ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

«Βελτιστοποίηση αλγορίθμου με τη χρήση γραφημάτων.»
“Algorithm optimization using graphs”

ΓΑΛΑΖΙΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΜ: 134825

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Αλεξίου Δήμητρα

Χανιά, Σεπτέμβριος 2022

Πρόλογος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
Αλεξίου Δήμητρα
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Τμήμα Μηχανικών
Χωροταξίας Και Ανάπτυξης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Ανούσης Μιχαήλ
Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών

Στην Ράνια

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ πολύ τους καθηγητές μου στο ΕΑΠ για τις γνώσεις που μου μεταλαμπάδευσαν.

Ιδιαιτέρως ευχαριστώ την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα. Αλεξίου Δήμητρα, για την σωστή καθοδήγηση και την επιμονή που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της πτυχιακής μου.

Ιδιαιτέρως ευχαριστώ τον αδελφό μου Γαλάζιο Δημήτριο για την βοήθεια και τις γνώσεις που μου μετέφερε κυρίως στον προγραμματισμό με Python.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάπτυξη της επιστήμης και της τεχνολογίας έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της πολυπλοκότητας της καθημερινότητας κάθε ανθρώπου. Εταιρίες, ιδρύματα, κράτη έχουν την ανάγκη όλο ένα και περισσότερα να βρουν σύγχρονα εργαλεία που θα τους βοηθήσουν στη βέλτιστη λήψη των αποφάσεων.

Η θεωρία Γραφημάτων έχει πολλές εφαρμογές σε πολλά καθημερινά προβλήματα. Χρησιμοποιεί ένα σύνολο κόμβων (ή σημείων) οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο ακμών (ή γραμμών). Μπορεί να επιλύσει και να απλουστεύσει προβλήματα με την χρήση των αλγορίθμων.

Η παρούσα διπλωματική εργασία (Δ.Ε.) πραγματεύεται το πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων (School Bus Routing Problem - SBRP). Ειδικότερα στόχος της είναι ο σχεδιασμός ενός αποτελεσματικού χρονοδιαγράμματος συγκεκριμένου στόλου σχολικών λεωφορείων με απώτερο σκοπό την παραλαβή μαθητών από τις κατοικίες και την παράδοση τους σε συγκεκριμένη τοποθεσία (σταθερό σημείο) στο σχολείο ικανοποιώντας συγκεκριμένους περιορισμούς και προϋποθέσεις.

Στην συγκεκριμένη πτυχιακή γίνεται βιβλιογραφική αναφορά στη θεωρία των Γράφων και στο πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων (SBRP), η οποία μπορεί να αποτελέσει βοηθητικό εργαλείο σε μελλοντικές πτυχιακές. Επιπλέον, προτείνεται συγκεκριμένος αλγόριθμος επίλυσης του παραπάνω προβλήματος. Όλοι οι υπολογισμοί θα γίνουν με την χρήση της Python και του Mathematica (έκδοση 12.0). Θα εξαχθούν και θα αναλυθούν επιστημονικά τα αποτελέσματα του αλγορίθμου.

Λέξεις Κλειδιά

Θεωρία γραφημάτων, Γράφος, αλγόριθμος, School Bus Routing Problem, SBRP, Dijkstra.

ABSTRACT

Scientific and technological progress has resulted in increasing the complexity of every human being’s daily life. Companies, institutions and states constantly need to find modern tools to assist them in making the best decisions possible.

Graph theory has multiple applications in many everyday problems. It makes use of a set of nodes (or points) that are connected to each other by a set of edges (or lines). It can resolve and simplify problems by using algorithms.

The current dissertation deals with the School Bus Routing Problem (SBRP). More specifically, it aims to design an effective timetable for a specific fleet of school buses with the ultimate goal of picking up students from their houses and delivering them to a specific location (fixed point) at the school, while overcoming specific restrictions and meeting certain conditions.

In the present thesis, a bibliographic reference is made to Graph theory and the School Bus Routing Problem (SBRP) and can act as a supplementary tool for future dissertations. Furthermore, a specific algorithm for solving the aforementioned problem is proposed. All calculations will be carried out using Python and Mathematica (version 12.0). The results of the algorithm will be extracted and scientifically analyzed.

Key words

Graph theory, Graph, algorithm, School Bus Routing Problem, SBRP, Dijkstra.

1. Εισαγωγή

1.1 Στόχος Διπλωματικής Εργασίας

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η θεωρητική προσέγγιση της θεωρίας γραφημάτων και του προβλήματος δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων (School Bus Routing Problem - SBRP). Για μια μοναδική σταθερή τοποθεσία (κόμβος σχολείο) θα σχεδιαστεί ένας αλγόριθμος, ο οποίος θα έχει στόχο την βελτιστοποίηση συγκεκριμένου χρονοδιαγράμματος παραλαβής μαθητών από τις κατοικίες του (οι οποίοι θα αποτελέσουν συγκεκριμένοι κόμβοι) και παράδοσή τους στην τοποθεσία αυτή **[1,2].** Προτείνεται συγκεκριμένος αλγόριθμος ο οποίος ικανοποιεί συγκεκριμένους περιορισμούς όπως η μείωση της μέσης παραμονής των μαθητών στα λεωφορεία, επιλογή σημείων στάσης των λεωφορείων έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η μέση πεζή απόσταση από την κατοικία των μαθητών προς εκείνα τα σημεία, η διαδικασία μεταφοράς όλων των μαθητών στη σταθερή τοποθεσία πρέπει να ολοκληρωθεί σε δεδομένο χρονικό παράθυρο, η μέγιστη χωρητικότητα των λεωφορείων και τέλος η μείωση απαιτούμενου αριθμού των λεωφορείων που είναι συνάρτηση όλων των παραπάνω προϋποθέσεων. Θα αναζητηθεί η βέλτιστη αρχική κορυφή στη διαδικασία δημιουργίας των υποσυνόλων της παραλαβής των μαθητών για κάθε λεωφορείο. Παράλληλα, θα μελετηθεί η σχέση μεταξύ του πλήθους k των λεωφορείων μεταφοράς με την επιτρεπόμενη πεζή απόσταση W **[1]** των μαθητών και θα επιδιωχθεί η παραλαβή περισσοτέρων μαθητών από συγκεκριμένα σημεία σε συνάρτηση με την απόσταση W. Τέλος, θα υπολογιστεί ο τελικός χρόνος παράδοσης όλων των μαθητών στο σταθερό σημείο στο καθορισμένο χρονικό παράθυρο και αυτό σε σχέση με το πλήθος των λεωφορείων.

1.2 Διάθρωση διπλωματικής εργασίας

Η τρέχουσα διπλωματική διαμορφώνεται σε οκτώ κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή και αναλύονται οι στόχοι της διπλωματικής. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη θεωρία των γράφων. Παρουσιάζονται γενικές γνώσεις με στόχο να βοηθήσουν τον αναγνώστη να αποκομίσει κατάλληλη πληροφορία ώστε να παρακολουθήσει την παρούσα διπλωματική. Το τρίτο κεφάλαιο περιγράφει λεπτομερώς το πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων. Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί το βασικότερο αντικείμενο της πτυχιακής, καθώς αναλύει πλήρως τον τρόπο εύρεσης λύσης του προβλήματος SBRP και παρουσιάζεται ο κατάλληλος αλγόριθμος. Το πέμπτο κεφάλαιο εμφανίζει τη διεξαγωγή διαφόρων πειραμάτων σε διάφορες συνθήκες. Το έκτο κεφάλαιο καταγράφει τα αποτελέσματα των πειραμάτων. Στη συνέχεια αναλύονται και εξάγονται τα τελικά αποτελέσματα. Το έβδομο κεφάλαιο εκθέτει κάποια συμπεράσματα που βγήκαν από την συνολική πορεία της παρούσας διπλωματικής. Τέλος, στο όγδοο κεφάλαιο ακολουθεί η βιβλιογραφία.

2. Βασικές Θεωρίες γραφημάτων

2.1 Γράφος

Ένας γράφος ή ένα γράφημα G (graph) είναι μια δομή που αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών (ή κόμβων) $V(G) = \{v_i,\}$ με κορυφή $v_i,\ i = 1,2,\dots,n$ και ένα σύνολο ακμών $E(G) = \{e_j,\}$ με ακμή $e_j = (v_j, v_k), j = 1,2,\dots,m, 0 < j.k \leq n$. Κάθε ακμή σχετίζεται με δύο διαφορετικές κορυφές ή με τον εαυτό μιας κορυφής. Τάξη του γραφήματος

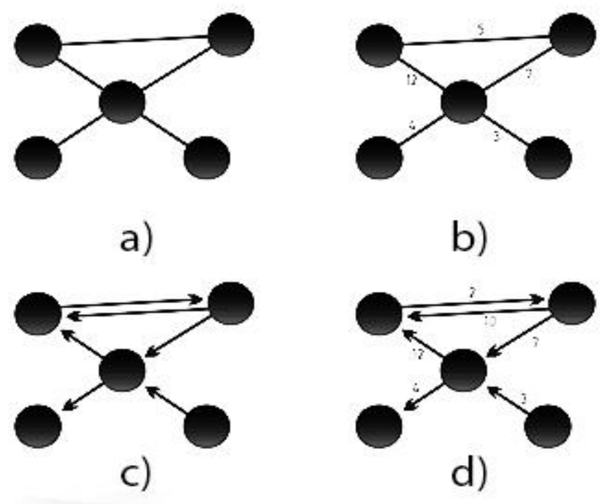
2.2 Κατευθυνόμενος ή μη κατευθυνόμενος γράφος

Ένα γράφος μπορεί να είναι κατευθυνόμενος ή μη κατευθυνόμενος. Στη πρώτη περίπτωση μία ακμή σχετίζεται μεταξύ δύο κορυφών και η κατεύθυνση ονομάζεται το πλήθος όλων των κορυφών και συμβολίζεται με $n = |V|$. Το μέγεθος του γράφου είναι το πλήθος των ακμών $m = |E|$.

Βάρος $w(e)$ ονομάζεται ένας χαρακτηριστικός που συνοδεύει μια ακμή. Όταν όλες οι ακμές του γράφου έχουν κάποιο βάρος ο γράφος ονομάζεται ζυγισμένος. Το άθροισμα όλων αυτών των βαρών ονομάζεται βάρος του γράφου **[14]**.

Ένας υπογράφος $Ga(Va, Ea)$ ενός γράφου $G(V, E)$ αποτελείται από στοιχεία τα οποία οι κορυφές του είναι υποσύνολο των κορυφών του αρχικού γράφου $Ga \subset G$ ή τα στοιχεία των ακμών κάποιον κορυφών που αποτελούν υποσύνολο του συνόλου των ακμών του αρχικού γράφου $Ea \subset E$ **[7,19]**.

του σχετίζεται από την πρώτη κορυφή στην άλλη. Ενώ στη δεύτερη περίπτωση η κατεύθυνση ορίζεται όπως και στην πρώτη περίπτωση αλλά και αντίστροφα.



Εικόνα 1: a) Μη κατευθυνόμενος γράφος. b) Μη κατευθυνόμενος γράφος με βάρη. c) Κατευθυνόμενος γράφος. d) Μη κατευθυνόμενος γράφος με βάρη.

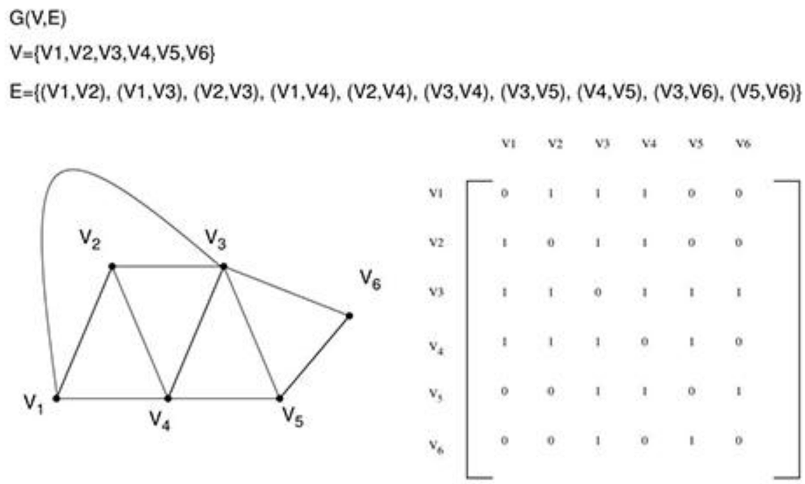
2.3 Γείτονες – Πίνακας γειτνίασης

Γείτονες μιας κορυφής $N(v_i)$ ονομάζεται το σύνολο όλων κορυφών με τις οποίες ενώνεται η συγκεκριμένη κορυφή. Σε περίπτωση που η κορυφή δεν έχει γείτονες ονομάζεται απομονωμένη κορυφή.

$$N(v_i) = \{v_i \in V(G) \mid (v_i, v_j) \in E(G)\}$$

Εκτός από την γραφική αναπαράσταση ο γράφος μπορεί να παρουσιαστεί με τη χρήση του πίνακα γειτνίασης A **[18]**. Ο πίνακας γειτνίαση ενός γραφήματος τάξης n ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας $n\ xn$ όπου κάθε στοιχείο $a_{ij} = 1$ όταν η κορυφή i ενώνεται με την κορυφή j δηλαδή υπάρχει η ακμή $e = (v_j, v_k)$ διαφορετικά $a_{ij} = 0$ **[14].**

$$a_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha\nu}\ e_{ij} \in E \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha\nu}\ e_{ij} \notin E \end{cases}$$



Εικόνα 2: Πίνακας γειτνίασης γράφου.

Βαθμός μιας κορυφής ονομάζεται το πλήθος όλων των γειτόνων της.

- Σε μη κατευθυνόμενο γράφο (με n-κορυφές) ο βαθμός μιας κορυφής κ μπορεί να υπολογιστεί από τον πίνακα γειτνίασης και ισούται με το άθροισμα της αντίστοιχης γραμμής κ (ή στήλης κ).

$$\beta\alpha\theta[k] = \sum_{j=1}^{n} a_{\kappa j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\kappa}$$

- Σε κατευθυνόμενο γράφο (με n-κορυφές) το άθροισμα της αντίστοιχης γραμμής κ από τον πίνακα γειτνίασης ονομάζεται έσω-βαθμός ενώ της αντίστοιχης στήλης έξω-βαθμός.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{\kappa j}\,, έσω - \beta\alpha\theta\mu ός \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i\kappa}\,, έξω - \beta\alpha\theta\mu ός \end{cases}$$

2.4 Μονοπάτι

Μονοπάτι ονομάζεται μία ακολουθία ακμών η οποία διασχίζει όλες τις κορυφές.

Αν ένας γράφος είναι μη κατευθυνόμενος θα πρέπει για κάθε κορυφή του να υπάρχει ένα μονοπάτι το οποίο θα πρέπει να συνδέεται με κάθε μία από τις άλλες κορυφές. Ένας τέτοιος γράφος ονομάζεται συνεκτικός.

Αν ο γράφος είναι κατευθυνόμενος και υπάρχουν κατευθυνόμενα μονοπάτια που να συνδέουν κάθε κορυφή του με τις υπόλοιπες κορυφές ονομάζεται ισχυρά συνεκτικός. Σε περίπτωση που δεν ληφθεί υπόψη η κατεύθυνση των ακμών του αλλά υπάρχει υπογράφος για κάθε κορυφή που να τη συνδέει με όλες τις άλλες μέσο ενός μονοπατιού τότε ονομάζεται ασθενά συνεκτικός γράφος. Ειδικότερα, εάν όλες οι συνδεόμενες κορυφές είναι διαφορετικές τότε το μονοπάτι λέγεται απλό.

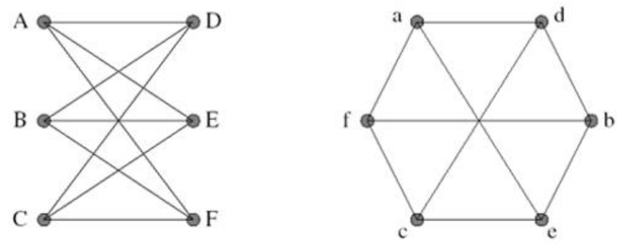
Κύκλος ονομάζεται το μονοπάτι το οποίο ξεκινάει και τελειώνει στην ίδια κορυφή. Ειδικότερα, εάν όλες οι συνδεόμενες κορυφές, εκτός από την αρχική και την τελική, οι οποίες είναι οι ίδιες να είναι διαφορετικές, τότε το μονοπάτι λέγεται απλό.

2.5 Ισομορφισμός

Δύο γράφοι G_1και G_2 λέγονται ισομορφικοί αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των κορυφών τους έτσι ώστε ένα ζεύγος του G_1 συνδέεται με μια ακμή αν και μόνο αν το αντίστοιχο ζεύγος κορυφών του G_2 συνδέεται με μια ακμή.

Δύο γράφοι G_1 και G_2 λέγονται ίσοι αν έχουν ίσες κορυφές $\mathrm{V}(G_1) = \mathrm{V}(G_2)$ και ίσες ακμές $\mathrm{E}(G_1) = \mathrm{E}(G_2)$.

Αν δύο γράφοι είναι ίσοι τότε είναι ισομορφικοί ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

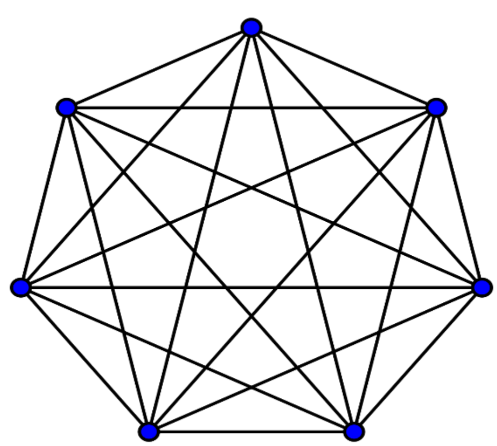


Εικόνα 3: Ισομορφικοί γράφοι.

2.6 Βασικές κατηγορίες γράφων

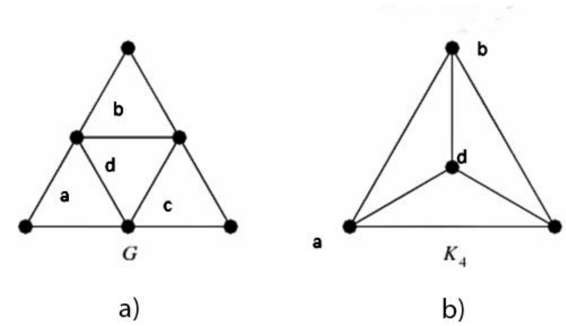
Οι γράφοι ανάλογα με την μορφή που έχουν μπορούν να χωριστούν στις παρακάτω κατηγορίες **[14,22]**:

- **Απλός γράφος:** Κάθε ζευγάρι κορυφών ενώνεται το πολύ μία φορά μεταξύ τους.
  i) Αν το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο με n κορυφές τότε έχει το πολύ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ακμές.
  ii) Αν το γράφημα είναι κατευθυνόμενο με n κορυφές τότε έχει το πολύ $\binom{n}{2} = n(n-1)$ ακμές.
- **Πλήρης γράφος**: Κάθε ζευγάρι κορυφών του ενώνεται ακριβών μία φορά με μία ακμή μεταξύ τους και συμβολίζεται με K_n.



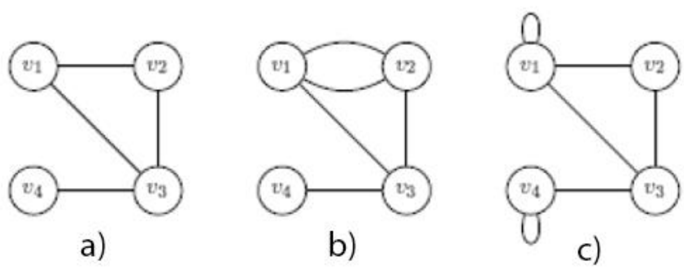
Εικόνα 4: Πλήρης γράφος

- **Κανονικός γράφος**: Πρέπει κάθε κορυφή να έχει ίδιο βαθμό. Προφανώς ο πλήρης γράφος είναι και κανονικός, το αντίστροφο δεν ισχύει.
- **Κλίκα(clique)**: Ένας πλήρης υπογράφος ενός γράφου.



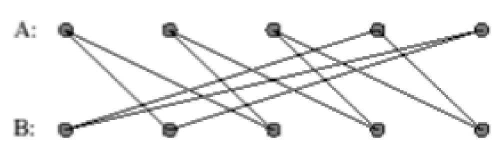
Εικόνα 5: a) Πλήρης γράφος. b) Κλίκα.

- **Πολυγράφημα:** Πρέπει ένα ζευγάρι κορυφών να ενώνεται παραπάνω από μία φορά μεταξύ τους.
- **Ψευδογράφημα:** Πρέπει μία κορυφή να περιέχει ένα βρόγχο, δηλαδή μία ακμή αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή.



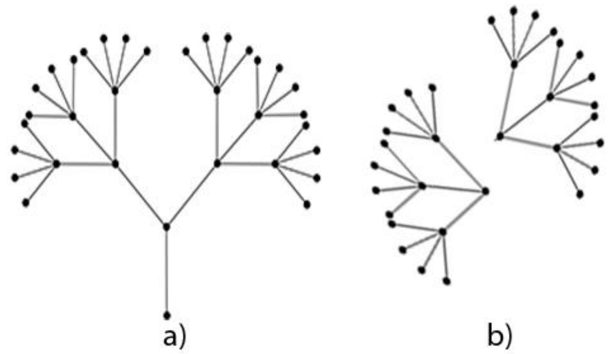
Εικόνα 6: a) Απλός γράφος. b) Πολυγράφημα. c) Ψευδογράφημα.

- **Διμερής γράφος:** Πρέπει όλες οι κορυφές του να μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα $G = A \cup B$ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κορυφή του ενός συνόλου να μπορεί να συνδεθεί με μία τουλάχιστον κορυφή του άλλου, αλλά δύο κορυφές στο ίδιο σύνολο να μην έχουν κοινή ακμή.



Εικόνα 7: Διμερής γράφος

- **Δάσος:** Πρέπει ο γράφος να μην έχει κύκλους.
- **Δέντρο:** Πρέπει να είναι ένας συνεκτικός γράφος χωρίς κύκλους.



Εικόνα 8: a) Δέντρο. b) Δάσος

2.7 Μετρικές

Η καλύτερη κατανόηση αλλά και μελέτη ενός γράφου γίνεται με τη χρήση κάποιων στατιστικών ιδιοτήτων όσο αναφορά τη δομή των κόμβων. Γίνεται καλύτερα αντιληπτή η συνεισφορά ενός κόμβος τόσο ατομικά όσο και συλλογικά μέσα στο γράφο. Θα μπορούσε ένας κόμβος να συσχετίζεται με πολλές μικροδομές που δημιουργούνται μέσα στο γράφημα και θα ήταν πολύ σημαντική η συνεισφορά του άρα και δύσκολη η απομάκρυνσή του. Σε αντίθετη περίπτωση ίσως το γράφημα θα μπορούσε να γίνει πιο χρήσιμο εάν απομακρυνόταν η συγκεκριμένη κορυφή.

2.7.1 Μετρικές βαθμού κορυφής

Ο βαθμός μιας κορυφής ορίζεται ως το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε μια κορυφή v_i και συμβολίζεται $\delta(v_i)$. Σε περίπτωση κάποιου βρόχου στον γράφημα αυξάνεται ο βαθμός κατά δύο. Οι κόμβοι με τον μεγαλύτερο βαθμό ονομάζονται κύριοι. Αν όλοι οι κόμβοι έχουν τον ίδιο βαθμό το γράφημα ονομάζεται κανονικό. Ακόμη, εάν παρατηρήσουμε ότι κάποιοι κόμβοι έχουν πολύ μεγαλύτερο βαθμό συγκριτικά με τους υπόλοιπους τότε αυτοί ονομάζονται “hubs” και έχουν μεγάλη συνεισφορά στο γράφημα και ίσως η απομάκρυνση τους φέρει διάσπαση στον γράφο.

Ο μέσος βαθμός του γράφου ορίζεται ως ο μέσος όρος των βαθμών των κόμβων **[12]**.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\delta(v_i)$$

Ο μέγιστος βαθμός του γράφου ορίζεται ως ο βαθμός απ' όλους τους κόμβους.

$$max_{\forall i\in n}(\delta(v_i))$$

2.7.2 Μετρικές απόστασης

Σε έναν κατευθυνόμενο (ή μη κατευθυνόμενο) γράφο η γεωδαιτική απόσταση μεταξύ δύο κορυφών $u, v \in V(G)$ ορίζεται ως το πλήθος των ακμών που αντιστοιχούν στο ελάχιστο μονοπάτι ανάμεσα σε αυτές τις δύο κορυφές και συμβολίζεται $d(u, v)$. Σε περίπτωση που ο γράφος έχει βάρη τότε το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού ορίζεται το μονοπάτι με το μικρότερο βάρος. Αν ο γράφος δεν είναι συνεκτικός τότε η γεωδαιτική απόσταση μεταξύ δύο κόμβων οι οποίοι δεν συνδέονται είναι άπειρη.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες μετρικές απόστασης **[13,17]**.

- Η εκκεντρότητα (eccentricity) μιας κορυφής u ορίζεται ως η πιο απομακρυσμένη κορυφή από την u και συμβολίζεται $\varepsilon(u)$.

$$\varepsilon(u) = max\{d(u, v)|v \in V(G)\}$$

- Η διάμετρος ορίζεται ως η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών στο γράφημα **[4]**.

$$diam(G) = max\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$$

- Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο Gμε σύνολο κορυφών V το μέσο μήκος ελαχίστων μονοπατιών από την κορυφήuπρος όλες τις κορυφές του γραφήματος ισούται:

$$\bar{d}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|V|-1}\sum_{v\in V, u\neq v} d(u, v)$$

- Το μέσο μήκος μονοπατιών (ή το χαρακτηριστικό μονοπάτι) ορίζεται ως ο μέσος όρος όλον των μέσων μηκών ελαχίστων μονοπατιών από όλες τις κορυφές του γράφου και δίνεται από τον κάτωθι τύπο **[7]**:

$$\bar{d}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|V|}\sum_{u\in V}\bar{d}(u) = \frac{1}{|V|^2-|V|}\sum_{u,v\in V\ ,u\neq v} d(u,v)$$

- Η αποδοτικότητα μεταξύ δύο κορυφών i, j σε έναν γράφο χρησιμοποιείται από το χαρακτηριστικό μήκος μονοπατιών. Όσο μικρότερο είναι το μήκος του ελαχίστου μονοπατιού ανάμεσα στις δύο κορυφές τόσο μεγαλύτερη είναι η αποδοτικότητα $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$.

  Σε περίπτωση που δεν υπάρχει μονοπάτι τότε: $d_{ij} \to \infty \Longrightarrow \varepsilon_{ij} \to 0$.

  Η μέση αποδοτικότητα μεταξύ όλων των N-κορυφών (ή καθολική αποδοτικότητα) ισούται με:

$$E(G) = \frac{\sum_{i\neq j\in G}\varepsilon_{ij}}{N(N-1)} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j\in G}\frac{1}{d_{ij}}$$

2.7.3 Μετρικές γειτνίασης

Στο κεφάλαιο 2.3 έχουμε ορίσει την γειτονιά κάθε κόμβου. Ο μέσος όρος των γειτόνων αποτελεί ένα στατιστικό μέγεθος το οποίο μας δείχνει μια ένδειξη σχετικά με την συνδεσιμότητα του γράφου **[17,22]**.

- Η πυκνότητα $dens(G)$ ενός γράφου G ορίζεται ως ο λόγος του συνολικού αριθμού των ακμών $|E|$ προς τον μέγιστο δυνατό αριθμό ακμών $|V|$ ανάμεσα στους κόμβους με:

$$dens(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|^2-|V|}$$

  Σε περίπτωση που ο γράφος έχει βάρη ο συνολικός αριθμός των ακμών του ισούται με το συνολικό άθροισμα των βαρών και ο παραπάνω τύπος μετασχηματίζεται σε:

$$dens(G)_w = \frac{2\sum w(u,v)_{u.v\in G}}{|V|^2-|V|}$$

Αν το δίκτυο δεν περιέχει ακμές (απομονωμένες κορυφές) τότε η πυκνότητα ισούται με 0 ενώ εάν κάθε κόμβος συνδέεται με όλους τους άλλους (πλήρες γράφημα) τότε η πυκνότητα ισούται με 1. Σε κάθε άλλη περίπτωση η πυκνότητα βρίσκεται ανάμεσα αυτών των δύο τιμών $0 \leq dens(G) \leq 1$.

- Η ετερογένεια (Heterogeneity) ισούται με τον συντελεστή διακύμανση της κατανομής των βαθμών της κορυφής. Αποτελεί μία μετρική η οποία δείχνει εάν ο γράφος έχει την τάση να περιλαμβάνει κόμβους πλήμνης (hubnodes).

$$Heterogeneity = \frac{\sqrt{variance(k)}}{mean(k)} = \sqrt{\frac{nS_2(k)}{S_1(k)^2} - 1},$$

$$\mu\varepsilon \;\; S_p(v) = \sum_i v_i^p \;\; \kappa\alpha\iota\; k_i \;o\; \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\; \tau\eta\varsigma\; \kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma\; i$$

2.8 Αλγόριθμος Dijkstra

2.8.1 Εισαγωγή Dijkstra

Ένα σημαντικό στοιχείο για την επίλυση προβλημάτων με τη χρήση γραφημάτων είναι η εύρεση των βέλτιστων μονοπατιών. Οι δύο πιο διαδομένοι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος είναι ο αλγόριθμος του Bellman-Fordκαι του Dijkstra **[21]**. Ο αλγόριθμος του Dijkstra χρησιμοποιείται τόσο σε κατευθυνόμενα όσο και σε μη κατευθυνόμενα συνεκτικά γραφήματα με θετικά βάρη. Στην περίπτωση αρνητικών βαρών θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του Bellman-Ford διότι του Dijkstra θα δώσει λανθασμένα αποτελέσματα **[25,26].**

Ο αλγόριθμος του Dijkstra χρησιμοποιείται για την εύρεση των βέλτιστων μονοπατιών από ένα κόμβο προς όλους τους άλλους σε ένα γράφο **[24]**. Είναι ένας άπληστος αλγόριθμος διότι σε κάθε βήμα επιλέγει την τοπικά βέλτιστη λύση έως ότου φτάσει στον τερματικό κόμβο και θα συνθέσει όλες τις προηγούμενες λύσεις με αποτέλεσμα τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

2.8.2 Εκτέλεση αλγορίθμου Dijkstra

Πριν την εκτέλεση του αλγορίθμου θα πρέπει να οριστούν τα παρακάτω:

- Ο γράφος **G(V,E)**
- **N**: Το πλήθος τον κόμβων.
- **w(v,u)**: Τα βάρη μεταξύ του κόμβου v προς τον κόμβο u.
- **Start**: Κόμβος αφετηρίας.
- **Dist**[]: Διάνυσμα μεγέθους N στο οποίο αποθηκεύεται δυναμικά η απόσταση του iκόμβου από την αφετηρία.
- **Prev**[]: Διάνυσμα μεγέθους N όπου για κάθε κόμβο αποθηκεύεται ο αμέσως προηγούμενος κόμβος στο συντομότερο μονοπάτι από την αφετηρία μέχρι αυτόν τον κόμβο.

Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου όλες οι κορυφές χωρίζονται σε δύο σύνολα:

- Το σύνολο $\boldsymbol{T} = \emptyset$ στο οποίο αποθηκεύονται όλοι οι κόμβοι που έχουν εξεταστεί και έχει βρεθεί το βέλτιστο μονοπάτι προς αυτούς.
- Το σύνολο $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}$ το οποίο περιέχει όλους τους κόμβους του γράφου που θα πρέπει να ελεγχθούν. Κάθε φορά που ένας κόμβος ελέγχεται αφαιρείται από το παρόν σύνολο.

Όταν το σύνολο **F** γίνει ίσο με το κενό τότε ο αλγόριθμος τερματίζει, αφού δεν υπάρχει κόμβος για να ελεγχθεί.

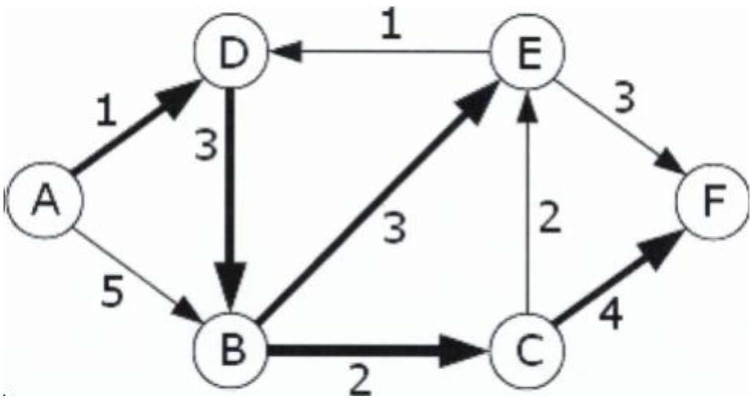
Σε κάθε βήμα επιλέγεται ένας κόμβος v ο οποίος δεν περιέχεται στο σύνολο T έτσι ώστε το μονοπάτι να παραμένει το συντομότερο δυνατόν. Στη συνέχεια για κάθε γειτονικό του κόμβου με την προϋπόθεση ότι δεν ανήκει στο σύνολο T αν αποδειχθεί ότι αποτελεί συντομότερο μονοπάτι τότε ανανεώνεται το διάνυσμα **Dist**[] με την νέα τιμή.

$$Dist[v] \leftarrow \min\{Dist[v], Dist[u] + w(v,u)\}$$

$$Prev[v] \leftarrow \mathrm{Last}\{\mathrm{T}\}$$

2.8.3 Παράδειγμα αλγορίθμου Dijkstra

Παρακάτω παρουσιάζεται ο γράφος αλλά και πίνακες δεδομένων μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Dijkstra **[23]**.



Εικόνα 9: Παρουσιάζονται τα συντομότερα μονοπάτια μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Dijsktra.

Επανάληψη	T	Dist[B], Prev[B]	Dist[C], Prev[C]	Dist[D], Prev[D]	Dist[E], Prev[E]	Dist[F], Prev[F]
0	$\{A\}$	5,A	∞	1,A	∞	∞
1	$\{A, D\}$	4,D	∞		∞	∞
2	$\{A, D, B\}$		6,B		7,B	∞
3	$\{A, D, B, C\}$				7,B	10,C
4	$\{A, D, B, C, E\}$					10,C
5	$\{A, D, B, C, E, F\}$					

Πίνακας 1: Δεδομένα μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Dijsktra.

Αρχή Α	ΜΟΝΟΠΑΤΙ	ΚΟΣΤΟΣ
ΠΡΟΣ B	A-D-B	4
ΠΡΟΣ C	A-D-B-C	6
ΠΡΟΣ D	A-D	1
ΠΡΟΣ E	A-D-B-E	7
ΠΡΟΣ F	A-D-B-C-F	4

Πίνακας 2: Βέλτιστα μονοπάτια προς κάθε κορυφή.

3. Πρόβλημα Δρομολόγηση σχολικών λεωφορείων (SBRP)

3.1 Περιγραφή SBRP

Το πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων (ή School Bus Routing Problem - SBRP) πρωτοαναφέρθηκε από τους Newtonκαι Thomasτο 1969. Σύμφωνα με τους Park και Kim το πρόβλημα SBRP αναφέρεται στον σχεδιασμό ενός αποδοτικού πλάνου χρονοδιαγράμματος ενός στόλου σχολικών λεωφορείων που στόχο έχουν την περισυλλογή των μαθητών ενός σχολείου από συγκεκριμένες στάσεις. Θα πρέπει να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένα κριτήρια όπως τη μέγιστη χωρητικότητα των λεωφορείων, το μέγιστο χρονικό όριο αναμονής των μαθητών **[10]** μέσα στο λεωφορείο καθώς και το μέγιστο χρονικό παράθυρο από την παραλαβή μέχρι την επιστροφή των μαθητών στο σχολείο.

Για την επίλυση ενός προβλήματος SBRP θα πρέπει να καθοριστεί ο όρος «αποδοτική δρομολόγηση». Θα πρέπει να καθοριστούν πλήρως από την αρχή οι απαιτήσεις και οι προτεραιότητες του προβλήματος έτσι ώστε να υπάρχει καλύτερη προσέγγιση (ή και βέλτιστη) στη λύση του προβλήματος **[9]**. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο πιθανά αποδοτικά σενάρια λύσης του προβλήματος.

- Στο **σενάριο Α** έχουμε λιγότερο κατά μέσο όρο χρόνο αναμονής ενός μαθητή σε ένα λεωφορείο αλλά κάθε λεωφορείο θα διανύει περισσότερα χιλιόμετρα κατά μέσο όρο.
- Στο **σενάριο Β** έχουμε περισσότερο κατά μέσο όρο χρόνο αναμονής ενός μαθητή σε ένα λεωφορείο σε σχέση με το σενάριο Α αλλά κάθε λεωφορείο θα διανύει λιγότερα χιλιόμετρα κατά μέσο όρο.
- Αν βασικό κριτήριο είναι το οικονομικό τότε πιο αποδοτική δρομολόγηση είναι το σενάριο Β. Αν η μελέτη γίνεται σύμφωνα με τον ελάχιστο χρόνο παραμονής ενός μαθητή μέσα σε ένα λεωφορείο και δεν μας ενδιαφέρει ο οικονομικός παράγοντας τότε σίγουρα το σενάριο Α είναι η αποδεκτή λύση.

3.2 Υποδιαίρεση του SBRP

Ένα πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων μπορεί να διαιρεθεί σε πέντε υποπροβλήματα.

I. **Προετοιμασία γραφήματος:** Η δημιουργία ενιαίου γράφου καθώς και του πίνακα γειτνίασης του στον οποίο περιέχονται οι κατοικίες (στάσεις) των μαθητών καθώς και η στάση σχολείο.
II. **Επιλογή στάσης λεωφορείου:** Χρησιμοποιεί τον προηγούμενο γράφο με απώτερο στόχο την εύρεση όλων των τοποθεσιών στάσεων για κάθε λεωφορείο.

Περιλαμβάνει και τον περιορισμό της μέγιστης απόστασης με τα πόδια από την κατοικία του μαθητή μέχρι την στάση του λεωφορείου. Στόχος αυτού του υποπροβλήματος είναι να αναθέσει σε κάθε μαθητή την πλησιέστερη γι΄αυτόν στάση περισυλλογής του από το αντίστοιχο λεωφορείο.Η λύση του χωρίζεται σε δύο βήματα:

α) Η δημιουργία των στάσεων του αντίστοιχου λεωφορείου.

β) Η ανάθεση της στάσης στον αντίστοιχο μαθητή.

III. **Η δημιουργία των διαδρομών:** Χρησιμοποιούνται τα δεδομένα από την επίλυση των δύο προηγούμενων προβλημάτων για να βρεθούν οι βέλτιστες διαδρομές για κάθε λεωφορείο.

Η δημιουργία των διαδρομών μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τον στόλο των λεωφορείων:

α) Τα ομοιογενή (homogeneous) δίκτυα στα οποία όλοι οι κόμβοι (κατοικίες μαθητών) έχουν την ίδια λειτουργία μέσα στο δίκτυο. Κάθε κόμβος είναι εναλλάξιμος στη βασική λειτουργία που εκτελεί.

β) Τα ετερογενή (heterogeneous) δίκτυα στα οποία υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαφορετικές κατηγορίες κόμβων που κατηγοριοποιούνται κατά βάση με τον τρόπο χρησιμότητάς τους.

Επίσης μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με το φορτίο του λεωφορείου:

α) Απλό φορτίο δηλαδή το λεωφορείο παραλαμβάνει μαθητές για ένα σχολείο.

β) Μικτό φορτίο δηλαδή ένα λεωφορείο έχει τη δυνατότητα να παραλάβει μαθητές για διαφορετικά σχολεία.

IV. **Προσαρμογή σχολικού κουδουνιού:** Το παρόν υποπρόβλημα χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση μικτού φορτίου. Προσαρμόζει τον χρόνο άφιξης των μαθητών στο σχολείο.

V. **Προγραμματισμός δρομολογίων:** Το παρόν υποπρόβλημα χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση μικτού φορτίου. Ο στόχος της επίλυσης του παρόντος υποπροβλήματος είναι να ρυθμίσει την ακριβή ακολουθία διαδρομών που θα πραγματοποιήσει κάθε λεωφορείο.

3.3 Μαθηματικός προγραμματισμός του ενός SBRP προβλήματος

Για την μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων θα πρέπει πρώτα να πάρουμε τις κάτωθι παραδοχές:

- Ο κόμβος παράδοσης (σχολείο) είναι μοναδικός.
- Τα λεωφορεία είναι πανομοιότυπα με προκαθορισμένη χωρητικότητα.
- Υπάρχει μόνο μία κατηγορία μαθητών.
- Κάθε κατοικία μαθητή (κόμβος) είναι μοναδική.
- Μια στάση μπορεί να είναι επισκέψιμη μόνο από ένα λεωφορείο.
- Ο αριθμός των μαθητών ανά στάση δεν μπορεί να υπερβεί την χωρητικότητα του λεωφορείου.

- Σε μία στάση οι μαθητές δεν μπορούν να χωριστούν σε ομάδες και να μοιραστούν σε διαφορετικά λεωφορεία.
- Κάθε λεωφορείο μπορεί να κάνει μόνο μία διαδρομή.

Το βασικό κριτήριο της βελτιστοποίησης του προβλήματος SBRP θα γίνει στη συνολική απόσταση που θα διανύσουν όλα τα λεωφορεία. Παρακάτω θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο των Toth and Vigo **[2,15]**.

Ορίζουμε τον πίνακα των μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν στης αντικειμενικές συναρτήσεις του SBRP **[1].**

Μεταβλητές –Δεδομένα	
C	Χωρητικότητα των λεωφορείων
V	Σύνολο πιθανών στάσεων των λεωφορείων με $\lvert V\rvert = n$
E	Σύνολο ακμών μεταξύ δύο κόμβων
S	Σύνολο κόμβων (των μαθητών)
$\boldsymbol{c_{ij}}$	Βάρη (ή απόσταση) μεταξύ ενός κόμβου i με έναν κόμβο j
$\boldsymbol{s_{il}}$	1 εάν ένας μαθητής l μπορεί να προσεγγίσει μία στάση i, αλλιώς 0
i = 0	Δείκτης του σχολείου
Μεταβλητές απόφασης	
$\boldsymbol{x_{ijk}}$	1 εάν το λεωφορείο k μπορεί να διανύσει την απόσταση i προς την απόσταση j, αλλιώς 0
$\boldsymbol{y_{ik}}$	1 εάν το λεωφορείο k μπορεί να επισκεφτεί την στάση i, αλλιώς 0
$\boldsymbol{z_{ik}}$	1 εάν ο μαθητής l μπει στο λεωφορείο k στη στάση i, αλλιώς 0

Πίνακας 3: Πίνακας μεταβλητών αλγορίθμου Toth and Vigo ***[2]****.*

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι αντικειμενικές συναρτήσεις του SBRP προβλήματος **[1-3,8,11]**.

- Η παρακάτω συνάρτηση ελαχιστοποιεί τη συνολική απόσταση που διανύουν όλα τα λεωφορεία.

$$\min\left(\sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x_{ijk}}\right)$$

- Ένας βασικός περιορισμός είναι ότι θα πρέπει ένα λεωφορείο k να περισυλλέξει έναν μαθητή. Οπότε ένα μόνο λεωφορείο μπορεί να διανύσει την απόσταση από το i στο j.

$$s.t. \qquad \sum_{j\in V}\boldsymbol{x_{ijk}} = \sum_{j\in V}\boldsymbol{x_{jik}} = y_{ik} \qquad ,\forall i \in V, k = 1, \dots, n$$

- Ύπαρξη συνδεσιμότητας της διαδρομής που εκτελεί το λεωφορείο k.

$$\sum_{i,j\in Q}\boldsymbol{x_{ijk}} \le |Q| - 1 \quad ,\forall\, Q \subseteq V \setminus \{v_0\}, \qquad \forall k$$

- Ικανοποίηση του περιορισμού κάθε στάση να επισκέπτεται το πολύ μία φορά εκτός από τη στάση που αντιστοιχεί στο σχολείο.

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{y_{ijk}} \leq 1 \quad ,\forall i \in V \setminus \{0\}$$

- Εξασφάλιση της προϋπόθεσης κάθε μαθητής παραλήφθηκε από τη στάση που μπορεί να προσεγγίσει.

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{z_{ilk}} \leq \boldsymbol{s_{il}} \quad ,\forall l \in S, \qquad \forall i \in V$$

- Εξασφάλιση του περιορισμού να μην υπάρξει υπέρβαση της χωρητικότητας κάποιου λεωφορείου k.

$$\sum_{i \in V} \sum_{l \in S} \boldsymbol{z_{ilk}} \leq C \quad ,k = 1, \dots, n$$

- Επιβάλετε ο περιορισμός ότι ο μαθητής lδεν παραληφθεί από το λεωφορείο k στη στάση i, εάν το αντίστοιχο λεωφορείο δεν επισκεφθεί αυτή τη στάση.

$$\boldsymbol{z_{ilk}} \leq \boldsymbol{y_{ik}} \quad ,\forall i, l, k$$

- Επιβάλετε ο περιορισμός ότι ο κάθε μαθητής μπορεί να παραληφθεί μόνο μία φορά.

$$\sum_{i \in V} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{z_{ilk}} = 1 \quad ,\forall l \in V$$

- Οι παρακάτω μεταβλητές απόφασης πρέπει να είναι δυαδικές. Δηλαδή πρέπει να παίρνουν τις τιμές 1 ή 0 **[1,2,8]**.

$$\boldsymbol{y_{ik}} \in \{0,1\} \quad ,\forall i \in V, \quad k = 1, \dots, n$$
$$\boldsymbol{x_{ijk}} \in \{0,1\} \quad ,\forall i, j \in V, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, n$$
$$\boldsymbol{z_{ilk}} \in \{0,1\} \quad ,\forall i, j \in V, \quad i \neq j, \quad l \in S$$

4. Υλοποίηση αλγορίθμου επίλυσης πρόβλημα δρομολόγηση σχολικών λεωφορείων

4.1 Εισαγωγή

Στη παρούσα διπλωματική θα περιγραφεί μία μεθοδολογία η οποία αφορά το πρόβλημα δημιουργίας διαδρομών σχολικών λεωφορείων (SBRP). Ειδικότερα το πρόβλημα SBRP αποτελεί ένα ολοκληρωμένο σύστημα περισυλλογής-διανομής ομοειδών ή μη οντοτήτων (μαθητών, προσωπικό οργανισμού, αντικείμενα) από κάποια σταθερά σημεία που ονομάζονται στάσεις προς ένα σταθερό σημείο που ονομάζεται αφετηρία (σχολείο, μία δημόσια υπηρεσία, ένα εργοστάσιο) μέσα σε μία αστική ζώνη.

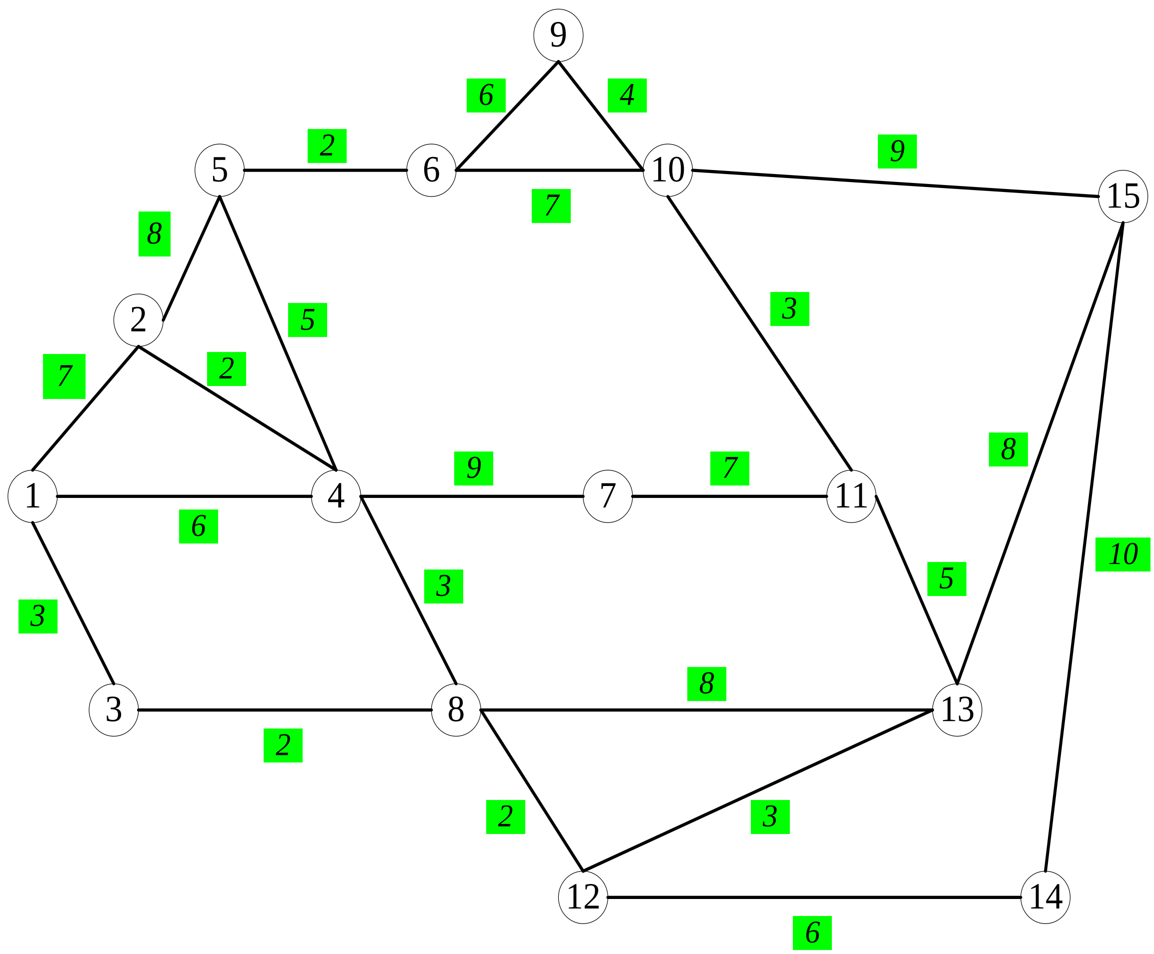
Ειδικότερα θα εξεταστεί κυρίως η περισυλλογή μαθητών από τις οικίες τους προς τον κόμβο αφετηρία ο οποίος είναι το σχολείο. Θα δοθεί ένας εικονικός χάρτης σε μορφή γράφου που θα περιέχει το σχολείο (αφετηρία) καθώς και όλες τις κατοικίες των μαθητών (κόμβοι). Ακόμα θα δοθούν όλες οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων (βάρη).

4.2 Περιγραφή προβλήματος

Για τον σχεδιασμό των διαδρομών του στόλου των λεωφορείων ενός σχολείο με στόχο την συλλογή όλων των μαθητών λαμβάνονται υπόψη τα κάτωθι:

- Βασικός στόχος είναι η μείωση της μέσης παραμονής των μαθητών στα λεωφορεία.
- Μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση από την οικεία ενός μαθητή προς μία στάση.
- Η μεταφορά των μαθητών προς το σχολείο θα πρέπει να ολοκληρωθεί σε συγκεκριμένο χρονικό παράθυρο.
- Σταθερή χωρητικότητα λεωφορείων.
- Μείωση του απαιτούμενου αριθμού λεωφορείων αν είναι δυνατόν.

Παρακάτω δίνεται ο γράφος$G(V,E,D)$στον οποίο θα στηριχτεί ολόκληρη η παρούσα ενότητα για την δημιουργία της μεθοδολογίας (και ανάλυσης) επίλυσης του προβλήματος SBRP.
Η παρούσα Διπλωματική μελετάει το πρόβλημα SBRP <u>μόνο ως προς το μέσο χρόνο παραμονής ενός μαθητής σε ένα λεωφορείο</u> και όχι ως προς το μέσο πλήθος των χιλιομετρικών αποστάσεων που θα διανύσει ένα λεωφορείο ή το πλήθος των λεωφορείων που θα χρησιμοποιηθούν για την μεταφορά όλων των μαθητών.



Εικόνα 10: Γράφος σχολείο – κατοικίες.

- Κάθε στοιχείο $i \in V$ονομάζεται κορυφή. Αντιπροσωπεύει μια κατοικία ενός μαθητή. Εκτός από τον κόμβο 8 που αντιπροσωπεύει το σχολείο.
- Κάθε ζεύγος δύο κόμβων $(i, j) \in E$ αποτελούν τις ακμές. Αντιπροσωπεύει τον δρόμο με την ελάχιστη χιλιομετρική απόσταση μεταξύ των δύο κατοικιών.
- Η απόσταση $d_{ij} \in D$μεταξύ δύο κορυφών ονομάζεται βάρος και εκφράζει την χιλιομετρική απόσταση αυτών των δύο κορυφών.

4.3 Βηματική αναπαράσταση αλγορίθμου

4.3.1 Μεταβλητές

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει προσπάθεια να επιλυθεί το πρόβλημα SBRP με τη χρήση της θεωρίας γραφημάτων. Προτού υλοποιηθεί η λύση απαραίτητη προϋπόθεση είναι η κατασκευή κάποιον απαραίτητων δεδομένων τα οποία θα χρησιμοποιηθούν καθόλα τη διάρκεια της διαδικασίας.

Το παραπάνω εικονικό γράφημα που δίνεται είναι μη προσανατολισμένο με βάρη. Το πλήθος των κορυφών είναι 15. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το σύνολο των ακμών E με τα βάρη D.

Αρίθμηση	Ενωμένες κορυφές(E)		Βάρος(D)
1	1	2	7
2	1	3	3
3	1	4	6
4	2	4	2
5	2	5	8
6	3	8	2
7	4	5	5
8	4	7	9
9	4	8	3
10	5	6	2
11	6	9	6
12	6	10	7
13	7	11	7
14	8	12	2
15	8	13	8
16	9	10	4
17	10	11	3
18	10	15	9
19	11	13	5
20	12	13	3
21	12	14	6
22	13	15	8
23	14	15	10

Πίνακας 4: Πίνακας ακμών E.

Από το δοθέν δίκτυο της υπό διερεύνησης αστικής περιοχής θα εξαχθεί ο πίνακας γειτνίασης A. Για κάθε στοιχείο $a_{ij} \in A$ υπολογίζεται ως έξης:

$$a_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{\alpha\nu}\ e_{ij} \in E \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\alpha\nu}\ e_{ij} \notin E \end{cases}$$

Επειδή το γράφημα G είναι μη προσανατολισμένο τότε: $a_{ij} = a_{ji}$

```
--A[i,j]:
 [0. 1. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [1. 1. 0. 0. 1. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 1.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 1. 0. 0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 1.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 1. 1. 0.]
```

Πίνακας 5:Πίνακας γειτνίασης Α.

Στη συνέχεια υπολογίζεται ο πίνακας γειτνίασης με τα αντίστοιχα βάρη. Για κάθε στοιχείο $N_{ij} \in N$ υπολογίζεται ως έξης:

$$N_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & \boldsymbol{\alpha\nu}\ a_{ij} = 1 \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\alpha\nu}\ a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Επειδή το γράφημα Gείναι μη προσανατολισμένο τότε: $N_{ij} = N_{ji}$

```
-- N:
 [ 0.  7.  3.  6.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 7.  0.  0.  2.  8.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 3.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  2.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 6.  2.  0.  0.  5.  0.  9.  3.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  8.  0.  5.  0.  2.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  2.  0.  0.  0.  6.  7.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  9.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  7.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  2.  3.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  2.  8.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  6.  0.  0.  0.  4.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  7.  0.  0.  4.  0.  3.  0.  0.  0.  9.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  7.  0.  0.  3.  0.  0.  5.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  2.  0.  0.  0.  0.  3.  6.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  8.  0.  0.  5.  3.  0.  0.  8.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  6.  0.  0. 10.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  9.  0.  0.  8. 10.  0.]
```

Πίνακας 6: Πίνακας γειτνίασης με τα βάρη για το δίκτυο

- Το αστικό δίκτυο N εκφράζει το σύνολο των κόμβων. Κατοικίες μαθητών μαζί με τον κόμβο σχολείο. Η παρούσα Διπλωματική θεωρεί ότι υπάρχει μόνο ένα σχολείο.
- Το σύνολο $S \subset N$ εκφράζει μόνο τους κόμβους κατοικίες των μαθητών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρείται ότι κάθε στοιχείο Sαντιστοιχεί σε ένα μαθητή. Το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι
$$|S| = |N| - 1 = m \Rightarrow m = 14.$$
- Στο αστικό δίκτυο N θεωρείται ότι ο κόμβος αφετηρία-παράδοση (σχολείο) είναι: $school\_node = 8$.
- Πλήθος λεωφορείων: $k = 3$.
- Χωρητικότητα μαθητών ανά λεωφορείο: $C = 5$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρείται ότι όλα τα λεωφορεία έχουν την ίδια χωρητικότητα.
- Μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση των μαθητών από την οικία τους μέχρι την πλησιέστερη στάση κάποιου λεωφορείου: $W = 2$.

4.3.2 Κατασκευή βέλτιστης απόστασης του δικτύου Ν που συνδέει όλα τα ζεύγη κορυφών

Από το δίκτυο Ν και με τη συνεχόμενη χρήση του αλγορίθμου Dijkstra για κάθε κόμβο θα βρεθεί ο πίνακας $Dist_{ij}$ ο οποίος θα περιέχει τις βέλτιστες αποστάσεις κάθε κόμβου i από όλους τους κόμβους j με $i \neq j$. Στη παρούσα διπλωματική δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου γι΄ αυτό και παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα. Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε ειδικό script της γλώσσας python με τη χρήση του περιβάλλοντος Atom.

```
[ 0.  7.  3.  6. 11. 13. 15.  5. 19. 18. 15.  7. 10. 13. 18.]
[ 7.  0.  7.  2.  7.  9. 11.  5. 15. 16. 15.  7. 10. 13. 18.]
[ 3.  7.  0.  5. 10. 12. 14.  2. 18. 15. 12.  4.  7. 10. 15.]
[ 6.  2.  5.  0.  5.  7.  9.  3. 13. 14. 13.  5.  8. 11. 16.]
[11.  7. 10.  5.  0.  2. 14.  8.  8.  9. 12. 10. 13. 16. 18.]
[13.  9. 12.  7.  2.  0. 16. 10.  6.  7. 10. 12. 15. 18. 16.]
[15. 11. 14.  9. 14. 16.  0. 12. 14. 10.  7. 14. 12. 20. 19.]
[ 5.  5.  2.  3.  8. 10. 12.  0. 16. 13. 10.  2.  5.  8. 13.]
[19. 15. 18. 13.  8.  6. 14. 16.  0.  4.  7. 15. 12. 21. 13.]
[18. 16. 15. 14.  9.  7. 10. 13.  4.  0.  3. 11.  8. 17.  9.]
[15. 15. 12. 13. 12. 10.  7. 10.  7.  3.  0.  8.  5. 14. 12.]
[ 7.  7.  4.  5. 10. 12. 14.  2. 15. 11.  8.  0.  3.  6. 11.]
[10. 10.  7.  8. 13. 15. 12.  5. 12.  8.  5.  3.  0.  9.  8.]
[13. 13. 10. 11. 16. 18. 20.  8. 21. 17. 14.  6.  9.  0. 10.]
[18. 18. 15. 16. 18. 16. 19. 13. 13.  9. 12. 11.  8. 10.  0.]
```

Πίνακας 7: Ο πίνακας Dist περιέχει της βέλτιστες αποστάσεις μεταξύ δύο κορυφών. Αποτέλεσμα μετά τη χρήση του Dijkstra.

4.3.3 Κατασκευή πίνακα εκκεντρότητας

Από τον πίνακα Dist των βέλτιστων αποστάσεων (πίνακας Dijkstra) θα εξαχθεί ο πίνακας της εκκεντρότητας e_i. Η εκκεντρότητα μιας κορυφής i ορίζεται ως η μέγιστη απόσταση της από όλες τις κορυφές **[17]**.

$$e_i = \max\{dist_{ij}, \forall j \in V, i \neq j\}$$

```
-- e(i): [19.]
         [18.]
         [18.]
         [16.]
         [18.]
         [18.]
         [18.]
         [20.]
         [16.]
         [21.]
         [18.]
         [15.]
         [15.]
         [15.]
         [21.]
         [19.]
```

Πίνακας 8: Εκκεντρότητες για κάθε κόμβο.

4.3.4 Κατασκευή πίνακα $walk_{ij}$

Από τον πίνακα Dist των βέλτιστων αποστάσεων (πίνακας Dijkstra) θα εξαχθεί ο πίνακας της προσέγγισης μιας πιθανής στάσης από έναν μαθητή με ονομασία $walk_{ij}$.

$$walk_{ij} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad 0 \le dist_{ij} \le W \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad dist_{ij} > W \end{cases}, \forall j \in V$$

```
-- walk[i,j]
 [1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1.]
```

Εικόνα 11: Προσέγγιση μαθητών σε διάφορες στάσεις.

4.3.5 Εισαγωγή κορυφών Q_i, $\mathrm{Bus\_Stop}_i$

Στο παρόν βήμα θα γίνει η διαμέριση του συνόλου των κορυφών S σε k (πλήθος λεωφορείων) κατάλληλα υποσύνολα που θα ονομάζονται Q_i. Το σύνολο Q_i περιέχει στοιχεία του συνόλου N και εκφράζει τους αντίστοιχους μαθητές που θα παραλάβει το λεωφορείο i. Ακόμα το σύνολο Bus_stop_i εκφράζει τις αντίστοιχες στάσεις που θα κάνει το λεωφορείο i.
Θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω βασικές προϋποθέσεις:

- $Q_i \subseteq S \;και\; Bus\_stop_i \subseteq Q_i \subseteq S.$
- $Q_i = \{q_1^i, q_2^i, \dots, q_{l_i}^i\} με i = 1,2,\dots,k \;και\; l_i \leq C.$
  Το στοιχείο $q_{l_i}^i$ εκφράζει ότι ένα συγκεκριμένο λεωφορείο iθα παραλάβει τον αντίστοιχο μαθητήαπό την οικεία του. Δηλαδή είναι στοιχείο το συνόλου S.
- $S = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_k.$
- $Q_i \cap Q_j = \emptyset \;και\; Bus\_stop_i \cap Bus\_stop_j = \emptyset,\;\; \forall i \neq j.$
- $|Q_i| \leq C \;και\; |Bus\_stop_j| \leq |Q_i| \leq C.$

Οι κορυφές που ανήκουν σε κάποιο Q_i ονομάζονται δεσμευμένες. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που περιέχονται σε αυτά τα σύνολα έχουν παραληφθεί από κάποιο λεωφορείο και δεν χρειάζεται περαιτέρω επίσκεψη της αντίστοιχης κατοικίας. Ορίζεται το σύνολο $F \subseteq S$ το σύνολο όλων των δεσμευμένων κορυφών. Το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου περιέχει τις ελεύθερες κορυφές με $F^c = S - F$, δηλαδή πιθανή παραλαβή κάποιου μαθητή από ένα λεωφορείο. Από το σύνολο F εξαιρείται ο κόμβος σχολείο.

Το πρώτο στάδιο συμπλήρωσης των συνόλων Q_i αποτελεί την εισαγωγή των πρώτων κορυφών στα αντίστοιχα σύνολα. Επειδή η παρούσα διπλωματική εργασία μελετάει τον μέσο χρόνο παραμονής ενός μαθητή σε ένα λεωφορείο θεωρεί ότι η περισυλλογή του πρώτου μαθητή στο αντίστοιχο λεωφορείο γίνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Οπότε ο χρόνος απόστασης από το σχολείο μέχρι την οικία το πρώτου μαθητή δεν υπολογίζεται. Η μελέτη γίνεται μόνο από τη σκοπιά του μαθητή και όχι από την πλευρά του οδηγού ενός λεωφορείου.

Με τη χρήση του πίνακα της εκκεντρότητας e_i θα συμπληρωθούν οι πρώτες κορυφές των συνόλων Q_i. Ο τρόπος επιλογής περιγράφεται παρακάτω:

1. Επιλέγονται οι κορυφές με την μικρότερη εκκεντρότητα. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι κορυφές έχουν καλύτερη πρόσβαση στις πιο απομακρυσμένες τους περιοχές.
$$Q_i = index\left(\min_{i=1,..,k}\{e_i\}\right), \qquad με \left|\min_{i=1,..,k}\{e_i\}\right| \leq k$$
2. Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες επιλογές από k κορυφές τότε το αμέσως επόμενο κριτήριο είναι η επιλογή των περιοχών με το μεγαλύτερο πλήθος γειτόνων. Ο λόγος είναι ότι έχει καλύτερη πρόσβαση προς άλλους γράφους άρα

μεγαλύτερη συνεισφορά στον γράφημα.

$$Q_i = \max_{i \in index\left(\min_{i=1,\dots,k}\{e_i\}\right)} \sum_{j \in V} a_{ij}$$

3. Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες επιλογές από k κορυφές τότε επιλέγεται μία στη τύχη.

Για το γράφο N παρατηρείται ότι:

$$e(13) = e(11) = e(12) = 15$$

Οπότε οι αντίστοιχες κορυφές αποτελούν τις αρχικές κορυφές των Q_i.

Q_1	Q_2	Q_3
13	11	12

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αντίστοιχο λεωφορείο θα βρίσκεται στην συγκεκριμένη τοποθεσία. Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με τις αποστάσεις που έχει διανύσει ένα λεωφορείο με έστω ένα μαθητή.

$Distance(Q_1)$	$Distance(Q_2)$	$Distance(Q_3)$
0	0	0

Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των δεσμευμένων κορυφών F.

F
11, 12, 13

Οι κορυφές Q_i αποτελούν τις αρχικές στάσεις αναχώρησης των λεωφορείων. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολοτων στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13	11	12

4.3.6 Ελάσσων υπο-γράφημα του N

Στη παρούσα ενότητα θα αναλυθεί και θα αναπαρασταθεί η διαδικασία εύρεσης του ελάσσονος (minimal) υπο-γραφήματος του N που περιέχει τα $G(Q_i)$. Μέσο μιας αλγοριθμικής διαδικασίας θα τοποθετηθούν οι κατάλληλοι κόμβοι στα αντίστοιχα υποσύνολα $Q_i \subseteq S$. Τα στοιχεία κόμβοι(οικίες μαθητών) θα συμβολίζονται:

$$q_{node}^{Bus} = q_r^i \ \mu\varepsilon \ q_r^i \subset Q_i.$$

Παρακάτω παρατίθενται τα βασικά κριτήρια επιλογής ενός στοιχείου και τοποθέτησής του στο αντίστοιχο κ σύνολο.

1. Το βασικότερο κριτήριο επιλογής στοιχείου είναι η αντικειμενική συνάρτηση. Ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των αθροισμάτων των συντομότερων αποστάσεων που περιέχονται στα σύνολο Q_i.

$$\left\{ q_j^i \middle| \mathrm{V_i} = \min_i \left(\min_j \left(\sum_{r \in Q_i} a_{jr}^i \right) \right), \forall i = 1, \dots, k, \forall j \in Free, \forall r \in Q_i \right\}$$

2. Το δεύτερο κριτήριο εφαρμόζεται μόνο στη περίπτωση που υπάρχουν 2 ή περισσότερα πιθανά q_r^i που έχουν ίδια ποσότητα. Σε αυτή τη περίπτωση θα επιλεχθεί ο κόμβος με την μικρότερη εκκεντρότητα.

$$\left\{ q_j^i \middle| \min_i \left(e\left(q_j^i\right) \right), \forall i = 1, \dots, k, \forall j \in Free \right\}$$

3. Το τελευταίο κριτήριο εφαρμόζεται μόνο στη περίπτωση που υπάρχουν 2 ή περισσότερα πιθανά q_r^i που έχουν ίδιες εκκεντρότητες. Σε αυτή την περίπτωση θα επιλεχθεί ο κόμβος που έχει περισσότερα γειτονικά στοιχεία.

Σε κάθε βήμα υπολογίζονται:

- Τα πιθανά στοιχεία κόμβοι q_r^i, με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Το επικρατέστερο στοιχείο q_r^i .
- Στη συνέχεια η εύρεση όλων των κόμβων που ικανοποιούν την μέγιστη πεζή απόσταση.
- Η τοποθέτησή τους στο αντίστοιχο σύνολο Q_i.
- Η εύρεση της επόμενης στάσης του λεωφορείου i.
- Η εύρεση της ελάχιστης απόστασης που θα διανύσει του λεωφορείο i από την στάση αναχώρησης μέχρι τη στάση παραλαβής του επόμενου (ή των επόμενων μαθητών).
- Η εισαγωγή ενός κόμβου (ή πολλών) στο σύνολο F, δηλαδή η κατηγοριοποίησή του από μη δεσμευμένο σε δεσμευμένο.

Παρακάτω παρατίθεται η βηματική αναπαράσταση του αλγορίθμου.

4.3.6.1 Επανάληψη 1^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_3^1 \\ q_{10}^2 \\ q_3^3 \end{cases} \textit{με αντίστοιχες τιμές:} \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 7 \\ \mathrm{V}_2 = 3 \\ \mathrm{V}_3 = 4 \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του δεύτερου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3) = 3$.

Επιλέγεται το στοιχείο: q_{10}^2.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {10} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη δεύτερη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {10} θα πάρει το λεωφορείο 2.

$\mathbf{Q_1}$	$\mathbf{Q_2}$	$\mathbf{Q_3}$
13	11,10	12

Η κορυφή {10} αποτελεί την επόμενη στάση του δεύτερου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολοτων στάσεων όλων των λεωφορείων.

$\boldsymbol{Bus\_Stop_1}$	$\boldsymbol{Bus\_Stop_2}$	$\boldsymbol{Bus\_Stop_3}$
13	11, 10	12

Το δεύτερο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {11} προς την οικεία {10} με συνολική απόσταση: $Dist_{11,10} = 3$

$\boldsymbol{Distance}(\mathbf{Q_1})$	$\boldsymbol{Distance}(\mathbf{Q_2})$	$\boldsymbol{Distance}(\mathbf{Q_3})$
0	0, 3	0

Η κορυφή {10}ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

$\boldsymbol{F}$
10, 11, 12, 13

4.3.6.2 Επανάληψη 2^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_3^1 \\ q_9^2 \text{ με αντίστοιχες τιμές: } \\ q_3^3 \end{cases} \begin{cases} V_1 = 7 \\ V_2 = 4 \\ V_3 = 4 \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι η επιλογή του δεύτερου και τρίτου στοιχείου ισοψηφούν αφού $\min(V_1, V_2, V_3) = 4$. Σύμφωνα με το δεύτερο κριτήριο το τρίτο στοιχείο έχει μικρότερη εκκεντρότητα αφού $\min\big(e(9), e(3)\big) = \min(21, 18) \Rightarrow e(3) = 18$.

Επιλέγεται το στοιχείο: q_3^3.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {3} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη τρίτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {3} θα πάρει το λεωφορείο 3.

Q_1	Q_2	Q_3
13	11,10	12, 3

Η κορυφή {3} αποτελεί την επόμενη στάση του τρίτου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13	11, 10	12, 3

Το τρίτο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {12} προς την οικεία {3} με συνολική απόσταση: $Dist_{12,3} = 4$

$Distance(Q_1)$	$Distance(Q_2)$	$Distance(Q_3)$
0	0, 3	0, 4

Η κορυφή {3} ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

F
3, 10, 11, 12, 13

4.3.6.3 Επανάληψη 3^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_4^1 \\ q_9^2 \; \text{με αντίστοιχες τιμές:} \\ q_4^3 \end{cases} \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 8 \\ \mathrm{V}_2 = 4 \\ \mathrm{V}_3 = 5 \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του δεύτερου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3) = 4$.

Επιλέγεται το στοιχείο: q_9^2.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {9} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη δεύτερη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {9} θα πάρει το λεωφορείο 2.

$\mathbf{Q_1}$	$\mathbf{Q_2}$	$\mathbf{Q_3}$
13	11,10, 9	12, 3

Η κορυφή {9} αποτελεί την επόμενη στάση του δεύτερου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολοτων στάσεων όλων των λεωφορείων.

$\boldsymbol{Bus\_Stop_1}$	$\boldsymbol{Bus\_Stop_2}$	$\boldsymbol{Bus\_Stop_3}$
13	11, 10, 9	12, 3

Το δεύτερο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {10} προς την οικεία {9} με συνολική απόσταση: $Dist_{10,9} = 4$.

$\boldsymbol{Distance(\mathrm{Q_1})}$	$\boldsymbol{Distance(\mathrm{Q_2})}$	$\boldsymbol{Distance(\mathrm{Q_3})}$
0	0, 3, 4	0, 4

Η κορυφή {9} ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

$\boldsymbol{F}$
3, 9, 10, 11, 12, 13

4.3.6.4 Επανάληψη $4^{η}$

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_4^1 \\ q_6^2 \\ q_4^3 \end{cases} με\ αντίστοιχες\ τιμές: \begin{cases} V_1 = 8 \\ V_2 = 6 \\ V_3 = 5 \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του τρίτου στοιχείου αφού $\min(V_1, V_2, V_3) = 5$.

Επιλέγεται το στοιχείο: q_4^3.

Το γειτονικό στοιχείο {2} του κόμβου {4} ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στη τοποθεσία {2} θα πρέπει να πάρει το τρίτο λεωφορείο που θα καταφθάσει στη θέση {4}.

Τα παραπάνω στοιχεία εισάγονται στη τρίτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που κατοικούν στις οικίες {4, 2} θα πάρουν ταυτόχρονα το λεωφορείο 3.

Q_1	Q_2	Q_3
13	11,10, 9	12, 3, 4, 2

Η κορυφή {4} αποτελεί την επόμενη στάση του τρίτου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολοτων στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13	11, 10, 9	12, 3, 4

Το τρίτο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {3} προς την οικεία {4} με συνολική απόσταση: $Dist_{3,4} = 3$

$Distance(Q_1)$	$Distance(Q_2)$	$Distance(Q_3)$
0	0, 3, 4	0, 4, 5

Οι κορυφές{2, 4} ανήκουν πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

F
2, 3,4, 9, 10, 11, 12, 13

4.3.6.5 Επανάληψη 5^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_{15}^{1} \\ q_{6}^{2} \\ q_{1}^{3} \end{cases} \textit{με αντίστοιχες τιμές:} \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 8 \\ \mathrm{V}_2 = 6 \\ \mathrm{V}_3 = 7 \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του δεύτερου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3) = 6$.

Επιλέγεται το στοιχείο: q_6^2.

Το γειτονικό στοιχείο {5} του κόμβου {6} ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στη τοποθεσία {5} θα πρέπει να πάρει το δεύτερο λεωφορείο που θα καταφθάσει στη θέση {6}.

Τα παραπάνω στοιχεία εισάγονται στη δεύτερη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές που κατοικούν στις οικίες {6, 5} θα πάρουν ταυτόχρονα το λεωφορείο 2.

$\mathbf{Q_1}$	$\mathbf{Q_2}$	$\mathbf{Q_3}$
13	11,10, 9, 6, 5	12, 3, 4, 2

Η κορυφή {6} αποτελεί την επόμενη στάση του δεύτερου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των στάσεων όλων των λεωφορείων.

$\boldsymbol{Bus\_Stop_1}$	$\boldsymbol{Bus\_Stop_2}$	$\boldsymbol{Bus\_Stop_3}$
13	11, 10, 9, 6	12, 3, 4

Το δεύτερο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {9} προς την οικεία {6} με συνολική απόσταση: $Dist_{9,6} = 3$

$\boldsymbol{Distance(\mathrm{Q}_1)}$	$\boldsymbol{Distance(\mathrm{Q}_2)}$	$\boldsymbol{Distance(\mathrm{Q}_3)}$
0	0, 3, 4, 6	0, 4, 5

Οι κορυφές {6, 5} ανήκουν πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

$\boldsymbol{F}$
2, 3,4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13

4.3.6.6 Επανάληψη 6^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_{15}^{1} \\ - \\ q_{1}^{3} \end{cases} \text{με αντίστοιχες τιμές:} \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 8 \\ - \\ \mathrm{V}_3 = 7 \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του τρίτου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_3) = 7$. Το δεύτερο λεωφορείο δεν υπολογίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση διότι έχει συμπληρώσει το μέγιστο πλήθος μαθητών ($C[2] = k = 5$).

Επιλέγεται το στοιχείο: q_1^3.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {1} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη τρίτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {1} θα πάρει το λεωφορείο 3.

Q_1	Q_2	Q_3
13	11,10, 9, 6, 5	12, 3, 4, 2, 1

Η κορυφή {1} αποτελεί την επόμενη στάση του τρίτου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13	11, 10, 9, 6	12, 3, 4, 1

Το τρίτο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {2} προς την οικεία {1} με συνολική απόσταση: $Dist_{2,1} = 3$

$Distance(\mathrm{Q}_1)$	$Distance(\mathrm{Q}_2)$	$Distance(\mathrm{Q}_3)$
0	0, 3, 4, 6	0, 4, 5, 7

Η κορυφή {1} ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

F
1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13

4.3.6.7 Επανάληψη $7^{η}$

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_{15}^{1} \\ - \\ - \end{cases} με\ αντίστοιχες\ τιμές: \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 8 \\ - \\ - \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του πρώτου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1) = 8$. Το δεύτερο και το τρίτο λεωφορείο δεν υπολογίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση διότι έχουν συμπληρώσει το μέγιστο πλήθος μαθητών ($C[2] = C[3] = k = 5$).

Επιλέγεται το στοιχείο: q_{15}^{1}.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {15} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη πρώτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {15} θα πάρει το λεωφορείο 1.

Q_1	Q_2	Q_3
13, 15	11,10, 9, 6, 5	12, 3, 4, 2, 1

Η κορυφή {15} αποτελεί την επόμενη στάση του τρίτου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13, 15	11, 10, 9, 6	12, 3, 4, 1

Το πρώτο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {13} προς την οικεία {15} με συνολική απόσταση: $Dist_{13,15} = 8$

$Distance(\mathrm{Q}_1)$	$Distance(\mathrm{Q}_2)$	$Distance(\mathrm{Q}_3)$
0, 8	0, 3, 4, 6	0, 4, 5, 7

Η κορυφή {15} ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

F
1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15

4.3.6.8 Επανάληψη 8^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_{14}^{1} \\ - \\ - \end{cases} \text{με αντίστοιχες τιμές:} \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 10 \\ - \\ - \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του πρώτου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1) = 10$. Το δεύτερο και το τρίτο λεωφορείο δεν υπολογίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση διότι έχουν συμπληρώσει το μέγιστο πλήθος μαθητών ($C[2] = C[3] = k = 5$).

Επιλέγεται το στοιχείο: q_{14}^{1}.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {14} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη πρώτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {14} θα πάρει το λεωφορείο 1.

Q_1	Q_2	Q_3
13, 15, 14	11,10, 9, 6, 5	12, 3, 4, 2, 1

Η κορυφή {14} αποτελεί την επόμενη στάση του τρίτου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13, 15, 14	11, 10, 9, 6	12, 3, 4, 1

Το πρώτο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {15} προς την οικεία {14} με συνολική απόσταση: $Dist_{15,14} = 10$

$Distance(\mathrm{Q}_1)$	$Distance(\mathrm{Q}_2)$	$Distance(\mathrm{Q}_3)$
0, 8, 10	0, 3, 4, 6	0, 4, 5, 7

Η κορυφή {14} ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

F
1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

4.3.6.9 Επανάληψη 9^{η}

Εύρεση πιθανών στοιχείων με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης.

$$\begin{cases} q_7^1 \\ - \\ - \end{cases} \mu\varepsilon\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\varsigma\ \tau\iota\mu\acute{\varepsilon}\varsigma: \begin{cases} \mathrm{V}_1 = 20 \\ - \\ - \end{cases}$$

Θα γίνει η επιλογή του πρώτου στοιχείου αφού $\min(\mathrm{V}_1) = 10$. Το δεύτερο και το τρίτο λεωφορείο δεν υπολογίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση διότι έχουν συμπληρώσει το μέγιστο πλήθος μαθητών ($C[2] = C[3] = k = 5$).

Επιλέγεται το στοιχείο: q_7^1.

Κανένα μη δεσμευμένο γειτονικό στοιχείο του κόμβου {7} δεν ικανοποιεί την μέγιστη πεζή απόσταση.

Το παραπάνω στοιχείο εισάγεται στη πρώτη στήλη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής που κατοικεί στην οικία {7} θα πάρει το λεωφορείο 1.

Q_1	Q_2	Q_3
13, 15, 14, 7	11,10, 9, 6, 5	12, 3, 4, 2, 1

Η κορυφή {7} αποτελεί την επόμενη στάση του τρίτου λεωφορείου. Παρακάτω παρουσιάζεται το σύνολο των στάσεων όλων των λεωφορείων.

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13, 15, 14, 7	11, 10, 9, 6	12, 3, 4, 1

Το πρώτο λεωφορείο θα μετακινηθεί από την οικεία {14} προς την οικεία {7} με συνολική απόσταση: $Dist_{14,7} = 20$

$Distance(\mathrm{Q}_1)$	$Distance(\mathrm{Q}_2)$	$Distance(\mathrm{Q}_3)$
0, 8, 10, 20	0, 3, 4, 6	0, 4, 5, 7

Η κορυφή {7} ανήκει πλέον στο σύνολο F των δεσμευμένων κορυφών.

F
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

4.3.6.10 Εξαγωγή τελικών αποτελεσμάτων

Ο αλγόριθμος θα τερματίσει επιτυχώς αφού όλοι οι κόμβοι έχουν τοποθετηθεί στα αντίστοιχα σύνολα Q_i.
Πράγματι το σύνολο F των δεσμευμένων κόμβων ταυτίζεται με το σύνολο όλων των κατοικιών των μαθητών S.

Q_1	Q_2	Q_3
13, 15, 14, 7	11,10, 9, 6, 5	12, 3, 4, 2, 1

Bus_Stop_1	Bus_Stop_2	Bus_Stop_3
13, 15, 14, 7	11, 10, 9, 6	12, 3, 4, 1

$Distance(Q_1)$	$Distance(Q_2)$	$Distance(Q_3)$
0, 8, 10, 20	0, 3, 4, 6	0, 4, 5, 7

F
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

Παρατηρούνται τα κάτωθι:

- Το σύνολο όλων των δεσμευμένων κορυφών ταυτίζεται με το σύνολο όλων των κατοικιών των μαθητών $F \equiv S$.
- Το σύνολο όλων των μαθητών που έχουν περισυλλεχθεί από κάποιο λεωφορείο (3-λεωφορεία) ταυτίζεται με το σύνολο όλων των κατοικιών των μαθητών $S = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$.
- Κανένα λεωφορείο δεν περιέχει κόμβο μαθητή το οποίο να περιέχεται σε κάποιο άλλο λεωφορείο $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$.
- Κανένα λεωφορείο δεν περιέχει στάση παραλαβής μαθητή η οποία να περιέχεται σε κάποιο άλλο λεωφορείο $Bus\_stop_1 \cap Bus\_stop_2 \cap Bus\_stop_3 = \emptyset$.
- Το πλήθος περισυλλεγμένων μαθητών σε κάποιο λεωφορείο είναι μικρότερο ή ίσο από την χωρητικότητα του αντίστοιχου λεωφορείου $|Q_1| = 4 < C[1] = 5$, $|Q_2| = 5 = C[2] = 5$, $|Q_3| = 5 = C[3] = 5$.
- Το πλήθος των στάσεων για παραλαβή μαθητών σε κάποιο λεωφορείο είναι μικρότερο ή ίσο από την χωρητικότητα του αντίστοιχου λεωφορείου $|Bus\_stop_1| = 4 < C[1] = 5$, $|Bus\_stop_2| = 4 < C[2] = 5$, $|Bus\_stop_3| = 4 < C[3] = 5$.

4.4 Εξαγωγή στατιστικών αποτελεσμάτων

Σε μία αστική περιοχή ένα λεωφορείο βάση νόμου θα πρέπει να κινείται με μέση ωριαία ταχύτητα 60km/h. Όμως λόγω σχετικής κίνησης, διάφορα φανάρια, διαβάσεις με πεζούς και διάφορων άλλων εξωγενών η παρούσα Διπλωματική κάνει τη θεώρηση ότι ένα λεωφορείο κινείται με μέση ωριαία ταχύτητα 40km/h.

Σε κάθε στάση δαπανάται ένα χρονικό διάστημα για την ασφαλή τοποθέτηση ενός μαθητή αλλά και μεταφοράς του από το λεωφορείο. Οι λόγοι ποικίλουν όπως η πρόσδεση του μαθητή στη θέση του, κάποια καθυστέρηση από τον γονιό του κ.α. Η παρούσα Διπλωματική κάνει τη θεώρηση ότι σε κάθε στάση δαπανάτε περίπου 1.5 λεπτό για όλη τη διαδικασία από την στιγμή που θα εισχωρήσει ο μαθητής στο λεωφορείο μέχρι την στιγμή της εκκίνησης του λεωφορείου.

- Μέση ωριαία ταχύτητα: 40km/h.
- Συνολικός χρόνος στάσης: 1,5 min.
- Συνολική απόσταση(σε km) που διένυσε κάθε λεωφορείο με συνυπολογισμό της απόστασης μεταξύ της τελευταίας στάσης κάποιου λεωφορείου και του σχολείου:

Q_1	Q_2	Q_3
5	2.3	2.1

- Συνολική χρόνος ταξιδιού κάθε λεωφορείου (σε min):

Q_1	Q_2	Q_3
7.5	3.45	3.15

- Συνολική χρόνος ταξιδιού με συνυπολογισμό τον χρόνο καθυστέρησης για κάθε στάση (σε min):

Q_1	Q_2	Q_3
13.5	9.45	9.15

- Μέσος χρόνος ταξιδιού για κάθε λεωφορείο 10,7 min.
- Μέσος χρόνος ταξιδιού για κάθε παιδί σε συγκεκριμένο λεωφορείο (σε min):

Q_1	Q_2	Q_3
3.375	1.89	1.83

- Ο μέσος χρόνος παραμονής κάθε παιδιού σε λεωφορείου είναι 2.365 min.

4.5 Προτεινόμενος αλγόριθμος SBRP

Θεωρούμε τα σύνολα:

- *V(G)* το σύνολο που περιέχει όλους τους κόμβους μαζί με τον κόμβο σχολείο.
- *V(E)* το σύνολο που περιέχει όλες τις ακμές οι οποίες ενώνουν δύο διαφορετικούς κόμβους.
- *V(w)* το σύνολο που περιέχει όλα τα βάρη των ακμών.

Παρακάτω παρατίθεται ο προτεινόμενος αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα SBRP:

	!Αρχικοποίηση μεταβλητών
Βήμα 2:	*! Κατασκευή το συνόλου S* ***S***←*V(G) – school_node* ***Free***←***S*** *! Κατασκευή του πίνακα γειτνίασης* ∀ ***i*** ∈ *V(G)*: ∀ ***j*** ∈ *V(G)*: $$\boldsymbol{A_{ij}} \leftarrow \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{ave}_{ij} \in E \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{ave}_{ij} \notin E \end{cases}$$ *! Κατασκευή πίνακα βέλτιστων αποστάσεων* ∀ ***i*** ∈*V(G)*: $\boldsymbol{Dist_i}$ ←Use Dijkstra starting from i *! Κατασκευή πίνακα εκκεντρότητας* ∀ ***i*** ∈*V(G)*: $$\boldsymbol{e_i} \leftarrow \max\{dist_{ij}, \forall j \in V(G), i \neq j\}$$
Βήμα 3:	*! Εισαγωγή κορυφών στο σύνολο Q* ∀ ***i*** ∈ ***K***: $$\boldsymbol{Q_i} \leftarrow index\left(\min_{s \in S}\{e_s\}\right), \left\|\min_{s \in S}\{e_s\}\right\| \leq k$$
Βήμα 4:	*! Εισαγωγή στοιχείων* q_j^i While (F ≠ *S*): ∀ ***i*** ∈ ***K***: $$\mathrm{V}_i \leftarrow \min_j \left(\sum_{r \in Q_i} a_{jr}^i \right) \mid \forall j \in Free, \forall r \in Q_i$$ ***q***= $\min_i(\mathrm{V_i})$ **bus**= *i* **Bus_Stop**$_{\mathbf{bus}}$ ← **q** $\mathbf{Q_{bus}} \leftarrow q$ $\mathbf{Q_{bus}}$ ← all free neibors of q

	F← ***q*** ***Free***←*remove(q)*
Βήμα 5:	∀ $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{K}$: **Calculate ($avgTimeBus_i$)** **Calculate (Total_avgTimePerStudent)**

Στον παραπάνω αλγόριθμο χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολισμοί:

- Εισαγωγή τιμής σε μεταβλητή: $\boldsymbol{variable} = value$
- Εισαγωγή τιμής σε λίστα: ***List***←*value*

4.6 Σύνοψη αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με τα τελικά αποτελέσματα παρατηρούνται τα κάτωθι:

1. Το πρώτο λεωφορείο
   Θα εκτελέσει την διαδρομή: 13-15-14-7-8.
   Θα περισυλλέξει τους μαθητές: 13, 15, 14, 7.
   Κανένας μαθητής δεν θα περπατήσει προς κάποια στάση.
   Θα διανύσει συνολικά την απόσταση των 5km.
   Η διάρκεια όλου του ταξιδιού είναι 13,5min.
   Ο μέσος χρόνος παραμονής κάθε παιδιού είναι 3,375 min.
2. Το δεύτερο λεωφορείο
   Θα εκτελέσει την διαδρομή: 11-10-9-6-8.
   Θα περισυλλέξει τους μαθητές: 11, 10, 9, 6, 5.
   Ένας μαθητής θα περπατήσει προς κάποια στάση (ο μαθητής 5 προς στάση 6).
   Θα διανύσει συνολικά την απόσταση των 2,3km.
   Η διάρκεια όλου του ταξιδιού είναι 9,45min.
   Ο μέσος χρόνος παραμονής κάθε παιδιού είναι 1,89min.
3. Το τρίτο λεωφορείο
   Θα εκτελέσει την διαδρομή: 12-3-4-1-8.
   Θα περισυλλέξει τους μαθητές: 12, 3, 4, 2, 1.
   Ένας μαθητής θα περπατήσει προς κάποια στάση (ο μαθητής 2 προς στάση 4).
   Θα διανύσει συνολικά την απόσταση των 2,1 km.
   Η διάρκεια όλου του ταξιδιού είναι 9,15min.
   Ο μέσος χρόνος παραμονής κάθε παιδιού είναι 1,83min.

Το πρώτο λεωφορείο επιλέγει να πάρει τις πιο απομακρυσμένες περιοχές. Τα άλλα δύο λεωφορεία επιλέγουν να πάρουν κόμβους σε κοντινές αποστάσεις.

5. Διεξαγωγή πειραμάτων

5.1 Εκτέλεση πειραμάτων ως προς τη χωρητικότητα των λεωφορείων

Στο παρούσα ενότητα θα μελετηθεί η αλγοριθμική διαδικασία δρομολόγησης ως προς τη χωρητικότητα των λεωφορείων. Θα χρησιμοποιηθούν τρία λεωφορεία τα οποία θα περιέχουν διαφορετικό πλήθος περισυλλογής μαθητών. Θα παρουσιαστούν τα δεδομένα όπου ο μέγιστος χρόνος διαδρομή κάποιου λεωφορείου είναι μικρότερος των 16 min.

Χωρητικότητα	Πλήθος μαθητών	Μέγιστη απόσταση (km)	Μέγιστος χρόνος διαδρομή (min)
C[2, 6, 6]	[2, 6, 6]	3.9	13.35
C[3, 4, 7]	[3, 4, 7]	3.5	12.75
C[3,5, 6]	[3, 5, 6]	4.3	13.95
C[4, 3, 7]	[4, 3, 7]	5	13.5
C[4, 4, 7]	[3, 4, 7]	3.5	12.75
C[4, 5, 5]	[4, 5, 5]	5	13.5
C[4, 5, 6]	[3, 5, 6]	4.3	13.95
C[4, 6, 4]	[4, 6, 4]	3.9	13.35
C[4, 6, 5]	[3, 6, 5]	3.9	13.35
C[4, 7, 3]	[3, 2,9]	5	13.5
C[4, 7, 5]	[3, 6, 5]	3.9	13.5
C[4, 8, 5]	[3, 6, 5]	3.9	13.35
C[4, 9, 4]	[4, 6, 4]	3.9	13.35
C[4, 9, 5]	[3, 6, 5]	3.9	13.35
C[5, 3, 6]	[5,3, 6]	4.3	13.95
C[5, 4, 5]	[5, 4, 5]	4.2	12,3
C[5, 4, 7]	[3, 4,7]	3.5	12.75
C[5, 5, 5]	[4, 5, 5]	5	13,5
C[5, 6, 3]	[5, 6, 3]	4.7	14.1

C[5, 6, 5]	[4, 6, 4]	3.9	13.35
C[4, 7, 3]	[4, 7,3]	5	13.5
C[5, 7, 4]	[4, 6,4]	3.9	13.5
C[6, 3, 6]	[5, 3, 6]	4,3	13.95
C[6, 3, 7]	[4, 3,7]	5	13.5

Πίνακας 9: Διεξαγωγή πειράματος με μεταβλητός πλήθος χωρητικότητας.

Παρατηρείται ότι η καλύτερη επιλογή ως προς την χωρητικότητα των τριών λεωφορείων είναι η περίπτωση η οποία τα λεωφορεία 1 και 2 μπορούν να παραλάβουν 5 παιδιά ενώ το λεωφορείο 2 μόνο 4.

5.2 Εκτέλεση πειραμάτων ως προς το πλήθος των λεωφορείων

Τα επόμενα πειράματα θα εκτελεστούν με ίδιο πλήθος χωρητικότητας για κάθε λεωφορείο. Επίσης θα γίνει η χρήση με ανώτατο όριο τα τέσσερα λεωφορεία.

Περίπτωση	Χωρητικότητα	Πλήθος μαθητών	Μέγιστη απόσταση (km)	Μέγιστος χρόνος διαδρομή (min)
1	C[14]	[14]	10,4	33,6
2	C[7, 7]	[7, 7]	5,9	17,85
3	C[8, 8]	[8, 6]	5,5	18,75
4	C[5, 5, 5]	[4, 5, 5]	5	13,5
5	C[6, 6, 6]	[3, 6, 5]	3.9	13,5

Πίνακας 10: Διεξαγωγή πειράματος με μεταβλητό πλήθος λεωφορείων.

Παρατηρείται ότι η καλύτερη επιλογή ως προς μέγιστο χρόνο διαδρομής για κάποιο λεωφορείο είναι η χρήση τριών λεωφορείων με χωρητικότητα 6 ατόμων. Παρότι οι επιλογές των 5 κι 6 ατόμων έχουν τον ίδιο μέγιστο χρόνο διαδρομής η τελευταία επιλογή προτιμάται διότι η συνολική διαδρομή που θα διανύσουν όλα τα λεωφορεία είναι μικρότερη καθώς και το λεωφορείο 2 θα περισυλλέξει περισσότερους μαθητές από κάποια στάση.

5.3 Εκτέλεση πειραμάτων ως προς τη μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση

Τα επόμενα πειράματα θα εκτελεστούν με ίδιο πλήθος χωρητικότητας για κάθε λεωφορείο.

Ένα ρεαλιστικό ανώτατο όριο πεζής απόστασης το οποίο και ορίζεται είναι τα 600 m.

Θα καταγραφούν τα αποτελέσματα για κάθε περίπτωση η οποία έχει τον ελάχιστο-μέγιστο χρόνο διαδρομής.

Περίπτωση	Πεζή απόσταση(m)	Χωρητικότητα	Πλήθος μαθητών	Μέγιστη απόσταση (km)	Μέγιστος χρόνος διαδρομή (min)
1	0	C[14]	[14]	10,8	37,2
2	100	C[14]	[14]	10,8	37,2
3	200	C[14]	[14]	10,4	33,6
4	300	C[14]	[14]	9,1	27,15
5	400	C[14]	[14]	9,1	27,15
6	500	C[14]	[14]	8	24
7	600	C[14]	[14]	7,6	21,9
8	0	C[7,7]	[7, 7]	6.1	19.65
9	100	C[7,7]	[7, 7]	6.1	19.65
10	200	C[7,7]	[7, 7]	5.9	17.85
11	300	C[9,9]	[9, 5]	5.3	14.4
12	400	C[9,9]	[9, 5]	5.3	14.4
13	500	C[8,8]	[6, 8]	5	13.5
14	600	C[7,7]	[7, 7]	4.3	12.45
15	0	C[5, 5, 5]	[4, 5, 5]	5	13.5
16	100	C[5, 5, 5]	[4, 5, 5]	5	13.5
17	200	C[6, 6, 6]	[3, 6, 5]	3.9	13.35
18	300	C[6, 6, 6]	[3, 6, 5]	3.9	13.35
19	400	C[6, 6, 6]	[4, 4, 6]	3.3	9.6
20	500	C[5, 5, 5]	[5, 5, 4]	3.6	11.4

21	600	C[5, 5, 5]	[4, 5, 5]	4	10.5
22	0	C[5, 5, 5, 5]	[3, 5, 3, 3]	2.3	10.95
23	100	C[5, 5, 5, 5]	[3, 5, 3, 3]	2,6	10,95
24	200	C[4, 4, 4, 4]	[3, 4, 3, 4]	3,3	10,95
25	300	C[5, 5, 5, 5]	[4, 3, 2, 5]	3,5	9,7
27	400	C[4, 3, 2, 5]	[4, 7, 5, 6]	3,2	9,3
27	500	C[5, 5, 5, 5]	[5, 3, 3, 3]	3,2	9,3
28	600	C[6, 6, 6, 6]	[4, 2, 3, 5]	2.2	6.3

Πίνακας 11: Διεξαγωγή πειράματος με μεταβλητό πλήθος πεζής απόστασης.

Παρατηρείται ότι η καλύτερη επιλογή ως προς μέγιστο χρόνο διαδρομής για κάποιο λεωφορείο είναι η χρήση τεσσάρων λεωφορείων με χωρητικότητα 6 ατόμων και μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση ορισμένη στα 600 m. Παρατηρείται μια σημαντική βελτίωση ως προς το χρόνο παράδοσης των μαθητών στο σχολείο. Η καλύτερη περίπτωση (η τελευταία) χρειάζεται μόλις το 18% του χρόνου της χειρότερης περίπτωσης (της πρώτης).

6. Παρουσίαση αποτελεσμάτων αλγορίθμου

6.1 Βέλτιστη λύση

Ως βέλτιστη λύση ορίζεται ο ελάχιστος χρόνος παράδοσης όλων των μαθητών. Είναι προφανές ότι στην ιδανική περίπτωση που δεν θα υπήρχε περιορισμός ως προς το μέγιστο πλήθος των λεωφορείων τότε εάν αντιστοιχούσε ένα λεωφορείο σε κάθε μαθητή θα υπήρχε άμεση παράδοση του μαθητή στο σχολείο. Αυτό το σενάριο ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα με το σενάριο κάθε γονιός να παραδώσει το παιδί του στο σχολείο. Πράγματι από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε:

$$d_{i,school} < d_{i,j} + d_{j,school}$$
$$Time_{i,school} < Time_{i,j} + Time_{j,school}$$

με i ο αρχικός κόμβος j ένας ενδιάμεσος κόμβος και τέλος $school$ ο κόμβος σχολείο. Φυσικά ο χρόνος με τη χρήση ενδιάμεσων κόμβων γίνεται μεγαλύτερος, εάν συνυπολογίσουμε και το χρόνο που θα δαπανηθεί στη στάση.

Η παραπάνω περίπτωση είναι μη ρεαλιστική ως προς το αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής, διότι στόχος της είναι να βρει μία βέλτιστη λύση παραλαβής μαθητών με όσο το δυνατόν λιγότερα οχήματα στον λιγότερο χρόνο.

Ο λόγος υπολογισμού της παραπάνω χρονικής ποσότητας T^* είναι μόνο για να συγκριθεί με τα τελικά αποτελέσματα του αλγορίθμου.

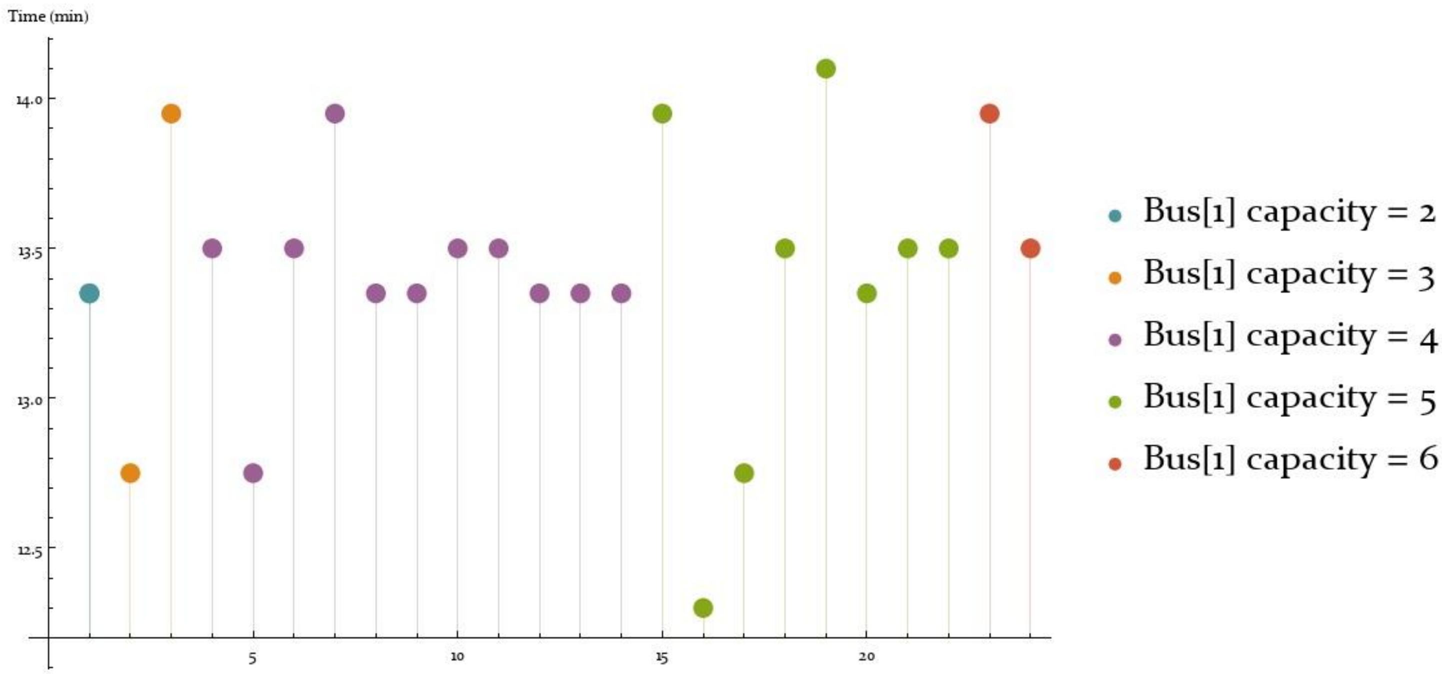
Από τον πίνακα Dist (πίνακας 7) παρατηρείται ότι στη γραμμή 8 που αποτελεί όλες τις αποστάσεις από τον κόμβο σχολείο η μέγιστη απόσταση βρίσκεται στη στήλη 9. Δηλαδή $dist_{9,8} = 1{,}6\ km.$ Όλες οι άλλες αποστάσεις είναι μικρότερες με άμεσο αποτέλεσμα να υπερκαλύπτονται χρονικά από αυτή την περίπτωση. Έχει γίνει η θεώρηση ότι τα λεωφορεία κινούνται με μέση ωριαία ταχύτητα 40km/h (u), αλλά και ότι δαπανάται περίπου 1,5min ($T_{station}$) σε κάθε στάση. Υπολογίζεται ότι και η εκκίνηση του δρομολογίου αποτελεί στάση.

$$T^* = Time_{9,8} = \frac{dist_{9,8}}{u} + T_{station}$$

$$T^* = 3{,}8\ min$$

6.2 Αποτελέσματα ως προς τη χωρητικότητα

Τα αποτελέσματα του πειράματος ως προς τη χωρητικότητα των λεωφορείων παρουσιάζονται στο σχεδιάγραμμα της εικόνας 12.



Εικόνα 12:Αποτελέσματα πειράματος ως προς την χωρητικότητα των λεωφορείων.

Παρατηρούνται τα κάτωθι:

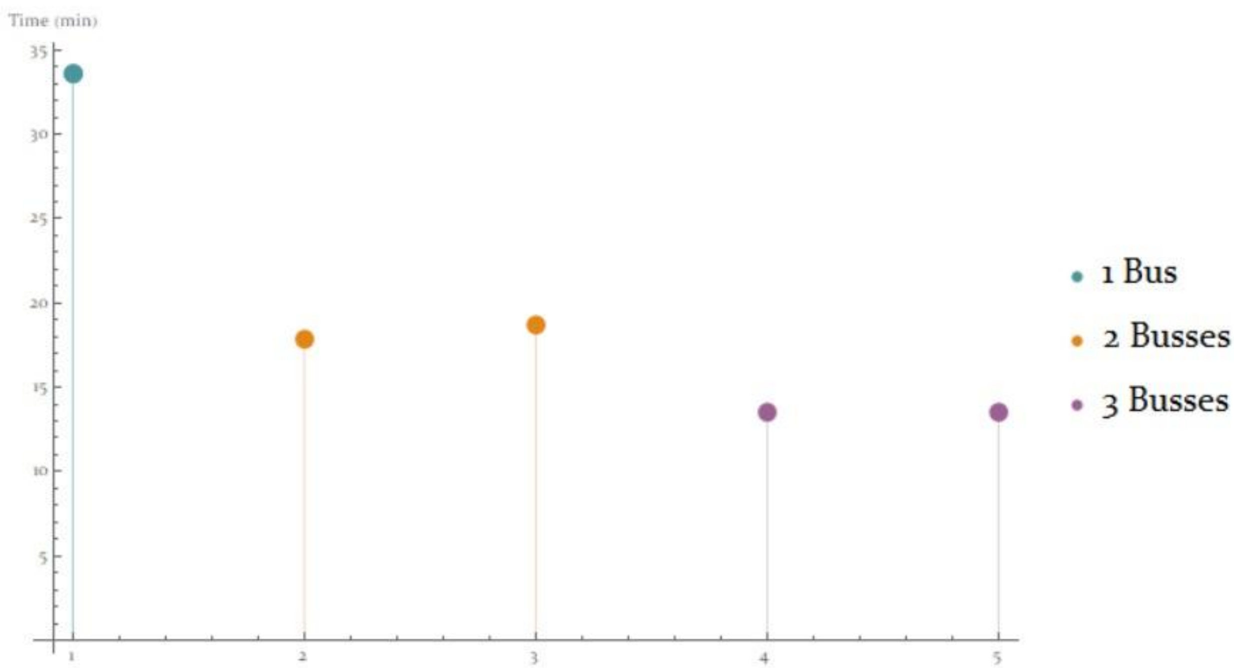
- Η καλύτερη περίπτωση ως προς το χρόνο παραλαβής και μεταφοράς των μαθητών στο τερματικό κόμβο σχολείο είναι η 16η. Δηλαδή οι αντίστοιχες χωρητικότητες των λεωφορείων είναι 5, 4, 5. Ο συνολικός χρόνος όλων των διαδρομών είναι 12.3 min με μέγιστη απόσταση διαδρομής τα 4.2 km. Ο συνολικός χρόνος είναι 3,25 φορές περισσότερο από τον βέλτιστο ο οποίος και είναι αποδεκτός.

$$T_{16} = 3{,}25 * T^*$$

- Παρατηρείται ανάλογα τη χωρητικότητα των λεωφορείων ο τελικός χρόνος αυξομειώνεται. Ένα λεωφορείο με συγκεκριμένη χωρητικότητα μπορεί να επηρεάσει όλη τη διαδικασία διότι υπάρχει εξάρτηση όχι μόνο ως προς την απόσταση της επόμενης στάσης αλλά και ως προς την μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση. Διότι εάν σε μία στάση υπάρχουν μαθητές που υπερβαίνουν τη χωρητικότητα του αντίστοιχου λεωφορείου τότε θα πρέπει η περισυλλογή αυτών των μαθητών να γίνει από άλλο λεωφορείο.
- Εκτός από τη βέλτιστη περίπτωση δεν μπορούν να εξαχθούν άλλα ασφαλή συμπεράσματα.

6.3 Αποτελέσματα ως προς το πλήθος

Τα αποτελέσματα του πειράματος ως προς τη πλήθος των λεωφορείων παρουσιάζονται στο σχεδιάγραμμα της εικόνας 13.



Εικόνα 13:Αποτελέσματα πειράματος ως προς το πλήθος των λεωφορείων

Παρατηρούνται τα κάτωθι:

- Η καλύτερη περίπτωση ως προς το χρόνο παραλαβής και μεταφοράς των μαθητών στο τερματικό κόμβο σχολείο είναι η 5^{η}. Δηλαδή η χρήση τριών λεωφορείων. Παρατηρείται ότι ο χρόνος παράδοσης όλων των μαθητών στην 4^{η} και 5^{η} περίπτωση είναι ο ίδιος αλλά προτιμάται ο η τελευταία διότι τα λεωφορεία θα διανύσουν μικρότερη απόσταση και θα παραλάβουν περισσότερους μαθητές από μία στάση. Οι αντίστοιχες χωρητικότητες των λεωφορείων είναι 6, 6, 6. Ο συνολικός χρόνος όλων των διαδρομών είναι 13.5min με μέγιστη απόσταση διαδρομής τα 3.9km. Ο συνολικός χρόνος είναι 3,55 φορές περισσότερο από τον βέλτιστο ο οποίος και είναι αποδεκτός.

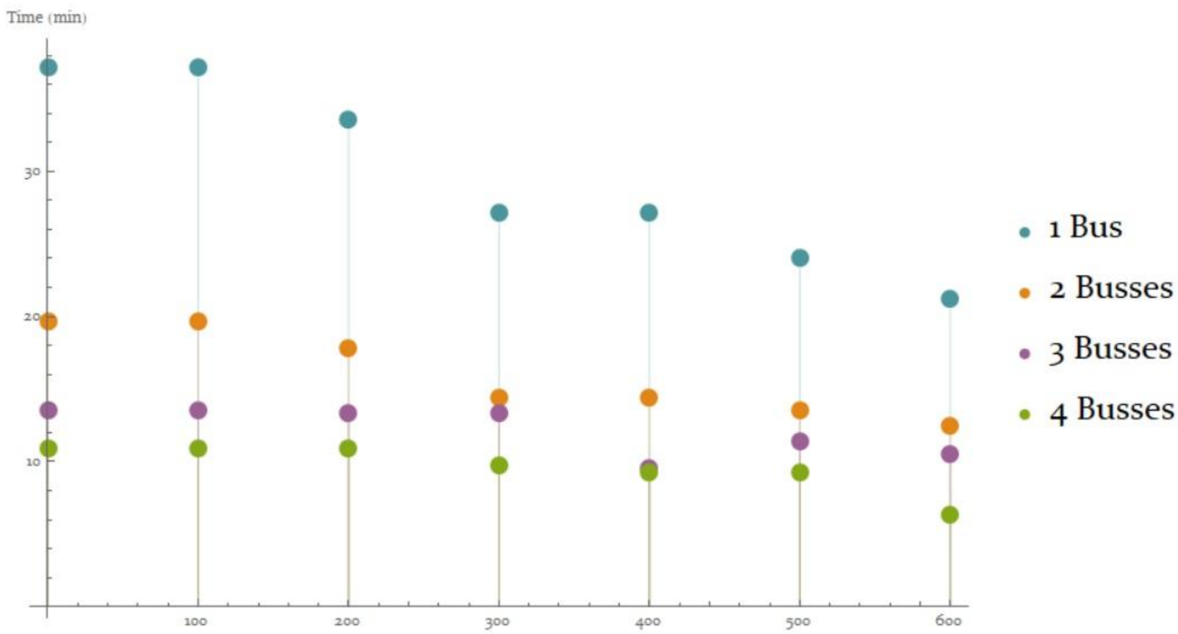
$$T_5 = 3{,}55 * T^*$$

- Παρατηρείται ανάλογα με το πλήθος των λεωφορείων ότι ο τελικός χρόνος μειώνεται. Μόνο με απλή παρατήρηση της περίπτωση χρήσης ενός λεωφορείου και της περίπτωσης χρήσης δύο λεωφορείων παρατηρεί κανείς τη μείωση του συνολικού χρόνου στο περίπου στο μισό.
- Στην τέταρτη περίπτωση αλλά και στην πέμπτη παρότι γίνεται η χρήση τριών λεωφορείων η συγκεκριμένη χωρητικότητα μπορεί να επηρεάσει όλη τη διαδικασία διότι υπάρχει εξάρτηση όχι μόνο ως προς την απόσταση της επόμενης στάσης αλλά και ως προς την μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση. Έτσι ενώ στη τέταρτη περίπτωση δαπανάται περισσότερος χρόνος για την προσέγγιση των στάσεων, στη πέμπτη περίπτωση δαπανάται περισσότερος χρόνος για την περισυλλογή πολλών μαθητών από μία στάση. Συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις οι διοικήσεις των οργανισμών ή των εταιριών προτιμούν την περίπτωση με το λιγότερο οικονομικό κόστος όπως η περίπτωση 5.
- Όσο αυξάνεται το πλήθος των λεωφορείων ο χρόνος μειώνεται όλο και με πιο αργό ρυθμό. Ενώ από την χρήση ενός λεωφορείου σε δύο ο χρόνος μείωσης είναι περίπου 50% η χρήση τρίτου λεωφορείου σε σχέση με τα δύο είναι μόλις 25% ή το 60% του συνολικού χρόνου με τη χρήση ενός λεωφορείου.

Με την αύξηση των λεωφορείων μειώνεται ο συνολικός χρόνος και προσεγγίζει τον βέλτιστο χρόνο T^*. Θα πρέπει να γίνει αξιολόγηση ποιος είναι ο επιτρεπτός χρόνος για να αποφασιστεί το συνολικό πλήθος λεωφορείων. Δηλαδή ο μέγιστος επιτρεπτός χρόνος παράδοσης των μαθητών τον οποίο θα τον καθορίσει η διοίκηση και να επιλεχθεί η βέλτιστη περίπτωση χρήσης των λεωφορείων.

6.4 Αποτελέσματα ως προς τη μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση

Τα αποτελέσματα του πειράματος ως προς τη μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση των μαθητών παρουσιάζονται στο σχεδιάγραμμα της εικόνας 14.



Εικόνα 14: Αποτελέσματα πειράματος ως προς μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση.

<u>Παρατηρούνται τα κάτωθι:</u>

- Η καλύτερη περίπτωση ως προς το χρόνο παραλαβής και μεταφοράς των μαθητών στο τερματικό κόμβο σχολείο είναι η 28η. Δηλαδή η χρήση τεσσάρων λεωφορείων με μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση τα 600m. Οι αντίστοιχες χωρητικότητες των λεωφορείων είναι 6, 6, 6, 6. Ο συνολικός χρόνος όλων των διαδρομών είναι 6.3 min με μέγιστη απόσταση διαδρομής τα 2.2km. Ο συνολικός χρόνος είναι 1.66 φορές περισσότερο από τον βέλτιστο ο οποίος και είναι αποδεκτός.

$$T_5 = 1{,}66 * T^*$$

- Παρατηρείται ότι ο χρόνος παράδοσης όλων των μαθητών σε όλες τις περιπτώσεις φθίνει καθώς η μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση αυξάνει. Παρατηρείται ανάλογα με το πλήθος των λεωφορείων ότι ο τελικός χρόνος μειώνεται. Μόνο με απλή παρατήρηση στη περίπτωση όπου το W=600m η χρήση ενός λεωφορείου και της περίπτωσης χρήσης δύο λεωφορείων παρατηρεί κανείς τη ραγδαία μείωση του συνολικού χρόνου παράδοσης. Η αύξηση των λεωφορείων δεν έχει και την ανάλογη μείωση του χρόνου παράδοσης των μαθητών. Όσο αυξάνεται το πλήθος των λεωφορείων ο χρόνος μειώνεται όλο και με πιο αργό ρυθμό. Ενώ από την χρήση ενός λεωφορείου σε δύο ο χρόνος μείωσης είναι περίπου 44% η χρήση τρίτου λεωφορείου σε σχέση με τα δύο είναι μόλις 15.7% ή το 52% του συνολικού χρόνου με τη χρήση ενός λεωφορείου.
- Σε συνέχεια καθώς η απόσταση W αυξάνει η χιλιομετρική απόσταση μειώνεται. Λογικό συμπέρασμα αφού κάποια λεωφορεία θα προτιμήσουν να παραλάβουν περισσότερους μαθητές από κάποιες συγκεκριμένες στάσεις.
- Σε κάθε περίπτωση παρατηρείται μια πλήρης εξάρτηση του χρόνου παράδοσης με τη μέγιστη επιτρεπτή πεζή απόσταση. Η μορφολογία του γράφου αλλά και η επιλογή κατάλληλου W μπορούν να επηρεάσουν σε σημαντικό βαθμό το τελικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα σε ένα επαρχιακό δίκτυο στο οποίο κάθε μαθητής διαμένει σε ξεχωριστό χωριό με κάθε στάση χωριό να βρίσκεται σε απόσταση περίπου 1.5km ίσως να μην έχει νόημα η επιλογή κατάλληλου W.

Ενώ με την αύξηση της μέγιστης επιτρεπόμενης πεζής απόστασης ο χρόνος παράδοσης μειώνεται θα πρέπει να καθοριστεί μια λογική τιμή εκ των προτέρων. Φυσικά στο παραπάνω πείραμα να αναγκαστεί ένας μαθητής να περπατήσει 600m ίσως σε ένα αστικό δίκτυο με κακές συνθήκες πεζοδρόμησης αλλά και με κακές καιρικές συνθήκες μπορεί να μην είναι αποδεκτό. Θα πρέπει να γίνει αξιολόγηση από τη διοίκηση του οργανισμού ή της ιδιωτικής εταιρίας ποια είναι η κατάλληλη μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση και να εξαχθούν τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Για παράδειγμα στο παραπάνω πείραμα η επιλογή να περπατήσει ένας μαθητής το πολύ 200m είναι αποδεκτό. Με τη χρήση ενός λεωφορείου θα χρειαστεί περίπου 33.6min για την παράδοση όλων των μαθητών στο σχολείο. Με τη χρήση τεσσάρων λεωφορείων θα χρειαστεί περίπου 10,95 minη οποία είναι και η βέλτιστη λύση. Ίσως η διοίκηση θα πρέπει να συνυπολογίσει και το κόστος του οδηγού του λεωφορείου και να καταλήξει σε μια μέση λύση που την ικανοποιεί. Δηλαδή η χρήση δύο λεωφορείων (μείωση του κόστους των οδηγών), με μέγιστη επιτρεπομένη πεζή απόσταση τα 200m (μεγαλύτερη ασφάλεια των μαθητών) και τελικός χρόνος παράδοσης περίπου 17.85min (αρκετά αξιόλογος χρόνος παραμονής στο λεωφορείο).

6.5 Τελικά συμπεράσματα

Η επίλυση ενός προβλήματος SBRPείναι πολυπαραγοντικό. Θα πρέπει να οριστούν εξαρχής πλήρως οι απαιτήσεις του προβλήματος για να εξαχθεί η βέλτιστη λύση. Τα τελικά συμπεράσματα αξιολογούνται σύμφωνα με τον τελικό χρόνο παραλαβής και παράδοσης όλων των μαθητών, ο οποίος είναι ο μέγιστος χρόνος παράδοσης απ’ όλα τα λεωφορεία.

Μία και ίσως η πιο βασική αρχική προϋπόθεση είναι να ορισθεί η μέγιστη επιτρεπόμενη πεζή απόσταση W. Παρατηρήθηκε ότι όσο μεγαλύτερη ορίζεται η απόσταση τόσο μειώνεται ο χρόνος παράδοσης. Δηλαδή μειώνεται το πλήθος των στάσεων με αποτέλεσμα να παραλαμβάνονται περισσότεροι μαθητές από συγκεκριμένες στάσεις. Επίσης παρατηρήθηκε ότι εξίσου σημαντικό ρόλο παρουσιάζει ο συνδυασμός της με την χωρητικότητα των λεωφορείων. Ειδικότερα σε περιπτώσεις που πολλοί μαθητές έχουν τη δυνατότητα να περπατήσουν και να παραβρεθούν σε μία συγκεκριμένη στάση η χωρητικότητα του λεωφορείου καθορίζει εάν το συγκεκριμένο λεωφορείο θα παραβρεθεί σε αυτή τη στάση. Ειδάλλως θα πρέπει αν ακολουθήσει άλλη διαδρομή να έχει και κάποιο χρονικό κόστος.

Επίσης το πλήθος των λεωφορείων είναι καταλυτικός παράγοντας στον τελικό χρόνο παράδοσης των μαθητών. Όσο αυξάνονται τα λεωφορεία τόσο μειώνεται ο τελικός χρόνος παράδοσης. Όμως θα πρέπει να ορίσει η διοίκηση του οργανισμού ή της εταιρίας στην αρχή το μέγιστο πλήθος των λεωφορείων που μπορεί να παραχωρήσει για να μπορέσει να βρεθεί τη βέλτιστη διαδρομή όλων των λεωφορείων.

Τέλος, η χωρητικότητα των λεωφορείων από μόνης της δεν μπορεί να εξαγάγει ασφαλή συμπεράσματα. Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε παραπάνω, ο συνδυασμός με το πλήθος των λεωφορείων αλλά και με την μέγιστη επιτρεπτή πεζή απόσταση επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τα τελικά αποτελέσματα.

7. Συμπεράσματα -Μελλοντικές Επεκτάσεις

7.1 Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική ασχολήθηκε με θέματα που αφορούν τους γράφους. Συγκεκριμένα σχεδιάστηκε ένας αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων (School Bus Routing Problem - SBRP). Παρουσιάζεται πλήρως ο αλγόριθμος αλλά και η εκτέλεσή του. Ακόμα η παρούσα πτυχιακή κάνει αναφορά στη θεωρία των γραφημάτων και δίνει δυνατότητα στον αναγνώστη να δει αλλά και να εμβαθύνει συγκεντρωτικά τη γνώση του στη θεωρία των γράφων.

Στο παρών κεφάλαιο παρουσιάζονται δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την δημιουργία, υλοποίηση, εκτέλεση αλλά και τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής. Επίσης παρουσιάζεται η εξαγωγή συμπερασμάτων καθώς και τα οφέλη που μπορεί να αποκομίσει κάποιος με την ενασχόληση του με τη θεωρία των γράφων αλλά και με την επίλυση ενός προβλήματος SBRP. Τελειώνοντας, θα παρουσιαστούν μερικές ιδέες χρησιμοποίησης του αλγορίθμου αλλά και κάποιες μελλοντικές επεκτάσεις του, που θα μπορέσουν να αποτελέσουν περεταίρω μελέτης του προβλήματος SBRP σε μορφή νέων διπλωματικών ή διδακτορικών διατριβών.

7.2 Δυσκολίες που παρουσιάστηκαν

Η παρούσα διπλωματική απαιτούσε γνώσεις πάνω στη θεωρία των γράφων. Ως εκ τούτου χρειάστηκε να δαπανηθεί αρκετά χρόνος για την έρευνα και την κατανόηση βασικών θεωριών, αφού ο οδηγός σπουδών του συγκεκριμένου μεταπτυχιακού δεν συμπεριλαμβάνει το συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο.

Το θέμα που πραγματεύεται η συγκεκριμένη διπλωματική (δηλαδή το πρόβλημα SBRP) είναι αρκετά εξειδικευμένο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη περιορισμένη βιβλιογραφία.

Δαπανήθηκε αρκετός χρόνος για να βρεθεί ελληνική αλλά και ξενόγλωσση βιβλιογραφία σχετικά με το αντικείμενο αυτό.

Μια από τις μεγαλύτερες δυσκολίες ήταν η κατασκευή του αλγορίθμου. Χρειαστήκαν να γίνουν πολλές ενέργειες για να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος. Οι σημαντικότερες εξ αυτών ήταν η κατασκευή του εικονικού γράφου σε μορφή δεδομένων, η αρχικοποίηση όλων των αρχικών παραμέτρων καθώς και η κατασκευή του πίνακα γειτνίασης. Σε συνέχεια η εκμάθηση και εκτέλεση του αλγορίθμου Dijkstraήταν αρκετά χρονοβόρα διαδικασία.

Η διεξαγωγή των πειραμάτων ήταν ίσως η πιο χρονοβόρα διαδικασία. Παρότι χρησιμοποιήθηκαν υπολογιστικά προγράμματα όπως η γλώσσα Python αλλά και η χρήση του Mathematica, πολλοί υπολογισμοί έγιναν κυρίως από τον συντάκτη της παρούσας διπλωματικής. Παρότι παρουσιάζεται η εκτέλεση μόνο μιας περίπτωσης τα αποτελέσματα όλων των άλλων περιπτώσεων υπολογίστηκαν με τον ίδιο τρόπο. Κρίθηκε σκόπιμο για ευνόητους λόγους να παρουσιαστούν μόνο τα αποτελέσματα.

Τέλος μια δυσκολία που προέκυψε ήταν ο επανέλεγχος των αποτελεσμάτων. Μετά το πέρας κάθε πειράματος ελέγχθηκαν και διορθώθηκαν τα εσφαλμένα αποτελέσματα. Βρέθηκαν τόσο υπολογιστικά σφάλματα αλλά και σφάλματα στη συγγραφή κάποιου κώδικα κυρίως στη Python. Αφού έγινε η εκσφαλμάτωση και επιβεβαιώθηκαν τα αποτελέσματα έγιναν όλα τα υπόλοιπα πειράματα.

7.3 Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική αποτελεί ένα πολύ δυνατό εργαλείο τόσο στο εκπαιδευτικό κομμάτι όσο και στο ερευνητικό.

Τα πρώτα κεφάλαια περιέχουν συσσωρευμένες πληροφορίες στη θεωρία των γράφων. Ο αναγνώστης μπορεί να αντλήσει βασικές πληροφορίες αλλά και να κατανοήσει τα γραφήματα χωρίς να έχει κάποιες συγκεκριμένες γνώσεις. Η απλότητα με την οποία έχει γραφτεί το κάνει ευχάριστο στον αναγνώστη και τον προετοιμάζει να μελετήσει τη θεωρία των γράφων σε μεγαλύτερο βάθος.

Μετά το πέρας της διπλωματικής υπάρχει ένα σημαντικό εργαλείο στην εύρεση βέλτιστης λύσης του προβλήματος δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων. Οποιοσδήποτε ερευνητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τη μεθοδολογία αυτής της πτυχιακής για περαιτέρω έρευνα. Ακόμα μπορεί να εμπνευστεί από τον αντίστοιχο αλγόριθμό με τέτοιο τρόπο ώστε να βρει λύση στα δικά του ερευνητικά προβλήματα.

Η εν λόγω εργασία καθιστά σαφές την εξάρτηση πολλών μεταβλητών στη δρομολόγηση σχολικών λεωφορείων. Αναδεικνύει ότι τέτοιου είδους προβλήματα είναι πολύ-παραγοντικά. Χρειάζεται πολλών ειδών γνώσεις και τεχνικές για να μπορέσει να μελετηθεί ένα όχι και τόσο απλό πρόβλημα (όπως φαίνεται).

7.4 Μελλοντικές επεκτάσεις

Το πρόβλημα εύρεσης βελτιστοποίησης της δρομολόγησης είτε αναφέρεται σε σχολικά λεωφορεία, είτε σε ασθενοφόρα, ή σε κάποια μεταφορική εταιρία, ακόμα και στη δρομολόγηση πακέτων στο internet είναι ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα του 21^{ου} αιώνα. Η τεχνολογία παρότι έχει μικρύνει το χρονικό όριο μεταξύ των χωρών αλλά και των διαδικασιών υπάρχει μεγαλύτερη ανάγκη από ποτέ να βρεθούν τεχνικές στις οποίες να ελαττωθεί ο χρόνος της δρομολόγησης. Η πτυχιακή αυτή όχι μόνο θίγει τέτοια ζητήματα αλλά προτείνει και λύσεις. Αποτελεί ένα σπουδαίο βοήθημα σε οποιοδήποτε ασχολείται με προβλήματα τέτοιου είδους. Η εξέλιξη του παρόντος συγγράμματος μπορεί να επιφέρει σημαντικές αλλαγές σε διάφορους τομείς.

Παρακάτω καταθέτονται κάποιες προτάσεις είτε σε μορφή διπλωματικών είτε σε μορφή διδακτορικών με αυτό τον σκοπό.

Δημιουργία κώδικα εκτέλεσης του αλγορίθμου σε προγραμματιστικό περιβάλλον. Στη παρούσα διπλωματική στο κεφάλαιο 4.5 παρουσιάστηκε ο προτεινόμενος αλγόριθμος του προβλήματος SBRP. Η υλοποίησή του με τη χρήση κάποιας γλώσσας προγραμματισμού όπως της Python θα φέρει μεγάλη εξοικονόμηση χρόνου σχετικά με τη διαδικασία εύρεση της βέλτιστης λύσης. Στο παρόν παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε ένα δίκτυο αποτελούμενο από μόλις 15 κόμβους. Καθίσταται σαφές ότι είναι αδύνατον να εκτελεστεί ο παρών αλγόριθμος σε ένα δίκτυο με 1000 κόμβους μόνο με τη χρήση ανθρώπινου δυναμικού.

Δημιουργία εφαρμογής με τη χρήση Googlemapsβελτιστοποίησης δρομολόγησης οχημάτων. Μια μελλοντική προέκταση τόσο του παρόντος αλγορίθμου όσο και της χρήσης του είναι η δημιουργία μιας ολοκληρωμένης εφαρμογής (μέσο internet) η οποία θα έχει ως στόχο να βοηθάει τους χρήστες (users) να βρίσκουν βέλτιστες λύσεις στις δρομολογήσεις είτε αναφέρονται σε δημόσιες είτε σε ιδιωτικές εταιρίες. Θα μπορεί να χρήστης να επιλέγει κόμβους μέσο του Google map και ένα σταθερό σημείο παράδοσης. Το ίδιο το Google map έχει τη δυνατότητα να βρίσκει τις βέλτιστες αποστάσεις μεταξύ των κόμβων οι οποίες θα αποτελούν και τα βάρη του δικτύου. Θα αντλούνται οι συντεταγμένες και τα βάρη θα επεξεργάζονται κατάλληλα και θα κατασκευάζεται μέσω μιας αυτοματοποιημένης διαδικασίας το δίκτυο N. Σε συνέχεια θα εκτελείται ο αλγόριθμος και θα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε πάνω στο Googlemapή σε κάποια άλλη μορφή.

Αναζήτηση ομοειδών προβλημάτων. Τελειώνοντας το παρόν σύγγραμμα ασχολήθηκε με το πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων. Μια πρόταση που προτείνεται είναι να βρεθούν οι διαφορές διαφόρων προβλημάτων δρομολόγησης και να αναλυθούν, καθώς και όλες οι αλλαγές που θα πρέπει να γίνουν στον αλγόριθμο έτσι ώστε να μπορεί να εκτελεστεί. Αντί να μελετάται κάθε πρόβλημα ξεχωριστά να γίνει προσπάθεια ενσωμάτωσης διαφόρων προβλημάτων σε οικογένειες με όμοια χαρακτηριστικά.

8. Βιβλιογραφία

1. Di Zhang. (2018). SOLVING SCHOOL BUS ROUTING AND STUDENT ASSIGNMENT PROBLEMS WITH HEUSRISTIC AND COLUMN GENERATION APPROACH. Louisville,Kentucky: University of Louisville, Kentucky, Department of Industrial Engineering.
2. Patrick Schittekat, Joris Kinable, Kenneth Sörensen, Marc Sevaux, Frits Spieksma, Johan Springael. (2011). A metaheuristic for the school bus routing peoblems with bus stop selection. DOI: 10.1016/j.ejor.2013.02.025.
3. Ali Shafahi, Zhongxiang Wang, Ali Haghani. (2018). A matching-based heyristic algorithm for school bus routing problems. TRB2060.
4. Ιωάννης Πιπιλής. (2013). Αξιοποίηση τυχαίων γραφημάτων για δίκτυα συναγορών. Ανάλυση και οπτικοποίηση σε πραγματικά δεδομένα της Amazon. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Σχολή Θετικών Επιστημών.
5. Alexiou Dimitra, Stefanos Katsavounis. (2013). Determining the Minimum Number of Warhouses and their Space-Size for Storing Compatible Items.
DOI: 10.1007/978-1-4614-5134-1_13.
6. Αλεξίου Δήμητρα. (2020). APPLICATION OF GRAPH THEORY TO GEODETIC NETWORKS. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Πολυτεχνική Σχολή, Τμήμα Μηχανικών Χωροταξίας και Ανάπτυξης. IKEECONF-2021-368.
7. Λιάρου Μαργαρίτα. (2018). Αξιοποίηση τυχαίων γραφημάτων για δίκτυα συναγορών. Ανάλυση και οπτικοποίηση σε πραγματικά δεδομένα της Amazon. Αθήνα: Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο, Σχολή Ψηφιακής Τεχνολογίας, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεματικής.
8. Marcelo Fonseca Faraj, João Fernando Machry Sarrubbi, Cristiano M. Silva, Marcelo Franco Porto, Nilson Tadeu Ramos Nunes (2014). A Real Geographical Application for the School Bus Routing Problem. DOI: 10.1109/ITSC.2014.6958132.
9. Δρ. Μαρία Μορφουλάκη, Κοτούλα Κορνηλία Μαρία. (2014). Π 2.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ. Τίτλος Έργου: Ολοκληρωμένο σύστημα για την ασφαλή μεταφορά μαθητών. Θεσσαλονίκη.

10. Γεωργίου Γεωργία. (2020). ΔΡΟΜΟΓΗΣΗ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΛΑΒΗ ΚΑΙ ΔΙΑΝΟΜΗ ΠΡΟΙΝΤΩΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΜΕ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΠΑΡΑΘΥΡΑ (VECHICLE ROOTING PROBLEM WITH PICKUP AND DELIVERIES AND TIME WINDOWS). Χανιά: Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης.
11. Κετσάτη Κωνσταντίνα. (2017). Το Πρόβλημα της Δρομολόγησης Οχημάτων-Διαχείρηση Διανομών σε Ελληνική Εταιρία. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών.
12. Ρουσσάκης Χρήστος. (2017). Υλοποίηση αλγορίθμων και μετρικών γράφων στη βιβλιοθήκη GraphX του Spark. Αθήνα: Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο, Σχολή Ψηφιακής Τεχνολογίας, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεματικής.
13. Χρυσαυγή Παναγιώτου. (2019). Αλγόριθμοι εύρεσης χρηστών μέδω κοινωνικών δικτύων με τάσεις ρητορικής μίσους, οικειοποίησης ή και αποκλεισμού. Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Τμήμα Πληροφορικής.
14. Γεμενετζής Χρήστος. (2017). ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΕΥΡΕΣΗΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΜΕΓΑΛΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ. Πάτρα: ΕΑΠ.
15. Σπηλιόπουλος Σπυρίδων. (2019). Μέθοδοι Επίλυσης του Προβλήματος Δρομολόγησης Οχημάτων Αστικών Εμπορευματικών Μεταφορών και Εφαρμογή τους σε Πληροφοριακό Σύστημα. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Τομέας Βιομηχανικής Διοίκησης και Επιχειρησιακής Έρευνας.
16. Σπυρίδων Καρύδης. (2015) Βασικές Εξειδικεύσεις σε Θεωρία και Λογισμικό – Τόμος Ά. Πάτρα: ΕΑΠ.
17. Σωτήριος Δ. Γκουδινούδης, Διονύσιος Ι. Φωτόπουλος. (2012). Εξελισσόμενα δίκτυα στο χρόνο: Η περίπτωση ενός δικτύου συνεργασίας επιστημόνων, Αθήνα: Εθνικό Και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Πληροφορική Και Τηλεπικοινωνιών.
18. Κοιλιάρης Κωνσταντίνος. (2010). Visual Exploration of Multivariate Graphs, Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Μαθηματικών.

19. Λένης Σέργιος. (2016). Επεξεργασία ερωτημάτων σε γράφους μεγάλης κλίμακας: Μία βασισμένη στο υπολογιστικό νέφος προσέγγιση. Πάτρα: ΕΑΠ.
20. Καρύδης Ι., Σιούτας Σ., Τζήμας Ι. (2015). Σύγχρονες Μέθοδοι Προγραμματισμού – Τόμος Ύ. Πάτρα: ΕΑΠ.
21. Ηλιακοπούλου Αικατερίνη, Καργάκος Ανδρέας (2012). Ανάπτυξη μεθόδων εξερεύνησης και πλήρους κάλυψης αγνώστου χώρου από ρομπότ με εφαρμογή σε αναζήτηση θυμάτων. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα ΗΜΜΥ, Τομέας Ηλεκτρονικής και Υπολογιστών.
22. Πετρίδης Παναγιώτης (2013). ΕΥΡΕΣΗ ΠΥΚΝΟΤΕΡΟΥ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ STREAMING ΜΟΝΤΕΛΟ. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Πληροφορικής.
23. Νικολέττα Δελλατόλα (2014). Δίκτυα και Δρομολόγηση Πακέτων. Σπάρτη: Τ.Ε.Ι. Πελοποννήσου, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
24. Σιαφάκας Γεράσιμος. (2017). Ανάπτυξη Χρηστικού Εργαλείου Πειραματικής Αποτίμησης Επίδοσης Αλγορίθμων Δρομολόγησης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων.
25. Χρήστος Μάριος Πλώτας (2019). Υλοποίση Αποδοτικών Αλγορίθμων για την Δρομολόγηση Πλοίων, Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Και Πληροφορικής.
26. Μιχαηλίδης Ευκλείδης. (2010). Computer Αλγόριθμοι δρομολόγησης δικτύων δεδομένων με χρήση τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων, Καβάλα: ΤΕΙ Καβάλας, Σχολή Διοίκησης και Οικονομίας, Τμήμα Διαχείρισης Πληροφοριών.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα: Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεση