Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

Επίλυση Προβλήματος και Κατασκευή Προβλήματος: Αντιλήψεις και Διδακτικές Πρακτικές Εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Χρήστος Ζιάκας

Επιβλέπων καθηγητής: Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

Αθήνα, Ιούλιος 2022

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Επίλυση Προβλήματος και Κατασκευή Προβλήματος: Αντιλήψεις και Διδακτικές Πρακτικές Εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Χρήστος Ζιάκας

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος
Επίκουρος Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Ευγένιος Αυγερινός
Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Αθήνα, Ιούλιος 2022

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Α΄ Επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή ΠΤΔΕ του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο, καθώς χωρίς την πολύτιμη βοήθεια του, τη στήριξη του, την ενθάρρυνση του, αλλά και το χρόνο που μου αφιέρωσε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, η εργασία αυτή δε θα είχε ολοκληρωθεί.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ των προτέρων τον Β΄ Επιβλέποντα κ. Ευγένιο Αυγερινό, Καθηγητή ΠΤΔΕ του Πανεπιστημίου Αιγαίου, για την τιμή που μου έκανε να αξιολογήσει την παρούσα εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, καθώς χωρίς τη συνεχή και έμπρακτη στήριξη της δε θα βρισκόμουν σε αυτό εδώ το σημείο.

Στη σύντροφο μου, Μυρτώ

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η οποία υπάγεται στο επιστημονικό πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, μελετάμε τις αντιλήψεις και τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε σχέση με: α) την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (δηλαδή, την επίλυση ενός δοθέντος, "έτοιμου" προβλήματος) και β) την κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, τη δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος είτε από εκπαιδευτικούς είτε από μαθητές/τριες για το μάθημα στην τάξη). Η ιδέα αυτής βασίζεται στο γεγονός ότι το κύριο αντικείμενο ή η καρδιά των μαθηματικών κατά τον Halmos (1980), είναι τα προβλήματα. Για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται όμως η διατύπωση αυτού. Οι δύο αυτές διαδικασίες καθότι φαίνεται και μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, είναι άμεσα συνδεδεμένες μεταξύ τους και συνεπώς κρίθηκε ότι έπρεπε να μελετηθούν μαζί. Αρχικά στο θεωρητικό μέρος αυτής γίνεται μια ανασκόπηση σχετική με την έννοια τους προβλήματος, την επίλυση και κατασκευή αυτού, δίνοντας βάση κατά κύριο λόγο στα έργα των G. Polya και A. Schoenfeld. Ακολουθεί η καταγραφή των αντιλήψεων και των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών Μαθηματικών σε σχέση με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος, μέσα από έρευνες της ελληνικής και διεθνής βιβλιογραφίας. Έπειτα στο ερευνητικό μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιώντας ως εργαλείο ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις κλειστού τύπου, καταγράφονται οι αντιλήψεις και οι διδακτικές πρακτικές των Ελλήνων/ίδων εκπαιδευτικών Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος. Τέλος γίνεται η καταγραφή των διάφορων συμπερασμάτων που προέκυψαν μέσα από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας.

Λέξεις – Κλειδιά

επίλυση προβλήματος, κατασκευή προβλήματος, αντιλήψεις, διδακτικές πρακτικές

Problem Solving and Problem Posing: Conceptions and Teaching Practices of Secondary Education Mathematics Teachers

Christos Ziakas

Abstract

In the present study, which falls under the scientific field of Didactics of Mathematics, we investigate the conceptions and teaching practices of Secondary Education Mathematics teachers in relation to: a) mathematical problem solving (i.e., solving a given, "ready" problem) and b) problem posing (i.e., the creation and formulation of a mathematical problem either by teachers or by students for the lesson in the classroom). The idea is based on the fact that the main object or the heart of Mathematics according to Halmos (1980), are problems. In order to solve a problem, however, it is necessary to formulate it. These two processes, as it can be seen through the literature review, are directly connected to each other and therefore it was decided that they should be studied together. Initially in the theoretical part of this thesis a review is made related to the concepts of problem, problem solving and problem posing, based mainly on the works of G. Polya and A. Schoenfeld. The following part is the recording of the conceptions and teaching practices of the Mathematics teachers in relation to problem solving and problem posing, through researches of Greek and international bibliography. Then in the research part of this study using a questionnaire with closed-ended questions as a tool, we record the conceptions and teaching practices of the Greek Mathematics teachers of Secondary Education in relation to problem solving and problem posing. Finally we present the various conclusions that emerged through the analysis of the data from our survey.

Keywords

problem solving, problem posing, conceptions, teaching practices

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

ΕΑΠ	Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
ΙΕΠ	Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
ΠΤΔΕ	Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
ΥΠΑΙΘ	Υπουργείο Παιδείας & Θρησκευμάτων

1. Σχετικά με την έννοια του προβλήματος

1.1 Περί προβλήματος

Τι ονομάζουμε πρόβλημα; Ή τι είναι ένα πρόβλημα; Με μια πρόχειρη αναζήτηση σε οποιοδήποτε λεξικό ή στο διαδίκτυο, μπορεί να βρει κανείς ορισμούς αυτού όπως:

- κάτι που είναι δύσκολο να αντιμετωπιστεί, κάτι που προκαλεί ταλαιπωρία, ανησυχία κτλ
- μια ερώτηση που τίθεται προς έρευνα, εξέταση ή λύση,
- οποιαδήποτε ερώτηση που περιλαμβάνει αμφιβολία, αβεβαιότητα ή δυσκολία,
- μια δυσκολία που πρέπει να αντιμετωπιστεί και να υπερπηδηθεί με κάποιες ενέργειες.

Φαίνεται να μην υπάρχει ένας και μοναδικός ορισμός της έννοιας του προβλήματος. Η αλήθεια είναι ότι κατά τη διάρκεια των χρόνων διάφοροι ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν δώσει αρκετούς, έως πολλούς ορισμούς της έννοιας αυτής. Για παράδειγμα, ο G. Polya σκιαγραφεί το νόημα της λέξης πρόβλημα ως εξής:

> *Η λήψη τροφής συνήθως δεν αποτελεί πρόβλημα στη σύγχρονη ζωή. Αν πεινάσω στο σπίτι, αρπάζω κάτι από το ψυγείο, και πηγαίνω σε καφετέρια ή σε κάποιο άλλο κατάστημα αν είμαι στην πόλη. Είναι ένα διαφορετικό θέμα όμως, ωστόσο, όταν το ψυγείο είναι άδειο ή εγώ τυχαίνει να είμαι στην πόλη χωρίς χρήματα˙ σε μια τέτοια περίπτωση, η λήψη τροφής γίνεται πρόβλημα. Γενικότερα, μια επιθυμία μπορεί να οδηγήσει ή όχι σε πρόβλημα. Εάν η επιθυμία φέρνει στο νου αμέσως, χωρίς καμία δυσκολία, κάποια προφανή δράση που είναι πιθανό να επιτύχει το επιθυμητό αντικείμενο, δεν υπάρχει πρόβλημα. Εάν, ωστόσο, δεν υπάρχει μια τέτοια ενέργεια, μου φαίνεται, πως υπάρχει πρόβλημα. Έτσι, το να έχεις πρόβλημα σημαίνει: να ψάχνεις συνειδητά για κάποια ενέργεια κατάλληλη για την επίτευξη ενός σαφώς σχεδιασμένου, αλλά όχι άμεσα εφικτού στόχου... Κάποιος βαθμός δυσκολίας ανήκει στην ίδια την έννοια του προβλήματος: όπου δεν υπάρχει δυσκολία, δεν υπάρχει πρόβλημα.* (Polya, 1981, σ. 117)

Από τα παραπάνω γραφόμενα του G. Polya γίνεται αμέσως αντιληπτή η σχετικότητα-υποκειμενικότητα της έννοιας του προβλήματος, κάτι το οποίο υπογραμμίζει και ο Schoenfeld (1985), τονίζοντας πως η δυσκολία στον ορισμό του όρου πρόβλημα έχει να κάνει με το γεγονός ότι η επίλυση του είναι σχετική, υπό την έννοια ότι εξαρτάται άμεσα από το άτομο που εμπλέκετε με αυτό. Ένα πρόβλημα για κάποιον μπορεί να είναι απλώς μια άσκηση ρουτίνας για κάποιον άλλο ή αφότου ένα πρόβλημα λυθεί δε μπορεί πλέον να αποτελεί πρόβλημα για το άτομο που το έλυσε. Την ίδια άποψη φαίνεται να ενστερνίζεται και ο J. Kilpatrick σημειώνοντας: *«…για να είναι πρόβλημα, πρέπει να είναι πρόβλημα για κάποιον.»* (Kilpatrick, 1985, σ. 2)

Για την παρούσα εργασία σχετικά με την έννοια του προβλήματος θα υιοθετήσουμε την άποψη των Γ. Μαμωνά-Downs και Ι. Παπαδόπουλου, οι οποίοι βασίζονται στον ορισμό αυτού από τους Newell και Simon (1972): *«[Θεωρούμε ότι] κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν θέλει κάτι και δεν γνωρίζει άμεσα τη σειρά των ενεργειών που μπορεί να ακολουθήσει ώστε να το επιτύχει.»* (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017, σ. 1)

1.2 Πότε ένα πρόβλημα καλείται *μαθηματικό*;

Μέχρις στιγμής έχει γίνει άμεσα αντιληπτό ότι έχουν προταθεί αρκετοί ορισμοί για τον όρο πρόβλημα. Πλην των προαναφερθέντων αξίζει να αναφερθούμε σε ακόμη ένα. Ο R. Mayer περιέγραψε την έννοια του προβλήματος ως εξής: *«Ένα πρόβλημα προκύπτει όταν βρίσκεστε αντιμέτωποι με μια υπάρχουσα κατάσταση – ας την ονομάσουμε δεδομένη κατάσταση – και θέλετε κάποια άλλη κατάσταση – ας την ονομάσουμε αυτήν κατάσταση στόχου – αλλά δεν υπάρχει κανένας προφανής τρόπος για να πετύχετε το στόχο σας.»* (Mayer, 1985, σ. 123)

Ο παραπάνω ορισμός στο *Becoming a Better Problem Solver 1* (Ohio Department of Education, 1980) «εμπλουτίζεται» με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε έναν ορισμό του μαθηματικού προβλήματος. Συγκεκριμένα διατυπώνεται η θέση ότι για να καλείται ένα πρόβλημα μαθηματικό θα πρέπει να περιέχει τα εξής στοιχεία:

- Μια κατάσταση που περιλαμβάνει μια αρχική κατάσταση και μια κατάσταση στόχου (a situation which involves an initial state and a goal state).
- Η κατάσταση πρέπει να περιλαμβάνει μαθηματικά.
- Ένα άτομο πρέπει να επιθυμεί μια λύση.
- Θα πρέπει να υπάρχει κάποια παρακώλυση μεταξύ των δοθέντων και επιθυμητών καταστάσεων.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία εκτός του τρίτου φαντάζουν απολύτως απαραίτητα για να μπορούμε να μιλήσουμε περί μαθηματικού προβλήματος. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι στον παραπάνω ορισμό εμπλέκεται και η επιθυμία λύσης του προβλήματος. Κάτι αντίστοιχο σημειώνουν και οι Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος (2017) αναφέροντας ότι ένα πρόβλημα πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο της αποδοχής, δηλαδή ο εν δυνάμει λύτης αυτού να αποδέχεται το πρόβλημα και να εμπλέκεται ενεργά με αυτό. Αν δεν αποτελεί μια πρόκληση για αυτόν, τότε δεν είναι και πρόβλημα για αυτόν, τουλάχιστον τη συγκεκριμένη στιγμή.

Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία σε αντιστοιχία με τον ορισμό του προβλήματος, έτσι και το μαθηματικό πρόβλημα δεν ορίζεται με ένα και μοναδικό τρόπο. Χωρίς να θέλουμε να επεκταθούμε σχετικά με το εν λόγω ζήτημα καθώς κατά προσωπική άποψη δε φαίνεται να έχει να προσφέρει κάτι σημαντικό στην εξέλιξη της παρούσας εργασίας, θα αρκεστούμε σε όσα έχουν ήδη αναφερθεί. Και έχοντας ως βάση τους δύο παραπάνω ορισμούς, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε εν τέλει ένα πρόβλημα μαθηματικό όταν θέλουμε να μεταβούμε από μια δεδομένη κατάσταση σε μια κατάσταση στόχου και η επίτευξη αυτή πραγματοποιείται εμπλέκοντας μαθηματικές έννοιες, αρχές και μεθόδους, αλλά όχι με άμεσο και προφανή τρόπο.

1.3 Είδη/κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων

Ο Polya (1981) σημειώνει ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό για ένα μαθητή να μπορεί να ταξινομήσει τα μαθηματικά προβλήματα που θα του παρουσιαστούν. Και αυτό γιατί κατά αυτόν τον τρόπο αμέσως θα έχει προχωρήσει ένα βήμα ως προς τη λύση τους. Θεωρεί πως η κατηγοριοποίηση των προβλημάτων θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς ο τύπος του προβλήματος θα δώσει και τον αντίστοιχο τύπο λύσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω άποψη δεν αναφέρεται αποκλειστικά στα «μαθητικά» προβλήματα, αλλά και σε εκείνα των προχωρημένων ερευνών. Δεδομένου της θεματολογίας της παρούσας εργασίας και έχοντας πλέον αναφερθεί τόσο στην γενικότητα του όρου πρόβλημα, αλλά τόσο και σε αυτό καθαυτό το μαθηματικό πρόβλημα, θα ήταν χρήσιμο για την καλύτερη δυνατή συνέχεια της η αναφορά από μέρους μας στα είδη/κατηγορίες μαθηματικών προβλημάτων .

1.3.1 Προβλήματα εύρεσης και προβλήματα απόδειξης

Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) ενστερνίζονται την άποψη του Polya (1981) (η οποία ανάγεται στον Ευκλείδη) για την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων. Δηλαδή, για αυτούς υπάρχουν τα εξής είδη:

Προβλήματα εύρεσης

Ο στόχος ενός τέτοιου προβλήματος είναι η εύρεση ενός αντικειμένου (το λεγόμενο ζητούμενο του προβλήματος) το οποίο πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη που συσχετίζει το τελευταίο με τα δεδομένα του προβλήματος. Το προς εύρεση αντικείμενο μπορεί να είναι οτιδήποτε (γεωμετρικό αντικείμενο, αριθμός, λέξη κτλ) και για αυτό το λόγο ένα τέτοιο πρόβλημα θα πρέπει να καθορίζει ρητά τη φύση του αγνώστου.

Προβλήματα απόδειξης

Ένα πρόβλημα αυτής της κατηγορίας έχει ως στόχο απλώς την απόδειξη της αλήθειας ή του ψεύδους ενός ξεκάθαρα διατυπωμένου μαθηματικού ισχυρισμού. Ουσιαστικά καλούμαστε να απαντήσουμε στην ερώτηση: αληθεύει ή όχι αυτός ο ισχυρισμός; Και η οποιαδήποτε απάντηση μας θα πρέπει να είναι μαθηματικά τεκμηριωμένη.

Σχετικά με τις δύο παραπάνω κατηγορίες προβλημάτων ο Polya (1957) σημειώνει την αξία αυτών αναφορικά με τα μαθηματικά, ισχυριζόμενος ότι τα προβλήματα εύρεσης είναι περισσότερο σημαντικά για τα στοιχειώδη μαθηματικά, ενώ τα προβλήματα απόδειξης για τα ανώτερα μαθηματικά.

Είναι άξιο λόγου όμως ότι ο Polya (1981) τονίζει ότι η παραπάνω ταξινόμηση δεν είναι τέλεια και ούτε λεπτομερής. Από την άλλη (Polya, 1957), πλην των παραπάνω κατηγοριών αναφέρει και αυτή των «προβλημάτων ρουτίνας», τα οποία χαρακτηρίζονται από έλλειψη πρωτοτυπίας και απλώς ακολουθούν κάποιο παράδειγμα που έχει δοθεί προηγουμένως (για παράδειγμα η επίλυση μια δευτεροβάθμιας εξίσωσης). Την παραπάνω άποψη επιβεβαιώνει και ο Schoenfeld (1992) επισημαίνοντας ότι υπό αυτή τη σκοπιά μιλάμε για ασκήσεις, οι οποίες έχουν απλώς ως στόχος την πρακτική εξάσκηση σε συγκεκριμένες αλγοριθμικές/μηχανικές διαδικασίες, οι οποίες μόλις έγιναν γνωστές στον εκάστοτε μαθητή και ο στόχος τους είναι η εδραίωση της προαναφερθείσας γνώσης-τεχνικής. Όσο τετριμμένη και να είναι όμως η φύσης τους, σε ένα πρόγραμμα σπουδών τα εν λόγω προβλήματα δεν μπορούν να απουσιάζουν (Polya, 1992˙ Schoenfeld, 1988).

1.3.2 Τετριμμένα και μη-τετριμμένα προβλήματα (routine and non-routine problems)

Πέρα από την προαναφερθείσα ταξινόμηση των προβλημάτων θα μπορούσαμε να κατηγοριοποιήσουμε τα προβλήματα και ως εξής:

Τετριμμένα και μη-τετριμμένα προβλήματα

Προηγουμένως αναφερθήκαμε στα προβλήματα ρουτίνας του G. Polya. Όπως σημειώσαμε, ουσιαστικά μιλάμε για προβληματικές καταστάσεις ή ερωτήματα για τα οποία κάποιος γνωρίζει εκ των προτέρων πώς να τα προσεγγίσει. Επί αυτού ο Schoenfeld (1983) αναφέρει ότι μια τέτοια κατάσταση η οποία δεν παρουσιάζει καμία έκπληξη και μπορεί να λυθεί με τη χρήση κάποιας οικείας διαδικασίας (όσο δύσκολη και να είναι αυτή), είναι απλώς μια άσκηση. Σε κάθε άλλη περίπτωση κατά την οποία ο δρόμος προς τη λύση δεν είναι a priori γνωστός, απαιτεί την ανάκληση προ υπάρχουσας γνώσης, την ανάλυση και τη σύνθεση αυτής, προφανώς και έχουμε να κάνουμε με ένα μη-τετριμμένο πρόβλημα. Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) σημειώνουν και εκείνοι αυτή τη διάκριση χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό χαρακτηρισμό. Η δική τους διάκριση είναι αυτή που αναφέρεται σε ασκήσεις και προβλήματα, έναντι *της δικής μας*, των τετριμμένων και μη-τετριμμένων προβλημάτων.

1.3.3 Ανοιχτά και κλειστά προβλήματα

Στην προσπάθεια μας να ομαδοποιήσουμε τα μαθηματικά προβλήματα θα μπορούσαμε να αναφερθούμε σε αυτά και ως:

Ανοιχτά και κλειστά προβλήματα

Στα πλαίσια της μαθηματικής κοινότητας και μιλώντας για ανοιχτά προβλήματα, αναφερόμαστε σε προβλήματα των οποίων η λύση δεν έχει ακόμη βρεθεί, αλλά παράλληλα δεν έχει αποδειχθεί η μη-επιλυσιμότητα τους. Από την άλλη ένα πρόβλημα θεωρείται κλειστό, όταν απλώς δεν είναι ανοιχτό. Ίσως το δημοφιλέστερο (εξαιτίας της απλής διατύπωσης του) ανοιχτό πρόβλημα να είναι η εικασία του C. Goldbach (1690-1764), στην οποία ο τελευταίος ισχυριζόταν ότι: «Φαίνεται ότι κάθε αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι το άθροισμα τριών πρώτων αριθμών» (ο Goldbach θεωρούσε τον αριθμό 1 ως πρώτο). Μια ισοδύναμη μορφή αυτής (η οποία αποκαλείται «ισχυρή» εικασία του Goldbach) δόθηκε αργότερα από τον L. Euler (1707-1783) και η διατύπωση αυτή αναφέρει: «Όλοι οι θετικοί άρτιοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 4 μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα δύο πρώτων». Η εικασία αυτή όπως η Υπόθεση του Riemann, η απειρία των τέλειων αριθμών και άλλα διάσημα προβλήματα των μαθηματικών, δεν έχει αποδειχθεί ακόμη.

Στη Διδακτική των Μαθηματικών όμως ο όρος ανοιχτό πρόβλημα λαμβάνει διαφορετική ερμηνεία από την παραπάνω. Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) προσδίδουν στον όρο ανοιχτό πρόβλημα τις παρακάτω ερμηνείες:

- **Ανοιχτό ως προς την ερμηνεία της κατάστασης που περιγράφει.**
  Σε ένα τέτοιο πρόβλημα διαφορετικές ερμηνείες παράγουν ανάλογα και διαφορετικές λύσεις.
- **Ανοιχτό ως προς τις διαφορετικές προσεγγίσεις που θα υιοθετηθούν για την επίλυση του.**
  Θα μπορούσαμε να πούμε πως ένα πρόβλημα αυτού του είδους παράγει δημιουργικές αμφιβολίες όσο αφορά το χειρισμό του και συνεπώς διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.
- **Ανοιχτό ως προς τις διαφορετικές λύσεις που επιδέχεται.**
  Προφανώς αναφερόμαστε σε ένα πρόβλημα το οποίο επιτρέπει διαφορετικές απαντήσεις.

Έτσι ένα πρόβλημα του οποίου η εκφώνηση περιλαμβάνει εκφράσεις όπως οι: «Να δείξετε ότι…», ή «Βρείτε το…», δε μπορεί να θεωρείται ανοιχτό. Απεναντίας η σαφής διατύπωση του, η ξεκάθαρη προσέγγιση αυτού και η μοναδικότητα της λύσης, αναφέρονται σε κλειστά προβλήματα. Ένα όμως ανοιχτό πρόβλημα ενέχει την έννοια της πολλαπλότητας, υπό την σκοπιά ότι επιδέχεται διαφορετικές λύσεις ή η λύση αυτού μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς τρόπους.

1.3.4 Καλώς και κακώς δομημένα/διατυπωμένα

Τέλος μια ακόμη διάκριση των μαθηματικών προβλημάτων είναι η εξής:

Καλώς και κακώς δομημένα/διατυπωμένα

Προηγουμένως είδαμε ότι οι Γ. Μαμωνά-Downs και Ι. Παπαδόπουλος προσέδωσαν στον όρο ανοιχτό πρόβλημα τρεις ερμηνείες, όπου η μία εξ αυτών αναφέρεται σε αυτό ως εξής: «Ανοιχτό ως προς την ερμηνεία της κατάστασης που περιγράφει», υπό την έννοια ότι διαφορετικές ερμηνείες παράγουν ανάλογα και διαφορετικές λύσεις. Ένα τέτοιο πρόβλημα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί διαφορετικά ως κακώς δομημένο ή ως κακώς διατυπωμένο. Αναφερόμαστε δηλαδή σε ένα πρόβλημα το οποίο δεν προσδιορίζει με σαφήνεια το ζητούμενο αυτού, χαρακτηρίζεται από ημιτελείς ή ελλιπείς πληροφορίες και δεν είναι ξεκάθαρο αν μιλάμε για μία και μοναδική λύση, εφόσον φυσικά υπάρχει.

Αντ' αυτού ο Simon (1973) παρόλο που θεωρεί αδύνατο να προσδώσει ένα επίσημο ορισμό του καλού δομημένου ή διατυπωμένου προβλήματος, κάνει μια προσπάθεια καταγραφής ορισμένων χαρακτηριστικών που θα πρέπει να διακρίνουν ένα τέτοιο πρόβλημα. Σε μια αντίστοιχη κίνηση προβαίνει και ο Jonassen (1997) θεωρώντας ότι τα καλώς δομημένα προβλήματα διαθέτουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Παρουσιάζονται όλα τα στοιχεία τους.
- Παρουσιάζονται στους μαθητές ως πλήρως καθορισμένα προβλήματα με πιθανή λύση (οι παράμετροι του προβλήματος καθορίζονται στην εκφώνηση αυτού).
- Εμπλέκουν την εφαρμογή περιορισμένου αριθμού κανόνων και αρχών οι οποίοι οργανώνονται σε μια προγνωστική και κανονιστική ρύθμιση με πλήρως καθορισμένες και περιορισμένες παραμέτρους.
- Συμπεριλαμβάνουν έννοιες και κανόνες που φαίνονται κανονικοί και καλά δομημένοι σε έναν τομέα γνώσης που φαίνεται επίσης καλά δομημένος και αναμενόμενος
- Έχουν σωστές, συγκλίνουσες απαντήσεις.

- Διαθέτουν γνωστές, κατανοητές λύσεις όπου η σχέση μεταξύ των επιλογών απόφασης και όλων των προβληματικών καταστάσεων είναι γνωστές ή πιθανολογικές.
- Έχουν μια προτιμώμενη, προδιαγεγραμμένη διαδικασία λύσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο D. Jonassen στην εργασία του *Instructional Design Models for Well-Structured and Ill-Structured Problem-Solving Learning Outcomes* (1997), παρουσιάζει και μια αντίστοιχη λίστα για τα κακώς δομημένα/διατυπωμένα προβλήματα, θεωρώντας πως αυτά είναι εκείνα τα οποία συναντώνται στην καθημερινή πρακτική και δεν έχουν σχεδιαστεί με αποκλειστικό στόχο τη μελέτη τους στα πλαίσια μιας σχολικής αίθουσας.

1.4 Συστατικά μέρη προβλήματος

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη πέρα από το γεγονός ότι θεωρούνται ως το αρχέτυπο ενός αυστηρού συμπερασματικού συστήματος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελούν και μια συλλογή γεωμετρικών προβλημάτων. Βλέπουμε σε αυτό το «παιδαγωγικό» έργο του Ευκλείδη ένα μεγάλο μέρος των προτάσεων αυτού να έχουν ακριβώς το ίδιο ύφος. Η ανάπτυξη αυτών βασίζεται σε ένα πλήρως καθορισμένο πρότυπο, αυτό της υπόθεσης-συμπεράσματος. Ο παραλληλισμός όμως γενικότερα των δεδομένων και του ζητούμενου ενός προβλήματος με την υπόθεση και το συμπέρασμα αντίστοιχα, είναι ένα ατυχές φαινόμενο που παρατηρείται ακόμη και στη βιβλιογραφία (Polya, 1981). Θα μπορούσαμε να πούμε πως μια τέτοια κίνηση μοιάζει να ενοποιεί προβλήματα εύρεσης και απόδειξης. Και η μη ικανότητα διάκρισης αυτών όπως έχουμε σημειώσει προηγουμένως, πολύ πιθανό να προκαλέσει και την αδυναμία επίλυσης τους. Η εύρεση και αναγνώριση των βασικών συστατικών ενός προβλήματος αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την κατανόηση αυτού και συνεπώς για την επίλυση του.

Αναφερόμενοι σε προβλήματα εύρεσης, καλούμε βασικά μέρη αυτών τα: ζητούμενο, δεδομένα και τη συνθήκη μεταξύ αυτών. Ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι το εξής: Να κατασκευαστεί τρίγωνο με πλευρές α, β και γ. Το ζητούμενο αυτού του προβλήματος είναι το τρίγωνο προς κατασκευή και τα δεδομένα αυτού τα μήκη των πλευρών του. Για να είναι δυνατή όμως μια τέτοια κατασκευή, τα μήκη α, β και γ του προς κατασκευή τριγώνου θα πρέπει να πληρούν την τριγωνική ανισότητα (την εδώ συνθήκη του προβλήματος).

Από την άλλη τα βασικά μέρη των προβλημάτων απόδειξης, είναι η υπόθεση και το συμπέρασμα, η αλήθεια του οποίου καλείται να αποδειχθεί ή να απορριφθεί. Αναλόγως εδώ θα μπορούσαμε να έχουμε ένα πρόβλημα όπως το: Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός. Το πρώτο μέρος της φράσης που αρχίζει με το «αν», είναι η υπόθεση, ενώ το δεύτερο μέρος αυτής που αρχίζει με το «τότε», είναι το συμπέρασμα.

1.5 Το «πρόβλημα» στη μαθηματική εκπαίδευση

Γενικότερα το πρόβλημα μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι αποτελεί ένα από τα βασικά συστατικά των μαθηματικών. Ιστορικά γνωρίζουμε ότι τα προβλήματα έχουν προκαλέσει τη γένεση μαθηματικών (π.χ. υπολογισμοί μεγεθών, επανακαθορισμός εκτάσεων γης κ.α.), αλλά και τα μαθηματικά τη γένεση προβλημάτων (π.χ. 5ο αίτημα του Ευκλείδη). Μάλιστα ο Γερμανός μαθηματικός D. Hilbert (1862-1943), πίστευε ότι η εξέλιξη ενός κλάδου όπως αυτού των μαθηματικών έρχεται μέσα από την επίλυση προβλημάτων και ότι παραμένει ζωντανός μονάχα όταν υπάρχουν προβλήματα σε αυτόν. Η άποψη ότι ο πυρήνας της μαθηματικής επιστήμης δεν είναι τίποτε άλλο παρά η επίλυση προβλημάτων, πιστεύουμε πως βρίσκει σύμφωνο ένα μεγάλο μέρος της μαθηματικής κοινότητας. Ο P. Halmos δε στην εργασία του *The Heart of Mathematics* (1980), τονίζει ότι η «καρδιά» των μαθηματικών είναι τα προβλήματα και ότι ο βασικός λόγος ύπαρξης των μαθηματικών είναι η επίλυση προβλημάτων. Και από τη στιγμή που η καθημερινότητα είναι γεμάτη από αυτά, οι δάσκαλοι και ειδικότερα οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών έχουν καθήκον να εκθέτουν τους μαθητές τους σε προβλήματα πολύ περισσότερο παρά σε γεγονότα. Ποια είναι η όμως η θέση του προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση; Ποιος είναι ο ρόλος αυτού στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών;

Ένας από τους παράγοντες που προκάλεσαν την ιδέα δημιουργίας της παρούσας εργασίας, ήταν η άποψη ότι η επίλυση προβλήματος είναι ένας ιδιαίτερα αποτελεσματικός τρόπος διδασκαλίας, αλλά και μάθησης των μαθηματικών. Η επιβεβαίωση αυτής έρχεται από τον Gagne (1970) στην ταξινόμηση της γνωστικής διαδικασίας, οπού κατά τον ίδιο η επίλυση προβλήματος αποτελεί την υψηλότερη μορφή μαθηματικής μάθησης. Πιθανώς η άποψη του R. Gagne να μη βρίσκει σύμφωνη όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα. Θεωρούμε όμως ότι η διδασκαλία διαμέσου της επίλυσης προβλήματος δύναται να καταδείξει τη δύναμη και τη χρησιμότητα των μαθηματικών για την επίλυση ενός ευρύ φάσματος προβλημάτων (NCTM, 2000), αλλά και να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών, κάνοντας έτσι την εκμάθηση των μαθηματικών συναρπαστική και ανταποδοτική (Lambdin, 2003).

Στα αναλυτικά προγράμματα αρκετών ευρωπαϊκών χωρών, η επίλυση προβλήματος και οι σχετικές δεξιότητες της αποτελούν βασικές προσδοκίες αυτών (Xenofontos & Andrews, 2012). Έτσι και σε αυτό της χώρας μας συγκαταλέγεται στους βασικούς στόχους της διδασκαλίας στις δύο πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Υπό ποια προοπτική όμως μπορούμε να μιλήσουμε για την επίλυση προβλήματος στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης; Αναφερόμαστε σε αυτή ως: «Διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος», «Διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος» ή ως «Διδασκαλία σχετικά με την επίλυση προβλήματος»; (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017). Το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών της χώρας μας αναφέρεται στις δύο πρώτες παραπάνω προοπτικές, καθώς και στην έμφαση που πρέπει να δοθεί στις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.

Το μέχρι στιγμής ενδιαφέρον μας γύρω από το πρόβλημα στη μαθηματική εκπαίδευση έχει επικεντρωθεί στην επίλυση αυτού. Για να μπορούμε όμως να μιλήσουμε για την επίλυση ενός προβλήματος, προηγουμένως θα πρέπει να έχουμε αναφερθεί στην κατασκευή του. Όπως αναφέραμε προηγουμένως η επίλυση προβλήματος έχει βασικό ρόλο στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών της χώρα μας, όμως κάτι τέτοιο δε φαίνεται να συμβαίνει με την κατασκευή του παρόλο που υπάρχουν κάποιες σχετικές αναφορές. Ωστόσο εμφανίζεται στη βιβλιογραφία η άποψη ότι η κατασκευή προβλήματος θα έπρεπε να αποτελεί θεμελιώδη στόχο ενός προγράμματος σπουδών (Kilpatrick, 1987). Εύλογα προκύπτει η εξής απλή ερώτηση: Τι έχει να προσφέρει η κατασκευή προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση; Στη συνέχεια της εργασίας θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σχετικά με τον ρόλο του προβλήματος στη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών, τόσο μέσα από την επίλυση αυτού όσο μέσα και από την κατασκευή του, καθώς και τα δύο αποτελούν κεντρικά θέματα στη μαθηματική εκπαίδευση.

2. Επίλυση μαθηματικού προβλήματος

2.1 Εισαγωγή

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων περίπου 80 χρόνων έχει δημοσιευθεί σημαντικός όγκος βιβλιογραφίας σχετικός με την επίλυση προβλήματος. Όπως έχουμε δει μέχρι στιγμής δε φαίνεται πως υπάρχει ένας ξεκάθαρος ορισμός του όρου πρόβλημα και αυτού του μαθηματικού προβλήματος. Παρομοίως και εδώ δεν υπάρχει μια ερμηνεία του όρου επίλυση προβλήματος η οποία να είναι καθολικά αποδεκτή. Ο Lester (1994) δήλωσε ότι σχετικά με την επίλυση προβλήματος έχουν γραφτεί τα περισσότερα, αλλά πιθανώς είναι το λιγότερο κατανοητό θέμα στο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών. Στο ίδιο μήκος κύματος κινείται και ο Shoenfeld (1992), σημειώνοντας πως ο όρος επίλυση προβλήματος έχει χρησιμοποιηθεί με πολλαπλές σημασίες που κυμαίνονται από ασκήσεις κανονικής εργασίας, έως «κάνω μαθηματικά» ως επαγγελματίας.

Ομοίως στην ίδια λογική κινούνται και οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017), θεωρώντας ότι η απάντηση στο ερώτημα «τι είναι η επίλυση προβλήματος;», εξαρτάται από το άτομο, τα προσωπικά του ενδιαφέροντα, αλλά και τη φιλοσοφία του. Επί προσθέτως αναφέρουν τρεις προοπτικές κάτω από τις οποίες θα μπορούσαμε να συζητήσουμε σχετικά με την επίλυση προβλήματος.

- Η φράση «επίλυση προβλήματος» σημαίνει διαφορετικά πράγματα για διαφορετικούς ανθρώπους.
- Η επίλυση προβλήματος όταν ο όρος εκλαμβάνεται με ευρύτητα μπορεί σαφώς να καταστεί σημαντική σε πολλά άλλα εκπαιδευτικά θέματα.
- Ένας τρόπος για να δημιουργήσει κανείς μια πιο στέρεη ταυτότητα της επίλυσης προβλήματος, θα ήταν να επιλέξει συγκεκριμένες πτυχές που θεωρούνται ότι αποτελούν κεντρικής σημασίας χαρακτηριστικά της.

Στην προσπάθεια μας να αποφύγουμε η παρούσα εργασία να γίνει μια συλλογή ορισμών, παραθέτουμε εκείνον τον οποίο υιοθετούμε για τη συνέχεια αυτής. Το NCTM (2000) βλέπει την επίλυση μαθηματικού προβλήματος ως εξής:

Η επίλυση προβλήματος σημαίνει εμπλοκή σε ένα έργο για το οποίο η μέθοδος λύσης του δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Για να βρεθεί μια λύση, οι μαθητές πρέπει να βασιστούν στις γνώσεις τους, και μέσα από αυτή τη διαδικασία, θα αναπτύσσουν συχνά νέες μαθηματικές κατανοήσεις. (NCTM, 2000, σ.52)

2.2 Η επίλυση προβλήματος μέσα από το έργο του G. Polya

Σημείο αναφοράς για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος αποτελεί ο Ούγγρος μαθηματικός και εκπαιδευτικός G. Polya. Χαρακτηριστική για την αξία του τελευταίου είναι η σημείωση του Schoenfeld (1987) σχετικά με την επίλυση προβλήματος, κατά την οποία αναφέρει την ύπαρξη μιας διαχωριστικής γραμμής, πριν και μετά τον G. Polya. Σε αυτό το σημείο θα προχωρήσουμε σε μια ματιά της επίλυσης προβλήματος (και κριτικό σχολιασμό όπου κριθεί απαραίτητο) μέσα από το έργο του G. Polya.

2.2.1 Η αρχή με το *How to Solve It*

Στην εισαγωγή του πρωτοποριακού και μνημειώδους έργου του (σχετικά με την επίλυση προβλήματος) *How to Solve It* (1957), ο G. Polya θυμάται την εποχή που ήταν ο ίδιος φοιτητής. Παρακολουθώντας διαλέξεις, διαβάζοντας βιβλία και ασχολούμενος με προβλήματα, ένα ερώτημα βασάνιζε συνεχώς το μυαλό του.

Ναι, η λύση είναι μάλλον αποτελεσματική, φαίνεται να είναι σωστή˙ πως είναι όμως δυνατόν να επινοήσουμε μια τέτοια λύση; Ναι, το πείραμα είναι μάλλον αποτελεσματικό, αυτό φαίνεται να είναι γεγονός˙ πως μπορούν όμως οι άνθρωποι ν' ανακαλύψουν τέτοια γεγονότα; Και πως θα μπορούσα να επινοήσω ή ν' ανακαλύψω τέτοια πράγματα μόνος μου; (Polya, 1957, σ. vi)

Τέτοια ερωτήματα πολύ πιθανό να ταλανίζουν κάθε μαθητή/φοιτητή ο οποίος ενδιαφέρετε πραγματικά για το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται. Μέσα από τον εν λόγω βιβλίο ο G. Polya προσφέρει (ή τουλάχιστον προσπαθεί) την απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα σε όλους εκείνους που θέλουν να επεκτείνουν το γνωστικό τους υπόβαθρο, αλλά και να αναπτύξουν την ικανότητα τους στην επίλυση προβλήματος.

Αρχικά μοιάζει να απευθύνεται αποκλειστικά σε μαθητές/φοιτητές στο πλαίσιο της μαθηματικής τους εκπαίδευσης. Ο G. Polya όμως ξεκαθαρίζει ότι ένας από τους στόχους του είναι και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών μαθηματικών. Από τη στιγμή που η επίλυση προβλήματος κατέχει σημαντική θέση σε ένα μάθημα μαθηματικών, αν δεν είναι τελικά η ουσία αυτού, η ανάπτυξη της ικανότητας σχετικά με την επίλυση προβλήματος από την πλευρά του μαθητή προϋποθέτει να υπάρχει η αντίστοιχη από την πλευρά του εκπαιδευτικού. Μάλιστα όσο αφορά τους εκπαιδευτικούς μαθηματικών, συνέταξε μια ομάδα «εντολών» προς το πρόσωπο τους, τις οποίες αναφέρουν και οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) φροντίζοντας μάλιστα να εκφράσουν και την άποψη τους σχετικά με αυτές. Ακολούθως παραθέτουμε τη λίστα με τις εντολές του G. Polya προς τον εκπαιδευτικό μαθηματικό:

- Να δείχνεις ενδιαφέρον για το αντικείμενό σου.
- Να γνωρίζεις το αντικείμενό σου.
- Γνώριζε τους τρόπους μάθησης: Ο καλύτερος τρόπος για να μάθεις κάτι, είναι να το ανακαλύψεις μόνος σου.
- Προσπάθησε να διαβάζεις τα πρόσωπα των μαθητών σου, προσπάθησε να δεις τις προσδοκίες και τις δυσκολίες τους, τοποθέτησε τον εαυτό σου στη θέση τους.
- Δώσε στους μαθητές σου όχι μόνο πληροφορία, αλλά και καθοδήγηση χειρισμού των γνώσεων τους και μάθε τους τη συνήθεια της μεθοδικής εργασίας.
- Άφηνέ τους να μάθουν να κάνουν νοερές εκτιμήσεις.
- Άφηνέ τους να μάθουν να αποδεικνύουν.
- Έχε το νου σου να επισημάνεις στα διαθέσιμα προβλήματα εκείνα τα χαρακτηριστικά που μπορεί να αποβούν χρήσιμα για την επίλυση επόμενων προβλημάτων – προσπάθησε να αποκαλύψεις ένα γενικό μοτίβο (αν υπάρχει) που βρίσκεται πίσω από την παρούσα συγκεκριμένη κατάσταση.
- Μην χαρίζεις ολόκληρο το μυστικό σου μονομιάς – άφησε τους μαθητές να μαντεύουν, να εκτιμούν πριν τους το πεις, άφησέ τους να το βρουν μόνοι τους όσο είναι εφικτό.
- Να προτείνεις, να μην τους βάζεις με το ζόρι να καταπιούν την πληροφορία.

Εκτός των μαθητών/φοιτητών και εκπαιδευτικών, το βιβλίο αυτό κατά τα γραφόμενα του G. Polya απευθύνεται και στον οποιονδήποτε ενδιαφέρεται σχετικά με τα μέσα και τους τρόπους ανακάλυψης και επινόησης.

2.2.2 Στάδια επίλυσης προβλήματος

Ο Polya (1957) πρότεινε τέσσερις σαφείς φάσεις έτσι ώστε να παρέχει μια πιο συστηματική διαδικασία προσέγγισης της επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Ακολούθως παραθέτουμε το μοντέλο επίλυσης του το οποίο αποτελείται από τα εξής βήματα:

Κατανόηση του προβλήματος

«Θα ήταν ανόητο να απαντήσετε σε μια ερώτηση που δεν καταλαβαίνετε.» (Polya, 1957, σ. 6). Είναι δυνατόν να προσπαθεί κάποιος να δώσει λύση σε ένα πρόβλημα του οποίου δεν γνωρίζει καν ποιο είναι το ζητούμενο; Και όμως είναι! Ίσως ένα μεγάλο ποσοστό των εκπαιδευτικών μαθηματικών (αν όχι όλοι) να έχει έρθει αντιμέτωπο με τέτοιες καταστάσεις από την πλευρά των μαθητών του. Για την αποφυγή τέτοιων φαινομένων είναι απαραίτητο ο εν δυνάμει λύτης να επισημαίνει τα βασικά μέρη του προβλήματος, το ζητούμενο, τα δεδομένα και τη συνθήκη. Ένα σχήμα, ένα διάγραμμα ή ένας πίνακας μπορούν να δώσουν μια καλύτερη εικόνα του προβλήματος και να βοηθήσουν στην κατανόηση αυτού.

Επινόηση ενός σχεδίου

Η δυσκολότερη φάση στην επίλυση ενός προβλήματος είναι και η επινόηση/κατασκευή ενός σχεδίου το οποίο θα μας οδηγήσει στο ζητούμενο. Μάλιστα ο Polya (1957) αναφέρει ότι το κύριο επίτευγμα στην επίλυση ενός προβλήματος είναι να συλλάβουν οι μαθητές την ιδέα ενός σχεδίου. Προϋπόθεση για την εκπόνηση όμως αυτού του έργου είναι η ύπαρξη ενός καλού γνωστικού υποβάθρου, προγενέστερης εμπειρίας και φυσικά η κατανόηση του προβλήματος ως απόρροια της προηγούμενης φάσης. Σε αυτό το σημείο της πορείας μας προς τη λύση είναι διαθέσιμες διαφορετικές στρατηγικές προσεγγίσεις (οι λεγόμενες «ευρετικές» στις οποίες θα αναφερθούμε εκτενέστερα αργότερα), οι οποίες ίσως να βοηθήσουν στην αποκάλυψη αυτής. Ανάκληση προηγούμενων εμπειριών, σύνδεση δεδομένων και αγνώστου, εικασίες και αναζήτηση κάποιου μοτίβου, είναι κάποιες από τις στρατηγικές κινήσεις στις οποίες θα μπορούσε να προβεί κάποιος. Φυσικά δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε και τον παράγοντα τύχη, με τη βοήθεια της οποίας ένα κατάλληλο σχέδιο μπορεί να προκύψει από το πουθενά.

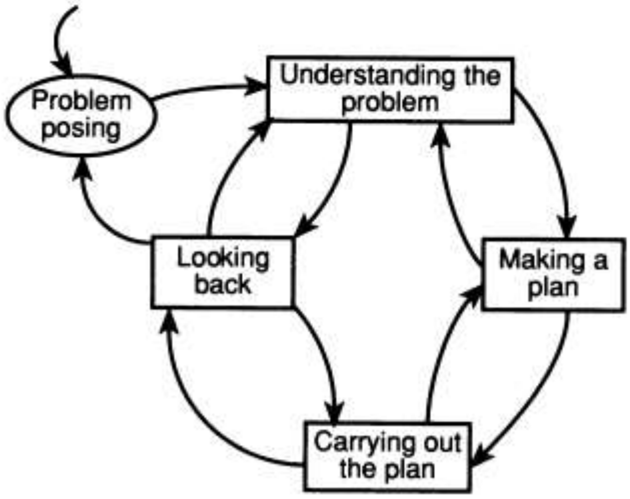
Εκτέλεση του σχεδίου

Ίσως η εκτέλεση ενός σχεδίου να φαντάζει απλή διαδικασία. Κάτι αντίστοιχο σημειώνει και ο G. Polya γράφοντας: *«Η εκτέλεση του σχεδίου είναι πολύ ευκολότερη˙ αυτό που χρειαζόμαστε κυρίως είναι η υπομονή.»* (Polya, 1957, σ. 12). Απαιτείται υπομονή όχι μόνο για την υλοποίηση του σχεδίου, αλλά και για τις απαραίτητες προσαρμογές στο σχέδιο ή ακόμα και για την εγκατάλειψη αυτού και τη στροφή στη δημιουργία ενός νέου. Μπορεί λοιπόν να αναφερόμαστε στην εκτέλεση του σχεδίου ως ένα πιο εύκολο έργο σε σχέση με τη σύλληψη του, ωστόσο είναι εξίσου απαιτητικό όσο και αυτή. Σε αυτό το στάδιο ο εν δυνάμει λύτης καλείται να εφαρμόσει το σχέδιο του ελέγχοντας την ορθότητα κάθε βήματος αυτού είτε «διαισθητικά» είτε «τυπικά». Πάντα όμως θα πρέπει να είναι σε θέση να αποδείξει «τυπικά» τους ισχυρισμούς του.

Ανασκόπηση της λύσης

Αποτελεί συχνό φαινόμενο το γεγονός ότι οι μαθητές έχουν την τάση να σταματούν την ενασχόληση τους με το εκάστοτε πρόβλημα όταν έχουν καταφέρει να δώσουν μία λύση του. Ο G. Polya επ’ αυτού σημειώνει ότι: *«Πράττοντας έτσι χάνουν μια σημαντική και διδακτική φάση της δουλειάς τους.»* (Polya, 1957, σ. 14). Κοιτάζοντας πίσω δεν ελέγχουμε απλώς το αποτέλεσμα και τους συλλογισμούς βρίσκοντας πιθανά λάθη. Η εξέταση του έργου μας θα αποκαλύψει ναι μεν εάν το επιχείρημα μπορεί να επαληθευτεί, αλλά μπορεί να προσδώσει και μια βελτιωμένη λύση του προβλήματος ή ακόμη και μια διαφορετική λύση αυτού. Ίσως όμως αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία σχετικά με την ανασκόπηση της λύσης, είναι ότι μέσα από αυτόν τον έλεγχο μπορούμε να βελτιώσουμε την ικανότητα μας στην επίλυση προβλήματος. Μελετώντας τη λύση μας ίσως μπορούμε να τη γενικεύσουμε εντοπίζοντας ιδέες-κλειδιά, τις οποίες μπορούμε να συνδέσουμε με άλλα συναφή προβλήματα, προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν με αντίστοιχες ιδέες. Η μελέτη αυτή είναι θεμελιώδες συστατικό για την επίλυση προβλήματος και αποτελεί μια μελλοντική επένδυση η οποία μπορεί να διευκολύνει την επίλυση προσεχών προβλημάτων (Silver, 1982).

Σχετικά με το μοντέλο επίλυσης προβλήματος του G. Polya θα μπορούσε κάποιος εκ πρώτης όψεως να θεωρήσει ότι πρόκειται για μια γραμμική διαδικασία. Μια γραμμική διαδικασία της οποίας τα βήματα μπορούν να απομνημονευθούν και απλώς να εφαρμοστούν οποτεδήποτε χρειαστεί. Μάλιστα αυτή η άποψη θα μπορούσαμε να πούμε ότι ενισχύεται με τον τρόπο που οι μαθηματικοί παρουσιάζουν τις λύσεις των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν ή τις αποδείξεις τους. Οι συνοπτικοί όροι και οι κομψές λύσεις ίσως αποτρέπουν κάποιον να αντιληφθεί τη δυναμική και κυκλική διαδικασία που ακολουθείται κατά την επίλυση ενός προβλήματος (Wilson, 1993). Ένα σχετικό γράφημα αυτής και όχι κάποιο μοντέλο επίλυσης προβλήματος όπως επισημαίνει ο ίδιος ο Wilson (1993), παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτό υπάρχει και ο όρος problem posing (τοποθέτηση/κατασκευή προβλήματος) με τον οποίο θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο εκτενέστερα.



Σχήμα 1 Η «κυκλική» φύση της επίλυση προβλήματος (Wilson, 1993)

2.2.3 Ευρετικές

Η επίλυση προβλήματος είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι της εκπαιδευτικής διαδικασίας, τόσο από την πλευρά μάθησης όσο και από αυτή της διδασκαλίας των μαθηματικών. Συνεπώς, θα έπρεπε να υπάρχουν περισσότερες οδηγίες και κατευθυντήριες γραμμές στους εκπαιδευτικούς μαθηματικών με στόχο την καλύτερη δυνατή ενορχήστρωση της εκπαιδευτικής προσέγγισης του θέματος αυτού. Σε αυτό το σημείο της εργασίας θα αναφερθούμε στην έννοια της «ευρετικής», αρχής γενομένης υπό την οπτική του G. Polya ο οποίος προσπάθησε να συνεισφέρει σε αυτό το έργο.

Τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος με βάση τον G. Polya παρέχουν ένα χρήσιμο πλαίσιο για την εξέταση της επίλυσης προβλήματος, ωστόσο αποτελούν ένα μόνο μέρος της συνεισφοράς του. Το μεγαλύτερο μέρος του έργου του *How to Solve It* καλύπτεται από την ενότητα «ΣΥΝΤΟΜΟ ΛΕΞΙΚΟ ΕΥΡΕΤΙΚΗΣ», στο οποίο προσπάθησε να προσεγγίσει τις στρατηγικές που θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμες σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Εκεί ο ίδιος αρχικά σημειώνει ότι:

> *«Ευρετική, ή Ευριστική, ή "Ars Inveniendi" ήταν το όνομα ενός ορισμένου κλάδου μελέτης, χωρίς σαφώς καθορισμένα όρια, που θεωρούσαν ότι ανήκε στη λογική, ή στην φιλοσοφία, ή στην ψυχολογία, η παρουσίαση του γινόταν συχνά σε γενικές γραμμές και σπάνια με λεπτομέρειες και σήμερα έχει σχεδόν ξεχαστεί. Ο σκοπός της ευρετικής είναι η μελέτη των μεθόδων και των κανόνων της ανακάλυψης και της επινόησης.* (Polya, 1957, σ. 112)

Αναγνωρίζοντας ότι δεν ήταν ο πρώτος που καταπιάστηκε με το εν λόγω θέμα, αναφέροντας μάλιστα τους «προπάτορες» του (Πάππος, Descartes, Leibniz, Bolzano), αποκαλεί την δική του ευρετική «σύγχρονη ευρετική», η οποία χαρακτηρίζεται από τον ίδιο ως μοντέρνα και «ταπεινή». Η «σύγχρονη ευρετική» του G. Polya είχε ως απώτερο στόχο την κατανόηση της διαδικασίας της επίλυσης προβλήματος και συγκεκριμένα εκείνων των χρήσιμων νοητικών διεργασιών σε αυτή. Μια καλύτερη κατανόηση αυτών θα ήταν ικανή να επιδράσει θετικά στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Όπως σε προηγούμενους όρους, έτσι και εδώ σχετικά με την έννοια της ευρετικής υπάρχουν αντικρουόμενες διαθέσιμες περιγραφές. Ο A. Schoenfeld (1987) περιέγραψε τις ευρετικές στρατηγικές ως εξής:

> *Οι ευρετικές στρατηγικές είναι βασικοί κανόνες για την επίτευξη προόδου σε δύσκολα προβλήματα. Υπάρχουν, για παράδειγμα, ευρετικές στρατηγικές για την κατανόηση ενός προβλήματος (εστίαση στο άγνωστο, στα δεδομένα, σχεδίαση διαγράμματος κλπ.), για την κατάρτιση σχεδίου (εκμετάλλευση σχετικών προβλημάτων, ανάλογων προβλημάτων, αντίστροφη εργασία κλπ.), και για την εκτέλεση και τον έλεγχο μιας λύσης.* (Shoenfeld, 1987, σ. 284)

Ανεξάρτητα με τη θέση που μπορεί κάποιος να υιοθετήσει απέναντι στην έννοια της ευρετικής στρατηγικής, μοιάζει να είναι ζωτικής σημασίας καθώς αποτελεί εργαλείο μέσω του οποίου μπορεί να λυθεί ένα πρόβλημα. Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) αναφέρονται στις κυριότερες από αυτές που διατύπωσε ο G. Polya. Συγκεκριμένα αναφέρουν τις εξής:

1. Λαμβάνουμε υπόψιν μας και χρησιμοποιούμε προβλήματα που ήδη έχουμε συναντήσει και τα οποία είναι παρόμοια με αυτό που αντιμετωπίζουμε τώρα.
2. Ανακαλύπτουμε βοηθητικά στοιχεία. Δηλαδή, εντοπίζουμε νέες οντότητες στο περιβάλλον του προβλήματος και ανακαλύπτουμε σχέσεις που θα μας βοηθήσουν στη λύση του.
3. Διαμορφώνουμε βοηθητικά προβλήματα. «Βοηθητικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που διαμορφώνουμε με στόχο όχι την επίλυση αυτού καθαυτού του προβλήματος, αλλά την εξέτασή του που ελπίζουμε να μας οδηγήσει στη λύση του αρχικού προβλήματος. Το αρχικό πρόβλημα αποτελεί το στόχο που πρέπει να φτάσουμε, ενώ το βοηθητικό πρόβλημα αποτελεί ένα μέσο για να φτάσουμε σ' αυτόν το στόχο».
4. Διερευνούμε για την πιθανή ύπαρξη κάποιου μοτίβου.
5. Εργαζόμαστε αντίστροφα (είτε από τα συμπεράσματα της απόδειξης είτε από την εικασία που κάναμε).
6. Διασπάμε και ανασυνθέτουμε το πρόβλημα ώστε να έχουμε εναλλακτικές διατυπώσεις των δεδομένων.
7. Σχεδιάζουμε ένα σχήμα.
8. Διατυπώνουμε το πρόβλημα με μαθηματικά σύμβολα, για παράδειγμα γράφουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις.
9. Διαφοροποιούμε το πρόβλημα αλλάζοντας κάποια από τα βασικά μέρη του, ιδιαίτερα τις συνθήκες. Ο περιορισμός κάποιων από τις συνθήκες του προβλήματος ή η θεώρηση ενός ευρύτερου προβλήματος μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμα για τη λύση του αρχικού προβλήματος.
10. Σιγουρευόμαστε ότι η επιχειρηματολογία μας δικαιολογείται «πέρα από κάθε αμφιβολία». Με άλλα λόγια, δεν είναι αρκετό να «δούμε» μόνο ή να μαντέψουμε την απάντηση, πρέπει να κάνουμε απόδειξη.

Μάλιστα η 3η από τις παραπάνω ευρετικές στρατηγικές (δημιουργία βοηθητικού προβλήματος) θα μπορούσαμε να πούμε ότι μας παραπέμπει στην κατασκευή προβλήματος. Μπορεί οι ευρετικές στρατηγικές να αποτελούν όντως ένα εργαλείο για την επίλυση ενός προβλήματος, ωστόσο δε μπορούν να λειτουργήσουν από μόνες τους. Συγκεκριμένα ο Κλαουδάτος (2011) αναφέρει ότι δε μπορούν να αντικαταστήσουν την έλλειψη γνώσεων. Συμπληρωματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ακόμη και αν κάποιος έχει τις απαραίτητες γνώσεις, αλλά και γνώση ευρετικών στρατηγικών, η επίλυση ενός προβλήματος δε θα πρέπει να θεωρείται δεδομένη, κάτι στο οποίο θα αναφερθούμε και στη συνέχεια της παρούσας εργασίας.

2.3 Η επίλυση προβλήματος μέσα από το έργο του A. Schoenfeld

Ο A. Schoenfeld, Αμερικανός ερευνητής στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, έχει δηλώσει ρητά ότι η επιρροή του G. Polya στη μελέτη της μαθηματικής σκέψης υπήρξε τεράστια (Schoenfeld, 1987). Ο ίδιος μάλιστα έχει μελετήσει διεξοδικά το έργο του G. Polya και αναπόφευκτα έχει επηρεαστεί έντονα από αυτό.

2.3.1 Παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται η επίλυση προβλήματος

Το κύριο επιχείρημα του A. Schoenfeld σχετικά με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος στο έργο του *Mathematical Problem Solving* (1985), ήταν ότι είναι δυνατό να εξηγηθεί η επιτυχία ή η αποτυχία κάποιου στην προσπάθεια επίλυσης προβλήματος στη βάση τεσσάρων κατηγοριών. Αναφέρεται σε τέσσερις κατηγορίες γνώσης και συμπεριφοράς οι οποίες είναι θεμελιώδεις για την έκβαση της επίλυσης προβλήματος. Συγκεκριμένα αναφέρει τις:

Πόροι (Resources)

Πρόκειται για το απόθεμα της μαθηματικής γνώσης που το άτομο είναι ικανό να φέρει στο προσκήνιο κατά την ενασχόληση του με ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Και ως μαθηματική γνώση λογίζονται: διαισθήσεις, άτυπες γνώσεις, γεγονότα, αλγοριθμικές (και μη) διαδικασίες και κατανοήσεις σχετικά με τους συμφωνηθέντες κανόνες για την εργασία στον τομέα. Το να γνωρίζεις κανείς τις γνώσεις και τους πόρους που έχει στη διάθεση του μπορεί να μοιάζει τετριμμένο, ωστόσο είναι άκρως σημαντικό (Schoenfeld, 2012).

Ευρετικές (Heuristics)

Αναφέρεται σε στρατηγικές και τεχνικές για την επίτευξη προόδου σε μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems). Τέτοιες είναι: η σχεδίαση σχημάτων, η ενασχόληση με σχετικά προβλήματα, η αναδιατύπωση προβλήματος, οι δοκιμές και οι επαληθεύσεις, η επιχειρηματολογία με αντίφαση κτλ. Η μαθηματική γνώση από μόνη της δεν είναι αρκετή για να κάνει κάποιον καλό λύτη. Οι στρατηγικές επίλυσης προβλήματος είναι απαραίτητες για την αποτελεσματικότερη και αποδοτικότερη εκμετάλλευση των διαθέσιμων πόρων.

Έλεγχος (Control)

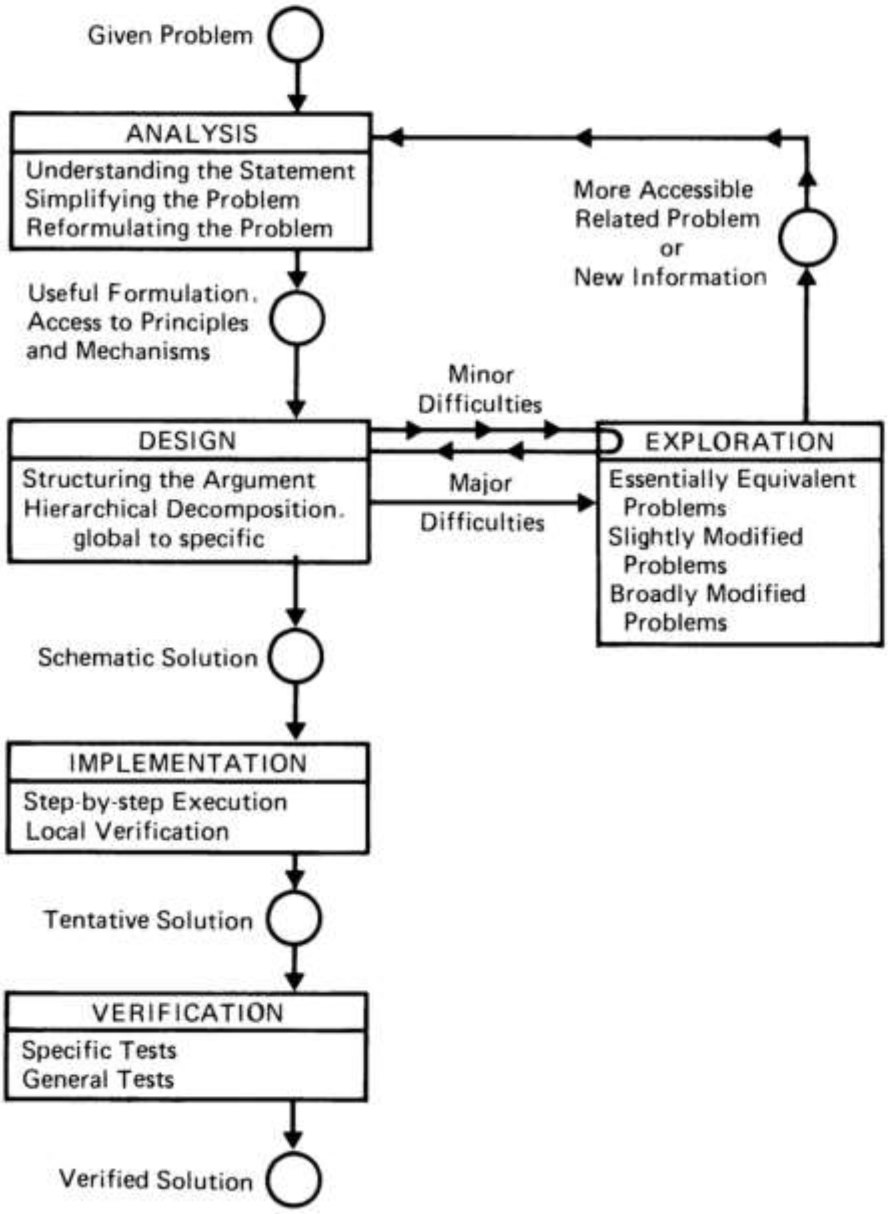
Η κατηγορία αυτή αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους το άτομο επιλέγει και εφαρμόζει τους διαθέσιμους πόρους και στρατηγικές. Περιλαμβάνει: σχεδίαση, παρακολούθηση και αξιολόγηση, λήψη αποφάσεων και συνειδητές μεταγνωστικές δράσεις. Ουσιαστικά ο έλεγχος βρίσκεται υπό τη σκέπη της μεταγνώσης, για την οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια αναλυτικά.

Συστήματα πεποιθήσεων (Belief Systems)

Πρόκειται για το σύνολο των καθοριστικών παραγόντων (όχι απαραίτητα συνειδητών) που διαμορφώνουν τη συμπεριφορά του ατόμου. Το σύνολο αυτό υποδηλώνει τη «μαθηματική κοσμοθεωρία» κάποιου μέσα στην οποία λειτουργούν οι πόροι, οι ευρετικές και ο έλεγχος.

2.3.2 Το μοντέλο επίλυσης προβλήματος του A. Schoenfeld

Όπως σημειώσαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου αυτού, ο Schoenfeld (1987) σημειώνει ότι σχετικά με την επίλυση προβλήματος υπάρχει μια διαχωριστική γραμμή πριν και μετά τον G. Polya. Το έργο του τελευταίου επηρέασε σε σημαντικό βαθμό τον A. Schoenfeld, ο οποίος στο *Mathematical Problem Solving* (1985) ανέπτυξε κατάλληλες παιδαγωγικές καταστάσεις που έκαναν τις ιδέες του G. Polya αποτελεσματικές στην πράξη (Mamona-Downs & Downs, 2004). Στο σύγγραμμα αυτό παρουσιάζει και αυτός το δικό του μοντέλο για την επίλυση προβλήματος, το οποίο καλεί *ιδανικό* ή διαφορετικά εκείνο το οποίο θα χρησιμοποιούσε ένας καλός λύτης προβλημάτων (Schoenfeld, 1985). Το περίγραμμα αυτού παρατίθεται στο Σχήμα 2 και ακολουθεί μια συνοπτική ανάλυση του.



Σχήμα 2 Μοντέλο επίλυσης προβλήματος κατά Schoenfeld (1985)

Ανάλυση (Analysis)

Στο πρωταρχικό αυτό στάδιο η προσεχτική ανάγνωση του προβλήματος θεωρείται δεδομένη και η ανάλυση ξεκινά με το τι απαιτεί πραγματικά το πρόβλημα. Για ποιο λόγο δόθηκε, ποιες βασικές αρχές ή μηχανισμοί φαίνονται σχετικοί ή κατάλληλοι για να έρθουν στο προσκήνιο κοκ. Οι ευρετικές που πιθανώς να είναι κατάλληλες προς χρήση στο στάδιο της ανάλυσης, εξαρτώνται τόσο από το ίδιο το πρόβλημα όσο και από το εκάστοτε άτομο το οποίο ασχολείται με αυτό. Ωστόσο για την ανάλυση και την κατανόηση του προβλήματος ο εν δυνάμει λύτης θα μπορούσε να προβεί στις παρακάτω ενέργειες:

- Σχεδίαση ενός διαγράμματος αν είναι δυνατόν.
- Εξέταση ειδικών περιπτώσεων.
- Προσπάθεια απλοποίησης του προβλήματος.

Σχεδιασμός (Design)

Το στάδιο αυτό χαρακτηρίζεται ως “master control” (Shoenfeld, 1985). Δεν πρόκειται απλώς για ένα ξεχωριστό κομμάτι της όλης διαδικασίας, αλλά κάτι το οποίο διαπερνά εξ ολοκλήρου τη διαδικασία επίλυσης. Μια πρόχειρη σχηματική λύση και η επεξεργασία αυτής κρίνεται αναγκαία. Όμως η διεξοδική ενασχόληση με αυτή θα πρέπει να γίνει αφότου έχουν εξεταστεί και εναλλακτικές λύσεις για τις οποίες έχει δοθεί πλήρη αιτιολόγηση. Η λειτουργία του σχεδιασμού φροντίζει για τη διατήρηση μιας συνολικής προοπτικής για τις ενέργειες του εν δυνάμει λύτη και την ιεραρχική πρόοδο.

Εξερεύνηση (Exploration)

Η εξερεύνηση διακρίνεται σε τρεις φάσεις κατά τις οποίες η ενασχόληση του ατόμου στρέφεται σε βοηθητικά προβλήματα. Συγκεκριμένα στα:

- Ουσιαστικά ισοδύναμα προβλήματα.
- Ελαφρώς τροποποιημένα προβλήματα.
- Ευρέως τροποποιημένα προβλήματα.

Η αρχή προτείνεται να γίνει από την αρχική φάση των ισοδύναμων προβλημάτων. Αν δεν υπάρξει πρόοδος ο λύτης θα πρέπει να στραφεί στις επόμενες. Σε κάθε περίπτωση όμως ως επόμενο βήμα έχουμε την επιστροφή στο στάδιο του σχεδιασμού ή ακόμη και αυτού της ανάλυσης. Η εξερεύνηση αποτελεί την ευρετική καρδιά της στρατηγικής (Shoenfeld, 1985).

Εκτέλεση (Implementation)

Αναφερόμαστε σε εκείνο το στάδιο για το οποίο δε χρειάζονται πολλά σχόλια. Μιλάμε απλώς για εκείνο το οποίο αποτελεί συνήθως το τελευταίο βήμα για την «*actual problem solution*» όπως γράφει και ο ίδιος ο A. Schoenfeld.

Επαλήθευση (Verification)

Αποτελεί το στάδιο του οποίου η αξία θα πρέπει να τονιστεί, καθώς δεν είναι λίγες οι φορές που οι μαθητές δεν ελέγχουν τις απαντήσεις τους με συνέπεια αυτή τους η κίνηση να τους κοστίσει μετέπειτα. Πέρα από το αυτονόητο της εύρεσης πιθανών λαθών στην όλη διαδικασία, η επαλήθευση μπορεί να προσφέρει εναλλακτικές και πιο απλές λύσεις, καθώς και να εξασφαλίσει χρήσιμες πτυχές της λύσης του προβλήματος που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάπου αλλού.

2.3.3 Παρατηρήσεις του A. Schoenfeld σχετικά με το έργο του G. Polya

Η μελέτη του *How to Solve It* για πρώτη φορά από την πλευρά ενός μαθητή/φοιτητή ή ακόμη και από αυτή ενός εκπαιδευτικού μαθηματικών, πιθανώς να προκαλέσει κάποιο ενθουσιασμό, ίσως και υπέρμετρο (δεδομένου ότι δεν έχει έρθει σε επαφή με αντίστοιχο έργο). Οι ευρετικές στρατηγικές που προτείνει ο G. Polya φαίνεται να είναι εκείνα τα «εργαλεία» τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα για την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων και εν τέλει για την επίλυση αυτών, συνεπώς και για την ανάπτυξη της ικανότητας στην επίλυση προβλήματος.

Ο A. Schoenfeld όμως στο άρθρο του *Polya, Problem Solving, and Education* (1987), δε συμμερίζεται την παραπάνω άποψη (τουλάχιστον καθολικά). Μάλιστα θεωρεί ότι η απήχηση του *How to Solve It* οφείλεται στο γεγονός ότι οι ευρετικές στρατηγικές είναι ήδη γνωστές στον αναγνώστη και απλώς αυτός τις αναγνωρίζει στα γραπτά του G. Polya. Η εφαρμογή όμως αυτών για την επίλυση ενός προβλήματος είναι ένα άλλο θέμα. Υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ της αναγνώρισης των στρατηγικών από αυτή της εφαρμογής τους. Κατά τον Schoenfeld (1987) η επιστημονική κατάσταση των ευρετικών στρατηγικών θεωρείται προβληματική. Οι περιγραφές της επίλυσης προβλήματος από μέρους του Polya (1957) δεν περιείχαν αρκετές λεπτομέρειες για τα άτομα που δεν έχουν εξοικείωση με τις ευρετικές στρατηγικές, ώστε να αναπτύξουν την ικανότητα τους στην επίλυση προβλήματος. Η άποψη του A. Schoenfeld σχετικά με τις στρατηγικές του G. Polya είναι ότι αποτελούσαν «ετικέτες» κάτω από τις οποίες υπάγονταν οικογένειες σχετικών/ειδικών στρατηγικών, όπου μία από αυτές μπορούσε να «σπάσει» σε μια ντουζίνα ή και περισσότερες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων. Την άποψη αυτή φρόντισε να τη δικαιολογήσει μέσα από μια σειρά παραδειγμάτων (Shoenfeld, 1987, 1992), μέσω των οποίων έδειξε το γενικό/περιγραφικό (παρά ρυθμιστικό) χαρακτήρα των ευρετικών του G. Polya και συνεπώς την όχι και τόσο φαινομενικά τεράστια αξία αυτών.

Ωστόσο ο A. Schoenfeld θεωρεί ότι σε ένα ορισμένο επίπεδο οι περιγραφές του G. Polya για τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος ήταν σωστές και μάλιστα μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για μια περαιτέρω ανάπτυξη αυτών (Schoenfeld, 1985, 1987). Η δημιουργία όμως ενός μεγάλου συνόλου με τεχνικές επίλυσης προβλήματος απαιτεί όμως και την κατάλληλη διαχείριση αυτών. Με ποιο τρόπο όμως θα γίνει η επιλογή της «σωστής» στρατηγικής; Υπάρχουν κριτήρια επιλογής των κατάλληλων τεχνικών επίλυσης προβλήματος; Έτσι βρισκόμαστε στο σημείο που από τη μία έχουμε μια μικρή λίστα περιγραφικών διαδικασιών και από την άλλη ένα τεράστιο σύνολο τεχνικών επίλυσης προβλήματος. Επομένως ποια θα πρέπει να είναι η στάση ή η επιλογή του ατόμου στο παραπάνω δίλλημα; Η πρώτη επιλογή με βάση την άποψη του A. Schoenfeld δεν παρέχει κάποιο σημαντικό όφελος στο άτομο όσο αφορά την ανάπτυξη της ικανότητας του στην επίλυση προβλήματος, ενώ η δεύτερη μοιάζει να είναι τόσο χαοτική ώστε τείνει να γίνει μη-αξιοποιήσιμη και ένα νέο πρόβλημα από μόνη της. Όπως και να έχει, οι μέχρι τώρα έρευνες έχουν δείξει ότι η γνώση και μόνο των ευρετικών στρατηγικών έχει βελτιώσει ελάχιστα (αν όντως υπάρχει βελτίωση) την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα και συνεπώς προκύπτει ότι η γνώση των στρατηγικών δεν είναι από μόνη της αρκετή (Shoenfeld, 1987b).

Φυσικά όπως έχουμε τονίσει αρκετές φορές προηγουμένως, ο A. Schoenfeld εξυμνεί (γενικότερα) το έργο του G. Polya ισχυριζόμενος ότι η επιρροή αυτού στη μελέτη της μαθηματικής σκέψης και σε αυτή της παραγωγικής σκέψης ήταν τεράστια, επισημαίνοντας μάλιστα και την εφαρμογή του μοντέλου επίλυσης προβλήματος του G. Polya και πέρα από τη μαθηματική εκπαίδευση (Shoenfeld, 1987). Βασιζόμενος στο έργο του G. Polya στο βιβλίο του *Mathematical Problem Solving* (1985), ανέπτυξε κατάλληλες παιδαγωγικές καταστάσεις που έκανε τις ιδέες του πρώτου αποτελεσματικές στην πράξη, ωστόσο, δεν έμεινε εκεί.

2.4 Η μεταγνώση και η επίλυση προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση

2.4.1 Μεταγνώση

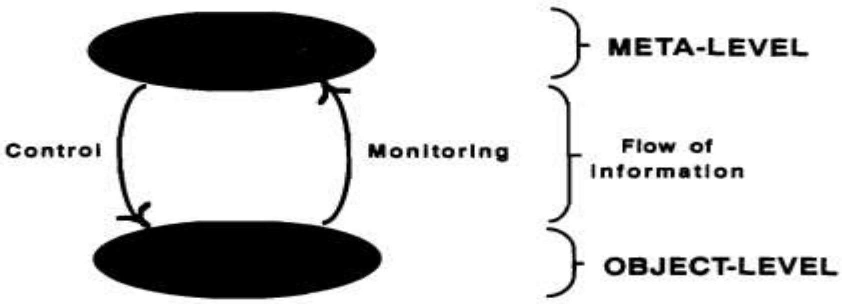
Ο Schoenfeld (1992) ισχυριζόταν ότι η αυτορρύθμιση ή η παρακολούθηση και ο έλεγχος είναι ένας από τους τρεις ευρύτερους τομείς που περικλείεται κάτω από τον όρο-ομπρέλα (umbrella term) μεταγνώση. Τι είναι όμως η μεταγνώση; Η σύντομη αναφορά αυτού έβλεπε τη μεταγνώση ως την κατανομή των διαθέσιμων πόρων κατά τη διάρκεια της γνωστικής δραστηριότητας και της επίλυσης προβλήματος. Έτσι αφήνεται να εννοηθεί η άμεση σύνδεση της μεταγνώσης με τον αναστοχασμό, δηλαδή θα μπορούσαμε να τη δούμε ως την ικανότητα του αναστοχασμού η οποία αφορά τη γνωστική διαδικασία που εξελίσσεται. Θέλοντας όμως να δώσουμε ένα σαφή ορισμό αυτής, παρόλο που και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει διχογνωμία περί αυτού (Campione, Brown, & Connell, 1988), θα πρέπει να ανατρέξουμε στον J. Flavell (1976), ο οποίος πρώτος αναφέρθηκε στη μεταγνώση ως εξής: *«είναι η γνώση που αφορά τις γνωστικές διαδικασίες του υποκειμένου καθώς επίσης και τα προϊόντα της γνώσης αυτής»*. Λίγο αργότερα όμως (Flavell, 1979) ο ίδιος έδωσε μια πιο απλή ερμηνεία αυτής, θεωρώντας την απλά ως: «σκέψη σχετικά με τη σκέψη» (thinking about thinking).

Οι T. Nelson και L. Narens στο άρθρο τους *Metamemory: A theoretical framework and new findings* (1990) ανέλυσαν την έννοια της μεταγνώσης βασίζοντας την σε τρεις αρχές:

- **Οι γνωστικές διαδικασίες χωρίζονται σε δύο ή περισσότερα συγκεκριμένα αλληλένδετα επίπεδα.**

  Σε αυτό που ονομάζεται αντικείμενο-επίπεδο (object-level) εννοώντας τη γνώση και στο μετά-επίπεδο (meta-level) αναφερόμενοι στη μεταγνώση.
- **Το μετά-επίπεδο περιέχει ένα δυναμικό μοντέλο του αντικειμένου-επιπέδου.**
- **Υπάρχουν δύο σχέσεις κυριαρχίας, ο «έλεγχος» (control) και η «παρακολούθηση» (monitoring), οι οποίες ορίζονται με όρους της κατεύθυνσης της ροής πληροφοριών μεταξύ του μετά-επιπέδου και του αντικειμένου-επιπέδου.**

  Η παρακολούθηση αντιστοιχεί στη ροή πληροφοριών από το αντικείμενο-επίπεδο προς το μετά-επίπεδο και ο έλεγχος από το μετά-επίπεδο προς το αντικείμενο-επίπεδο.

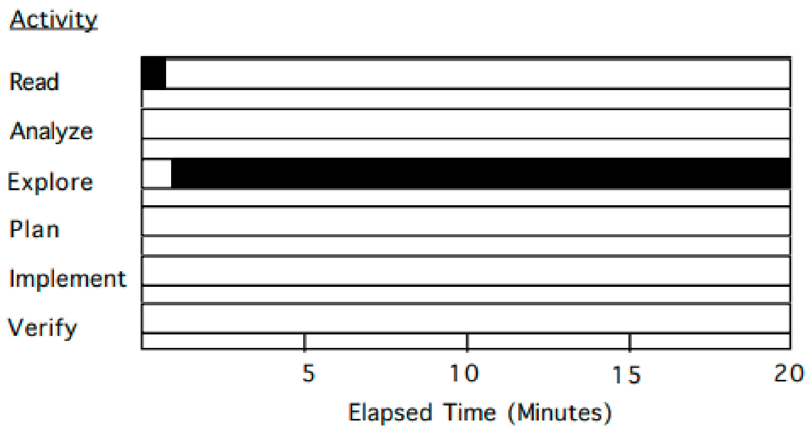


Σχήμα 3 Η σχέση των meta-level και object-level των Nelson & Narens (1990)

Συνεπώς με βάση τους Nelson και Narens (1990) θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για ένα ανώτερο επίπεδο σκέψης (μεταγνώση) το οποίο παρακολουθεί και ελέγχει ένα κατώτερο (γνώση). Υπάρχει μάλιστα και η άποψη ότι η μεταγνώση αποτελεί απαραίτητο συστατικό της μάθησης και με βάση έρευνες παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάγνωση, τη γραφή, την προσοχή, τη μνήμη και την επίλυση προβλήματος (Flavell, 1979). Πως όμως η μεταγνώση μπορεί να βελτιώσει την ικανότητα επίλυσης προβλήματος; Και αν όντως υπάρχει βελτίωση, ποιος είναι ο βαθμός αυτής;

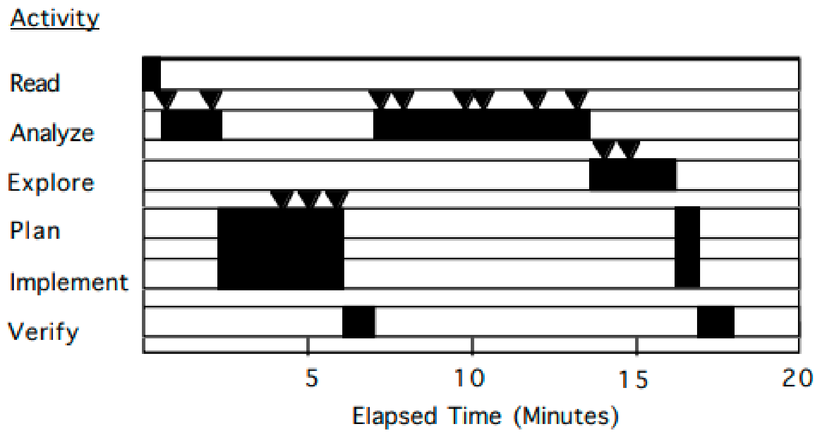
Στο βιβλίο του *Mathematical Problem Solving* (1985), ο A. Schoenfeld παρουσιάζει την αντιμετώπιση ενός μαθηματικού προβλήματος στον τομέα της γεωμετρίας από ένα ζευγάρι φοιτητών και από έναν επαγγελματία μαθηματικό. Αρχικά είναι ενδιαφέρον και άξιο αναφοράς ότι ο επαγγελματίας μαθηματικός δεν είχε ασχοληθεί με τη γεωμετρία για αρκετά χρόνια, εν αντιθέσει με τους φοιτητές οι οποίοι είχαν άμεσα στη διάθεση τους πληθώρα σχετικών πληροφοριών με το πρόβλημα τους.

Οι φοιτητές μετά από μια ανάγνωση του προβλήματος επέλεξαν γρήγορα μια προσέγγιση αντιμετώπισης αυτού και προχώρησαν στην εφαρμογή της χωρίς να συζητήσουν για αυτή τους την επιλογή. Συνέχισαν με αυτό το πλάνο παρά το γεγονός ότι μπροστά τους εμφανίστηκαν αρκετές δυσκολίες και παρά τις ενδείξεις ότι δε σημείωναν πρόοδο. Φρόντισαν να εξαντλήσουν το διαθέσιμο χρόνο τους ακολουθούμενοι την αρχική τους επιλογή και όταν στο τέλος ρωτήθηκαν πως αυτή θα τους βοηθούσε στην επίλυση του προβλήματος, εκείνοι δεν είχαν κάποια απάντηση. Γιατί οι μαθητές δε φάνηκαν ικανοί να λύσουν το πρόβλημα παρόλο που είχαν στη διάθεση τους τις απαραίτητες πληροφορίες; Ο Schoenfeld (1992) σημειώνει ότι μια συμπεριφορά τύπου «Διαβάστε, πάρτε μια απόφαση γρήγορα και επιδιώξτε αυτή την κατεύθυνση οπωσδήποτε (come hell and high water)», εμφανίζεται περίπου στο 60% μαθητών γυμνασίου και κολλεγίου όταν εργάζονται σε μη-τετριμμένα προβλήματα και εγγυάται την αποτυχία. Το Σχήμα 4 παρουσιάζει μια τέτοιου είδους συμπεριφορά.



Σχήμα 4 Χρονοδιάγραμμα προσπάθειας ενός μέσου φοιτητή να λύσει ένα μη-τετριμμένο πρόβλημα (Shoenfeld, 1992)

Από την άλλη πλευρά ο επαγγελματίας μαθηματικός αφιέρωσε τον περισσότερο χρόνο του προσπαθώντας να δώσει νόημα στο πρόβλημα φροντίζοντας να ξεκαθαρίσει αρχικά το ζητούμενο αυτού. Ασχολήθηκε σε σημαντικό βαθμό με την ανάλυση του προβλήματος μέχρις ότου να βεβαιωθεί ότι εργάζεται προς τη σωστή κατεύθυνση και αυτό προσπαθώντας να αποφύγει οποιαδήποτε προβληματική κατάσταση. Κατά τη διάρκεια όλης αυτής της διαδικασίας φρόντιζε να ρυθμίζει/ελέγχει τη σκέψη του, κάτι το οποίο συμβολίζεται στο Σχήμα 5 με μικρά ανεστραμμένα τρίγωνα.



Σχήμα 5 Χρονοδιάγραμμα εργασίας ενός μαθηματικού σε ένα δύσκολο πρόβλημα (Shoenfeld, 1992)

Η διαφορά μεταξύ των παραπάνω συμπεριφορών είναι κάτι παραπάνω από αισθητή. Ποιος ή ποιοι είναι οι λόγοι όμως που η ομάδα των φοιτητών απέτυχε να εφαρμόσει τις περισσότερες πληροφορίες έναντι του μαθηματικού; Η απάντηση βρίσκεται στην έλλειψη ελέγχου, στην απουσία της αυτορρύθμισης και των μεταγνωστικών δραστηριοτήτων που εμφάνισε ο επαγγελματίας μαθηματικός. Ο Schoenfeld (1992) όμως σημείωσε ότι τέτοιες δεξιότητες μπορούν να μαθευτούν ως αποτέλεσμα ρητής διδασκαλίας που επικεντρώνεται στις μεταγνωστικές πτυχές της μαθηματικής σκέψης. Αυτή η οδηγία παίρνει τη μορφή «coaching» (όπως ο ίδιος ανέφερε) με ενεργές παρεμβάσεις καθώς οι μαθητές εργάζονται πάνω σε προβλήματα. Μετά από μια τέτοια διδασκαλία (Shoenfeld, 1992) συνειδητοποίησε ότι το ποσοστό 60% που αναφερόταν στους φοιτητές *«Διαβάστε, πάρτε μια απόφαση γρήγορα και επιδιώξτε αυτή την κατεύθυνση οπωσδήποτε»*, έφτασε πλέον να είναι λιγότερο από 20%. Συμπέρανε πως η εμφάνιση μεταγνωστικών δραστηριοτήτων κατάφερε να αλλάξει τη συμπεριφορά αυτών των φοιτητών με τέτοιο τρόπο, ώστε να μοιάζει με αυτή ενός επαγγελματία μαθηματικού και τελικώς βελτίωσε την ικανότητα επίλυσης προβλήματος των φοιτητών.

Σε μια παρόμοια έρευνα για το ρόλο της μεταγνώσης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος προέβησαν και οι Lester, Garofalo και Kroll (1989), τα συμπεράσματα της οποίας ήταν παρόμοια με αυτά του A. Schoenfeld. Έχοντας τον εκπαιδευτικό ως εξωτερικό επιτηρητή, ως πρότυπο καλής διευθυντικής συμπεριφοράς και με στόχο να ενθαρρύνει τη συζήτηση συμπεριφορών που θεωρούνται σημαντικές για την εσωτερίκευση των μεταγνωστικών δεξιοτήτων, συμπέραναν ότι υπάρχει μια δυναμική σχέση μεταξύ της εκμάθησης μεταγνωστικών δεξιοτήτων και μαθηματικών εννοιών, θεωρώντας ότι η ανάπτυξη αυτών έρχεται ταυτόχρονα.

Παραδοσιακά η διδασκαλία των μαθηματικών επικεντρώνεται στις μαθηματικές έννοιες, στις μαθηματικές διαδικασίες και στην επίλυση προβλημάτων. Ωστόσο κατά αυτόν τον τρόπο οι μαθητές αποτυγχάνουν σε μεγάλο ποσοστό να ανταπεξέλθουν σε μη οικεία προβλήματα σε αυτούς. Αντιμετωπίζουν τα προβλήματα τους όπως το 60% του *«Διαβάστε, πάρτε μια απόφαση γρήγορα και επιδιώξτε αυτή την κατεύθυνση οπωσδήποτε»*. Μήπως η δυναμική σχέση γνώσης και μεταγνώσης θα μπορούσε να προσφέρει ένα «νέο μοντέλο» διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών;

2.4.2 Η επίλυση προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση

Η διαδικασία λήψης αποφάσεων ενός ατόμου και η ικανότητα αυτού στην επίλυση προβλήματος είναι άμεσα συνυφασμένες και εκτός σχολικού περιβάλλοντος. Η αποφυγή των όποιων δυσκολιών υπάρχουν μπροστά του με σκοπό να πετύχει του στόχους του δεν είναι αναγκαία μόνο σε μία σχολική τάξη, αλλά γενικότερα στην καθημερινότητα του. Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι η «επιβίωση» και η «εξέλιξη» αυτού εξαρτώνται άμεσα από την ικανότητα του στην επίλυση προβλημάτων. Ποια είναι η θέση όμως της επίλυσης προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση; Σε προηγούμενο σημείο της εργασίας αναφερθήκαμε στις εξής τρεις προοπτικές (Schroeder & Lester, 1989):

- **Διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος (teaching for problem solving).**
  Οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά για να τα εφαρμόσουν στην επίλυση προβλημάτων, προβλημάτων όχι απαραίτητα που περιστοιχίζονται από τους τοίχους της σχολικής τάξης, τετριμμένων ή μη-τετριμμένων τα οποία θα συναντήσουν στην καθημερινότητας τους. Υπό αυτή την προοπτική θα μπορούσαμε να πούμε ότι η απόκτηση γενικότερης μαθηματικής γνώσης παραγκωνίζεται, με απώτερο σκοπό την ανάπτυξη της ικανότητας στην επίλυση προβλήματος. Εξάλλου ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα (Halmos, 1980).

- **Διδασκαλία σχετικά με την επίλυση προβλήματος (teaching about problem solving).**
  Η διδασκαλία ενός μοντέλου επίλυσης προβλήματος όπως του G. Polya ή του A. Schoenfeld και η διδασκαλία ευρετικών στρατηγικών υπάγονται στην προοπτική της διδασκαλίας σχετικά με την επίλυση προβλήματος. Οι μαθητές σε αυτή την κατάσταση καλούνται να δουλέψουν όπως ένας επαγγελματίας μαθηματικός ερχόμενοι αντιμέτωποι με πληθώρα προβλημάτων.
- **Διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος (teaching via problem solving).**
  Όσο αφορά τη διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος, αυτή αντιμετωπίζει την επίλυση προβλήματος όχι ως αυτοσκοπό, αλλά ως ένα μέσο. Οι στόχοι αυτής είναι η κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, η ανάπτυξη νέων και η πρόσδοση νοήματος και ενδιαφέροντος στα μαθηματικά.

Σε μια παραδοσιακή τάξη, η εισαγωγή μιας νέας μαθηματικής έννοιας από την πλευρά του εκπαιδευτικού αρκετές φορές αποτελείται από την επίδειξη μιας αλγοριθμικής διαδικασίας διαμέσου ποικίλων παραδειγμάτων. Έπειτα ακολουθούν ανάλογες ασκήσεις με στόχο την αφομοίωση της όλης διαδικασίας. Κατά αυτόν τον τρόπο ενώ ο εκάστοτε εκπαιδευτικός μαθηματικών προσπαθεί να εισάγει νέες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες διαμέσου της επίλυσης προβλήματος, «καταφέρνει» να βρεθεί μπροστά στη διδασκαλία για την επίλυση προβλήματος μέσω της οποίας τα μαθηματικά μοιάζουν να χάνουν την πραγματική τους αξία και να αντιμετωπίζονται απλώς ως ένα εργαλείο για την επίτευξη των στόχων μας. Ποιοι είναι οι λόγοι στους οποίους οδηγούμαστε σε αυτή την κατάσταση; Ο διαδικαστικός χαρακτήρας του μαθήματος; Η έλλειψη πρόκλησης και ενδιαφέροντος από την πλευρά των μαθητών; Όπως και να έχει, οι μαθητές αντί να κατανοήσουν τις νέες μαθηματικές γνώσεις που τους παρουσιάζονται, καταλήγουν να αποστηθίζουν αλγοριθμικές-μηχανικές διαδικασίες χωρίς να έχουν ιδέα περί τίνος πρόκειται, στοχεύοντας απλώς και μόνο στην επίλυση της άσκησης/προβλήματος που αντιμετωπίζουν. Ίσως ένα μεγάλο μέρος της εκπαιδευτικής κοινότητας να συμφωνεί με την παραπάνω προσέγγιση και πιθανώς να την υιοθετεί. Σίγουρα η απλή γνώση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών δεν μπορεί να έχει καμία πρακτική αξία αν στέκει μόνη της. Όμως και η οικοδόμηση νέας μαθηματικής γνώσης δε μπορεί να παραχθεί βλέποντας τα μαθηματικά καθαρά και μόνο ως ένα εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων.

Επομένως πως θα πρέπει να βλέπουμε την επίλυση προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση; Αν στραφούμε στην προσέγγιση της διδασκαλίας για την επίλυση προβλήματος, τα μαθηματικά υποβαθμίζονται σε ένα απλό εργαλείο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι βρισκόμαστε αντιμέτωποι με μια τέτοια «αναγκαία» κατάσταση όταν έχουμε να κάνουμε με μαθητές οι οποίοι προετοιμάζονται για εξετάσεις, όπως αυτές των πανελληνίων. Σε μια τέτοια περίπτωση δε μπορούμε να μιλάμε για μαθηματική γνώση, αλλά για συγκεκριμένες δεξιότητες. Αν από την άλλη επιλέξουμε τη διδασκαλία σχετικά με την επίλυση προβλήματος, θέλοντας και μη μάλλον θα βρεθούμε ξανά υπό τη σκέπη της προηγούμενης προοπτικής ή σε ένα πλαίσιο αποκομμένο από τα μαθηματικά. Όμως αυτή η προσέγγιση ίσως σε ένα βαθμό να αποτελεί ένα απαραίτητο συστατικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών που κάθε δάσκαλος θα πρέπει να κάνει χρήση. Τέλος ενώ η διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλήματος μοιάζει ιδανική, φαίνεται να κρύβει αρκετές παγίδες τόσο από την πλευρά των μαθητών όσο και από αυτή των εκπαιδευτικών.

Ίσως θα πρέπει πρωτίστως οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος να γίνουν ξεκάθαροι και στον τελευταίο εκπαιδευτικό μαθηματικό. Ακόμη όμως και έτσι, κατά πόσο θα μπορούν να επιτευχθούν σε μια τυπική σχολική τάξη και με τον ελάχιστο χρόνο που είναι διαθέσιμος;

3. Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος

3.1 Εισαγωγή

> *Όπως σημειώθηκε, σχεδόν όλα τα μαθηματικά προβλήματα που αντιμετωπίζει ένας μαθητής, έχουν προταθεί, και διατυπωθεί, από άλλο άτομο - το δάσκαλο ή το συγγραφέα του σχολικού βιβλίου. Στην πραγματική ζωή εκτός σχολείου, ωστόσο, πολλά προβλήματα, αν όχι τα περισσότερα, πρέπει να δημιουργηθούν ή να ανακαλυφθούν από το λύτη, ο οποίος δίνει στο πρόβλημα μια αρχική διατύπωση.* (Kilpatrick, 1987, σ. 124)

Το κάθε άτομο στην καθημερινότητα του έρχεται αντιμέτωπο με προβληματικές καταστάσεις. Έχοντας ως στόχο να ξεφύγει όμως από αυτές, εάν φυσικά το επιθυμεί, θα πρέπει πρωτίστως να ξέρει τι έχει να αντιμετωπίσει, θα πρέπει να θέσει ή αλλιώς να κατασκευάσει το πρόβλημα το οποίο καλείται να αντιμετωπίσει. Είναι προφανές ότι για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται αρχικά η διατύπωση αυτού. Τι είναι όμως η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος;

Ο Silver (1994) ανέφερε ότι η κατασκευή προβλημάτων είναι μια διαδικασία η οποία αναφέρεται τόσο στην παραγωγή νέων προβλημάτων όσο και στην επαναδιατύπωση δοσμένων. Υπό αυτή την οπτική μπορούμε να μιλήσουμε για κατασκευή προβλήματος πριν την επίλυση δοσμένου, κατά τη διάρκεια αυτής, αλλά και με το πέρα της. Επ’ αυτού οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) αμφισβητούν την ερμηνεία του E. Silver και ισχυρίζονται έμμεσα ότι δεν υπάρχει ένας ξεκάθαρος ορισμός για την κατασκευή προβλήματος και μάλιστα κάτι τέτοιο θα πρέπει να λυθεί. Η αμφισβήτηση αυτή μάλλον θα πρέπει να θεωρείται δικαιολογημένη και αυτό γιατί όταν αναφερόμαστε σε επαναδιατύπωση δοσμένου προβλήματος φαίνεται πως στρεφόμαστε σε κάποια ευρετική στρατηγική για την επίλυση αυτού. Βέβαια η αναμόρφωση ενός δοσμένου προβλήματος μπορεί να ιδωθεί ως μια διαδικασία που ανήκει στην κατασκευή προβλήματος, με την προϋπόθεση όμως το παραχθέν πρόβλημα να είναι διαφορετικό από το δοσμένο (Πούλος, 2013). Μιλώντας απλά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την κατασκευή προβλήματος ως την διαδικασία κατά την οποία το άτομο θέτει, διατυπώνει ή κατασκευάζει προβλήματα όταν έρχεται αντιμέτωπο με προβληματικές καταστάσεις τις οποίες θέλει να ξεπεράσει. Για τη συνέχεια όμως της εδώ εργασίας, θα υιοθετήσουμε την άποψη των E. Stoyanova και N. Ellerton οι οποίες ορίζουν την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος ως εξής: *«…η διαδικασία με την οποία, με βάση τη μαθηματική εμπειρία, οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικές ερμηνείες συγκεκριμένων καταστάσεων και τις διατυπώνουν ως ουσιαστικά μαθηματικά προβλήματα.»* (Stoyanova & Ellerton, 1996, σ. 518). Η επιλογή αυτής της ερμηνείας βασίζεται στο γεγονός ότι αναφέρεται στην κατασκευή προσωπικών ερμηνειών συγκεκριμένων καταστάσεων του ατόμου. Και όπως έχουμε ήδη αναφέρει μέχρι στιγμής, η έννοια του προβλήματος είναι καθαρά υποκειμενική.

3.2 Κατηγορίες μαθηματικών καταστάσεων στην κατασκευή προβλήματος

Πριν αναφερθούμε στα αποτελέσματα της κατασκευής προβλήματος στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, θα πρέπει να σκιαγραφήσουμε τη βάση ενός πλαισίου που να συνδέει την κατασκευή και επίλυση προβλήματος με τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών (Stoyanova & Ellerton, 1996). Οι Stoyanova και Ellerton (1996) προσφέρουν ένα θεωρητικό πλαίσιο για την ταξινόμηση των καταστάσεων στην κατασκευή προβλήματος διακρίνοντας τις εξής τρεις κατηγορίες:

- **Ελεύθερες καταστάσεις (free situations).**
  Σε μια ελεύθερη κατάσταση το άτομο καλείται να σχεδιάσει προβλήματα χωρίς περιορισμούς, από μια δεδομένη, επινοημένη ή ρεαλιστική κατάσταση. Ως κίνητρο για τη δημιουργία προβλημάτων μέσα από ελεύθερες καταστάσεις προτείνεται η κατασκευή προβλημάτων για διαγωνισμούς μαθηματικών, η κατασκευή προβλημάτων της αρεσκείας του εκάστοτε ατόμου, η κατασκευή προβλημάτων τα οποία θα πρέπει να λυθούν από τον εκπαιδευτικό μαθηματικών κτλ.
- **Ημι-δομημένες καταστάσεις (semi-structured situations).**
  Ως ημι-δομημένη κατάσταση ορίζεται εκείνη κατά την οποία δίνεται στο άτομο μια ανοιχτή κατάσταση, της οποίας καλείται να εξερευνήσει τη δομή και να την ολοκληρώσει εφαρμόζοντας γνώσεις, δεξιότητες, έννοιες και σχέσεις από προηγούμενες μαθηματικές του εμπειρίες. Στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α’ Λυκείου θα μπορούσαν να δοθούν τα εξής στοιχεία: «Δίνεται κύκλος και τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι κορυφές βρίσκονται στην περιφέρεια του κύκλου.» Έπειτα ο εκπαιδευτικός μαθηματικών θα μπορούσε να ζητήσει από τους μαθητές του

να γράψουν όσα περισσότερα προβλήματα μπορούν χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες.

- **Δομημένες καταστάσεις (structures situations).**
  Σε αυτή την περίπτωση αρχικά υπάρχει ένα ήδη διατυπωμένο πρόβλημα ως βάση για την κατασκευή των ζητούμενων προβλημάτων. Δυνητικά θα μπορούσε να ζητηθεί από το άτομο να κατασκευάσει προβλήματα αναδιατυπώνοντας το αρχικό πρόβλημα, ανακατασκευάζοντας το τροποποιώντας ζητούμενα ή δεδομένα κτλ. Για παράδειγμα, ένας μαθητής της Β' Λυκείου θα μπορούσε να βρεθεί αντιμέτωπος με το εξής πρόβλημα (αν φυσικά θεωρείται πρόβλημα γι' αυτόν): «Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με -1 και διέρχεται από το σημείο Α(2,-4).» Εδώ θα κληθεί ξανά να γράψει όσα περισσότερα προβλήματα μπορεί δοθέντος του αρχικού προβλήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κανένα από τα παραπάνω παραδείγματα δε ζητείται η επίλυση των προβλημάτων που καλείται να δημιουργήσει το άτομο.

Μια αντίστοιχη κατηγοριοποίηση των καταστάσεων για την κατασκευή προβλήματος θα μπορούσε να προκύψει μέσα από την εργασία του E. Silver *On Mathematical Problem Posing* (1994). Ο Silver (1994) αναφέρεται στην κατασκευή προβλήματος βλέποντας την μέσα από τη διαδικασία της επίλυσης αυτού και συγκεκριμένα την αντιμετωπίζει θα μπορούσαμε να πούμε κατά μία έννοια χρονολογικά. Ως πρώτη περίπτωση κατασκευής προβλήματος ορίζει αυτή που έρχεται πριν από την επίλυση ενός δοσμένου προβλήματος, η οποία αναφέρεται αρκετές φορές όπως σημειώνει ο ίδιος ως «problem formulation». Αυτή φαίνεται να συσχετίζεται με τις δομημένες καταστάσεις των E. Stoyanova και N. Ellerton. Έπειτα ως δεύτερη περίπτωση αναφέρεται σε αυτή την κατάσταση που μπορεί να δημιουργήσει νέα προβλήματα μέσα από τη διαδικασία επίλυσης του αρχικού. Αρκεί βέβαια να προκύπτουν όντως νέα προβλήματα και όχι απλώς ερωτήματα τα οποία θα συνεισφέρουν στην επίλυση του αρχικού. Σε αυτό το σημείο όπως ο ίδιος σημειώνει βρισκόμαστε αντιμέτωποι με την ευρετική στρατηγική του G. Polya, «Σκεφτείτε ένα σχετικό, πιο προσιτό πρόβλημα». Τέλος με την επίλυση του αρχικού προβλήματος θεωρεί ότι μπορεί να προκύψουν νέες προβληματικές καταστάσεις προς εξερεύνηση με στόχο τη δημιουργία σχετικών εναλλακτικών προβλημάτων.

3.3 Στρατηγικές κατασκευής προβλήματος

Σε προηγούμενο κομμάτι της παρούσας εργασίας είχαμε αναφερθεί σε στρατηγικές για την επίλυση (μαθηματικού) προβλήματος. Συγκεκριμένα αναφέραμε ορισμένες ευρετικές στρατηγικές του G. Polya. Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε αντίστοιχες στρατηγικές για την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος. Πριν όμως αυτής της αναφοράς αξίζει να σημειωθεί ότι όσο παράξενο και να ακούγεται αρχικά, η κατασκευή προβλήματος ίσως είναι μια πιο δύσκολή και χρονοβόρα διαδικασία από αυτή της επίλυσης του. Μια πρόχειρη ενασχόληση με αυτή τη διαδικασία θα μπορούσε να πείσει και τον πιο δύσπιστο. Συνεπώς η ύπαρξη των στρατηγικών αυτών μπορεί να θεωρηθεί ως αναγκαία.

Στο άρθρο *An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups* (Kontorovich et al., 2012), παρουσιάζεται μια λίστα στρατηγικών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μαθητές για την κατασκευή προβλημάτων. Πριν την παράθεση αυτής θα πρέπει να αναφερθεί ότι η λίστα αυτή δεν αποτελείται αποκλειστικά από στρατηγικές των συγγραφέων αυτής, αλλά αποτελεί μία συγκέντρωση προ υπαρχουσών στρατηγικών στη βιβλιογραφία. Η εν λόγω λίστα είναι η εξής:

1. Δημιουργία ενός νέου προβλήματος ανταλλάσσοντας δεδομένα και ζητούμενα του υπάρχοντος προβλήματος.
2. Δημιουργία νέων προβλημάτων μεταβάλλοντας τους περιορισμούς ή τις υποθέσεις του υπάρχοντος προβλήματος, όπως: αντικαθιστώντας τις δεδομένες αριθμητικές τιμές με νέες ή ρωτώντας «τι γίνεται αν ένας συγκεκριμένος περιορισμός ή υπόθεση ήταν διαφορετική» (what-if-notting).
3. Δημιουργία νέων προβλημάτων με μεταβολή των ζητούμενων ενός υπάρχοντος προβλήματος του οποίου οι αρχικές παραδοχές γίνονται δεκτές χωρίς καμία αλλαγή.
4. Δημιουργία ενός νέου προβλήματος η επίλυση του οποίου θα απαιτούσε τη χρήση ενός συγκεκριμένου θεωρήματος, λύσης ή μαθηματικής προσέγγισης.
5. Δημιουργία ενός προβλήματος του οποίου το υπάρχον πρόβλημα να αποτελεί ειδική περίπτωση.
6. Επέκταση ενός υπάρχοντος προβλήματος με τρόπο του οποίου η λύση να προϋποθέτει την επίλυση του αρχικού.

Κατά προσωπική εκτίμηση ακόμη και αν οι συγκεκριμένες στρατηγικές δεν είναι γνωστές στην εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα, πολύ πιθανό να γίνεται χρήση αυτών ασυναίσθητα. Μάλιστα ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτών μπορούμε να συναντήσουμε στο βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για την Α' και Β' Λυκείου.

> *Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών;*

Ο παραπάνω προβληματισμός έχοντας ως βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα, οδηγεί πλέον τους μαθητές σε μια γενίκευση αυτού, το «νόμο των συνημίτονων». Είναι άξιο αναφοράς ότι για την παραγωγή αυτού φαίνεται να έγινε χρήση όλων των παραπάνω στρατηγικών εκτός αυτών της 1ης και 3ης θέσης στην παραπάνω λίστα.

Η «What if not» η οποία αναφέρεται στη δεύτερη θέση της παραπάνω λίστας, ίσως είναι η πιο γνωστή στρατηγική για την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος, προϋπόθεση της οποίας όμως είναι η ύπαρξης ενός δεδομένου προβλήματος. Η αναφορά αυτής γίνεται από τους Brown και Walter (2005) οι οποίοι θεωρούν ότι για τη χρήση αυτής αρχικά θα πρέπει να γίνει «αποδοχή» του προβλήματος (accepting the given) και έπειτα η «πρόκληση» αυτού (challenging the given). Τα κύρια στάδια για την εφαρμογή αυτής ορίζονται να είναι τα εξής:

- Επιλογή ενός σημείου εκκίνησης.
- Κατάρτιση μιας λίστας με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.
- Αμφισβήτηση των χαρακτηριστικών (What-If-Not-ing).
- Διατύπωση ερωτήματος ή κατασκευή προβλήματος.
- Ανάλυση του προβλήματος.

Βλέποντας τα παραπάνω βήματα θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για ένα μοντέλο κατασκευής προβλήματος ανάλογο με εκείνο του G. Polya για την επίλυση προβλήματος. Μάλιστα όπως τονίζουν και οι Brown και Walter (2005) το μοντέλο αυτό δεν παρουσιάζει γραμμικότητα κατά αντιστοιχία με το αυτό του G. Polya. Η σημασία αυτής της στρατηγικής τονίζεται από τους Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλο (2017), φροντίζοντας μάλιστα να δώσουν με τη σειρά τους μερικά προβλήματα τα οποία έχουν αποτελέσει όπως θεωρούν την απαρχή για την διατύπωση προβλήματος, όπως « Ο γρίφος του 1098». Η αξία αυτής μπορεί να φανεί και πρακτικά μετά την επίλυση ενός προβλήματος μέσα στη σχολική τάξη, όπου δεν είναι λίγες οι φορές που ο εκάστοτε εκπαιδευτικός μαθηματικών θα ασχοληθεί με τη λύση του φροντίζοντας να αμφισβητήσει κάποια από τα δεδομένα του αρχικού προβλήματος. Και αυτό με σκοπό να δώσει το έναυσμα στους μαθητές του για περαιτέρω έρευνα.

Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) περιγράφουν με τη σειρά τους μία ακολουθία σταδίων για τη δημιουργία προβλήματος. Αναφέρονται αρχικά στην «κατάσταση-πλαίσιο» (task environment) εννοώντας το αρχικό πεδίο αναφοράς μέσα στο οποίο καλούνται οι μαθητευόμενοι να θέσουν τα προβλήματα τους. Έχοντας ως βάση ένα δοσμένο πρόβλημα τα τιθέμενα προβλήματα υπάγονται σε τέσσερις κατηγορίες. Η αναφορά αυτών γίνεται μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα της βιβλιογραφίας για τη δημιουργία προβλήματος, όπως «Το τραπέζι του μπιλιάρδου». Τα στάδια που προτείνουν είναι τα εξής:

- **Το περιβάλλον και της κατάστασης-πλαισίου και του αρχικού προβλήματος διατηρείται.**
  Σε αυτό το στάδιο τα νέα προβλήματα μπορούν να προκύψουν απλώς θέτοντας νέα ερωτήματα.
- **Η κατάσταση-πλαίσιο παραμένει ίδια, αλλά το αρχικό πρόβλημα αλλάζει.**
  Η δημιουργία νέων προβλημάτων εδώ μπορεί να προκύψει με την αλλαγή ορισμένων συνθηκών ή ακόμη και των στόχων του αρχικού προβλήματος.
- **Διασκευή της κατάστασης-πλαισίου.**
  Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό γίνεται με ανασκευή «σιωπηρών» συνθηκών της αρχικής κατάστασης-πλαισίου.
- **Νέα κατάσταση-πλαίσιο (επηρεασμένη από την αρχική).**
  Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε περισσότερο σε μία νέα κατάσταση παρά σε ένα νέο πρόβλημα.

Ακόμη και με μια επιφανειακή ανάγνωση των παραπάνω σταδίων για την κατασκευή προβλήματος είναι φανερή η σύνδεση αυτών με ένα μέρος (αν όχι όλων) των στρατηγικών που αναφέρθηκαν στην αρχή αυτής της ενότητας. Όπως και να έχει όμως, η γνώση των παραπάνω στρατηγικών και μόνο δεν εγγυάται την επιτυχία, υπό την οπτική ότι αντί για νέα προβλήματα μπορούν να προκύψουν απλώς ερωτήματα σχετικά με τη λύση του αρχικού προβλήματος. Ουσιαστικά σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να μιλάμε για «παραγωγή ερωτήσεων από τους μαθητευόμενους όταν δουλεύουν στα Μαθηματικά» και όχι για κατασκευή προβλημάτων (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

3.4 Σχέση επίλυσης και κατασκευής προβλήματος

Στην εισαγωγή του τρέχοντος κεφαλαίου σημειώσαμε ότι για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται αρχικά η διατύπωση αυτού, κάτι το οποίο μοιάζει απολύτως φυσιολογικό. Από την άλλη με την επίτευξη μιας λύσης ενός προβλήματος συχνά οδηγούμαστε στη διατύπωση νέων προβλημάτων. Έτσι απ' ότι φαίνεται η επίλυση προβλήματος και η κατασκευή προβλήματος έχουν συμπληρωματικούς ρόλους (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017). Στην εδώ ενότητα θα αναφερθούμε σε αυτή την αλληλεξάρτηση.

Οι S. Brown και M. Walter στο χαρακτηριστικό έργο τους *The Art of Problem Posing* (2005), υποστηρίζουν και αυτοί την άμεση και στενή σχέση της επίλυσης με την κατασκευή προβλήματος. Συγκεκριμένα ισχυρίζονται ότι για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται αρκετά συχνά η αναδιατύπωση αυτού, η οποία ουσιαστικά είναι μια δραστηριότητα η οποία σχετίζεται άμεσα με την κατασκευή προβλήματος. Από την άλλη πλευρά έχοντας δώσει λύση σε ένα πρόβλημα, συχνά δεν εκτιμούμε τη σημασία αυτής χωρίς να δημιουργήσουμε και να αναλύσουμε περαιτέρω προβλήματα σχετικά με αυτό. Η σχέση αυτή έχει απασχολήσει αρκετές έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης μερικές εκ των οποίων αναφέρονται ακολούθως.

Οι Silver και Cai (1996) μελέτησαν ένα δείγμα 509 μαθητών γυμνασίου με σκοπό την εξέταση της κατασκευής προβλήματος από μέρους τους, αλλά και την σχέση αυτής με την διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Συγκεκριμένα τα υποκείμενα της έρευνας κλήθηκαν να ολοκληρώσουν μια εργασία κατασκευής προβλήματος υποβάλλοντας τρεις ερωτήσεις με βάση μια «ιστορία-πρόβλημα» (story-problem), καθώς και να λύσουν οκτώ αρκετά σύνθετα προβλήματα. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την σχέση επίλυσης και κατασκευής προβλήματος σχημάτισαν δύο ομάδες με βάση την απόδοση των μαθητών στην επίλυση των δοσμένων προβλημάτων. Η πρώτη αποτελούνταν από 50 μαθητές με την υψηλότερη μέση βαθμολογία στις οχτώ εργασίες που τους δόθηκαν και η δεύτερη από 50 μαθητές με τη χαμηλότερη μέση βαθμολογία σε αυτές. Τελικώς διαπίστωσαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλήματος συσχετίζονται άμεσα και σε μεγάλο βαθμό με αυτές που αναφέρονται στην κατασκευή προβλήματος. Επιπλέον σε σύγκριση με τους λιγότερο επιτυχημένους λύτες προβλημάτων, οι καλοί λύτες προβλημάτων παρήγαγαν περισσότερα μαθηματικά προβλήματα των οποίων η πολυπλοκότητα μάλιστα ήταν μεγαλύτερη.

Σε μια παρόμοια μελέτη της παραπάνω προέβησαν και οι Cai και Hwang (2002). Το δείγμα όμως αυτή τη φορά αποτελούνταν από μαθητές της 6ης τάξης, 98 των ΗΠΑ και 155 της Κίνας. Όπως σημειώνεται και από τους συγγραφείς αυτής, ο διακρατικός συγκριτικός χαρακτήρας αυτής της μελέτης επέτρεψε την εξέταση από διεθνή προοπτική της σχέσης μεταξύ επίλυσης προβλήματος και κατασκευής προβλήματος, κάτι που κατά προσωπική άποψη δίνει μεγαλύτερη αξία στα αποτελέσματα της. Τα συμπεράσματα αυτής και εδώ ήταν τα ίδια με αυτά της προαναφερθείσας. Υπήρξε όντως συσχέτιση μεταξύ της κατασκευής προβλήματος και της επίλυσης προβλήματος από μια διακρατική προοπτική αυτή τη φορά. Ωστόσο είναι άξιο αναφοράς ότι κατέγραψαν διαφορετικές σχέσεις μεταξύ κατασκευής και επίλυσης προβλήματος από πλευράς Αμερικάνων και Κινέζων μαθητών, σημειώνοντας ότι η προς μελέτη σχέση ήταν ισχυρότερη στους Κινέζους μαθητές εν αντιθέσει με τους Αμερικανούς.

Οι Θεοδούλου, Φιλίππου και Χρίστου (2000) εξέτασαν και αυτοί με τη σειρά τους 50 μαθητές της ΣΤ’ τάξης σχετικά με την ικανότητα τους να κατασκευάζουν προβλήματα σε σχέση με αυτή να επιλύουν προβλήματα. Και σε αυτή τη μελέτη βρέθηκε θετική σχέση μεταξύ της ικανότητας λύσης και της ικανότητας κατασκευής προβλήματος.

Συνεπώς θα μπορούσε να προκύψει το συμπέρασμα ότι οι δύο αυτές διαδικασίες που μας απασχολούν είναι άμεσα συνδεδεμένες μεταξύ τους, κάτι το οποίο αναφέρθηκε και στην αρχή της εδώ ενότητας. Τα ευρήματα των παραπάνω ερευνών όντως πιστοποιούν αυτή τη σχέση, ωστόσο υπάρχουν και απόψεις από την άλλη πλευρά. Ο E. Silver στην εργασία του *On Mathematical Problem Posing* (1994) σημειώνει ότι σε μια παλιότερη σχετική έρευνα του με την Γ. Μαμωνά-Downs (σε εκπαιδευτικούς μαθηματικών και όχι σε μαθητές όπως οι παραπάνω έρευνες) δε βρέθηκε σύνδεση μεταξύ των ικανοτήτων επίλυσης και κατασκευής προβλήματος. Βέβαια αργότερα όπως είδαμε (Silver & Cai, 1996), η άποψη αυτή μάλλον αναιρέθηκε από πλευράς του. Ωστόσο και η Γ. Μαμωνά-Downs χαρακτηριστικά αναφέρει (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017, σ. 201): *«Αν και ο Silver (1994) αναφέρει ότι "…δεν υπάρχει σαφής, καθαρή συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας στη δημιουργία και την επίλυση", κάποιες ιδιαίτερες συσχετίσεις μπορεί να γίνουν εμφανείς, εάν μελλοντικές έρευνες επικεντρωθούν σε συγκεκριμένες δεξιότητες.»*, αφήνοντας πλέον ανοιχτό το ενδεχόμενο για αλλαγή στη στάση της.

3.5 Η κατασκευή προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση

Ως αφετηρία της κατασκευής προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση ορίζεται η έκδοση του κλασικού βιβλίου *The Art of Problem Posing* (1983) των S. Brown και M. Walter (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017). Το συγκεκριμένο βιβλίο μέχρι στιγμής δεν έχει μεταφραστεί στην ελληνική γλώσσα. Αν λάβουμε υπόψιν μας μάλιστα το γεγονός ότι το αντίστοιχο έργο για την επίλυση προβλήματος *How to Solve It* (1957) του G. Polya όχι απλώς μεταφράστηκε στην ελληνική γλώσσα, αλλά και γνώρισε (και ίσως γνωρίζει ακόμη) μεγάλη επιτυχία, μπορούμε κάλλιστα να αντιληφθούμε τη θέση της κατασκευής προβλήματος στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση μέχρι στιγμής. Στη διεθνή κοινότητα όμως όπως φαίνεται η κατάσταση δεν είναι ίδια με εδώ. Ο Πούλος (2013) αναφέρει ότι στις ΗΠΑ το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών (N.C.T.M.) τονίζει ότι: *«οι μαθητές της τάξης 9-12 θα πρέπει επίσης να έχουν κάποια εμπειρία στην αναγνώριση και τη διατύπωση των δικών τους προβλημάτων, μια δραστηριότητα που βρίσκεται στο επίκεντρο της άσκησης των μαθηματικών.»*. Μια δραστηριότητα θα μπορούσαμε να πούμε που δείχνει πως «κάνουμε» στην πραγματικότητα μαθηματικά. Όμως η κατασκευή προβλήματος συμβάλει στην ανάπτυξη της ικανότητας μάθησης των μαθηματικών και αυτής της επίλυσης προβλήματος; Αν ναι, πως και σε ποιο βαθμό; Ποιος είναι ο σκοπός και η αξία αυτής της δραστηριότητας; Αυτά είναι λίγα από τα ερωτήματα που μπορούν να έρθουν στην επιφάνεια με βάση τα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής.

Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) αναφέρουν μια λίστα με κάποια από τα κίνητρα που προβάλλονται από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για την ένταξη της κατασκευής προβλήματος στη μάθηση των μαθηματικών. Θεωρούν ότι ο εκπαιδευτικός μαθηματικών:

- Σχεδιάζει δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων για να βελτιώσει τις δεξιότητες των μαθητών του στην επίλυση προβλημάτων.
- Σχεδιάζει δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων με σκοπό να τους ενσταλάξει τη συνήθεια να ελέγχουν αν έχουν κατανοήσει καλά μια έννοια, ένα θεώρημα, κλπ.
- Δίνοντας τους την ευκαιρία να θέσουν τα δικά τους προβλήματα περνά την αντίληψη ότι όταν δουλεύεις ουσιαστικά στα Μαθηματικά, είσαι εσύ που αποφασίζεις ποια ερωτήματα-προβλήματα θα επιδιώξεις να λύσεις.

Σε μια παρόμοια καταγραφή προχώρησε και ο Πούλος (2013) ταξινομώντας απόψεις της διεθνής βιβλιογραφίας σχετικά με την αξία της κατασκευής προβλήματος. Στη συνέχεια αναφέρονται ορισμένα κομμάτια αυτής της λίστας τα οποία παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

- Η κατασκευή προβλήματος και η ικανότητα τροποποίησης μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί κριτήριο μαθηματικής δημιουργικότητας.
- Η κατασκευή προβλήματος αποτελεί μέτρο και κριτήριο κατανόησης και για τη διαδικασία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.
- Η κατασκευή προβλήματος αποτελεί κριτήριο κατανόησης μαθηματικών εννοιών.
- Η κατασκευή προβλήματος αποτελεί μέτρο αναγνώρισης μαθηματικών ταλέντων.

Μια άποψη (σχετικά με την αξία της κατασκευής προβλήματος) που παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον είναι αυτή για την καταπολέμηση του μαθηματικού άγχους από πλευράς μαθητών (Brown & Walter, 2005). Η μαθηματικοφοβία και το «σύνδρομο του σωστού» δεν είναι κοινά μυστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι S. Brown και M. Walter θεωρούν ότι οι δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων βοηθούν στη μείωση του μαθηματικού άγχους των μαθητών και ταυτόχρονα ενθαρρύνουν μια πιο θετική διάθεση προς τα μαθηματικά. Κάτι το οποίο πιθανώς να μπορεί να λειτουργήσει ως αφετηρία για τη βελτίωση της ικανότητας μάθησης των μαθηματικών, αλλά και για περαιτέρω ενασχόληση με αυτά.

Ακόμη και αν δεχτούμε αδιαπραγμάτευτα την αξία της κατασκευή προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση, δεν είναι λίγα τα ερωτήματα που ίσως μένουν αναπάντητα. Πως εντάσσεται αυτή στην τάξη των μαθηματικών; Είναι οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών ικανοί για τη διαχείριση αυτής; Ο χρόνος που υπάρχει είναι αρκετός; Σε αντίστοιχα ερωτήματα-τοποθετήσεις προέβησαν και οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) δύο εκ των οποίων είναι τα εξής:

- Οι μαθητές/φοιτητές που συμμετέχουν σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων πιθανόν να μην αντιλαμβάνονται τι ακριβώς αναμένεται να κάνουν.
- Πως εντάσσονται οι δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος στη διδασκαλία μιας συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας; (Ιδιαίτερα όταν καταναλώνεται πολύς χρόνος σε αποτελέσματα που δεν έχουν συνήθως θεωρητικό ενδιαφέρον).

Παρά λοιπόν το ενδιαφέρον για την ενσωμάτωση της κατασκευής προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση, η γνώση μας παραμένει σχετικά περιορισμένη όσο αφορά ζητήματα που επηρεάζουν την εφαρμογή της, συμπεριλαμβανομένων, των συναισθηματικών πτυχών αυτής. Με βάση τη βιβλιογραφία φαίνεται να έχουν γίνει λίγα συγκριτικά με την επίλυση προβλήματος όσο αφορά την καταγραφή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για την κατασκευή προβλήματος και ιδιαίτερα αυτών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

4. Αντιλήψεις και διδακτικές πρακτικές εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος

4.1 Εισαγωγή

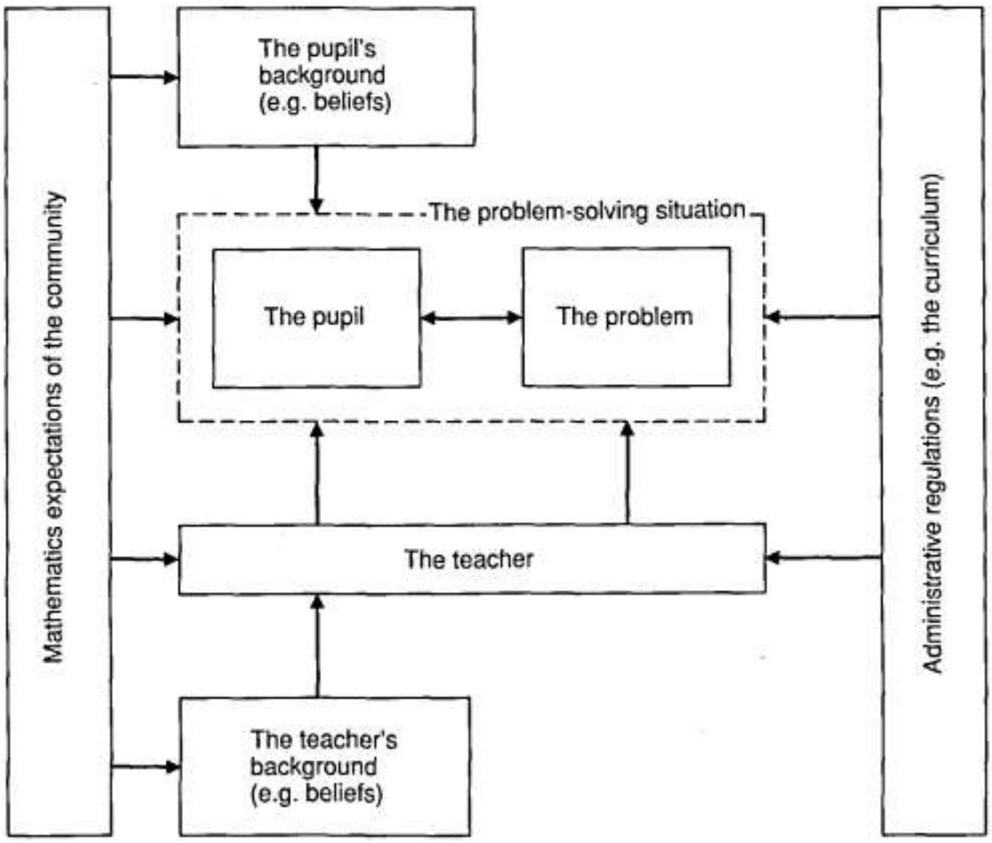
Ο Schoenfeld (1992) αναφερόμενος στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών μαθηματικών (teachers' beliefs), σημείωνε ότι η αίσθηση των τελευταίων για τα μαθηματικά είναι εκείνη που καθορίζει τη φύση της ατμόσφαιρας στην τάξη του εκάστοτε εκπαιδευτικού και εκείνη με τη σειρά της διαμορφώνει τις πεποιθήσεις των μαθητών για τη φύση των μαθηματικών. Η αλήθεια είναι όμως ότι αυτές αποτελούν ένα και μόνο παράγοντα αυτής της επιρροής. Για παράδειγμα οι ετήσιες οδηγίες διδασκαλίας του ΥΠΑΙΘ μετά τις σχετικές εισηγήσεις του ΙΕΠ, διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό (αν δεν βρίσκονται στο επίκεντρο) τον τρόπο διδασκαλίας των μαθημάτων οποιουδήποτε εκπαιδευτικού. Επομένως οι προσωπικές ιδέες, απόψεις και πιστεύω, μάλλον μπαίνουν σε δεύτερη μοίρα. Ωστόσο οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών αποτελούν όντως σημαντικό παράγοντα για την οργάνωση του περιβάλλοντος μιας τάξης και των διδακτικών πρακτικών που θα εφαρμοστούν στο πλαίσιο αυτής (Thompson, 1992). Αναφερόμενη στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών η Thompson (1992, σ. 130) θεωρεί ότι πρόκειται για: *«...μια γενικότερη νοητική δομή, που περιλαμβάνει πιστεύω, έννοιες, ιδέες, προτάσεις, κανόνες, νοητικές εικόνες, προτιμήσεις και άλλα παρόμοια.»*.

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γίνει διάφορες έρευνες (τόσο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση όσο και στη δευτεροβάθμια) όσο αφορά τις αντιλήψεις και τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος. Σε αυτό το σημείο της εργασίας θα προχωρήσουμε σε μία σχετική ανασκόπηση.

4.2 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Δεδομένου ότι ο εκπαιδευτικός μαθηματικών αποτελεί σημαντική εξωτερική επιρροή κατά τη διάρκεια της διδακτικής κατάστασης, η οποιαδήποτε προσπάθεια αλλαγής των διδακτικών πρακτικών πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Όμως οι αντιλήψεις που σχηματίζονται από τους εκπαιδευτικούς επηρεάζονται πολύ από αυτές των εκπαιδευτών τους είτε κατά την τότε σχολική τους εκπαίδευση είτε έπειτα στην πανεπιστημιακή τους εκπαίδευση ή ακόμη και μετέπειτα κατά την παρακολούθηση σεμιναρίων. Ο E. Pehkonen στην εργασία του *What are Finnish Teacher Educators' Conceptions about the Teaching of Problem Solving in Mathematics?* (1993), ισχυρίζεται ότι για να καταλάβουμε ποιο θα είναι το μέλλον της διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία θα πρέπει να στραφούμε στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα στους εκπαιδευτές αυτών (επίκουροι καθηγητές, λέκτορες μαθηματικής εκπαίδευσης σε τμήματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών κτλ).

Στην εργασία του αυτή αναφέρεται στη διατριβή της M. Frank, *Mathematical Beliefs and Problem Solving* (1985), η οποία παρουσίασε ένα μοντέλο των παραγόντων που επηρεάζουν τη συμπεριφορά επίλυσης προβλήματος του μαθητή. Ωστόσο όπως ο ίδιος αναφέρει, αυτό το μοντέλο παρέλειψε τον πιο σημαντικό εξωτερικό παράγοντα, τον εκπαιδευτικό. Με βάση αυτό το μοντέλο ο Pehkonen (1993) παρουσιάζει με τη σειρά του μια συλλογή παραγόντων που επηρεάζουν την κατάσταση επίλυσης προβλήματος του μαθητή, θέλοντας να τονίσει τη σημασία της θέσης του εκπαιδευτικού μαθηματικών και συνεπώς των πεποιθήσεων αυτού. Στο Σχήμα 6 ακολουθεί το μοντέλο αυτό όπως το παρουσίασε ο ίδιος.



Σχήμα 6 Παράγοντες που επηρεάζουν την κατάσταση επίλυσης προβλήματος (Pehkonen, 1993)

Ο στόχος της εργασίας του E. Pehkonen ήταν να προσδιοριστούν οι αντιλήψεις των Φινλανδών εκπαιδευτών των δασκάλων (οι οποίοι θα αναφέρονται από εδώ και στο εξής απλώς ως δάσκαλοι, κατά αντιστοιχία με τον E. Pehkonen) σχετικά με τη σημασία και τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος στο πεδίο των σχολικών μαθηματικών. Στη συνέχεια παρατίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας αυτής και οι αντίστοιχες απαντήσεις αυτών.

1. **Σύμφωνα με τις αντιλήψεις των δασκάλων γιατί είναι σημαντική η επίλυση προβλήματος;**

   Η σημασία της επίλυσης προβλήματος διακρίνεται σε δύο κατηγορίες. Σε αυτή που αναφέρεται στους μαθητές και σε αυτή που αναφέρεται στα μαθηματικά. Όσο αφορά τους μαθητές, συμπεραίνεται ότι η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη και τη δημιουργικότητα. Από την άλλη σε σχέση με τα μαθηματικά, προκύπτει ότι τα νέα πράγματα μαθαίνονται καλύτερα μέσω της επίλυσης προβλήματος.

2. **Πώς πιστεύουν οι δάσκαλοι ότι πρέπει να διδάσκεται η επίλυση προβλήματος;**

   Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται δημιουργικά, ευέλικτα και οι ανοιχτές συζητήσεις επί αυτού είναι απαραίτητες. Επιπλέον οι μαθητές θα πρέπει να ωθούνται να συμμετέχουν στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, αφήνοντάς τους να λύσουν προβλήματα τα οποία έχουν κατασκευάσει οι ίδιοι και αντιμετωπίζοντας προβλήματα από το περιβάλλον τους τα οποία είναι οικεία προς αυτούς.

3. **Στις αντιλήψεις των δασκάλων ποιες είναι οι υπάρχουσες προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος;**

   Συνθήκες όπως η θετική ατμόσφαιρα στην τάξη, παρακινούμενοι μαθητές και κατάλληλα προβλήματα, κρίνονται απαραίτητες για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος. Σημαντικός όμως παράγοντας αυτού του εγχειρήματος είναι ή ύπαρξη αρκετού χρόνου στη διάθεση του εκάστοτε δασκάλου.

4. **Στις αντιλήψεις των δασκάλων ποιες προϋποθέσεις θέτει στους εκπαιδευτικούς η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος;**

   Οι δάσκαλοι φαίνεται ότι θεωρούν πως η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί ορισμένα χαρακτηριστικά προσωπικότητας, τα οποία μπορούν να αλλάξουν πολύ αργά, έως και καθόλου (ουσιαστικά βλέπουν την επίλυση προβλήματος ως μια εγγενή δεξιότητα). Τέτοια χαρακτηριστικά είναι τα εξής: το θάρρος να αντιμετωπίσεις κάτι νέο, το θάρρος να είσαι ο εαυτός σου, το θάρρος να διδάξεις με πρωτότυπο τρόπο, το ανοιχτό μυαλό, η δημιουργικότητα, η ευελιξία και η αυτοπεποίθηση. Πλην αυτών σημειώθηκε ότι ο δάσκαλος θα πρέπει να είναι εξοικειωμένος με την επίλυση προβλήματος, τόσο στη θεωρία όσο και στην πράξη, πρέπει να προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών, χωρίς όμως να τους προσφέρει υπερβολική βοήθεια, να είναι πρόθυμος να δοκιμάσει νέα πράγματα και να έχει αρκετή ώρα για την προετοιμασία των μαθημάτων του.

Σχετικά με το $2^{ο}$ ερώτημα και την αντίστοιχη απάντηση αυτού αξίζει να σημειώσουμε ότι αν και η έρευνα αφορούσε τις αντιλήψεις των δασκάλων των μαθηματικών για την επίλυση προβλήματος, βλέπουμε μέσα σε αυτή να αναφέρεται και η κατασκευή προβλήματος. Επίσης άξιο αναφοράς είναι και το γεγονός ότι στην απάντηση του $3^{ου}$ ερωτήματος η επίλυση προβλήματος αντιμετωπίζεται ως μια εγγενή δεξιότητα.

Ακόμη αν και τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής έδειξαν τη σημαντικότητα της επίλυσης προβλήματος, οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να μην ασχολήθηκαν σε υψηλό βαθμό με αυτή στην προσωπική τους εργασία. Συγκεκριμένα μόνο περίπου το ένα πέμπτο των δασκάλων ανέφεραν ότι δούλεψαν πολύ στην επίλυση προβλήματος και μόνο τα δύο πέμπτα ότι είχαν ασχοληθεί μερικώς. Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει απόκλιση ανάμεσα στα πιστεύω τους σε σχέση με τη διδακτική τους πρακτική. Ποιοι είναι όμως οι λόγοι αυτής; Θα μπορούσαμε να αναφερθούμε σίγουρα όπως και στην εισαγωγή στα προγράμματα σπουδών, τα οποία καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τη δραστηριότητα των εκπαιδευτικών ή ακόμη και στον παράγοντα χρόνο. Ωστόσο οι παράγοντες αυτοί είναι και οι μοναδικοί;

Ενώ ο Pehkonen (1993) εστίασε στις αντιλήψεις των εκπαιδευτών των δασκάλων των μαθηματικών, οι C. Xenofontos και P. Andrews στην εργασία τους *Prospective teachers' beliefs about problem-solving: Cypriot and English cultural constructions* (2012), ασχολούνται με τις πεποιθήσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών (συγκεκριμένα με πρωτοετείς προπτυχιακούς φοιτητές) σχετικά με την επίλυση προβλήματος. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι οι δύο αυτές εργασίες είναι κατά μία έννοια εκ διαμέτρου αντίθετες, κάτι το οποίο προκαλεί το ενδιαφέρον μελέτης αυτών. Οι Xenofontos και Andrews (2012) αναφέρουν ότι η εργασία τους αυτή αποτελεί μια προσπάθεια περαιτέρω κατανόησης των τρόπων, με τους οποίους οι πεποιθήσεις ενός εκπαιδευτικού (ή του μελλοντικού εκπαιδευτικού) για την επίλυση προβλήματος επηρεάζονται από το πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο λειτουργεί και αυτό γιατί υπάρχουν ενδείξεις ότι ο πολιτισμός παίζει καθοριστικό ρόλο τόσο στο σχηματισμό όσο και στην εκδήλωση πεποιθήσεων. Μια αντίστοιχη παρατήρηση σε προηγούμενο σημείο της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχουμε κάνει και εμείς αναφερόμενοι στην εργασία των Cai και Hwang (2002), οι οποίοι παρατήρησαν διαφορά ανάμεσα στις επιδόσεις στην επίλυση και κατασκευή προβλήματος των Αμερικάνων και Κινέζων μαθητών. Ένα ενδιαφέρον σημείο της εργασίας των C. Xenofontos και P. Andrews είναι εκείνο στο οποίο αναφέρεται ότι οι εκπαιδευτικοί εργάζονται εντός τριών «προγραμμάτων σπουδών», ένα επιδιωκόμενο, ένα εξιδανικευμένο και ένα λαμβανόμενο πρόγραμμα σπουδών. Δηλαδή, βρίσκονται εντός του προγράμματος σπουδών που τους παρέχεται, προσεγγίζουν τη δουλειά τους με ένα μοναδικό σύνολο προσωπικών στόχων και εργάζονται εντός πολιτιστικών κανόνων.

Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν αφομοιώσει ένα συγκεκριμένο σύνολο από βιωματικά τεκμηριωμένες προοπτικές και προσεγγίσεις για την επίλυση προβλήματος, τις οποίες αποδέχονταν ως τη φυσική κατάσταση των πραγμάτων χωρίς άλλα σημεία αναφοράς. Έχοντας βιώσει το πρόγραμμα σπουδών (συνεπώς και την επίλυση προβλήματος) κατά κύριο λόγο μόνο μέσα από τις πεποιθήσεις των δασκάλων τους, είναι φανερή η άμεση επιρροή αυτών προς τις πεποιθήσεις των μαθητών. Συμπερασματικά φαίνεται ότι οι πεποιθήσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών σχετικά με την επίλυση προβλήματος αποτελούν εκδηλώσεις των αντίστοιχων προγραμμάτων σπουδών που παρακολουθούν, κάτι το οποίο ίσως φαντάζει φυσιολογικό και αυτό γιατί ένας «νέος» εκπαιδευτικός συνήθως λειτουργεί με τον τρόπο τον όποιο ήδη έχει μάθει από τους μέχρι πρότινος δασκάλους του.

Δεδομένου ότι η βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος αποτελεί στόχο του προγράμματος σπουδών, οι Sivunen και Pehkonen (2009) προσπαθούν να κατανοήσουν τις αντιλήψεις των δασκάλων του δημοτικού για την επίλυση προβλήματος και τη διδασκαλία αυτής στα μαθηματικά. Και αυτό καθότι πιστεύουν ότι ο ρόλος των εκπαιδευτικών και ειδικότερα οι αντιλήψεις τους που επηρεάζουν τις αποφάσεις τους κατά την διδασκαλία, είναι κρίσιμος για την υλοποίηση των στόχων του προγράμματος σπουδών.

Σύμφωνα με την έρευνα τους οι εκπαιδευτικοί βλέπουν την επίλυση προβλήματος υπό διαφορετικές οπτικές, κάτι το οποίο έχει σημειωθεί και σε προηγούμενο σημείο της εργασίας μας. Η επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά για αυτούς μπορεί να σημαίνει διάφορα προβλήματα, στρατηγικές, μαθηματικά σε καθημερινές καταστάσεις, σκέψη των ίδιων των μαθητών και εφαρμογή δεξιοτήτων που έχουν μάθει προηγουμένως. Συγκεκριμένα στις απαντήσεις των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στη μελέτη μπορεί κανείς να δει ότι η επίλυση προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών σημαίνει τη χρήση και τη μελέτη διαφορετικών στρατηγικών. Υπό αυτή την έννοια θεωρούν ότι χρειάζεται η μελέτη στρατηγικών για την επίλυση προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση όμως σημειώνεται ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός για την όλη διαδικασία και επίσης καθήκον αυτού είναι η κατάλληλη επιλογή των προβλημάτων με τα οποία πρόκειται να ασχοληθεί η τάξη. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι τα υποκείμενα της μελέτης δεν αναφέρονται στην κατασκευή προβλήματος, αλλά στην επιλογή απλώς των κατάλληλων προβλημάτων από το ήδη διαθέσιμο υλικό που έχουν στην διάθεση τους. Πλην αυτών, σε συμφωνία με τον Pehkonen (1993) έχουμε ότι οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θεωρούν ότι πέραν τον ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος σημαντικό ρόλο παίζουν το διδακτικό υλικό που χρησιμοποιείται, τα καθήκοντα τους, καθώς και ο διαθέσιμος χρόνος των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων κατά τη διάρκεια των μαθημάτων τους.

Επίσης σημειώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στη μελέτη αυτή θεώρησαν ότι χρειάζονται περαιτέρω εκπαίδευση στην επίλυση προβλήματος, καθώς η μέχρι τώρα εκπαίδευση τους κατά τους ίδιους ήταν ανεπαρκής. Τέλος αναφερόμενοι σε άλλες παρόμοιες μελέτες, οι Sivunen και Pehkonen (2009) σημειώνουν ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών φαίνεται να αλλάζουν πολύ αργά, αν όντως αλλάζουν. Η τελευταία παρατήρηση είναι άκρως σημαντική και αυτό γιατί αν δεχθούμε ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών αποτελούν όντως σημαντικό παράγοντα για την οργάνωση του περιβάλλοντος μιας τάξης και των διδακτικών πρακτικών που θα εφαρμοστούν στο πλαίσιο αυτής (Thompson, 1992), τι σημαίνει για τη μαθηματική εκπαίδευση η αδυναμία αλλαγής/τροποποίησης αυτών;

4.3 Αντιλήψεις εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με την κατασκευή προβλήματος

Δεδομένου ότι η κατασκευή προβλήματος είναι μια σημαντική δραστηριότητα για τη μαθηματική εκπαίδευση και ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών μαθηματικών είναι κρίσιμες για αυτή, στη συνέχεια γίνεται μια προσπάθεια καταγραφής ορισμένων σχετικών ερευνών.

Η C. Kiliç στη μελέτη της *Turkish primary school teachers' opinions about problem posing applications: Students, the mathematics curriculum and mathematics textbooks* (2013), διερευνά τις απόψεις 277 Τούρκων δασκάλων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και τη σχέση αυτής με τους μαθητές, το πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών και τα σχολικά βιβλία. Σημειώνεται ότι η πλειοψηφία αυτών αποτελούνταν από δασκάλους με διδακτική εμπειρία 20 και παραπάνω ετών, καθώς και το γεγονός ότι κανένας εξ αυτών δεν είχε παρακολουθήσει σεμινάρια σχετικά με την κατασκευή προβλήματος.

Αναφορικά με την κατασκευή προβλήματος και τη σχέση αυτής με τους μαθητές, σχεδόν όλοι οι συμμετέχοντες της έρευνας συμφώνησαν ότι η κατασκευή προβλήματος:

- δείχνει τα επίπεδα γνώσης των μαθητών,
- ωθεί τους μαθητές να σκεφτούν,
- αναπτύσσει τις ικανότητες των μαθητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος,
- συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών,
- βοηθά τους μαθητές να αξιολογήσουν τους εαυτούς τους,
- βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τα καθημερινά προβλήματα που αντιμετωπίζουν,
- αναπτύσσει τις δεξιότητες συλλογισμού και κρίσης των μαθητών,
- ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών,
- καταδεικνύει τις μαθηματικές αντιλήψεις των μαθητών,
- αναπτύσσει τις ικανότητες σύνδεσης (connection abilities) των μαθητών,
- βοηθά τους μαθητές να εκφραστούν,
- ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται κριτικά.

Ενώ τα αποτελέσματα αυτής μέχρι στιγμής φαίνονται άκρως θετικά, το 95% των συμμετεχόντων της έρευνας σημείωσε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατασκευή προβλήματος. Μάλιστα η Kiliç (2013) αναφέρει ότι το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με αντίστοιχα προηγούμενων ερευνών. Τέλος οι περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στο γεγονός ότι η κατασκευή προβλήματος κάνει τα μαθηματικά πιο ευχάριστα. Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι φαίνεται πως η κατασκευή προβλήματος συμβάλλει σημαντικά στη μάθηση των μαθητών.

Σχετικά με τις απόψεις των δασκάλων για την κατασκευή προβλήματος και τη σχέση αυτής με το πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών, σημειώνεται ότι το 76% αυτών συμφώνησε ότι ο χρόνος που επιτρέπεται για την κατασκευή προβλήματος στην τάξη δεν είναι αρκετός. Το 61% των συμμετεχόντων αναφέρθηκε στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν επαρκείς πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι δάσκαλοι θα αξιολογήσουν τα προβλήματα που κατασκευάζονται από τους μαθητές τους, ότι δεν υπάρχουν αρκετές εξηγήσεις σχετικά με τις στρατηγικές, τις μεθόδους και τις τεχνικές κατασκευής προβλήματος και ότι οι ενδεικτικές δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος που υπάρχουν στο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών δεν είναι αρκετές. Πάνω από τους μισούς συμμετέχοντες (67%) δήλωσαν ότι κατά την προετοιμασία της κατασκευής προβλήματος δε λαμβάνονται υπόψη περιβαλλοντικοί και τοπικοί παράγοντες (environmental and local factors). Περίπου το 60% των συμμετεχόντων δήλωσε ότι οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών είναι αισθητοί και σαφείς, ενώ το 65% δήλωσε ότι οι στόχοι και οι ενδεικτικές δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος είναι αποδεκτές για όλα τα επίπεδα των μαθητών. Υπήρξε αβεβαιότητα σχετικά με το αν οι ενδεικτικές δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος του προγράμματος μαθηματικών σπουδών προκαλούν ή όχι το στοχασμό. Τέλος το 54% των δασκάλων συμφώνησε ότι οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος είναι επαρκείς στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Καθώς οι απόψεις των δασκάλων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και του προγράμματος μαθηματικών σπουδών είναι τόσο αρνητικές όσο και θετικές, δε φαίνεται να υπάρχει μια ξεκάθαρη εικόνα επί του θέματος αυτού, απεναντίας σημειώνεται ότι υπάρχουν προβλήματα σε αυτό.

Τέλος η Kiliç (2013) αναφορικά με τις απόψεις των δασκάλων σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και τη σχέση αυτής με τα σχολικά βιβλία, σημειώνει ότι:

- το 48% των δασκάλων ανέφερε ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία είναι ανεπαρκής,
- υπήρξε αβεβαιότητα σχετικά με το γεγονός ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία είναι αισθητή και σαφής,
- το 61% των δασκάλων συμφώνησε ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία είναι αποδεκτή (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών,
- και το 56% ανέφερε ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία βασίζεται σε συγκεκριμένα δεδομένα.

Συμπερασματικά τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής έδειξαν ότι οι Τούρκοι δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έχουν θετικές απόψεις σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και τη σχέση αυτής με τους μαθητές, αλλά αρνητικές απόψεις για τη σχέση της με το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών και τα σχολικά βιβλία.

Οι X. Li, N. Song, S. Hwang και J. Cai στην εργασία τους *Learning to teach mathematics through problem posing: teachers’ beliefs and performance on problem posing* (2020), αναφέρουν ότι οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί (πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης) της έρευνας φάνηκε να αντιλαμβάνονται τη διδασκαλία μέσω της κατασκευής προβλήματος ως δίκοπο μαχαίρι (double-edged sword). Αν και εντόπισαν πιθανά πλεονεκτήματα, ήταν επίσης επιφυλακτικοί για πιθανές προκλήσεις. Τα πλεονεκτήματα που αναφέρουν διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες, πλεονεκτήματα για τη γνώση των μαθητών (students’ cognition), πλεονεκτήματα για τα συναισθήματα των μαθητών (students' affect) και παιδαγωγικά πλεονεκτήματα (pedagogical advantages).

Αν και σε όχι μεγάλο βαθμό, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η διδασκαλία μέσω της κατασκευής προβλήματος θα μπορούσε να διευκολύνει τη μαθηματική σκέψη των μαθητών, διευρύνοντάς την και εμβαθύνοντας την όταν οι μαθητές έρχονται σε επαφή με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων. Επίσης το 55% των υποκείμενων της έρευνας θεωρεί ότι οι δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος δύναται να προκαλέσουν ένα θετικό κλίμα, την περιέργεια των μαθητών και συνεπώς την ενεργή συμμετοχή τους στην τάξη. Μια σημαντική αναφορά σχετικά με τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής, είναι το γεγονός ότι τα παιδαγωγικά πλεονεκτήματα της διδασκαλίας διαμέσου της κατασκευής προβλήματος φαίνεται να είναι σχετικά λίγα. Συγκεκριμένα μόλις το 5% θεωρεί ότι η διδασκαλία διαμέσου της κατασκευής προβλήματος μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των μαθητών.

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας όμως διαμέσου της κατασκευής προβλήματος προέκυψε ότι μπορούν να εμφανιστούν και διάφορες προκλήσεις. Αυτές εμπίπτουν σε δύο βασικές κατηγορίες, σε αυτές που σχετίζονται με τους εκπαιδευτικούς και σε αυτές που σχετίζονται με τους μαθητές. Προέκυψε ότι σχεδόν το 50% των εκπαιδευτικών μαθηματικών αντιμετωπίζει ως πρόκληση την οργάνωση της τάξης για τη διδασκαλία διαμέσου της κατασκευής προβλήματος. Και σε αυτό το σημείο ο χρόνος και συγκεκριμένα η έλλειψη αυτού, σημειώνεται ως ουσιαστικός παράγοντας της όλης διαδικασίας. Η έλλειψη ενασχόλησης των εκπαιδευτικών με την κατασκευή προβλήματος ή γενικότερα η μη-επαφή αυτών με τη διαδικασία αυτή, είχε ως αποτέλεσμα το 46% να θεωρεί τη σχεδίαση εργασιών σχετικών με την κατασκευή προβλήματος ως εξίσου μία πρόκληση. Οι συμμετέχοντες της έρευνας δεν ήταν βέβαιοι πώς να επιλέξουν προβληματικές εργασίες και να δημιουργήσουν ένα μάθημα με τέτοιες εργασίες. Δεν ήταν επίσης σίγουροι για το τι είδους γνώσεις χρειάζονταν για τη χρήση αυτής της μεθόδου διδασκαλίας. Το 12% των εκπαιδευτικών σημείωσε μάλιστα ότι δεν ήταν σίγουρο πώς να αξιολογήσει τα προβλήματα που θέτουν οι μαθητές και το 5% αυτών είδαν αρνητικά αποτελέσματα στις εξετάσεις αλλά και στην επίλυση προβλήματος, κάτι το οποίο έρχεται σε ρήξη με τα όσα έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής για τη σύνδεση των διαδικασιών επίλυσης και κατασκευής προβλήματος, παρόλο που το ποσοστό αυτό είναι σχετικά μικρό. Τέλος σε σχέση με τους μαθητές αναφέρεται ότι το 61% της έρευνας θεωρεί ότι τα προβλήματα που τίθενται από την πλευρά των μαθητών είναι χαμηλής ποιότητας, υπό την έννοια ότι είναι πολύ απλά, επαναλαμβανόμενα, άλυτα ή άσχετα. Συνεπώς φαίνεται να μην έχουν να προσφέρουν κάτι στην όλη εκπαιδευτική διαδικασία.

Στην περίληψη της εργασίας τους *Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel?* (2020), οι S. Klein και R. Leikin αναφέρουν ότι η εκπαιδευτική βιβλιογραφία δείχνει ότι η επίλυση ανοιχτών μαθηματικών εργασιών είναι μια ισχυρή δραστηριότητα που κατευθύνεται στη δημιουργικότητα. Η έρευνα όμως των Li et al. (2020) σημειώνει ότι μόλις το 14% των συμμετεχόντων φαίνεται να ενστερνίζεται την παραπάνω άποψη, κάτι το οποίο πιθανώς να οφείλεται στην έλλειψη εξοικείωσης των εκπαιδευτικών με τέτοιου είδους διαδικασίες. Οι Klein και Leikin (2020) αναλύουν τις δεξιότητες και αντιλήψεις 44 εκπαιδευτικών μαθηματικών (4 της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και 40 της δευτεροβάθμιας) με διαφορετικά χρόνια εμπειρίας και διαφορετικά επίπεδα εξειδίκευσης σχετικά με την τοποθέτηση ανοιχτών εργασιών, η οποία από εδώ και στο εξής θα καλείται κατασκευή ανοιχτών προβλημάτων. Διαμέσου αυτής προσπαθούν να δουν την εφαρμογή των τελευταίων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Άξια προσοχής συμπεράσματα της εργασίας των Klein και Leikin (2020) είναι τα εξής:

- Οι μισοί από τους εκπαιδευτικούς ανέφεραν ότι είναι εξοικειωμένοι με την κατασκευή ανοιχτών προβλημάτων.
- Επίσης οι μισοί από αυτούς ανέφεραν ότι η κατασκευή ανοιχτών προβλημάτων είναι δύσκολη. Ο αριθμός μάλιστα των ετών εμπειρίας είχε σημαντική επίδραση στις αντιλήψεις τους.
- Υπήρξε σημαντική επίδραση των ετών εμπειρίας των εκπαιδευτικών στις αντιλήψεις τους σχετικά με την επίλυση των ανοιχτών προβλημάτων από τους μαθητές τους.
- Τα χρόνια εμπειρίας είχαν σημαντική επίδραση στην αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών στη χρήση των ανοιχτών προβλημάτων.
- Η εξοικείωση με την κατασκευή ανοιχτών προβλημάτων είχε μια σημαντική θετική συσχέτιση με την απόλαυση αυτής, την εξοικείωση με τη χρήση της στη διδασκαλία και την προθυμία για την εφαρμογής της. Επομένως όταν οι εκπαιδευτικοί αισθάνονται πιο εξοικειωμένοι με την κατασκευή ανοιχτών προβλημάτων, είναι πιο πρόθυμοι να τη χρησιμοποιήσουν στη διδασκαλία τους.

- Η αντίληψη των εκπαιδευτικών ότι η κατασκευή ανοιχτών προβλημάτων είναι δύσκολη, είχε σημαντικές θετικές συσχετίσεις με την αντίληψη ότι οι μαθητές μπορεί να αντιμετωπίσουν δυσκολίες κατά την επίλυση ανοιχτών προβλημάτων και ότι είχε τη δυνατότητα να μειώσει την αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών.
- Επίσης η αντίληψη των εκπαιδευτικών ότι οι μαθητές μπορεί να έχουν δυσκολία στην επίλυση ανοιχτών προβλημάτων, συσχετίστηκε αρνητικά με την εμπιστοσύνη των εκπαιδευτικών στη χρήση των ανοιχτών προβλημάτων και αντίστοιχα συσχετίστηκαν θετικά με τις αντιλήψεις ότι τα ανοιχτά προβλήματα είχαν τη δυνατότητα να μειώσουν την αυτοπεποίθηση των εκπαιδευτικών.

Τέλος η A. Hošpesová και η M. Tichá στην εργασία τους *Problem posing in primary school teacher training* (2015), αναφέρουν ότι ο στόχος αυτής ήταν να διερευνήσει και να περιγράψει το ρόλο της κατασκευής προβλήματος στην κατάρτιση των εκπαιδευτικών. Οι αντιλήψεις των συνολικά 56 συμμετεχόντων (32 προπτυχιακοί φοιτητές και 24 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί μαθηματικών) σχετικά με την κατασκευή προβλήματος ήταν οι εξής:

- **Η κατασκευή προβλήματος είναι σημαντική.**
  Ωστόσο κανένας από τους συμμετέχοντες δεν προσπάθησε να διατυπώσει ποιες είναι οι προϋποθέσεις, οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι απαραίτητες εμπειρίες για την επιτυχή κατασκευή προβλήματος.
- **Η κατασκευή προβλήματος ως διαδικασία είναι εκπληκτικά δύσκολη.**
  Επί αυτού, ορισμένα από τα σχόλιά των συμμετεχόντων έδειξαν ότι τους έκαναν να σκεφτούν την επάρκεια της βάσης των γνώσεων τους για τη διδασκαλία των μαθηματικών.
- **Είναι πιο εύκολο να λύνεις προβλήματα που έχεις κατασκευάσει.**
- **Δεν είναι καθήκον του εκπαιδευτικού να κατασκευάζει προβλήματα.**
  Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι μερικοί συμμετέχοντες εξέφρασαν το άγχος τους και αρνήθηκαν να κατασκευάσουν προβλήματα. Συμπληρωματικά δήλωσαν ότι δεν τους άρεσε να κατασκευάζουν προβλήματα επειδή η όλη διαδικασία είναι χρονοβόρα και ότι προτιμούν να εφοδιάζονται με έτοιμα προς λύση προβλήματα.
- **Τα προβλήματα που κατασκευάζει ένας εκπαιδευτικός είναι πιο ελκυστικά και σχετικά για τα παιδιά.**
  Σε αυτό το σημείο όπως και σε προηγούμενα μέρη της παρούσας εργασίας είχαμε ξανά τη σύνδεση της κατασκευής προβλήματος με τη δημιουργικότητα.

- **Τα προβλήματα που κατασκευάζει ένας εκπαιδευτικός βοηθούν στην κατανόηση των παιδιών.**

Αξίζει να σημειωθεί ότι μερικές από αυτές τις αντιλήψεις σχετικά με την κατασκευή προβλήματος λαμβάνουν την οπτική γωνία του εκπαιδευτικού, ενώ άλλες λαμβάνουν την οπτική γωνία των μαθητών και μερικές εστιάζουν στο συναίσθημα.

4.4 Διδακτικές πρακτικές εκπαιδευτικών μαθηματικών

Αναφερόμενοι στις διδακτικές πρακτικές, θα μπορούσαμε να πούμε ότι εννοούμε εκείνες τις ενέργειες των εκπαιδευτικών οι οποίες έχουν ως στόχο την κατανόηση μαθηματικών εννοιών-διαδικασιών από πλευράς μαθητών. Σε προηγούμενο κομμάτι της εργασίας σημειώσαμε ότι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών αποτελούν σημαντικό παράγοντα για τις διδακτικές πρακτικές που θα εφαρμοστούν στο πλαίσιο της τάξης (Thompson, 1992). Ο Ellis (2012) όμως ασχολούμενος με τη σχέση των πεποιθήσεων και των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών σημειώνει ότι υπάρχει απόκλιση μεταξύ αυτών, η οποία θα μπορούσε να προκύπτει εξαιτίας προσωπικών παραγόντων και από το συναισθηματικό πλαίσιο της διδασκαλίας. Η άποψη αυτή έρχεται να επισφραγίσει τα αποτελέσματα της μελέτης του Pehkonen (1993), όπου και αυτός σημείωσε ότι υπάρχει απόκλιση ανάμεσα στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σε σχέση με τη διδακτική τους πρακτική. Πέρα λοιπόν από το ενδιαφέρον για διερεύνηση τη σχέσης αντιλήψεις-διδακτικές πρακτικές, έχουμε ότι η ανάλυση των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών είναι καθοριστικής σημασίας για πολλές πτυχές της εκπαίδευσης, για τον εκπαιδευτικό, για τον καθορισμό και της κατανόησης καλών πρακτικών, για θεωρητικές μελέτες με στόχο την κατανόηση της διδακτικής-μαθησιακής διαδικασίας κτλ (Felmer et al., 2015).

Μια συχνή διάκριση των διδακτικών πρακτικών είναι αυτή που τις διαχωρίζει σε δασκαλο-κεντρικές (teacher-centered) και μαθητο-κεντρικές (student-centered). Το Σχήμα 7 που ακολουθεί παρουσιάζει πως θα έμοιαζε η διαχείριση μιας τάξης σε κάθε περίπτωση από αυτές.

Δασκαλο-κεντρικές (teacher-centered)	**Μαθητο-κεντρικές (student-centered)**
Ο δάσκαλος είναι ο αποκλειστικός ηγέτης	Η ηγεσία μοιράζεται
Η διαχείριση της τάξης γίνεται υπό την μορφή εποπτείας	Η διαχείριση της τάξης γίνεται υπό την μορφή καθοδήγησης
Ο δάσκαλος αναλαμβάνει την ευθύνη για όλα τα έγγραφα και την οργάνωση της τάξης	Οι μαθητές είναι διευκολυντές για τις λειτουργίες της τάξης
Η πειθαρχεία προέρχεται από το δάσκαλο	Η πειθαρχεία είναι θέμα του κάθε μαθητή
Λίγοι μαθητές είναι βοηθοί του δασκάλου	Όλοι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να γίνουν αναπόσπαστο μέρος της διαχείρισης της τάξης
Ο δάσκαλος φτιάχνει τους κανόνες και τους δημοσιεύει για όλους τους μαθητές	Οι κανόνες αναπτύσσονται από τον δάσκαλο και τους μαθητές σε μορφή συντάγματος ή συμβολαίου
Οι συνέπειες είναι καθορισμένες για όλους τους μαθητές	Οι συνέπειες αντικατοπτρίζουν τις ατομικές διαφορές
Οι ανταμοιβές είναι κυρίως εξωγενείς	Οι ανταμοιβές είναι κυρίως εγγενείς
Οι μαθητές έχουν περιορισμένες ευθύνες	Οι μαθητές μοιράζονται τις ευθύνες της τάξης
Ελάχιστα μέλη της κοινότητας μπαίνουν στην τάξη	Δημιουργούνται συνεργασίες με επιχειρήσεις και κοινοτικές ομάδες για να εμπλουτίσουν και να διευρύνουν τις ευκαιρίες μάθησης για τους μαθητές

Σχήμα 7 Η διαχείριση μιας τάξης με επίκεντρο το δάσκαλο και επίκεντρο τους μαθητές[1]

Η Donaldson (2011) ασχολούμενη με διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος (ανεξαρτήτως αν θεωρούνται δασκολο-κεντρικές ή μαθητο-κεντρικές) προέβη σε αντίστοιχη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συγκεκριμένα παρέθεσε μια λίστα διδακτικών πρακτικών, οι οποίες σύμφωνα με ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρούνται σημαντικές όσο αφορά τη βοήθεια που μπορούν να παρέχουν στην ανάπτυξη της ικανότητας στην επίλυση προβλήματος. Η λίστα αυτή είναι η εξής:

- Ενασχόληση με πολλά προβλήματα.
- Ενασχόληση με «καλά» προβλήματα.
- Διδασκαλία συγκεκριμένων ή γενικών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος (συμπεριλαμβανομένων των ευρετικών στρατηγικών).
- Μοντελοποίηση της επίλυσης προβλήματος.

[1] Ο παραπάνω πίνακας (Σχήμα 4.2) αποτελεί μετάφραση αυτού των Rogers & Freiberg (1994, σ. 240).

- Περιορισμός της συμβολής του εκπαιδευτικού, για παράδειγμα, εργασία των μαθητών σε μικρές ομάδες.
- Προώθηση της μεταγνώσης, για παράδειγμα, θέτοντας μεταγνωστικές ερωτήσεις ή ενθάρρυνση των μαθητών να είναι στοχαστικοί.
- Επισήμανση πολλαπλών λύσεων.

Οι Felmer et al. (2015) μελέτησαν τις διδακτικές πρακτικές που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος σε μια ομάδα 29 εκπαιδευτικών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης των οποίων η εμπειρία κυμαινόταν μεταξύ 1-4 ετών. Η έρευνα τους διεξήχθη σε δύο στάδια. Αρχικά κάθε εκπαιδευτικός παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια τριών μαθημάτων του και έπειτα υπήρξε μια κωδικοποίηση των παρατηρήσεων αυτών. Στο δεύτερο στάδιο κάθε εκπαιδευτικός κλήθηκε να απαντήσει σε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο σχεδιάστηκε με στόχο να μετρήσει τη συχνότητα χρήσης της επίλυσης προβλήματος, τον τρόπο-ποιότητα με τον οποίο πραγματοποιείται., δηλαδή να αναφέρει πόσο συχνά χρησιμοποιεί την κάθε μία διδακτική πρακτική που αναφέρεται σε αυτό είτε πρόκειται για δασκαλο-κεντρική είτε για μαθητο-κεντρική, αλλά και τον τρόπο οργάνωσης της τάξης. Η κλίμακα του ερωτηματολογίου ήταν σε μορφή Likert που κυμαίνονταν από 1 (ποτέ) έως 6 (πάντα). Θα πρέπει να σημειωθεί όμως ότι αναφορικά με τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου χρησιμοποιήθηκε μεγαλύτερο δείγμα. Συγκεκριμένα στη συμπλήρωση αυτού προέβησαν 240 εκπαιδευτικοί μαθηματικών δευτεροβάθμιας και πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι δήλωσαν συμμετοχή σε ένα εργαστήριο επίλυσης προβλήματος. Μέσα από αυτή τους την εργασία προσπάθησαν να εμβαθύνουν στην κατανόηση των διδακτικών πρακτικών που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος, αλλά και να ελέγξουν τη σχέση των αποτελεσμάτων των δύο σταδίων της έρευνας τους με βάση όμως το κοινό δείγμα των 29 εκπαιδευτικών.

Τα αποτελέσματα αυτής έδειξαν ότι τόσο η συχνότητα χρήσης της επίλυσης προβλήματος από πλευράς εκπαιδευτικών όσο και οι διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζονται από αυτούς (με βάση τις παρατηρήσεις των μαθημάτων τους) δε διαφέρουν από αυτά που αναφέρουν οι ίδιοι στο ερωτηματολόγιο που κλήθηκαν να συμπληρώσουν. Ωστόσο σημείωσαν ότι το συγκεκριμένο θέμα θα πρέπει να αναλυθεί περαιτέρω σε μελλοντικές μελέτες, καθώς υπήρξαν ορισμένες περιπτώσεις εκπαιδευτικών οι οποίο ανέφεραν ότι χρησιμοποιούσαν την επίλυση προβλήματος τις περισσότερες φορές, παρόλο που παρατηρήθηκε ότι δεν είχαν να κάνουν με μη-τετριμμένα προβλήματα. Επίσης καταγράφηκε μια σημαντικά υψηλή τιμή σχετικά με τις μαθητο-κεντρικές πρακτικές, αλλά και μια ασυνέπεια μεταξύ ορισμένων δηλώσεων των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα υπήρξε θετική συσχέτιση μεταξύ των τριών παρακάτω διδακτικών πρακτικών (μεταξύ 1^{ης} και 3^{ης} και 2^{ης} και 3^{ης}) που αναφέρονται στο ερωτηματολόγιο των Felmer et al. (2015):

1. I organize my students working in groups.
2. If my students take too much time in find the solution of a problem, I solve it in the board.
3. My students solve problems independently.

Ακόμη η ανάλυση των αποτελεσμάτων των δύο σταδίων της έρευνας τους, τους οδήγησε να κατηγοριοποιήσουν τις διδακτικές πρακτικές σε εκείνες που σχετίζονται με τη διαχείριση της τάξης και σε εκείνες που προωθούν την ανάπτυξη δεξιοτήτων και αυτονομίας στην επίλυση προβλήματος. Οι συσχετίσεις μεταξύ αυτών φανέρωσαν ότι δεν υπάρχει σχέση μεταξύ τους.

Ο Swan (2006) θεωρεί ότι οι δασκαλο-κεντρικές πρακτικές αφήνουν ελάχιστο χώρο για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών και ότι έχουν ως βασικό τους μέλημα τη μετάδοση ορισμών και μεθόδων που θα πρέπει να εξασκηθούν. Εν αντιθέσει οι μαθητο-κεντρικές πρακτικές λαμβάνουν υπόψιν τις ανάγκες των μαθητών, επιτρέπουν την ελευθερία κινήσεων και βλέπουν τα μαθηματικά ως ένα ανοιχτό θέμα προς συζήτηση. Στόχος της έρευνας του ήταν η αξιολόγηση της εφαρμογής ενός έργου το οποίο προάγει την κατανόηση της Άλγεβρας (σε επίπεδο GCSE[2]) από πλευράς μαθητών, μέσω της συνεργασίας και της συζήτησης. Τα όργανα αυτής αποτελούνταν από δύο ερωτηματολόγια, ένα σχετικό με τις πεποιθήσεις των υποκειμένων της έρευνας και ένα σχετικό με τις διδακτικές τους πρακτικές. Στο τελευταίο, 120 εκπαιδευτικοί καλούνταν να δηλώσουν τη συχνότητα χρήσης (σε μια κλίμακα 5 σημείων) κάθε μίας εκ των 25 διδακτικών πρακτικών (13 δασκαλο-κεντρικές και 12 μαθητο-κεντρικές) που αναφέρονταν σε αυτό. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι δασκαλο-κεντρικές πρακτικές κυριάρχησαν, με τους εκπαιδευτικούς να προτιμούν προσεγγίσεις που παρουσιάζουν τα μαθηματικά με έναν προκαθορισμένο και έντονα δομημένο τρόπο. Ωστόσο σημαντικότατη παρατήρηση αυτής, είναι το γεγονός ότι οι περισσότεροι από τους εκπαιδευτικούς της μελέτης ανέφεραν ότι ήταν υποχρεωμένοι να εργαστούν με τρόπους που δεν πίστευαν. Σε αυτό το σημείο ο M. Swan εύλογα θεωρεί ότι το συγκεκριμένο θέμα θα πρέπει να μελετηθεί περαιτέρω.

[2] Γενικό Πιστοποιητικό Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

5. Μεθοδολογία έρευνας

5.1 Διατύπωση του προβλήματος

Με βάση όσα έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής, φαίνεται ότι η κατασκευή και η επίλυση μαθηματικού προβλήματος βρίσκονται (ή θα πρέπει να βρίσκονται) στην καρδιά της μαθηματικής εκπαίδευσης. Όπως σημειώσαμε παραπάνω πολύ λίγα έχουν γίνει συγκριτικά με την επίλυση προβλήματος όσο αφορά την καταγραφή των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για την κατασκευή προβλήματος και ιδιαίτερα αυτών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Μάλιστα είναι εμφανές ότι οι περισσότερες έρευνες έχουν εστιάσει στους μαθητές και όχι στους εκπαιδευτικούς και κατά κύριο λόγο στη σχέση αυτών με την επίλυση προβλήματος. Στη συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα γίνει μια προσπάθεια για την κάλυψη αυτού του κενού στο χώρο της ελληνικής δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης. Συγκεκριμένα τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι τα εξής:

1. Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με: α) την επίλυση προβλήματος και β) την κατασκευή προβλήματος;
2. Που συγκλίνουν και που αποκλίνουν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος;
3. Ποιες είναι οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με: α) την επίλυση προβλήματος και β) την κατασκευή προβλήματος;
4. Που συγκλίνουν και που αποκλίνουν οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος;
5. Πόσο συχνά εντάσσεται η κατασκευή προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη;

5.2 Μέθοδοι και διαδικασίες

5.2.1 Δείγμα – Διαδικασίες

Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε από δείγμα εκπαιδευτικών Μαθηματικών που εργάζονται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση είτε σε σχολικές μονάδες (δημόσιο/ιδιωτικό) είτε σε άλλες δομές (φροντιστήρια/ιδιαίτερα). Συνολικά το δείγμα αποτελείται από 120 εκπαιδευτικούς εκ των οποίων 57 είναι άνδρες και 63 είναι γυναίκες με μέσο όρο ηλικίας 41,2 έτη. Η καταγραφή των χαρακτηριστικών του δείγματος της έρευνας μας με βάση τις γενικές πληροφορίες που ζητήθηκαν στο ερωτηματολόγιο ακολουθεί στον Πίνακα 1.

		f	%	*M*	*SD*	*Min*	*Max*
Φύλο	Άνδρας	57	47,5				
	Γυναίκα	63	52,5				
Ηλικία (σε έτη)				41,2	10,4	25	67
Έτη που εργάζεστε στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση σε σχολικές μονάδες (δημόσιο/ιδιωτικό)				6,8	9,3	0	39
Έτη που εργάζεστε στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση σε άλλες δομές (π.χ. φροντιστήρια κτλ)				11,1	8,5	0	36

		f	%	*M*	*SD*	*Min*	*Max*
Στην τρέχουσα σχολική χρονιά, εργάζομαι ως εκπαιδευτικός μαθηματικός σε	Σχολική μονάδα	49	40,8				
	Φροντιστήριο/ιδιαίτερα	66	55,0				
	Σχολική μονάδα και φροντιστήριο/ιδιαίτερα	5	4,2				
Τμήμα από το οποίο έχετε αποφοιτήσει	Μαθηματικών	117	97,5				
	Άλλο	3	2,5				
Πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση	Μεταπτυχιακό	37	30,8				
	Επιμορφωτικά σεμινάρια	18	15,0				
	Μεταπτυχιακό και επιμορφωτικά σεμινάρια	32	26,7				
	Όχι	33	27,5				

Πίνακας 1 Το δείγμα της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Ιούνιο του 2022. Η διεξαγωγή της έγινε με την ηλεκτρονική διανομή του ερωτηματολογίου αυτής το οποίο κατασκευάστηκε στα τέλη Μαΐου μέσω της υπηρεσίας Google Forms. Η συμπλήρωση και παράδοση των ερωτηματολογίων από τους συμμετέχοντες της έρευνας μας πραγματοποιήθηκε επίσης μέσω της ίδιας υπηρεσίας. Πριν τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου δόθηκαν πληροφορίες σχετικά με το περιεχόμενο της έρευνας, το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται, ο αναμενόμενος χρόνος συμπλήρωσης και η ανωνυμία του ερωτηματολογίου, καθώς και το γεγονός ότι δεν υπάρχουν σωστές και λανθασμένες απαντήσεις σε αυτό.

5.2.2 Ερευνητικά εργαλεία

Για την επίτευξη των στόχων της συγκεκριμένης έρευνας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του ανώνυμου δομημένου ερωτηματολογίου με ερωτήσεις κλειστού τύπου (βλ. Παράρτημα Α).

Η δημιουργία αυτού βασίστηκε σε εργαλεία προηγούμενων ερευνών, τα οποία μεταφράστηκαν και προσαρμόστηκαν από μέρους μας έτσι ώστε να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς της έρευνας μας. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν τα ερωτηματολόγια:

- “What are Finnish Teacher Educators’ Conceptions about the Teaching of Problem Solving in Mathematics?” του Pehkonen (1993), που καταγράφει τις αντιλήψεις των Φινλανδών εκπαιδευτών των δασκάλων σχετικά με τη σημασία και τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος στο πεδίο των σχολικών μαθηματικών.
- “Turkish primary school teachers' opinions about problem posing applications: Students, the mathematics curriculum and mathematics textbooks” της Kiliç (2013), που καταγράφει τις απόψεις των Τούρκων δασκάλων σχετικά με την κατασκευή προβλήματος σε σχέση με τους μαθητές, το πρόγραμμα σπουδών αλλά και τα σχολικά βιβλία.
- “Problem solving teaching practices: Observer and teacher’s view” των Felmer et al. (2015), το οποίο χρησιμοποιείται για μια διερευνητική μελέτη για τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών μαθηματικών που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος.

Το ερωτηματολόγιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελείται από τα παρακάτω τέσσερα κύρια μέρη:

1. **Αντιλήψεις σχετικά με την επίλυση προβλήματος.**
2. **Αντιλήψεις σχετικά με την κατασκευή προβλήματος.**
3. **Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος.**
4. **Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος.**

Στην αρχή του ερωτηματολογίου αναφέρεται ο στόχος της έρευνας και ακολούθως ζητούνται γενικές πληροφορίες για τους συμμετέχοντες. Μεταξύ του 3^{ου} και 4^{ου} κύριου μέρους αυτού έχουμε εισάγει την ερώτηση: «Πόσο συχνά εντάσσεται η κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, η δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος) στο μάθημα σας στην τάξη;», για την οποία δίνονται 4 επιλογές (ποτέ, σπάνια, περιστασιακά και συχνά). Η επιλογή «ποτέ» οδηγεί στην ολοκλήρωση του ερωτηματολογίου, ενώ οι υπόλοιπες στο 4^{ο} και τελευταίο μέρος αυτού. Η δημιουργία της ερώτησης αυτής από πλευράς μας έγινε με την υπόθεση ότι πιθανώς ένα μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων να μην εντάσσει καθόλου την κατασκευή προβλήματος στα μαθήματα του στην τάξη. Συνεπώς κατά αυτόν τον τρόπο δύναται να έχουμε μια εικόνα για τη συχνότητα χρήσης της κατασκευής προβλήματος, αλλά αποφεύγουμε και αναξιόπιστα δεδομένα. Συνολικά το ερωτηματολόγιο αποτελείται από 111 ερωτήσεις, εκ των οποίων οι 7 σχετίζονται με γενικές πληροφορίες σχετικές με τους συμμετέχοντες και 1 με τη συχνότητα χρήσης της κατασκευής προβλήματος όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Ακολουθεί μια περαιτέρω ανάλυση αυτού.

Το 1ο μέρος αυτού «Αντιλήψεις σχετικά με την επίλυση προβλήματος», αποτελεί μετάφραση του ερωτηματολόγιου του Pehkonen (1993), τα ερωτήματα του οποίου μετρώνται σε κλίμακα Likert 5 σημείων που κυμαίνονται από 1 (συμφωνώ απόλυτα) έως 5 (διαφωνώ απόλυτα) και αποτελείται από τις εξής 4 θεματικές (συνολικά 35 ερωτήσεις):

- **Σημασία της επίλυσης προβλήματος** (7 ερωτήσεις).
- **Διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος** (9 ερωτήσεις).
- **Προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος** (6 ερωτήσεις).
- **Χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών μαθηματικών και διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος** (13 ερωτήσεις).

Το 2ο μέρος του ερωτηματολογίου «Αντιλήψεις σχετικά με την κατασκευή προβλήματος», προήλθε από το ερωτηματολόγιο της Kiliç (2013), τα ερωτήματα του οποίου μετρώνται σε κλίμακα Likert 5 σημείων που κυμαίνονται από 1 (συμφωνώ απόλυτα) έως 5 (διαφωνώ απόλυτα). Έπειτα από τη μετάφραση αυτού υπήρξε κατάλληλη τροποποίηση του έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στους σκοπούς της έρευνας μας. Συγκεκριμένα στην 2η από τις παρακάτω θεματικές προστέθηκε η επιλογή: «6: Κατά τη γνώμη μου, στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών δεν υπάρχει κάποια σχετική αναφορά». Η δημιουργία της επιλογής αυτής από πλευράς μας έγινε με την υπόθεση ότι ένα μεγάλο μέρος των συμμετεχόντων, πιθανώς να θεωρεί ότι δεν υπάρχουν οι σχετικές αναφορές στο πρόγραμμα σπουδών. Οι 3 θεματικές του 2ου μέρους του ερωτηματολογίου είναι οι εξής (συνολικά 30 ερωτήσεις):

- **Κατασκευή προβλήματος και μαθητές/τριες** (14 ερωτήσεις).
- **Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών** (12 ερωτήσεις).
- **Κατασκευή προβλήματος και σχολικά βιβλία** (4 ερωτήσεις).

Το 3ο μέρος «Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος», προήλθε από το ερωτηματολόγιο των Felmer et al. (2015), τα ερωτήματα του οποίου μετρώνται σε κλίμακα Likert 6 σημείων που κυμαίνονται από 1 (ποτέ) έως 6 (πάντα) και το οποίο χρησιμοποιήθηκε ως βάση έτσι ώστε να δημιουργηθεί και το 4ο μέρος του ερωτηματολογίου «Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος». Το καθένα εξ αυτών αποτελείται από 19 ερωτήσεις, οι οποίες θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως συζυγείς μεταξύ τους. Στη δική μας έκδοση όμως, τα ερωτήματα μετρώνται σε κλίμακα Likert 5 σημείων που κυμαίνονται από 1 (σχεδόν ποτέ) έως 5 (σχεδόν πάντα).

5.2.3 Ανάλυση

Για τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων μας χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο Statistical Package for Social Sciences (SPSS 27).

Για την ανάλυση και ερμηνεία των απαντήσεων αναφορικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος, χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία που ακολούθησε ο Pehkonen (1993). Αρχικά η κλίμακα Likert (1-2-3-4-5) μειώθηκε με το συνδυασμό των δύο τιμών απόκρισης στα ακραία άκρα της κλίμακας, δίνοντας μια κλίμακα: διαφωνώ (1 ή 2), ουδέτερο (3), συμφωνώ (4 ή 5). Έπειτα, το επίπεδο συναίνεσης αποτυπώθηκε ως εξής:

- Πλήρης συναίνεση εάν η συμφωνία είναι τουλάχιστον 95%.
- Συναίνεση εάν η συμφωνία είναι τουλάχιστον 85% και μικρότερη του 95%.
- Σχεδόν συναίνεση εάν η συμφωνία είναι τουλάχιστον 75% και μικρότερη του 85%.
- Έλλειψη συναίνεσης εάν η συμφωνία είναι μικρότερη του 75%.

Η ίδια μεθοδολογία εφαρμόστηκε και για την ανάλυση και ερμηνεία των απαντήσεων αναφορικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, εκτός όμως της θεματικής «Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών».

Για την ανάλυση και ερμηνεία των απαντήσεων αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος, η κλίμακα Likert (1-2-3-4-5) μειώθηκε με το συνδυασμό των δύο τιμών απόκρισης στα ακραία άκρα της κλίμακας, δίνοντας μια κλίμακα: διαφωνώ (1 ή 2), ουδέτερο (3), συμφωνώ (4 ή 5), ούτος ώστε να μπορέσουμε να αναφερθούμε στο ποσοστό συμφωνίας.

6. Αποτελέσματα

6.1 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2, οι εκπαιδευτικοί Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης συναινούν πλήρως στο ότι η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη και δημιουργικότητα και συναινούν απλώς στο ότι τονίζει τη μεθοδική φύση των μαθηματικών. Επίσης υπάρχει συναίνεση αναφορικά με το γεγονός ότι η εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή είναι επίλυση προβλήματος και ότι νέα πράγματα μαθαίνονται καλύτερα μέσω αυτής.

Ωστόσο υπάρχει έλλειψη συναίνεσης σχετικά με το ότι η επίλυση προβλήματος δείχνει τον περιορισμό των αλγορίθμων. Τέλος μία από τις πιο σημαντικές παρατηρήσεις αυτής της θεματικής, είναι ότι μόλις το 8,3% των υποκειμένων της έρευνας μας θεώρησε ότι οι μαθητές/τριες πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι διασκεδαστική.

Σημασία της επίλυσης προβλήματος	Απόλυτα Διαφωνώ	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Απόλυτα Συμφωνώ	**Συμφωνία (%)**
Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη.	0	0	0	34	86	**100,0**
Η εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή είναι επίλυση προβλήματος.	0	0	10	76	34	**91,7**
Οι μαθητές/τριες πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι διασκεδαστική.	8	48	54	9	1	**8,3**
Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη δημιουργικότητα.	0	0	4	56	60	**96,7**
Νέα πράγματα μαθαίνονται καλύτερα μέσω της επίλυσης προβλήματος.	0	1	9	68	42	**91,7**
Η επίλυση προβλήματος δείχνει τον περιορισμό των αλγορίθμων.	1	8	30	63	18	**67,5**

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Η επίλυση προβλήματος τονίζει τη μεθοδική φύση των μαθηματικών.	0	2	8	41	69	**91,7**

Πίνακας 2 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος (Σημασία της επίλυσης προβλήματος)

Στον Πίνακα 3 σημειώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης συναινούν πλήρως στο ότι η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται δημιουργικά, ευέλικτα και με επιδοκιμασία, οι ανοιχτές συζητήσεις στην τάξη είναι απαραίτητη συνθήκη για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος και ότι στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει να τονίζεται η λογική. Συναινούν στο γεγονός ότι η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνει ευρετικές στρατηγικές και φαίνεται ότι υπάρχει σχεδόν συναίνεση στο ότι η επίλυση προβλήματος μπορεί να μαθευτεί μόνο λύνοντας προβλήματα και ότι κατά τη διάρκεια αυτής θα πρέπει να αντιμετωπίζονται από τους μαθητές/τριες οικεία προβλήματα από το περιβάλλον τους.

Από τη άλλη πλευρά δεν υπάρχει συναίνεση αναφορικά με το γεγονός ότι η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται εστιάζοντας σε προβλήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών και ότι στη διδασκαλία αυτής θα πρέπει να τονίζεται ο μαθηματικός φορμαλισμός. Τέλος μόνο το 24,2% των υποκειμένων της έρευνας μας θεώρησε ότι οι μαθητές/τριες μπορούν να φτιάξουν μόνοι/ες τους προβλήματα και μετά να τα λύσουν.

Διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται εστιάζοντας σε προβλήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών .	1	18	19	67	15	**68,3**

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Η επίλυση προβλήματος μπορεί να μαθευτεί, μόνο λύνοντας προβλήματα.	3	7	18	28	64	**76,7**
Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται δημιουργικά, ευέλικτα και με επιδοκιμασία.	0	0	2	59	59	**98,3**
Οι ανοιχτές συζητήσεις στην τάξη, είναι απαραίτητη συνθήκη για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	0	0	2	47	71	**98,3**
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνει ευρετικές στρατηγικές.	0	1	8	52	59	**92,5**
Οι μαθητές/τριες μπορούν να φτιάξουν μόνοι/ες τους προβλήματα και μετά να τα λύσουν.	0	39	52	17	12	**24,2**
Κατά την επίλυση προβλήματος, θα πρέπει να αντιμετωπίζονται από τους μαθητές/τριες οικεία προβλήματα από το περιβάλλον τους.	1	3	22	71	23	**78,3**
Στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να τονίζεται η λογική.	0	1	3	85	31	**96,7**
Στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να τονίζεται ο μαθηματικός φορμαλισμός.	4	33	56	20	7	**22,5**

Πίνακας 3 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος (Διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος)

Σύμφωνα με τον Πίνακα 4, υπάρχει συναίνεση στο ότι το σωστό πνεύμα για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει να δημιουργείται στην τάξη, οι μαθητές/τριες θα πρέπει να έχουν ένα ορισμένο επίπεδο κινήτρων έτσι ώστε η επίλυση προβλήματος να μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς και ότι πρέπει να υπάρχει αρκετός χρόνος για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος. Σχεδόν συναίνεση υπάρχει στο θέμα της ύπαρξης αρκετών έργων (tasks) για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.

Δεν υπάρχει όμως συναίνεση σχετικά με ότι η επίλυση προβλήματος μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς μόνο αφότου οι μαθητές/τριες έχουν τις απαραίτητες μηχανικές δεξιότητες και ότι η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί μικρότερες ομάδες μαθητών/τριών.

Προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Θα πρέπει να υπάρχουν αρκετά έργα (tasks) για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	1	6	17	81	15	**80,0**
Το σωστό πνεύμα για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να δημιουργείται στην τάξη.	0	0	8	84	28	**93,3**
Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να έχουν ένα ορισμένο επίπεδο κινήτρων, έτσι ώστε η επίλυση προβλήματος να μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς.	1	3	12	68	36	**86,7**
Πρέπει να υπάρχει αρκετός χρόνος για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	0	0	7	44	69	**94,2**
Η επίλυση προβλήματος μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς, μόνο αφότου οι μαθητές/τριες έχουν τις απαραίτητες μηχανικές δεξιότητες.	3	12	22	60	23	**69,2**
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί μικρότερες ομάδες μαθητών/τριών.	1	12	21	61	25	**71,7**

Πίνακας 4 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος (Προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος)

Τέλος με βάση τον Πίνακα 5, οι εκπαιδευτικοί Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης συναινούν πλήρως στο ότι οι ίδιοι θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι τόσο με τη θεωρία της επίλυσης προβλήματος όσο και με αυτή σε επίπεδο πρακτικής εφαρμογής, θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να κάνουν τους μαθητές/τριες να συμμετέχουν στη διδασκαλία, αλλά και να είναι ανοιχτόμυαλοι. Επίσης συναινούν πλήρως στο ότι για να μπορέσουν να διδάξουν την επίλυση προβλήματος θα πρέπει να έχουν το θάρρος να αντιμετωπίσουν καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων. Συναινούν απλώς στο ότι θα πρέπει να δοθεί επαρκής εκπαίδευση στους ίδιους για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, ότι θα πρέπει να έχουν αρκετό χρόνο για να προετοιμάσουν τη διδασκαλία αυτής, αλλά και να είναι αρκετά υπομονετικοί έτσι ώστε να μη δίνουν υπερβολική βοήθεια στους/στις μαθητές/τριες σχετικά με την επίλυση των προβλημάτων τους. Επίσης υπάρχει συναίνεση σχετικά με τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών για την επιτυχή διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος. Συγκεκριμένα συναινούν ότι για να διδαχθεί επιτυχώς η επίλυση προβλήματος οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα πρέπει να είναι ενθουσιώδης για τη διδασκαλία αυτής, θα πρέπει να έχουν προσωπική εμπειρία επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων και τέλος να πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι σημαντική.

Όμως μόλις 1 στους 3 θεωρεί ότι οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών με την ικανότητα να παρεκκλίνουν από τη σειρά που ορίζεται στα εγχειρίδια (textbooks), θα διδάξουν επιτυχώς την επίλυση προβλήματος.

Χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών μαθηματικών και διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τη θεωρία της επίλυσης προβλήματος.	0	5	1	57	57	**95,0**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με την επίλυση προβλήματος σε επίπεδο πρακτικής εφαρμογής.	0	3	3	37	77	**95,0**
Για να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών να διδάξουν την επίλυση προβλήματος, πρέπει να έχουν το θάρρος να αντιμετωπίσουν καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων.	1	1	4	29	85	**95,0**
Για να διδαχθεί επιτυχώς η επίλυση προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα πρέπει να είναι ενθουσιώδης για τη διδασκαλία αυτής.	0	1	12	71	36	**89,2**

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών με την ικανότητα να παρεκκλίνουν από τη σειρά που ορίζεται στα εγχειρίδια (textbooks), θα διδάξουν επιτυχώς την επίλυση προβλήματος.	1	25	54	21	19	**33,3**
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, απαιτεί οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών να είναι ανοιχτόμυαλοι.	0	2	4	31	83	**95,0**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών πρέπει να είναι αρκετά υπομονετικοί, έτσι ώστε να μη δίνουν υπερβολική βοήθεια στους/στις μαθητές/τριες σχετικά με την επίλυση των προβλημάτων τους.	0	1	12	76	31	**89,2**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, πρέπει να έχουν αρκετό χρόνο για να προετοιμάσουν τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	0	4	10	70	36	**88,3**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, πρέπει να έχουν την ικανότητα να κάνουν τους μαθητές/τριες να συμμετέχουν στη διδασκαλία.	0	1	1	50	68	**98,3**
Πρέπει να δοθεί επαρκής εκπαίδευση στους εκπαιδευτικούς μαθηματικών για τη διδασκαλία επίλυσης προβλήματος.	0	1	9	70	40	**91,7**
Για να είναι σε θέση να διδάξουν την επίλυση προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα πρέπει να έχουν προσωπική εμπειρία επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων.	0	1	13	33	73	**88,3**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών που είναι πρόθυμοι να δοκιμάσουν κάτι νέο, μπορεί να το πετύχουν στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	0	1	26	72	21	**77,5**

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Για να διδάξουν με επιτυχία την επίλυση προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών πρέπει να πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι σημαντική.	0	3	9	76	32	**90,0**

Πίνακας 5 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος (Χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών μαθηματικών και διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος)

6.2 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος

Στον Πίνακα 6 καταγράφεται ότι οι εκπαιδευτικοί Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης συναινούν πλήρως στο ότι η κατασκευή προβλήματος ωθεί τους/τις μαθητές/τριες να σκεφτούν. Συναινούν απλώς στο ότι η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις ικανότητες των μαθητών/τριών σχετικά με την επίλυση προβλήματος, τις δεξιότητες συλλογισμού και κρίσης αυτών, αλλά και τις ικανότητες σύνδεσης (connection abilities) τους. Επίσης συναινούν στο ότι η κατασκευή προβλήματος συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών/τριών, τους/τις βοηθά να κατανοήσουν τα καθημερινά προβλήματα που αντιμετωπίζουν και ενθαρρύνει τους/τις μαθητές/τριες να σκέφτονται κριτικά. Ωστόσο είναι σημαντικό το γεγονός ότι υπάρχει συναίνεση σχετικά με το θέμα ότι οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατασκευή προβλήματος.

Έλλειψη συναίνεσης υπάρχει σχετικά με τα εξής θέματα: η κατασκευή προβλήματος δείχνει τα επίπεδα γνώσης των μαθητών/τριών, η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να αξιολογήσουν τους εαυτούς τους, η κατασκευή προβλήματος ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών/τριών, η κατασκευή προβλήματος βοηθά στην κατάδειξη των μαθηματικών αντιλήψεων των μαθητών/τριών, η κατασκευή προβλήματος κάνει τα μαθηματικά πιο ευχάριστα για τους/τις μαθητές/τριες και ότι η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να εκφραστούν.

Κατασκευή προβλήματος και μαθητές/τριες	Απόλυτα Διαφωνώ	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Απόλυτα Συμφωνώ	**Συμφωνία (%)**
Η κατασκευή προβλήματος δείχνει τα επίπεδα γνώσης των μαθητών/τριών.	1	8	27	70	14	**70,0**
Η κατασκευή προβλήματος ωθεί τους/τις μαθητές/τριες να σκεφτούν.	0	2	1	50	67	**97,5**
Η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις ικανότητες των μαθητών/τριών σχετικά με την επίλυση προβλήματος.	0	1	13	71	35	**88,3**
Η κατασκευή προβλήματος συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών/τριών.	0	2	7	35	76	**92,5**
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να αξιολογήσουν τους εαυτούς τους.	0	13	43	50	14	**53,3**
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν τα καθημερινά προβλήματα που αντιμετωπίζουν.	0	2	12	62	44	**88,3**
Η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις δεξιότητες συλλογισμού και κρίσης των μαθητών/τριών.	0	2	5	54	59	**94,2**
Η κατασκευή προβλήματος ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών/τριών.	0	3	52	47	18	**54,2**
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά στην κατάδειξη των μαθηματικών αντιλήψεων των μαθητών/τριών.	0	1	33	69	17	**71,7**
Οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατασκευή προβλήματος.	0	0	7	63	50	**94,2**
Η κατασκευή προβλήματος κάνει τα μαθηματικά πιο ευχάριστα για τους/τις μαθητές/τριες.	3	9	44	54	10	**53,3**
Η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις ικανότητες σύνδεσης (connection abilities) των μαθητών/τριών.	1	2	10	75	32	**89,2**
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να εκφραστούν.	0	6	41	57	16	**60,8**

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Η κατασκευή προβλήματος ενθαρρύνει τους/τις μαθητές/τριες να σκέφτονται κριτικά.	0	3	5	63	49	**93,3**

Πίνακας 6 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος (Κατασκευή προβλήματος και μαθητές/τριες)

Στον παρακάτω Πίνακα 7 συγκριτικά με τους προηγούμενους πίνακες της έρευνας μας έχει προστεθεί μία επιπλέον επιλογή (*[3]). Συνεπώς σε αυτό το σημείο δε μπορούμε να αναφερθούμε περί συναίνεσης ή όχι των απόψεων των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αναφορικά με τα θέματα αυτού. Ωστόσο, είναι άκρως ενδιαφέροντα τα όσο σημειώνονται στη στήλη «*(%)». Και αν μάλιστα λάβουμε υπόψιν και τα όσα καταγράφονται στη στήλη «Δεν είμαι βέβαιος/η», προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα στα οποία θα αναφερθούμε μετέπειτα.

Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	*	**Συμφωνία (%)**	*** (%)**
Οι ενδεικτικές δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, δεν προκαλούν τον στοχασμό.	1	18	71	9	7	14	**13,3**	**11,7**
Οι εξηγήσεις που δίνονται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, σχετικά με τις επιστημονικές μελέτες για την κατασκευή προβλήματος, δεν είναι κατανοητές.	1	6	46	7	6	54	**10,8**	**45,0**

[3] Κατά τη γνώμη μου, στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών δεν υπάρχει κάποια σχετική αναφορά.

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	*	**Συμφωνία (%)**	*** (%)**
Ο χρόνος που επιτρέπεται για την κατασκευή προβλήματος με βάση το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, δεν είναι αρκετός.	0	2	16	12	18	72	**25,0**	**60,0**
Υπάρχουν ανεπαρκείς πληροφορίες στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα αξιολογήσουν τα προβλήματα που κατασκευάζονται από τους/τις μαθητές/τριες.	0	0	20	26	53	21	**65,8**	**17,5**
Κατά την προετοιμασία της κατασκευής προβλήματος, περιβαλλοντικοί και τοπικοί παράγοντες (environmental and local factors) δε λαμβάνονται υπόψη στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	1	0	30	31	44	14	**62,5**	**11,7**
Οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, είναι επαρκείς.	22	62	24	3	8	1	**9,2**	**0,8**
Δεν υπάρχουν αρκετές εξηγήσεις σχετικά με τις στρατηγικές, τις μεθόδους και τις τεχνικές κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	1	1	14	19	52	33	**59,2**	**27,5**
Οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, είναι αισθητοί και σαφείς.	20	60	26	7	4	3	**9,2**	**2,5**

	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	*	**Συμφωνία (%)**	* (%)
Οι ενδεικτικές δραστηριότητες σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, δεν είναι αρκετές στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	1	4	27	54	29	5	**69,2**	**4,2**
Οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος, είναι αποδεκτοί (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριων.	18	31	56	9	4	2	**10,8**	**1,7**
Οι ενδεικτικές δραστηριότητες σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, είναι αποδεκτές (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριων.	24	56	27	6	5	2	**9,2**	**1,7**
Οι εξηγήσεις που δίδονται για την κατασκευή προβλήματος, δε βασίζονται σε συγκεκριμένα δεδομένα.	2	2	56	30	12	18	**35,0**	**15,0**

Πίνακας 7 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος (Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών)

Το γεγονός ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών βασίζεται σε συγκεκριμένα γεγονότα, βρίσκει το 41,7% των υποκειμένων της έρευνας μας να συναινεί. Μόλις το 1,7% αυτών συναινεί στο ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών είναι επαρκής και το 0,8% συναινεί στο ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών είναι αισθητή και σαφής. Κανένας από τους/τις εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην έρευνα μας δε δήλωσε ότι: «Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αποδεκτή (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριών» (βλ. Πίνακα 8).

Κατασκευή προβλήματος και σχολικά βιβλία	Διαφωνώ Απόλυτα	Διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος/η	Συμφωνώ	Συμφωνώ Απόλυτα	**Συμφωνία (%)**
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι επαρκής.	34	81	3	1	1	**1,7**
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αισθητή και σαφής.	36	77	6	0	1	**0,8**
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αποδεκτή (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριών.	35	68	17	0	0	**0,0**
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, βασίζεται σε συγκεκριμένα γεγονότα.	5	11	54	48	2	**41,7**

Πίνακας 8 Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος (Κατασκευή προβλήματος και σχολικά βιβλία)

6.3 Συγκλίσεις και αποκλίσεις των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος

Με βάση τα αποτελέσματα της ενότητας 6.1 προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας 9, όπου σε αυτόν καταγράφονται τα ερωτήματα στα οποία έχουμε πλήρης συναίνεση και έλλειψη συναίνεσης (μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας αυτών κατά φθίνουσα σειρά) σχετικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης όσο αφορά την επίλυση προβλήματος.

Πλήρης συναίνεση		**Έλλειψη συναίνεσης**	
Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη.	**100,0%**	Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί μικρότερες ομάδες μαθητών/τριών.	**71,7%**
Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται δημιουργικά, ευέλικτα και με επιδοκιμασία.	**98,3%**	Η επίλυση προβλήματος μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς, μόνο αφότου οι μαθητές/τριες έχουν τις απαραίτητες μηχανικές δεξιότητες.	**69,2%**

Οι ανοιχτές συζητήσεις στην τάξη, είναι απαραίτητη συνθήκη για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	**98,3%**	Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται εστιάζοντας σε προβλήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών.	**68,3%**
Το σωστό πνεύμα για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να δημιουργείται στην τάξη.	**98,3%**	Η επίλυση προβλήματος δείχνει τον περιορισμό των αλγορίθμων.	**67,5%**
Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη δημιουργικότητα.	**96,7%**	Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών με την ικανότητα να παρεκκλίνουν από τη σειρά που ορίζεται στα εγχειρίδια (textbooks), θα διδάξουν επιτυχώς την επίλυση προβλήματος.	**33,3%**
Στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να τονίζεται η λογική.	**96,7%**	Οι μαθητές/τριες μπορούν να φτιάξουν μόνοι/ες τους προβλήματα και μετά να τα λύσουν.	**24,2%**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τη θεωρία της επίλυσης προβλήματος.	**95,0%**	Στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να τονίζεται ο μαθηματικός φορμαλισμός.	**22,5%**
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με την επίλυση προβλήματος σε επίπεδο πρακτικής εφαρμογής.	**95,0%**	Οι μαθητές/τριες πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι διασκεδαστική.	**8,3%**
Για να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών να διδάξουν την επίλυση προβλήματος, πρέπει να έχουν το θάρρος να αντιμετωπίσουν καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων.	**95,0%**		
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, απαιτεί οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών να είναι ανοιχτόμυαλοι.	**95,0%**		

Πίνακας 9 Συγκλίσεις και αποκλίσεις των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Με βάση τα αποτελέσματα της ενότητας 6.2 (εκτός από αυτά της θεματικής «Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών» για το λόγο που αναφέραμε στην ενότητα αυτή) προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας 10, όπου σε αυτόν καταγράφονται τα ερωτήματα στα οποία έχουμε πλήρης συναίνεση και έλλειψη συναίνεσης (μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας αυτών κατά φθίνουσα σειρά) σχετικά με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης όσο αφορά την κατασκευή προβλήματος.

Πλήρης συναίνεση		Έλλειψη συναίνεσης	
Η κατασκευή προβλήματος ωθεί τους/τις μαθητές/τριες να σκεφτούν.	**97,5%**	Η κατασκευή προβλήματος βοηθά στην κατάδειξη των μαθηματικών αντιλήψεων των μαθητών/τριών.	**71,7%**
		Η κατασκευή προβλήματος δείχνει τα επίπεδα γνώσης των μαθητών/τριών.	**70,0%**
		Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να εκφραστούν.	**60,8%**
		Η κατασκευή προβλήματος ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών/τριών.	**54,2%**
		Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να αξιολογήσουν τους εαυτούς τους.	**53,3%**
		Η κατασκευή προβλήματος κάνει τα μαθηματικά πιο ευχάριστα για τους/τις μαθητές/τριες.	**53,3%**
		Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, βασίζεται σε συγκεκριμένα γεγονότα.	**41,7%**
		Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι επαρκής.	**1,7%**
		Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αισθητή και σαφής.	**0,8%**
		Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αποδεκτή (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριών.	**0,0%**

Πίνακας 10 Συγκλίσεις και αποκλίσεις των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος

Βλέποντας λοιπόν τις αντιλήψεις για την επίλυση προβλήματος και την κατασκευή προβλήματος μέσα από το πλήθος των ερωτημάτων στα οποία έχουμε πλήρης συναίνεση και έλλειψη συναίνεσης μεταξύ των εκπαιδευτικών σε αυτά τα δύο θέματα, έχουμε ότι:

Αναφορικά με τις αντιλήψεις για την επίλυση προβλήματος

- Υπήρξε πλήρης συναίνεση σε 10 από τα 35 ερωτήματα
- Υπήρξε έλλειψη συναίνεσης σε 8 από τα 35 ερωτήματα

και

Αναφορικά με τις αντιλήψεις για την κατασκευή προβλήματος

- Υπήρξε πλήρης συναίνεση σε 1 από τα 30 ερωτήματα
- Υπήρξε έλλειψη συναίνεσης σε 10 από τα 30 ερωτήματα

Συνεπώς, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό σχετικά με θέματα που αφορούν την επίλυση προβλήματος εν αντιθέσει με την κατασκευή προβλήματος. Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε αυτό το σημείο δεν ασχοληθήκαμε με τα υπόλοιπα επίπεδα συναίνεσης της μεθοδολογίας μας.

6.4 Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Στον Πίνακα 11 καταγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας μας αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος.

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος	Σχεδόν ποτέ		Σε λίγες περιπτώσεις		Συνήθως		Στις περισσότερες περιπτώσεις		Σχεδόν πάντα	
	f	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	18	15,0	48	40,0	16	13,3	33	27,5	5	4,2

	Σχεδόν ποτέ		Σε λίγες περιπτώσεις		Συνήθως		Στις περισσότερες περιπτώσεις		Σχεδόν πάντα	
	f	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση ενός προβλήματος, το λύνω στον πίνακα.	4	3,3	34	28,3	33	27,5	45	37,5	4	3,3
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου λύνουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	1	0,8	30	25,0	22	18,3	50	41,7	17	14,2
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να λύσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	1	0,8	5	4,2	21	17,5	61	50,8	32	26,7
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	0	0,0	2	1,7	17	14,2	50	41,7	51	42,5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	34	28,3	61	50,8	12	10,0	9	7,5	4	3,3
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	3	2,5	38	31,7	54	45,0	21	17,5	4	3,3
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	1	0,8	11	9,2	22	18,3	48	40,0	38	31,7
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	0	0,0	2	1,7	8	6,7	19	15,8	91	75,8
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	0	0,0	55	45,8	48	40,0	13	10,8	4	3,3

	Σχεδόν ποτέ		Σε λίγες περιπτώσεις		Συνήθως		Στις περισσότερες περιπτώσεις		Σχεδόν πάντα	
	f	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	1	0,8	5	4,2	13	10,8	52	43,3	49	40,8
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να λύσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	1	0,8	4	3,3	12	10,0	33	27,5	70	58,3
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.	1	0,8	43	35,8	41	34,2	32	26,7	3	2,5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	1	0,8	34	28,3	55	45,8	24	20,0	6	5,0
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το λύσει.	5	4,2	39	32,5	39	32,5	32	26,7	5	4,2
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	1	0,8	13	10,8	41	34,2	49	40,8	16	13,3
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην επίλυση των προβλημάτων τους.	2	1,7	43	35,8	59	49,2	12	10,0	4	3,3
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	5	4,2	21	17,5	45	37,5	43	35,8	6	5,0
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	17	14,2	62	51,7	26	21,7	12	10,0	3	2,5

Πίνακας 11 Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Ο Πίνακας 12 περιέχει τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που σχετίζονται με τη διαχείριση της τάξης κατά την επίλυση προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Διαχείριση της τάξης	**Συμφωνία (%)**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	**31,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	**10,8%**

Πίνακας 12 Διδακτικές πρακτικές σχετικές με τη διαχείριση της τάξης κατά την επίλυση προβλήματος

Στον Πίνακα 13 καταγράφονται οι δασκαλο-κεντρικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Δασκαλο-κεντρικές	**Συμφωνία (%)**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση ενός προβλήματος, το λύνω στον πίνακα.	**40,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	**14,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το λύσει.	**30,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην επίλυση των προβλημάτων τους.	**13,3**

Πίνακας 13 Δασκαλο-κεντρικές διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος

Στον Πίνακα 14 καταγράφονται οι μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου) πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου)	**Συμφωνία (%)**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	**84,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	**84,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να λύσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	**85,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	**40,8%**

Πίνακας 14 Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου) διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος

Στον Πίνακα 15 καταγράφονται οι μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών) πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών)	**Συμφωνία (%)**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου λύνουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	**55,8%**

	Συμφωνία (%)
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να λύσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	**77,5%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	**20,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	**71,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	**91,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.	**29,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	**25%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	**54,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	**12,5%**

Πίνακας 15 Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών) διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος

6.5 Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος

Στον Πίνακα 16 καταγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας μας αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος.

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος	Σχεδόν ποτέ		Σε λίγες περιπτώσεις		Συνήθως		Στις περισσότερες περιπτώσεις		Σχεδόν πάντα	
	f	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%	*f*	%
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	15	12,5	33	27,5	16	13,3	34	28,3	7	5,8
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα, το κατασκευάζω στον πίνακα.	3	2,5	43	35,8	36	30,0	18	15,0	5	4,2
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κατασκευάζουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	5	4,2	40	33,3	18	15,0	31	25,8	11	9,2
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να κατασκευάσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	2	1,7	7	5,8	27	22,5	35	29,2	34	28,3
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	2	1,7	5	4,2	16	13,3	49	40,8	33	27,5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	34	28,3	53	44,2	6	5,0	9	7,5	3	2,5

	Σχεδόν ποτέ		Σε λίγες περιπτώσεις		Συνήθως		Στις περισσότερες περιπτώσεις		Σχεδόν πάντα	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	2	1,7	58	48,3	27	22,5	12	10,0	6	5,0
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	4	3,3	13	10,8	25	20,8	27	22,5	36	30,0
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	3	2,5	4	3,3	11	9,2	17	14,2	70	58,3
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	2	1,7	14	11,7	51	42,5	35	29,2	3	2,5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	3	2,5	3	2,5	16	13,3	44	36,7	39	32,5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να κατασκευάσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	2	1,7	8	6,7	15	12,5	21	17,5	59	49,2
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων.	3	2,5	51	42,5	29	24,2	17	14,2	5	4,2
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	2	1,7	47	39,2	30	25,0	21	17,5	5	4,2

	Σχεδόν ποτέ		Σε λίγες περιπτώσεις		Συνήθως		Στις περισσότερες περιπτώσεις		Σχεδόν πάντα	
	f	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*	*f*	*%*
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το κατασκευάσει.	6	5,0	47	39,2	22	18,3	25	20,8	5	4,2
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	3	2,5	12	10,0	38	31,7	33	27,5	19	15,8
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην κατασκευή των προβλημάτων τους.	3	2,5	7	5,8	41	34,2	52	43,3	2	1,7
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	5	4,2	29	24,2	41	34,2	24	20,0	6	5,0
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	6	5,0	17	14,2	36	30,0	39	32,5	7	5,8

Πίνακας 16 Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος

Ο Πίνακας 17 περιέχει τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που σχετίζονται με τη διαχείριση της τάξης κατά την κατασκευή προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Διαχείριση της τάξης	**Συμφωνία (%)**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	**34,2%**

	Συμφωνία (%)
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	**10,0%**

Πίνακας 17 Διδακτικές πρακτικές σχετικές με τη διαχείριση της τάξης κατά την κατασκευή προβλήματος

Στον Πίνακα 18 καταγράφονται οι δασκαλο-κεντρικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Δασκαλο-κεντρικές	**Συμφωνία (%)**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα, το κατασκευάζω στον πίνακα.	**19,2%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	**31,7%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το κατασκευάσει.	**25,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην κατασκευή των προβλημάτων τους.	**45,0%**

Πίνακας 18 Δασκαλο-κεντρικές διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος

Στον Πίνακα 19 καταγράφονται οι μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου) πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου)	**Συμφωνία (%)**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	**68,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	**69,2%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να κατασκευάσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	**66,7%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	**25,0%**

Πίνακας 19 Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου) διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος

Στον Πίνακα 20 καταγράφονται οι μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών) πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος και τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας.

Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών)	**Συμφωνία (%)**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κατασκευάζουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	**35,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να κατασκευάσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	**57,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	**15,0%**

	Συμφωνία (%)
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	**52,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	**72,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων.	**18,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	**21,7%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	**43,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	**38,3%**

Πίνακας 20 Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών) διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος

6.6 Συγκλίσεις και αποκλίσεις των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος

Με βάση τα αποτελέσματα της ενότητας 6.4 προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας 21, όπου σε αυτόν καταγράφονται τα ερωτήματα στα οποία έχουμε έλλειψη συναίνεσης (μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας αυτών κατά φθίνουσα σειρά) σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης όσο αφορά την επίλυση προβλήματος.

Έλλειψη συναίνεσης	
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	**71,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου λύνουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	**55,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	**54,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση ενός προβλήματος, το λύνω στον πίνακα.	**40,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	**40,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	**31,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το λύσει.	**30,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.	**29,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	**25,0%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	**20,8%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	**14,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην επίλυση των προβλημάτων τους.	**13,3%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	**12,5%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	**10,8%**

Πίνακας 21 Αποκλίσεις των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Με βάση τα αποτελέσματα της ενότητας 6.5 προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας 22, όπου σε αυτόν καταγράφονται τα ερωτήματα στα οποία έχουμε έλλειψη συναίνεσης (μαζί με τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας αυτών κατά φθίνουσα σειρά) σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης όσο αφορά την κατασκευή προβλήματος. Αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης όσο αφορά την κατασκευή προβλήματος, είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι σε όλα τα ερωτήματα υπήρξε έλλειψη συναίνεσης.

Έλλειψη συναίνεσης	
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	**72,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	**69,2%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	**68,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να κατασκευάσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	**66,7%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να κατασκευάσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	**57,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	**52,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην κατασκευή των προβλημάτων τους.	**45,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	**43,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	**38,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κατασκευάζουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	**35,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	**34,2%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	**31,7%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το κατασκευάσει.	**25,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	**25,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα, το κατασκευάζω στον πίνακα.	**19,2%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων.	**18,3%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	**17,5%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	**15,0%**
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	**10,0%**

Πίνακας 22 Αποκλίσεις των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος

Δεδομένου όμως ότι οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος είναι συζυγείς μεταξύ τους, στον παρακάτω Πίνακα 23 παρατίθενται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε μια εικόνα για τις διαφοροποιήσεις που εμφανίζονται ανάλογα με το αντικείμενο εργασίας (επίλυση και κατασκευή προβλήματος).

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος		**Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος**	
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	**31,7%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	**34,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση ενός προβλήματος, το λύνω στον πίνακα.	**40,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα, το κατασκευάζω στον πίνακα.	**19,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου λύνουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	**55,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κατασκευάζουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	**35,0%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να λύσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	**77,5%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να κατασκευάσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	**57,5%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	**84,2%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	**68,3%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	**10,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	**10,0%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	**20,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	**15,0%**

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος		**Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος**	
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	**71,7%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	**52,5%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	**91,2%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	**72,5%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	**14,2%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	**31,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	**84,2%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	**69,2%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να λύσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	**85,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να κατασκευάσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	**66,7%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.	**29,2%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων.	**18,3%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	**25,0%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	**17,5%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το λύσει.	**30,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το κατασκευάσει.	**25,0%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	**54,2%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	**43,3%**

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος		**Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος**	
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην επίλυση των προβλημάτων τους.	**13,3%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην κατασκευή των προβλημάτων τους.	**45,0%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	**40,8%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	**25,0%**
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	**12,5%**	Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	**38,3%**

Πίνακας 23 Σύγκριση των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών σχετικά με την επίλυση προβλήματος με των αντίστοιχων της κατασκευής προβλήματος

Βλέποντας λοιπόν τις διδακτικές πρακτικές σχετικά με την επίλυση προβλήματος και την κατασκευή προβλήματος μέσα από το πλήθος των ερωτημάτων στα οποία έχουμε πλήρης συναίνεση και έλλειψη συναίνεσης μεταξύ των εκπαιδευτικών σε αυτά τα δύο θέματα, έχουμε ότι:

Αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές για την επίλυση προβλήματος

- Δεν υπήρξε πλήρης συναίνεση σε κανένα από τα ερωτήματα
- Υπήρξε έλλειψη συναίνεσης σε 14 από τα 19 ερωτήματα

και

Αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές για την κατασκευή προβλήματος

- Υπήρξε έλλειψη συναίνεσης σε όλα τα ερωτήματα

Συνεπώς, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι γενικότερα μεταξύ των εκπαιδευτικών και των διδακτικών τους πρακτικών υπάρχει ασυμφωνία. Ο φορέας εργασίας, οι γνώσεις, η ηλικία και άλλοι παράγοντες πιθανώς να συντελούν σε αυτό το γεγονός. Βέβαια, όπως και προηγουμένως (βλ. ενότητα 6.3), θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε αυτό το σημείο δεν ασχοληθήκαμε με τα υπόλοιπα επίπεδα συναίνεσης της μεθοδολογίας μας.

6.7 Συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη

Όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 24, ένα σχετικά μικρό ποσοστό (12,5%) των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης δεν εντάσσουν ποτέ την κατασκευή προβλήματος στα μαθήματα τους στην τάξη. Σχεδόν οι μισοί (49,2%) χρησιμοποιούν την κατασκευή προβλήματος σπάνια και περίπου 1 στους 3 (32,5%) περιστασιακά. Τέλος, μόλις το 5,8% των εκπαιδευτικών της έρευνας μας δήλωσε ότι εντάσσει συχνά την κατασκευή προβλήματος στα μαθήματα του στην τάξη.

Πόσο συχνά εντάσσεται η κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, η δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος) στο μάθημα σας στην τάξη;	Ποτέ	*f*	15
		%	12,5
	Σπάνια	*f*	59
		%	49,2
	Περιστασιακά	*f*	39
		%	32,5
	Συχνά	*f*	7
		%	5,8

Πίνακας 24 Συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη

Στον Πίνακα 25 παρουσιάζεται η συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη ανάλογα με το φορέα εργασίας. Σημειώνεται ότι η 3η στήλη αυτού «Σχολική μονάδα και φροντιστήριο/ιδιαίτερα» παρατίθεται τυπικά, καθώς δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον λόγω του μεγέθους των εκπαιδευτικών σε αυτή. Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι μόλις το 2% των εκπαιδευτικών που εργάζονται σε σχολικές μονάδες δεν εντάσσει ποτέ την κατασκευή προβλήματος στο μάθημα του στην τάξη, εν αντιθέσει με το 21,2% των εκπαιδευτικών που εργάζονται σε φροντιστήριο/ιδιαίτερα.

			Στην τρέχουσα σχολική χρονιά, εργάζομαι ως εκπαιδευτικός μαθηματικός σε		
			Σχολική μονάδα	Φροντιστήριο/ιδιαίτερα	Σχολική μονάδα και φροντιστήριο/ιδιαίτερα
Πόσο συχνά εντάσσεται η κατασκευή προβλήματος στο μάθημα σας στην τάξη;	Ποτέ	*f*	1	14	0
		%	2,0	21,2	0,0
	Σπάνια	*f*	24	33	2
		%	49,0	50,0	40,0
	Περιστασιακά	*f*	22	14	3
		%	44,9	21,2	60,0
	Συχνά	*f*	2	5	0
		%	4,1	7,6	0,0
Σύνολο		*f*	49	66	5
		%	100,0	100,0	100,0

Πίνακας 25 Συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη ανάλογα με το φορέα εργασίας

Στον Πίνακα 26 καταγράφεται η συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη ανάλογα με τις πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Σημειώνεται ότι σε αυτό το σημείο ως πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση λογίζονται η κτήση σχετικού Μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών ή η παρακολούθηση σχετικών επιμορφωτικών σεμιναρίων. Μόλις το 2% των εκπαιδευτικών της έρευνας οι οποίοι δήλωσαν ότι έχουν πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση, ανέφεραν ότι δεν εντάσσουν ποτέ την κατασκευή προβλήματος στο μάθημα τους στην τάξη. Από την άλλη πλευρά (των εκπαιδευτικών της έρευνας οι οποίοι δήλωσαν ότι δεν έχουν πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση) όμως το ποσοστό αυτό έφτασε στο 39,4%.

			Πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση	
			Ναι	Όχι
Πόσο συχνά εντάσσεται η κατασκευή προβλήματος στο μάθημα σας στην τάξη;	Ποτέ	*f*	2	13
		%	2,3	39,4
	Σπάνια	*f*	46	13
		%	52,9	39,4
	Περιστασιακά	*f*	35	4
		%	40,2	12,1
	Συχνά	*f*	4	3
		%	4,6	9,1
Σύνολο		*f*	87	33
		%	100,0	100,0

Πίνακας 26 Συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην τάξη ανάλογα με τις πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση

7. Συζήτηση

Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με τα αποτελέσματα της έρευνας μας, αναφερόμενοι σε όσα από αυτά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα προσπαθήσουμε όπου είναι εφικτό να τα συνδέσουμε με τα όσα σχετικά έχουν καταγραφεί κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι επ' ουδενί δεν προσπαθούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με αυτά ανάλογων ερευνών με τη δική μας, καθώς παράγοντες όπως η χώρα διεξαγωγής, η χρονολογία, το δείγμα κτλ δεν το επιτρέπουν.

Αναφορικά με τη θεματική «Σημασία της επίλυσης προβλήματος», γενικότερα φαίνεται να συγκλίνουν οι απόψεις των εκπαιδευτικών θεωρώντας τη σημαντική, τόσο για τους μαθητές όσο και για τα ίδια τα μαθηματικά. Ωστόσο παρά την αξία αυτής κατά τους ίδιους, μόλις το 8,3% αυτών θεωρεί ότι οι μαθητές πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι διασκεδαστική. Δεδομένου λοιπόν της σημασίας της επίλυσης προβλήματος, η παραπάνω σημείωση φαντάζει αρνητική και μάλλον θα πρέπει να μας προβληματίζει. Το μέγεθος της αρνητικότητας αυτής γίνεται μάλιστα ακόμη μεγαλύτερο, αν λάβουμε υπόψιν ότι το αντίστοιχο ποσοστό στον Pehkonen (1993) ήταν το 70%.

Σχετικά με τη «Διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος», αρνητικό αντίκτυπο προκαλεί το γεγονός ότι περίπου 1 στους 4 συμμετέχοντες της έρευνας μας δήλωσε ότι οι μαθητές μπορούν να φτιάξουν μόνοι τους προβλήματα και μετά να τα λύσουν, ενώ κατά τον Pehkonen (1993) περίπου 1 στους 4 έχει την αντίθετη άποψη. Και όμως η άποψη αυτή για ποικίλους λόγους δε μπορεί να θεωρηθεί παράλογη, απεναντίας ίσως μοιάζει να έρχεται ως φυσιολογική εξέλιξη των πραγμάτων. Για παράδειγμα, η ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή προβλήματος είναι συγκριτικά πολύ μικρότερη σε σχέση με αυτή της επίλυσης προβλήματος. Ένα θέμα ακόμη το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον, είναι η άποψη ότι η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνει ευρετικές στρατηγικές. Το αντίστοιχο ποσοστό συμφωνίας στον Pehkonen (1993) ήταν 46%, ενώ στη δική μας έρευνα έφτασε το 92,5%. Εύλογα λοιπόν προκύπτει το εξής ερώτημα: Δεδομένου του χρόνου που υπάρχει στη διάθεση του εκάστοτε εκπαιδευτικού, είναι δυνατή και η διδασκαλία ευρετικών στρατηγικών κατά τη διάρκεια των μαθημάτων του; Ένα ακόμη ζήτημα αυτής της θεματικής, είναι ότι κατά τον Pehkonen (1993) οι εκπαιδευτικοί θεωρούν σε ποσοστό 50% ότι στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει να τονίζεται η λογική, ενώ στην έρευνα μας το ποσοστό αυτό είναι σχεδόν διπλάσιο (96,7%). Κρίνεται όμως θετικό το γεγονός ότι το 22,5% των συμμετεχόντων θεώρησε ότι στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει να τονίζεται ο μαθηματικός φορμαλισμός. Και αυτό, καθώς έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι δίνεται ελευθερία κινήσεων στους μαθητές, υπό την έννοια ότι δεν δουλεύουν αυστηρά στα μαθηματικά όντας προσκολλημένοι στις φόρμες, στην τυπολατρία, κάτι το οποίο πολλές φορές τους προκαλεί άγχος, φοβίες και γενικότερα αποστροφή.

Μια σημαντική παρατήρηση της θεματικής «Προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος», είναι το γεγονός ότι θα πρέπει να υπάρχει αρκετός χρόνος για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος (94,2% το ποσοστό συμφωνίας). Βέβαια ο χρόνος που διατίθεται στους εκπαιδευτικούς για τα μαθήματα τους, ήδη θεωρείται πενιχρός από τους ίδιους. Ως επιπλέον προϋποθέσεις για μία επιτυχή διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος λογίζονται και οι αντιλήψεις που αναφέρονται στα αναγκαία κίνητρα των μαθητών, αλλά και οι μικρότερες ομάδες αυτών, κάτι το οποίο προφανώς σε ένα δημόσιο ελληνικό σχολείο θα πρέπει να θεωρείται ουτοπικό. Γενικότερα σε αυτή τη θεματική υπάρχει ταύτιση απόψεων μεταξύ της μελέτης του Pehkonen (1993) και των αποτελεσμάτων της έρευνας μας.

Προχωρώντας στη θεματική «Χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών μαθηματικών και διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος», σημειώνονται τα μεγάλα ποσοστά συμφωνίας (95%) σχετικά με την απαραίτητη εξοικείωση των εκπαιδευτικών με την επίλυση προβλήματος, τόσο σε επίπεδο θεωρίας όσο και σε επίπεδο πρακτικής εφαρμογής, ζητήματα για τα οποία συμφωνούν πλήρως ότι θα πρέπει να δοθεί σε αυτούς επαρκής εκπαίδευση. Ανάλογη συμφωνία υπάρχει και σχετικά με το γεγονός ότι θα πρέπει να είναι ανοιχτόμυαλοι, ότι θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να προκαλούν τη συμμετοχή των μαθητών τους, αλλά και το θάρρος που θα πρέπει οι ίδιοι να δείχνουν απέναντι στην επίλυση προβλήματος (καθώς πιστεύουμε ότι δεν είναι λίγοι εκείνοι οι οποίοι φοβούνται να ασχοληθούν με «άγνωστα» προβλήματα σε αυτούς στην τάξη). Η μόνη ουσιώδης διαφορά σε σχέση με την έρευνα του Pehkonen (1993), σημειώνεται στο ζήτημα «οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών με την ικανότητα να παρεκκλίνουν από τη σειρά που ορίζεται στα εγχειρίδια (textbooks), θα διδάξουν επιτυχώς την επίλυση προβλήματος», όπου στην έρευνα μας κατέχει ποσοστό 33,3%, έναντι του 70% στον Pehkonen (1993).

Διερευνώντας τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, ασχοληθήκαμε με τρεις θεματικές, όπου η πρώτη εξ αυτών ήταν η «Κατασκευή προβλήματος και μαθητές/τριες». Τα αποτελέσματα αυτής της θεματικής φαίνεται να αφήνουν γενικότερα μία θετική εικόνα. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η κατασκευή προβλήματος επιδρά θετικά στη συμπεριφορά των μαθητών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, λαμβάνοντας φυσικά υπόψιν τα αποτελέσματα της έρευνας μας, μερικά εκ των οποίων αναφέρουν ότι η κατασκευή προβλήματος ωθεί τους μαθητές να σκεφτούν, συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας κτλ. Δεδομένου ότι έχουμε αναφερθεί αρκετές φορές κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση στη θετική συσχέτιση μεταξύ επίλυσης και κατασκευής προβλήματος (Brown & Walter, 2005˙ Silver & Cai, 1996˙ Cai & Hwang, 2002˙ Θεοδούλου et al., 2000˙ Kiliç, 2013˙ Li et al., 2020), σημειώνεται σε αυτό το σημείο ότι και εδώ υπάρχει αυτή η αλληλεπίδραση, με το 88,3% των εκπαιδευτικών να δηλώνει ότι η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις ικανότητες των μαθητών σχετικά με την επίλυση προβλήματος. Ένας προβληματισμός όμως ο οποίος έρχεται στην επιφάνεια, αφορά το ζήτημα ότι το 94,2% των υποκειμένων της έρευνας μας θεωρεί ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατασκευή προβλήματος. Παρά λοιπόν τις θετικές επιπτώσεις της κατασκευής προβλήματος, αυτή ως διαδικασία φαντάζει δύσκολη από την πλευρά των παιδιών. Μάλιστα, το αν προκαλεί ευχαρίστηση σε αυτά, αν ενισχύει την αυτοπεποίθηση τους και αν τα βοηθά να εκφραστούν, είναι ερωτήματα τα οποία γέρνουν στην αβεβαιότητα, κάτι που σημαίνει ότι επιδέχονται περαιτέρω έρευνας.

Η «Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών» είναι μία θεματική η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, κάτι στο οποίο είχαμε αναφερθεί και σε προηγούμενο σημείο της παρούσας εργασίας. Σχεδόν 9 στους 10 εκπαιδευτικούς θεωρούν ότι οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος δεν είναι επαρκείς, δεν είναι αισθητοί και σαφείς, αλλά ούτε και αποδεκτοί για όλα τα επίπεδα των μαθητών. Υπάρχουν ζητήματα αυτής της θεματικής για τα οποία σχεδόν οι μισοί από τους εκπαιδευτικούς θεωρούν ότι δεν υπάρχουν οι σχετικές αναφορές στο πρόγραμμα μαθηματικών σπουδών, για παράδειγμα η άποψη ότι «ο χρόνος που επιτρέπεται για την κατασκευή προβλήματος με βάση το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, δεν είναι αρκετός», βρίσκει το 60% των εκπαιδευτικών να θεωρεί ότι όντως δεν υπάρχει σχετική αναφορά. Επίσης υπάρχουν ζητήματα στα οποία το ποσοστό αβεβαιότητας βρίσκεται περίπου στο 50%. Αναφορικά με τη συγκεκριμένη θεματική, δημιουργείται η αίσθηση ότι είτε δεν είναι γνωστό το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στους εκπαιδευτικούς είτε δεν είναι κατανοητό είτε όντως υπάρχουν ελλιπείς πληροφορίες σχετικά με την κατασκευή προβλήματος σε αυτό.

Ασχολούμενοι με τη θεματική «Κατασκευή προβλήματος και σχολικά βιβλία», η διαφορά των αποτελεσμάτων της έρευνας μας με αυτή της Kiliç (2013) είναι κάτι παραπάνω από αισθητή. Σχεδόν το σύνολο των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης θεωρεί ότι η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών είναι ανεπαρκής, δεν είναι ούτε αισθητή ούτε σαφής και μάλιστα για κανέναν από τους συμμετέχοντες της έρευνας μας δεν είναι αποδεκτή για όλα τα επίπεδα των μαθητών. Ουσιαστικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως δεν «υπάρχει» η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Δεδομένης λοιπόν της αξίας της κατασκευής προβλήματος τόσο με βάση όσα ήδη έχουν αναφερθεί κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση όσο και με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας μας, πως είναι δυνατόν να μη δίνεται η αντίστοιχη σημασία σε αυτή στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών;

Αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος, υπήρξε διάκριση αυτών σε 4 κατηγορίες. Η πρώτη εξ αυτών αφορούσε τη «Διαχείριση της Τάξης». Τα αποτελέσματα της έρευνας μας έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο είτε εργάζονται για την επίλυση προβλήματος είτε για την κατασκευή προβλήματος. Και στις δύο περιπτώσεις, η οργάνωση των μαθητών σε ομάδες και η μεμονωμένη εργασία αυτών αντιστοιχεί σε ποσοστά τις τάξεως του 30% και 10% αντίστοιχα.

Οι «Δασκαλο-κεντρικές» πρακτικές γενικότερα δε φαίνεται να υιοθετούνται σε μεγάλο βαθμό από τους εκπαιδευτικούς. Ωστόσο όμως υπάρχουν καταστάσεις οι οποίες βρίσκουν σύμφωνο ένα σχετικά μεγάλο μέρος του δείγματος μας. Για παράδειγμα, το 40,8% των εκπαιδευτικών δήλωσε ότι «Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση ενός προβλήματος, το λύνω στον πίνακα.» και το 31,7% αυτών ότι «Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.» Δικαιολογίες επί αυτών των «κακών» διδακτικών πρακτικών όπως σημειώνουν οι Felmer et al. (2015), θα μπορούσαν να υπάρξουν πολλές, με πρώτη εξ αυτών την έλλειψη χρόνου, αλλά και αυτή της μη εξοικείωσης με την κατασκευή προβλήματος τόσο από την πλευρά των μαθητών όσο και από αυτή των εκπαιδευτικών, παρόλο που κάτι τέτοιο μπορεί να μοιάζει σε πολλούς παράλογο, ίσως και ανεπίτρεπτο.

Όπως είδαμε στις ενότητες 6.4 και 6.5, οι μαθητο-κεντρικές πρακτικές διακρίνονται σε δύο υποκατηγορίες, σε αυτές που σχετίζονται με τη συμπεριφορά του δασκάλου και σε αυτές που σχετίζονται με τη συμπεριφορά των μαθητών. Αναφορικά με τις «Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά του δασκάλου)» πρακτικές, φαίνεται ότι συγκεντρώνουν την προσοχή των εκπαιδευτικών σε σχετικά μεγάλο βαθμό είτε ασχολούνται με την επίλυση προβλήματος είτε με την κατασκευή προβλήματος. Πχ το 84,2% των εκπαιδευτικών της έρευνας μας κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη τριγυρίζει ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών του και αν αντιληφθεί ότι κάποιος μαθητής είναι πολύ απογοητευμένος με ένα πρόβλημα, προσπαθεί να τον καθοδηγήσει μόνο με ερωτήσεις.

Σχετικά με τις «Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών)» πρακτικές που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος, το 91,7% των εκπαιδευτικών της έρευνας μας συζητούν με τους μαθητές τους κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αλλά και το 77,5% αυτών αναφέρουν ότι οι μαθητές εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να λύσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος. Όπως είδαμε μάλιστα σε προηγούμενο σημείο της εργασίας, το 98,3% των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι απαραίτητη συνθήκη για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος είναι οι ανοιχτές συζητήσεις στην τάξη. Επομένως σε αυτό το σημείο, αντιλήψεις και διδακτικές πρακτικές φαίνεται να συμβαδίζουν και αυτό σημειώνεται καθώς έχουμε δει περιπτώσεις κατά τις οποίες συμβαίνει το αντίθετο (Pehkonen, 1993). Όμως η μη-ενασχόληση των μαθητών με τα προβλήματα τους με το πέρας της επίλυσης αυτών (πχ διερεύνηση νέων προβλημάτων που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται), δε μπορεί να θεωρηθεί θετική. Όπως σημειώθηκε και στην παράγραφο 2.4.1 Μεταγνώση, σε αυτό το σημείο ερχόμαστε αντιμέτωποι με συμπεριφορές του τύπου «Διαβάστε, πάρτε μια απόφαση γρήγορα και επιδιώξτε αυτή την κατεύθυνση οπωσδήποτε (come hell and high water)» (Shoenfeld, 1992). Έτσι οι μαθητές μοιάζει να ασχολούνται με την επίλυση των προβλημάτων τους καθαρά και μόνο διεκπεραιωτικά, πόσο μάλλον όταν υπάρχει η αντίληψη ότι η επίλυση προβλήματος δεν είναι διασκεδαστική για αυτούς.

Στις «Μαθητο-κεντρικές (συμπεριφορά των μαθητών)» πρακτικές στο πλαίσιο της κατασκευής προβλήματος στην τάξη, μικρά ποσοστά συμφωνίας καταγράφηκαν στα ζητήματα που αφορούσαν τις ιδέες και ερωτήσεις που εκθέτουν και κάνουν οι μαθητές. Με ποσοστά συμφωνίας 15% και 21,7% αντίστοιχα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχει έλλειψη πρωτοτυπίας. Σημειώνεται ότι ανάλογα ποσοστά έχουν καταγραφεί και για την επίλυση προβλήματος στα ζητήματα αυτά (20,8% και 25% αντίστοιχα).

Τέλος, σχετικά με τη συχνότητα ένταξης της κατασκευής προβλήματος στο μάθημα των εκπαιδευτικών, στον Πίνακα 25 καταγράφεται ότι το 39,4% αυτών που δεν έχουν πιστοποιημένες γνώσεις στη μαθηματική εκπαίδευση, δεν χρησιμοποιεί ποτέ την κατασκευή προβλήματος, έναντι του μόλις 2,3% των εκπαιδευτικών που έχουν πιστοποιημένες γνώσεις. Η διαφορά αυτών είναι σχετικά μεγάλη και πιθανώς όντως να οφείλεται στο επίπεδο γνώσεων των ατόμων.

8. Συμπεράσματα

Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης της έρευνας μας, επιβεβαίωσαν σε σχετικά μεγάλο βαθμό την αξία της επίλυσης προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση. Σε σχετικά μικρότερο βαθμό όμως είναι εμφανής και η αξία της κατασκευής προβλήματος, παρόλο που ένα μέρος των εκπαιδευτικών είτε δεν κάνει χρήση αυτής είτε τη χρησιμοποιεί σπάνια. Ωστόσο υπάρχουν ζητήματα τα οποία χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης. Για παράδειγμα, η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους μαθητές να αξιολογήσουν τους εαυτούς τους; Ενισχύει την αυτοπεποίθηση αυτών; Κάνει τα μαθηματικά πιο ευχάριστα για αυτούς; Επίσης ζητήματα τα οποία θα πρέπει να μας προβληματίζουν, είναι το γεγονός ότι η επίλυση προβλήματος δεν θεωρείται διασκεδαστική από πλευράς μαθητών και ότι οι τελευταίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατασκευή προβλήματος, αδυνατώντας να φτιάξουν μόνοι τους προβλήματα και μετά να τα λύσουν. Σε κάθε περίπτωση όμως δεδομένης της αξίας της επίλυσης και κατασκευής προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εντάξουν στη διδασκαλία τους αντίστοιχες δραστηριότητες, φροντίζοντας μάλιστα να δημιουργήσουν ένα θετικό κλίμα στην τάξη με στόχο την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών τους. Παρόλο που ο μαθηματικός φορμαλισμός θα πρέπει να αποφεύγεται, απαραίτητο συστατικό της διδασκαλίας θα πρέπει να αποτελούν οι ευρετικές στρατηγικές, οι οποίες θα πρέπει να ενταχθούν στο μάθημα στην τάξη με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει χρονική επιβάρυνση. Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών θα πρέπει να είναι επικεντρωμένες στους μαθητές, προτρέποντας τους μαθητές να αφιερώσουν χρόνο για την οποιαδήποτε εργασία τους και να συζητούν μεταξύ τους. Κάθε στιγμή όμως ο εκάστοτε εκπαιδευτικός θα πρέπει να βρίσκεται δίπλα στους μαθητές του, συζητώντας μαζί τους και καθοδηγώντας τους μόνο με ερωτήσεις. Προϋπόθεση όμως όλων αυτών (όπως σημειώνεται από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς) είναι να υπάρχει το απαραίτητο υπόβαθρο γνώσεων από την πλευρά των εκπαιδευτικών, καθώς και το αντίστοιχο ενδιαφέρον.

Δεδομένου του δείγματος των 120 εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, εκ των οποίων 49 εργάζονται σε σχολικές μονάδες, 66 σε φροντιστήριο/ιδιαίτερα και 5 τόσο σε σχολική μονάδα όσο και σε φροντιστήριο/ιδιαίτερα, προτείνεται να διεξαχθούν μελλοντικές έρευνες αρχικά σε πολυπληθέστερο δείγμα, το οποίο όμως θα περιλαμβάνει τον ίδιο αριθμό εκπαιδευτικών που εργάζονται σε σχολική μονάδα και σε φροντιστήριο/ιδιαίτερα. Η παραπάνω πρόταση έρχεται μέσα από την πεποίθηση ότι οι αντιλήψεις αυτών θα ταυτίζονται, αλλά οι διδακτικές τους πρακτικές θα διαφοροποιούνται αισθητά, καθώς τις περισσότερες φορές (αν όχι πάντα) στη «σκιώδη» εκπαίδευση μοναδικός στόχος είναι η ανάπτυξη δεξιοτήτων. Σε μια σχετική κίνηση με αυτή που προτείνεται από μέρους μας, έχει προβεί ο Μυλωνάς (2020) στο πλαίσιο εκπόνησης της διπλωματικής του εργασίας *Μαθησιακές Δυσκολίες και Μαθηματικά: Αντιλήψεις και Διδακτικές Πρακτικές Εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*. Μάλιστα, αναφερόμενοι στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και λαμβάνοντας υπόψιν τον Πίνακα 23, παρατηρούμε σε αρκετές περιπτώσεις ότι ο τρόπος με τον οποίο εργάζονται αλλάζει με βάση το πλαίσιο στο οποίο βρίσκονται (επίλυση προβλήματος και κατασκευή προβλήματος). Για μια καλύτερη εικόνα αυτού του ζητήματος και έχοντας ως βάση το ήδη υπάρχον ερωτηματολόγιο, προτείνεται κατά αντιστοιχία με τους Felmer et al. (2015) η παρακολούθηση ενός μέρους των εκπαιδευτικών του δείγματος κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, αλλά και η διεξαγωγή ορισμένων συνεντεύξεων οι οποίες πιθανώς να βοηθήσουν στην κατανόηση αυτής της διαφοροποίησης.

Στη μελέτη αυτή επιχειρήσαμε την καταγραφή των αντιλήψεων και των διδακτικών πρακτικών των εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος. Κατά τη διάρκεια αυτής επιβεβαιώθηκαν υποθέσεις (αξία της επίλυσης προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση, σχέση επίλυσης και κατασκευής προβλήματος κτλ), προέκυψαν ενδιαφέροντα ζητήματα προς μελέτη (η άποψη των μαθητών για την επίλυση και κατασκευή προβλήματος και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, η θέση της κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών κτλ), εφαρμόστηκαν στην πράξη σε προσωπικό επίπεδο μοντέλα για την επίλυση προβλήματος και διδακτικές πρακτικές της βιβλιογραφίας, αλλά κυρίως προκλήθηκε το ενδιαφέρον για περαιτέρω ενασχόληση με το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, παρόλο που ίσως να βρίσκεται έξω από το επίκεντρο της Διδακτικής των Μαθηματικών δεδομένου ότι έχει δοθεί μεγάλη έμφαση σε αυτό τη δεκαετία του 80’. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, υπήρξαν αρκετοί περιορισμοί στη μελέτη μας, συνεπώς τα συμπεράσματα αυτής δε μπορεί να είναι γενικεύσιμα. Ελπίζουμε όμως να χρησιμεύσουν-λειτουργήσουν στον αναγνώστη αυτής ως μία βάση για περαιτέρω σχετικές έρευνες και φυσικά για τη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών από πλευράς του.

Βιβλιογραφικές Αναφορές:

Ελληνόγλωσσες

Θεοδούλου, Ρ., Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2000). Η ικανότητα κατασκευής και ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. 17ο *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας. Τα Μαθηματικά Κλειδί Ανάπτυξης (σσ. 350-361)*. Αθήνα.

Κλαουδάτος, Ν. (2011). *Σημειώσεις του μαθήματος δ7: 1. Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. 2. Εισαγωγή στη Θεωρία της Διδασκαλίας*. Μεταπτυχιακό πρόγραμμα μεθοδολογίας και διδακτικής των μαθηματικών. Τμήμα μαθηματικών.

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση Προβλήματος στα Μαθηματικά*. Ηράκλειο Κρήτης: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Μυλωνάς, Ι. (2020). *Μαθησιακές Δυσκολίες και Μαθηματικά: Αντιλήψεις και Διδακτικές Πρακτικές Εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης*, MSc thesis, Αθήνα: ΕΑΠ

Πούλος, Α. (2013). Κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων: Μία διαδικασία που ενδιαφέρει τη Διδακτική των Μαθηματικών. *5η Μαθηματική Εβδομάδα Της Ε.Μ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας. Μαθηματικές Διαδρομές Και Αναζητήσεις, 27-31 Μαρτίου 2013*, (σσ. 546–561). Θεσσαλονίκη.

Ξενόγλωσσες

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing* (3rd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 401–421.

Campione, J. C., Brown, A. L., & Connell, M. L. (1988). Metacognition: On the Importance of Understanding What You Are Doing. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp. 93–114). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Donaldson, S. E. (2011). *Teaching through problem solving: practices of four high school mathematics teachers* [Doctoral dissertation, Georgia University]. https://getd.libs.uga.edu/pdfs/donaldson_sarah_e_201105_phd

Ellis, R. (2012). *Language Teaching Research and Language Pedagogy*. Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell.

Felmer, P., Perdomo-díaz, J., Giaconi, V., & Espinoza, C. (2015). Problem solving teaching practices: Observer and teacher's view. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Flavell, J. H. (1976). Metacognition Aspects of Problem Solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The Nature of Intelligence* (pp. 231–236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive-Developmental Inquiry. *American Psychologist*, *34*(10), 906–911.

Gagne, R. M. (1970). *The Conditions of Learning* (2nd ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519–524.

Hošpesová, A., & Tichá, M. (2015). Problem posing in primary school teacher training. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 433–447). New York: Springer.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional Design Models for Well-Structured and Ill-Structured Problem-Solving Learning Outcomes. *Educational Technology Research and Development*, *45*(1), 65–94.

Kiliç, Ç. (2013). Turkish primary school teachers' opinions about problem posing applications: Students, the mathematics curriculum and mathematics textbooks. *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(5).

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 1–15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Klein, S., & Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel? *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 349–365.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 149–161.

Lambdin, D. V. (2003). Benefits of Teaching through Problem Solving. In F. K. Lester (Ed.), *Teaching Mathematics through Problem Solving Prekindergarten–Grade 6* (pp. 3–13). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Li, X., Song, N., Hwang, S., & Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 325–347.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Lambdin Kroll, D. (1989). Self-Confidence, Interest, Beliefs, and Metacognition: Key Influences on Problem-Solving Behavior. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving A New Perspective* (pp. 76–88). New York: Springer-Verlag.

Lester, F. K. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660–675.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2004). Realization of Techniques in Problem Solving: The Construction of Bijections for Enumeration Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2), 235–253.

Mayer, R. E. (1985). Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem*

Solving: Multiple Research Perspectives (pp. 123–138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Nelson, T. O., & Narens, L. (1990). Metamemory: A Theoretical Framework and New Findings. *Psychology of Learning and Motivation*, *26*, 125–173.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Ohio Department of Education. (1980). *Becoming a Better Problem Solver 1 & 2*. Columbus, OH: Ohio Department of Education.

Pehkonen, E. (1993). What are Finnish Teacher Educators' Conceptions about the Teaching of Problem Solving in Mathematics? *European Journal of Teacher Education*, *16*(3), 237–256.

Polya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). New York: Doubleday Anchor.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (Combined). New York: John Wiley & Sons.

Rogers, C., & Freiberg, J. (1994). *Freedom to Learn* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem Solving in the Mathematics Curriculum: A Report, Recommendations, and an Annotated Bibliography*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). Polya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, *60*(5), 283–291.

Schoenfeld, A. H. (1987b). Confessions of an Accidental Theorist. *For the Learning of Mathematics*, *7*(1), 30–38.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, *23*(2), 145–166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (2012). How we think: a theory of human decision-making, with a focus on teaching. In S. J. Cho (Ed.), *12th International Congress on Mathematical Education, 8-15 July 2012* (pp. 229–243). Seoul: Springer, Cham.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In P. R. Trafton & A. P. Schulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 31–42). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E. A. (1982). Knowledge organization and mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research* (pp. 15–25). Philadelphia, PA: Franklin.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521–539.

Simon, H. A. (1973). The Structure of Ill-Structured Problems. *Artificial Intelligence*, *4*(3–4), 181–201.

Sivunen, M., & Pehkonen, E. (2009). Finnish Elementary Teachers’ Conceptions on Problem Solving in Mathematics Teaching. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education* (pp. 75–86). Rotterdam: Sense.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A Framework for Research into Students’ Problem Posing in School Mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp. 518–525). Melbourne: The Mathematics Education Research Group of Australasia.

Thompson, A. (1992). Teachers’ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127–146). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problem Solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics* (pp. 57–78). New York: MacMillan.

Xenofontos, C., & Andrews, P. (2012). Prospective teachers’ beliefs about problem-solving: Cypriot and English cultural constructions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(1), 69–85.

Παράρτημα: Το ερωτηματολόγιο της έρευνας

Αντιλήψεις και διδακτικές πρακτικές εκπαιδευτικών Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την επίλυση και κατασκευή προβλήματος

Το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο διερευνά τις αντιλήψεις και τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, σε σχέση με: α) την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (δηλαδή, την επίλυση ενός δοθέντος, "έτοιμου" προβλήματος) και β) την κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, τη δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος, είτε από εκπαιδευτικούς είτε από μαθητές/τριες για το μάθημα στην τάξη).

Η έρευνα διεξάγεται στο πλαίσιο εκπόνησης διπλωματικής εργασίας για την απόκτηση μεταπτυχιακού τίτλου στα Μαθηματικά, της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοιχτού Πανεπιστημίου, υπό την επίβλεψη του Ανδρέα Μούτσιου-Ρέντζου (Επίκουρος Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιο Αθηνών).

Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου απαιτεί περίπου 20 λεπτά από το χρόνο σας.

Σας επισημαίνω ότι το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο και ότι δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις.

Ευχαριστώ για τη στήριξη σας στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Με εκτίμηση,

Χρήστος Ζιάκας

Μαθηματικός

Γενικές πληροφορίες

Φύλο

- Άνδρας
- Γυναίκα

Ηλικία (σε έτη)

____

Έτη που εργάζεστε στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση σε σχολικές μονάδες (δημόσιο/ιδιωτικό)

____

Έτη που εργάζεστε στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση σε άλλες δομές (π.χ. φροντιστήρια κτλ)

____

Στην τρέχουσα σχολική χρονιά, εργάζομαι ως εκπαιδευτικός μαθηματικός σε (επιλέξτε όλα όσα είναι σχετικά):

- [ ] Γυμνάσιο (δημόσιο/ιδιωτικό)
- [ ] Λύκειο (δημόσιο/ιδιωτικό)
- [ ] Φροντιστήριο/ιδιαίτερα

Τμήμα από το οποίο έχετε αποφοιτήσει

- Μαθηματικών
- Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
- Άλλο

Πιστοποιημένες γνώσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση (επιλέξτε όλα όσα είναι σχετικά)

- [ ] Μεταπτυχιακό
- [ ] Διδακτορικό
- [ ] Επιμορφωτικά σεμινάρια
- [ ] Όχι
- [ ] Other: ____________________

Μέρος 1ο

Αντιλήψεις σχετικά με την επίλυση προβλήματος

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει πόσο καλά σας περιγράφει

Σημασία της επίλυσης προβλήματος.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα***
Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη.	1 2 3 4 5
Η εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, είναι επίλυση προβλήματος.	1 2 3 4 5
Οι μαθητές/τριες πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι διασκεδαστική.	1 2 3 4 5
Η επίλυση προβλήματος αναπτύσσει τη δημιουργικότητα.	1 2 3 4 5
Νέα πράγματα μαθαίνονται καλύτερα μέσω της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Η επίλυση προβλήματος δείχνει τον περιορισμό των αλγορίθμων.	1 2 3 4 5
Η επίλυση προβλήματος τονίζει τη μεθοδική φύση των μαθηματικών.	1 2 3 4 5
Διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα***
Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται εστιάζοντας σε προβλήματα στη διδασκαλία των μαθηματικών .	1 2 3 4 5
Η επίλυση προβλήματος μπορεί να μαθευτεί, μόνο λύνοντας προβλήματα.	1 2 3 4 5
Η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται δημιουργικά, ευέλικτα και με επιδοκιμασία.	1 2 3 4 5
Οι ανοιχτές συζητήσεις στην τάξη, είναι απαραίτητη συνθήκη για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνει ευρετικές στρατηγικές.	1 2 3 4 5
Οι μαθητές/τριες μπορούν να φτιάξουν μόνοι/ες τους προβλήματα και μετά να τα λύσουν.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος, θα πρέπει να αντιμετωπίζονται από τους μαθητές/τριες οικεία προβλήματα από το περιβάλλον τους.	1 2 3 4 5
Στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να τονίζεται η λογική.	1 2 3 4 5
Στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να τονίζεται ο μαθηματικός φορμαλισμός.	1 2 3 4 5

Προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα***
Θα πρέπει να υπάρχουν αρκετά έργα (tasks) για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Το σωστό πνεύμα για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, θα πρέπει να δημιουργείται στην τάξη.	1 2 3 4 5
Οι μαθητές/τριες θα πρέπει να έχουν ένα ορισμένο επίπεδο κινήτρων, έτσι ώστε η επίλυση προβλήματος να μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς.	1 2 3 4 5
Πρέπει να υπάρχει αρκετός χρόνος για τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Η επίλυση προβλήματος μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς, μόνο αφότου οι μαθητές/τριες έχουν τις απαραίτητες μηχανικές δεξιότητες.	1 2 3 4 5
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος απαιτεί μικρότερες ομάδες μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών μαθηματικών και διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα***
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τη θεωρία της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, θα πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με την επίλυση προβλήματος σε επίπεδο πρακτικής εφαρμογής.	1 2 3 4 5
Για να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών να διδάξουν την επίλυση προβλήματος, πρέπει να έχουν το θάρρος να αντιμετωπίσουν καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων.	1 2 3 4 5
Για να διδαχθεί επιτυχώς η επίλυση προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα πρέπει να είναι ενθουσιώδης για τη διδασκαλία αυτής.	1 2 3 4 5
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών με την ικανότητα να παρεκκλίνουν από τη σειρά που ορίζεται στα εγχειρίδια (textbooks), θα διδάξουν επιτυχώς την επίλυση προβλήματος.	1 2 3 4 5
Η διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος, απαιτεί οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών να είναι ανοιχτόμυαλοι.	1 2 3 4 5
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών πρέπει να είναι αρκετά υπομονετικοί, έτσι ώστε να μη δίνουν υπερβολική βοήθεια στους/στις μαθητές/τριες σχετικά με την επίλυση των προβλημάτων τους.	1 2 3 4 5
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, πρέπει να έχουν αρκετό χρόνο για να προετοιμάσουν τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών, πρέπει να έχουν την ικανότητα να κάνουν τους μαθητές/τριες να συμμετέχουν στη διδασκαλία.	1 2 3 4 5
Πρέπει να δοθεί επαρκής εκπαίδευση στους εκπαιδευτικούς μαθηματικών για τη διδασκαλία επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5
Για να είναι σε θέση να διδάξουν την επίλυση προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα πρέπει να έχουν προσωπική εμπειρία επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων.	1 2 3 4 5
Οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών που είναι πρόθυμοι να δοκιμάσουν κάτι νέο, μπορεί να το πετύχουν στη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος.	1 2 3 4 5

Για να διδάξουν με επιτυχία την επίλυση προβλήματος, οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών πρέπει να πιστεύουν ότι η επίλυση προβλήματος είναι σημαντική.	1 2 3 4 5

Μέρος 2ο

Αντιλήψεις σχετικά με την κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, τη δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος για το μάθημα στην τάξη)

Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει πόσο καλά σας περιγράφει

Κατασκευή προβλήματος και μαθητές/τριες.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα***
Η κατασκευή προβλήματος δείχνει τα επίπεδα γνώσης των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος ωθεί τους/τις μαθητές/τριες να σκεφτούν.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις ικανότητες των μαθητών/τριών σχετικά με την επίλυση προβλήματος.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να αξιολογήσουν τους εαυτούς τους.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν τα καθημερινά προβλήματα που αντιμετωπίζουν.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις δεξιότητες συλλογισμού και κρίσης των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά στην κατάδειξη των μαθηματικών αντιλήψεων των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Οι μαθητές/τριες αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατασκευή προβλήματος.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος κάνει τα μαθηματικά πιο ευχάριστα για τους/τις μαθητές/τριες.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος αναπτύσσει τις ικανότητες σύνδεσης (connection abilities) των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να εκφραστούν.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος ενθαρρύνει τους/τις μαθητές/τριες να σκέφτονται κριτικά.	1 2 3 4 5

Κατασκευή προβλήματος και πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα 6:Κατά τη γνώμη μου, στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών δεν υπάρχει κάποια σχετική αναφορά***
Οι ενδεικτικές δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, δεν προκαλούν τον στοχασμό.	1 2 3 4 5 6
Οι εξηγήσεις που δίνονται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, σχετικά με τις επιστημονικές μελέτες για την κατασκευή προβλήματος, δεν είναι κατανοητές.	1 2 3 4 5 6
Ο χρόνος που επιτρέπεται για την κατασκευή προβλήματος με βάση το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, δεν είναι αρκετός.	1 2 3 4 5 6
Υπάρχουν ανεπαρκείς πληροφορίες στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών θα αξιολογήσουν τα προβλήματα που κατασκευάζονται από τους/τις μαθητές/τριες.	1 2 3 4 5 6
Κατά την προετοιμασία της κατασκευής προβλήματος, περιβαλλοντικοί και τοπικοί παράγοντες (environmental and local factors) δε λαμβάνονται υπόψη στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	1 2 3 4 5 6
Οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, είναι επαρκείς.	1 2 3 4 5 6
Δεν υπάρχουν αρκετές εξηγήσεις σχετικά με τις στρατηγικές, τις μεθόδους και τις τεχνικές κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	1 2 3 4 5 6
Οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, είναι αισθητοί και σαφείς.	1 2 3 4 5 6
Οι ενδεικτικές δραστηριότητες σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, δεν είναι αρκετές στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών.	1 2 3 4 5 6
Οι στόχοι της κατασκευής προβλήματος, είναι αποδεκτοί (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριων.	1 2 3 4 5 6
Οι ενδεικτικές δραστηριότητες σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, είναι αποδεκτές (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριων.	1 2 3 4 5 6
Οι εξηγήσεις που δίδονται για την κατασκευή προβλήματος, δε βασίζονται σε συγκεκριμένα δεδομένα.	1 2 3 4 5 6

Κατασκευή προβλήματος και σχολικά βιβλία.	***1:Διαφωνώ απόλυτα 2:Διαφωνώ 3:Δεν είμαι βέβαιος/η 4:Συμφωνώ 5:Συμφωνώ απόλυτα***
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι επαρκής.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αισθητή και σαφής.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, είναι αποδεκτή (acceptable) για όλα τα επίπεδα των μαθητών/τριών.	1 2 3 4 5
Η κατασκευή προβλήματος στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, βασίζεται σε συγκεκριμένα γεγονότα.	1 2 3 4 5

Μέρος 3ο

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος

Για κάθε μία από τις παρακάτω διδακτικές πρακτικές σχετικά με την επίλυση προβλήματος, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει τη συχνότητα με την οποία τη χρησιμοποιείται

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την επίλυση προβλήματος.	***1:Σχεδόν ποτέ 2:Σε λίγες περιπτώσεις 3:Συνήθως 4:Στις περισσότερες περιπτώσεις 5:Σχεδόν πάντα***
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να βρουν τη λύση ενός προβλήματος, το λύνω στον πίνακα.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου λύνουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να λύσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να λύσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το λύσει.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην επίλυση των προβλημάτων τους.	1 2 3 4 5

Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	1 2 3 4 5
Κατά την επίλυση προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	1 2 3 4 5

Πόσο συχνά εντάσσεται η κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, η δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος) στο μάθημα σας στην τάξη;

- Ποτέ
- Σπάνια
- Περιστασιακά
- Συχνά

Μέρος 4ο

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος (δηλαδή, τη δημιουργία και διατύπωση ενός μαθηματικού προβλήματος για το μάθημα στην τάξη)

Για κάθε μία από τις παρακάτω διδακτικές πρακτικές σχετικά με την κατασκευή προβλήματος, επιλέξτε την απάντηση που δείχνει τη συχνότητα με την οποία τη χρησιμοποιείται

Διδακτικές πρακτικές σχετικές με την κατασκευή προβλήματος.	***1:Σχεδόν ποτέ 2:Σε λίγες περιπτώσεις 3:Συνήθως 4:Στις περισσότερες περιπτώσεις 5:Σχεδόν πάντα***
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν σε ομάδες.	1 2 3 4 5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, αν οι μαθητές/τριες μου αφιερώσουν πολύ χρόνο για να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα, το κατασκευάζω στον πίνακα.	1 2 3 4 5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κατασκευάζουν προβλήματα ανεξάρτητα ο ένας/μία από τον άλλο/η.	1 2 3 4 5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εκφράζουν τις διαφορετικές στρατηγικές τους για να κατασκευάσουν τα προβλήματα τους, ακόμη και αν έχουν κάνει λάθος.	1 2 3 4 5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, τριγυρίζω ανάμεσα στα θρανία παρακολουθώντας την εργασία των μαθητών/τριών μου.	1 2 3 4 5

Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οργανώνω τους/τις μαθητές/τριες μου έτσι ώστε να δουλεύουν μεμονωμένα.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, συνήθως εκπλήσσομαι με τις ιδέες των μαθητών/τριών μου.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου μπορούν να συζητούν μεταξύ τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής μη-τετριμμένων προβλημάτων (non-routine problems).	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, φροντίζω να συζητώ με τους/τις μαθητές/τριες μου.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου εξαρτώνται πάρα πολύ από τη βοήθειά μου για να προχωρήσουν με τα προβλήματα τους.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, προσπαθώ να τον/την καθοδηγήσω μόνο με ερωτήσεις.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, προτρέπω τους/τις μαθητές/τριες να αφιερώσουν χρόνο για να κατασκευάσουν μη-τετριμμένα προβλήματα (non-routine problems).	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου δημιουργούν διαφορετικές στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου κάνουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, εάν ένας/μία μαθητής/τρια είναι πολύ απογοητευμένος/η με ένα πρόβλημα, του/της δείχνω πώς να το κατασκευάσει.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου συζητούν τα λάθη τους.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου προχωρούν πολύ αργά στην κατασκευή των προβλημάτων τους.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, κάνω ερωτήσεις όλη την ώρα.	1	2	3	4	5
Κατά την κατασκευή προβλήματος στην τάξη, οι μαθητές/τριες μου διερευνούν νέα προβλήματα που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των προβλημάτων στα οποία εργάζονται.	1	2	3	4	5

Ευχαριστώ πολύ για το χρόνο και τη συμμετοχή σας.