Εισαγωγή στη Συνομολογία de Rham

Δημήτριος Τσόλης
Επιβλέπων καθηγητής 1: Μιχαήλ Ανούσης
Επιβλέπων καθηγητής 2: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

9 Οκτωβρίου 2022

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

Η εργασία αυτή έχει ως στόχο την μελέτη της συνομολογίας de Rham και τις εφαρμογές της. Η εργασία χωρίζεται σε πέντε κεφάλαια, στα τρία πρώτα παρουσιάζεται το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη της συνομολογίας de Rham ενώ στα επόμενα δύο, αναπτύσσεται η θεωρία της συνομολογίας de Rham, καθώς και κάποιες εφαρμογές της. Στο κεφάλαιο 2 εισάγεται η έννοια της πολλαπλότητας με έμφαση στις ομαλές πολλαπλότητες, το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα δίνεται ο ορισμός της πολλαπλότητας μαζί με την βασική θεωρία αλλά και με ορισμένα παραδείγματα. Στην δεύτερη ενότητα θα εξεταστούν οι απεικονίσεις μεταξύ των πολλαπλοτήτων και συγκεκριμένα οι διαφορομορφισμοί ενώ στην τρίτη ενότητα, θα γίνει μια μικρή εισαγωγή στις πολλαπλότητες με σύνορο.

Στο κεφάλαιο 3, θα παρουσιάστει η βασική θεωρία για τους εφαπτομένους χώρους και τα διανυσματικά πεδία σε μια ομαλή πολλαπλότητα. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε πέντε ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, θα μελετηθεί ο εφαπτόμενος χώρος μια ομαλής πολλαπλότητας. Η δεύτερη και τρίτη ενότητα έχουν ως κύριο θέμα τα διανυσματικά πεδία και τις διανυσματικές δέσμες. Στην επόμενη ενότητα θα γίνει μια σύντομη εισαγωγή στον συνεφαπτόμενο χώρο, ο οποίος θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στη συνέχεια. Τέλος θα οριστούν οι τανυστές και η βασική θεωρία τους.

Το κεφάλαιο 4 έχει ως κύριο θέμα την θεωρία ολοκλήρωσης σε πολλαπλότητες. Το κεφάλαιο χωρίζεται σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα θα οριστούν οι διαφορικές μορφές και θα παρουσιαστεί η στοιχειώδης θεωρία τους. Στην επόμενη ενότητα θα οριστεί ο προσανατολισμός μιας πολλαπλότητας και στην τελευταία ενότητα θα παρουσιαστεί η στοιχειώδης θεωρία ολοκλήρωσης σε πολλαπλότητες με κύριο στόχο την παρουσίαση του θεωρήματος Stokes.

Το κεφάλαιο 5 έχει ως κύριο θέμα, τη συνομολογία de Rham. Η συνομολογία de Rham είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη ομαλών πολλαπλοτήτων, καθώς αποτελεί τοπολογική αναλλοίωτη. Αφού δοθούν οι απαραίτητοι ορισμοί και κατασκευαστεί η ακολουθία Mayer-Vietoris, ένα σημαντικό εργαλείο για την μελέτη της συνομολογίας de Rham, θα υπολογιστούν οι ομάδες συνομολογίας διαφόρων πολλαπλοτήτων. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιαστεί εν συντομία, το θεώρημα de Rham.

Τέλος, στο κεφάλαιο 6, θα γίνει μια μικρή εισαγωγή στην θεωρία Hodge. Το κύριο αντικείμενο της θεωρίας Hodge είναι η μελέτη της συνομολογίας ομαλών πολλαπλοτήτων μελετώντας ένα είδος διαφορικών μορφών, που ονομάζονται αρμονικές μορφές, πάνω σε αυτές. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε έξι ενότητες. Στην πρώτη ενότητα θα εισαχθούν οι πολλαπλότητες Rieman. Στη δεύτερη ενότητα θα οριστεί ο τελεστής Laplace-Betrami. Στη συνέχεια θα γίνει μια μικρή εισαγωγή στην ασθενή λύση της εξίσωσης Laplace. Στις επόμενες δύο ενότητες αποδεικνύεται το θεώρημα αποσύνθεσης του Hodge καθώς και της συνέπειάς του ότι κάθε κλάση συνομολογίας de Rham έχει μοναδικό αρμονικό αντιπρόσωπο. Στην τελευταία ενότητα θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα αποσύνθεσης του Hodge σε μια εφαρμογή στη θεωρία Chern-Simons στη φυσική.

Introduction

The aim of this thesis is to study de Rham cohomology and it's applications. The thesis is organized into five chapters, in the first three chapters, the basic theoretic background for studying de Rham cohomology is presented while in the following two, the theory of de Rham cohomology is developed, along with some applications. In chapter 2, the concept of a manifold is introduced with a strong focus on smooth manifolds. This chapter is further divided into three sections. In the first section, the definition of a manifold is given, along with the basic theory and some examples. In the second section, maps between manifolds will be studied and particularly diffeomorphisms, while in the third section there will be a short introduction to manifolds with boundary.

In chapter 3, the basic theory of tangent spaces and vector fields on a smooth manifold will be presented. The chapter is divided into five sections. In the first section, the tangent space of smooth manifolds will be studied. The second and third sections focus on the theory of vector bundles and vector fields. In the next section, there will be a brief introduction to the cotangent space of a smooth manifold, which will be particularly useful later. Finally tensors and their basic theory are introduced.

Chapter 4 has as main focus, the study of integration on manifolds. The chapter is divided into three sections. In the first section, differential forms are defined and their basic theory is presented. In the next section, the orientation of a manifold is defined and in the last section the basic theory of integration on manifolds will be developed with an aim to present Stokes' theorem. Chapter 5's main focus is the theory of de Rham cohomology. De Rham cohomology is a useful tool in the study of smooth manifolds, as it is a topological invariant. Once the basic definitions required are given and the Mayer-Vietoris sequence is constructed, an important tool for computing de Rham cohomology, the de Rham cohomology of various manifolds will be computed. At the end of this chapter, there will be a quick overview of de Rham's theorem.

Finally, in chapter 6 there will be an introduction to Hodge theory. In Hodge theory the main object is the study of cohomology of smooth manifolds by studying a class of differential forms, called harmonic forms, on the manifold. The chapter is divided into six sections. In the first section, Riemannian manifolds will be introduced. In the second section, the Laplace-Betrami operator will be defined and in section three there will be a brief introduction to the weak solutions of the Laplace equation. In the following two sections the Hodge decomposition theorem is proved along with it's consequence that every de Rham cohomology class has a unique harmonic representative. In the last section, the Hodge decomposition theorem will be used in an application to Chern-Simons theory in Physics.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στις Πολλαπλότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε ένα σημαντικό αντικείμενο μελέτης στη γεωμετρία, τις πολλαπλότητες, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν σαν γενίκευση των καμπυλών και επιφανειών σε μεγαλύτερη διάσταση. Η πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που τοπικά μοιάζει με τον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε περισσότερο με τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες οι οποίες είναι πολλαπλότητες εφοδιασμένες με μια επιπλέον δομή, τη διαφορίσιμη δομή, που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές από το λογισμό για να τις μελετήσουμε.

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Πριν αρχίσουμε να μιλάμε για διαφορίσιμες πολλαπλότητες, θα πρέπει να ορίσουμε τις τοπολογικές πολλαπλότητες. Ξεκινάμε με τον ορισμό του τοπικά ευκλείδειου χώρου.

Ορισμός 2.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος M καλείται *τοπικά ευκλείδειος* με διάσταση n αν κάθε $p \in M$ έχει γειτονιά U, ώστε να υπάρχει ομοιομορφισμός ϕ από το U σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο $\phi(U)$ του $\mathbb{R}^n$. Το ζεύγος $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ καλείται *χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων*.

Ορισμός 2.1.2. Μια *τοπολογική πολλαπλότητα*, είναι ένας Hausdorff δεύτερα αριθμήσιμος, τοπικά ευκλείδειος χώρος. Μια τοπολογική πολλαπλότητα έχει διάσταση n, αν είναι τοπικά Ευκλείδεια με τον χώρο $\mathbb{R}^n$.

Σημείωση 2.1.1. Η διάσταση μιας τοπολογικής πολλαπλότητας παραμένει αναλλοίωτη από ομοιομορφισμούς, δηλαδή μια τοπολογική πολλαπλότητα με διάσταση n δεν μπορεί να είναι ομοιομορφική με μια πολλαπλότητα με διάσταση m για $m \neq n$.

Μπορούμε επίσης να αλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων σε μια πολλαπλότητα. Αν (U, ϕ), (V, ψ) είναι δύο χάρτες μιας n-πολλαπλότητας M, ώστε $U \cap V \neq \emptyset$, τότε η σύνθεση απεικονίσεων

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V),$$

λέγεται *απεικόνιση μετάβασης ή αλλαγή συντεταγμένων από την ψ στην ϕ.*

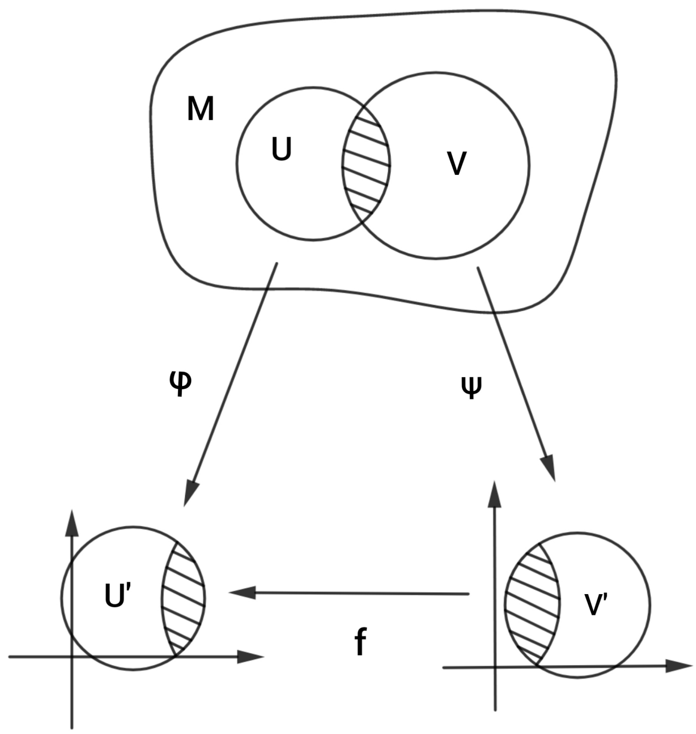
Ορισμός 2.1.3. Ένας C^k *άτλας* σε έναν τοπικά ευκλείδειο χώρο M, είναι μια συλλογή $\mathcal{F} = \{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ χαρτών ώστε $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ και η $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ ανήκει στον $C^k(\phi_i(U_j \cap U_i), \mathbb{R}^n)$. Ένας άτλας καλείται *μεγιστικός* αν για κάθε χάρτη (U, ϕ) με $\phi \circ \phi_i^{-1}$ και $\phi_i \circ \phi^{-1}$ να είναι C^k για κάθε $i \in I$, συνεπάγεται $(U, \phi) \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 2.1.4. Δύο άτλαντες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ λέγονται *ισοδύναμοι* αν η ένωσή τους είναι άτλας.

Η ισοδυναμία ατλάντων είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Η ένωση όλων των ατλάντων ισοδύναμων με κάποιον άτλα $\mathcal{F}$ είναι μεγιστικός άτλας και καλείται *διαφορίσιμη δομή παραγόμενη από το $\mathcal{F}$.*

Ορισμός 2.1.5. Ένα ζεύγος $(M, \mathcal{F})$, καλείται C^k-*διαφορίσιμη πολλαπλότητα* με διάσταση n, αν το M είναι τοπολογική πολλαπλότητα με $\mathcal{F}$ διαφορίσιμη δομή στο M. Μια πολλαπλότητα λέγεται *ομαλή* αν είναι C^k για κάθε $k > 0$.

Είναι γνωστό ότι οι τοπολογικές πολλαπλότητες με διάσταση μικρότερη του 4 έχουν μοναδική διαφορίσιμη δομή ενώ οι κλειστές τοπολογικές πολλαπλότητες με διάσταση μεγαλύτερη του 4 έχουν πεπερασμένο πλήθος διαφορίσιμων δομών. Το πλήθος των διαφορίσιμων δομών μιας 4-πολλαπλότητας από την άλλη μεριά παραμένει άγνωστο.



Σχήμα 2.1: Αλλαγή συντεταγμένων σε μια πολλαπλότητα M.

Σημείωση 2.1.2. Σε μια πολλαπλότητα $(M, \mathcal{F})$, ένα σύνολο $V \subset M$ είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το $\phi_i(U_i \cap V)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $i \in I$.

Παράδειγμα 2.1.1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι ένα τετριμμένο παράδειγμα πολλαπλότητας με χάρτη ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$ και ομοιομορφισμό την ταυτοτική απεικόνιση.

Παράδειγμα 2.1.2. Η n μοναδιαία σφαίρα S^n περιγράφεται στον $\mathbb{R}^{n+1}$ από την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1.$$

Είναι Hausdorff και δεύτερα αριθμήσιμη, σαν υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$. Είναι επίσης τοπικά Ευκλείδειος χώρος, αφού μπορουμε να ορίσουμε τους χάρτες (U_i^+, ϕ_i^+) και (U_i^-, ϕ_i^-) όπου

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\}$$

με $\phi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\phi_i^+(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$$

και

$$U_i^- = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\}$$

με $\phi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\phi_i^-(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα U_i^+ και U_i^- καλύπτουν την S^n, θα δείξουμε ότι τα $\phi_1^+ \circ (\phi_2^-)^{-1}$ και $\phi_1^+ \circ (\phi_2^+)^{-1}$ είναι C^∞. Έχουμε για $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(\phi_2^+)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \sqrt{1 - (y_1^2 + ... + y_n^2)^2}, y_2, \dots, y_n)$$

και

$$(\phi_2^-)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, -\sqrt{1 - (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^2}, y_2, \dots, y_n)$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\phi_1^+ \circ (\phi_2^+)^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \phi_1^+(y_1, \sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}, y_2, \dots, y_n) \\ &= \left(\sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}, y_2, \dots, y_n\right)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\phi_1^+ \circ (\phi_2^-)^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \phi_1^+(y_1, -\sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}, y_2, \dots, y_n) \\ &= \left(-\sqrt{1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}, y_2, \dots, y_n\right).\end{aligned}$$

Άρα οι $\phi_1^+ \circ (\phi_2^-)^{-1}$ και $\phi_1^+ \circ (\phi_2^+)^{-1}$ είναι C^∞. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Παράδειγμα 2.1.3. Ο σταυρός στον $\mathbb{R}^2$ δεν είναι πολλαπλότητα. Θα υποθέσουμε, για άτοπο, ότι είναι, δηλαδή ότι είναι τοπικά Ευκλείδειος. Αν θεωρήσουμε το σημείο διασταύρωσης p, τότε υπάρχει γειτονιά U του p ομοιομορφική με μια ανοιχτή μπάλα $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ με τον ομοιομορφισμό να απεικονίζει το p στο 0.

Ο ομοιομορφισμός $U \to B(0,r)$ περιορίζεται σε ομοιομορφισμό $U - \{p\} \to B(0,r) - \{0\}$. Το σύνολο $B(0,r) - \{0\}$ είναι συνεκτικό για $n \geq 2$ και αποτελείται από δύο συνεκτικά μέρη για $n = 1$, όμως το σύνολο $U - \{p\}$ αποτελείται από τέσσερα συνεκτικά μέρη και επομένως δεν μπορεί να υπάρξει ομοιομορφισμός από το $U - \{p\}$ στο $B(0,r) - \{0\}$.

Πολύ σημαντική στη θεωρία των πολλαπλοτήτων είναι η έννοια της υποπολλαπλότητας, δηλαδή ενός υποσυνόλου μιας πολλαπλότητας το οποίο έχει κι αυτό δομή πολλαπλότητας.

Ορισμός 2.1.6. Ένα υποσύνολο S μιας πολλαπλότητας M διάστασης n λέγεται *κανονική υπόπολλαπλότητα* διάστασης k αν για κάθε $p \in S$ υπάρχει χάρτης $(U, x^1, \dots, x^n)$ που περιέχει το p στον μεγιστικό άτλα της M ώστε να ορίζεται το $U \cap S$ από την απαλλειφή $n-k$ των συντεταγμένων και $(U \cap S, x^1, \dots, x^k)$ είναι ένας χάρτης της S. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η S και η M έχουν *συνδιάσταση* $n-k$.

Τέλος, είναι γνωστό ότι κάποια είδη πολλαπλοτήτων μπορούν να γραφτούν σαν γινόμενο άλλων πολλαπλοτήτων, όπως για παράδειγμα ο τόρος $T \cong S^1 \times S^1$. Αυτές οι πολλαπλότητες ονομάζονται *πολλαπλότητες γινόμενο*. Στην ακόλουθη πρόταση θα δούμε πως ορίζεται ο άτλαντας μιας τέτοιας πολλαπλότητας.

Πρόταση 2.1.1. Έστω M μια ομαλή m-πολλαπλότητα με άτλαντα (U, ϕ) και N μια ομαλή n-πολλαπλότητα με άτλαντα (V, ψ). Τότε το γινόμενο $M \times N$ είναι ομαλή $(m+n)$-πολλαπλότητα με άτλα το σύνολο

$$\{(U \times V, \phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)\}.$$

2.2 Διαφορομορφισμοί

Στην ενότητα αυτή, θα μελετήσουμε απεικονίσεις μεταξύ ομαλών πολλαπλοτήτων. Θέλουμε να ορίσουμε ένα είδος διαφορισιμότητας των απεικονίσεων αυτών, γενικεύοντας έτσι την έννοια της διαφορίσιμης απεικόνισης σε Ευκλείδιους χώρους.

Ορισμός 2.2.1. Μια απεικόνιση $F: M \to N$ από μια πολλαπλότητα M σε μια πολλαπλότητα N, λέγεται *C^k-απεικόνιση* αν για όλους τους χάρτες (U, ϕ) στην M και όλους τους χάρτες (V, ψ) στην N, οι επεικονίσεις $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ ανήκουν στο $C^k(\phi(U \cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n)$. Αν η F είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη εικόνα είναι C^k-απεικόνιση, τότε η F λέγεται C^k-διαφορομορφισμός.

Ορισμός 2.2.2. Μια απεικόνιση $F: M \to N$ από μια πολλαπλότητα M σε μια πολλαπλότητα N λέγεται *ομαλή* (C^∞) αν είναι C^k-απεικόνιση για κάθε $k > 0$.

Ένας διαφορομορφισμός λέγεται *ομαλός διαφορομορφισμός* αν είναι ομαλός με ομαλό αντίστροφο. Δύο πολλαπλότητες M και N λέγονται διαφορομορφικές αν υπάρχει διαφορομορφισμός από την M στην N. Αν η M είναι C^k διαφορίσιμη (ή ομαλή) πολλαπλότητα και (U_i, ϕ_i) χάρτης της, τότε οι απεικονίσεις ϕ_i είναι C^k (ή ομαλές αντίστοιχα).

Πρόταση 2.2.1. Έστω μια απεικόνιση $F: M \to N$, που είναι ομαλή στο $p \in M$. Αν (U, ϕ) είναι οποιοσδήποτε χάρτης γύρω από το p στην M και (V, ψ) οποιοσδήποτε χάρτης γύρω από το $F(p)$ στην N, τότε η απεικόνιση $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι ομαλή στο $\phi(p)$.

Απόδειξη. Αφού η F είναι ομαλή στο $p \in M$, υπάρχουν χάρτες (U_α, ϕ_α) γύρω από το p στην M και χάρτες (V_β, ψ_β) γύρω από το $F(p)$ στην N ώστε η $\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ να είναι ομαλή στο $\phi_\alpha(p)$. Οι $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ και $\psi \circ \psi_\beta^{-1}$ είναι ομαλές σε ανοιχτά υποσύνολα ευκλείδειων χώρων. Επομένως η

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi^{-1})$$

είναι ομαλή στο $\phi(p)$.

□

Πρόταση 2.2.2. Έστω $F : M \to N$ συνεχής απεικόνιση μεταξύ ομαλών πολλαπλοτήτων. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Η απεικόνιση $F : M \to N$ είναι ομαλή απεικόνιση.
2. Υπάρχουν άτλαντες $\mathcal{F}$ για την M και $\mathcal{G}$ για την N ώστε για κάθε χάρτη (U, ϕ) στην $\mathcal{F}$ και (V, ψ) στην $\mathcal{G}$, η απεικόνιση
$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$
είναι ομαλή.
3. Για κάθε χάρτη (U, ϕ) στην M και (V, ψ) στην N, η απεικόνιση
$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$
είναι ομαλή.

Απόδειξη. $2 \Longrightarrow 1$: Έστω $p \in M$. Αν ο (U, ϕ) είναι χάρτης γύρω από το p στην $\mathcal{F}$ και ο (V, ψ) είναι χάρτης γύρω από το $F(p)$ στον $\mathcal{G}$, τότε η $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι ομαλή στο $\phi(p)$. Από τον ορισμό της ομαλής απεικόνισης, η $F : M \to N$ είναι ομαλή στο p και συνεπώς είναι ομαλή, αφού το p είναι τυχαίο σημείο.

$1 \Longrightarrow 3$: Έστω (U, ϕ) χάρτης στην M και (V, ψ) χάρτης στην N ώστε $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$. Έστω $p \in U \cap F^{-1}(V)$. Τότε ο (U, ϕ) είναι χάρτης γύρω από το p και ο (V, ψ) είναι χάρτης γύρω από το $F(p)$. Από την πρόταση 2.2.1 η $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι ομαλή στο $\phi(p)$ και επομένως απεικόνιση $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$ είναι ομαλή αφού το $\phi(p)$ είναι τυχαίο σημείο του $\phi(U \cap F^{-1}(V))$.

$3 \Longrightarrow 2$: Προφανές.

□

Λήμμα 2.2.1. Έστω M, N, P ομαλές πολλαπλότητες με διάσταση m, n, p αντίστοιχα. Αν οι $F : M \to N$ και $G : N \to P$ είναι ομαλές απεικονίσεις τότε η $G \circ F : M \to P$ είναι ομαλή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω (U, ϕ), (V, ψ) και (W, σ) χάρτες των M, N και P αντίστοιχα. Τότε

$$\sigma \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1} = (\sigma \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}).$$

Οι F και G είναι ομαλές άρα από την πρόταση 2.2.2 ($1 \Longrightarrow 3$), οι απεικονίσεις $\sigma \circ G \circ \psi^{-1}$ και $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ είναι ομαλές. Τότε η $\sigma \circ (G \circ F) \circ \phi^{-1}$ είναι ομαλή, σαν σύνθεση ομαλών απεικονίσεων. Επομένως από την πρόταση 2.2.2 ($3 \Longrightarrow 1$), η απεικόνιση $G \circ F$ είναι ομαλή.

□

Ο διαφορομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας, μάλιστα ένα σημαντικό πρόβλημα στη γεωμετρία είναι η ταξινόμηση των πολλαπλοτήτων έως διαφορομορφισμού.

Ορισμός 2.2.3. Έστω M ομαλή πολλαπλότητα με διάσταση n. Μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ λέγεται *ομαλή* (ή C^∞) σε ένα σημείο p της M, αν υπάρχει χάρτης (U, ϕ) γύρω από το p στην M ώστε η $f \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ στο $\phi(p)$. Αν η f είναι ομαλή σε κάθε σημείο της M, τότε λέγεται *ομαλή στην M*.

Ορισμός 2.2.4. Αν $F : M \to N$ είναι απεικόνιση από την πολλαπλότητα M στην N και h συνάρτηση στην M. Η *ανάσυρση* της h από την F είναι η συνάρτηση $h \circ F$ η οποία συμβολίζεται με F^*h.

Ορισμός 2.2.5. Έστω $U \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{R}^\ell$ απεικόνιση. Ένα στοιχείο $c \in \mathbb{R}^\ell$ καλείται *κανονική τιμή της f* αν για κάθε $p \in U$ ισχύει

$$f(p) = c \implies \text{η } df(p) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell \text{ είναι επί.}$$

Διαφορετικά, λέγεται *ιδιάζουσα τιμή της f*.

Το ακόλουθο λήμμα αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο που μας βοηθά να αποδεικνύουμε ότι κάποιος τοπολογικός χώρος είναι πολλαπλότητα, σε περίπτωση που είναι, ορίζοντας τον σαν την αντίστροφη εικόνα κανονικής τιμής μια απεικόνισης.

Λήμμα 2.2.2. Έστω $U \subset \mathbb{R}^k$ ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{R}^\ell$ απεικόνιση. Αν το c είναι κανονική τιμή της f, τότε το σύνολο

$$M := f^{-1}(c)$$

είναι ομαλή $(k-\ell)$-υποπολλπλότητα του $\mathbb{R}^k$.

2.3 Πολλαπλότητες με Σύνορο

Συχνά στη γεωμετρία συναντάμε πολλαπλότητες με σύνορο, οι πολλαπλότητες αυτές μοιάζουν τοπικά με τον *κλειστό άνω ημιχώρο* που ορίζεται ως

$$\mathcal{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq 0\}$$

μαζί με την τοπολογία υποχώρου που κληρονομεί από τον $\mathbb{R}^n$. Τα σημεία $(x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{H}^n$ με $x^n > 0$ καλούνται *εσωτερικά σημεία* του $\mathcal{H}^n$ ενώ τα σημεία με $x^n = 0$ καλούνται *συνοριακά σημεία*. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του $\mathcal{H}^n$ το συμβολίζουμε με $(\mathcal{H}^n)^\circ$ και το σύνολο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με $\partial\mathcal{H}^n$.

Ορισμός 2.3.1. Μια *n-τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο*, ας την καλούμε M, είναι ένας δεύτερα αριθμήσιμος Hausdorff τοπολογικός χώρος τοπικά ομοιομορφικός με τον $\mathcal{H}^n$. Ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset M$ μαζί με έναν ομοιομορφισμό $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ σε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ή του $\mathcal{H}^n$ είναι ένας *χάρτης* της M.

Ο κλειστός άνω ημιχώρος είναι προφανώς ένα τετριμμένο παράδειγμα πολλαπλότητας με σύνορο με χάρτη ολόκληρο τον $\mathcal{H}^n$ μαζί με την τετριμμένη απεικόνιση.

Σημείωση 2.3.1. Το σύνορο μιας πολλαπλότητας με σύνορο δεν ταυτίζεται με το τοπολογικό σύνορο, για παράδειγμα η πολλαπλότητα με σύνορο $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ έχει σύνορο το $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 2\}$ αλλά το τοπολογικό της σύνορο είναι το $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$.

Μια *ομαλή πολλαπλότητα με σύνορο* M είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο μαζί με έναν μεγιστικό C^∞ χάρτη. Ένα σημείο $p \in M$ ονομάζεται *εσωτερικό σημείο της M* αν για κάποιον χάρτη (U, ϕ), το σημείο $\phi(p)$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{H}^n$. Ένα σημείο $q \in M$ ονομάζεται *συνοριακό σημείο της M* αν το σημείο $\phi(q)$ είναι συνοριακό σημείο του $\mathcal{H}^n$, το σύνολο των συνοριακών σημείων της M συμβολίζεται με ∂M.

Για να μελετήσουμε συναρτήσεις πάνω σε πολλαπλότητες με σύνορο, θα πρέπει να επεκτείνουμε την έννοια της C^∞ συνάρτησης ώστε να ορίζεται σε μη-ανοιχτά πεδία.

Ορισμός 2.3.2. Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}^m$ λέγεται *ομαλή σε ένα σημείο* p του S, αν υπάρχει γειτονιά U του p στο $\mathbb{R}^n$ και C^∞ συνάρτηση $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ ώστε $\tilde{f} = f$ στο $U \cap S$. Η συνάρτηση λέγεται *ομαλή στο* S αν είναι ομαλή σε κάθε σημείο του S.

Θεώρημα 2.3.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό υποσύνολο, $S \subset \mathbb{R}^n$ ένα οποιοδήποτε υποσύνολο και $f : U \to S$ διαφορομορφισμός. Τότε το S είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 2.3.1. Έστω U και V ανοιχτά υποσύνολα του $\mathcal{H}^n$ και $f : U \to V$ διαφορομορφισμός. Τότε η f απεικονίζει εσωτερικά σημεία σε εσωτερικά σημεία και συνοριακά σημεία σε συνοριακά σημεία.

Απόδειξη. Έστω $p \in U$ εσωτερικό σημείο. Τότε υπάρχει ανοιχτή μπάλα B στον $\mathcal{H}^n$, η οποία είναι ανοιχτή και στον $\mathbb{R}^n$, που περιέχει το p. Από το θεώρημα 2.3.1 το $f(B)$ είναι είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς το $f(B)$ περιέχεται στον $(\mathcal{H}^n)^\circ$ και αφού $f(p) \in f(B)$, το $f(p)$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{H}^n$.
Αν το p είναι συνοριακό σημείο στον $U \cap \partial\mathcal{H}^n$ τότε $p = f^{-1}(f(p))$ είναι συνοριακό σημείο και αφού το $f^{-1} : V \to U$ είναι διαφορομορφισμός τότε το $f(p)$ δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο. Επομένως το $f(p)$ είναι συνοριακό σημείο.

□

Έστω M πολλαπλότητα με σύνορο με διάσταση n και σύνορο ∂M. Έστω (U, ϕ) χάρτης στην M, και $\phi' = \phi|_{U \cap \partial M}$ ο περιορισμός της ϕ στο σύνορο.
Αφού ο ϕ απεικονίζει συνοριακά σημεία σε συνοριακά σημεία έχουμε

$$\phi' : U \cap \partial M \to \partial\mathcal{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}.$$

Αν (U, ϕ) και (V, ψ) είναι δύο χάρτες στην M τότε η

$$\psi' \circ (\phi')^{-1} : \phi'(U \cap V \cap \partial M) \to \psi'(U \cap V \cap \partial M)$$

είναι C^∞.

Ο άτλας $\{(U_a, \phi_a)\}$ για την M ορίζει άτλα

$$\{(U_a \cap \partial M, \phi_a|_{U_a \cap \partial M})\}$$

για το ∂M, ώστε το ∂M είναι πολλαπλότητα διάστασης $n-1$ χωρίς σύνορο.

Πρόταση 2.3.2. Έστω M ομαλή πολλαπλότητα και N ομαλή πολλαπλότητα με σύνορο. Τότε το γινόμενο $M \times N$ είναι ομαλή πολλαπλότητα με σύνορο και $\partial(M \times N) = M \times \partial N$.

Απόδειξη. Το $M \times N$ είναι δεύτερα αριθμήσιμο και Hausdorff με την τοπολογία γινομένου, σαν γινόμενο δεύτερα αριθμήσιμων και Hausdorff χώρων. Έστω $(x, y) \in M \times N$. Τότε υπάρχει χάρτης (U, ϕ) στο x στον άτλαντα της M και χάρτης (V, ψ) στο y στον άτλαντα της N. Το $U \times V$ είναι μια γειτονιά του (x, y) με την τοπολογία γινομένου και η $\phi \times \psi$ είναι ομοιομορφισμός από το $U \times V$ στο $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}^m$. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{H}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}^m$. Συνεπώς η $M \times N$ είναι τοπικά ομοιομορφική με τον $\mathcal{H}^{n+m}$, δηλαδή είναι πολλαπλότητα με σύνορο.

Τώρα αν $(x, y) \in \partial(M \times N)$, τότε το $\phi \times \psi(x, y)$ είναι συνοριακό σημείο του $\mathcal{H}^{n+m}$. Παρατηρούμε ότι $\partial(\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}^m) = \partial(\mathcal{H}^{n+m}) = \mathbb{R}^n \times \partial\mathcal{H}^m$, επομένως $\phi \times \psi(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \partial\mathcal{H}^m$ και άρα $(x, y) \in M \times \partial N$. Αν τώρα $(x, y) \in M \times \partial N$, το $\psi(y)$ είναι συνοριακό σημείο του $\mathcal{H}^m$, τότε το $\phi \times \psi(x, y)$ είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}^m$ και επομένως $(x, y) \in \partial(M \times N)$.

□

Κεφάλαιο 3

Εφαπτόμενος Χώρος και Διανυσματικά Πεδία

3.1 Εφαπτόμενος Χώρος

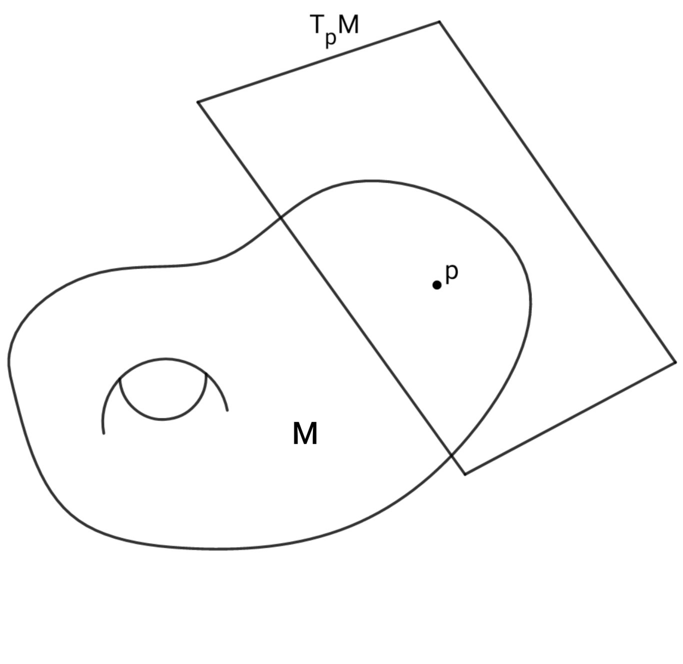
Μια πολλαπλότητα μπορεί να προσεγγιστικεί γύρω από ένα σημείο από τον εφαπτόμενο χώρο της ο οποίος, όπως θα δούμε, έχει δομή διανυσματικού χώρου. Αυτό θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες χρησιμοποιώντας τεχνικές από την γραμμική άλγεβρα.

Ορισμός 3.1.1. Καλούμε *παραγώγιση σε ένα σημείο* p μιας πολλαπλότητας M, μια απεικόνιση $D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$D(fg) = (D(f))g(p) + f(p)D(g).$$

Ορισμός 3.1.2. Ένα *εφαπτόμενο διάνυσμα* στο σημείο p μιας πολλαπλότητας M είναι μια παραγώγιση στο p.

Το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων στο p ορίζει έναν διανυσματικό χώρο T_pM ο οποίος καλείται *εφαπτόμενος χώρος* της M στο σημείο p.



Σχήμα 3.1: Ο εφαπτόμενος χώρος μιας πολλαπλότητας M στο σημείο p.

Αν έχουμε τον χάρτη $(U, x^1, \ldots, x^n)$ που περιέχει το p, τότε μια βάση του T_pM γράφεται

$$e_i = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

Αν έχουμε δύο χάρτες $(U, x^1, \ldots, x^n)$ και $(V, y^1, \ldots, y^n)$ σε μια πολλαπλότητα M τότε ισχύει

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$$

στο $U \cap V$.

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω ο χάρτης (U, x, y) του $\mathbb{R}^2$ και (V, r, θ) ο χάρτης του $\mathbb{R}^2$ σε πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

Η συνήθης βάση του $T_p\mathbb{R}$ στο U, είναι η $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$. Στο V έχουμε τη βάση $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

και

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

□

Ορισμός 3.1.3. Η ένωση $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$, λέγεται *εφαπτόμενη δέσμη* της M. Η εφαπτόμενη δέσμη έχει μια φυσική προβολή $\pi : TM \to M$ που στέλνει τα $X_p \in TM$ στα $p \in M$. Μια απεικόνιση $X : M \to TM$, με $p \mapsto X_p(f)$ ομαλή, λέγεται *διανυσματικό πεδίο.* Θα συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσματικών πεδίων στην M με $\Gamma(TM)$.

Οι εφαπτόμενες δέσμες είναι κι αυτές πολλαπλότητες.

Ορισμός 3.1.4. Μια ομαλή απεικόνιση $F : M \to N$ μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων, ορίζει μια γραμμική απεικόνιση $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων σε κάθε $p \in M$ η οποία καλείται *παράγωγος στο p* και ορίζεται ως

$$F_*(X_p))f = X_p(f \circ F)$$

για $X_p \in T_pM$, $f \in C^\infty_{F(p)}(N)$. Το $F_*(X_p)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στον $T_{F(p)}N$.

Όπως και στον $\mathbb{R}^n$, έτσι και σε οποιαδήποτε ομαλή πολλαπλότητα, ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας για την παραγωγό.

Θεώρημα 3.1.1. (Κανόνας της αλυσίδας). Αν οι $F : M \to N$ και $G : N \to P$ είναι ομαλές απεικονίσεις πολλαπλοτήτων και $p \in M$, τότε

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}.$$

Απόδειξη. Έστω $X_p \in T_pM$ και f ομαλή συνάρτηση στο $g(f(p))$ στην P. Τότε

$$\begin{aligned}((G \circ f)_* X_p)f &= X_p(f \circ G \circ F)\\ &= (F_* X_p)(f \circ G)\\ &= (G_*(F_* X_p))f\\ &= ((G_* \circ F_*)X_p)f.\end{aligned}$$

□

Έστω M και N δύο ομαλές πολλαπλότητες και μια απεικόνιση $F : M \to N$. Τότε ο *βαθμός της F σε κάποιο* $p \in M$ είναι ο βαθμός της γραμμικής απεικόνισης $F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ (ο βαθμός της Ιακωβιανής της F σε κάθε ομαλό χάρτη).

Ορισμός 3.1.5. Μια C^∞ απεικόνιση $F : M \to N$ λέγεται *ομαλή εμβάπτιση στο* $p \in M$ αν η παράγωγος $F_{*,p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ είναι 1-1 (αν ο βαθμός της F είναι ίσος με τη διάσταση της M) και *υποεμβάπτιση στο* p αν η $F_{*,p}$ είναι επί (αν ο βαθμός της F ισούται με τη διάσταση της N). Η F λέγεται *εμβάπτιση* αν είναι εμβάπτιση σε κάθε $p \in M$ και υποεμβάπτιση αν είναι υποεμβάπτιση σε κάθε $p \in N$. Μια εμβάπτιση καλείται *εμφύτευση* αν η M είναι διαφορομορφική με τη $F(M)$.

Τελειώνοντας την ενότητα θα ορίσουμε τις καμπύλες πάνω σε πολλαπλότητες. Αν είναι M μια πολλαπλότητα, τότε μια *καμπύλη στην* M είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : J \to M$, όπου $J \subset \mathbb{R}$ κάποιο διάστημα. Αν η M είναι ομαλή, μπορούμε να ορίσουμε την *ταχύτητα της* γ *στο σημείο* $t_0 \in J$ ως το διάνυσμα

$$\gamma'(t_0) = \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

Πρόταση 3.1.1. Έστω M μια ομαλή πολλαπλότητα και $p \in M$. Τότε κάθε $v \in T_pM$ είναι η ταχύτητα κάποιας ομαλής καμπύλης γ στην M.

Πρόταση 3.1.2. Αν $\gamma : J \to M$ είναι μια ομαλή καμπύλη και $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση. Τότε, για κάθε $t_0 \in J$, η ταχύτητα της σύνθεσης $F \circ \gamma : J \to N$ στο t_0 δίνεται από

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = F_*(\gamma'(t_0)).$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = (F \circ \gamma)_* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \right) = F_* \circ \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \right) = F_*(\gamma'(t_0)).$$

□

Στην ακόλουθη πρόταση, θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας ομαλής απεικόνισης μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων, χρησιμοποιώντας την ταχύτητα μιας καμπύλης.

Πρόταση 3.1.3. Έστω $F : M \to N$ μια ομαλή απεικόνιση μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων M και N. Έστω $p \in M$ και $v \in T_pM$. Τότε για κάθε ομαλή καμπύλη $\gamma : J \to M$ ώστε $0 \in J$, $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$, ισχύει

$$F_{*,p}(v) = (F \circ \gamma)'(0).$$

3.2 Διανυσματικές Δέσμες

Ορισμός 3.2.1. Έστω M τοπολογικός χώρος. Μια *διανυσματική δέσμη* βαθμού k πάνω από την M είναι ένας τοπολογικός χώρος E μαζί με μια επι συνεχής απεικόνιση $\pi : E \to M$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Για κάθε $p \in M$, ο χώρος $E_p = \pi^{-1}(p)$ στο p έχει δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου k-διάστασης και ονομάζεται *νήμα* πάνω από το p.
2. Για κάθε $p \in M$, υπάρχει γειτονιά U του p στην M και ομοιομορφισμός $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, που ονομάζεται *τοπική τετριμμενοποίηση του* E *πάνω από το* U, που ικανοποιεί
   - $\pi_U \circ \Phi = \pi$ (όπου $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ η προβολή)
   - για κάθε $q \in U$, ο περιορισμός της Φ στο E_q είναι διανυσματικός ισομορφισμός από το E_q στο $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$

Αν οι M και E είναι ομαλές πολλαπλότητες, π είναι ομαλή απεικόνιση και οι τοπικές τετριμμενοποιήσεις μπορούν να επιλεχθούν ώστε να είναι διαφορομορφισμοί, τότε η διανυσματική δέσμη E καλείται *ομαλή διανυσματική δέσμη* και η τοπική τετριμμενοποιήση λέγεται *ομαλή τοπική τετριμμενοποιήση*. Ο χώρος E καλείται *ολικός χώρος της δέσμης*, η M καλείται *βάση της δέσμης* και η π *προβολή*.

Έστω $\pi : E \to M$ διανυσματική δέσμη. Μια συνεχής απεικόνιση $\sigma : M \to E$ που ικανοποιεί $\pi \circ \sigma = Id_M$, καλείται *τομέας* της δέσμης.

Οι εφαπτόμενες δέσμες είναι ειδικές περιπτώσεις διανυσματικών δεσμών. Έστω M μια ομαλή n-πολλαπλότητα και TM η εφαπτόμενη δέσμη της. Η TM είναι ομαλή διανυσματική δέσμη βαθμού n πάνω από την M. Έστω π η φυσική προβολή της TM. Για κάποιον ομαλό χάρτη (U, ϕ) της M με συντεταγμένες (x^i), ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ ως

$$\Phi \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = (p, (v^1, \ldots, v^n))$$

η όποια είναι γραμμική στα νήματα με $\pi\rho_1 \circ \Phi = \pi$.
Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ ως

$$\tilde{\phi} \left(v^i \ \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v^1, \ldots, v^n).$$

Η εικόνα της είναι $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, η οποία είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{2n}$. Η απεικόνιση είναι 1-1 και επί της εικόνας και η αντίστροφη απεικόνιση είναι η

$$\tilde{\phi}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\phi^{-1}(x)} .$$

Θα δείξουμε ότι η προβολή $\pi : TM \to M$ είναι ομαλή. Έστω δύο ομαλοί χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) στην M και $(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi})$, $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ οι αντίστοιχοι χάρτες στην TM. Τα σύνολα

$$\tilde{\phi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

και

$$\tilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

είναι ανοιχτά στον $\mathbb{R}^{2n}$ και η σύνθεση $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1} : \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ γράφεται ως

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}(x^1, \ldots, v^1, \ldots, v^n) = \left(\tilde{x}^1(x), \ldots, \tilde{x}^n(x), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(x) v^j, \ldots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(x) v^j\right)$$

η οποία είναι ομαλή.

Θεωρούμε τον χάρτη $(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi})$ για την TM. Η π ορίζεται ως $\pi(x, v) = x$ η οποία είναι ομαλή. Η απεικόνιση συντεταγμένων $\tilde{\phi}$ δίνεται από τη σύνθεση

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \phi(U) \times \mathbb{R}^n .$$

Αφού οι $\tilde{\phi}$ και $\phi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ είναι διαφορομορφισμοί, τότε είναι και η Φ. Επομένως η Φ είναι ομαλή τοπική τετριμμενοποιήση.

3.3 Διανυσματικά Πεδία

Έστω M μια ομαλή πολλαπλότητα. Ένα *διανυσματικό πεδίο στην* M είναι ένας τομέας της $\pi : TM \to M$. Αν η απεικόνιση $\sigma : M \to TM$ είναι ομαλή, τότε μιλάμε για *ομαλό διανυσματικό πεδίο*. Αν έχουμε δύο ομαλά διανυσματικά πεδία X και Y σε μια πολλαπλότητα M και μια ομαλή συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$, μπορούμε, εφαρμόζοντας το X στην f, να πάρουμε άλλη μια ομαλή συνάρτηση Xf. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το Y στην Xf παίρνουμε την ομαλή συνάρτηση YXf. Όμως ο τελεστής $f \mapsto YXf$ γενικά δεν ικανοποιεί τον κανόνα του γινομένου και επομένως δεν είναι πάντα διανυσματικό πεδίο. Μπορούμε όμως πάντα να πάρουμε ένα διανυσματικό πεδίο αν εφαρμόσουμε τον τελεστή $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ στην f που ορίζεται ως

$$[X, Y]f = XYf - YXf$$

στην f.

Ο τελεστής αυτός καλείται *αγκύλη Lie του* X *και* Y . Η τιμή του διανυσματικού πεδίου $[X, Y]$ σε ένα σημείο $p \in M$ δίνεται από τον τύπο

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

Λήμμα 3.3.1. Η αγκύλη Lie κάθε ζεύγους ομαλών διανυσματικών πεδίων είναι ομαλό διανυσματικό πεδίο.

Απόδειξη. Έστω X και Y διανυσματικά πεδία σε μια πολλαπλότητα M. Αρκεί να δείξουμε ότι το $[X, Y]$ είναι παραγώγιση στο $C^\infty(M)$. Για $f, g \in C^\infty(M)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\
&= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf - YfXg - fYXg - YgXf - gYXf \\
&= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\
&= f[X, Y]g + g[X, Y]f
\end{aligned}$$

□

Έστω M ομαλή n-πολλαπλότητα και $(U, (x^i))$ ομαλός χάρτης στην M. Ένα *διανυσματικό πεδίο συντεταγμένων* είναι η απεικόνιση

$$p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p .$$

Μια διατεταγμένη k-άδα διανυσματικών πεδίων $(X_1, \ldots, X_k)$ ορισμένη σε κάποιο υποσύνολο $A \subseteq M$, λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητη*, αν η $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη k-άδα στον T_pM για κάθε $p \in A$ και λέμε ότι *παράγει την εφαπτομένη δέσμη* αν η $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$ παράγει τον T_pM για κάθε $p \in A$. Ένα *τοπικό πλαίσιο για την* M είναι μια διατεταγμένη n-άδα διανυσματικών πεδίων $(E_1, \ldots, E_n)$ ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq M$, η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει την εφαπτομένη δέσμη. Αν $U = M$ τότε λέγεται *ολικό πλαίσιο* και αν κάθε E_i είναι ομαλό διανυσματικό πεδίο, λέγεται *ομαλό πλαίσιο*.

Για δύο ομαλά διανυσματικά πεδία X, Y σε μια ομαλή πολλαπλότητα M, αν είναι $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ και $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ οι αναπαραστάσεις των X, Y στο ομαλό σύστημα συντεταγμένων (x^i) της M. Τότε η αγκύλη Lie γράφεται

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω τα διανυσματικά πεδία X, Y στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζονται από $X = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2 \frac{\partial}{\partial y}$ και $Y = \frac{\partial}{\partial y}$. Θα υπολογίσουμε την αγκύλη Lie των παραπάνω διανυσματικών πεδίων. Έχουμε

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= X(1)\frac{\partial}{\partial y} - Y(y)\frac{\partial}{\partial z} + Y(2xy^2)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} + 4xy\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

3.4 Συνεφαπτόμενος Χώρος

Μπορούμε να ορίσουμε τον δυϊκό χώρο του T_pM μιας ομαλής πολλαπλότητας M, ο οποίος συμβολίζεται με T_p^*M και αποτελείται από τα γραμμικά συναρτησιακά από το T_pM στο $\mathbb{R}$. Τα στοιχεία του T_p^*M ονομάζονται *εφαπτόμενα συνδιανύσματα* στο p. Αν $(e_1, \ldots, e_n)$ είναι μια βάση του T_pM με διάσταση n, τότε μια βάση του T_p^*M είναι η $(e^1, \ldots, e^n)$ ώστε

$$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

(όπου δ^i_j το σύμβολο Kronecker δέλτα) και ονομάζεται *δυϊκή βάση* της $(e_1, \ldots, e_n)$. Συνεπώς η διάσταση του T_p^*M είναι ίδια με τη διάσταση του T_pM. Η διακεκριμένη ένωση

$$T^*M = \bigcup T_p^*M$$

ονομάζεται *συνεφαπτόμενη δέσμη της* M και έχει μια φυσική προβολή $\pi : T^*M \to M$ που στέλνει τα $\omega \in T_p^*M$ στα $p \in M$. Η συνεφαπτόμενη δέσμη, όπως και η εφαπτόμενη δέσμη, είναι μια ειδική περίπτωση διανυσματικής δέσμης.

3.5 Τανυστές

Ορισμός 3.5.1. Έστω E ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και E^* ο δυϊκός του χώρος. Για $p, q \geq 0$, ορίζουμε το $T^p_q(E)$ ως το σύνολο όλων των πολυ-γραμμικών απεικονίσεων

$$f : (E^*)^p \times E^q \to \mathbb{R}.$$

Οι απεικονίσεις αυτές λέγονται *τανυστές βαθμού* (p, q). Το σύνολο $T(E) = \bigcup_{p,q=0}^{\infty} T^p_q(E)$ είναι στο σύνολο των *τανυστών*.

Έστω $V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_l$ πραγματικοί διανυσματικοί χώροι και f, g πολυ-γραμμικές απεικονίσεις από το $V_1, \ldots, V_k$ στο $\mathbb{R}$ και $W_1, \ldots, W_l$ στο $\mathbb{R}$ αντίστοιχα. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f \otimes g : V_1 \times \cdots \times V_k \times W_1 \times \cdots \times W_l \to \mathbb{R}$ ως

$$f \otimes g(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) = f(v_1, \ldots, v_k)g(w_1, \ldots, w_l).$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται *τανυστικό γινόμενο*.

Τα διανύσματα είναι τανυστές βαθμού $(1, 0)$ ενώ τα συνδιανύσματα είναι τανυστές βαθμού $(0, 1)$. Για $u_1, \ldots, u_p \in E$ και $v^1, \ldots, v^q \in E^*$, το

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^q(x^1, \ldots, x^p, y_1, \ldots, y_q) := x^1(u_1) \ldots x^p(u_p)v^1(y_1) \ldots v^q(y_q)$$

ορίζει έναν τανυστή στο $T^p_q(E)$.

Ορισμός 3.5.2. Ένα *τανυστικό πεδίο* βαθμού (p,q) σε μια πολλαπλότητα M, είναι μια συνάρτηση $f : M \to T^p_q(T_xM)$ ώστε $f(x) \in T^p_q(T_xM)$ και για κάθε $\omega_1, \dots, \omega_p \in T^*_xM$ και $X_1, \dots, X_q \in T_xM$ η συνάρτηση

$$x \mapsto f(\omega^1(x), \dots, \omega^p(x), X_1(x), \dots, X_q(x))$$

είναι $C^\infty(M)$. Ο χώρος των (p,q)-τανυστικών πεδίων συμβολίζεται με $\Gamma^p_q(M)$.

Για δύο δείκτες $I = (i_1, \dots, i_p)$ και $J = (j_1, \dots, j_q)$, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $e^J = e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p} \in T^p_0(E)$ και $e_I = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \in T^0_q(E)$ και $e^J \otimes e_I \in T^p_q(E)$ για συντομία.

Πρόταση 3.5.1. Οι τανυστές $e_I \otimes e^J$ αποτελούν βάση για τον $T^p_q(E)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in T^p_q(E)$. Η f γράφεται

$$f = \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} f(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots e_{j_q}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$$

$$= \sum_{I,J} f^I_J e_I \otimes e^J$$

όπου $f^I_J = f(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$. Βλέπουμε ότι τα διανύσματα $e_I \otimes e^J$ παράγουν τον $T^p_q(E)$.
Έστω τώρα ότι $f = \sum_{I,J} f^I_J e^J_I = 0$, αν πάρουμε $v = (e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q})$ τότε $f(v) = 0$ και επομένως $f = 0$, δηλαδή τα $e_I \otimes e^J$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

□

Κεφάλαιο 4

Διαφορικές Μορφές και Ολοκλήρωση σε Πολλαπλότητες

4.1 Διαφορικές Μορφές

Για να μπορέσουμε να γενικεύσουμε την έννοια του ολοκληρώματος σε πολλαπλότητες, θα πρέπει πρώτα να εισάγουμε την έννοια της διαφορικής μορφής. Οι διαφορικές μορφές, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο έχουν καθοριστικό ρόλο στη μελέτη της συνομολογίας de Rham μιας πολλαπλότητας.

Μια *διαφορική 1-μορφή* σε μια ομαλή πολλαπλότητα M είναι μια συνάρτηση ω που αναθέτει σε κάθε σημείο $p \in M$ ένα συνδιάνυσμα $\omega_p \in T_p^*M$ στο p.
Αν έχουμε έναν χάρτη $(U, x^1, ..., x^n)$ σε μια πολλαπλότητα M τότε μια βάση του T_p^*M αποτελείται από τα

$$e^i = dx_p^i$$

για $i = 1, \dots, n$, διότι

$$(dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \bigg|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \bigg|_p x^i = \delta_j^i.$$

Επομένως κάθε 1-μορφή ω μπορεί να γραφτεί ως

$$\omega = \sum_i a_i dx^i \tag{4.1}$$

για a_i συναρτήσεις στο U. Αν έχουμε μια C^∞ συνάρτηση f στην M λοιπόν, τότε η df στο U γράφεται

$$df = \sum_i a_i dx^i \tag{4.2}$$

Για να βρούμε τα a_j, υπολογίζουμε την 4.2 στα $\partial/\partial x^j$,

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_i a_i dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \implies \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_i a_i \delta_j^i = a_j.$$

Συνεπώς η df γράφεται

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Τώρα θα γενικεύσουμε τις 1-μορφές σε k-μορφές για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο k.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $\Lambda^k(E)$ υπόχωρος του $T_k^0(E)$ που αποτελείται από τανυστές f ώστε

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma f(x_1, \dots, x_k)$$

για κάθε $i, j = 1, \dots, k$. Οι τανυστές στον $\Lambda^k(E)$ λέγονται *k-μορφές*.

Έστω α μια k-μορφή και β μια ℓ-μορφή, τότε το *γινόμενο σφήνα* τους είναι μια $(k+\ell)$-μορφή που ορίζεται από

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in S_n^*} (-1)^\sigma \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \beta(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+\ell)})$$

όπου S_n^* το σύνολο των μεταθέσεων σ του συνόλου $\{1,\dots,k+\ell\}$ ώστε $\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(k)$ και $\sigma(k+1)<\sigma(k+2)<\cdots<\sigma(k+\ell)$.

Το γινόμενο σφήνα είναι διγραμμικό, προσεταιριστικό και ικανοποιεί

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{k\ell}\beta\wedge\alpha$$

για $\alpha\in\Lambda^k$ και $\beta\in\Lambda^\ell$. Επιπλέον αν έχουμε δύο ομαλές μορφές ω και σ σε μια πολλαπλότητα M, τότε η $\omega\wedge\sigma$ είναι επίσης ομαλή.

Για ω μια k-μορφή σε μια πολλαπλότητα M και $X_1,\dots,X_k$ διανυσματικά πεδία στην M, η συνάρτηση $\omega(X_1,\dots,X_k)$ ορίζεται από

$$(\omega(X_1,\dots,X_k))(p)=\omega_p((X_1)_p,\dots,(X_k)_p).$$

Αν ο διανυσματικός χώρος E έχει διάσταση n τότε ο $\Lambda^k(E)$ έχει διάσταση $\binom{n}{k}$.

Αν $(U,x_1,\dots,x_n)$ είναι χάρτης μιας πολλαπλότητας M τότε μια k-μορφή ω στο U γράφεται $\omega=\sum a_I dx^I$ με a_I συναρτήσεις στο U. Η ω είναι ομαλή k-μορφή αν και μόνο αν οι a_I είναι ομαλές συναρτήσεις.

Ορισμός 4.1.2. Για $f\in C^\infty(M)$ και $X_p\in T_p(M)$, η *εξωτερική παράγωγος* της f ορίζεται ως $df(X_p)=X_p(f)$. Για ω μια k-μορφή, η *εξωτερική παράγωγος* $d\omega$ είναι η $(k+1)$-μορφή

$$\omega=\sum_{I,i}\frac{\partial\omega_I}{\partial x_i}dx^i\wedge dx^I$$

όπου $I=(i_1,\dots,i_k)$ και $dx^I=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$.

Πρόταση 4.1.1. (Ιδιότητες της εξωτερικής παραγώγου)

1. Αν ω είναι μια k-μορφή και ω' μια l-μορφή, τότε
$$d(\omega\wedge\omega')=d\omega\wedge\omega'+(-1)^k\omega\wedge d\omega'.$$
2. $$d^2=d\circ d=0.$$
3. $$d(a|_U)=da|_U$$
όπου U ανοιχτό υποσύνολο μίας πολλαπλότητας M.

Για κάποια πολλαπλότητα M θα συμβολίζουμε με Ω^kM την ομαλή δέσμη που ορίζεται από

$$(\Omega^kM)_p=\Lambda^k(T_pM)$$

και με $\Omega^k(M)$ τον χώρο των ομαλών τομέων στην Ω^kM. Τέλος ορίζουμε τον χώρο

$$\Omega^*(M):=\bigoplus_{k=0}^n\Omega^k(M).$$

Η *ανάσυρση* μιας k-μορφής ω από μια ομαλή απεικόνιση $F:M\to N$ μεταξύ των ομαλών πολλαπλοτήτων M μια N σε ένα σημείο p, είναι η ομαλή συνάρτηση

$$(F^*\omega)_p(X_1,\dots,X_k):=\omega_{F(p)}(F_{*,p}(X_1),\dots,F_{*,p}(X_k))$$

για $x\in M$ και $X_j\in T_pM$.

Πρόταση 4.1.2. Έστω $F:M\to N$ μια C^∞ απεικόνιση πολλαπλοτήτων, ω,σ k-μορφές στην M και $a\in\mathbb{R}$. Τότε

1. $F^*(\omega+\sigma)=F^*\omega+F^*\sigma$
2. $F^*(a\omega)=a(F^*\omega)$

Πρόταση 4.1.3. (Ιδιότητες της ανάσυρσης)

1. $F^*(\alpha\wedge\beta)=F^*\alpha\wedge F^*\beta$ για δύο διαφορικές μορφές α και β.

2. Η ανάσυρση μετατίθεται με την εξωτερική παράγωγο, δηλαδή

$$F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha).$$

Παράδειγμα 4.1.1. Θα υπολογίσουμε την ανάσυρση της μορφής $\omega = x^2ydx + 5zdy + ydz$ από την απεικόνιση $F(u,v) = (v, u^2, u+v)$.
Έχουμε

$$x = v$$
$$y = u^2$$

και

$$z = u + v.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$dx = dv$$
$$dy = 2udu$$

και

$$dz = du + dv.$$

Αντικαθιστώντας στην ω έχουμε

$$\begin{aligned} F^*\omega &= v^2u^2dv + 10(u+v)udu + u^2du + u^2dv \\ &= (v^2u^2 + u^2)dv + (10(u+v)u + u^2)du. \end{aligned}$$

4.2 Προσανατολισμοί

Έστω V διανυσματικός χώρος με διάσταση $n \geq 1$. Λέμε ότι δύο διατεταγμένες βάσεις $(E_1, ..., E_n)$ και $(E_1', \dots, E_n')$ του V είναι *συνεπώς προσανατολισμένες* αν ο πίνακας μετάβασης B_i^j που ορίζεται ως

$$E_i = B_i^j E_j'$$

έχει θετική ορίζουσα. Ο *προσανατολισμός του* V είναι μια κλάση ισοδυναμίας μεταξύ διατεταγμένων βάσεων του. Για μια διατεταγμένη βάση $(E_1, \dots, E_n)$ του V, συμβολίζουμε τον προσανατολισμό της με $[E_1, \dots, E_n]$ και τον αντίθετο προσανατολισμό της με $-[E_1, \dots, E_n]$. Ένας διανυσματικός χώρος V μαζί με μια επιλογή προσανατολισμού λέγεται *προσανατολισμένος διανυσματικός χώρος*. Κάθε βάση προσανατολισμένου διανυσματικού V χώρου που ανήκει στον προσανατολισμό του V καλείται *θετικά προσανατολισμένη* διαφορετικά καλείται *αρνητικά προσανατολισμένη*.

Έστω τώρα μια ομαλή n-πολλαπλότητα M, η επιλογή προσανατολισμού σε κάθε εφαπτόμενο χώρο της ονομάζεται *προσανατολισμός κατά σημείο*. Αν η M είναι εφοδιασμένη με προσανατολισμό κατά σημείο, και (E_i) ένα τοπικό πλαίσιο του TM, τότε λέμε ότι το (E_i) είναι *θετικά προσανατολισμένο* αν $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ είναι θετικά προσανατολισμένη βάση του T_pM για κάθε σημείο $p \in U$, αν η $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ είναι αρνητικά προσανατολισμένη τότε λέμε ότι το (E_i) είναι *αρνητικά προσανατολισμένο*. Ένας προσανατολισμός κατά σημείο λέγεται *συνεχής* αν κάθε σημείο της M είναι στο πεδίο ορισμού ενός προσανατολισμένου τοπικού πλαισίου. Ένας *προσανατολισμός της* M είναι ένας συνεχής προσανατολισμός κατά σημείο. Η M ονομάζεται *προσανατολίσιμη* αν υπάρχει προσανατολισμός σε αυτή, διαφορετικά λέγεται *μη-προσανατολίσιμη*. Μια *προσανατολισμένη πολλαπλότητα* είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(M, \mathcal{O})$, όπου M προσανατολίσιμη ομαλή πολλαπλότητα και $\mathcal{O}$ μια επιλογή προσανατολισμού για την M. Για κάθε $p \in M$ ο προσανατολισμός του T_pM που καθορίζεται από τον $\mathcal{O}$ συμβολίζεται με $\mathcal{O}_p$.

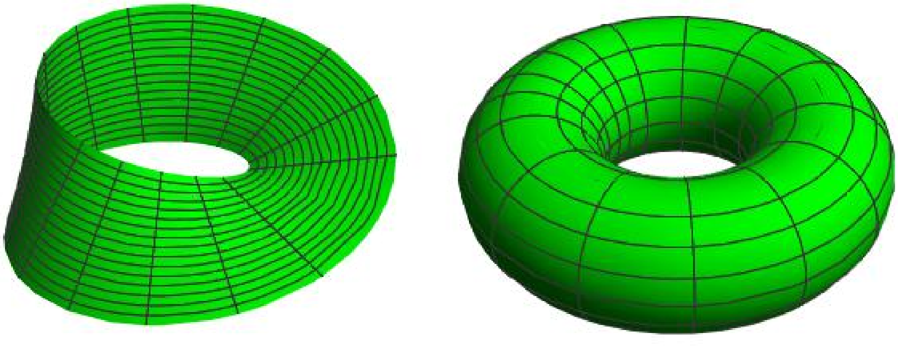
Παράδειγμα 4.2.1. (Η λωρίδα του Möbius). Η λωρίδα του Möbius είναι η πολλαπλότητα πηλίκο

$$M = R/\sim,$$

με $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 < y < 1\}$ καί κλάση ισοδυναμίας

$$(0,y) \sim (1,-y).$$

Θα δείξουμε ότι η λωρίδα του Möbius δεν είναι προσανατολίσιμη. Έστω, για άτοπο, ότι είναι και έστω U το σύνολο των εσωτερικών σημείων της. Ο προσανατολισμός της M περιορίζεται στον προσανατολισμό του U. Έστω ότι ο προσανατολισμός του U δίνεται από (e_1, e_2). Λόγω συνέχειας, οι προσανατολισμοί στα σημεία $(0,1)$ και $(1,0)$ δίνονται επίσης από τον (e_1, e_2). Όμως αφού $(0,y) \sim (1,-y)$, η διατεταγμένη βάση (e_1, e_2) στο $(1,0)$ απεικονίζεται στο $(e_1, -e_2)$ στο $(0,0)$. Επομένως στο $(0,0)$ ο προσανατολισμός είναι (e_1, e_2) και $(e_1, -e_2)$, άτοπο.



Σχήμα 4.1: Η λωρίδα του Möbius (αριστερά) δεν είναι προσανατολίσιμη πολλαπλότητα ενώ ο τόρος (δεξιά) είναι.

4.3 Ολοκλήρωση σε Πολλαπλότητες

Έστω $v_0, \dots, v_p$ σημεία στον $\mathbb{R}^n$. Τα σημεία αυτά λέγονται αφφινικά ανεξάρτητα αν δεν περιέχονται σε κανέναν αφφινικό υπόχωρο με διάσταση $p-1$.

Ορισμός 4.3.1. Το σύνολο

$$\Delta_p = \left\{ \sum_{i=0}^{p} x_i v_i \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 \le x_i \le 1, \sum_{i=0}^{p} x_i = 1 \right\},$$

για κάποια $p+1$ αφφινικά ανεξάρτητα σημεία $\{v_0, \dots, v_p\}$, ονομάζεται *σύμπλεγμα*. Τα σημεία $v_0, \dots, v_p$ ονομάζονται *κορυφές* του συμπλέγματος. Τα συμπλέγματα των οποίων οι κορυφές είναι μη-μηδενικά υποσύνολα του $\{v_0, \dots, v_p\}$ λέγονται *έδρες* του συμπλέγματος.

Έστω M πολλαπλότητα με διάσταση n. Ένα *ιδιάζον p-σύμπλεγμα* σ είναι μια απεικόνιση $\sigma : \Delta_p \to M$ που επεκτείνεται σε ομαλό διαφορομορφισμό από γειτονιά του $\Delta_p \subset \mathbb{R}^n$ στην M. Το 0-σύμπλεγμα ένα απλώς μια απεικόνιση από το σημείο $\{0\}$ σε σημείο της M. Το *κανονικό p-σύμπλεγμα* είναι το σύμπλεγμα $\Delta_p = [e_0, \dots, e_p] \subset \mathbb{R}^n$, όπου $e_0 = 0$ και e_i το i-οστό διάνυσμα της κανονικής βάσης. Για κάθε διατεταγμένη $(p+1)$-άδα σημείων $(w_0, \dots, w_p)$ στην M, υπάρχει μοναδική αφφινική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^p$ στον $\mathbb{R}^m$ που στέλνει το e_i στο w_i για $i = 0, \dots, p$. Ο περιορισμός αυτής της απεικόνισης στο Δ_p λέγεται *αφφινικό ιδιάζον σύμπλεγμα στην M* και συμβολίζεται με $A(w_0, \dots, w_p)$. Η *i-οστή απεικόνιση εδρών στο Δ_p*, για $i = 0, \dots, p$, είναι το αφφινικό ιδιάζον $(p-1)$-σύμπλεγμα $F_{i,p} : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ που ορίζεται ως

$$F_{i,p} = A(e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p).$$

Το *σύνορο* ενός p-συμπλέγματος είναι ένα $(p-1)$-σύμπλεγμα $\partial\sigma$ που ορίζεται ως

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}.$$

Η ελεύθερη Αβελιανή ομάδα που παράγεται από όλα τα ιδιάζοντα p-συμπλέγματα στην M καλείται *ιδιάζουσα ομάδα αλυσίδων βαθμού p στην M* και συμβολίζεται με $C_p(M)$. Η μοναδική απεικόνιση $\partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M)$ ονομάζεται *τελεστής συνόρου*.

Ορισμός 4.3.2. Μια *p-αλυσίδα* σε μια πολλαπλότητα M είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $c = \sum_i c_i \sigma_i$, όπου σ_i p-συμπλέγματα και c_i πραγματικοί αριθμοί.

Λήμμα 4.3.1. Αν c είναι μια ιδιάζουσα αλυσίδα, τότε $\partial(\partial(c)) = 0$.

Μια ιδιάζουσα p-αλυσίδα c καλείται *κύκλος* αν $\partial c = 0$ και *σύνορο* αν ισχύει $c = \partial b$ για κάποια ιδιάζουσα $(p+1)$-αλυσίδα b. Συμβολίζουμε με $Z_p(M)$ το σύνολο των ιδιαζόντων p-κύκλων σε μια πολλαπλότητα M και με $B_p(M)$ το σύνολο των ιδιαζόντων p-συνόρων. Η *p-οστή ομολογική ομάδα της M* είναι η ομάδα πηλίκο

$$H_p(M) = \frac{Z_p(M)}{B_p(M)}.$$

Η ακολουθία

$$\dots \longrightarrow C_{p+1}(M) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(M) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(M) \longrightarrow \dots$$

ονομάζεται *σύμπλεγμα ιδιαζόντων αλυσίδων*. Η κλάση ισοδυναμίας μιας p-αλυσίδας c στην $H_p(M)$ ονομάζεται *κλάση ομολογίας* και συμβολίζεται με $[c]$. Αν δύο p-κύκλοι διαφέρουν κατά ένα σύνορο, τότε λέγονται ομόλογοι. Η ομάδα ομολογίας μπορεί να γραφτεί ως

$$H_p(M) = \frac{\ker \partial_p}{\mathrm{im}\partial_{p-1}}.$$

Για κάποιον τοπολογικό χώρο M και μια Αβελιανή ομάδα G μπορούμε επίσης να ορίσουμε την *ιδιάζουσα συνομολογία $H^p(M, G)$ με συντελεστές από την G* . Ο ακριβής ορισμός της δεν θα μας απασχολήσει σε αυτήν την εργασία επομένως μπορούμε να αρκεστούμε στο γεγονός ότι η $H^p(M, \mathbb{R})$ είναι ισομορφική με τον χώρο $\mathrm{Hom}(H_p, \mathbb{R})$ των ομομορφισμών ομάδας από την $H_p(M)$ στον $\mathbb{R}$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε το ολοκλήρωμα διαφορικών μορφών σε πολλαπλότητες.

Ορισμός 4.3.3. Έστω ω μια p-μορφή σε μια ομαλή πολλαπλότητα M και σ ένα p-σύμπλεγμα. Ορίζουμε την *ολοκλήρωση της p-μορφής σε ένα p-σύμπλεγμα* ως

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^*\omega$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε το ολοκλήρωμα μια p-μορφής, από συμπλέγματα σε αλυσίδες ως εξής

$$\int_c \omega = \int_{\sum_i c_i\sigma_i} \omega = \sum_i c_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Παράδειγμα 4.3.1. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{T^2} xyz\ dw \wedge dy,$$

όπου $T^2 = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ ο 2-τόρος, που ορίζεται ως τα σημεία (w, x, y, z) ώστε $w^2 + x^2 = y^2 + z^2 = 1$, με τον προσανατολισμό γινομένου που ορίζει ο κανονικός προσανατολισμός στον S^1. Έστω η απεικόνιση $\sigma : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to T^2$ που ορίζεται ως

$$\sigma(w, x, y, z) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi).$$

Τότε

$$\begin{aligned} dw &= -\sin\theta\ d\theta \\ dx &= \cos\theta\ d\theta \\ dy &= -\sin\phi\ d\phi \\ dz &= \cos\phi\ d\phi, \end{aligned}$$

επομένως

$$\int_{T^2} xyz\ dw \wedge dy = \int_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} \sigma^*(xyz\ dw \wedge dy) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos\phi\sin^2\phi\ d\theta\ d\phi = 0.$$

Θεώρημα 4.3.1. (Θεώρημα Stokes). Έστω M μια προσανατολισμένη ομαλή n-πολλαπλότητα με σύνορο και ω μια ομαλή $(n-1)$-μορφή με συμπαγή φορέα στην M. Τότε

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Παράδειγμα 4.3.2. Το (γενικό) θεώρημα Stokes περιέχει τα γνωστά θεωρήματα από τον στοιχειώδη λογισμό όπως το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού, τα θεωρήματα Green, Gauss και Stokes. Για παράδειγμα το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού για τα επίκαμπυλια ολοκληρώματα μπορεί να προκύψει από το γενικό θεώρημα Stokes ως εξής. Έστω M ομαλή πολλαπλότητα και $\gamma : [a, b] \to M$ μια ομαλή εμφύτευση ώστε το $S = \gamma([a, b])$ είναι εμφυτευμένη 1-πολλαπλότητα με σύνορο στην M. Αν δώσουμε στην S έναν προσανατολισμό ώστε η γ να διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε για κάθε ομαλή συνάρτηση $f \in C^\infty(M)$ έχουμε από το θεώρημα Stokes

$$\int_\gamma df = \int_{[a,b]} \gamma^* df = \int_S df = \int_{\partial S} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

που είναι το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού για τα επίκαμπυλια ολοκληρώματα, στην περίπτωση που η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ο εγκλεισμός, τότε παίρνουμε το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού.

Κεφάλαιο 5

Συνομολογία De Rham

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το κύριο θέμα της εργασίας, τη συνομολογία de Rham. Η συνομολογία de Rham είναι χρήσιμο εργαλείο της τοπολογίας, που μας βοηθά να αντλήσουμε τοπολογικές πληροφορίες για μια ομαλή πολλαπλότητα μελετώντας διαφορικές μορφές σε αυτήν. Συγκεκριμένα θα μας απασχολήσουν οι κλειστές και πλήρεις μορφές. Μια διαφορική μορφή ω βαθμού k λέγεται *κλειστή* αν $d\omega = 0$ και *πλήρης* αν προκύπτει σαν εξωτερική παράγωγος μιας άλλης μορφής μικρότερης κατά 1 βαθμό, δηλαδή αν $\omega = ds$, για κάποια μορφή s βαθμού $k-1$.

Έστω $Z^k(M)$ ο διανυσματικός χώρος των κλειστών k-μορφών και $B^k(M)$ ο διανυσματικός χώρος των πλήρων k-μορφών, τότε ο χώρος πηλίκο $H^k_{dR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ λέγεται *συνομολογία de Rham* της M βαθμού k και μετράει το βαθμό που μια κλειστή k-μορφή αποτυγχάνει να είναι πλήρης. Η κλάση ισοδυναμίας μιας κλειστής μορφής ω στο H^k_{dR} ονομάζεται *κλάση συνομολογίας* και συμβολίζεται με $[\omega]$. Δύο μορφές ω, ω' ορίζουν την ίδια κλάση συνομολογίας αν ισχύει

$$\omega' = \omega + ds$$

για κάποια μορφή s. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι ω και ω' *συνομόλογες*.
Για μια ομαλή απεικόνιση $F : M \to N$ παίρνουμε μια παραγόμενη απεικόνιση στη συνομολογία που ορίζεται ως

$$F^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M),$$
$$F^* : [\alpha] \mapsto F^*\alpha.$$

Πρόταση 5.1.1. Αν μια πολλαπλότητα M αποτελείται από r συνεκτικά μέρη, τότε η συνομολογία de Rham της βαθμού 0 είναι $H^0(M) = \mathbb{R}^r$. Ένα στοιχείο της $H^0(M)$ αναπαρίσταται από μια r-αδα πραγματικών αριθμών καθένας από τους οποίους αναπαριστά μια σταθερή συνάρτηση σε συνεκτικό μέρος της M.

Απόδειξη. Λόγω του γεγονότος ότι δεν μπορούν να υπάρχουν πλήρεις μη-μηδενικές 0-μορφες συμπεραίνουμε ότι

$$H^0(M) = Z^0(M)$$

Έστω f κλειστή 0-μορφή στην M. Σε κάθε χάρτη $(U, x^1, ..., x^n)$ έχουμε

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Επομένως $df = 0$ στο U αν και μόνο αν οι μερικές παραγωγοί $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ μηδενίζονται στο U. Η f είναι σταθερή στο U και συνεπώς οι κλειστές 0-μορφές στην M είναι οι τοπικά σταθερές συναρτήσεις στην M. Η f πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε συνεκτικό μέρος της M και αν η M αποτελείται από r συνεκτικά μέρη τότε μια τοπικά σταθερή στην M μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διατεταγμένο σύνολο r πραγματικών αριθμών. Επομένως $Z^0(M) = \mathbb{R}^r$.

□

Πρόταση 5.1.2. Η συνομολογία de Rham $H^k(M)$ μιας πολλαπλότητας M με διάσταση n, μηδενίζεται για $k > n$.

Για κάθε ομαλή απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων $F : M \to N$, υπάρχει μια ανασυρτική απεικόνιση $F^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ διαφορικών μορφών η οποία μετατίθεται με την εξωτερική παράγωγο d.

Λήμμα 5.1.1. Η ανασυρτική απεικονίση, απεικονίζει κλειστές μορφές σε κλειστές μορφές και πλήρεις μορφές σε πλήρεις μορφές.

Απόδειξη. Έστω ω κλειστή μορφή. Αφού η F^* μετατίθεται με την d έχουμε

$$dF^*\omega = F^*d\omega = 0.$$

Επομένως η $F^*\omega$ είναι κλειστή.

Τώρα έστω $\omega = ds$ πλήρης μορφή. Τότε

$$F^*\omega = F^*ds = dF^*s.$$

Συνεπώς η $F^*\omega$ είναι πλήρης μορφή.

□

Η F^* ορίζει μια γραμμική απεικόνιση των χώρων πηλίκο, η οποία συμβολίζεται με $F^\sharp$ και ορίζεται ως

$$F^\sharp : \frac{Z^k(N)}{B^k(N)} \to \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$$

$$F^\sharp([\omega]) = [F^*(\omega)].$$

Η απεικόνιση αυτή, είναι απεικόνιση στη συνομολογία

$$F^\sharp : H^k(N) \to H^k(M)$$

και ονομάζεται *ανασυρτική απεικόνιση στη συνομολογία*. Αν $I_M : M \to M$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε η $I_M^\sharp : H^k(M) \to H^k(M)$ είναι επίσης η ταυτοτική απεικόνιση. Επιπλέον αν οι $F : M \to N$ και $G : N \to P$ είναι ομαλές απεικονίσεις, τότε

$$(G \circ F)^\sharp = F^\sharp \circ G^\sharp.$$

Πρόταση 5.1.3. Αν η $F : M \to N$ είναι διαφορομορφισμός πολλαπλοτήτων, τότε η $F^\sharp : H^k(N) \to H^k(M)$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού της συνομολογίας de Rham. Ο υπολογισμός της είναι αρκετά δύσκολος και χρονοβόρος, όμως όπως θα δούμε και σε επόμενη ενότητα, υπάρχουν τεχνικές που κάνουν τον υπολογισμό αυτό σημαντικά πιο εύκολο.

Παράδειγμα 5.1.1. (Η συνομολογία de Rham της πραγματικής ευθείας). Η πραγματική ευθεία είναι συνεκτική οπότε από την πρόταση 5.1.1 έχουμε

$$H^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

Η πραγματική ευθεία δεν έχει μη-μηδενικές 2-μορφές, οπότε κάθε 1-μορφή στο $\mathbb{R}$ είναι κλειστή. Μια 1-μορφή $f(x)dx$ στην $\mathbb{R}$ είναι πλήρης αν και μόνο αν υπάρχει C^∞ συνάρτηση $g(x)$ ώστε

$$f(x)dx = g'(x)dx$$

όμως η $g(x)$ είναι απλά η αντιπαράγωγος της $f(x)$ και επομένως κάθε 1-μορφή στην $\mathbb{R}$ είναι πλήρης. Οπότε $H^1(\mathbb{R}) \cong 0$. Από την πρόταση 5.1.2 η συνομολογία μηδενίζεται για $k \geq 1$. Τελικά έχουμε

$$H^k(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}.$$

□

Έστω η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to S^1$ που ορίζεται ως

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Θα δείξουμε οτι η απεικόνιση $\gamma^* : \Omega^*(S^1) \to \Omega^*(\mathbb{R})$ είναι 1-1. Η γ είναι υποεμβάπτιση αφού η παραγωγός $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ είναι μη-μηδενική για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $\omega_0 \in \Omega^1(S^1)$ ώστε $\gamma^*\omega_0 = 0$ στον $\Omega^1(\mathbb{R})$. Έστω $v \in T_{p_0}S^1$ για κάποιο $p_0 \in S^1$. Η γ είναι επί, άρα υπάρχει $p_0' \in \mathbb{R}$ ώστε $\gamma p_0' = p_0$. Η γ είναι όμως υποεμβάπτιση στο p_0', οπότε υπάρχει διάνυσμα $v' \in T_{p_0'}\mathbb{R}$ ώστε $\gamma_{*,p_0'}v' = v$. Άρα αφού $\gamma^*\omega_0 = 0$, τότε

$$0 = (\gamma^*\omega_0)_{p_0'}(v') = (\omega_0)_{\gamma(p_0')}(\gamma_* v') = (\omega_0)_{p_0} v.$$

Συνεπώς $\omega_0 = 0$ και άρα η απεικόνιση $\gamma^* : \Omega^1(S^1) \to \Omega^1(\mathbb{R})$ είναι 1-1.

Πρόταση 5.1.4. Η ανασυρτική απεικόνιση $\gamma^* : \Omega^*(S^1) \to \Omega^*(\mathbb{R})$ ταυτίζει ομαλές 0-μορφές και 1-μορφές στον S^1 με ομαλές 2π-περιοδικές 0-μορφές και 1-μορφές αντίστοιχα, στον $\mathbb{R}$.

Λήμμα 5.1.2. Αν f είναι μια C^∞ περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π στον $\mathbb{R}$ και $\int_0^{2\pi} f(s)ds = 0$, τότε ισχύει $fdt = dg$ για κάποια C^∞ περιοδική συνάρτηση g με περίοδο 2π στον $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $g \in \Omega^0(\mathbb{R})$ 2π-περιδική συνάρτηση που ορίζεται ως

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Η f είναι 2π-περιοδική και αφού ισχύει $\int_0^{2\pi} f(s)ds = 0$, τότε

$$\begin{aligned} g(t+2\pi) &= \int_0^{2\pi} f(s)ds + \int_{2\pi}^{t+2\pi} f(s)ds \\ &= 0 + \int_{2\pi}^{t+2\pi} f(s)ds = \int_0^t f(s)ds = g(t). \end{aligned}$$

Επομένως η $g(t)$ είναι 2π-περιοδική στον $\mathbb{R}$ και

$$dg = g'(t)dt = f(t)dt.$$

□

Παράδειγμα 5.1.2. (Συνομολογία de Rham του κύκλου). Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο S^1 στο επίπεδο xy. Ο S^1 είναι συνεκτικός και επομένως $H^0(S^1) \cong \mathbb{R}$ από την πρόταση 5.1.1 και $H^k(S^1) = 0$ για $k \geq 2$ μιας και ο S^1 έχει διάσταση 1.

Για την $H^1(S^1)$ θα πάρουμε τον S^1 στην παραμετρική μορφή $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, με $\gamma : \mathbb{R} \to S^1$. Όπως είδαμε προηγουμένως, η απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \to S^1$ είναι υποεμβάπτιση. Έστω $i : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ο εγκλεισμός. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της γ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παίρνουμε την παραμετροποίηση $F := \gamma \circ i : [0, 2\pi] \to S^1$ του κύκλου.

Θα βρούμε ένα διανυσματικό πεδίο στον μοναδιαίο κύκλο, έχουμε

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) = (-y, x)$$

Επομένως το διανυσματικό πεδίο γράφεται

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

ως προς τη βάση $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ του εφαπτομένου χώρου του S^1 στο σημείο $p = (x, y)$ και είναι ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο στον S^1. Θα βρούμε μια 1-μορφή στον S^1 που δεν μηδενίζεται πουθενά στον S^1, θα αναζητήσουμε 1-μορφή της μορφής $\omega = adx + bdy$ ώστε $\omega(X) \equiv 1$, έχουμε λοιπόν

$$\omega(X) = (adx + bdy)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) = -ay + bx = 1$$

Στον S^1 ισχύει $x^2 + y^2 = 1$, επομένως παίρνουμε $a = -y$ και $b = x$, άρα μια επιθυμητή 1-μορφή είναι η $\omega = -ydx + xdy$.

Τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της ω στον S^1, για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ανάσυρση $\gamma^*\omega$. Ισχύει

$$\begin{aligned} dx &= -\sin t \; dt \\ dy &= \cos t \; dt \end{aligned}$$

άρα

$$\gamma^*\omega = \gamma^*(-ydx + xdy) = dt$$

και συνεπώς

$$F^*\omega = i^*\gamma^*\omega = i^*dt = dt.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της ω στον S^1, έχουμε

$$\int_{S^1} \omega = \int_{F([0,2\pi])} \omega = \int_{[0,2\pi]} F^*\omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Ο S^1 έχει διαστάση 1 που σημαίνει ότι όλες οι 1-μορφές σε αυτόν είναι κλειστές. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : Z^1(S^1) = \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(\alpha) = \int_{S^1} \alpha.$$

Η ϕ είναι μια γραμμική απεικόνιση και αφού $\phi(\omega) = 2\pi \neq 0$, τότε είναι και επί.

Από το θεώρημα Stokes έχουμε για κάποια πλήρη 1-μορφή α

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} d\beta = \int_{\partial S^1} \beta = 0,$$

με β κάποια 0-μορφή, επομένως οι πλήρεις 1-μορφές του S^1 ανήκουν στον $\ker \phi$. Θα δείξουμε ότι όλες οι 1-μορφές στο $\ker \phi$ είναι πλήρεις. Έστω $\alpha = f\omega$ μια ομαλή 1-μορφή στον S^1 ώστε $\phi(\alpha) = 0$. Έστω $\bar{f} = \gamma^* f = f \circ \gamma \in \Omega^0(\mathbb{R})$. Τότε η $\bar{f}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και

$$0 = \int_{S^1} \alpha = \int_{F([0,2\pi])} \alpha = \int_{[0,2\pi]} F^*\alpha = \int_{[0,2\pi]} (i^*\gamma^* f)(t) \cdot F^*\omega = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t)dt.$$

Αφού η $\bar{f}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και $\int_0^{2\pi} \bar{f}(t)dt = 0$, τότε από το λήμμα 5.1.2, υπάρχει C^∞, 2π-περιοδική συνάρτηση $\bar{g}$ ώστε

$$\bar{f}dt = d\bar{g}.$$

Από την πρόταση 5.1.4 έχουμε $\bar{g} = \gamma^* g$ για κάποια ομαλή συνάρτηση g στον S^1. Συνεπώς

$$d\bar{g} = d\gamma^* g = \gamma^*(dg).$$

Τώρα

$$\bar{f}(t)dt = (\gamma^* f)(\gamma^* \omega) = \gamma^*(f\omega) = \gamma^* \alpha.$$

Είδαμε ότι η γ είναι 1-1, οπότε $\alpha = dg$. Επομένως ο πυρήνας της ϕ αποτελείται από πλήρεις μορφές και

$$H^1(S^1) = \frac{Z^1(S^1)}{B^1(S^1)} \cong \mathbb{R}.$$

□

Πριν προχωρήσουμε στην συνομολογία του προβολικού χώρου θα αποδείξουμε ένα λήμμα από τη γραμμική άλγεβρα.

Λήμμα 5.1.3. Έστω V ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος καί $P : V \to V$ μία γραμμική απεικόνιση ώστε $P^2 = I$. Τότε ο χώρος V αποσυντίθεται σε ευθύ άθροισμα των $+1$ και -1 ιδιοχώρων (V^+ και V^- αντίστοιχα) του P.

Απόδειξη. Έστω $V^+ = \ker(P - I)$ και $V^- = \ker(P + I)$.
Ισχύει $V^+ \cap V^- = \{0\}$ αφού για $v \in V^+ \cap V^-$ έχουμε $Pv = v = -v \implies v = 0$.
Είναι προφανές ότι $V^+ \oplus V^- \subset V$.
Έστω $v \in V$. Το v μπορεί να γραφτεί ως $v = \frac{1}{2}(v + Pv) + \frac{1}{2}(v - Pv)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(P - I)\left(\frac{1}{2}(v + Pv)\right) &= \frac{1}{2}\left(Pv + P^2 v - v - Pv\right)\\ &= \frac{1}{2}(v - v) \qquad (\text{αφού } P^2 = I)\\ &= 0\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $\frac{1}{2}(v + Pv) \in V^+$.
Αντίστοιχα έχουμε

$$\begin{aligned}(P + I)\left(\frac{1}{2}(v - Pv)\right) &= \frac{1}{2}(Pv - P^2 v + v - Pv)\\ &= \frac{1}{2}(v - v)\\ &= 0\end{aligned}$$

δηλαδή $\frac{1}{2}(v - Pv) \in V^-$.

□

Για να υπολογίσουμε τη συνομολογία του προβολικού χώρου, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν } k=0 \text{ ή } k=n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

την οποία θα αποδείξουμε σε επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 5.1.3. (Η συνομολογία του προβολικού χώρου). Ο προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι ο χώρος που προκύπτει αν ταυτίσουμε αντίποδα σημεία της S^n επομένως η απεικόνιση πηλίκο $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ είναι επί τοπικός διαφορομορφισμός ώστε

$$\pi(p) = \pi(q)$$

αν και μόνο αν

$$p = q$$

ή

$$p = -q.$$

Θα δείξουμε ότι η συνομολογία de Rham του $\mathbb{R}P^n$ είναι

$$H^k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν } k=0 \text{ ή } k=n \text{ για } n \text{ περιττό} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $a : S^{n-1} \to S^{n-1} : x \mapsto -x$. Είναι προφανές ότι $a^2 = \mathrm{Id}$.
Από την a προκύπτει η αντίστοιχη απεικόνιση $a^* : H^{n-1}(S^{n-1}) \to H^{n-1}(S^{n-1}) : x \mapsto (-1)^n x$ στη συνομολογία και η $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{R}P^n) \to \Omega^k(S^n)^+$, επομένως $\pi \circ a = \pi$ και $a^*\pi^* = \pi^*$.
Ισχύει $(a^*)^2 = \mathrm{Id}$ επομένως από το λήμμα 5.1.3 ο χώρος $\Omega^k(S^n)$ αποσυντίθεται ως $\Omega^k(S^n)^+ \oplus \Omega^k(S^n)^-$ και εύκολα βλέπουμε ότι η εξωτερική παράγωγος διατηρεί αυτή την αποσύνθεση.

Αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{R}P^n) \to \Omega^k(S^n)^+$ ώστε

$$(\pi^*\omega)_p(v_1, \dots) = \omega_{\pi(p)}((\pi_*)_p v_1, \dots)$$

είναι ισομορφισμός. Βλέπουμε ότι

$$\pi^*\omega = \eta \iff \omega_q(w_1, \dots) = \eta_p(v_1, \dots)$$

για κάθε $p \in S^n$ ώστε $\pi(p) = q$ και $v_i \in S^n_p$ ώστε $(\pi_*)_p v_i = w_i$. Για κάθε $q, w_1, \dots$ μπορούμε να διαλέξουμε ακριβώς δύο $p, v_1, \dots,$ τις $p, (\pi_{*,p})^{-1} w_1, \dots$ και $a(p), a_*(\pi_{*,p})^{-1} w_1, \dots$. Τότε η σχέση $\omega_q(w_1, \dots) = \eta_p(v_1, \dots)$ προσδιορίζει το ω με μοναδικό τρόπο αν και μόνο αν για κάθε $p, v_1, \dots$ ισχύει

$$\eta_p(v_1, \dots) = \eta_{a(p)}(a_* v_1, \dots) = (a^*\eta)_p(v_1, \dots)$$

δηλαδή $\eta \in \Omega^k(S^n)^+$.

5.2 Δακτύλιοι Συνομολογίας

Μπορούμε να εφοδιάσουμε τον διανυσματικό χώρο $\Omega^*(M)$ των διαφορικών μορφών, με το γινόμενο σφήνα, δίνοντας έτσι μια πολλαπλασιαστική δομή στον $\Omega^*(M)$. Η δομή αυτή ορίζει πολλαπλασιαστική δομή στη συνομολογία, για $[\omega] \in H^k(M)$ και $[\sigma] \in H^\ell(M)$, ορίζουμε

$$[\omega] \wedge [\sigma] = [\omega \wedge \sigma] \in H^{k+\ell}(M).$$

Θα δείξουμε ότι το γινόμενο σφήνα είναι καλά ορισμένο. Θα πρέπει να ελέγξουμε τις ακόλουθες τρεις προτάσεις για τις κλειστές μορφές ω, σ. Το γινόμενο σφήνα $\omega \wedge \sigma$ είναι κλειστή μορφή. Πράγματι, έχουμε

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma = 0.$$

Επιπλέον αν στην κλάση $[\omega \wedge \sigma]$, η σ αντικατασταθεί από μια συνομόλογη μορφή $\sigma' = \sigma + d\tau$ τότε στην εξίσωση

$$\omega \wedge \sigma' = \omega \wedge \sigma + \omega \wedge d\tau$$

θα πρέπει να δείξουμε ότι η $\omega \wedge d\tau$ είναι πλήρης μορφή. Έχουμε

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau = (-1)^k \omega \wedge d\tau$$

και επομένως η $\omega \wedge d\tau$ είναι πλήρης. Με άλλα λόγια η κλάση $[\omega \wedge \sigma]$ είναι ανεξάρτητη από επιλογή αντιπροσώπου για την $[\sigma]$. Τέλος μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να δείξουμε ότι η κλάση $[\omega \wedge \sigma]$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή αντιπροσώπου για την $[\omega]$.

Αν M είναι μια n-πολλαπλότητα τότε ορίζουμε

$$H^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{dR}(M).$$

Τα στοιχεία $\omega \in H^*(M)$ δηλαδή γράφονται με μοναδικό τρόπο σαν πεπερασμένο άθροισμα κλάσεων συνομολογίας στην $H^k_{dR}(M)$ για διάφορα k

$$\omega = \omega_1 + ... + \omega_n$$

με $\omega_k \in H^k_{dR}(M)$. Ο $H^*(M)$ σχηματίζει δακτύλιο με την πρόσθεση και το γινόμενο σφήνα και ονομάζεται *δακτύλιος συνομολογίας* της M.

Ένας δακτύλιος R λέγεται *βαθμωτός* αν μπορεί να γραφτεί σαν ευθύ άθροισμα

$$R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R^k$$

ώστε ο πολλαπλασιασμός του δακτυλίου να στέλνει το $R^k \times R^\ell$ στο $R^{k\times\ell}$. Ένας βαθμωτός δακτύλιος $R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R^k$ λέγεται αντιμεταθετικός αν για κάθε $r \in R^k$ και $s \in R^\ell$ ισχύει

$$r \cdot s = (-1)^{k\ell} s \cdot r$$

Ο δακτύλιος συνομολογίας $H^*(M)$ είναι ένας αντιμεταθετικός βαθμωτός δακτύλιος.

Πρόταση 5.2.1. Αν οι M και N είναι διαφορομορφικές πολλαπλότητες, τότε οι αντίστοιχοι δακτύλιοι $H^*(M)$ και $H^*(N)$ είναι ισομορφικοί.

Απόδειξη. Έστω $F : M \to N$ διαφορομορφισμός. Τότε ορίζεται η F^{-1} και επομένως οι

$$F^{-1*} \circ F^* = (F \circ F^{-1})^*$$

και

$$F^* \circ F^{-1*} = (F^{-1} \circ F)^*$$

είναι η ταυτοτική απεικόνιση, συνεπώς η F^* είναι ισομορφισμός με αντίστροφη F^{-1*}.

□

5.3 Η μακρά πλήρης ακολουθία στη συνομολογία

Ορισμός 5.3.1. Ένα *σύμπλεγμα συναλυσίδων* $\mathcal{C}$ είναι μια συλλογή διανυσματικών χώρων $\{C^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ μαζί με μια ακολουθία γραμμικών απεικονίσεων $d_k : C^k \to C^{k+1}$ όπως φαίνεται και στο ακόλουθο διάγραμμα

$$\dots \longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

ώστε

$$d_k \circ d_{k-1} = 0$$

για κάθε k.

Ο διανυσματικός χώρος $\Omega^*(M)$ διαφορικών μορφών σε μια πολλαπλότητα M εφοδιασμένος με την εξωτερική παράγωγο d είναι ένα σύμπλεγμα συναλυσίδων και ονομάζεται σύμπλεγμα de Rham της M,

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \xrightarrow{d} \dots$$

με

$$d \circ d = 0$$

Ορισμός 5.3.2. Μια ακολουθία ομομορφισμών διανυσματικών χώρων

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

λέγεται *πλήρης* στον B αν $\mathrm{im} f = \ker g$. Μια ακολουθία ομομορφισμών

$$A^0 \xrightarrow{f_0} A^1 \xrightarrow{f_1} A^2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A^n$$

που είναι πλήρης σε κάθε όρο εκτός από τον πρώτο και τελευταίο λέγεται *πλήρης ακολουθία*.

Μια πλήρης ακολουθία πέντε όρων της μορφής

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

λέγεται *μικρή πλήρης ακολουθία.*

Πρόταση 5.3.1. Έστω η πλήρης ακολουθία

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad g \quad} C \ .$$

Τότε η f είναι επί αν και μόνο αν $g = 0$. Επιπλέον η g είναι 1-1 αν και μόνο αν $f = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι είναι επί, τότε $\mathrm{im} f = B$. Αφού η ακολουθία είναι πλήρης, τότε $B = \mathrm{im} f = \ker g$ αν και μόνο αν $g = 0$.

Τώρα έστω ότι η g είναι 1-1. Επομένως $\ker g = \{0\}$. Όμως λόγω πληρότητας, έχουμε $\mathrm{im} f = \ker g = \{0\}$ αν και μόνο αν $f = 0$.

□

5.4 Ομοτοπία

Ορισμός 5.4.1. Έστω M και N δύο πολλαπλότητες. Δύο C^∞ απεικονίσεις $f, g : M \to N$ είναι *ομαλά ομοτοπικές* αν υπάρχει C^∞ απεικόνιση

$$F : M \times \mathbb{R} \to N$$

ώστε

$$F(x, 0) = f(x)$$

και

$$F(x, 1) = g(x)$$

για κάθε $x \in M$. Η απεικόνιση F λέγεται *ομοτοπία από την f στην g.*

Ορισμός 5.4.2. Μια απεικόνιση $f : M \to N$ ονομάζεται *ομοτοπική ισοδυναμία* αν υπάρχει μια απεικόνιση $g : N \to M$ ώστε $g \circ f$ να είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση Id_M στην M και $f \circ g$ να είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση Id_N στην N. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η M είναι *ομοτοπικά ισοδύναμη* με την N. Αν μια πολλαπλότητα είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με ένα σημείο, λέμε ότι είναι *συσταλτή.*

Ορισμός 5.4.3. Έστω M πολλαπλότητα, S υποπολλαπλότητα της M και $i : S \to M$ ο εγκλεισμός. Μια *σύμπτυξη* από την M στην S είναι μια απεικόνιση $r : M \to S$ ώστε $r \circ i = \mathrm{Id}_S$. Αν υπάρχει σύμπτυξη από την M στην S, τότε η S ονομάζεται *σύμπτυγμα* της M.

Θεώρημα 5.4.1. Οι ομοτοπικές απεικονίσεις $f_0, f_1 : M \to N$, ορίζουν την ίδια απεικόνιση $f_0^* = f_1^* : H^*(N) \to H^*(M)$ στη συνομολογία.

Πρόταση 5.4.1. Έστω $f : M \to N$ ομοτοπική ισοδυναμία. Τότε η απεικόνιση που ορίζει στη συνομολογία

$$f^* : H^*(N) \to H^*(M)$$

είναι ισομορφισμός.

5.5 Ο συνδετικός ομομορφισμός

Αν $\mathcal{C}$ είναι ένα σύμπλεγμα συναλυσίδων τότε ισχύει

$$\mathrm{im} d_{k-1} \subset \ker d_k.$$

Επομένως μπορούμε να σχηματίσουμε τον διανυσματικό χώρο πηλίκο

$$H^k(\mathcal{C}) := \frac{\ker d_k}{\mathrm{im} d_{k-1}},$$

ο οποίος ονομάζεται *k-στός διανυσματικός χώρος του συμπλέγματος συναλυσίδων $\mathcal{C}$.* Τα στοιχεία του χώρου C^k *λέγονται συναλυσίδες βαθμού k ή k-συναλυσίδες.* Μια k-συναλυσίδα στον $\ker d_k$ λέγεται *k-συγκύκλος* και μια k-συναλυσίδα στον $\mathrm{im} d_{k-1}$ λέγεται *k -συνσύνορο.* Η κλάση ισοδυναμίας $[c] \in H^k(\mathcal{C})$ για $c \in \ker d_k$ λέγεται *κλάση συνομολογίας.* Οι υπόχωροι των k-συγκύκλων και k-συνσυνόρων συμβολίζονται με $Z^k(\mathcal{C})$ και $B^k(\mathcal{C})$ αντίστοιχα. Αν $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι συμπλέγματα συναλυσίδων με παραγώγους d και d' αντίστοιχα, μια *απεικόνιση συναλυσίδων* $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι μια συλλογή γραμμικών απεικονίσεων $\phi_k : A^k \to B^k$, μια για κάθε k, ώστε

$$d' \circ \phi_k = \phi_{k+1} \circ d.$$

Η απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση στη συνομολογία

$$\phi^* : H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B})$$

ως

$$\phi^*[\alpha] = [\phi(\alpha)].$$

Μια ακολουθία συμπλέγματος συναλυσίδων

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{B} \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

είναι *μικρή πλήρης* αν οι i και j είναι απεικονίσεις συναλυσίδων και για κάθε k, η

$$0 \longrightarrow A^k \xrightarrow{\ i_k\ } B^k \xrightarrow{\ j_k\ } C^k \longrightarrow 0$$

είναι μικρή πλήρης ακολουθία διανυσματικών χώρων. Για μια τέτοια μικρή πλήρη ακολουθία, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια γραμμική απεικόνιση $d^* : H^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A})$, η οποία ονομάζεται *συνδετικός ομομορφισμός*, ως εξής. Θεωρούμε τη μικρή πλήρη ακολουθία στις διαστάσεις k και $k+1$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{k+1} \arrow[r, "i"] & B^{k+1} \arrow[r, "j"] & C^{k+1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^k \arrow[r, "i"] \arrow[u, "d"] & B^k \arrow[r, "j"] \arrow[u, "d"] & C^k \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}.$$

Για κάποιο $[c] \in H^k(\mathcal{C})$, υπάρχει στοιχείο $b \in B^k$ ώστε $j(b) = c$, αφού η $j : B^k \to C^k$ είναι επί. Τότε το $db \in B^{k+1}$ ανήκει στο $\ker j$ διότι

$$\begin{aligned} jdb &= djb && \text{(Επειδή το διάγραμμα είναι μεταθετικό)} \\ &= dc = 0 && \text{(Επειδή η } c \text{ είναι συγκύκλος).} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Έχουμε $\ker j = \operatorname{im} i$ λόγω πληρότητας. Αυτό σημαίνει ότι $db = i(\alpha)$ για κάποιο $\alpha \in A^{k+1}$. Η i είναι 1-1 και επομένως το α είναι μοναδικό. Τώρα έχουμε

$$i(d\alpha) = d(i\alpha) = ddb = 0$$

επομένως $d\alpha = 0$ που σημαίνει ότι η α είναι συγκύκλος και ορίζει μια κλάση συνομολογίας $[\alpha]$. Ορίζουμε

$$d^*[c] = [a] \in H^{k+1}(\mathcal{A}).$$

Για να είναι η d^* καλώς ορισμένη, πρέπει η κλάση συνομολογίας $[\alpha] \in H^{k+1}(\mathcal{A})$ να μην εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου c της κλάσης συνομολογίας $[c] \in H^k(\mathcal{C})$ και την επιλογή στοιχείου $b \in B^k$ που η j απεικονίζει στον συγκύκλο c.

Αρχικά έστω ότι υπάρχουν δύο $b, b' \in B^k$ που απεικονίζονται στο c από την j και $a, a' \in A^{k+1}$ ώστε $i(a) = db$ και $i(a') = db'$. Γνωρίζουμε ότι

$$j(b) = j(b') = c,$$

επομένως

$$j(b - b') = c - c = 0.$$

Τότε ισχύει $b - b' \in \ker j = \operatorname{im} i$ άρα υπάρχει $\sigma \in A^k$ ώστε

$$i(\sigma) = b - b'.$$

Όμως αφού

$$d \circ i = i \circ d$$

τότε

$$id(\sigma) = d(b - b') = i(a) - i(a').$$

Η i είναι 1-1, άρα συνεπάγεται ότι

$$d(\sigma) = a - a',$$

δηλαδή οι a,a' παράγουν την ίδια κλάση συνομολογίας.

Τώρα έστω ότι τα $c, c' \in C^k$ παράγουν την ίδια κλάση συνομολογίας, δηλαδή υπάρχει $\tau \in C^{k-1}$ ώστε

$$d(\tau) = c - c'.$$

Αφού η j είναι επί, υπάρχει $\mu \in B^{k-1}$ ώστε $j(\mu) = \tau$.
Ισχύει $d \circ j = j \circ d$, τότε

$$j(d(\mu)) = j(b - b') = c - c'$$

επομένως $d(\mu) + b - b' \in \ker j = \mathrm{im} i$, δηλαδή υπάρχει $\sigma' \in A^k$ ώστε

$$i(\sigma') = d\mu + b - b'.$$

Ξανά, αφού $d \circ i = i \circ d$ και $d \circ d = 0$, τότε

$$id(\sigma') = d(b - b').$$

Η i είναι 1-1 επομένως

$$d(\sigma') = a - a',$$

δηλαδή τα a,a' διαφέρουν κατά ένα σύνορο και συνεπώς αναπαριστούν την ίδια κλάση συνομολογίας. Συμπεραίνουμε ότι ο συνδετικός ομομορφισμός είναι καλά ορισμένος. $\square$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνδετικού ομοιομορφισμού με το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "i"] & db & \\
& b \arrow[u, mapsto, "d"] \arrow[r, two heads, "j"] & c
\end{tikzcd} .$$

Θεώρημα 5.5.1. Μία μικρή πλήρης ακολουθία συμπλεγμάτων συναλυσίδων

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{B} \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

ορίζει μια μακρά πλήρη ακολουθία στη συνομολογία:

$$\begin{tikzcd}
& \ldots \arrow[r, "j^*"] & H^{k-1}(\mathcal{C}) \arrow[dll, "d^*"] \\
H^k(\mathcal{A}) \arrow[r, "i^*"] & H^k(\mathcal{B}) \arrow[r, "j^*"] & H^k(\mathcal{C}) \arrow[dll, "d^*"] \\
H^{k+1}(\mathcal{A}) \arrow[r, "i^*"] & \ldots &
\end{tikzcd}$$

όπου i^* και j^* οι απεικονίσεις στη συνομολογία που έπονται από τις απεικονίσεις συναλυσίδων i και j και d^* είναι συνδετικός ομοιομορφισμός.

5.6 Η ακολουθία Mayer-Vietoris

Σε αυτήν την ενότητα θα εισάγουμε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό της συνομολογίας de Rham το οποίο θα κάνει τον υπολογισμό της πολύ πιο απλό, την ακολουθία Mayer-Vietoris. Έστω $\{U, V\}$ ανοιχτό κάλυμμα μιας πολλαπλοτητας M και $i_U : U \to M$ με $i_U(p) = p$ ο εγκλεισμός. Τότε η ανάσυρση

$$i_U^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U)$$

είναι ο περιορισμός που περιορίζει το πεδίο ορισμού μιας k-μορφής στην M στο U: $i_U^*\omega = \omega|_U$. Υπάρχουν τέσσερις εγκλεισμοί που σχηματίζουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "i_U"] & \\
U\cap V \arrow[ur, "j_U"] \arrow[dr, "j_V"'] & & M \\
 & V \arrow[ur, "i_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Αν περιορίσουμε μια k-μορφή από την M στο U και το V, παίρνουμε έναν ομοιομορφισμό διανυσματικών χώρων

$$i : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V),$$
$$\sigma \mapsto (i_U^*\sigma, i_V^*\sigma) = (\sigma|_U, \sigma|_V).$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V)$$

ως

$$j(\omega, \tau) = j_V^*\tau - j_U^*\omega = \tau|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V}.$$

Αν το $U \cap V$ είναι κενό, ορίζουμε $\Omega^k(U \cap V) = 0$. Καλούμε την i *περιορισμό* και την j *διαφορά*. Η εξωτερική παράγωγος στον $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ δίνεται από $d(\omega, \tau) = (d\omega, d\tau)$.

Θεώρημα 5.6.1. Ο περιορισμός i και η διαφορά j μετατίθενται με την εξωτερική παράγωγο d

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική παραγωγός d μετατίθεται με την ανάσυρση. Για $\sigma \in \Omega^k(M)$ έχουμε

$$di\sigma = d(i_U^*\sigma, i_V^*\sigma) = (di_U^*\sigma, di_V^*\sigma) = (i_U^*d\sigma, i_V^*d\sigma) = id\sigma.$$

Για $(\omega, \tau) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ έχουμε

$$dj(\omega, \tau) = d(j_V^*\tau - j_U^*\omega) = j_V^*d\tau - j_U^*d\omega = jd(\omega, \tau).$$

□

Πρόταση 5.6.1. Η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\quad i \quad} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{\quad j \quad} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

είναι πλήρης για κάθε ακέραιο $k \geq 0$.

Συμπεραίνουμε, από την παραπάνω πρόταση, ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\quad i \quad} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\quad j \quad} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

είναι μικρή πλήρης επομένως από το θεώρημα 5.5.1 ορίζει μια μακρά πλήρη ακολουθία στη συνομολογία

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "j^*"] & H^{k-1}(U\cap V) \arrow[dll, rounded corners, "d^*"'] \\
H^k(M) \arrow[r, "i^*"] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r, "j^*"] & H^k(U\cap V) \arrow[dll, rounded corners, "d^*"'] \\
H^{k+1}(M) \arrow[r, "i^*"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

η οποία ονομάζεται ακολουθία Mayer-Vietoris. Οι απεικονίσεις i^* και j^* ορίζονται ως

$$i^*[\sigma] = [i(\sigma)] = ([\sigma|_U], [\sigma|_V]) \in H^k(U) \oplus H^k(V)$$

και

$$j^*([\omega],[\tau]) = [j(\omega,\tau)] = [\tau|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V}] \in H^k(U\cap V).$$

Ο συνδετικός ομομορφισμός $d^* : H^k(U\cap V) \to H^{k+1}(M)$ προκύπτει από τα ακόλουθα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{k+1}(M) \arrow[r, tail, "i^*"] & \Omega^{k+1}(U)\oplus\Omega^{k+1}(V) & \\
& \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V) \arrow[u, "d"] \arrow[r, two heads, "j^*"] & \Omega^k(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
d^*\zeta \arrow[r, tail, "i^*"] & (d\zeta_U, d\zeta_V) \arrow[r, two heads, "j^*"] & 0 \\
& (\zeta_U,\zeta_V) \arrow[u, mapsto, "d"] \arrow[r, two heads, "j^*"] & \zeta \arrow[u, mapsto, "d"]
\end{tikzcd}$$

Έστω μια κλειστή k-μορφή $\zeta \in \Omega^k(U\cap V)$ και το ζεύγος $(\zeta_U,\zeta_V) \in \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V)$ ώστε η εικόνα του από την j^* είναι η ζ. Τότε, αφού η ζ είναι κλειστή, το $(d\zeta_U, d\zeta_V)$ ανήκει στον πυρήνα της j^* και επομένως, λόγω πληρότητας, ανήκει στην εικόνα της i^*. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική $(k+1)$-μορφή $d^*\zeta \in \Omega^{k+1}(M)$ με εικόνα το $(d\zeta_U, d\zeta_V)$ από την i^*. Ισχύει

$$i^*d(d^*\zeta) = di^*(d^*(\zeta) = d(d\zeta_U, d\zeta_V) = 0$$

και αφού η i^* είναι 1-1, τότε η $d^*\zeta$ είναι κλειστή.

Λήμμα 5.6.1. Αν M είναι μια συμπαγής, συνεκτική, προσανατολισμένη, ομαλή n-πολλαπλότητα τότε η συνομολογία $H^n(M)$ είναι μονοδιάστατη.

Παράδειγμα 5.6.1. (Η συνομολογία του τόρου). Έστω M ο τόρος και το ανοιχτό κάλυμμα του $\{U,V\}$ ώστε τα U και V να είναι διαφορομορφικά με τον κύλινδρο $S^1\times\mathbb{R} - \partial(S^1\times\mathbb{R})$ ο οποίος είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον S^1 και $U\cap V$ να είναι διαφορομορφικό με την ξένη ένωση δύο κυλίνδρων. Επειδή η συνομολογία του κύκλου είναι γνωστή, μπορούμε να συμπληρώσουμε κάποιους από τους όρους τής ακολουθίας Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[dll, rounded corners, "d^*"] \\
H^0(M) \arrow[r, "i_0^*"] & H^0(U)\oplus H^0(V) \arrow[r, "j_0^*"] & H^0(U\cap V) \arrow[dll, rounded corners, "d_0^*"] \\
H^1(M) \arrow[r, "i_1^*"] & H^1(U)\oplus H^1(V) \arrow[r, "j_1^*"] & H^1(U\cap V) \arrow[dll, rounded corners, "d_1^*"] \\
H^2(M) \arrow[r, "i_2^*"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

ως εξής: ο τόρος είναι συνεκτικός και επομένως έχουμε $H^0(M)\cong\mathbb{R}$. Επίσης έχουμε $H^0(U)\oplus H^0(V)\cong H^1(U)\oplus H^1(V)\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $H^2(U)\oplus H^2(V)\cong 0$ και $H^0(U\cap V)\cong H^1(U\cap V)\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$. Επομένως η ακολουθία Mayer-Vietoris γίνεται

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dll, rounded corners, "d^*"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "i_0^*"] & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \arrow[r, "j_0^*"] & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \arrow[dll, rounded corners, "d_0^*"] \\
H^1(M) \arrow[r, "i_1^*"] & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \arrow[r, "j_1^*"] & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \arrow[dll, rounded corners, "d_1^*"] \\
H^2(M) \arrow[r, "i_2^*"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $H^0(U)\oplus H^0(V)\to H^0(U\cap V)$ έχει εικόνα το $\mathbb{R}$ (αφού η διαφορά σταθερών συναρτήσεων είναι σταθερή συνάρτηση, η εικόνα του j_0^* είναι ισομορφική με το $\mathbb{R}$).

Έστω A και B τα δύο συνεκτικά μέρη της $U\cap V$. Το U συμπτύσσεται στο A, άρα η $H^*(U)\to H^*(A)$ είναι ισομορφισμός και ο ω_U είναι γεννήτορας του $H^1(U)$, ο $j_U^*\omega_U=(1,1)$ είναι γεννήτορας του H^1 στα A και B. Τότε για την απεικόνιση $j_1^*: H^1(U)\oplus H^1(V)\cong H^1(U\cap V)=H^1(A)\oplus H^1(B)$ έχουμε

$$j_1^*(a,b)=(b,b)-(a,a)=(b-a,b-a)$$

που είναι απλά η διαγώνιος, επομένως $\mathrm{im} j_1^*\cong\mathbb{R}$.

Ισχύει $H^2(M)\cong\mathbb{R}$ αφού

$$H^2(M)\cong\ker i_2^*\cong \mathrm{im}\ d_1^*,$$

λόγω πληρότητας και του γεγονότος ότι $H^2(U)\oplus H^2(V)=0$. Επίσης από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού έχουμε

$$\mathrm{im}\ d_1^*\cong\frac{H^1(U\cap V)}{\ker d_1^*}\cong\frac{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{\mathrm{im} j_1^*}\cong\frac{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\cong\mathbb{R}.$$

Τώρα για την $H^1(M)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
H^1(M)&\cong\ker i_1^*\oplus\mathrm{im} i_1^* && \text{(πρώτο θεώρημα ισομορφισμού)}\\
&\cong \mathrm{im} d_0^*\oplus\ker j_1^* && \text{(από πληρότητα)}\\
&\cong\frac{H^0(U\cap V)}{\ker d_0^*}\oplus\ker j_1^* && \text{(πρώτο θεώρημα ισομορφισμού για το } d_0^*)\\
&\cong\frac{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}{\mathrm{im} j_0^*}\oplus\mathbb{R}\\
&\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Επομένως η συνομολογία de Rham του τόρου δίνεται από

$$H^i(M)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & i=0,2\\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & i=1\end{cases}.$$

Παράδειγμα 5.6.2. (Η συνομολογία της S^n). Έστω $U^+=S^n-\{(0,0,\dots,1)\}$ και $U^-=S^n-\{(0,0,\dots,-1)\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι το $\{U^+,U^-\}$ αποτελεί ανοιχτό κάλυμμα της S^n. Ισχύει $H^0(S^n)\cong\mathbb{R}$ για $n>0$, αφού η S^n είναι συνεκτική και $H^k(S^n)\cong 0$ για $k>n$. Η τομή $U^+\cap U^-$ είναι διαφορομορφική με την $S^{n-1}\times\mathbb{R}$ επομένως $H^k(U^+\cap U^-)\cong H^k(S^{n-1})$.
Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο n ότι

$$H^k(S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & \text{αν } k=0 \text{ ή } k=n\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}. \tag{5.2}$$

Για $n=1$ έχουμε δείξει ότι $H^1(S^1)\cong\mathbb{R}$.
Έστω ότι η 5.2 ισχύει για $n-1$ με $n>1$, τότε η ακολουθία Mayer-Vietoris είναι

$$0\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow H^1(S^n)\longrightarrow 0\longrightarrow\dots$$

$$\dots\longrightarrow 0\longrightarrow H^{k-1}(S^{n-1})\longrightarrow H^k(S^n)\longrightarrow 0\longrightarrow\dots$$

Παρατηρούμε ότι
$$H^1(S^n) \cong 0$$
και
$$H^k(S^n) \cong H^{k-1}(S^{n-1})$$
για $k > 1$, από όπου προκύπτει το βήμα της επαγωγής.

5.7 Θεώρημα de Rham

Από το θεώρημα Stokes έχουμε δει ότι η ολοκλήρωση σε μια πολλαπλότητα M σχετίζει τις k-μορφές με τις k-αλυσίδες, υπάρχει λοιπόν μια σχέση μεταξύ αυτών η οποία βασίζεται στην περίοδο του de Rham που ορίζεται ως
$$\text{Περίοδος} := \int_C \omega := \langle C, \omega \rangle,$$
όπου C κύκλος και ω συγκύκλος. Η απεικόνιση $I : H^p_{dR}(M) \to H^p(M;\mathbb{R})$ που ορίζεται ως
$$I[\omega][c] = \int_C \omega$$
με $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$, $[c] \in H_p(M)$ και C αντιπρόσωπος του $[c]$, ονομάζεται ομοιομορφισμός de Rham.

Λήμμα 5.7.1. Ο ομοιομορφισμός de Rham είναι καλά ορισμένος.

Απόδειξη. Έστω $\omega = \alpha + d\beta$. Έχουμε
$$I[\omega][c] = \int_C \omega = \int_C (\alpha + d\beta) = \int_C \alpha + \int_C d\beta = \int_C \alpha = I[\alpha][c]$$
το ολοκλήρωμα $\int_C d\beta$ μηδενίζεται αφού η C είναι p-κύκλος στην M και από το θεώρημα Stokes έχουμε $\int_C d\beta = \int_{\partial C} \beta = 0$. Έστω τώρα η αλυσίδα $C' = C + \partial D$, τότε
$$I[\omega][c'] = \int_{C'} \omega = \int_{C+\partial D} \omega = \int_C \omega + \int_{\partial D} \omega = \int_C \omega + \int_D d\omega = \int_C \omega = I[\omega][c].$$
□

Λήμμα 5.7.2. Έστω $F : M \to N$ ομαλή απεικόνιση, τότε το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται,
$$\begin{tikzcd} H^p_{dR}(N) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "I"] & H^p_{dR}(M) \arrow[d, "I"] \\ H^p(N;\mathbb{R}) \arrow[r, "F^*"] & H^p(M;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι
$$I(F^*[\omega])[\sigma] = I[\omega](F^*[\sigma]).$$
Έχουμε
$$I(F^*[\omega])[\sigma] = \int_{\Delta^p} \sigma^* F^* \omega = \int_{\Delta^p} (F \circ \sigma)^* \omega = I[\omega] F^*[\sigma]$$
□

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα του de Rham.

Θεώρημα 5.7.1. Η απεικόνιση $I : H^p_{dR}(M) \to H^p(M;\mathbb{R})$ είναι ισομορφισμός.

Το θεώρημα αυτό συνδέει τις τοπολογικές και αναλυτικές ιδιότητες μιας πολλαπλότητας και μας βοηθά να αντλήσουμε πληροφορίες για τις λύσεις διαφορικών εξισώσεων μελετώντας την τοπολογία μια πολλαπλότητας αλλά και αντίθετα, μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την τοπολογία μιας πολλαπλότητας μελετώντας διαφορικές εξισώσεις ώστε $d\omega = \sigma$ στην πολλαπλότητα.

Κεφάλαιο 6

Θεωρία Hodge

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια μικρή εισαγωγή στη θεωρία Hodge και την αρμονική συνομολογία de Rham. Η θεωρία Hodge μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη συνομολογία ομαλών πολλαπλοτήτων χρησιμοποιώντας τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\Delta\omega = 0$, όπου Δ είναι ο τελεστής Laplace τον οποίο θα ορίσουμε στη συνέχεια. Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής καλούνται αρμονικές μορφές.

6.1 Πολλαπλότητες Rieman

Πριν αρχίσουμε να μιλάμε για τη θεωρία των αρμονικών μορφών, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τις πολλαπλότητες Rieman .

Ορισμός 6.1.1. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Ενας συμμετρικός τανυστής $g \in T_2^0(V)$, ώστε αν $g(u,v) = 0$ για κάθε $v \in V$, τότε $u = 0$ καλείται *μετρικός τανυστής στον* V.

Για κάποια βάση e_i του V και δύο διανύσματα $u = \sum_i u^i e_i$ και $v = \sum_i v^i e_i$ του V, ο μετρικός τανυστής γράφεται

$$g(u,v) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$$

με $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Μια *ορθοκανονική βάση* του V ως προς τον μετρικό τανυστή g, είναι μια βάση e_i του V ώστε $g(e_i, e_j) = \pm 1$ για $i = j$ και $g(e_i, e_j) = 0$ για $i \neq j$.

Ορισμός 6.1.2. Ένα *μετρικό τανυστικό πεδίο* g είναι ένα τανυστικό πεδίο $g \in T_2^0(M)$ ώστε το $g(p)$ να είναι μετρικός τανυστής στον $T_2^0(T_pM)$. Υπάρχουν δηλαδή διγραμμικές συμμετρικές συναρτήσεις $g_p(\cdot,\cdot) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ώστε αν $g_p(u,v) = 0$ για κάθε $v \in T_pM$, τότε $u = 0$ και για κάθε δύο διανυσματικά πεδία $X, Y \in \Gamma(TM)$, η συνάρτηση $p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ είναι ομαλή.

Ορισμός 6.1.3. Ένα ζεύγος (M, g) όπου M πολλαπλότητα και g μετρικό τανυστικό πεδίο στην M ονομάζεται *πολλαπλότητα Rieman* αν το g είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή αν $g_p(u,v) \geq 0$ για κάθε $v \in T_p(M)$. Αν δεν ισχύει αυτή η συνθήκη, τότε το (M, g) καλείται *ψευδο-Rieman* πολλαπλότητα.

Μια ψευδο-Rieman πολλαπλότητα με $[g_{ij}] = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{e_0, \ldots, e_n\}$, καλείται πολλαπλότητα Lorentz. Οι πολλαπλότητες Lorentz έχουν καθοριστικό ρόλο στην γενική θεωρία της σχετικότητας, καθώς αναπαριστούν τον χωρο-χρόνο. Σε κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας Lorentz ένα διάνυσμα X μπορεί να είναι τύπου χρόνου, χώρου ή φωτός ανάλογα με το αν $g(X,X) > 0$, $g(X,X) < 0$ ή $g(X,X) = 0$ αντίστοιχα.

6.2 Ο τελεστής Laplace-Beltrami

Σε αυτήν την ενότητα, θα ορίσουμε μια γενίκευση του τελεστή Laplace, τον τελεστή Laplace-Beltrami.

Ορισμός 6.2.1. (Στοιχείο του όγκου). Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, [E])$ προσανατολισμένος χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Υπάρχει ακριβώς μια $dV \in \Lambda^n(V)$ που ικανοποιεί

$$dV(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

για κάθε θετικά προσανατολισμένη ορθοκανονική βάση $E = (e_1, \ldots, e_n)$. Η dV μπορεί να γραφτεί ως

$$dV = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n.$$

Γνωρίζουμε ότι η διάσταση του $\Lambda^k(V)$ για κάποιον διανυσματικό χώρο με διάσταση n είναι $\binom{n}{k}$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, οπότε ένα ερώτημα που αναδύεται είναι αν υπάρχει κάποιος ισομορφισμός μεταξύ του $\Lambda^k(V)$ και του Λ^{n-k} μιας και ο Λ^{n-k} έχει διάσταση $\binom{n}{n-k}$. Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχει τέτοιος ισομορφισμός, ο τελεστής άστρο του Hodge.

Θεώρημα 6.2.1. (Τελεστής Hodge) . Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, [E])$ ένας προσανατολισμένος χώρος με εσωτερικό γινόμενο και dV το στοιχείο του όγκου. Τότε για κάθε $0 \le k \le n$ υπάρχει ακριβώς ένας ισομορφισμός $* = *_k : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$ που ορίζεται από $\omega \mapsto *\omega$ και για κάθε $\omega, \sigma \in \Lambda^k(V)$ ικανοποιεί

$$\omega \wedge *\sigma = \langle \omega, \sigma \rangle_{\Lambda^k} dV$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \omega \wedge *\sigma, dV \rangle_{\Lambda^n} = \langle \omega, \sigma \rangle_{\Lambda^k}$$

Λήμμα 6.2.1. (Ιδιότητες του τελεστή Hodge) Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, [E])$ προσανατολισμένος χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ο τελεστής Hodge ικανοποιεί

1. Για κάθε $\omega, \sigma \in \Lambda^k(V)$ ισχύει $\sigma \wedge *\omega = \langle \sigma, \omega \rangle_{\Lambda^k} dV = \langle \omega, \sigma \rangle_{\Lambda^k} dV = \omega \wedge *\sigma$
2. Έστω τ μια μετάθεση που ικανοποιεί $\tau(1) < \cdots < \tau(k)$ και $\tau(k+1) < \cdots < \tau(n)$. Τότε
$$*(e^{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge e^{\tau(k)}) = (-1)^\tau e^{\tau(k+1)} \wedge \cdots \wedge e^{\tau(n)}$$
για $E = (e_1, \ldots, e_n)$ μια θετική ορθοκανονική βάση του V.
3. $*1 = dV$, $*dV = 1$
4. Για κάθε $\omega \in \Lambda^k(V)$ ισχύει $*_{n-k} *_k \omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$
5. Για κάθε $\omega, \sigma \in \Lambda^k(V)$ ισχύει $\langle \omega, \sigma \rangle = \langle *\omega, *\sigma \rangle$
6. Για κάθε $\omega, \sigma \in \Lambda^k(V)$ ισχύει $\langle \omega, \sigma \rangle = *(\omega \wedge *\sigma) = *(\sigma \wedge *\omega)$

Ο τελεστής Hodge μπορεί να οριστεί στον εφαπτόμενο χώρο μιας πολλαπλότητας M με διάσταση n ως $*_p : \Lambda^k(T_pM) \to \Lambda^{n-k}(T_pM)$ για κάθε $0 \le k \le n$ και $p \in M$.

Σημείωση 6.2.1. Σε μια πολλαπλότητα Lorentz με διάσταση n, ο τελεστής Hodge ικανοποιεί $* * \omega = (-1)^{1+k(n-k)}\omega$, για $\omega \in \Lambda^k(M)$.

Για κάθε δύο k-μορφές $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ με συμπαγή φορέα σε μια πολλαπλότητα M, ορίζουμε το διγραμμικό και θετικά ορισμένο Hodge L^2-εσωτετικό γινόμενο ως

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge *\beta,$$

όπου $\alpha \wedge *\beta$ n-μορφή. Από αυτό το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε τη νόρμα

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha) = \int_M \alpha \wedge *\alpha,$$

για μια k-μορφή α. Η εξίσωση Euler-Lagrange του συναρτησιακού αυτού είναι η εξίσωση Laplace

$$\Delta \alpha = 0.$$

Ορισμός 6.2.2. (Ο τελεστής Beltrami). Για $k \ge 1$ ορίζουμε την απεικόνιση $\delta_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$

$$\delta_k := (-1)^{n(k+1)+1} *_{n-k+1} \circ d_{n-k} \circ *_k$$

και $\delta_0 := 0$. Η επέκταση της $\delta : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ ονομάζεται *τελεστής Beltrami*

Λήμμα 6.2.2. Ο τελεστής Beltrami ικανοποιεί

$$\delta \circ \delta = 0$$

Απόδειξη. Έχουμε από την ιδιότητα 4 του λήμματος 6.2.1

$$\delta \circ \delta = \pm * d * * d * = \pm * d \text{ id } d * = \pm * d^2 * = 0$$

□

Λήμμα 6.2.3. Για κάθε $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$ ισχύει

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta).$$

Ορισμός 6.2.3. (Τελεστής Laplace-Beltrami). Ορίζουμε την απεικόνιση $\Delta_k : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

$$\Delta_k := \delta_{k+1} \circ d_k + \delta_{k-1} \circ \delta_k$$

με $\delta_{-1} := 0$. Η απεικόνιση αυτή επεκτείνεται σε απεικόνιση $\Delta : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ η οποία καλείται τελεστής Laplace-Beltrami.

Για $M = \mathbb{R}^n$ και $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ο τελεστής Laplace-Beltrami είναι ο

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Λήμμα 6.2.4. Η Λαπλασιανή μετατίθεται με τον τελεστή Hodge.

Πρόταση 6.2.1. Ο τελεστής Laplace-Beltrami είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta).$$

Απόδειξη.

$$(\Delta\alpha, \beta) = ((\delta d + d\delta)\alpha, \beta) = (\delta d\alpha, \beta) + (d\delta\alpha, \beta) = (\alpha, \delta d\beta) + (\alpha, d\delta\beta) = (\alpha, \delta d\beta + d\delta\beta) = (\alpha, \Delta\beta).$$

□

Θεώρημα 6.2.2. Για κάθε $\alpha \in \Omega^k(M)$ ισχύει

$$\Delta\alpha = 0$$

αν και μόνο αν

$$d\alpha = 0$$

και

$$\delta\alpha = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\Delta\alpha = 0$. Τότε

$$0 = (\Delta\alpha, \alpha) = ((d\delta + \delta d)\alpha, \alpha) = (d\delta\alpha, \alpha) + (\delta d\alpha, \alpha) = (\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha).$$

Επομένως $\delta\alpha = 0$ και $d\alpha = 0$.
Από την άλλη μεριά, έστω $d\alpha = 0$ και $\delta\alpha = 0$, τότε

$$\Delta\alpha = d\delta\alpha + \delta d\alpha = 0.$$

□

Ορισμός 6.2.4. (Αρμονικές μορφές) Για κάποια ομαλή πολλαπλότητα M, ορίζουμε τον χώρο των λύσεων της εξίσωσης $\Delta\omega = 0$

$$\mathcal{H}^k(M) := \big\{\omega \in \Omega^k(M) : \Delta\omega = 0\big\} = \ker \Delta_k.$$

Τα στοιχεία του $\mathcal{H}^k(M)$ λέγονται *αρμονικές k-μορφές*. Ορίζουμε

$$\mathcal{H}^* := \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}^k(M).$$

Παράδειγμα 6.2.1. Με τη βοήθεια του τελεστή Hodge μπορούμε να πάρουμε τον θεώρημα απόκλισης στον $\mathbb{R}^3$ ως εξής. Η απόκλιση ενός διανύσματος μπορεί να γραφτεί ως

$$div(v) = *d * v^\flat$$

όπου $v^\flat$ ο τελεστής που αντιστοιχεί την 1-μορφή $\omega = \sum_i a_i(x)dx^i$ στο διανυσματικό πεδίο $v = \sum_i v^i e_i$, με $a_i(x) = \sum_j g_{ij}(x)v^j(x) = v^i(x)$. Με τη βοήθεια του τελεστή Hodge ο ορισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος ενός διανυσματικού πεδίου v σε μια επιφάνεια S δίνεται από

$$\int_S v \cdot dC = \int_\sigma *v^\flat,$$

για $\sigma : \Delta^2 \to \mathbb{R}^3$ το σύμπλεγμα της επιφάνειας και ο ορισμός του ολοκληρώματος όγκου ενός διανυσματικού πεδίου f πάνω από μια περιοχή $D \subset \mathbb{R}^3$ δίνεται από

$$\int_D f dV = \int_\sigma *f,$$

για $\sigma(t)$ σύμπλεγμα του D. Αν ταυτίσουμε το χωριό D του $\mathbb{R}^3$ με ένα σύμπλεγμα τριών διαστάσεων σ τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div}(v)dV &= \int_\sigma *\operatorname{div}(v)\\ &= \int_\sigma * * d * v^\flat\\ &= \int_\sigma d * v^\flat\\ &= \int_{\partial\sigma} *v^\flat\\ &= \int_{\partial D} v \cdot dC,\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.2.2. (Εξισώσεις Maxwell). Οι εξισώσεις Maxwell είναι οι ακόλουθες 4 εξισώσεις

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6.1}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{6.2}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{6.3}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \tag{6.4}$$

όπου $E = (E_1, E_2, E_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$ και $j = (j_1, j_2, j_3)$. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στη φυσική. Έστω $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ για να απλοποιήσουμε τις πράξεις.

Θα θεωρήσουμε την 1-μορφή $J = \rho dt - j_1 dx - j_2 dy - j_3 dz$ και τη 2-μορφή $F = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dx \wedge dz + B_3 dx \wedge dy$. Ισχυριζόμαστε ότι οι εξισώσεις Maxwell μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$dF = 0 \tag{6.5}$$

και

$$*d * F = J. \tag{6.6}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις 6.5 και 6.6 αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις 6.2.2 μέχρι 6.4. Παίρνοντας την εξωτερική παράγωγο της F και μετά από στοιχειώδεις πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned}dF = &\left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dy + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dz + \\ &\left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) dt \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ = &\left((\nabla \times E)_3 + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dy + \left((\nabla \times E)_2 + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) dt \wedge dx \wedge dz\end{aligned}$$

$$+\left((\nabla\times E)_1+\frac{\partial B_1}{\partial t}\right)dt\wedge dy\wedge dz+(\nabla\cdot B)\,dx\wedge dy\wedge dz.$$

Επομένως $\nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t}=0$ και $\nabla\cdot B=0$ αν και μόνο αν $dF=0$. Επιπλέον υπολογίζουμε τον τελεστή Hodge της F ως προς τη μετρική Minkowski που ορίζεται ως $g(u,v)=u_0v_0-u_1v_1-u_2v_2-u_3v_3$, όπου $u=(u_0,u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_0,v_1,v_2,v_3)$.

$$*F=E_1dy\wedge dz-E_2dx\wedge dz+E_3dx\wedge dy+B_1dt\wedge dx-B_2dt\wedge dy+B_3dt\wedge dz.$$

Παίρνουμε την εξωτερική παράγωγο της $*F$

$$d*F=\left(\frac{\partial E_3}{\partial t}+\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)dt\wedge dx\wedge dy+\left(-\frac{\partial E_2}{\partial t}+\frac{\partial B_1}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial x}\right)dt\wedge dx\wedge dz+$$

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}+\frac{\partial B_2}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)dt\wedge dy\wedge dz+\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}+\frac{\partial E_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$$

Υπολογίζουμε τον τελεστή Hodge της $d*F$

$$*d*F=\left(\frac{\partial E_3}{\partial t}+\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial E_2}{\partial t}-\frac{\partial B_1}{\partial z}+\frac{\partial B_3}{\partial x}\right)dy+$$

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}+\frac{\partial B_2}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)dx+\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}+\frac{\partial E_3}{\partial z}\right)dt.$$

Βλέπουμε ότι $*d*F=J$ αν και μόνο αν $\nabla\cdot E=\rho$ και $\nabla\times B=j+\frac{\partial E}{\partial t}$.

6.3 Ασθενής Λύση

Ορισμός 6.3.1. Έστω $\alpha\in\Omega^k(M)$. Μία μορφή $\omega\in\Omega^k(M)$ ώστε

$$\Delta\omega=\alpha$$

ονομάζεται *(ισχυρή) λύση* της $\Delta\omega=\alpha$. Ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $l:(\Omega^k(M),\|\cdot\|_{L^2})\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ ονομάζεται *ασθενής λύση* της $\Delta\omega=\alpha$, αν για κάθε $\eta\in\Omega^k(M)$ ισχύει

$$l(\Delta^*\eta)=(\alpha,\eta).$$

Λήμμα 6.3.1. Έστω $\alpha,\omega\in\Omega^k(M)$ ώστε

$$\Delta\omega=\alpha.$$

Τότε το $l:\Omega^k(M)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$l(\eta):=(\omega,\eta)$$

είναι ασθενής λύση της $\Delta\omega=\alpha$.

Απόδειξη. Έστω $\eta\in\Omega^k(M)$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$|l(\eta)|=|(\omega,\eta)|\le\|\omega\|\|\eta\|$$

επομένως το l είναι φραγμένο, άρα και συνεχές και αφού

$$l(\Delta^*\eta)=(\omega,\Delta^*\eta)=(\Delta\omega,\eta)=(\alpha,\eta)$$

είναι ασθενής λύση.

□

Θεώρημα 6.3.1. Έστω $\alpha\in\Omega^k(M)$ και l ασθενής λύση της $\Delta\omega=\alpha$. Τότε για κάθε $\beta\in\Omega^k(M)$, υπάρχει $\omega\in\Omega^k(M)$ ώστε

$$l(\beta)=(\omega,\beta).$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\eta\in\Omega^k(M)$ έχουμε

$$(\Delta\omega,\eta)=(\omega,\Delta^*\eta)=l(\Delta^*\eta)=(\alpha,\eta)$$

και επομένως η ω είναι ισχυρή λύση της $\Delta\omega=\alpha$.

Θεώρημα 6.3.2. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία στον $\Omega^k(M)$ ώστε να υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\|a_n\| \leq C$$

και

$$\|\Delta a_n\| \leq C$$

Τότε υπάρχει Cauchy υποακολουθία της a_n.

Λήμμα 6.3.2. Για κάθε $0 \leq k \leq n$, υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $\beta \in \mathcal{H}^k(M)^\perp$ ισχύει

$$\|\beta\| \leq C\|\Delta\beta\|.$$

6.4 Η Αποσύνθεση του Hodge

Θεώρημα 6.4.1. (Αποσύνθεση του Hodge). Έστω μια προσανατολισμένη συμπαγής πολλαπλότητα Riemann M χωρίς σύνορο με διάσταση n. Για κάθε ακέραιο $0 \leq k \leq n$, ο χώρος $\mathcal{H}^k := \mathcal{H}^k(M)$ είναι πεπερασμένης διάστασης και υπάρχουν ευθείς L^2-ορθογώνιες αποσυνθέσεις

$$\begin{aligned}
\Omega^k(M) &= im\Delta_k \oplus \ker \Delta_k \\
&= \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\
&= d\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta d(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\
&= d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k.
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια μια $\omega \in \Omega^k(M)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$$

με $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, $\beta \in \Omega^{k+1}$ και $\gamma \in \mathcal{H}^k$. Η $d\alpha$ είναι προφανώς μια πλήρης μορφή, η $\delta\beta$ είναι *συμπλήρης μορφή* και η γ είναι μια αρμονική μορφή. Για κάθε $\alpha \in \Omega^k(M)$ υπάρχει $\omega \in \Omega^k(M)$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή

$$\Delta\omega = \alpha \iff \alpha \perp \mathcal{H}^k.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{H}^k$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω, για άτοπο, ότι έχει άπειρη διάσταση. Τότε υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία x_n στον $\mathcal{H}^k$. Από το θεώρημα 6.3.2 η x_n έχει υποακολουθία Cauchy, που όμως είναι άτοπο. Συνεπώς ο $\mathcal{H}^k$ έχει πεπερασμένη διάσταση.
Στη συνέχεια θα δείξουμε τη σχέση

$$\Omega^k(M) = \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\Omega^k(M) = (\mathcal{H}^k)^\perp \oplus \mathcal{H}^k,$$

θα δείξουμε ότι

$$(\mathcal{H}^k)^\perp = \mathrm{im}\Delta_k.$$

Έστω $\Delta\phi \in \mathrm{im}\Delta_k$ με $\phi \in \Omega^k(M)$. Για κάθε $\omega \in \mathcal{H}^k$ έχουμε

$$(\Delta\phi, \omega) = (\phi, \Delta\omega) = 0,$$

άρα $\Delta\phi \in (\mathcal{H}^k)^\perp$.
Τώρα έστω $\alpha \in (\mathcal{H}^k)^\perp$. Ορίζουμε το συναρτησιακό $\ell : \mathrm{im}\Delta_k \to \mathbb{R}$ ως

$$\ell(\Delta\phi) = (\alpha, \phi).$$

Το ℓ είναι καλά ορισμένο αφού αν ισχύει $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2$ για $\phi_1, \phi_2 \in \Omega^k(M)$ τότε $\phi_1 - \phi_2 \in \mathcal{H}^k \implies (\phi_1 - \phi_2, \alpha) = 0$.
Το ℓ είναι προφανώς γραμμικό. Θα δείξουμε ότι το ℓ είναι συνεχές. Έστω $h : \Omega^k(M) \to \mathcal{H}^k$ ο τελεστής της κανονικής προβολής και $\phi \in \Omega^k(M)$. Έχουμε από το λήμμα 6.3.2

$$|\ell(\Delta\phi)| = |\ell(\Delta(\phi - h(\phi))| = |(\alpha, \phi - h(\phi))|$$

$$\leq \|\alpha\|\|\phi - h(\phi)\| = c\|\alpha\|\|\Delta(\phi - h(\phi))\| = c\|\alpha\|\|\Delta\phi\|$$

επομένως το ℓ είναι συνεχές. Από το θεώρημα Hahn-Banach, το ℓ επεκτείνεται συνεχώς στο $\Omega^k(M)$. Άρα το ℓ είναι μια ασθενής λύση της εξίσωσης $\Delta\omega = \alpha$ και επομένως από το θεώρημα 6.3.1, υπάρχει ισχυρής λύση $\omega \in \Omega^k(M)$. Άρα $\alpha = \Delta\omega \in \mathrm{im}\Delta_k$. Συνεπώς

$$\Omega^k(M) = \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k.$$

Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) &= \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k = (d\delta + \delta d)(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k \\ &\subset (d\delta((\Omega^k(M))) + \delta d(\Omega^k(M))) \oplus \mathcal{H}^k \\ &\subset (d(\Omega^{k-1}(M))) + \delta(\Omega^{k+1}(M))) \oplus \mathcal{H}^k \subset \Omega^k(M),\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε ισότητα και ισχύει

$$d\delta((\Omega^k(M))) \perp \delta d(\Omega^k(M))$$

αφού για κάθε $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$, από το λήμμα 6.2.3 έχουμε

$$(d\delta\omega, \delta d\eta) = (dd\delta\omega, d\eta) = 0.$$

Επιπλέον ισχύει

$$d(\Omega^{k-1}(M))) \perp \delta(\Omega^{k+1}(M))$$

αφού, ξανά από το λήμμα 6.2.3, για κάθε $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ και κάθε $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ έχουμε

$$(d\omega, \delta\eta) = (dd\omega, \eta) = 0.$$

Για κάθε $\alpha \in \mathcal{H}^k$ και κάθε $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$, έχουμε

$$(d\delta\omega + \delta d\eta, \alpha) = (\delta\omega, \delta\alpha) + (d\eta, d\alpha) = 0$$

επομένως

$$d\delta((\Omega^k(M)) \oplus \delta d(\Omega^k(M)) \perp \mathcal{H}^k.$$

Και τελειώνοντας, για κάθε $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, για κάθε $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ και για κάθε $\alpha \in \mathcal{H}^k$ έχουμε

$$(d\omega + \delta\eta, \alpha) = (\omega, \delta) = (\eta, d\alpha) = 0$$

και συνεπάγεται

$$d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \perp \mathcal{H}^k.$$

□

Στην φυσική, η πλήρης μορφή $d\alpha$ καλείται *διαμήκης* ενώ η συμπλήρης μορφή $\delta\beta$ καλείται *εγκάρσια*.

6.5 Αρμονική συνομολογία de Rham

Έστω $\alpha \in \Omega^k(M)$. Τότε υπάρχει μοναδική αναπαράσταση

$$\alpha = \phi + \psi \in im\Delta_k \oplus \ker\Delta_k.$$

Οίζουμε την απεικόνιση $h_k : \Omega^k(M) \to \mathcal{H}^k$ ως $h_k(\alpha) := \psi$ και την ορθογώνια προβολή $\pi_k : \Omega^k(M) \to (\mathcal{H}^k)^\perp$ ως $\pi_k(\alpha) := \phi$. Η Λαπλασιανή περιορίζεται σε $\Delta_k : (\mathcal{H}^k)^\perp \to (\mathcal{H}^k)^\perp$ και μπορούμε α ορίσουμε

$$G_k : \Omega^k(M) \to (\mathcal{H}^k)^\perp$$

ως

$$G_k := \Delta|_{(\mathcal{H}^k)^\perp}^{-1} \circ \pi_k.$$

Η απεικόνιση αυτή λέγεται τελεστής Green. Δηλαδή η $G(\alpha)$ είναι η μοναδική μορφή που ικανοποιεί

$$\Delta G(\alpha) = \alpha - h(\alpha) = \pi(\alpha).$$

Θεώρημα 6.5.1. Ο τελεστής Green μετατίθεται με κάθε γραμμικό τελεστή που μετατίθεται με τον Δ. Συγκεκριμένα μετατίθεται με τους τελεστές d, δ και Δ.

Απόδειξη. Καταρχάς θα δείξουμε ότι οι τελεστές d και δ μετατίθενται με τον Δ. Πράγματι, έχουμε

$$d\Delta = d(d\delta + \delta d) = d\delta d = (d\delta + \delta d)d = \Delta d$$

και

$$\delta\Delta = \delta(d\delta + \delta d) = \delta d\delta = (d\delta + \delta d)\delta = \Delta\delta.$$

Έστω τώρα $T : \Omega^k(M) \to \Omega^l(M)$ γραμμικός τελεστής ώστε $T\Delta = \Delta T$. Άρα για κάθε $\alpha \in \mathcal{H}^k$, έχουμε

$$\Delta(T(\alpha)) = T(\Delta(\alpha)) = 0$$

επομένως $T(\mathcal{H}^k) \subset \mathcal{H}^l$ και

$$T((\mathcal{H}^k)^\perp) = T(\Delta(\Omega^k(M)) = \Delta(T(\Omega^k(M))) \subset (\mathcal{H}^l)^\perp.$$

Συνεπώς για κάθε $\alpha = \phi + \psi \in (\mathcal{H}^k)^\perp \oplus \mathcal{H}^k$, έχουμε

$$T_k(\pi_k(\alpha)) = T_k(\phi) = \pi_l(T_k(\phi)) = \pi_l(T_k(\phi) + T_k(\psi)) = \pi_l(T_k(\alpha))$$

άρα $T \circ \pi = \pi \circ T$ και επομένως

$$T \circ G = T \circ \Delta|^{-1}_{(\mathcal{H}^k)^\perp} \circ \pi = \Delta|^{-1}_{(\mathcal{H}^k)^\perp} \circ T \circ \pi = \Delta|^{-1}_{(\mathcal{H}^k)^\perp} \circ \pi \circ T = G \circ T.$$

□

Θεώρημα 6.5.2. Κάθε κλάση συνομολογίας de Rham έχει μοναδικό αρμονικό αντιπρόσωπο. Αν $[\alpha] \in H^k_{dR}(M)$, τότε $[\alpha] = [h(\alpha)]$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι υπάρχει τέτοιος αντιπρόσωπος. Έστω $[\alpha] \in \mathcal{H}^k(M)$. Έχουμε

$$\alpha = \Delta G\alpha + h\alpha = d\delta G\alpha + \delta dG\alpha + ha = d\delta G\alpha + \delta Gd\alpha + h\alpha = d\delta G\alpha + h\alpha.$$

Επομένως $[\alpha] = [h\alpha]$ και κάθε κλάση συνομολογίας περιέχει τουλάχιστον έναν αρμονικό αντιπρόσωπο. Στη συνέχεια θα δείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{H}^k(M)$ ώστε να υπάρχει $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ ώστε

$$d\beta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Επομένως έχουμε

$$(d\beta, \alpha_2 - \alpha_1) = (\beta, \delta\alpha_2) - (\beta, \delta\alpha_1) = 0.$$

και η αποσύνθεση

$$(\alpha_2 - \alpha_1) - d\beta = 0$$

είναι ορθογώνια. Συνεπώς $d\beta = 0$ και $\alpha_1 = \alpha_2$. Άρα κάθε κλάση συνομολογίας έχει το πολύ έναν αρμονικό αντιπρόσωπο.

□

6.6 Μια εφαρμογή στη φυσική

Τελειώνοντας θα δώσουμε μια εφαρμογή της θεωρίας Hodge-de Rham στη φυσική και συγκεκριμένα στη Λαγκραντζιανή θεωρία πεδίου. Στη θεωρία πεδίου σημαντικό ρόλο παίζει μια συνάρτηση που ονομάζεται Λαγκραντζιανή από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης για ένα σύστημα. Η Λαγκραντζιανή θεωρία πεδίου χρησιμοποιείται τόσο στην κλασική όσο και στην κβαντική φυσική. Ένα από τα κύρια εργαλεία στη κβαντική θεωρία πεδίου στη φυσική είναι το ολοκλήρωμα διαδρομών του Feynman. Για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα διαδρομών χρειαζόμαστε δύο εργαλεία,

1. Ένα *συναρτησιακό δράσης* με πραγματικές τιμές

   $$S[\Phi] := \int_{t_0}^{t_1} L[\Phi]dt,$$

   όπου Φ το πεδίο και το L ορίζεται ως

   $$L[\Phi] = \int d^n x \mathcal{L}\left(\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}\right),$$

   όπου $\mathcal{L}$ μια συνάρτηση που προκύπτει από την μοντελοποίηση ενός φυσικού συστήματος συνεχούς μέσου (πεδίου) που ονομάζεται *Λαγκραντζιανή πυκνότητα*.

2. Το πλάτος μετάβασης που ορίζεται ως

$$\langle \mathrm{Out}_{t_1} | \mathrm{In}_{t_0} \rangle := \int_{\Omega} \mathcal{D}[\Phi] e^{iS[\Phi]}, \tag{6.7}$$

όπου $\mathcal{D}[\Phi]$ κατάλληλο μέτρο τύπου Lebesgue,

$$\mathcal{D}[\Phi] = \lim_{N \to \infty} \prod_{s=1}^{N} \Phi_s^i,$$

για $i = 1, \dots, n$, ώστε να μπορούμε να ολοκληρώσουμε πάνω από ένα συνεχές φάσμα και να προσθέσουμε πάνω από ένα διακριτό φάσμα του χώρου ενός προβλήματος. Εφαρμόζοντας την περιστροφή Wick $t \mapsto \tau$, όπου τ ο μιγαδικός χρόνος, μπορούμε να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα 6.7 στο πραγματικό ολοκλήρωμα

$$\int \mathcal{D}[\phi] e^{-S[\phi]}$$

Το εσωτερικό γινόμενο Hodge οδηγεί σε ένα συναρτησιακό μέτρο $\mathcal{D}_{\mu}[\omega]$ ανεξάρτητο από τη μετρική, που κανονικοποιεί το ολοκλήρωμα

$$\int \mathcal{D}_{\mu}[\omega] e^{i\langle \omega | \omega \rangle} = 1 \tag{6.8}$$

Αυτό θα μας βοηθήσει να δούμε πως μετασχηματίζεται το συναρτησιακό μέτρο από την αποσύνθεση του Hodge. Από το θεώρημα αποσύνθεσης του Hodge λοιπόν και την ορθογωνιότητά του από το το εσωτερικό γινόμενο Hodge ισχύει

$$(\omega, \omega) = (d\alpha, d\alpha) + (\delta\beta, \delta\beta) + (\gamma, \gamma) = (\alpha, \delta d\alpha) + (\beta, d\delta\beta) + (\gamma, \gamma) \tag{6.9}$$

Για κάθε τελεστή O έχουμε

$$\int \mathcal{D}\mu[\omega] \exp i\langle \omega | O\omega \rangle = \det{}^{-1/2}(O), \tag{6.10}$$

επομένως από τις σχέσεις 6.8 και 6.9 παίρνουμε

$$\mathcal{D}\mu[\omega] = \mathcal{D}\mu[\gamma] \mathcal{D}\mu[\alpha] \mathcal{D}\mu[\beta] \det{}^{1/2}(\delta d) \det{}^{1/2}(d\delta). \tag{6.11}$$

Η κλασική δράση για μια Αβελιανή θεωρία Chern-Simons είναι η

$$S = \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} A_{\lambda}, \tag{6.12}$$

για $\mu = 0, 1, 2$. Αν γράψουμε το πεδίο ως $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ τότε η δράση γίνεται

$$S = \int_M A \wedge dA.$$

Να επισημανθεί ότι για τον τύπο 6.12 χρησιμοποιήθηκε η άθροιση του Einstein κατά την οποία οι όροι με δείκτες που επαναλαμβάνονται, αθροίζονται.

Σημείωση 6.6.1. Η 3-μορφή Chern-Simons $A \wedge dA$ μπορεί να οριστεί σε οποιαδήποτε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα M και το ολοκλήρωμά της είναι τοπολογική αναλλοίωτη της M. Συγκεκριμένα παραμένει αναλλοίωτο από τον μετασχηματισμό

$$A \mapsto A + d\phi$$

που ονομάζεται *μετασχηματισμός βαθμίδας*.

Το σύνολο των μετασχηματισμών βαθμίδας, ορίζει μια ομάδα και συγκεκριμένα μια ομάδα Lie. Καλούμε ομάδα Lie μια ομαλή πολλαπλότητα G, χωρίς σύνορο, η οποία είναι και ομάδα με την ιδιότητα ότι ο πολλαπλασιασμός $m : G \times G \to G$ και η αντιστροφή $i : G \to G$, που ορίζονται από

$$m(g, h) = gh$$

και

$$i(g) = g^{-1}$$

αντίστοιχα, είναι ομαλές συναρτήσεις.

Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση διαμέρισης

$$Z := \int \frac{1}{V_G}\mathcal{D}\mu[A]e^{iS[A]},$$

όπου V_G ο όγκος της ομάδας που σχηματίζουν οι μετασχηματισμοί $A \mapsto A + d\phi$. Θέλουμε ο V_G να παραγοντοποιηθεί εκτός του ολοκληρώματος έτσι ώστε η ολοκλήρωση να γίνει πάνω από φυσικά διακεκριμένα πεδία βαθμίδας. Για να το πετύχουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη αποσύνθεση του Hodge για να παραμετρικοποιήσουμε το A ως προς του τμήματά του που είναι αναλλοίωτα και εξαρτώμενα από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Μετασχηματίζουμε τις μεταβλητές ολοκλήρωσης

$$A \mapsto \alpha, \beta, \gamma,$$

όπου α,β, γ παραμετροποιούν τα πλήρη, συνπλήρη και αρμονικά μέρη του A. Για τις 0-μορφές ισχύει $\Delta = \delta d$, οπότε από τη σχέση 6.11 παίρνουμε

$$Z = \int \frac{1}{V_G}\mathcal{D}\mu[\alpha]\mathcal{D}\mu[\beta]\mathcal{D}\mu[\gamma]\det{}^{1/2}(\Delta)\det{}^{1/2}(d\delta)e^{iS}. \tag{6.13}$$

Ο όγκος της ομάδας δίνεται από

$$V_G = \int \mathcal{D}\mu[\alpha]. \tag{6.14}$$

Έχουμε, μετά από ολοκλήρωση κατά μέλη, το γεγονός ότι $d^2 = 0$ και $d\gamma = 0$ και εξαλείφοντας τους επιφανειακούς όρους

$$\begin{aligned}
\int_M A \wedge dA &= \int_M (d\alpha + \delta\beta + \gamma) \wedge (d^2\alpha + d\delta\beta + d\gamma) \\
&= \int_M d\alpha \wedge d\delta\beta + \int_M \delta\beta \wedge d\delta\beta + \int_M \gamma \wedge d\delta\beta \\
&= -\int_M d(d\alpha \wedge \delta\beta) + \int_M d^2\alpha \wedge \delta\beta + \int_M *d*\beta \wedge d\delta\beta \\
&- \int_M d(\gamma \wedge \delta\beta) + \int_M d\gamma \wedge \delta\beta \\
&= \int_M d\delta\beta \wedge *d*\beta - \int_{\partial M} d\alpha \wedge \delta\beta - \int_{\partial M} \gamma \wedge \delta\beta \\
&= \int_M d*\beta \wedge *d\delta\beta \\
&= \int_M d(*\beta \wedge *d\delta\beta) - \int_M *\beta \wedge d*d\delta\beta \\
&= \int_{\partial M} *\beta \wedge *d\delta\beta - \int_M d*d\delta\beta \wedge *\beta \\
&= -\int_M \beta \wedge \delta d\delta\beta
\end{aligned}$$

Επομένως

$$S = -(\beta, *\delta d\delta\beta). \tag{6.15}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 6.13, 6.14, 6.15 και ολοκληρώνοντας πάνω από τη β παίρνουμε

$$Z = \int \mathcal{D}\mu[\gamma]\det{}^{-1/2}(*\delta d\delta)\det{}^{1/2}(\Delta)\det{}^{1/2}(d\delta).$$

Ισχύουν οι ταυτότητες

$$\det(*\delta d\delta)_{(2)} = \det{}^{1/2}((d\delta d)(\delta d\delta))_{(2)} = \det{}^{3/2}(d\delta)_{(2)},$$

$$\det(\delta d)_{(p)} = \det(d\delta)_{(n-p)}$$

και

$$\det\left(\Delta_{(p)}\right) = \det\left((\delta d)_{(p)}\right)\det\left((\delta d)_{(p-1)}\right). \tag{6.16}$$

Οπότε προκύπτει η σχέση

$$Z = \int \mathcal{D}\mu[\gamma]\det{}^{-3/4}\left(\Delta^T_{(1)}\right)\det{}^{1/2}\left(\Delta_{(0)}\right)\det{}^{1/2}\left(\Delta^T_{(1)}\right)$$

όπου $\Delta^T_{(p)} := (\delta d)_{(p)}$
το εγκάρσιο μέρος Δ της Λαπλασιανής Hodge που δρα σε p-μορφές. Από τη σχέση 6.16 παίρνουμε

$$\det\left(\Delta^T_{(1)}\right) = \frac{\det\left(\Delta_{(1)}\right)}{\det\left(\Delta_{(0)}\right)}$$

και συνεπώς

$$Z = \int \mathcal{D}\mu[\gamma] \det^{-1/4}\left(\Delta_{(1)}\right)\det^{3/4}\left(\Delta_{(0)}\right).$$

Επομένως αφού ο χώρος των αρμονικών μορφών είναι πεπερασμένο σύνολο, η ολοκλήρωση πάνω από τις αρμονικές μορφές είναι ένα απλό άθροισμα.

Κεφάλαιο 7

Συμπέρασμα

Οι κύριοι στόχοι της εργασίας αυτής ήταν η κατανόηση της συνομολογίας de Rham, η κατασκευή της ακολουθίας Mayer-Vietoris την οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τη συνομολογία de Rham ορισμένων πολλαπλοτήτων και η παρουσίαση και μερική απόδειξη του θεωρήματος Hodge, το οποίο και χρησιμοποιήσαμε σε μια εφαρμογή στη φυσική. Στην εργασία έγινε παράλληλα μια προσπάθεια να συνδεθεί η θεωρία αυτή με τη φυσική, κυρίως μέσω παραδειγμάτων, όπως η παρουσίαση των εξισώσεων Maxwell σε μια πιο συμπαγή μορφή, μέσω διαφορικών μορφών αλλά και της θεωρίας Chern-Simons στο τέλος του κεφαλαίου 6. Η θεωρία που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή, είναι ένα πολύ μικρό κομμάτι της θεωρίας συνομολογίας, όμως αποτελεί τις βάσεις για οποιονδήποτε επιθυμεί να εμβαθύνει στη συνομολογία των ομαλών πολλαπλοτήτων.

Βιβλιογραφία

[1] Antonio Sergio Teixeira Pires 2019, "A Brief Introduction to Topology and Differential Geometry in Condensed Matter Physics", p 5-10, p 5-11.

[2] Bjorn Jahren 2011, "De Rham Cohomology", p 1-5.

[3] Joel W. Robbin, Dietmar A. Salmon 2021, "Introduction to Differential Geometry", p 21.

[4] John M. Lee 2013, "Introduction to Smooth Manifolds", second edition, p 10-16, p 29, p 50-69, p 77-90, p 185-188, p 201, p 313-315, p 377-387, p 434, p 467-486, p 540-547.

[5] J. Gegenberg, G. Kunstatter 1993, "The Partition Function for Topological Field Theories", p 4-7.

[6] Loring W. Tu 2010, "An Introduction to Manifolds", second edition, p 48-53, p 59-63, p 86-87, p 95-98, p 100-102, p 133-135, p 190-197, p 200-206, p 236-237, p 248-250, p 296-270, p 274-292, p 296-299, p 302-303.

[7] Nikolai Nowaczyk 2010, "The Hodge Decomposition", p 5-16.

[8] Oliver Knill, "Introduction to Geometry and Geometric Analysis", p 7-9, p 21-28, p 37-43, p 89-90.

[9] William M. Boothby 1975, "An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry", p 273.