική Καραντώνη

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής/Επιβλέπουσα  
Καθηγήτρια:

Βασίλειος Αλεβιζάκος

Διδάκτωρ της Σχολής Εφαρμοσμένων  
Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής/Συν-  
Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:

Σωτήρης Μπερσίμης

Καθηγητής του Τμήματος Οργάνωσης και  
Διοίκησης Επιχειρήσεων του  
Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πάτρα, Ιούνιος 2024

*Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη τους και τον καθηγητή μου,  
Βασίλη για την πολύτιμη βοήθεια του.*

## Περίληψη

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει ως σκοπό την εφαρμογή εργαλείων Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας σε βιομηχανική διεργασία υποσυσκευασίας φυτοφαρμακευτικών προϊόντων. Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας γίνεται εφαρμογή διαγραμμάτων ελέγχου, με σκοπό την παρακολούθηση της υπό μελέτη διεργασίας. Η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου στοχεύει στην ανίχνευση αλλαγών στη μέση τιμή των μετρήσιμων χαρακτηριστικών των προϊόντων και συγκεκριμένα στο βάρος φιαλών των προϊόντων που υποσυσκευάζονται. Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της διεργασίας, η ανάλυση των δεδομένων της καθώς και η αξιολόγηση αν η διεργασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου ή όχι, εξετάζοντας τη σταθερότητα της υπό μελέτη διεργασίας. Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται στα πλαίσια συνεχούς βελτίωσης της εταιρίας και στην αναγνώριση πιθανών αιτιών που προκαλούν μεταβολές στο υπό μελέτη μετρήσιμο χαρακτηριστικό, στοχεύοντας στη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων.

Η εργασία αποτελείται από 6 μέρη. Στο πρώτο μέρος αναλύεται ο όρος της ποιότητας, ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας, οι δείκτες ικανότητας διεργασίας, ο έλεγχος κατανομής διεργασίας καθώς και τα μέτρα απόδοσης. Στο Κεφάλαιο 2 πραγματοποιείται η ανάλυση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart. Στο Κεφάλαιο 3 πραγματοποιείται η ανάλυση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου CUSUM και στο Κεφάλαιο 4 πραγματοποιείται η ανάλυση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA. Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται η στατιστική ανάλυση του βάρους των υποσυσκευασμένων προϊόντων με χρήση του στατιστικού πακέτου *Minitab* και στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εφαρμογής των εργαλείων Στατιστικού Ελέγχου και προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση.

## Λέξεις – Κλειδιά

Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας, Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart, Διαγράμματα Ελέγχου με μνήμη

# Application of Statistical Quality Control Charts in Industrial Processes

Vasiliki Karantoni

## Abstract

The purpose of this thesis is the application of Statistical Quality Control tools in the industrial process of sub-packaging phytopharmaceutical products. Control charts are used, in order to monitor the process under study. The use of control charts aims to detect changes in the average value of the measurable characteristics of the products and specifically in the bottle weight of the products that are underpackaged. The aim of the thesis is the study of the process, the analysis of its data as well as the evaluation of whether the process is within statistical control or not, examining the stability of the process. Control charts are used in the context of continuous improvement and in the identification of possible causes that cause changes in the measurable characteristic under study, aiming to improve the quality of the produced products.

The thesis consists of 6 parts. The first part analyzes the term quality, statistical quality control, process capability indicators as well as average run length. In Chapter 2 the analysis of Shewhart control charts is carried out. Chapter 3 analyzes CUSUM control charts and Chapter 4 analyzes EWMA control charts. In Chapter 5, the statistical analysis of the weight of the subpackaged products is done using the statistical package Minitab, and in Chapter 6, the conclusions of the application of the Statistical Control tools and suggestions for further investigation are presented.

## Keywords

Statistical Process Control, Shewhart Control Charts, Memory Type Control Charts

## Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract .....	vi
Περιεχόμενα .....	vii
Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων .....	ix
Κατάλογος Πινάκων .....	x
Συντομογραφίες & Ακρωνύμια.....	xi
1. Εισαγωγή.....	1
1.1. Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας .....	3
1.2. Διαγράμματα Ελέγχου.....	6
1.3. Ανάλυση Δυνατοτήτων Παραγωγικής Διαδικασίας .....	13
1.4. Έλεγχος Κατανομής Παραγωγικής Διαδικασίας .....	15
1.5. Δείκτες Ικανότητας Παραγωγικής Διαδικασίας.....	19
1.6. Φάση I και Φάση II .....	24
1.7. Μέτρα Απόδοσης Διαγράμματος Ελέγχου .....	26
2. Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart.....	28
2.1. Διαγράμματα ελέγχου μέσης τιμής .....	28
2.2. Διάγραμμα ελέγχου εύρους.....	31
2.3. Διάγραμμα ελέγχου τυπικής απόκλισης.....	33
2.4. Σχεδιασμός Διαγραμμάτων τύπου Shewhart .....	35
3. Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου (Cumulative Sum Control Charts)	38
3.1. Διαγράμματα Ελέγχου με μνήμη .....	38
3.2. Αθροιστικά Διαγράμματα (CUSUM) .....	40
3.2.1. Αλγοριθμική Μέθοδος (CUSUM) για το μέσο μιας διεργασίας.....	41
3.2.2. Μέσο Μήκος Ροής .....	43
3.2.3. Μέθοδος V μάσκας .....	45
3.2.4. Μέθοδος της άμεσης αρχικής αντίδρασης .....	47
3.2.5. Διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά .....	47
4. Διαγράμματα Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (Exponentially Weighted Moving Average Control Charts) .....	49
4.1. Εισαγωγή.....	49
4.2. Δομή EWMA διαγράμματος.....	50
4.3. Μέσο μήκος ροής.....	52
4.4. Η περίπτωση του κινητού μέσου .....	54
5. Παραγωγική Διαδικασία- Μελέτη Περίπτωσης.....	56
5.1. Εισαγωγή και δεδομένα .....	56
5.2. Έλεγχος κατανομής του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας .....	59
5.3. Χρήση Διαγράμματος μέσης τιμής- τυπικής απόκλισης για ανάλυση βαρών φιαλών υποσυσκευασμένων προϊόντων για τη Φάση I .....	61
5.4. Χρήση Διαγράμματος μέσης τιμής- τυπικής απόκλισης για ανάλυση βαρών φιαλών υποσυσκευασμένων προϊόντων για μετατόπιση μέσου (Φάση II).....	65
5.5. Χρήση Συσσωρευμένων Αθροιστικών Διαγραμμάτων Ελέγχου (CUSUM).....	68
5.6. Χρήση Διαγραμμάτων Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη .....	76

6. Συμπεράσματα .....	78
Βιβλιογραφία.....	79
Παράρτημα Α: Συντελεστές για τα Διαγράμματα Ελέγχου (Montgomery,2013) .....	83
Παράρτημα Β: Έλεγχος Κανονικότητας.....	84



## Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Εικόνα 1 Διάγραμμα φάσεων χρήσης στατιστικών μεθόδων <sup>1</sup> .....	4
Εικόνα 2 Επίδραση της ειδικής μεταβλητότητας.....	9
Εικόνα 3 Επίδραση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στην εντός ελέγχου μέση τιμή και τυπική απόκλιση μιας διεργασίας σε διάφορες χρονικές στιγμές .....	10
Εικόνα 4 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου .....	12
Εικόνα 5 Όρια ανοχών κανονικής κατανομής .....	14
Εικόνα 6 Σχέση ανάμεσα στους δείκτες $C_p$ και $C_{pk}$ .....	21
Εικόνα 7 Μετατόπιση της τιμής στόχου από $\mu_0$ σε $\mu_1$ .....	41
Εικόνα 8 Ανάλυση περιπτώσεων αλγοριθμικής μεθόδου CUSUM.....	42
Εικόνα 9 V μάσκα.....	45
Εικόνα 10 Αποδοχές απόφασης σε διάγραμμα V μάσκας .....	47
Εικόνα 11 Ιστόγραμμα των τιμών βάρους για αναγνώριση της κατανομής.....	59
Εικόνα 12 Διάγραμμα ελέγχου προσαρμογής κατανομής Kolmogorov-Smirnov για αναγνώριση της κατανομής.....	60
Εικόνα 13 Διάγραμμα X-S για την Φάση I της υπό μελέτης παραγωγικής διαδικασίας με 25 δείγματα .....	63
Εικόνα 14 Διάγραμμα X-S για την Φάση II της υπό μελέτης παραγωγικής διαδικασίας με επιπλέον 15 δείγματα .....	66
Εικόνα 15 Διάγραμμα Ελέγχου μεθόδου CUSUM.....	70
Εικόνα 16 Διάγραμμα Ελέγχου Αλγοριθμικής μεθόδου CUSUM .....	73
Εικόνα 17 Διάγραμμα Ελέγχου Αλγοριθμικής μεθόδου CUSUM με FIR .....	75
Εικόνα 18 Διάγραμμα Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη.....	77

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1 Γενικό μοντέλο .....	7
Πίνακας 2 Μοντέλο ορίων πιθανότητας .....	8
Πίνακας 3 Συσχέτιση αριθμών τάξεων με μετρήσεων .....	15
Πίνακας 4 Βασικές μορφές ιστογραμμάτων .....	16
Πίνακας 5 Συσχέτιση $C_p$ με διεργασία .....	19
Πίνακας 6 Αντιστοιχία δεικτών $C_{pk}$ με αριθμό ελαττωματικών προϊόντων.....	21
Πίνακας 7 Γενικό μοντέλο Διαγράμματος .....	28
Πίνακας 8 Τύποι διαγραμμάτων ελέγχου εύρους .....	32
Πίνακας 9 Τύποι διαγραμμάτων $\bar{X}$ -R, Φάσης Ι.....	32
Πίνακας 10 Τύποι διαγραμμάτων $\bar{X}$ -R, Φάσης ΙΙ.....	32
Πίνακας 11 Τύποι διαγραμμάτων ελέγχου τυπικής απόκλισης .....	33
Πίνακας 12 Τύποι διαγραμμάτων $\bar{X}$ -S, Φάσης Ι.....	34
Πίνακας 13 Τύποι διαγραμμάτων $\bar{X}$ -S, Φάσης ΙΙ.....	34
Πίνακας 14 Μετατόπιση του μέσου για περιπτώσεις $h=4$ και $h=5$ .....	43
Πίνακας 15 Αποδοχές απόφασης Φάσης Ι.....	46
Πίνακας 16 Αποδοχές απόφασης Φάσης ΙΙ (Ι).....	46
Πίνακας 17 Αποδοχές απόφασης Φάσης ΙΙ (ΙΙ) .....	46
Πίνακας 18 Όρια Ελέγχου EWMA (γενικά).....	51
Πίνακας 19 Όρια Ελέγχου EWMA απλοποιημένα .....	51
Πίνακας 20 Μετατόπιση του μέσου για περιπτώσεις $\lambda=0.05$ , $\lambda=0.10$ , $\lambda=0.20$ , $\lambda=0.25$ και $\lambda=0.40$ στο $ARL_0=500$ .....	52
Πίνακας 21 Όρια Ελέγχου EWMA στην περίπτωση δειγμάτων .....	53
Πίνακας 22 Όρια Ελέγχου για διάγραμμα κινούμενου μέσου για $i \geq k$ .....	54
Πίνακας 23 Όρια Ελέγχου για διάγραμμα κινούμενου μέσου για $i \geq k$ .....	54
Πίνακας 24 Όρια Ελέγχου για διάγραμμα κινούμενου μέσου .....	55
Πίνακας 25 Βάρη φιαλών 1L κατά τη Φάση Ι.....	57
Πίνακας 26 Βάρη φιαλών 1L κατά τη Φάση ΙΙ.....	58
Πίνακας 27 Συσσωρευμένα αθροίσματα.....	69
Πίνακας 28 Πίνακας υπολογισμού $St^+$ , $St^-$ , $N^+$ , $N^-$ .....	72
Πίνακας 29 Πίνακας υπολογισμού $St_t^+$ , $St_t^-$ , $N^+$ , $N^-$ με $S_0^+ = 2$ και $S_0^- = -2$ .....	74

## Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

ΑΟΕ	Άνω Όριο Ελέγχου
ΚΓ	Κεντρική Γραμμή
ΚΟΕ	Κάτω Όριο Ελέγχου
ARL	Average Run Length
CL	Central Line
CUSUM	Cumulative Sum Control Chart
EWMA	Exponentially Weighted Moving Range
LCL	Lower Control Limit
MR	Moving Range
UCL	Upper Control Limit

## 1. Εισαγωγή

Η έννοια της ποιότητας θεωρείται ένας από τους δυσκολότερους προς ανάλυση ορισμούς, καθώς χρησιμοποιείται συχνά και για διαφορετικές περιστάσεις. Για αυτόν το λόγο μπορεί να οριστεί με πολλούς τρόπους. Σύμφωνα με τον Juran (1989), ποιότητα σημαίνει καταλληλότητα προς χρήση, με άλλα λόγια η ποιότητα αποτελεί την προσαρμογή των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας στις απαιτήσεις του καταναλωτή και κατ' επέκταση στην ικανοποίηση του. Στον παραπάνω ορισμό, δίνεται βαρύτητα στην συμμόρφωση των παραγόμενων προϊόντων και στην απουσία ελαττωμάτων και λιγότερο στον σχεδιασμό της ποιότητας. Σύμφωνα με άλλον ορισμό από τον Garvin (1987), τα χαρακτηριστικά (ή διαστάσεις) ενός προϊόντος ή υπηρεσίας, καθορίζουν την τελική ποιότητα ενός προϊόντος και σχετίζονται τόσο με την ποιότητα σχεδιασμού, όσο και με τη διαδικασία παραγωγής του προϊόντος.

Σύμφωνα με τον Αντζουλάκο (2010), η ποιότητα χαρακτηρίζεται ως αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών της παραγωγικής. Επομένως, όταν η διασπορά ενός σημαντικού χαρακτηριστικού του προϊόντος μειώνεται, τότε αυξάνεται η ποιότητά του. Σε αυτή την περίπτωση, όταν ένα προϊόν θεωρείται ότι ικανοποιεί τις απαιτήσεις των καταναλωτών, τότε η παραγωγή του γίνεται μέσα από σταθερές και επαναλαμβανόμενες διαδικασίες με τη μεταβλητότητα των χαρακτηριστικών ποιότητας του προϊόντος να είναι πολύ μικρή (Z. Jalilibal et al., 2022).

Συχνά ο όρος της ποιότητας χρησιμοποιείται για να δώσει βαρύτητα στις έννοιες της υπεροχής, της αξιοπιστίας, της αντοχής και της διάρκειας, ωστόσο η ποιότητα είναι στενά συνδεδεμένη με διάφορες απαιτήσεις και προδιαγραφές που απευθύνονται προς τους καταναλωτές. Σύμφωνα με Loureiro et al. (2018), «ποιότητα χαρακτηρίζεται ως το σύνολο των ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών ενός προϊόντος, διαδικασίας ή υπηρεσίας που καθορίζουν την ικανότητα ανταπόκρισης σε δηλωμένες ή εννοούμενες ανάγκες».

Σύμφωνα με τον Garvin (1987), οι βασικές διαστάσεις της ποιότητας είναι:

- Απόδοση: η ικανότητα του προϊόντος να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του πελάτη. Η απόδοση αναφέρεται στα κύρια λειτουργικά χαρακτηριστικά ενός προϊόντος, τα οποία συνήθως είναι αντικειμενικά και μετρήσιμα.
- Αξιοπιστία: η ικανότητα της έγκυρης και έγκαιρης εφαρμογής της «υποσχόμενης» υπηρεσίας με ακρίβεια και κατ' εξακολούθηση. Απεικονίζει την πιθανότητα βλάβης σε προκαθορισμένο χρονικό διάστημα και ένας κύριος δείκτης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι ο μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών βλαβών (Ishikawa, 1979).
- Αισθητική: ερεθίσματα που σχετίζονται με την εξωτερική εμφάνιση και τη γεύση του προϊόντος, καθώς και το είδος συσκευασίας και το σημεία πωλήσεων του προϊόντος. Τα χαρακτηριστικά αυτής της κατηγορίας είναι κυρίως υποκειμενικά, καθώς επηρεάζονται από την προσωπική κρίση του καταναλωτή και τις προτιμήσεις του και αποτελούν κρίσιμο παράγοντα στην τελική επιλογή προϊόντος.
- Αναμενόμενη Διάρκεια Ζωής: σχετίζεται με τη συχνότητα χρήσης του προϊόντος και σε πολλές περιπτώσεις ταυτίζεται με το χρόνο που η αντικατάσταση του προϊόντος είναι προτιμότερη από την επισκευή του. Η κατηγορία αυτή όπως είναι αναμενόμενο συνδέεται με την αξιοπιστία.
- Δυνατότητες: δευτερεύοντα χαρακτηριστικά που συμπληρώνουν τα κύρια, τη βασική λειτουργία του προϊόντος.
- Ικανότητα Υποστήριξης: σχετίζεται με τη διαθεσιμότητα ικανού προσωπικού, την ταχύτητα αποκατάστασης βλάβης και τη διαθεσιμότητα ανταλλακτικών. Βασικοί δείκτες είναι ο αριθμός παραπόνων πελατών καθώς και ο χρόνος ανταπόκρισης μετά από μια βλάβη/ αστοχία (Montgomery, 2013).
- Συμμόρφωση με τις προδιαγραφές: η συμφωνία των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος με τα ισχύοντα πρότυπα καθώς και το ισχύον νομικό πλαίσιο. Γενικότερα, η ικανοποίηση των προδιαγραφών εξισώνεται σε αυτή την περίπτωση με την ποιότητα παραγωγής, επομένως ένας δείκτης θεωρείται ο αριθμός ελαττωματικών προϊόντων (Z. Jalilibal et al., 2022).
- Φήμη Επιχείρησης: οι πελάτες αρκετές φορές δεν κατέχουν όλες τις πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των προϊόντων και έμμεσο κριτήριο για την επιλογή ενός προϊόντος αποτελεί η φήμη της εταιρείας.

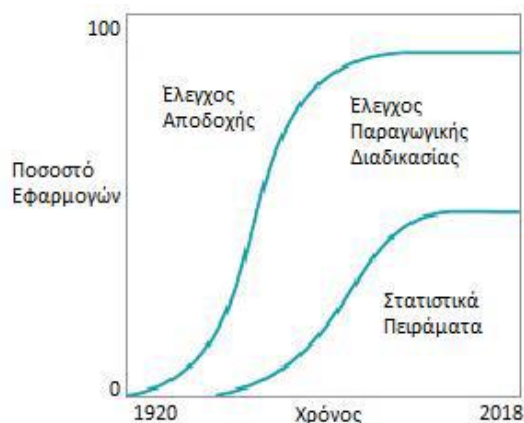
## 1.1. Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control, SQC*) απαρτίζεται από ένα σύνολο μεθόδων ανάλυσης στατιστικών δεδομένων (Montgomery, 2013). Στόχος του είναι τόσο η βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων, όσο και η μείωση του κόστους. Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες, καθεμιά είναι προσανατολισμένη σε διαφορετική φάση της παραγωγικής διαδικασίας (Jalilibal et al., 2022). Οι κατηγορίες αυτές παρατίθενται παρακάτω.

- δειγματοληψία αποδοχής (acceptance sampling): σε αυτή την κατηγορία δεν ελέγχεται ολόκληρη η παρτίδα, αλλά επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα περιορισμένου αριθμού αντικειμένων. Έπειτα, με κατάλληλες δειγματοληπτικές τεχνικές, γίνεται αποδοχή ή απόρριψη της παρτίδας, σύμφωνα με την ποιότητα των αντικειμένων που ελέγχθηκαν ως τυχαίο δείγμα από την παρτίδα (Montgomery, 2013). Η δειγματοληψία αποδοχής διακρίνεται σε δυο μεγάλες υποομάδες ανάλογα με το ελεγχόμενο χαρακτηριστικό ποιότητας. Αυτές είναι η δειγματοληψία αποδοχής με διαλογή και η δειγματοληψία αποδοχής με μέτρηση (Ryan, 2011).
- στατιστικός έλεγχος διεργασιών (statistical process control): σε αυτή την κατηγορία ο έλεγχος πραγματοποιείται νωρίτερα, προτού δηλαδή ολοκληρωθεί η παραγωγική διαδικασία. Ο εν λόγω έλεγχος θεωρείται και η συνηθέστερη μέθοδος διατήρησης και βελτίωσης της ποιότητας (Ishikawa, 1979). Σε αυτή την κατηγορία με χρήση κατάλληλων διαγραμμάτων ελέγχου εντοπίζονται έγκαιρα σφάλματα στην παραγωγική διαδικασία που οδηγούν σε μη ποιοτικά προϊόντα και διορθώνονται άμεσα, πριν παραχθούν περισσότερα ελαττωματικά.
- σχεδιασμός και ανάλυση πειραμάτων (design of experiments): σε αυτή την κατηγορία με χρήση κατάλληλων στατιστικών τεχνικών εντοπίζονται οι παράγοντες (μεταβλητές) που επιδρούν στις ποιοτικές παραμέτρους του τελικού προϊόντος, έχοντας ως στόχο τη βελτίωση της ποιότητάς του. Αυτή η κατηγορία διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη βέλτιστη σχεδίαση της παραγωγικής διεργασίας (Ryan, 2011).

Σύμφωνα με το διάγραμμα που ακολουθεί (Montgomery, 2013), εντοπίζεται εύκολα πως τα μοντέρνα συστήματα διασφάλισης της ποιότητας συνήθως εστιάζονται σε θέματα στατιστικού ελέγχου διεργασιών και σχεδιασμού και ανάλυσης πειραμάτων και όχι τόσο

στη δειγματοληψία αποδοχής. Αυτό συμβαίνει καθώς, η τελευταία δεν ανατροφοδοτεί το σύστημα με κρίσιμες πληροφορίες που θα μπορούσαν να βοηθήσουν στη βελτίωση της ποιότητας (Αντζουλάκος, 2010). Από την άλλη, ο γρήγορος εντοπισμός σφαλμάτων και προβλημάτων που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διαδικασίας, βοήθησε στη μείωση των ελαττωματικών προϊόντων, επομένως και του κόστους παραγωγής (Ryan, 2011).



Εικόνα 1 Διάγραμμα φάσεων χρήσης στατιστικών μεθόδων<sup>1</sup>

Στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας, ο έλεγχος που γίνεται αφορά ουσιαστικά τα χαρακτηριστικά ποιότητας (Jalilibal et al., 2022). Κάθε παραγωγική διαδικασία, όσο καλά σχεδιασμένη και να είναι, συνοδεύεται πάντοτε από μία μικρή σε μέγεθος φυσική μεταβλητότητα στις τιμές των χαρακτηριστικών ποιότητας. Η μεταβλητότητα αυτή μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες, όπως ο εξοπλισμός, τα υλικά που χρησιμοποιούνται ή οι περιβαλλοντικές συνθήκες (Ryan, 2011). Ο όρος φυσική μεταβλητότητα δηλώνει πως υπάρχουν πολλές μικρές αιτίες που οδηγούν σε μικρής κλίμακας διαφοροποίηση σε κάποιο ή κάποια από τα χαρακτηριστικά των παραγόμενων προϊόντων (Ishikawa, 1979). Οι αιτίες αυτές ονομάζονται τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας και υπάρχουν πάντοτε σε κάθε παραγωγική διαδικασία. Οι τυχαίες αιτίες δεν μπορούν να εντοπιστούν και κα επέκταση να διορθωθούν κατά την παραγωγική διαδικασία. Σύμφωνα με τον Montgomery (2013), μία διεργασία λειτουργεί εντός στατιστικού ελέγχου (in statistical control process), όταν επηρεάζεται μόνο από τη φυσική μεταβλητότητα. Η δεύτερη κατηγορία αιτιών ονομάζεται συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας.

<sup>1</sup> Πηγή: Montgomery D.C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control, Sixth Edition*, Elm Street Publishing Services

Οι ειδικές αιτίες μπορούν να εντοπιστούν κατά την παραγωγική διαδικασία και να επιλυθούν άμεσα, σε αντίθεση με τις τυχαίες. Συχνές περιπτώσεις συστηματικών αιτιών θεωρούνται τα λάθη από το προσωπικό, πχ λάθος όρια σε ζυγιστικό μπουκαλιών ή κάποια βλάβη που προκύπτει κατά την παραγωγική διαδικασία (Duncan, 1986). Συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις η μεταβλητότητα είναι πολύ μεγαλύτερη συγκριτικά με εκείνη των τυχαίων αιτιών. Για το λόγο αυτό, όταν εμφανίζονται ειδικές αιτίες σε μια παραγωγική διαδικασία, θεωρούμε ότι βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου (out of statistical control). Η αναγνώριση των ειδικών αιτιών μπορεί να γίνει με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου (Ryan, 2011). Σε επόμενη ενότητα θα δοθεί εκτενέστερη αναφορά στα διαγράμματα ελέγχου.

Αξίζει να σημειωθεί πως για να είναι αποτελεσματικός ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών θα πρέπει να συνοδεύεται από ένα πλάνο εκτός ελέγχου δράσης, το οποίο θα τίθεται σε λειτουργία κάθε φορά που το διάγραμμα ελέγχου παρέχει ενδείξεις εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στην παραγωγική διεργασία (Montgomery, 2013). Στόχος του πλάνου αυτού είναι η εξάλειψη των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Για να είναι πιο αποτελεσματικό κατά την εφαρμογή του, συντάσσεται από ομάδα έμπειρων ατόμων από διαφορετικά τμήματα της εταιρίας (Αντζουλάκος, 2010).

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών (specification limits) των ποιοτικών χαρακτηριστικών (quality characteristics) του. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά συγκρίνονται με προδιαγραφές και καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος (Duncan, 1986). Από τον σχεδιασμό ενός προϊόντος και τον έλεγχο του πρωτότυπου μέχρι το προϊόν τελικά να βγει σε μαζική παραγωγή μπορεί να εμφανιστούν διάφορα προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να οδηγήσουν σε τελικά προϊόντα μη συμμορφωμένα, δηλαδή προϊόντα των οποίων ένα τουλάχιστον ποιοτικό χαρακτηριστικό έχει τιμή εκτός των ορίων προδιαγραφών (Woodall et al., 2019). Τα προϊόντα δηλαδή δεν πληρούν μία ή περισσότερες από τις προδιαγραφές τους και ονομάζονται μη συμμορφούμενα ή ελαττωματικά προϊόντα. Ωστόσο, ένα προϊόν μπορεί να προωθηθεί προς πώληση στην αγορά και ας χαρακτηριστεί μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό, ανάλογα με τον αριθμό και τη σοβαρότητα των ελαττωμάτων που παρουσιάζει (Montgomery, 2013).



## 1.2. Διαγράμματα Ελέγχου

Για τα διαγράμματα ελέγχου εάν μια παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο, οι τιμές των χαρακτηριστικών ποιότητας θα είναι εντός συγκεκριμένων ορίων, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι τιμές των χαρακτηριστικών ακολουθούν μια στατιστική κατανομή πιθανότητας (Magar and Shinder V.B., 2014). Με άλλα λόγια, τα διαγράμματα ελέγχου αναγνωρίζουν όταν μια παραγωγική διαδικασία μπορεί να βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου και ξεκινά μια διαδικασία διερεύνησης πιθανών αιτιών (Duncan, 1986). Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν μία τεχνική άμεσης παρακολούθησης και διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, σύμφωνα με Montgomery (2013), στα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών και διαγράμματα ελέγχου χαρακτηριστικών. Ο διαχωρισμός γίνεται ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος σε:

- Διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών που χρησιμοποιούνται όταν τα χαρακτηριστικά που ενδιαφέρουν είναι συνεχή και μετρήσιμα, όπως είναι οι διαστάσεις, θερμοκρασία, το βάρος.
- Διαγράμματα ελέγχου χαρακτηριστικών που χρησιμοποιούνται όταν τα δεδομένα είναι διακριτά και μη μετρήσιμα, όπως το αποδεκτό – το απορριπτέο, τα ελαττώματα, τα ατυχήματα.

Ανάλογα με τη στατιστική θεωρία που στηρίζει την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου, γίνεται ο διαχωρισμός σύμφωνα με Ryan (2011), στα:

- Διάγραμμα **Shewhart**, τα οποία χρησιμοποιούνται όταν οι μετατοπίσεις του χαρακτηριστικού ποιότητας που μελετάμε είναι μέτριες ή μεγάλες.
- Διαγράμματα μνήμης, ήτοι **Cumulative Sum Control Charts (CUSUM)** και **Exponentially Weighted Moving Average Control Charts (EWMA)**, χρησιμοποιούνται όταν οι αλλαγές οι μετατοπίσεις είναι μικρές.

Σε επόμενη ενότητα θα δοθεί μεγαλύτερη ανάλυση στις τρεις αυτές κατηγορίες, καθώς αποτελούν τα κύρια διαγράμματα ελέγχου της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

Αναφορικά με τα διαγράμματα ελέγχου, τις περισσότερες φορές αυτά είναι γραφικές παραστάσεις σημείων συναρτήσεως του χρόνου. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των διαγραμμάτων ελέγχου συγκρίνονται με όρια, τα

οποία δείχνουν το εύρος των τιμών που μπορεί να πάρει το κάθε χαρακτηριστικό ποιότητας που μελετάται (Αντζουλάκος, 2010). Αυτό προκύπτει από τη μεταβλητότητα που προκαλούν τα τυχαία αίτια.

Τα όρια αυτά ονομάζονται όρια ελέγχου, γνωστά ως Άνω και Κάτω Όριο Ελέγχου (*Upper and Lower Control Limit, UCL και LCL*, αντίστοιχα) (Woodall et al., 2019). Το Άνω Όριο Ελέγχου (*UCL*) είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μελετάται, ενώ το Κάτω Όριο Ελέγχου (*LCL*) είναι η ελάχιστη επιτρεπόμενη τιμή για το υπό μελέτη ποιοτικό χαρακτηριστικό. Επιπλέον, η μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης του χαρακτηριστικού ποιότητας που μελετάται ορίζεται ως η Κεντρική Γραμμή (*Center Line*) του διαγράμματος που εξετάζεται (Z. Jalilibal et al., 2022).

Παρακάτω δίνεται ένα γενικό μοντέλο για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως το μοντέλο ορίων σίγμα.

**Πίνακας 1 Γενικό μοντέλο**

$UCL = \mu_w + L\sigma_w$
$CL = \mu_w$
$LCL = \mu_w - L\sigma_w$

όπου  $\mu_w$  και  $\sigma_w$  αποτελούν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης  $W$  (Montgomery, 2013).

Πιο συγκεκριμένα, η στατιστική συνάρτηση  $W$  δείχνει τη συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού  $X$  του υπό μελέτης προϊόντος και η ποσότητα  $L$  δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Η απόσταση αυτή μετρείται σε μονάδες τυπικής απόκλισης (Duncan, 1986).

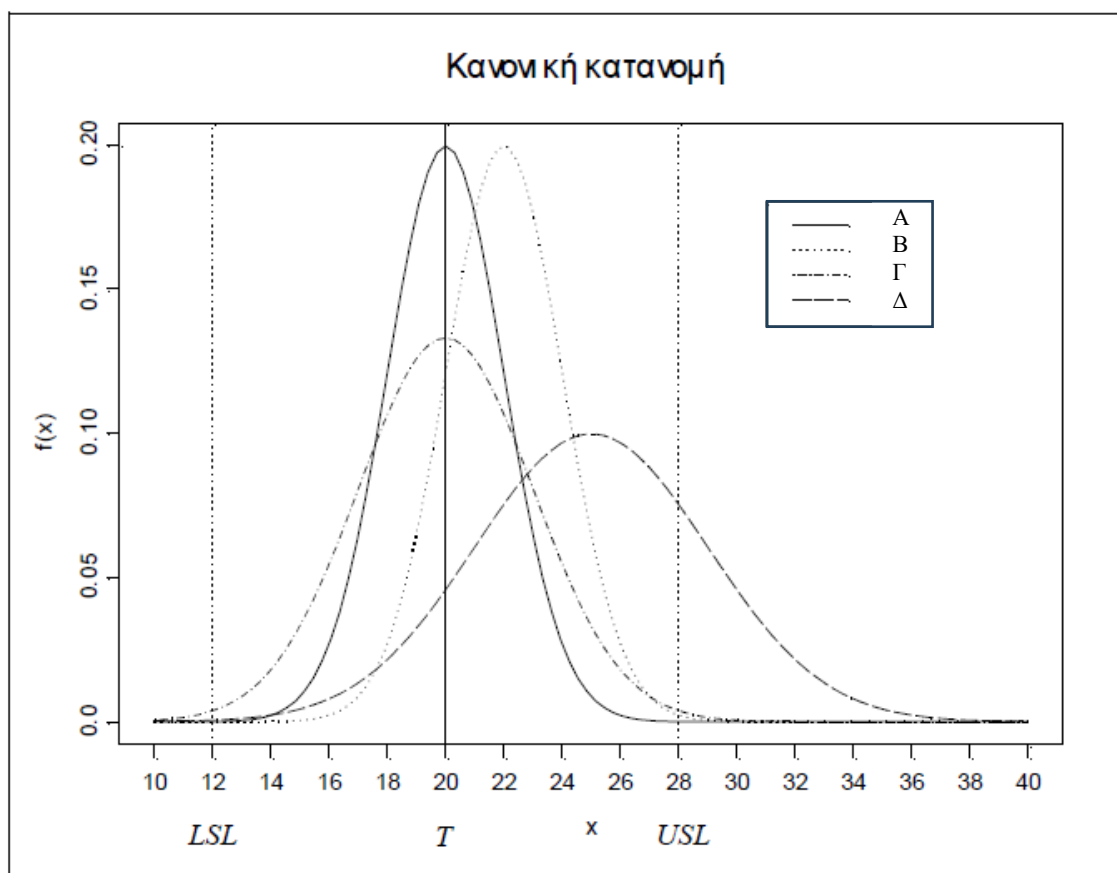
Όταν  $L=3$ , έχουμε κατασκευή ορίων ελέγχου τριών σίγμα (*three sigma control limits*). Για μεγάλες τιμές του  $L$ , η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή αυξάνεται, οπότε μειώνεται ο κίνδυνος (πιθανότητα) να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου για μία εντός ελέγχου διεργασία (Montgomery, 2013). Σε αναλογία με τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων, η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I μειώνεται όμως, ταυτόχρονα, η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II αυξάνεται. Για μικρές τιμές του  $L$  συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο (Z. Jalilibal et al., 2022).

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (probability limits model) που παρουσιάζεται παρακάτω για κανονική (ή προσεγγιστικά κανονική) κατανομή της  $W$  (με  $w_a$  συμβολίζεται το άνω  $a$  ποσοστιαίο σημείο της  $W$ ) (Woodall et al., 2019). Για εντός ελέγχου διεργασίες με κανονική κατανομή για την  $W$ , η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού στη μια πλευρά των ορίων ελέγχου είναι ίση με  $a/2$ , όπου  $a$  είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού (Montgomery, 2013).

**Πίνακας 2 Μοντέλο ορίων πιθανότητας**

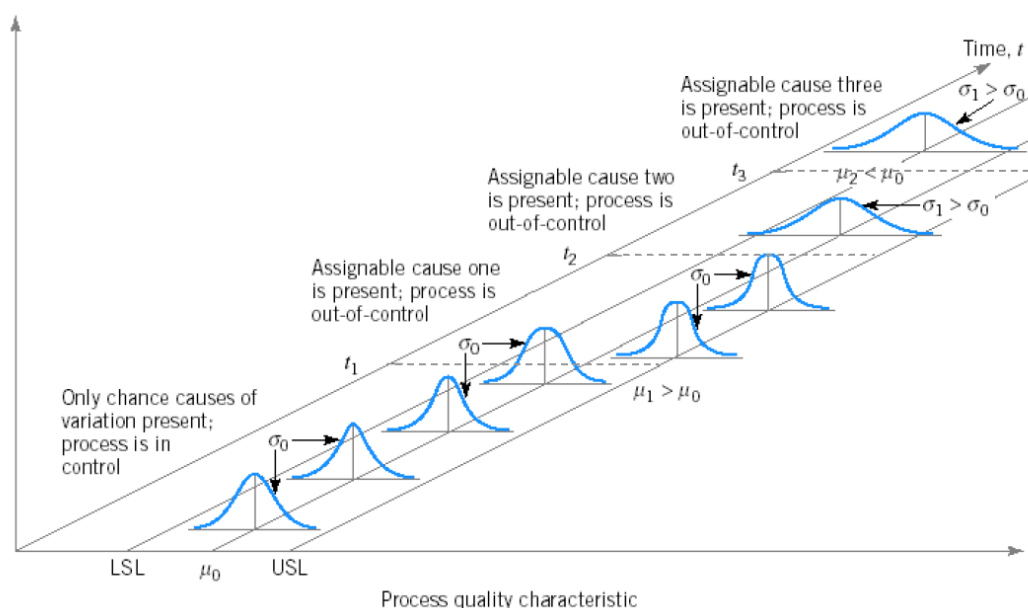
$UCL = w_{a/2} = \mu_w + z_{a/2} \sigma_w$
$CL = w_{0.5} = \mu_w$
$LCL = w_{1-(a/2)} = \mu_w - z_{a/2} \sigma_w$

Σχεδόν όλα τα παραγόμενα προϊόντα πληρούν τις προδιαγραφές, υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας. Η ύπαρξη ειδικής μεταβλητότητας μπορεί να οδηγήσει σε αλλαγή στην κατανομή των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού, είτε μέσω μετατόπισης του μέσου κατανομής (Β), είτε μέσω μετατόπισης μόνο της διακύμανσης κατανομής (Γ), είτε μέσω μετατόπισης τόσο του μέσου και της διακύμανσης της κατανομής (Δ) (Αντζουλάκος, 2010).



Εικόνα 2 Επίδραση της ειδικής μεταβλητότητας

Η επίδραση της ειδικής μεταβλητότητας συνεπάγεται με αύξηση των παραγόμενων προϊόντων με τιμές ποιοτικού χαρακτηριστικού εκτός των ορίων προδιαγραφών (Z. Jalilibal et al., 2022). Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η επίδραση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στην εντός ελέγχου μέση τιμή  $\mu_0$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_0$  μιας διεργασίας σε διάφορες χρονικές στιγμές:



**Εικόνα 3 Επίδραση των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στην εντός ελέγχου μέση τιμή και τυπική απόκλιση μιας διεργασίας σε διάφορες χρονικές στιγμές**

Εάν τα σημεία του χαρακτηριστικού που μελετάται βρίσκονται εντός των ορίων που αναφέρθηκαν, τότε σύμφωνα με τα διαγράμματα ελέγχου η διαδικασία βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο (Montgomery, 2013). Όταν δηλαδή μια παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο, οι τιμές του χαρακτηριστικού ποιότητας διατηρούν την ίδια στατιστική συμπεριφορά με σταθερή μέση τιμή και σταθερή τυπική απόκλιση στην πάροδο του χρόνου (Ryan, 2011).

Ένα σημείο ονομάζεται σημείο εκτός ορίων ελέγχου, όταν βρίσκεται έξω από τα όρια ελέγχου που ορίσαμε προηγουμένως. Η ύπαρξη σημείου εκτός ορίων ελέγχου, δηλώνει ότι η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη από τη φυσική μεταβλητότητα και μάλλον επιδρά στην παραγωγική διαδικασία κάποια συστηματική αιτία (Champ & Chou, 2003). Όμως, λόγω της τυχαιότητας στις τιμές των χαρακτηριστικών ποιότητας, υπάρχει η πιθανότητα η παραγωγική διαδικασία να βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο, παρόλο που υπάρχει σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Ένα τέτοιο σημείο χαρακτηρίζεται ως εσφαλμένη ένδειξη και τότε το διάγραμμα ελέγχου θεωρείται ότι υπέπεσε σε σφάλμα τύπου  $\alpha$  (Duncan, 1986). Υπάρχει όμως και η πιθανότητα να είναι όλα τα σημεία εντός ορίων, αλλά στην παραγωγική διαδικασία να επιδρά μια συστηματική αιτία, πχ όλα τα σημεία να βρίσκονται μεταξύ κεντρικής γραμμής και άνω ορίου ελέγχου. Σε αυτή την περίπτωση, το διάγραμμα ελέγχου θεωρείται ότι υπέπεσε σε σφάλμα τύπου  $\beta$  (Ryan, 2011).

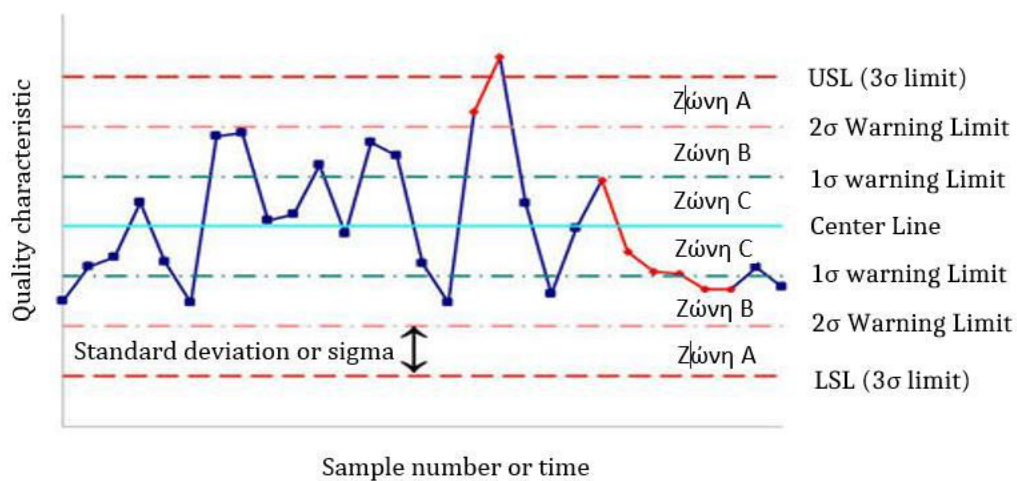
Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται με ορισμένους “κανόνες” που περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση **ειδικών μοτίβων** (*patterns*) σε ένα διάγραμμα ελέγχου (Ishikawa, 1979). Στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας. Θεωρούμε ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*) (Montgomery, 2013).

Οι σημαντικότεροι κανόνες για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου σύμφωνα με τον Ishikawa (1979), είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη *A* (σε μια από τις δύο ζώνες *A*).
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης *C* (σε μια από τις δύο περιοχές).
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη *C*.
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”.
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης *C*.
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως θα πρέπει να γίνεται με προσοχή, καθώς ένας μεγάλος αριθμός λανθασμένων συναγερμών συνεπάγεται και αντίστοιχο αριθμό διακοπών της παραγωγικής διαδικασίας για να ανιχνευθούν ειδικά αίτια μεταβλητότητας, με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής (Ryan, 2011).

Σε αρκετές περιπτώσεις για να υπάρχει μεγαλύτερη ευαισθησία σε ένα διάγραμμα ελέγχου σχετικά με την ικανότητα να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, γίνεται σχεδιασμός και των **προειδοποιητικών ορίων** (*warning limits*) εσωτερικά των ορίων ελέγχου, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα (Duncan, 1986). Αξίζει να σημειωθεί πως η σχεδίαση των προειδοποιητικών ορίων ελέγχου προϋποθέτει την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ορίων  $3\sigma$  (Montgomery, 2013).



Εικόνα 4 Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες Α, Β και Γ σε ένα διάγραμμα ελέγχου

### 1.3. Ανάλυση Δυνατοτήτων Παραγωγικής Διαδικασίας

Με τη χρήση στατιστικών εργαλείων, η πρώτη ανάλυση που μπορεί να γίνει είναι η ανάλυση δυνατοτήτων παραγωγικής διαδικασίας, η οποία πρέπει να γίνει πριν την έναρξη της μαζικής παραγωγής προϊόντων (Duncan, 1986). Έτσι, γίνεται εύκολα ο προσδιορισμός των φυσικών ορίων ανοχών (natural tolerance limits), για να μπορέσει να διαπιστωθεί αν η παραγωγική διαδικασία είναι ικανή για την παραγωγή μη ελαττωματικών προϊόντων. Το τελευταίο γίνεται με την σύγκριση των φυσικών ορίων ανοχών με τις τεχνικές προδιαγραφές (Abu-Shawiesh, 2008).

Αξίζει να επισημανθεί πως τα φυσικά όρια ανοχών δεν ταυτίζονται με τις τεχνικές προδιαγραφές. Οι τεχνικές προδιαγραφές είναι γνωστές εξ αρχής και δεν έχουν σχέση με την υπό μελέτη παραγωγική διαδικασία του προϊόντος (Montgomery, 2013). Οι τεχνικές προδιαγραφές είναι οι τιμές που μπορεί να έχει ένα χαρακτηριστικό ποιότητας για να έχει αποδεκτή ποιότητα το υπό μελέτη προϊόν. Από την άλλη, τα φυσικά όρια ανοχών αναφέρονται στο εύρος των τιμών του αντίστοιχου χαρακτηριστικού ποιότητας, οι οποίες προκύπτουν από την παραγωγική διαδικασία (Ryan, 2011). Ενώ οι τεχνικές προδιαγραφές είναι ίδιες για το εκάστοτε προϊόν, σε κάθε διεργασία που πραγματοποιείται για την μαζική παραγωγή προϊόντων τα φυσικά όρια ανοχών είναι διαφορετικά (Ishikawa, 1979).

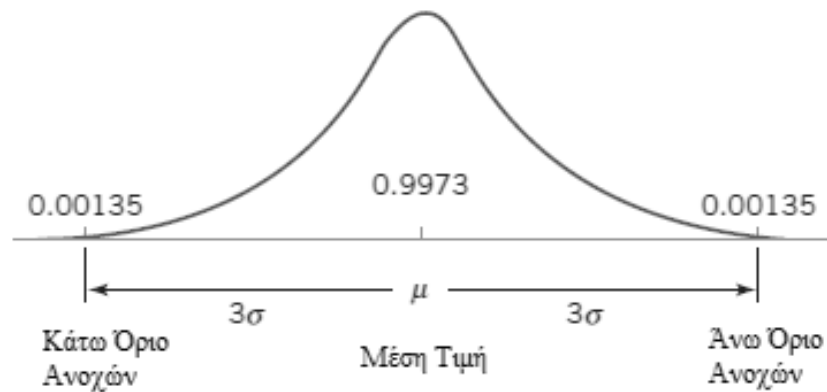
Στην περίπτωση της ανάλυσης δυνατοτήτων παραγωγικής διαδικασίας γίνεται προσπάθεια να μελετηθεί η στατιστική συμπεριφορά των σημαντικών χαρακτηριστικών ποιότητας των προϊόντων. Αυτό γίνεται με την χρήση των τιμών που προκύπτουν από δείγματα των τελικών προϊόντων (Αντζουλάκος, 2010). Αφού προσδιοριστεί η κατανομή πιθανότητας και γίνει εκτίμηση της μέσης τιμής και της μεταβλητότητας του χαρακτηριστικού ποιότητας, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν τα φυσικά όρια ανοχών (Montgomery, 2013).

Συνήθως βιβλιογραφικά για ένα χαρακτηριστικό ποιότητας με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ , το κάτω όριο ανοχών ισούται με  $\mu - 3\sigma$  και το άνω όριο ανοχών  $\mu + 3\sigma$ . Εάν το κύριο χαρακτηριστικό ποιότητας που μελετάται ακολουθεί την κανονική κατανομή, το 99,73% των παρατηρήσεων αναμένεται να είναι εντός των φυσικών ορίων ανοχών, ενώ το 0,27% είναι εκτός (Duncan, 1986).

Ενώ το 0,27% των τιμών που βρίσκονται εκτός των φυσικών ορίων ανοχών μπορεί να θεωρηθεί μικρό ποσοστό, δεν θεωρείται αμελητέο, καθώς εάν παραχθούν ένα εκατομμύριο



προϊόντα, 2.700 από αυτά αναμένεται να είναι εκτός των ορίων. Αξίζει να σημειωθεί πως σε περίπτωση που η κατανομή πιθανότητας που ακολουθεί το ποιοτικό χαρακτηριστικό είναι διαφορετική της κανονικής, το ποσοστό εκτός των φυσικών ορίων ανοχών μπορεί να αποκλίνει σημαντικά από το 0,27% (Champ & Chou, 2003).



Εικόνα 5 Όρια ανοχών κανονικής κατανομής

#### 1.4. Έλεγχος Κατανομής Παραγωγικής Διαδικασίας

Σε μια στατιστική ανάλυση σκοπός είναι η εκτίμηση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού που αναλύεται και ο προσδιορισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθούν οι τιμές του πληθυσμού (Ryan, 2011). Οι έλεγχοι προσαρμογής κατανομής αποτελούν ένα μέσο για να διαπιστωθεί το είδος της κατανομής που ακολουθεί ένας στατιστικός πληθυσμός. Στους ελέγχους αυτούς εξετάζεται το πόσο καλά προσαρμόζονται οι τιμές ενός δείγματος από έναν πληθυσμό σε μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας (Champ & Chou, 2003). Το πιο σημαντικό σημείο κατά τον έλεγχο προσαρμογής κατανομής είναι να γίνει σωστή υπόθεση για το ποια θα μπορούσε να είναι η κατανομή. Μια πρώτη εικόνα μπορεί να προκύψει από τη χρήση ιστογράμματος (Ishikawa, 1979).

Το ιστόγραμμα (histogram) είναι μια γραφική απεικόνιση της συχνότητας εμφάνισης ενός συγκεκριμένου μεγέθους. Η κατασκευή του ιστογράμματος γίνεται χρησιμοποιώντας το εύρος των τιμών του δείγματος του πληθυσμού που μελετάται (Magar and Shinder V.B., 2014). Με τη διαίρεση του εύρους των τιμών σε τμήματα, προκύπτουν οι κλάσεις. Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα, στον οριζόντιο άξονα της γραφικής απεικόνισης τοποθετούνται οι τιμές, ενώ στον κάθετο άξονα η συχνότητα εμφάνισης του μεγέθους. Ο αριθμός των τάξεων επιλέγεται βάσει του ακόλουθου πίνακα (Montgomery, 2013).

**Πίνακας 3 Συσχέτιση αριθμών τάξεων με μετρήσεων**








Αριθμός μετρήσεων	Αριθμός τάξεων C
<50	5-6
50-100	7-9
100-150	10-11
150-200	12-13
>200	14

Αφού επιλεγεί ο αριθμός των τάξεων που θα χρησιμοποιηθούν, το επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός του πλάτους  $W$  κάθε τάξης που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$W = \frac{R}{C} = \frac{\text{εύρος μετρήσεων}}{\text{αριθμός τάξεων}} [1]$$

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι βασικότερες μορφές ιστογραμμάτων που συναντώνται στην πράξη.

**Πίνακας 4 Βασικές μορφές ιστογραμμάτων**

 <p><b>Normal distribution</b></p> <p>Σε μια κανονική κατανομή τα σημεία έχουν την ίδια πιθανότητα να βρεθούν σε οποιαδήποτε μεριά, αριστερά ή δεξιά του μέσου, με αποτέλεσμα να προκύπτει συμμετρική κατανομή.</p>	 <p><b>Right-skewed distribution</b></p> <p>Λοξές κατανομές εμφανίζονται όταν υπάρχει ένα φυσικό όριο που εμποδίζει την εμφάνιση τιμών πέρα από αυτό. Έτσι η κορυφή της κατανομής είναι προς τη μεριά του φυσικού ορίου και έχει ουρά που απλώνεται μακριά από αυτή.</p>
 <p><b>Bimodal (double-peaked) distribution</b></p> <p>Κατανομές με διπλή κορυφή εμφανίζονται όταν δεδομένα από δύο διαδικασίες με διαφορετικές κατανομές συνδυάζονται σε ένα δείγμα, όπως προϊόντα που παράγονται σε διαφορετικές μηχανές.</p>	 <p><b>Plateau distribution</b></p> <p>Κατανομές με πολλαπλές κορυφές εμφανίζονται όταν μετρήσεις διαδικασιών από διαφορετικές κανονικές κατανομές συνδυάζονται σε ένα δείγμα.</p>
 <p><b>Comb distribution</b></p> <p>Μοιάζει με την κανονική κατανομή, όμως έχει μια υψηλή κορυφή σε μια ουρά. Αυτό συμβαίνει λόγω μετρήσεων προς τη μεριά μιας ουράς που έχουν συσσωρευθεί σε μια τάξη με μετρήσεις της μορφής “μεγαλύτερες από ...” ή αντίστοιχα “μικρότερες από ...”.</p>	 <p><b>Truncated or heart-cut distribution</b></p> <p>Η περικομμένη κατανομή μοιάζει με κανονική κατανομή που λείπουν οι δύο ουρές της. Αυτό μπορεί να συμβεί για παράδειγμα όταν ο προμηθευτής ενός προϊόντος ξεχωρίζει τα προϊόντα που βρίσκονται εντός των ορίων προδιαγραφών από αυτά που βρίσκονται εκτός.</p>
 <p><b>Dog food distribution</b></p> <p>Τέτοιου είδους κατανομές προκύπτουν όταν λείπει κάτι που βρίσκεται κοντά στη μέση τιμή και φαίνεται να είναι το κομμάτι που “περισσεύει” από μια περικομμένη κατανομή.</p>	

Με την ολοκλήρωση της υπόθεσης στατιστικής κατανομής, γίνεται η επιλογή του ελέγχου προσαρμογής, ώστε να διαπιστωθεί αν οι τιμές του δείγματος προσαρμόζονται ικανοποιητικά στην συγκεκριμένη κατανομή πυκνότητας πιθανότητας (Αντζουλάκος, 2010). Στην συγκεκριμένη εργασία έγινε χρήση του ελέγχου προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov.

Ο έλεγχος *Kolmogorov-Smirnov* θεωρείται από τους πιο διαδεδομένους για την προσαρμογή κατανομής πιθανότητας σε έναν στατιστικό πληθυσμό. Η χρήση του ελέγχου *Kolmogorov-Smirnov* είναι συχνή, καθώς έχει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί με οποιοδήποτε μέγεθος δείγματος και ειδικά σε ελέγχους με μικρό μέγεθος δείγματος (Ryan, 2011).

Για να ξεκινήσει ο έλεγχος, το πρώτο βήμα που ακολουθείται είναι η ταξινόμηση των τιμών του δείγματος κατά αύξουσα σειρά. Οι τιμές αυτές ορίζονται έστω ως  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Στην συνέχεια, γίνεται σχηματισμός της αθροιστικής πιθανότητας του δείγματος για κάθε τιμή, η οποία ονομάζεται  $\Phi^*(x)$  και η γενική της εξίσωση είναι:

$$\Phi^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{i}{n}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 1, & x \geq x_n \end{cases} \quad [2]$$

Αν  $\Phi(x)$  είναι η αθροιστική πιθανότητα μέχρι την τιμή  $x$  της κατανομής που ελέγχεται για την προσαρμογή της, τότε σύμφωνα με τον Αντζουλάκο (2010), η μέγιστη απόλυτη διαφορά ανάμεσα στη θεωρητική και την παρατηρηθείσα τιμή  $D_N(x)$  από τη σχέση:

$$D_N(x) = \max(|\Phi^*(x) - \Phi(x)|) \quad [3]$$

Αν  $D_N(x) \geq D(x)$ , τότε απορρίπτεται η υπόθεση και οι τιμές του δείγματος δεν προσαρμόζονται καλά στην συγκεκριμένη κατανομή.

Η μεταβλητή  $D(x)$  εξαρτάται τόσο από το επίπεδο σημαντικότητας, όσο και από το μέγεθος του δείγματος. Τιμές της μεταβλητής  $D(x)$  υπάρχουν διαθέσιμες σε λογισμικά πακέτα, αλλά και σε βιβλιογραφικές αναφορές (Ryan, 2011).

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, αν και ο έλεγχος *Kolmogorov-Smirnov* είναι ακριβής ακόμα και σε μικρά μεγέθους δείγματα, σαν έλεγχος είναι αργός, καθώς απαιτείται η ταξινόμηση των τιμών του δείγματος σε αύξουσα σειρά.

## 1.5. Δείκτες Ικανότητας Παραγωγικής Διαδικασίας

Σε κάθε παραγωγική διαδικασία χρησιμοποιούνται βοηθητικά οι δείκτες ικανότητας παραγωγικής διαδικασίας. Η πιο κοινή μορφή ενός δείκτη είναι ο λόγος δυο ποσοτήτων των τεχνικών προδιαγραφών και το εύρος των φυσικών ορίων ανοχών και ο πιο διαδεδομένος δείκτης είναι ο  $C_p$  (Alevizakos, 2023). Εάν τα άνω και κάτω όρια προδιαγραφών ορίζονται ως  $U$  και  $L$ , τότε ο δείκτης  $C_p$  ορίζεται σύμφωνα με Ryan (2011) ως εξής:

$$C_p = \frac{U-L}{6\sigma} \quad [4]$$

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι το εύρος των τιμών των τεχνικών προδιαγραφών, ενώ ο παρονομαστής είναι το εύρος των φυσικών ορίων ανοχών (Montgomery, 2013). Αν η τιμή του δείκτη  $C_p$  είναι μικρότερη της μονάδας, τότε στην συγκεκριμένη παραγωγική διαδικασία παράγεται ένα σημαντικό ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων, εφόσον το εύρος των φυσικών ορίων ανοχών θα είναι μεγαλύτερο από το εύρος των τεχνικών προδιαγραφών (Ryan, 2011). Αν η τιμή του δείκτη  $C_p$  είναι αρκετά μεγάλη, τότε το ποσοστό των προϊόντων που παράγονται και είναι εντός των ορίων προδιαγραφών, θα μεγαλώνει (Αντζουλάκος, 2010). Αξίζει να σημειωθεί πως συχνά στις προδιαγραφές δίνεται μόνο το άνω ή κάτω όριο.

Η ποσότητα

$$P = \left(\frac{1}{C_p}\right)100\% = \left(\frac{6\sigma}{USL-LSL}\right)100\% \quad [5]$$

δηλώνει το ποσοστό του εύρους των ορίων προδιαγραφών που χρησιμοποιεί η υπό μελέτη παραγωγική διαδικασία. Επομένως, σε μια διεργασία είναι επιθυμητό να έχουμε υψηλό δείκτη  $C_p$ , άρα μικρό ποσοστό  $P$  (Hosseini et al., 2014).

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται ενδεικτικές τιμές του δείκτη  $C_p$  που καθορίζουν στην πράξη πόσο ικανή είναι μια διεργασία.

Πίνακας 5 Συσχέτιση  $C_p$  με διεργασία

$1.33 \leq C_p$	Ικανή διεργασία
$1 \leq C_p \leq 1.33$	Η διεργασία χρειάζεται παρακολούθηση
$C_p < 1$	Μη ικανή διεργασία, χρειάζεται αναθεώρηση του σχεδιασμού

Η τιμή  $C_p = 1.33 = 4/3$  υποδηλώνει πως το εύρος 6σ καταλαμβάνει το 75% του εύρους των προδιαγραφών.

Όμως, ο δείκτης  $C_p$  θεωρείται μη αποτελεσματικός δείκτης για να περιγράψουμε την ικανότητα μιας διεργασίας, καθώς αγνοεί την θέση στην οποία βρίσκεται ο μέσος  $\mu$  της διεργασίας συγκριτικά με τα όρια προδιαγραφών. Επιπλέον, ο δείκτης  $C_p$  χρειάζεται και τα δύο όρια προδιαγραφών του προϊόντος για τον υπολογισμό του, όμως σε αρκετές περιπτώσεις για ένα υπό μελέτη προϊόν μπορεί να είναι καθορισμένο μόνο το ένα από τα δύο όρια προδιαγραφών (Alevizakos, 2023).

Για αυτό το λόγο υπάρχουν διαθέσιμοι και θεωρούνται πιο αποτελεσματικοί, οι δείκτες που θα αναφερθούν παρακάτω.

Οι δείκτες  $C_{pl}$  και  $C_{pu}$  ορίζονται από:

$$C_{pl} = \frac{\mu - L}{3\sigma} \quad [6]$$

$$C_{pu} = \frac{U - \mu}{3\sigma} \quad [7],$$

αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που η μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας ισούται με μέσο του διαστήματος  $M(L, U)$  (Ryan, 2011).

Ο δείκτης  $C_{pl}$  χρησιμοποιείται όταν υπάρχει μόνο το κάτω όριο προδιαγραφών, ενώ ο δείκτης  $C_{pu}$  όταν υπάρχει μόνο το άνω όριο προδιαγραφών.

Αν η μέση τιμή δεν ισούται με το μέσο  $M = \frac{L+U}{2}$ , χρησιμοποιείται ο δείκτης ικανότητας  $C_{pk}$ .

Σύμφωνα με τους Hosseinifard et al., (2014), ο δείκτης  $C_{pk}$  δηλώνει την ικανότητα μιας διεργασίας προς τη μεριά του ορίου προδιαγραφών που ευθύνεται για την παραγωγή του υψηλότερου ποσοστού ελαττωματικών προϊόντων, δηλαδή:

$$C_{pk} = \min\{C_{pl}, C_{pu}\} = \min\left\{\frac{\mu - L}{3\sigma}, \frac{U - \mu}{3\sigma}\right\} \quad [8]$$

Για το δείκτη  $C_{pk}$  ισχύει ότι  $C_{pk} \leq C_p$  και

- $C_{pk} = C_p$ , όταν  $\mu = M$
- $C_{pk} < C_p$ , όταν  $\mu \neq M$

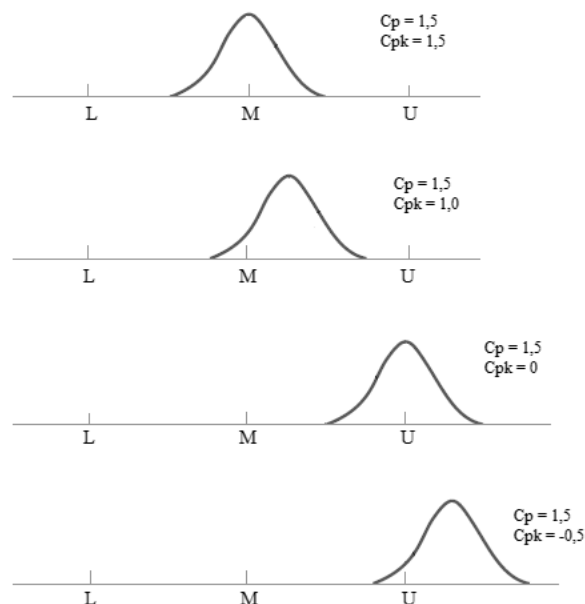
Σε μια διεργασία, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $C_{pk}$ , τόσο πιο ικανή θεωρείται η διεργασία.

Στο παρακάτω σχήμα (σχήμα 6) απεικονίζεται η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους δυο αυτούς δείκτες σε διάφορες θέσεις της κατανομής του χαρακτηριστικού ποιότητας (Maiti et al., 2010).

- Αν στις παρακάτω περιπτώσεις η τυπική απόκλιση  $\sigma$  και ο δείκτης  $C_p$  παραμένουν σταθεροί, το ποσοστό ελαττωματικών και στις τέσσερις περιπτώσεις διαφέρει σημαντικά.
- Αν οι δείκτες  $C_{pk}$  και  $C_p$  είναι ίσοι, τότε η μέση τιμή  $\mu$  ταυτίζεται με το μέσο  $M$ .
- Αν η διαφορά των δεικτών  $C_{pk}$  και  $C_p$  είναι μεγάλη, τόσο πιο απομακρυσμένη είναι η μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας από το σημείο  $M$ .

**Πίνακας 6 Αντιστοιχία δεικτών  $C_{pk}$  με αριθμό ελαττωματικών προϊόντων**

$C_{pk}$	0.33	0.67	1.99	1.33	1.67	2.00
Ελαττωματικά (ppm)	317.311	45.500	2.700	63	1	0.002



**Εικόνα 6 Σχέση ανάμεσα στους δείκτες  $C_p$  και  $C_{pk}$**

Ωστόσο και ο δείκτης  $C_{pk}$  δεν μας δίνει επαρκείς πληροφορίες για την ικανότητα μιας διεργασίας, αν και λαμβάνει υπόψη του το μέσο  $\mu$ , δεν υπάρχουν στοιχεία για το πόσο κοντά βρίσκεται στο σημείο  $M$  (ή στο  $T$ ) (Hosseinifard et al., 2014).



Έτσι, προτάθηκε ο δείκτης  $C_{pm}$  που ορίζεται από τη σχέση:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau} \quad [9]$$

Ο δείκτης αυτός προκύπτει από την αντικατάσταση στη σχέση [4] του  $\sigma$  με το  $\tau$ .

Η χρήση της τιμής  $\tau$  έναντι της  $\sigma$  γίνεται καθώς η τιμή  $\sigma^2$  αναφέρεται στη μεταβλητότητα της διεργασίας γύρω από την τιμή  $\mu$ , ενώ η  $\tau^2$  δίνει πληροφορίες για τη μεταβλητότητα της υπό μελέτη διεργασίας γύρω από την τιμή στόχο  $T$  (εκτός αν  $T=\mu$ ) (Alevizakos, 2023). Έχουμε δηλαδή τις εξής σχέσεις:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 \quad [10],$$

όπου  $X$  η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει την τιμή του υπό μελέτη ποιοτικού χαρακτηριστικού

$$\tau^2 = E(X - T)^2 = E[(X - \mu) + (\mu - T)]^2 = E[(X - \mu)^2] + (\mu - T)^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2 \rightarrow$$

$$\tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2 \quad [11]$$

Η ποσότητα  $\tau^2$  σχετίζεται με τη μέση τιμή της ποσότητας και δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση, γνωστή και ως συνάρτηση απώλειας:

$$L(X) = k(X - T)^2 \quad [12]$$

,όπου  $k$  αποτελεί μια σταθερά κατά *Taguchi* που παριστάνει την οικονομική απώλεια της παραγωγής ενός προϊόντος με τιμή ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$ . Σε περίπτωση που  $x=T$ , έχουμε  $L(T)=0$  (Champ & Chou, 2003).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση [11], μετατρέπουμε τη σχέση [9] ως εξής:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau} = \frac{USL - LSL}{6\sigma^2 + (\mu - T)^2} = \frac{USL - LSL}{6\sigma \sqrt{1 + (\frac{\mu - T}{\sigma})^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + (\frac{\mu - T}{\sigma})^2}} \quad [13]$$

Από τη σχέση [13], προκύπτει ότι:

- για  $|\mu - T| \neq 0$

$$C_{pm} < C_p \text{ και εφόσον } C_{pk} \leq C_p, \text{ τότε } C_p \geq \max\{C_{pk}, C_{pm}\}$$

- για  $|\mu - T| \rightarrow \infty$

$$C_{pm} \rightarrow 0$$

- για  $|\mu - T| = 0$

$$\mu = T, C_{pm} = C_p$$

$$\mu = T = M, C_{pm} = C_p = C_{pk}$$

Η σχέση [13], χρησιμοποιώντας τις σχέσεις [8], [9] γίνεται:  $C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + 9(C_p - C_{pk})^2}}$  [14]

Με  $\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2} \geq |\mu - T|$ , προκύπτει ότι:  $C_{pm} \leq \frac{USL - LSL}{6|\mu - T|}$  [15]

Τέλος, ο δείκτης ικανότητας  $C_{pmk}$  προκύπτει από τη σχέση [13] αντικαθιστώντας τον δείκτη  $C_p$  με τον  $C_{pk}$ .

$$C_{pmk} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} = \min\left(\frac{\mu - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{USL - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}\right) [16]$$

Ο δείκτης  $C_{pmk}$  προτάθηκε καθώς ο  $C_{pm}$  λαμβάνει υπόψη τη θέση του μέσου  $\mu$  της διεργασίας, σε σχέση με την τιμή στόχο  $T$ , αλλά όχι τη θέση του  $\mu$  με τα όρια προδιαγραφών (Hosseinifard et al., 2014).

Από τη σχέση [16], προκύπτει ότι:

- $\mu = M, C_{pmk} = C_{pm}$  και  $C_{pk} = C_p$
- $\mu = T, C_{pmk} = C_{pk}$  και  $C_{pm} = C_p$
- $\mu = T = M, C_{pmk} = C_{pk} = C_{pm} = C_p$

## 1.6. Φάση I και Φάση II

Η εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου κατά τον έλεγχο της παραγωγικής διαδικασίας χωρίζεται σε δύο φάσεις, στην *Φάση I* και στην *Φάση II* (*Phase I and Phase II*) (Woodall et al., 2019).

Στη *Φάση I* γίνεται η δειγματοληψία από την προς μελέτη παραγωγική διαδικασία και το σύνολο των δεδομένων αναλύεται ταυτόχρονα, με τη χρησιμοποίηση δοκιμαστικών διαγραμμάτων ελέγχου (Montgomery, 2013). Στη *Φάση I*, στόχος είναι να εξετασθεί αν η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου, το χρονικό διάστημα που συνελέγησαν τα δεδομένα (Loureiro et al., 2018). Εάν βρεθούν σημεία εκτός ορίων ελέγχου, το προσωπικό οφείλει να το ερευνήσει και, αν εντοπίσει κάποια βλάβη ή αστοχία, να την διορθώσει. Εάν τελικά γίνει κάποια διορθωτική ενέργεια, θα πρέπει να αποκτηθούν νέα δείγματα και οι τιμές τους να συγκριθούν με τα νέα όρια ελέγχου (Woodall et al., 2019). Η παραγωγική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο, όταν σταματήσουν να προκύπτουν σημεία εκτός ορίων. Όταν αυτό επιτευχθεί, τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν, υπολογίζοντας την κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου, είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Z. Jalilibal et al., 2022). Σε αυτή την περίπτωση, υπολογίζονται επίσης οι ακριβείς τιμές της μέσης τιμής και της διασποράς του χαρακτηριστικού ποιότητας και πλέον μπορεί να διαπιστώσει εάν όντως η παραγωγική διαδικασία είναι σε θέση να παράγει προϊόντα με τις επιθυμητές προδιαγραφές (Saleh et al., 2015). Σε αυτό το σημείο θεωρείται πως γίνεται η μετάβαση από την *Φάση I* στη *Φάση II*. Πολλές φορές η *Φάση I* χαρακτηρίζεται ως ***Off-Line Control Phase*** ή ως ***Initial Study Phase***. (Αντζουλάκος, 2010)

Στην *Φάση II* τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να πραγματοποιείται συνεχής έλεγχος αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή, μπορεί να παρακολουθείται συνεχώς η παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύεται εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος (Saleh et al., 2015). Με άλλα λόγια, ανά τακτά χρονικά διαστήματα που πραγματοποιείται ο έλεγχος, λαμβάνεται μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Πολλές φορές η *Φάση II* χαρακτηρίζεται ως ***On-Line Control Phase*** ή ως ***Control to Standard Phase*** (Z. Jalilibal et al., 2022).

Αναφερόμενοι πάλι στην στατιστική συνάρτηση  $W$  και στην ποσότητα  $L$ , όσο μεγαλύτερη τιμή έχει το  $L$ , τόσο η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει

οπότε μειώνεται η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου για μια εντός ελέγχου διεργασία (Woodall et al., 2019). Σε αυτή την περίπτωση, μειώνεται η πιθανότητα του **σφάλματος τύπου I**, αυξάνεται ωστόσο η πιθανότητα του **σφάλματος τύπου II**, δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εντός των ορίων ελέγχου παρόλο που η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Αντίθετα, για μικρές τιμές του  $L$  αυξάνεται η πιθανότητα του **σφάλματος τύπου I** και μειώνεται η πιθανότητα του **σφάλματος τύπου II** (Loureiro et al., 2018).

## 1.7. Μέτρα Απόδοσης Διαγράμματος Ελέγχου

Το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος (*average run length, ARL*) σχετίζεται άμεσα με τα διαγράμματα ελέγχου και ορίζεται ως:

$$ARL = \frac{1}{p} \quad [17]$$

,όπου  $p$  η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου.

Για μια διεργασία που βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο με κανονική κατανομή και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\alpha$  είναι η πιθανότητα σφάλματος τύπου I, έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος  $ARL_0$  το οποίο ισούται με:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad [18]$$

Αν  $\beta$  είναι η πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος τύπου II, τότε η πιθανότητα σωστής διάγνωσης είναι η συμπληρωματική της  $\beta$  δηλαδή  $1-\beta$  και ονομάζεται ισχύς διαγραμμάτων ελέγχου. Επομένως, διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου εξαιτίας της μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας, το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής,  $ARL_1$  ισούται με:

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \quad [19]$$

Εφόσον το  $ARL_1$  ισούται με τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η μετατόπιση στο μέσο επίπεδο της παραγωγικής διεργασίας από τη στιγμή που θα συμβεί αυτή η μετατόπιση, η επιθυμητή τιμή σε αυτή την περίπτωση είναι η μικρότερη δυνατή (Knoth, 2021).

Αξίζει να αναφερθεί πως μία τυπική μέθοδος σύγκρισης διαγραμμάτων ελέγχου υπολογίζεται από το μέσο μήκος ροών τους  $ARL$ . Εάν υπάρχουν δύο διαδικασίες  $A$ ,  $B$  για συγκεκριμένη μετατόπιση του ποιοτικού χαρακτηριστικού και  $ARL_0(A) \geq ARL_0(B)$ ,  $ARL_1(A) < ARL_1(B)$ , τότε η διεργασία  $A$  θεωρείται καλύτερη της  $B$  (Knoth, 2021).

- Η τυπική απόκλιση του μήκους ροής  $SDRL$  υπολογίζεται ως

$$SDRL = \sqrt{Var(RL)} \quad [20]$$

και είναι ένας συμπληρωματικός δείκτης αποτελεσματικότητας της διεργασίας

- Η διάμεσος του μήκους ροής  $MDRL$  είναι ο αριθμός δειγματικών σημείων που σχεδιάζονται πριν εμφανιστεί ένα εκτός ελέγχου σήμα στο διάγραμμα

$$MDRL = median(RL) [21]$$

## 2. Διαγράμματα Ελέγχου τύπου Shewhart

### 2.1. Διαγράμματα ελέγχου μέσης τιμής

Το διάγραμμα ελέγχου μέσης τιμής ( $\bar{X}$  chart) είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου στις παραγωγικές διαδικασίες-και χρησιμοποιείται κυρίως ως εργαλείο για τον έλεγχο της θέσης της κατανομής του υπό εξέταση χαρακτηριστικού ποιότητας (Montgomery, 2013). Με αυτό γίνεται εντοπισμός συστηματικών αιτιών που όταν επιδρούν στην παραγωγική διαδικασία, προκαλούν μετατόπιση της μέσης τιμής του πληθυσμού του χαρακτηριστικού ποιότητας. Οι τρεις οριζόντιες ευθείες αποτελούν την κεντρική γραμμή και τα δυο όρια ελέγχου (Champ and Chou, 2003). Αν είναι γνωστή η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, τότε η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής του υπό εξέταση δείγματος ισούται με:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} [22],$$

όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος και  $\sigma_0$  η τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού ποιότητας (Αντζουλάκος, 2010).

Πιο συγκεκριμένα, για τις οριζόντιες ευθείες που έγινε αναφορά παραπάνω, η κεντρική γραμμή ισούται με τη μέση τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού και τα όρια ελέγχου έχουν απόσταση από την κεντρική γραμμή πολλαπλάσια της μεταβλητότητας του δείγματος (Abu-Shawiesh, 2008). Τα όρια του διαγράμματος ελέγχου της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού  $X$  σύμφωνα με Quinino et al.(2020), συνοψίζονται παρακάτω:

Πίνακας 7 Γενικό μοντέλο Διαγράμματος  
ελέγχου μέσης τιμής

$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

,όπου  $\mu_0$  είναι η μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας προϊόντος και η ποσότητα  $L$ , όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή.

Στα διαγράμματα ελέγχου μέσης τιμής, γίνεται τυχαία επιλογή ενός δείγματος μεγέθους σε κάθε χρονικό διάστημα (Champ and Chou, 2003). Από αυτό το δείγμα γίνεται υπολογισμός της μέσης τιμής του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας από τον ακόλουθο τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [23]$$

Ο δειγματικός μέσος μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j = \hat{\mu} \quad [24]$$

,όπου  $m$  ο συνολικός αριθμός των ελέγχων που έγιναν και θα πρέπει να ισούται με την επιθυμητή μέση τιμή  $\mu$  του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας (Abu-Shawiesh, 2008).

Κάθε φορά που γίνεται δειγματοληψία, η μέση τιμή του κάθε δείγματος σχεδιάζεται στο διάγραμμα ελέγχου και εξετάζεται εάν βρίσκεται εντός ή εκτός ορίων ελέγχου (Ryan, 2011). Ορισμένες φορές τα διαγράμματα ελέγχου μέσης τιμής έχουν μόνο ένα όριο ελέγχου, είτε το άνω, είτε το κάτω όριο ελέγχου. Αυτό συμβαίνει καθώς σε μια παραγωγική διαδικασία, οι συστηματικές αιτίες πιθανότατα επιδρούν, μπορεί να προκαλούν μόνο αύξηση ή μείωση της μέσης τιμής (Champ & Chou, 2003). Αυτά τα διαγράμματα χαρακτηρίζονται μονόπλευρα.

Αξιίζει να επισημανθεί πως στην περίπτωση που  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα πληθυσμού που ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$ , σύμφωνα με Ryan (2011), ισχύει ότι:

Ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με μέση τιμή την μέση τιμή του πληθυσμού και διακύμανση ίση με  $\sigma^2/n$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i=1, 2, \dots, n \rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Έχοντας το  $\sigma$  γνωστό, ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο  $\mu$  και συντελεστή εμπιστοσύνης  $1-\alpha$ , δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \quad (\text{Abu-Shawiesh, 2008}).$$

Έχοντας το  $\sigma$  γνωστό, για τον έλεγχο υπόθεσης  $H_0: \mu = \mu_0$  σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , η περιοχή απόρριψης  $K$  της μηδενικής υπόθεσης σύμφωνα με Αντζουλάκο (2010), είναι η εξής:

$$K: \bar{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ή } \bar{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Αξίζει να σημειωθεί πως τα παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για πληθυσμούς που ακολουθούν προσεγγιστικά την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  ανεξαρτήτως μεγέθους δείγματος καθώς και σε οποιοδήποτε πληθυσμό αρκεί το μέγεθος δείγματος να είναι  $n \geq 30$  (Montgomery, 2013).

## 2.2. Διάγραμμα ελέγχου εύρους

Το διάγραμμα ελέγχου εύρους (*R chart*) χρησιμοποιείται στις παραγωγικές διαδικασίες για τον έλεγχο και την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού ποιότητας. Η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου μέσης τιμής και διασποράς είναι η πιο συνηθισμένη (Ryan, 2011). Σε αυτή την περίπτωση κατά την εμφάνιση συστηματικής αιτίας που συνήθως υπάρχει, μπορεί να μεταβληθεί είτε η μέση τιμή είτε η μεταβλητότητα του χαρακτηριστικού ποιότητας ή και τα δύο. Αύξηση της μεταβλητότητας του χαρακτηριστικού ποιότητας, μπορεί να προκαλέσουν οι συστηματικές αιτίες, αυξάνοντας την πιθανότητα εμφάνισης σημείων εκτός ορίων ελέγχου (Abu-Shawiesh, 2008). Ωστόσο, αν γινόταν αποσπασματική χρήση του διαγράμματος μέσης τιμής, θα γινόταν εσφαλμένη υπόθεση μεταβολής της μέσης τιμής.

Από αυτό το δείγμα γίνεται υπολογισμός του μέσου εύρους του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας από τον ακόλουθο τύπο:

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n R_j \quad [25],$$

όπου το κάθε μεμονωμένο  $R$  ισούται με :  $R = x_{max} - x_{min}$ , (Montgomery, 2013)

όπου  $x_{max}$  και  $x_{min}$  θεωρούνται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας σε κάθε δειγματοληψία  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  τιμών.

Εάν το χαρακτηριστικό ποιότητας ακολουθεί κανονική κατανομή, η μέση τιμή του εύρους και η τυπική του απόκλιση αντίστοιχα θα είναι:

$$\mu_R = d_2 \sigma_0 \quad [26]$$

$$\sigma_R = d_3 \sigma_0 \quad [27]$$

,όπου  $d_2, d_3$  είναι σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του δείγματος (Champ & Chou, 2003).

Η εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  του πληθυσμού, σύμφωνα με τον Abu-Shawiesh (2008) προκύπτει από:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad [28]$$

Χρησιμοποιώντας την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του εύρους, γίνεται υπολογισμός της κεντρικής γραμμής και των ορίων ελέγχου, σύμφωνα με Αντζουλάκο (2010):

**Πίνακας 8 Τύποι διαγραμμάτων ελέγχου εύρους**

$UCL = d_2\sigma_0 + k d_3\sigma_0$
$CL = d_2\sigma_0$
$LCL = d_2\sigma_0 - k d_3\sigma_0$

Στην περίπτωση που θα χρησιμοποιηθούν προς μελέτη τα διαγράμματα ελέγχου  $\bar{X}$ -R, σύμφωνα και με τον Ishikawa (1979), χρησιμοποιούνται οι εξής τύποι:

**Πίνακας 9 Τύποι διαγραμμάτων  $\bar{X}$ -R, Φάσης I**

Διάγραμμα $\bar{X}$	Διάγραμμα R
$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$	$UCL = D_4\bar{R}$
$CL = \bar{\bar{x}}$	$CL = \bar{R}$
$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$	$LCL = D_3\bar{R}$

Όπου η τιμή του  $A_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  για το n που μελετάται κάθε φορά μπορεί εύκολα να βρεθεί στο Παράρτημα Α.

**Πίνακας 10 Τύποι διαγραμμάτων  $\bar{X}$ -R, Φάσης II**

Διάγραμμα $\bar{X}$	Διάγραμμα R
$UCL = \mu + A\sigma$	$UCL = D_2\sigma$
$CL = \mu$	$CL = d_2\sigma$
$LCL = \mu - A\sigma$	$LCL = D_1\sigma$

Όπου  $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ ,  $D_1 = d_2 - 3d_3$  και  $D_2 = d_2 + 3d_3$

### 2.3. Διάγραμμα ελέγχου τυπικής απόκλισης

Το διάγραμμα ελέγχου τυπικής απόκλισης (S chart) χρησιμοποιείται σε παραγωγικές διαδικασίες για τον έλεγχο και την παρακολούθηση της διασποράς του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας. Εάν το χαρακτηριστικό ποιότητας ακολουθεί κανονική κατανομή, η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου των διαγραμμάτων ελέγχου τυπικής απόκλισης υπολογίζονται σύμφωνα με τους Champ & Chou (2003), ως εξής:

Πίνακας 11 Τύποι διαγραμμάτων ελέγχου τυπικής απόκλισης

$UCL = c_4\sigma_0 + k\sigma_0\sqrt{1 - c_4^2}$
$CL = c_4\sigma_0$
$LCL = \max(0, c_4\sigma_0 - k\sigma_0\sqrt{1 - c_4^2})$

Επίσης, η μέση τυπική απόκλιση των δειγμάτων ορίζεται σύμφωνα με Montgomery (2013) ως:

$$\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_j \quad [29]$$

Σύμφωνα με Abu-Shawiesh (2008), η εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  του πληθυσμού ισούται με:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} \quad [30]$$

Σύμφωνα με Ryan, (2011) από το τυχαίο δείγμα που επιλέγεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα υπολογίζεται η τυπική απόκλιση του δείγματος του χαρακτηριστικού ποιότητας από τον ακόλουθο τύπο:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad [31]$$

Η τυπική απόκλιση του κάθε δείγματος σχεδιάζεται στο διάγραμμα ελέγχου και εξετάζεται αν ανήκει εντός ή εκτός ορίων ελέγχου, κάθε φορά που λαμβάνει χώρα η εκάστοτε δειγματοληψία (Champ & Chou, 2003). Όταν υπάρχουν σημεία των διαγραμμάτων χαμηλότερα από το κάτω όριο ελέγχου, μπορεί να θεωρηθεί πως η μεταβλητότητα των σημείων του δείγματος είναι χαμηλότερη από την αναμενόμενη (Αντζουλάκος, 2010). Θα πρέπει να ερευνηθούν αυτές οι περιπτώσεις, καθώς μια πιθανή μείωση μεταβλητότητας,

μπορεί να σημαίνει βελτίωση της παραγωγικής διαδικασίας ή μια τέτοια ένδειξη να οφείλεται σε κακή εκτίμηση της μεταβλητότητας Montgomery, 2013).

Στην περίπτωση που θα χρησιμοποιηθούν προς μελέτη τα διαγράμματα ελέγχου  $\bar{X}$ -s, σύμφωνα και με τον Ryan (2011), χρησιμοποιούνται οι εξής τύποι:

**Πίνακας 12 Τύποι διαγραμμάτων  $\bar{X}$ -S, Φάσης Ι**

Διάγραμμα $\bar{X}$	Διάγραμμα s
$UCL = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s}$	$UCL = B_4\bar{s}$
$CL = \bar{\bar{x}}$	$CL = \bar{s}$
$LCL = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}$	$LCL = B_3\bar{s}$

Όπου:

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \text{ και } A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}.$$

**Πίνακας 13 Τύποι διαγραμμάτων  $\bar{X}$ -S, Φάσης ΙΙ**

Διάγραμμα $\bar{X}$	Διάγραμμα s
$UCL = \mu + A\sigma$	$UCL = B_6\sigma$
$CL = \mu$	$CL = C_4\sigma$
$LCL = \mu - A\sigma$	$LCL = B_5\sigma$

$$\text{Όπου } B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$$

## 2.4. Σχεδιασμός Διαγραμμάτων τύπου Shewhart

Όταν τουλάχιστον ένα σημείο σε διάγραμμα ελέγχου *Φάσης I* βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, εξετάζεται το ενδεχόμενο ύπαρξης ειδικής αιτίας μεταβλητότητας που ευθύνεται για αυτό το αποτέλεσμα (Woodall et al., 2019). Αν μετά τον έλεγχο βρεθεί ειδική αιτία μεταβλητότητας, τότε το συγκεκριμένο σημείο (δείγμα) εξαιρείται και γίνεται εκ νέου υπολογισμός ορίων ελέγχου του διαγράμματος από τα υπόλοιπα δείγματα. Τα νέα όρια ελέγχου του διαγράμματος θα είναι πιο στενά, οπότε θα πρέπει να δοθεί προσοχή στα υπόλοιπα σημεία που προηγουμένως βρίσκονταν εντός των ορίων ελέγχου, καθώς είναι πιθανό να βρεθούν τώρα εκτός των νέων ορίων ελέγχου (Z. Jalilibal et al., 2022). Επομένως, η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται έως ότου όλα τα σημεία βρεθούν εντός των ορίων ελέγχου. Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν από προκαταρκτικά δείγματα στη *Φάση I* χαρακτηρίζονται ως δοκιμαστικά όρια ελέγχου (trial control limits), καθώς ενδέχεται να αλλάξουν (Loureiro et al., 2018).

Στην περίπτωση που βρεθούν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου και δεν υπάρχει κάποια ειδική αιτία μεταβλητότητας που προκαλεί την εμφάνισή τους, υπάρχουν δύο λύσεις.

Η πρώτη λύση είναι η αφαίρεση των σημείων όπως θα γινόταν στην περίπτωση ύπαρξης ειδικής αιτίας μεταβλητότητας. Η μόνη εξήγηση που μπορεί να δοθεί είναι ότι γενικά ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου είναι πιθανό να προέρχεται από μια κατανομή πιθανότητας του χαρακτηριστικού που είναι διαφορετική από την εντός ελέγχου κατανομή του (Montgomery, 2013).

Η δεύτερη λύση είναι να μην αφαιρεθεί το σημείο και να θεωρηθεί ότι τα όρια που υπολογίστηκαν είναι κατάλληλα για χρήση. Σε αυτή την περίπτωση, τα όρια ελέγχου είναι συνήθως πλατύτερα από ότι αν είχαν αφαιρεθεί εκείνα τα σημεία. Η ύπαρξη ενός ή δύο τέτοιων σημείων δεν θα επηρεάσει σημαντικά τα όρια ελέγχου (Woodall et al., 2019). Αν επιπλέον τα μελλοντικά δείγματα δείχνουν ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι τα όρια αυτά είναι ικανοποιητικά.

Γενικά για να είναι πιο αποτελεσματικό ένα διάγραμμα ελέγχου, απαιτείται περιοδική διόρθωση των ορίων ελέγχου του. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ακολουθείται η διαδικασία και οι κανόνες των “προκαταρκτικών δειγμάτων” που αναφέρθηκαν και προηγουμένως (Loureiro et al., 2018). Η κεντρική γραμμή μπορεί να αντικατασταθεί από την τιμή στόχο του υπό μελέτη ποιοτικού χαρακτηριστικού. Για παράδειγμα, αν το διάγραμμα ελέγχου *R* δηλώνει ότι η διασπορά βρίσκεται εντός ελέγχου, τότε η υιοθέτηση της τιμής στόχου ως

κεντρικής γραμμής για το διάγραμμα ελέγχου  $X$  υποδηλώνει αν η μέση τιμή του χαρακτηριστικού  $X$  χρειάζεται ή όχι μετατόπιση προς την επιθυμητή τιμή στόχο (Saleh et al., 2015).

Στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό  $X$  ακολουθεί γνωστή κατανομή, διαφορετική της κανονικής και είναι γνωστή η δειγματική κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων  $\bar{X}$ ,  $R$ ,  $S$  και  $S^2$  μπορούν να δημιουργηθούν τα διαγράμματα ελέγχου ορίων πιθανότητας (Loureiro et al., 2018). Ωστόσο, αν η κατανομή του χαρακτηριστικού  $X$  είναι άγνωστη, τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου είναι πολύ ανθεκτικά στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας για μέγεθος δείγματος  $n \geq 4$ , εκτός και αν η κατανομή της  $X$  απέχει σε σημαντικό βαθμό από την κανονική (Montgomery, 2013). Τα διαγράμματα ελέγχου  $R$ ,  $S$  και  $S^2$  επηρεάζονται σε μεγαλύτερο βαθμό από την μη κανονικότητα της  $X$ .

Δεν αρκεί να βρίσκονται τα σημεία ενός διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου, αλλά παράλληλα θα πρέπει να συμπεριφέρονται με τυχαίο τρόπο (Z. Jalilibal et al., 2022). Τα πιο βασικά μοτίβα μη τυχαίου τρόπου συμπεριφοράς είναι τα:

- **Πρότυπα κύκλων (cycles)**
- **Μικτά πρότυπα (mixtures)**
- **Πρότυπα αλμάτων (shift in the process level)**
- **Πρότυπα τάσεων (trend)**
- **Πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας (stratification)**

**Στα πρότυπα κύκλων (cycles)** εμφανίζεται μια περιοδικότητα στη διάταξη των σημείων, οπότε σχηματίζονται επαναλαμβανόμενοι κύκλοι. Πιθανές αιτίες αποτελούν οι περιοδικές διακυμάνσεις των περιβαλλοντικών συνθηκών και των συνθηκών παραγωγής, όπως η θερμοκρασία, η ηλεκτρική τάση, εναλλαγή μηχανών, κτλ (Ishikawa, 1979).

Τα **μικτά πρότυπα (mixtures)** προκύπτουν από δύο διαφορετικές κατανομές του χαρακτηριστικού  $X$  μεταξύ των οποίων παλινδρομεί η διεργασία (Montgomery, 2013).

**Τα πρότυπα αλμάτων (shift in the process level)** οφείλονται κυρίως σε νέους εργαζόμενους, νέες μεθόδους παραγωγής, νέες μηχανές, κτλ (Loureiro et al., 2018).

**Τα πρότυπα τάσεων (trend)** οφείλονται συνήθως σε παράγοντες, όπως είναι η σταδιακή φθορά εργαλείων, η κόπωση των εργαζομένων, κτλ (Ishikawa, 1979).

**Στα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας (stratification)** τα σημεία του διαγράμματος κινούνται με τεχνητό τρόπο γύρω από την κεντρική γραμμή χωρίς να υπάρχει κάποια ιδιαίτερη μεταβλητότητα και οφείλονται συνήθως σε εσφαλμένη σχεδίαση των ορίων ελέγχου (Αντζουλάκος, 2010).



### 3. Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου (Cumulative Sum Control Charts)

#### 3.1. Διαγράμματα Ελέγχου με μνήμη

Στα διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, η απόφαση για το αν μια υπό μελέτη διαδικασία βρίσκεται εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου βασίζεται στο αν κάποιο σημείο του υπό μελέτη διαγράμματος βρεθεί εκτός ή εντός των ορίων ελέγχου (Zhang et al., 2006) ή εάν παρουσιάζεται κάποιο μοτίβο. Αξίζει να αναφερθεί πάλι πως η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης ενός διαγράμματος τύπου *Shewhart* βασίζεται αποκλειστικά στο πιο πρόσφατο δείγμα, αγνοώντας πληροφορίες που μπορούν να δώσουν προηγούμενα δείγματα (Maleki et al., 2017). Τα διαγράμματα ελέγχου *Shewhart* λοιπόν χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη. Ωστόσο, έχουν αναπτυχθεί και διαγράμματα ελέγχου με μνήμη, δηλαδή διαγράμματα ελέγχου για τα οποία ο σχεδιασμός της στατιστικής συνάρτησης απεικόνισης βασίζεται σε πληροφορίες που δίνουν όλα τα δείγματα, όχι μόνο το πιο πρόσφατο (Montgomery, 2013). Αυτά του τύπου τα διαγράμματα χρησιμοποιούνται κυρίως στη *Φάση II*.

Για το υπόλοιπο της εργασίας, θεωρούμε ότι λαμβάνονται τυχαία δείγματα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  στην υπό εξέταση παραγωγική διαδικασία με  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ ,  $i \geq 1$  (Woodall et al., 2019).

- **Διαγράμματα EWMA**

Αυτά τα διαγράμματα ελέγχου, έχουν μη περιορισμένη και μη ομοιόμορφη μνήμη καθώς λαμβάνουν πληροφορίες από όλα τα δείγματα, το καθένα από τα οποία έχει διαφορετική βαρύτητα. (Zaman et al., 2017). Η στατιστική συνάρτηση  $Y_t$  ισούται με:

$$Y_t = (1-\lambda)Y_{t-1} + \lambda X_t = \dots = (1-\lambda)^t Y_0 + \lambda \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i} X_i \quad [32], \quad 0 < \lambda \leq 1, \text{ με } Y_0 \text{ την τιμή στόχο.}$$

$$\text{Άρα } \alpha_t = (1-\lambda)^t Y_0 \text{ και } \beta_i^{(t)} = \lambda(1-\lambda)^{t-i} \text{ για } i=1, 2, \dots, t \text{ (Montgomery, 2013)}$$

- **Διαγράμματα *CUSUM***

Αυτά τα διαγράμματα ελέγχου, έχουν μη περιορισμένη και ομοιόμορφη μνήμη, καθώς λαμβάνουν πληροφορίες από όλα τα δείγματα, το καθένα από τα οποία έχει την ίδια βαρύτητα,  $b=1$ . (Zhang et al., 2006).

Η στατιστική συνάρτηση  $Y_t$  ισούται με:

$$Y_t = \sum_{i=1}^t (X_i - Y_0) = (X_t - Y_0) + Y_{t-1} = -tY_0 + \sum_{i=1}^t (X_i) \quad [33]$$

Άρα  $\alpha_t = -tY_0$  και  $\beta_i^{(t)} = 1$  για  $i=1, 2, \dots, t$

Τα δύο αυτά διαγράμματα θα αναλυθούν εκτενέστερα και στις επόμενες παραγράφους.

### 3.2. Αθροιστικά Διαγράμματα (CUSUM)

Όταν για την υπό μελέτη παραγωγική διαδικασία, μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις, χρησιμοποιούμε τα αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (Maleki et al., 2017). Για παράδειγμα, αν εξετάζεται παραγωγική διαδικασία με  $\mu_0$ , τιμή στόχο της διαδικασίας, τότε η στατιστική συνάρτηση απεικόνισης  $C_t$  ορίζεται ως:

$$C_t = \sum_{i=1}^t (X_i - \mu_0) = X_t - \mu_0 + C_{t-1} = -t^* \mu_0 + \sum_{i=1}^t (X_i) \quad [34]$$

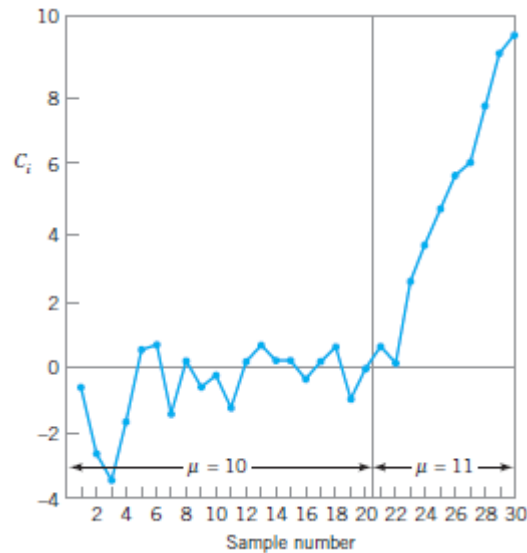
Η ποσότητα  $C_t$  δηλώνει το συσσωρευμένο άθροισμα αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τον στόχο  $\mu_0$  της υπό μελέτη διαδικασίας. Όταν οι αποκλίσεις από την τιμή στόχο  $\mu_0$  είναι μικρές, είτε θετικές είτε αρνητικές, και τα συσσωρευμένα αθροίσματα τίνουν προς την τιμή 0, τότε η διεργασία θεωρείται πως παραμένει εντός ελέγχου (Zhang et al., 2006). Αντίθετα, αν η μέση τιμή μετατοπιστεί από την τιμή στόχο  $\mu_0$  σε θέση  $\mu_1 > \mu_0$  ( $\mu_1 < \mu_0$ ), τότε εξαιτίας της μετατόπισης εμφανίζονται περισσότερες θετικές (αρνητικές) αποκλίσεις. Επομένως, τα συσσωρευμένα αθροίσματα αποκλίσεων παρουσιάζουν ανοδική (καθοδική) κίνηση. Έτσι, τα διαγράμματα των συσσωρευμένων αθροισμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του επιπέδου μετατόπισης του μέσου της διεργασίας από την τιμή στόχο (Hawkins, et al., 1998). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα *CUSUM* μπορεί να χρησιμοποιηθούν είτε για μεμονωμένες παρατηρήσεις είτε για σύνολα παρατηρήσεων ανά δείγμα, χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή του συνόλου (Montgomery, 2013). Στην περίπτωση των συνόλων, όπου  $n > 1$ , ισχύει:

$$C_t = \sum_{j=1}^t ((\bar{X}_j) - \mu_0) = \bar{X}_t - \mu_0 + C_{t-1} = -t^* \mu_0 + \sum_{j=1}^t (\bar{X}_j) \quad [35]$$

Η μέθοδος *CUSUM* είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε χημικές βιομηχανίες διεργασιών, καθώς έχοντας για παράδειγμα την τιμή  $\mu_0$  ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού ως στόχο, εάν παρεκκλίνει η διαδικασία από τον στόχο αυτό, το διάγραμμα *CUSUM* θα το ανιχνεύσει άμεσα, ώστε να γίνουν οι απαραίτητες τροποποιήσεις σε μια ανεξάρτητη μεταβλητή και να γυρίσει η τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού στην τιμή στόχο (Maleki et al., 2017).

Στο παρακάτω παράδειγμα, φαίνεται η ανοδική πορεία που ξεκινά από το δείγμα 22 και το σημείο (22,  $C_{22}$ ) και όπως φαίνεται και στο διάγραμμα μετατοπίζεται το  $\mu$ , από την τιμή  $\mu_0=10$ , στην τιμή  $\mu_1=11$ .

Όσο η διεργασία εξακολουθεί να βρίσκεται εντός ελέγχου:  $E(C_t) = E[\sum_{i=1}^t ((X_i) - \mu_0)] = 0 \cdot t$ , καθώς  $E(X_i) = \mu_0$



Εικόνα 7 Μετατόπιση της τιμής στόχου από  $\mu_0$  σε  $\mu_1$

Οι μέθοδοι που θα αναπτυχθούν στην συνέχεια, αφορούν στη γραφική αναπαράσταση συσσωρευμένων αθροισμάτων με όρια ελέγχου. Αυτές είναι η αλγοριθμική μέθοδος και η μέθοδος της  $V$  μάσκας (Αντζουλάκος, 2010).

### 3.2.1. Αλγοριθμική Μέθοδος (CUSUM) για το μέσο μιας διεργασίας

Έστω ότι εξετάζεται διεργασία με  $\mu_0$  μέσο εντός ελέγχου και τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Στόχος είναι να ανιχνευτούν οι μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας με μορφή  $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$  με  $\delta > 0$ , εξετάζοντας τις μεμονωμένες παρατηρήσεις  $X_i$  που έχουν ληφθεί (Zhang et al., 2006).

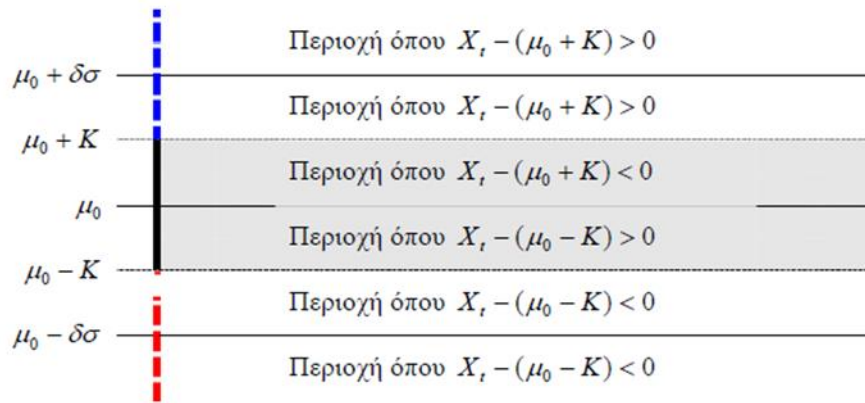
Οι στατιστικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθες:

$$S_i^+ = \max[0, X_i - (\mu_0 + K) + S_{i-1}^+], \quad [36] \quad S_0^+ = 0, \text{ άρα } S_i^+ \geq 0$$

$$S_i^- = \min[0, X_i - (\mu_0 - K) + S_{i-1}^-], \quad [37] \quad S_0^- = 0, \text{ άρα } S_i^- \leq 0.$$

$$\text{Όπου } K \text{ η τιμή αναφοράς και δίνεται από την σχέση } K = \frac{\sigma\delta}{2} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = k\sigma. \quad [38]$$

Συνοπτικά στο επόμενο σχήμα αναλύονται οι διάφορες περιπτώσεις της παραπάνω μεθοδολογίας (Hawkins et al., 1998).



Εικόνα 8 Ανάλυση περιπτώσεων αλγοριθμικής μεθόδου CUSUM

Αξίζει να αναφερθεί ότι η ποσότητα  $S_t^+$  μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο υπόθεσης  $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  $H_1^+ : \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ ,  $\delta > 0$ , καθώς μεγάλες τιμές της  $S_t^+$  οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης  $H_1^+$  (Chowdhury et al., 2015).

Από την άλλη, η ποσότητα  $S_t^-$  μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο υπόθεσης  $H_0 : \mu = \mu_0$ ,  $H_1^- : \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma$ ,  $\delta > 0$ , καθώς μικρές τιμές της  $S_t^-$  οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης  $H_1^-$ . Σε κάθε στάδιο (βήμα) της διαδικασίας επιλέγεται μια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις και αυτό εξαρτάται από το αν  $S_t^- < -H$  ή  $S_t^+ > H$  (Zaman et al., 2017), όπου  $H > 0$  μία σταθερά που λέγεται διάστημα απόφασης και δίνεται από την σχέση  $H = h\sigma$  με  $h > 0$ . Αν μια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις γίνει αποδεκτή, τότε η διεργασία θεωρείται πως βρίσκεται εκτός ελέγχου λόγω της μετατόπισης του μέσου της υπό μελέτη διεργασίας  $C_t$  (Jalilibal et al., 2022). Σε αυτή την περίπτωση, το νέο μέσο υπολογίζεται ως εξής:

$$\widehat{\mu}_1 = \begin{cases} \mu_0 + K + \frac{S_t^+}{N^+}, & S_t^+ > H \\ \mu_0 - K + \frac{S_t^-}{N^-}, & S_t^- < -H \end{cases} \quad [39]$$

Αν και η αλγοριθμική μέθοδος αναπτύχθηκε κυρίως για μεμονωμένες παρατηρήσεις, μπορεί να τροποποιηθεί για να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που το μέγεθος δείγματος είναι ( $n > 1$ ). Σε αυτή την περίπτωση το  $X_t$  αντικαθίσταται από το  $\bar{X}_t$ , με το μέσο

του δείγματος  $t$  και η ποσότητα  $\sigma$  αντικαθίσταται από την  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  (Yashchin, 1993). Επομένως οι στατιστικές συναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι:

$$S_t^+ = \max[0, \bar{X}_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+], [40] \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, \bar{X}_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-], [41] \quad S_0^- = 0$$

με  $K = k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  και  $H = h \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  (Chowdhury et al., 2015).

### 3.2.2. Μέσο Μήκος Ροής

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, για την επιλογή των ποσοτήτων  $K$  και  $H$  με την αλγοριθμική μέθοδο, χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$K = \frac{\sigma \delta}{2} = k \sigma [42]$$

$$H = h \sigma [43] \text{ (Chowdhury et al., 2015).}$$

Έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές μελέτες σχετικά με το μέσο μήκος ροής (ARL) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *CUSUM* και θα παρατεθούν ορισμένες προτάσεις (Knoth, 2021).

Χρησιμοποιώντας  $h=4$  ή  $h=5$  και  $k=\frac{1}{2}$  για μετατόπιση  $\delta=1$  στην μέση τιμή  $\mu_0$ , σύμφωνα με τον **πίνακα 14** έχουμε:

**Πίνακας 14 Μετατόπιση του μέσου για περιπτώσεις  $h=4$  και  $h=5$**

Μετατόπιση μέσου ( $\delta$ )	<b>h=4</b>	<b>h=5</b>
0	168	465
0.25	74.2	139
0.5	26.6	38.0
0.75	13.3	17.0
<b>1.00</b>	<b>8.38</b>	<b>10.4</b>
1.50	4.75	5.75
2.00	3.34	4.01
2.50	2.62	3.11

3.00	2.19	2.57
4.00	1.71	2.01

Για  $h=4$ , όπου  $ARL_0=168$ , η μετατόπιση  $\delta=1$  θα αναγνωριζόταν στα  $ARL_1=8.38$  δείγματα, ενώ για  $h=5$ , όπου  $ARL_0=465$ , η ίδια μετατόπιση θα αναγνωριζόταν στα  $ARL_1=10.4$  δείγματα. Αντιστοίχως, για ένα *Shewhart* διάγραμμα μεμονωμένων τιμών για  $3\sigma$  όρια ελέγχου με  $ARL_0=370$  μια μετατόπιση της τάξεως του  $\delta=1$ , θα χρειαζόταν 43.96 δείγματα για να γίνει αντιληπτή (Montgomery, 2013).

Γενικά, η τιμή του  $k$  είναι ανάλογη της τιμής  $\delta$  που είναι το μέγεθος της μετατόπισης σε μονάδες τυπικής απόκλισης, καθώς  $k=\frac{1}{2}\delta$ . Η πιο κοινή τιμή για το  $k$  είναι το  $\frac{1}{2}$  (Knoth, 2021). Αρκετές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της τιμής  $ARL$ . Σύμφωνα με τον Siegmund (1985), για μονόπλευρο διάγραμμα *CUSUM* με παραμέτρους  $h, k$  έχουμε:

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad [44] \quad \text{για } \Delta \neq 0,$$

όπου  $\Delta = \delta^* - k$  για μονόπλευρο διάγραμμα  $S_i^+$  και  $\Delta = -\delta^* - k$  για μονόπλευρο διάγραμμα  $S_i^-$  με

$$\delta^* = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma} \quad [45]$$

,όπου  $\delta^*$  είναι η μετατόπιση του μέσου σε μονάδες  $\sigma$  και  $b = h + 1.66$ . Αν  $\Delta=0$ , τότε  $ARL=b^2$  (Chowdhury et al., 2015).

Επομένως, για τον υπολογισμό του  $ARL$  δίπλευρου διαγράμματος *CUSUM* ισχύει:

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-} \quad [46]$$

$$\text{, όπου } ARL^+ = \frac{\exp[-2(\delta^*-k)b + 2(\delta^*-k)b - 1]}{2(\delta^*-k)^2} \quad [47] \quad \text{και}$$

$$ARL^- = \frac{\exp[2(\delta^*+k)b - 2(\delta^*+k)b - 1]}{2(\delta^*+k)^2} \quad [48]$$

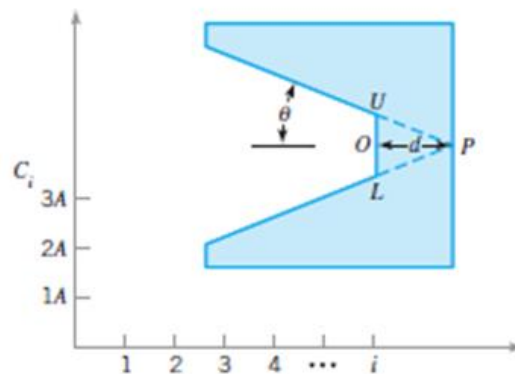
### 3.2.3. Μέθοδος V μάσκας

Σύμφωνα με τον Barnard (1959), η μέθοδος V μάσκας χρησιμοποιεί τον τύπο:

$$C_i = \sum_{j=1}^i y_j = y_i + C_{i-1} [49],$$

$$\text{όπου } y_i = \frac{x_i - \mu_0}{\sigma}.$$

Η μέθοδος V μάσκας, όπως φαίνεται και από το σχήμα, επηρεάζεται από την απόσταση  $d$  και τη γωνία  $\theta$ . (Montgomery, 2013). Όταν όλες οι τιμές των  $C_1, C_2, \dots, C_i$  βρεθούν μέσα στο λευκό περιθώριο του σχήματος μεταξύ U και L, τότε η διεργασία θεωρείται πως βρίσκεται εντός ελέγχου (Woodall, et al., 1993).



Εικόνα 9 V μάσκα

Σύμφωνα με τον Johnson (1961) ισχύει ότι:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{2A}\right) [50] \text{ και}$$

$$d = \left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) [51],$$

όπου  $2A$  είναι το σφάλμα τύπου I και  $\beta$  το σφάλμα τύπου II (Hawkins et al., 1998).

Συνήθως η τιμή  $\beta$  είναι μικρή, οπότε σε αυτή την περίπτωση η σχέση [51] γίνεται:  $d \approx -2 \frac{\ln(\alpha)}{\delta}$ .

Σε περίπτωση τυχαίου δείγματος  $X_1, X_2, \dots, X_n$  κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση  $\sigma^2$  ισχύει ότι:  $H_1^-: \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma$ ,  $H_0: \mu = \mu_0$  και  $H_1^+: \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$  με  $\delta > 0$  (Zhang et al., 2006).



**Πίνακας 15 Αποδοχές απόφασης Φάσης Ι**

Κατάσταση στο $n$ -οστό βήμα ελέγχου	Απόφαση
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \leq -\frac{\sigma}{\delta} (\ln B + \frac{n\delta^2}{2})$	Αποδοχή της $H_1^-$
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \geq \frac{\sigma}{\delta} (\ln B + \frac{n\delta^2}{2})$	Αποδοχή της $H_1^+$
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \leq \frac{\sigma}{\delta} (\ln A + \frac{n\delta^2}{2})$ $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \geq -\frac{\sigma}{\delta} (\ln A + \frac{n\delta^2}{2})$	Αποδοχή της $H_0$
Όπου $A = \frac{\beta}{1-\alpha}$ και $B = \frac{1-\beta}{\alpha}$ Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η δειγματοληψία συνεχίζεται.	

Πιο συγκεκριμένα και αφού πρακτικά  $\beta \approx 0$  θα έχουμε  $\ln B = -\ln \alpha$ , οπότε παίρνουμε τον πίνακα 16:

**Πίνακας 16 Αποδοχές απόφασης Φάσης ΙΙ (Ι)**

Κατάσταση στο $n$ -οστό βήμα ελέγχου	Απόφαση
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \leq \frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha - \frac{n\sigma\delta}{2}$	Αποδοχή της $H_1^-$
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \geq -\frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha + \frac{n\sigma\delta}{2}$	Αποδοχή της $H_1^+$
Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η δειγματοληψία συνεχίζεται.	

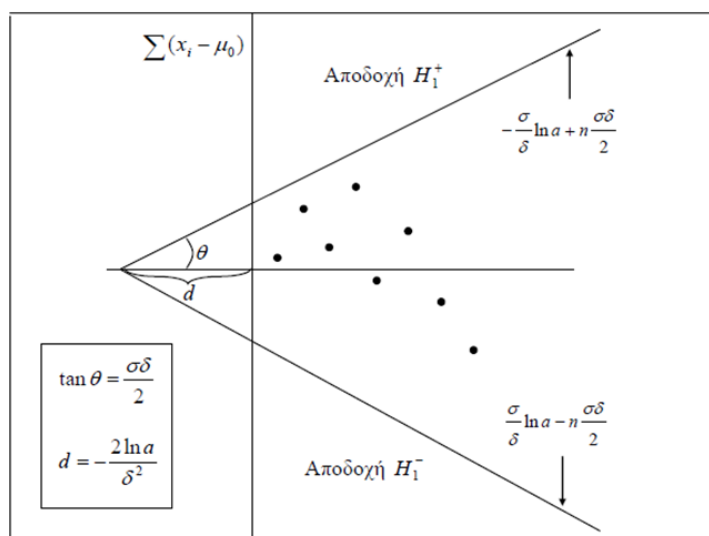
$$\text{Ωστόσο: } \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \leq \frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha - \frac{n\sigma\delta}{2} \rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - (\mu_0 + \frac{\sigma\delta}{2})) \leq \frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha \quad [52]$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0) \geq -\frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha + \frac{n\sigma\delta}{2} \rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - (\mu_0 + \frac{\sigma\delta}{2})) \geq -\frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha \quad [53]$$

και ορίζοντας  $K = \frac{\sigma\delta}{2}$  και  $H = -\frac{\sigma}{\delta} \ln \alpha$  παίρνουμε τον πίνακα 17:

**Πίνακας 17 Αποδοχές απόφασης Φάσης ΙΙ (ΙΙ)**

Κατάσταση στο $n$ -οστό βήμα ελέγχου	Απόφαση
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0 - K) \leq -H$	Αποδοχή της $H_1^-$
$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0 + K) \geq H$	Αποδοχή της $H_1^+$
Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η δειγματοληψία συνεχίζεται.	



Εικόνα 10 Αποδοχές απόφασης σε διάγραμμα V μάσκας

### 3.2.4. Μέθοδος της άμεσης αρχικής αντίδρασης

Όταν η αλγοριθμική μέθοδος που αναλύθηκε προηγουμένως δώσει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, τότε εφαρμόζονται διορθωτικές ενέργειες για την επαναφορά του μέσου της διεργασίας στην τιμή στόχο και συνεχίζεται η παρακολούθηση του μέσω νέου διαγράμματος το οποίο ξεκινά με  $S_0^+ = 0$  και  $S_0^- = 0$  (Montgomery, 2013). Εάν οι διορθωτικές ενέργειες δεν αποφέρουν το επιθυμητό αποτέλεσμα, θα γίνει αντιληπτό και στο νέο διάγραμμα, όπου θα δοθεί κάποια ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας (Zhang et al., 2006).

Για να εμφανιστεί αυτή η ένδειξη όσο το δυνατόν γρηγορότερα, προτείνεται να χρησιμοποιηθεί η **μέθοδος άμεσης αρχικής αντίδρασης** (Yashchin, 1993). Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, οι τιμές  $S_0^+ \neq 0$  και  $S_0^- \neq 0$  και ορίζονται ως  $S_0^+ = \frac{H}{2}$  και  $S_0^- = -\frac{H}{2}$ . Αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, τότε η μέθοδος, όπως είναι φυσικό, δεν θα επηρεάσει την ανάλυση. (Montgomery, 2013).

### 3.2.5. Διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά

Για την παρακολούθηση της διασποράς της υπό μελέτη διεργασίας, (Montgomery, 2013) προτείνεται η χρήση ενός διαγράμματος *CUSUM*, υποθέτοντας ότι έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις  $X_i$  πληθυσμού  $N(\mu_0, \sigma^2)$  και θέτοντας:

$$Y_t = \frac{X_t - \mu_0}{\sigma} \quad [54]$$

$$W_t = \frac{\sqrt{|Y_t|} - E\sqrt{|Y_t|}}{\sqrt{V\sqrt{|Y_t|}}} \quad [55]$$

Οι Hawkins et al. (1998) παρατήρησαν ότι η εντός ελέγχου κατανομή της  $W_t$  είναι προσεγγιστική η κατανομή  $N(0,1)$  και η  $W_t$  είναι ευαίσθητη σε μετατοπίσεις της  $\sigma^2$ .

Για το διάγραμμα ελέγχου σύμφωνα με τον (Yashchin, 1993), χρησιμοποιώντας την αλγοριθμική μέθοδο ισχύει:

$$S_t^+ = \max[0, W_t - k + S_{t-1}^+], \quad [56] \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, W_t + k + S_{t-1}^-], \quad [57] \quad S_0^- = 0$$

## 4. Διαγράμματα Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (Exponentially Weighted Moving Average Control Charts)

### 4.1. Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, τα διαγράμματα ελέγχου *Shewhart* δεν είναι σε μεγάλο βαθμό ευαίσθητα σε μικρές μεταβολές του μέσου της διεργασίας. Όταν εμφανίζεται μια τέτοια αλλαγή, χρειάζονται αρκετά σημεία στο διάγραμμα ελέγχου για να εντοπιστεί η μετατόπιση αυτή. Τέτοιου είδους διαγράμματα δίνουν βαρύτητα στο πιο πρόσφατο σημείο, αγνοώντας τις προηγούμενες τιμές (Alevizakos et al., 2021).

Τα διαγράμματα *EWMA* από την άλλη, χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μικρών μεταβλητών, της τάξης των  $0.5\sigma$  έως και των  $2\sigma$ , στο μέσο της υπό μελέτης διεργασίας. Σε αυτή την περίπτωση, αντίθετα από τα διαγράμματα *Shewhart*, τα σημεία στο διάγραμμα εξαρτώνται και από τις προηγούμενες μετρήσεις. (Montgomery, 2013).

## 4.2. Δομή EWMA διαγράμματος

Σύμφωνα με τους Adeoti and Malela-Majika (2020), υποθέτουμε ότι  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή  $\mu$ . Για μια διεργασία με εντός ελέγχου μέσο  $\mu_0$  και διακύμανση  $\sigma^2$  ισχύει συνήθως  $Z_0 = \mu_0$ .

Επομένως, οι τιμές του στατιστικού  $Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1}$  [58]

,όπου  $0 < \lambda \leq 1$  ο συντελεστής βαρύτητας και  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Η παράμετρος  $\lambda$  χρησιμεύει στον καθορισμό του βαθμού που τα παλαιότερα δεδομένα εισάγονται στον υπολογισμό του EWMA στατιστικού. Οι τιμές που επιλέγονται συνήθως είναι:  $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$  με τις τιμές  $\lambda = 0.05$ ,  $\lambda = 0.10$  και  $\lambda = 0.20$  ως τις πιο διαδεδομένες, σύμφωνα με τους Abbas et al. (2011).

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1} = \lambda X_i + (1-\lambda)[\lambda X_{i-1} + (1-\lambda)Z_{i-2}] = \lambda(1-\lambda)^0 X_i + (1-\lambda)\lambda X_{i-1} + (1-\lambda)^2 Z_{i-2} \quad [59]$$

Συνεχίζοντας για  $Z_{i-j}$  με  $j = 2, 3, \dots, t$  έχουμε:  $Z_{i-j} = (1-\lambda)^j Z_0 + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j}$  [60]

Η ποσότητα  $Z_t$  αποτελεί σταθμισμένο μέσο των παρατηρήσεων  $X_0, X_1, \dots, X_t$  με αντίστοιχα βάρη τα:  $(1-\lambda)^i, \lambda(1-\lambda)^{i-1}, \lambda(1-\lambda)^{i-2}, \dots, \lambda(1-\lambda)^1, \lambda$ . Αξίζει να αναφερθεί πως τα βάρη  $\lambda(1-\lambda)^{i-j}$  των ποσοτήτων  $X_i$  φθίνουν γεωμετρικά, καθώς μεταφερόμαστε από την παρατήρηση  $X_i$  προς την  $X_1$  (Ατζουλάκος, 2010).

Σύμφωνα με τον Montgomery (2013), για το μέσο και τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης  $Z_i$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \mu_{Z_i} &= E((1-\lambda)^i Z_0 + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j}) = (1-\lambda)^i \mu_0 + \lambda \mu_0 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j = (1-\lambda)^i \mu_0 + \mu_0 (1 - (1-\lambda)^i) \rightarrow \\ \mu_{Z_i} &= (1-\lambda)^i \mu_0 + \mu_0 (1 - (1-\lambda)^i) = \mu_0 \quad [61] \end{aligned}$$

$$\text{Και } \sigma^2_{Z_i} = \text{Var}((1-\lambda)^i Z_0 + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j}) = \lambda^2 \sigma^2 \sum_{j=0}^{i-1} [(1-\lambda)^2]^j = \sigma^2 \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \rightarrow$$

$$\sigma^2_{Z_i} = \sigma^2 \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad [62]$$

Σύμφωνα με Awais and Haq (2018), στο διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $Z_i$ .

Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή ισούνται με:

**Πίνακας 18 Όρια Ελέγχου EWMA (γενικά)**

$UCL = \mu_{Z_i} + L\sigma_{Z_i} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}{2-\lambda}}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L\sigma_{Z_i} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}{2-\lambda}}$

Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος από ότι φαίνεται και από τις παραπάνω σχέσεις, είναι μεταβλητά. Ωστόσο η ποσότητα  $(1-\lambda)^{2j}$  τείνει στην τιμή μηδέν, καθώς το  $j$  αυξάνεται. Οπότε σε σύντομο χρονικό διάστημα τα όρια ελέγχου σταθεροποιούνται δίνονται από :

**Πίνακας 19 Όρια Ελέγχου EWMA απλοποιημένα**

$UCL = \mu_0 + L\sigma_{Z_i} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$
$LCL = \mu_0 - L\sigma_{Z_i} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$

### 4.3. Μέσο μήκος ροής

Τα διαγράμματα ελέγχου *EWMA* είναι πολύ αποτελεσματικά σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου. Οι σχεδιαστικές παράμετροι που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία των διαγραμμάτων είναι οι τιμές  $\lambda$  και  $L$ . Υπάρχουν αρκετές θεωρητικές μελέτες για τις ιδιότητες του *ARL* στα διαγράμματα ελέγχου *EWMA*. Σύμφωνα με τους Adeoti and Malela-Majika (2020), από διάφορες μελέτες προέκυψαν συνδυασμοί διάφορων τιμών  $\lambda$  και  $L$  που δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Ο πιο αποτελεσματικός τρόπος επιλογής των τιμών αυτών, είναι πρώτα η αναγνώριση του επιθυμητού εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής εντός και εκτός ελέγχου καθώς και το μέγεθος της μετατόπισης μέσου που προσδοκάτε.

Πίνακας 20 Μετατόπιση του μέσου για περιπτώσεις  $\lambda=0.05$ ,  $\lambda=0.10$ ,  $\lambda=0.20$ ,  $\lambda=0.25$  και  $\lambda=0.40$  στο  $ARL_0=500$

Μετατόπιση μέσου ( $\delta$ )	$\lambda=0.40$ <b>L=3.054</b>	$\lambda=0.25$ <b>L=2.998</b>	$\lambda=0.20$ <b>L=2.962</b>	$\lambda=0.10$ <b>L=2.814</b>	$\lambda=0.05$ <b>L=2.615</b>
0	500	500	500	500	500
0.25	224	170	150	106	84.1
0.5	71.2	48.2	41.8	31.3	28.8
0.75	28.4	20.1	18.2	15.9	16.4
<b>1.00</b>	14.3	11.1	10.5	10.3	11.4
1.50	5.9	5.5	5.5	6.1	7.1
2.00	3.5	3.6	3.7	4.4	5.2
2.50	2.5	2.7	2.9	3.4	4.2
3.00	2.0	2.3	2.4	2.9	3.5
4.00	1.4	1.7	1.9	2.2	2.7

Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του *ARL*, είναι εκείνη του Monte Carlo (MC). Με την ανάπτυξη του αλγορίθμου *ARL*, η διαδικασία ξεκινάει να “τρέχει” για  $N$  φορές. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του μήκους ροής δίνεται παρακάτω:

$$ARL = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N RL_i \quad [63]$$

$$SDRL = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (RL_i - ARL)^2} \quad [64],$$

όπου  $RL_i$  ο αριθμός των παρατηρήσεων που χρειάζεται να απεικονισθούν στο διάγραμμα, πριν η διεργασία βγει εκτός ελέγχου κατά την  $i$  επανάληψη της προσομοίωσης.

Αξίζει να αναφερθεί πως τα διαγράμματα τύπου *EWMA*, όπως και τα διαγράμματα τύπου *CUSUM*, είναι προτιμότερα από τα διαγράμματα τύπου *Shewhart* σε περιπτώσεις μικρών μετατοπίσεων του μέσου, αλλά δεν προτιμώνται για την ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του (Sheu and Lin, 2003). Ακόμα, η παραβίαση υπόθεσης κανονικότητας των παρατηρήσεων όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος  $n$  είναι μεγάλος δεν επηρεάζει σημαντικά την απόδοση ενός διαγράμματος *EWMA*, όπως επηρεάζεται για παράδειγμα το διάγραμμα  $\bar{X}$ . Επομένως, ένα άρτια σχεδιασμένο διάγραμμα *EWMA* είναι σχεδόν πάντα η καλύτερη λύση για την ανίχνευση των μικρών μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας. Για ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων, μετά τα διαγράμματα τύπου *Shewhart*, τα διαγράμματα τύπου *EWMA* είναι πιο επιθυμητά από τα *CUSUM*, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου  $\lambda > 0.10$  (Jiang and Apley, 2008).

Παρόλο που η μέθοδος των διαγραμμάτων ελέγχου *EWMA* αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις, μπορεί να τροποποιηθεί εύκολα ώστε να καλύψει και τις περιπτώσεις που  $n > 1$ . Σε αυτή την περίπτωση, η ποσότητα  $X_i$  θα αντικατασταθεί από την  $\bar{X}_i$ , από το μέσο του δείγματος  $i$ . Επίσης, η ποσότητα  $\sigma$  θα αντικατασταθεί από την  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Έτσι, σύμφωνα με Human et al. (2011),

$$Z_i = \lambda \bar{X}_i + (1-\lambda)Z_{i-1} \quad [65] \quad , \text{ με } 0 < \lambda \leq 1.$$

Τα όρια ελέγχου αλλά και η κεντρική γραμμή ισούνται με:

**Πίνακας 21 Όρια Ελέγχου EWMA στην περίπτωση δειγμάτων**

$UCL = \mu_{Z_i} + L\sigma_{Z_i} = \mu_0 + L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2j}]}{2-\lambda}}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L\sigma_{Z_i} = \mu_0 - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2j}]}{2-\lambda}}$



#### 4.4. Η περίπτωση του κινητού μέσου

Στην περίπτωση του κινούμενου μέσου, η συνάρτηση για μεμονωμένες παρατηρήσεις δίνεται από τη σχέση:

$$Y_i = \frac{X_{i-k-1} + X_{i-k-2} + \dots + X_i}{k} \quad [66] \quad , i \geq k$$

Για διεργασία με εντός ελέγχου μέσο  $\mu_0$  έχουμε ότι

$$E(Y_i) = \mu_0 \quad [67]$$

$$Var(Y_i) = \frac{\sigma^2}{k} \quad [68]$$

Επομένως, η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το μέσο της διεργασίας θα μπορούσε να βασιστεί στην ποσότητα  $Y_i, i \geq k$ .

Σύμφωνα με τον Montgomery (2013), στο διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου θα εμφανίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $Y_i$  και τα όρια ελέγχου καθώς και η κεντρική γραμμή να δίνονται παρακάτω:

Πίνακας 22 Όρια Ελέγχου για διάγραμμα κινούμενου μέσου για  $i \geq k$

$UCL = \mu_{Z_i} + L\sigma_{Z_i} = \mu_0 + L\frac{\sigma}{\sqrt{k}}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L\sigma_{Z_i} = \mu_0 - L\frac{\sigma}{\sqrt{k}}$

Για  $i < k$  η στατιστική συνάρτηση  $Y_i$  ορίζεται συνήθως ως ο μέσος των  $i$  παρατηρήσεων,

$$Y_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_i}{i} \quad [69] \quad , i < k \quad \text{με } E(Y_i) = \mu_0 \quad \text{και} \quad Var(Y_i) = \frac{\sigma^2}{i} \quad \text{και τα όρια ελέγχου καθώς}$$

και η κεντρική γραμμή να δίνονται παρακάτω:

Πίνακας 23 Όρια Ελέγχου για διάγραμμα κινούμενου μέσου για  $i \geq k$

$UCL = \mu_{Z_i} + L\sigma_{Z_i} = \mu_0 + L\frac{\sigma}{\sqrt{i}}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L\sigma_{Z_i} = \mu_0 - L\frac{\sigma}{\sqrt{i}}$

Επομένως, τα πρώτα όρια ελέγχου για τις πρώτες  $k-1$  παρατηρήσεις είναι μεταβλητά.

Αξίζει να αναφερθεί πως τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μεγέθη δειγμάτων  $n > 1$ . Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$Y_i = \frac{\bar{X}_{i-k-1} + \bar{X}_{i-k-2} + \dots + \bar{X}_i}{k} \quad [70] \quad , i \geq k$$

Τότε, τα όρια ελέγχου καθώς και η κεντρική γραμμή να δίνονται παρακάτω:

**Πίνακας 24 Όρια Ελέγχου για διάγραμμα κινούμενου μέσου**

$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{nk}}$
$CL = \mu_0$
$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{nk}}$

Για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας, τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου είναι πιο αποτελεσματικά από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*. Ωστόσο, η χρήση τους είναι περιορισμένη καθώς δεν είναι τόσο αποτελεσματικά όσο τα διαγράμματα ελέγχου EWMA και CUSUM (Jiang and Apley, 2008).

## 5. Παραγωγική Διαδικασία- Μελέτη Περίπτωσης

### 5.1. Εισαγωγή και δεδομένα

Σ' αυτό το Κεφάλαιο αναλύεται η εφαρμογή του στατιστικού ελέγχου παραγωγικής διαδικασίας στη γραμμή υποσυσκευασίας φυτοφαρμακευτικών προϊόντων. Κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι η συνεχής παρακολούθηση της παραγωγικής διαδικασίας και σκοπός της η μείωση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων, όπως και η αύξηση παραγωγικότητας. Για την επίτευξη της συνεχούς παρακολούθησης της παραγωγικής διαδικασίας, θα χρησιμοποιηθούν διαγράμματα ελέγχου.

Με την εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου, βελτιώνεται σημαντικά η ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Συνήθως τα διαγράμματα ελέγχου επιλέγονται για χρήση κατά τα στάδια της παραγωγικής διαδικασίας που είναι συχνή η εμφάνιση συστηματικών αιτιών ή όταν η εμφάνιση συστηματικών αιτιών είναι αρκετά επιζήμια και δαπανηρή.

Κατά την παραγωγική διαδικασία, το προσωπικό του τμήματος ποιότητας ελέγχει το βάρος φιαλών στην εκάστοτε γραμμή παραγωγής. Ο έλεγχος πραγματοποιείται με λήψη τυχαίων δειγμάτων μεγέθους 30 συσκευασιών κάθε 60 λεπτά από κάθε παραγγελία που συσκευάζεται και συγκρίνεται με τις πρότυπες τιμές που έχουν ορισθεί ως ανώτατα και κατώτατα όρια ανοχής. Με την άδεια του εργοστασίου χρησιμοποιήθηκαν αυτά τα δεδομένα, με σκοπό να εκτιμηθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της υποσυσκευασίας προϊόντων στη γραμμή παραγωγής ZALKIN.

Το συγκεκριμένο στάδιο της παραγωγικής διαδικασίας επιλέχθηκε καθώς είναι αρκετά σημαντικό για την υποσυσκευασία των προϊόντων. Επομένως, παρακολουθώντας την παραγωγική διαδικασία με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, θα αποφευχθεί η μετακίνηση προϊόντων με μη επαρκή ποιότητα στα επόμενα στάδια της παραγωγής, τα οποία με την ολοκλήρωσή της θα χαρακτηριστούν ως ελαττωματικά.

Τα δείγματα που συλλέχθηκαν αφορούσαν υποσυσκευασία φιαλών συσκευασίας 1L με τεχνικές προδιαγραφές:

$T=1134.3$  (τιμή στόχος)

$LSL=1121.9$  (άνω όριο προδιαγραφής)

$USL=1141.4$  (κάτω όριο προδιαγραφής)

Οι μετρήσεις που συλλέχθηκαν αφορούσαν σε συνολικά 40 ελέγχους που διεξήχθησαν από τον Ποιοτικό Έλεγχο με 30 δείγματα ανά δειγματοληψία.

Οι προκαταρκτικοί έλεγχοι ήταν 25 που αποτελούν την Φάση I και οι υπόλοιποι 15 έγιναν σε δεύτερο χρόνο για να ελεγχθεί η μετατόπιση του μέσου και αν η διεργασία εξακολουθεί να βρίσκεται υπό έλεγχο (Φάση II). Και στις δύο περιπτώσεις η κάθε δειγματοληψία αποτελούνταν από 30 δείγματα, επομένως το n είναι σταθερό ( $n=30$ ).

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται αναλυτικά οι μετρήσεις για τη Φάση I ( $m=25$ ,  $n=30$ )

Πίνακας 25 Βάρη φιαλών 1L κατά τη Φάση I

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1136.6	1135.4	1134.9	1134.3	1134.5	1135.2	1138.0	1136.3	1134.6	1136.0	1136.1	1136.9	1136.5	1138.0	1136.6	1136.8	1136.1	1137.0	1135.5	1136.3	1136.2	1137.0	1136.8	1136.5	1137.2
2	1136.7	1136.2	1136.5	1135.5	1135.6	1136.1	1136.6	1137.7	1136.6	1136.7	1138.0	1138.0	1137.0	1138.4	1137.5	1137.7	1137.0	1137.0	1136.4	1137.7	1134.3	1134.5	1136.9	1137.8	1136.0
3	1136.0	1135.9	1136.5	1135.0	1137.0	1135.8	1136.7	1137.0	1136.9	1137.9	1137.4	1138.1	1136.9	1137.2	1137.8	1137.1	1137.0	1138.0	1136.3	1136.1	1135.7	1135.1	1137.5	1137.1	1138.1
4	1139.2	1139.0	1137.6	1137.6	1136.9	1135.0	1137.2	1138.2	1136.7	1136.9	1136.8	1137.0	1136.4	1136.7	1136.4	1135.9	1135.7	1135.6	1136.6	1137.0	1136.2	1135.5	1136.8	1136.4	1137.3
5	1136.2	1136.3	1137.3	1134.9	1135.7	1135.2	1135.3	1135.9	1137.1	1137.9	1136.4	1134.3	1136.3	1135.7	1136.5	1137.0	1135.9	1135.8	1136.1	1136.7	1137.1	1138.3	1136.5	1137.3	
6	1135.3	1134.9	1135.6	1136.5	1138.1	1134.7	1138.4	1136.3	1135.1	1136.5	1137.8	1136.9	1138.1	1136.8	1136.5	1135.5	1136.8	1136.6	1136.5	1137.6	1134.9	1134.7	1137.3	1136.9	1137.4
7	1135.3	1135.6	1135.0	1134.5	1135.4	1135.8	1135.6	1136.3	1135.3	1136.0	1138.6	1138.7	1137.9	1136.9	1138.7	1137.0	1137.5	1138.1	1137.4	1137.5	1136.6	1135.3	1136.4	1136.4	1136.4
8	1138.8	1137.7	1135.6	1136.3	1139.2	1136.4	1136.8	1136.7	1136.3	1136.3	1138.1	1140.0	1137.6	1136.0	1138.1	1137.4	1136.0	1137.2	1136.9	1138.3	1136.4	1137.5	1138.4	1136.7	1137.6
9	1136.2	1136.9	1135.1	1135.6	1136.3	1136.4	1136.6	1136.8	1135.8	1135.3	1136.4	1136.8	1137.9	1137.6	1137.8	1137.2	1136.1	1137.0	1138.1	1138.6	1136.0	1136.6	1135.9	1137.5	1136.5
10	1136.5	1135.8	1136.0	1135.6	1136.4	1136.3	1136.1	1137.0	1136.7	1136.3	1136.0	1138.2	1137.3	1137.9	1138.1	1133.9	1138.1	1137.9	1137.7	1137.8	1136.5	1137.1	1138.3	1136.5	1137.3
11	1135.8	1135.9	1135.8	1135.5	1137.0	1135.9	1136.1	1136.3	1135.8	1136.7	1137.4	1136.4	1137.2	1135.7	1134.6	1137.7	1136.9	1137.3	1136.2	1136.7	1136.9	1136.7	1134.3	1135.6	1136.0
12	1135.7	1136.1	1135.0	1136.2	1135.9	1136.4	1136.2	1135.8	1136.3	1135.2	1138.7	1136.0	1135.5	1137.5	1138.7	1137.7	1136.5	1138.7	1138.1	1137.4	1137.2	1136.8	1135.9	1137.0	1135.1
13	1136.1	1135.9	1134.6	1135.5	1135.5	1135.4	1138.3	1136.1	1136.2	1136.0	1136.1	1136.4	1135.9	1136.3	1138.2	1136.7	1136.1	1136.8	1137.2	1136.5	1135.2	1136.2	1137.2	1134.9	1136.8
14	1134.4	1134.5	1136.2	1136.9	1135.6	1137.8	1135.3	1134.4	1135.1	1135.0	1136.1	1135.8	1135.9	1135.5	1135.9	1136.1	1136.1	1136.3	1137.1	1136.7	1135.8	1136.0	1137.1	1135.4	1136.4
15	1136.2	1134.6	1134.9	1135.3	1134.9	1135.3	1138.3	1135.5	1135.1	1134.8	1136.7	1135.9	1137.5	1137.1	1137.1	1136.1	1136.2	1136.6	1135.8	1137.7	1135.5	1135.2	1136.1	1136.8	1136.3
16	1135.8	1135.0	1135.5	1135.7	1134.4	1136.1	1134.8	1135.1	1136.3	1136.7	1136.3	1135.9	1137.2	1136.3	1135.8	1136.5	1136.4	1136.2	1135.8	1136.1	1135.8	1135.8	1135.0	1134.9	1135.6
17	1135.6	1136.6	1136.8	1137.0	1137.7	1138.3	1136.4	1136.0	1135.8	1135.8	1137.2	1137.4	1136.2	1137.8	1136.8	1136.4	1136.4	1136.8	1136.8	1135.9	1136.0	1136.4	1135.4	1135.0	1135.9
18	1135.2	1137.5	1138.3	1137.7	1137.8	1135.1	1136.9	1136.2	1138.1	1137.1	1137.2	1136.5	1136.8	1136.5	1135.7	1136.4	1136.4	1136.3	1135.6	1136.9	1136.5	1136.4	1136.3	1136.2	1136.4
19	1135.3	1135.6	1135.5	1135.6	1134.5	1139.9	1137.7	1134.9	1134.9	1135.8	1136.7	1136.1	1136.6	1136.5	1136.3	1136.9	1135.8	1135.6	1136.9	1135.6	1136.0	1135.6	1136.1	1136.9	1137.2
20	1136.4	1134.6	1134.9	1134.6	1135.3	1138.6	1138.6	1137.8	1134.5	1134.9	1136.4	1135.7	1136.2	1136.5	1136.7	1136.7	1135.5	1136.1	1135.9	1135.1	1137.2	1136.7	1136.5	1135.5	1136.0
21	1134.8	1136.4	1134.9	1134.9	1135.1	1136.4	1135.6	1135.8	1136.0	1137.4	1136.4	1136.9	1135.6	1136.3	1136.3	1136.4	1136.1	1136.0	1136.8	1137.2	1136.4	1138.8	1137.4	1139.3	1139.1
22	1137.3	1138.8	1138.6	1136.8	1136.9	1136.5	1136.7	1135.6	1136.1	1136.5	1135.9	1136.3	1136.2	1136.2	1136.5	1136.1	1136.6	1136.4	1135.5	1136.8	1135.4	1135.9	1135.0	1137.3	1136.0
23	1136.6	1136.0	1136.6	1135.3	1136.9	1138.2	1136.3	1136.7	1135.9	1137.6	1134.3	1137.5	1135.2	1136.6	1137.3	1136.0	1136.0	1136.1	1136.8	1136.4	1137.5	1136.7	1136.9	1138.1	1135.7
24	1137.6	1137.2	1137.5	1136.8	1136.0	1137.6	1136.6	1136.8	1137.2	1137.4	1136.0	1139.3	1135.0	1139.2	1136.2	1136.3	1137.7	1135.6	1134.9	1135.8	1138.9	1135.8	1136.2	1135.4	1136.5
25	1136.6	1136.5	1136.9	1136.3	1137.2	1139.2	1136.3	1135.7	1136.4	1136.8	1135.7	1134.9	1135.6	1136.5	1136.2	1135.2	1135.7	1136.3	1135.4	1136.2	1136.0	1137.6	1136.9	1136.2	1135.2
26	1136.6	1136.8	1137.2	1137.4	1136.8	1137.2	1136.6	1137.0	1136.5	1138.6	1135.8	1135.6	1135.5	1135.4	1136.3	1136.9	1136.1	1136.5	1136.2	1136.4	1136.4	1136.2	1136.7	1136.3	1135.1
27	1138.7	1139.6	1138.6	1137.6	1137.0	1139.2	1137.3	1137.0	1137.2	1136.4	1135.0	1135.9	1135.3	1134.4	1135.4	1136.7	1136.0	1136.8	1137.0	1136.4	1137.5	1136.2	1136.5	1136.6	1137.6
28	1136.7	1136.0	1136.0	1135.2	1135.6	1137.2	1135.6	1135.2	1137.0	1136.7	1135.9	1136.9	1137.0	1136.6	1137.4	1137.7	1135.9	1135.9	1135.8	1134.8	1136.1	1135.2	1135.6	1138.3	1138.7
29	1136.0	1136.0	1135.3	1135.2	1135.6	1136.2	1137.0	1136.5	1136.7	1136.2	1135.1	1135.7	1135.4	1135.7	1136.0	1135.2	1135.9	1135.0	1135.9	1136.6	1136.1	1136.5	1136.5	1135.1	1136.7
30	1138.4	1135.6	1135.8	1136.0	1137.4	1136.4	1136.9	1135.6	1136.3	1136.3	1136.4	1136.0	1136.1	1136.8	1136.4	1137.5	1136.7	1136.9	1138.1	1135.7	1136.0	1137.6	1136.9	1136.2	1135.2
ΧΙ	1136.42	1136.30	1136.11	1135.99	1136.25	1136.68	1136.69	1136.25	1136.11	1136.43	1136.61	1136.80	1136.39	1136.71	1136.77	1136.54	1136.41	1136.62	1136.50	1136.66	1136.26	1136.29	1136.57	1136.51	1136.62

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται αναλυτικά οι μετρήσεις για τη Φάση II (m=15, n=30)

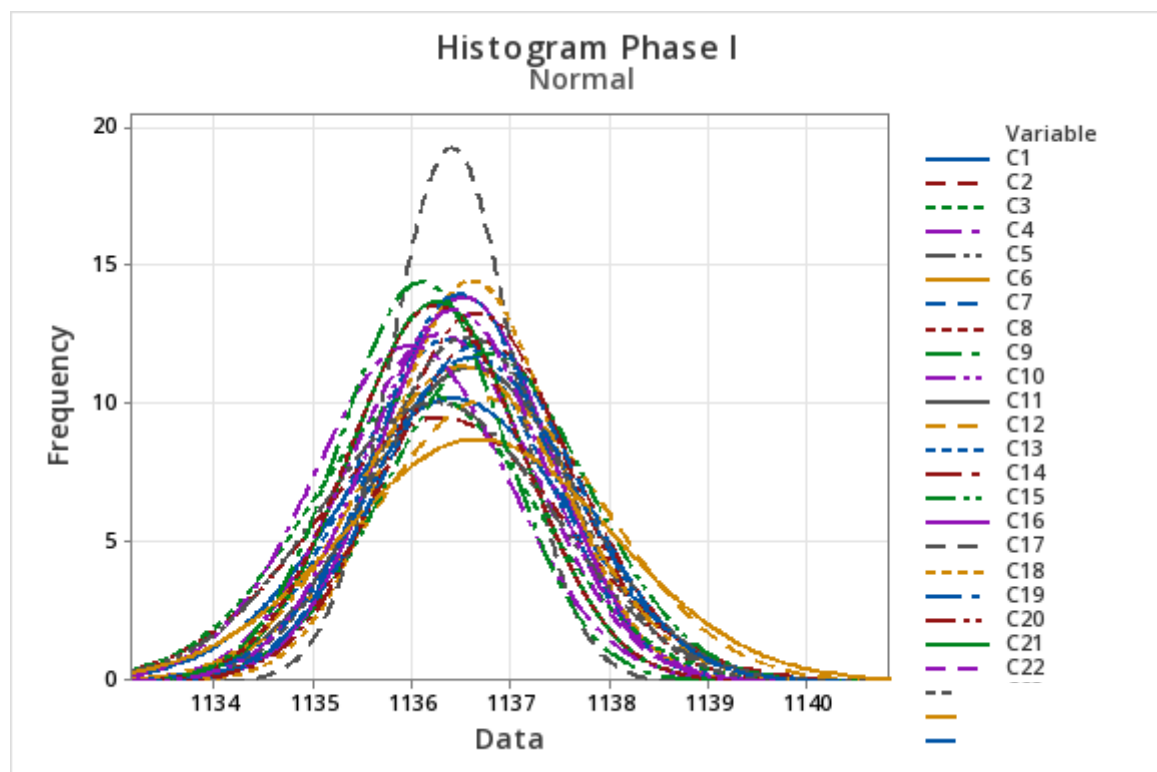
**Πίνακας 26 Βάρη φιαλών 1L κατά τη Φάση II**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1138.7	1138.1	1136.2	1136.3	1136.4	1135.6	1137.1	1136.9	1137.2	1136.4	1136.9	1135.0	1135.6	1135.2	1136.8
2	1136.2	1137.3	1135.2	1136.0	1135.1	1135.9	1134.8	1136.1	1137.6	1136.9	1138.1	1135.9	1135.4	1134.3	1135.8
3	1136.0	1138.6	1136.5	1136.0	1135.2	1135.1	1135.6	1136.7	1136.9	1135.3	1136.5	1135.7	1136.9	1135.6	1137.5
4	1135.1	1138.3	1136.4	1135.4	1136.1	1135.3	1135.6	1135.9	1135.1	1136.5	1136.3	1135.9	1135.7	1137.2	1136.5
5	1138.7	1139.5	1135.2	1137.5	1136.7	1138.7	1135.5	1136.0	1138.1	1135.4	1138.7	1136.4	1137.7	1135.2	1137.5
6	1136.3	1136.6	1135.8	1138.1	1136.9	1136.2	1135.1	1136.9	1135.8	1136.3	1136.8	1137.1	1136.4	1136.5	1135.6
7	1136.2	1136.3	1135.3	1139.8	1136.4	1139.5	1138.7	1137.3	1135.9	1136.0	1135.1	1136.3	1136.7	1135.3	1136.4
8	1136.7	1136.8	1136.5	1136.6	1135.9	1135.9	1134.4	1135.3	1136.4	1137.3	1137.0	1136.0	1136.0	1135.9	1135.4
9	1137.7	1135.9	1135.0	1135.7	1135.2	1136.9	1136.6	1137.0	1134.8	1137.2	1135.8	1136.3	1135.9	1135.1	1137.4
10	1138.2	1136.1	1136.7	1136.6	1135.6	1136.1	1135.9	1136.4	1136.1	1136.2	1136.8	1136.5	1136.7	1136.9	1136.3
11	1136.5	1136.6	1136.6	1137.5	1135.2	1135.9	1136.2	1136.3	1135.5	1136.8	1136.4	1134.3	1136.1	1137.3	1136.2
12	1136.3	1136.1	1134.8	1137.4	1137.4	1135.8	1135.5	1138.6	1136.2	1137.4	1136.5	1135.3	1136.9	1137.2	1135.4
13	1137.0	1136.1	1136.3	1135.9	1137.2	1135.8	1135.8	1135.9	1135.8	1137.7	1136.3	1136.3	1135.9	1135.8	1135.5
14	1137.1	1136.2	1136.8	1136.2	1135.8	1136.7	1137.5	1135.9	1135.8	1136.7	1136.6	1137.4	1136.1	1136.4	1137.1
15	1135.5	1136.5	1135.8	1134.9	1135.6	1136.5	1136.0	1135.5	1136.3	1137.2	1136.4	1136.7	1135.2	1136.9	1135.5
16	1136.3	1136.7	1137.0	1135.8	1136.7	1136.0	1136.4	1136.1	1136.8	1136.2	1136.1	1137.0	1137.6	1136.9	1135.9
17	1135.5	1136.1	1135.2	1135.0	1137.2	1135.0	1135.8	1136.1	1136.3	1137.1	1136.1	1136.9	1135.9	1136.7	1135.9
18	1137.1	1136.1	1135.3	1135.7	1135.2	1134.8	1135.9	1136.7	1136.6	1135.8	1136.2	1134.9	1137.1	1135.9	1137.5
19	1136.3	1136.5	1136.3	1134.7	1138.4	1136.7	1135.9	1136.3	1136.2	1135.8	1136.4	1138.1	1135.8	1135.1	1137.2
20	1137.8	1136.4	1136.3	1135.8	1135.6	1135.8	1137.4	1137.2	1136.8	1136.8	1136.4	1135.4	1136.8	1135.3	1136.2
21	1136.5	1136.4	1136.7	1136.4	1136.8	1137.1	1136.5	1137.2	1136.3	1135.6	1136.4	1139.2	1135.7	1136.3	1136.8
22	1136.5	1137.9	1136.8	1136.4	1136.6	1137.8	1136.1	1136.7	1138.6	1136.9	1135.8	1136.3	1136.3	1135.8	1136.6
23	1136.5	1136.7	1137.0	1136.3	1136.1	1137.9	1135.7	1136.4	1138.1	1135.9	1135.5	1136.4	1136.7	1136.7	1136.2
24	1136.3	1138.4	1136.1	1135.7	1134.4	1137.4	1136.9	1136.4	1136.0	1136.8	1136.1	1135.5	1136.3	1134.8	1135.6
25	1136.2	1136.1	1135.3	1137.0	1137.7	1136.5	1136.3	1135.9	1136.4	1135.5	1136.6	1136.8	1136.5	1136.4	1136.2
26	1136.6	1138.0	1135.1	1136.7	1137.8	1137.6	1137.5	1134.3	1138.1	1136.8	1136.0	1138.3	1136.3	1136.9	1135.2
27	1139.2	1138.3	1137.9	1135.6	1134.5	1137.4	1139.3	1136.0	1135.6	1134.9	1139.7	1135.5	1136.2	1137.7	1135.0
28	1135.5	1136.9	1134.6	1134.6	1135.3	1134.6	1135.6	1135.3	1137.3	1136.7	1136.2	1134.9	1135.3	1138.6	1134.6
29	1135.8	1136.0	1136.4	1134.9	1135.1	1134.9	1138.4	1135.1	1136.6	1136.8	1137.6	1134.9	1136.8	1135.6	1135.6
30	1135.6	1137.2	1136.5	1136.8	1136.9	1136.8	1136.5	1136.9	1136.3	1135.7	1137.2	1138.6	1136.3	1136.7	1136.7
Xi	1136.66	1136.96	1136.05	1136.24	1136.17	1136.41	1136.35	1136.31	1136.52	1136.42	1136.62	1136.33	1136.29	1136.21	1136.20

## 5.2. Έλεγχος κατανομής του υπό μελέτη χαρακτηριστικού ποιότητας

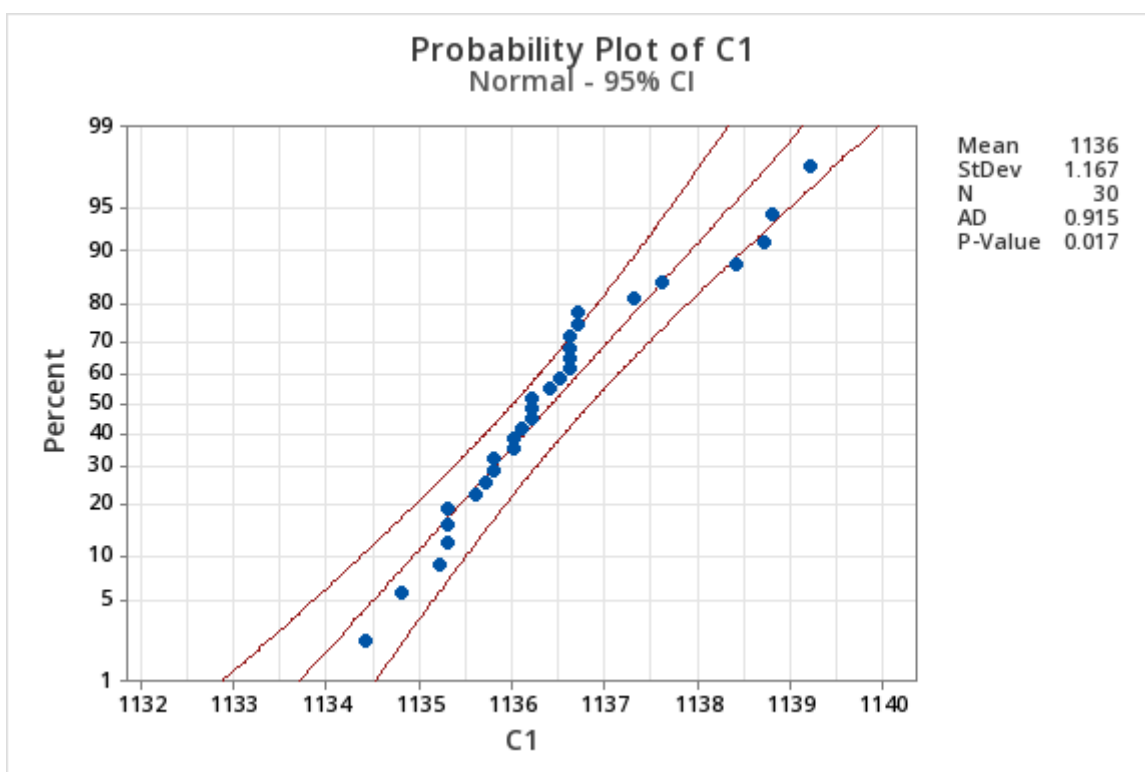
Προτού γίνει η εκτίμηση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του κύριου χαρακτηριστικού ποιότητας, προσδιορίστηκε αρχικά η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθούν οι τιμές του βάρους του προϊόντος που συσκευάζεται. Για αυτόν το λόγο πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος κανονικότητας με την χρήση *Kolmogorov-Smirnov* και με τη χρήση ιστογράμματος.

Ξεκινώντας τον έλεγχο προσαρμογής της κατανομής γίνεται η αρχική υπόθεση για το ποια είναι η κατανομή πιθανότητας που προσαρμόζονται ικανοποιητικά οι τιμές του κύριου χαρακτηριστικού ποιότητας. Με τη χρήση των τιμών των δειγμάτων γίνεται ο σχεδιασμός του ιστογράμματος χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο για στατιστικές εφαρμογές *Minitab* και με την ανάγνωση της μορφής του ιστογράμματος υποδεικνύεται ότι το βάρος του προϊόντος που συσκευάζεται ακολουθεί την κανονική κατανομή. Για το υπό μελέτη προϊόν χρησιμοποιήθηκαν όλες οι τιμές των δειγμάτων για την κατασκευή ιστογράμματος. Η απεικόνιση του ιστογράμματος θα βοηθήσει στο να γίνει ευκολότερα η υπόθεση σε ποια στατιστική κατανομή προσαρμόζονται ικανοποιητικά οι τιμές των δειγμάτων του προϊόντος.



Εικόνα 11 Ιστόγραμμα των τιμών βάρους για αναγνώριση της κατανομής

Για τον έλεγχο της προσαρμογής κατανομής χρησιμοποιείται το λογισμικό πακέτο για στατιστικές εφαρμογές *Minitab*, όπου πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος προσαρμογής κατανομής *Kolmogorov-Smirnov* για να εξεταστεί αν η αρχική υπόθεση που έγινε μπορεί να απορριφθεί ή όχι. Το επίπεδο σημαντικότητας που χρησιμοποιήθηκε είναι ίσο με 0.05 για κάθε έλεγχο. Ο έλεγχος έδειξε ότι η κανονική κατανομή προσαρμόζεται καλά για το υπό μελέτη προϊόν. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ο έλεγχος με τη χρήση *Kolmogorov-Smirnov* για το πρώτο δείγμα που πάρθηκε, το διάγραμμα κανονικότητας είναι το εξής:



Εικόνα 12 Διάγραμμα ελέγχου προσαρμογής κατανομής *Kolmogorov-Smirnov* για αναγνώριση της κατανομής

Όπως φαίνεται, γίνεται απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, καθώς με βάση το παρακάτω διάγραμμα και το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου *Kolmogorov-Smirnov* και οι μετρήσεις που συλλέχθηκαν κατά την πρώτη δειγματοληψία ακολουθούν την κανονική κατανομή. Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα,  $\hat{\mu} = \bar{X} = 1136$  και  $\hat{\sigma} = s = 0.9880$ . Στο παράρτημα X υπάρχουν διαθέσιμα και τα διαγράμματα για τα υπόλοιπες δειγματοληψίες. Σε όλες τις περιπτώσεις τα p-values του ελέγχου *Kolmogorov-Smirnov* είναι μεγαλύτερα από το 5%, όπως φαίνεται και στο Παράρτημα B, οπότε σε όλες τις περιπτώσεις ακολουθείται κανονική κατανομή.

### 5.3. Χρήση Διαγράμματος μέσης τιμής- τυπικής απόκλισης για ανάλυση βαρών φιαλών υποσυσκευασμένων προϊόντων για τη Φάση I

#### *X-bar και S διαγράμματα ελέγχου*

Τα ακόλουθα δεδομένα αναφέρονται στο βάρος των υποσυσκευασμένων φιαλών (χαρακτηριστικό  $X$ ) που προορίζονται να συσκευασθούν σε χαρτοκιβώτια. Για το χαρακτηριστικό  $X$  όπως αναφέραμε ήδη έχουν καθοριστεί οι τεχνικές προδιαγραφές, οι οποίες αναφέρθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου.

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται μετρήσεις που προέκυψαν από  $m=25$  προκαταρκτικά δείγματα με μέγεθος  $n=30$  το καθένα. Δίνεται επίσης ο δειγματικός μέσος και η τυπική απόκλιση κάθε προκαταρκτικού δείγματος, όπου ο δείκτης  $n$  είναι στον κατακόρυφο άξονα. Για τον σχολιασμό και αργότερα των αποτελεσμάτων, αλλά και για την σύγκριση των διαγραμμάτων μεταξύ τους αξίζει να σημειωθεί πως και στις τρεις περιπτώσεις η τιμή του  $ARL_0=370.4$ .

Για την κατασκευή *S* διαγράμματος (Φάση I) για τα 25 δείγματα χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα:

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του *πίνακα 12* για το διάγραμμα *S*

$$UCL = B_4\bar{S}$$

$$CL = \bar{S}$$

$$LCL = B_3\bar{S}$$

$$\bullet \quad CL = \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + \dots + S_{25}}{25} = 0.9897$$

Επειδή  $n=30$  θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω σχέση από τον πίνακα του παραρτήματος A:

$$\bullet \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3} = \frac{4(30-1)}{4 \cdot 30 - 3} = \frac{116}{117} = 0.9915$$

$$\bullet \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} = 1.3973$$

$$\bullet \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} = 0.6027$$

Οπότε έχουμε:

$$\bullet \quad UCL = B_4\bar{S} = 1.3829$$

$$\bullet \quad LCL = B_3\bar{S} = 0.5965$$



Και για την κατασκευή του  $\bar{X}$  διαγράμματος (*Φάση I*) λαμβάνονται υπόψιν τα στοιχεία των 25 δειγμάτων που αναλύθηκαν παραπάνω.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του *πίνακα 12* για το διάγραμμα  $\bar{X}$ :

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}, \text{ έχουμε:}$$

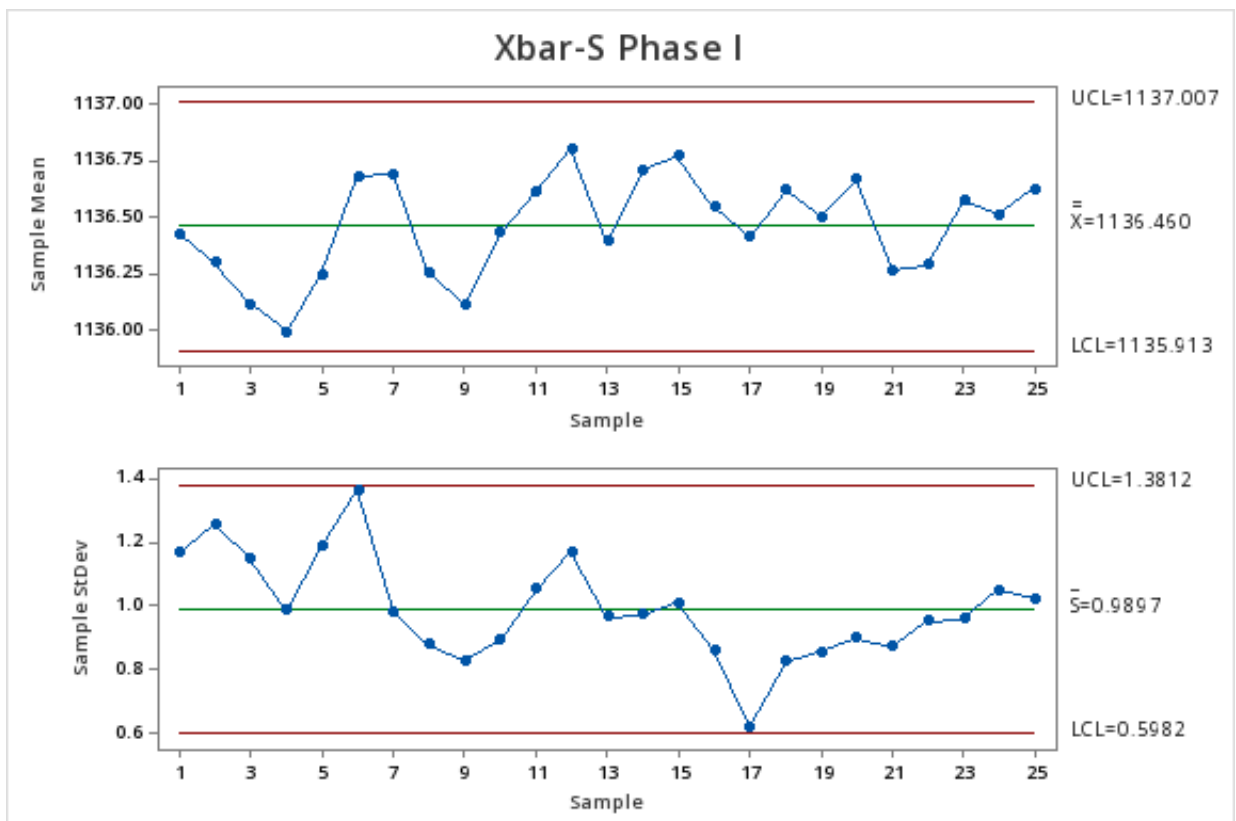
- $\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \bar{X}_4 + \dots + \bar{X}_{25}}{25} = 1136.46$
- $A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{(n)}} = 0.5524$
- $UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} = 1137.007$
- $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S} = 1135.913$

Σύμφωνα με τη σχέση [30], η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του χαρακτηριστικού  $X$  ισούται με  $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4} = 0.9982$ .

Σύμφωνα με τη σχέση [24],  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 1136.46$ , δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι  $X \sim N(1136.46, (0.9982)^2)$ .

Από τα διαγράμματα ελέγχου (σχήμα 13) μπορεί να παρατηρηθεί πως η *Φάση I* της παραγωγικής διαδικασίας βρίσκεται υπό στατιστικό έλεγχο, καθώς:

- κανένα σημείο δεν βρίσκεται εκτός ορίων
- δεν υπάρχουν οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
- δεν υπάρχουν έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
- δεν υπάρχουν δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
- δεν υπάρχουν οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
- δεν υπάρχουν ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.



Εικόνα 13 Διάγραμμα X-S για την Φάση I της υπό μελέτης παραγωγικής διαδικασίας με 25 δείγματα

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν μπορούμε να πούμε ότι το συγκεκριμένο διάγραμμα απεικονίζει τα αποτελέσματα των διαδοχικών ελέγχων της υπόθεσης

$H_0: \mu = 1136.46$ ,  $H_1: \mu \neq 1136.46$  με σταθερό  $\sigma = 0.9982$ .

Κάθε σημείο του παραπάνω διαγράμματος που βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου αντιστοιχεί σε μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης  $H_0: \mu_0 = 1136.46$  και μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι σύμφωνα με το διάγραμμα δεν έχει εμφανιστεί ειδική αιτία μεταβλητότητας που έχει ως αποτέλεσμα την μετατόπιση της μέσης τιμής  $\mu$  της διεργασίας.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο δείκτης  $C_p$  της διεργασίας χρησιμοποιώντας τη σχέση [4] είναι:

$$C_p = \frac{UCL - LCL}{6\sigma} = \frac{1.094}{5.989} = 0.183.$$

$$\text{Από την σχέση [8] έχουμε, } C_{pk} = \min\{C_{pl}, C_{pu}\} = \min\left\{\frac{\mu - L}{3\sigma}, \frac{U - \mu}{3\sigma}\right\} = \min\left\{\frac{1136.46 - 1135.913}{3 \cdot 0.9982}, \frac{1137.007 - 1136.46}{3 \cdot 0.9982}\right\} = 0.183.$$

Οι τιμές  $C_{pk}$ ,  $C_p$  είναι ιδιαίτερα χαμηλές, και οφείλεται στην τυπική απόκλιση της διεργασίας που είναι αρκετά μεγάλη, συγκριτικά με το εύρος των προδιαγραφών. Για να αυξηθούν οι τιμές των  $C_{pk}$ ,  $C_p$  θα πρέπει να ληφθούν μέτρα μείωσης της τυπικής απόκλισης των διεργασιών και μετατόπισης του δειγματικού μέσου στο κέντρο των προδιαγραφών ( $\mu_I = T = 1134.3$ ).

Χρησιμοποιώντας την σχέση [11], έχουμε:

$$\tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2 \rightarrow \tau^2 = 0,9982^2 + (1136.46 - 1134.3)^2 \rightarrow \tau = 2.38$$

Επομένως χρησιμοποιώντας την σχέση [9] έχουμε:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau} = \frac{1.094}{14.28} = 0.077$$

Τέλος, για να υπολογίσουμε τον δείκτη  $C_{pmk}$  χρησιμοποιούμε τη σχέση [16]

$$C_{pmk} = \min\left(\frac{\mu - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{USL - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}\right) =$$

$$\min\left(\frac{1136.46 - 1135.913}{3\sqrt{0.9982^2 + (1136.46 - 1134.3)^2}}, \frac{1137.007 - 1136.46}{3\sqrt{0.9982^2 + (1136.46 - 1134.3)^2}}\right) = 0.077$$

#### 5.4. Χρήση Διαγράμματος μέσης τιμής- τυπικής απόκλισης για ανάλυση βαρών φιαλών υποσυσκευασμένων προϊόντων για μετατόπιση μέσου (Φάση II)

Μετά τον καθορισμό των ορίων ελέγχου για την εντός ελέγχου διαδικασία της υποσυσκευασίας, συνεχίζουμε να παρακολουθούμε τις μετρήσεις βαρών που λαμβάνονται από τον Ποιοτικό Έλεγχο. Στον **Πίνακα 25** δίνονται οι μετρήσεις που προέκυψαν από 15 επιπρόσθετα δείγματα μεγέθους  $n = 30$  το καθένα. Με τη χρήση τους δημιουργούνται εκ νέου τα διαγράμματα  $\bar{X}$ -S και υπολογίζονται τα νέα όρια ελέγχου.

Για την κατασκευή **S διαγράμματος (Φάση II)** για τα δείγματα χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα:

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του **πίνακα 13** για το **διάγραμμα S**

- $UCL = B_6\sigma$
- $CL = C_4\sigma$
- $LCL = B_5\sigma$

$$CL = C_4\sigma = 0.9897$$

Επειδή  $n=30$  θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω σχέση από τον πίνακα του παραρτήματος A:

- $c_4 = 0.9915$ , όπως είδαμε προηγουμένως
- $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2} = 1.3818$
- $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} = 0.6012$

Οπότε έχουμε:

- $UCL = B_6\sigma = 1.3793$
- $LCL = B_5\sigma = 0.6001$

Και για την κατασκευή του  **$\bar{X}$  διαγράμματος (Φάση II)** λαμβάνονται υπόψη τα στοιχεία των δειγμάτων που αναλύθηκαν παραπάνω.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του **πίνακα 13** για το **διάγραμμα  $\bar{X}$** :

$$UCL = \mu + A\sigma$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - A\sigma, \text{ με } \hat{\sigma} = 0.9982 \text{ έχουμε:}$$

- $A = \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.5477$

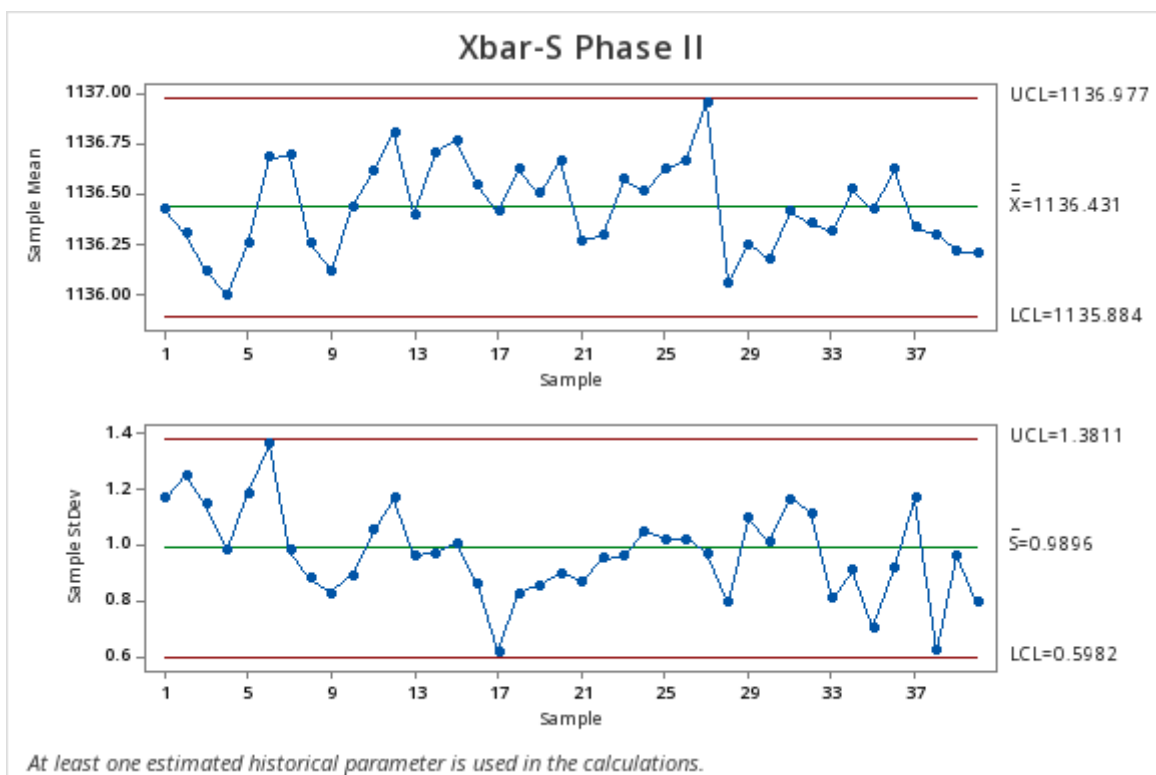
- $UCL = \mu + A\sigma = 1136.431 + 0.5477 \cdot 0.9982 = 1136.997$
- $LCL = \mu - A\sigma = 1136.431 - 0.5477 \cdot 0.9982 = 1135.884$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο δείκτης  $C_p$  της διεργασίας χρησιμοποιώντας τη σχέση [4] είναι:

$$C_p = \frac{UCL - LCL}{6\sigma} = 0.183.$$

Από την σχέση [8] έχουμε,  $C_{pk} = \min\{C_{pl}, C_{pu}\} = \min\left\{\frac{\mu - L}{3\sigma}, \frac{U - \mu}{3\sigma}\right\} =$   
 $\min\left\{\frac{1136.431 - 1135.884}{3 \cdot 0.9982}, \frac{1136.997 - 1136.431}{3 \cdot 0.9982}\right\} = 0.183$

Οι τιμές  $C_{pk}$ ,  $C_p$  είναι όπως και στη Φάση I χαμηλές, οφείλεται στην τυπική απόκλιση της διεργασίας που είναι αρκετά μεγάλη, συγκριτικά με το εύρος των προδιαγραφών. Για να αυξηθούν οι τιμές των  $C_{pk}$ ,  $C_p$  θα πρέπει να ληφθούν μέτρα μείωσης της τυπικής απόκλισης των διεργασιών και μετατόπισης τους δειγματικού μέσου στο κέντρο των προδιαγραφών ( $\mu_1 = T = 1134.3$ ).



Εικόνα 14 Διάγραμμα X-S για την Φάση II της υπό μελέτης παραγωγικής διαδικασίας με επιπλέον 15 δείγματα

Αξίζει να σημειωθεί πως από το  $\bar{X}$  διάγραμμα προκύπτει ότι η μέση τιμή της  $X$  έχει μετατοπιστεί ελαφρώς προς τα κάτω. Από το 36<sup>ο</sup> δείγμα και μετά η μέση τιμή της  $X$  φαίνεται να έχει μετατοπιστεί σε χαμηλότερη τιμή. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, πέντε συνεχόμενα σημεία βρίσκονται σε φθίνουσα διάταξη.

### 5.5. Χρήση Συσσωρευμένων Αθροιστικών Διαγραμμάτων Ελέγχου (CUSUM)

Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα που αναλύθηκαν προηγουμένως με το διάγραμμα *Shewhart*, χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα 40 δεδομένα για την ανάλυση με το διάγραμμα CUSUM, για τα οποία γνωρίζουμε ότι τα πρώτα 25 αποτελούν τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n=25$  από τον πληθυσμό  $N(1136.46,30)$ , ενώ τα υπόλοιπα 15 αποτελούν τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n=15$  από τον πληθυσμό  $N(1136.329,30)$ . Όπως αποδείχθηκε και πριν, θεωρείται ότι τα πρώτα 25 δείγματα προέρχονται από διεργασία με εντός ελέγχου μέσο  $\mu_0=1136.46$  και τυπική απόκλιση  $\sigma=0.9982$ , ενώ τα υπόλοιπα 15 προέρχονται από μια διεργασία εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου στη θέση  $\mu_1=1136.329$  με την τυπική απόκλιση να παραμένει σταθερή. Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη ενότητα, όταν υπάρχει ενδιαφέρον για ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου, γίνεται χρήση των αθροιστικών διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM.

Σύμφωνα και με τη σχέση [35] για τις περιπτώσεις που  $n>1$  έχουμε ότι:

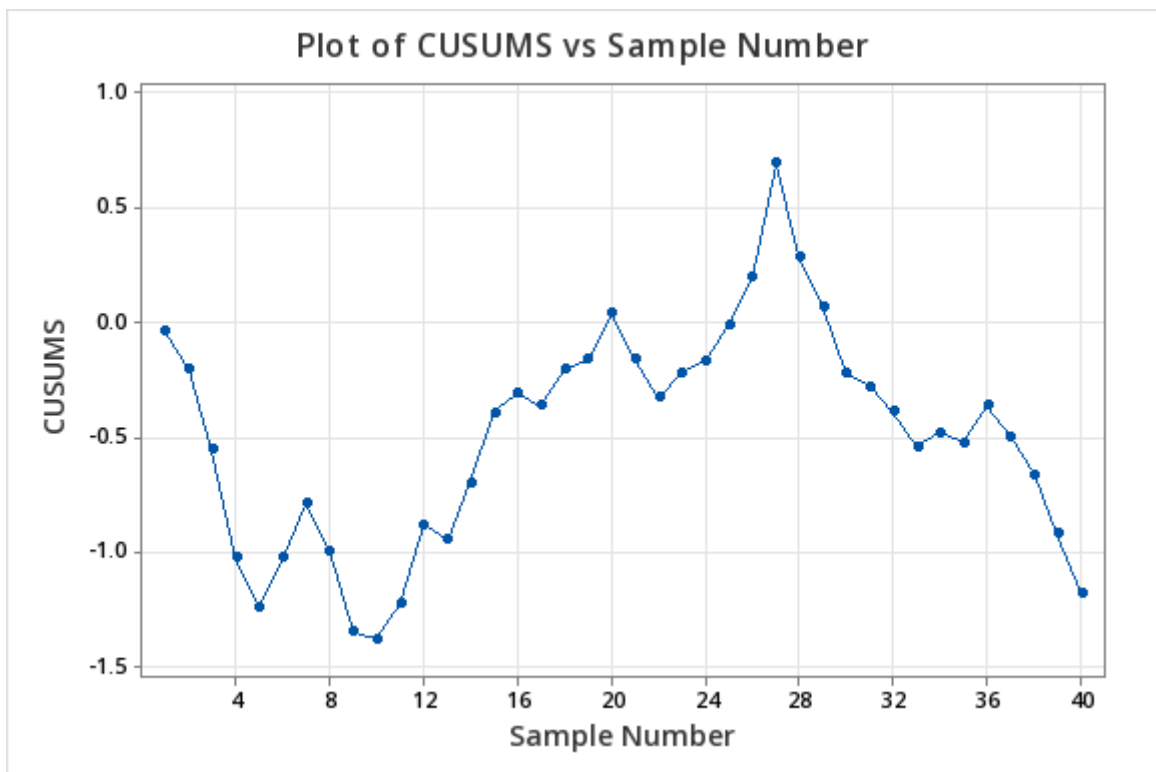
Για το συσσωρευμένο άθροισμα  $C_t$  των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από την τιμή στόχο που αναλύθηκε στο θεωρητικό μέρος, ισχύει:

$$C_t = \sum_{i=1}^t ((\bar{X}_i) - \mu_0) = \bar{X}_t - \mu_0 + C_{t-1} = -t * \mu_0 + \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i) = \bar{X}_t - 1136.477 + C_{t-1} = -t * 1136.477 + \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i), \text{ όπου } t=1, 2, \dots, 40 \text{ και } C_0=0.$$

Πίνακας 27 Συσσωρευμένα αθροίσματα

ΔΕΙΓΜΑ	$\bar{X}_j$	$\bar{X}_j - \mu_0$	$C_i$	ΔΕΙΓΜΑ	$\bar{X}_j$	$\bar{X}_j - \mu_0$	$C_i$
1	1136.42	-0.040	-0.040	21	1136.26	-0.197	-0.157
2	1136.30	-0.163	-0.203	22	1136.29	-0.170	-0.327
3	1136.11	-0.347	-0.550	23	1136.57	0.110	-0.217
4	1135.99	-0.470	-1.020	24	1136.51	0.050	-0.167
5	1136.25	-0.213	-1.233	25	1136.62	0.160	-0.007
6	1136.68	0.217	-1.017	26	1136.66	0.203	0.197
7	1136.69	0.230	-0.787	27	1136.96	0.497	0.693
8	1136.25	-0.207	-0.993	28	1136.05	-0.407	0.287
9	1136.11	-0.350	-1.343	29	1136.24	-0.217	0.070
10	1136.43	-0.030	-1.373	30	1136.17	-0.293	-0.223
11	1136.61	0.153	-1.220	31	1136.41	-0.053	-0.277
12	1136.80	0.343	-0.877	32	1136.35	-0.110	-0.387
13	1136.39	-0.067	-0.943	33	1136.31	-0.150	-0.537
14	1136.71	0.247	-0.697	34	1136.52	0.057	-0.480
15	1136.77	0.307	-0.390	35	1136.42	-0.040	-0.520
16	1136.54	0.080	-0.310	36	1136.62	0.157	-0.363
17	1136.41	-0.050	-0.360	37	1136.33	-0.133	-0.497
18	1136.62	0.157	-0.203	38	1136.29	-0.167	-0.663
19	1136.50	0.040	-0.163	39	1136.21	-0.253	-0.917
20	1136.66	0.203	0.040	40	1136.20	-0.257	-1.173





Εικόνα 15 Διάγραμμα Ελέγχου μεθόδου CUSUM

Στην συγκεκριμένη περίπτωση που η μετατόπιση της θέσης του μέσου είναι στην  $\mu_1$ , όπου  $\mu_1 < \mu_0$ , αποδεικνύεται αυτό που αναμενόταν από την θεωρία, δηλαδή ότι οι αποκλίσεις είναι περισσότερες από την περίπτωση εντός ελέγχου και τα συσσωρευμένα αθροίσματα παρουσιάζουν αντίστοιχα καθοδική κλίση. Στο Σχήμα 15 φαίνεται η καθοδική πορεία που ακολουθείται σταδιακά, ξεκινώντας από το δείγμα 28 και το σημείο (28, C28).

Για την μετατόπισης της τιμής  $\mu_0$  στην τιμή  $\mu_1$  και την εκτίμηση του  $\mu_1$ , τότε την στιγμή  $t_0 + I$  ισχύει, όπως αναφέρθηκε και στο θεωρητικό μέρος με  $t=40$  και  $t_0 + I=28$ :

$$\hat{\mu}_1 - \mu_0 = \frac{C_t - C_{t_0+1}}{t - (t_0+1)} \rightarrow \hat{\mu}_1 = 1136.46 + \frac{C_{40} - C_{28}}{12} = 1136.46 + \frac{-1.173 - 0.287}{12} = 1136.46 - 0.122 \rightarrow$$

$$\hat{\mu}_1 = 1136.286$$

Για το διάγραμμα ελέγχου αλγοριθμικής μεθόδου έχουμε τα εξής:

$$\text{Από την θεωρία } K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{0.122}{2} = 0.061. \text{ Ομως, } K = \frac{\sigma\delta}{2} \rightarrow \delta = \frac{2K}{\sigma} = \frac{0.122}{0.9982} = 0.1222 \text{ και } k = \frac{\delta}{2} = 0.061.$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, και στις 3 υπό μελέτη περιπτώσεις χρησιμοποιείται η ίδια τιμή  $ARL_0=370.4$ , επομένως για το διάγραμμα ελέγχου αλγοριθμικής μεθόδου χρησιμοποιώντας το SigmaXL και ορίζοντας τις τιμές  $ARL_0$  και  $k$  για τον υπολογισμό του  $h$ , προκύπτει ότι:  $h=16.54$ , άρα  $H=16.51$ .

Χρησιμοποιώντας τις τιμές του Πίνακα 28, έχουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε για να δημιουργήσουμε το Σχήμα 16 μέσω Minitab:

Για τον έλεγχο των υποθέσεων με  $\delta > 0$ :

- $H_0: \mu = \mu_0, H_1^+ : \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ , χρησιμοποιώντας την ποσότητα  $S_t^+$  και
- $H_0: \mu = \mu_0, H_1^- : \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma$ , χρησιμοποιώντας την ποσότητα  $S_t^-$ , έχουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση [36]:

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+] \text{ με } C_0^+ = 0$$

$$S_1^+ = \max[0, X_1 - (\mu_0 + K) + S_0^+] = \max[0, 1136.42 - (1136.46 + 0.061) + 0] = \max[0, -0.127] = 0$$

$$S_2^+ = \max[0, X_2 - (\mu_0 + K) + S_1^+] = \max[0, 1136.30 - (1136.46 + 0.061) + 0] = \max[0, -0.253] = 0.$$

Όμοια για το  $S_t^- = \min[0, X_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-]$  με  $S_0^- = 0$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση [37], Παίρνουμε τα δεδομένα των δύο πρώτων δειγμάτων και προκύπτει το εξής:

$$S_1^- = \min[0, X_1 - (\mu_0 - K) + S_0^-] = \min[0, 1136.42 - (1136.46 - 0.061) + 0] = \min[0, -0.047] = -0.047, \text{ σε αυτή την περίπτωση έχουμε } N=1.$$

$$S_2^- = \min[0, X_2 - (\mu_0 - K) + S_1^-] = \min[0, 1136.30 - (1136.46 - 0.061) + 0] = \min[0, 0.0760]$$

Τα υπόλοιπα δεδομένα και για τις δύο περιπτώσεις αναγράφονται στον Πίνακα 28.

Οι τιμές  $N^+$  και  $N^-$  που αναφέρονται και στον Πίνακα 28, δηλώνουν τον συνεχόμενο αριθμό των τιμών  $S_t^+$  και  $S_t^-$  αντίστοιχα που η τιμή είναι διαφορετική του 0 και θετική στην πρώτη περίπτωση και αρνητική στη δεύτερη περίπτωση.

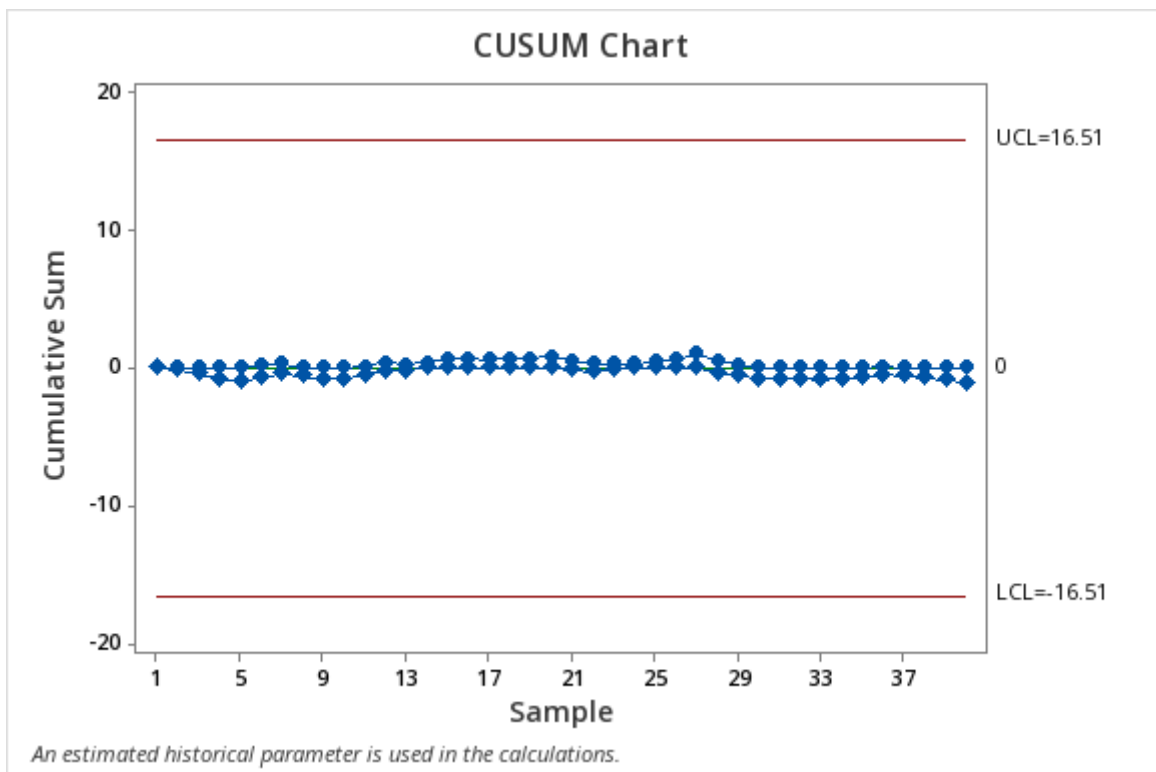
Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 28, για καμία τιμή  $S_t^+$  δεν ισχύει  $S_t^+ > H = 14.33$ . Επομένως, η πρώτη υπόθεση  $H_0 : \mu = \mu_0, H_1^+ : \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$  θεωρούμε ότι ισχύει και η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Επίσης, για καμία τιμή  $S_t^-$  δεν ισχύει  $S_t^- < -H = -14.33$ . Επομένως, η δεύτερη υπόθεση  $H_0 : \mu = \mu_0, H_1^- : \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma$  θεωρούμε ότι ισχύει και η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Πίνακας 28 Πίνακας υπολογισμού  $St^+$ ,  $St^-$ ,  $N^+$ ,  $N^-$

ΔΕΙΓΜΑ	$\bar{X}_i$	$\mu_0 - K - \bar{X}_i$	$S_i^-$	$N^-$	ΔΕΙΓΜΑ	$\bar{X}_i$	$\bar{X}_i - \mu_0 - K$	$S_i^+$	$N^+$
1	1136.42	-0.021	-0.021	1	1	1136.42	-0.101	0.000	0
2	1136.30	0.102	0.000	0	2	1136.30	-0.223	0.000	0
3	1136.11	0.286	0.000	0	3	1136.11	-0.407	0.000	0
4	1135.99	0.409	0.000	0	4	1135.99	-0.530	0.000	0
5	1136.25	0.152	0.000	0	5	1136.25	-0.273	0.000	0
6	1136.68	-0.278	-0.278	1	6	1136.68	0.157	0.157	1
7	1136.69	-0.291	-0.569	2	7	1136.69	0.170	0.327	2
8	1136.25	0.146	-0.423	3	8	1136.25	-0.267	0.000	0
9	1136.11	0.289	-0.134	4	9	1136.11	-0.410	0.000	0
10	1136.43	-0.031	-0.165	5	10	1136.43	-0.090	0.000	0
11	1136.61	-0.214	-0.379	6	11	1136.61	0.093	0.093	1
12	1136.80	-0.404	-0.784	7	12	1136.80	0.283	0.377	2
13	1136.39	0.006	-0.778	8	13	1136.39	-0.127	0.250	3
14	1136.71	-0.308	-1.086	9	14	1136.71	0.187	0.437	4
15	1136.77	-0.368	-1.453	10	15	1136.77	0.247	0.683	5
16	1136.54	-0.141	-1.594	11	16	1136.54	0.020	0.703	6
17	1136.41	-0.011	-1.605	12	17	1136.41	-0.110	0.593	7
18	1136.62	-0.218	-1.823	13	18	1136.62	0.097	0.690	8
19	1136.50	-0.101	-1.924	14	19	1136.50	-0.020	0.670	9
20	1136.66	-0.264	-2.188	15	20	1136.66	0.143	0.813	10
21	1136.26	0.136	-2.053	16	21	1136.26	-0.257	0.557	11
22	1136.29	0.109	-1.944	17	22	1136.29	-0.230	0.327	12
23	1136.57	-0.171	-2.115	18	23	1136.57	0.050	0.377	13
24	1136.51	-0.111	-2.226	19	24	1136.51	-0.010	0.367	14
25	1136.62	-0.221	-2.447	20	25	1136.62	0.100	0.467	15
26	1136.66	-0.264	-2.711	21	26	1136.66	0.143	0.610	16
27	1136.96	-0.558	-3.269	22	27	1136.96	0.437	1.047	17
28	1136.05	0.346	-2.923	23	28	1136.05	-0.467	0.580	18
29	1136.24	0.156	-2.767	24	29	1136.24	-0.277	0.303	19
30	1136.17	0.232	-2.535	25	30	1136.17	-0.353	0.000	0
31	1136.41	-0.008	-2.543	26	31	1136.41	-0.113	0.000	0
32	1136.35	0.049	-2.494	27	32	1136.35	-0.170	0.000	0
33	1136.31	0.089	-2.405	28	33	1136.31	-0.210	0.000	0
34	1136.52	-0.118	-2.522	29	34	1136.52	-0.003	0.000	0
35	1136.42	-0.021	-2.543	30	35	1136.42	-0.100	0.000	0
36	1136.62	-0.218	-2.761	31	36	1136.62	0.097	0.097	1
37	1136.33	0.072	-2.689	32	37	1136.33	-0.193	0.000	0
38	1136.29	0.106	-2.583	33	38	1136.29	-0.227	0.000	0
39	1136.21	0.192	-2.391	34	39	1136.21	-0.313	0.000	0
40	1136.20	0.196	-2.195	35	40	1136.20	-0.317	0.000	0

Χρησιμοποιώντας το στατιστικό πακέτο Minitab, λαμβάνεται το εξής διάγραμμα ελέγχου της αλγοριθμικής μεθόδου  $St^+$ ,  $St^-$ :



Εικόνα 16 Διάγραμμα Ελέγχου Αλγοριθμικής μεθόδου CUSUM

Από το παραπάνω διάγραμμα, φαίνεται πως η διαδικασία βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου, καθώς κανένα σημείο δεν βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου και τα περισσότερα κινούνται γύρω από την τιμή 0.

Στην περίπτωση που κάποιο σημείο ήταν εκτός των ορίων  $UCL=H=16.51$  και  $LCL=-H=-16.51$  και άρα υπήρχε μετατόπιση του μέσου της διεργασίας, θα χρησιμοποιούσαμε, όπως αναφέρεται στη θεωρία την σχέση [39] :

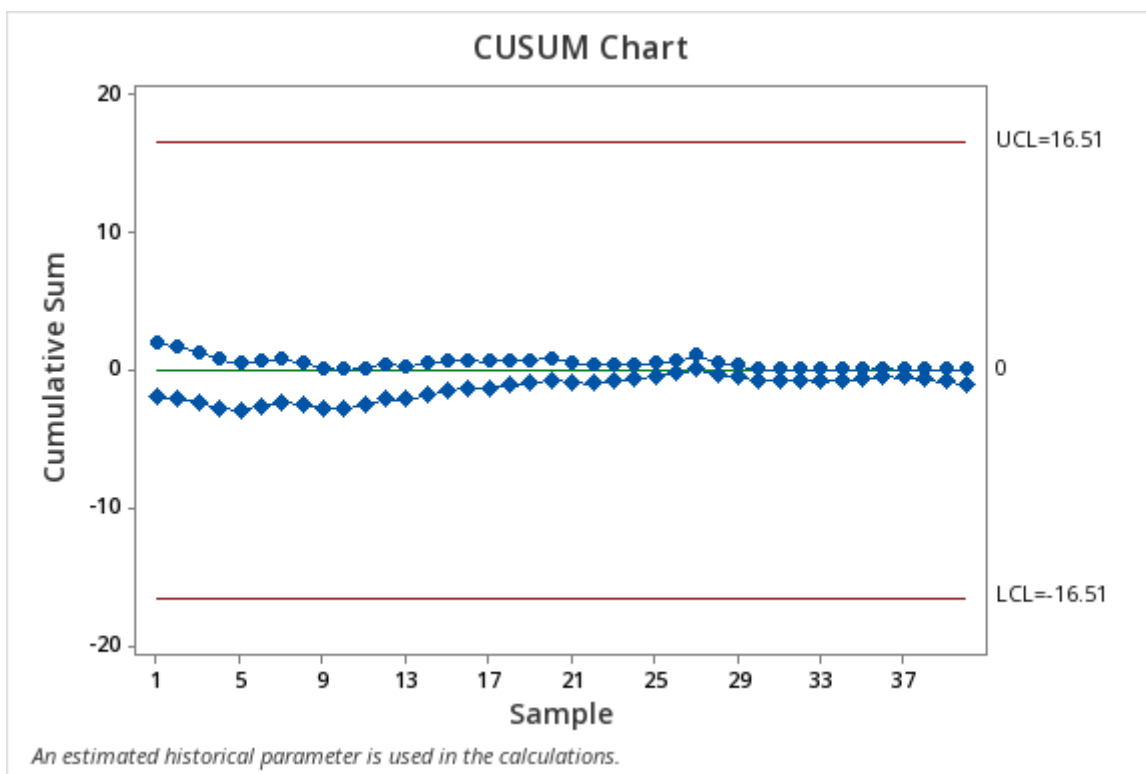
$$\widehat{\mu}_1 = \begin{cases} \mu_0 + K + \frac{S_t^+}{N^+}, & S_t^+ > H \\ \mu_0 - K + \frac{S_t^-}{N^-}, & S_t^- < -H \end{cases} .$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την μέθοδο της άμεσης αρχικής αντίδρασης και ορίζονται  $S_0^+ = \frac{H}{2} = 2$  και  $S_0^- = -\frac{H}{2} = -2$ , όπως αναφέρθηκε στη θεωρία. Αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, τότε η μέθοδος, όπως είναι φυσικό, δεν θα επηρεάσει την ανάλυση.

Πίνακας 29 Πίνακας υπολογισμού  $S_t^+$ ,  $S_t^-$ ,  $N^+$ ,  $N^-$  με  $S_0^+ = 2$  και  $S_0^- = -2$

ΔΕΙΓΜΑ	$\bar{X}_j$	$\mu_0 - K - \bar{X}_i$	$S_t^-$	$N^-$	ΔΕΙΓΜΑ	$\bar{X}_j$	$\bar{X}_i - \mu_0 - K$	$S_t^+$	$N^+$
1	1136.42	-0.021	-2.021	1	1	1136.42	-0.100	1.900	1
2	1136.30	0.102	-1.919	2	2	1136.30	-0.223	1.677	2
3	1136.11	0.286	-1.633	3	3	1136.11	-0.407	1.270	3
4	1135.99	0.409	-1.224	4	4	1135.99	-0.530	0.740	4
5	1136.25	0.152	-1.072	5	5	1136.25	-0.273	0.467	5
6	1136.68	-0.278	-1.349	6	6	1136.68	0.157	0.623	6
7	1136.69	-0.291	-1.640	7	7	1136.69	0.170	0.793	7
8	1136.25	0.146	-1.495	8	8	1136.25	-0.267	0.527	8
9	1136.11	0.289	-1.206	9	9	1136.11	-0.410	0.117	9
10	1136.43	-0.031	-1.237	10	10	1136.43	-0.090	0.027	10
11	1136.61	-0.214	-1.451	11	11	1136.61	0.093	0.120	11
12	1136.80	-0.404	-1.855	12	12	1136.80	0.283	0.403	12
13	1136.39	0.006	-1.850	13	13	1136.39	-0.127	0.277	13
14	1136.71	-0.308	-2.157	14	14	1136.71	0.187	0.463	14
15	1136.77	-0.368	-2.525	15	15	1136.77	0.247	0.710	15
16	1136.54	-0.141	-2.666	16	16	1136.54	0.020	0.730	16
17	1136.41	-0.011	-2.677	17	17	1136.41	-0.110	0.620	17
18	1136.62	-0.218	-2.895	18	18	1136.62	0.097	0.717	18
19	1136.50	-0.101	-2.996	19	19	1136.50	-0.020	0.697	19
20	1136.66	-0.264	-3.260	20	20	1136.66	0.143	0.840	20
21	1136.26	0.136	-3.124	21	21	1136.26	-0.257	0.583	21
22	1136.29	0.109	-3.015	22	22	1136.29	-0.230	0.353	22
23	1136.57	-0.171	-3.186	23	23	1136.57	0.050	0.403	23
24	1136.51	-0.111	-3.297	24	24	1136.51	-0.010	0.393	24
25	1136.62	-0.221	-3.518	25	25	1136.62	0.100	0.493	25
26	1136.66	-0.264	-3.783	26	26	1136.66	0.143	0.637	26
27	1136.96	-0.558	-4.340	27	27	1136.96	0.437	1.073	27
28	1136.05	0.346	-3.995	28	28	1136.05	-0.467	0.607	28
29	1136.24	0.156	-3.839	29	29	1136.24	-0.277	0.330	29
30	1136.17	0.232	-3.607	30	30	1136.17	-0.353	0.000	0
31	1136.41	-0.008	-3.614	31	31	1136.41	-0.113	0.000	0
32	1136.35	0.049	-3.565	32	32	1136.35	-0.170	0.000	0
33	1136.31	0.089	-3.476	33	33	1136.31	-0.210	0.000	0
34	1136.52	-0.118	-3.594	34	34	1136.52	-0.003	0.000	0
35	1136.42	-0.021	-3.615	35	35	1136.42	-0.100	0.000	0
36	1136.62	-0.218	-3.833	36	36	1136.62	0.097	0.097	1
37	1136.33	0.072	-3.760	37	37	1136.33	-0.193	0.000	0
38	1136.29	0.106	-3.655	38	38	1136.29	-0.227	0.000	0
39	1136.21	0.192	-3.462	39	39	1136.21	-0.313	0.000	0
40	1136.20	0.196	-3.267	40	40	1136.20	-0.317	0.000	0

Παρατηρούμε πως και πάλι δεν ξεπερνιούνται τα όρια  $LCL$ ,  $UCL$ , ωστόσο σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν λιγότερες μηδενικές τιμές για τις τιμές  $N^+$ ,  $N^-$ . επομένως και σε αυτήν την περίπτωση, η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Το ίδιο φαίνεται και στο διάγραμμα CUSUM που επισυνάπτεται παρακάτω. Επομένως, το CUSUM δεν ανίχνευσε μετατόπιση.



Εικόνα 17 Διάγραμμα Ελέγχου Αλγοριθμικής μεθόδου CUSUM με FIR

## 5.6. Χρήση Διαγραμμάτων Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη

Χρησιμοποιώντας τα ίδια δεδομένα που παρουσιάστηκαν στους Πίνακες 25,26 για να ελέγξουμε τη *Φάση II* της υπό μελέτη διεργασίας. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, και στις 3 υπό μελέτη περιπτώσεις χρησιμοποιείται η ίδια τιμή  $ARL_0=370.4$ . Ορίζοντας λοιπόν  $\lambda=0,3$  και χρησιμοποιώντας το *SigmaXL*, δίνοντας τις τιμές  $ARL_0$  και  $L$  για τον υπολογισμό του  $L$ , προκύπτει ότι:  $L=2.93$ .

Χρησιμοποιώντας την σχέση [58] έχουμε  $Z_i = 0.3X_i + 0.7Z_{i-1}$ .

Οι δύο πρώτες τιμές δίνονται ακολούθως:

$$Z_1 = 0.2X_1 + 0.8Z_0 = 0.3 \cdot 1136.42 + 0.7 \cdot 1136.46 = 1136.45$$

$$Z_2 = 0.2X_2 + 0.8Z_1 = 0.3 \cdot 1136.30 + 0.7 \cdot 1136.45 = 1136.41$$

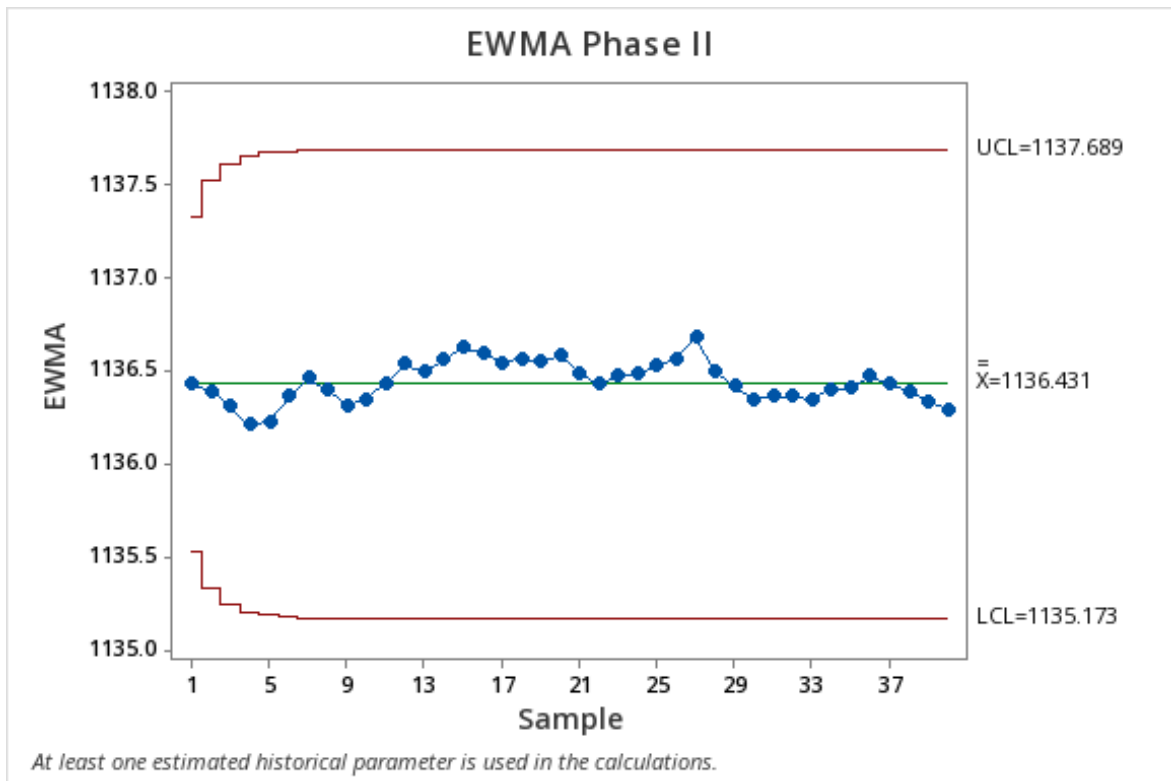
Και τα όρια ελέγχου  $UCL$ ,  $CL$ ,  $LCL$  υπολογίζονται με τις σχέσεις του Πίνακα 21, ως εξής:

$$CL = \bar{\bar{X}} = 1136.431$$

$$UCL = \mu_0 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 1136.46 + 3 \frac{0.9982}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{0.3}{2-0.3}} = 1137.761$$

$$LCL = \mu_0 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} = 1136.46 - 3 \frac{0.9982}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{0.3}{2-0.3}} = 1135.159$$

Επίσης, από το *Minitab* προκύπτει το εξής σχήμα:



Εικόνα 18 Διάγραμμα Ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη

Από το σχήμα φαίνεται ότι και σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει σημείο εκτός ορίων ελέγχου, συνεπώς η διεργασία είναι εντός ελέγχου και δεν υπάρχει ένδειξη ότι ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο.



## 6. Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε μια προσπάθεια στατιστικής ανάλυσης της παραγωγικής διαδικασίας προϊόντων υποσυσκευασίας. Ελέγχθηκαν δεδομένα που αφορούσαν το ποιοτικό χαρακτηριστικό, βάρος του προϊόντος. Αρχικά ελέγχθηκαν τα δεδομένα ως προς την κανονικότητα τους και αναγνωρίστηκε πως ακολουθούσαν όλα την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια, έγινε χρήση τριών διαφορετικών διαγραμμάτων ελέγχου, Shewhart, CUSUM και EWMA με κοινή τυπική απόκλιση και ορίζοντας ίδια τιμή  $ARL_0$ . Και στις τρεις περιπτώσεις δεν βρέθηκαν σημεία εκτός ορίων ελέγχου και η παραγωγική διαδικασία φαίνεται να είναι εντός ελέγχου. Αν και δεν υπήρχαν σημεία εκτός ορίων ελέγχου, μέσα από τα διαγράμματα Shewhart και CUSUM στη Φάση II εντοπίστηκε στις τελευταίες δειγματοληψίες μια φθίνουσα κλίση, η οποία θα μπορούσε δυνητικά να οδηγήσει σε μετατόπιση του μέσου και σε εκτός ελέγχου διεργασία.

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη και τις πολύ χαμηλές τιμές των δεικτών επίδοσης διεργασίας, καθώς η τυπική απόκλιση της διεργασίας είναι αρκετά μεγάλη, συγκριτικά με το εύρος των προδιαγραφών, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η διεργασία χρήζει επανασχεδιασμού, σύμφωνα με την ανάλυση των δεικτών.

Κάποιοι λόγοι στους οποίους μπορεί να οφείλονται τα παραπάνω συμπεράσματα είναι η ύπαρξη παραγόντων που δεν μπορούν εύκολα να ρυθμιστούν, όπως είναι οι χειριστές των γραμμών παραγωγής, καθώς και η μη σταθερότητα των παραγωγικών διεργασιών.

Ορισμένες προτάσεις για παραπάνω μελέτη θα μπορούσαν να είναι η μεγαλύτερη ανάλυση δεδομένων στη Φάση II, η μελέτη ανά βάρδια, διαφορετικό γκρουπ χειριστών παραγωγής καθώς και η ανάλυση με άλλη σταθερή τιμή  $ARL_0$  για τα τρία διαγράμματα ελέγχου. Επίσης, θα μπορούσε να γίνουν ορισμένες βελτιωτικές ενέργειες πριν την επόμενη μελέτη, όπως είναι τα πιο στενά όρια ελέγχου, ώστε να πετύχουμε τιμές πιο κοντά στην τιμή στόχο ( $T=1134.3$ ), καθώς στην συγκεκριμένη μελέτη οι μετρήσεις ήταν αισθητά υψηλότερες.

## Βιβλιογραφία

Ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές (πηγές) της Εργασίας.

- [1] Abbas, N., Riaz, M., & Does, R. J. M. M. (2011). Enhancing the performance of EWMA charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(6), 821–833. <https://doi.org/10.1002/qre.1175>
- [2] Abbas, N., Zafar, R. F., Riaz, M., & Hussain, Z. (2013). Progressive mean control chart for monitoring process location parameter. *Quality and Reliability Engineering International*, 29(3), 357–367. <https://doi.org/10.1002/qre.1386>
- [3] Abu-Shawiesh, M.O.A. (2008). “A control chart based on robust estimators for monitoring the process mean of a quality characteristic”, Mathematics Department, Science Faculty, Hashemite University, Al-Zarqa, Jordan, pp. 480-487
- [4] Abujiya M.R., Abbasi S.A. and Riaz M. (2016) “A New EWMA Control Chart for Monitoring Poisson Observations”, *Quality and Reliability Engineering International*, DOI: 10.1002/qre.1986
- [5] Adeoti, O. A., & Malela-Majika, J. C. (2020). Double exponentially weighted moving average control chart with supplementary runs-rules. *Quality Technology & Quantitative Management*, 17(2), 149–172. <https://doi.org/10.1080/16843703.2018.1560603>
- [6] Alevizakos. 2023. Process Capability and Performance Indices for Discrete Data. *Mathematics* 2023 11(16), 3457. <https://doi.org/10.3390/math11163457>
- [7] Alevizakos, V., Chatterjee, K., Koukouvinos C. (2021). The triple exponentially weighted moving average control chart, *Quality Technology and Quantitative Management*, 18(3):326-354.
- [8] Awais, M., & Haq, A. (2018). An EWMA chart for monitoring process mean. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(5), 1003–1025. <https://doi.org/10.1080/00949655.2017.1421193>
- [9] Barnard, G. A. (1959). “Control Charts and Stochastic Processes,” *Journal of the Royal Statistical Society, (B)*, Vol. 21(2), pp. 239–271.

- [10] Celano G., Castagliola P., Chakraborti S. (2016). Joint Shewhart control charts for location and scale monitoring in finite horizon processes. *ComputInd Eng.*;101:427-439.
- [11] Champ, C. M., and Chou S.-P. (2003). “Comparison of Standard and Individual Limits Phase I Shewhart, –X, R, and S Charts,” *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19(1),pp. 161–170.
- [12] Chowdhury S., Mukherjee A., Chakraborti S. (2016). Distribution-free phase II CUSUM control chart for joint monitoring of location and scale. *Qual Reliab Eng Int.*;31(1):135-151.
- [13] Duncan, A. J. 1986. *Quality control and industrial statistics*.5th ed. Homewood, IL: Irwin.
- [14] Engmann GM, Han D. (2021). The optimized CUSUM and EWMA multi-charts for jointly detecting a range of mean and variance change. *J ApplStatist*, 1-19. <https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1870670>.
- [15] Garvin, D. A. (1987). “Competing in the Eight Dimensions of Quality,” *Harvard Business Review*, Sept.–Oct., 87(6), pp. 101–109
- [16] Haq A. (2017). A new maximum EWMA control chart for simultaneously monitoring process mean and dispersion using auxiliary information. *Qual Reliab Eng Int.*;33(7):1577-1587.
- [17] Hawkins D.M., Maboudou-Tchao E.M. (2008). Multivariate exponentially weighted moving covariance matrix. *Technometrics.*;50(2):155-166.
- [18] Hawkins, D.M., and Olwell D.H. (1998). *Cumulative sum charts and charting for quality improvement*. New York,NY: Springer.
- [19] Hosseinifard, S.Z.; Abbasi, B.; Niaki, S.T.A. (2014). Process capability estimation for leukocyte filtering process in blood service: A comparison study. *IIE Trans. Healthc. Syst. Eng.*, 4, 167–177.
- [20] Human, S. W., Kritzing, P., & Chakraborti, S. (2011). Robustness of the EWMA control chart for individual observations. *Journal of Applied Statistics*, 38(10), 2071–2087. <https://doi.org/10.1080/02664763.2010.545114>
- [21] Jalilibal, Z., Amiri, A., Khoo, M.B.C. (2022). A literature review on joint control schemes in statistical process monitoring, *Quality and Reliability Engineering International*; 38(6):3270-3289.

- [22] Jiang, W., Shu, L., Apley, D.W. (2008). Adaptive CUSUM procedures with EWMA-based shift estimators. *IIE Trans.*;40(10):992-1003.
- [23] Juran (1989). *Leadership for Quality, An Executive Handbook*, N.Y. Freepress.
- [24] Knoth, S. (2021). Steady-state average run length(s): Methodology, formulas, and numerics, *Sequential Analysis*;40(3):405-426.
- [25] Loureiro, L. D., Epprecht, E. K., Chakraborti, S. and Jardim, F.S. (2018). In-control performance of the joint phase II X-bar - S control charts when parameters are estimated. *Quality Engineering* 30 (2):253–67. doi: 10.1080/08982112.2017.1349914.
- [26] Mabude, K., Malela Majika, J-C., Castagliola, P., Shongwe, S. (2021). Generally weighted moving averages monitoring schemes: Overview and perspectives, *Quality and Reliability Engineering International*,; 37(2):409-432.
- [27] Maiti, S.S.; Saha, M.; Nanda, A.K. (2010). On generalizing process capability indices. *Qual. Technol. Quant. Manag.*;7, 279–300.
- [28] Magar V.M., Shinder V.B., (2014). Application of 7 Quality Control (7 QC) Tools for Continuous Improvement of Manufacturing Processes. *International Journal of Engineering Research and General Science* 2[4], pp. 364-371
- [29] Maleki, M.R., Salmasnia A. (2017). Joint monitoring of process location and dispersion based on CUSUM procedure and generalized likelihood ratio in the presence of measurement errors. *Qual Reliab Eng Int.*;33(7):1485-1498.
- [30] Maravelakis, P. E., Castagliola, P., & Khoo, M. B. C. (2019). Run length properties of run rules EWMA chart using integral equations. *Quality Technology & Quantitative Management*, 16(2), 129–139. <https://doi.org/10.1080/16843703.2017.1372853>
- [31] Montgomery D.C. (2013) “Introduction to Statistical Quality Control”, John Wiley and Sons, New York.
- [32] Quinino, R.C., Cruz, F.R., Ho, L.L. (2020). Attribute inspection control charts for the joint monitoring of mean and variance. *Comput Ind Eng.*;139:106131.
- [33] Ryan, T. P., (2011). “Statistical Methods for Quality Improvement”, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. Published 2011 by John Wiley & Sons, Inc.

- [34] Saleh, N. A., M. A. Mahmoud, M. J. Keefe, and Woodall, W. H. (2015). The difficulty in designing X-bar and Xcontrol charts with estimated parameters. *Journal of Quality Technology* 47 (2):127–38. doi: 10.1080/00224065.2015.11918120.
- [35] Serel, D.A., Moskowitz, H. (2008). Joint economic design of EWMA control charts for mean and variance. *Eur J Oper Res.*;184(1):157-168.
- [36] Sheu, S. H., & Lin, T. C. (2003). The generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean. *Quality Engineering*, 16(2), 209–231. <https://doi.org/10.1081/QEN-120024009>
- [37] Shu L., Jiang W. and Wu Z. (2011) “Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Monitoring Increases in Poisson Rate”, *Quality and Reliability Engineering*, 44(9):711-723
- [38] Woodall, W.H., Faltin, F.W. (2019). Rethinking control chart design and evaluation, *Quality Engineering*,; 31(4):596-605.
- [39] Woodall, W. H., and B. M. Adams. (1993). The statistical design of CUSUM charts. *Quality Engineering* 5 (4):559–70. doi: 10.1080/08982119308918998
- [40] Yashchin, E. (1993). Statistical control schemes: methods, applications and generalizations. *International Statistical Review* 61 (1):41–66. doi: 10.2307/1403593.
- [41] Zaman, B., Lee, M. H., Riaz, M., & Abujiya, M. R. (2017). An adaptive EWMA scheme-based CUSUM accumulation error for efficient monitoring of process location. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(8), 2463–2482. <https://doi.org/10.1002/qre.2203>
- [42] Zhang, S., Wu, Z. (2006). Monitoring the process mean and variance using a weighted loss function CUSUM scheme with variable sampling intervals. *IIE Trans.*;38(4):377-387.
- [43] Zhang, G., Chang, S.I., (2008). Multivariate EWMA control charts using individual observations for process mean and variance monitoring and diagnosis. *Int J Prod Res.*;46(24):6855-6881.
- [44] Αντζουλακος Δ. (2010). “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας” Β΄ Έκδοση. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.



## Παράρτημα Α: Συντελεστές για τα Διαγράμματα Ελέγχου (Montgomery, 2013)

Factors for Constructing Variables Control Charts

Observations in Sample, $n$	Chart for Averages					Chart for Standard Deviations						Chart for Ranges					
	Factors for Control Limits			Factors for Center Line		Factors for Control Limits				Factors for Center Line		Factors for Control Limits					
	$A$	$A_2$	$A_3$	$c_4$	$1/c_4$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$d_2$	$1/d_2$	$d_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267	
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574	
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282	
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114	
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004	
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924	
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864	
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816	
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777	
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744	
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717	
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693	
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672	
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653	
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637	
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622	
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608	
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597	
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585	
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575	
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566	
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557	
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548	
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541	

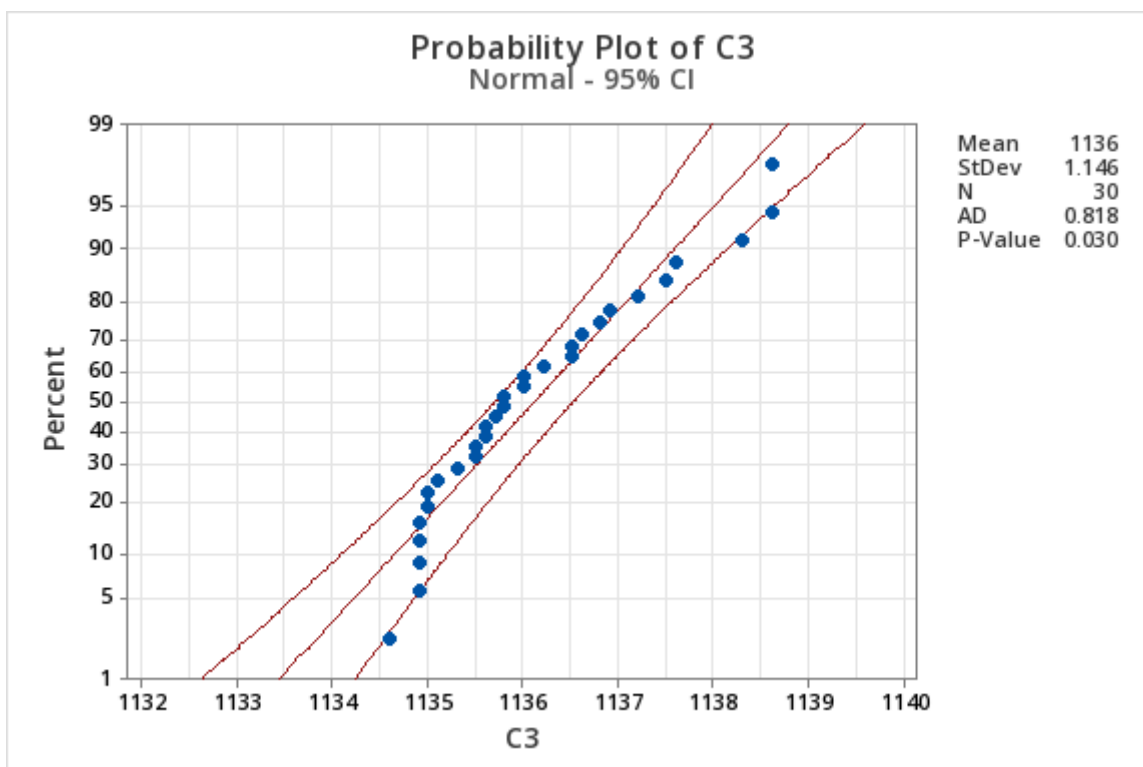
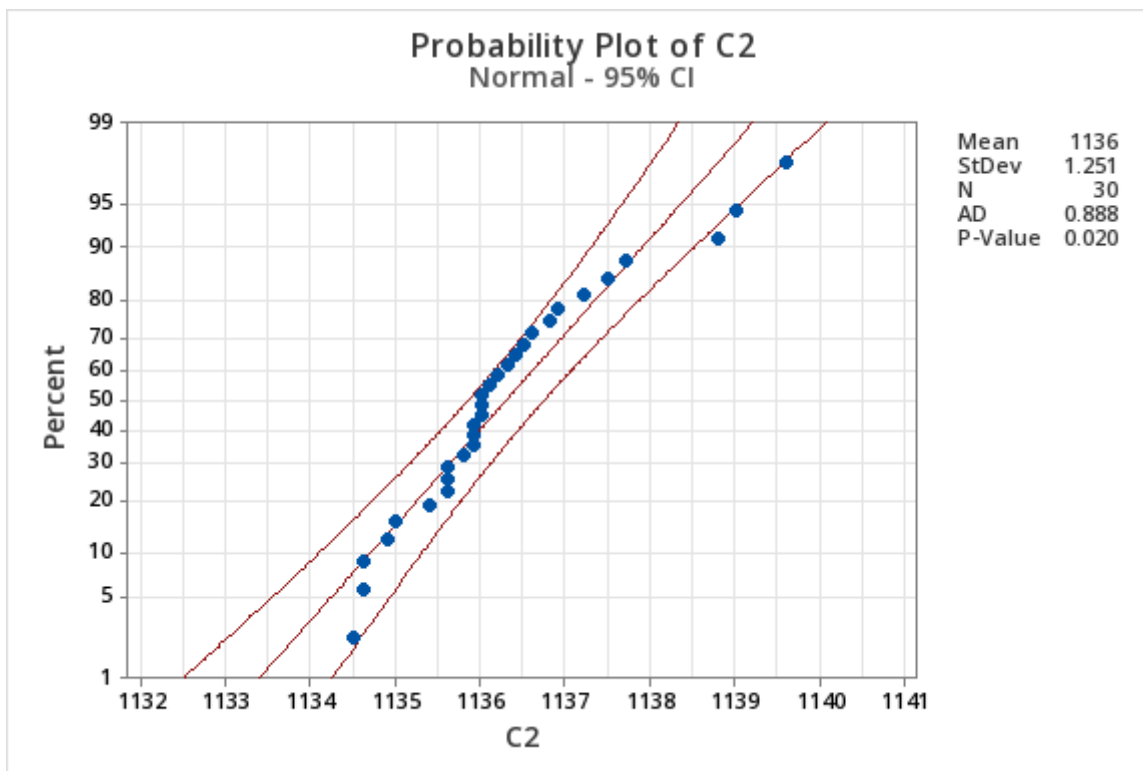
For  $n > 25$ :

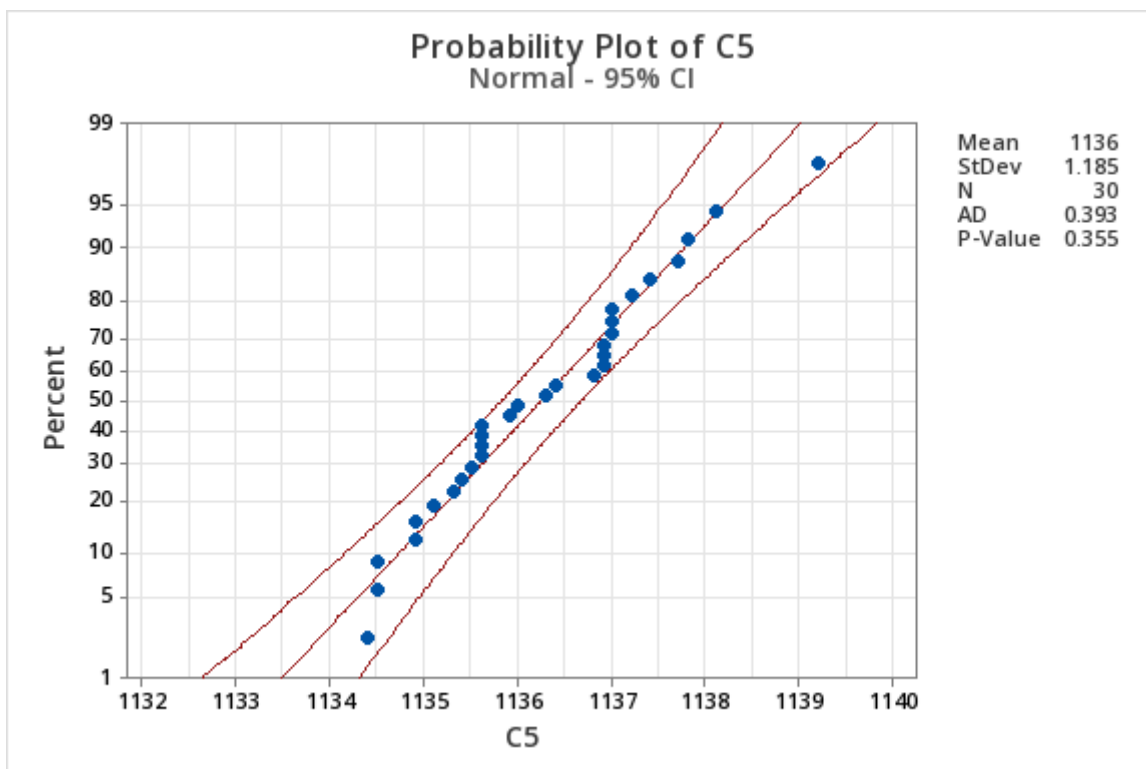
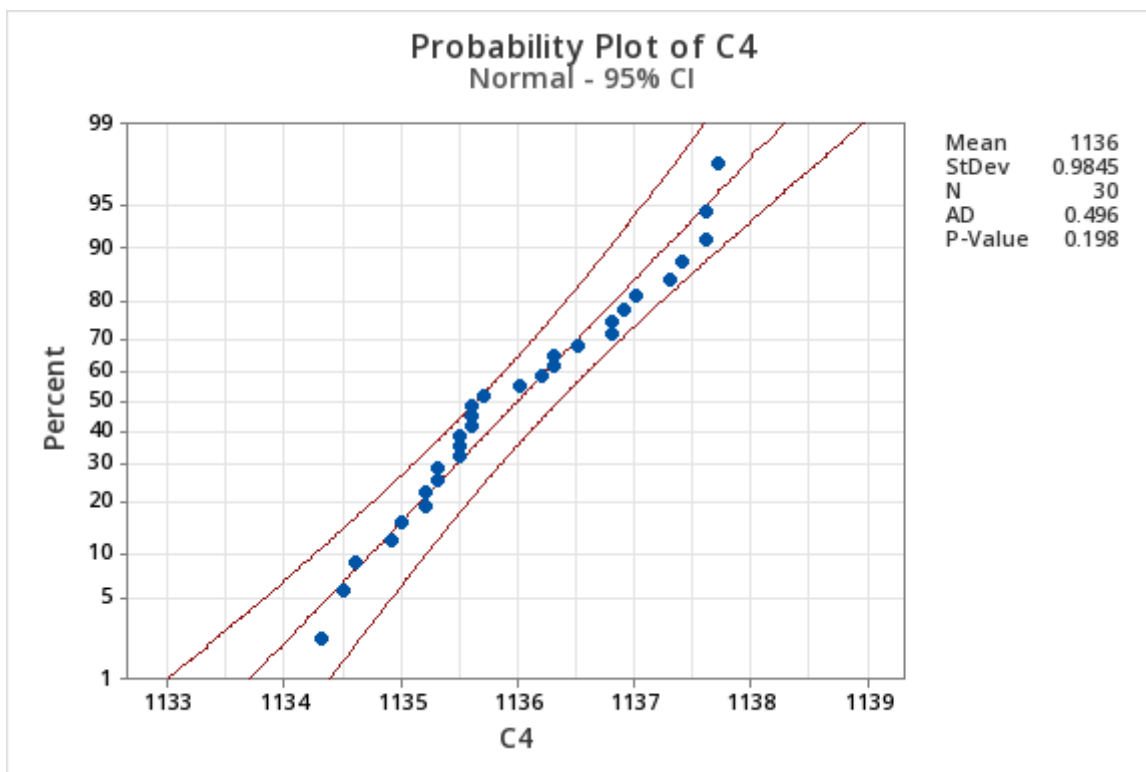
$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$$

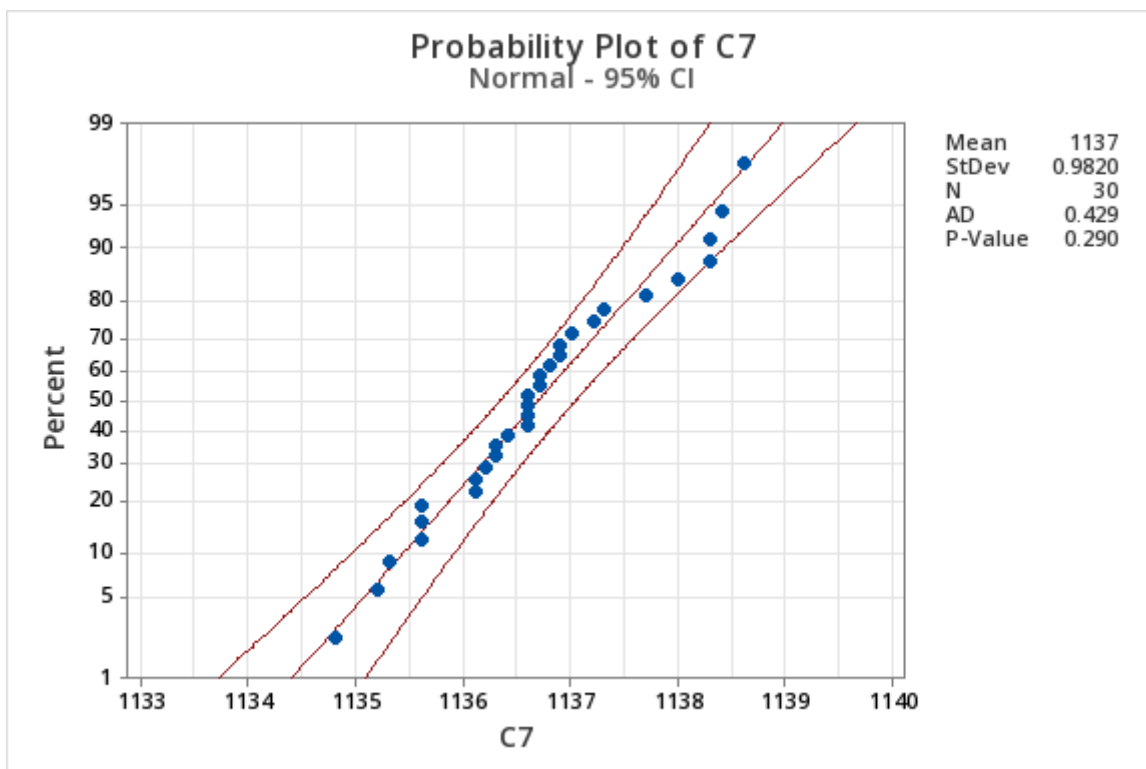
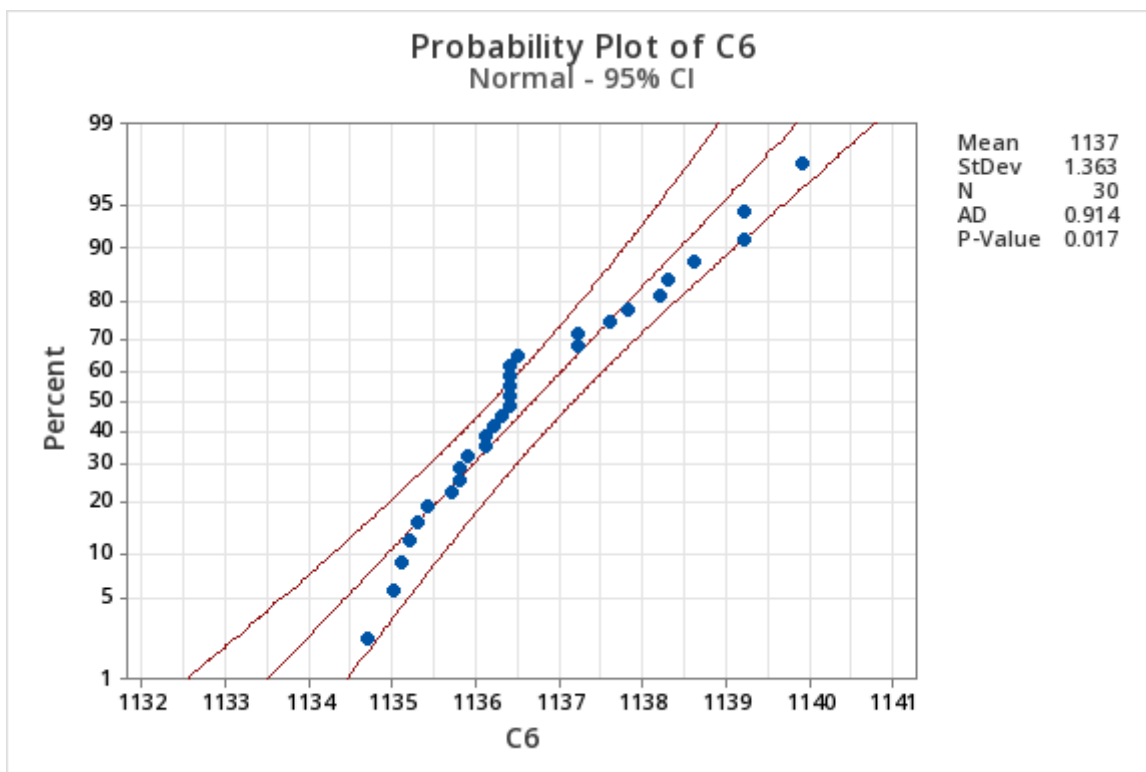
$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

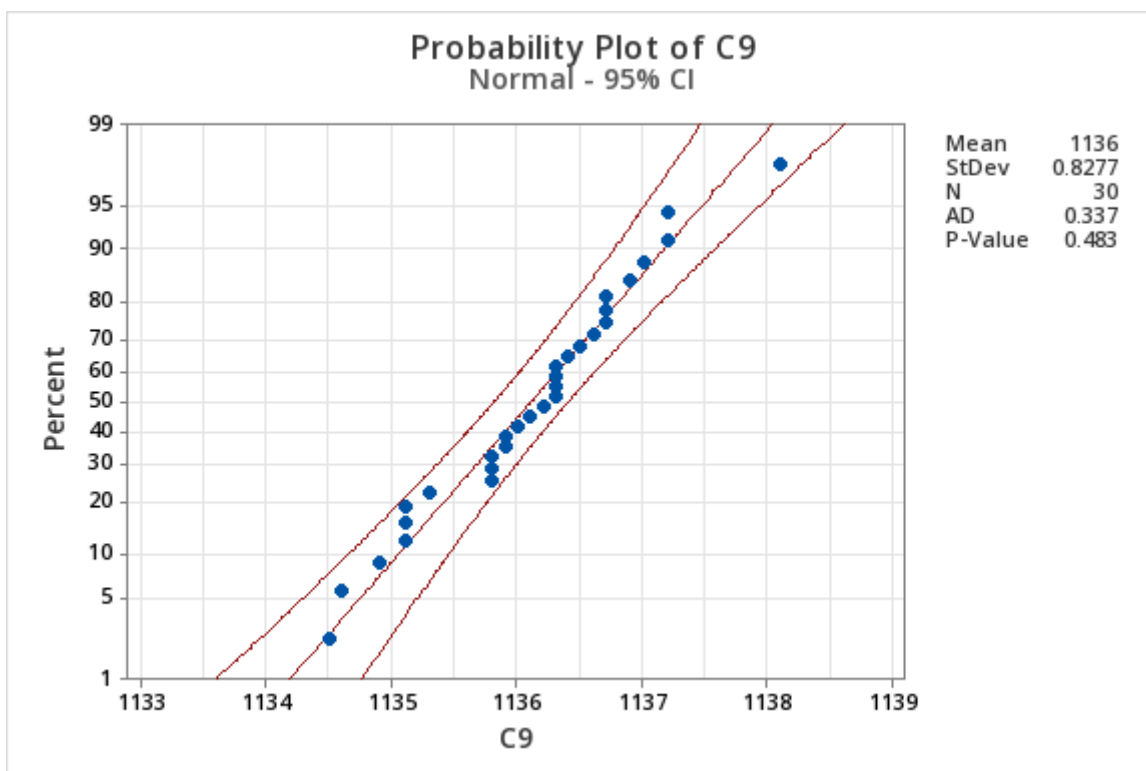
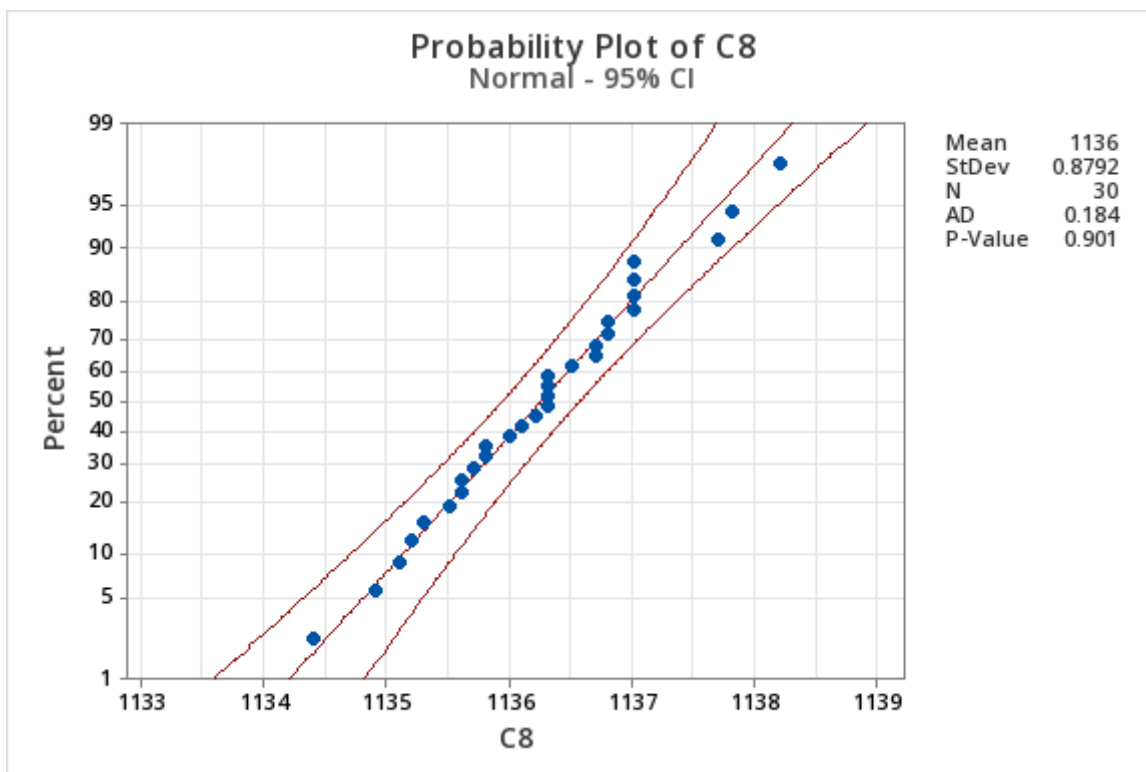
## Παράρτημα Β: Έλεγχος Κανονικότητας

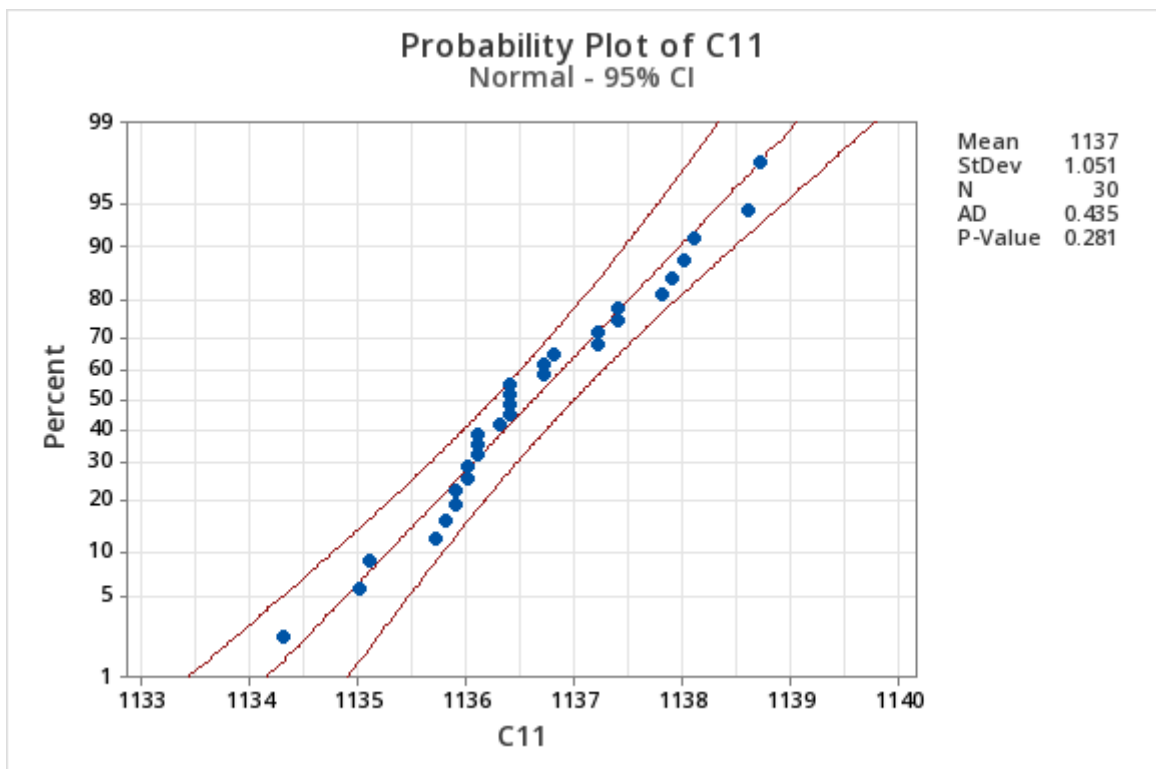
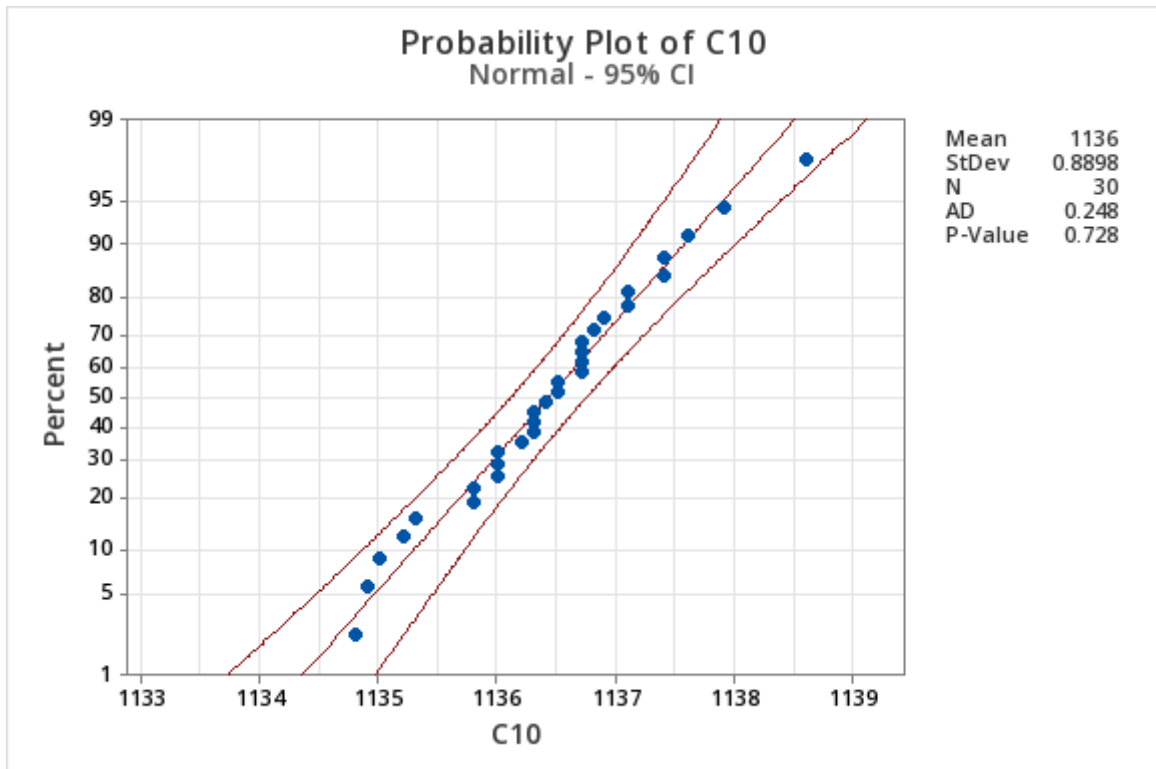


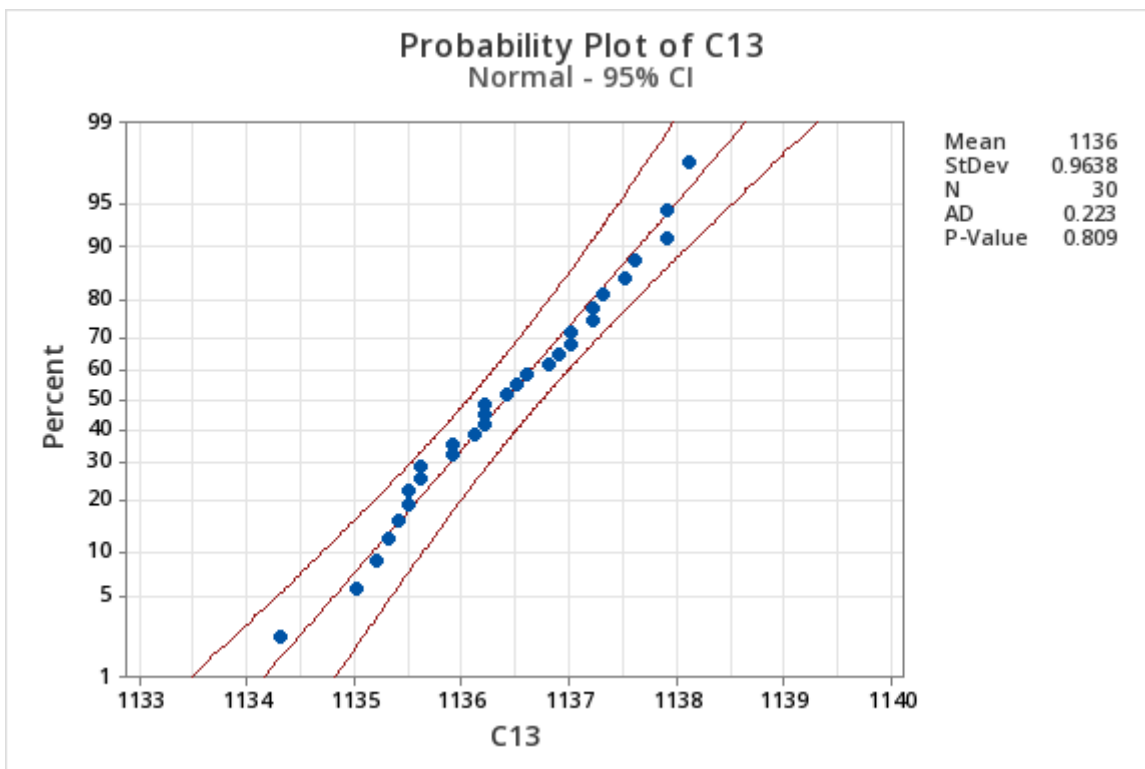
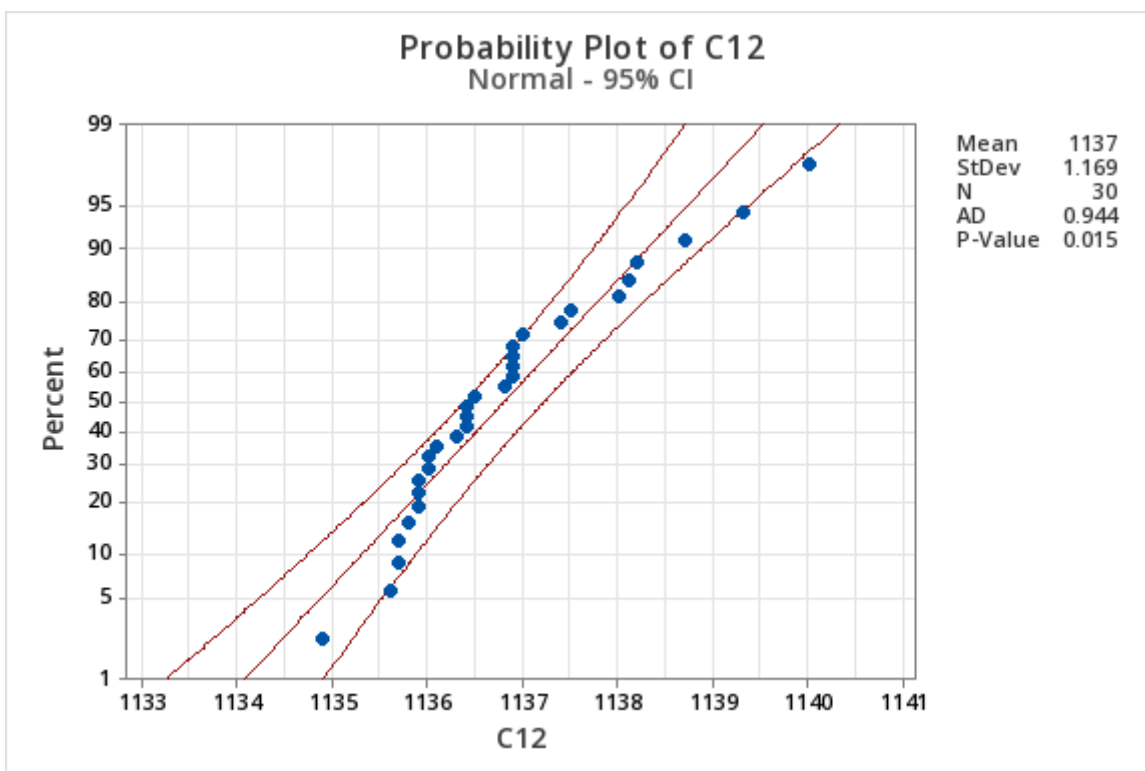


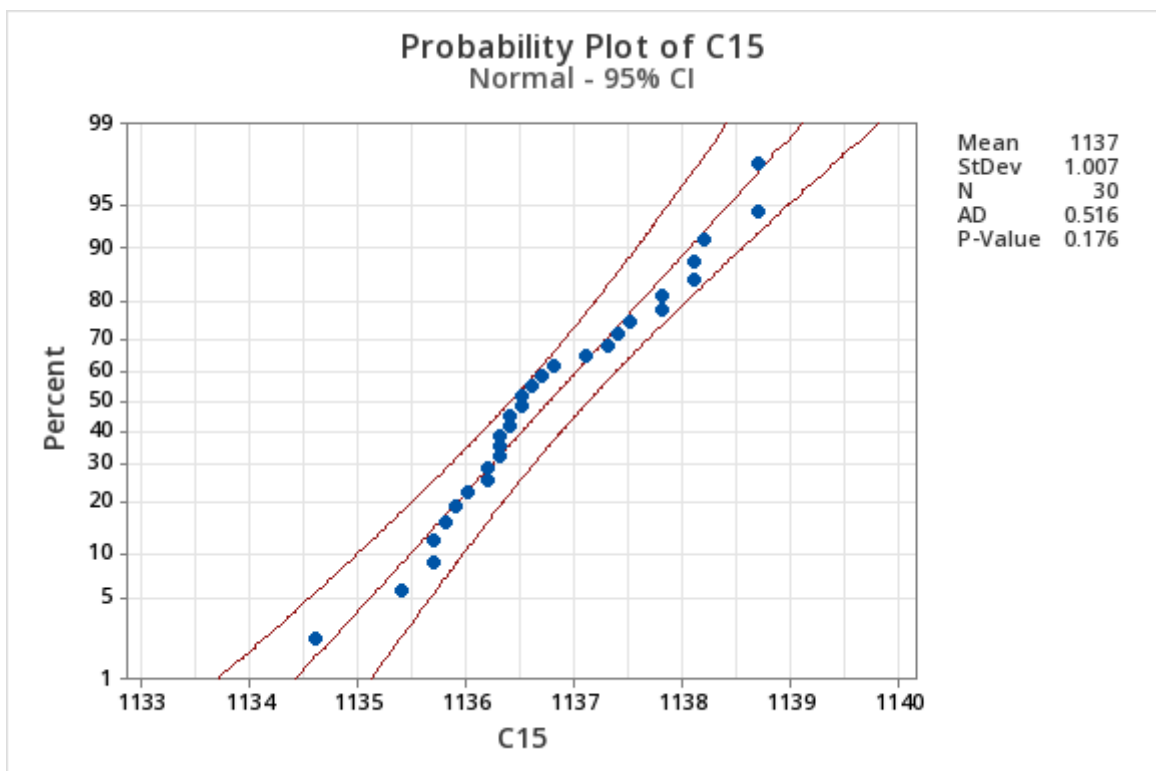
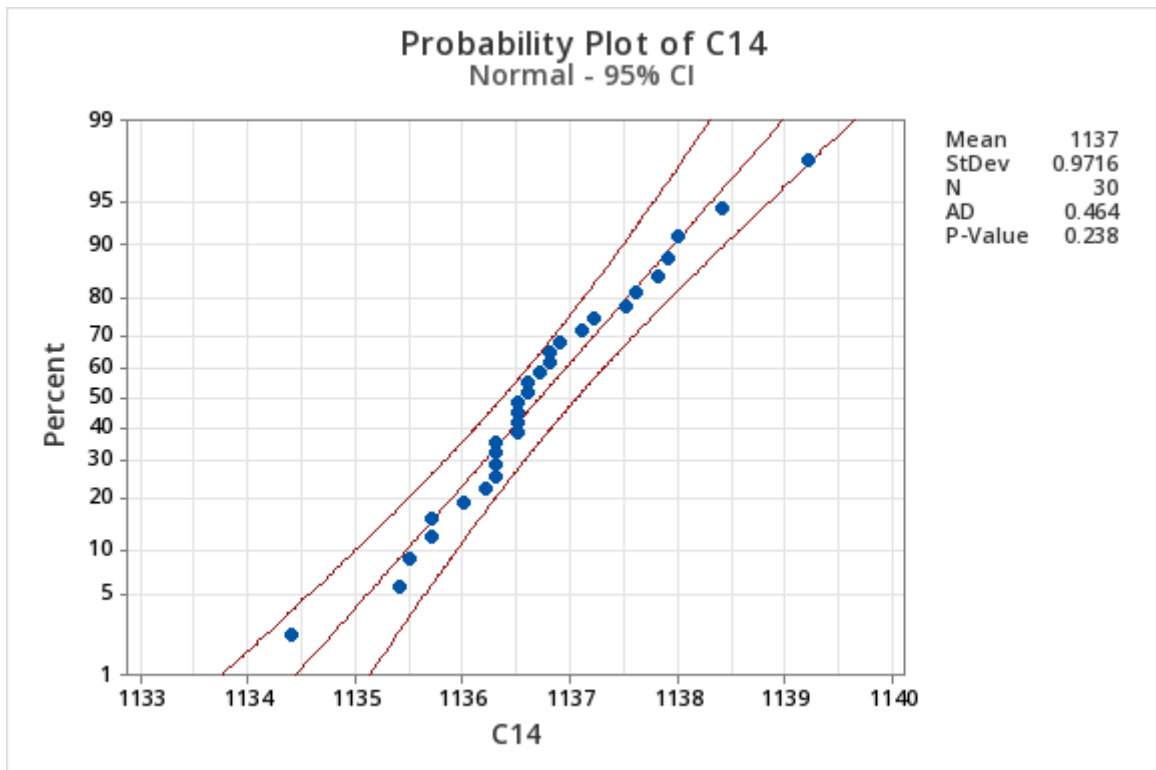


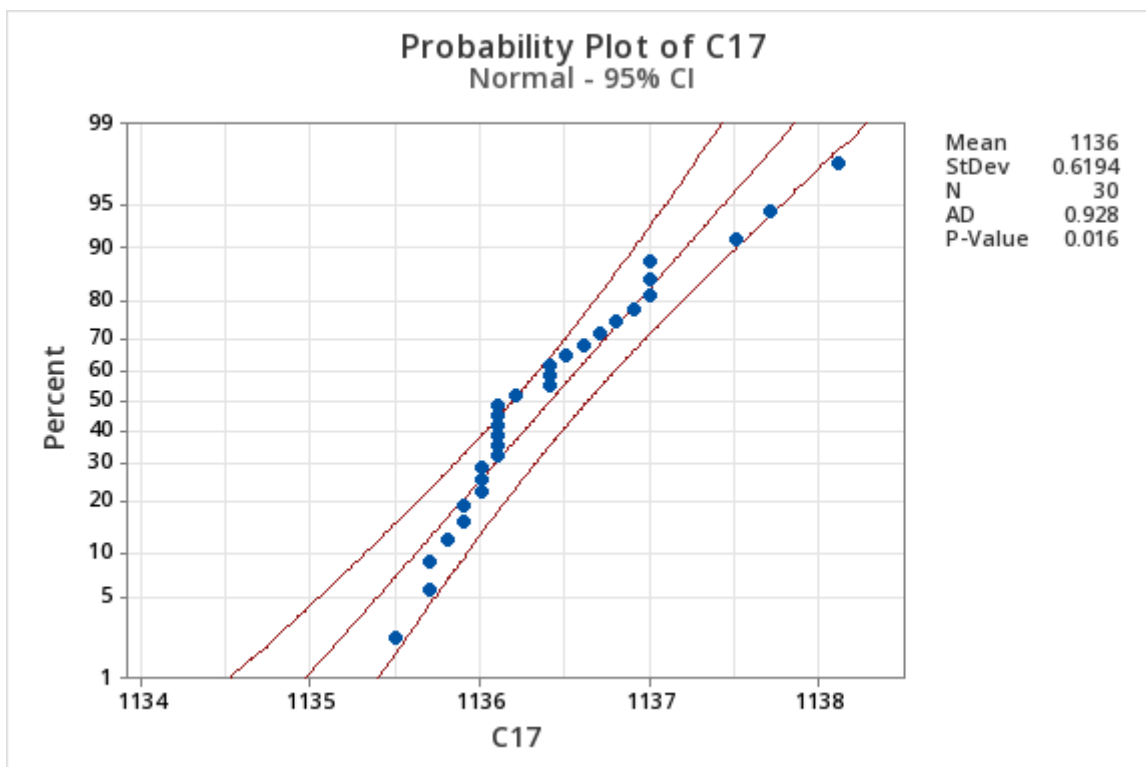
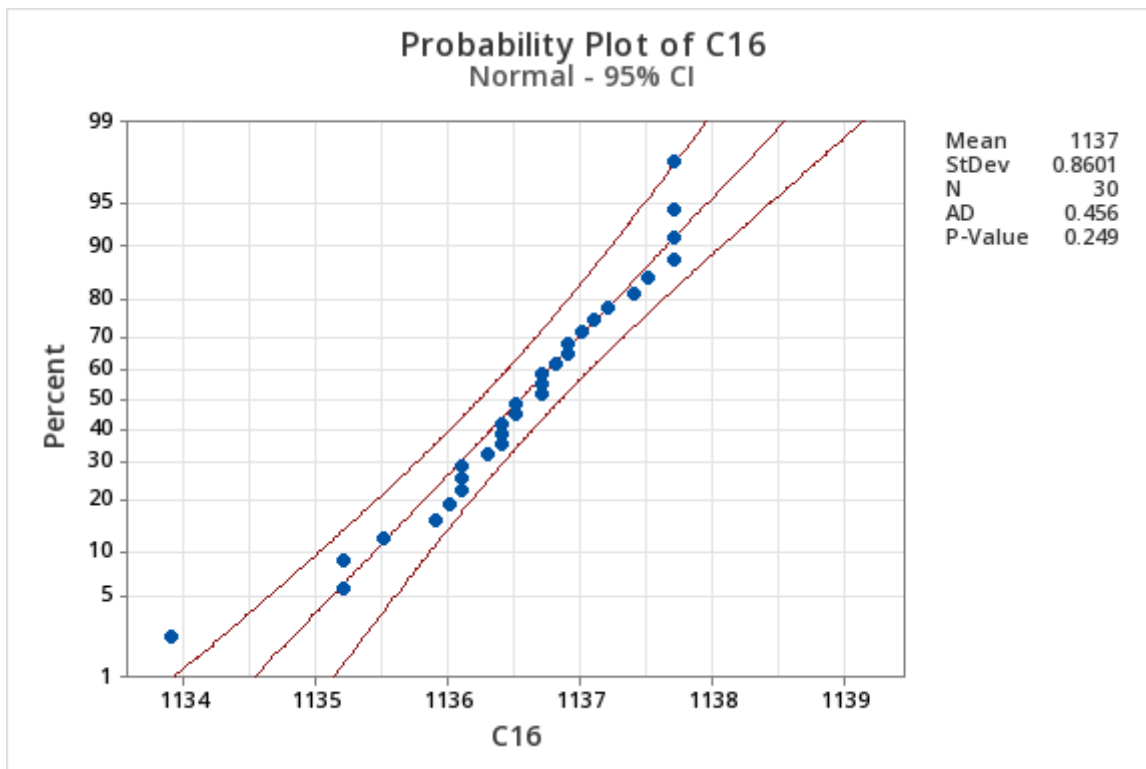


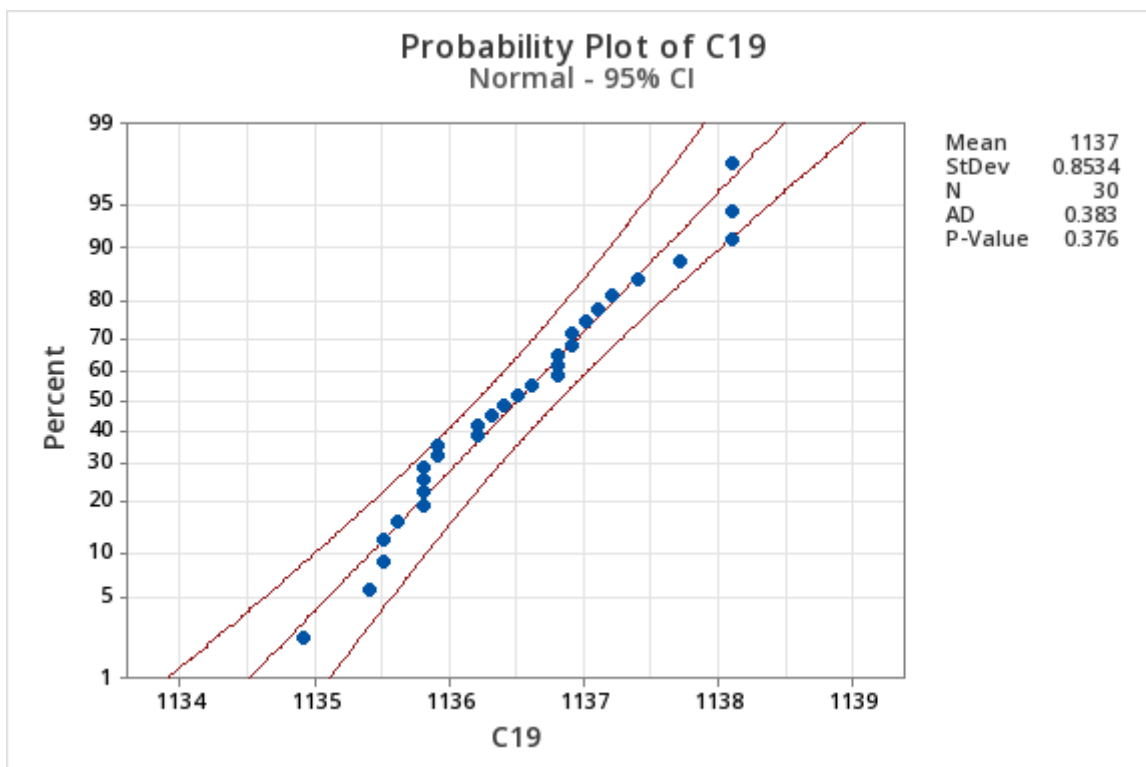
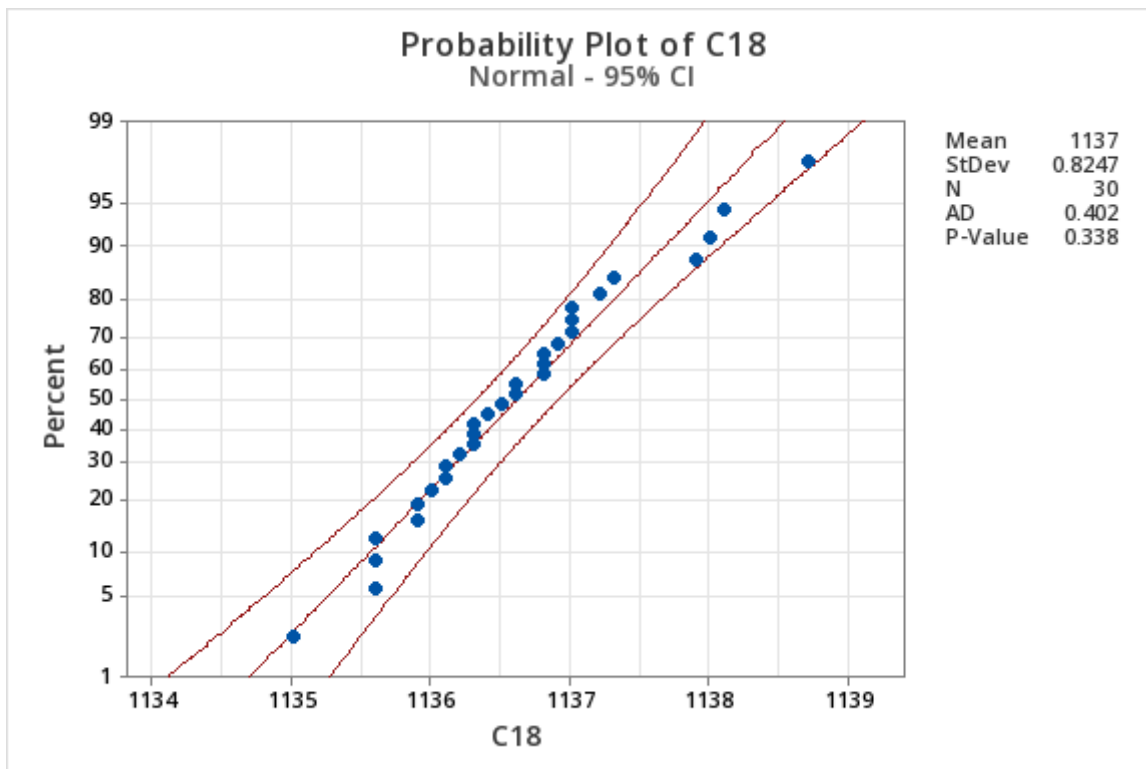


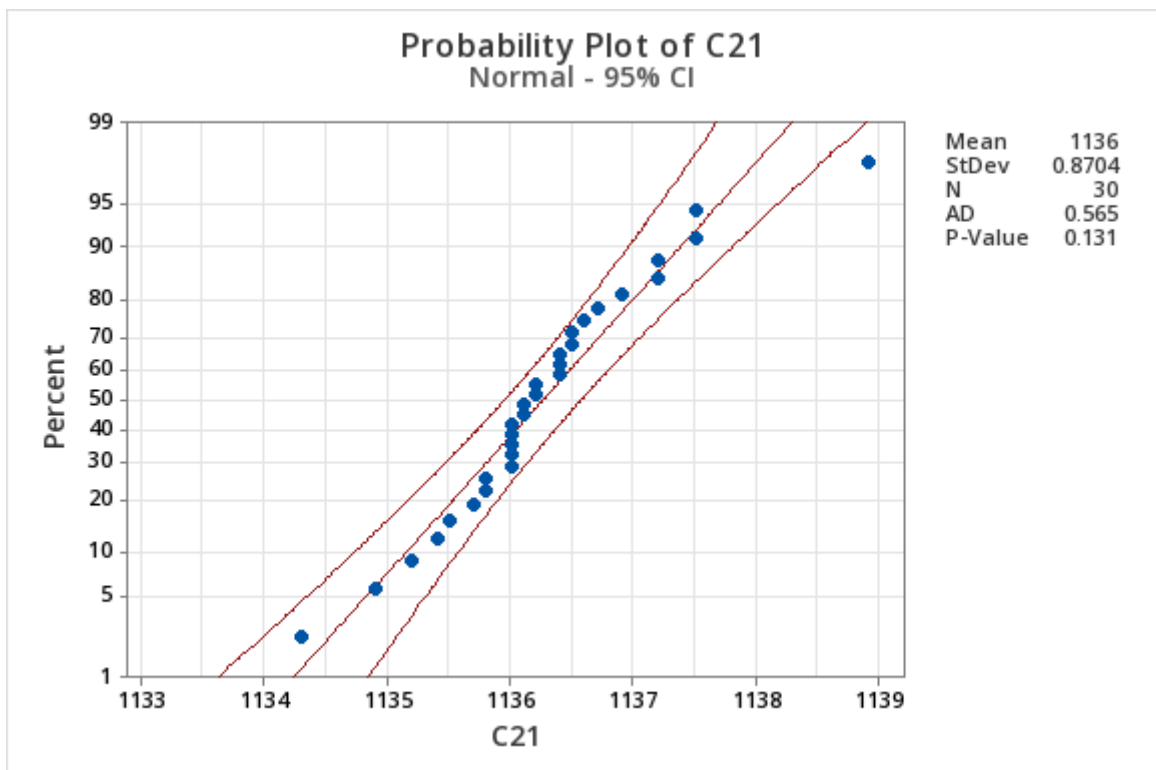
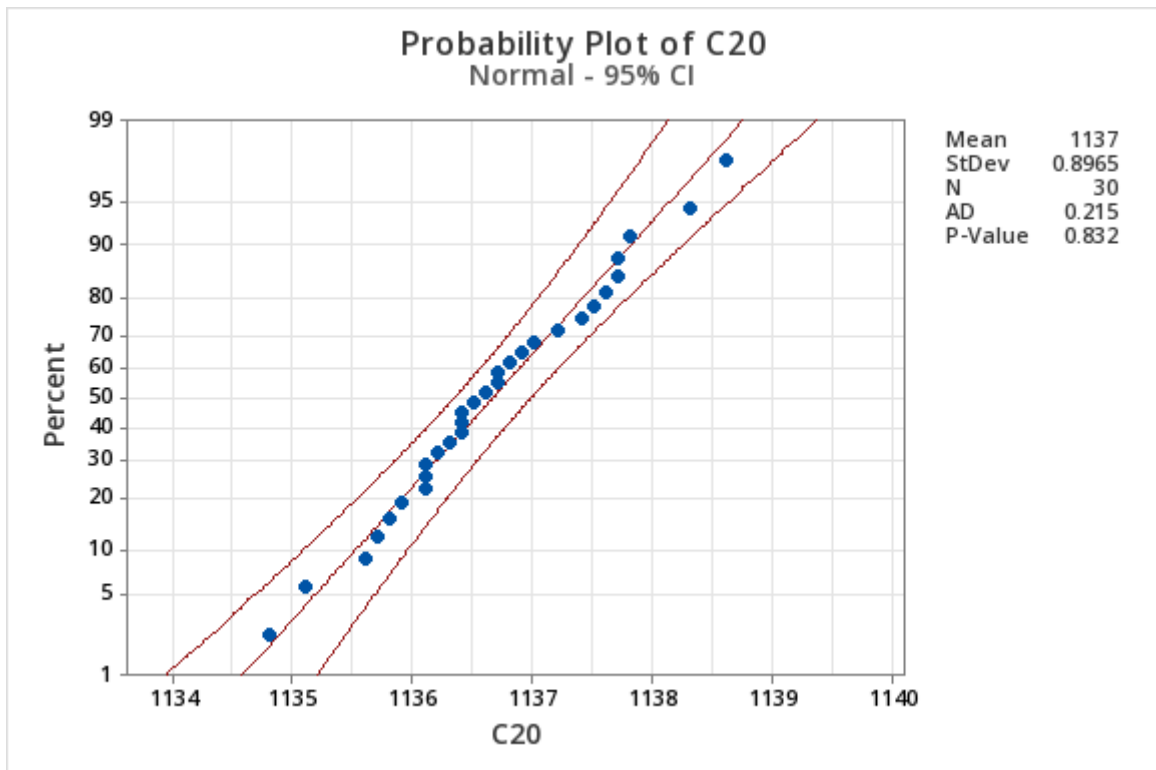




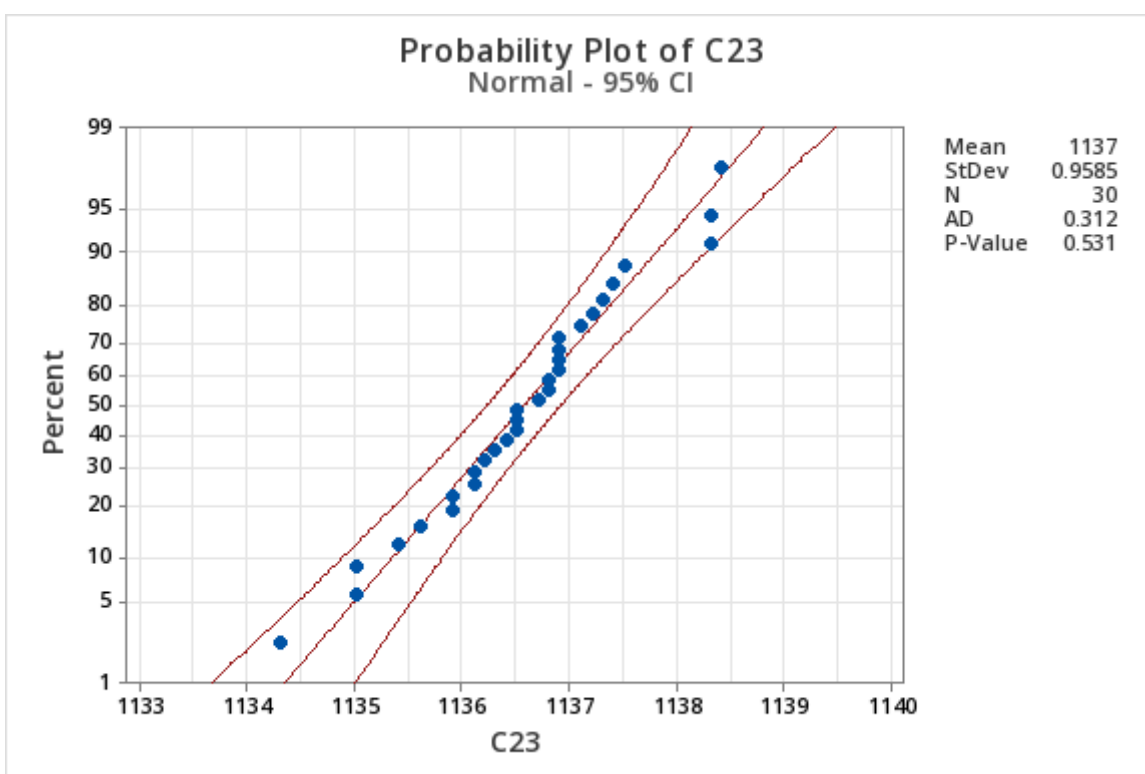
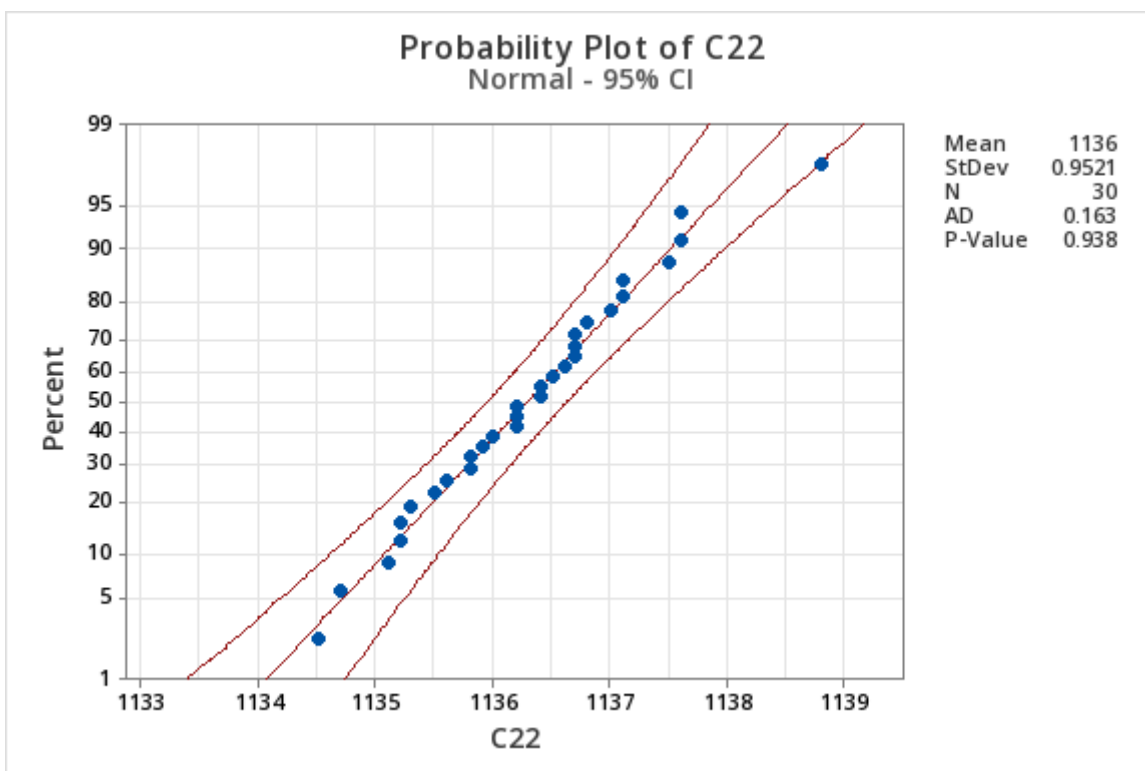


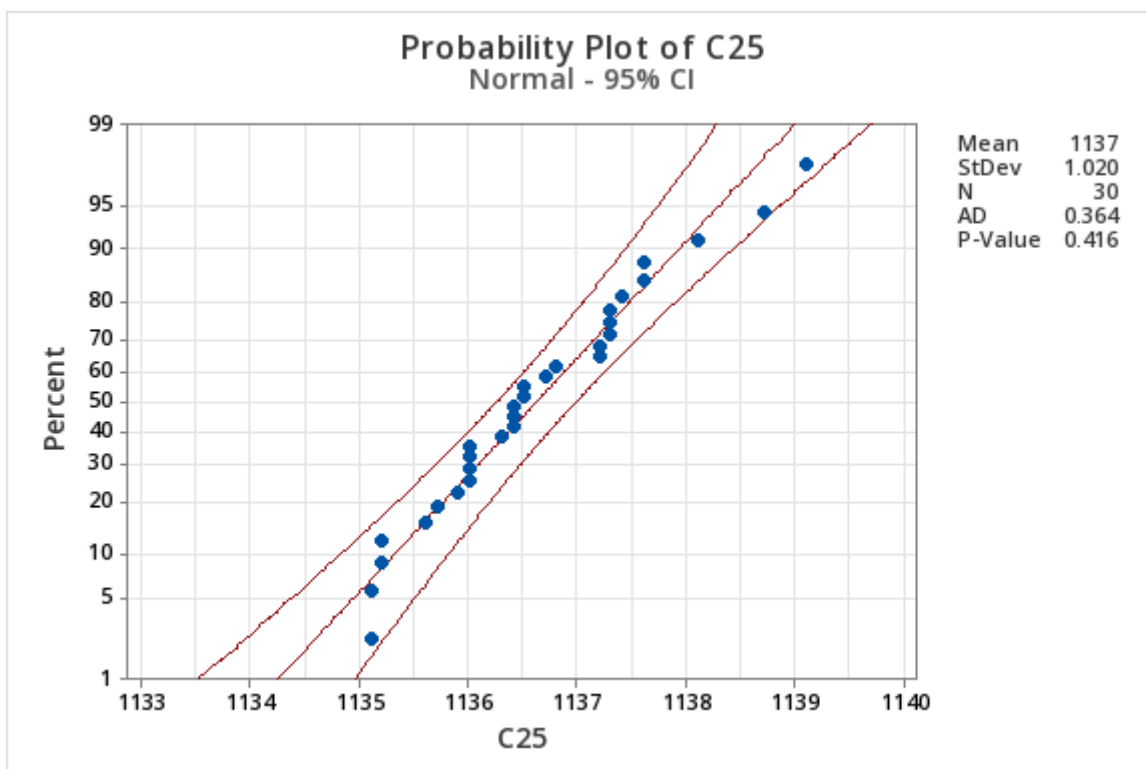
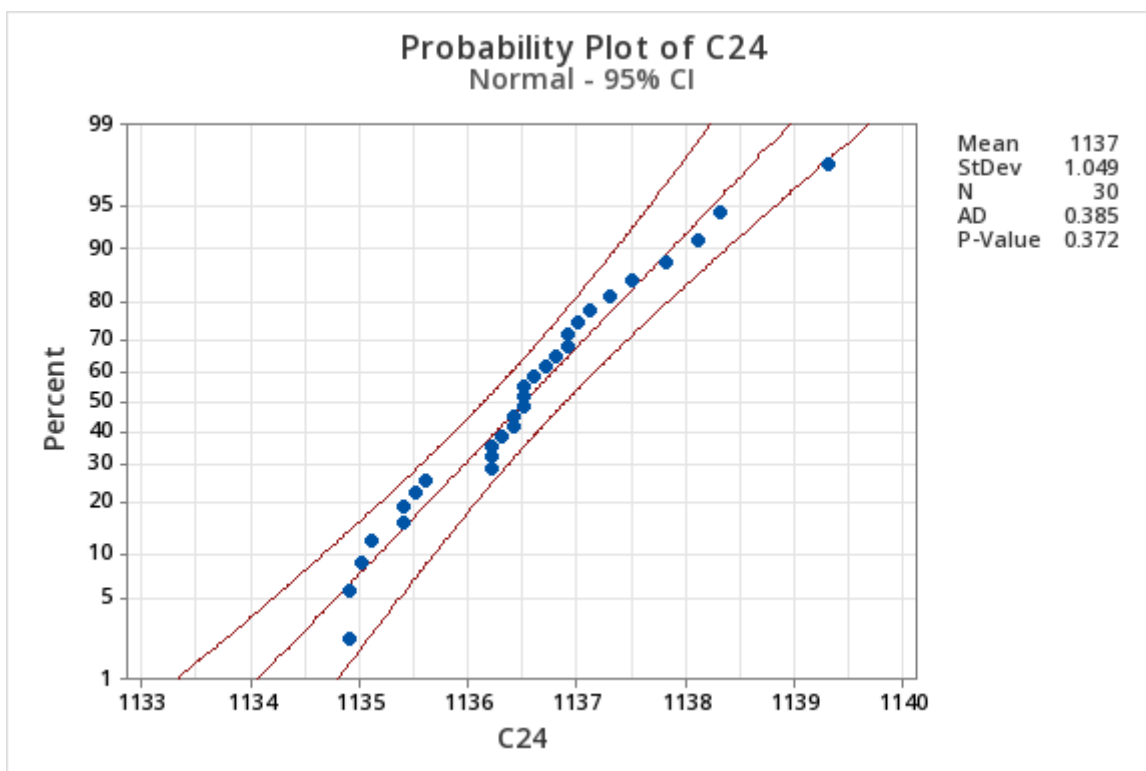












Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.