



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Μέθοδος Συνοριακών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων
στην Καλή Τοποθέτηση
Προβλημάτων Σκέδασης Ελαστικών Κυματικών Πεδίων

ΧΡΗΣΤΟΣ ΔΡΑΚΟΣ

Αθήνα, Μάιος 2026



School of Science and Technology
Master in Mathematics (MSM)

POSTGRADUATE THESIS

On the Well-Posedness
of an Elastic Scattering Problem
via the Boundary Integral Equation Approach

CHRISTOS DRAKOS

Athens, May 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Χρήστου Δράκου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Η Μέθοδος Συνοριακών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων
στην Καλή Τοποθέτηση Προβλημάτων Σκέδασης
Ελαστικών Κυματικών Πεδίων

ΧΡΗΣΤΟΣ ΔΡΑΚΟΣ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Βασίλειος Σεβρόγλου
Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Κωνσταντίνος Καλημέρης
Ερευνητής Α'
ΚΕΘΕΜ Ακαδημίας Αθηνών

Αθήνα, Μάιος 2026

Στην Ισμήνη και στον Ιωάννη

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους με στήριξαν στις μεταπτυχιακές σπουδές μου στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο. Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την στήριξη και την καθοδήγηση του κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας, αλλά και για το ευχάριστο κλίμα της συνεργασίας μας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Συν-Επιβλέποντα κ. Κωνσταντίνο Καλημέρη, Ερευνητή Α' στο ΚΕΘΕΜ της Ακαδημίας Αθηνών καθώς και το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο μέσω του οποίου ενίσχυσα τις γνώσεις μου.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου για την συμπαράσταση της καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η μέθοδος συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων σε προβλήματα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας.

Πρώτος στόχος της εργασίας αποτελεί η παρουσίαση μεικτών προβλημάτων συνοριακών τιμών που μοντελοποιούν μαθηματικά προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων σχετικά με την εξίσωση Navier. Ο σκεδαστής μας θεωρείται ότι βρίσκεται μέσα σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο, είναι μερικώς επικαλυμμένος με λείο σύνορο πάνω στον οποίο ικανοποιούνται μεικτές συνοριακές συνθήκες τύπου Robin.

Επίσης, στόχος της παρούσας εργασίας αποτελεί η εφαρμογή της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων για αποτελέσματα ύπαρξης λύσεων καθώς και για αποτελέσματα ομαλότητας αυτών. Συγκεκριμένα, η μέθοδος βασίζεται στην έκφραση της λύσης ως υπέρθεσης ενός γραμμικού συνδυασμού απλού και διπλού στρώματος δυναμικού, χρησιμοποιώντας κατάλληλες L^2 -συναρτήσεις-πυκνότητες, οδηγώντας σε κατάλληλες ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αποδεικνύεται ότι η λύση μας ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, θεμελιώνεται η μοναδικότητα της λύσης και τέλος δίνονται χρήσιμες παρατηρήσεις και συμπεράσματα.

Λέξεις – Κλειδιά

Διδιάστατη γραμμική ελαστικότητα, εξίσωση Navier, σκέδαση ελαστικών κυματικών πεδίων, δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις

Abstract

This thesis investigates the method of boundary integral equations in the context of boundary value problems arising in linear elasticity.

The primary objective is the formulation and analysis of mixed boundary value problems that mathematically model elastic wave scattering phenomena governed by the Navier equations. The scatterer is assumed to reside within an isotropic and homogeneous elastic medium and is partially coated with a smooth boundary on which mixed boundary conditions of Robin type are imposed.

Furthermore, the thesis aims to implement the boundary integral equation method to establish results concerning the existence and regularity of solutions. The approach is based on representing the solution as a linear combination of single-layer and double-layer potential operators, involving appropriate L^2 –density-functions. This leads to the derivation of corresponding boundary integral equations. It is rigorously demonstrated that the constructed solution satisfies the prescribed boundary conditions of the original problem, the uniqueness of the solution is established, and concluding remarks and observations are provided.

Keywords

2D linear elasticity, Navier equation, scattering of elastic wave fields, single- and double-layer potentials, boundary integral equations

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	7
Περίληψη	8
Abstract	9
Περιεχόμενα.....	10
Κατάλογος Σχημάτων.....	11
Κατάλογος Συμβόλων	12
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΚΕΔΑΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ	14
2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	20
2.1. Η Δυναμική Εξίσωση Navier στη Διδιάστατη Γραμμική Ελαστικότητα - Βασικές Έννοιες	21
2.2. Προβλήματα Συνοριακών Τιμών της Γραμμικής Ελαστικότητας για την Εξίσωση Navier	26
2.3. Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις	30
2.4. Προβλήματα Σκέδασης. Καλή τοποθέτηση	31
2.5. Πλάτη Σκέδασης	37
2.6. Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος	40
i) Το πρόβλημα Dirichlet.....	41
ii) Το πρόβλημα Robin	45
3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ	50
3.1. Το Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης	51
3.2. Μαθηματική Μοντελοποίηση του Μεικτού Προβλήματος Σκέδασης	53
3.3. Καλή τοποθέτηση του αντίστοιχου Μεικτού Προβλήματος Συνοριακών Τιμών	56
3.4. Εφαρμογές και συμπεράσματα	60
Παράρτημα Α.....	62
Βιβλιογραφία.....	65

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1	Θεμελιώδες πεδίο	27
Σχήμα 2.2	Σκέδαση ελαστικών κυμάτων	32
Σχήμα 2.3	Σκληρός σκεδαστής	34
Σχήμα 2.4	Σκεδαστής με συνθήκη εμπέδησης στο σύνορο του	36
Σχήμα 2.5	Το πρόβλημα Robin	46
Σχήμα 3.1	Το μεικτό πρόβλημα σκέδασης	54

Κατάλογος Συμβόλων

ρ	Πυκνότητα μάζας
ω	Γωνιακή συχνότητα
$\tilde{\sigma}$	Τανυστής τάσεων
$\tilde{\xi}$	Τανυστής παραμορφώσεων
λ, μ	Ελαστικές σταθερές Lamé
\tilde{I}	Μοναδιαίο δυαδικό 2 ^{ης} τάξης
k_p	Κυματαριθμός διαμήκους P-κύματος
k_s	Κυματαριθμός εγκάρσιου S-κύματος
c_p	Φασική ταχύτητα διαμήκους P-κύματος
c_s	Φασική ταχύτητα εγκάρσιου S-κύματος
\mathbb{R}^2	Ευκλείδιος χώρος δύο διαστάσεων
r	Διάνυσμα στον \mathbb{R}^2
B_e	Ελαστικό μέσο διάδοσης
∂B	Σύνορο ή επιφάνεια του σκεδαστή
\hat{n}	Μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επιφάνειας
\hat{d}	Μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση πρόσπτωσης
$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	Θεμελιώδης λύση σε δυαδική μορφή
$\tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	Το διαμήκες τμήμα του $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$
$\tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	Το εγκάρσιο τμήμα του $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$
$H_0^{(1)}$	Κυλινδρική συνάρτηση Hankel 1 ^{ου} είδους και μηδενικής τάξης
\mathbf{u}^{tot}	Ολικό πεδίο μετατοπίσεων
$\mathbf{u}^{\text{inc},p}$	Προσπίπτον διανυσματικό επίπεδο διαμήκες κύμα
$\mathbf{u}^{\text{inc},s}$	Προσπίπτον διανυσματικό επίπεδο εγκάρσιο κύμα
\mathbf{u}^{sc}	Σκεδασμένο διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων
Δ^*	Τελεστής του Kupradze
∇	Τελεστής κλίσης (gradient)
$T(\mathbf{r})$	Επιφανειακός τελεστής τάσεων

\otimes	Τανυστικό (δυναμικό) γινόμενο
\mathbf{u}_{∞}^p	Διαμήκης πλάτος σκέδασης
\mathbf{u}_{∞}^s	Εγκάρσιο πλάτος σκέδασης
$(S_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})$	Δυναμικό απλού στρώματος (Δ.Α.Σ)
$(D_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})$	Δυναμικό διπλού στρώματος (Δ.Δ.Σ)

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΚΕΔΑΣΗ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Η θεωρία σκέδασης κυματικών πεδίων μελετά την αλληλεπίδραση κυμάτων με ανομοιογένειες του χώρου διάδοσης, όπως εμπόδια, κοιλότητες ή μεταβολές των μηχανικών ιδιοτήτων του μέσου. Τα φαινόμενα σκέδασης εμφανίζονται σε πλήθος εφαρμογών της φυσικής και της μηχανικής, όπως η σεισμολογία, ο έλεγχος υλικών χωρίς καταστροφή, η ακουστική, η ηλεκτρομαγνητική διάδοση και η μηχανική στερεών. Στην περίπτωση της γραμμικής ελαστικότητας, τα κυματικά πεδία που διαδίδονται σε ένα ελαστικό μέσο είναι διανυσματικά και περιγράφονται από την εξίσωση Navier, γεγονός που καθιστά τη μαθηματική ανάλυση των αντίστοιχων προβλημάτων ιδιαίτερα απαιτητική.

Στο *ευθύ πρόβλημα* σκέδασης θεωρείται γνωστό το προσπίπτον κυματικό πεδίο καθώς και οι φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του σκεδαστή, και ζητείται ο προσδιορισμός του σκεδασμένου και του ολικού κυματικού πεδίου. Αντίθετα, στο *αντίστροφο πρόβλημα* σκέδασης θεωρούνται γνωστά τα δεδομένα του σκεδασμένου πεδίου σε μεγάλες αποστάσεις από το εμπόδιο και στόχος είναι ο προσδιορισμός της γεωμετρίας ή των φυσικών χαρακτηριστικών του σκεδαστή [21]. Τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης είναι κατά κανόνα μη καλά τοποθετημένα και απαιτούν ειδικές τεχνικές ομαλοποίησης.

Κεντρικό ρόλο στη μαθηματική θεμελίωση των προβλημάτων σκέδασης διαδραματίζει η έννοια της καλής τοποθέτησης κατά Hadamard. Ένα πρόβλημα

συνοριακών τιμών χαρακτηρίζεται καλά τοποθετημένο εφόσον ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξής τρεις προϋποθέσεις: ύπαρξη λύσης, μοναδικότητα της λύσης και συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα. Η ικανοποίηση των συνθηκών αυτών εξασφαλίζει τη φυσική αξιοπιστία αλλά και τη μαθηματική ευστάθεια του προβλήματος. Επίσης, η απαίτηση της ομαλότητας στο σχήμα του σκεδαστή (επιφάνεια Lyapunov) εξασφαλίζει την καλή τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος [7].

Στα προβλήματα σκέδασης σε μη φραγμένα χωρία, καθοριστική σημασία για την καλή τοποθέτηση έχει η επιβολή κατάλληλων συνθηκών ακτινοβολίας στο άπειρο. Οι συνθήκες αυτές εκφράζουν τη φυσική απαίτηση το σκεδασμένο κύμα να απομακρύνεται από τον σκεδαστή και να μην εμφανίζονται ανακλώμενα κύματα από το άπειρο [3, 4, 5]. Στην ακουστική σκέδαση, η συνθήκη ακτινοβολίας διατυπώθηκε αρχικά από τον Sommerfeld [1], ενώ στη γραμμική ελαστικότητα η κατάσταση είναι πιο σύνθετη λόγω της ταυτόχρονης διάδοσης διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων. Για τον λόγο αυτό, οι συνθήκες ακτινοβολίας εξειδικεύονται χωριστά για κάθε είδος κυματικού πεδίου.

Οι εργασίες των F. Atkinson και C. Wilcox [2] έδειξαν ότι το πλάτος σκέδασης παίζει βασικό ρόλο στη θεωρία σκέδασης και επιτυγχάνεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του σκεδασμένου πεδίου και του πλάτους σκέδασης που παράγει.

Ο Müller [3] έχει δώσει τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια συνάρτηση πλάτος σκέδασης. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει αρμονική συνάρτηση η οποία ταυτίζεται με το πλάτος σκέδασης πάνω στη μοναδιαία σφαίρα, της οποίας η L^2 -norm στην επιφάνεια οποιασδήποτε σφαίρας που περικλείει τον σκεδαστή είναι εκθετικού τύπου.

Για τη μαθηματική μελέτη της καλής τοποθέτησης των προβλημάτων σκέδασης έχουν αναπτυχθεί διάφορες αναλυτικές μέθοδοι, οι οποίες μπορούν να ταξινομηθούν σε διαφορικές, μεταβολικές και ολοκληρωτικές.

Μία από τις κλασικότερες προσεγγίσεις αποτελεί η μεταβολική μέθοδος (Variational Method), η οποία βασίζεται στη διατύπωση του προβλήματος σκέδασης ως προβλήματος ελαχιστοποίησης ή στάσιμου σημείου ενός

κατάλληλου ενεργειακού συναρτησιακού. Η μέθοδος αυτή αξιοποιεί εργαλεία της συναρτησιακής ανάλυσης και της θεωρίας των χώρων Sobolev και εφαρμόζεται ευρέως στη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις ελλειπτικού και υπερβολικού τύπου [6]. Μέσω της κατάλληλης ασθενούς διατύπωσης του προβλήματος, είναι δυνατή η εφαρμογή θεμελιωδών αποτελεσμάτων ύπαρξης και μοναδικότητας, όπως το θεώρημα Lax–Milgram και η θεωρία Fredholm [6, 16, 32, 41]. Κλασικές αναφορές στη μεταβολική προσέγγιση προβλημάτων σκέδασης αποτελούν τα έργα των Lions και Magenes, καθώς και οι μελέτες των Cessenat και Nédélec για κυματικά προβλήματα σε μη φραγμένα χωρία [6, 23, 32]. Η μεταβολική μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε προβλήματα σκέδασης ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου οι συνοριακές συνθήκες είναι σύνθετες ή μεικτού τύπου [26]. Ωστόσο, η εφαρμογή της σε εξωτερικά προβλήματα σκέδασης απαιτεί συχνά τεχνικές τεχνητού περιορισμού του χωρίου ή την εισαγωγή κατάλληλων τελεστών ακτινοβολίας, γεγονός που αυξάνει τη μαθηματική πολυπλοκότητα της ανάλυσης [23, 32].

Μια δεύτερη κατηγορία μεθόδων αποτελείται από τις διαφορικές μεθόδους (άμεσες μεθόδους), οι οποίες βασίζονται άμεσα στη διαφορική μορφή των εξισώσεων και στη χρήση ενεργειακών ταυτοτήτων, αρχών μοναδικότητας και θεωρημάτων συνέχειας. Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούν συχνά ταυτοτήτες τύπου Green ή Betti και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τη θεμελίωση αποτελεσμάτων μοναδικότητας σε προβλήματα σκέδασης [42].

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, η οποία αξιοποιεί τη θεμελιώδη λύση των αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων και οδηγεί σε ισοδύναμες διατυπώσεις του προβλήματος υπό μορφή συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων [30, 34, 40]. Μέσω της χρήσης δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, το πρόβλημα που αρχικά διατυπώνεται σε μη φραγμένο χωρίο μετασχηματίζεται σε πρόβλημα που ορίζεται αποκλειστικά στο σύνορο του σκεδαστή. Με τον τρόπο αυτό μειώνεται η διάσταση του προβλήματος, ενσωματώνονται φυσικά οι συνθήκες ακτινοβολίας και καθίσταται

εφικτή η εφαρμογή εργαλείων της θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων για την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων.

Στο πλαίσιο της μελέτης εξωτερικών προβλημάτων σκέδασης έχουν αναπτυχθεί επίσης μέθοδοι που βασίζονται στον τεχνητό περιορισμό του χωρίου. Μια τέτοια προσέγγιση είναι η μέθοδος τεχνητού ορίου σε συνδυασμό με τελεστές Dirichlet-to-Neumann (DtN). Στη μέθοδο αυτή, το άπειρο χωρίο αντικαθίσταται από ένα φραγμένο υπολογιστικό χωρίο, στο σύνορο του οποίου επιβάλλεται μη τοπική συνοριακή συνθήκη που προσεγγίζει με ακρίβεια τη συνθήκη ακτινοβολίας. Οι τελεστές DtN αναπτύχθηκαν συστηματικά από τους Keller και Givoli και έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη θεωρία και πράξη των προβλημάτων σκέδασης [13, 14, 15, 17]. Επιπλέον, επιτρέπουν τη θεωρητική θεμελίωση της καλής τοποθέτησης, αλλά η αριθμητική υλοποίησή τους είναι συχνά απαιτητική λόγω της μη τοπικότητάς τους.

Ιδιαίτερη θέση στη σύγχρονη βιβλιογραφία κατέχουν οι μέθοδοι απορροφητικών στρωμάτων, γνωστές ως Perfectly Matched Layers (PML) [20]. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στην εισαγωγή ενός τεχνητού απορροφητικού στρώματος γύρω από το υπολογιστικό χωρίο, το οποίο αποσβένει τα εξερχόμενα κύματα χωρίς να προκαλεί ανακλάσεις στο εσωτερικό. Η μέθοδος PML εισήχθη αρχικά από τον Bérenger για ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα [20] και στη συνέχεια αναπτύχθηκε περαιτέρω για ηλεκτρομαγνητικά και ελαστοδυναμικά προβλήματα από τους Chew και συνεργάτες, καθώς και από τους Collino και Monk [19, 25]. Οι PML χρησιμοποιούνται ευρέως σε υπολογιστικές προσεγγίσεις προβλημάτων σκέδασης ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων, αν και η αυστηρή μαθηματική τους ανάλυση παρουσιάζει δυσκολίες, ιδιαίτερα στην περίπτωση ανισότροπων ή ελαστικών μέσων [31].

Παράλληλα, έχουν αναπτυχθεί υβριδικές μέθοδοι που συνδυάζουν διαφορετικές αναλυτικές και αριθμητικές προσεγγίσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι μέθοδοι σύζευξης πεπερασμένων στοιχείων και συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων (FEM–BIE). Στις μεθόδους αυτές, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόζεται στο εσωτερικό ενός φραγμένου χωρίου που περιέχει τον σκεδαστή, ενώ η μέθοδος των συνοριακών

ολοκληρωτικών εξισώσεων χρησιμοποιείται για την ακριβή περιγραφή της συμπεριφοράς του πεδίου στο άπειρο. Οι υβριδικές αυτές τεχνικές συνδυάζουν την ευελιξία των πεπερασμένων στοιχείων με την ακρίβεια των ολοκληρωτικών μεθόδων στη διαχείριση των συνθηκών ακτινοβολίας [8, 10, 33]. Θεμελιώδεις αναφορές στις υβριδικές μεθόδους FEM–BIE αποτελούν τα έργα των Johnson και Nédélec [8], καθώς και οι μεταγενέστερες αναλύσεις των Costabel και Stephan για προβλήματα σκέδασης [10].

Τέλος, αξίζει να αναφερθούν οι μέθοδοι συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Methods), οι οποίες αποτελούν αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Οι μέθοδοι αυτές διατηρούν τα θεωρητικά πλεονεκτήματα της ολοκληρωτικής διατύπωσης, όπως η μείωση της διάστασης του προβλήματος και η ακριβής ενσωμάτωση των συνθηκών ακτινοβολίας, και χρησιμοποιούνται εκτενώς στην υπολογιστική ανάλυση προβλημάτων σκέδασης ελαστικών κυματικών πεδίων. Κλασικές μονογραφίες για τη θεωρία και εφαρμογή των μεθόδων οριακών στοιχείων είναι τα έργα των Hackbusch και Sauter–Schwab [22, 39], ενώ εφαρμογές των συνοριακών στοιχείων σε κυματικά προβλήματα τύπου Helmholtz και σε προβλήματα ελαστικότητας παρουσιάζονται, μεταξύ άλλων, στα έργα των Holm, Maischak και Stephan, καθώς και των Maischak και Stephan [24, 35].

Ιστορικά, η χρήση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων στη θεωρία σκέδασης αναπτύχθηκε αρχικά στην ακουστική και στον ηλεκτρομαγνητισμό και στη συνέχεια επεκτάθηκε στη γραμμική ελαστικότητα. Σημαντική συμβολή στη διαμόρφωση της θεωρίας αυτής είχαν οι εργασίες των Rellich, Kupradze και Müller, οι οποίοι ανέπτυξαν τα κατάλληλα θεωρήματα μοναδικότητας και τις θεμελιώδεις λύσεις της εξίσωσης Navier. Η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων αποτέλεσε έκτοτε βασικό εργαλείο τόσο στη θεωρητική ανάλυση όσο και στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων σκέδασης ελαστικών κυμάτων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων εφαρμόζεται στη μελέτη της καλής τοποθέτησης προβλημάτων σκέδασης ελαστικών κυματικών πεδίων που περιγράφονται από τη

φασματική εξίσωση Navier. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη διατύπωση και ανάλυση προβλημάτων με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, Neumann και Robin, καθώς και στη θεμελίωση αποτελεσμάτων ύπαρξης και μοναδικότητας των αντίστοιχων λύσεων. Το κεφάλαιο αυτό λειτουργεί ως εισαγωγικό πλαίσιο για την ανάπτυξη της θεωρίας που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια, όπου παρουσιάζονται αναλυτικά τα εργαλεία της γραμμικής ελαστικότητας και της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Κεφάλαιο 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η θεωρία ελαστικότητας είναι ο θεμελιώδης κλάδος της μηχανικής που μελετά τη συμπεριφορά παραμορφωσίμων στερεών υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Οι εφαρμογές της βρίσκονται σε πλήθος πεδίων, όπως η μηχανική υλικών, η σεισμολογία, η βιοϊατρική μηχανική και η κατασκευαστική μηχανική. Ο στόχος της θεωρίας ελαστικότητας είναι η μαθηματική περιγραφή της σχέσης μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων σε ένα σώμα (το οποίο θεωρείται σαν συνεχές, πλήρως ελαστικό μέσο), καθώς και η ανάλυση των συνεπειών που έχουν αυτές στη γεωμετρία και την κατάσταση τάσεων του σώματος.

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται οι θεμελιώδεις υποθέσεις στις οποίες βασίζεται η γραμμική ελαστικότητα. Παρουσιάζεται η βασική εξίσωση της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας και η έννοια της θεμελιώδους λύσης. Ορίζεται ο επιφανειακός τελεστής τάσεων και δίνεται η έννοια της εσωτερικής και εξωτερικής λύσης.

2.1 Η Δυναμική Εξίσωση Navier στη Διδιάστατη Γραμμική Ελαστικότητα – Βασικές Έννοιες

Η μηχανική του συνεχούς μέσου ασχολείται με μελέτη της παραμόρφωσης ενός υλικού όταν σε αυτό επιβληθούν τάσεις. Στο πλαίσιο της μηχανικής του συνεχούς μέσου η γραμμική ελαστικότητα βασίζεται στις εξής υποθέσεις [11]:

1. **Συνέχεια:** Το υλικό σώμα αποτελείται από άπειρα υλικά σημεία και καταλαμβάνει χώρο κατά συνεχή τρόπο.
2. **Μικρές παραμορφώσεις:** Υποτίθεται ότι οι παραμορφώσεις είναι μικρές, σε σχέση με τις διαστάσεις του σώματος, δηλαδή οι μετατοπίσεις των σημείων του σώματος δεν επηρεάζουν σημαντικά την αρχική γεωμετρία. Αυτό επιτρέπει τη γραμμικοποίηση των σχέσεων τάσης-παραμόρφωσης.
3. **Ομογενές υλικό:** Ένα υλικό θεωρείται ομογενές, όταν έχει ιδιότητες ανεξάρτητες από τη θέση που αναφέρονται.
4. **Ισότροπο υλικό:** Ένα υλικό θεωρείται ισότροπο, όταν έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις.
5. **Ελαστική συμπεριφορά:** Το υλικό επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση όταν αφαιρεθούν οι εξωτερικές δυνάμεις, υποδηλώνοντας ότι το υλικό είναι ελαστικό.

Οι παράμετροι που περιγράφουν ένα ελαστικό και ισότροπο ελαστικό μέσο ονομάζονται παράμετροι (σταθερές) *Lamé* λ και μ οι τιμές των οποίων, για κάποιο υλικό, προσδιορίζονται πειραματικά. Έχει βρεθεί ότι είναι $\mu > 0$ και $\lambda + 2\mu > 0$.

Ένα ελαστικό κύμα που διαδίδεται σε ένα τέτοιο μέσο περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, όπου $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ είναι η θέση και $t \in [0, +\infty)$ ο χρόνος. Το πεδίο αυτό αποδίδει την *τοπική μετατόπιση* ενός σημείου \mathbf{r} του μέσου τη χρονική στιγμή t , σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του. Επιπλέον, η κατάσταση τάσης του

μέσου εκφράζεται μέσω του τανυστικού πεδίου $\tilde{\sigma}$, το οποίο χαρακτηρίζει την κατάσταση της τάσης στο σημείο \mathbf{r} .

Η εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του πεδίου μετατοπίσεων $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ παρουσία εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υλικού και \mathbf{F} το πεδίο εξωτερικών δυνάμεων. Για ένα ομογενές και ισότροπο μέσο με σταθερές λ, μ, ρ , η παραπάνω εξίσωση οδηγεί στη *δυναμική εξίσωση Navier* [11]:

$$\mu \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \rho \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις ($\mathbf{F} = 0$) και υποθέσουμε αρμονική εξάρτηση ως προς τον χρόνο, δηλαδή $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, τότε η εξίσωση (2.2) γίνεται [7]:

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.3)$$

Αν η κυκλική συχνότητα ω είναι μηδέν, προκύπτει η *στατική εξίσωση Navier*:

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.4)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει φαινόμενα στα οποία το πεδίο μετατοπίσεων δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

Με εφαρμογή της ταυτότητας

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} \quad (2.5)$$

η εξίσωση (2.2.3) γίνεται

$$c_p^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

όπου

$$c_p := \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s := \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.7)$$

είναι οι φασικές ταχύτητες διάδοσης του διαμήκους και εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα. Οι φασικές ταχύτητες c_p και c_s σχετίζονται με τους αντίστοιχους κυματάριθμους $k_p > 0$ και $k_s > 0$, σύμφωνα με:

$$\omega = k_p c_p = k_s c_s \quad (2.8)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί επίσης να γραφεί ως:

$$c_s^2 \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (c_p^2 - c_s^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.9)$$

Σύμφωνα με την ανάλυση κατά *Helmholtz*, το πεδίο μετατοπίσεων $\mathbf{u} \in C^2$ μπορεί να αναλυθεί στην *αστρόβιλη* συνιστώσα \mathbf{u}^p και τη *σωληνοειδή* συνιστώσα \mathbf{u}^s ως:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s \quad (2.10)$$

Τα κυματικά πεδία \mathbf{u}^p και \mathbf{u}^s δίνονται από τους τύπους

$$\mathbf{u}^p = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}^s = -\frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2.12)$$

και

$$\nabla \times \mathbf{u}^p = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0 \quad (2.14)$$

και ονομάζονται *διαμήκη* (P-κύματα) και *εγκάρσια* (S-κύματα) αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την (2.10) στην (2.6) και εφαρμόζοντας τις (2.5), (2.13), (2.14) προκύπτει:

$$c_p^2 (\Delta + k_p^2) \mathbf{u}^p + c_s^2 (\Delta + k_s^2) \mathbf{u}^s = 0 \quad (2.15)$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει εφόσον ισχύουν οι επιμέρους σχέσεις

$$(\Delta + k_p^2) \mathbf{u}^p = 0 \quad (2.16)$$

$$(\Delta + k_s^2) \mathbf{u}^s = 0 \quad (2.17)$$

Από τις (2.16), (2.17) συνάγεται ότι σε ένα ισότροπο και ομογενές μέσο, διαδίδονται ανεξάρτητα δύο είδη κυμάτων: Τα *διαμήκη κύματα*, που ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz (2.16), έχουν κυματάριθμο k_p και φασική ταχύτητα c_p , ενώ τα *εγκάρσια κύματα*, που υπακούουν στην διανυσματική εξίσωση Helmholtz (2.17), έχουν κυματάριθμο k_s και φασική ταχύτητα c_s [9, 29]. Από τις σχέσεις (2.7) προκύπτει ότι τα *διαμήκη κύματα διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από τα εγκάρσια* [28].

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή του Kupradze

$$\Delta^* = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot) \quad (2.18)$$

η εξίσωση του Navier παίρνει τη μορφή

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.19)$$

Στη συνέχεια θα δοθεί η μορφή της θεμελιώδους λύσης για τη δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Ox_1x_2 . Έστω μια μοναδιαία τασική δύναμη \mathbf{F} , η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\mathbf{F}_j, j = 1, 2$, κάθε μία παράλληλη σε έναν από τους άξονες Ox_j . Έστω \mathbf{r}' η θέση εφαρμογής της δύναμης \mathbf{F} . Κάθε συνιστώσα \mathbf{F}_j προκαλεί στη θέση \mathbf{r} μια μετατόπιση Γ_j , η οποία επίσης αναλύεται σε δύο συνιστώσες μία Γ_{1j} κατά τον x_1 – άξονα και Γ_{2j} κατά τον x_2 – άξονα, $j = 1, 2$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε τέσσερις μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις των αξόνων, οι οποίες αποτελούν τα στοιχεία ενός πίνακα $[\Gamma_{ij}]_{2 \times 2}$ που ονομάζεται πίνακας *Kupradze* [7]

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\Gamma_{ij}]_{2 \times 2} = \tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.20)$$

Ο πίνακας αυτός αποτελεί τη **θεμελιώδη λύση** της φασματικής εξίσωσης Navier και ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\tilde{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.21)$$

όπου $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ είναι το συναρτησιακό του Dirac και $\tilde{\mathbf{I}}$ το ταυτοτικό δυαδικό. Ο πίνακας $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι συμμετρικός, ικανοποιεί τη σχέση αμοιβαιότητας $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} \left\{ \frac{1}{\mu_{e,i}} \tilde{\mathbf{I}} H_0^{(1)}(k_{e,i}^s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \frac{1}{\rho \omega^2} \nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}} \left[H_0^{(1)}(k_{e,i}^p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - H_0^{(1)}(k_{e,i}^s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right] \right\} \quad (2.22)$$

όπου οι δείκτες e, i δηλώνουν το εξωτερικό και εσωτερικό χωρίο αντίστοιχα.

Στη θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας, σημαντικό ρόλο — ιδιαίτερα σε προβλήματα συνοριακών τιμών - διαδραματίζει ο *επιφανειακός τελεστής τάσεων*. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός:

Ορισμός 2.1.1. Ο *επιφανειακός τελεστής τάσεων* περιγράφει την επίδραση των εσωτερικών δυνάμεων πάνω σε μία επιφάνεια μέσω του συμβόλου $T^{(\hat{\eta})}$, και ορίζεται ως:

$$T_{e,i}^{(\hat{\eta})} = 2\mu_{e,i} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{r}} \cdot \nabla + \lambda_{e,i} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{r}} \cdot \nabla \cdot + \mu_{e,i} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{r}} \times \nabla \times \quad (2.23)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην στοιχειώδη επιφάνεια στην οποία ασκείται η τάση στο σημείο \mathbf{r} με φορά προς το εξωτερικό μέρος.

Η σχέση (2.23) προκύπτει από την: $T_{e,i}^{(\hat{\eta})} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{r}}$, αφού η τάση στο σύνορο η οποία αντιστοιχεί σε μετατόπιση $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ δίνεται από τον πολλαπλασιασμό του τανυστή τάσης με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα.

Ο επιφανειακός τελεστής τάσεων $T^{(\hat{\eta})}$ είναι γραμμικός και μαζί με τον τελεστή Δ^* εμπλέκονται στους τύπους *Betti* της γραμμικής ελαστικότητας. Οι τύποι αυτοί είναι το ανάλογο των τύπων του Green της θεωρίας της ακουστικής [28]

1^{ος} τύπος Betti:

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{v} ds - \int_{B_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dv \quad (2.24)$$

2^{ος} τύπος Betti:

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{u} dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^{(\hat{\eta})} \mathbf{u} ds - \int_{B_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dv \quad (2.25)$$

3^{ος} τύπος Betti:

$$\int_{B_i} (\mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \Delta^* \mathbf{u}) dv = \int_{\partial B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^{(\hat{\eta})} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^{(\hat{\eta})} \mathbf{u}) ds \quad (2.26)$$

Το $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ονομάζεται ενεργειακό συναρτησοειδές και εκφράζει το έργο της δύναμης \mathbf{F} κατά την μετατόπιση που προκαλείται στο σημείο \mathbf{r} και για $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ δίνεται από την σχέση:

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_1} \right)^2 \right] + 2\lambda \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial u_2}{\partial r_1} + (\lambda + \mu) \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_2} \right)^2 \right] + \mu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \quad (2.27)$$

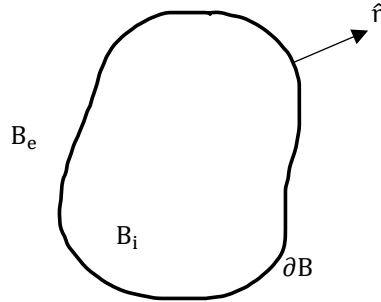
και \mathbf{u} ένα διανυσματικό πεδίο στον \mathbb{R}^2 με $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

2.2 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών της Γραμμικής Ελαστικότητας.

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας. Αρχικά, δίνουμε κάποιους ορισμούς, απαραίτητους για τη διατύπωση αυτών των προβλημάτων:

Ορισμός 2.2.1. Ως **θεμελιώδες πεδίο** ορίζεται ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Το πεδίο αυτό ονομάζεται εσωτερικό όπου συμβολίζεται με B_i όταν είναι φραγμένο, και ονομάζεται εξωτερικό όπου συμβολίζεται με B_e όταν το

συμπλήρωμα του $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_i$, με $\bar{B}_i = B_i \cup \partial B$ είναι φραγμένο. Το σύνορο ∂B του πεδίου είναι λείο, και αποτελεί μια επιφάνεια Lyapunov. Στο σχήμα 2.1 περιγράφονται τα B_i , B_e , ∂B .



Σχήμα 2.1: Θεμελιώδες πεδίο

Ορισμός 2.2.2. Μια επιφάνεια Lyapunov ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- Είναι πεπερασμένη και κλειστή.
- Έχει μονοσήμαντα ορισμένο εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της.
- Για οποιαδήποτε σημεία \mathbf{r}, \mathbf{r}' της επιφάνειας, υπάρχουν σταθερές c και δ τέτοιες ώστε:

$$\theta < c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\delta, 0 < \delta \leq 1 \quad (2.28)$$

όπου θ ή γωνία των κάθετων διευθύνσεων στα σημεία \mathbf{r}, \mathbf{r}' της S .

- Υπάρχει $\varepsilon > 0$ το ίδιο για όλα τα σημεία $\mathbf{r} \in S$, έτσι ώστε κάθε ευθεία παράλληλη στην κάθετη της S στο \mathbf{r} , τέμνει το πολύ σε ένα σημείο εκείνο το τμήμα της S που περιέχει το \mathbf{r} και περιέχεται στον κύλινδρο με ακτίνα ε και άξονα παράλληλο στο κάθετο διάνυσμα της S στο \mathbf{r} .

Ορισμός 2.2.3. Ορίζεται ως εσωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης Navier, κάθε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} που ορίζεται στο B_i , όταν ανήκει στο χώρο $C^2(B_i) \cap C^1(\bar{B}_i)$ και ικανοποιεί σημειακά την εξίσωση (2.19) στο B_i .

Ορισμός 2.2.4. Ορίζεται ως εξωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης Navier, κάθε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} που ορίζεται στο B_e , όταν ανήκει στο χώρο $C^2(\bar{B}_e) \cap C^1(B_e)$, ικανοποιεί σημειακά την εξίσωση (2.19) στο B_e , και

επιπλέον τις **συνθήκες ακτινοβολίας** που για τη διδιάστατη γραμμική ελαστικότητα εκφράζονται από τις παρακάτω συνθήκες:

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_p \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (2.29)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^s(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_s \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (2.30)$$

όπου \mathbf{u}^p και \mathbf{u}^s η διαμήκης και εγκάρσια συνιστώσα του πεδίου μετατοπίσεων \mathbf{u} αντίστοιχα. Επίσης, οι συνθήκες ακτινοβολίας καθορίζουν τη γεωμετρική εξασθένιση του σκεδασμένου πεδίου καθώς $|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty$ και δηλώνουν τον αποκλίνοντα χαρακτήρα του σκεδασμένου κύματος.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας για τη φασματική εξίσωση Navier (2.19).

1) Εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Να βρεθεί μια διανυσματική ομαλή εσωτερική λύση \mathbf{u}_i της εξίσωσης (2.19) τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{στο } B_i \quad (2.31)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{f} \quad \text{στο } \partial B \quad (2.32)$$

όπου $\mathbf{f} \in C^1(\partial B)$ μια δοσμένη διανυσματική συνάρτηση και σύνορο ∂B μια επιφάνεια Lyapunov.

2) Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Να βρεθεί μια διανυσματική ομαλή εξωτερική λύση \mathbf{u}_e της εξίσωσης (2.19) τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{στο } B_e \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{f} \quad \text{στο } \partial B \quad (2.34)$$

όπου $\mathbf{f}, \partial B$ όπως προηγουμένως.

3) Εσωτερικό πρόβλημα Neumann

Να βρεθεί μια διανυσματική ομαλή εσωτερική λύση \mathbf{u}_i της εξίσωσης (2.19) τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{στο } B_i \quad (2.35)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{g} \quad \text{στο } \partial B \quad (2.36)$$

όπου σύνορο ∂B μια επιφάνεια Lyapunov, $\mathbf{g} \in C^1(\partial B)$ μια δοσμένη διανυσματική συνάρτηση και $\mathbf{T}\mathbf{u}_i$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων πάνω στην \mathbf{u}_i .

4) Εξωτερικό πρόβλημα Neumann

Να βρεθεί μια διανυσματική ομαλή εξωτερική λύση \mathbf{u}_e της εξίσωσης (2.19) τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{στο } B_e \quad (2.37)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{g} \quad \text{στο } \partial B \quad (2.38)$$

όπου $\mathbf{g}, \partial B$ όπως προηγουμένως και $\mathbf{T}\mathbf{u}_e$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων πάνω στην \mathbf{u}_e .

5) Εσωτερικό πρόβλημα Robin

Να βρεθεί μια διανυσματική ομαλή εξωτερική λύση \mathbf{u}_i της εξίσωσης (2.19) τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{στο } B_i \quad (2.39)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) + i\omega\mathbf{c}\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{h} \quad \text{στο } \partial B \quad (2.40)$$

όπου σύνορο ∂B μια επιφάνεια Lyapunov, $\mathbf{h} \in C^1(\partial B)$ μια δοσμένη διανυσματική συνάρτηση και $\mathbf{T}\mathbf{u}_i$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων πάνω στην \mathbf{u}_i .

6) Εξωτερικό πρόβλημα Robin

Να βρεθεί μια διανυσματική ομαλή εξωτερική λύση \mathbf{u}_e της εξίσωσης (2.19) τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{στο } B_e \quad (2.41)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) + i\omega\mathbf{c}\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{h} \quad \text{στο } \partial B \quad (2.42)$$

όπου $\mathbf{h}, \partial B$ όπως προηγουμένως και $T\mathbf{u}_e$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων πάνω στην \mathbf{u}_e και c θετική σταθερά.

7) Το πρόβλημα διαπερατότητας (transmission problem)

Να βρεθούν διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_e$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούν το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$(\Delta_i^* + \rho_i \omega^2) \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in B_i \quad (2.43)$$

$$(\Delta_e^* + \rho_e \omega^2) \mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.44)$$

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.45)$$

$$T_e \mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = T_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.46)$$

όπου σύνορο ∂B μια επιφάνεια Lyapunov, $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_e$ είναι το ολικό εσωτερικό ή εξωτερικό πεδίο μετατοπίσεων αντίστοιχα, $\Delta_{i,e}^*$ τελεστες που δίνονται από τη (2.18) και οι δείκτες i, e υποδηλώνουν τον ορισμό του τελεστή στα χωρία B_i ή B_e αντίστοιχα.

Αναφέρουμε εδώ ότι η ύπαρξη λύσης στα εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας αντιμετωπίστηκε από τον Kupradze [4], και έχουν μοναδική λύση για κάθε τιμή του ω^2 . Αντίθετα, στα εσωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας δεν υπάρχει μοναδική λύση για κάποιες τιμές του ω^2 . Για να υπάρχει μοναδική λύση θα πρέπει το ω^2 να μην αποτελεί ιδιοτιμή του αντίστοιχου ομογενούς εσωτερικού προβλήματος.

2.3 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις.

Θα δώσουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση μιας εσωτερικής και μιας εξωτερικής ομαλής λύσης της (2.19).

α) Αν $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$ είναι μια εσωτερική ομαλή λύση της (2.19), τότε εφαρμόζοντας τον 3^ο τύπο του Betti για τη θεμελιώδη λύση $\tilde{\Gamma}$ και την $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$ προκύπτει:

$$\delta(\mathbf{r}) \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} [\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot T(\mathbf{r}') \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - T(\mathbf{r}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') \quad (2.47)$$

όπου

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in B_i \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{r} \in \partial B \\ 0, & \mathbf{r} \in B_e \end{cases} \quad (2.48)$$

$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ η θεμελιώδης λύση της (2.19) και $T^{(\mathbf{r}')}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων που δίνεται από την (2.23), πάνω στη θεμελιώδη λύση ως προς την μεταβλητή \mathbf{r}' .

β) Αν $\mathbf{u}_e(\mathbf{r})$ είναι μια εξωτερική ομαλή λύση της (2.19), τότε εφαρμόζοντας τον 3^ο τύπο του Betti για τη θεμελιώδη λύση $\tilde{\Gamma}$ και την $\mathbf{u}_e(\mathbf{r})$ προκύπτει [28]:

$$\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} [\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot T^{(\mathbf{r}')}\mathbf{u}_e(\mathbf{r}') - T^{(\mathbf{r}')}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_e(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') \quad (2.49)$$

όπου

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) - 1 \quad (2.50)$$

με $\delta(\mathbf{r})$ όπως ορίζεται από την (2.48) και $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ η θεμελιώδης λύση της (2.19) και $T^{(\mathbf{r}')}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων που δίνεται από την (2.23), πάνω στη θεμελιώδη λύση ως προς την μεταβλητή \mathbf{r}' .

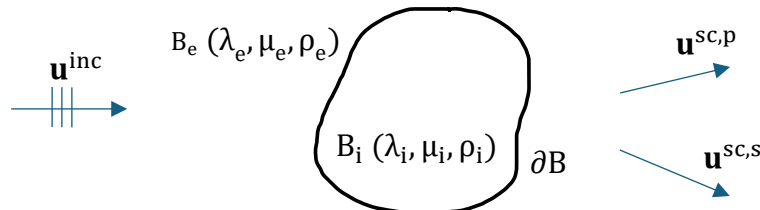
2.4 Προβλήματα Σκέδασης-Καλή τοποθέτηση.

Όπως έχουμε αναφέρει, το πρόβλημα της σκέδασης ανήκει σε μια κατηγορία κυματικών προβλημάτων όπου μελετάται πώς οι ανωμαλίες ή οι μεταβολές του μέσου επηρεάζουν τη διάδοση του κυματικού πεδίου. Η ανισομέρεια του μέσου προκαλεί διάχυση του κυματικού πεδίου, και αυτό μελετάται από τη θεωρία της σκέδασης κυμάτων. Η ανομοιομορφία αυτή μπορεί να οφείλεται στην ύπαρξη εμποδίων ή μεταβολών μέσα στον χώρο διάδοσης, που ονομάζεται σκεδαστής.

Όταν είναι γνωστά τα φυσικά χαρακτηριστικά και το γεωμετρικό σχήμα του σκεδαστή και ζητάμε να βρούμε το σκεδασμένο κυματικό πεδίο, τότε έχουμε το *ευθύ πρόβλημα σκέδασης*. Αντίθετα, όταν γνωρίζουμε το ολικό κυματικό πεδίο και θέλουμε να προσδιορίσουμε το σχήμα και τις ιδιότητες του σκεδαστή, τότε έχουμε το *αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης*.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο, το οποίο καταλαμβάνει όλο τον \mathbb{R}^2 και επιτρέπει την ανεξάρτητη διάδοση διαμήκων και εγκάρσιων ελαστικών κυματικών πεδίων. Αν τοποθετήσουμε μέσα σε αυτό ένα αντικείμενο με διαφορετικές ιδιότητες (έναν σκεδαστή), τότε η ομοιογένεια του μέσου χάνεται. Αυτό το αντικείμενο έχει διαφορετικές σταθερές *Lamé* και πυκνότητα από το γύρω μέσο. Λόγω της εμφάνισης ενός συνόρου μέσα στο χώρο, το σκεδασμένο πεδίο θα είναι γραμμικός συνδυασμός εγκάρσιου και διαμήκους πεδίου, ανεξάρτητα από τη μορφή του προσπίπτοντος κυματικού πεδίου.

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο στον \mathbb{R}^2 το οποίο συμβολίζουμε με B_i . Το χωρίο αυτό έχει φραγμένο, κλειστό και Lyapunov σύνορο το οποίο συμβολίζουμε με ∂B . Επίσης, θεωρούμε $B_e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_i$, όπου $\bar{B}_i = B_i \cup \partial B$.



Σχήμα 2.2: Σκέδαση ελαστικών κυμάτων

Το B_e περιέχεται σε ένα ισότροπο, ομογενές και ελαστικό μέσο με σταθερές *Lamé* λ_e , μ_e και πυκνότητα ρ_e και το B_i περιέχει ελαστικό μέσο που χαρακτηρίζεται από τις σταθερές *Lamé* λ_i , μ_i και την πυκνότητα ρ_i . Οι σταθερές *Lamé* ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{cases} \mu_e > 0, & \lambda_e + 2\mu_e > 0 \\ \mu_i > 0, & \lambda_i + 2\mu_i > 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Για το πεδίο μετατοπίσεων εφαρμόζουμε το *θεώρημα αναπαράστασης του Helmholtz*. Έτσι, έστω ότι το $\mathbf{u}^p(\mathbf{r})$ είναι το διαμήκες κύμα και το $\mathbf{u}^s(\mathbf{r})$ το εγκάρσιο,

τα οποία ικανοποιούν τις διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz με αριθμούς κύματος k_p και k_s αντίστοιχα. Οι διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούνται στα χωρία B_e και B_i μπορούν να γραφούν ως:

$$(\Delta_{e,i}^* + \rho_{e,i}\omega^2)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.52)$$

όπου ο τελεστής Lamé $\Delta_{e,i}^*$ δίνεται από τη σχέση (2.18).

Στη συνέχεια θεωρούμε επίπεδα προσπίπτοντα κυματικά πεδία με διαμήκες κυματικό πεδίο να είναι της μορφής:

$$\mathbf{u}^{inc,p}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{d}}e^{ik_p\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.53)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}} = (\cos\theta, \sin\theta)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα που εκφράζει τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και $\mathbf{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ το διάνυσμα παρατήρησης.

Το προσπίπτον πεδίο μπορεί επίσης να είναι εγκάρσιο S-κύμα, δηλαδή SV- ή SH-κύμα. Σε αυτή την περίπτωση, το πεδίο έχει μορφή:

$$\mathbf{u}^{inc,s}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_d e^{ik_s\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.54)$$

όταν πρόκειται για εγκάρσιο SV-κύμα, με διάνυσμα πόλωσης $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$ που είναι κάθετο προς την κατεύθυνση διάδοσης, δηλαδή:

$$\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}_d = 0 \quad (2.55)$$

ή της μορφής:

$$\mathbf{u}_{SH}^{inc}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\kappa}} e^{ik_s\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.56)$$

όταν έχουμε διάδοση εγκάρσιου SH-κύματος, όπου $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = (0,0,1)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $O_{x_1x_2}$. Στη διάδοση εγκάρσιου SH-κύματος το προσπίπτον κυματικό πεδίο είναι βαθμωτό και διαδίδεται παράλληλα στον κάθετο άξονα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $O_{x_1x_2}$.

Μετά την πρόσπτωση, δημιουργείται το *σκεδασμένο* κυματικό πεδίο \mathbf{u}^{sc} και το ολικό πεδίο μετατοπίσεων \mathbf{u}^{tot} είναι η υπέρθεση του προσπίπτοντος και του σκεδασμένου πεδίου.

Στα προβλήματα σκέδασης για ελαστικά, ακουστικά ή ηλεκτρομαγνητικά πεδία, θεωρείται ότι ο σκεδαστής βρίσκεται σε άμεση επαφή με το μέσο που τον περιβάλλει. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή, το πεδίο μετατοπίσεων και το πεδίο των τάσεων είναι συνεχή στο όριο (σύνορο) της επαφής. Για να περιγράψουμε την κατάσταση αυτή, εισάγουμε τον συμβολισμό:

$$\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.57)$$

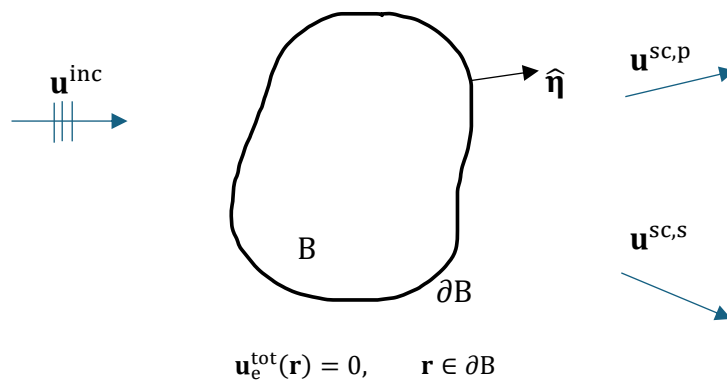
και καθορίζουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες, ανάλογα με το είδος του σκεδαστή:

i) Σκληρός σκεδαστής (Rigid body)

Ο σκληρός σκεδαστής είναι μια επιφάνεια που δεν επιτρέπει τοπικές μετατοπίσεις. Άρα, το συνολικό πεδίο μετατοπίσεων πάνω στο σύνορο πρέπει να είναι μηδενικό:

$$\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.58)$$

Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει κυματική διάδοση στο εσωτερικό του σκεδαστή.



Σχήμα 2.3: Σκληρός σκεδαστής

ii) Κοιλότητα (Cavity)

Η κοιλότητα αποτελεί ένα κενό εντός του ελαστικού μέσου και η επιφάνεια του δεν παρουσιάζει αντίσταση στο τασικό πεδίο. Η απαίτηση συνέχειας του πεδίου των τάσεων στο όριο επιβάλλει:

$$\mathbf{T}_e^{(\mathbf{r})} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.59)$$

Και εδώ, όπως και στον σκληρό σκεδαστή, δεν υφίσταται κυματική διάδοση στο εσωτερικό.

iii) Διαπερατός σκεδαστής (Transmission Problem)

Αν ο σκεδαστής έχει διαφορετικές σταθερές Lamé από το περιβάλλον μέσο, τότε υπάρχει κυματική διάδοση και στο εσωτερικό του. Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται η συνέχεια τόσο του πεδίου μετατοπίσεων όσο και του πεδίου των τάσεων στο σύνορο:

$$\mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.60)$$

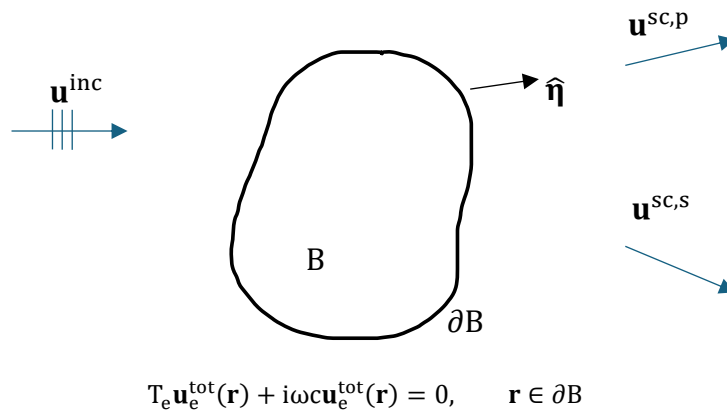
$$\mathbf{T}_e \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.61)$$

iv) Σκεδαστής με συνθήκη εμπέδησης (impedance)

Στην περίπτωση αυτή ο σκεδαστής είναι μη διαπερατός και μερικώς επικαλυμμένος, οπότε στο σύνορο του ισχύει συνθήκη εμπέδησης τύπου Robin. Η συνθήκη αυτή περιγράφει την αναλογία μεταξύ της μετατόπισης και της τάσης και διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathbf{T}_e \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = 0, \quad c > 0, \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.62)$$

Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει κυματική διάδοση στο εσωτερικό του σκεδαστή.



Σχήμα 2.4: Σκεδαστής με συνθήκη εμπέδησης στο σύνορο του

Οι συνθήκες ακτινοβολίας, σύμφωνα με τους Kupradze και Arens, ισχύουν για το διαμήκες και εγκάρσιο τμήμα του σκεδασμένου πεδίου και περιγράφονται από τις σχέσεις (2.29) και (2.30). Αυτές ισχύουν για όλες τις διευθύνσεις του διανύσματος \mathbf{r} με μέτρο $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$.

Εκτός από τις συνθήκες στο άπειρο, η καλή τοποθέτηση των προβλημάτων σκέδασης απαιτεί και ομαλή επιφάνεια ∂B του σκεδαστή. Συγκεκριμένα, η επιφάνεια ∂B πρέπει να είναι τύπου *Lyapunov* (βλέπε σελ. 27), δηλαδή:

- Ο κάθετος διανυσματικός φορέας να στρέφεται συνεχώς κατά μήκος της επιφάνειας,
- Να μην υπάρχουν αιχμηρές γωνίες ή πτυχώσεις που να εγκλωβίζουν το σκεδασμένο κύμα.

Τα προβλήματα σκέδασης που περιγράψαμε μπορούν να μετατραπούν σε ολοκληρωτικές μορφές, στις οποίες ενσωματώνονται τόσο οι διαφορικές εξισώσεις όσο και οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες ακτινοβολίας, με τη χρήση *ολοκληρωτικών τελεστών*. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις για το σκεδαζόμενο πεδίο μπορούν να εξαχθούν άμεσα από τις σχέσεις (2.47) και (2.49).

2.5 Πλάτη σκέδασης.

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.22) και των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων για τις συναρτήσεις Hankel, προκύπτουν οι ακόλουθες ασυμπτωτικές σχέσεις [7, 28, 30]:

$$\tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.63)$$

$$\tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.64)$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Το δυαδικό $(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})$ στην (2.62) δηλώνει την ακτινική συμπεριφορά για το διαμήκες κομμάτι της θεμελιώδους λύσης $\tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ σε μακρινή απόσταση από τον σκεδαστή, ενώ το δυαδικό $(\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})$ στην (2.64) δηλώνει τον εφαπτομενικό χαρακτήρα για το εγκάρσιο κομμάτι της $\tilde{\Gamma}$ στην περιοχή ακτινοβολίας [7, 28, 30].

Για να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $T^{(r')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, υπολογίζουμε πρώτα τις ασυμπτωτικές μορφές των $\nabla_{\mathbf{r}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ και $\nabla_{\mathbf{r}'} \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Έτσι μετά από πράξεις βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} ik_p e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} \\ &\quad - \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} ik_s e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\hat{\mathbf{r}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} ik_p e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}) \quad (2.66)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} ik_s e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}) \quad (2.67)$$

Η ασυμπτωτική μορφή της $T^{(r')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 T^{(r')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 2\mu \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \lambda \hat{\boldsymbol{\eta}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 &\quad + \mu \hat{\boldsymbol{\eta}} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 &= -\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot (\lambda \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi}k_p} ik_p e^{-ik_p \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} \\
 &\quad - \mu [2(\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}' \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi}k_s} ik_s e^{-ik_s \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}) \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

με $r \rightarrow \infty$. Με συστολή από αριστερά, με το ολικό πεδίο μετατοπίσεων πάνω στο σύνορο ∂B προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^{\text{tot}}(\mathbf{r}') \cdot T^{(r')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k_p (\mathbf{u}^{\text{tot}}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}}') \\
 &\quad : \left(\frac{\lambda \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{4\mu} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) e^{-ik_p \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} H_0^{(1)}(k_p r) \hat{\mathbf{r}} \\
 &\quad + k_s [2(\mathbf{u}^{\text{tot}}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}}') : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\mathbf{u}^{\text{tot}}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\eta}}') \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] \\
 &\quad e^{-ik_s \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} H_0^{(1)}(k_s r) \hat{\boldsymbol{\theta}} + O(r^{-3/2}) \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

με $r \rightarrow \infty$. Αντικαθιστώντας στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της εξωτερικής λύσης, θα πάρουμε την ασυμπτωτική μορφή του σκεδασμένου πεδίου:

$$\mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{u}_\infty^{\text{p}}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) \frac{e^{ik_e^{\text{p}} r}}{\sqrt{r}} + \mathbf{u}_\infty^{\text{s}}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) \frac{e^{ik_e^{\text{s}} r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}) \quad (2.70)$$

$r \rightarrow \infty$, με $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{d}}$ ή $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$.

Οι συντελεστές των όρων $\frac{e^{ik_e^{\text{p}} r}}{\sqrt{r}}$, $\frac{e^{ik_e^{\text{s}} r}}{\sqrt{r}}$ είναι τα αντίστοιχα πλάτη σκέδασης. Τα $\mathbf{u}_\infty^{\text{p}}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}})$, $\mathbf{u}_\infty^{\text{s}}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}})$ είναι οι πιο σημαντικές συναρτήσεις και παίζουν βασικό ρόλο στη θεωρία ελαστικής σκέδασης [12, 18, 21]. Στην περιοχή ακτινοβολίας έχουμε όλες τις πληροφορίες σχετικά με τον σκεδάστη, τόσο για την γεωμετρία του σκεδαστή όσο και για τις φυσικές του ιδιότητες.

Για το πρόβλημα **Dirichlet** το διαμήκες και το εγκάρσιο πλάτος σκέδασης δίνονται από τις σχέσεις [28]:

$$\mathbf{u}_{\infty}^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^p}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \int_{\partial B} e^{-ik_e^p \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} T_e^{(\mathbf{r}')} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (2.71)$$

$$\mathbf{u}_{\infty}^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^s}} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_{\partial B} e^{-ik_e^s \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} T_e^{(\mathbf{r}')} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (2.72)$$

Για το πρόβλημα **Neumann** το διαμήκες και το εγκάρσιο πλάτος σκέδασης δίνονται από τις σχέσεις [28]:

$$\mathbf{u}_{\infty}^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^p}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\partial B} e^{-ik_e^p \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (2.73)$$

$$\mathbf{u}_{\infty}^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^s}} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_{\partial B} e^{-ik_e^s \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (2.74)$$

Για το πρόβλημα **Robin** το διαμήκες και το εγκάρσιο πλάτος σκέδασης δίνονται από τις σχέσεις [43, 44]:

$$\mathbf{u}_{\infty}^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^p}} e^{-ik_e^p \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \int_{\partial B} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}') [-i\omega c (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot (\lambda \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) ik_e^p] ds(\mathbf{r}') \quad (2.75)$$

$$\mathbf{u}_{\infty}^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^s}} e^{-ik_e^s \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} \int_{\partial B} \mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}') [-i\omega c (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \mu (2(\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\eta}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})) \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} ik_e^s] ds(\mathbf{r}') \quad (2.76)$$

2.6 Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα προβλήματα με τη χρήση συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Ορισμός 2.7.1. Μια διανυσματική συνάρτηση ονομάζεται ***a-Hölder-συνεχής*** αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές $C, \alpha > 0$ ώστε να ισχύει:

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}')\| = C\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^\alpha$$

και για $\alpha = 1$ ονομάζεται ***Hölder-συνεχής ή Lipschitz-συνεχής***.

Με τη βοήθεια της θεμελιώδους λύσης $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, όπως αυτή δίνεται κατά Kupradze, ορίζονται τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος.

Θεωρούμε μια Hölder συνεχή διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi}$ ορισμένη πάνω στο σύνορο ∂B . Ορίζουμε το ‘δυναμικό απλού στρώματος’ με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}$ τη διανυσματική συνάρτηση:

$$(S_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.77)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι μια παντού συνεχής λύση της φασματικής εξίσωσης Navier, που ικανοποιεί επιπλέον τις συνθήκες ακτινοβολίας (2.29) και (2.30). Όμως, η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων πάνω στη συνάρτηση παρουσιάζει στο σύνορο ασυνέχειες.

Το ‘δυναμικό διπλού στρώματος’ ορίζεται ως εξής:

$$(D_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} T_{e,i}^{(\mathbf{r}')}\tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.78)$$

Η συνάρτηση $(D\boldsymbol{\varphi})$ είναι επίσης λύση της φασματικής εξίσωσης Navier, ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze, αλλά είναι ασυνεχής πάνω στο σύνορο.

Επιπλέον, εισάγουμε τον ακόλουθο συνοριακό ολοκληρωτικό τελεστή:

$$(K_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial B} T_{e,i}^{(\mathbf{r})} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.79)$$

Γράφουμε τις συνθήκες διαπήδησης για τα δυναμικά διπλού στρώματος και τη δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων στα δυναμικά απλού στρώματος ως εξής:

$$\left[T_{e,i}^{(\mathbf{r})} (S_{e,i}\boldsymbol{\varphi}) \right]_{\pm}(\mathbf{r}) = [(\mp I + K_{e,i})\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.80)$$

$$\left[(D_{e,i}\boldsymbol{\varphi}) \right]_{\pm}(\mathbf{r}) = [(\pm I + \bar{K}_{e,i}^*)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.81)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το πρόσημο «+» αντιστοιχεί στο $\mathbf{r} \rightarrow \partial B$ από B_e , ενώ το «-» στο $\mathbf{r} \rightarrow \partial B$ από B_i . Η άνω παύλα δηλώνει τον συζυγή μιγαδικό, ενώ το «*» συμβολίζει τον L^2 -συζυγή [5]. Παρατηρούμε ότι η τιμή του δυναμικού διπλού στρώματος είναι:

$$(D_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = (\bar{K}_{e,i}^*\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.82)$$

Βλέπουμε ότι η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων στο δυναμικό διπλού στρώματος $[T(D\boldsymbol{\varphi})]_+$, για $\mathbf{r} \rightarrow \partial B$ από B_e , ισούται με $[T(D\boldsymbol{\varphi})]_-$ για $\mathbf{r} \rightarrow \partial B$ από B_i (θεώρημα Lyapunov-Tauber).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Dirichlet και του προβλήματος με συνοριακή συνθήκη εμπέδησης (τύπου Robin).

i) Το πρόβλημα Dirichlet.

Μοναδικότητα λύσης: Ισχύει η συνοριακή συνθήκη (2.58), δηλαδή:

$$\mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_e^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (*)$$

Εκφράζουμε το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r})$ ως συνδυασμό δυναμικών απλού και διπλού στρώματος [28]:

$$\mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) = (\mathbf{D}_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + \text{in}(\mathbf{S}_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i \quad (2.83)$$

όπου $n \neq 0$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη διαπήδησης (2.81) και τη σχέση (*) έχουμε [5]:

$$[(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}_e^* + \text{in}\mathbf{S}_e) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_e^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.84)$$

Θα δείξουμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (2.84) είναι μοναδικά επιλύσιμη για όλες τις τιμές του ω^2 . Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι η αντίστοιχη ομογενής συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση της (2.84) έχει μοναδική λύση τη μηδενική. Έστω $\boldsymbol{\varphi}$ η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:

$$[(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}_e^* + \text{in}\mathbf{S}_e) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.85)$$

Η \mathbf{u}_e^{sc} , όπως ορίστηκε από την (2.83), επιλύει το εξωτερικό ομογενές πρόβλημα Dirichlet, επομένως $\mathbf{u}_e^{sc} = 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i$. Από τις συνθήκες διαπήδησης του δυναμικού διπλού στρώματος (2.81) έχουμε:

$$(\mathbf{D}_i \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = [(-\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}_i^*) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) \quad (2.86)$$

$$(\mathbf{D}_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = [(+\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}_e^*) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) \quad (2.87)$$

Το δυναμικό απλού στρώματος είναι συνεχής συνάρτηση, επομένως:

$$(\mathbf{S}_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = (\mathbf{S}_i \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \quad (2.88)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2.86), (2.87) θα πάρουμε:

$$(\mathbf{D}_i \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) - (\mathbf{D}_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = [(-\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}_i^*) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) - [(+\mathbf{I} + \bar{\mathbf{K}}_e^*) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r})$$

και ισοδύναμα:

$$(\mathbf{D}_i \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) - (\mathbf{D}_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = -2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \quad (2.89)$$

Να σημειώσουμε ότι πάνω στο σύνορο ∂B είναι φυσικά $\bar{\mathbf{K}}_i^* = \bar{\mathbf{K}}_e^* = \bar{\mathbf{K}}^*$.

Εκφράζουμε το πεδίο $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$ ως συνδυασμό δυναμικών απλού και διπλού στρώματος:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = (D_i\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + \text{in}(S_i\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_i \quad (2.90)$$

όπου $n \neq 0$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Η (2.90), λόγω των (2.88), (2.89) γράφεται:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = (D_e\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + \text{in}(S_e\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \quad (2.91)$$

και επειδή $(D_e\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + \text{in}(S_e\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i$, προκύπτει τελικά:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = -2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.92)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τελεστή επιφανειακής τάσης στη (2.90) και παίρνουμε:

$$\left[T_i^{(\mathbf{r})} \mathbf{u}_i \right](\mathbf{r}) = \left[T_i^{(\mathbf{r})} (D_i\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + \text{in} \left[T_i^{(\mathbf{r})} (S_i\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_i \quad (2.93)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Lyapunov-Tauber είναι:

$$\left[T_e^{(\mathbf{r})} (D_e\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = \left[T_i^{(\mathbf{r})} (D_i\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) \quad (2.94)$$

Από τη συνθήκη διαπήδησης για τη δράση του τελεστή επιφανειακής τάσης στα δυναμικά απλού στρώματος (2.80) έχουμε:

$$\left[T_e^{(\mathbf{r})} (S_e\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = [(-I + K_e)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.95)$$

$$\left[T_i^{(\mathbf{r})} (S_i\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = [(+I + K_i)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.96)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2.95), (2.96) θα πάρουμε:

$$\left[T_i^{(\mathbf{r})} (S_i\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) - \left[T_e^{(\mathbf{r})} (S_e\boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = [(+I + K_i)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) - [(-I + K_e)\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r})$$

και ισοδύναμα:

$$\left[T_i^{(r)}(S_i \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) - \left[T_e^{(r)}(S_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$$

ή

$$\left[T_i^{(r)}(S_i \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = \left[T_e^{(r)}(S_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \quad (2.97)$$

Ομοίως πάνω στο σύνορο ∂B είναι $K_i = K_e = K$.

Η (2.93), λόγω των (2.94), (2.97) γράφεται:

$$\left[T_i^{(r)} \mathbf{u}_i \right](\mathbf{r}) = \left[T_e^{(r)}(D_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + \text{in} \left[\left[T_e^{(r)}(S_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \right]$$

ή ισοδύναμα:

$$\left[T_i^{(r)} \mathbf{u}_i \right](\mathbf{r}) = \left[T_e^{(r)}(D_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + \text{in} \left[T_e^{(r)}(S_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + 2\text{in} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \quad (2.98)$$

Εφόσον $\mathbf{u}_e^{sc} = 0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i$, θα είναι:

$$\left[T_e^{(r)} \mathbf{u}_e^{sc} \right](\mathbf{r}) = \left[T_e^{(r)}(D_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) + \text{in} \left[T_e^{(r)}(S_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = 0 \quad (2.99)$$

Επομένως, η (2.98) λόγω της (2.99) καταλήγει:

$$\left[T_i^{(r)} \mathbf{u}_i \right](\mathbf{r}) = 2\text{in} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.100)$$

όπου \mathbf{u}_i είναι το πεδίο μετατοπίσεων στο B_i .

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το δεύτερο τύπο του Betti (2.25), για $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$ στο B_i και $\mathbf{u}_i = -2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$, $T\mathbf{u}_i = 2\text{in} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ με $\mathbf{r} \in \partial B$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} - \int_{B_i} \mathbf{u}_i \cdot \rho \omega^2 \mathbf{u}_i \, dv &= \int_{\partial B} (-2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})) \cdot 2\text{in} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \, ds - \int_{B_i} W(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \, dv \\ -4 \int_{\partial B} \text{in} |\boldsymbol{\varphi}|^2 \, ds &= - \int_{B_i} \rho \omega^2 |\mathbf{u}_i|^2 \, dv + \int_{B_i} W(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \, dv \end{aligned} \quad (2.101)$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος της εξίσωσης (2.101) έχουμε:

$$-4 \int_{\partial B} n |\boldsymbol{\varphi}|^2 ds = -2\rho \operatorname{Re} \omega \operatorname{Im} \omega \int_{B_i} |\mathbf{u}_i|^2 dv \quad (2.102)$$

Υποθέτοντας ότι $\operatorname{Re} \omega \geq 0$ και $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ [5], η ομογενής εξίσωση έχει μοναδική λύση τη μηδενική, δηλαδή $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ και συνεπώς σύμφωνα με τη θεωρία Riesz-Fredholm η μη ομογενής εξίσωση (2.84) έχει μοναδική λύση.

Ύπαρξη λύσης: Για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης για την ολοκληρωτική εξίσωση, υποθέτουμε ότι η ω_0^2 δεν είναι ιδιοτιμή του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet. Με το δείκτη 0 δηλώνουμε ότι η γωνιακή συχνότητα που εμφανίζεται στη θεμελιώδη δυαδική συνάρτηση Green είναι σταθερή, δηλ. $\omega^2 = \omega_0^2$ [28]. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει τελεστής M_0^{-1} [28], ο οποίος δίνεται από:

$$M_0^{-1} = -S_0(I - \bar{K}^*)_0^{-1}(I + \bar{K}^*)_0^{-1}$$

Ο τελεστής M_0^{-1} είναι συμπαγής τελεστής, ως το γινόμενο του συμπαγούς τελεστή S_0 με τους φραγμένους τελεστές $(I - \bar{K}^*)_0^{-1}$ και $(I + \bar{K}^*)_0^{-1}$ [5]. Εφαρμόζοντας τον M_0^{-1} στην εξίσωση (2.84) προκύπτει:

$$M_0^{-1}(I + \bar{K}_e^* + \operatorname{in}S_e)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) = -M_0^{-1}\mathbf{u}_e^{\operatorname{inc}}(\mathbf{r})$$

Εφόσον ο τελεστής M_0^{-1} είναι συμπαγής και ο $A := I + \bar{K}_e^* + \operatorname{in}S_e$ είναι φραγμένος τότε ο $M_0^{-1}A$ θα είναι επίσης συμπαγής. Σύμφωνα με τη θεωρία Riesz-Fredholm η εξίσωση έχει λύση, επομένως και το αρχικό πρόβλημα Dirichlet έχει λύση.

ii) Το πρόβλημα Robin.

Μοναδικότητα λύσης: Ισχύει η συνοριακή συνθήκη (2.62), δηλαδή:

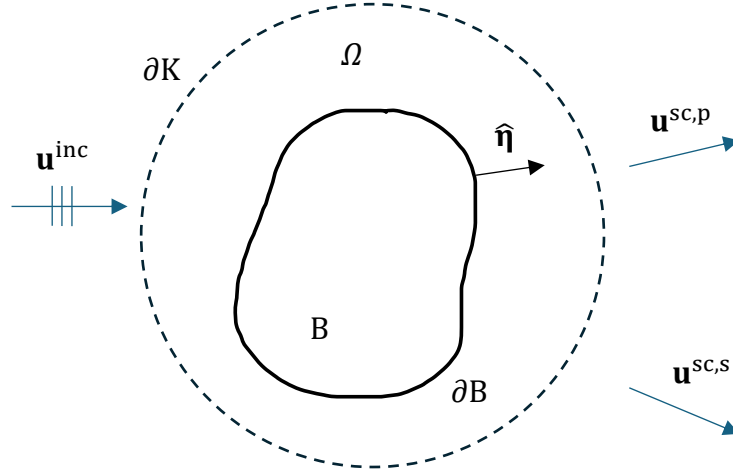
$$T_e \mathbf{u}_e^{\operatorname{tot}}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{\operatorname{tot}}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial B$$

Θεωρούμε, λοιπόν, ότι:

$$T_e \mathbf{u}_e^{\operatorname{sc}}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{\operatorname{sc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.104)$$

όπου

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -T_e \mathbf{u}_e^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - i\omega c \mathbf{u}_e^{\text{inc}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.105)$$



Σχήμα 2.5: Το πρόβλημα Robin

Επίσης, θεωρούμε κύκλο ∂K ακτίνας R , ο οποίος περικλείει τον σκεδαστή. Έστω \mathbf{u} λύση της ομογενούς εξίσωσης $T_e \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \partial B$ του προβλήματος Robin στο χωρίο Ω μεταξύ του συνόρου ∂B του σκεδαστή και του κύκλου ∂K . Εφαρμόζουμε τον 1^ο τύπο του Betti στο χωρίο Ω και παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} dv = \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{v} ds - \int_{\Omega} W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dv \quad (2.106)$$

όπου για $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}$ και $\partial \Omega = \partial B \cup \partial K$ η (2.106) γράφεται:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \bar{\mathbf{u}} dv + \int_{\Omega} W(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds + \int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds' \quad (2.107)$$

Από τη σχέση (2.19) παίρνουμε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2) \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{ή} \quad \Delta^* \bar{\mathbf{u}} = -\rho\omega^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (2.108)$$

Καθώς και:

$$T \bar{\mathbf{u}} = -i\omega c \bar{\mathbf{u}} \quad (2.109)$$

Επίσης, $\int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds' = 0$ καθώς $R \rightarrow \infty$ και η \mathbf{u}^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Kurgradze, η οποία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την καλή

τοποθέτηση του προβλήματος [28]. Αντικαθιστούμε τις (2.108) και (2.109) στην (2.107) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (-\rho\omega^2 \bar{\mathbf{u}}) dv + \int_{\Omega} W(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) dv &= \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot (-i\omega c \bar{\mathbf{u}}) ds + 0 \Rightarrow \\ -\rho\omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} dv + \int_{\Omega} W(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) dv + i\omega c \int_{\partial B} |\bar{\mathbf{u}}|^2 ds &= 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος στα δύο μέλη της (2.97) έχουμε:

$$-0 + 0 + \omega c \int_{\partial B} |\bar{\mathbf{u}}|^2 ds = 0 \Rightarrow |\bar{\mathbf{u}}|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0 \text{ στο } \partial B$$

Σύμφωνα με το λήμμα Relich θα είναι $\mathbf{u} = 0$ στο Ω , επομένως η ομογενής εξίσωση $T_e \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \partial B$ του προβλήματος Robin στο χωρίο Ω έχει λύση μόνο την τετριμμένη, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία Fredholm έχουμε μοναδική λύση $\mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r})$ της μη ομογενούς (2.104) και κατ' επέκταση μοναδική λύση $\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r})$.

Ύπαρξη λύσης: Για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης του προβλήματος Robin, θεωρούμε ότι η λύση για το σκεδασμένο πεδίο είναι της μορφής:

$$\mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) = (D_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + ik(S_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.111)$$

όπου $k \neq 0$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός και $\boldsymbol{\varphi}$ άγνωστη πυκνότητα που θέλουμε να προσδιορίσουμε. Η \mathbf{u}_e^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Kupradze και αποτελεί λύση της φασματικής εξίσωσης Navier.

Θεώρημα 2.1. *Επί του λείου \mathbb{C}^∞ συνόρου ∂B ισχύουν τα παρακάτω:*

$$(S_i \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = (S_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = (H \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.112)$$

$$\left[T_i^{(r)}(S_i \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = [(+I + K_i) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.113)$$

$$\left[T_e^{(r)}(S_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = [(-I + K_e) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.114)$$

$$(D_i \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = [(-I + \bar{K}_i^*) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.115)$$

$$(D_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = [(\mathbf{I} + \bar{K}_e^*) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.116)$$

όπου:

$$(H \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) := \int_{\partial B} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.117)$$

$$(K_{e,i} \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) := \int_{\partial B} T_{e,i}^{(\mathbf{r})} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.118)$$

$$(K_{e,i}^* \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) := \int_{\partial B} \left[T_{e,i}^{(\mathbf{r}')} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') \right]^T ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.119)$$

$$(L \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) := \left[T_i^{(\mathbf{r})} (D_i \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}) = \left[T_e^{(\mathbf{r})} (D_e \boldsymbol{\varphi}) \right](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.120)$$

Το **Θεώρημα 2.1** αποδεικνύεται στο [38].

Η σχέση (2.104) γράφεται λοιπόν:

$$T_e \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r})$$

όπου λόγω της (2.111) γίνεται:

$$\left[T_e^{(\mathbf{r})} [(D_e \boldsymbol{\varphi}) + ik(S_e \boldsymbol{\varphi})] \right](\mathbf{r}) + i\omega c [(D_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + ik(S_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r})] = \mathbf{h}(\mathbf{r})$$

ή ισοδύναμα:

$$(L \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + ik[(-\mathbf{I} + K_e) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) + i\omega c [(\mathbf{I} + \bar{K}_e^* + ikH) \boldsymbol{\varphi}](\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (2.121)$$

Θεωρούμε τον τελεστή:

$$P := L + ik(-\mathbf{I} + K_e) + i\omega c (\mathbf{I} + \bar{K}_e^* + ikH) \quad (2.122)$$

Ο τελεστής αυτός αποδεικνύεται αντιστρέψιμος [38], οπότε σύμφωνα με τη θεωρία Riesz-Fredholm υπάρχει λύση με συνεχή εξάρτηση από τα δεδομένα και

είναι της μορφής που παρουσιάζεται στο **Θεώρημα 2.2**, άρα υπάρχει λύση και για την $\mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_e^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r})$.

Θεώρημα 2.2. Έστω ∂B λείο σύνορο. Εάν η $\mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i$ αποτελεί λύση της φασματικής εξίσωσης Navier, τότε μπορεί να παρασταθεί μοναδικά στη μορφή:

$$\mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = [D_e(P^{-1}\mathbf{h})](\mathbf{r}) + ik[S_e(P^{-1}\mathbf{h})](\mathbf{r}) \quad (2.123)$$

όπου P^{-1} ο αντίστροφος του τελεστή P και $T_e \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{c} \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \partial B$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 παρουσιάζεται στο [37].

Κεφάλαιο 3

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

Τα ευθέα προβλήματα σκέδασης για μερικώς επικαλυμμένους σκεδαστές στη γραμμική ελαστικότητα οδηγούν σε εσωτερικά και εξωτερικά μεικτά προβλήματα εμπέδησης για τις εξισώσεις ελαστικών κυματικών πεδίων στη μόνιμη κατάσταση. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος και ανάγουμε τα μικτά προβλήματα εμπέδησης σε ισοδύναμες ψευδοδιαφορικές εξισώσεις. Επίσης, διερευνούμε μοναδικότητα των λύσεων κοντά στις καμπύλες όπου αλλάζουν οι συνοριακές συνθήκες και καθιερώνουμε σχεδόν βέλτιστα αποτελέσματα Hölder ομαλότητας.

3.1 Το Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τα δισδιάστατα μεικτά προβλήματα σκέδασης (εσωτερικά και εξωτερικά) ελαστικών κυματικών πεδίων στη μόνιμη κατάσταση. Θεωρούμε ένα ελαστικό σώμα που καταλαμβάνει είτε ένα εσωτερικό φραγμένο χωρίο είτε το συμπλήρωμά του. Υποθέτουμε ότι το απλό συνεκτικό σύνορο του χωρίου αυτού διαιρείται σε δύο τμήματα, ένα Dirichlet (άκαμπτο) και ένα Robin (εμπέδησης). Στο τμήμα Dirichlet του συνόρου δίνεται το διάνυσμα μετατόπισης, ενώ στο τμήμα Robin ένας συγκεκριμένος συνδυασμός — που εκφράζει τη σχέση ανάμεσα στο διάνυσμα της μετατόπισης και το διάνυσμα τάσης. Το τελευταίο οφείλεται στην επικάλυψη του τμήματος Robin του συνόρου με υλικό σταθερής επιφανειακής εμπέδησης. Όπως συνήθως, η εμπέδηση εκφράζει (ένταση \times ακαμψία) σε σχέση με ανάκλαση, περίθλαση κ.λπ., και μετρά την αντίθεση μεταξύ των δύο μέσων.

Εμπόδια που χαρακτηρίζονται από συνοριακές συνθήκες του παραπάνω τύπου συχνά αποκαλούνται *μερικώς επικαλυμμένα*, και υπάρχει πολύ έντονη έρευνα για τα αντίστροφα προβλήματα, κυρίως στην ακουστική και στην ηλεκτρομαγνητική. Εφαρμογές που αφορούν επικαλυμμένα εμπόδια περιλαμβάνουν, π.χ., τον εντοπισμό ενός αντικειμένου στο υπέδαφος από μετρήσεις του ολικού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, το πρόβλημα ενός επικαλυμμένου καλωδίου ή σωλήνα που είναι μερικώς επικαλυμμένο με διηλεκτρικό, και πολλά άλλα.

Είναι σαφές ότι τέτοια προβλήματα οριακών τιμών περιγράφουν (από μαθηματική σκοπιά) προβλήματα σκέδασης. Για τη μελέτη της επιλυσιμότητας αυτών των μεικτών προβλημάτων στην ελαστικότητα χρησιμοποιούμε μια προσέγγιση με συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Τα βασικά προβλήματα Dirichlet και Neumann της θεωρίας ελαστικότητας έχουν μελετηθεί εκτενώς από τον Kupradze με τη μέθοδο των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος [4]. Συγκεκριμένα, διατύπωσε τις συνθήκες ακτινοβολίας στη θεωρία της ελαστικότητας (γνωστές στη βιβλιογραφία ως *συνθήκες ακτινοβολίας Sommerfeld–Kupradze*) και απέδειξε θεωρήματα μοναδικότητας για προβλήματα

ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση σε άπειρα χωρία με συμπαγή σύνορα. Για να θεμελιώσει την ύπαρξη κλασικών λύσεων σε λεία χωρία κατασκεύασε το θεμελιώδη πίνακα που ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας Sommerfeld–Kupradze μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων, μελέτησε τις ιδιότητες των αντίστοιχων δυναμικών απλού και διπλού στρώματος για συνεχείς συναρτήσεις Hölder, και μετέτρεψε τα προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet και Neumann σε επιλύσιμες ολοκληρωτικές εξισώσεις στο σύνορο του υπό μελέτη χωρίου. Δυστυχώς, αυτές οι εξισώσεις έχουν μετρήσιμο φάσμα που εξαρτάται από την παράμετρο της κυκλικής συχνότητας. Επομένως, οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις που προκύπτουν δεν είναι ισοδύναμες με τα αρχικά προβλήματα συνοριακών τιμών και δεν είναι επιλύσιμες για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητας. Μια τέτοια κατάσταση εμφανίζεται πάντοτε όταν εφαρμόζεται η ευθεία μέθοδος συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων σε προβλήματα σκέδασης, δηλαδή όταν οι λύσεις αναζητούνται στη μορφή δυναμικού απλού ή διπλού στρώματος. Για να μελετηθεί η επιλυσιμότητα των παραπάνω συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, πρέπει να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις (ιδιοδιανύσματα) των αντίστοιχων ομογενών ολοκληρωτικών εξισώσεων και των συζυγών τους.

Πρίν προχωρήσουμε στη διατύπωση του μεικτού προβλήματος, αναφέρουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 3.1.1. Η $D^\alpha \mathbf{u}$ καλείται α -οστή παράγωγος της \mathbf{u} αν ισχύει

$$\int_{B_e} \mathbf{u} D^\alpha \varphi \, d\mathbf{r} = (-1)^{|\alpha|} \int_{B_e} D^\alpha \mathbf{u} \varphi \, d\mathbf{r}$$

για όλες τις συναρτήσεις $\varphi \in C^\infty(B_e)$.

Ορισμός 3.1.2. Για χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ορίζουμε τον **χώρο Sobolev** $H^{k,p}(\Omega)$ ως το σύνολο

$$H^{k,p}(\Omega) = \{ \mathbf{u} : D^\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega) \text{ για όλα τα } \alpha \text{ με } 0 \leq |\alpha| \leq k \}$$

Ο χώρος $H^{1,2}(\Omega)$ είναι **χώρος Hilbert**.

Επίσης,

$$C^k(\Omega) \subset H^{k,2}(\Omega)$$

για φραγμένο Ω .

Ορισμός 3.1.3. Για χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ορίζουμε τον **τοπικό χώρο Sobolev** $H_{loc}^1(\Omega)$ ως το σύνολο

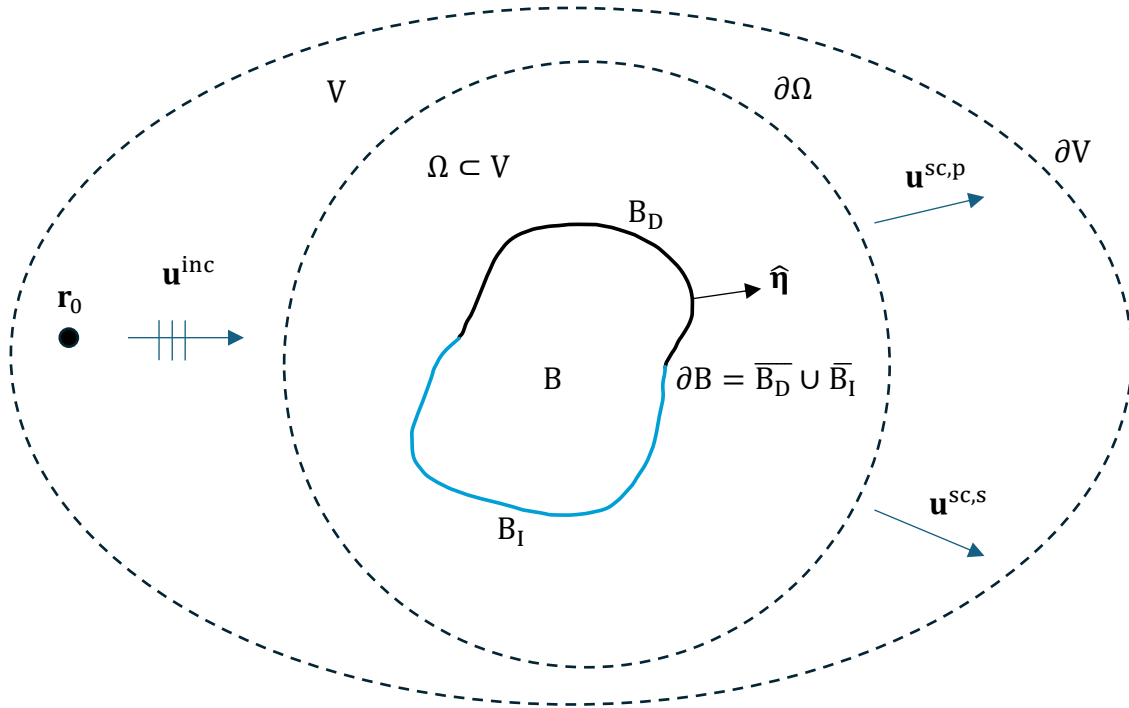
$$H_{loc}^1(\Omega) = \{u: u \in H^1(K) \text{ για κάθε συμπαγές } K \subset \Omega\}$$

3.2 Μαθηματική Μοντελοποίηση του Μεικτού Προβλήματος Σκέδασης.

Μελετάμε το δισδιάστατο ευθύ **μεικτό πρόβλημα σκέδασης**, στο οποίο επί του συνόρου του σκεδαστή ισχύουν δύο ή περισσότερες συνθήκες. Συγκεκριμένα, μελετάμε το πρόβλημα όπου ο σκεδαστής είναι μερικώς επικαλυμμένος και το μαθηματικό μοντέλο που το περιγράφει είναι ένα αντίστοιχο **μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών** (Μ.Π.Σ.Τ.) στο οποίο σε μέρος του συνόρου του σκεδαστή ισχύει συνθήκη Dirichlet, ενώ στο υπόλοιπο ισχύει συνθήκη Robin.

Θεωρούμε ένα ελαστικό μέσο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ εντός του οποίου βρίσκεται ένα χωρίο B (άκαμπτο εμπόδιο). Επίσης, υποθέτουμε ότι το B είναι μερικώς επικαλυμμένο και το σύνορο του ∂B , που θεωρούμε ότι είναι Lipschitz, αποτελείται από δύο μέρη: Το B_D που αντιστοιχεί σε σκληρό (Dirichlet) μέρος και το B_I αντιστοιχεί σε μη διαπερατό και επικαλυμμένο (Robin) μέρος, ώστε $\partial B = \overline{B_D} \cup \overline{B_I}$. Το χωρίο B θα αναφέρεται ως ο σκεδαστής και $\overline{B} = B \cup \partial B$. Επίσης, θεωρούμε ένα φραγμένο χωρίο V με ομαλό σύνορο ∂V , τέτοιο ώστε $\Omega \subset V$. Επιπλέον, το \hat{n} θα δηλώνει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε σημείο $x \in \partial B$.

Από μαθηματικής πλευράς, ένα πρόβλημα σκέδασης περιγράφεται από ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Στην περίπτωση μας, διατυπώνεται ως εξής:



Σχήμα 3.1: Το μεικτό πρόβλημα σκέδασης

Αν $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ το προσπίπτον κυματικό πεδίο που οφείλεται στη σημειακή πηγή στο σημείο $\mathbf{r}_0 \in V \setminus \bar{B}$, ζητείται διανυσματική λύση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in H_{loc}^1([\Omega \setminus \bar{B}] \cup (V \setminus \bar{\Omega}) \setminus \{\mathbf{r}_0\}) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{V})$, τέτοια ώστε:

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in [(\Omega \setminus \bar{B}) \cup (V \setminus \bar{\Omega})] \setminus \{\mathbf{r}_0\} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{V}) \quad (3.1)$$

όπου ο τελεστής Δ^* του Kupradze έχει οριστεί στην (2.18).

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in B_D \quad (3.2)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad c > 0, \quad \mathbf{r} \in B_I \quad (3.3)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{sc,p}(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_p \mathbf{u}^{sc,p}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (3.4)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{sc,s}(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_s \mathbf{u}^{sc,s}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

όπου $\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r})$ είναι το προσπίπτον κυματικό πεδίο που προέρχεται από την σημειακή πηγή $\mathbf{r}_0 \in V \setminus \bar{B}$ και $\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r})$ το αντίστοιχο σκεδασμένο πεδίο. Επίσης [37]:

$$\lambda(\mathbf{r}) = \begin{cases} \lambda_0, & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{V} \\ \lambda_1, & \mathbf{r} \in B \setminus \bar{\Omega} \\ \lambda_2, & \mathbf{r} \in \Omega \setminus \bar{B} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\mu(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_0, & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{V} \\ \mu_1, & \mathbf{r} \in B \setminus \bar{\Omega} \\ \mu_2, & \mathbf{r} \in \Omega \setminus \bar{B} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0, & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{V} \\ \rho_1, & \mathbf{r} \in B \setminus \bar{\Omega} \\ \rho_2, & \mathbf{r} \in \Omega \setminus \bar{B} \end{cases} \quad (3.9)$$

όπου θεωρούμε ότι:

$$\mu_j > 0, \quad \lambda_j + 2\mu_j > 0, \quad \rho_j > 0, \quad j = 0,1,2 \quad (3.10)$$

Είναι προφανές ότι στις διεπιφάνειες ασυνέχειας $\partial\Omega$ και ∂V πρέπει να επιβάλλουμε συνθήκες μετάβασης που απαιτούν τη συνέχεια των διανυσμάτων μετατόπισης και τάσης κατά μήκος αυτών των διεπιφανειών, δηλαδή τα μονόπλευρα εσωτερικά και εξωτερικά όρια των αντίστοιχων διανυσμάτων σε κάθε διεπιφάνεια πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους [37]:

$$\{\mathbf{u}\}^+ = \{\mathbf{u}\}^-, \quad \{\mathbf{T}\mathbf{u}\}^+ = \{\mathbf{T}\mathbf{u}\}^- \quad \text{στο } \partial\Omega \quad (3.11)$$

όπου, το σύμβολο $\{\cdot\}^+$ δηλώνει το όριο από το Ω , ενώ το $\{\cdot\}^-$ δηλώνει το όριο από το V , και

$$\{\mathbf{u}\}^+ = \{\mathbf{u}\}^-, \quad \{\mathbf{T}\mathbf{u}\}^+ = \{\mathbf{T}\mathbf{u}\}^- \quad \text{στο } \partial V \quad (3.12)$$

όπου, τώρα, το σύμβολο $\{\cdot\}^+$ δηλώνει το όριο από το V , ενώ το $\{\cdot\}^-$ δηλώνει το όριο από το $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{V}$.

Οι σχέσεις (3.2) και (3.3) συνθέτουν το μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνθήκη εμπέδησης στο σύνορο ∂B του σκεδαστή. Οι συνθήκες ακτινοβολίας Sommerfeld-Kupradze περιγράφονται από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) και το διάνυσμα \mathbf{u} μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα μετα-αρμονικών διανυσμάτων, των λεγόμενων διαμήκων \mathbf{u}^p και εγκάρσιων \mathbf{u}^s [37]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s, \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{u}^p + k_{j,p}^2 \mathbf{u}^p = 0 \\ \Delta \mathbf{u}^s + k_{j,s}^2 \mathbf{u}^s = 0 \end{cases},$$

$$k_{j,p} = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{\lambda_j + 2\mu_j}}, \quad k_{j,s} = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{\mu_j}}, \quad j = 0,1,2 \quad (3.13)$$

3.3 Καλή Τοποθέτηση του αντίστοιχου Μεικτού Προβλήματος Συνοριακών Τιμών.

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, για να είναι καλά τοποθετημένο το πρόβλημα απαιτούνται τα παρακάτω:

α) Ομαλότητα του συνόρου του σκεδαστή. Το σύνορο του σκεδαστή πρέπει να είναι σύνορο Lyapunov, το οποίο αποτελεί και την ελάχιστη απαίτηση ομαλότητας που χρειάζεται για την επίλυση του προβλήματος. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα θα ισχύουν και για C^∞ σύνορα.

β) Επιβολή της συνθήκης ακτινοβολίας. Η συνθήκη ακτινοβολίας καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο το σκεδασμένο κύμα απομακρύνεται από τον σκεδαστή και είναι θεμελιώδης για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του ευθέως προβλήματος.

γ) Μοναδικότητα λύσης. Η μοναδικότητα της λύσης σημαίνει ότι το μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις για τα ίδια δεδομένα. Δηλαδή, αν δύο διανυσματικά πεδία ικανοποιούν την εξίσωση Navier, τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet–Robin και τη συνθήκη ακτινοβολίας, τότε ταυτίζονται. Η απόδειξη βασίζεται συνήθως σε ενεργειακές ταυτότητες (τύποι Betti) και στη συνθήκη ακτινοβολίας Kupradze, η οποία αποκλείει μη φυσικές λύσεις που “εισέρχονται” από το άπειρο. Η μοναδικότητα αποτελεί βασική προϋπόθεση της καλής τοποθέτησης.

δ) Ύπαρξη λύσης. Η ύπαρξη διασφαλίζει ότι για κάθε επιτρεπτό σύνολο δεδομένων (συνοριακές συναρτήσεις, προσπίπτον κύμα κ.λπ.) υπάρχει τουλάχιστον μία λύση του προβλήματος. Στο πλαίσιο της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, η ύπαρξη ανάγεται στην επιλυσιμότητα της αντίστοιχης συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης, συνήθως μέσω της θεωρίας Fredholm σε κατάλληλους χώρους Sobolev.

ε) Ευστάθεια λύσης. Η ευστάθεια εκφράζει το γεγονός ότι μικρές μεταβολές στα δεδομένα του προβλήματος (π.χ. στις συνοριακές συναρτήσεις ή στο προσπίπτον πεδίο) προκαλούν μικρές μεταβολές στη λύση. Με άλλα λόγια, η απεικόνιση “δεδομένα → λύση” είναι συνεχής μεταξύ κατάλληλων χώρων Sobolev. Η ιδιότητα αυτή είναι ουσιώδης τόσο για τη μαθηματική θεμελίωση όσο και για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος, διότι εξασφαλίζει ότι το μοντέλο είναι σταθερό ως προς σφάλματα ή προσεγγίσεις. Η ευστάθεια, μαζί με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα, ολοκληρώνει τις προϋποθέσεις καλής τοποθέτησης κατά Hadamard.

Η καλή τοποθέτηση μεικτών προβλημάτων συνοριακών τιμών με συνθήκες Dirichlet–Robin για την εξίσωση Navier έχει μελετηθεί διεξοδικά στη βιβλιογραφία, τόσο για ομαλά όσο και για Lipschitz σύνορα. Συγκεκριμένα, αναφέρουμε την εργασία [38], όπου αποδεικνύεται η μοναδικότητα, η ύπαρξη και η ευστάθεια των λύσεων σε κατάλληλους χώρους Sobolev.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τη **μοναδικότητα** και την **ύπαρξη** λύσης του μεικτού προβλήματος, ενώ θα αναφερθούμε και στη συνεχή εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα, δηλαδή στην ευστάθεια της λύσης στην περίπτωση σύνορου C^∞ και Lyapunov, αναζητώντας λύσεις $\mathbf{u} \in H_{loc}^1$.

Μοναδικότητα λύσης: Θεωρούμε, λοιπόν, ότι:

$$\mathbf{T}_e \mathbf{u}_e^{SC}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{SC}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_I \quad (3.14)$$

Επίσης, θεωρούμε ότι ο κύκλος $\partial\Omega$, ο οποίος περικλείει τον σκεδαστή, έχει ακτίνα R . Υποθέτουμε \mathbf{u} λύση της ομογενούς εξίσωσης $T_e \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in B_I$ του προβλήματος Robin στο χωρίο μεταξύ του συνόρου ∂B του σκεδαστή και του κύκλου $\partial\Omega$, έστω Ω_R . Εφαρμόζουμε τον 1^ο τύπο του Betti στο χωρίο Ω_R και παίρνουμε:

$$\int_{\Omega_R} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} dv = \int_{\partial\Omega_R} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{v} ds - \int_{\Omega_R} W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dv \quad (3.15)$$

όπου για $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}$ και $\partial\Omega_R = \partial B \cup \partial\Omega$, δηλαδή $\partial\Omega_R = B_D \cup B_I \cup \partial\Omega$, η (3.15) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \bar{\mathbf{u}} dv + \int_{\Omega_R} W(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) dv = \\ & = \int_{B_I} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds + \int_{B_D} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds' \end{aligned} \quad (3.16)$$

Είναι $\int_{B_D} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds = 0$, διότι στο B_D ισχύει η συνθήκη Dirichlet. Επίσης, $\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \bar{\mathbf{u}} ds' = 0$ καθώς $R \rightarrow \infty$ και η \mathbf{u}^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Kurgradze, η οποία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος [5]. Επομένως, η σχέση (3.16) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} \mathbf{u} \cdot (-\rho\omega^2 \bar{\mathbf{u}}) dv + \int_{\Omega_R} W(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) dv = \int_{B_I} \mathbf{u} \cdot (-i\omega c \bar{\mathbf{u}}) ds + 0 \Rightarrow \\ & -\rho\omega^2 \int_{\Omega_R} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} dv + \int_{\Omega_R} W(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) dv + i\omega c \int_{B_I} |\bar{\mathbf{u}}|^2 ds = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος στα δύο μέλη της (3.17) έχουμε:

$$-0 + 0 + \omega c \int_{B_I} |\bar{\mathbf{u}}|^2 ds = 0 \Rightarrow |\bar{\mathbf{u}}|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0 \text{ στο } B_I$$

όπως επίσης και $\mathbf{u} = 0$ στο B_D από συνθήκη Dirichlet. Επομένως, είναι $\mathbf{u} = 0$ σε όλο το ∂B . Σύμφωνα με το λήμμα Relich θα είναι $\mathbf{u}=0$ στο Ω_R , επομένως η ομογενής εξίσωση του προβλήματος Robin στο χωρίο Ω_R έχει λύση μόνο την τετριμμένη,

οπότε σύμφωνα με τη θεωρία Fredholm έχουμε μοναδική λύση $\mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r})$ της μη ομογενούς (3.14) και κατ' επέκταση μοναδική λύση $\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r})$.

Ύπαρξη λύσης: Για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης του μεικτού προβλήματος, ακολουθούμε τα αντίστοιχα βήματα με αυτά του προβλήματος Robin. Θεωρούμε, αρχικά, την \mathbf{h}_0 ως μια επέκταση της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{h} από το B_I σε ολόκληρο το ∂B , η οποία διατηρεί τον συναρτησιακό χώρο. Έτσι, μια αυθαίρετη επέκταση της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{h} μπορεί να έχει τη μορφή $\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi}$, όπου η $\boldsymbol{\varphi}$ ορίζεται στο B_D .

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 2.2** θεωρούμε λύση της μορφής:

$$\mathbf{u}_e^{sc}(\mathbf{r}) = [D_e(P^{-1}(\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi}))](\mathbf{r}) + i\omega c[S_e(P^{-1}(\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi}))](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (3.18)$$

όπου η \mathbf{h}_0 είναι η παραπάνω διανυσματική συνάρτηση και $\boldsymbol{\varphi}$ μια άγνωστη διανυσματική συνάρτηση. Με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης Dirichlet στο B_D , και των σχέσεων (3.6) και (3.18) προκύπτει:

$$[D_e(P^{-1}(\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi}))](\mathbf{r}) + i\omega c[S_e(P^{-1}(\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi}))](\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in B_e \quad (3.19)$$

Ορίζουμε (για συντομία) πυκνότητα $\boldsymbol{\psi}$ τη διανυσματική συνάρτηση:

$$\boldsymbol{\psi} = P^{-1}(\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi}) \quad (3.20)$$

Η (3.19) γράφεται:

$$(D_e\boldsymbol{\psi})(\mathbf{r}) + i\omega c(S_e\boldsymbol{\psi})(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (3.20)$$

Από **Θεώρημα 2.1** έχουμε:

$$(S_e\boldsymbol{\psi})(\mathbf{r}) = (H\boldsymbol{\psi})(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (3.21)$$

$$(D_e\boldsymbol{\psi})(\mathbf{r}) = [(+I + \bar{K}_e^*)\boldsymbol{\psi}](\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial B \quad (3.22)$$

Με τη βοήθεια των (3.21) και (3.22) η (3.20) γράφεται:

$$(+I + \bar{K}_e^* + i\omega cH)P^{-1}(\mathbf{h}_0 + \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (3.23)$$

Ο τελεστής

$$N := (+I + \bar{K}_e^* + i\omega cH)P^{-1}$$

αποδεικνύεται αντιστρέψιμος [38], οπότε σύμφωνα με τη θεωρία Riesz-Fredholm υπάρχει λύση με συνεχή εξάρτηση από τα δεδομένα και είναι της μορφής (3.18), άρα υπάρχει λύση και για την $\mathbf{u}_e^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_e^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_e^{\text{sc}}(\mathbf{r})$.

Στις εργασίες [36, 37, 38] αναλύεται διεξοδικά η μοναδικότητα, η ύπαρξη και η ευστάθεια των λύσεων των μεικτών προβλημάτων σκέδασης ελαστικών κυματικών πεδίων.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η φυσική ερμηνεία των συνοριακών συνθηκών και των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος παίζει καθοριστικό ρόλο και στη μελέτη αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης. Η διάκριση μεταξύ σκληρού και μαλακού σκεδαστή, καθώς και η παρουσία συνθηκών εμπέδησης, επηρεάζουν άμεσα τα χαρακτηριστικά του σκεδαζόμενου πεδίου και, κατ' επέκταση, την ανιχνευσιμότητα και ανακατασκευασιμότητα του σκεδαστή από μετρήσεις μακρινού πεδίου. Παράλληλα, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις μέσω δυναμικών απλού και διπλού στρώματος αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη αποδοτικών αριθμητικών αλγορίθμων ανακατασκευής, καθιστώντας το παρόν μοντέλο ιδιαίτερα κατάλληλο για εφαρμογές σε αντίστροφα προβλήματα ελαστικής σκέδασης.

3.4 Εφαρμογές και συμπεράσματα

Η μελέτη του μεικτού προβλήματος σκέδασης με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και Robin καταδεικνύει τη σημασία της ακριβούς μαθηματικής διατύπωσης φαινομένων όπου ο σκεδαστής παρουσιάζει διαφορετική φυσική συμπεριφορά σε τμήματα του συνόρου του. Το συγκεκριμένο μοντέλο περιγράφει ρεαλιστικά τη σκέδαση ελαστικών κυμάτων από μη διαπερατά, μερικώς

επικαλυμμένα αντικείμενα και βρίσκει εφαρμογές σε προβλήματα ανίχνευσης και ανακατασκευής, όπως στον μη καταστρεπτικό έλεγχο υλικών, στη γεωφυσική και στη μελέτη θαμμένων αντικειμένων-σκεδαστών. Η εισαγωγή συνοριακών συνθηκών Robin επιτρέπει τη μοντελοποίηση φαινομένων εμπέδησης και αλληλεπίδρασης κύματος-υλικού, προσφέροντας μεγαλύτερη γενικότητα σε σχέση με τα κλασικά προβλήματα καθαρών συνοριακών συνθηκών (τύπου Dirichlet ή Neumann).

Στο πλαίσιο αυτό, η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων λειτουργεί ως ο βασικός μηχανισμός που γεφυρώνει το διαφορικό πρόβλημα στο άπειρο χωρίο με ένα ισοδύναμο πρόβλημα πάνω στο σύνορο: μέσω αναπαραστάσεων με δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, το μεικτό πρόβλημα «μεταφέρεται» σε ολοκληρωτική (και συχνά ψευδοδιαφορική) διατύπωση, η οποία είναι καταλληλότερη τόσο για την αυστηρή ανάλυση (καλή τοποθέτηση: ύπαρξη-μοναδικότητα-ευστάθεια) όσο και για την αριθμητική επίλυση. Έτσι, τα συμπεράσματα της ενότητας συνοψίζονται στο ότι η ολοκληρωτική προσέγγιση παρέχει ένα συνεκτικό θεωρητικό πλαίσιο για την επιλυσιμότητα των μεικτών προβλημάτων σκέδασης στη γραμμική ελαστικότητα (σε συνέχεια της κλασικής θεωρίας για Dirichlet/Neumann), ενώ ταυτόχρονα προσφέρει «έτοιμη» βάση για αποδοτικούς αλγορίθμους υπολογισμού/ανακατασκευής σε εφαρμογές αντίστροφης σκέδασης, όπου η γεωμετρία και ο τύπος των συνοριακών συνθηκών καθορίζουν την πληροφορία που μεταφέρεται στα μετρήσιμα δεδομένα.

Παράρτημα Α

A.1 Φυσική σημασία του σκληρού σκεδαστή.

Ο σκληρός (ή άκαμπτος) σκεδαστής αντιστοιχεί σε σώμα του οποίου η δυσκαμψία θεωρείται άπειρη σε σύγκριση με εκείνη του περιβάλλοντος ελαστικού μέσου. Στο μαθηματικό μοντέλο αυτό αποτυπώνεται μέσω της συνοριακής συνθήκης Dirichlet,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_D$$

η οποία επιβάλλει μηδενική μετατόπιση στο σύνορο του σκεδαστή.

Φυσικά, η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι το σώμα δεν υφίσταται παραμόρφωση και δεν αποθηκεύει μηχανική ενέργεια. Το προσπίπτον ελαστικό κύμα ανακλάται πλήρως από την επιφάνεια του σκεδαστή, χωρίς απώλειες. Ως αποτέλεσμα, ο σκληρός σκεδαστής παράγει έντονο σκεδαζόμενο πεδίο και αντιστοιχεί σε ιδανικό ανακλαστήρα.

Το μοντέλο αυτό αποτελεί ιδανικοποίηση, ωστόσο περιγράφει με ικανοποιητική ακρίβεια φυσικές καταστάσεις στις οποίες η παραμόρφωση του σώματος είναι αμελητέα, όπως για παράδειγμα μεταλλικά ή βραχύδη σώματα εντός μαλακότερων ελαστικών μέσων.

A.2 Φυσική σημασία του σκεδαστή με συνθήκη εμπέδησης.

Η συνοριακή συνθήκη εμπέδησης (Robin) που επιβάλλεται στο τμήμα S_I του συνόρου,

$$T\mathbf{u}(\mathbf{r}) + i\omega c\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_I$$

μοντελοποιεί μία επιφάνεια η οποία δεν είναι ούτε τέλεια άκαμπτη ούτε ελεύθερη, αλλά επιτρέπει περιορισμένη μετατόπιση και απορροφά μηχανική ενέργεια.

Η παράμετρος εμπέδησης $c > 0$ εκφράζει τη δυναμική αντίσταση της επιφάνειας στη διάδοση των ελαστικών κυμάτων. Φυσικά, η συνθήκη αυτή αντιστοιχεί σε σκεδαστή με απορροφητική επικάλυψη ή στρώμα απόσβεσης. Μέρος της προσπίπτουσας ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα ή χάνεται λόγω εσωτερικής τριβής, με αποτέλεσμα τη μείωση της έντασης του σκεδαζόμενου πεδίου.

Η παρουσία εμπέδησης καθιστά το μοντέλο πιο ρεαλιστικό, καθώς πραγματικά υλικά σπάνια συμπεριφέρονται ως τέλειοι ανακλαστήρες. Επιπλέον, από μαθηματική άποψη, η συνθήκη εμπέδησης εισάγει απόσβεση στο σύστημα και συμβάλλει καθοριστικά στην καλή τοποθέτηση του προβλήματος σκέδασης.

A.3 Φυσική σημασία των Δυναμικών Απλού και Διπλού Στρώματος.

Τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία στη μέθοδο των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων και έχουν σαφή φυσική ερμηνεία στη θεωρία σκέδασης ελαστικών κυμάτων.

Το *Δυναμικό Απλού Στρώματος* μπορεί να θεωρηθεί ως το πεδίο που παράγεται από μία κατανομή σημειακών δυνάμεων (μονοπολικών πηγών) κατανεμημένων πάνω στο σύνορο του σκεδαστή. Κάθε σημείο του συνόρου λειτουργεί ως δευτερογενής πηγή που εκπέμπει ελαστικά κύματα, και το συνολικό σκεδασμένο πεδίο προκύπτει από την υπέρθεση όλων αυτών των επιμέρους συνεισφορών. Φυσικά, το πεδίο μετατοπίσεων που προκύπτει από δυναμικό απλού στρώματος είναι συνεχές διασχίζοντας το σύνορο, ενώ οι αντίστοιχες επιφανειακές τάσεις παρουσιάζουν άλμα.

Αντίθετα, το *Δυναμικό Διπλού Στρώματος* αντιστοιχεί σε κατανομή διπόλων, δηλαδή ζευγών αντίθετων δυνάμεων πολύ μικρής απόστασης μεταξύ τους, τα οποία είναι προσανατολισμένα ως προς το κάθετο διάνυσμα του συνόρου. Η φυσική του ερμηνεία συνδέεται περισσότερο με επιφανειακές ροπές ή

διατμητικές διεγέρσεις παρά με καθαρές δυνάμεις. Στην περίπτωση αυτή, οι επιφανειακές τάσεις παραμένουν συνεχείς, ενώ το πεδίο μετατοπίσεων εμφανίζει χαρακτηριστικό άλμα κατά τη διέλευση από το σύνορο.

Η σημασία των δυναμικών αυτών στη σκέδαση έγκειται στο γεγονός ότι επιτρέπουν την αναπαράσταση του σκεδασμένου πεδίου ως αποτέλεσμα ισοδύναμων επιφανειακών πηγών, αντικαθιστώντας έτσι το πρόβλημα σε μη φραγμένο χωρίο με ένα ισοδύναμο πρόβλημα ορισμένο αποκλειστικά στο σύνορο του σκεδαστή. Με τον τρόπο αυτό, ενσωματώνεται φυσικά η συνθήκη ακτινοβολίας και καθίσταται δυνατή η μαθηματική θεμελίωση της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης, καθώς και η αποτελεσματική αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος.

A.4 Φυσική σημασία των Πλατών Σκέδασης.

Τα πλάτη σκέδασης (scattering amplitudes ή far-field patterns) είναι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην ασυμπτωτική ανάπτυξη του σκεδασμένου πεδίου σε μεγάλες αποστάσεις από τον σκεδαστή. Περιγράφουν την ένταση του σκεδασμένου κύματος ως προς τη διεύθυνση παρατήρησης και καθορίζουν το μοτίβο σκέδασης του σκεδαστή στο μακρινό πεδίο. Τα μεγέθη αυτά αποτελούν βασική πληροφορία σε *αντίστροφα προβλήματα σκέδασης*, καθώς μπορούν να μετρηθούν πειραματικά και να χρησιμοποιηθούν για την ανακατασκευή των χαρακτηριστικών του σκεδαστή. Συνεπώς, τα πλάτη σκέδασης μπορούν να θεωρηθούν ως το «αποτύπωμα» του σκεδαστή στο μακρινό πεδίο.

Βιβλιογραφία

- [1] Sommerfeld A. (1912). *Die Greensche Function der Schwingungsgleichung*. Jahr. Der. Deut. Mth. Ver. 21, pp. 309-353.
- [2] Atkinson F. V. (1949). *On Sommerfeld's Radiation Condition*. Philos. Mag., 40, pp. 645-651.
- [3] Muller C. (1955). *Radiation Patterns and Radiation Fields*. J. Ration. Mech. Analysis, 4, pp. 235-246.
- [4] Kupradze, V. D. (1963). *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. North Holland, Amsterdam.
- [5] Lax P. D. and Phillips R. S. (1967). *Scattering Theory*. Academic Press, New York.
- [6] Lions, J. L. and Magenes, E. (1972). *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. I*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg.
- [7] Kupradze, V. D. (1979). *Three-Dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland, Amsterdam.
- [8] Johnson, C. and Nédélec, J. C. (1980). *On the coupling of boundary integral and finite element methods*. Mathematics of Computation, **35**(152), 1063–1079.
- [9] Κυριάκη Κ. (1983). Σκέδαση Ελαστικών Κυμάτων σε Χαμηλές Συχνότητες. Σκέδαση από Τριαξονικά Ελλειψοειδή. Διδακτορική Διατριβή. Ε.Μ.Π., Αθήνα.

- [10] Costabel, M. and Stephan, E. P. (1985). *A direct boundary integral equation method for transmission problems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 106(2), 367–413.
- [11] Landau, L., D., Lifshitz, E., M. (1986). *Theory of Elasticity (3rd edition)*. Course of Theoretical Physics, Volume 7.
- [12] Dassios G., Kiriaki K., Polyzos D. (1987). *On the Scattering Amplitudes for Elastic Waves*. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 38, pp. 856-873.
- [13] Keller, J. B. and Givoli, D. (1989). *Exact non-reflecting boundary conditions*. Journal of Computational Physics, 82(1), 172–192.
- [14] Givoli, D. and Keller, J. B. (1989). *A finite element method for large domains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 76(1), 41–66.
- [15] Givoli, D. and Keller, J. B. (1990). *Non-reflecting boundary conditions for elastic waves*. Wave Motion, 12(3), 261–279.
- [16] Dautray, R. and Lions, J. L. (1990). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 4: Integral Equations and Numerical Methods*. Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Givoli, D. (1992). *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*. Studies in Applied Mechanics, Vol. 33, Elsevier, Amsterdam.
- [18] Dassios G., Kiriaki K., Polyzos D. (1993). *Scattering Theorems for Complete Dyadic Fields*.
- [19] Chew, W. C. and Weedon, W. H. (1994). *A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates*. Microwave and Optical Technology Letters, 7(13), 599–604.

- [20] Bérenger, J. P. (1994). *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*. *Journal of Computational Physics*, 114(2), 185–200.
- [21] Ρήγου Ζ. (1995). *Αντίστροφη Σκέδαση Ελαστικών Κυματικών Πεδίων*. Διδακτορική Διατριβή. Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [22] Hackbusch, W. (1995). *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 120, Birkhäuser, Basel.
- [23] Cessenat, M. (1996). *Mathematical Methods in Electromagnetism: Linear Theory and Applications*. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 41, World Scientific, Singapore.
- [24] Holm, H., Maischak, M. and Stephan, E. P. (1996). *The hp-version of the boundary element method for Helmholtz screen problems*. *Computing*, 57, 105–134.
- [25] Collino, F. and Monk, P. (1998). Optimizing the perfectly matched layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164(1–2), 157–171.
- [26] Cessenat, O. and Després, B. (1998). Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(1), 255–299.
- [27] Bonnet, M. (1999). *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley & Sons, Chichester. ISBN: 978-0-471-97184-9.

- [28] Σεβρόγλου, Β. (2000). *Οι Συναρτήσεις Herglotz στη Δισδιάστατη Ελαστικότητα - Εφαρμογές στο Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης*. Διδακτορική Διατριβή. Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- [29] Dassios, G. and Kleinman, R. (2000). *Low Frequency Scattering*. Oxford Science Publications.
- [30] Kiriaki, K., Sevoglou, V. (2001). *Integral equation methods in obstacle elastic scattering*. Bulletin of the Greek Mathematical Society, volume 45.
- [31] Collino, F. and Tsogka, C. (2001). Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66(1), 294–307.
- [32] Nédélec, J. C. (2001). *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 144, Springer, New York.
- [33] Monk, P. (2003). *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Clarendon Press, Oxford.
- [34] Kress, R., Lee, K. (2003). *Integral equation methods for scattering from an impedance crack*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 161, 161-177.
- [35] Maischak, M. and Stephan, E. P. (2007). *The hp-version of the boundary element method for the Lamé equation in 3D*. In M. Schanz and O. Steinbach (Eds.), *Boundary Element Analysis, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Vol. 29, pp. 97–112. Springer.

- [36] Athanasiadis, Sevoglou, V. and Stratis, I. G. (2008). *3D elastic scattering theorems for point-generated dyadic fields*. Math. Meth. Appl. Sci., 31, 987-1003
- [37] Athanasiadis, C., E., Natroshvili, D., Sevoglou, V. and Stratis, I. G. (2010). *An application of the reciprocity gap functional to inverse mixed impedance problems in elasticity*. Inverse Problems, 26, 085011.
- [38] Athanasiadis, C. E., Natroshvili, D., Sevoglou, V. and Stratis, I. G. (2011). *A boundary integral equations approach for mixed impedance problems in elasticity*. J. Integral Equations Appl., 23, 183-222.
- [39] Sauter, S. A. and Schwab, C. (2011). *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 39, Springer, Berlin-Heidelberg.
- [40] Colton, D., Kress, R. (2013). *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [41] Ντούγιας, Κ., Σωτήρης (2013). *Ολοκληρωτικές εξισώσεις*. Εκδόσεις: Συμμετρία.
- [42] Αθανασιάδης, Χ. (2015). *Ειδικά Θέματα Μαθηματικών, Τόμος Α΄ : Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές*. Εκδόσεις: ΕΑΠ, Πάτρα.
- [43] Κανακούδης, Γ. (2019). *Μεικτά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για την Εξίσωση Navier*. Διπλωματική Εργασία. ΕΑΠ, Πάτρα.

- [44] Κανακούδης, Γ. (2024). *Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης Ελαστικών Κυμάτων σε Ομογενές κατά Τμήματα Μέσο*. Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Αθήνα.