ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

<u>ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:

Α΄ ΑΤΡΕΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ   Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

Β΄ ΑΝΟΥΣΗΣ ΜΙΧΑΗΛ   Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΑΤΡΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2024

Ευχαριστίες:

Η συγγραφή της παρούσης εργασίας αποτέλεσε το κίνητρο για τη διερεύνηση από μέρους μου νέων οριζόντων στα Μαθηματικά αλλά ταυτόχρονα ήταν και μία δοκιμή του πνευματικού και ψυχικού σθένους που διαθέτουμε. Υπήρξε ένα επίπονο αλλά ταυτόχρονα και ωραίο ταξίδι στον κόσμο της Μαθηματικής Ανάλυσης. Αναμφίβολα κέρδισα κι ελπίζω να προσέφερα μέσα απ' αυτή τη μελέτη.

Μετά την ολοκλήρωση αυτού του πονήματος νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω ειδικά τους

κο Ατρέα Νικόλαο για την καθοδήγηση κατά την εκπόνηση

κο Ανούση Μιχαήλ για την αναγνώριση των δυσκολιών της διατριβής.

Γενικότερα ευχαριστώ όσους με εμπιστεύθηκαν και εκείνους που με στερήθηκαν.

Αφιερωμένο στην Αλεξάνδρα.

Πρόλογος

Η αποδόμηση στοιχείων σε απλούστερα «δομικά στοιχεία», όπως και η ανακατασκευή πολύπλοκων στοιχείων από κατάλληλη σύνθεση «δομικών λίθων» είναι πάντα στο επίκεντρο του επιστημονικού ενδιαφέροντος. Το πιο απλό παράδειγμα που μπορεί να σκεφτεί κάποιος είναι οι λέξεις που συντίθενται από κάποιο προκαθορισμένο αλφάβητο, ή τα γράμματα που απαρτίζουν μια λέξη. Προχωρώντας σε σύνολα με επιπλέον δομή, όπως π.χ. οι γραμμικοί χώροι, οδηγούμαστε με φυσικό τρόποι στην έννοια της βάσης όπως την ξέρουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, δηλαδή ενός πεπερασμένου συνόλου στοιχείων/γεννητόρων του χώρου, ικανών να κατασκευάσουν με μοναδικό τρόπο κάθε στοιχείο του χώρου μέσω κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού στοιχείων της βάσης αυτής.

Προς αυτήν την κατεύθυνση, στην Ανάλυση, σημειώνουμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα: το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης με παραγώγους κάθε τάξης από έναν «άπειρο» γραμμικό συνδυασμό μονωνύμων και το πιο «ευέλικτο» ανάπτυγμα Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης από έναν «άπειρο» γραμμικό συνδυασμό ημιτόνων και συνημιτόνων για τη λύση διαφόρων Προβλημάτων Αρχικών/Συνοριακών Τιμών και όχι μόνον. Το πέρασμα όμως από χώρους πεπερασμένης διάστασης σε απειροδιάστατους χώρους όπου υπεισέρχεται πλέον και η έννοια της σύγκλισης, οδηγεί αναπόφευκτα και σε έναν επαναπροσδιορισμό της έννοιας της βάσης σε τέτοιους χώρους, στα πλαίσια και της χρηστικότητας των αντιστοίχων αναπτυγμάτων.

Σκοπός της παρούσης διπλωματικής είναι η μελέτη αναπαραστάσεων σε απειροδιάστατους χώρους Banach, διότι σε τέτοιους χώρους, η συνήθης έννοια της βάσης (Hamel) ως γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων του χώρου δεν είναι επαρκής. Ενας έτερος στόχος της εργασίας είναι να μελετήσουμε κάποια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα συστημάτων αναπαραστάσεων, όπως:

- Ορθοκανονικών βάσεων
- Βάσεων Riesz
- Πλαισίων (frames)

κυρίως στην Ανάλυση χρόνου-συχνότητας, έτσι ώστε να γνωρίζουμε και κάποια «όρια χρήσης τους» αναλόγως εφαρμογής. Ενδιαφερόμαστε για συστήματα αναπαραστάσεων, διότι αυτά παίζουν εμμέσως σημαντικό ρόλο σε μια σειρά από τεχνολογικές εφαρμογές όπως είναι επεξεργασία και μετάδοση ήχου, εικόνας και γενικότερα ενός σήματος, το οποίο είναι συνήθως μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η μελέτη τέτοιων συστημάτων επιφέρει άμεσα απτά αποτελέσματα σε τομείς όπως απεικονίσεις και επεξεργασία δεδομένων ιατρικής και γεωφυσικής φύσεως, στην τομογραφία και τη γεωχωρική ανάλυση, όσο και στην αναγνώριση προσώπων και γενικότερα εικόνων και ήχων με εφαρμογές στην τεχνητή όραση και τη ρομποτική.

Στο Κεφάλαιο 1, παραθέτουμε συνοπτικά βασικά στοιχεία Πραγματικής Ανάλυσης, Συναρτησιακής Ανάλυσης και Θεωρίας Τελεστών και της Ανάλυσης Fourier.

Στο Κεφάλαιο 2, ξεκινούμε με τον ορισμό της βάσης Schauder σε απειροδιάστατους χώρους, (αντί της βάσης Hamel), η οποία είναι μία αριθμήσιμη ακολουθία σε ένα χώρο Banach, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του χώρου να προσεγγίζεται όσο κοντά θέλουμε και με μοναδικό τρόπο, από κατάλληλο πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της βάσης αυτής. Στοιχεία όπως η πληρότητα, η γραμμική ανεξαρτησία και η ελαχιστότητα μελετώνται και αποσαφηνίζεται η ισχύς τους σε χώρους άπειρης διάστασης. Η έννοια της σύγκλισης άνευ συνθήκης παρουσιάζεται διεξοδικά όπως επίσης και η σύνδεση με το δϋικό χώρο ως εναλλακτικό χώρο μελέτης. Επιπλέον εξετάζεται η ανθεκτικότητα στις διαταραχές των στοιχείων της βάσης.

Στο Κεφάλαιο 3, μελετούμε συνοπτικά τη βασική θεωρία ορθοκανονικών βάσεων σε χώρους τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, ξεκινώντας από τη μελέτη του τριγωνομετρικού συστήματος και επικεντρώνουμε τη μελέτη μας σε ορθοκανονικές βάσεις στην Ανάλυση Χρόνου – Συχνότητας. Με χρήση τελεστών Διαστολής, Διαμόρφωσης και Μετάθεσης και κατάλληλων γεννητόρων συναρτήσεων, παράγουμε ορθοκανονικές βάσεις κυματιδίων μέσω της διαδικασίας της Πολυδιακριτής Ανάλυσης, όπως και συστήματα Gabor. Αποδεικνύουμε ότι δε μπορούμε να έχουμε πραγματική ορθοκανονική βάση κυματιδίων με συμπαγή φορέα και συμμετρία ή αντισυμμετρία. Επίσης, συζητούμε το γεγονός ότι δεν μπορούμε να έχουμε πάντα μια επιθυμητή βάση, μέσω της εικασίας Fuglede. Με άλλα λόγια, η αναπαράσταση με χρήση ορθοκανονικής βάσης δεν αποτελεί πανάκεια, διότι δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε πάντα ορθοκανονική βάση με επιθυμητές ιδιότητες.

Προσπαθώντας να απαλλαγούμε από τους παραπάνω περιορισμούς στην επιλογή αρχικής συνάρτησης που επιβάλλονται για την κατασκευή ορθοκανονικής βάσης, στο Κεφάλαιο 4 εισάγουμε την έννοια της βάσης Riesz σε χώρους τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, ως την πιο άμεση «χαλάρωση» της έννοιας της ορθοκανονικής βάσης. Οι βάσεις Riesz παράγονται (είναι ισοδύναμες με κάποια έννοια) από ορθοκανονικές βάσεις και διατηρούν χαρακτηριστικά των ορθοκανονικών βάσεων όπως η σύγκλιση άνευ συνθήκης και η μοναδικότητα της αναπαράστασης. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των βάσεων Riesz και το Μετασχηματισμό Zak, την έννοια και τις ιδιότητες του οποίου επίσης μελετούμε, αποδεικνύουμε ικανές συνθήκες ώστε ένα σύστημα Gabor να αποτελεί ορθοκανονική βάση, είτε βάση Riesz και αποδεικνύουμε το Θεώρημα Balian Low, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει «γεννήτωρ» συνάρτηση που να παράγει ορθοκανονικό ή Riesz σύστημα Gabor και ταυτόχρονα να λειτουργεί ως καλό «παράθυρο» στο χρόνο και στη συχνότητα. Επομένως υπάρχουν μειονεκτήματα και στις αναπαραστάσεις αυτές.

Ετσι, εγκαταλείπουμε την έννοια της ελαχιστότητας και κατά συνέπεια την έννοια της βάσης Schauder και παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 5 τα Πλαίσια (frames). Πρόκειται για ένα σύστημα αναπαράστασης από το οποίο λείπει η μοναδικότητα της αναπαράστασης αφήνοντας όμως περαιτέρω ευελιξία σε άλλες επιθυμητές ιδιότητες, όπως π.χ. ανίχνευση συμμετρίας, ή ανίχνευση ακμών. Πάραυτα η σύγκλιση άνευ συνθήκης διατηρείται οδηγώντας σε στέρεες (stable) αναπαραστάσεις, ενώ η ανοχή στο θόρυβο αυξάνεται. Τελειώνουμε, με τη μελέτη πλαισίων συστημάτων μεταθέσεων μιας γεννήτορος συνάρτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν Κεφάλαιο θα εισάγουμε βασικές έννοιες και αποτελέσματα από τη Θεωρία Μέτρου, Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία Τελεστών και Ανάλυσης Fourier .

1.1 Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Ξεκινούμε αναφέροντας συνοπτικά την έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue, που θα βοηθήσει στον ορισμό και στη μετέπειτα χρήση των χώρων L_p. Βασικές πηγές είναι οι **[18]** ,**[49]**, **[62]**, **[68].**

Ορισμός 1.1.1. Έστω ένας μετρικός χώρος X και $P(X)$ το δυναμοσύνολο του . Μία συνάρτηση $\mu : P(X) \to [0,+\infty]$, λέγεται ***εξωτερικό μέτρο*** στο X αν :

(i) Ισχύει $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Η μ είναι γνησίως μονότονη , δηλαδή αν $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $\mu(A) \le \mu(B)$.

(iii) η μ είναι αριθμήσιμα υποπροσθετική δηλαδή $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. ♦

Ορισμός 1.1.2. Το ***εξωτερικό μέτρο Lebesgue*** στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : a_n, b_n \in \mathbb{R} \ \kappa\alpha\iota \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}$, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. ♦

Ορισμός 1.1.3. Έστω $\mu : P(X) \to [0,+\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο σε ένα μετρικό χώρο X . Ένα σύνολο B λέγεται μ ***-μετρήσιμο***(αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης απλά ***μετρήσιμο***) αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$. Στο εξής θα παριστάνουμε με A_μ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων συνόλων. ♦

Αποδεικνύεται ότι η οικογένεια A_μ αποτελεί μια σ – άλγεβρα στο *X*, η οποία περιέχει τη σ-άλγεβρα Borel του *X*, δηλαδή την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά (άρα και κλειστά) σύνολα του X. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η συνολοσυνάρτηση

$$m : A_\mu \to [0,+\infty] : \ m(B) = \mu(B)$$

αποτελεί ένα μέτρο πάνω στη σ-άλγεβρα A_μ των μετρήσιμων υποσυνόλων του *X*, δηλαδή

(i) $m(E)\geq 0 \ \ \forall E\in \mathrm{A}_{\mu}$,

(ii) $m(\varnothing)=0$,

(iii) για κάθε ακολουθία $\{E_n\}\in \mathrm{A}_{\mu}$, ξένων μεταξύ τους ανα δύο συνόλων, ισχύει

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n).$$

Ορισμός 1.1.4. Αν μία ιδιότητα κάποιας συνάρτησης ισχύει σε ένα σύνολο A, μέτρου 0 λέμε ότι ισχύει ***σχεδόν παντού***. Συμβολικά ***σ.π.*** ♦

Ορισμός 1.1.5. Έστω μ είναι ένα εξωτερικό μέτρο σε ένα χώρο X και $f: X\to[-\infty,+\infty]$ είναι μία συνάρτηση στον X. Αν ισχύει $[f\leq b]=f^{-1}([-\infty,b])=\{x\in X: f(x)\leq b\}\in \mathrm{A}_{\mu}$, για κάθε $b\in\mathbb{R}$, τότε η f καλείται ***μετρήσιμη***. ♦

Πρόταση 1.1.6. Αν (X,μ,A), είναι ένας χώρος μέτρου μ, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) η f είναι μετρήσιμη .

(ii) $[f<b]=\{x\in X: f(x)<b\}\in \mathrm{A}_{\mu}$, για κάθε $b\in\mathbb{R}$.

(iii) $[f\geq b]=\{x\in X: f(x)\geq b\}\in \mathrm{A}_{\mu}$, για κάθε $b\in\mathbb{R}$.

(iv) $[f>b]=\{x\in X: f(x)>b\}\in \mathrm{A}_{\mu}$, για κάθε $b\in\mathbb{R}$. ♦

Πρόταση 1.1.7. Έστω (X,μ,A), είναι ένας χώρος μέτρου μ και $f,g: X\to[0,\infty]$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις τότε

(i) η $a\cdot f$ με $a\in\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

(ii) η $f+g$ είναι μετρήσιμη.

(iii) οι f^2 και $f\cdot g$ είναι μετρήσιμες.

(iv) $\dfrac{f}{g}$ για $g\neq 0$ είναι μετρήσιμη.

(v) $|f|$ είναι μετρήσιμη. ♦

Ορισμός 1.1.8. Μία συνάρτηση s στον X καλείται ***απλή*** αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο. Δηλαδή $s(X)=\{c_i: i\in I_n\}$ και τότε $s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{A_i}(x)$ όπου $A_i=\{x: s(x)=c_i\}$ και χ_{A_i} η χαρακτηριστική συνάρτηση του A_i. ♦

Ορισμός 1.1.9. Υποθέτουμε ότι η s είναι μία απλή μετρήσιμη συνάρτηση σε χώρο μέτρου X με $s(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$, $x \in X$, όπου A_i, μετρήσιμα σύνολα και $c_i > 0$, $i \in I_n$. Αν A μετρήσιμο σύνολο τότε ορίζουμε $I_A(s)=\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A \cap A_i)$. Εάν η f είναι μία μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση , τότε ορίζουμε το $\int_A f d\mu = \sup I_A(s)$, όπου s απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \le s \le f$, ως ***ολοκλήρωμα Lebesgue*** της f ως προς μ, υπεράνω του A. Προφανώς $\int_A s d\mu = I_A(s)$, για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση. ♦

Ορισμός 1.1.10. Εάν η f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση , τότε θεωρούμε τα ολοκληρώματα $\int_A f^+ d\mu$, $\int_A f^- d\mu$, όπου $f^+ = \max(f,0)$ και $f^- = |\min(f,0)|$. Εάν και τα δύο ολοκληρώματα είναι πεπερασμένο, τότε η f καλείται ***Lebesgue ολοκληρώσιμη*** με $\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$. ♦

Θεώρημα 1.1.11. (*Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue*) Έστω $f_n : X \to [0,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n \le \ldots$(δηλ. $\{f_n\}$ αύξουσα) . Θέτουμε $f = \lim_n f_n$. Τότε η f είναι μετρήσιμη και $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$. ♦

Πόρισμα 1.1.12. : (*Beppo Levi*) Έστω $f_n : X \to [0,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Τότε $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$. ♦

Θεώρημα 1.1.13. : (*Κυριαρχούμενης Σύγκλισης του Lebesgue*) Έστω $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $f = \lim_n f_n$. Αν υπάρχει Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση g, με $|f_n| \le g$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και $\lim_n \int f_n d\mu = \int f d\mu$. ♦

Ορισμός 1.1.14. Εστω $p \geq 1$. Καλούμε ***χώρους*** $L_p(A)$, τους χώρους των κλάσεων ισοδυναμίας [*f*]: $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού, όπου *f* Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις ως προς το μέτρο μ = λ* (βλέπε ορισμό 1.1.2) για τις οποίες ισχύει $\int_A |f|^p \, d\mu < \infty$. ♦

Επιπλέον στη μελέτη μας θα χρειαστούμε τους ***χώρους*** $L_p(A)$, όπου $p \geq 1$, δηλαδή τους χώρους που περιέχουν μετρήσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $\int_A |f|^p \, d\mu < \infty$.

Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$ με $f \in L_p(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος . Συχνά θα εμφανίζεται το ζεύγος των συζυγών εκθετών $p, q \geq 1$, για τους οποίους ισχύει $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Για $p = 1$ θεωρούμε $q = +\infty$). Μάλιστα για αυτούς ισχύουν οι:

Ανισότητα Holder: Έστω A ένα μετρήσιμο σύνολο , $f \in L_p(A)$ και $g \in L_q(A)$, όπου $p, q > 1$. Τότε $f, g \in L_1(A)$ και ισχύει $\int_A |fg| \, d\mu \leq \left(\int_A |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$.

Ανισότητα Minkowski: Έστω A ένα μετρήσιμο σύνολο και $f, g \in L_p(A)$, όπου $p \geq 1$.

Τότε $f, g \in L_1(A)$ και ισχύει $\int_A |f+g|^p \, d\mu \leq \left(\int_A |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$. ♦

Αργότερα θα δείξουμε ότι οι $L_p(A)$ γενικά είναι χώροι Banach ενώ ειδικά ο $L_2(A)$ είναι χώρος Hilbert.

1.2 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Κάνουμε μία σύντομη παρουσίαση των βασικών αποτελεσμάτων της Συναρτησιακής Ανάλυσης που θα χρειαστούμε στη δόμηση των ερχόμενων Κεφαλαίων με βασικές πηγές τις **[2]** , **[19]**, **[65]**, **[67]**, **[69]**.

Στην παρούσα μελέτη θα θεωρούμε ***γραμμικούς χώρους*** V πάνω από ένα σώμα F (συνήθως $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) οι οποίοι θα είναι εφοδιασμένοι με τις συνήθεις δύο πράξεις την πρόσθεση $+ : V \times V \to V$ και τον πολλαπλασιασμό $\bullet : F \times V \to V$.

Ορίζουμε ως νόρμα μία συνάρτηση $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, για την οποία αν $x, y \in V$ και $\lambda \in F$, τότε :

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα ||.|| όπως παραπάνω, καλείται *νορμικός*, Κάθε τέτοιος χώρος είναι προφανώς μετρικός χώρος, με μετρική

d(x,y) = ||x-y||.

Απ' τη σχέση $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, προκύπτει ότι $\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x - y\|$ και συνεπώς η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής συνάρτηση, ενώ ομοίως εύκολα προκύπτει ότι οι πράξεις + και $\cdot$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 1.2.1. Μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ λέμε ότι :

α) συγκλίνει στο $x \in V$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq n_0$, τέτοιο ώστε $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

β) είναι Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq m \geq n_0$, τέτοιο ώστε $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. ♦

Ορισμός 1.2.2. Ένας νορμικός χώρος X, θα καλείται ***πλήρης*** αν κάθε κάθε Cauchy ακολουθία του X ως προς τη νόρμα του, συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ (ως προς τη νόρμα του X). Κάθε πλήρης νορμικός χώρος καλείται χώρος ***Banach.*** ♦

Ορισμός 1.2.3. Έστω X ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, τότε :

α) λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο $x \in X$, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ συγκλίνει στο $x \in X$, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $\lim_n \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0$.

β) λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως , αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. ♦

Πρόταση 1.2.4. Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Ο X είναι χώρος Banach .

β) Για κάθε ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στον X . ♦

Παράδειγμα: Έστω $p \geq 1$, τότε ο χώρος $L_p\left[0,1\right]$, των μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\left[0,1\right]$, για τις οποίες ισχύει $\int_{[0,1]} |f(x)|^p \, dx < +\infty$ με νόρμα την $\|f\|_p = \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ είναι Banach. . Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.2.4. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L_p\left[0,1\right]$ τέτοια ώστε $M = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την ακολουθία $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$, $x \in [0,1]$. Τότε

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M \text{ ,άρα } g_n \in L_p\left[0,1\right] \text{και } \int_{[0,1]} |g_n(x)|^p \, dx \leq M^p .$$

Η (g_n) είναι αύξουσα , άρα απ'το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ισχύει:

$$\lim_n \int_{[0,1]} |g_n(x)|^p \, dx \leq M^p \Rightarrow \int_{[0,1]} |g(x)|^p \, dx \leq M^p ,$$

όπου $g(x) = \lim_n g_n(x)$. Άρα η g^p είναι ολοκληρώσιμη και $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, σχεδόν παντού. Θεωρούμε την $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, αφού $g(x) < +\infty$ σ.π. τότε η $s(x) = \lim_n s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)$, παίρνει πεπερασμένη τιμή σ.π. Η s είναι μετρήσιμη και από την

$$|s_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x) \text{, ισχύει } |s(x)| \leq g(x) \text{ σ.π.}$$

$$\text{Συνεπώς } \int_{[0,1]} |s(x)|^p \, dx \leq \int_{[0,1]} |g(x)|^p \, dx \leq M^p ,$$

$$\text{δηλαδή } s \in L_p[0,1] \text{ και } |s_n(x) - s(x)|^p \leq 2^p \max\left\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\right\} \leq 2^p |g(x)|^p \text{ σ.π.}$$

Αφού $\lim_n |s_n(x) - s(x)|^p = 0$ σ.π. , απ’ το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ισχύει $\lim_n \int_{[0,1]} |s_n(x) - s(x)|^p \, dx = 0$, δηλαδή $\lim_n \|s_n - s\|_p = 0$. Άρα ο $L_p[0,1]$ είναι Banach.

Επιπλέον χώροι Banach αποδεικνύεται ότι είναι οι παρακάτω :

Ο $C([\alpha,\beta])$ δηλαδή ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f(t)|$, όπως και οι γραμμικοί του υπόχωροι $C^n([\alpha,\beta])$ των συναρτήσεωνμε συνεχή n-ιοστή παράγωγο. Ομοίως είναι Banach και ο χώρος συνεχών συναρτήσεων $C(\mathbb{R})$ στο $\mathbb{R}$ και οι υπόχωροι του , $C_b(\mathbb{R})$ των συνεχών φραγμένων συναρτήσεων, $C_c(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων συμπαγούς φορέα και $C_0(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων που φθίνουν στο 0 για $x \to \infty$.

Ορισμός 1.2.5. Ένας χώρος Banach καλείται διαχωρίσιμος αν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. ♦

Ανάμεσα σε χώρους Banach θα χρειαστούμε την έννοια του τελεστή. Υπενθυμίζουμε λοιπόν ότι ένας μετασχηματισμός $f: X \to Y$, όπου X γραμμικός χώρος πάνω από το σώμα F , καλείται ***γραμμικός*** αν ισχύει $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in F$.

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $\mathrm{T}: X \to Y$, μεταξύ χώρων Banach καλείται ***τελεστής***.

Ορισμός 1.2.6. Ένας τελεστής $\mathrm{T}: X \to Y$, καλείται ***φραγμένος*** αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0$, τέτοιος ώστε $\|\mathrm{T}(x)\| \leq \mathrm{M} \cdot \|x\|$, για κάθε $x \in X$. ♦

Βασικό αποτέλεσμα είναι ότι ένας τελεστής $\mathrm{T}: X \to Y$ είναι φραγμένος αν και μόνον αν είναι συνεχής.

Ορίζουμε ως νόρμα του τελεστή $\mathrm{T}: X \to Y$, τη $\|\mathrm{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

Τότε για κάθε $x \in X - \{0\}$ ισχύει $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$, άρα $\left\| \mathrm{T}\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \le \|\mathrm{T}\| \Leftrightarrow \|\mathrm{T}(x)\| \le \|\mathrm{T}\| \cdot \|x\|$,

όπου στο 0 η σχέση ισχύει με την ισότητα.

Επιπλέον ο ***χώρος όλων των φραγμένων τελεστών*** $\mathrm{T}: X \to Y$, μεταξύ χώρων Banach συμβολίζεται $\mathrm{B}(X,Y)$ και είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα τη $\|\mathrm{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ και μάλιστα ο $\mathrm{B}(X,Y)$ όπου Y είναι χώρος Banach .Υπενθυμίζουμε επίσης και θα χρειαστούμε ότι αν X, Y, Z, είναι χώροι Banach , $T \in \mathrm{B}(X,Y)$, $S \in \mathrm{B}(Y,Z)$, τότε και η σύνθεση τους $S \circ T \in \mathrm{B}(X,Z)$, για την οποία μάλιστα ισχύει $\|S \circ T\| \le \|S\| \|T\|$. Την εικόνα ενός τελεστή T θα την παριστάνουμε με $\operatorname{Im} T$ ενώ τον πυρήνα με $KerT$.

Ως ***συναρτησοειδές ή συναρτησιακό*** f ενός χώρου Banach X καλούμε κάθε συνάρτηση $f: X \to F$, όπου F το σώμα των συντελεστών(δηλαδή το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, αναλόγως του χώρου που θα μελετούμε).

Ως ***δυϊκό (dual)*** χώρο του Banach X , καλούμε τον $X^* = \mathrm{B}(X,F)$, δηλαδή το χώρο τα στοιχεία του οποίου είναι τα γραμμικά φραγμένα συναρτησοειδή του X .

Θεώρημα 1.2.7. (Hahn-Banach) Έστω X ένας γραμμικός χώρος και ρ μία ημινόρμα στον X . Αν ο M είναι υπόχωρος του X και $\lambda: M \to F$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον M για το οποίο ισχύει $|\langle x, \lambda \rangle| \le \rho(x),\ x \in M$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\Lambda: X \to F$ τέτοιο ώστε $\Lambda|_M = \lambda$ και $|\langle x, \Lambda \rangle| \le \rho(x),\ x \in M$. ♦

Πόρισμα 1.2.8. Έστω X ένας γραμμικός χώρος , τότε για μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, ισχύει $\overline{span}\{x_n\} = X$ αν και μόνον αν ισχύει ότι αν $x^* \in X^*$ και $x^*(x_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x^* = 0$. ♦

Θεώρημα 1.2.9. (Ανοικτής Απεικόνισης) Έστω X,Y χώροι Banach και $T:X\to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής , επί. Τότε ο T είναι ανοικτός τελεστής (Δηλαδή αν το G είναι ανοικτό σύνολο του X , τότε η εικόνα $T(G)$ του G είναι ανοικτό υποσύνολο του Y). ♦

Αν ο $T\in B(X,Y)$, είναι επιπλέον 1-1 και επί τότε καλείται ***ισομορφισμός*** και οι X,Y ***καλούνται ισόμορφοι***. Αν επιπλέον για τον T ισχύει $\|T(x)\|=\|x\|$, για κάθε $x\in X$, τότε ο T καλείται ***ισομετρικός ισομορφισμός*** και X,Y καλούνται ***ισομετρικά ισόμορφοι*** συμβολικά $X\approx Y$.

Πόρισμα 1.2.10. (Αντίστροφης Απεικόνισης) Έστω X,Y χώροι Banach και $T:X\to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός ,1-1, και επί τελεστής. Τότε ο τελεστής $T^{-1}:Y\to X$ είναι φραγμένος (Δηλαδή ο T είναι ισομορφισμός) ♦

Θεώρημα 1.2.11. (Κλειστού Γραφήματος) Έστω X,Y χώροι Banach και $T:X\to Y$ κλειστός τελεστής , δηλαδή το γράφημα

$$G=\{(x,T(x)\in X\times Y \mid x\in X\}$$

να είναι κλειστό υποσύνολο του $X\times Y$. Τότε ο τελεστής T είναι φραγμένος . ♦

Θεώρημα 1.2.12. (Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος) Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y , ώστε $\sup\limits_{i\in I}\|T_i(x)\|<\infty$ για κάθε $x\in X$. Τότε υπάρχει $M>0$ ώστε $\|T_i\|<M$ για κάθε $i\in I$. ♦

Ορισμός 1.2.13. Έστω ένας γραμμικός χώρος V , με συντελεστές απ' το σώμα των μιγαδικών. Θεωρούμε μία απεικόνιση $\langle , \rangle : V\times V\to\mathbb{C}$, τέτοια ώστε για κάθε $x,y,z\in V$ και $\lambda\in\mathbb{C}$ να ισχύουν:

(i) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

(ii) $\langle \lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$.

(iii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

(iv) $\langle x,x\rangle\geq 0$ και αν $\langle x,x\rangle=0$, τότε $x=0$.

Τότε η $\langle , \rangle$ καλείται ***εσωτερικό γινόμενο*** και ο χώρος V καλείται ***γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.*** ♦

Επιπλέον απ' τις συνθήκες του εσωτερικού γινομένου προκύπτουν άμεσα και οι εξής :

(v) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

(vi) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.

(vii) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(viii) $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ για κάθε $z \in V$, τότε $x = y$.

Εξαιρετικά σημαντική είναι η Ανισότητα ***Cauchy-Schwarz*** , δηλαδή ότι σε ένα γραμμικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in V$ ισχύει: $\left|\langle x, y\rangle\right|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αν V είναι γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο τότε αυτός εφοδιάζεται με μία νόρμα παραγόμενη απ' το εσωτερικό γινόμενο τη $\|\cdot\| : V \to V$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Παράδειγμα εσωτερικού γινομένου αποτελεί η απεικόνιση

$$\langle f, g\rangle = \int_A f(x)\overline{g(x)}dx$$

στον $L_2(A)$.

Αν ο V είναι γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο , $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα που ορίζεται απ' το εσωτερικό γινόμενο και $(x_n) \subseteq V$, $(y_n) \subseteq V$, είναι δύο ακολουθίες που συγκλίνουν ως προς τη νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο στα $x, y \in V$ αντιστοίχως τότε $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως προς τη νόρμα που ορίζει.

Σε ένα γραμμικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο ισχύει ο ***Κανόνας Παραλληλογράμμου*** $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ και δύο διανύσματα θα καλούνται ***κάθετα*** αν ισχύει $\langle x, y\rangle = 0$. Ένα σύνολο S καλείται ***ορθογώνιο*** αν $x \perp y$, για κάθε $x, y \in S$ με $x \neq y$.

Αν τα διανύσματα $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{n}$ του V είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους τότε ισχύει το ***Πυθαγόρειο Θεώρημα*** δηλαδή ότι $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\|x_k\right\|^2$.

Ορισμός 1.2.14. Ένας γραμμικός χώρος H με νόρμα που παράγεται από εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι πλήρης λέγεται χώρος ***Hilbert***. ♦

Σχόλιο : *Όπως διαπιστώνουμε απ' τον ορισμό ένας χώρος Hilbert είναι και Banach ως προς τη νόρμα που ορίζει το εσωτερικό του γινόμενο.*

Αν V γραμμικός υπόχωρος ενός χώρο Hilbert H τότε ως ***κάθετο χώρο*** του V εννοούμε τον $V^{\perp} = \left\{x \in H : \left\langle x, y\right\rangle = 0,\ \forall\ y \in V\right\}$.

Σχόλιο: *Προφανώς ο $V^{\perp}$ λόγω γραμμικότητας και της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου είναι* ***κλειστός υπόχωρος*** *του V. Επίσης λόγω γραμμικότητας και της συνέχειας του εσωτερικού γινομένου ισχύει $\overline{V}^{\perp} = V^{\perp}$. Ενώ αν V κλειστός τότε ισχύει $V = V^{\perp\perp}$. Αν ο τελεστής U είναι φραγμένος τότε ο $KerU$ είναι κλειστός ως αντίστροφη εικόνα μονοσυνόλου.*

Βασικό παράδειγμα χώρου Hilbert αποτελεί ο χώρος $L_2(A)$, όπου A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

1.3 Στοιχεία Θεωρίας Τελεστών

Οι Τελεστές μεταξύ Χώρων Hilbert είναι ένα βασικό εργαλείο μελέτης τόσο της δομής των χώρων όσο και των στοιχείων μεταξύ αυτών . Παραθέτουμε λοιπόν μία σύντομη μελέτη επί των Τελεστών και των ιδιοτήτων τους με βασικές πηγές τις **[6]** , **[7] , [23]**, **[37]**, **[42]**, **[43]** , **[76]**.

Ορισμός 1.3.1. Έστω H, K δύο χώροι Hilbert με αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα $\left\langle , \right\rangle_H$ και $\left\langle , \right\rangle_K$ και έστω $U : H \to K$, ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής . Ο ***συζυγής*** του U, είναι ο $U^{*} : K \to H$, για τον οποίο ισχύει $\left\langle x, Uy\right\rangle_K = \left\langle U^{*}x, y\right\rangle_H$, για κάθε $x \in K$ και $y \in H$. ♦

Σχόλιο: *Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης δε θα διαφοροποιούμε το συμβολισμό του εσωτερικού γινομένου σε κάθε χώρο όπως εδώ χρησιμοποιώντας δείκτες.*

Αποδεικνύεται ότι ο συζυγής τελεστής είναι μοναδικός. Αναφέρουμε κάποιες ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες των τελεστών. Αν $U \in B(H,K)$ τότε ισχύουν:

α) $\left(U^*\right)^* = U$

β) $\left(\lambda U\right)^* = \bar{\lambda} U^*$

γ) $\left(U+V\right)^* = U^* + V^*$

δ) $\left(UV\right)^* = V^* U^*$

ε) $\|U\| = \|U^*\|$

στ) $\|UU^*\| = \|U\|^2$

Επιπλέον αν H, K δύο χώροι Hilbert και $U \in B(H,K)$ τότε ισχύουν:

α) $KerU = \left(\mathrm{Im}U^*\right)^{\perp}$

β) $KerU^* = \left(\mathrm{Im}U\right)^{\perp}$

γ) $\overline{\mathrm{Im}U} = \left(KerU^*\right)^{\perp}$

δ) $\overline{\mathrm{Im}U^*} = \left(KerU\right)^{\perp}$

όπου $\mathrm{Im}U = \{y \in K \mid \exists x \in H \; : \; U(x) = y\}$, $KerU = \{x \in H \mid U(x) = 0\}$ η εικόνα και ο πυρήνας του τελεστή U αντιστοίχως.

Παραθέτουμε επίσης κάποιες προτάσεις και ορισμούς απαραίτητους για τη διαχείριση των τελεστών στα επόμενα κεφάλαια.

Πρόταση 1.3.2. Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $U \in B(H,K)$. Τότε ο U είναι 1-1 αν και μόνον αν η $\mathrm{Im}U^*$ είναι πυκνή στον H. ♦

Πρόταση 1.3.3. Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $U \in B(H,K)$. Τότε η εικόνα του U, $\mathrm{Im}U$ είναι κλειστή στον K αν και μόνον αν η εικόνα του U^*, $\mathrm{Im}U^*$ είναι κλειστή στον H. ♦

Πρόταση 1.3.4. Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $U \in B(H,K)$.
α) Ο U είναι επί αν και μόνον αν ο U^* είναι 1-1.
β) Ο U^* είναι 1-1 αν και μόνον αν υπάρχει $C > 0$, ώστε $\|U^*(y)\| \geq C\|y\|$, για κάθε $y \in K$.♦

Ορισμός 1.3.5. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $U : H \to H$ ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής.
α) Αν $U = U^*$ τότε ο U καλείται ***αυτοσυζυγής***.

β) Ο U λέγεται θετικά ορισμένος συμβολικά $U \geq 0$, αν ο U είναι αυτοσυζυγής και ισχύει $\langle U(x), x\rangle \geq 0$, για κάθε $x \in H$. Αν ισχύει $\langle U(x), x\rangle > 0$, για $x \neq 0$ καλείται αυστηρά θετικός.

γ) Θα γράφουμε $U \geq V \Leftrightarrow U - V \geq 0$ και $U > V \Leftrightarrow U - V > 0$ για αυτοσυζυγείς φραγμένους γραμμικούς τελεστές του H.

δ) Αν $UU^* = U^*U = I$ τότε ο U καλείται ***ορθομοναδιαίος***. ♦

Σχόλιο: *Αν ο U είναι αυτοσυζυγής , τότε εύκολα προκύπτει ότι $\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x\rangle|$, ενώ αν ο U είναι ορθομοναδιαίος τότε ισχύει $\langle x, y\rangle = \langle x, I(y)\rangle = \langle x, U^*U(y)\rangle = \langle U(x), U(y)\rangle$, για κάθε $x, y \in H$. Θέτοντας $y = x$ τότε προκύπτει $\langle x, x\rangle = \langle U(x), U(x)\rangle \Leftrightarrow \|x\| = \|U(x)\|$, δηλαδή είναι ισομετρία.*

Πρόταση 1.3.6. Για κάθε θετικό τελεστή $U \in B(H,H)$, υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in B(H,H)$ τέτοιος ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής X , λέγεται ***τετραγωνική ρίζα*** του A, και συμβολίζεται με $A^{1/2}$ και μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A **[43]**. Επιπλέον αν ο U είναι αυτοσυζυγής τότε είναι και ο $A^{1/2}$, ομοίως κληρονομείται και η αντιστρεψιμότητα στην τετραγωνική ρίζα.

Αναφέρουμε επίσης το εξαιρετικά χρήσιμο Θεώρημα Riesz :

Θεώρημα 1.3.7. (*Riesz*) Έστω ένας χώρος Hilbert H και H^* , ο δυϊκός του. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$, ώστε $f(y) = \langle y, x\rangle$, με $\|f\| = \|x\|$. ♦

Συχνά στις εφαρμογές , σε περιπτώσεις μη αντιστρεψιμότητας των τελεστών χρησιμοποιούμε την έννοια του ψευδοαντίστροφου ενός τελεστή.

Λήμμα 1.3.8. Έστω δύο χώροι Hilbert K, H και ο τελεστής $T : K \to H$ είναι ένας φραγμένος τελεστής με κλειστή εικόνα $\operatorname{Im} T$, τότε υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής $T^\dagger : H \to K$ για τον οποίο ισχύει $TT^\dagger(x) = x$, για κάθε $x \in \operatorname{Im} T$. ♦

Για τον ψευδοαντίστροφο ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

α) Η ορθογώνια προβολή του H επί του $\operatorname{Im} T$ είναι η $TT^\dagger$.

β) Η ορθογώνια προβολή του K επί του $\operatorname{Im} T^\dagger$ είναι η $T^\dagger T$.

γ) Ο T^* έχει κλειστή εικόνα και $\left(T^*\right)^\dagger = \left(T^\dagger\right)^*$.

δ) Επί της $\operatorname{Im} T$, για τον τελεστή $T^{\dagger}$ ισχύει $T^{\dagger} = T^{*}\left(TT^{*}\right)^{-1}$.

ε) $KerT^{\dagger} = \left(\operatorname{Im} T\right)^{\perp}$.

στ) $\operatorname{Im} T^{\dagger} = \left(KerT\right)^{\perp}$.

1.4 Στοιχεία Ανάλυσης Fourier

Δίνοντας εφαρμογές στην εφαρμοσμένη Αρμονική Ανάλυση της θεωρίας που θα αναπτύξουμε στο υπόλοιπο πόνημα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση βασικών στοιχείων Ανάλυσης Fourier με βασικές πηγές τις **[5]** , **[14]** ,**[22]**, **[33]** , **[44]** , **[48]** ,**[58]**.

Στη συνέχεια της μελέτης μας συχνά θα χρειάζεται να μελετήσουμε τις περιοδικές συναρτήσεις και για απλότητα τις 1- περιοδικές συναρτήσεις , δηλαδή τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει $f(x+1)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Έτσι περιοριζόμαστε στον μοναδιαίο κύκλο:

Ορισμός 1.4.1. Συμβολίζουμε με Τ το ***μοναδιαίο κύκλο*** δηλαδή, $\mathrm{T}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\right\}=\left\{e^{ix}:x\in\mathbb{R}\right\}$. ♦

Παρατήρηση : Έστω $F:\mathrm{T}\to\mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτηση. Θεωρούμε το μετασχηματισμό L, απ' το χώρο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τον T στις 1-περιοδικές συναρτήσεις, $L(F)=f$ με $f(x)=F(e^{2\pi ix}),\ x\in\mathbb{R}$. Ο L εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι 1-1 και επί , ενώ τα ζευγάρια F είναι συνεχής, παραγωγίσιμη, ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν η αντίστοιχη f είναι. Συνεπώς μπορούμε να ταυτίζουμε το χώρο των 1-περιοδικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με το χώρο των συναρτήσεων $F:\mathrm{T}\to\mathbb{C}$. Εφόσον λοιπόν αυτές είναι 1-περιοδικές μπορούμε να περιορίζουμε τη μελέτη τους στο διάστημα $[0,1]$ και να εξάγουμε συνολικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους.

Θεώρημα 1.4.2. (Θεώρημα προσεγγίσεως Weierstrass) Αν $f\in C(\mathrm{T})$ τότε για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{2\pi ikx}$ ώστε $\|f-p\|_p<\varepsilon$ με $p\geq 1$. ♦

Πρόταση 1.4.3. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $C([a,b])$ είναι πυκνό στον $L_p([a,b])$. Ομοίως το $C(\mathrm{T})$, δηλαδή το σύνολο των συνεχών περιοδικών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L_p(\mathrm{T})$. ♦

Ορισμός 1.4.4. Έστω $f \in L_1(\mathrm{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k-οστό συντελεστή Fourier της f ως $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$. ♦

Παρατήρηση : Για τους συντελεστές Fourier της f προφανώς ισχύει

$$\left|\hat{f}(k)\right| = \left|\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx\right| \le \int_0^1 \left|f(x)e^{-2\pi ikx}\right|dx = \int_0^1 |f(x)|dx = \|f\|_1.$$

Άρα η ***ακολουθία Fourier*** $\left\{\hat{f}(k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ των συντελεστών είναι φραγμένη.

Ορισμός 1.4.5. Η ***σειρά Fourier της*** f ορίζεται η $s(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ix}$, ενώ το ***n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς*** είναι το $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$. ♦

Παρατήρηση 1.4.6. Ιδιότητες συντελεστών Fourier:

α) Αν $f,g \in L_1(\mathrm{T})$ και $a \in \mathbb{C}$ τότε ισχύει $\left(f \overset{\wedge}{+} ag\right)(k) = \hat{f}(k) + a\hat{g}(k)$.

β) Αν $f \in L_1(\mathrm{T})$ τότε ισχύει ότι $\hat{\bar{f}}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$.

γ) Αν $f \in L_1(\mathrm{T})$, $a \in \mathbb{R}$ και $f_a(t) = f(t+a)$ τότε

$\hat{f}_a(k) = \int_0^1 f(t+a)e^{-2\pi ikt}dt = e^{2\pi ika}\hat{f}(k)$.

δ) Αν $f \in L_1(\mathrm{T})$, $m \in \mathbb{Z}$ και $g_m(t) = f(t)e^{2\pi imt}$, τότε ισχύει

$\hat{g}_m(k) = \int_0^1 f(t)e^{2\pi imt}e^{-2\pi ikt}dx = \int_0^1 f(t)e^{2\pi i(m-k)t}dx = \hat{f}(k-m)$. ♦

Λήμμα 1.4.7. (Riemann-Lebesgue διακριτή μορφή) Αν $f \in L_1(\mathrm{T})$ τότε ισχύει ότι $\left\{\hat{f}(k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$, δηλαδή ότι $\hat{f}(k) \to 0$ καθώς $|k| \to +\infty$. ♦

Ορισμός 1.4.8. Ως μετασχηματισμό Fourier μίας συνάρτησης $f \in L_1(\mathbb{R})$ καλούμε τη συνάρτηση $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ η οποία ορίζεται απ΄ τη σχέση $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$. Άρα ως τελεστής ο μετασχηματισμός Fourier είναι η απεικόνιση $F(f)=\hat{f}$. ♦

Παρατήρηση 1.4.9. Ισχύει ότι $\left\|\hat{f}(\xi)\right\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)e^{-2\pi i\xi x}\right|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx \leq \left\|f\right\|_1 < \infty$. ♦

Λήμμα 1.4.10. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, τότε η $\hat{f}$ είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \left\|f\right\|_1$. ♦

Λήμμα 1.4.11. (Riemann-Lebesgue συνεχής μορφή) Ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τα στοιχεία του $L_1(\mathbb{R})$ εντός του $C_0(\mathbb{R})$, δηλαδή αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. ♦

Ορισμός 1.4.12. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $f \in L_1(\mathbb{R})$ είναι ο $\check{f}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}dx$, $\xi\in\mathbb{R}$. Συμβολικά $F^{-1}(f)=\check{f}$, όπου η σύγκλιση είναι σημειακή για $f \in L_1(\mathbb{R})$. ♦

Θεώρημα 1.4.13. Αν $f,\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, τότε οι $f,\hat{f}$, είναι συνεχείς και $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx$ και $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\check{f}(\xi)e^{-2\pi i\xi x}dx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. ♦

Παρατήρηση : Περιορίζοντας το μετασχηματισμό Fourier στον $L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, τότε ο μετασχηματισμός επεκτείνεται σε έναν ισομετρικό ισομορφισμό απ' τον $L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$ επί του $L_2(\mathbb{R})$ για την οποία ισχύουν οι:

i) $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \left\|f\right\|_2$ **ii)** $\left\langle \hat{f},\hat{g}\right\rangle = \left\langle f,g\right\rangle$

Αν η $f \in L_2(\mathbb{R})$ και η $\left\{f_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων η οποία συγκλίνει στην f με την L_2 νόρμα τότε και η $\left\{\hat{f}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $L_2(\mathbb{R})$. Ορίζοντας ως $\hat{f}=\lim\limits_{k\to\infty}\hat{f}_k$, ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται σε έναν ορθομοναδιαίο τελεστή επί του $L_2(\mathbb{R})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΒΑΣΕΙΣ SHAUDER

Στο κεφάλαιο αυτό αυτή παρουσιάζουμε την τοπολογική έννοια της βάσης Schauder σε απειροδιάστατους χώρους Banach, σε αντιδιαστολή με την αλγεβρική έννοια της βάσης Hamel. Δείχνουμε ότι οι βάσεις Hamel, αν και πάντα υπάρχουν, εν τούτοις οδηγούν σε υπεραριθμήσιμες αναπαραστάσεις που δεν είναι αποδεκτές σε υπολογιστικές εφαρμογές, εν αντιθέσει με τις βάσεις Schauder, οι οποίες αν και δεν ορίζονται πάντα, εν τούτοις έχουν πάντα το πολύ αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Σε χώρους δε πεπερασμένης διάστασης οι δύο έννοιες ταυτίζονται. Μελετούμε επίσης στο κεφάλαιο αυτό, το πώς, συνήθεις αλγεβρικές έννοιες που σχετίζονται με την έννοια της βάσης, όπως η γραμμική ανεξαρτησία, η πληρότητα, η ελαχιστότητα, γενικεύονται σε απειροδιάστατους χώρους και πότε χαρακτηρίζουν μια βάση, αναδεικνύοντας τις διαφορές σε σχέση με τους χώρους πεπερασμένης διάστασης μέσω παραδειγμάτων. Για παράδειγμα, ενώ ως γνωστό η πληρότητα και η ελαχιστότητα (δηλαδή η μη δυνατότητα απώλειας στοιχείου της βάσης ώστε το προκύπτον σύνολο να παράγει το χώρο) χαρακτηρίζουν μια βάση Hamel, δεν χαρακτηρίζουν μια βάση Schauder. Χρειαζόμαστε και μια επιπλέον συνθήκη που σχετίζεται με τη σύγκλιση μιας ακολουθίας φραγμένων τελεστών. Μελετούμε επίσης τη σύγκλιση άνευ συνθήκης, που είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές. Τέλος, αποδεικνύουμε την αλληλεξάρτηση ενός χώρου Banach με τον δυϊκό του χώρο, καθώς και το πόσο ανθεκτική μπορεί να είναι μία βάση στις διαταραχές των στοιχείων της μέσα απ' το Θεώρημα Paley Wiener. Ως βασικές πηγές του παρόντος Κεφαλαίου χρησιμοποιήσαμε τις **[2]** , **[24]** , **[25]** , **[36]** , **[53]**, **[54]** .

2.1 Από τη βάση Hamel στη βάση Schauder

Μία βάση σε γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης ορίζεται ως ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, το γραμμικό περίβλημα (ή γραμμική θήκη) του οποίου παράγει το χώρο. Στον ακόλουθο ορισμό γενικεύουμε την έννοια αυτή σε απειροδιάστατους χώρους.

Ορισμός 2.1.1 Έστω V γραμμικός χώρος και I πεπερασμένο ή άπειρο (αριθμήσιμο ή μη) σύνολο δεικτών. Ένα σύνολο $\{x_i\}_{i\in I}$ στοιχείων του V είναι μία ***Hamel βάση*** του V , αν :

α) Η γραμμική θήκη του $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ο χώρος V , δηλαδή $span\{x_i\}_{i\in I} = V$.

β) Το σύνολο $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, με την έννοια ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Διάσταση γραμμικού χώρου V καλούμε το πλήθος των διανυσμάτων της βάσης του, πεπερασμένο ή άπειρο.

Θεώρημα 2.1.2. Κάθε γραμμικός χώρος $V \neq \{0\}$ έχει Hamel βάση.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το σύνολο M όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του V. Εφόσον $V \neq \{0\}$, υπάρχει $x \in V$ με $x \neq 0$. Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $\{x\} \in M$ και κατά συνέπεια το M είναι μη κενό. Στο M ορίζουμε τη σχέση μερικής διάταξης

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Έστω $\Omega \subseteq M$ ολικά διατεταγμένο σύνολο, όπου $\Omega = \{A_i : i \in I\}$, με τα A_i να είναι γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V πεπερασμένου μήκους. Αν $i \neq j$, τότε είτε $A_i \subseteq A_j$, είτε $A_j \subseteq A_i$. Ορίζουμε το σύνολο $G = \bigcup_{i \in I} A_i$, για το οποίο ισχύει $A_i \subseteq G \subseteq V$, για κάθε $i \in I$. Θα δείξουμε ότι το G είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ τυχαίο υποσύνολο του G. Τότε υπάρχουν $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}$ τέτοια ώστε $x_k \in A_{i_k}$, για κάθε k. Εφόσον το Ω είναι ολικά διατεταγμένο και τα A_{i_k} είναι πεπερασμένου πλήθους, υπάρχει $A_{i_{k_0}}$ έτσι ώστε $A_{i_k} \subseteq A_{i_{k_0}}$ για κάθε k. Άρα $x_1, x_2, ..., x_n \in A_{i_{k_0}} \subseteq G$. Το σύνολο $A_{i_{k_0}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα και το σύνολο $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $A_{i_{k_0}}$, άρα και του G, συνεπώς το G είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Εφόσον η τυχαία αλυσίδα Ω έχει άνω φράγμα το G, τότε απ' το Λήμμα του Zorn **[57]**, το M έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω B. Θα δείξουμε ότι το B παράγει τον V. Έστω $Z = span(B)$, με $Z \neq V$. Τότε υπάρχει $y \in V \setminus Z$. Αν θεωρήσουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + ... + \lambda_n z_n + \mu y = 0,$$

όπου $\{z_1, z_2, ..., z_n\} \subseteq B$, τότε $\mu = 0$, αλλιώς $y \in Z$. Τότε όμως $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, διότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα το σύνολο $B \bigcup \{y\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, συνεπώς το B δεν είναι μεγιστικό στοιχείο του M, άτοπο. Άρα $V = Z = span(B)$, συνεπώς ο V έχει Hamel βάση. ■

Σημειώνουμε εδώ ότι οι χώροι με τους οποίους κυρίως θα ασχοληθούμε είναι απειροδιάστατοι. Για παράδειγμα, ο χώρος c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών (δηλαδή των ακολουθιών με με πεπερασμένο σύνολο μη μηδενικών στοιχείων) έχει βάση Hamel το σύνολο $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $e_n = \delta_{k,n}, k \in \mathbb{N}$. Εφόσον $c_{00} \subset \ell_\infty(\mathbb{N})$ και $c_{00} \subset \ell_p(\mathbb{N})$, όπου $\ell_\infty(\mathbb{N})$, $\ell_p(\mathbb{N})$ οι Banach χώροι των φραγμένων και p-αθροίσιμων ακολουθιών αντιστοίχως **[60]** προφανώς οι $\ell_\infty(\mathbb{N})$, $\ell_p(\mathbb{N})$ είναι απειροδιάστατοι χώροι. Με παρόμοια επιχειρήματα και με βάση Hamel το σύνολο $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ για το χώρο των πολυωνύμων $P[x]$ στο [0,1], οι προαναφερθέντες χώροι συναρτήσεων είναι απειροδιάστατοι. Ένα πολύ σημαντικό ερώτημα είναι αν ένας απειροδιάστατος χώρος έχει αριθμήσιμη ή υπεραριθμήσιμη βάση Hamel.

Θεώρημα 2.1.3. Αν X είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε κάθε βάση Hamel του X είναι υπεραριθμήσιμη.

Απόδειξη:

Έστω ότι ο X έχει μία αριθμήσιμη βάση Hamel $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Θεωρούμε τους γραμμικούς υπόχωρους $W_n = span\{e_1,...,e_n\}$, οι οποίοι ως υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης είναι κλειστοί. Όμως $X = span\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, άρα $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Ο X είναι πλήρης, άρα απ' το Θεώρημα του Baire **[1]** ,**[4]]** προκύπτει ότι ο X είναι 2ης κατηγορίας, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $\operatorname{int}(W_{n_0}) \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει μπάλα $B(x_0,\delta) \subset W_{n_0}$. Όμως λόγω γραμμικότητας του *X*, για κάθε $x \in V - \{0\}$, έχουμε

$$w = x_0 + \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(x_0,\delta) \subset W_{n_0} \Rightarrow x = \frac{2\|x\|}{\delta}(w - x_0) \in W_{n_0} \Rightarrow W_{n_0} \subseteq X\ .$$

Συνεπώς $W_{n_0} = X$, δηλαδή ο X είναι πεπερασμένης διάστασης , άτοπο. ■

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι η αναπαράσταση ενός στοιχείου του χώρου με χρήση βάσης Hamel είναι υπολογιστικά αδύνατη. Θα θέλαμε την ύπαρξη μιας αριθμήσιμης «βάσης» που να παράγει το χώρο και να παρέχει μοναδικότητα αναπαράστασης όπως η βάση στη γραμμική άλγεβρα. Προς αυτή την κατεύθυνση, δίνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 2.1.4. Λέμε ότι μία ακολουθία $(x_n)_{n\in I}$ σ' ένα χώρο Banach X είναι μία ***βάση Shauder*** για τον X , αν για κάθε $x \in X$, υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $a_n(x)$, τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot x_n\ ,$$

με την έννοια

$$\lim_{N\to\infty}\left\| x - \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n \right\| = 0\ .$$

Η παραπάνω σειρά, καλείται ***ανάπτυγμα*** ή ***αναπαράσταση*** του x, ως προς την βάση $(x_n)_{n\in I}$, ο δε τελεστής

$$S_N : X \to X : S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)\cdot x_n\ , \tag{1}$$

καλείται νιοστό ***μερικό άθροισμα*** της παραπάνω σειράς.

Αν (x_n) είναι μία ακολουθία στοιχείων του X έτσι ώστε $a_n(x_m) = \delta_{nm}$, για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) καλείται ***ημι-ορθογώνια ακολουθία*** της $(x_n)_{n\in I}$. ♦

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε βάση χώρου Banach *X*, θα εννοούμε πάντα μία βάση Schauder εκτός αν δηλώνεται κάτι διαφορετικό.

Από τον ορισμό 2.1.4. , παρατηρούμε ότι αν η $\left(x_n\right)_{n\in I}$ είναι ακολουθία χώρου Banach X , έτσι ώστε $\overline{span}\{x_n\} = X$ και η γραφή $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ είναι μοναδική για κάθε στοιχείο του *X*, τότε η $\left(x_n\right)$ είναι βάση Schauder του *X*. Γενικότερα, εάν η κλειστότητα του *span*(*X*) δεν παράγει το X , λέμε ότι η ακολουθία $\left(x_n\right)$ είναι μια ***Schauder βασική ακολουθία*** του $\overline{span}\{x_n\}$. Μια βάση Schauder είναι μια διαφοροποιημένη έννοια σε σχέση με τη βάση Hamel, διότι σε μια βάση Schauder θέλουμε η κλειστότητα του υποχώρου όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών να παράγει κάθε στοιχείο του χώρου με μοναδικό τρόπο, κι έτσι επιτρέπουμε την αναπαράσταση στοιχείων μέσω και μη πεπερασμένων αναπαραστάσεων.

Ορισμός 2.1.5. Έστω $\left(x_n\right)$ είναι μία βάση Schauder ενός χώρου Banach X . Τότε:

α) Η $\left(x_n\right)$ είναι ***απόλυτα συγκλίνουσα,*** αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \, \|x_n\| < \infty$ για κάθε $x \in X$.

β) Η $\left(x_n\right)$ είναι ***φραγμένη,*** αν $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

γ) Η $\left(x_n\right)$ είναι ***κανονικοποιημένη,*** αν $\|x_n\| = 1$.

δ) Αν Y χώρος Banach, τότε μία βάση Schauder $\left(x_n\right)$ του X λέγεται ***ισοδύναμη*** μίας βάσης $\left(y_n\right)$ του Y , αν υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ **[Σχόλιο πριν το 1.2.10.]** τέτοιος ώστε $T(x_n) = y_n$, για κάθε n . Αν $X = Y$, τότε γράφουμε $\left(x_n\right) \sim \left(y_n\right)$ για τις ισοδύναμες βάσεις του X .

Παράδειγμα :Η ακολουθία $\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, για την οποία ισχύει $e_{n,k} = \delta_{n,k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, είναι μία βάση Schauder για τον $\ell_p(\mathbb{N})$, αφού όπως αναφέραμε στην εισαγωγή για κάθε $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ισχύει $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Μάλιστα αυτή η παράσταση είναι μοναδική ως προς την $\left(e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, αφού αν $x = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k e_k$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} x'_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (x'_k - x_k) e_k = 0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (x'_k - x_k) e_k \right\|_q = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x'_k - x_k|^q = 0 \Rightarrow |x'_k - x_k|^q = 0 \Rightarrow x'_k = x_k \text{, για κάθε } k.$$

Το επόμενο θεώρημα είναι σημαντικό καθώς επιτυγχάνεται μία τοπολογική ταύτιση του δυϊκού χώρου του X και του X. Ετσι, η μελέτη ιδιοτήτων του X μπορεί να γίνει απ' τον ισομορφικό του δυϊκό χώρο και αντιστρόφως.

Θεώρημα 2.1.6. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη μηδενικών στοιχείων σε χώρο Banach X και

$$Y = \left\{ c = (c_n) : \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \ \textit{συγκλίνει στο } X \right\} \tag{2}$$

νορμικός χώρος με νόρμα

$$\|c\|_Y = \sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|.$$

Τότε:

α) ο Y είναι χώρος Banach.

Επιπλέον, εάν η (x_n) είναι μια βάση Schauder του X, τότε:

β) οι Y και X είναι ισόμορφοι.

γ) Οι τελεστές μερικών αθροισμάτων S_N (βλέπε (1)) είναι φραγμένοι και

$$C = \sup_N \|S_N\| \le \|T^{-1}\|,$$

όπου

$$T(c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n .$$

δ) Η $|||x||| = \sup_N \|S_N(x)\|$ ορίζει μια νόρμα στο X ισοδύναμη της $\|\cdot\|_Y$, για την οποία ισχύει $\|\cdot\|_Y \le |||\cdot||| \le C\|\cdot\|_Y$.

ε) Τα συναρτησιοειδή $c_n(x)$ (βλέπε (2)) είναι συνεχή, με $1 \le \|c_n\|_{X^*} \|x_n\| \le C$.

Απόδειξη:

α) Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο Y είναι γραμμικός χώρος και η $\|\bullet\|_Y$ είναι μία νόρμα στον Y. Θα δείξουμε τώρα ότι ο Y είναι πλήρης νορμικός χώρος.

Έστω $\left(c_N\right)$ Cauchy ακολουθία στο Y, με $c_N = (c_N(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης n_0 έτσι ώστε για κάθε $M > N > n_0$ να ισχύει

$$\|c_M - c_N\|_Y \leq \varepsilon . \tag{3}$$

Προφανώς, για $n\in\mathbb{N}$ σταθεροποιημένο και $x_n \neq 0$, έχουμε

$$\varepsilon > \|c_M - c_N\|_Y = \sup_L \left\| \sum_{n=1}^{L} (c_M(n) - c_N(n)) x_n \right\| \geq \|(c_M(n) - c_N(n)) x_n\|,$$

το οποίο υπονοεί ότι η ακολουθία $(c_N(n))_{N\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$ ως προς N, άρα συγκλίνουσα σε κάποιο στοιχείο $c(n)$, $N\to\infty$. Θα δείξουμε τώρα ότι

$$c_N \to c = \left(c(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad N \to \infty .$$

Πράγματι, αφήνοντας στην (3) το $M\to\infty$ και από τη συνέχεια της νόρμας, προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης n_0 έτσι ώστε για κάθε $N > n_0$ να ισχύει

$$\|c - c_N\|_Y \leq \varepsilon ,$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. Τέλος, θα πρέπει να δείξουμε και ότι $c\in Y$. Εχουμε

$$\|c\|_Y \leq \|c - c_N\|_Y + \|c_N\|_Y < \infty ,$$

διότι $c_N \to c$, άρα $c_N - c \to 0$, δηλαδή η $c_N - c$ φραγμένη και εξ ορισμού, $c_N \in Y$. Αρα ο Y είναι πλήρης νορμικός χώρος, δηλαδή χώρος Banach.

β) Έστω $\left(x_n\right)$ μία βάση Schauder του X. Τότε ο τελεστής

$$T(c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \tag{4}$$

είναι γραμμικός και 1-1 τελεστής του Y πάνω στο X. Επιπλέον είναι και φραγμένος, διότι

$$\|T(c)\|_X = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right\|_X = \lim_N \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|_X \leq \sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|_X = \|c\|_Y ,$$

άρα ο T είναι ισομορφισμός.

γ) Προφανώς ισχύει $T^{-1}(x) = \left(c_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ετσι:

$$\|S_N(x)\| \le \|(c_n(x))\|_Y = \|T^{-1}(x)\|_Y \le \|T^{-1}\|\|x\|,$$

άρα ο τελεστής των μερικών αθροισμάτων S_N είναι φραγμένος με νόρμα $\|S_N\| \le \|T^{-1}\|$.

δ**)** Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $|||x||| = \sup_N \|S_N\|$ είναι μία νόρμα στο X . Για $x \in X$, έχουμε

$$|||x||| = \sup_N \|S_N(x)\| \le \sup_N \|S_N\| \cdot \|x\| = C\|x\|.$$

Απ' την άλλη μεριά, εφόσον $S_N(x) \to x$, έχουμε

$$\|x\| = \lim_N \|S_N(x)\| \le \sup_N \|S_N(x)\| = |||x|||.$$

Συνεπώς οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες .

ε**)** Για *n=1* η ισχύς είναι προφανής. Εστω $n \ge 2$. Τότε $c_n(x)x_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, συνεπώς

$$|c_n(x)|\|x_n\| = \|c_n(x)x_n\| \le \|S_n(x)\| + \|S_{n-1}(x)\| \le 2C\|x\|.$$

Εφόσον $x_n \ne 0$, τότε $\|c_n\| \le \dfrac{2C}{\|x_n\|} < \infty$. Λόγω μοναδικότητας της αναπαράστασης ισχύει $c_m(x_n) = \delta_{mn}$, άρα (c_N) και (x_n) είναι ημι-ορθογώνιες ακολουθίες. Τέλος:

$$1 = \|c_n(x_n)\| \le \|c_n\|_{X^*} \|x_n\| \le 2C. \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα 2.1.7. Αν ένας χώρος Banach έχει βάση Schauder, τότε είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη:

Έστω ότι ένα χώρος Banach *X* έχει μία βάση Schauder (x_n). Αν T ο τελεστής όπως στην (4) παραπάνω, τότε δείξαμε στο θεώρημα 2.3(β) ότι οι X και Y είναι ισόμορφοι. Έστω

$$D = \left\{ d \in X : \exists\, n \in \mathbb{N} \ \kappa\alpha\iota\ \lambda_i \in \mathbb{Q} :\ d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\},$$

$c \in Y$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\left\|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} c_i x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Λόγω πυκνότητας του $\mathbb{Q}$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία ρητών $(\lambda_i)_{i=1}^{n_0}$ έτσι ώστε να ισχύει $|\lambda_i - c_i| < \dfrac{\varepsilon}{2 \max\limits_{i\in\{1,\dots,n_0\}} \|x_i\| n_0}$ για κάθε $i = 1,\dots,n_0$. Για $d = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i x_i \in D$, με την παραπάνω επιλογή του συνόλου $(\lambda_i)_{i=1}^{n_0}$, έχουμε:

$$\|x - d\| \le \sum_{i=1}^{n_0} |c_i - \lambda_i| \|x_i\| + \left\|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} c_i x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Αρα το D είναι πυκνό στο Y, συνεπώς και το $T(D) = X$ είναι αριθμήσιμο. ■

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.1.7. δεν ισχύει. Δύο αντιπαραδείγματα διαχωρίσιμων χώρων οι οποίοι δεν έχουν βάση Schauder κατασκεύασαν ο P. Enflo το 1973 και ο A. Szankowski το 1980 **[60]** .

2.2. Ιδιότητες βάσεων Schauder

Στους χώρους πεπερασμένης διάστασης, η μοναδικότητα της αναπαράστασης ενός στοιχείου του γραμμικού χώρου είναι συνυφασμένη με τη γραμμική ανεξαρτησία των στοιχείων μίας βάσης. Σε απειροδιάστατους χώρους αυτό δεν αρκεί . Οι συνδέσεις μεταξύ εννοιών όπως ανεξαρτησία, πληρότητα και ελαχιστότητα του συνόλου που αποτελεί μια βάση, είναι πιο περίπλοκες. Στην παράγραφο αυτή μελετούμε τις έννοιες αυτές, όπως και ικανές συνθήκες ώστε ένα σύνολο να αποτελεί μία βάση Schauder. Παραθέτουμε σχετικά παραδείγματα και μελετούμε ικανές συνθήκες για μία βάση στο δυϊκό χώρο. Τέλος εξετάζουμε πόσο «κοντά» αρκεί να είναι μία ακολουθία σε μία βάση ώστε να αποτελεί κι αυτή με τη σειρά της βάση.

Ορισμός 2.2.1. Λέμε ότι μία ακολουθία $(x_n)_{n\in I}$ σ' ένα χώρο Banach X είναι:

α) ***πεπερασμένα γραμμικά ανεξάρτητη*** (ή απλά ***γραμμικά ανεξάρτητη***), αν ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0 \Rightarrow c_n = 0 \;\; \forall \; n \in I_N .$$

β) ***ω-ανεξάρτητη*** , αν $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0 \Rightarrow c_n = 0 \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

γ) ***ελαχιστική(minimal)***, αν $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

δ) ***πλήρης(complete)***, αν ισχύει $X = \overline{span}\{x_n\}$. Αν η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι πλήρης και ελαχιστική, τότε καλείται ***ακριβής(exact)***. ♦

Πρόταση 2.2.2. Έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in I}$ σε χώρο Banach X . Τότε:

α) Αν η $(x_n)_{n\in I}$ είναι βάση Shauder του $\overline{span}\{x_n\}$, τότε η (x_n) είναι ελαχιστική.

β) Αν η $(x_n)_{n\in I}$ είναι ελαχιστική, τότε η $(x_n)_{n\in I}$ είναι ω-ανεξάρτητη .

γ) Αν $(x_n)_{n\in I}$ είναι ω-ανεξάρτητη, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Απόδειξη: α) Αν η (x_n) είναι βάση του $\overline{span}\{x_n\}$, τότε , υπάρχει $(a_n)\subset\left(\overline{span}\{x_n\}\right)^*$, ώστε να είναι ημι-ορθογώνια της (x_n), απ' το θεώρημα 2.1.6.. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $K_m = span\{x_n\}_{n\neq m}$, για τα στοιχεία του οποίου ισχύει $a_m(x)=0$. Εφόσον a_m συνεχή στο K_m, τότε επεκτείνονται συνεχώς στην κλειστότητα του K_m, άρα $a_m(x)=0$, $x\in\overline{K}_m$. Εφόσον όμως $a_m(x_m)=1$, αναγκαστικά $x_m\notin\overline{K}_m$, δηλαδή η $\{x_n\}$ είναι ελαχιστική.

β) Έστω ότι η (x_n) είναι ελαχιστική και η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ συγκλίνει και είναι ίση με 0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος $m\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $c_m\neq 0$. Τότε $x_m = -\frac{1}{c_m}\sum_{n\neq m} c_n x_n \in \overline{K}_m$, άτοπο αφού (x_n) ελαχιστική. Άρα η (x_n) είναι ω-ανεξάρτητη.

γ) Προφανές. ■

Σημείωση: Με το προηγούμενο θεώρημα γίνεται σαφές ότι αν αφαιρέσουμε κάποιο στοιχείο μιας βάσης Schauder τότε το σύνολο που απομένει παύει να είναι βάση του χώρου. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι αν ένα σύνολο είναι βάση Schauder τότε οφείλει να είναι ω-γραμμικά ανεξάρτητο, άρα και (πεπερασμένα) γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα 2.2.3. Έστω (x_n) ακολουθία σε χώρο Banach X . Τότε υπάρχει ημι-ορθογώνια της (x_n) ακολουθία φραγμένων συναρτησιοειδών $(a_n)\subseteq X^*$, αν και μόνον αν η (x_n) είναι ελαχιστική.

Απόδειξη:

Έστω $(a_n)\subset X^*$ ακολουθία ημι-ορθογώνια της (x_n), $m\in\mathbb{N}$ σταθεροποιημένο και $z\in span\{x_n\}_{n\neq m}$. Εστω $z=\sum_{j=1}^{N} c_{n_j} x_{n_j}$. Τότε

$$a_m(z) = a_m\left(\sum_{j=1}^{N} c_{n_j} x_{n_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j} a_m\left(x_{n_j}\right) = 0 \text{, αφού } x_{n_j}\neq x_m .$$

Άρα $a_m = 0$ στο $span\{x_n\}_{n\neq m}$ και λόγω συνέχειας $a_m(z) = 0 \ \forall \ z \in \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$, ενώ $a_m(x_m) = 1$, άρα $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Συνεπώς η (a_n) είναι ελαχιστική. Αντιστρόφως, έστω (x_n) ελαχιστική και $A_m = \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Αυτός είναι κλειστός υπόχωρος του X ο οποίος δεν περιέχει το x_m, συνεπώς από εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach **[1.2.7.]**, υπάρχει $a_m \in X^*$, ώστε $a_m(x_m) = 1$ και $a_m(x) = 0$ για κάθε $x \in A_m$. Προφανώς, η $(a_n) \subseteq X^*$ είναι ημι-ορθογώνια της (a_n). ■

Πρόταση 2.2.4. Έστω $(x_n)_{n\in I}$ ακολουθία μη μηδενικών στοιχείων σε χώρο Banach X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η $(x_n)_{n\in I}$ είναι ελαχιστική ακολουθία.

β) Για κάθε $M \in \mathbb{N}$, υπάρχει $C_M > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $N \geq M$ και $c_1, ..., c_N$ να ισχύει

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \right\| \leq C_M \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|.$$

Απόδειξη:

• $\alpha \Rightarrow \beta$ Από το Λήμμα 2.1, υπάρχει ακολουθία $(a_n) \subset X^*$, ημι-ορθογώνια της (x_n). Αρα, για $N \geq M$ και S_M όπως στη (1), έχουμε:

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \right\| = \left\| S_M \left(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right) \right\| \leq \| S_M \| \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|,$$

άρα η πρόταση ισχύει με $C_M = \| S_M \|$.

• $\beta \Rightarrow \alpha$ Έστω $E = span\{x_n\}$. Θέτοντας $C_0 = 1$, για κάθε $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$ και $N \geq M \geq 1$ έχουμε

$$\| c_M x_M \| \leq \left\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{M-1} c_n x_n \right\| \leq C_M \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| + C_{M-1} \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| = \left(C_M + C_{M-1} \right) \| x \|,$$

οπότε

$$| c_M | \leq \frac{C_M + C_{M-1}}{\| x_M \|} \| x \|.$$

Αν $x=0$, τότε $c_1=...=c_M=0$. Συνεπώς η $\left(x_n\right)$ είναι Hamel βάση για το E. Αρα, κάθε στοιχείο του E παρίσταται με μοναδικό τρόπο ως $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$, όπου μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος συντελεστών είναι μη μηδενικοί. Απ' το Θεώρημα Hahn-Banach **[1.2.7.]**, επεκτείνουμε συνεχώς τα a_n σ' όλο το X. Εφόσον η $\left(x_n\right)$ έχει ημι-ορθογώνια ακολουθία στον X^*, τότε είναι ελαχιστική, συνεπεία του Λήμματος 2.2.3. . ■

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι X^{**} είναι ο **δεύτερος δυϊκός χώρος** του X με την αντίστοιχη **κανονική εμφύτευση** του X εντός του X^{**}

$$\tau : X \to X^{**} : x \to \tau_x(f) = f(x), \quad \forall f \in X^*,$$

Αποδεικνύεται ότι ο τ είναι γραμμική ισομετρία, **[60]**. Αν ο τ είναι και επί, τότε ο X καλείται **αυτοπαθής**.

Πρόταση 2.2.5. Έστω $\left(x_n\right)$ είναι μία ελαχιστική ακολουθία σε χώρο Banach X και $\left(a_n\right)\subset X^*$ ημι-ορθογώνια της $\left(x_n\right)$. Τότε η $\left(a_n\right)$ είναι ελαχιστική στο δυϊκό χώρο X^* και η ακολουθία $\left(\tau_{x_n}\right)\subset X^{**}$ είναι ημι-ορθογώνια της $\left(a_n\right)$.

Απόδειξη:

Απ' το Λήμμα 2.2.3. εξασφαλίζεται η ύπαρξη τέτοιας ημι-ορθογώνιας ακολουθίας $\left(a_n\right)$ του X^*. Θεωρούμε την ακολουθία $\left(\tau_{x_n}\right)\subseteq X^{**}$. Τότε, για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$, ισχύει $\tau_{x_n}(a_m)=a_m(x_n)=\delta_{mn}$, άρα η $\left(\tau_{x_n}\right)$ είναι ημι-ορθογώνια της $\left(a_n\right)$. Συνεπώς η $\left(a_n\right)$ είναι ελαχιστική, πάλι απ' το Λήμμα 2.2.3.. ■

Σημείωση. Με την προηγούμενη πρόταση, η ιδιότητα μίας ακολουθίας να είναι ελαχιστική κληρονομείται και για την ημι-ορθογώνιά της στον δυϊκό χώρο.

Θεώρημα 2.2.6 (1^o Κριτήριο) Έστω $\left(x_n\right)$ ακολουθία σε χώρο Banach X, για την οποία υποθέτουμε ότι υπάρχει ημι-ορθογώνια ακολουθία $\left(a_n\right)\subseteq X^*$, τέτοια ώστε $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ για κάθε $x\in X$. Τότε η $\left(x_n\right)$ είναι βάση Schauder του *X*.

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$, η αναπαράσταση $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$ είναι μοναδική. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ για κάποια ακολουθία συντελεστών (c_n). Τότε, λόγω συνεχείας των συναρτησιοειδών (α_n), για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n\right) = a_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) a_m(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_m(x_n) \Rightarrow a_m(x) = c_m .$$

Συνεπώς η παράσταση είναι μοναδική, δηλαδή η (x_n) είναι βάση Schauder. ■

Θεώρημα 2.2.7 (2ο Κριτήριο) Έστω ελαχιστική και πλήρης (δηλαδή ακριβής) ακολουθία (x_n) χώρου Banach X και $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων για κάποια ημι-ορθογώνια ακολουθία $(a_n) \subset X^*$. Αν

$$\sup_N \|S_N\| < \infty ,$$

τότε η (x_n) είναι μία βάση Schauder του X .

Απόδειξη:

Έστω $x \in span\{x_n\}$, δηλαδή $x = \sum_{n=1}^{M} c_n x_n$. Εξ υποθέσεως, η (x_n) είναι ελαχιστική, άρα από Λήμμα 2.2.3., υπάρχει ημι-ορθογώνια ακολουθία (a_n) του X^*, τέτοια ώστε για κάθε $N \geq M$ να ισχύει

$$S_N(x) = S_N\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{M}} c_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} c_n S_N(x_n) = \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} c_n x_n = x .$$

Άρα $x = \lim_N S_N(x)$, για κάθε $x \in span\{x_n\}$. Έστω τώρα $C = \sup_N \|S_N\|$ και $x \in X$. Εφόσον η (x_n) είναι πλήρης, έχουμε $\overline{span}\{x_n\} = X$. Ετσι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in span\{x_n\}$ τέτοιο ώστε $\|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{1+C}$. Τότε, για $N \geq M$ ισχύει

$$\|x - S_N(x)\| \leq \|x - y\| + \|y - S_N(y)\| + \|S_N(y) - S_N(x)\|$$

$$\leq \|x - y\| + \|S_N\| \|y - x\| \leq (1+C)\|x - y\| < \varepsilon .$$

Άρα $x = \lim_N S_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$. Από το Θεώρημα 2.2.6. προκύπτει το ζητούμενο. ■

Σχόλιο. Το προηγούμενο θεώρημα μας θέτει ένα κριτήριο του πότε μία ακριβής ακολουθία είναι βάση του X . Όπως υποδηλώνεται, η ιδιότητα μίας ακολουθίας να είναι ακριβής δεν είναι επαρκής ώστε να αποτελεί βάση Schauder ενός χώρου χώρου Banach X , αλλά απαιτείται επιπλέον να είναι φραγμένοι οι τελεστές μερικών αθροισμάτων. Παρακάτω θα δούμε ότι μία ακριβής ακολουθία δεν είναι απαραίτητα και βάση του X . Σχηματικά:

Θεώρημα 2.2.8 (3^o Κριτήριο) Έστω (x_n) μια ακολουθία σε χώρο Banach X . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η (x_n) είναι μία βάση του X .

β) Η (x_n) είναι πλήρης ακολουθία και υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $N \geq M$ και $c_1, \ldots, c_N$ να ισχύει

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| .$$

Απόδειξη:

- $\alpha \Rightarrow \beta$ Προφανές απ' την Πρόταση 2.2.4..

- $\beta \Rightarrow \alpha$ Απ' την Πρόταση 2.2.4. προκύπτει ότι η (x_n) είναι ελαχιστική, άρα υπάρχει ημι-ορθογώνια ακολουθία $(a_n) \subset X^*$. Εφόσον η (x_n) είναι πλήρης, με χρήση του θεωρήματος 2.6, αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές μερικών αθροισμάτων ότι είναι φραγμένοι. Έστω $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \in span\{x_n\}$. Τότε για $N \geq M$ ισχύει

$$\|S_M(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| = C \|x\|,$$

ενώ για $N < M$ ισχύει

$$\|S_M(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \right\| = \|x\| .$$

Άρα $\|S_M(x)\| \leq C\|x\|$, για κάθε $M \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, άρα απ' το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος **[1.2.12.]** παίρνουμε ότι $\sup_M \|S_M\| \leq C < \infty$. ■

Με το παρακάτω θεώρημα και πόρισμα διερευνάται κατά πόσον η ημι-ορθογώνια ακολουθία μίας βάσης Schauder είναι ή όχι μια βάση Schauder του δυϊκού χώρου. Το αποτέλεσμα για αυτοπαθείς χώρους (όπως είναι όλοι οι Hilbert **[65]**) είναι εξαιρετικά χρήσιμο.

Θεώρημα 2.2.9. Έστω χώρος Banach X και (x_n) μια βάση του X. Τότε η ημι-ορθογώνια ακολουθία $(a_n) \subset X^*$ είναι μία βάση για το $\overline{span}(a_n)$.

Απόδειξη: Απ' την πρόταση 2.2.4., η (a_n) είναι ελαχιστική και παράγει τον $\overline{span}\{a_n\}$, και η (τ_{x_n}) είναι η ημι-ορθογώνιά της στον X^{**}, όπου τ η συνήθης κανονική εμφύτευση. Θεωρούμε τους τελεστές

$$T_N(x^*) = \sum_{n=1}^{N} \tau_{x_n}(x^*) a_n = \sum_{n=1}^{N} x^*(x_n) a_n \,, \text{ όπου } x^* \in \overline{span}\{a_n\}.$$

Έστω $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n$ η γνωστή ακολουθία μερικών αθροισμάτων. Όπως γνωρίζουμε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι ακολουθία φραγμένων τελεστών. Εστω S_N^* οι δυϊκοί τελεστές αυτών. Τότε, για κάθε $x \in X$ και $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\left(S_N^*(x^*)\right)(x) = x^*\left(S_N(x)\right) = x^*\left(\sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x^*(x_n) = \sum_{n=1}^{N} x^*(x_n) a_n(x)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} x^*(x_n) a_n\right)(x) = T_N(x^*)(x).$$

Άρα $T_N = S_N^*$, συνεπώς $\|T_N\| = \|S_N^*\| = \|S_N\|$, δηλαδή οι T_N ομοιόμορφα φραγμένοι, άρα από θεώρημα 2.2.8, η (a_n) είναι βάση. ∎

Θεώρημα 2.2.10 : Έστω χώρος Banach X με βάση (x_n). Αν ο X είναι αυτοπαθής τότε το ορθογώνιο σύστημα $(a_n) \subseteq X^*$ της (x_n) είναι μία βάση του X^*.

Απόδειξη:

Απ' το προηγούμενο Θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι η (a_n) είναι πλήρης ακολουθία του X^*. Έστω $x^{**} \in X^{**}$, για το οποίο ισχύει $x^{**}(a_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον ο X είναι αυτοπαθής, τότε $X^{**} = \tau(X)$, δηλαδή $x^{**} = \tau(x)$, για κάποιο $x \in X$. Τότε όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει :

$$a_n(x)=[\tau(x)](a_n)=x^{**}(a_n)=0.$$

Άρα $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)x_n=0$, συνεπώς $x^{**}=0$. Από πόρισμα του Hahn-Banach 1.2.8. η $\{a_n\}$ είναι πλήρης. ■

Παρακάτω παραθέτουμε αντιπαραδείγματα με σκοπό να αναδείξουμε τις διαφορές σε σχέση με τους γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Παράδειγμα 1. Μία ακριβής ακολουθία σε απειροδιάστατο χώρο Banach, δηλαδή ελαχιστική και πλήρης, δεν είναι απαραίτητα βάση Schauder.

Πράγματι, έστω η κανονική βάση $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\ell_2(\mathbb{N})$. Θέτουμε $x_n=e_n+e_1$, $n\geq 2$ και θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\}_{n\geq 2}$ για την οποία ισχύει

$$\langle x_m,e_n\rangle=\langle e_m+e_1,e_n\rangle=\langle e_m,e_n\rangle+\langle e_1,e_n\rangle=\delta_{m,n}\text{, για } m,n\geq 2.$$

Απ' το θεώρημα 1.3.7. του Riesz, τα $\langle\bullet,e_n\rangle$ είναι συναρτησιοειδή του $\ell_2(\mathbb{N})$ και από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι η ακολουθία $\{e_n\}_{n\geq 2}$ είναι η ημι-ορθογώνια της $\{x_n\}_{n\geq 2}$. Έτσι, από Λήμμα 2.2.4. προκύπτει άμεσα ότι η $\{x_n\}_{n\geq 2}$ είναι ελαχιστική. Απ' την άλλη μεριά, αν $x\in\ell_2(\mathbb{N})$, και ισχύει $\langle x,x_n\rangle=0$, για $n\geq 2$, τότε

$\langle x,e_n+e_1\rangle=0\Leftrightarrow\langle x,e_n\rangle=-\langle x,e_1\rangle$, για $n\geq 2$.

Ετσι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle x,e_1\rangle\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle x,e_n\rangle\right|^2=\|x\|^2<\infty,$$

συνεπώς

$$\lim_n\left|\langle x,e_1\rangle\right|^2=0\Rightarrow\langle x,e_1\rangle=0\Rightarrow\langle x,e_n\rangle=0.$$

Ομως τότε κάθε στοιχείο της ακολουθίας x είναι μηδενικό άρα η ακολουθία είναι μηδενική άρα η $\{x_n\}_{n\geq 2}$ είναι πλήρης, δηλαδή ακριβής. Εφόσον ο $\ell_2(\mathbb{N})$ είναι αυτοπαθής ως χώρος Hilbert **[65]** , αν η $\{x_n\}_{n\geq 2}$ ήταν βάση θα έπρεπε η ημι-ορθογώνια ακολουθία της $\{e_n\}_{n\geq 2}$ να ήταν βάση, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2. ω-ανεξάρτητη και πλήρης ακολουθία δεν συνεπάγεται ελαχιστότητα.

Πράγματι, θεωρούμε το χώρο $C([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων, Από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass**[10]**, **[16]**, το σύνολο των μονωνύμων $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πλήρες στον $C([0,1])$. Θεωρώντας δε $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n = 0$ για κάθε *x* στο [0,1] (με τη νόρμα ομοιόμορφης σύγκλισης) , τότε για *x* = 0 παίρνουμε $c_0 = 0$, στη συνέχεια παραγωγίζοντας και θέτοντας *x* = 0 παίρνουμε $c_1 = 0$ κ.ο.κ. Ετσι, $c_n = 0$ για κάθε *n* και το σύνολο $\left\{x^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ω-ανεξάρτητο. Θα δείξουμε τέλος ότι το σύνολο αυτό δεν είναι ελαχιστικό.

Πράγματι, έστω g τυχαία συνεχής συνάρτηση στο [0,1] και $f(x) = g\left(\sqrt{x}\right)$. Τότε $g(x) = f(x^2)$, άρα απ' το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p_n έτσι ώστε

$$\| f - p_n \|_{\infty} < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - p_n(x) \right| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} \left| f(x^2) - p_n(x^2) \right| < \varepsilon .$$

Αν λοιπόν $q_n(x) = p_n\left(x^2\right)$, τότε

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| g(x) - q_n(x) \right| < \varepsilon \Rightarrow \| g - q_n \|_{\infty} < \varepsilon \ .$$

Όμως, το q_n είναι ένα πολυώνυμο αρτίων μόνο εκθετών, άρα, αφού η *g* τυχαία, το $\left\{x^{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης πλήρες σύστημα στον $C([0,1])$, δηλαδή το $\left\{x^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ελαχιστικό.

Παράδειγμα 3. Πληρότητα και (πεπερασμένη) γραμμική ανεξαρτησία δε συνεπάγεται ω – ανεξαρτησία.

Έστω X χώρος Banach με βάση $\left\{x_n\right\}$ και $\left\{a_n\right\} \subseteq X^*$ η ημι-ορθογώνια ακολουθία της $\left\{x_n\right\}$. Θεωρούμε το στοιχείο

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n \|x_n\|}$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο αφού η σειρά συγκλίνει απόλυτα. Παρατηρούμε ότι

$$a_m(x) = a_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n \|x_n\|} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m\left(x_n\right)}{2^n \|x_n\|} = \frac{1}{2^m \|x_m\|} \neq 0 \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}$$

και κατά συνέπεια $x \neq x_n$ αφού $a_m(x_n) = 0$, για $m \neq n$. Θεωρούμε την ακολουθία $\left\{x\right\} \cup \left\{x_n\right\}$ η οποία είναι προφανώς πλήρης αφού η $\left\{x_n\right\}$ είναι πλήρης. Όμως

$$-x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n \|x_n\|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \|x_m\|} x_n = 0$$

συνεπώς δεν είναι ω-ανεξάρτητη. Παρ' όλα αυτά είναι πεπερασμένα γραμμικά ανεξάρτητη, διότι

$$c_0 x + \sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0 \Leftrightarrow c_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n + \sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{N} (c_0 a_n(x) + c_n) x_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_0 a_n(x) x_n = 0$$

Η $\{x_n\}$ είναι βάση άρα πρέπει $c_0 a_n(x) + c_n = 0$ για $n = 1,2,..,N$ ενώ $c_0 a_n(x) = 0$ για $n > N$. Όμως $a_n(x) \neq 0$ άρα $c_0 = 0$ και συνεπώς και $c_1 = c_2 = ... = c_N = 0$, οπότε η $\{x\} \cup \{x_n\}$ είναι πεπερασμένα γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία. ■

Παράδειγμα 4. Το τριγωνομετρικό σύστημα είναι πλήρες και ελαχιστικό στο χώρο *C(T)*, των συνεχών συναρτήσεων στο T = [0,1], αλλά όχι βάση στο *C(T)*.

Εστω το τριγωνομετρικό σύστημα $\{e^{2\pi i k t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ στο χώρο $C(T)$, ο οποίος περιλαμβάνει τις συνεχείς, 1-περιοδικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και είναι ένας χώρος Banach ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|_\infty$. Εστω οι τελεστές (συντελεστές Fourier της *f*)

$$a_k : C(T) \to \mathbb{R} \; : \; a_k(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt ,$$

Οι οποίοι είναι προφανώς γραμμικοί και φραγμένοι αφού

$$|a_k(f)| = \left| \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| f(t) e^{-2\pi i k t} \right| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \, dt = \|f\|_\infty .$$

Συνεπώς $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq C(T)^*$ και μάλιστα ισχύει

$$a_k(e_\ell) = \int_0^1 e^{2\pi i \ell t} e^{-2\pi i k t} dt = \int_0^1 e^{2\pi i (\ell - k) t} dt = \begin{cases} 0, & \ell \neq k \\ 1, & \ell = k \end{cases}$$

δηλαδή η $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι η ημι-ορθογώνια ακολουθία της $\{e^{2\pi i k t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Εφόσον η $\{e^{2\pi i k t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ έχει ημιορθογώνια ακολουθία τότε είναι ελαχιστική από την Πρόταση 2.2.4.. Το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό στο $C(T)$ **[1.4.2.]**. Συνεπώς η ακολουθία $\{e^{2\pi i k t}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι πλήρης και ελαχιστική στο $C(T)$, αλλά δεν είναι βάση για τον $C(T)$, διότι για $f \in C(T)$, έχουμε ότι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f) e_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \cdot e_k$$

είναι η σειρά Fourier της *f*, και ως γνωστόν, υπάρχουν συναρτήσεις στον $C(T)$ των οποίων το ανάπτυγμα Fourier δε συγκλίνει ομοιόμορφα στην f (για δύο παραδείγματα των Lebesgue και Fejer παραπέμπουμε στα **[14]** , **[77])** .

Παράδειγμα 5. Το τριγωνομετρικό σύστημα στον L_1(T) είναι πλήρες και ελαχιστικό, αλλά όχι βάση.

Με παρόμοια λογική όπως στο παράδειγμα 4, μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι ελαχιστική. Επίσης, είναι και πλήρης, διότι αν ορίσουμε με

$$w_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} D_k(x),$$

το ***n-οστό πυρήνα του Fejer*** , όπου $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikx}$ είναι ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet και οι αριθμοί $\|D_n\|_1$ καλούνται ***σταθερές του Lebesgue,*** τότε αποδεικνύεται ότι για κάθε $f \in L_1$(T) ισχύει $f * w_n \to f$ με την L_1 νόρμα καθώς $n \to \infty$, **[48] .** Ισχύει όμως:

Θεώρημα 2.2.11 Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \|D_n\|_1$.

Απόδειξη:

Απ’ την ανισότητα $|\sin x| \le |x|$, έχουμε:

$$\|D_n\|_1 \ge 2\int_0^{1/2} \frac{|\sin(2n+1)\pi x|}{|\pi x|}dx \overset{u=(2n+1)x}{=} 2\int_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{|\sin \pi u|}{|\pi u|}du \ge 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{|\sin \pi u|}{|\pi u|}du \overset{u=k+x}{=}$$

$$2\int_0^1 \sin(\pi x)\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \frac{1}{|\pi(k+x)|}dx \ge 2\int_0^1 \sin(\pi x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{|\pi(k+1)|}dx$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi(k+1)}\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

■

Αν όμως $s_n = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f)e_n$ είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier, τότε αποδεικνύεται στο **[14]** ότι ισχύει $\|s_n\|_{L_1 \to L_1} \ge \|D_n\|_{L_1}$ και απ’ το προηγούμενο Θεώρημα ισχύει ότι η η ακολουθία αυτή είναι μη φραγμένη.

.
Ένα εύλογο ερώτημα είναι εάν υπάρχει ένα μέτρο ανθεκτικότητας για μία βάση ώστε αυτή να παραμένει βάση κάτω από διαταραχές. Πρακτικά, αυτό σε εφαρμογές μας δίνει ένα επίπεδο ανοχής στο θόρυβο.

Θεώρημα 2.2.11 (Paley-Wiener) Έστω χώρος Banach X και έστω $\left(x_n\right)$ μια βάση του. Αν $0 \le \lambda < 1$ και $\left(y_n\right)$ ακολουθία του X τέτοια ώστε

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n (x_n - y_n)\right\| \le \lambda \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|, \text{ για κάθε } c_n \in \mathbb{C},\ n \in I_n \text{ και } N \in \mathbb{N},$$

τότε η $\left(y_n\right)$ είναι μια βάση του X, ισοδύναμη της $\left(x_n\right)$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε την ημι-ορθογώνια ακολουθία $\left\{a_n\right\} \subseteq X^*$ της $\left(x_n\right)$. Εξ υποθέσεως έχουμε

$$\left\|\sum_{n=M+1}^{N} a_n(x)(x_n - y_n)\right\| \le \left\|\sum_{n=M+1}^{N} a_n(x) x_n\right\| \text{ για } N > M.$$

Η ακολουθία (S_N) είναι προφανώς Cauchy ως συγκλίνουσα, άρα και η $\sum_{n=1}^{N} a_n(x)(x_n - y_n)$ είναι Cauchy, συνεπώς συγκλίνει. Θεωρούμε τον τελεστή

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)(x_n - y_n).$$

Ο T είναι γραμμικός και φραγμένος, διότι

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)(x_n - y_n)\right\| \le \lambda \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n\right\| = \lambda \|x\|.$$

Άρα $\|T\| \le \lambda < 1$ και συνεπώς ο $I - T$ είναι ισομορφισμός του X επί του εαυτού του. Τότε για $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left(I - T\right)\left(x_m\right) = x_m - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_m)(x_n - y_n) = x_m - (x_m - y_m) = y_m. \qquad \blacksquare$$

Μάλιστα αν εξασφαλίσουμε την πληρότητα της ακολουθίας $\left(y_n\right)$, τότε προκύπτει το παρακάτω Θεώρημα για μία απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο **[36]** .

Θεώρημα 2.2.12. Έστω χώρος Banach X και έστω (x_n) μία βάση του X με ημι-ορθογώνια ακολουθία $(a_n) \subset X^*$. Αν $(y_n) \subseteq X$ είναι μία πλήρης ακολουθία και $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n(x)\| \|x_n - y_n\| < \infty$, τότε η (y_n) είναι βάση του X και μάλιστα ισοδύναμη της (x_n). ♦

2.3. Σύγκλιση υπό συνθήκη και άνευ συνθήκης

Συχνά στις εφαρμογές η διάταξη των όρων σε μια αναπαράσταση στοιχείου σε σειρά δεν είναι πάντα δεδομένη, οπότε η μη εξάρτηση της σύγκλισης από οποιαδήποτε μετάθεση των όρων της είναι ένα πλεονέκτημα στην αναπαράσταση ενός στοιχείου. Στην παράγραφο αυτή μελετούμε τη σύγκλιση υπό συνθήκη και την άνευ συνθήκης.

Ορισμός 2.3.1. ***Μετάθεση*** είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. ♦

Ορισμός 2.3.2. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ μία ακολουθία σε Banach χώρο X. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ***συγκλίνει άνευ συνθήκης (unconditionally convergent)***, αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ συγκλίνει για κάθε μετάθεση σ. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει μεν, αλλά υπάρχει μια μετάθεση σ ώστε η $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ να αποκλίνει, τότε λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει ***υπό συνθήκη (conditionally convergent)***. ♦

Είναι γνωστό **[59]** ότι για $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απόλυτα αν και μόνον συγκλίνει άνευ συνθήκης, αλλά γενικότερα η ισοδυναμία δεν ισχύει.

Πρόταση 2.3.3. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σε χώρο Banach X. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει και άνευ συνθήκης.

Απόδειξη:

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, τότε $\left\| \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| < \infty$ για κάθε m.

Προφανώς, η $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων, άρα ως γνωστόν, συγκλίνει άνευ συνθήκης. Αν λοιπόν $s_m = \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)}$, τότε, με συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι η s_m συγκλίνει. ■

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

Αντιπαράδειγμα. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα ακολουθίας σ' έναν απειροδιάστατο χώρο Banach η οποία αν και συγκλίνει άνευ συνθήκης, δε συγκλίνει απόλυτα. Θεωρούμε την ακολουθία $x_{n,k} = \dfrac{\delta_{n,k}}{n}$, με $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_2(\mathbb{N})$. Υπενθυμίζουμε εδώ την άνευ συνθήκης σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Αν σ μετάθεση του $\mathbb{N}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sigma(k))^2} < \varepsilon^2$. Εχουμε λοιπόν:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)} \right\|_2 = \left\| \left(\frac{1}{\sigma(k)} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sigma(k))^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty ,$$

συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει άνευ συνθήκης. Όμως δε συγκλίνει απόλυτα αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

Ορισμός 2.3.4. : Έστω (x_n) βάση χώρου Banach X. Λέμε ότι η (x_n) είναι μία ***βάση άνευ συνθήκης***, αν η σειρά της αναπαράστασης συγκλίνει άνευ συνθήκης για κάθε $x \in X$. Αλλιώς λέμε ότι η (x_n) είναι μια ***βάση υπό συνθήκη***. ♦

Στο εξής γράφουμε $F \subset \mathbb{N}$ για ένα πεπερασμένο σύνολο και ορίζουμε τους τελεστές

$$S_F : X \to X : \ S_F(x) = \sum_{n\in F} a_n(x) x_n ,$$

$$S_{F,\varepsilon} : X \to X : \ S_{F,\varepsilon}(x) = \sum_{n\in F} \varepsilon_n a_n(x) x_n , \ \text{όπου } \varepsilon_n \in \{-1,1\}$$

και

$$S_{F,\Lambda}(x) = \sum_{n\in F} \lambda_n a_n(x) x_n , \ \text{όπου } |\lambda_n| \leq 1.$$

Αν η (x_n) είναι μία βάση άνευ συνθήκης, τότε θεωρούμε τις αντίστοιχες νόρμες

$$|||x||| = \sup_F \|S_F(x)\| , \ |||x|||_{\varepsilon} = \sup_{F,\varepsilon} \|S_{F,\varepsilon}(x)\| , \ |||x|||_{\Lambda} = \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}(x)\|$$

και τις αντίστοιχες σταθερές

$$\mathrm{K}=\sup_F\|S_F\|,\ \mathrm{K}_\varepsilon=\sup_{F,\varepsilon}\|S_{F,\varepsilon}\|,\ \mathrm{K}_\Lambda=\sup_{F,\Lambda}\|S_{F,\Lambda}\|,$$

όπου την K_ε θα τη θεωρούμε ως τη ***σταθερά βάσης άνευ συνθήκης***. Μάλιστα ισχύουν

$$\|\cdot\|\le\|\|\cdot\|\|\le\mathrm{K}\|\cdot\|,\qquad \|\cdot\|\le\|\|\cdot\|\|\le\mathrm{K}_\varepsilon\|\cdot\|,\qquad \|\cdot\|\le\|\|\cdot\|\|\le\mathrm{K}_\Lambda\|\cdot\|\ .$$

όπου $\mathrm{K},\mathrm{K}_\varepsilon,\mathrm{K}_\Lambda\ge 1$. Για παράδειγμα, όσον αφορά την απόδειξη της 2ης ανισότητας έχουμε

$$\|x\|=\lim_N\left\|\sum_{n=1}^N a_n(x)x_n\right\|=\lim_N\left\|\sum_{N\in F=\{F_1,\dots,F_N,\dots\}} a_n(x)x_n\right\|\le\sup_{F,\varepsilon}\left\|\sum_{n\in F}\varepsilon_n a_n(x)x_n\right\|=\|\|x\|\|_\varepsilon$$

ενώ εύκολα προκύπτει ότι

$$\sup_{F,\varepsilon}\|S_{F,\varepsilon}(x)\|\le\sup_{F,\varepsilon}\left(\|S_{F,\varepsilon}\|\|x\|\right)=\sup_{F,\varepsilon}\left(\|S_{F,\varepsilon}\|\right)\cdot\|x\|=K_\varepsilon\cdot\|x\|.$$

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί ένα κριτήριο βάσης άνευ συνθήκης.

Θεώρημα 2.3.5. Έστω μία πλήρης ακολουθία (x_n) μη μηδενικών στοιχείων σε χώρο Banach X. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η (x_n) είναι βάση άνευ συνθήκης.

β) Υπάρχει σταθερά $C_1\ge 1$ έτσι ώστε για κάθε $c_1,\dots,c_N$ και $\varepsilon_i\in\{\pm 1\}$ να ισχύει

$$\left\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n c_n x_n\right\|\le C_1\left\|\sum_{n=1}^N c_n x_n\right\|.$$

γ) Υπάρχει σταθερά $C_2\ge 1$ έτσι ώστε για κάθε $c_1,\dots,c_N$ και για κάθε $b_1,\dots,b_N$ με $|b_i|\le|c_i|$ να ισχύει $\left\|\sum_{n=1}^N b_n x_n\right\|\le C_2\left\|\sum_{n=1}^N c_n x_n\right\|$.

δ) Υπάρχουν σταθερές $0<C_3\le 1\le C_4<\infty$ έτσι ώστε για κάθε $c_1,\dots,c_N$ να ισχύει

$$C_3\left\|\sum_{n=1}^N|c_n|\,x_n\right\|\le\left\|\sum_{n=1}^N c_n x_n\right\|\le C_4\left\|\sum_{n=1}^N|c_n|\,x_n\right\|.$$

ε) Η (x_n) είναι βάση και για κάθε φραγμένη ακολουθία συντελεστών $\Lambda=(\lambda_n)$ υπάρχει ένας συνεχής γραμμικός τελεστής $T_\Lambda:X\to X:\ T_\Lambda(x_n)=\lambda_n x_n$ για κάθε n.

Απόδειξη: • $\alpha \Rightarrow \beta$ Έστω ότι η $\left(x_n\right)$ είναι βάση άνευ συνθήκης με ημι-ορθογώνια την $\left(a_n\right)$. Τότε για κάθε επιλογή $c_1,...,c_N$, $\varepsilon_1,...,\varepsilon_N = \pm 1$ και $F = \{1,...,N\}$ θέτουμε

$$x = \sum_{n\in F} c_n x_n \text{ , οπότε } a_n(x) = \begin{cases} c_n, & n \in F \\ 0, & n > 0 \end{cases}.$$

Ετσι:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in F} \varepsilon_n a_n(x) x_n\right\| = \left\|S_{F,\varepsilon}(x)\right\| \le \left\|\left|x\right|\right\|_{\varepsilon} \le \mathrm{K}_{\varepsilon}\left\|x\right\| = \mathrm{K}_{\varepsilon}\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|.$$

• $\beta \Rightarrow \alpha$ Έστω μια μετάθεση σ του $\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η $\left(x_{\sigma(n)}\right)$είναι μία βάση του X. Απ' την υπόθεση, η $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ είναι πλήρης με μη μηδενικά στοιχεία, συνεπώς από το θεώρημα 2.2.8. , αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά C_σ τέτοια ώστε για κάθε $N \ge M$ και για κάθε $c_{\sigma(1)},...,c_{\sigma(N)}$ να ισχύει

$$\left\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\| \le C_\sigma \left\|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\|.$$

Έστω $\varepsilon_n = 1$ και $\gamma_n = \begin{cases} 1, & n \in \left\{c_{\sigma(1)},...,c_{\sigma(N)}\right\} \\ -1, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$. Τότε

$$\left\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{\varepsilon_n + \gamma_n}{2}\right) c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{M} \varepsilon_n c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{M} \gamma_n c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\|$$

$$\le \frac{C_1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\| + \frac{C_1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\| = C_1\left\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\right\|.$$

• $\alpha \Rightarrow \gamma$ Έστω $\left(a_n\right)$ ημι-ορθογώνια βάση της $\left(x_n\right)$. Για κάθε επιλογή $c_1,...,c_N$ και για κάθε $b_1,...,b_N$ με $\left|b_i\right| \le \left|c_i\right|$, θέτουμε $F = \{1,...,N\}$ και $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$, με $c_n = a_n(x)$. Εστω $b_n = \lambda_n c_n$, με $\left|\lambda_n\right| \le 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{N} b_n x_n = \sum_{n\in F} \lambda_n c_n x_n = \sum_{n\in F} \lambda_n a_n(x) x_n = S_{F,\Lambda}(x)$$

και

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\right\| = \left\|S_{F,\Lambda}(x)\right\| = \left\|\left|x\right|\right\|_{\Lambda} \le \mathrm{K}_{\Lambda}\left\|x\right\| = \mathrm{K}_{\Lambda}\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|.$$

• $\gamma \Rightarrow \alpha$ Η απόδειξη είναι παρόμοια της απόδειξης $\beta \Rightarrow \alpha$.

• $\gamma \Rightarrow \delta$ Επιλέγουμε τυχαία $c_1,...,c_N$. Θέτουμε $b_n = |c_n|$. Τότε προφανώς ισχύει $|b_n| \le |c_n|$ και $|c_n| \le |b_n|$, άρα απ' την υπόθεση προκύπτει ότι

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\right\| \le C_2 \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\| \text{ και } \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\| \le C_2 \left\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\right\|.$$

Από τις δύο παραπάνω ανισότητες παίρνουμε εύκολα το ζητούμενο.

• $\delta \Rightarrow \beta$ Προκύπτει άμεσα ότι

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n\right\| \le C_4 \left\|\sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n c_n| x_n\right\| = C_4 \left\|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\right\| \le \frac{C_4}{C_3} \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\| .$$

• $\alpha \Rightarrow \varepsilon$ Έστω ότι η (x_n) είναι βάση άνευ συνθήκης με ημι-ορθογώνια την (a_n) και (λ_n) μία φραγμένη ακολουθία συντελεστών με $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$. Σταθεροποιούμε $x \in X$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$, τότε η $T_\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x) x_n$ συγκλίνει, διότι για κάθε N ισχύει:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n(x) x_n\right\| = M \left\|\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x) x_n\right\| \le M \cdot \mathrm{K}_\Lambda \cdot \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n\right\|.$$

Επιπλέον, ο τελεστής T_Λ είναι και φραγμένος με $\|T_\Lambda(x)\| \le M \cdot \mathrm{K}_\Lambda \|x\|$, ενώ άμεσα προκύπτει ότι $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$.

• $\varepsilon \Rightarrow \alpha$ Εστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$ η μοναδική αναπαράσταση του x ως προς τη βάση (x_n). Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι βάση άνευ συνθήκης. Έστω $\Lambda = (\lambda_n)$ μία ακολουθία συντελεστών με $|\lambda_n| \le 1$, τότε απ' την υπόθεση υπάρχει συνεχής τελεστής $T_\Lambda : X \to X$ τέτοιος ώστε $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η συνέχεια του T_Λ υπονοεί ότι

$$\|T_\Lambda(x)\| \le C\|x\|$$

για κάποια θετική σταθερά C. Εφόσον

$$T_\Lambda(x) = T_\Lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n T_\Lambda(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x) x_n ,$$

αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x) x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n \right\|$$

κι έτσι από (β) συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει άνευ συνθήκης. ■

Παράδειγμα. Θεωρούμε το Banach χώρο c_0 όλων των μηδενικών ακολουθιών με τη γνωστή sup-νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Τότε, η συνήθης ακολουθία (e_n) είναι βάση Schauder του c_0, διότι είναι πλήρης και για κάθε $N > M$ ισχύει

$$\left\| \sum_{n=1}^{M} c_n e_n \right\| = \sup_{n \in I_M} |c_n| \leq \sup_{n \in I_N} |c_n| = \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\| .$$

Μάλιστα είναι και βάση άνευ συνθήκης διότι για $|b_i| \leq |c_i|,\ i \in I_N$ ισχύει

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \right\| \leq \sup_{n \in I_N} |b_n| \leq \sup_{n \in I_N} |c_n| = C_2 \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| .$$

Εστω τώρα ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Θα δείξουμε ότι είναι μια βάση Schauder του c_0 υπό συνθήκη. Πράγματι, έστω στοιχείο $y \in c_0$. Τότε θα δείξουμε ότι

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

όπου $x_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$ και (e_n^*) είναι η ημι-ορθογώνια ακολουθία της (e_n). Πράγματι έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^*(y) x_n = \sum_{n=1}^{N} \left(e_n^*(y) - e_{n+1}^*(y) \right) x_n = \sum_{n=1}^{N} \left(y_n - y_{n+1} \right) x_n = \sum_{n=1}^{N} y_n x_n - \sum_{n=2}^{N+1} y_n x_{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} y_n \left(x_n - x_{n-1} \right) - y_{N+1} x_N = \sum_{n=1}^{N} y_n e_n - y_{N+1} x_N .$$

Άρα

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{N} x_n^*(y) x_n \right\|_\infty = \left\| y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n + y_{N+1} x_N \right\|_\infty$$

$$\leq \left\| y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n \right\|_\infty + \left\| y_{N+1} x_N \right\|_\infty = \left\| y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n \right\|_\infty + |y_{N+1}| \to 0 .$$

Για $\varepsilon_n = c_n = (-1)^n$, τότε $\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n x_n \right\| = N$ και $\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| = 1$, οπότε απ' το προηγούμενο θεώρημα δεν είναι βάση άνευ συνθήκης .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 :   ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε ορθοκανονικές βάσεις σε χώρους $L_2(\Omega)$. Αρχικά αναφέρουμε στοιχεία της γενικής θεωρίας, απ' όπου αναδεικνύονται πλεονεκτήματα που προκύπτουν από τη χρήση ορθοκανονικών βάσεων, όσον αφορά τις ορθογώνιες προβολές λόγω καθετότητας, τη σύγκλιση άνευ συνθήκης, τη διατήρηση της ενέργειας του σήματος (Parseval) και φυσικά τη μοναδικότητα της αναπαράστασης. Στη συνέχεια, μελετούμε κλασσικά ορθοκανονικά συστήματα όπως το τριγωνομετρικό σύστημα στην Ανάλυση Fourier, η πολυδιακριτή Ανάλυση κυματιδίων στην Ανάλυση Χρόνου Συχνότητας, , η οποία είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας παράγεται μια ποικιλία ορθοκανονικών βάσεων του $L_2(R)$ και αναφέρουμε τα διακριτά συστήματα Gabor. Οι ορθοκανονικές βάσεις δεν είναι πάντοτε αποδοτικές ή διαθέσιμες. Για παράδειγμα, δείχνουμε ότι το μοναδικό πραγματικό κυματίδιο με συμπαγή φορέα και συμμετρία ή αντισυμμετρία, έτσι ώστε οι διαστολές και μεταθέσεις αυτού να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$ είναι μόνον το κυματίδιο του Haar, το οποίο είναι ασυνεχής συνάρτηση. Σημειώνουμε επίσης ότι μπορεί να μην έχουμε στη διάθεσή μας μια επιθυμητή ορθοκανονική βάση λόγω της μορφής του χώρου μας, όπως για παράδειγμα συμβαίνει με το τριγωνομετρικό σύστημα σε κάποιους χώρους $L_2(\Omega)$. Η ύπαρξη ή μη ύπαρξη τέτοιας βάσης, σχετίζεται με τη δυνατότητα του συνόλου Ω να επιστρώσει πλήρως το χώρο με κατάλληλες μεταθέσεις, το οποίο οδήγησε στην εικασία Fuglede με την οποία κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο. Βασικές πηγές υπήρξαν οι **[15]** , **[19]** , **[21]** , **[29]** , **[31]** ,**[35]** , **[36]** ,**[37]** , **[42]** , **[56]** , **[73]** .

3.1. Βασική θεωρία ορθοκανονικών βάσεων σε διαχωρίσιμους χώρους Hilbert

Εστω K κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H εσωτερικό γινόμενο $\langle \bullet,\bullet \rangle$ και $h \in H$. Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $k_0 \in K$, έτσι ώστε

$$\|h-k_0\| = dist(h,K) = \inf\left\{\|h-k\|,\ k \in K\right\}.$$

Μάλιστα, το στοιχείο $h-k_0$ είναι κάθετο στο χώρο K (δηλαδή $\langle h-k_0, k\rangle = 0\ \forall k \in K$) και ισχύει:

$$h-k_0 \perp K \Leftrightarrow P(h) = k_0.$$

Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο **[19]**.

Ορισμός 3.1.1. Ο γραμμικός τελεστής

$$P: H \to K:\ P(h) = k_0,$$

όπου k_0 όπως παραπάνω , καλείται ***ορθογώνια προβολή (orthogonal projection)*** του H επί του K. Γράφουμε

$$K^{\perp} = \{h \in H : \; h \perp K\}$$

για το ***ορθογώνιο συμπλήρωμα*** του Κ στον *Η*.

Πρόταση 3.1.2. Έστω P ορθογώνια προβολή όπως παραπάνω. Τότε:

α) $\|P\| = 1$.

β) $P^2 = P$.

γ) $\mathrm{Im}(P) = K$ και $Ker(P) = K^{\perp}$, όπου $\mathrm{Im}(P)$ και $Ker(P)$ όπως ορίστηκαν στην εισαγωγή μετά το 1.3.1. .

Απόδειξη:

α) Ισχύει $h = (h - P(h)) + P(h)$, όπου $P(h) \in K$ και $h - P(h) \perp K$, συνεπώς από Πυθαγόρειο Θεώρημα (Εισαγωγή πριν το 1.2.14.) ισχύει

$$\|h\|^2 = \|h - P(h)\|^2 + \|P(h)\|^2 \geq \|P(h)\|^2 \Leftrightarrow \|h\| \geq \|P(h)\|.$$

Αφού $h \in K \Rightarrow P(h) = h$, παίρνουμε άμεσα ότι $\|P\| = 1$.

β) Αν $h \in K \Rightarrow P(h) = h$, άρα: $P(P(h)) = P(h)$, για κάθε $h \in H$.

γ) Αν $P(h) = 0$, τότε $h = h - P(h) \perp K$, άρα $Ker(P) \subseteq K^{\perp}$. Αν $h \in K^{\perp}$, τότε $h - 0 \perp K$, άρα $P(h) = 0 \Rightarrow h \in Ker(P)$, συνεπώς $K^{\perp} \subseteq Ker(P)$, οπότε $Ker(P) = K^{\perp}$.

Προφανώς: $\mathrm{Im}\, P \subseteq K$. Απ' την άλλη μεριά, αν $k \in K \Rightarrow P(k) = k \in \mathrm{Im}\, K$, άρα $K \subseteq \mathrm{Im}\, P$, οπότε $\mathrm{Im}\, P = K$. ■

Πρόταση 3.1.3. Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$, ένας αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής για τον οποίο ισχύει $P^2 = P$, τότε είναι ορθογώνια προβολή επί ενός υποχώρου K του H.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το σύνολο $K = \{ f \in H : Pf = f \}$, το οποίο είναι μη τετριμμένο , αφού ισχύει $Pf \in K$, για κάθε $f \in H$, εφόσον ισχύει $P^2 = P$. Αν $f, g \in K$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τότε ισχύει $\lambda f + \mu g = \lambda Pf + \mu Pg = P(\lambda f + \mu g)$, άρα $\lambda f + \mu g \in K$, δηλαδή ο K είναι γραμμικός υπόχωρος του H. Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$, με $f_n \to f$. Θα δείξουμε ότι $Pf = f$. Αρχικά παρατηρούμε ότι ισχύει $Pf_n = f_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε ισχύει

$$Pf - f = Pf - Pf_n + Pf_n - f = Pf - Pf_n + f_n - f \text{ και } \|P\| = 1,$$

αφού αν $f \in H$, τότε ισχύει

$$\|Pf\|^2 = \langle Pf, Pf \rangle = \langle P^* Pf, f \rangle = \langle P^2 f, f \rangle = \langle Pf, f \rangle \le \|Pf\| \|f\|,$$

άρα ισχύει $\|Pf\| \le \|f\|$ και ταυτόχρονα

$$\|Pf\| = \|P^2 f\| \le \|P\| \|Pf\| \Leftrightarrow \|P\| \ge 1.$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτει ότι :

$$\|Pf - f\| \le \|Pf - Pf_n\| + \|f_n - f\| \le \|P\| \|f_n - f\| + \|f_n - f\| = 2\|f_n - f\|$$

και παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$, προκύπτει ότι $\|Pf - f\| = 0 \Rightarrow Pf = f \Rightarrow f \in K$. Άρα ο K είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Έστω $g \in K^{\perp}$, τότε ισχύει $\langle Pf, g \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f, P^* g \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f, Pg \rangle = 0$, για κάθε $f \in H$, συνεπώς $Pg = 0$. Άρα αν $f \in H$ και $f = f_1 + f_2$, με $f_1 \in K$ και $f_2 \in K^{\perp}$, τότε $Pf = P(f_1 + f_2) = Pf_1 = f_1$, άρα ο P είναι ορθογώνια προβολή. ■

Ορισμός 3.1.4. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $\{x_i\}_{i \in I} \in H$ είναι αριθμήσιμο και ορθογώνιο σύνολο (δηλαδή τα στοιχεία του είναι ανά δύο κάθετα), λέμε ότι είναι μια ***ορθογώνια ακολουθία***. Αν επιπλέον, $\|x_i\| = 1$ για κάθε $i \in I$, τότε λέμε ότι έχουμε μια ***ορθοκανονική ακολουθία***. ♦

Πρόταση 3.1.5. Έστω $\{x_i\}_{i \in I}$ ορθοκανονική ακολουθία σε χώρο Hilbert H με εσωτερικό γινόμενο $\langle \bullet, \bullet \rangle$, $N \in \mathbb{N}$ και $x = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$. Τότε $c_i = \langle x, x_i \rangle$.

Απόδειξη:

$$x = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \Rightarrow \langle x, x_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} c_i x_i, x_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i \langle x_i, x_k \rangle = c_k.$$ ■

Θεώρημα 3.1.6. Έστω χώρος Hilbert H και $\{x_i\}_{i \in I} \in H$ ορθοκανονική ακολουθία του. Τότε:

α) $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i \rangle|^2 \le \|x\|^2$, για κάθε $x \in H$ ***(Ανισότητα Bessel).***

β) Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ συγκλίνει στον H, αν και μόνον αν, $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$.

γ) Η $P(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle x_i$, είναι η ορθογώνια προβολή του x επί του $\overline{span}\{x_i\}$.

Απόδειξη:

α) Έστω $x\in H$. Τότε, για κάθε $N\in\mathbb{N}$, θεωρούμε το στοιχείο

$$y_N = x-\sum_{i=1}^{N}\langle x,x_i\rangle x_i .$$

Για κάθε $j\in I_N$, ισχύει

$$\langle y_N,x_j\rangle=\langle x,x_j\rangle-\sum_{i=1}^{N}\langle x,x_i\rangle\langle x_i,x_j\rangle=\langle x,x_j\rangle-\langle x_i,x_j\rangle=0 ,$$

συνεπώς απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\|x\|^2=\left\|y_N+\sum_{i=1}^{N}\langle x,x_i\rangle x_i\right\|^2=\|y_N\|^2+\sum_{i=1}^{N}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2\geq\sum_{i=1}^{N}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2 .$$

Παίρνοντας όριο για το $N\to\infty$, προκύπτει το ζητούμενο.

β) Θεωρούμε τις ακολουθίες $s_N=\sum_{i=1}^{N}c_ix_i$ και $t_N=\sum_{i=1}^{N}|c_i|^2$. Τότε για $N>M$ ισχύει

$$\|s_N-s_M\|^2=\left\|\sum_{i=M+1}^{N}c_ix_i\right\|^2=\sum_{i=M+1}^{N}\|c_ix_i\|^2=\sum_{i=M+1}^{N}|c_i|^2=t_N-t_M ,$$

συνεπώς αν η μία είναι Cauchy, τότε είναι και η άλλη Cauchy (και οι δύο χώροι *H* και $\mathbb{R}$ είναι πλήρεις), άρα η σύγκλιση της μιας συνεπάγεται τη σύγκλιση και της άλλης.

γ) Η σύγκλιση προκύπτει απ' την ανισότητα Bessel. Εστω τυχαίος όρος x_k της ακολουθίας και $x\in H$. Τότε:

$$\langle x-P(x),x_k\rangle=\langle x,x_k\rangle-\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle x_i,x_k\right\rangle=\langle x,x_k\rangle-\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle\langle x_i,x_k\rangle=\langle x,x_k\rangle-\langle x,x_k\rangle=0$$

δηλαδή $\left(x-P(x)\right)\in\{x_k\}^{\perp}\Rightarrow\left(x-P(x)\right)\in\overline{span}\{x_k\}^{\perp}$, άρα $P(x)$ είναι η ορθογώνια προβολή του x στον $\overline{span}\{x_k\}$. ■

Απ' το προηγούμενο θεώρημα, αν η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}\in H$ είναι και πλήρης, τότε $P(x)=x$, οπότε:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i \, .$$

Θεώρημα 3.1.7. Έστω ένας χώρος Hilbert H και $\{x_i\}_{i\in I}$ ορθοκανονική ακολουθία του H. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης.

β) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle$, για κάθε $x \in H$.

γ) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2$, για κάθε $x \in H$. ***Ταυτότητα Parseval.***

Απόδειξη:

α) $\Rightarrow$ **β)** Αν $\{x_i\}_{i\in I}$ πλήρης, τότε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$ για κάθε $x \in H$, με μοναδικό τρόπο.

Ετσι:

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i\rangle x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i\rangle \langle x_i, y\rangle .$$

β) $\Rightarrow$ **γ)** Θέτουμε στη β) όπου y το x και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.1.6. .

γ) $\Rightarrow$ **α)** Έστω ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ δεν είναι πλήρης, τότε υπάρχει μη μηδενικό $y \in H$, τέτοιο ώστε $y \perp x_i$. Από υπόθεση, $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle y, x_i\rangle\right|^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, άτοπο. ■

Πόρισμα 3.1.8. Έστω ένας χώρος Hilbert H και $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ορθοκανονική ακολουθία του. Τότε, η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του H, αν και μόνον αν ισχύει το εξής:

Αν $x \in H$ και $\langle x, x_i\rangle = 0$, για κάθε $i \in I$, τότε $x = 0$.

Απόδειξη:

Η φορά $\Rightarrow$ είναι προφανής. Η αντίθετη φορά υπονοεί ότι

$$\left(span\{x_i\}_{i\in I}\right)^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{span}\{x_i\}_{i\in I} = \{0\}^{\perp} = H .$$

Συνεπώς η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μια ορθοκανονική βάση. ■

Παρατήρηση. Μία ορθοκανονική βάση είναι μια βάση Schauder του χώρου Hilbert. Πράγματι, εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της αναπάραστασης και επιπλέον απ' το θεώρημα

Αναπαράστασης του Riesz οι συντελεστές της αναπαράστασης αντιστοιχούν σε μοναδικό συναρτησοειδές του δυϊκού χώρου. Σημειώνουμε επίσης εδώ ότι αν έχουμε μία βάση Schauder σε χώρο Hilbert H, μέσω της διαδικασίας ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε ορθοκανονική.

Τέλος, αναφέρουμε ότι αν $\{x_i\}_{i\in I}$ ορθοκανονική βάση του H, τότε για κάθε $x \in H$, το μοναδικό ανάπτυγμα

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i ,$$

καλείται ***ανάπτυγμα Fourier*** του x ως προς τη βάση $\{x_i\}_{i\in I}$.

Θεώρημα 3.1.9. Ένας χώρος Hilbert H έχει ορθοκανονική βάση (δηλ. αριθμήσιμη), αν και μόνον αν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη:

Εστω ότι ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{x_i\}_{i\in I}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \left\{ s_n = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i : q_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Το D είναι προφανώς αριθμήσιμο. Έστω $x \in H$, τότε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε $\left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, x_i \rangle x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Λόγω πυκνότητας του $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{C}$, για κάθε $i \geq n_0$, υπάρχει $q_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, ώστε $\left| \langle x, x_i \rangle - q_i \right| < \frac{\varepsilon}{2n_0}$, άρα

$$\|x - s_n\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, x_i \rangle x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n_0} \langle x, x_i \rangle x_i - s_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n_0} \left| \langle x, x_i \rangle - q_i \right| = \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon}{2n_0} = \varepsilon .$$

Αρα το D είναι πυκνό στον H, οπότε ο H είναι διαχωρίσιμος.

Αντιστρόφως , αν ο H είναι διαχωρίσιμος, τότε ο H έχει ένα πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Αφαιρώντας αν απαιτείται στοιχεία προκύπτει ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ κι έπειτα χρησιμοποιώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt προκύπτει ένα ορθοκανονικό πλήρες σύνολο $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ το οποίο είναι μία ορθοκανονική του βάση. ■

Θεώρημα 3.1.10. Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισόμορφος με τον $\ell_2(\mathbb{N})$.

Απόδειξη:

Εστω ορθοκανονική βάση $\{x_i\}_{i\in I}$ του *H*. Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : H \to \ell_2(\mathbb{N}) : \ T(x) = \left(\langle x, x_i \rangle\right)_{i\in I} . \tag{1}$$

O T είναι προφανώς γραμμικός γραμμικός και απ' το Θεώρημα 3.1.7 γ) είναι ισομετρία, άρα και 1-1. Έστω $\left(\lambda_i\right)_{i\in I} \in \ell_2(\mathbb{N})$ και $s_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Τότε η (s_n) είναι Cauchy στον H , συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο $s \in H$. Τότε $\langle s, x_i \rangle = \lim_n \langle s_n, x_i \rangle = \lambda_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, δηλαδή ο T είναι και επί. ■

Πρόταση 3.1.11. Δύο ορθοκανονικές βάσεις ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert H είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

Απόδειξη:

Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ και $\{y_i\}_{i\in I}$ δύο ορθοκανονικές βάσεις του H . Θεωρούμε τους ισομορφισμούς $T_x : H \to \ell_2(\mathbb{N})$ και $T_y : H \to \ell_2(\mathbb{N})$, όπως στην (1), όπου ο πρώτος αντιστοιχεί στη βάση $\{x_i\}_{i\in I}$ και ο δεύτερος στη βάση $\{y_i\}_{i\in I}$. Ορίζουμε

$$T = T_y^{-1} \circ T_x \text{ με } T : H \to H : \ T = T_y^{-1} \circ T_x ,$$

ο οποίος είναι ισομορφισμός ως σύνθεση ισομορφισμών με $T(x_i) = y_i, \ i \in \mathbb{N}$. ■

Πρόταση 3.1.12. Κάθε ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert H είναι μια βάση άνευ συνθήκης.

Απόδειξη:

Αν $\{x_i\}_{i\in I}$ ορθοκανονική βάση του , τότε κάθε $x \in H$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$ και ισχύει

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \langle x, x_i \rangle \right|^2 .$$

Προφανώς, η $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x, x_i\rangle\right|^2$ συγκλίνει απόλυτα στο $\mathbb{R}$, άρα συγκλίνει και άνευ συνθήκης. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τη συνέχεια της νόρμας ισχύει :

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x, x_{\sigma(i)}\right\rangle x_{\sigma(i)}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x, x_i\rangle\right|^2 < \infty,$$

για κάθε μετάθεση σ των δεικτών. ■

Πρόταση 3.1.13. Έστω $(e_i)_{i\in I}$ μία ορθοκανονική βάση σε χώρο Hilbert H. Τότε η ακολουθία $(\varphi_i)_{i\in I}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του H αν και μόνον υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $S : H \to H$, τέτοιος ώστε $\varphi_i = S(e_i)$, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη:

Έστω $(\varphi_i)_{i\in I}$ ορθοκανονική βάση του H. Θεωρούμε τους τελεστές

$$S_1 : H \to \ell_2(\mathbb{N}) :\ S_1(x) = \left(\langle x, e_i\rangle\right)_{i\in I}$$

και

$$S_2 : H \to \ell_2(\mathbb{N}) :\ S_2(x) = \left(\langle x, \varphi_i\rangle\right)_{i\in I},$$

οι οποίοι είναι ισομετρικοί ισομορφισμοί απ' το Θεώρημα 3.1.10. . Για κάθε $x \in H$ ισχύει

$$\left\langle S_1(x), (c_i)_{i\in I}\right\rangle = \left\langle \left(\langle x, e_i\rangle\right)_{i\in I}, (c_i)_{i\in I}\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle \overline{c_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, c_i e_i\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i\right\rangle = \left\langle x, S_1^{-1}\left((c_i)_{i\in I}\right)\right\rangle$$

άρα $S_1^* = S_1^{-1}$. Ομοίως ισχύει $S_2^* = S_2^{-1}$, άρα ο $S = S_2^{-1}S_1 : H \to H$ είναι ορθομοναδιαίος κι έτσι $\varphi_i = S(e_i)$, για κάθε $i \in I$.

Αντίστροφα αν ο S είναι ορθομοναδιαίος, τότε

$$\left\langle S(e_i), S(e_j)\right\rangle = \left\langle S^*S(e_i), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle,$$

δηλαδή το σύνολο $\left(S(e_i)\right)_{i\in I}$ είναι ορθοκανονικό και επιπλέον ο S είναι επί ως ορθομοναδιαίος άρα το $\left(S(e_i)\right)_{i\in I}$ είναι και πλήρες. ■

3.2 *Ορθοκανονικές βάσεις στην Ανάλυση Fourier και στην Ανάλυση Χρόνου Συχνότητας*

Ορισμός 3.2.1. Εστω T = R/Z. Συμβολίζουμε με $L_2(\mathrm{T})$ το χώρο Hilbert όλων των Lebesgue μετρήσιμων, τετραγωνικά ολοκληρώσιμων, 1-περιοδικών συναρτήσεων, τον οποίο στο εξής ταυτίζουμε με το χώρο $L_2[0,1]$ όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει $f(0)=f(1)$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx$$

και νόρμα

$$\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \ \blacklozenge$$

Ορισμός 3.2.2. Ορίζουμε ως ***τριγωνομετρικό σύστημα*** να είναι η ακολουθία $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ όλων των μιγαδικών τριγωνομετρικών μονωνύμων της μορφής $e_k(t)=e^{2\pi ikt},\ t\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε δε ως ***τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n*** να είναι κάθε πολυώνυμο της μορφής

$$P_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx},\ c_k\in\mathbb{C}. \qquad \blacklozenge$$

Θεώρημα 3.2.3. Το τριγωνομετρικό σύστημα είναι μια ορθοκανονική βάση στον $L_2(\mathrm{T})$.

Απόδειξη:

Είναι εύκολο να δούμε ότι το τριγωνομετρικό σύστημα είναι μια ορθοκανονική ακολουθία. Πράγματι, για $m\neq n$, τότε:

$$\langle e_m,e_n\rangle = \int_0^1 e^{2\pi imt}\overline{e^{2\pi int}}dt = \int_0^1 e^{2\pi i(m-n)t}dt = \left[\frac{e^{2\pi i(m-n)t}}{2\pi i(m-n)}\right]_0^1 = \frac{e^{2\pi i(m-n)}-1}{2\pi i(m-n)} = 0,$$

ενώ $\langle e_n,e_n\rangle = \int_0^1 e^{2\pi int}\overline{e^{2\pi int}}dt = 1$. ■

Επιπλέον, από το θεώρημα Weierstrass, έχουμε ότι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνός στο χώρο C(T) των συνεχών 1-πεεριοδικών συναρτήσεων. Είναι επίσης γνωστών ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $C(\mathrm{T})$ είναι πυκνό στον $L_2(\mathrm{T})$, βλέπε **[10]** , **[16]**, **[49]** . Άρα, το τριγωνομετρικό σύστημα είναι πυκνό στον $L_2(\mathrm{T})$, άρα είναι πλήρες σύστημα στον $L_2(\mathrm{T})$ από θεώρημα 3.1.7 (α). ■

Ο μετασχηματισμός Fourier (Εισαγωγή 1.4.8.) μελετά σήματα σ’ όλο το πεδίο του χρόνου. Όμως με πιο περίπλοκα και ποιοτικά ερωτήματα που σχετίζονται με τη μελέτη υψηλών συχνοτήτων εντοπισμένων σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που μοντελοποιούν απότομες μεταβολές στο γράφημα του σήματος, ασχολείται η ανάλυση χρόνου-συχνότητας. Κατ’ αρχήν παρουσιάζουμε κάποιους τελεστές οι οποίοι παίζουν κύριο ρόλο στην Ανάλυση χρόνου-συχνότητας.

Ορισμός 3.2.4. **α)** Ο τελεστής

$$T_k : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) : (T_k f)(x) = f(x-k), \ x \in \mathbb{R},$$

καλείται ***μετάθεση (translation) της f κατά*** k .

β) Ο τελεστής

$$M_b : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) : (M_b f)(x) = e^{2\pi ibx} f(x), \ x \in \mathbb{R},$$

καλείται ***διαμόρφωση (modulation) της f κατά*** b .

γ) Ο τελεστής

$$D_2 : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) : (D_2 f)(x) = \sqrt{2} f(2x), \ x \in \mathbb{R}$$

καλείται ***διαστολή (dilation)***.

Ολοι οι ανωτέρω τελεστές είναι ορθομοναδιαίοι, άρα διατηρούν τις ορθοκανονικές βάσεις. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό αυτό για τον τελεστή μετάθεσης.

$$\langle T_k f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-k)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\overline{g(y+k)}dx = = \langle f, T_{-k} g \rangle,$$

για κάθε $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Άρα $T_{-k} = T_k^*$. Όμως, $T_{-k} T_k f = T_k T_{-k} f$, άρα $T_k^{-1} = T_{-k} = T_k^*$, συνεπώς ο T_k είναι ορθομοναδιαίος. Επιπλέον παραθέτουμε χρήσιμες σχέσεις που διέπουν αυτούς τους τελεστές:

1. $\left(T_k M_b f\right)(x) = e^{-2\pi ibx}\left(M_b T_k f\right)(x), x \in \mathbb{R}$.
2. $\left(T_k D_2 f\right)(x) = \left(D_2 T_{2k} f\right)(x), x \in \mathbb{R}$.
3. $\left(D_2 M_b f\right)(x) = \left(M_{2b} D_2 f\right)(x), \ x \in \mathbb{R}$.

Ενδεικτικά δείχνουμε τη σχέση **1**:

$$\left(T_k\left(M_b f\right)\right)(x) = \left(T_k\left(M_b f\right)\right)(x) = \left(M_b f\right)(x-k)$$

$$= e^{2\pi ib(x-k)} f(x-k) = e^{-2\pi ibk} e^{2\pi ibx} f(x-k) = e^{-2\pi ibk} \left(M_b T_k f \right)(x).$$

Παρατηρούμε ότι οι τελεστές μεταφοράς και διαμόρφωσης δεν αντιμετατίθενται γενικά μεταξύ τους αλλά μόνο στην περίπτωση όπου

$$e^{-2\pi ibk} = 1 \Leftrightarrow bk \in \mathbb{Z}.$$

Απ' τις παραπάνω σχέσεις, άμεσα προκύπτουν οι $T_k D_2^n = D_2^n T_{2^n k}$ και $D_2^n T_k = T_{2^{-n}k} D_2^n$. $D_2^n T_k = T_{2^{-n}k} D_2^n$, όπου $D^n = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{n-\phi o\rho\varepsilon\varsigma}$.

Επίσης παραθέτουμε τις αντιμεταθετικές σχέσεις που ισχύουν για αυτούς τους τελεστές με το μετασχηματισμό Fourier:

4. $FT_k = M_{-k} F$.

5. $FM_b = T_b F$.

6. $FD = D^{-1} F$.

Ενδεικτικά δείχνουμε τη σχέση **4**:

$$(FT_k f)(\xi) = (F(T_k f))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (T_k f)(x) e^{-2\pi i\xi x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-k) e^{-2\pi ix} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i\xi(y+k)} dx$$

$$= e^{-2\pi i\xi k} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i\xi y} dx = (M_{-k}(Ff))(\xi) = (M_{-k} Ff)(\xi).$$

Με χρήση αυτών των τελεστών δημιουργούμε χρήσιμα συστήματα αναπαραστάσεων. Δίνουμε ένα σχετικό παράδειγμα για να φανεί η λειτουργία τους.

Παράδειγμα : Δείξαμε προηγουμένως ότι η ακολουθία $\left\{ e^{2\pi in\bullet} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $L^2[0,1]$. Έστω η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi = \chi_{[0,1)}$:

$$\chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}.$$

Τότε το σύστημα

$$\left\{ M_n (e^{2\pi i\bullet}) T_k \chi_{[0,1)} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

αποτελεί μία ορθοκανονική βάση για τον $L^2[k,k+1]$. Παίρνοντας την ένωση αυτών των συστημάτων για κάθε k, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{(M_n e^{2\pi in\bullet})T_k(\chi_{[0,1)})\right\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$$

το οποίο αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$. Η καθετότητα είναι προφανής, διότι για $k\neq m$, οι φορείς των συναρτήσεων $e^{2\pi inx}\chi(x-k)$ και $e^{2\pi inx}\chi(x-m)$ είναι ξένοι μεταξύ τους. Επίσης κάθε σύνολο $\left\{M_n(e^{2\pi i\bullet})T_k\chi_{[0,1)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ παράγει τον $L^2[k,k+1]$, οπότε γράφοντας μία συνάρτηση του $L_2(\mathbb{R})$ ως $g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x)\chi_{[k,k+1)}(x)$ η $\left\{(M_n e^{2\pi in\bullet})T_k(\chi_{[0,1)})\right\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ παράγει το χώρο.

Μετά απ' τη μελέτη αυτού του παραδείγματος οδηγούμαστε φυσιολογικά στον ορισμό των συστημάτων Gabor.

Ορισμός 3.2.5. Μία ακολουθία

$$G(g,a,b)=\left\{e^{2\pi ibnx}g(x-ak)\right\}_{k,n\in\mathbb{Z}} ,$$

όπου $g\in L_2(\mathbb{R})$ και a,b σταθεροί θετικοί αριθμοί καλείται ***σύστημα Gabor.*** Η συνάρτηση g καλείται ***άτομο*** η ***γεννήτρια*** του συστήματος. Γενικεύοντας, ένα σύστημα Gabor είναι μία ακολουθία

$$G(g,\Lambda)=\left\{e^{2\pi ibx}g(x-a)\right\}_{(a,b)\in\Lambda} ,$$

όπου το Λ είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Όπως παρατηρήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, ένα σύστημα Gabor μπορεί να αποτελεί μία ορθοκανονική βάση για τον $L_2(\mathbb{R})$. Η επιλογή της χαρακτηριστικής συνάρτησης όμως ως γεννήτριας έχει αδυναμίες, που οφείλονται στην ασυνέχεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης, η οποία έχει αντίκτυπο στη μη καλή συμπεριφορά του μετασχηματισμού Fourier αυτής στο άπειρο. Για περισσότερες πληροφορίες όπως η συσχέτιση των συστημάτων Gabor με τη μετάδοση σήματος και ανοιχτά ζητήματα παραπέμπουμε στο **[9]**.

Σημειώνουμε εδώ ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{[-1/2,1/2]}$ ανήκει στον $L_2(\mathbb{R})$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής είναι η συνάρτηση

$$\sin c(\xi)=\hat{\chi}_{[-1/2,1/2]}(\xi)=\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi} ,$$

η οποία αν και είναι συνεχής συνάρτηση, είναι μη ολοκληρώσιμη Lebesgue στο $\mathbb{R}$, αφού:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin\pi\xi|}{\pi\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}dx=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\geq\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty|\sin x|dx=\infty .$$

Απ’ την άλλη μεριά, συχνά χρειαζόμαστε αναπαραστάσεις σημάτων σε περιορισμένη ζώνη συχνοτήτων **[12]**,**[13]**, διότι ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται ήχους ή χρώματα σε περιορισμένο φάσμα και επίσης όλες οι συσκευές έχουν δυνατότητα αναπαραγωγής ήχου ή εικόνας επίσης σε πεπερασμένο φάσμα συχνοτήτων, δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων έχει συμπαγή φορέα. Ένας τέτοιος χώρος είναι ο χώρος συναρτήσεων Paley-Wiener στο [-1/2,1/2]:

$$PW([-1/2,1/2]) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

Θεώρημα 3.2.6. Η ακολουθία $\{T_k \sin c\}_{k\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μία ορθοκανονική βάση για τον χώρο $PW([-1/2,1/2])$.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι: $T_k\left(\sin c\right)(x) = T_k\left(F\chi_{[-1/2,1/2]}\right)(x) = F\left(e^{2\pi ikx}\chi_{[-1/2,1/2]}\right)(x)$.

Η ακολουθία $\left\{e^{2\pi ikx}\chi_{[-1/2,1/2]}(x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του $L^2[-1/2,1/2]$, όπως είδαμε παραπάνω. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθομοναδιαίος (Παρατήρηση Θεωρήματος 1.4.13.) στον $L_2(\mathbf{R})$ άρα απεικονίζει ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική βάση πάνω στο $\overline{span}\{T_k \sin c\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ο οποίος ταυτίζεται με τον $PW([-1/2,1/2])$, αφού για κάθε $f \in PW([-1/2,1/2])$ έχουμε

$$\left\langle f, T_k \sin c \right\rangle = 0 \Leftrightarrow f(\xi)\chi_{[-1/2,1/2]}(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Συνεπώς η $\{T_k \sin c\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $PW([-1/2,1/2])$. ■

Ορισμός 3.2.7. Μία συνάρτηση $\psi \in L_1\left(\mathbb{R}\right) \cap L_2(\mathbb{R})$ για την οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0,$$

καλείται ***κυματίδιο (wavelet)***. ♦

Μία ποικιλία ορθοκανονικών βάσεων στον $L_2(\mathbb{R})$ μπορεί να κατασκευασθεί χρησιμοποιώντας ως γεννήτορα συνάρτηση ένα κυματίδιο μέσω της Πολυδιακριτής Ανάλυσης του $L_2(\mathbb{R})$. Αυτή είναι μια διαδικασία που διασπά το χώρο σε διαφορετικά επίπεδα ανάλυσης. Για να την ορίσουμε θα κινηθούμε αντίστροφα, δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι έχουμε αρχικά μία ορθοκανονική βάση κυματιδίων για να δούμε τις βασικές ιδέες πίσω απ΄την Πολυδιακριτή Ανάλυση. Εστω κυματίδιο ψ τέτοιο ώστε το σύνολο $\left\{D_2^n T_k \psi\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ να αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$. Για $n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε τον κλειστό υπόχωρο

$$U_n = \overline{span}\left\{D_2^n T_k \psi\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

και έστω

$$Q_n : L_2(\mathbb{R}) \to U_n$$

η ορθογώνια προβολή του $L_2(\mathbb{R})$ στον U_n. Προφανώς, κάθε συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$, εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως εξής:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f, D_2^n T_k \psi\right\rangle D_2^n T_k \psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Q_n f .$$

Ο U_n είναι ο υπόχωρος που αντιστοιχεί στο επίπεδο ανάλυσης n. Η προβολή της f επ' αυτού μας δίνει μία εικόνα της «λεπτομέρειας» στο επίπεδο ανάλυσης *n*. Αν θεωρήσουμε τον κλειστό υπόχωρο

$$V_n = \overline{span}\left\{D_2^m T_k \psi\right\}_{m<n,\, k\in\mathbb{Z}},$$

τότε η προβολή

$$P_n : L_2(\mathbb{R}) \to V_n ,$$

μας δίνει μία ανάλυση της f χωρίς τη λεπτομέρεια από το επίπεδο n και πάνω, δηλαδή

$$P_n f = \sum_{m=-\infty}^{n-1} Q_m f ,$$

ή αναδρομικά οριζόμενη

$$P_{n+1} f = P_n f + Q_n f .$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η $\left\{D_2^n T_k \psi\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε

$$\lim_n P_n f = f ,$$

συνεπώς όσο αυξάνεται το n δηλαδή η λεπτομέρεια, η ανάλυση της f πλησιάζει την πραγματική εικόνα της. Αυτή είναι η βασική ιδέα απ' την οποία ο Mallat **[21]** δημιούργησε και στην συνέχεια συνανέπτυξε με τον Meyer την Πολυδιακριτή Ανάλυση.

Ορισμός 3.2.8. (Πολυδιακριτή Ανάλυση) Μία Πολυδιακριτή Ανάλυση **(MRA)** του $L_2(\mathbb{R})$ είναι μία ακολουθία $\left\{V_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ κλειστών υποχώρων του $L_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

α) $V_n \subseteq V_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

β) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(\mathbb{R})$.

γ) $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.

δ) $V_{n+1} = D(V_n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

ε) Υπάρχει $\varphi \in V_0$, που καλείται ***κλιμακωτή*** (***ή γεννήτωρ***) συνάρτηση της πολυδιακριτής ανάλυσης, τέτοια ώστε η $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ να είναι ορθοκανονική βάση του V_0. ♦

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω, θα δείξουμε ότι μπορούμε, δοθείσης μιας γεννήτορος συνάρτησης φ μιας πολυδιακριτής Ανάλυσης όπως παραπάνω, να κατασκευάσουμε κυματίδιο ψ, έτσι ώστε το σύνολο $\{D_2^n T_k\psi\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ να αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του L_2(R).

Ξεκινώντας από κάποιον υπόχωρο V_n της πολυδιακριτής ανάλυσης, τότε θεωρώντας το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V_n στο V_{n+1}, έστω U_n, παίρνουμε

$$V_n \oplus U_n = V_{n+1},$$

άρα

$$L_2(\mathbb{R}) = V_n \oplus (U_n \oplus U_{n+1} \oplus \ldots).$$

Ομως $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$ και εφόσον $V_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} V_j$, έχουμε $\lim_{n\to-\infty} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$. Συνεπώς

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U_n,$$

δηλαδή ο $L_2(\mathbb{R})$ γράφεται ως άπειρο ευθύ άθροισμα όλων των ορθογωνίων συμπληρωμάτων των κλειστών υποχώρων V_n. Θα δούμε τώρα πώς από τη γεννήτορα συνάρτηση φ προκύπτει το κυματίδιο ψ. Πρώτα θα χρειασθούμε κάποια Λήμματα.

Λήμμα 3.2.9. Έστω $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ κλιμακωτή συνάρτηση μιας πολυδιακριτής Ανάλυσης του $L_2(\mathbb{R})$. Τότε:

α) υπάρχει 1-περιοδική συνάρτηση $m_0 \in L_2(\mathrm{T})$, τέτοια ώστε $\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ σ. π.

β) $|m_0(\xi)|^2 + \left|m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$ ξ σ.π.

Απόδειξη:

α) Εφόσον $V_0 \subset V_1$, $\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k D T_k \varphi$. Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier έχουμε

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-1/2} c_k e^{-2\pi i k(\xi/2)} \hat{\varphi}(\xi/2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k(\xi/2)} \right) \hat{\varphi}(\xi/2) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

β) Η υπόθεση ότι το σύνολο $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του V_0 είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}(\xi+k)\right|^2 = 1 \text{ σ.π. βλέπε } \mathbf{[36]}\,.$$

Χωρίζουμε το παραπάνω άθροισμα σε άθροισμα αρτίων και περιττών και χρησιμοποιούμε την 1-περιοδικότητα της m_0:

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}(\xi+k)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi+2k}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k}{2}\right)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi+2k+1}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k+1}{2}\right)\right|^2$$

$$= \left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\right)\right|^2 + \left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2 = \left|m_0(\xi)\right|^2 + \left|m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\right|^2.$$

■

Λήμμα 3.2.10. Έστω $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$ και U_0 το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V_0 στον V_1. Για $f \in U_0$, έχουμε:

α) Υπάρχει 1-περιοδική συνάρτηση $m_f \in L_2(\mathrm{T})$: $\hat{f}(\xi) = m_f(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)$ και αντιστρόφως.

β) Ισχύει $m_f(\xi)\overline{m_0(\xi)} + m_f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\overline{m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)} = 0$, ξ σ.π.

γ) Υπάρχει συνάρτηση $\lambda \in L_2(\mathrm{T})$ με $\lambda(\xi) + \lambda\left(\xi+\frac{1}{2}\right) = 0$, έτσι ώστε

$m_f(\xi) = \lambda(\xi)\overline{m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}$, ξ σ.π. στο [0,1].

δ) Ισχύει $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi i\xi}\cdot v(\xi)\cdot \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$, όπου $v(\xi) = e^{\pi i\xi}\lambda(\xi/2)$.

ε) $\int_0^1 |v(\xi)|^2\, d\xi = 2\int_0^{1/2} |\lambda(\xi)|^2\, d\xi = 2\int_0^1 |m_f(\xi)|^2\, d\xi$.

Απόδειξη:

α) Εφόσον $U_0 \subset V_1$, έχουμε $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_k (D_2 T_n \varphi)$, οπότε παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier και εργαζόμενοι όπως στο Λήμμα 2.2.9 α) παίρνουμε:

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_k e^{-2\pi i n(\xi/2)} \right) \hat{\varphi}(\xi/2) = m_f\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Αντιστρόφως, γράφοντας την m_f σε σειρά Fourier παίρνουμε το ζητούμενο.

β) Εφόσον $U_0 \perp V_0$ τότε $f \perp V_0$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$f \perp T_k\varphi \Leftrightarrow \langle f, T_k\varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i k\xi} \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = 0 .$$

Όμως χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης 1.1.13. ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i k\xi} \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i k\xi} \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = \int_0^1 e^{2\pi i k\xi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+n) \overline{\hat{\varphi}(\xi+n)} d\xi .$$

Από λήμμα μοναδικότητας σειρών Fourier παίρνουμε

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+n) \overline{\hat{\varphi}(\xi+n)} = 0, \text{ ξ σ.π.}$$

Αντικαθιστώντας τη $\hat{\varphi}$ από το Λήμμα 3.2.9 α) και την $\hat{f}$ από το α), προκύπτει:

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+n) \overline{\hat{\varphi}(\xi+n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\xi+n}{2}\right) \cdot \overline{m_0\left(\frac{\xi+n}{2}\right)} \cdot \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi+n}{2}\right) \right|^2, \text{ ξ σ.π.}$$

Χωρίζοντας όπως πριν σε αθροίσματα άρτιων και περιττών όρων και εργαζόμενοι όπως στο Λήμμα 3.2.9 β) παίρνουμε:

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\xi+n}{2}\right) \cdot \overline{m_0\left(\frac{\xi+n}{2}\right)} \cdot \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi+n}{2}\right) \right|^2 = m_f\left(\frac{\xi}{2}\right) \cdot \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} + m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \cdot \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}.$$

γ) Εφόσον $\left|m_0(\xi)\right|^2 + \left|m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$, τα $m_0(\xi)$ και $m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$ δε μηδενίζονται ποτέ ταυτόχρονα. Έστω λοιπόν

$$\begin{cases} \lambda(\xi) = -\dfrac{m_f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)}{\overline{m_0(\xi)}}, & \alpha\nu \ m_0(\xi) \neq 0 \\ \lambda\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{m_f(\xi)}{\overline{m_0\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)}}, & \alpha\nu \ m_0\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right) \neq 0 \end{cases}.$$

Τότε από β), έχουμε $\lambda(\xi)+\lambda\left(\xi+\frac{1}{2}\right)=0$

Τότε $m_f(\xi)=\lambda(\xi)\overline{m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}$.

δ) Εφόσον

$$\lambda(\xi)+\lambda\left(\xi+\frac{1}{2}\right)=0, \ \xi \ \sigma.\pi.$$

Μπορούμε να γράψουμε $v(\xi)=e^{\pi i\xi}\lambda(\xi/2)$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η v είναι μία 1/2-περιοδική συνάρτηση και από το α) παίρνουμε

$$\hat{f}(\xi)=m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)=\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)=e^{-\pi i\xi}v(\xi)\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

ε) Προκύπτει με συνήθη ολοκλήρωση, λαμβάνοντας υπόψη τα γ), δ) και το α) του Λήμματος 3.2.10. ∎

Πρόταση 3.2.11. Εστω $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μια πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$ και U_0 το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V_0 στον V_1. Αν $\psi\in U_0$, τέτοια ώστε

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{-\pi i\xi}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

τότε το σύνολο $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του U_0.

Απόδειξη:

Κατ' αρχήν δείχνουμε ότι $\psi\perp V_0$. Αρκεί να μελετήσουμε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\langle\varphi,T_m\psi\rangle=\langle\hat{\varphi},M_{-m}\hat{\psi}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\xi)e^{\pi i\xi}e^{2\pi im\xi}\cdot m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\cdot\overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)}d\xi$$

$$\overset{2t=\xi}{=} 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2m+1)2\pi i t} \cdot m_0(t) m_0\left(t+\frac{1}{2}\right) \cdot \left|\hat{\varphi}(t)\right|^2 dt$$

$$= 2\int_0^1 e^{(2m+1)2\pi i \xi} m_0(\xi) m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}(\xi+n)\right|^2 d\xi =$$

$$= 2\int_0^1 e^{(2m+1)2\pi i \xi} m_0(\xi) m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right) d\xi = 0 \text{ ,διότι:}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{(2m+1)2\pi i \xi} m_0(\xi) m_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right) d\xi \overset{\xi=\tau+\frac{1}{2}}{=} -\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{I} = 0 .$$

Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του U_0, πρέπει και αρκεί $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\psi}(\xi+n)\right|^2 = 1$ σ.π. Σπάζοντας το άθροισμα σε άθροισμα περιττών και άρτιων όρων, έχουμε:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\psi}(\xi+n)\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}+n\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+n\right)\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|m_0\left(\frac{\xi}{2}+n+1\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+n\right)\right|^2$$

$$= \left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+n\right)\right|^2 + \left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+n\right)\right|^2 = 1 .$$

Τέλος , από το δ) του Λήμματος 3.2.10, προκύπτει ότι

$$\hat{f}(\xi) = v(\xi)\hat{\psi}(\xi)$$

όπου v μια ½-περιοδική συνάρτηση. Συνεπώς το σύνολο $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ παράγει τον U_0, άρα είναι μια ορθοκανονική βάση του U_0. ■

Θεώρημα 3.2.12. Έστω μία πολυδιακριτή ανάλυση (V_j) η οποία παράγεται από μία κλιμακωτή συνάρτηση φ. Αν ψ κυματίδιο όπως στην πρόταση 3.2.11, τότε το σύνολο $\{D_2^n T_k \psi\}_{n,k}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη:

Από τα παραπάνω, το σύνολο $\{T_k\psi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του V_1. Επιπλέον, εφόσον ο τελεστής D_2 είναι ορθομοναδιαίος, ισχύει:

$$V_1 = V_0 \oplus U_0 \Leftrightarrow D_2^{n-1} V_1 = D_2^{n-1}(V_0 \oplus U_0) = D_2^{n-1} V_0 \oplus D_2^{n-1} U_0 \Leftrightarrow V_n = V_{n-1} \oplus D_2^{n-1} U_0,$$

όπου $D_2^{n-1}U_0 = U_{n-1}$. Δηλαδή $U_n = D_2^{n-1}\left(U_0\right)$, οπότε και το σύνολο $\left\{D_2^n T_k \psi\right\}_k$ είναι μία ορθοκανονική βάση του U_n. Εφόσον $L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U_n$, τότε το σύνολο $\left\{D_2^n T_k \psi\right\}_{n,k}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$. ■

Παράδειγμα : Το σύστημα Haar είναι μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$ που παράγεται από μια πολυδιακριτή ανάλυση (V_j) του $L_2(\mathbf{R})$, όπου ο «κεντρικός χώρος» V_0 παράγεται από τις μεταθέσεις της γεννήτορος συνάρτησης $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}$, δηλαδή

$$V_0 = \overline{span}\left\{T_k \chi_{[0,1)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \chi_{[k,k+1)} : (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\right\}.$$

- Οι χώροι V_n, $n \in \mathbb{Z}$ ως διαστολές του V_0, αποτελούνται απ' τις σταθερές συναρτήσεις στα διαστήματα $I_{n,k} = \left[k/2^n, (k+1)/2^n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. (*Έτσι πληρείται το δ της MRA δηλαδή* $V_n = D_2^n\left(V_0\right)$).

- Οι προβολές $P_n f$ είναι οι βέλτιστες προσεγγίσεις της f από κλιμακωτές συναρτήσεις στα δυαδικά διαστήματα $I_{n,k}$.

- Έστω $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ μη μηδενική. Τότε είναι μη μηδενική σε κάποιο διάστημα $I_{n,k}$ άρα και σε κάθε διάστημα $I_{n,k}$ με $n \in \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $[0, 2^n)$ και $[-2^n, 0)$ για $n \to \infty$. Αφού όμως $f \in L_2(\mathbb{R})$, αναγκαστικά πρέπει η σταθερά να είναι μηδέν, άτοπο.

- Τέλος, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$P_n f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k,n} \chi_{\left[k/2^n, (k+1)/2^n\right)},$$

όπου

$$c_{k,n} = 2^n \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f(x)dx$$

δηλαδή η μέση τιμή της f στο $I_{n,k}$. Εφόσον $f \in L_2(\mathbb{R})$, τότε $\lim_n \left\| f - P_n f \right\|_2 = 0$ και ισχύει $P_n : L_2(\mathbb{R}) \to V_n$, άρα κάθε συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ ανήκει στη $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$ συνεπώς ισχύει $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(\mathbb{R})$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο της πρότασης 3.2.11, παίρνουμε

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \cdot \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{c}_{1-k} e^{-\pi i k \xi} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

άρα με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier προκύπτει:

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{c}_{1-k} e^{-\pi i k \xi} D T_k \varphi = \psi(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x) \in V_1$$

$$= \begin{cases} 1, \ 0 \le x < 1/2 \\ -1, \ 1/2 \le x \le 1 \ . \\ 0, \ x < 0 \ ή \ x > 1 \end{cases}$$

Έστω ορθοκανονική βάση κυματιδίων $\{\psi_{n,k}\}_{n,,k\in\mathbb{Z}}$ του $L_2(\mathbb{R})$ με γεννήτορα συνάρτηση φ όπως παραπάνω. Τότε, κάθε $f \in L_2(\mathbb{R})$ γράφεται και ως

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, T_k \varphi \rangle T_k \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{n,k} \rangle \psi_{n,k} \ .$$

Αν επιπλέον η f έχει συμπαγή φορέα, τότε το σύνολο των συντελεστών $\{\langle f, T_k\varphi \rangle\}$ είναι πεπερασμένο οπότε αυτός ο όγκος πληροφορίας είναι διαχειρίσιμος, εν αντιθέσει με τους συντελεστές $\{\langle f, \psi_{n,k} \rangle\}$ οι οποίοι μπορούν να είναι άπειροι το πλήθος. Ως εκ τούτου, σε πρακτικές εφαρμογές πρέπει να κρατήσουμε ένα πεπερασμένο μόνο πλήθος απ΄αυτούς. Εδώ εισέρχεται στη μελέτη μας η έννοια της ροπής.

Ορισμός 3.2.13. Έστω ψ ένα κυματίδιο, τότε ως ***ροπή (moment)*** του ψ τάξης *j* ορίζουμε τον αριθμό

$$M_j(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j \psi(x) dx, \ j \in \mathbb{N},$$

Υπό την προϋπόθεση ότι αυτός ο αριθμός έχει νόημα. Αν ισχύει $M_j(\psi) = 0$, για $j = 0,1,...,m$, τότε λέμε ότι το ψ έχει ***μηδενικές ροπές (ροπές μηδενισμού) τάξης m (vanishing moments)***.

Όσο μεγαλύτερου βαθμού είναι οι μηδενικές ροπές του κυματιδίου τότε, τόσο λιγότερους συντελεστές χρειαζόμαστε για να πετύχουμε μια καλή προσέγγιση της f **[21]** . Είναι λοιπόν επιθυμητό, μία ορθοκανονική βάση κυματιδίων να έχει μηδενικές ροπές κατά το δυνατόν μεγάλης τάξης. Επιπλέον επιθυμούμε τα στοιχεία της βάσης αυτής να έχουν συμπαγή φορέα στο χρόνο ή τουλάχιστον εκθετική μείωση και να είναι λείες συναρτήσεις. Η παρουσία συμμετρίας είτε αντισυμμετρίας είναι επίσης ζητούμενο σε εφαρμογές αναγνώρισης. Το ερώτημα είναι κατά πόσον υπάρχουν τέτοιες ορθοκανονικές βάσεις.

Θεώρημα 3.2.14. Έστω $\left\{\psi_{n,k} = D_2^n T_k \psi\right\}_{n,k}$ μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{R})$ **[21]**, όπου $\psi \in C^m(\mathbb{R})$ έχουν φραγμένες παραγώγους $\psi^{(\ell)}$ για $\ell \le m$ και

$$\left|\psi(t)\right| \le \frac{C}{\left(1+|t|\right)^{m+1+\varepsilon}}, \text{ για } t \in \mathbb{R},\ 0 \le \varepsilon < 1.$$

Τότε η ψ έχει μηδενικές ροπές τάξης *m*, δηλαδή $M_\ell(\psi) = 0$, για $\ell = 0,1,...,m$.

Αν υπήρχε κυματίδιο $\psi \in C^\infty$ με φραγμένες παραγώγους και εκθετική φθίση στο άπειρο, η οποία ορίζει ορθοκανονικό σύστημα $\psi_{n,k}$ όπως παραπάνω, τότε αυτή υποχρεωτικά είναι η μηδενική συνάρτηση, βλέπε **[21]** . ♦

Εάν πάλι απαιτήσουμε οι συναρτήσεις φ,ψ μέσω των οποίων χτίσαμε την Πολυδιακριτή Ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$ να είναι πραγματικές με συμπαγή φορέα κι επιπλέον η ψ να έχει άξονα συμμετρίας ή αντισυμμετρίας ,τότε παρακάτω, στο θεώρημα 3.2.16, δείχνουμε ότι η μοναδική συνάρτηση η οποία το επιτυγχάνει αυτό είναι η συνάρτηση Haar που παρουσιάστηκε προηγουμένως. Πάραυτα όμως η συνάρτηση του Haar έχει ροπή μηδενισμού μόνο τάξης 0.

Λήμμα 3.2.15. Έστω φ είναι κλιμακωτή συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια πολυδιακριτή ανάλυση με $\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(2x-k)$ να είναι η αναπαράσταση της φ στον V_1 . Τότε

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \overline{c}_{j-2k} = \delta_{k,0},\ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη:

$$\delta_{k,0} = \langle T_k\varphi,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k)\overline{\varphi(x)}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{c}_i\overline{\varphi(2x-i)}\right)c_j\varphi(2x-2k-j)\right)dx$$

$$\overset{\ell=2k+j}{=} 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\overline{c}_i\overline{\varphi(2x-i)}\right)c_{\ell-2k}\varphi(2x-\ell)\right)dx$$

$$= 2\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_{\ell-2k}\overline{c}_i \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2x-\ell)\overline{\varphi(2x-i)}dx = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_{\ell-2k}\overline{c}_i\delta_{\ell,i} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{\ell-2k}\overline{c}_\ell.$$ ■

Θεώρημα 3.2.16. Έστω ότι οι φ,ψ είναι η κλιμακωτή συνάρτηση και το κυματίδιο που αντιστοιχούν σε μια πολυδιακριτή ανάλυση του $L_2(\mathbb{R})$, οι οποίες είναι πραγματικές συναρτήσεις κι έχουν συμπαγή φορέα στο χρόνο. Αν η ψ έχει επιπλέον, είτε άξονα συμμετρίας, είτε άξονα αντισυμμετρίας, τότε η ψ δε μπορεί να είναι άλλη από τη συνάρτηση Haar.

Απόδειξη:

Εφόσον η φ έχει συμπαγή φορέα στο χρόνο, μπορούμε με κατάλληλη μετατόπιση να θεωρήσουμε ότι

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\varphi(2x-n)dx = 0, \text{ για } n<0, \text{ με } c_0 \neq 0.$$

Αφού η φ είναι πραγματική , το ίδιο θα συμβαίνει και με τα c_n. Έστω N ο μεγαλύτερος δείκτης ώστε c_n δε μηδενίζεται, δηλαδή $c_N \neq 0$ και $c_n = 0$, για $n > N$. Τότε ο N είναι περιττός, αφού αν ο N ήταν άρτιος , δηλαδή $N = 2n_0$, μαζί με τη σχέση $\sum_n c_n c_{n+2\ell} = \delta_{\ell,0}$, από το Λήμμα 3.2.15, οδηγεί σε άτοπο για $\ell = n_0$. Εφόσον $c_n = 0$ για $n<0$ και $n>N$, τότε, ο φορέας της φ είναι ο $[0,N]$, **[21]** . Εφόσον $\psi = \sum_k (-1)^k c_{1-k}\varphi_{1,k}$, ο φορέας της ψ είναι ο $[-n_0, n_0+1]$, όπου $n_0 = \frac{N-1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας συμμετρίας της ψ είναι ο $x = \frac{1}{2}$, απ' το οποίο και προκύπτει ότι $\psi(1-x) = \psi(x)$ είτε $\psi(1-x) = -\psi(x)$. Όμως τότε

$$\psi_{n,k}(-x) = \pm 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n x + k + 1) = \pm \psi_{n,-(k+1)}(x)$$

το οποίο σημαίνει ότι οι U_n χώροι παραμένουν αναλλοίωτοι απ' τη δράση της $f(x) = -x$. Εφόσον $V_n = \overline{\bigoplus_{j<n} U_j}$, τότε και οι V_n είναι αναλλοίωτοι ομοίως. Ορίζουμε τη $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(N-x)$ όπου η $T_n\tilde{\varphi}(x)$ ορίζει μία ορθοκανονική βάση του V_0, με $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(x)dx = 1$ και μάλιστα οι φορείς των φ και $\tilde{\varphi}$ ταυτίζονται. Τότε $\tilde{\varphi} = \varphi$, δηλαδή $\varphi(N-x) = \varphi(x)$. Συνεπώς

$$c_n = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\varphi(2x-n)dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(N-x)\varphi(N-2x+n)dx$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\varphi(2y-N+n)dy = c_{N-n}$$

Από το Λήμμα 3.2.15 όμως ισχύει

$$\delta_{\ell,0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n c_{n+2\ell} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m c_{2m+2\ell} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{2m+1}c_{2m+2\ell+1}$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m c_{2m+2\ell} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{2n_0-2m} c_{2n_0-2m-2\ell} = 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{2m} c_{2m+2\ell} \,.$$

Εφόσον όμως η $\gamma(\lambda)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{2m}c_{2m-2\ell}$ περιλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος όρων και $\left|\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}}\gamma(\lambda)e^{2\pi i\lambda x}\right|=1$, αναγκαστικά $c_{2m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m,m_0}\alpha$ για κάποιο $m_0\in\mathbb{Z}$, $|\alpha|=2^{-\frac{1}{2}}$. Εφόσον $c_0\neq 0$, τότε $c_{2m}=\delta_{m,0}\cdot\alpha$ και $c_N=c_0=\alpha$ ή $c_{2m+1}=\delta_{m,m_0}\cdot\alpha$. Η τιμή $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ προκύπτει άμεσα απ' την ισχύ της σχέσης $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n=\sqrt{2}$ **, (βλέπε [26] Κεφάλαιο 5)** . Συνεπώς έχουμε

$$c_{2m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m,0}\,,\ c_{2m+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m,m_0}$$

ή

$$m_0(\xi)=\frac{1}{2}(1+e^{-iN\xi})\,.$$

Ακολούθως ισχύει $\hat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-iN\xi}}{iN\xi}$ ή $\varphi(x)=\frac{1}{N}$, για $0\le x\le N$ και $\varphi(x)=0$, αλλού. Αν $N=1$ τότε προκύπτει η βάση Haar , ενώ αν $N>1$, χάνεται η ορθοκανονικότητα της ακολουθίας των ακεραίων μεταθέσεων της κλιμακωτής συνάρτησης φ. ■

3.3 Επιστρώσεις χώρου και ορθοκανονικές βάσεις τύπου Fourier

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι οι χώροι $L_2[0,1]$, $L_2(\mathbb{R})$ δέχονται ορθοκανονικές βάσεις. Αν $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ θετικού μέτρου $m(\Omega)$, $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ ένα διακριτό σύνολο και $L_2(\Omega)$ χώρος Hilbert με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και νόρμα, θα ήταν χρήσιμο να γνωρίζουμε εάν (ή πότε), η ακολουθία

$$\mathrm{E}_\Lambda=\left\{\frac{e^{2\pi i\langle\lambda,x\rangle}}{\sqrt{m(\Omega)}}\right\}_{\lambda\in\Lambda},\ x\in\Omega\,,$$

τα στοιχεία της οποίας θα συμβολίζουμε στο εξής με $e_\lambda(x)$, αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $L_2(\Omega)$. Γενικότερα το ερώτημα είναι: ο $L_2(\Omega)$ έχει πάντοτε ορθοκανονική βάση της παραπάνω μορφής;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι αρνητική. Δηλαδή υπάρχουν χώροι όπου δεν έχουμε ορθοκανονική βάση τέτοιου τύπου. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα (Fuglede 1974): Εστω Ω ο μοναδιαίος δίσκος στον $\mathbb{R}^2$. Θα δείξουμε ότι ένα ορθοκανονικό σύνολο $\mathrm{E}_\Lambda = \left\{ \dfrac{e^{2\pi i\langle \lambda, x\rangle}}{\sqrt{m(\Omega)}} \right\}_{\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{R}^2}$, $x\in\Omega$ δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από 3 στοιχεία, άρα δε μπορεί να αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L_2(\Omega)$. Εστω δύο διαφορετικά σημεία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, με $\|\lambda - \mu\|_2 = \rho$. Τότε

$$\left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle = \iint_\Omega e_\lambda \overline{e}_\mu dxdy .$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint_\Omega e_\lambda \overline{e}_\mu dxdy = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i(\lambda_1 r\cos\theta+\lambda_2 r\sin\theta)}\cdot e^{-2\pi i(\mu_1 r\cos\theta+\mu_2 r\sin\theta)} r d\theta dr$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[2\pi(\lambda_1-\mu_1)r\cos\theta+2\pi(\lambda_2-\mu_2)r\sin\theta]} d\theta dr .$$

Παίρνοντας $(\lambda_2-\mu_2)+i(\lambda_1-\mu_1) = \rho e^{i\varphi}$, το παραπάνω εσωτερικό ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[2\pi(\lambda_1-\mu_1)r\cos\theta+2\pi(\mu_1-\mu_2)r\sin\theta]} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\pi r\rho\sin(\theta+\varphi)} d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\pi r\rho\sin\theta} d\theta = 2J_0(2\pi\rho r),$$

όπου J_0 η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης **[71]** . Άρα:

$$\left\langle e_\lambda, e_\mu \right\rangle = 2\int_0^1 rJ_0(2\pi\rho r)dr = \frac{1}{\pi\rho} J_1(2\pi\rho).$$

Συνεπώς για να είναι κάθετα τα e_λ, e_μ, πρέπει το $2\pi\rho$ να είναι ρίζα της J_1. Αν πάρουμε τρία σημεία στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου με μήκος κάθε πλευράς *ρ* τέτοιο ώστε το *2πρ* να είναι μία ρίζα της J_1, τότε παίρνουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο τριών στοιχείων. Όμως αν πάρουμε 4 και περισσότερα μη συνευθειακά στοιχεία, αυτά δε μπορούν να έχουν την ίδια απόσταση ανά δύο μεταξύ τους. Θα πρέπει όμως οι μεταξύ τους αποστάσεις να είναι όλες ρίζες της J_1 και τα σημεία να σχηματίζουν τετράπλευρο. Θεωρώντας τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των ριζών της J_1, τα οποία έχουν τη μορφή $j_{1,n} = \pi\left(n+\frac{1}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$, προκύπτει ότι δε μπορεί να πληρούνται αυτές οι συνθήκες **[74]** , άρα δε μπορούμε να ορίσουμε τέτοια ορθοκανονική βάση στον $L_2(\Omega)$.

Ορισμός 3.3.1. Λέμε ότι το ζεύγος (Ω,Λ) είναι ***φασματικό ζεύγος (spectral pair)***, αν το σύνολο $\mathrm{E}_\Lambda = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση για τον $L_2(\Omega)$, ενώ αντίστοιχα το Ω καλείται ***φασματικό σύνολο (spectrum set)*** αν υπάρχει διακριτό σύνολο $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$, τέτοιο ώστε το (Ω,Λ) να είναι φασματικό ζεύγος. Το σύνολο Λ θα καλείται ***φάσμα (spectrum)*** του Ω .

Το τριγωνομετρικό σύστημα $\{e^{2\pi i\lambda\bullet}\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ το οποίο αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$, σχετίζεται με το διάστημα Ω = [0,1]], με όλες οι ακέραιες μεταθέσεις του οποίου να καλύπτουν το $\mathbb{R}$, αφού

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k,k+1]=\mathbb{R} \text{ και } m([k,k+1]\bigcap[n,n+1])=0 \text{, για } k\neq n .$$

Ορισμός 3.3.2. Έστω ένα συμπαγές σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το Ω ***επιστρώνει (tiles)*** το χώρο $\mathbb{R}^d$, αν υπάρχει ένα διακριτό σύνολο $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$, τέτοιο ώστε οι μεταθέσεις του Ω κατά $\lambda\in\Lambda$ να καλύπτουν το χώρο, δηλαδή

$$\Omega+\Lambda=\{\Omega+\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\mathbb{R}^d ,$$

εκτός ενδεχομένως από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου και επιπλέον $m(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(\Omega+\lambda))=0$, δηλαδή οι αλληλεπικαλύψεις να είναι μηδενικού μηδενικού μέτρου. Καλούμε το ζεύγος (Ω,Λ) ***επίστρωση (tilling pair)*** του χώρου, ενώ καλούμε το Ω ***πλακίδιο (tile)***.

Έτσι, αν θεωρήσουμε ως $\Omega=[0,1]^d$, το μοναδιαίο κύβο στον $\mathbb{R}^d$ και το $\Lambda=\mathbb{Z}^d$, τότε το ζεύγος (Ω,Λ) αποτελεί επίστρωση του $\mathbb{R}^d$. Δεν είναι όμως πάντα εφικτό όλα τα σύνολα Ω να επιτύχουν επίστρωση του χώρου. Για παράδειγμα, οι Μ. Κολουντζάκης και Μ. Παπαδημητράκης απέδειξαν στην εργασία **[47]** ότι για να επιτύχει επίστρωση χώρου ένα κυρτό σύνολο $D\subseteq\mathbb{R}^d$ πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς ένα σημείο του $x_0\in D$ (δηλαδή αν $y\in D\Rightarrow 2x_0-y\in D$).

Ορισμός 3.3.3. Ένα σύνολο της μορφής $\Lambda=A\cdot\mathbb{Z}^d$, όπου ο A είναι ένας αντιστρέψιμος $d\times d$ πίνακας καλείται ***πλέγμα (lattice).*** ♦

Ορισμός 3.3.4. Το ***δϋικό(dual)*** Λ^* ενός πλέγματος Λ είναι το σύνολο

$$\Lambda^*=\{y\in span\{\Lambda\}:\ \langle x,y\rangle\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\Lambda\}. \quad ♦$$

Για περισσότερα επί των παραπάνω, παραπέμπουμε στο **[8]** . Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα : Έστω διάστημα $\Omega=[\alpha,\beta]$. Τότε το σύνολο

$$\Lambda=\frac{1}{\beta-\alpha}\mathbb{Z}=\left\{\frac{k}{\beta-\alpha},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

είναι πλέγμα ενώ το δϋικό του πλέγμα είναι το σύνολο

$$\Lambda^*=(\beta-\alpha)\mathbb{Z}=\left\{(\beta-\alpha)k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Το σύνολο

$$\left\{\frac{e^{\frac{2\pi ik\bullet x}{\beta-\alpha}}}{\sqrt{m([\alpha,\beta])}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}=\left\{\frac{e^{\frac{2\pi ik\bullet x}{\beta-\alpha}}}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του $L_2[\alpha,\beta]$, το οποίο προκύπτει από το γεγονός ότι ο τελεστής

$$S:L_2[\alpha,\beta]\to L_2\left[0,1\right]:\ S(f)=\frac{f\left(a+(b-a)\bullet x\right)}{\sqrt{\beta-\alpha}}$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός, μαζί με το γεγονός ότι το σύνολο $\left\{e^{2\pi ik\bullet}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$. Παρατηρούμε εδώ ότι το ζεύγος (Ω,Λ^*) αποτελεί μία επίστρωση του χώρου $\mathbb{R}$. Ο Bent Fuglede απέδειξε στην εργασία **[29]** το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.5. *Αν Λ είναι πλέγμα και το ζεύγος (Ω,Λ^*) αποτελεί μία επίστρωση του χώρου $\mathbb{R}^d$, τότε το (Ω,Λ) είναι ένα φασματικό ζεύγος και αντιστρόφως.* ♦

Αυτό το θεώρημα οδήγησε το Fuglede να διατυπώσει την εξής εικασία:

Εικασία (*Fuglede's conjecture*) : *Έστω σύνολο θετικού μέτρου $\Omega\subset\mathbb{R}^d$. Τότε, ο χώρος Hilbert $L_2(\Omega)$ δέχεται ορθοκανονική βάση E_Λ όπως παραπάνω, αν και μόνο αν το Ω επιστρώνει το χώρο.*

Η εικασία δεν έχει ακόμα απαντηθεί στο σύνολό της. Παραθέτουμε παρακάτω περιπτώσεις όπου έχει αποδειχθεί πως η εικασία είναι αληθής και κάποιες άλλες όπου η εικασία είναι μη αληθής.

1. Αν το Λ είναι πλέγμα, η εικασία ισχύει όπως προαναφέραμε**.**

2. Αν το Ω είναι ένωση δύο διαστημάτων, η εικασία ισχύει, **[50]** .

3. Αν το Ω είναι κυρτό επίπεδο χωρίο, τότε η εικασία ισχύει, **[40]** . Οι Lev και Matolci απέδειξαν την ισχύ της για κυρτά χωρία σε όλες τις διαστάσεις, **[51]** .

4. Η εικασία δεν ισχύει σε χώρους $\mathbb{R}^d$ με $d \geq 5$, όπως έδειξε ο Tao, **[70]** . Οι Matolci, Mora, Farkas και Κολουντζάκης έδειξαν ότι η εικασία δεν ισχύει ούτε για $d = 3, 4$, **[26]** , **[45]** , **[46]**, **[55]** .

5. Η εικασία ισχύει σε χώρους $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, όπου $\mathbb{Z}_p$ μία κυκλική ομάδα τάξης p, **[41]** .

6. Η εικασία ισχύει για κυρτά πολύτοπα στον $\mathbb{R}^3$, **[34]** .

Τελειώνοντας, παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα που χρησιμοποίησε ο Tao στο **[70]** ώστε να δείξει ότι δεν έχει καθολική ισχύ η εικασία του Fuglede.

Παράδειγμα (Tao 2006) Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{Z}_2^{12}$, δηλαδή το χώρο που αποτελείται από διανύσματα 12 θέσεων με στοιχεία 0 ή 1 σε κάθε θέση, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και νόρμα. Εστω το σύνολο

$$\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_{12}\}, \text{ με } e_n = \left(\delta_{n,j}\right)_{j=1}^{12},$$

δηλαδή η συνήθης βάση του $\mathbb{Z}_2^{12}$. Το Ω έχει 12 στοιχεία, ενώ ο χώρος $\mathbb{Z}_2^{12}$ έχει 2^{12} στοιχεία. Αφού το 12 δε διαιρεί το 2^{12}, το Ω δε μπορεί να επιστρώσει το $\mathbb{Z}_2^{12}$. Θα δείξουμε όμως ότι το Ω ορίζει βάση εκθετικών στο χώρο $\ell_2(\Omega)$. Ως πίνακα Hadamard εννοούμε κάθε ορθογώνιο πίνακα με στοιχεία 1 ή -1. Εστω ένας τέτοιος 12x12 πίνακας:

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο

$$\Lambda = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{12}\} \subset \mathbb{Z}_2^{12},$$

βάσει του νόμου ότι το διάνυσμα $\left(e^{2\pi i\langle e_j,\xi_k\rangle/2}\right)_{j=1}^{12}$ ταυτίζεται με την *k*-γραμμή του H . Ετσι,

$$\xi_1 = (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\,,\ \xi_2 = (0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,1,0) \text{ κλπ.}$$

Δηλαδή, τα στοιχεία ξ_j προκύπτουν αντικαθιστώντας το 1 με το 0 και το -1 με το 1 στον παραπάνω πίνακα Hadamard. Τότε όμως το σύνολο $\left\{\frac{e^{2\pi i(x\cdot\xi_1)/2}}{\sqrt{12}}\right\}_{j=1}^{12}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\ell_2(\Omega)$, διότι

$$f(e_\mu) = \sum_{n=1}^{12} a_n \frac{e^{2\pi i\langle e_\mu,\xi_n\rangle/2}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\sum_{n=1}^{12}\left(H_{m,n}a_n\right),$$

άρα $f(e_\mu) = 0 \iff a_\mu = 0 \ \forall\mu$. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΒΑΣΕΙΣ RIESZ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια της βάσης Riesz σε χώρους Hilbert H, δηλαδή μιας βάσης (Schauder) του H που είναι ισοδύναμη με μία ορθοκανονική βάση του H. Αρχικά δίνουμε τον ορισμό των ακολουθιών Bessel και των τελεστών ανάλυσης, σύνθεσης, πλαισίου και Gram, η βασική χρήση των οποίων στη μελέτη μας αφορά τόσο στην εύρεση ικανών συνθηκών ώστε μια ακολουθία στοιχείων του H να αποτελεί βάση Riesz του H, όσο και στην ανακατασκευή στοιχείων του H μέσω Riesz αναπαραστάσεων και αντιστρόφως. Αποδεικνύουμε ότι οι βάσεις Riesz προκύπτουν από ακολουθίες Bessel, είναι βάσεις άνευ συνθήκης και μάλιστα η δυϊκή μίας βάσης Riesz είναι κι αυτή με τη σειρά της βάση Riesz. Τα προαναφερθέντα μαζί με τη μοναδικότητα της αναπαράστασης αποτελούν βασικά πλεονεκτήματα των βάσεων Riesz. Ακολούθως παρουσιάζουμε ικανές συνθήκες ώστε ένα σύστημα Gabor να αποτελεί βάση Riesz στον $L_2(\mathbf{R})$. Στην προσπάθειά μας αυτή κομβικό ρόλο έχει ο μετασχηματισμός Zak, ο οποίος μετασχηματίζει μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ σε μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών (χρόνου και συχνότητας) στο $Q=[0,1]\times[0,1]$. Αποδεικνύουμε ότι σε βάσεις Riesz τύπου Gabor ισχύει το Θεώρημα Balian-Low, αντίστοιχο της Αρχής Αβεβαιότητας στην Κβαντομηχανική, βάσει του οποίου δεν υπάρχει γεννήτωρ συνάρτηση η οποία να παράγει μία Gabor Riesz βάση και να φθίνει «γρήγορα» στο άπειρο ταυτόχρονα στο χρόνο και στις συχνότητες. Αυτό δείχνει ότι και οι βάσεις Riesz, , έχουν περιορισμούς στη χρήση .Οι βασικές πηγές του Κεφαλαίου υπήρξαν οι **[20]** , **[22]**, **[33]** **[41]** , **[42]** , **[45]** , **[70]**.

4.1. Ακολουθίες Riesz σε χώρους Hilbert.

Ορισμός 4.1.1. Μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert καλείται ***ακολουθία Bessel*** αν για κάθε $x\in H$, ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2<\infty$. ♦

Ορισμός 4.1.2. Έστω μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H . Θεωρούμε το χώρο

$$Y=\left\{(c_i)_{i\in\mathbb{N}}:\sum_{i=1}^{\infty}c_ix_i \ \textit{συγκλίνει στον } H\right\}.$$ ♦

Ο τελεστής $R: Y \to H$, με $R\left((c_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$, είναι προφανώς καλά ορισμένος και γραμμικός και θα τον καλούμε ***τελεστή σύνθεσης*** ως προς την $\{x_i\}_{i\in I}$. ♦

Ορισμός 4.1.3. Έστω μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H. Θεωρούμε τον τελεστή $C(x)=\left(\langle x, x_i\rangle\right)_{i\in I}$. Ο C είναι καλά ορισμένος και γραμμικός και θα τον καλούμε ***τελεστή ανάλυσης*** ως προς την $\{x_i\}_{i\in I}$. ♦

Παρατήρηση : Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι Bessel, τότε η εικόνα του τελεστή ανάλυσης C είναι υπόχωρος του $\ell_2(\mathbb{N})$, αφού ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x, x_i\rangle\right|^2<\infty$. ♦

Θεώρημα 4.1.4. Έστω μία ακολουθία Bessel $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert $\left(H,\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$ και *R*, *C* οι τελεστές σύνθεσης και ανάλυσης όπως παραπάνω . Τότε:

α) Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ συγκλίνει άνευ συνθήκης στον H και ο τελεστής σύνθεσης R είναι φραγμένος.

β) Ισχύει $R=C^*$, δηλαδή ο *R* είναι ο συζυγής του *C* (βλέπε παράγραφο 1.3).

γ) Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης τότε ο C είναι 1-1 και η εικόνα του είναι πυκνή στον H.

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τους τελεστές $R_n\left((c_i)\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, οι οποίοι είναι φραγμένοι και συγκλίνουν κατά σημείο στον R, οπότε από το Θεώρημα Ομοιομόρφου Φράγματος (1.2.12) ο R είναι φραγμένος. Τότε υπάρχει $B>0$ τέτοιος ώστε $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right\| \le \sqrt{B}\left\|(c_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\|$ (1), με $\|R\|\le B^{1/2}$. Όμως αφού η $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\ell_2(\mathbb{N})$, τότε συγκλίνει απόλυτα άρα και άνευ συνθήκης, άρα και η $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ συγκλίνει άνευ συνθήκης.

β) Έστω $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell_2(\mathbb{N})$ και $x\in H$, τότε

$$\left\langle R\left((c_i)\right), x\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i, x\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\left\langle x_i, x\right\rangle=\left\langle (c_i), C(x)\right\rangle, \text{ άρα } R=C^*,$$

συνεπώς $C \in B(H, \ell_2(\mathbb{N}))$ με $\|C\| = \|R\| \le B^{1/2}$.

γ) Αν $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης τότε $\overline{\operatorname{Im} R} = H \Leftrightarrow \left(\overline{\operatorname{Im} R}\right)^{\perp} = H^{\perp} \Leftrightarrow KerC = \{0\}$, άρα ο C είναι 1-1 και $\operatorname{Im} S$ πυκνή άρα και $\operatorname{Im} C$ πυκνή. ■

Παρατήρηση: Με το παραπάνω Θεώρημα άμεσα προκύπτει ότι μία ακολουθία είναι Bessel αν και μόνον αν υπάρχει $B > 0$ ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i \rangle|^2 \le B\|x\|^2$, για κάθε $x \in H$. ♦

Ορισμός 4.1.5. Έστω μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert $(H, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ και *R*, *C* οι τελεστές σύνθεσης και ανάλυσης όπως παραπάνω. Τότε ορίζουμε:

α) τον ***τελεστή πλαισίου (frame operator)*** $S : H \to H$, με $S = RC$.
β) τον ***τελεστή Gram (Gram operator)*** $G : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$, με $G = CR$. ♦

Παρατήρηση :

α) Έστω μία ακολουθία Bessel $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H τότε οι τελεστές πλαισίου και Gram ως προς την $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι αυτοσυζυγείς και θετικοί αφού

$S = CC^* \Rightarrow S^* = \left(CC^*\right)^* = \left(C^*\right)^* C^* = CC^* = S$. Ομοίως ισχύει και για τον G, ενώ

$S(x) = RC = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i \Rightarrow \langle S(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i \rangle|^2 \ge 0$, ομοίως για τον G.

β) Μία ορθοκανονική βάση προφανώς είναι ακολουθία Bessel όπως προκύπτει απ΄την Ανισότητα Bessel. Μάλιστα ο τελεστής πλαισίου της είναι προφανώς ο ταυτοτικός.

γ) Η αναπαράσταση του τελεστή Gram ως προς την κανονική βάση του $\ell_2(\mathbb{N})$ γίνεται

βρίσκοντας την i, j -οστή συνιστώσα του:

$$\langle G(e_i), e_j \rangle = \langle R^* R(e_i), e_j \rangle = \langle R(e_i), R(e_j) \rangle = \langle x_i, x_j \rangle.$$

Άρα ο $G = \left\{\langle x_i, x_j \rangle\right\}_{i,j\in I}$ αποτελεί τον πίνακα του G και καλείται ***Gram πίνακας*** της $\{x_i\}_{i\in I}$. ♦

Πρόταση 4.1.6. Έστω δύο χώροι Hilbert H,K και $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}$, ακολουθίες στους H,K αντίστοιχα . Αν η $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι Bessel με φράγμα B , η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης στον H και υπάρχει θετική σταθερά A ώστε $A\sum_{i=0}^{N}|c_i|^2 \le \left\|\sum_{i=0}^{N} c_i y_i\right\|^2$, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία συντελεστών $c_i, i\in I_N$, τότε ο τελεστής $U : H \to K$, με $U\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i y_i$, είναι ένας φραγμένος τελεστής με $\|U\| \le \sqrt{\frac{B}{A}}$.

Απόδειξη:

Αφού τα c_i είναι πεπερασμένου πλήθους τότε η αναπαράσταση $x = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$ είναι μοναδική αφού ισχύει :

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i = \sum_{i=1}^{N} d_i x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (c_i - d_i) x_i = 0,$$

άρα $A\sum_{i=0}^{N}|c_i - d_i|^2 \le \left\|\sum_{i=0}^{N} (c_i - d_i) y_i\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow c_i = d_i$. Άρα ο U είναι καλά ορισμένος και προφανώς γραμμικός. Αν θεωρήσουμε μία πεπερασμένη ακολουθία $c_i, i\in I_N$, τότε ισχύει

$$\left\|U\left(\sum_{i=1}^{N} c_i x_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{N} c_i y_i\right\|^2 \le B\sum_{i=1}^{N}|c_i|^2 \le \frac{B}{A}\left\|\sum_{i=1}^{N} c_i x_i\right\|^2.$$

Ο U επεκτείνεται συνεχώς στον *H*. ■

Θεώρημα 4.1.7. Έστω μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H και $\{e_i\}_{i\in I}$ η συνηθισμένη βάση του $\ell_2(\mathbb{N})$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Υπάρχει σταθερά $B>0$ τέτοια ώστε για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $c_i, i\in I_N$, να ισχύει $\left\|\sum_{i=1}^{N} c_i x_i\right\|^2 \le B\sum_{i=1}^{N}|c_i|^2$.

β) Η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ συγκλίνει για κάθε ακολουθία $(c_i)_{i\in I} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

γ) Υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής $R : \ell_2(\mathbb{N}) \to H$ τέτοιος ώστε $R(e_i) = x_i$, για κάθε $i\in\mathbb{N}$.

δ) Υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του H έστω η $\{y_i\}_{i\in I}$ και ένας φραγμένος τελεστής T τέτοιος ώστε $T(y_i)=x_i$, για κάθε $i\in\mathbb{N}$.

ε) Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ακολουθία Bessel.

Απόδειξη:

α)$\Rightarrow$β) Έστω μία ακολουθία $(c_i)_{i\in I}\in\ell_2(\mathbb{N})$, τότε για πεπερασμένη ακολουθία της ισχύει $\left\|\sum_{i=1}^{N}c_i x_i\right\|\le B\sum_{i=1}^{N}|c_i|^2$, οπότε παίρνοντας όρια ως προς το N, ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}c_i x_i\right\|^2\le B\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2=B\left\|(c_i)_{i\in I}\right\|^2,$$

άρα συγκλίνει.

β)$\Rightarrow$γ) Θεωρούμε τον τελεστή σύνθεσης του ορισμού 4.1.2. Από το θεώρημα 4.1.4 α), ο R είναι φραγμένος. Προφανώς: $R(e_i)=x_i$.

γ) $\Rightarrow$δ) Ο H ως διαχωρίσιμος έχει μία ορθοκανονική βάση $\{y_i\}_{i\in I}$ και υπάρχει ισομορφισμός $S:H\to\ell_2(\mathbb{N})$ με $S(y_i)=e_i$, όπως αυτός ορίστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.9. . Θεωρούμε τον $T=RS:H\to H$, ο οποίος είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής ως σύνθεση γραμμικών φραγμένων τελεστών και ισχύει $T(y_i)=RS(y_i)=R(e_i)=x_i$, για κάθε $i\in\mathbb{N}$.

δ)$\Rightarrow$ε) Για κάθε $x\in H$, ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,T(y_i)\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle T^*(x),y_i\rangle\right|^2=\left\|T^*(x)\right\|^2<\infty$, απ' την Ταυτότητα Parseval.

ε) $\Rightarrow$α) Λόγω υπόθεσης, ο τελεστής σύνθεσης του ορισμού 4.1.4 είναι φραγμένος. ■

Ορισμός 4.1.8. Έστω μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε:
α) η $\{x_i\}_{i\in I}$ καλείται βάση Riesz για τον H, αν είναι ισοδύναμη με κάποια ορθοκανονική βάση του H.

β) η $\{x_i\}_{i\in I}$ καλείται ακολουθία Riesz αν είναι βάση Riesz για τον $\overline{span}\{x_i\}$. ♦

Παρατήρηση : Εφόσον όλες οι ορθοκανονικές βάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους τότε όλες οι βάσεις Riesz είναι ισοδύναμες μεταξύ τους και με κάθε ορθοκανονική βάση του H.

Υπενθυμίζουμε ότι δύο βάσεις καλούνται ισοδύναμες αν υπάρχει ισομορφισμός $T : H \to H$, ώστε $T(x_i) = y_i$. ♦

Θεώρημα 4.1.9. Κάθε βάση Riesz σε ένα χώρο Hilbert H είναι μία φραγμένη (με την έννοια του ορισμού 2.1.5) και βάση άνευ συνθήκης.

Απόδειξη:

Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ μία βάση Riesz του H, τότε υπάρχουν ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i\in I}$ του H και ένας ισομορφισμός $T : H \to H$, ώστε $T(e_i) = x_i$. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση του H. Όμως η $\{e_i\}_{i\in I}$ είναι φραγμένη αφού ο T είναι ισομορφισμός και άνευ συνθήκης αφού ισχύει

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\sigma(i)} e_{(i)} \Rightarrow T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{\sigma(i)} T(e_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\sigma(i)} T(e_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)} ,$$

για κάθε μετάθεση σ. ■

Λήμμα 4.1.10. Έστω δύο χώροι Hilbert H, K και $T : H \to K$ ισομορφισμός μεταξύ αυτών. Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz για τον H τότε η $\left(T(x_i)\right)_{i\in I}$ είναι βάση Riesz για τον K.

Απόδειξη:

Αφού ο H έχει βάση Riesz τότε έχει και ορθοκανονική βάση άρα ο H είναι διαχωρίσιμος και ισομορφικός με τον K, άρα είναι κι αυτός διαχωρίσιμος. Όμως κάθε διαχωρίσιμος χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\ell_2(\mathbb{N})$, συνεπώς είναι και μεταξύ τους ισομετρικά ισομορφικοί. Έστω Z ένας τέτοιος ισομετρικός ισομορφισμός . Έστω $(e_i)_{i\in I}$ ορθοκανονική βάση του H, τότε υπάρχει ισομορφισμός U του H ώστε $Ue_i = x_i$. Επιπλέον η $(Ze_i)_{i\in I}$ είναι ορθοκανονική βάση του K, αφού ο Z είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Άρα ο TUZ^{-1} είναι ισομορφισμός στον K για τον οποίο ισχύει $TUZ^{-1}(Ze_i) = TU(e_i) = T(x_i)$ άρα η $T(x_i)$ είναι ισομορφική της ορθοκανονικής βάσης Ze_i, άρα είναι βάση Riesz για τον K. ■

Θεώρημα 4.1.11. Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz σε ένα χώρο Hilbert H, τότε :

α) υπάρχει μοναδική ακολουθία $\{y_i\}_{i\in I}$ του H, τέτοια ώστε να ισχύει $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,y_i\rangle x_i$, για κάθε $x\in H$. Μάλιστα η $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι επίσης βάση Riesz του H η οποία είναι ορθογώνια της $\{x_i\}_{i\in I}$.

β) Επιπλέον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ακολουθία Bessel.

Απόδειξη:

α) Εξ' ορισμού της βάσης Riesz υπάρχει ισομορφισμός $U:H\to H$ και ορθοκανονική βάση $(e_i)_{i\in I}$ του H, τέτοια ώστε $x_i=U(e_i)$, για κάθε $i\in I$. Τότε για κάθε $x\in H$, ισχύει $U^{-1}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle U^{-1}(x),e_i\right\rangle e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,\left(U^{-1}\right)^* e_i\right\rangle e_i$. Θεωρούμε τα $y_i=\left(U^{-1}\right)^* e_i$, τότε $x=UU^{-1}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,\left(U^{-1}\right)^* e_i\right\rangle Ue_i=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,y_i\rangle x_i$. Όμως ο $\left(U^{-1}\right)^*$ είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος άρα η $(y_i)_{i\in I}$ είναι βάση Riesz και είναι εύκολο να δούμε ότι είναι ημιορθογώνια της $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

β) Για κάθε $x\in H$,

$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,Ue_i\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle U^*x,e_i\rangle\right|^2=\left\|U^*x\right\|^2\le\left\|U^*\right\|^2\|x\|^2=\|U\|^2\|x\|^2$. Άρα είναι επιπλέον και ακολουθία Bessel. ■

Ορισμός 4.1.12. Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz σε ένα χώρο Hilbert H, τότε η μοναδική ακολουθία $\{y_i\}_{i\in I}$ του H, τέτοια ώστε να ισχύει $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,y_i\rangle x_i$, καλείται δυϊκή της $\{x_i\}_{i\in I}$. ♦

Παρατήρηση: Εφόσον ισχύουν $x_i=U(e_i)$ και $y_i=\left(U^{-1}\right)^* e_i$, τότε η δυϊκή της $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι η $\left(\left(\left(U^{-1}\right)^*\right)^{-1}\right)^*(e_i)=U(e_i)=x_i$. Δηλαδή οι $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι μεταξύ τους δυϊκές για τις οποίες μάλιστα ισχύει ότι $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,y_i\rangle x_i=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle y_i$, για κάθε $x\in H$. ♦

Πρόταση 4.1.13. Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz σε ένα χώρο Hilbert H και ο ισομορφισμός $U:H\to H$ για τον οποίο ισχύει $x_i=U(e_i)$, για κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i\in I}$ του H. Τότε υπάρχουν σταθερές $A,B>0$, για τις οποίες ισχύει $A\|x\|^2\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2\le B\|x\|^2$, για κάθε $x\in H$. Μάλιστα η ελάχιστη δυνατή τιμή του B είναι η $\|U\|^2$, ενώ η μέγιστη δυνατή τιμή του A είναι η $\dfrac{1}{\|U^{-1}\|^2}$.

Απόδειξη:

Από θεώρημα 4.1.11, η $U(e_i)$ είναι ακολουθία Bessel. Αρα

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,U(e_i)\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle U^*x,e_i\rangle\right|^2=\|U^*x\|^2\le\|U^*\|^2\|x\|^2=\|U\|^2\|x\|^2$$

Οσον αφορά το κάτω φράγμα έχουμε

$$\left\|\left(U^*\right)^{-1}\right\|^{-2}\|x\|^2=\left\|\left(U^*\right)^{-1}\right\|^{-2}\left\|\left(U^*\right)^{-1}U^*(x)\right\|^2\le\|U^*(x)\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle U^*x,e_i\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,U(e_i)\rangle\right|^2.$$

■

Θεώρημα 4.1.14. Για μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz.

β) Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης στον H και υπάρχουν $A,B>0$, για τις οποίες ισχύει $A\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2\le\left\|\sum_{i=1}^{\infty}c_ix_i\right\|^2\le B\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία συντελεστών $c_i, i\in I_n$.

γ) Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης στον H και ο πίνακας Gram είναι φραγμένος αντιστρέψιμος τελεστής στον $\ell_2(\mathbb{N})$.

δ) Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία πλήρης Bessel ακολουθία στον H και έχει μία ορθογώνια ακολουθία $\{y_i\}_{i\in I}$ η οποία είναι επίσης πλήρης Bessel.

Απόδειξη:

α) $\Rightarrow$ **β)** Εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz είναι πλήρης. Τα υπόλοιπα προκύπτουν άμεσα από την πρόταση 4.1.13.

β) $\Rightarrow$ **α)** Απ' το Θεώρημα 4.1.7. η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ακολουθία Bessel . Επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i\in I}$ και απ' την Πρόταση 4.1.6. τόσο ο τελεστής $U : H \to H$ που ορίζεται απ' την $U(e_i) = x_i$, είναι φραγμένος, όσο και ο τελεστής $V : H \to H$ που ορίζεται απ' τη σχέση $e_i = V(x_i)$. Τότε όμως $VU = UV = I$, δηλαδή ο U είναι αντιστρέψιμος άρα ισομορφισμός , συνεπώς η $(x_i)_{i\in I}$ είναι Riesz

α) $\Rightarrow$ **γ)** Ως βάση Riesz είναι πλήρες σύνολο. Ομοίως με την προηγούμενη απόδειξη θεωρούμε τον $U : H \to H$ που ορίζεται απ' την $U(e_i) = x_i$ και τον ισομορφισμό $V : \ell_2(\mathbb{N}) \to H$ με $V(d_i) = e_i$, τότε ο $T = UV$ είναι ισομορφισμός των $\ell_2(\mathbb{N}), H$ και $\langle x_i, x_j\rangle = \langle Td_i, Td_j\rangle = \langle T^*Td_i, d_j\rangle$, άρα ο T^*T είναι ο τελεστής Gram της ακολουθίας ο οποίος είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος ως σύνθεση φραγμένων και αντιστρέψιμων τελεστών.

γ) $\Rightarrow$ **α)** Αφού ο πίνακας Gram είναι φραγμένος αντιστρέψιμος τελεστής στον $\ell_2(\mathbb{N})$ και R τελεστής σύνθεσης όπως παραπάνω, τότε ο τελεστής $G = R^*R$ είναι φραγμένος , άρα $\left|\langle Gc, c\rangle\right| \underset{Schwarz}{\overset{Cauchy}{\leq}} \|Gc\|\|c\| \leq \|G\|\|c\|^2$ και $\left|\langle Gc, c\rangle\right| = \left|\langle R^*Rc, c\rangle\right| = \left|\langle Rc, Rc\rangle\right| = \|Rc\|^2$, συνεπώς ισχύει $\|Rc\| \leq \|G\|^{1/2}\|c\|$, δηλαδή ο R είναι φραγμένος , συνεπώς απ' το Θεώρημα 4.1.7. προκύπτει άμεσα το άνω φράγμα για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\left\|\sum_{i=1}^{N} c_i x_i\right\|^2 \leq B\sum_{i=1}^{N}|c_i|^2$.

Ο G είναι θετικά ορισμένος και αυτοσυζυγής άρα ορίζεται ο G^{-1} και για κάθε ακολουθία c_i του $\ell_2(\mathbb{N})$, ισχύει ότι

$$\left\langle G((c_i)), (c_j)\right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\langle x_i, x_j\rangle c_i\bar{c}_j = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right\|^2$$

$$\text{άρα} \quad \left\|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\right\|^2 = \left\langle G((c_i)), (c_i)\right\rangle = \left\langle G^{1/2}G^{1/2}((c_i)), (c_i)\right\rangle =$$

$$\left\langle G^{1/2} = ((c_i)), G^{1/2}(c_i)\right\rangle = \left\|G^{1/2}(c_i)\right\|^2 \geq \frac{1}{\left\|\left(G^{1/2}\right)^{-1}\right\|}\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$$

α) $\Rightarrow$ **δ)** Προκύπτει άμεσα απ' το Θεώρημα 4.1.11. .

δ) $\Rightarrow$ **γ)** Υποθέτουμε ότι οι $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι ορθογώνιες Bessel ακολουθίες και έστω C, R οι τελεστές ανάλυσης και σύνθεσης αντιστοίχως για την $\{x_i\}_{i\in I}$, ομοίως οι D, V οι τελεστές ανάλυσης και σύνθεσης αντιστοίχως για την $\{y_i\}_{i\in I}$, οι οποίοι είναι φραγμένοι αφού οι ακολουθίες είναι Bessel. Λόγω ορθογωνιότητας για κάθε $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, ισχύει

$$CV\left((c_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \left(\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i, x_i \right\rangle\right)_{i\in\mathbb{N}} = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}, i \in I_n .$$

Επιπλέον αν $x \in H$, τότε $RD(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, y_i \rangle x_i$, οπότε λόγω ορθογωνιότητας ισχύει $\langle RD(x), y_i \rangle = \langle x, y_i \rangle,\ i \in \mathbb{N}$. Όμως οι $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης **[36]** άρα $RD(x) = x$. Ομοίως οι VC, DR είναι οι ταυτοτικοί. Άρα τόσο ο $G = CR$, όσο και ο $L = DV$ είναι φραγμένοι τελεστές που ικανοποιούν τις σχέσεις $GL = CRDV = CV = I$, $LG = DVCR = DR = I$. Συνεπώς ο G έχει έναν φραγμένο αντίστροφο τελεστή άρα είναι ισομορφισμός. ■

Πρόταση 4.1.15. Αν για μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H ισχύει $A\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i \rangle|^2 \le B\|x\|^2$, για κάθε $x \in H$, όπου $A, B > 0$, τότε ο τελεστής πλαισίου S όπως στον ορισμό 4.1.5 είναι αυτοσυζυγής, θετικός, φραγμένος και αντιστρέψιμος.

Απόδειξη:

Ο $S : H \to H$, με $S = RR^*$ είναι προφανώς αυτοσυζυγής και θετικός αφού η $\{x_i\}_{i\in I}$, είναι ακολουθία Bessel όπως προκύπτει απ' την παρατήρηση που έπεται του ορισμού 4.1.5. και φραγμένος ως γινόμενων των φραγμένων τελεστών $R,\ R^*$ όπως προκύπτει απ' το Θεώρημα 4.1.4 με $\|S\| = \|RR^*\| = \|R\|\|R^*\| = \|R\|^2 \le B$. Για τον τελεστή πλαισίου ισχύει

$$\langle S(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, x_i \rangle|^2$$ το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$A\|x\|^2 \le \langle Sx, x \rangle \le B\|x\|^2 \Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \le \langle Sx, x \rangle \le \langle Bx, x \rangle$$ απ' το οποίο προκύπτει ότι

$$AI \le S \le BI \Rightarrow 0 \le I - B^{-1}S \le \frac{B-A}{B} < 1$$ οπότε

$$\|I - B^{-1}S\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (I - B^{-1}S)x, x \rangle| \le \frac{B-A}{B} < 1 ,$$

το οποίο από γνωστό Θεώρημα της Θεωρίας Τελεστών **[6]** υπονοεί ότι ο S είναι αντιστρέψιμος. ■

Πρόταση 4.1.16. Έστω ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση Riesz ενός Hilbert χώρου *H*, και $\{e_i\}_{i\in I}$ ορθοκανονική βάση του H και ισομορφισμός U, τέτοιος ώστε $x_i = U(e_i)\,, i \in I$. Αν $G:\ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ είναι ο τελεστής Gram της $\{x_i\}_{i\in I}$, τότε τότε για τα βέλτιστα φράγματα της πρότασης 4.1.13 έχουμε ότι $A = \dfrac{1}{\|U^{-1}\|^2} = \dfrac{1}{\|G^{-1}\|}$ και $B = \|U\|^2 = \|G\|$.

Απόδειξη:

Υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $V:\ell_2(\mathbb{N}) \to H$ με $V(d_i) = e_i$ όπου $(d_i)_{i\in I}$ η κανονική βάση του $\ell_2(\mathbb{N})$. Τότε όμως απ' το Θεώρημα 2.3.9. ο V είναι ορθομοναδιαίος, συνεπώς ισχύει

$$G = V^*U^*UV \Rightarrow \|G\| = \|V^*U^*UV\| = \|V^*U^*\|^2 = \|U\|^2 \text{ και}$$

$$\|G^{-1}\| = \left\|\left(V^*U^*UV\right)^{-1}\right\| = \left\|V^*\left(U^*U\right)^{-1}V\right\|^2 = \left\|\left(U^*U\right)^{-1}\right\|^2 =$$

$$\left\|\left(U\right)^{-1}\left(U^*\right)^{-1}\right\|^2 = \left\|U^{-1}\left(U^{-1}\right)^*\right\|^2 = \|U^{-1}\|^2$$

και τότε απ' το Θεώρημα 2.4.17. τα βέλτιστα όρια είναι τα $A = \dfrac{1}{\|U^{-1}\|^2} = \dfrac{1}{\|G^{-1}\|}$ και $B = \|U\|^2 = \|G\|$. ■

4.2. Gabor Riesz Βάσεις

Στην παράγραφο αυτή επικεντρωνόμαστε στα συστήματα Gabor τα οποία παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μελετούμε τέτοια συστήματα της μορφής $G(g,a,b) = \{M_{nb}T_{ak}g\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$, όπου *M* και *T* είναι οι τελεστές διαμόρφωσης και μετάθεσης που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 3 και g μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση "παράθυρο" . Θα εξετάσουμε συνθήκες ώστε ένα τέτοιο σύστημα είναι ορθοκανονική βάση και μια βάση Riesz.

Σε μία βάση Riesz τόσο ο τελεστής ανάλυσης C όσο και ο τελεστής πλαισίου S που ορίσθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο είναι 1-1 τελεστές, δηλαδή ορίζεται ο αντίστροφος του S^{-1}. Ο τελεστής πλαισίου μάλιστα στα συστήματα Gabor παίρνει τη μορφή

$$Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, M_{nb}T_{ak}g\rangle M_{nb}T_{ak}g\,.$$

Πρόταση 4.2.1. Αν η $\{M_{nb}T_{ak}g\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία βάση Riesz του $L_2(R)$, τότε ο S αντιμετατίθεται με τους τελεστές M_{nb} και T_{ak}.

Απόδειξη:

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f\in L_2(\mathbb{R})$ τότε ισχύουν:

$$SM_{mb}f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle M_{mb}f,M_{nb}T_{ak}g\rangle M_{nb}T_{ak}g=$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi imbt}f(t)e^{-2\pi inbt}\overline{g(t-ak)}dt\cdot e^{-2\pi inbx}g(x-ak)=$$

$$e^{2\pi imbx}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(m-n)bt}f(t)\overline{g(t-ak)}dt\cdot e^{2\pi i(n-m)bx}g(x-ak)\overset{\ell=m-n}{=}$$

$$e^{2\pi imbx}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi i\ell bt}f(t)\overline{g(t-ak)}dt\cdot e^{2\pi i\ell bx}g(x-ak)=M_{mb}Sf$$

$$ST_{a\ell}f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle T_{a\ell}f,M_{nb}T_{ak}g\rangle M_{nb}T_{ak}g=$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-a\ell)e^{-2\pi inbt}\overline{g(t-ak)}dt\cdot M_{nb}T_{ak}g\overset{s=t-a\ell}{=}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi inb(s+a\ell)}\overline{g(s+a\ell-ak)}dt\cdot M_{nb}T_{ak}g=$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-2\pi inbs}e^{-2\pi inba\ell}\overline{g(s+a\ell-ak)}dt\cdot M_{nb}T_{ak}g\overset{k-\ell=j}{=}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\langle f,M_{nb}T_{aj}g\right\rangle\cdot e^{-2\pi inab\ell}M_{nb}T_{a\ell+aj}g=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\langle f,M_{nb}T_{aj}g\right\rangle\cdot e^{-2\pi inab\ell}M_{nb}T_{a\ell}T_{aj}g=$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\langle f,M_{nb}T_{aj}g\right\rangle\cdot T_{a\ell}M_{nb}T_{aj}g=T_{a\ell}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\langle f,M_{nb}T_{aj}g\right\rangle\cdot M_{nb}T_{aj}g=T_{a\ell}Sf \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα 4.2.2. Αν το σύστημα Gabor $\{M_{nb}T_{ak}g\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ είναι βάση Riesz στον $L_2(\mathbb{R})$ και S ο τελεστής πλαισίου που αντιστοιχεί σε αυτό, τότε ισχύει ότι η δυϊκή της είναι η $\{M_{nb}T_{ak}\tilde{g}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$, όπου $\tilde{g}=S^{-1}g$ και μάλιστα ισχύει $\langle g,\tilde{g}\rangle=1$.

Απόδειξη:

Ο S είναι αντιστρέψιμος και αυτοσυζυγής άρα και ο S^{-1} είναι αυτοσυζυγής και αντιμετατίθεται με τους τελεστές μετάθεσης και διαμόρφωσης λόγω της Πρότασης 4.2.1, συνεπώς

$$f = SS^{-1}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle S^{-1}f, M_{nb}T_{ak}g\right\rangle M_{nb}T_{ak}g =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f, S^{-1}M_{nb}T_{ak}g\right\rangle M_{nb}T_{ak}g = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f, M_{nb}T_{ak}S^{-1}g\right\rangle M_{nb}T_{ak}g$$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f, M_{nb}T_{ak}\tilde{g}\right\rangle M_{nb}T_{ak}g$. Άρα η δυϊκή της $\{M_{nb}T_{ak}g\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ είναι η $\{M_{nb}T_{ak}\tilde{g}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$.

Οι δυϊκές βάσεις Riesz είναι μεταξύ τους ορθογώνιες και οι τελεστές διαμόρφωσης και μετάθεσης είναι ορθομοναδιαίοι άρα $\left\langle M_{nb}T_{ak}g, M_{nb}T_{ak}\tilde{g}\right\rangle = 1 \Leftrightarrow \left\langle g, \tilde{g}\right\rangle = 1$. ■

Ορισμός 4.2.3. Ο τελεστής $D_a : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, ο οποίος ορίζεται ως $D_a(f) = \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{x}{a}\right)$, με $a > 0$, καλείται **τελεστής γενικευμένης διαστολής**.

Πρόταση 4.2.4. Ο D_a είναι ορθομοναδιαίος.

Απόδειξη:

Έστω $f \in L_2(\mathbb{R})$, τότε

$$\left\langle D_a f, g\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{x}{a}\right)\overline{g(x)}dx \overset{u=\frac{x}{a}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sqrt{a}\,\overline{g(au)}dx = \left\langle f, D_{1/a}g\right\rangle$$

, δηλαδή $D_\alpha^* = D_{1/a}$. Επίσης ισχύει:

$$D_{1/a}(D_a f)(x) = \sqrt{a}(D_a f)(ax) = \sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{ax}{a}\right) = f(x)$$

και πανομοιότυπα $D_a\left(D_{1/a}f\right)(x) = f(x)$, οπότε $D_\alpha^{-1} = D_{1/a}$. Τελικά προκύπτει $D_\alpha^* = D_\alpha^{-1}$, άρα ο D_a είναι ορθομοναδιαίος. ■

Ορισμός 4.2.5. Έστω $Q = [0,1]\times[0,1]$ και $a > 0$. Ο μετασχηματισμός $Z_a : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$, ο οποίος ορίζεται ως $(Z_a f)(t,\xi) = \sqrt{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(a(t-k))e^{2\pi ik\xi}$, $(t,\xi)\in Q$ καλείται μετασχηματισμός Zak. Αν $a = 1$, θα συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Zak με Z .

Πρόταση 4.2.6. Ο μετασχηματισμός Zak είναι ορθομοναδιαίος τελεστής επί του $L_2(Q)$.

Απόδειξη:

Έστω $a=1$. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ και τις συναρτήσεις $F_k(t,\xi)=f(t-k)e^{2\pi ik\xi}$, $k\in\mathbb{Z}$ και $(t,\xi)\in Q$, οι οποίες ανήκουν στον $L_2(Q)$. Τότε ισχύει

$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|F_k\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1\int_0^1|F_k(t,\xi)|\,d\xi dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1|f(t-k)|^2\,dt=\|f\|^2$. Για $j\neq k$:

$$\left\langle F_k,F_j\right\rangle_{L_2(Q)}=\int_0^1 f(t-k)\overline{f(t-j)}\left(\int_0^1 e^{2\pi i(k-j)\xi}d\xi\right)dt=0 .$$

Άρα ισχύει $\|Zf\|^2_{L_2(Q)}=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}F_k\right\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|F_k\|^2_{L_2(Q)}=\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$, δηλαδή ο Z είναι ισομετρία. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση Gabor $\left\{M_nT_k\chi_{[0,1]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ του $L_2(\mathbb{R})$, τότε ισχύει

$$(ZM_nT_k\chi_{[0,1]})(t,\xi)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{2\pi in(t-m)}\chi_{[0,1]}(t-n-m)e^{2\pi ink\xi}=$$
$$e^{2\pi int}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{2\pi inm}\chi_{[0,1]}(t-k-m)e^{2\pi inm\xi}=e^{2\pi int}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\chi_{[0,1]}(t-k-m)e^{2\pi im\xi}=e^{2\pi int}e^{-2\pi ik\xi},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $e^{2\pi inm}=1$, για $m,n\in\mathbb{Z}$ και ότι $\chi_{[0,1]}(t-k-m)=1$ αν και μόνον αν $k+m=0\Leftrightarrow m=-k$. Εφόσον ο Z απεικονίζει την ορθοκανονική βάση $\left\{M_nT_k\chi_{[0,1]}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ του $L_2(\mathbb{R})$, επί της ορθοκανονικής βάση $\left\{e^{2\pi int}e^{-2\pi ik\xi}\right\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ του $L_2(Q)$, τότε είναι ορθομοναδιαίος(Πρόταση 3.1.13.) και επί. Παρατηρούμε ότι $Z_a=ZD_{1/a}$ άρα ο Z_a είναι ορθομοναδιαίος ως σύνθεση ορθομοναδιαίων. ■

Παρατήρηση : Θα συμβολίζουμε $E_{(m,n)}=e^{2\pi imt}e^{-2\pi int\xi}$, όπου παρατηρούμε ότι η $\left\{E_{(m,n)}\right\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι μία ορθοκανονική βάση για τον $L_2(Q)$.

Λήμμα 4.2.7. Αν $g\in L_2(\mathbb{R})$ και $a\cdot b=1$, τότε για το μετασχηματισμό Zak ισχύουν :

α) $(Z_aM_{mb}T_{na}g)(t,\xi)=E_{(m,n)}\cdot Z_ag$.

β) $\left\langle f,M_{mb}T_{na}g\right\rangle_{L_2(\mathbb{R})}=\left\langle Z_af\cdot\overline{Z_ag},E_{(m,n)}\right\rangle_{L_2(Q)}$.

γ) $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,M_{mb}T_{na}g\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2=\int_Q\left|Z_af\cdot\overline{Z_ag}\right|^2dtd\xi$.

Απόδειξη:

α)

$$(Z_aM_{mb}T_{na}g)(t,\xi)=\sqrt{a}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}(M_{mb}T_{na}g)(a(t-k))e^{2\pi ik\xi}=$$
$$\sqrt{a}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{2\pi imb(a(t-k))}(T_{na}g)(a(t-k))e^{2\pi ik\xi}=$$
$$\sqrt{a}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{2\pi imbat}e^{-2\pi imbak}(T_{na}g)(a(t-k))e^{2\pi ik\xi}=e^{2\pi imt}\sqrt{a}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-2\pi imk}g(a(t-k)-an)e^{2\pi ik\xi}\underset{e^{-2\pi imk}=1}{\overset{mk\in\mathbb{Z}}{=}}$$
$$e^{2\pi imt}\sqrt{a}\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(a(t-k-n))e^{2\pi ik\xi}\overset{\ell=k+n}{=}e^{2\pi imt}\sqrt{a}\cdot\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}g(a(t-\ell))e^{2\pi i(\ell-n)\xi}=$$
$$e^{2\pi imt}\sqrt{a}\cdot\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}g(a(t-\ell))e^{2\pi i\ell\xi}e^{-2\pi in\xi}=$$
$$e^{2\pi imt}e^{-2\pi in\xi}\sqrt{a}\cdot\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}g(a(t-\ell))e^{2\pi i\ell\xi}=e^{2\pi imt}e^{-2\pi in\xi}Z_ag\,.$$

β)

$$\left\langle f,M_{mb}T_{na}g\right\rangle_{L_2(\mathbb{R})}=\left\langle Z_af,Z_aM_{mb}T_{na}g\right\rangle_{L_2(Q)}=\left\langle Z_af,E_{(m,n)}Z_ag\right\rangle_{L_2(Q)}=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(Z_af)(t,\xi)\cdot\overline{E_{(m,n)}(Z_ag)(t,\xi)}dtd\xi=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(Z_af)(t,\xi)\overline{(Z_ag)(t,\xi)}\cdot\overline{E_{(m,n)}}dtd\xi=\left\langle Z_af\cdot\overline{Z_ag},E_{(m,n)}\right\rangle_{L_2(Q)}.$$

γ)

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle f,M_{mb}T_{na}g\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle Z_af\cdot\overline{Z_ag},E_{(m,n)}\right\rangle_{L_2(Q)}\right|^2=\int_Q\left|Z_af\cdot\overline{Z_ag}\right|^2dtd\xi\,. \qquad \blacksquare$$

Λήμμα 4.2.8. Αν $g\in L_2(\mathbb{R})$ και $B>0$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) $\int_Q\left|F\overline{Z_ag}\right|^2dtd\xi\le B\|F\|_{L_2(Q)}^2$, για κάθε συνάρτηση $F\in L_2(Q)$.

β) $|Z_ag|^2\le B$ σ.π. .

Απόδειξη:

α) $\Rightarrow$ **β)** Έστω το σύνολο $E=\left\{(t,\xi)\in Q\,|\,|Z_ag|^2>B\right\}$. Τότε

$$\int_E|Z_ag|^2dtd\xi=\int_Q\left|\chi_E\overline{Z_ag}\right|^2dtd\xi\le B\|\chi_E\|_{L_2(Q)}^2=B\int_Q|\chi_E|^2dtd\xi=\int_E Bdtd\xi\Rightarrow$$
$$\int_E(|Z_ag|^2-B)dtd\xi\le 0\,.$$

Όμως $|Z_ag|^2>B$, στο E, συνεπώς $m(E)=0$, δηλαδή $|Z_ag|^2\le B$ σ.π.

β) $\Rightarrow$ **α)**

$$\int_Q \left|F\overline{Z_a g}\right|^2 dtd\xi \le \|F\|^2_{L_2(Q)} \int_Q \left|\overline{Z_a g}\right|^2 dtd\xi =$$
$$\|F\|^2_{L_2(Q)} \int_Q |Z_a g|^2 dtd\xi \le \|F\|^2_{L_2(Q)} \int_Q Bdtd\xi = B\|F\|^2_{L_2(Q)} . \ \blacksquare$$

Παρατήρηση: Αν $g \in L_2(\mathbb{R})$ και $A > 0$, τότε παρόμοια αποδεικνύεται $A\|F\|^2_{L_2(Q)} \le \int_Q \left|F\overline{Z_a g}\right|^2 dtd\xi$, για κάθε συνάρτηση $F \in L_2(Q)$ αν και μόνον αν $A \le |Z_a g|^2$ σ.π. .

Θεώρημα 4.2.9. Έστω $g \in L_2(\mathbb{R})$ και $a \cdot b = 1$ και Z_α ο μετασχηματισμός Zak όπως παραπάνω. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

α) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι πλήρες στον $L_2(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν $Z_a g \ne 0$, σ.π.

β) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι Bessel ακολουθία με άνω φράγμα B στον $L_2(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν $|Z_a g|^2 \le B$ σ.π. .

γ) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι βάση Riesz στον $L_2(\mathbb{R})$ με όρια A, B αν και μόνον αν $A \le |Z_a g|^2 \le B$ σ.π. .

δ) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L_2(\mathbb{R})$ αν και μόνον αν $|Z_a g|^2 = 1$ σ.π. .

Απόδειξη:

α) Έστω $f \in L_2(\mathbb{R})$, τότε ισχύει ότι $\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = 0$, για κάθε $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \left\langle Z_a f \cdot \overline{Z_a g}, E_{(m,n)}\right\rangle_{L_2(Q)} = 0$, για κάθε $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \underset{\substack{\text{ορθοκανονικη} \\ \text{βάση}}}{\overset{E_{(m,n)}}{\Leftrightarrow}} Z_a f \cdot \overline{Z_a g} = 0$ σ.π. $\Leftrightarrow Z_a f = 0$ σ.π. $\underset{\text{ορθομοναδιαίος}}{\overset{Z_a}{\Leftrightarrow}} f = 0$ σ.π..

β) Εφόσον ο Z_a είναι 1-1 και επί ισομετρία τότε ισχύει ότι για κάθε συνάρτηση $F \in L_2(Q)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ και αντιστρόφως με $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|Z_a f\|^2_{L^2(Q)}$. Η $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι Bessel ακολουθία με φράγμα B αν και μόνον αν για κάθε $f \in L_2(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 \le B\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \int_Q \left|Z_a f\cdot \overline{Z_a g}\right|^2 dtd\xi \le B\|Z_a f\|^2_{L^2(Q)} \Leftrightarrow$$

$$\int_Q \left|F\cdot \overline{Z_a g}\right|^2 dtd\xi \le B\|F\|^2_{L^2(Q)} \text{ , για κάθε } F\in L_2(Q) \Leftrightarrow \left|Z_a g\right|^2 \le B \text{ σ.π. .}$$

γ) Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με αυτή του **β)**.

δ) $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L_2(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα Parseval για κάθε $f\in L_2(\mathbb{R})$, δηλαδή $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, M_{mb}T_{na}g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$, το οποίο ισχύει αν και μόνον αν η $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι βάση Riesz με $A=B=1$, απ' το γ) . ∎

Παρακάτω παρουσιάζουμε βασικούς ορισμούς, προτάσεις και λήμματα με σκοπό την τελική παράθεση και απόδειξη του κομβικού Θεωρήματος Balian-Low. Η προφανής αντιστοίχηση με την Αρχή Αβεβαιότητας γίνεται άμεσα εμφανής με την παράθεση των τελεστών θέσης και ορμής. Ότι είναι στην Αρχή Αβεβαιότητας η θέση και η ορμή, εδώ θα είναι ο χρόνος και η συχνότητα αντιστοίχως, της συνάρτησης γεννήτορα g .

Ορισμός 4.2.10. Έστω μία συνάρτηση $f\in L_2(\mathbb{R})$. Ως ***τελεστή θέσης*** θεωρούμε τον $(Qf)(x)=x\cdot f(x)$, ενώ ως ***τελεστή ορμής*** θεωρούμε τον $(Pf)(x)=-i\cdot f'(x)$.

Λήμμα 4.2.11. Για κάθε $h\in L_2(\mathbb{R})$, αν $Ph, Qh\in L_2(\mathbb{R})$ και Z ο τελεστής Zak με a = 1, τότε

α) $ZQh(t,\xi)=t\cdot Zh(t,\xi)+\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\xi}(Zh)(t,\xi)$. **(4.1)**

β) $ZPh(t,\xi)=-i\dfrac{\partial}{\partial t}(Zh)(t,\xi)$. **(4.2)**

Απόδειξη:

α) $ZQh(t,\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(t+k)h(t+k)e^{2\pi ik\xi} = t\sum_{k\in\mathbb{Z}}h(t+k)e^{2\pi ik\xi}+\dfrac{1}{2\pi i}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2\pi ikh(t+k)e^{2\pi ik\xi} =$
$t\cdot Zh(t,\xi)+\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\xi}(Zh)(t,\xi)$.

β) $ZPh(t,\xi)=-i\sum_{k\in\mathbb{Z}}h'(t+k)e^{2\pi ik\xi}=-i\dfrac{\partial}{\partial t}(Zh)(t,\xi)$. ∎

Λήμμα 4.2.12. Έστω $g\in L_2(\mathbb{R})$ μία συνάρτηση για την οποία το Gabor σύστημα με $a=b=1$ με γεννήτορα τη g, δηλαδή το $\{M_mT_ng\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι βάση Riesz στον $L_2(R)$

και P, Q οι τελεστές ορμής και θέσης όπως παραπάνω. Τότε για αυτή και για τη δυϊκή της $\{M_m T_n \tilde{g}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, ισχύει ότι :

α) $\langle Qg, P\tilde{g}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle Qg, M_m T_n \tilde{g}\rangle \langle M_m T_n g, P\tilde{g}\rangle$. **(4.3)**

β) $\langle Pg, Q\tilde{g}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle Pg, M_m T_n \tilde{g}\rangle \langle M_m T_n g, Q\tilde{g}\rangle$. **(4.4)**

γ) $\langle Pg, M_m T_n \tilde{g}\rangle = \langle M_{-m} T_{-n} g, P\tilde{g}\rangle$. **(4.5)**

δ) $\langle Qg, M_m T_n \tilde{g}\rangle = \langle M_{-m} T_{-n} g, Q\tilde{g}\rangle$. **(4.6)**

ε) Αν $Qg, Pg \in L_2(\mathbb{R})$ τότε και $Q\tilde{g}, P\tilde{g} \in L_2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη:

α) $\langle Qg, P\tilde{g}\rangle = \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle Qg, M_m T_n \tilde{g}\rangle M_m T_n g, P\tilde{g} \right\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle Qg, M_m T_n \tilde{g}\rangle \langle M_m T_n g, P\tilde{g}\rangle$.

β) Πανομοιότυπη με το α).

γ)

$$\begin{aligned}
\langle Pg, M_m T_n \tilde{g}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} Pg(x)\overline{(M_m T_n \tilde{g})(x)}dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)e^{-2\pi imx}\overline{\tilde{g}(x-n)}dx = \\
&-i\left(\left[g'(x)e^{-2\pi imx}\overline{\tilde{g}(x-n)}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)(e^{-2\pi imx}\overline{\tilde{g}(x-n)})'dx\right) = \\
&-i\int_{-\infty}^{+\infty}(-2\pi im)g(x)e^{-2\pi imx}\overline{\tilde{g}(x-n)}dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2\pi imx}\overline{\tilde{g}'(x-n)}dx = \\
&2\pi m\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2\pi imx}\overline{\tilde{g}(x-n)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2\pi imx}\overline{i\cdot\tilde{g}'(x-n)}dx = \\
&2\pi m\langle g, M_m T_n \tilde{g}\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} g(y+n)e^{-2\pi imy}\overline{i\cdot\tilde{g}'(y)}dy = 2\pi m\langle g, M_m T_n \tilde{g}\rangle + \langle M_{-m}T_{-n}g, P\tilde{g}\rangle
\end{aligned}$$

Όμως η $\{M_m T_n \tilde{g}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι ημιορθογώνια της $\{M_m T_n g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ ως δυϊκή της άρα $2\pi m\langle g, M_m T_n \tilde{g}\rangle = 0$, για $m \neq 0$ ενώ για $m = 0$ προφανώς είναι μηδέν. Τελικά

$$\langle Pg, M_m T_n \tilde{g}\rangle = \langle M_{-m} T_{-n} g, P\tilde{g}\rangle .$$

δ)

$$\begin{aligned}
\langle M_{-m}T_{-n}g, Q\tilde{g}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi imx} g(x+n)\overline{x\tilde{g}(x)}dx \overset{y=x+n}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi im(y-n)} g(y)\overline{(y-n)\tilde{g}(y-n)}dy = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)e^{-2\pi imy}\overline{\tilde{g}(y-n)}dy - n\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-2\pi imy}\overline{\tilde{g}(y-n)}dy = \langle Qg, M_m T_n \tilde{g}\rangle - n\langle g, M_m T_n \tilde{g}\rangle
\end{aligned}$$

Για $n \neq 0$, λόγω ορθογωνιότητας των $\{M_m T_n \tilde{g}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ και $\{M_m T_n g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ ισχύει $\langle g, M_m T_n \tilde{g}\rangle = 0$, άρα ενώ για $n = 0$, προφανώς ο όρος $n\langle g, M_m T_n \tilde{g}\rangle$ μηδενίζεται. Τελικά ισχύει $\langle M_{-m} T_{-n} g, Q\tilde{g}\rangle = \langle Qg, M_m T_n \tilde{g}\rangle$.

ε)

Απ' τις σχέσεις **4.1** και **4.2** θέτοντας όπου h τη $\tilde{g}$, προκύπτει

$$ZQ\tilde{g}(t,\xi) = t\cdot Z\tilde{g}(t,\xi) + \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(Z\tilde{g})(t,\xi) \text{ και } ZP\tilde{g}(t,\xi) = -i\frac{\partial}{\partial t}(Z\tilde{g})(t,\xi) \text{ όπου}$$

$A \leq |Z\tilde{g}|^2 \leq B$ αφού η $\{M_m T_n \tilde{g}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι βάση Riesz ως δυϊκή της $\{M_m T_n g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, συνεπώς $ZQ\tilde{g}, ZP\tilde{g} \in L_2(Q)$, άρα $Q\tilde{g}, P\tilde{g} \in L_2(\mathbb{R})$ αφού ο Z είναι ορθομοναδιαίος επί του $L_2(Q)$. ■

Θεώρημα 4.2.13. (Balian-Low) Έστω συνάρτηση $g, g' \in L_2(\mathbb{R})$ και $\{M_m T_n g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι μία βάση Riesz του $L_2(\mathbb{R})$. Τότε είτε $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |g(x)|^2\, dx = \infty$ είτε $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2\, d\xi = \infty$.

Απόδειξη:

Έστω ότι οι συναρτήσεις $xg(x)$ και $\xi\hat{g}(\xi)$ ανήκουν στον $L_2(\mathbb{R})$.

Όμως ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |g(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |(Qg)(x)|^2\, dx$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{4\pi^2} 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2\, d\xi = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|g'(\xi)\right|^2 d\xi =$$
$$\frac{1}{4\pi^2}\left\|g'\right\|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\|g'\|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |-i\cdot g'(x)|^2\, dx = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |(Pg)(x)|^2\, dx$$

αφού ισχύει

$g'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) e^{-2\pi i\xi x} dx = \left[g(x)e^{-2\pi i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)(-2\pi i\xi e^{-2\pi i\xi x})dx = 2\pi i\xi\hat{g}(\xi)$ το οποίο προκύπτει άμεσα απ' το Λήμμα Riemman-Lebesgue. Συνεπώς πρέπει $Qg, Pg \in L_2(\mathbb{R})$.

Απ' τις σχέσεις **4.3-4.4-4.5-4.6** προκύπτει άμεσα ότι :

$$\langle Qg, P\tilde{g}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle Qg, M_mT_n\tilde{g}\rangle\langle M_mT_ng, P\tilde{g}\rangle =$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle M_{-m}T_{-n}g, Q\tilde{g}\rangle\langle Pg, M_{-m}T_{-n}\tilde{g}\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle Pg, M_{-m}T_{-n}\tilde{g}\rangle\langle M_{-m}T_{-n}g, Q\tilde{g}\rangle = \langle Pg, Q\tilde{g}\rangle$$

Όμως ταυτόχρονα $\langle Qg, P\tilde{g}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\left(\overline{-i\cdot\tilde{g}'(x)}\right)dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty}(g(x)+xg'(x))\overline{\tilde{g}(x)}dx =$ $-i\langle g,\tilde{g}\rangle + \langle Pg, Q\tilde{g}\rangle$. Απ’ τις παραπάνω σχέσεις άμεσα συνάγεται ότι $\langle g,\tilde{g}\rangle = 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού η $\{M_mT_ng\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι βάση Riesz του $L_2(\mathbb{R})$, βλέπε Θεώρημα 4.2.2. Συνεπώς οι συναρτήσεις $xg(x)$ και $\xi\hat{g}(\xi)$ δε μπορούν να ανήκουν ταυτόχρονα στον $L_2(\mathbb{R})$. ■

Ως συνέπεια του Θεωρήματος Balian-Low καμία συνάρτηση γεννήτορας δεν επιτυγχάνει καλή τοπικοποίηση ταυτόχρονα στο χρόνο και στη συχνότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΙΣΙΩΝ

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις βάσεις Riesz ως μία εναλλακτική αναπαράστασης έναντι των στενών περιορισμών των ορθοκανονικών βάσεων. Πάραυτα υπήρξαν περιορισμοί όπως το Θεώρημα Balian – Low. Αναζητώντας μεγαλύτερη ευελιξία, θα παρουσιάσουμε τα πλαίσια ως υποκατάστατο της βάσης με κύριο χαρακτηριστικό την υπερπληρότητα, δηλαδή τη μη ελαχιστότητα, διατηρώντας τη σύγκλιση άνευ συνθήκης. Ένα χαρακτηριστικό των πλαισίων που προκύπτει απ' την υπερπληρότητα είναι η μη μοναδικότητα της αναπαράστασης. Επιπλέον η ανοχή στο θόρυβο που επιδεικνύουν οι αναπαραστάσεις μέσω υπερπλήρων πλαισίων τα καθιστούν αρκετά καλά συστήματα αναπαράστασης σημάτων, δηλαδή στοιχείων σε χώρους τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων . Τέλος, επικεντρωνόμαστε στη μελέτη πλαισίων μεταθέσεων στον $L_2(\mathbb{R})$. Βρίσκουμε συνθήκες μέσω μίας συνάρτησης που ορίζουμε, της συνάρτησης περιοδικοποίησης ώστε μία ακολουθία μεταθέσεων να είναι, είτε ακολουθία Riesz είτε πλαίσιο στον $L_2(\mathbb{R})$. Αποδεικνύουμε τελικά ότι μόνον με τις ακολουθίες μεταθέσεων δε μπορούμε να παράξουμε πλαίσια είτε βάσεις Riesz στον $L_2(\mathbb{R})$. Ως βασικές πηγές χρησιμοποιήσαμε τις **[20]**, **[22]** ,**[38]**, **[41]** ,**[42]** ,**[45]** ,**[70]** ,**[86]**.

5.1. Ορισμός και είδη πλαισίων.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετήσαμε χώρους μορφής $L_2(\Omega)$ και δείξαμε ότι το τριγωνομετρικό σύστημα $(e^{2\pi i n \cdot})$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$. Τι συμβαίνει όμως σ' ένα διάστημα $I \subseteq [0,1]$, μέτρου $m(I) < 1$; Παραμένει το τριγωνομετρικό σύστημα βάση του χώρου $L_2(I)$ ή όχι και ποια χαρακτηριστικά διατηρεί; Το νέο χώρο $L_2(I)$, μπορούμε να τον ταυτίσουμε ως έναν υπόχωρο του $L_2[0,1]$, ο οποίος περιέχει εκείνες τις συναρτήσεις του $L_2[0,1]$, οι οποίες είναι μηδέν στο $[0,1]\setminus I$. Μία συνάρτηση f του χώρου $L_2(I)$, ως στοιχείο του $L_2[0,1]$, έχει μία μοναδική αναπαράσταση στον $L_2[0,1]$ της μορφής

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k .$$

Επιπλέον

$$\left\| f - \sum_{|k|\le n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\|_{L_2(I)}^2 = \int_I \left| f(x) - \sum_{|k|\le n} \langle f, e_k \rangle e_k \right|^2 dx \le \int_{[0,1]} \left| f(x) - \sum_{|k|\le n} \langle f, e_k \rangle e_k \right|^2 dx.$$

Άρα αφού $\left\| f - \sum_{|k|\le n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\|_{L_2(T)} \to 0$ και η $\left\| f - \sum_{|k|\le n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\|_{L_2(I)}$ συγκλίνει στο 0. Άρα η $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k$ είναι μία αναπαράσταση της f και στο χώρο $L_2(I)$. Συνεπώς το τριγωνομετρικό σύστημα είναι πλήρες στο χώρο $L_2(I)$. Θα εξετάσουμε αν η αναπαράσταση είναι και μοναδική. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in I \\ 1, & x\notin I \end{cases}$ στο χώρο $L_2[0,1]$, η οποία έχει μοναδική αναπαράσταση $g=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle g,e_k\rangle e_k$ στον $L_2[0,1]$. Εφόσον $f=g$ επί του I , τότε μία αναπαράσταση της f στον $L_2(I)$ είναι η $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle g,e_k\rangle e_k$. Επειδή το τριγωνομετρικό σύστημα είναι ορθοκανονική βάση στον $L_2[0,1]$, οι ακολουθίες συντελεστών $\{\langle g,e_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$ και $\{\langle f,e_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$, είναι διαφορετικές εφόσον αναπαριστούν διαφορετικές συναρτήσεις στον $L_2[0,1]$, άρα η f έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις ως προς το τριγωνομετρικό σύστημα στον $L_2(I)$. Συνεπώς το τριγωνομετρικό σύστημα είναι ένα σύστημα αναπαράστασης στον $L_2(I)$, αλλά δεν είναι βάση του. Από αυτό το παράδειγμα βλέπουμε και συστήματα αναπαράστασης τα οποία δεν είναι βάσεις ενός χώρου. Τέτοια συστήματα είναι και τα πλαίσια τα οποία και θα μελετήσουμε στο παρόν Κεφάλαιο.

Ορισμός 5.1.1. Μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert $(H,\langle\bullet,\bullet\rangle)$ καλείται **πλαίσιο** (***frame***) αν υπάρχουν σταθερές $A,B>0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x\in H$, να ισχύει

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,x_i\rangle|^2 \le B\|x\|^2. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Τις σταθερές $A,B>0$, τις καλούμε ***φράγματα πλαισίου (frame bounds)***, κάτω φράγμα το A και άνω φράγμα το B και δεν είναι μοναδικά . Πάραυτα, το ***βέλτιστο άνω φράγμα*** είναι το ελάχιστο όλων των άνω φραγμάτων και αντιστοίχως το ***βέλτιστο κάτω φράγμα*** είναι το μέγιστο όλων των κάτω φραγμάτων. ♦

Παρατήρηση: Αν μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο για τον χώρο Hilbert $(H,\langle\bullet,\bullet\rangle)$ τότε είναι πλήρης ακολουθία, αφού αν $\langle x,x_i\rangle=0$, για κάθε $i\in\mathbb{N}$, τότε $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,x_i\rangle|^2=0$, άρα απ' την αριστερή ανισότητα της **(5.1)** προκύπτει ότι $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$. ♦

Παράδειγμα: Αν η $\{e_i\}_{i\in I}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert H , τότε η ακολουθία που προκύπτει επαναλαμβάνοντας το 1^o στοιχείο της ορθοκανονικής βάσης δύο φορές, δηλαδή η $\{x_i\}_{i\in I}=\{e_1,e_1,e_2,e_3,....\}$, είναι ένα πλαίσιο για τον H , αφού από την Ταυτότητα Parseval ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2=\|x\|^2$, άρα

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, x_i \rangle\right|^2 \le 2\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 = 2\|x\|^2 .$$

Δηλαδή η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο με φράγματα $A=1$ και $B=2$.

Απ' αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι αν μία ακολουθία είναι πλαίσιο δεν είναι ανάγκη να είναι ελαχιστικό σύνολο αφού και η ακολουθία $\{e_i\}_{i\in I}$ παράγει το χώρο, δηλαδή αφαιρώντας το πρώτο στοιχείο e_1 απ' την ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ η ακολουθία παραμένει πλήρης.

♦

Ορισμός 5.1.2 Ένα πλαίσιο καλείται ***σφικτό (tight),*** αν η σχέση **(5.1)** ισχύει για κάποια επιλογή ίσων φραγμάτων δηλαδή αν $A = B$. ♦

Παράδειγματα: Αν η $\{e_i\}_{i\in I}$ είναι μία ορθοκανονική βάση χώρου Hilbert $\left(H, \langle \bullet, \bullet \rangle\right)$, τότε

i) η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, ...\}$, είναι ένα πλαίσιο για τον H και μάλιστα σφικτό, με φράγμα $A=1$, αφού από την Ταυτότητα Parseval ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 = \|x\|^2$, άρα

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, x_i \rangle\right|^2 = 2\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, e_i \rangle\right|^2 = 2\|x\|^2 .$$

ii) η ακολουθία $\{y_i\}_{i\in I} = \{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...\}$, είναι ένα πλαίσιο για τον H και μάλιστα σφικτό, με φράγμα $A=1$, διότι, εφόσον κάθε όρος $\left|\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k \right\rangle\right|^2$ επαναλαμβάνεται k φορές τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\langle x, y_i \rangle\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\left|\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{k}}e_k \right\rangle\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle x, e_k \rangle\right|^2 = \|x\|^2$$ ♦

Ορισμός 5.1.3. Έστω μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert $\left(H, \langle \bullet, \bullet \rangle\right)$. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ***ακολουθία πλαισίου (frame sequence)*** αν είναι πλαίσιο για τον $\overline{span}\{x_i\}_{i\in I}$.
♦

Αν μία ακολουθία είναι πλαίσιο τότε είναι και ακολουθία Bessel όπως φαίνεται εύκολα απ' το άνω φράγμα του πλαισίου. Συνεπώς οι τελεστές σύνθεσης και ανάλυσης όπως είχαμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι καλά ορισμένοι. Υπενθυμίζουμε λοιπόν ότι ο ***τελεστής σύνθεσης*** είναι ο

$$T:\ell_2(\mathbb{N})\to H \text{, με } T\left(\left(c_i\right)_{i\in\mathbb{N}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i x_i$$

ο οποίος είναι καλά ορισμένος, γραμμικός και φραγμένος όπως δείξαμε , ενώ ο ***τελεστής ανάλυσης*** είναι ο

$$T^*:H\to\ell_2(\mathbb{N}) \text{, με } T^*\left(x\right)=\left\{\left\langle x,x_i\right\rangle\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

ο οποίος είναι επίσης καλά ορισμένος, γραμμικός και φραγμένος . Οι τελεστές σύνθεσης και ανάλυσης είναι μεταξύ τους συζυγείς και απ' τη σύνθεση τους προκύπτει ο ***τελεστής πλαισίου (frame operator)*** $S:H\to H$, ο οποίος είναι καλά ορισμένος, γραμμικός, φραγμένος και αυτοσυζυγής , με $S=TT^*$, δηλαδή

$$S(x)=(TT^*)(x)=T(T^*(x))=T\left(\left\{\left\langle x,x_i\right\rangle\right\}_{i\in\mathbb{N}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,x_i\right\rangle x_i \ .$$

Επιπλέον απ' την Πρόταση 4.1.15, ο S είναι φραγμένος, αντιστρέψιμος, αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος.

Λήμμα 5.1.4. Έστω $\left\{x_i\right\}_{i\in I}$ ένα πλαίσιο σε ένα χώρο Hilbert $\left(H,\left\langle\bullet,\bullet\right\rangle\right)$ με φράγματα A,B και τελεστή πλαισίου S . Τότε η ακολουθία $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ είναι ένα πλαίσιο για τον H με φράγματα A^{-1},B^{-1} με αντίστοιχο τελεστή πλαισίου τον S^{-1}.

Απόδειξη:

Αφού S αυτοσυζυγής και αντιστρέψιμος, για κάθε $x\in H$, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle S^{-1}(x),x_i\right\rangle\right|^2\le B\left\|S^{-1}(x)\right\|^2\le B\left\|S^{-1}\right\|^2\left\|x\right\|^2.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ είναι Bessel, οπότε ο τελεστής πλαισίου είναι καλά ορισμένος. Παρατηρούμε ότι :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle S^{-1}(x_i)=S^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle S^{-1}(x),x_i\right\rangle x_i=S^{-1}SS^{-1}(x)=S^{-1}(x)\,.$$

Συνεπώς ο τελεστής πλαισίου της $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ είναι ο S^{-1}.

Ο τελεστής S^{-1} αντιμετατίθεται με τους S και I, συνεπώς η ανισότητα $AI\le S\le BI$ γράφεται $B^{-1}I\le S^{-1}\le A^{-1}I$, συνεπώς $B^{-1}\left\|x\right\|^2\le\left\langle S^{-1}(x),x\right\rangle\le A^{-1}\left\|x\right\|^2$, για κάθε $x\in H$. Εφόσον ο S^{-1} είναι ο τελεστής πλαισίου της $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ ισχύει

$$S^{-1}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle S^{-1}(x_i),$$

συνεπώς αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα προκύπτει :

$$B^{-1}\|x\|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle\right|^2\leq A^{-1}\|x\|^2,\text{ για κάθε } x\in H,$$

Δηλαδή η $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ είναι ένα πλαίσιο με φράγματα B^{-1}, A^{-1}. ■

Θεώρημα 5.1.5. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ ένα πλαίσιο σε ένα χώρο Hilbert $\left(H,\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$ με τελεστή πλαισίου S. Τότε ισχύει

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle x_i,\text{ για κάθε } x\in H \text{ και} \tag{5.2}$$

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,x_i\right\rangle S^{-1}(x_i),\text{ για κάθε } x\in H\ . \tag{5.3}$$

με τη σύγκλιση να είναι άνευ συνθήκης.

Απόδειξη:

Έστω $x\in H$, τότε απ' το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$x=SS^{-1}x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle S^{-1}(x),x_i\right\rangle x_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle x_i$. Εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ ως πλαίσιο είναι και Bessel και η $\left\{\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle\right\}_{i\in I}\in\ell_2(\mathbb{N})$, τότε η σύγκλιση είναι άνευ συνθήκης απ' το Θεώρημα 4.1.4. Η σχέση $x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,x_i\right\rangle S^{-1}(x_i)$, αποδεικνύεται πανομοιότυπα χρησιμοποιώντας το γεγονός $x=S^{-1}Sx$. ■

Ορισμός 5.1.6. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ ένα πλαίσιο σε ένα χώρο Hilbert $\left(H,\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$ με τελεστή πλαισίου S όπως παραπάνω. Το πλαίσιο $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ καλείται το ***κανονικό δυϊκό (canonical dual) πλαίσιο*** του $\{x_i\}_{i\in I}$. ♦

Ο όρος δυϊκό αιτιολογείται απ' το ότι το $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$, ενέχει αντιστοίχως το ρόλο της δυϊκής βάσης. Επιπλέον απ' το Θεώρημα 5.1.5. παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του χώρου Hilbert μπορεί να παρασταθεί ως υπέρθεση στοιχείων του πλαισίου, δηλαδή αποτελεί ένα σύστημα αναπαράστασης του χώρου.

Πόρισμα 5.1.7. Αν το $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα σφικτό πλαίσιο σε ένα χώρο Hilbert $(H,\langle \bullet,\bullet\rangle)$, με φράγμα A, τότε το κανονικό δυϊκό του πλαίσιο είναι το $\{A^{-1}x_i\}_{i\in I}$ και $x=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle x_i$, για κάθε $x\in H$.

Απόδειξη:

Αν S είναι ο τελεστής πλαισίου του $\{x_i\}_{i\in I}$, τότε ισχύει ότι

$$\langle S(x),x\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2=A\|x\|^2=\langle Ax,x\rangle,\text{ για κάθε } x\in H.$$

Κατά συνέπεια ισχύει $S=AI$, άρα $S^{-1}=A^{-1}I$ και απ' το Θεώρημα 5.1.5., για κάθε $x\in H$ προκύπτει

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle S^{-1}(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle A^{-1}I(x_i)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,x_i\rangle x_i. \quad \blacksquare$$

Λήμμα 5.1.8. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ μία ακολουθία πλαισίου σε ένα χώρο Hilbert $(H,\langle \bullet,\bullet\rangle)$ με τελεστή σύνθεσης $T:\ell_2(\mathbb{N})\to H$. Τότε η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο για τον H αν και μόνον αν ο T^* είναι 1-1.

Απόδειξη:

Εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ακολουθία πλαισίου ισχύει ότι $\operatorname{Im}T=\overline{span}\{x_i\}_{i\in I}$. Όμως ισχύει $KerT^*=\operatorname{Im}^{\perp}T$, άρα ο T^* είναι 1-1 αν και μόνον αν η εικόνα του T είναι πυκνή στον H.

$\blacksquare$

Πρόταση 5.1.9. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ μία ακολουθία πλαισίου σε ένα χώρο Hilbert $(H,\langle \bullet,\bullet\rangle)$ με τελεστή σύνθεσης T και τελεστή ανάλυσης T^* όπως παραπάνω. Τότε ο τελεστής Gram T^*T ορίζει έναν φραγμένο αντιστρέψιμο τελεστή απ' το χώρο Banach $\operatorname{Im}T^*$ επί του $\operatorname{Im}T^*$, με φραγμένο αντίστροφο.

Απόδειξη:

Εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ακολουθία πλαισίου, ισχύει $\operatorname{Im}T = \overline{span}\{x_i\}_{i\in I}$. Επιπλέον ισχύει $H = \operatorname{Im}T \oplus \operatorname{Im}^{\perp} T = \operatorname{Im}T \oplus KerT^{*}$, συνεπώς κάθε στοιχείο x του H γράφεται ως $x = T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} + z$, για κάποια ακολουθία συντελεστών $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ και $z \in KerT^{*}$. Συνεπώς $T^{*}x = T^{*}T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} + T^{*}z = T^{*}T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $\operatorname{Im}T^{*}T = \operatorname{Im}T^{*}$. Άρα ο T^{*} είναι 1-1 αν και μόνον αν η εικόνα του T είναι πυκνή στον H. ■

Όπως δείξαμε στο Λήμμα 5.1.4. αν το $\{x_i\}_{i\in I}$ ένα πλαίσιο σε ένα χώρο Hilbert H με τελεστή πλαισίου S, τότε η ακολουθία $\left\{S^{-1}(x_i)\right\}_{i\in I}$ είναι επίσης πλαίσιο και μάλιστα το δυϊκό της $\{x_i\}_{i\in I}$. Σκοπός είναι να εξετάσουμε τι συμβαίνει αν στη θέση του S^{-1} είχαμε έναν φραγμένο τελεστή με κλειστή εικόνα. Θα θεωρήσουμε τον ψευδοαντίστροφο $U^{\dagger}$ (Λήμμα 1.3.8) του U.

Πρόταση 5.1.10. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ ένα πλαίσιο σε ένα χώρο Hilbert $\left(H, \langle \bullet,\bullet \rangle\right)$ με φράγματα $A, B > 0$. Θεωρούμε επίσης έναν φραγμένο τελεστή $U \neq 0$, με κλειστή εικόνα. Τότε η ακολουθία $\{Ux_i\}_{i\in I}$, είναι μία ακολουθία πλαισίου με φράγματα $A\left\|U^{\dagger}\right\|^{-2}$, $B\|U\|^{2}$.

Απόδειξη:

Έστω $x \in H$, τότε ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x, Ux_i\rangle\right|^{2} = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle U^{*}x, x_i\rangle\right|^{2} \leq B\left\|U^{*}x\right\|^{2} \leq B\|U\|^{2}\|x\|^{2}$, απ' το οποίο προκύπτει ότι η $\{Ux_i\}_{i\in I}$ είναι μία Bessel ακολουθία . Έστω $y \in \operatorname{Im}U$, τότε υπάρχει $x \in H$, τέτοιος ώστε $y = Ux$. Όμως ο τελεστής $UU^{\dagger}$ είναι ορθογώνια προβολή (Λήμμα 1.3.8.) επί του $\operatorname{Im}U$ άρα είναι αυτοσυζυγής τελεστής, συνεπώς ισχύει

$$y = Ux = (UU^{\dagger})^{*}Uf = (U^{\dagger})^{*}U^{*}Ux,$$

απ' το οποίο προκύπτει ότι

$$\|y\|^{2} \leq \left\|(U^{\dagger})^{*}\right\|^{2}\left\|U^{*}Ux\right\|^{2} \leq \frac{\left\|(U^{\dagger})^{*}\right\|^{2}}{A}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle U^{*}Ux, x_i\rangle\right|^{2} = \frac{\left\|U^{\dagger}\right\|^{2}}{A}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle y, Ux_i\rangle\right|^{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{A}{\left\|U^{\dagger}\right\|^{2}}\|y\|^{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle y, Ux_i\rangle\right|^{2}$$

Συνεπώς το $\frac{A}{\left\|U^{\dagger}\right\|^{2}}$ είναι κάτω φράγμα για κάθε $y \in \operatorname{Im}U$. ■

Πόρισμα 5.1.11. Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ακολουθία πλαισίου σε ένα χώρο Hilbert H με φράγματα $A,B>0$ και ο $U:H\to H$ είναι ορθομοναδιαίος τελεστής τότε ισχύει ότι , η $\{Ux_i\}_{i\in I}$ είναι ακολουθία πλαισίου με φράγματα $A,B>0$. ♦

Από το Θεώρημα 5.1.5. διαπιστώνουμε ότι μία αναπαράσταση ενός στοιχείου x ενός χώρου Hilbert H ως προς ένα πλαίσιο $\{x_i\}_{i\in I}$ του χώρου είναι πάντα η $x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle x_i$. Ένα πρώτο ερώτημα που γεννάται είναι αν είναι μοναδική αυτή η αναπαράσταση.

Έστω $\{e_i\}_{i\in I}$, μία ορθοκανονική βάση του H, τότε η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}=\{e_1,e_1,e_2,e_3,....\}$ είναι ένα πλαίσιο του H απ' το παράδειγμα που έπεται του ορισμού 5.1.1. Απ' τη σχέση **(5.3)** για κάθε $x\in H$, ισχύει ότι

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,x_i\right\rangle S^{-1}(x_i)=2\left\langle x,e_1\right\rangle S^{-1}(e_1)+\sum_{i=3}^{\infty}\left\langle x,e_{i-1}\right\rangle S^{-1}(e_{i-1}).$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση όπου x τα $e_k,\ k\in\mathbb{N}$, προκύπτει ότι $S^{-1}(x_1)=S^{-1}(x_2)=\frac{1}{2}e_1$ και $S^{-1}(x_i)=e_{i-1},\ i\geq 3$. Συνεπώς το κανονικό δυϊκό του είναι το

$\{S^{-1}x_i\}_{i\in I}=\left\{\frac{1}{2}e_1,\frac{1}{2}e_1,e_2,e_3,....\right\}$. Εύκολα φαίνεται πως και το $\{y_i\}_{i\in I}=\{0,e_1,e_2,e_3,....\}$, είναι ένα δυϊκό πλαίσιο του $\{x_i\}_{i\in I}$, το οποίο παράγει μία διαφορετική ακολουθία συντελεστών απ' το κανονικό (προκύπτει εύκολα αναλογιζόμενοι την αναπαράσταση του e_1 ως προς καθένα απ' τα δυϊκά πλαίσια), συνεπώς η αναπαράσταση του x, δεν είναι μοναδική ως προς το αρχικό πλαίσιο.

Πρόταση 5.1.12. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα πλαίσιο για τον H με $x\in H$. Αν το x αναπαρίσταται ως $x=\sum_{i=1}^{\infty}c_i x_i$ για μια ακολουθία συντελεστών $\{c_i\}_{i\in I}\in\ell_2(\mathbb{N})$, τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle x,S^{-1}x_i\right\rangle\right|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left|c_i-\left\langle x,S^{-1}x_i\right\rangle\right|^2.$$

Απόδειξη:

Από το Θεώρημα 5.1.5. ισχύει $x=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle x_i$. Θέτουμε $a_i=\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle,\ i\in\mathbb{N}$ τους συντελεστές του προηγούμενου αναπτύγματος. Έστω $\{c_i\}_{i\in I}$ μια ακολουθία συντελεστών για την οποία ισχύει ότι $x=\sum_{i=1}^{\infty}c_ix_i$. Εφόσον ο S^{-1} είναι αυτοσυζυγής ισχύει

$$\left\langle x,S^{-1}(x)\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle x_i,S^{-1}(x)\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle\left\langle x_i,S^{-1}(x)\right\rangle=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle x,S^{-1}(x_i)\right\rangle\left\langle S^{-1}(x_i),x\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\overline{a}_i=\left\langle (a_i)_{i\in\mathbb{N}},(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\rangle$$

και

$$\left\langle x,S^{-1}(x)\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{\infty}c_ix_i,S^{-1}(x)\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left\langle x_i,S^{-1}(x)\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left\langle S^{-1}(x_i),x\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\overline{a}_i=\left\langle (c_i)_{i\in\mathbb{N}},(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\rangle$$

Συνεπώς

$$\left\langle (c_i)_{i\in\mathbb{N}},(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\rangle=\left\langle (a_i)_{i\in\mathbb{N}},(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\rangle\Leftrightarrow\left\langle (c_i)_{i\in\mathbb{N}}-(a_i)_{i\in\mathbb{N}},(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\rangle=0 \text{ στον } \ell_2(\mathbb{N}),$$

οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει το ζητούμενο:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2=\|(c_i)_{i\in\mathbb{N}}\|^2=\|(c_i)_{i\in\mathbb{N}}-(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|^2+\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left\langle x,S^{-1}x_i\right\rangle\right|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\left|c_i-\left\langle x,S^{-1}x_i\right\rangle\right|^2$$

■

Ορισμός 5.1.13. Μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H , η οποία παράγει το χώρο , δηλαδή $H=\overline{span}\{x_i\}_{i\in I}$, καλείται ***υπερπλήρης (overcomplete)*** αν με την αφαίρεση κάποιου στοιχείου η ακολουθία παραμένει πλήρης, δηλαδή παράγει το χώρο.

Θεώρημα 5.1.14. Μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H , είναι ένα πλαίσιο για τον H , αν και μόνον αν και μόνο αν ο τελεστής $T:\ell_2(\mathbb{N})\to H$ με $T\{c_i\}_{i\in I}=\sum_{i=1}^{\infty}c_ix_i$, είναι καλά ορισμένος και επί του H .

Απόδειξη:

Θα δείξουμε πρώτα το ευθύ. Θεωρώντας ότι η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$, είναι ένα πλαίσιο στον H , τότε ο τελεστής σύνθεσης είναι καλά ορισμένος και απ' την Πρόταση 4.1.15. ο τελεστής πλαισίου $S=TT^*$ είναι επί , άρα και ο T είναι επί.

Αντιστρόφως , αν ο T είναι καλά ορισμένος και επί τότε απ' το Θεώρημα 4.1.7. η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ακολουθία Bessel και παράγει όλο το χώρο H . Αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής S είναι κάτω φραγμένος ώστε να είναι πλαίσιο. Έστω $T^\dagger$ ο ψευδοαντίστροφος του R, ο οποίος ως επί απεικονίζει κάθε στοιχείο του H σε μία ακολουθία του $\ell_2(\mathbb{N})$, δηλαδή

$$T^\dagger x = (d_i)_{i\in\mathbb{N}},\ \text{με } |d_k|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}|d_i|^2 = \|T^\dagger x\|^2 \le \|T^\dagger\|^2\|x\|^2 .$$

Για κάθε $x \in H$, ισχύει $x = TT^\dagger x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i x_i$ και χρησιμοποιώντας αυτή τη γραφή προκύπτει ότι ,

$$\|x\|^4 = |\langle x, x\rangle|^2 = \left|\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} d_i x_i, x\right\rangle\right|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}|d_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, x_i\rangle|^2 \le \|T^\dagger\|^2\|x\|^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, x_i\rangle|^2 ,$$

τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, x_i\rangle|^2 \ge \frac{1}{\|T^\dagger\|^2}\|x\|^2 .$$

■

Πόρισμα 5.1.15. Για μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H , ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ακολουθία πλαίσιο για τον H , αν και μόνον αν και μόνο αν ο τελεστής $U : H \to \ell_2(\mathbb{N})$ με $Ux = \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, x_i\rangle|^2$ είναι καλά ορισμένος επί ενός κλειστού υποχώρου του $\ell_2(\mathbb{N})$.

(ii) Αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μία ακολουθία πλαισίου για τον H , τότε είναι πλαίσιο για τον H , αν και μόνον αν ο U είναι 1-1 .

Απόδειξη:

(i) Αν η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πλαισίου, τότε υπάρχουν θετικές σταθερές *A, B* έτσι ώστε

$$A\|x\|^2 \le \|T^*(x)\|^2 \le B\|x\|^2 .$$

Αρα ο τελεστής ο τελεστής ανάλυσης T^* είναι φραγμένος και έχει κλειστή εικόνα. Αντιστρόφως, αν ο T^* είναι καλά ορισμένος επί ενός κλειστού υποχώρου του $\ell_2(\mathbb{N})$, τότε η $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Bessel, αφού για κάθε $x\in H$, ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,x_i\rangle|^2<\infty$. Συνεπώς ο τελεστής σύνθεσης T είναι καλά ορισμένος και φραγμένος και έχει κλειστή εικόνα αφού ο T^* έχει κλειστή εικόνα. Αρα η $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία πλαισίου.

(ii) Βλέπε Λήμμα 5.1.8. ■

Θεώρημα 5.1.16. Έστω $\{e_i\}_{i\in I}$ μία ορθοκανονική βάση του H. Τα πλαίσια του H είναι ακριβώς οι ακολουθίες της μορφής $\{Ue_i\}_{i\in I}$, όπου $U:H\to H$ είναι ένας φραγμένος και επί τελεστής.

Απόδειξη:

Έστω $\{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ η κανονική βάση του $\ell_2(\mathbb{N})$ και $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, είναι μία ορθοκανονική βάση του H. Θεωρούμε τον ισομετρικό ισομορφισμό $\Phi:H\to\ell_2(\mathbb{N})$, με $\Phi e_i=\delta_i$. Αν η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι πλαίσιο του H τότε ο τελεστής σύνθεσης T είναι επί και φραγμένος με $T\delta_i=e_i$. Θέτοντας $U=T\Phi$, ισχύει $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}=\{Ue_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ με U επί και φραγμένο. . Αν τώρα $U:H\to H$ φραγμένος και επί τελεστής, τότε η $\{Ue_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι πλαίσιο διότι

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,Ue_i\rangle|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle U^*x,e_i\rangle|^2=\|U^*x\|^2,$$

άρα

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,Ue_i\rangle|^2\le\|U^*\|^2\|x\|^2$$

και αφού U επί, υπάρχει $C>0$ ώστε

$$C\|x\|^2\le\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,Ue_i\rangle|^2.$$

■

Λήμμα 5.1.17. Μία ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H, είναι ένα πλαίσιο για τον H με φράγματα A,B, αν και μόνον αν η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλήρης Bessel και ισχύει

$A\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 \le \left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 \le B\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$, για κάθε $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in (KerT)^{\perp}$, όπου T ο τελεστής σύνθεσης.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε πρώτα το ευθύ. Θεωρώντας ότι η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$, είναι ένα πλαίσιο στον H, τότε είναι πλήρης ακολουθία Bessel με φράγμα B και ο τελεστής ανάλυσης T^* έχει κλειστή εικόνα άρα $(KerT)^{\perp} = \operatorname{Im}T^*$ άρα ο τελεστής σύνθεσης είναι καλά ορισμένος και απ' την Θεώρημα 4.1.14. ισχύει $\|T\|^2 \le B$. Συνεπώς η άνω ανισότητα $\left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 \le B\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$, για κάθε $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$. Για την κάτω ανισότητα θεωρούμε μία ακολουθία $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in (KerT)^{\perp} = \operatorname{Im}T^*$, τότε $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} = T^*x$, για κάποιον $x\in H$, συνεπώς χρησιμοποιώντας το ότι $A\|x\|^2 \le \|T^*x\|^2$, ισχύει ότι

$$A\left\|\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^4 = A\left|\left\langle \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\rangle\right|^2 = A\left|\left\langle \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}, T^*x\right\rangle\right|^2 =$$

$$= A\left|\left\langle T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}, x\right\rangle\right|^2 \le A\left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2\|x\|^2 \le \left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2\|T^*x\|^2 \le \left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2\left\|\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 \Leftrightarrow$$

$A\left\|\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 \le \left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2$ συνεπώς αποδείξαμε και την κάτω ανισότητα.

Για το αντίστροφο , εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι Bessel τότε ο T είναι καλά ορισμένος και λόγω της πληρότητας ο T έχει πυκνή εικόνα από το Θεώρημα 4.1.4. . Από το Θεώρημα 5.1.14. αρκεί να δείξουμε ότι ο T είναι επί . Έστω $y\in H$, εφόσον η $\operatorname{Im}T$ είναι πυκνή τότε υπάρχει ακολουθία $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Im}T$, τέτοια ώστε να ισχύει $y_i \to y$. Για κάθε y_i υπάρχει ακολουθία $\{c_{k,i}\}_{k\in\mathbb{N}} \in (KerT)^{\perp}$, τέτοια ώστε $T\{c_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = y_i$. Από υπόθεση ισχύει $A\left\|\{c_{m,k}\}_{k\in\mathbb{N}} - \{c_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|^2 \le \left\|T\{c_{m,k}\}_{k\in\mathbb{N}} - T\{c_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|^2 = \|y_m - y_m\|^2$. Συνεπώς η $\{c_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον πλήρη $\ell_2(\mathbb{N})$, άρα υπάρχει $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, τέτοια ώστε $\left\|\{c_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} - \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right\| \to 0$, άρα $T\{c_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \to T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, εφόσον ο T είναι φραγμένος. Αφού $T\{c_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} = y_n \to y$, απ' τη μοναδικότητα του ορίου ισχύει $y = T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Im}T$, συνεπώς ο T είναι επί. ■

Θεώρημα 5.1.18. Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα πλαίσιο για τον H, τότε αν αφαιρέσουμε ένα στοιχείο x_j απ' το πλαίσιο τότε η $\{x_i\}_{i\neq j}$,είτε είναι ένα πλαίσιο, είτε είναι μη πλήρες σύνολο. Συγκεκριμένα:

(i) Αν $\left\langle x_j, S^{-1}x_j \right\rangle = 1$, τότε η $\{x_i\}_{i\neq j}$ είναι μη πλήρες σύνολο.

(ii) Αν $\left\langle x_j, S^{-1}x_j \right\rangle \neq 1$, τότε η $\{x_i\}_{i\neq j}$ είναι ένα πλαίσιο.

Απόδειξη:

Έστω j ένας τυχαίος δείκτης , τότε για το στοιχείο x_j ισχύει $x_j = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle x_j, S^{-1}x_i \right\rangle x_i$.

Θέτουμε $a_i = \left\langle x_j, S^{-1}x_i \right\rangle$, τους συντελεστές άρα $x_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Επιπλέον ισχύει

$x_j = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ij} \cdot x_i$, συνεπώς από την Πρόταση 5.1.12. ισχύει ότι

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - \delta_{ij}|^2 = |a_j|^2 + \sum_{i\neq j} |a_i|^2 + |a_j - 1|^2 + \sum_{i\neq j} |a_i|^2 .$$

1η Περίπτωση: Έστω ότι $a_j = 1$, τότε $\sum_{i\neq j} |a_i|^2 = 0$, δηλαδή

$a_i = 0 \Leftrightarrow \left\langle x_j, S^{-1}x_i \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle S^{-1}x_j, x_i \right\rangle = 0$, για κάθε $i \neq j$. Εφόσον $\left\langle S^{-1}x_j, x_j \right\rangle = 1$, τότε $S^{-1}x_j \neq 0$. Συνεπώς το $S^{-1}x_j$ είναι μη μηδενικό και κάθετο στην $\{x_i\}_{i\neq j}$, άρα η $\{x_i\}_{i\neq j}$ είναι μη πλήρες σύνολο.

2η Περίπτωση: Έστω ότι $a_j \neq 1$, τότε ισχύει

$x_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = a_j x_j + \sum_{i\neq j}^{\infty} a_i x_i \Leftrightarrow x_j = \dfrac{1}{1-a_j} \sum_{i\neq j}^{\infty} a_i x_i$. Άρα για κάθε $x \in H$,

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει ότι:

$$\left|\left\langle x_j, x \right\rangle\right|^2 = \left| \frac{1}{1-a_j} \sum_{i\neq j}^{\infty} a_i \left\langle x_i, x \right\rangle \right|^2 \leq \frac{1}{|1-a_j|^2} \sum_{i\neq j}^{\infty} |a_i|^2 \sum_{i\neq j} \left|\left\langle x_i, x \right\rangle\right|^2 = C \sum_{i\neq j} \left|\left\langle x_i, x \right\rangle\right|^2$$ με

$C = \dfrac{1}{|1-a_j|^2} \sum_{i\neq j}^{\infty} |a_i|^2$. Έστω A ένα κάτω φράγμα για το $\{x_i\}_{i\in I}$. Τότε:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|\left\langle x, x_i \right\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\left\langle x_i, x \right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle x_j, x \right\rangle\right|^2 + \sum_{i\neq j} \left|\left\langle x_i, x \right\rangle\right|^2 \leq (1+C) \sum_{i\neq j} \left|\left\langle x_i, x \right\rangle\right|^2 \Leftrightarrow$$

$\frac{A}{(1+C)}\|x\|^2 \leq \sum_{i\neq j}\left|\langle x_i, x\rangle\right|^2$. Αν το B είναι άνω φράγμα για το $\{x_i\}_{i\in I}$, τότε προφανώς είναι άνω φράγμα και για το $\{x_i\}_{i\neq j}$, άρα το $\{x_i\}_{i\neq j}$ τελικά είναι πλαίσιο. ■

Ήδη απ' το 2 Κεφάλαιο έχουμε ορίσει την έννοια του ακριβούς συνόλου , την οποία επεκτείνουμε με τον παρακάτω ορισμό στα πλαίσια.

Ορισμός 5.1.19. Η ακολουθία $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα ακριβές πλαίσιο για τον H, αν είναι πλαίσιο για τον H και η αφαίρεση ενός στοιχείου της το τρέπει σε μία μη πλήρη ακολουθία.

Πόρισμα 5.1.20. Αν το $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα ακριβές πλαίσιο για τον H, τότε οι ακολουθίες $\{x_i\}_{i\in I}$ και $\{S^{-1}x_i\}_{i\in I}$ είναι ημιορθογώνιες και η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση του H.

Απόδειξη:

Έστω ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα ακριβές πλαίσιο και j ένας τυχαίος δείκτης, τότε η $\{x_i\}_{i\neq j}$ δεν είναι πλαίσιο και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.16. ισχύει ότι $\langle x_j, S^{-1}x_j\rangle = 1$. Επιπλέον απ' την απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος προκύπτει ότι $\langle x_j, S^{-1}x_i\rangle = \delta_{ij}$, συνεπώς οι $\{x_i\}_{i\in I}, \{S^{-1}x_i\}_{i\in I}$ είναι ημιορθογώνιες. Επιπλέον κάθε $x\in H$ γράφεται στη μορφή $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, S^{-1}x_i\rangle x_i$. Αν μία ακόμα αναπαράσταση του x ως προς την $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι η $x=\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$, τότε ισχύει

$\langle x, S^{-1}x_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j, S^{-1}x_i\right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \langle x_j, S^{-1}x_i\rangle = b_j$. Εφόσον η αναπαράσταση είναι μοναδική , τότε είναι βάση για τον H. ■

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούμαστε στο παρακάτω Θεώρημα το οποίο ορίζει τη σχέση μεταξύ ακριβών πλαισίων και βάσεων Riesz.

Θεώρημα 5.1.21. Αν το $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ένα πλαίσιο για τον H, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι Riesz βάση για τον H.

ii. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ακριβές πλαίσιο για τον H.

iii. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ελαχιστικό σύνολο.

iv. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ έχει ημιορθογώνια ακολουθία .

v. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ και η $\{S^{-1}x_i\}_{i\in I}$ είναι ημιορθογώνιες .

vi. Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ω-ανεξάρτητο σύνολο.

vii. Αν $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i = 0$, για κάποια $\{b_i\}_{i\in J} \in \ell_2(\mathbb{N})$, τότε ισχύει $b_i = 0$, για κάθε $i \in J$.

viii.Η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι Riesz βάση για τον H.

Απόδειξη:

i $\Leftrightarrow$ ii Μία βάση Riesz είναι ένα πλαίσιο κι ως βάση αν αφαιρεθεί κάποιο στοιχείο της παύει να παράγει το χώρο, άρα είναι ακριβές πλαίσιο κι αντιστρόφως αν είναι ακριβές πλαίσιο είναι πλήρες , ελαχιστικό και απ' το Θεώρημα 4.1.14. είναι βάση Riesz.

ii $\Leftrightarrow$ iii Ένα ακριβές σύνολο είναι κι ελαχιστικό κι εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο τότε είναι πλήρες σύνολο και ταυτόχρονα ελαχιστικό άρα ακριβές.

iii $\Leftrightarrow$ iv Ένα ελαχιστικό σύνολο έχει ημιορθογώνια ακολουθία κι αντιστρόφως από Λήμμα 2.2.3.

iv $\Leftrightarrow$ v Αν έχει ημιορθογώνια ακολουθία τότε είναι ακριβές πλαίσιο απ' το Πόρισμα 5.1.17. οι $\{x_i\}_{i\in I}$ και η $\{S^{-1}x_i\}_{i\in I}$ είναι ημιορθογώνιες. Το αντίστροφο είναι προφανές .

v$\Rightarrow$vi Το v είναι ισοδύναμο του iii άρα το $\{x_i\}_{i\in I}$ ως ελαχιστικό είναι και ω-ανεξάρτητο απ' την Πρόταση 2.2.2.

vi$\Rightarrow$vii Προφανές απ' τον ορισμό της ω-ανεξαρτησίας.

vii$\Rightarrow$i Έστω $\{\delta_i\}_{i\in I}$ η κανονική βάση του $\ell_2(\mathbb{N})$, τότε ο τελεστής σύνθεσης T απ' το Θεώρημα 5.1.14. είναι επί εφόσον η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο και ταυτόχρονα είναι 1-1 απ' την υπόθεση αφού αν $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i = 0$, για κάποια $\{b_i\}_{i\in J} \in \ell_2(\mathbb{N})$, τότε ισχύει $b_i = 0$, για κάθε $i \in J$, συνεπώς είναι ισομορφισμός. Έστω $\{e_i\}_{i\in I}$ ορθοκανονική βάση του H τότε υπάρχει ισομορφισμός $L: H \to \ell_2(\mathbb{N})$ με $L(e_i) = \delta_i$, τότε ο τελεστής $P = TL$, είναι ισομορφισμός μεταξύ μίας ορθοκανονικής βάσης του H και της $\{x_i\}_{i\in I}$, άρα είναι βάση Riesz .

viii $\Leftrightarrow$ i Έστω ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι βάση τότε είναι πλήρες κι ελαχιστικό σύνολο κι επιπλέον είναι πλαίσιο άρα απ' το Θεώρημα 4.1.14 είναι βάση Riesz. Το αντίστροφο είναι προφανές. ■

Παρατήρηση: Δεν πρέπει να υπάρξει η παρερμηνεία ότι αφαιρώντας ένα πλήθος στοιχείων από ένα πλαίσιο τότε πάντα καταλήγουμε σε ένα ακριβές πλαίσιο είτε ισοδύναμα ότι ένα πλαίσιο πάντα περιέχει μία βάση Riesz. Π.χ. αν θεωρήσουμε το πλαίσιο του παραδείγματος ii κάτω απ' τον Ορισμό 5.1.2. δηλαδή το $\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...\}$, τότε παρατηρούμε ότι όποιο υποσύνολο του και να πάρουμε και όσο μικρό κάτω φράγμα $\varepsilon > 0$ να πάρουμε στη σχέση $\varepsilon\|x\|^2 \le \sum_{k\in J}\left|\langle x_k, x\rangle\right|^2$, τότε ο όρος $\frac{1}{\sqrt{n}}e_n$ πρέπει να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές , άρα δεν είναι ω-ανεξάρτητο άρα δεν είναι βάση Riesz. ♦

5.2. Ακολουθίες πλαισίων μεταθέσεων σε χώρους L_2 .

Στη συνέχεια του Κεφαλαίου θα ακολουθήσουμε τη μορφή των δύο προηγούμενων επεκτείνοντας τα αρχικά αποτελέσματα σε χώρους τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Στην επεξεργασία σήματος οι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ενέχουν κεντρική θέση εφόσον παριστάνουν σήματα. Π.χ. αν η $f \in L_2(\mathbb{R})$ είναι ένα σήμα προς μετάδοση και $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ένα σύστημα αναπαράστασης, ας θεωρήσουμε ένα πλαίσιο, στον $L_2(\mathbb{R})$, τότε ο μεταδότης υπολογίζει και στέλνει τους συντελεστές ως προς τον λήπτη δηλαδή τους $\{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$, όπου $f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, f_k\rangle S^{-1}f_k$. Στην πραγματικότητα μόνο με ένα πεπερασμένο πλήθος συντελεστών συμβαίνει αυτό. Η αναπαράσταση της f δηλαδή είναι της μορφής $f \sim \sum_{k=1}^{N}\langle f, f_k\rangle S^{-1}f_k$. Ακόμα και σε πεπερασμένου πλήθους αναπαραστάσεις προκύπτουν σφάλματα. Έστω w_k το σφάλμα που αντιστοιχεί στον k -οστό συντελεστή. Τότε μεταδίδεται η $g = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\langle f, f_k\rangle + w_k\right)S^{-1}f_k = f + S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}w_k f_k$, όπου ο όρος $S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}w_k f_k$ αποτελεί το θόρυβο του σήματος. Όμως το πλαίσιο $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ αν είναι υπερπλήρες τότε ο πυρήνας του τελεστή σύνθεσης $T\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty}c_k f_k$, είναι μη τετριμμένος , συνεπώς μέρος του όρου του θορύβου $\sum_{k=1}^{\infty}w_k f_k$ μπορεί να μηδενίζεται. Αν μάλιστα τους συντελεστές w_k τους θεωρήσουμε ως τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 , τότε η διαφορά του σήματος απ' το σήμα με το θόρυβο είναι η $g-f=S^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}w_k f_k$. Αποδεικνύεται ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μικραίνει όσο μεγαλώνει όσο περισσότερα στοιχεία έχει το πλαίσιο και όσο μεγαλύτερο είναι το κάτω φράγμα του πλαισίου. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον παραγόμενο θόρυβο και την ελαχιστοποίηση του παραπέμπουμε στο **[32]** . Η αναγκαιότητα για ελαχιστοποίηση του θορύβου είναι προφανής απ' την πληθώρα των εφαρμογών **[20]**, **[22]**, **[54]**.

Αναγνωρίζοντας λοιπόν τη σημασία των πλαισίων στη μελέτη συναρτήσεων σε χώρους $L_2(\mathbb{R})$, θα μελετήσουμε λοιπόν πλαίσια μεταθέσεων της μορφής $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, όπου $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$. Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιούμε συχνά τη συνάρτηση περιοδικοποίησης Φ την οποία ορίζουμε παρακάτω.

Ορισμός 5.2.1. Η συνάρτηση $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\Phi(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{b}\right)\right|^2$, καλείται ***συνάρτηση περιοδικοποίησης (periodization)*** της φ . ♦

Παρατηρούμε ότι η Φ , είναι 1- περιοδική συνάρτηση. Επιπλέον η $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{b}\right)\right|^2$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, αφού ισχύει

$$\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\varphi\left(\frac{\xi+k}{b}\right)\right|^2 d\xi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{b}\right)\right|^2 d\xi\overset{\gamma=\xi+k}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\gamma}{b}\right)\right|^2 d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{b}\right)\right|^2 d\xi<\infty$$

Δηλαδή $\Phi\in L_1(T)$.

Λήμμα 5.2.2. Έστω $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$, M και T είναι οι τελεστές διαμόρφωσης και μετάθεσης που ορίσαμε στο κεφάλαιο 3, $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία Bessel ακολουθία και F ο μετασχηματισμός Fourier ως τελεστής επί του L_2(R). Αν $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell_2(\mathbb{N})$, τότε η $\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kT_k\varphi$ συγκλίνει στον $L_2(\mathbb{R})$ και η $\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kM_{-k}(1)$ συγκλίνει στον $L_2(T)$, με

$$F\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kT_k\varphi\right)=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kM_{-k}(1)\right)\hat{\varphi}.$$

Απόδειξη:

Εφόσον η $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι Bessel απ' το Θεώρημα 4.1.4. τότε η $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_k\varphi$ συγκλίνει στον $L_2(\mathbb{R})$ ενώ η $\{M_{-k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι βάση του $L_2(T)$, άρα η $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k M_{-k}$ συγκλίνει στον $L_2(T)$.

Επιπλέον ισχύει $F\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_k\varphi\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k FT_k\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k M_{-k}\hat{\varphi}$. Εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθομοναδιαίος στον $L_2(\mathbb{R})$ και η $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_k\varphi$ συγκλίνει στον $L_2(\mathbb{R})$ τότε η $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k M_{-k}\hat{\varphi}$ συγκλίνει στον $L_2(\mathbb{R})$. ■

Λήμμα 5.2.3. Έστω $a>0$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι μία φραγμένη , 1-περιοδική συνάρτηση και μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για μία συνάρτηση $g\in L_1(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_0^a f(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x-ka)dx$.

Απόδειξη:

Ισχύει : $\int_0^a |f(x)|\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g(x-ka)|dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^a |f(x)||g(x-ka)|dx \overset{f\ a-\pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa\acute{\eta}}{=}$

$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^a |f(x-ka)||g(x-ka)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)||g(x)|dx$ η οποία είναι πεπερασμένη εφόσον η f είναι φραγμένη και $g\in L_1(\mathbb{R})$. ■

Μετά απ' τη μελέτη μας αυτή πλέον έχουμε τη δυνατότητα μέσω της συνάρτησης Φ να μελετήσουμε συνθήκες ώστε η ακολουθία $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ να είναι Bessel, ακολουθία Riesz, ακολουθία πλαισίου ή ορθοκανονική.

Θεώρημα 5.2.4. Έστω $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$, $b>0$ και Φ η συνάρτηση περιοδικοποίησης όπως στον ορισμό 5.2.1. Για κάθε $A,B>0$ ισχύει :

i. Η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία Bessel ακολουθία με φράγμα B αν και μόνον αν $\Phi(\xi)\le bB$ σ.π. στο $[0,1]$.

ii. Η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία ακολουθία πλαισίου αν και μόνον αν $bA\le\Phi(\xi)\le bB$ σ.π. στο $[0,1]\setminus N$, όπου $N=\{\xi\in[0,1]\,|\,\Phi(\xi)=0\}$.

iii. Η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία ακολουθία Riesz αν και μόνον αν $bA\le\Phi(\xi)\le bB$ σ.π. στο $[0,1]$.

iv. Η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία ορθοκανονική ακολουθία αν και μόνον αν $\Phi(\xi)=b$ σ.π. στο $[0,1]$.

Απόδειξη:

i. Για την απόδειξη του i παρατηρούμε ότι ο τελεστής σύνθεσης

$T:\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\varphi$ είναι καλά ορισμένος στις πεπερασμένες ακολουθίες του $\ell_2(\mathbb{Z})$. Δεδομένης λοιπόν μίας πεπερασμένης ακολουθίας $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ του $\ell_2(\mathbb{Z})$, θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $f(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ik\xi}$ του $L_2(T)$. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier ο οποίος είναι ορθομοναδιαίος προκύπτει ότι

$$\left\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|^2=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\varphi\right\|^2=\left\|F\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\varphi\right)\right\|^2=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi}\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(b\xi)|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi=\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{b}\right)\right|^2 d\xi .$$

Απ' το προηγούμενο Λήμμα ισχύει ότι

$$\left\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|^2=\frac{1}{b}\int_0^1|f(\xi)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{b}\right)\right|^2 d\xi=\frac{1}{b}\int_0^1|f(\xi)|^2\,\Phi(\xi)d\xi .$$

Αν $\Phi(\xi)\le bB$ σ.π. στο $[0,1]$, τότε $\left\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|^2\le B\int_0^1|f(\xi)|^2 d\xi=B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2$, συνεπώς η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ακολουθία Bessel με φράγμα B. Για να αποδείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση εφόσον η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία Bessel ακολουθία απ' το Λήμμα 5.2.1. παρατηρούμε ότι οι υπολογισμοί μέσω των οποίων δείξαμε την

$\left\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|^2=\frac{1}{b}\int_0^1|f(\xi)|^2\,\Phi(\xi)d\xi$ ισχύουν για κάθε ακολουθία του $\ell_2(\mathbb{Z})$ και θεωρώντας ως B το άνω φράγμα της $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{b}\int_0^1|f(\xi)|^2\,\Phi(\xi)d\xi\le B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2=B\int_0^1|f(\xi)|^2 d\xi$, για κάθε $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ του $\ell_2(\mathbb{Z})$. Συνεπώς $\Phi(\xi)\le bB$ σ.π. στο $[0,1]$.

ii. Απ' το i η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι μία Bessel ακολουθία αν και μόνο αν $\Phi(\xi)\le bB$ σ.π.

στο $[0,1]$ συνεπώς μένει να δείξουμε τις ισοδυναμίες για το κάτω φράγμα. Αν η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ακολουθία πλαισίου τότε ισχύει

$$\left\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|^2 = \frac{1}{b}\int_0^1 |f(\xi)|^2\,\Phi(\xi)d\xi$$

όπως δείξαμε στο i για κάθε ακολουθία $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ του $\ell_2(\mathbb{Z})$. Ο πυρήνας του T είναι ο $KerT = \left\{\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi} = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; [0,1]\setminus N\right\}$.

Έστω δύο ακολουθίες $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Εφόσον η $\left\{e^{2\pi ikbx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(T)$, τότε

$\left\langle \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikbx}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{-2\pi ikbx}\right\rangle = 0$, συνεπώς ισχύει $\left(KerT\right)^{\perp} = \left\{\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi} = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; N\right\}$.

Άρα για $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \left(KerT\right)^{\perp}$ ισχύει

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \int_0^1 \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi}\right|^2 d\xi = \int_{[0,1]\setminus N} \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi}\right|^2 d\xi$$

Επιπλέον ισχύει

$$A\int_{[0,1]\setminus N} \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi}\right|^2 d\xi = A\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \overset{\Lambda\acute{\eta}\mu\mu\alpha\ 5.1.17.}{\leq} \left\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|^2 =$$

$$\frac{1}{b}\int_{[0,1]\setminus N} \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi}\right|^2 \Phi(\xi)d\xi, \quad \text{για κάθε } \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \left(KerT\right)^{\perp},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $bA \leq \Phi(\xi)$ σ.π. στο $[0,1]\setminus N$.

iii. Το iii προκύπτει εύκολα απ' το ii αφού η ανισοτική σχέση

$A\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \left\|T\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right\|^2 \leq B\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$, ισχύει για κάθε $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, άρα $KerT = \{0\}$, συνεπώς απ' τον ορισμό

$KerT = \left\{\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikb\xi} = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; [0,1]\setminus N\right\}$ πρέπει $N = \varnothing$, άρα οι σχέσεις είναι ισοδύναμες στο $[0,1]$.

iv. Από Parseval η $\{T_{kb}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική αν και μόνον αν για κάθε $x=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\varphi$ ισχύει $\|x\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2=\frac{1}{b}\int_0^1 |f(\xi)|^2\,\Phi(\xi)d\xi$ κι εφόσον ο Fourier είναι ορθομοναδιαίος ισχύει $\|x\|^2=\|Fx\|^2=\int_0^1 |f(\xi)|^2\,d\xi$, άρα

$\int_0^1 |f(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{b}\int_0^1 |f(\xi)|^2\,\Phi(\xi)d\xi$ από όπου και προκύπτει το ζητούμενο. ■

Παρακάτω και συγκεκριμένα για το Λήμμα 5.2.5., το Θεώρημα 5.2.6. και το Πόρισμα 5.2.7. θα θεωρήσουμε ακολουθίες μεταθέσεων με $b=1$ συνεπώς τη συνάρτηση περιοδικοποίησης θα τη θεωρούμε ως $\Phi(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}(\xi+k)\right|^2$

Λήμμα 5.2.5. Έστω $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$. Τότε οι συντελεστές Fourier για την 1-περιοδική συνάρτηση $\Phi\in L_1(0,1)$ είναι οι $c_k=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\overline{\varphi(x+k)}dx,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Απόδειξη:

Οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης Φ είναι οι

$$c_k=\int_0^1\Phi(\xi)e^{-2\pi ik\xi}d\xi=\int_0^1\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}(\xi+n)\right|^2\right)e^{-2\pi ik\xi}d\xi\overset{e^{-2\pi ikn}=1}{=}$$

$$\int_0^1\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}(\xi+n)\right|^2e^{-2\pi ik(\xi+n)}d\xi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^1\left|\hat{\varphi}(\xi+n)\right|^2e^{-2\pi ik(\xi+n)}d\xi\right)\overset{u=\xi+n}{=}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_n^{n+1}\left|\hat{\varphi}(u)\right|^2e^{-2\pi iku}du\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{\varphi}(u)\right|^2e^{-2\pi iku}du=\langle\hat{\varphi},M_k\hat{\varphi}\rangle=\langle\varphi,T_{-k}\varphi\rangle.$$

Όμως $\langle\varphi,T_{-k}\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\overline{\varphi(x+k)}dx$ και προκύπτει το ζητούμενο. ■

Όπως παρουσιάσαμε και στα προηγούμενα Κεφάλαια σύνηθες είναι η μελέτη συναρτήσεων συμπαγούς φορέα εφόσον οι περισσσότερες συναρτήσεις που παριστούν σήματα σε πρακτικό επίπεδο μελετώνται έχουν ή τις θεωρούμε με συμπαγή φορέα.

Θεώρημα 5.2.6. Έστω $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ μία συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Τότε η ακολουθία $\{T_k\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, είναι μία ακολουθία Bessel αλλά δε μπορεί να είναι υπερπλήρες πλαίσιο.

Απόδειξη:

Επειδή η φ έχει συμπαγή φορέα απ' το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $c_k = 0$, αν $|k| > N$. Συνεπώς η Φ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο άρα συνεχής δηλαδή φραγμένη στο συμπαγές $[0,1]$, άρα από Θεώρημα 5.2.4 είναι ακολουθία Bessel .και εφόσον ισχύει. Επιπλέον αν είναι υπερπλήρες πλαίσιο τότε το σύνολο $N = \{\xi \in [0,1] \,|\, \Phi(\xi) = 0\}$ απ' το Θεώρημα 5.2.4. ii είναι μη κενό, ενώ ισχύει $A \le \Phi(\xi) \le B$ σ.π. στο $[0,1] \setminus N$, με $A > 0$, όμως τότε η Φ δεν είναι συνεχής ,

το οποίο είναι άτοπο. ■

Πόρισμα 5.2.7. Έστω $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ μία συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Τότε η ακολουθία $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, είναι μία ακολουθία Riesz, αν και μόνον αν για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\hat{\varphi}(\xi + k) \neq 0$.

Απόδειξη:

Για το ευθύ θεωρούμε ότι η $\{T_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι μία ακολουθία Riesz, τότε υπάρχουν $A, B > 0$, τέτοιοι ώστε $A \le \Phi(\xi) \le B$ σ.π. στο $[0,1]$, άρα

$$\Phi(\xi) \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}(\xi + k)\right|^2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιος ώστε } \left|\hat{\varphi}(\xi + k)\right| \neq 0 \text{ σ.π. στο } [0,1] \ .$$

Για το αντίστροφο αν για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\hat{\varphi}(\xi + k) \neq 0$, τότε $\Phi(\xi) \neq 0$, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ και εφόσον η φ έχει συμπαγή φορέα όπως εξηγήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 5.2.6. η Φ είναι συνεχής άρα $A \le \Phi(\xi) \le B$ σ.π. στο $[0,1]$ με $A, B > 0$, δηλαδή είναι ακολουθία Riesz. ■

Μέχρι στιγμής εξετάσαμε συνθήκες ώστε οι ακολουθίες μεταθέσεων μίας συνάρτησης στον $L_2(\mathbb{R})$ να είναι ακολουθίες Riesz ή ακολουθίες πλαισίου. Παρακάτω θα δείξουμε ότι δεν παράγεται ούτε βάση Riesz ούτε πλαίσιο του $L_2(\mathbb{R})$ μόνον από ακολουθίες μεταθέσεων της μορφής $\{T_{\lambda_k} \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ για καμία αρχική επιλογή συνάρτησης φ.

Θεώρημα 5.2.8. Έστω $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ και $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ μία ακολουθία πραγματικών. Τότε η $\{T_{\lambda_k} \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ δεν είναι βάση Riesz για τον $L_2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη:

Έστω η $\{T_{\lambda_k} \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι βάση Riesz για τον $L_2(\mathbb{R})$. Εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθομοναδιαίος , τότε και η ακολουθία $\{e^{-2\pi i \lambda_k \xi} \hat{\varphi}(\xi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι βάση Riesz του $L_2(\mathbb{R})$.

Αν η $\hat{\varphi}$ μηδενίζεται σε ένα σύνολο θετικού μέτρου έστω στο E τότε η χ_E θα ήταν ορθογώνια σε κάθε στοιχείο της βάσης το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\hat{\varphi}(\xi)\neq 0$ σ.π. . Επιπλέον υπάρχουν $A,B>0$, τέτοιοι ώστε για κάθε ακολουθία $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ του $\ell_2(\mathbb{Z})$ να ισχύει $A\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-2\pi i\lambda_k\xi}\hat{\varphi}(\xi)\right\|^2 \leq B\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$.

Η συνάρτηση $F=\hat{\varphi}\cdot\chi_{[0,1]}$ ανήκει στον $L_2(\mathbb{R})$, άρα γράφεται ως ανάπτυγμα της $\left\{e^{-2\pi i\lambda_k\xi}\hat{\varphi}(\xi)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, δηλαδή $F(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-2\pi i\lambda_k\xi}\hat{\varphi}(\xi)$, για κάποια ακολουθία συντελεστών $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ του $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Για $r>0$, ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k e^{2\pi i\lambda_k r}\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty$,

άρα η συνάρτηση $F_r(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-2\pi i\lambda_k(\xi-r)}\hat{\varphi}(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{2\pi i\lambda_k r})e^{-2\pi i\lambda_k\xi}\hat{\varphi}(\xi)$ είναι καλά ορισμένη στον $L_2(\mathbb{R})$. Εφόσον $\hat{\varphi}(\xi)\neq 0$ σ.π., τότε η συνάρτηση $G_r(\xi)=F_r(\xi)/\hat{\varphi}(\xi)$ επίσης είναι καλά ορισμένη σ.π. στον $L_2(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τις $s_N(\xi)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{-2\pi i\lambda_k(\xi-r)}$ και παρατηρούμε ότι $s_N(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\xrightarrow{L_2}F_r(\xi)=G_r(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ στον $L_2(\mathbb{R})$ καθώς και $s_N(\xi+r)\hat{\varphi}(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-2\pi i\lambda_k\xi}\hat{\varphi}(\xi)\xrightarrow{L_2}F(\xi)=\chi_{[0,1]}(\xi)\cdot\hat{\varphi}(\xi)$.
Συνεπώς οι δύο ακολουθίες τείνουν και κατά σημείο , άρα ισχύει,

$$\left|s_N(\xi+r)-\chi_{[0,1]}(\xi)\right|=\frac{1}{|\hat{\varphi}(\xi)|}\left|s_N(\xi+r)\hat{\varphi}(\xi)-\chi_{[0,1]}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|\to 0 \text{ σ.π. , και}$$

$$\left|s_N(\xi)-G_r(\xi)\right|=\frac{1}{|\hat{\varphi}(\xi)|}\left|s_N(\xi)\hat{\varphi}(\xi)-G_r(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|\to 0 \text{ σ.π. .}$$

Οπότε $s_N(\xi+r)\to\chi_{[0,1]}(\xi)\Rightarrow s_N(\xi)\to\chi_{[0,1]}(\xi-r)$ σ.π. και $s_N(\xi)\to G_r(\xi)$ σ.π. . Απ' τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι $G_r(\xi)=\chi_{[0,1]}(\xi-r)=\chi_{[r,r+1]}(\xi)$ σ.π. και κατά συνέπεια $F_r(\xi)=G_r(\xi)\hat{\varphi}(\xi)=\chi_{[r,r+1]}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$.

Τελικά προκύπτει ότι

$$\int_0^1|\hat{g}(\xi)|^2d\xi=\|F\|^2\leq B\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\frac{B}{A}A\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leq\frac{B}{A}\|F_r\|^2=\frac{B}{A}\int_r^{r+1}|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi$$

και από Λήμμα Riemann–Lebesgue ισχύει $\int_r^{r+1} |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ συνεπώς $\int_0^1 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = 0 \Rightarrow \hat{g}(\xi) = 0$ σ.π. στο [0,1] , άτοπο. Άρα η $\{T_{\lambda_k}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ δεν είναι βάση Riesz.
■

Όπως αποδείξαμε στο παραπάνω Θεώρημα ομοίως αποδεικνύεται ότι καμία συνάρτηση του $L_2(\mathbb{R})$ δε μπορεί να επάγει ένα πλήρες πλαίσιο μεταθέσεων του $L_2(\mathbb{R})$, αλλά μόνο σε ένα γνήσιο υπόχωρο του. Για μία απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος παραπέμπουμε στο **[17] .**

Θεώρημα 5.2.9. Έστω $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ και $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ μία ακολουθία πραγματικών. Τότε η $\{T_{\lambda_k}\varphi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ δεν είναι πλαίσιο για τον $L_2(\mathbb{R})$. ♦

Στο Κεφάλαιο 4 ασχοληθήκαμε και με συστήματα Gabor και συγκεκριμένα στο Θεώρημα 4.2.9. εξετάσαμε τις συνθήκες ώστε ένα τέτοιο σύστημα να είναι ορθοκανονική βάση είτε βάση Riesz . Εάν όμως χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση γεννήτορα μία συνεχή συνάρτηση με συμπαγή φορέα, τότε το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ δε μπορεί να αποτελεί ορθοκανονική βάση ούτε βάση Riesz για τον $L_2(\mathbb{R})$. Πάραυτα μπορεί να αποτελέσει πλαίσιο για τον $L_2(\mathbb{R})$, αν ισχύει $0 < ab < 1$, όπως αποδεικνύεται στον **[15]** . Ισχύει λοιπόν η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.2.10. Έστω μία συνεχής συνάρτηση g με συμπαγή φορέα. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

α) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ δε μπορεί να είναι ορθοκανονική βάση για τον $L_2(\mathbb{R})$.

β) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ δε μπορεί να είναι βάση Riesz για τον $L_2(\mathbb{R})$.

γ) Το σύστημα $\{M_{mb}T_{na}g\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ είναι ένα πλαίσιο για τον $L_2(\mathbb{R})$ αν $0 < ab < 1$. ♦

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει τη γενικότερη ευελιξία και την αποτελεσματικότητα στην αναπαράσταση μέσω συναρτήσεων συμπαγούς φορέα. Αναλογιζόμενοι ότι πρακτικά οι περισσότερες συναρτήσεις είναι συμπαγούς φορέα αναδεικνύεται η σημαντικότητα των πλαισίων ως σύστημα αναπαράστασης. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα είναι η μη ισχύς του Θεωρήματος Balian-Low , στην περίπτωση υπερπλήρων πλαισίων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

Στην παρούσα μελέτη διαπραγματευτήκαμε συστήματα αναπαραστάσεων κυρίως σε χώρους Hilbert τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Ξεκινήσαμε μελετώντας τις βάσεις Schauder σε απειροδιάστατους χώρους Banach. αναδεικνύοντας την πρακτικότητά τους έναντι των βάσεων Hamel. Στη συνέχεια μελετήσαμε ορθοκανονικές βάσεις σε χώρους Hilbert εστιάζοντας σε αναπαραστάσεις συστημάτων στην Ανάλυση Fourier και στην Ανάλυση Χρόνου-Συχνότητας. Μελετήσαμε το τριγωνομετρικό σύστημα, τα συστήματα Gabor και τα κυματίδια με την πολυδιακριτή Ανάλυση. Αναφερθήκαμε τέλος και στα όρια χρήσης ορθοκανονικών αναπαραστάσεων που συνοψίζουμε παρακάτω:

ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Αρνητικά	**Θετικά**
Ισχυροί δεσμοί και περιορισμοί	**Μοναδικότητα στην αναπαράσταση.**
Μη ευελιξία στη σχεδίαση (π.χ. Δε δέχεται ως γεννήτορα συνεχή συνάρτηση συμπαγούς φορέα)	**Σύγκλιση άνευ συνθήκης**
Δεν δέχονται όλοι οι χώροι μορφής $L^2(\Omega)$ ορθοκανονικές βάσεις εκθετικών	**Ορθογωνιότητα-Απλότητα αναπαράστασης**

Πίνακας 1. Ορθοκανονικές Βάσεις, θετικά και αρνητικά στοιχεία.

Στη συνέχεια μελετήσαμε τις βάσεις Riesz σε χώρους Hilbert, οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις ορθοκανονικές βάσεις. Στη συνέχεια εστιάσαμε την προσοχή μας σε βάσεις Riesz στην Ανάλυση χρόνου –συχνότητας και αναδείξαμε συνθήκες ούτως ώστε ένα σύστημα Gabor να είναι πλήρες, ακολουθία Bessel, βάση Riesz είτε ορθοκανονική βάση. Τέλος, αποδείξαμε το θεώρημα Balian-Low ως ανάλογο της Αρχής Αβεβαιότητας της Κβαντομηχανικής, το οποίο αντίστοιχα περιορίζει τη δυνατότητα ταυτόχρονης καλής τοπικοποίησης στο χρόνο και στη συχνότητα για οποιαδήποτε γεννήτρια συνάρτηση. Συμπερασματικά:

ΒΑΣΕΙΣ RIESZ

Αρνητικά	**Θετικά**
Δεν επιτυγχάνεται ταυτόχρονα καλή τοπικοποίηση στο χρόνο και στη συχνότητα	**Μοναδικότητα στην αναπαράσταση.**
Λιγότερο απλή αναπαράσταση	**Σύγκλιση άνευ συνθήκης**
	Μεγαλύτερη ευελιξία στη σχεδίαση

Πίνακας 2. Βάσεις Riesz, θετικά και αρνητικά στοιχεία.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο μελετούμε ως συστήματα αναπαραστάσεων τα πλαίσια. Τέτοιες αναπαραστάσεις μας δίνουν μεγαλύτερη ανθεκτικότητα στο θόρυβο, από ότι τα ελαχιστικά συστήματα όπως οι βάσεις που παρουσιάστηκαν στα Κεφάλαια 3 και 4, δηλαδή επιτυγχάνουμε μικρότερο τετραγωνικό σφάλμα. Μελετήσαμε πλαίσια μεταθέσεων στον $L_2(\mathbb{R})$ και δείξαμε ότι δεν οδηγούν σε πλήρη πλαίσια. Όμως όσον αφορά τα συστήματα Gabor μπορούμε να βρούμε αρχική γεννήτρια συνάρτηση συνεχή συμπαγούς φορέα ώστε να παράξουμε πλαίσιο μέσω αυτής. Αυτή η ευελιξία στην επιλογή καθιστά τα πλαίσια ένα κομβικού χαρακτήρα σύστημα αναπαράστασης σε εφαρμογές, ειδικά συνδυαζόμενο με την αντοχή του στα σφάλματα μετάδοσης του σήματος, εφόσον επιτρέπουν ανακατασκευή του σήματος ακόμα κι αν χαθεί πληροφορία .

ΠΛΑΙΣΙΑ

Αρνητικά	Θετικά
Μη μοναδικότητα στην αναπαράσταση	Μοναδικότητα στην αναπαράσταση.
Μη απλή αναπαράσταση	Σύγκλιση άνευ συνθήκης
	Ευελιξία στη σχεδίαση
	Ανοχή στο θόρυβο

Πίνακας 3. Πλαίσια (Frames), θετικά και αρνητικά στοιχεία.

Από τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι χρησιμοποιούμε ορθοκανονικές βάσεις όταν βασικό επιθυμητό στοιχείο είναι η μοναδικότητα και η απλότητα στην αναπαράσταση. Αντίστοιχα αν επιθυμούμε να δώσουμε στη σχεδίαση λίγο μεγαλύτερη ευελιξία διατηρώντας τη μοναδικότητα, η επιλογή του συστήματος θα μπορούσε να ήταν οι βάσεις Riesz. Αν τα βασικά στοιχεία των κριτηρίων επιλογής είναι η σχεδιαστική ευελιξία, η ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος κατά τη μετάδοση, η καλή τοπικοποίηση στο χρόνο και στη συχνότητα ταυτόχρονα, τότε η επιλογή ενός πλαισίου ως συστήματος αναπαράστασης θα ήταν η ενδεικνυόμενη και οφείλουμε εδώ να σημειώσουμε τονίσουμε την ολοένα και μεγαλύτερη χρήση των πλαισίων σε τεχνολογικές εφαρμογές.

Βιβλιογραφία:

[1] Abel M., Iacob E., Stokolos A., Taylor S., Tikhonov S., Zhu J. Topics in Classical and Modern Analysis , Birkhauser 2019

[2] Albiac F., Kalton N. , Topics in Banach Space Theory, Springer 2006

[3] Aldroubi A., Cabrelli C. , Jaffard S., Molter U. New Trends in Applied Harmonic Analysis , Volume 2 , Birkhauser 2019

[4] Ανούσης Μ. , Τσολομύτης Α. , Φελουζής Β. Πραγματική Ανάλυση Ιδιωτική Έκδοση 2014

[5] Ατρέας Ν. Αρμονική Ανάλυση Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη 2015

[6] Beals R., Topics in Operator Theory, The University of Chicago Press, Chicago 1971

[7] Berberian S., Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer 1974

[8] Birkhoff G. Lattice Theory (American Mathematical Society New York City)

[9] Boggiato P., Bruno. T. Cordero. E. Feichtinger. H. , Fabio N., Oliaro A., Tabacco A., Vallarino M. Landscapes of Time-Frequency Analysis , Birkhauser 2019

[10] Carothers N. L. Short Course in Approximation Theory (Notes 1988)

[11] Carothers N. L. Real Analysis (Cambridge University Press 2000)

[12] Casey S., Donson M., Fereira P., . Zayed A, Sampling, Approximation and Signal Analysis, Birkhauser 2023

[13] Casey S., Okoudjou K., Robinson M., Sadler B. Sampling : Theory and Applications Birkhauser 2020

[14] Γιαννόπουλος Α. Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (Σημειώσεις Τμήμα Μαθηματικών 2019)

[15] Cristensen Ole An Introduction to Frames and Riesz Bases (Second Edition Birkhauser)

[16] Christensen O. , Christensen K. , Approximation Theory (From Taylor Polynomials to Wavelets) Springer Science + Bussines Media , LCC 2004

[17] Cristensen O.,Deng B., Heil C. Density of Gabor frames Appl. Comput. Harmon. Anal. 7 292-304 (1999)

[18] Coln D.L., Measure Theory (2nd Edition), Birkhauser, 2013

[19] Conway J.B. A Course in Functional Analysis (Second Edition SPRINGER 1989)

[20] Dahlke S., De Mari F. , Grohs P. , Labate D. Harmonic and Applied Analysis , Birkhauser 2016

[21] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets (Siam Philadelphia 1992)

[22] De Mari F., De Vito E. Harmonic and Applied Analysis, Birkhauser 2021

[23] Douglas R. , Banach Algebra Techniques in Operator Theory (2nd Edition), Springer 1998

[24] Fabian M., Habala P., Hajek P., Pelant J., Montesinos V., Zizler V., Banach Space Theory : The basis for Linear and Nonlinear Analysis, Springer 2011.

[25] Fabian M., Habala P., Hajek P., Pelant J., Montesinos V., Zizler V., Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry , Springer, 2001.

[26] Farkas B., Matolci M., Mora P. On Fugledes Conjecture and the Existence of Universal Spectra (Fourier Analysis Appl. 2006)

[27] Feichtinger H. , Strohmer T. Advances in Gabor Analysis , Birkhauser 2016

[28] Folland G.B. , Real Analysis : Modern Techniques and their Applications (2nd Edition) Wiley, 1999.

[29] Fuglede B. Commuting Self Adjoint Partial Differential Operators and a Group Theoretic Problem (Journal of Functional Analysis 1974)

[30] Garcia S., Mashreghi, Ross W. Operator Theory By Example Oxford Books in Mathematics 2023

[31] Gomes J. , Velho L. From Fourier Analysis to Wavelets Springer 2016

[32] Goyal,Kovacevic, Kelner : Quantised Frame Expansions with Erasures App. Comut. Harmon. Anal. 10(3), 203-233 (2000)

[33] Grafakos L. Classical Fourier Analysis (Springer New York 2019)

[34] Greenfeld R., Lev N. Fugledes Spectral Set Convecture for Convex Polytopes (Analysis and PDE 2017)

[35] Groechenig K. Foundations of Time Frequency Analysis (Birkhauser 2001)

[36] Heil C. A Basis Theory Primer (Birkhauser 1998)

[37] Heil . C. Metrics, Norms, Inner Products and Operator Theory , Birkhauser 2018

[38] Helson H. , Harmonic Analysis (2^{nd} edition), Texts and Readings in Mathematics, 7, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[39] Hernandez Eugenio & Weiss Guido A First Course on Wavelets (CRC Press LCC 1996)

[40] Iosevich A. , Katz N. , Tao T. Fugledes Convecture for Convex Planar Domains 2001

[41] Iosevich A. , Mayeli A. , Pakianathan J. The Fugledes Convecture Holds In $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (2015)

[42] Καρανάσιος Σ. Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές Εκδόσεις Τσιότρα Αθήνα 2017

[43] Κατάβολος Α. Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών (Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2008)

[44] Katznelson Y., An Introduction to Harmonic Analysis(3^{nd} Edition), Cambridge University Press, 2004

[45] KolountzakisM. , Matolci M., Complex Hadamard Matrices and the Spectral Set Conjecture (COLLECT. MATH 2006)

[46] Kolountzakis M. , Matolci M., Tiles with no Spectra (FORUM MATH 2006)

[47] Kolountzakis M. & Papadimitrakis M. A class of non Convex Polytopes that admit no Orthonormal Basis of Exponentials (Illinois Journal Of Mathematics 2002)

[48] Κολουντζάκης Μ. , Παπαχριστόπουλος Χ. Ανάλυση Fourier (Σημειώσεις Τμήμα Μαθηματικών και εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Κρήτης 2015)

[49] Κουμουλλής Γ. Νεγρεπόντης Σ. Θεωρία Μέτρου (Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2005)

[50] Laba I. Fugledes Conjecture for a Union of two Intervals (Princeton Univercity 2018)

[51] Lev N. & Matolci M. The Fuglede for Convex Domains Conjecture is True in all Dimensions (ACTA MATHEMATICA 2022)

[52] Liflyad E. Functions of Bounded Variation and Their Fourier Transforms, Birkhauser 2019

[53] Lindenstrauss Joram, Tzafriri Lior Classical Banach Spaces I and II (Springer-Verlag New York 1977)

[54] Malomezov V., Masharsky S. Foundations of Discrete Harmonic Analysis , Birkhauser 2020

[55] Matolci M., Fugledes Conjecture Fails in Dimension 4 (PROC. AMER. MATH SOC. 2005)

[56] Merill K. Generalised Multiresolution Analysis , Birkhauser 2018

[57] Μοσχοβάκης Γ Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία (Εκδόσεις Νεφέλη Αθήνα 1993)

[58] Muscalu C., Schlag W. . Classical and Multilinear Harmonic Analysis , Vol. I, Cambridge University Press, 2013

[59] Νεγρεπόντης Σ. Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής (Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1993)

[60] Νεγρεπόντης Σ. , Ζαχαριάδης Θ. , Καλαμίδας Ν. , Φαρμάκη Β. Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση (Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1997)

[61] Pesenson I., Le Gia Q., Mayeli A. , Mshaskar H., Zhou D. Frames and Other Bases in Astract and Function Spaces, Birkhauser 2018

[62] Rudin W. Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως (Μετάφραση Εκδόσεις Liberal Books Αθήνα 2014)

[63] Rudin W. , Real and Complex Analysis(3rd Edition), McGraw-Hill, 1979.

[64] Ruzhansky M. , Tikhonov S. Methods of Fourier analysis and Approximation Theory , Birkhauser 2016

[65] Siddiqi Abul Hasan Functional Analysis and Applications (Industrial and Applied Mathematics Springer)

[66] Stein E.M. , G. Weiss , Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.

[67] Stein E. M. , Shakarchi R., Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis, Princeton Univercity Press, 2011.

[68] Stein E.M., Shakarchi R., Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces , Princeton University Press, 2005

[69] Sunder V.S., Functional Analysis . Spectral Theory , Birkhauser 1997

[70] Tao T. Fugledes Conjecture is False in 5 and Higher Dimensions (Mathematical Research Letters 2004)

[71] Τραχανάς Σ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2021)

[72] Waldron S. An Introduction to Finite Tight Frames, Birkhauser 2017

[73] Walnut D. An Introduction to Wavelet Analysis Springer Science + Bussines Media , LCC 2004

[74] Watson G. Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press 1945)

[75] Weisz F Convergence and Summability of fourier Transforms and Hardy Spaces , Birkhauser 2017

[76] Υφαντής Ε. Θεωρία Τελεστών Εκδόσεις Σταμούλης Αθήνα 2004

[77] Zygmud A. Τριγωνομετρικές Σειρές (Μετάφραση Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2019)