

# ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ



Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών  
Σπουδές Στα Μαθηματικά

Η γραμμική περιοδική συμπεριφορά σε  
συνήθειες και μερικές διαφορικές εξισώσεις με  
εφαρμογές από τη μαθηματική βιολογία ως την  
οικονομική δυναμική

Μηναδάκη Παρασκευή

Επιβλέπων: Καραχάλιος Νικόλαος

# Περιεχόμενα

<b>1 Οριακοί Κύκλοι</b>	<b>3</b>
1.1 Εισαγωγή . . . . .	3
1.2 Αποκλεισμός κλειστών τροχιών . . . . .	5
1.2.1 Συστήματα με Ανάδελτα . . . . .	6
1.2.2 Συναρτήσεις Liapunov . . . . .	7
1.2.3 Κριτήριο Dulac . . . . .	8
1.3 Θεώρημα Poincaré - Bendixson . . . . .	10
1.4 Συστήματα Liénard . . . . .	11
1.5 Καμπύλες μηδενικής κλίσης . . . . .	12
1.6 Ταλαντώσεις χαλάρωσης . . . . .	13
1.7 Ασθενείς μη γραμμικοί ταλαντωτές . . . . .	17
<b>2 Διακλαδώσεις</b>	<b>22</b>
2.1 Υπερκρίσιμες Διακλαδώσεις Hopf . . . . .	23
2.2 Υποκρίσιμες Διακλαδώσεις Hopf . . . . .	25
2.3 Υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf . . . . .	26
2.4 Αριθμητική Μελέτη Διακλάδωσης Hopf και υλοποίηση στον υπολογιστή . . . . .	26
<b>3 Αριθμητικές Μέθοδοι και Υλοποίηση Μεθόδων</b>	<b>29</b>
3.1 Μελέτη του συστήματος της γλυκόλυσης . . . . .	29
3.2 Αντίδραση του διοξειδίου του χλωρίου - Ιωδίου και μηλονικού οξέος . . . . .	33
3.3 Διακλάδωση Hopf στην αντίδραση του διοξειδίου του χλωρίου - Ιωδίου και μηλονικού οξέος . . . . .	36
3.4 Διακλάδωση Hopf σε ένα μοντέλο διαφήμισης . . . . .	37
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>43</b>
<b>Α' Πρόγραμμα Mathematica</b>	<b>44</b>

# Κεφάλαιο 1

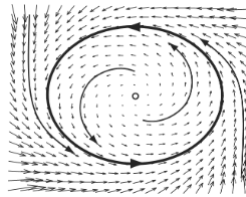
## Οριακοί Κύκλοι

### 1.1 Εισαγωγή

**Ορισμός.** Ένας οριακός κύκλος είναι μια κλειστή απομονωμένη τροχιά. Απομονωμένη τροχιά σημαίνει ότι κάθε γειτονική τροχιά δεν μπορεί να είναι κλειστή, θα έχει σπειροειδές σχήμα που θα οδηγεί προς ή μακριά από τον οριακό κύκλο.

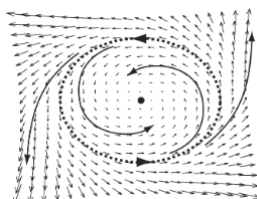
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν οι κοντινές τροχιές έλκονται από τον οριακό κύκλο τότε θα λέμε ότι είναι **ευσταθής**.  
π.χ



Σχήμα 1.1: Ευσταθής οριακός κύκλος

- Αν οι κοντινές τροχιές απωθούνται από τον οριακό κύκλο τότε θα λέμε ότι είναι **ασταθής**.
- Αν οι κοντινές τροχιές έλκονται από την μια και απωθούνται από την άλλη τότε λέμε ότι έχουμε ημειευσταθή οριακό κύκλο.  
π.χ



Σχήμα 1.2: Ημειυσταθής οριακός κύκλος

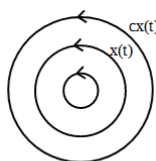
Επιστημονικά οι ευσταθείς οριακοί κύκλοι είναι πολύ σημαντικοί και αυτό διότι μπορούν να μοντελοποιήσουν συστήματα που μπορεί να παρουσιάζουν αυτο-συντηρούμενη ταλάντωση. Πιο συγκεκριμένα, αυτά τα συστήματα ταλαντεύονται ακόμη και με την απουσία εξωτερικής περιοδικής δύναμης. Υπάρχουν αμέτρητα παραδείγματα που μπορούν να δοθούν. Μερικά από αυτά είναι: ο χτύπος της καρδιάς, η περιοδική ενεργοποίηση ενός νευρώνα, καθώς και οι ημερήσιοι ρυθμοί στη θερμοκρασία σώματος και την έκκριση ορμονών.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει μια τυπική ταλάντωση κάποιας προτεινόμενης περιόδου, μορφής ταλάντωσης και πλάτους. Εάν το σύστημα είναι ελαφρώς διαταραγμένο τότε επιστρέφει στον τυπικό κύκλο.

Οι οριακοί κύκλοι είναι εγγενώς μη γραμμικά φαινόμενα και δεν μπορούν να εμφανίζονται σε γραμμικά συστήματα. Φυσικά ένα γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = Ax$$

μπορεί να έχει κλειστές τροχιές αλλά δεν μπορεί να απομονωθεί. Εάν το  $x(t)$  είναι μια περιοδική λύση τότε το ίδιο θα ισχύει και για την  $cx(t)$  για κάθε σταθερά  $c \neq 0$ . Επομένως η  $x(t)$  περιβάλλεται από μια μονοπαραμετρική οικογένεια κλειστών τροχιών.



Συνεπώς το πλάτος μιας γραμμικής ταλάντωσης καθορίζεται εξ' ολοκλήρου από τις αρχικές συνθήκες και οποιαδήποτε ελαφρά διαταραχή σε αυτό θα το επηρεάσει για πάντα. Αντίθετα οι ταλαντώσεις των οριακών κύκλων καθορίζονται από τη δομή του ίδιου το συστήματος.

## Ο ταλαντωτής van der Pol

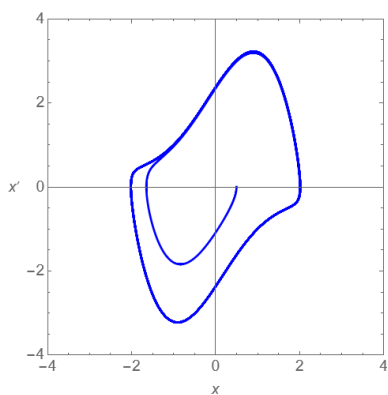
Ένα παράδειγμα που έπαιξε κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη της μη γραμμικής δυναμικής είναι αυτό που δίνεται από την εξίσωση του **van der Pol**.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

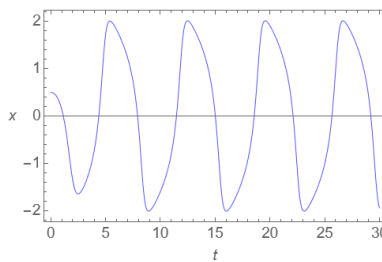
όπου  $\mu \geq 0$  είναι μια παράμετρος. Ιστορικά, αυτή η εξίσωση προέκυψε από τα μη γραμμικά ηλεκτρικά που χρησιμοποιήθηκαν στα πρώτα ραδιόφωνα. Η εξίσωση μοιάζει με ένα απλό αρμονικό ταλαντωτή αλλά με ένα μη γραμμικό όρο απόσβεσης τον  $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$ . Αυτός ο όρος λειτουργεί σαν συνηθισμένη θετική απόσβεση για  $|x| > 1$ , αλλά και σαν αρνητική όταν  $|x| < 1$ . Με άλλα λόγια, προκαλεί την μείωση των μεγάλου πλάτους ταλαντώσεων, αλλά τις επαναφέρει αν τείνουν να γίνουν πολύ μικρές.

Το σύστημα τελικά εγκαθίσταται σε μια αυτοσυντηρούμενη ταλάντωση όπου η ενέργεια που διαχέεται σε ένα κύκλο εξισορροπεί την ενέργεια που αντλείται. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση van der Pol έχει ένα μοναδικό, ευσταθή κύκλο για κάθε  $\mu > 0$ .

Παρακάτω δίνουμε μια συγκεκριμένη απεικόνιση αφενός του επιπέδου φάσης της εξίσωσης και αφετέρου της γραφικής παράστασης της λύσης της σε σχέση με τον χρόνο για  $\mu = 1.5$ .



(α') Επίπεδο φάσης για  $\mu = 1.5$



(β') Γραφική παράσταση της λύσης σε σχέση με τον χρόνο για  $\mu = 1.5$

Σχήμα 1.3

## 1.2 Αποκλεισμός κλειστών τροχιών

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια υποψία, βάση για παράδειγμα αριθμητικών στοιχείων ότι ένα συγκεκριμένο σύστημα δεν έχει περιοδικές λύσεις. Για να το αποδείξουμε αυτό θα παρουσιάσουμε τρεις τρόπους για να αποκλείσουμε κλειστές τροχιές.

### 1.2.1 Συστήματα με Ανάδελτα

Υποθέτουμε ότι ένα σύστημα μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$\dot{x} = -\nabla V$$

για κάποια συνεχώς παραγωγίσιμη, πραγματική, βαθμωτή συνάρτηση  $V(x)$ . Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται **σύστημα με ανάδελτα με δυναμική συνάρτηση  $V$** .

**Θεώρημα 1.2.1:** Οι κλειστές τροχιές είναι αδύνατες σε συστήματα με ανάδελτα.

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κλειστή τροχιά. Η αντίφαση έρχεται όταν αλλάζουμε το  $V$  έπειτα από ένα κύκλο. Πιο συγκεκριμένα, από την μια έχουμε ότι

$$\Delta V = 0$$

αφού είναι πραγματική συνάρτηση και από την άλλη μεριά:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \\ &= \int_0^T \nabla V \cdot \dot{x} dt \\ &= - \int_0^T \|\dot{x}\|^2 dt \\ &< 0\end{aligned}$$

(εκτός από την περίπτωση που έχουμε  $\dot{x} \equiv 0$ , όπου εκεί μιλάμε για σταθερό σημείο και όχι για κλειστή τροχιά).

Οπότε οι κλειστές τροχιές δεν μπορούν να υπάρχουν σε συστήματα με ανάδελτα.

Το πρόβλημα με αυτό το θεώρημα είναι ότι τα περισσότερα δισδιάστατα συστήματα δεν μπορούν να αναχθούν σε συστήματα με ανάδελτα.

Μια απλή εφαρμογή είναι να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές στο σύστημα

$$\dot{x} = \sin y$$

$$\dot{y} = x \cos y$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα με ανάδελτα με δυναμική συνάρτηση την:

$$V(x,y) = -x \cos y$$

$$\text{όπου } \dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ και } \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Άρα από θεώρημα 1.2.1 δεν υπάρχει καμία κλειστή τροχιά.

### 1.2.2 Συναρτήσεις Liapunov

Ακόμη και για συστήματα που δεν έχουν καμία σχέση με την μηχανική, είναι κάποιες φορές δυνατό να κατασκευαστεί μια ενεργειακή συνάρτηση που να μειώνεται κατά μήκος των τροχιών. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση Liapunov. Εάν υπάρχει συνάρτηση Liapunov, τότε οι κλειστές τροχιές απαγορεύονται.

Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  και ένα σταθερό σημείο  $x^*$ . Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση Liapunov δηλαδή μια συνεχώς παραγωγίσιμη, πραγματική συνάρτηση  $V(x)$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.  $V(x) > 0$  για κάθε  $x \neq x^*$  και  $V(x^*) = 0$  (δηλαδή είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση)
2.  $\dot{V} < 0$  για κάθε  $x \neq x^*$  (όλες οι τροχιές τείνουν προς το  $x^*$ )

τότε το  $x^*$  είναι ασυμπτωματικά ευσταθής για κάθε συνθήκη  $x \rightarrow x^*$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Γενικά θα ισχύει ότι το σύστημα δεν έχει κλειστές τροχιές.

Οι λύσεις δεν μπορούν να σταματήσουν κάπου επειδή εάν το έκαναν η  $V$  θα σταματούσε να αλλάζει αλλά από την υπόθεση έχουμε ότι  $\dot{V} < 0$  παντού εκτός από το  $x^*$ .

Δυστυχώς, δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος να κατασκευάσουμε συναρτήσεις Liapunov. Συνήθως απαιτείται έμπνευση, αν και μερικές φορές μπορούμε να εργαστούμε προς τα πίσω.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο των συναρτήσεων Liapunov, στο σύστημα:

$$\dot{x} = -x + 4y$$

$$\dot{y} = -x - y^3$$

για να δούμε ότι δεν έχει καμία κλειστή τροχιά.

Υποθέτουμε ότι  $V(x) = x^2 + ay^2$ , όπου  $a$  είναι μια παράμετρος που θα επιλέξουμε αργότερα. Τότε

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} \\ &= 2x(-x + 4y) + 2ay(-x - y^3) \\ &= -2x^2 + (8 - 2a)xy - 2ay^4 \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τώρα  $a = 4$  και έτσι ο όρος  $xy$  εξαφανίζεται, οπότε έχουμε:

$$\dot{V} = -2x^2 - 8y^4$$

Για την οποία ισχύει  $V > 0$  και  $\dot{V} < 0$  για κάθε  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Επομένως η  $V = x^2 + 4y^2$  είναι μια συνάρτηση Liapunov και έτσι δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές. Στην πραγματικότητα όλες οι τροχιές τείνουν στην αρχή των αξόνων καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### 1.2.3 Κριτήριο Dulac

Η τρίτη μέθοδος για τον αποκλεισμό των κλειστών τροχιών βασίζεται στο θεώρημα του Green και είναι γνωστή ως κριτήριο του Dulac.

**Κριτήριο Dulac:** Έστω  $\dot{x} = f(x)$  ένα συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ένα απλά συνεκτικό υποσύνολο  $R$  του επιπέδου. Εάν υπάρχει μια πραγματική συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g(x)$  τέτοια ώστε το  $\nabla \cdot (g\dot{x})$  να διατηρεί πρόσημο σε όλο το  $R$ , τότε δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές που να βρίσκονται εξ' ολοκλήρου στο  $R$ .

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κλειστή τροχιά  $C$  που βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στην περιοχή  $R$ . Ονομάζουμε  $A$  την περιοχή μέσα στην  $C$  ( $;$ ). Από το θεώρημα του Green προκύπτει ότι:

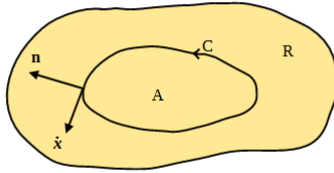
$$\iint_A \nabla \cdot (g\dot{x}) dA = \oint_C g\dot{x} \cdot \mathbf{n} dl$$

όπου  $\mathbf{n}$  είναι η εξωτερική νόρμα και  $dl$  είναι μέρος του τόξου κατά μήκος της  $C$ . Παρατηρώντας το διπλό ολοκλήρωμα αριστερά, πρέπει να είναι μη μηδενικό αφού το  $\nabla \cdot (g\dot{x})$  διατηρεί πρόσημο στο  $R$ .

Από την άλλη μεριά, το ολοκλήρωμα στα δεξιά ισούται με μηδέν αφού  $\dot{x} \cdot \mathbf{n} = 0$  παντού από την υπόθεση ότι  $C$  είναι τροχιά (το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι κάθετο στο  $\mathbf{n}$ ). Οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση.

Επομένως δεν μπορεί να υπάρξει τέτοια  $C$ .





Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση της πιθανής  $C$

Το κριτήριο του Dulac έχει το ίδιο μειονέκτημα με την μέθοδο Liapunov, δεν υπάρχει συγκεκριμένη μέθοδος για την εύρεση της  $g(x)$ . Περιστασιακά, κάποιες συναρτήσεις που λειτουργούν είναι οι  $g = 1$ ,  $\frac{1}{x^a y^b}$ ,  $e^{ax}$  και  $e^{ay}$ .

Ως εφαρμογή του θα δείξουμε ότι το σύστημα

$$\dot{x} = x(2 - x - y)$$

$$\dot{y} = y(4y - x^2 - 3)$$

δεν έχει καμία κλειστή τροχιά για  $x, y > 0$ .

Επιλέγουμε  $g = \frac{1}{xy}$  και έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial}{\partial x}(g\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(g\dot{y}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2 - x - y}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4x - x^2 - 3}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{y} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Αφού η περιοχή είναι απλά συνεκτική και οι  $g$  και  $\mathbf{f}$  ικανοποιούν τις απαιτούμενες συνθήκες ομαλότητας, το κριτήριο του Dulac υπονοεί ότι δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές σε αυτή την περιοχή.

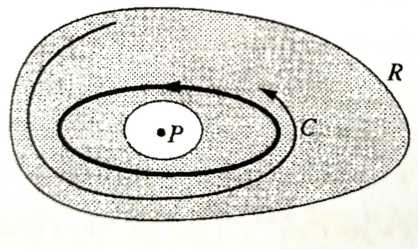
### 1.3 Θεώρημα Poincaré - Bendixson

Τώρα που γνωρίζουμε πως να αποκλείουμε κλειστές τροχιές θα στραφούμε στο πως να βρίσκουμε μεθόδους που να μπορούμε να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν κλειστές τροχιές σε συγκεκριμένα συστήματα. Το παρακάτω θεώρημα είναι ένα από τα λίγα που μπορεί να μας βοηθήσει σε αυτόν τον σκοπό. Επίσης θεωρείται ένα από τα πιο βασικά θεωρητικά αποτελέσματα για την μη γραμμική δυναμική, επειδή υπονοεί ότι το χάος δεν μπορεί να εμφανιστεί σε επίπεδο φάσης.

**Θεώρημα Poincaré - Bendixson:** Υποθέτουμε ότι:

1. Το  $R$  είναι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο του επιπέδου,
2.  $\dot{x} = f(x)$  είναι ένα συνεχώς παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο, σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το  $R$ ,
3. Το  $R$  δεν περιέχει σταθερά σημεία και
4. Υπάρχει μια τροχιά  $C$  που περιορίζεται στο  $R$ , με την έννοια ότι ξεκινάει στο  $R$  και παραμένει στο  $R$  για πάντα.

τότε η  $C$  είτε είναι κλειστή τροχιά, είτε περιελίσσεται γύρω από μια κλειστή καμπύλη καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Σε κάθε περίπτωση, το  $R$  περιέχει μια κλειστή τροχιά (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα)



Σχήμα 1.5

Στο παραπάνω σχήμα έχουμε σχεδιάσει το  $R$  ως περιοχή σε σχήμα δακτυλίου επειδή κάθε κλειστή τροχιά πρέπει να περιβάλλει ένα σταθερό σημείο (Το  $P$  στο σχήμα μας) και στην περίπτωση μας δεν επιτρέπονται σταθερά σημεία.

Όταν εφαρμόζουμε το θεώρημα Poincaré - Bendixson είναι εύκολο να ικανοποιηθούν οι συνθήκες (1)-(3), η δυσκολία παρουσιάζεται στην συνθήκη (4). Αυτό συμβαίνει γιατί δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει μια περιορισμένη τροχιά. Το κόλπο που χρησιμοποιούμε εδώ είναι η περιοχή παγίδευσης  $R$ , δηλαδή ένα κλειστό συνεκτικό σύνολο ώστε το διανυσματικό πεδίο να δείχνει

παντού προς τα μέσα στο όριο του  $R$ . Τότε όλες οι τροχιές στο  $R$  περιορίζονται. Εάν μπορούμε να διασφαλίσουμε επίσης ότι δεν υπάρχει σταθερό σημείο τότε το θεώρημα διασφαλίζει ότι το  $R$  περιέχει μια κλειστή τροχιά.

### Μη ύπαρξη χάους στο επίπεδο φάσης

Το θεώρημα Poincaré - Bendixson είναι ένα από τα κεντρικά αποτελέσματα τη μη γραμμικής δυναμικής. Λέει ότι οι δυναμικές πιθανότητες στο επίπεδο φάσης είναι πολύ περιορισμένες. Εάν μια τροχιά περιορίζεται σε μια κλειστή φραγμένη περιοχή που δεν περιέχει σταθερά σημεία, τότε η τροχιά πρέπει τελικά να προσεγγίσει μια κλειστή τροχιά. Τίποτα πιο περίπλοκο δεν μπορεί να συμβεί.

Αυτό το αποτέλεσμα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το γεγονός ότι τα επίπεδα είναι δισδιάστατα. Σε συστήματα υψηλότερων διαστάσεων ( $n \geq 3$ ) το θεώρημα Poincaré - Bendixson δεν ισχύει πλέον και κάτι εντελώς νέο συμβαίνει. Οι τροχιές μπορεί να περιπλανώνται για πάντα σε μια φραγμένη περιοχή χωρίς να σταθεροποιούνται σε ένα σταθερό σημείο ή σε μια κλειστή τροχιά. Σε κάποιες περιπτώσεις, οι τροχιές έλκονται από ένα σύνθετο γεωμετρικό αντικείμενο που ονομάζεται άγνωστος εκλυστής, ένα μορφοκλασματικό σύνολο στο οποίο η κίνηση δεν είναι περιοδική και είναι ευαίσθητη σε μικροσκοπικές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες. Αυτή η ευαισθησία κάνει την κίνηση απρόβλεπτη μακροπρόθεσμα. Αυτό σημαίνει ότι αντιμετωπίζουμε το χάος. Παρ' όλα αυτά το θεώρημα Poincaré - Bendixson αναγνωρίζει ότι το χάος δεν μπορεί να συμβεί στο επίπεδο φάσης.

## 1.4 Συστήματα Liénard

Στις πρώιμες έρευνες για την μη γραμμική δυναμική (περίπου το 1920 έως το 1950) υπήρχε μεγάλο ενδιαφέρον για τις μη γραμμικές ταλαντώσεις. Το κίνητρο αρχικά ήταν η ανάπτυξη ραδιοφώνου και σωλήνων κενού και αργότερα απέκτησε τη δική του μαθηματική υπόσταση. Παρατηρήθηκε ότι πολλά ταλαντευόμενα κυκλώματα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν με διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

γνωστή και εξίσωση **Liénard**. Αυτή η εξίσωση είναι μια γενίκευση του ταλαντωτή van der Pol που έχουμε αναφερθεί στο 1.1. Μπορεί επίσης να ερμηνευθεί μηχανικά ως η εξίσωση κίνησης για μια μονάδα μάζας που υπόκειται σε μια μη γραμμική δύναμη απόσβεσης την  $-f(x)\dot{x}$  και μια δύναμη επαναφοράς την  $-g(x)$ .

Η εξίσωση του Liénard είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -g(x) - f(x)y$$

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι το παραπάνω σύστημα έχει μοναδικό, ευσταθή οριακό κύκλο κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις για τις  $f$  και  $g$ .

**Θεώρημα Liénard:** Ας υποθέσουμε ότι τα  $f(x)$  και  $g(x)$  ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Οι  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμες για κάθε  $x$ ,
2.  $g(-x) = -g(x)$  για κάθε  $x$  (δηλαδή η  $g(x)$  είναι περιττή συνάρτηση),
3.  $g(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ ,
4.  $f(-x) = f(x)$  για κάθε  $x$  (δηλαδή η  $f(x)$  είναι άρτια συνάρτηση)
5. Η περιττή συνάρτηση  $F(x) = \int_0^x f(u)du$  έχει μοναδική ρίζα για  $x = a$ , είναι αρνητική για  $0 < x < a$ , ενώ είναι θετική και μη φθίνουσα για  $x > a$  και  $F(x) \rightarrow \infty$  καθώς  $x \rightarrow \infty$ .

τότε το σύστημα έχει μοναδικό, ευσταθή οριακό κύκλο γύρω από την αρχή του επιπέδου φάσης.

Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται αληθοφανή. Οι παραδοχές για την  $g(x)$  σημαίνουν ότι η δύναμη επαναφοράς δρα σε ένα συνηθισμένο ελατήριο και τείνει να μειώσει οποιαδήποτε μετατόπιση, ενώ οι παραδοχές για την  $f(x)$  δηλώνουν ότι η απόσβεση είναι αρνητική για μικρό  $|x|$  και γενικά θετικό για μεγάλο  $|x|$ . Εφόσον οι μικρές ταλαντώσεις έχουν την τάση να πηγαίνουν προς τα πάνω και οι μεγάλες έχουν την τάση να μειώνονται, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι το σύστημα τείνει να καταλήξει σε μια αυτοσυντηρούμενη ταλάντωση κάποιου ενδιάμεσου πλάτους.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα που αναφέραμε μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση van der Pol έχει ένα μοναδικό, ευσταθή οριακό κύκλο.

Για την εξίσωση van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

παίρνουμε  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$  και  $g(x) = x$ .

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες 1-4 του θεωρήματος Liénard ικανοποιούνται ενώ για την πέμπτη συνθήκη έχουμε ότι:

$$F(x) = \mu\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) = \frac{1}{3}\mu x(x^2 - 3)$$

Συνεπώς για  $a = \sqrt{3}$ , έπεται ότι η εξίσωση van der Pol έχει μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο.

## 1.5 Καμπύλες μηδενικής κλίσης

Ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων για συστήματα στο επίπεδο είναι οι καμπύλες μηδενικής κλίσης (nullclines). Για ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Το  $x_j$ -σύνολο μηδενικής κλίσης είναι το σύνολο των σημείων όπου το  $\dot{x}_j$  μηδενίζεται, οπότε τα  $x_j$ -σύνολα μηδενικής κλίσης είναι τα σύνολα των σημείων που καθορίζονται από την  $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$

Τα  $x_j$ -σύνολα μηδενικής κλίσης συνήθως χωρίζουν τον  $\mathbb{R}^n$  σε μία συλλογή περιοχών στις οποίες οι  $x_j$  συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου έχουν θετική ή αρνητική κατεύθυνση. Αν καθορίσουμε όλα τα σύνολα μηδενικής κλίσης, τότε αυτό μας επιτρέπει να αναλύσουμε τον  $\mathbb{R}^n$  σαν μια συλλογή ανοικτών συνόλων σε κάθε μία από τις οποίες το διανυσματικό πεδίο 'δείχνει' σε μία συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Αυτό είναι πιο εύκολο να το κατανοήσουμε στην περίπτωση ενός συστήματος στο επίπεδο

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση τα σύνολα μηδενικής κλίσης είναι καμπύλες. Στις  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης, έχουμε  $\dot{x} = 0$ , οπότε το διανυσματικό πεδίο 'δείχνει' προς τα πάνω ή προς τα κάτω (κάθετα) και μάλιστα οι  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης είναι τα μόνα σημεία στα οποία συμβαίνει αυτό. Συνεπώς οι  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης διαιρούν τον  $\mathbb{R}^2$  σε περιοχές όπου το διανυσματικό πεδίο 'δείχνει' δεξιά, είτε αριστερά. Παρόμοια στις  $y$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης, το διανυσματικό πεδίο είναι οριζόντιο, έτσι ώστε να χωρίζουν τον  $\mathbb{R}^2$  σε περιοχές όπου το διανυσματικό πεδίο να «δείχνει» προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω. Τα σημεία τομής των καμπυλών μηδενικής κλίσης μας δίνουν το σημείο ισορροπίας. Σε οποιαδήποτε περιοχή μεταξύ των καμπυλών, το διανυσματικό πεδίο δεν είναι κάθετο ούτε οριζόντιο, επομένως πρέπει να 'δείχνει' σε μία από τις παρακάτω 4 διευθύνσεις: βορειοανατολικά, βορειοδυτικά, νοτιοανατολικά ή νοτιοδυτικά. (ή πάνω και δεξιά, πάνω και αριστερά, κάτω και αριστερά και κάτω και δεξιά). Αυτές τις περιοχές τις ονομάζουμε βασικές περιοχές. Αργότερα θα δούμε παράδειγμα με το σχίσσο των βασικών περιοχών ώστε να κατανοήσουμε περισσότερο το πορτραίτο φάσεων από ποιοτικής άποψης.

## 1.6 Ταλαντώσεις χαλάρωσης

Σε αυτή την ενότητα θα αλλάξουμε κατεύθυνση. Μέχρι τώρα είχαμε επικεντρωθεί στην εύρεση περιοδικών λύσεων ενός συγκεκριμένου δισδιάστατου συστήματος. Τώρα θα δούμε τι μπορούμε να ανακαλύψουμε για την περίοδο και το σχήμα μιας κλειστής τροχιάς δεδομένου ότι αυτή υπάρχει. Γενικά τέτοια

προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν ακριβώς όμως μπορούμε να λάβουμε χρήσιμες προσεγγίσεις εάν κάποιες παράμετροι είναι μεγάλες ή μικρές.

Ξεκινάμε εξετάζοντας ξανά την εξίσωση van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

για  $\mu \gg 1$ . Σε αυτό το ισχυρά μη γραμμικό όριο, θα δούμε ότι ο οριακός κύκλος αποτελείται από μια εξαιρετικά αργή συσσώρευση, ακολουθούμενη από μία ξαφνική αποφόρτιση που ακολουθείται από άλλη αργή συσσώρευση και ούτω καθεξής. Ταλαντώσεις αυτού του τύπου συχνά ονομάζονται **ταλαντώσεις χαλάρωσης**. Οι ταλαντώσεις χαλάρωσης συμβαίνουν σε πολλά άλλα επιστημονικά πεδία όπως την περιοδική πυροδότηση νευρικών κυττάρων που οδηγούνται από σταθερό ρεύμα.

### Ανάλυση εξίσωσης van der Pol για $\mu \gg 1$ :

Θα εισάγουμε διαφορετικές μεταβλητές επίπεδου φάσης από ότι συνήθως ' $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = \dots$ ' και αυτό γιατί παρατηρούμε ότι:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = \frac{d}{dt}(\dot{x} + \mu(\frac{1}{3}x^3 - x))$$

Οπότε αν ονομάσουμε

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, \quad w = \dot{x} + \mu F(x) \quad (1.1)$$

από την εξίσωση van der Pol συνεπάγεται ότι

$$\dot{w} = \ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = -x \quad (1.2)$$

Άρα, η εξίσωση van der Pol είναι ισοδύναμη με τις (1.1),(1.2) και μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\dot{x} = w - \mu F(x)$$

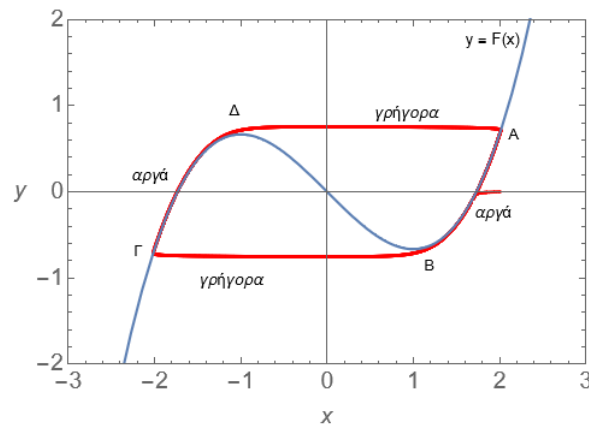
$$\dot{w} = -x$$

Θέτοντας επίσης  $y = \frac{w}{\mu}$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu[y - F(x)] \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\mu}x \end{aligned} \quad (1.3)$$

Τώρα εξετάζουμε μια τυπική τροχιά στο επίπεδο φάσης  $(x, y)$ . Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης είναι το κλειδί για να κατανοήσουμε την κίνηση. Η κίνηση αυτή γίνεται όπως παρακάτω, ξεκινάει δηλαδή από ένα σημείο εκτός της αρχής, η τροχιά ακουμπάει οριζόντια πάνω στην κυβική καμπύλη μηδενικής κλίσης  $y = F(x)$ . Κατόπιν, περνάει αργά κάτω από την καμπύλη μηδενικής κλίσης μέχρι να φτάσει στην γωνία (το σημείο B), μετά ακουμπάει στον άλλο κλάδο

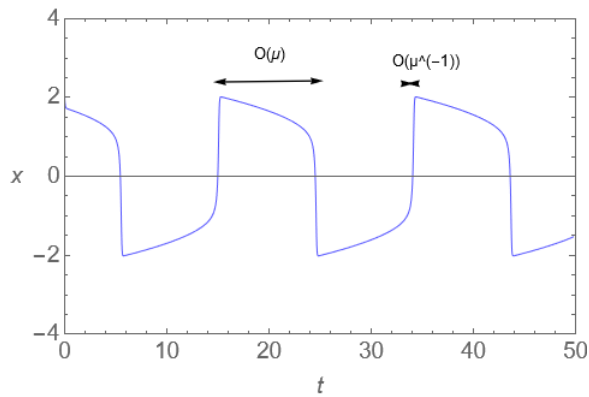
της  $y = F(x)$ , στο  $\Gamma$ . Αυτό ακολουθείται από ένα άλλο πέρασμα κατά μήκος μέχρι να φτάσει στο σημείο  $\Delta$ . Αυτή η κίνηση συνεχίζει περιοδικά:



Σχήμα 1.6

Για να δικαιολογήσουμε αυτήν την εικόνα, ας υποθέσουμε ότι η αρχική συνθήκη δεν είναι κοντά στην κυβική καμπύλη μηδενικής κλίσης, δηλαδή ότι  $y - F(x) \sim O(1)$ . Τότε το (1.3) υπονοεί ότι  $|\dot{x}| \sim O(\mu) \gg 1$ , ενώ  $|\dot{y}| \sim O(\mu^{-1}) \ll 1$ . Επομένως, η ταχύτητα είναι τεράστια στην οριζόντια κατεύθυνση και απειροελάχιστη στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Οπότε οι τροχιές κινούνται πρακτικά οριζόντια. Εάν η αρχική συνθήκη είναι πάνω από την καμπύλη μηδενικής κλίσης, τότε  $y - F(x) > 0$  και επομένως  $\dot{x} > 0$ , έτσι η τροχιά κινείται προς την καμπύλη μηδενικής κλίσης. Ωστόσο όταν η τροχιά πλησιάσει τόσο πολύ ώστε το  $y - F(x) \sim O(\mu^{-2})$ , τότε τα  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$  γίνονται παρόμοια και είναι  $O(\mu^{-1})$ . Τότε η τροχιά διασχίζει την καμπύλη μηδενικής κλίσης κάθετα όπως φαίνεται στο σχήμα και στη συνέχεια κινείται αργά κατά μήκος της πίσω πλευράς του κλάδου με ταχύτητα  $O(\mu^{-1})$  μέχρι να φτάσει στην γωνία και να μπορεί να περάσει ξανά στο πλάι.

Αυτή η ανάλυση δείχνει ότι ο οριακός κύκλος έχει δύο **ευρέως διαχωρισμένες χρονικές κλίμακες**: αυτές που κινούνται αργά και απαιτούν  $\Delta t \sim O(\mu)$  και τα άλματα που απαιτούν  $\Delta t \sim O(\mu^{-1})$ . Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται και οι δύο αυτές χρονικές κλίμακες που προκύπτει από αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης van der Pol για  $\mu = 10$  και αρχική συνθήκη  $(x_0, y_0) = (2, 0)$ .



Σχήμα 1.7

Εκτίμηση περιόδου του οριακού κύκλου για την εξίσωση van der Pol για  $\mu \gg 1$ .

Η περίοδος  $T$  είναι ουσιαστικά ο χρόνος που απαιτείται για να ταξιδέψει κατά μήκος των δύο αργών διακλαδώσεων, καθώς ο χρόνος που δαπανάται στα άλματα είναι αμελητέος για μεγάλα  $\mu$ . Από συμμετρία ο χρόνος που αφιερώνεται σε κάθε κλάδο είναι ο ίδιος. Ως εκ τούτου:

$$T \approx 2 \int_{t_A}^{t_B} dt$$

Για να εξάγουμε μια σχέση για το  $dt$  ξέρουμε ότι στους αργούς κλάδους έχουμε ότι  $y \approx F(x)$  και έτσι:

$$\frac{dy}{dt} \approx F'(x) \frac{dx}{dt} = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$$

Επειδή όμως  $dy/dt = -x/\mu$  (από ;;), βρίσκουμε ότι  $dx/dt = -x/\mu(x^2 - 1)$ . Επομένως:

$$dt \approx -\frac{\mu(x^2 - 1)}{x} dx$$

σε μια αργή διακλάδωση. Όπως μπορούμε να ελέγξουμε από την προηγούμενη ανάλυση η θετική διακλάδωση αρχίζει στο  $x_A = 2$  και τελειώνει στο  $x_B = 1$ . Ως εκ τούτου:

$$T \approx 2 \int_2^1 \frac{-\mu}{x} (x^2 - 1) dx = 2\mu \left[ \frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^2 = \mu[3 - 2\ln 2]$$

το οποίο είναι  $O(\mu)$  όπως περιμέναμε.



## 1.7 Ασθενείς μη γραμμικοί ταλαντωτές

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις της μορφής:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0 \quad (1.4)$$

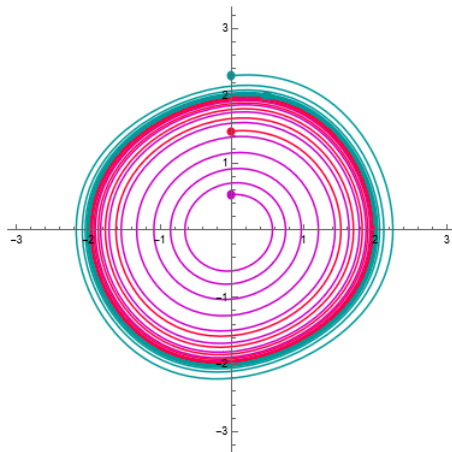
όπου  $0 \leq \varepsilon \ll 1$  και  $h(x, \dot{x})$  είναι μια αυθαίρετη ομαλή συνάρτηση. Τέτοιες εξισώσεις απεικονίζουν μικρές διαταραχές του γραμμικού ταλαντωτή  $\dot{x} + x = 0$  και γι' αυτό ονομάζονται **ασθενείς μη γραμμικοί ταλαντωτές**. Δύο θεμελιώδη παραδείγματα είναι η εξίσωση van der Pol

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$$

και η εξίσωση Duffing

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$$

Για να απεικονίσουμε τα είδη των φαινομένων που μπορούν να προκύψουν, το παρακάτω σχήμα δείχνει μια δημιουργημένη από τον υπολογιστή λύση της εξίσωσης van der Pol στο επίπεδο φάσης  $(x, \dot{x})$  για  $\varepsilon = 0.1$  και μια αρχική συνθήκη κοντά στην αρχή. Η τροχιά είναι μια σπείρα που περιστρέφεται αργά, ενώ χρειάζονται πολλοί κύκλοι για να αυξηθεί το πλάτος. Τελικά η τροχιά τείνει σε ένα περίπου κυκλικό οριακό κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι κοντά στο 2.



Σχήμα 1.8

### Θεωρία κανονικών διαταραχών και η αποτυχία της

Ως πρώτη προσέγγιση, ψάχνουμε λύσεις για την 1.4, σε μορφή δυναμοσειράς της  $\varepsilon$ . Έτσι αν το  $x(t, \varepsilon)$  είναι λύση, το επεκτείνουμε ως εξής:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (1.5)$$

όπου οι άγνωστες συναρτήσεις  $x_\kappa(t)$  θα προσδιορίζονται από την εξίσωση και τις αρχικές της συνθήκες. Η ιδέα είναι όλες οι σημαντικές πληροφορίες να μπορούν να παρθούν από τους πρώτους όρους (ιδανικά από τους δύο πρώτους), και οι όροι υψηλότερης τάξης να δίνουν μόνο μικρές διορθώσεις. Αυτή η τεχνική ονομάζεται **θεωρία τακτικής διαταραχής**. Λειτουργεί σε καλά ορισμένα προβλήματα αλλά όπως θα δούμε αντιμετωπίζει προβλήματα.

Για να δούμε αυτά τα προβλήματα, θα ξεκινήσουμε με ένα πρόβλημα πρακτικής που μπορεί να λυθεί ακριβώς.

Θεωρούμε ένα γραμμικό ταλαντωτή με ασθενή απόσβεση

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0, \quad (1.6)$$

και αρχικές συνθήκες τις

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \quad (1.7)$$

Η ακριβής λύση είναι η

$$x(t, \varepsilon) = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\varepsilon t} \sin[(1 - \varepsilon^2)^{1/2} t]$$

Τώρα θα λύσουμε το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας την θεωρία διαταραχών Η αντικατάσταση της 1.5 στη 1.6 δίνει:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + 2\varepsilon \frac{d}{dt}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) = 0$$

Αν ομαδοποιήσουμε τους όρους σύμφωνα με τις δυνάμεις του  $\varepsilon$ , παίρνουμε:

$$[\ddot{x}_0 + x_0] + \varepsilon[\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1] + O(\varepsilon^2) = 0$$

Εφόσον υποτίθεται ότι ισχύει για όλα τα αρκετά μικρά  $\varepsilon$ , οι συντελεστές κάθε δύναμης του  $\varepsilon$  πρέπει να εξαφανιστούν ξεχωριστά. Έτσι βρίσκουμε:

$$O(1) : \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (1.8)$$

$$O(\varepsilon) : \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1 = 0 \quad (1.9)$$

Αγνοούμε τις εξισώσεις  $O(\varepsilon^2)$  και υψηλότερης τάξης για τον λόγο που αναφέραμε προηγουμένως.

Οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες για αυτές τις εξισώσεις έρχονται από τις 1.7. Έτσι για  $t = 0$  έχουμε:

$$x_0(0) = 0 \quad x_1(0) = 0$$

Επίσης:

$$\dot{x}_0(0) = 1 \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

Τώρα λύνοντας τα προβλήματα αρχικών τιμών ένα προς ένα καταρρέουν σαν ντόμινο.

Η λύση του 1.8 υπό τις συνθήκες  $x_0(0) = 0, \dot{x}_0(0) = 1$ , είναι:

$$x_0(t) = \sin t$$

Βάζοντας αυτή την λύση στην 1.9 παίρνουμε:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2 \cos t$$

Εδώ είναι το πρώτο σημάδι προβλήματος: η δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης είναι μια δύναμη συντονισμού. Η λύση υπό τις αρχικές συνθήκες  $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0$  είναι:

$$x_1(t) = -t \sin t$$

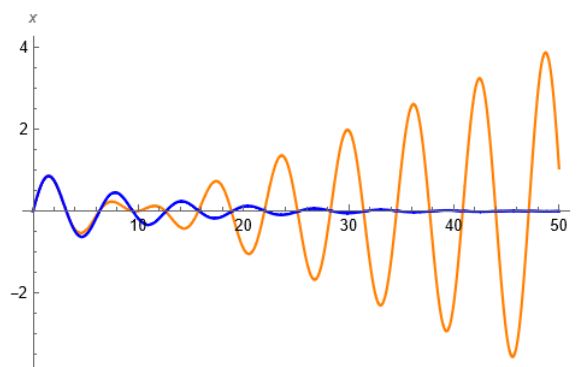
όπου είναι ένας όρος που μεγαλώνει μόνιμα καθώς  $x \rightarrow \infty$ .

Εν κατακλείδι η λύση των 1.6, 1.7 σύμφωνα με την θεωρία διαταραχών είναι:

$$x(t, \varepsilon) = \sin t - \varepsilon t \sin t + O(\varepsilon^2) \quad (1.10)$$

Το ερώτημα σε αυτό το σημείο είναι αν υπάρχει σύγκριση με την ακριβή λύση που έχουμε βρει. Εάν η ακριβής λύση επεκταθεί ως δυναμοσειρά στην  $\varepsilon$  οι δύο πρώτοι όροι δίνονται από την (1.10). Στην πραγματικότητα η (1.10) είναι η αρχή μιας συγκλίνουσας σειράς για την αληθινή λύση. Για οποιοδήποτε σταθερό  $t$  η (1.10) παρέχει μια καλή προσέγγιση εφόσον το  $\varepsilon$  είναι αρκετά μικρό.

Αλλά κανονικά μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά για σταθερό  $\varepsilon$ , όχι σταθερό  $t$ . Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να περιμένουμε ότι η προσέγγιση της διαταραχής θα λειτουργήσει μόνο για χρόνους  $t \ll O(1/\varepsilon)$ . Για να εξηγήσουμε αυτόν τον περιορισμό στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η ακριβής λύση και η (1.10) για  $\varepsilon = 0.1$ . Όπως ήταν αναμενόμενο η σειρά λειτουργεί αρκετά καλά όταν  $t \ll \frac{1}{\varepsilon} = 10$  αλλά μετά από αυτό καταρρέει.



Σχήμα 1.9

Σε πολλές περιπτώσεις θα θέλαμε η προσέγγιση να καταγράφει την ποιοτική συμπεριφορά της πραγματικής λύσης για όλα τα  $t$  ή για τουλάχιστον μεγάλα  $t$ . Με αυτό το κριτήριο η 1.10 είναι μια αποτυχία και αυτό γιατί υπάρχουν δύο μεγάλα προβλήματα.

1. Η ακριβής λύση παρουσιάζει δύο χρονικές κλίμακες: έναν γρήγορο χρόνο  $t \sim O(1)$  για τις ημιτονοειδής ταλαντώσεις και ένα αργό χρόνο  $t \sim 1/\varepsilon$ . Κατά τον οποίο το πλάτος μειώνεται. Η εξίσωση 1.10 παρερμηνεύει εντελώς τη συμπεριφορά της αργής κλίμακας. Συγκεκριμένα λόγω του όρου  $t \sin t$  η 1.10 υποδηλώνει λανθασμένα ότι η λύση μεγαλώνει με τον χρόνο ενώ γνωρίζουμε ότι από την ακριβή λύση ο όρος  $(1 - \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\varepsilon t}$  μειώνεται εκθετικά.

Για να έχουμε ένα καλό αποτέλεσμα θα έπρεπε να υπολογίσουμε ένα άπειρο αριθμό των όρων της σειράς. Αυτό είναι ανώφελο και αυτό διότι θέλουμε προσεγγίσεις σειρών που λειτουργούν με έναν ή δύο όρους.

2. Η συχνότητα των ταλαντώσεων της ακριβής λύσης είναι  $\omega = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$  η οποία μετατοπίζεται ελαφρώς από την συχνότητα  $\omega = 1$  της 1.10 πράγμα που σημαίνει ότι μετά από πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα  $t \sim O(1/\varepsilon^2)$ , αυτή η συχνότητα θα έχει σημαντικό αντίκτυπο.

### Μέθοδος δύο χρονικών κλιμάκων:

Από τα παραπάνω προκύπτει μια γενικότερη αλήθεια. Θα υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο χρονικές στιγμές σε ασθενής μη γραμμικούς ταλαντωτές. Στο σχήμα 1.8 έχουμε ήδη συναντήσει αυτό το φαινόμενο όπου το πλάτος της σειράς αυξήθηκε πολύ αργά σε σύγκριση με τον χρόνο του κύκλου. Μια αναλυτική μέθοδος που ονομάζεται δύο χρονικών κλιμάκων βασίζεται σε δύο χρόνους από την αρχή και παράγει καλύτερες προσεγγίσεις από ότι η προηγούμενη μέθοδος.

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο των δύο χρονικών κλιμάκων στην 1.4 βάζουμε  $\tau = 1$  που αντιπροσωπεύει την γρήγορη κλίμακα και έστω  $T = \varepsilon t$  που δηλώνει την αργή. Θα αντιμετωπίσουμε αυτές τις δύο κλίμακες σαν να είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Ειδικότερα, οι συναρτήσεις της αργής κλίμακας  $T$  θα θεωρηθούν ως σταθερές στην γρήγορη κλίμακα  $\tau$ . Τώρα θα στραφούμε στην μηχανική της μεθόδου. Επεκτείνουμε την λύση του 1.4 σε σειρά

$$x(t, \varepsilon) = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + O(\varepsilon^2) \quad (1.11)$$

Οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο της 1.4 μετασχηματίζονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας σε:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial T}$$

Επίσης έχουμε:

$$\dot{x} = \partial_\tau x + \varepsilon \partial_T x$$

Αν αντικαταστήσουμε την 1.11 στην τελευταία σχέση και μαζέψουμε τις δυνάμεις του  $\varepsilon$  βρίσκουμε:

$$\dot{x} = \partial_\tau x_0 + \varepsilon(\partial_T x_0 + \partial_\tau x_1) + O(\varepsilon^2) \quad (1.12)$$

Ομοίως έχουμε:

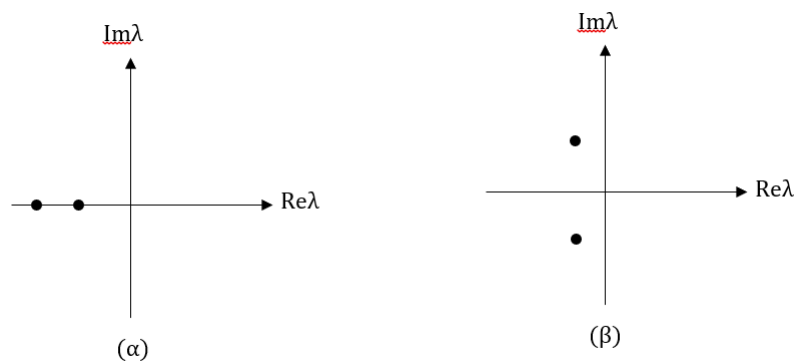
$$\ddot{x} = \partial_{\tau\tau} x_0 + \varepsilon(\partial_{\tau T} x_1 + 2\partial_{T\tau} x_0) + O(\varepsilon^2) \quad (1.13)$$

Όσον αφορά για την εγκυρότητα της μεθόδου των δύο χρονικών κλιμάκων εμπειρικά μπορούμε να πούμε ότι η προσέγγιση ενός όρου  $x_0$  θα είναι εντός του  $O(\varepsilon)$  της κανονικής λύσης  $x$  για όλες τις φορές μέχρι  $t \sim O(1/\varepsilon)$ . Υποθέτοντας όμως ότι το  $x$  και το  $x_0$  ξεκινάνε από την ίδια αρχική συνθήκη. Αν το  $x$  έχει περιοδική λύση τότε η κατάσταση είναι ακόμη καλύτερη διότι το  $x_0$  παραμένει εντός του  $O(\varepsilon)$  για όλα τα  $t$ .

## Κεφάλαιο 2

### Διακλαδώσεις

Σε ένα δισδιάστατο σύστημα που περιέχει παράμετρο  $\mu$  και έχει ένα ευσταθές σταθερό σημείο αυτό που σκεφτόμαστε, είναι ποιοι είναι οι πιθανοί τρόποι που θα μπορούσαν να το κάνουν να χάσει την ευστάθεια του. Το κλειδί σε αυτό είναι οι Ιακωβιανές ιδιοτιμές. Πιο συγκεκριμένα, εάν ένα σταθερό σημείο είναι ευσταθές, οι ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημι-επίπεδο δηλαδή  $Re\lambda < 0$ . Εφόσον οι ιδιοτιμές ικανοποιούν μια δευτεροβάθμια εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές, έχουμε δύο πιθανές περιπτώσεις: είτε είναι αρνητικές και πραγματικές (σχήμα 2.1.α) είτε είναι συζυγείς μιγαδικές (σχήμα 2.1.β).

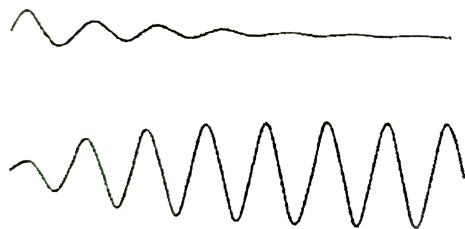


Σχήμα 2.1

Επομένως για να αποσταθεροποιήσουμε το σημείο θα πρέπει είτε η μία είτε και οι δύο ιδιοτιμές να διασταυρώνονται στο δεξί ημιεπίπεδο καθώς το  $\mu$  παίρνει διάφορες τιμές. Εμείς θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές διασχίζουν ταυτόχρονα τον φανταστικό άξονα στο δεξί ημιεπίπεδο.

## 2.1 Υπερκρίσιμες Διακλαδώσεις Hopf

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα φυσικό σύστημα που βρίσκεται σε ισορροπία μέσω εκθετικά αποσβεσμένων ταλαντώσεων. Με άλλα λόγια, οι μικρές διαταραχές φθίνουν αφού ταλαντωθούν για λίγο (Σχήμα 2.2.α). Υποθέτουμε επίσης ότι ο ρυθμός που φθίνει εξαρτάται από μια παράμετρο  $\mu$ . Εάν η μείωση γίνεται όλο και πιο αργή και τελικά αλλάζει σε αύξηση του ρυθμού σε μια κρίσιμη τιμή του  $\mu_c$  η κατάσταση ισορροπίας θα χάσει την ευστάθειά της. Σε πολλές περιπτώσεις, η κίνηση που προκύπτει είναι μια μικρού πλάτους, ημιτονοειδής ταλάντωση οριακού κύκλου γύρω από την προηγούμενη σταθερή κατάσταση. Τότε λέμε ότι το σύστημα έχει υποστεί μια **υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf** (Σχήμα 2.2.β).



Σχήμα 2.2: (α)  $\mu < \mu_c$ , (β)  $\mu > \mu_c$

Όσον αφορά τη ροή στο επίπεδο φάσης, μια υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf συμβαίνει όταν μια ευσταθή σπείρα μεταβάλλεται σε μια ασταθή, που περιβάλλεται από ένα μικρό, σχεδόν ελλειπτικό οριακό κύκλο. Οι διακλαδώσεις Hopf μπορούν να συμβούν σε επίπεδα φάσης οποιαδήποτε διάστασης  $n \geq 2$ . Εμείς θα περιοριστούμε στα δισδιάστατα.

Μια απλή εφαρμογή για να δούμε την συμπεριφορά των ιδιοτιμών κατά την διακλάδωση είναι στο παρακάτω σύστημα:

$$\dot{r} = \mu r - r^3$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$

όπου  $\mu$  ελέγχει την ευστάθεια του σταθερού σημείου στην αρχή, το  $\omega$  δίνει τη συχνότητα των απειροελάχιστων ταλαντώσεων και  $b$  καθορίζει την εξάρτηση της συχνότητας από το πλάτος για ταλαντώσεις μεγαλύτερου πλάτους.

Ξαναγράφουμε το σύστημα σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αυτό διευκολύνει στην εύρεση των Ιακωβιανών ιδιοτιμών. Οπότε αντικαθιστούμε όπου

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ &= (\mu r - r^3)\cos\theta - r(\omega + br^2)\sin\theta \\ &= (\mu - [x^2 + y^2])x - (\omega + b[x^2 + y^2])y \\ &= \mu x - \omega y + \text{κυβικοί όροι}\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{κυβικοί όροι}$$

Άρα ο Ιακωβιανός στην αρχή είναι:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

που έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda = \mu \pm i\omega$$

Όπως ήταν αναμενόμενο οι ιδιοτιμές διασχίζουν τον φανταστικό άξονα από αριστερά προς τα δεξιά καθώς το  $\mu$  αυξάνει από τα αριστερά προς τα δεξιά.

### Εμπειρικοί κανόνες

Η παραπάνω εφαρμογή είναι εξιδανικευμένη και μας δίνει δύο κανόνες που ισχύουν γενικά για τις υπερκρίσιμες διακλαδώσεις του Hopf:

1. Το μέγεθος του οριακού κύκλου αυξάνεται συνεχώς από το 0, και αυξάνεται ανάλογα με το  $\sqrt{\mu - \mu_c}$  για  $\mu$  κοντά στο  $\mu_c$
2. Η συχνότητα του οριακού κύκλου δίνεται προσεγγιστικά από την  $\omega = Im\lambda$  εκτιμώμενο όταν  $\mu = \mu_c$ . Οπότε η περίοδος είναι

$$T = (2\pi/Im\lambda + (\mu - \mu_c))$$

για  $\mu$  κοντά στο  $\mu_c$ .

Αλλά αυτό ισχύει για παραδείγματα όπως το δικό μας που είναι εξιδανικευμένα και έχει κάποιες τεχνητές ιδιότητες:

- Στις διακλαδώσεις του Hopf που συναντάμε ο οριακός κύκλος είναι ελλειπτικός και όχι κυκλικός και το σχήμα παραμορφώνεται καθώς απομακρύνεται από το σημείο διακλάδωσης.
- Στην περίπτωση μας οι ιδιοτιμές κινούνται σε οριζόντιες γραμμές για τις διάφορες τιμές του  $\mu$  (δηλαδή το  $Im\lambda$  είναι ανεξάρτητο του  $\mu$ ) ενώ κανονικά θα ακολουθούσαν μια καμπύλη διαδρομή και θα διέσχιζαν τον φανταστικό άξονα.



## 2.2 Υποκρίσιμες Διακλαδώσεις Hopf

Η υποκρίσιμη διακλάδωση του Hopf είναι πάντα πιο επικίνδυνη στις εφαρμογές μηχανικής. Αυτό διότι μετά την διακλάδωση, οι τροχιές πρέπει να μεταπηδήσουν σε ένα μακρινό ελκυστή, ο οποίος μπορεί να είναι ένα σταθερό σημείο, ένας άλλος οριακός κύκλος, το άπειρο ή σε ένα χαοτικό ελκυστή σε τρεις και υψηλότερες διαστάσεις.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε το παρακάτω δισδιάστατο σύστημα:

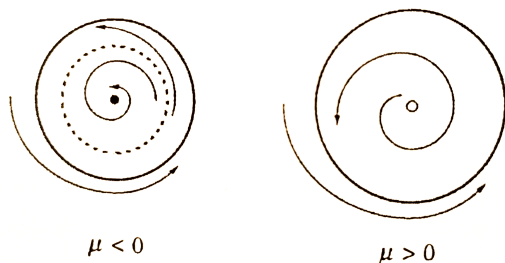
$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$

Η σημαντική διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση είναι ότι ο κυβικός όρος  $r^3$  λειτουργεί τώρα αποσταθεροποιητικά δηλαδή βοηθά στην απομάκρυνση των τροχιών από την αρχή.

Για τα πορτραίτα φάσεων που φαίνονται παρακάτω έχουμε ότι:

- Όταν  $\mu > 0$  υπάρχουν δύο ελκυστές, ένας ευσταθής οριακός κύκλος και ένα ευσταθές σταθερό σημείο στην αρχή. Ανάμεσα τους βρίσκεται ένας ασταθής κύκλος (που φαίνεται ως διακεκομμένη γραμμή). Καθώς αυξάνεται το  $\mu$  ο ασταθής κύκλος σφίγγει γύρω από το σταθερό σημείο.
- Όταν  $\mu = 0$  εμφανίζεται μια υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf όπου ο ασταθής κύκλος συρρικνώνεται σε μηδενικό πλάτος και καλύπτει την αρχή.
- Όταν  $\mu < 0$  ο οριακός κύκλος μεγάλου πλάτους είναι ο μόνος ελκυστής. Οι λύσεις που παρέμειναν κοντά στην αρχή αναγκάζονται τώρα να εξελιχθούν σε ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους.



Σχήμα 2.3

## 2.3 Υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι ότι αν έχουμε μια διακλάδωση Hopf πως μπορούμε να πούμε αν είναι υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη;

Σε αυτό το σημείο η γραμμικοποίηση δεν παρέχει διάκριση και αυτό διότι και στις δύο περιπτώσεις, ένα ζεύγος ιδιοτιμών μετακινούνται απο το αριστερό στο δεξί ημιεπίπεδο.

Υπάρχει ένα κριτήριο αλλά είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί. Μια γρήγορη λύση είναι με την χρήση προγράμματος στον υπολογιστή απο το οποίο θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

### 1) Υπερκρίσιμη:

Εάν εμφανιστεί ένας μικρός ελκυστικός οριακός κύκλος αμέσως αφού το σταθερό σημείο γίνει ασταθές, και εάν το πλάτος του συρρικνωθεί ξανά στο μηδέν καθώς η παράμετρος αντιστραφεί, η διακλάδωση θα είναι υπερκρίσιμη.

### 2) Υποκρίσιμη:

Η αντίθετη περίπτωση από την (1), πιθανώς είναι υποκρίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, ο πλησιέστερος ελκυστής μπορεί να είναι μακριά από το σταθερό σημείο και το σύστημα μπορεί να παρουσιάσει υστέρηση καθώς η παράμετρος αντιστρέφεται.

### 3) Εκφυλισμένη διακλάδωση:

Υπάρχει και η εκφυλισμένη διακλάδωση Hopf. Αυτή η περίπτωση, εμφανίζεται συνήθως όταν ένα μη συντηρητικό σύστημα γίνεται ξαφνικά συντηρητικό στο σημείο διακλάδωσης. Τότε το σημείο γίνεται μη γραμμικό κέντρο και όχι μια ασταθής σπείρα που απαιτεί η διακλάδωση Hopf.

Φυσικά τα πειράματα στον υπολογιστή δεν είναι αποδείξεις και θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί για να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα.

## 2.4 Αριθμητική Μελέτη Διακλάδωσης Hopf και υλοποίηση στον υπολογιστή

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\dot{x} = \mu - y + xy^2$$

,

$$\dot{y} = x + \mu y + y^3$$

Θα δείξουμε ότι πραγματοποιείται διακλάδωση Hopf στην αρχή για διάφορες τιμές του  $\mu$  και θα αποφανθούμε αν είναι υπερκρίσιμη, ή υποκρίσιμη ή εκφυλισμένη.

Ο Ιακωβιανός στην αρχή είναι

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

το οποίο έχει  $\tau = 2\mu$ ,  $\Delta = \mu^2 + 1 > 0$  και  $\lambda = \mu \pm i$ . Οπότε, όσο το  $\mu$  αυξάνει ως το μηδέν η αρχή αλλάζει από σταθερή σπείρα σε ασταθή σπείρα. Αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει κάποιο είδος διακλάδωσης Hopf για  $\mu = 0$

Για να αποφανθούμε αν η διακλάδωση είναι, υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή εκφυλισμένη θα χρησιμοποιήσουμε μια απλή αριθμητική ολοκλήρωση. Πρώτα θα μετατρέψουμε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες και έχουμε:

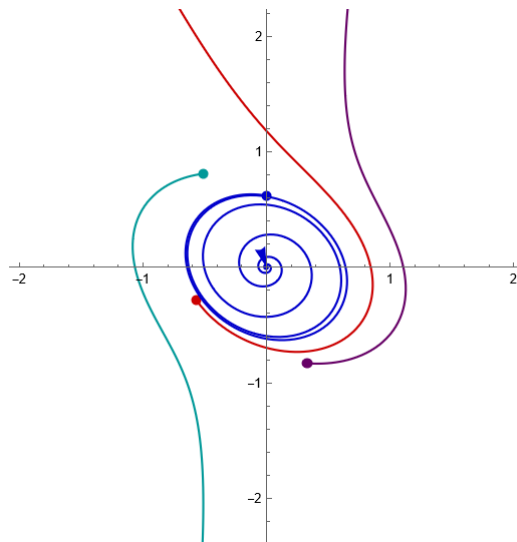
$$\dot{r} = \mu r + r y^2$$

Οπότε παρατηρούμε ότι  $\dot{r} \geq \mu r$ .

Αυτό σημαίνει ότι για  $\mu > 0$ , η  $r(t)$  αυξάνει τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο το  $r_0 e^{\mu t}$ . Με άλλα λόγια όλες οι τροχιές θα απωθούνται στο άπειρο. Επομένως για  $\mu > 0$  σίγουρα δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές. Πιο συγκεκριμένα, η ασταθής σπείρα δεν περιβάλλεται από ευσταθή οριακό κύκλο, οπότε δεν είναι υπερκρίσιμη διακλάδωση.

Δεν θα μπορούσε να είναι ούτε εκφυλισμένη και αυτό διότι θα έπρεπε η αρχή να είναι μη γραμμικό κέντρο όταν  $\mu = 0$ . Αλλά το  $\dot{r}$  είναι αυστηρά θετικό μακριά από τον άξονα  $x$  οπότε οι κλειστές τροχιές είναι ακόμη αδύνατες.

Το μόνο που μένει είναι η υποκρίσιμη. Χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή για  $\mu = -0.2$  έχουμε το παρακάτω πορτραίτο φάσης:



Σχήμα 2.4: Πορτραίτο φάσεων για διαφορετικές αρχικές τιμές.

Παρατηρούμε ότι ένας ασταθής οριακός κύκλος περιβάλλει το ευσταθές σταθερό σημείο, όπως ακριβώς περιμέναμε από μια υποκρίσιμη διακλάδωση.

Επίσης, ο κύκλος είναι ελλειπτικός και περιβάλλει μια τυλιγμένη σφαίρα, τα οποία είναι τυπικά χαρακτηριστικά των διακλαδώσεων Hopf. Για διαφορετικές αρχικές τιμές όπου δεν δημιουργείται ασταθής κύκλος έχουμε την κατεύθυνση προς το άπειρο (Σχήμα 3.2: καμπύλες με το χρώμα γαλάζιο, κόκκινο και μώβ)

## Κεφάλαιο 3

# Αριθμητικές Μέθοδοι και Υλοποίηση Μεθόδων

Για εφαρμογές του θεωρήματος Poincaré - Bendixson καθώς και των διακλαδώσεων Hopf θα εξετάσουμε μια κατηγορία πειραματικών συστημάτων. Αυτά τα συστήματα είναι αξιολογώτα, τόσο για τη θεαματική τους συμπεριφορά όσο και για την ιστορία πίσω από την ανακάλυψή τους.

### 3.1 Μελέτη του συστήματος της γλυκόλυσης

Στη θεμελιώδη βιοχημική διαδικασία που ονομάζεται **γλυκόλυση**, τα ζωντανά κύτταρα λαμβάνουν ενέργεια με τη διάσπαση του σακχάρου. Σε άθικτα κύτταρα ζυμομύκητα καθώς και σε εκχυλίσματα μυκήτων ή μυών, η γλυκόλυση μπορεί να προχωρήσει με ταλαντευτικό τρόπο, με τις συγκεντρώσεις των διάφορων ενδιάμεσων ενώσεων να αυξάνονται και να μειώνονται σε διάστημα αρκετών λεπτών.

Ένα απλό μοντέλο αυτών των ταλαντώσεων έχει προταθεί από τον Sel'kov (1968), το οποίο έχει τις εξής εξισώσεις:

$$\dot{x} = -x + ay + x^2y$$

$$\dot{y} = b - ay - x^2y$$

όπου  $x, y$  είναι οι συγκεντρώσεις βιοχημικών ενώσεων και  $a, b$  είναι κινητικές παράμετροι. Θα κατασκευάσουμε μια περιοχή παγίδευσης για το σύστημα από τις καμπύλες μηδενικής κλίσης. Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε την ύπαρξη κλειστής τροχιάς για κατάλληλα  $a, b$ .

Πρώτα βρίσκουμε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατασκευάσουμε μια περιοχή που θα λειτουργήσει ως παγίδα για τον σκοπό μας.

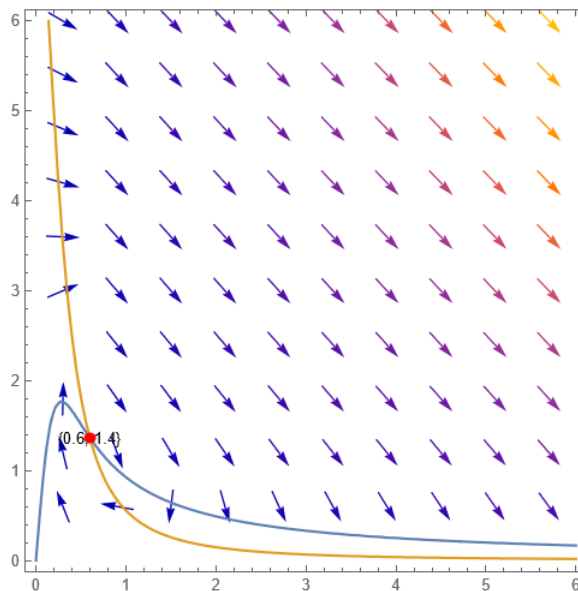
Για την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι  $\dot{x} = 0$  στην καμπύλη

$$y = \frac{x}{(a + x^2)}$$

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι  $\dot{y} = 0$  στην καμπύλη

$$y = \frac{b}{(a + x^2)}$$

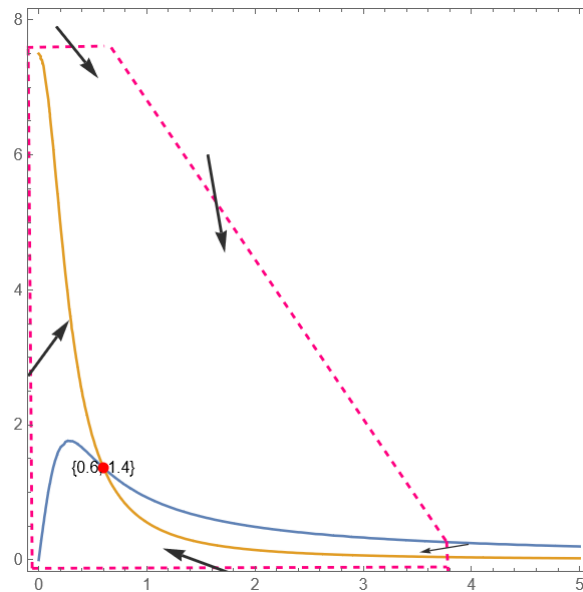
Αυτές οι καμπύλες φαίνονται στο σχήμα μαζί με μερικά αντιπροσωπευτικά διανύσματα.



Σχήμα 3.1: Πορτραίτο φάσης για  $a = 0.08$  και  $b = 0.6$

Για τον σχηματισμό αυτών των διανυσμάτων χρησιμοποιήσαμε ότι τα βέλη πρέπει να είναι κάθετα στην καμπύλη μηδενικής κλίσης της  $\dot{x} = 0$  και οριζόντια στην  $\dot{y} = 0$ . Η κατεύθυνση της ροής καθορίζεται από το πρόσημο των  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$ . Για παράδειγμα στην περιοχή πάνω από τις καμπύλες μηδενικής κλίσης ισχύει ότι  $\dot{x} > 0$  και  $\dot{y} < 0$ , έτσι τα βέλη δείχνουν κάτω και δεξιά.

Τώρα στο παρακάτω σχήμα δίνουμε την οριοθετημένη περιοχή που αναζητούσαμε. Θέλουμε όλα τα διανύσματα κοντά στο σταθερό σημείο να είναι μέσα σε αυτή την περιοχή. Στην οριζόντια και κάθετη πλευρά προκύπτει εύκολα από την εικόνα. Το δύσκολο κομμάτι είναι η διαγώνια γραμμή με κλίση  $-1$  που εκτείνεται από το σημείο  $(b, b/a)$  ως την καμπύλη μηδενικής κλίσης  $y = \frac{x}{(a+x^2)}$ .



Σχήμα 3.2: Περιοχή παγίδευσης για  $a = 0.08$  και  $b = 0.6$

Για να πάρουμε την σωστή κλίση δουλεύουμε ως εξής. Θεωρούμε τα  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$  στο όριο του πολύ μεγάλου  $x$  τότε έχουμε ότι:

$$\dot{x} \approx x^2 y \quad \text{και} \quad \dot{y} \approx -x^2 y$$

Έτσι κατά μήκος των τροχιών έχουμε:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \approx -1$$

Ως εκ τούτου, το διανυσματικό πεδίο είναι περίπου παράλληλο στη διαγώνια γραμμή. Για πιο ακριβή υπολογισμό πρέπει να συγκρίνουμε τα μεγέθη των  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$  για αρκετά μεγάλο  $x$ . Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x} - (-\dot{y}) &= -x + ay + x^2 y + (b - ay - x^2 y) \\ &= b - x \end{aligned}$$

Οπότε

$$-\dot{y} > \dot{x} \quad \text{εάν} \quad x > b$$

Αυτή η ανισότητα μας δίνει ότι το διανυσματικό πεδίο δείχνει προς τα μέσα στη διαγώνια γραμμή επειδή το  $dy/dx$  είναι πιο αρνητικό από το  $-1$ . Έτσι κατασκευάσαμε την περιοχή παγίδευσης.

Ακόμη όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε την ύπαρξη κλειστής τροχιάς καθώς υπάρχει ένα σταθερό σημείο και είναι κάτι που δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Poincaré - Bendixson. Όμως αν αυτό το σημείο είναι

απωθητικό τότε μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε κανονικά. Οπότε μένει να δούμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι απωθητικό αυτό το σημείο δηλαδή είναι ασταθής σπείρα ή κόμβος.

Ο Ιακωβιανός είναι ο:

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -(a + x^2) \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε με πράξεις ότι το σταθερό σημείο είναι το

$$x^* = b, \quad y^* = \frac{b}{a/a + b^2}$$

Οπότε ο Ιακωβιανός έχει ορίζουσα:

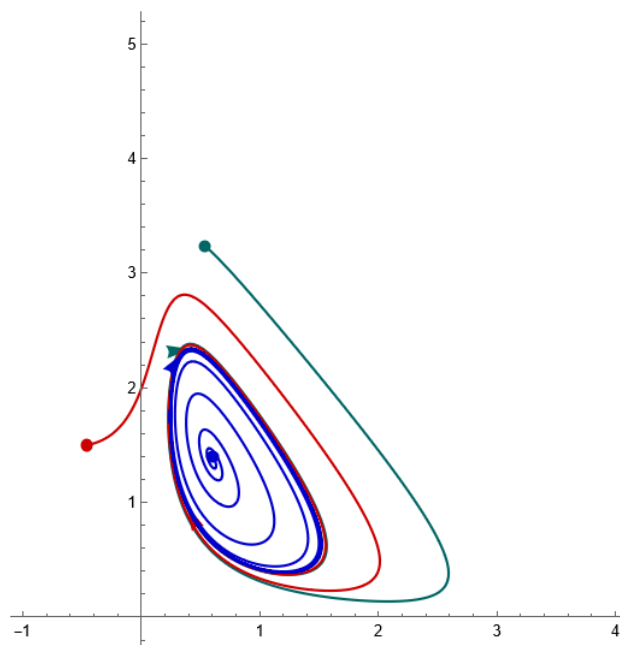
$$\Delta = a + b^2$$

και ίχνος:

$$\tau = -\frac{b^4 + (2a - 1)b^2 + (a + a^2)}{a + b^2}$$

Επομένως, το σταθερό σημείο είναι ασταθές για  $\tau > 0$  και ευσταθές για  $\tau < 0$ . Η διαχωριστική γραμμή  $\tau = 0$  εμφανίζεται όταν  $b^2 = \frac{1}{2}(1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a})$

Άρα για παραμέτρους  $a, b$  που ισχύει ότι  $\tau > 0$  είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει κλειστή τροχιά. Παρακάτω φαίνεται και το πορτραίτο φάσης:



Σχήμα 3.3: Πορτραίτο φάσης για διαφορετικές αρχικές τιμές

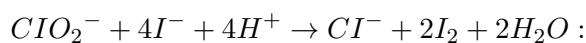
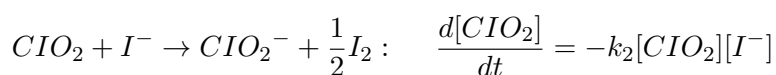
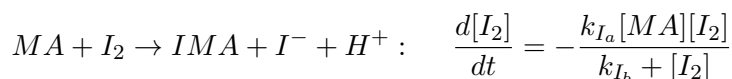


### 3.2 Αντίδραση του διοξειδίου του χλωρίου - Ιωδίου και μηλονικού οξέος

Στις αρχές της δεκαετίας του 1950, ο Ρώσος βιοχημικός Boris Belousov προσπάθησε να δημιουργήσει μια καρικατούρα δοκιμαστικού σωλήνα του κύκλου Krebs μια μεταβολική διαδικασία που συμβαίνει σε ζωντανά κύτταρα. Όταν ανάμειξε κιτρικό οξύ και ιόντα βρωμίου σε διάλυμα θειικού οξέος και παρουσία καταλύτη δημητρίου, παρατήρησε ότι το μείγμα έγινε κίτρινο, μετά ξεθώριασε σε άχρωμο μετά από περίπου ένα λεπτό και μετά επέστρεψε σε κίτρινο ένα λεπτό αργότερο. Συνέχισε να ταλαντώνεται δεκάδες φορές πριν τελικά φτάσει σε ισορροπία μετά από περίπου μια ώρα. Σήμερα δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι χημικές αντιδράσεις μπορούν να ταλαντωθούν αυθόρμητα. Έπειτα από χρόνια ο φοιτητής Zhabotinsky επιβεβαίωσε το αποτέλεσμα που δημοσιεύθηκε από τον Belousov και αναγνωρίστηκε καθώς για τα χρόνια του Belousov ήταν πολλή ριζοσπαστική. Αργότερα τιμήθηκαν με το βραβείο Λένιν που αποτελούσε το υψηλότερο μετάλλιο της Σοβιετικής ένωσης

Οι μηχανισμοί των χημικών ταλαντώσεων μπορεί να είναι πολύ περίπλοκοι. Η αντίδραση BZ πιστεύεται ότι περιλαμβάνει περισσότερα από είκοσι στοιχειώδη στάδια αντίδρασης, με τα περισσότερα από αυτά να σταθεροποιούνται γρήγορα. Αυτό επιτρέπει στην κινητική να μειωθεί σε μόλις τρεις διαφορικές εξισώσεις.

Σε παρόμοιο πνεύμα οι Lengyel περίπου το 1990 πρότεινε το ανέλυσε ένα ιδιαίτερα κομψό μοντέλο μιας άλλης ταλαντούμενης αντίδρασης, της αντίδρασης διοξειδίου του χλωρίου - ιωδίου και μηλονικού οξέος ( $CIO_2 - 1, -MA$ ). Τα πειράματα τους δείχνουν ότι οι ακόλουθες τρεις αντιδράσεις και οι εμπειρικοί νόμοι ρυθμού αποτυπώνουν τη συμπεριφορά του συστήματος:



$$\frac{d[CIO_2^-]}{dt} = -k_{3a}[CIO_2^-][I^-] + [H^+] - k_{3b}[CIO_2^-][I_2] \frac{[I^-]}{u + [I^-]^2}$$

Η αριθμητική ολοκλήρωση των παραπάνω δείχνει ότι το μοντέλο παρουσιάζει ταλαντώσεις που μοιάζουν πολύ με αυτές που παρατηρήθηκαν πειραματικά. Ωστόσο παραμένει περίπλοκο. Για να το απλοποιήσει ο Lengyel χρησιμοποίησε ένα αποτέλεσμα που βρέθηκε στις προσομοιώσεις του. Πιο συγκεκριμένα, παρατήρησε ότι τρία από τα αντιδρώντα ( $MA$ ,  $I_2$  και  $CIO_2$ ) μεταβάλλονται πολύ πιο αργά από τα ενδιάμεσα  $I^-$  και  $CIO_2^-$  που αλλάζουν κατά πολλές τάξεις μεγέθους κατά την διάρκεια μιας περιόδου ταλάντωσης. Οπότε προσεγγίζοντας τις συγκεντρώσεις των αργών αντιδρώντων ως σταθερές και κάνοντας άλλες

εύλογες απλοποιήσεις, ανάγουν το σύστημα σε ένα μοντέλο δύο μεταβλητών. Μετά από κατάλληλη μη αδιαστατοποίηση, το μοντέλο γίνεται:

$$\dot{x} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2} \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right) \quad (3.2)$$

όπου  $x, y$  είναι οι αδιάστατες συγκεντρώσεις του  $I^-$  και  $ClO_2^-$ . Οι παράμετροι  $a, b > 0$  εξαρτώνται από τις εμπειρικές σταθερές ρυθμού και από τις συγκεντρώσεις που θεωρούμε για τα αργά αντιδρώντα.

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα έχει μια κλειστή τροχιά στο θετικό τεταρτημόριο  $x > 0, y > 0$  εάν τα  $a$  και  $b$  ικανοποιούν ορισμένους περιορισμούς που θα προσδιορίσουμε.

Πρώτα βρίσκουμε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατασκευάσουμε μια περιοχή παγίδευσης.

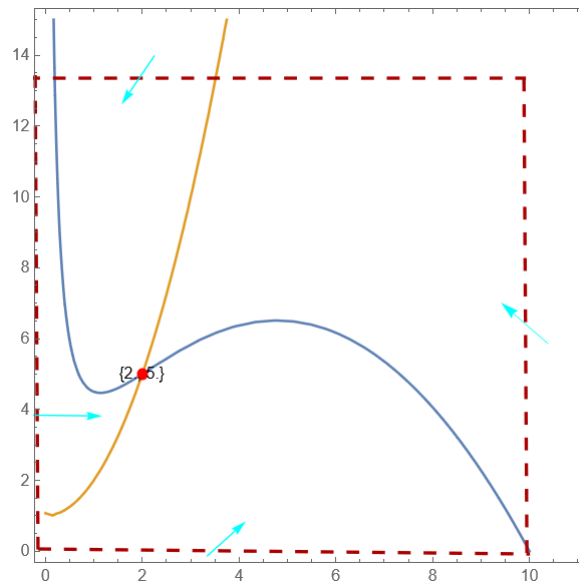
Για την εξίσωση 3.1 ισχύει  $\dot{x} = 0$  στην καμπύλη

$$y = \frac{(a-x)(1+x^2)}{4x}$$

Ενώ για την 3.2 ισχύει  $\dot{y} = 0$  στην παραβολή

$$y = 1 + x^2$$

Το διάγραμμα των καμπυλών μηδενικών κλίσης φαίνεται παρακάτω. Το διακεκομμένο πλαίσιο είναι η περιοχή παγίδευσης επειδή όλα τα διανύσματα στο οριακό σημείο είναι μέσα σε αυτό.



Σχήμα 3.4: Παγιδευμένη περιοχή για τις καμπύλες μηδενικής κλίσης του συστήματος μας όταν  $a = 10$  και  $b = 2$ .

Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ακόμα το θεώρημα Poincaré - Bendixson επειδή υπάρχει ένα σταθερό σημείο μέσα στην περιοχή στο σημείο τομής των καμπυλών.

$$x^* = a/5 \quad y^* = 1 + (x^*)^2 = 1 + (a/5)^2$$

Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την επιχειρηματολογία ότι αν το σταθερό σημείο είναι απωθητικό μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Poincaré - Bendixson στην περιοχή που έχουμε επιλέξει αφαιρώντας το σταθερό σημείο. Το μόνο που μένει είναι να δούμε υπό ποιες συνθήκες (εάν υπάρχουν) το σταθερό σημείο είναι απωθητικό.

Ο Ιακωβιανός στο  $(x^*, y^*)$  είναι ο

$$\frac{1}{1 + (x^*)^2} \begin{pmatrix} 3(x^*)^2 - 5 & -4x^* \\ 2b(x^*)^2 & -bx^* \end{pmatrix}$$

Επίσης η ορίζουσα και το ίχνος είναι τα:

$$\Delta = \frac{5bx^*}{1 + (x^*)^2} > 0 \quad \tau = \frac{3(x^*)^2 - 5 - bx^*}{1 + (x^*)^2}$$

Το γεγονός ότι η ορίζουσα είναι θετική μας βοηθάει για να αποφανθούμε ότι το σταθερό σημείο δεν είναι σαγματικό. Άρα το  $(x^*, y^*)$  είναι απωθητικό εάν και  $\tau > 0$  δηλαδή εάν:

$$b < b_c \equiv 3a/5 - 25/a$$

Επομένως από το θεώρημα Poincaré - Bendixson έχοντας τον περιορισμό για το  $b$  ισχύει ότι υπάρχει μια κλειστή τροχιά κάπου στην περιοχή που έχουμε επιλέξει.

### 3.3 Διακλάδωση Hopf στην αντίδραση του διοξειδίου του χλωρίου - Ιωδίου και μηλονικού οξέος

Έχοντας ξανά το σύστημα που μελετήσαμε στην παράγραφο 3.2

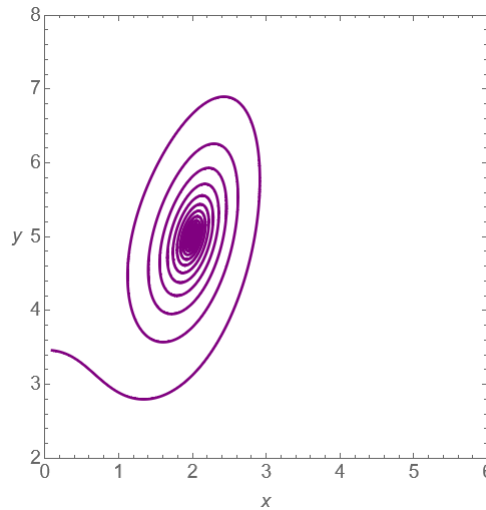
$$\dot{x} = a - x - \frac{4xy}{1+x^2}$$

$$\dot{y} = bx\left(1 - \frac{y}{1+x^2}\right)$$

θα δείξουμε ότι για  $b = b_c$  συμβαίνει διακλάδωση Hopf και θα προσπαθήσουμε να αποφανθούμε αν είναι υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη.

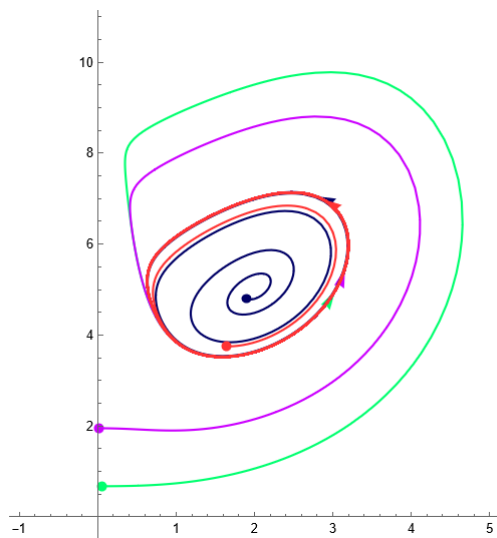
Τα αποτελέσματα που δείξαμε πριν υπονοούν ότι καθώς το  $b$  μειώνεται μέσω του  $b_c$ , το σταθερό σημείο αλλάζει από ευσταθή σε ασταθή σπείρα. Αυτό είναι χαρακτηριστικό της διακλάδωσης Hopf.

Στα παρακάτω πορτραίτα φάσης βλέπουμε ότι στο (α) όπου  $b > b_c$  όλες οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς στο ευσταθή σταθερό σημείο



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα φάσης όταν  $a = 10$  και  $b = 4$  δηλαδή όταν έλκονται από σταθερό σημείο.

ενώ όταν  $b < b_c$  οι τροχιές έλκονται από ένα ευσταθή οριακό κύκλο.



Σχήμα 3.6: Διάγραμμα φάσης όταν  $a = 10$  και  $b = 2$  δηλαδή όταν έλκονται από οριακό κύκλο.

Αφού το σταθερό σημείο μετά που θα χάσει την ευστάθεια του περιβάλλεται από ευσταθή οριακό κύκλο συμπεραίνουμε ότι η διακλάδωση είναι υπερκρίσιμη.

### 3.4 Διακλάδωση Hopf σε ένα μοντέλο διαφήμισης

Υπάρχει μια μακρά παράδοση στη μακροοικονομία που υποδηλώνει ότι οι ατέλειες της αγοράς μπορούν να εξηγήσουν γιατί οι οικονομίες περνούν επανειλημμένα από περιόδους άνθησης και κατάρρευσης, με την άνθηση να σπέρνει τους σπόρους των επόμενων αποτυχιών. Το φαινόμενο αυτό έχει μοντελοποιηθεί από οικονομολόγους σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων και αυτή η περιοδικότητα έχει επίσης μοντελοποιηθεί για την περιοδική συμπεριφορά των λύσεων τους, που περιγράφονται από ένα οριακό κύκλο. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα μοντέλο διάχυσης δύο καταστάσεων για επαναλαμβανόμενες αγορές. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια οικονομική περιγραφή του μαθηματικού αποτελέσματος που εξάγαμε.

Η δυναμική του συστήματος των μοντέλων διάχυσης της διαφήμισης επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από τη μαθηματική επιδημιολογία. Σε αναλογία με την εξάπλωση μιας επιδημικής ασθένειας, η κρίσιμη ιδέα είναι ότι οι δυνητικοί αγοραστές στην αγορά μαθαίνουν για μια συγκεκριμένη πληροφορία έρχονται σε επαφή με ένα διαφημιστικό μέσο ή από στόμα σε στόμα. Το μοντέλο διαφήμισης μετάδοσης που θα μελετήσουμε προϋποθέτει ότι οι πληροφορίες διαδίδονται από άτομα που γνωρίζουν το προϊόν σε άτομα που δεν το γνωρίζουν από στόμα σε

στόμα, η οποία υποστηρίζεται από τη διαφήμιση. Αν υποθέσουμε ότι ένα σταθερό ποσοστό ενημερωμένων ατόμων αγοράζει επίσης το προϊόν, μας δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε την «ευαισθητοποίηση δημιουργίας» μηχανισμού στην απόφαση αγοράς.

Χωρίζουμε τον αριθμό των ατόμων της αγοράς σε  $X_1(t)$  να είναι ο αριθμός των πιθανών αγοραστών μιας ειδικής μάρκας τη χρονική στιγμή  $t$  και  $X_2(t)$  να είναι ο αριθμός των πελατών αυτής της μάρκας εκείνη τη χρονική στιγμή.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των πιθανών αγοραστών που θα αγοράσουν και επομένως θα γίνουν πελάτες σε οποιοδήποτε σύντομο χρονικό διάστημα είναι ανάλογος με τον τρέχοντα αριθμό πιθανών αγοραστών, τον αριθμό των πελατών και τη διάρκεια του διαστήματος. Η σταθερά της αναλογικότητας ονομάζεται ρυθμός επαφής. Αυτός ο ρυθμός επαφής, αντιπροσωπεύει τον αριθμό των πιθανών αγοραστών με τους οποίους επικοινωνεί ανά μονάδα χρόνου κάθε πελάτης. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι αυξάνοντας τις διαφημιστικές δαπάνες ο ρυθμός επαφής μπορεί να αυξηθεί. Για απλότητα, ταυτίζουμε τον ρυθμό επαφής με τις διαφημιστικές δαπάνες τη στιγμή  $t$  και το συμβολίζουμε με  $a(t)$ .

Στην συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι οι τρέχοντες πελάτες μεταβαίνουν σε μια ανταγωνιστική επωνυμία με σταθερό ρυθμό  $\beta$ . Το μέγεθος αυτής της παραμέτρου θα επηρεαστεί από την άνοδο άλλων σχετικών εμπορικών επωνυμιών ή εταιρειών που πωλούν παρόμοια προϊόντα. Επίσης υπάρχουν τα άτομα μπορούν να επιστρέψουν στην αρχική επωνυμία, οπότε παραμένουν στην ομάδα των πιθανών πελατών. Τέλος, υποθέτουμε ότι κάποιιοι από τους τρέχοντες πελάτες εγκαταλείπουν την αγορά για πάντα (π.χ. λόγω μετανάστευσης ή θνησιμότητας) με σταθερό ρυθμό  $\epsilon$ . Θα συμβολίζουμε το άθροισμα αυτών των ρυθμών με  $\delta = \beta + \epsilon$ .

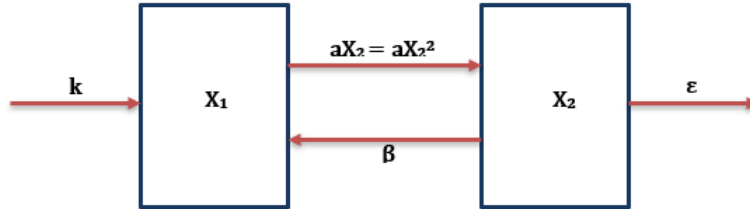
Ξανά για λόγους απλότητας θα υποθέτουμε ότι τα άτομα εισέρχονται στην αγορά της εταιρείας με σταθερό ρυθμό εισροών  $k$ .

Οι ροές των ατόμων από και προς τις δύο διαφορετικές ομάδες περιγράφονται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{X}_1(t) = k - a(t)X_1(t)X_2(t) + \beta X_2(t) \quad (3.3)$$

$$\dot{X}_2(t) = a(t)X_1(t)X_2(t) + \delta X_2(t) \quad (3.4)$$

Το διάγραμμα μετάβασης του μοντέλου αποθέματος - ροής που διέπεται από τις (3.3), (3.4) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα μετάβασης του μοντέλου διαφημιστικής διάχυσης.

Η δεύτερη κύρια υπόθεση του μοντέλου αναφέρεται στον ενδογενή προσδιορισμό του ρυθμού διαφήμισης. Στη βιβλιογραφία του μάρκετινγκ συχνά συνιστάται ο ακόλουθος κανόνας: Πρέπει να κατανέμετε ένα σταθερό ποσοστό των εσόδων από τις πωλήσεις στη διαφήμιση. Αποδεικνύεται ότι για διάφορα διαχρονικά μοντέλα βελτιστοποίησης και με την παραδοχή σταθερών ελαστικοτήτων, το βέλτιστο ποσοστό εσόδων που θα πρέπει να δαπανηθεί για τη διαφήμιση είναι σταθερό. Δεδομένου ότι αυτός ο «κανόνας σταθερού ποσοστού» είναι επίσης εύκολο να εφαρμοστεί από τους διευθυντές πωλήσεων, δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι παίζει σημαντικό ρόλο στον τομέα του μάρκετινγκ.

Αν υποθέσουμε σταθερή τιμή πώλησης για το προϊόν και σταθερό ρυθμό επαναλαμβανόμενων πωλήσεων ανά πελάτη, το ποσοστό διαφήμισης που προκύπτει είναι ανάλογο με τον αριθμό των αγοραστών, δηλαδή:

$$a(t) = \alpha X_2(t) \quad (3.5)$$

όπου  $\alpha$  είναι το (σταθερό) ποσοστό αναλογικότητας που μετρά την αποτελεσματικότητα της διαφήμισης.

Συνδυάζοντας τα (3.3), (3.4) και (3.5) προκύπτει το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{X}_1 = k - \alpha X_1 X_2^2 + \beta X_2$$

,

$$\dot{X}_2 = \alpha X_1 X_2^2 - \delta X_2$$

Θα μελετήσουμε τις λύσεις του συστήματος για αρχικές τιμές που θα ισχύει:

$$X_1(0) \geq 0, \quad X_2(0) \geq 0$$

Επίσης οι σταθερές  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\delta$  είναι θετικές. Επιπλέον  $\delta - \beta > 0$

Για να προσδιορίσουμε την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος πραγματοποιούμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$x_1 = \left(\frac{\alpha k}{\delta \varepsilon}\right) X_1 \quad x_2 = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) X_2, \quad \tau = \delta t$$

Τότε το σύστημα παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \gamma[1 - x_1x_2^2 + \phi(x_2 - 1)] \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2^2 - x_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου  $\gamma = ak^2/\delta\varepsilon^2$ ,  $\phi = \beta/\delta$ .

Οι νέες αρχικές συνθήκες είναι οι:

$$x_1(0) = \left(\frac{\alpha k}{\delta\varepsilon}\right)X_1(0)$$

$$x_2(0) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)X_2(0)$$

Επισημαίνουμε ότι  $\gamma > 0$  και  $0 \leq \phi < 1$ .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδεικνύει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας σταθερής λύσης του (3.6). Επιπλέον, χαρακτηρίζει την ευστάθεια του.

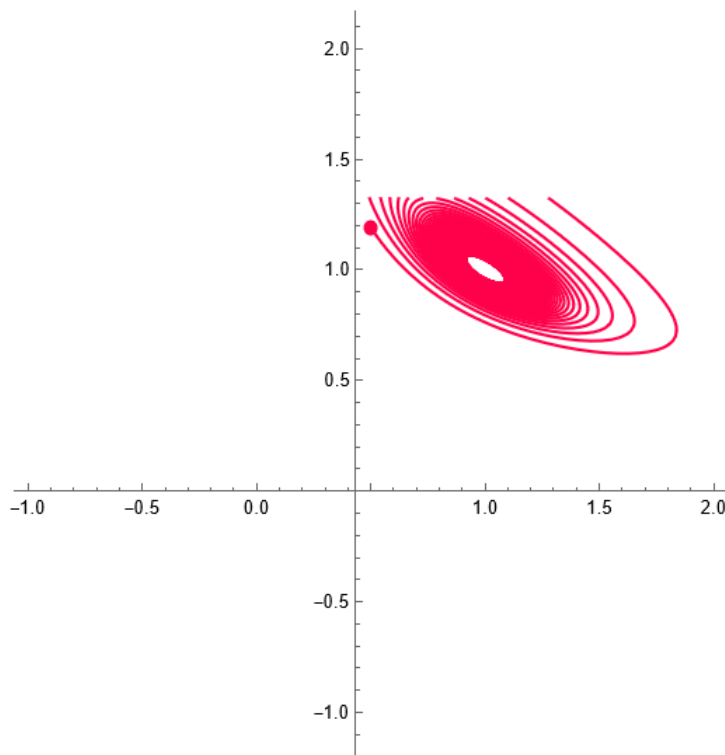
**Πρόταση:** Υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο  $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = (1, 1)$  του συστήματος (3.6). Επίσης υπάρχει ένα  $\gamma_i$ , ( $i = 1, 2$ ) όπου  $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$  τέτοια ώστε να έχουμε:

- ένα ασταθή κόμβο εάν και μόνο εάν  $\gamma \in [0, \gamma_1)$ ,
- μια ασταθή εστία εάν και μόνο εάν  $\gamma \in (\gamma_1, 1)$
- μια ευσταθή εστία εάν και μόνο εάν  $\gamma \in (1, \gamma_2)$
- ένα ευσταθή κόμβο εάν και μόνο εάν  $\gamma \in (\gamma_2, \infty)$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι, μπορεί υπάρχει ένας μοναδικός ευσταθής οριακός κύκλος κοντά στο σταθερό σημείο, τότε αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση όπου  $\gamma \in (\gamma_1, 1)$  όπου έχουμε ασταθή εστία. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το σύστημα (3.6) έχει ένα ζεύγος απλών φανταστικών ιδιοτιμών για  $\gamma = 1$  και μάλιστα οι ιδιοτιμές  $x_1, x_2$  διασχίζουν τον φανταστικό άξονα στην κρίσιμη τιμή  $\gamma_0 = 1$ . Άρα υπάρχει μια ποιοτική αλλαγή της τοπικής ροής κοντά στην ισορροπία (1,1). Επομένως έχουμε διακλάδωση Hopf και έπεται η ύπαρξη ενός ευσταθής οριακού κύκλου.

Το πορτραίτο φάσης του μοντέλου διαφήμισης που μελετάμε για  $\gamma = 0.9$ ,  $\phi = 0.1$  είναι το:





Σχήμα 3.8: Πορτραίτο φάσης για τις αρχικές συνθήκες  $x(0) = 0.5$  και  $y(0) = 1.19$

Στην οικονομία γνωρίζουμε ότι όταν ο αριθμός των σημερινών πελατών είναι χαμηλός, η εταιρεία δεν μπορεί να αντέξει οικονομικά να διαφημιστεί επαρκώς λόγω του κανόνα Dorfman-Steiner. Ο οποίος κανόνας ισχυρίζεται το εξής: «Οι εταιρείες μπορούν να αυξήσουν τις πωλήσεις τους είτε μειώνοντας την τιμή του αγαθού είτε πείθοντας τους καταναλωτές να αγοράσουν περισσότερα αυξάνοντας τις διαφημιστικές δαπάνες. Το βέλτιστο επίπεδο διαφήμισης για μια επιχείρηση βρίσκεται όπου ο λόγος της διαφήμισης προς τις πωλήσεις ισούται με το περιθώριο τιμής-κόστους επί τη διαφημιστική ελαστικότητα της ζήτησης.» Το προφανές αποτέλεσμα είναι ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός ευαισθησίας της ζητούμενης ποσότητας στη διαφήμιση και όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο στην επιπλέον παραγωγή, τόσο υψηλότερο είναι το επίπεδο διαφήμισης.

Ωστόσο, η ισχυρή ανάπτυξη στην αγορά (το σύνολο των πιθανών πελατών) επιτρέπει ακόμη και μικρά ποσά διαφημίσεων που θα οδηγήσουν σε αύξηση των πιστών πελατών. Καθώς οι πωλήσεις της εταιρείας αρχίζουν να αυξάνονται, τόσο αυξάνεται και η διαφημιστική της προσπάθεια. Τελικά, το επίπεδο διαφήμισης γίνεται τόσο υψηλό που ο ρυθμός με τον οποίο οι πελάτες προσελκύονται από την πηγή των δυνητικών πελατών υπερβαίνει τον φυσικό ρυθμό ανάπτυξης του, προκαλώντας έτσι την αργή εξάντλησή του. Αυτή είναι η αρχή της

αυτοκαταστροφής: παρά τις συνεχιζόμενες αυξήσεις στο επίπεδο διαφήμισης, το μειούμενο απόθεμα δυνητικών πελατών καθιστά ολοένα και πιο δύσκολη τη διατήρηση του ρυθμού ανάπτυξης των (νεοπροσελκυθέντων) πιστών πελατών. Εφόσον ένα δεδομένο κλάσμα επαναλαμβανόμενων αγοραστών πεθαίνει κάθε περίοδο, οι πωλήσεις τελικά θα μειωθούν και η διαδικασία της «δημιουργικής αυτοκαταστροφής» ξεκινά από την αρχή.

# Βιβλιογραφία

- [1] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering I*. 1994.
- [2] Παλαπουγιούκ Κοκώνα-Ραφαηλία Διπλωματική Εργασία:Μη γραμμικές ταλαντώσεις σε μαθηματικά μοντέλα της βιολογίας.
- [3] G. Feichtinger. *Limit Cycles in Dynamic Economic Systems*. Austria.
- [4] Paul Beaudry, Dana Galizia, Franck Portier. *Revising the limit cycle view of macroeconomic fluctuation*.Cambridge, 2015.
- [5] Van der Pol, B. and Van der Mark, J. *Frequency demultiplication*. *Nature* 120, 363-364. 1927.
- [6] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier. *Frequency demultiplication. Qualitative theory of second order dynamical systems*. Wiley, New-York, 1973.
- [7] W. E. Boyce and R. C. Diprima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*.4th ed. Wiley, New-York, 1986.
- [8] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations. An Introduction to Dynamical Systems*.3rd ed. Oxford University Press, 2003.
- [9] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1990.

## Παράρτημα Α'

# Πρόγραμμα Mathematica

Ενδεικτικά δίνουμε το πρόγραμμα εξαγωγής των καμπυλών μηδενικής κλίσης καθώς και του πορτραίτου φάσης στο παράδειγμα της γλυκόλυσης

```
In[ ]:= f[x_, y_] = -x + 0.08 y + x^2 y;  
g[x_, y_] = 0.6 - 0.08 y - x^2 y;  
  
cp = ContourPlot[{f[x, y] == 0, g[x, y] == 0}, {x, 0, 5}, {y, 0, 8}];  
ptRules = NSolve[{f[x, y] == 0, g[x, y] == 0}, {x, y}];  
pl1 = Show[cp, Graphics[{Red, PointSize[Large], Point[{x, y]} /. ptRules  
Graphics[Text[ToString[Round[#, .2]], #] & /@ ({x, y} /. ptRules)]]  
  
In[ ]:= Clear["Global`*"]  
  
In[ ]:= << EquationTrekker`  
  
EquationTrekker[{ x'[t] == -x[t] + a*y[t] + (x[t])^2*y[t],  
y'[t] == b - a*y[t] - (x[t])^2*y[t]}, {x, y}, {t, 0, 1000},  
PlotRange -> {{-1, 4}, {0, 5}},  
TrekParameters -> {a -> 0, b -> 0.5}]
```