ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Σύγχρονες τάσεις στη μαθηματική δημιουργικότητα (mathematical creativity):

Μια Πολυδιάστατη προσέγγιση και μελέτη για τις πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας στη σχολική γεωμετρία ως ένα εργαλείο για μάθηση και χρήση της γεωμετρίας μέσα από τη Γεωμετρική σύλληψη, το Σχήμα, την Κατασκευή Βοηθητικών Γραμμών και τις Πολλαπλές Λύσεις στην Επίλυση Προβλημάτων.

Γεωργία Μαρκάτου

Επιβλέπων καθηγητής: Ευγένιος Αυγερινός

Πάτρα, Ιούνιος 2023

Σύγχρονες τάσεις στη μαθηματική δημιουργικότητα

(mathematical creativity).

Μια Πολυδιάστατη προσέγγιση και μελέτη για τις πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας στη σχολική γεωμετρία ως ένα εργαλείο για μάθηση και χρήση της γεωμετρίας μέσα από τη Γεωμετρική σύλληψη, το Σχήμα, την Κατασκευή Βοηθητικών Γραμμών και τις Πολλαπλές Λύσεις στην Επίλυση Προβλημάτων.

Γεωργία Μαρκάτου

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:	Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Ευγένιος Αυγερινός	Καριώτου Φωτεινή
Καθηγητής	Αναπληρώτρια καθηγήτρια
Πανεπιστήμιο Αιγαίου	ΣΘΕΤ ΕΑΠ

Πάτρα, Ιούνιος 2023

«Αφιερωμένο στην οικογένειά μου.»

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία διερευνά τις ποικίλες πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας και την εφαρμογή τους στη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας στο σχολικό περιβάλλον. Η μαθηματική δημιουργικότητα δύναται να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για τους μαθητές όσον αφορά τη χρήση και κατανόηση της γεωμετρίας. Απαραίτητη προϋπόθεση για αυτό αποτελεί η διερεύνηση νέων τάσεων διδασκαλίας ως απότοκο της δημιουργικότητας των εκπαιδευτικών. Αρχικά θα παρουσιαστεί ο σκοπός της εργασίας, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα, αλλά και η μεθοδολογία έρευνας που ακολουθήθηκε προκειμένου να απαντηθούν αυτά τα ερωτήματα. Στη συνέχεια θα διερευνηθεί η σημασία της γεωμετρίας ως έννοιας και ως τομέα των μαθηματικών που διδάσκεται στο σχολικό περιβάλλον. Έπειτα θα αναλυθεί η έννοια της δημιουργικότητας, ως πολυσύνθετη έννοια που χρήζει περαιτέρω έρευνας στο συνεχώς εξελισσόμενο κοινωνικό και επιστημονικό περιβάλλον. Θα διερευνηθούν οι σύγχρονες τάσεις στη μαθηματική δημιουργικότητα στη γεωμετρία μέσα από γεωμετρική σύλληψη του σχήματος, την κατασκευή βοηθητικών γραμμών και τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Επίσης θα αναλυθούν τα μέσα που χρησιμοποιούνται για την αντίληψη της γεωμετρίας από τους μαθητές και οι σύγχρονες εφαρμογές της δημιουργικότητας στο σχολικό περιβάλλον. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρατεθούν τα συμπεράσματα στα οποία έχει καταλήξει η βιβλιογραφική έρευνα.

Λέξεις - Κλειδιά

Δημιουργικότητα, μαθηματική δημιουργικότητα, σύγχρονες προσεγγίσεις, γεωμετρία, σχολικό περιβάλλον, γεωμετρικό σχήμα, βοηθητικές γραμμές, προβλήματα πολλαπλών λύσεων

Current trends in mathematical creativity.

A multidimensional approach and study on the aspects of mathematical creativity in school geometry as a tool for learning and using geometry through "Geometric conception - the shape - the construction of auxiliary lines and multiple solutions in problem-solving".

Georgia Markatou

Abstract

This thesis explores the various aspects of mathematical creativity and their application to the teaching of geometry in the school environment. Mathematical creativity can be a useful tool for students in terms of using and understanding geometry. A prerequisite for this is the exploration of new teaching trends as an outgrowth of teachers' creativity. First, the purpose of the study, the objectives and research questions, as well as the research methodology followed to answer these questions will be presented. Then the importance of geometry as a concept and as a field of mathematics taught in the school environment will be explored. The concept of creativity will then be analysed as a complex concept that needs further research in the ever-evolving social and scientific environment. Contemporary trends in mathematical creativity in geometry will be explored through geometric conception of shape, construction of auxiliary lines and multi-solution problems. It will also analyse the means used for students' perception of geometry and the contemporary applications of creativity in the school environment. The final chapter will present the conclusions that the literature survey has reached.

Keywords

Creativity, mathematical creativity, modern approaches, geometry, school environment, geometric shape, auxiliary lines, multi-solution problems

Περιεχόμενα

Πίνακας Εικόνων

1. Εισαγωγή

Γίνεται όλο και περισσότερο αποδεκτό, ότι η ανθρώπινη δημιουργικότητα αποτελεί σημαντικό παράγοντα που ευνοεί την κοινωνική εξέλιξη. Η Γεωμετρία αποτελεί τον κατεξοχήν κλάδο των μαθηματικών, ο οποίος είναι σε θέση να προάγει την μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές εντός του σχολικού περιβάλλοντος, σε σχέση με τα παραδοσιακά μαθηματικά, αφού η γεωμετρία δύναται σε μεγαλύτερο βαθμό να συνδέσει τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο. Η δημιουργικότητα ως έννοια ξεκίνησε πρόσφατα να απασχολεί εκπαιδευτικούς και ερευνητές, γι' αυτό κρίνεται απαραίτητη η εμβάθυνση στις ποικίλες ερμηνευτικές εκδοχές που έχουν δοθεί και η ανάλυσή τους. Η υποβοήθηση της ανάπτυξής της στο εκπαιδευτικό περιβάλλον έχει κριθεί αναγκαία, όχι μόνο για την ατομική εξέλιξη των μαθητών αλλά ως απαραίτητο συστατικό στοιχείο για την προαγωγή της επιστήμης και της οικονομίας, σε μία συνεχώς μεταβαλλόμενη και εξελισσόμενη κοινωνία.

Όσον αφορά το σχολικό περιβάλλον, τα τελευταία χρόνια έχει επικρατήσει η αντίληψη σχετικά με τη δυνατότητα εξέλιξης και βελτίωσης της δημιουργικότητας σε όλους τους μαθητές ανεξαιρέτως, υπό τις κατάλληλες εκπαιδευτικές συνθήκες. Πρόκειται για μία σύγχρονη δημοκρατική αντίληψη, που έρχεται σε αντίθεση με την παραδοσιακή άποψη της έμφυτης ικανότητας για δημιουργικότητα σε ένα μικρό ποσοστό μαθητών.

Υπό αυτό το πρίσμα, δημιουργείται εύφορο έδαφος για τη διερεύνηση της αναγκαιότητας νέων προσεγγίσεων και νέων τάσεων διδασκαλίας που θα προάγουν τη δημιουργικότητα στον τομέα των μαθηματικών. Ο ρόλος των εκπαιδευτικών κρίνεται κρίσιμος για την επίτευξη αυτού του στόχου, αναπτύσσοντας τα κατάλληλα εργαλεία, στρατηγικές και μεθόδους διδασκαλίας. Γι' αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναλυθούν οι σύγχρονες προσεγγίσεις για τη διδακτική των μαθηματικών και συγκεκριμένα το εποικοδομιστικό μοντέλο, τα ρεαλιστικά μαθηματικά, το μοντεσσοριανό σύστημα εκπαίδευσης αλλά και η μέθοδος του Polya για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.

2. Η διπλωματική εργασία

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι λόγοι για τους οποίους πραγματοποιείται η εργασία και ο τρόπος με τον οποίο θα εκτελεστεί. Αρχικά παρατίθεται ο βασικός σκοπός της, στη συνέχεια παρουσιάζονται οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα και τέλος περιγράφεται η ερευνητική μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί για τη διεξαγωγή της έρευνας.

2.1. Σκοπός

Ο βασικός σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να εξερευνήσει τις σύγχρονες τάσεις στη μαθηματική δημιουργικότητα. Για την εκπλήρωση αυτού του στόχου θα πραγματοποιηθεί έρευνα ανασκόπησης που θα μελετήσει τις όψεις της δημιουργικότητας στη σχολική τάξη. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιηθεί μια πολυδιάστατη προσέγγιση για το πως χρησιμοποιείται η γεωμετρία για τη μαθησιακή λειτουργεία της τάξης. Σε αυτή την προσέγγιση θα χρησιμοποιηθούν τα σχήματα, οι βοηθητικές γραμμές και η γεωμετρική σύλληψη για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων.

2.2. Στόχοι και Ερευνητικά ερωτήματα

Μαζί με το γενικό σκοπό της διπλωματικής εργασίας, τίθενται και ορισμένοι στόχοι και ερευνητικά ερωτήματα προς εκπλήρωση. Αναφορικά με τους στόχους, η διπλωματική θα προσπαθήσει :

- Να πραγματοποιήσει μια κριτική προσέγγιση που θα εκτιμήσει αντικειμενικά τους σκοπούς της διπλωματικής εργασίας.
- Να παραθέσει αντικειμενικά τα ευρήματα της βιβλιογραφίας
- Να διεξάγει αντικειμενικά συμπεράσματα.

Ταυτόχρονα, η διπλωματική εργασία καλείται να απαντήσει ερευνητικά ερωτήματα όπως:

- Είναι η χρησιμοποίηση των παραπάνω τακτικών μια προσέγγιση για τη μάθηση της γεωμετρίας;
- Ποια η κριτική στις παραπάνω προσεγγίσεις;
- Σε ποιο βαθμό χρησιμοποιούνται οι παραπάνω προσεγγίσεις;
- Έχουν αλλάξει οι προσεγγίσεις με την πάροδο του χρόνου;

2.3. Ερευνητική μεθοδολογία

Η ερευνητική μεθοδολογία της διπλωματικής εργασίας είναι η θεωρητική προσέγγιση. Μια εργασία βιβλιογραφικής ανασκόπησης είναι μια εκτενής, κριτική έρευνα της επιστημονικής βιβλιογραφίας σχετικής με ένα συγκεκριμένο θέμα ή ερευνητικό ερώτημα. Θα πρέπει να είναι ικανή να συνθέσει και αναλύσει τις βασικές θεωρίες, έννοιες, μεθοδολογίες και ευρήματα που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία. Παράλληλα θα πρέπει να ενσωματώνει και να κριτικάρει την υπάρχουσα γνώση και εντοπίζει κενά, ασυνέπειες ή διαμάχες στη βιβλιογραφία. Τα βασικά τμήματα μιας τέτοιας εργασίας είναι η εισαγωγή, η ανασκόπηση και η συζήτηση.

Στο συγκεκριμένο θέμα που μας απασχολεί, αρχικά ξεκινήσαμε ορίζοντας το σκοπό της διπλωματικής και τα ερευνητικά ερωτήματα. Αυτό θα βοηθήσει τον αναγνώστη να έχει σαφή εικόνα του πλαισίου στο οποίο θα κινηθεί η διπλωματική εργασία. Στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί μια ενδελεχής αναζήτηση ακαδημαϊκών βάσεων δεδομένων για να προσεγγιστούν σχετικά άρθρα, βιβλία και εργασίες, φροντίζοντας να ληφθούν υπόψη μια σειρά από πηγές, από θεμελιώδεις θεωρίες έως πρόσφατες μελέτες. Οι πηγές που θα αποτελέσουν την βάση της εργασίας θα διαβαστούν προσεχτικά, κριτικά, αξιολογώντας τη μεθοδολογία, τα ευρήματα και τα επιχειρήματα τους. Σε αυτή την αναζήτηση θα προσεγγιστούν κοινά θέματα, διαφορετικές προοπτικές και τομείς διαμάχης ή συζήτησης.

Στη συνέχεια, η βιβλιογραφία θα οργανωθεί γύρω από θέματα ή έννοιες. Για κάθε θέμα, θα δημιουργηθεί ξεχωριστό κεφάλαιο όπου θα αναφέρονται τα βασικά ευρήματα από τη βιβλιογραφία, θα επισημανθούν τυχόν ασυνέπειες ή κενά κατά την προϋπάρχουσα έρευνα. Κατά τα συμπεράσματα, θα συνοψίσουμε τα κύρια ευρήματα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, συζητώντας τις επιπτώσεις τους στον τομέα της εκπαίδευσης στα μαθηματικά και θα προταθούν τομείς για μελλοντική έρευνα.

Διεξάγοντας μια διατριβή με ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με τη μαθηματική δημιουργικότητα, ευελπιστούμε να αποκτηθεί μια βαθιά κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η δημιουργικότητα εννοείται και καλλιεργείται στο πλαίσιο της μαθηματικής μάθησης και επίλυσης προβλημάτων. Αυτή η γνώση θα μπορούσε να ενημερώσει τις εκπαιδευτικές στρατηγικές για την ενίσχυση της δημιουργικότητας στις τάξεις των μαθηματικών και τον εντοπισμό τομέων για μελλοντική έρευνα.

3. Η γεωμετρία

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η γεωμετρία, ως έννοια, με την ιστορική αναδρομή της. Αναφερόμαστε επίσης στη διδασκαλία της στο σχολικό περιβάλλον και στο ρόλο που διαδραματίζουν τα σχήματα στην εκμάθησή της. Το κεφάλαιο θα ολοκληρωθεί με τις σύγχρονες αντιλήψεις στη γεωμετρία.

3.1. Ιστορική αναδρομή

Σε αυτό το τμήμα κεφαλαίου περιγράφεται η ιστορική αναδρομή για τη γεωμετρία, ξεκινώντας από τα μαθηματικά σε αρχαίες εποχές, πριν τους μεγάλους Έλληνες μαθηματικούς, στη συνέχεια περνάμε στην εποχή του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και τέλος καταλήγουμε στην εποχή μετά από αυτούς, στη μη-Ευκλείδεια γεωμετρία.

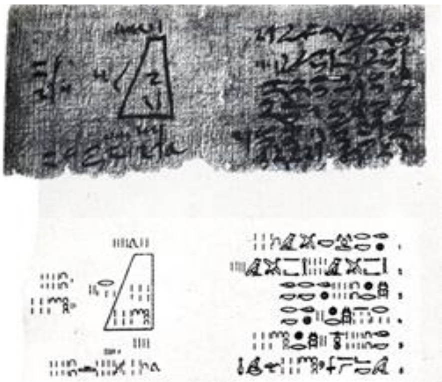
3.1.1. Προελληνικά μαθηματικά

Η γεωμετρία αποτελεί έναν από τους πρώτους κλάδους των μαθηματικών που αναπτύχθηκαν ιστορικά. Αναπτύχθηκε εμπειρικά από τους αρχαίους λαούς, κυρίως Αιγυπτίους, Βαβυλωνίους, Κινέζους και Ινδούς, κάτι που οφείλεται κυρίως στην πρακτική της χρησιμότητα στην καθημερινότητα. Αποδείξεις για τη γνώση και χρήση της γεωμετρίας χρονολογούνται από το 3200 π.Χ. Έτσι προέκυψε από την αναγκαιότητα της μέτρησης της γης, δεδομένου ότι πρόκειται για πολιτισμούς που αναπτύχθηκαν κοντά σε ποτάμια, όπου υπήρχε η διαρκής ανάγκη επαναπροσδιορισμού των ορίων των εκτάσεών τους μετά από κάθε πλημμύρα. Στην ανάπτυξή της βοήθησε και η απεικόνιση των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με παραστάσεις κυρίως ζωγραφικές που λειτούργησαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Ο πάπυρος του Rhind, που χρονολογείται στη δεύτερη μεταβατική περίοδο (περίπου 1650 π. Χ.), δίνει μία σαφή εικόνα για τη γνώση των Αιγυπτίων, αφού περιέχει 87 αριθμητικά, αλγεβρικά και γεωμετρικά προβλήματα. Άλλη σημαντική πηγή είναι ο Πάπυρος της Μόσχας, που πιθανολογείται ότι γράφτηκε το 1850 π.Χ. Ο Σοβιετικός ασιανολόγος Βασίλι Στρούβε κατηγοριοποίησε το περιεχόμενο του σε επιλύσιμα προβλήματα το 1930, συμπεριλαμβανομένων επτά γεωμετρικών προβλημάτων (επτά από τα 25 είναι προβλήματα γεωμετρίας), όπως ο υπολογισμός του εμβαδού των τριγώνων, των ημισφαιρίων (πρόβλημα 10) και ο υπολογισμός κόλουρου (κόλουρης πυραμίδας). (Clagett, 1999).

Οι Αιγύπτιοι διέθεταν μια αξιοσημείωτη γνώση της γεωμετρίας, συμπεριλαμβανομένης της ικανότητας να μετρούν επιφάνειες και όγκους χρησιμοποιώντας κατάλληλες αριθμητικές πράξεις. Με ακριβής κανόνες, γνώριζαν, να υπολογίζουν την επιφάνεια ορθογωνίων, τριγώνων και τραπεζίων, αλλά για τα τετράπλευρα, χρησιμοποίησαν έναν κατά προσέγγιση κανόνα που περιελάμβανε τον πολλαπλασιασμό των ήμι-αθροισμάτων των αντίθετων πλευρών. Επιπλέον, είχαν γνώση του τρόπου υπολογισμού των όγκων διαφόρων στερεών, όπως των κύβων, των παραλληλεπιπέδων, των πρισμάτων και των κυλίνδρων. Ωστόσο, το πιο εντυπωσιακό και αινιγματικό επίτευγμα της Αιγυπτιακής Γεωμετρίας ήταν η ικανότητά τους να υπολογίζουν τον όγκο μιας κόλουρης πυραμίδας. (πάπυρος της Μόσχας, πρόβλημα 14) που φαίνεται να ακολουθεί τον κανόνα $V = \left(\frac{\upsilon}{3}\right)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, όπου α και β οι πλευρές των τετραγώνων των δύο βάσεων και υ το ύψος (στον πάπυρο $\alpha = 4, \beta = 2, \upsilon = 6$). (http://askisopolis.gr/, χ.χ.)

Picture 1 - Πάπυρος του Rhind

Picture 2 - Πάπυρος της Μόσχας



3.1.2. Ελληνικά μαθηματικά

Οι αρχαίοι Έλληνες ήταν εκείνοι που θεωρητικοποίησαν τη Γεωμετρία και τη θεμελίωσαν ως αφηρημένη επιστήμη. Πολλοί Έλληνες μαθήτευσαν στην Αίγυπτο και έτσι είχαν την ευκαιρία να εμβαθύνουν στην επιστήμη και να την εξελίξουν.

Είναι ανεκτίμητη η συνεισφορά του Θαλή του Μιλήσιου τον 7ο αιώνα π.Χ, αφού συνέβαλε εκείνος, με την ανάπτυξη της απόδειξης και τη χρησιμοποίησή της για νέα θεωρήματα στην αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας. Πραγματοποίησε πολυάριθμα ταξίδια στην Αίγυπτο, στην Ασία και την Κρήτη, όπου κατόρθωσε να μετρήσει το ύψος των πυραμίδων, υπολογίζοντας το, με βάση την ώρα της ημέρας, κατά την οποία έγινε η μέτρηση και τη σκιά των πυραμίδων, με μοναδικό μέσο το ραβδί του. Επίσης κατέστησε τα σχήματα από φυσικά σε νοητά, συνεισφέροντας στην αφαιρετική σκέψη.

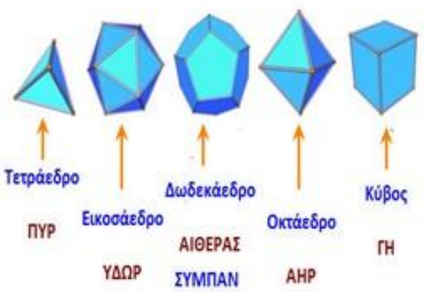
Η συμβολή του Θαλή στη Γεωμετρία έγκειται στα εξής:

- Εισήγαγε την έννοια των παραλλήλων ευθειών και των τεμνόμενων ευθειών.
- Εισήγαγε την έννοια των γωνιών και των εγγεγραμμένων γωνιών.
- Ανακάλυψε κριτήρια ισότητας και ομοιότητας τριγώνων.
- Ανακάλυψε το ομώνυμό του, Θεώρημα του Θαλή
- Ανακάλυψε το θεώρημα της γωνίας της εγγεγραμμένης στο Ημικύκλιο.
- Εκτιμάται ότι ανακάλυψε το θεώρημα των τριών γωνιών τριγώνου.
- Υπολόγισε με τις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων το ύψος των Πυραμίδων (περί το 565 π.Χ.)
- Υπολόγισε την απόσταση πλοίου από την ακτή με βάση τις ιδιότητες όμοιων τριγώνων.

Στην πυθαγόρεια σχολή της Κάτω Ιταλίας οφείλεται η ανάπτυξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, η συσχέτιση των αριθμών με τη γεωμετρία αλλά και η συστηματοποίηση της διδασκαλίας της γεωμετρίας. Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ισούται με 180^o, ενώ γνώριζαν τα πέντε κανονικά πολύεδρα, που μετέπειτα ονομάστηκαν πλατωνικά στερεά. Λόγω της σημασίας που είχε ο αριθμός για τους Πυθαγορείους, ως το κλειδί για την ερμηνεία του σύμπαντος, έγινε προσπάθεια αναγωγής όλων των επιστημών στην Αριθμητική. Την ίδια περίοδο εμφανίζονται τα 4 μεγάλα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα:

- Ο τετραγωνισμός του κύκλου.
- Η τριχοτόμηση της γωνίας.
- Ο διπλασιασμός του κύβου.
- Η κατασκευή κανονικού πολυγώνου με 7 ή 9 πλευρές.

Picture 3 - Τα πλατωνικά στερεά



Ο Πλάτων, επηρεασμένος από την πυθαγόρεια σχολή είχε συνδέσει στενά τη γεωμετρία με τη φιλοσοφία. Είναι γνωστή η επιγραφή της σχολής του «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω» εδραιώνοντας μία διαλεκτική σχέση ανάμεσα στη φιλοσοφία και τη γεωμετρία. Ο κόσμος των νοητικών αναπαραστάσεων που προσφέρουν τα μαθηματικά ήταν απαραίτητη προϋπόθεση για την οδήγηση στον κόσμο των Ιδεών. Η θεωρία των ιδεών του Πλάτωνα φαίνεται να άσκησε βαθιά επίδραση στη διαδικασία αυτή, η οποία χρονολογείται γύρω στο 400 π.Χ. και ήταν η πρώτη θεωρία των αφηρημένων αντικειμένων στην ιστορία της ευρωπαϊκής σκέψης. (http://askisopolis.gr/, χ.χ.)

Η σχέση αυτή θεμελιώνεται στην πλατωνική αντίληψη ότι η κοσμική τάξη είναι γεωμετρική. Η πλατωνική σχολή ήταν εκείνη που προσπάθησε μία ανασυγκρότηση των μαθηματικών σε γεωμετρικές βάσεις, μετά την αποτυχία της πυθαγόρειας σχολής να αναγάγει πλήρως τη γεωμετρία στην αριθμητική. Το πρόγραμμα του Πλάτωνα, το οποίο αναπτύχθηκε αργότερα από τον Ευκλείδη, ήταν μια σημαντική συμβολή στη σύγχρονη επιστήμη. Ο Πλάτων, πρώτος αναγνώρισε την ανάγκη για ανασυγκρότηση και επέλεξε ως νέα βάση τη γεωμετρία ως νέα μέθοδο τη γεωμετρική μέθοδο της αναλογίας. Κατέστρωσε επίσης το πρόγραμμα γεωμετρικοποίησης των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένων της αριθμητικής, της αστρονομίας και της κοσμολογίας. Έγινε ο θεμελιωτής τής γεωμετρικής εικόνας τού κόσμου και, μέσω αυτής, ο θεμελιωτής επίσης της νεότερης επιστήμης. (Popper, 2002)

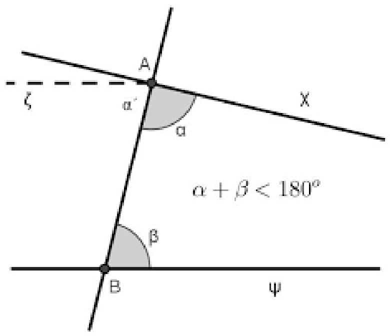
3.1.3. Ελληνιστικά μαθηματικά: Ο Ευκλείδης

Ο Ευκλείδης θεωρείται ο πατέρας της γεωμετρίας. Πιθανώς υπήρξε μαθητής της πλατωνικής ακαδημίας. Με την ίδρυση του Πανεπιστημίου της Αλεξάνδρειας από τον Πτολεμαίο, γύρω στο 300π.Χ, ο Ευκλείδης κλήθηκε να στελεχώσει το νέο ίδρυμα. Από τη στιγμή που ανέλαβε τα καθήκοντά του στην Αλεξάνδρεια, όρισε ανάμεσα στους στόχους του τη συγκρότηση του μνημειώδους και ιστορικά σημαντικού έργου του, των Στοιχείων. (5) Τα «Στοιχεία» αποτελούνται από 13 βιβλία και τυπώθηκαν για πρώτη φορά στη Βενετία, το 1482. Συνιστούν την πρώτη επιστημονική συστηματοποίηση των θεωριών παλαιότερων μαθηματικών και επηρέασαν βαθύτατα την ανθρώπινη σκέψη παγκοσμίως. Ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την αξιωματική μέθοδο στη γεωμετρία, προσδίδοντάς της την επιστημονική της αρτιότητα και καθιστώντας τη την πρώτη παραγωγική επιστήμη. Η εργασία αυτή εκτόπισε τόσο γρήγορα και ολοκληρωτικά όλες τις προηγούμενες εργασίες ανάλογου περιεχομένου, ως αποτέλεσμα σήμερα να μην υπάρχουν αντίγραφα προηγούμενων προσπαθειών και η ύπαρξή τους να είναι γνωστή μέσα από σχόλια των μεταγενέστερων συγγραφέων. (Eves, Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, 1990) Η προσφορά του Ευκλείδη δεν έγκειται στην πρωτοτυπία του συγγράμματός του αλλά στο γεγονός ότι «ήταν ο πρώτος που έδειξε πως αυτές οι προτάσεις μπορούν να εισαχθούν σε ένα περιεκτικό επαγωγικό και λογικό σύστημα.» (Eves, 1963)

Τα Στοιχεία επιτέλεσαν κυρίαρχο ρόλο στη διδασκαλία της γεωμετρίας για δύο χιλιετίες. Έτσι τα πέντε βασικά αξιώματα του Ευκλείδη είναι τα εξής:

1. "Η κατασκευή μιας ευθείας γραμμής από ένα σημείο σε οποιοδήποτε άλλο"
2. "Μια πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα"
3. "Ένας κύκλος ορίζεται από ένα κέντρο και μια απόσταση(ακτίνα)"
4. "Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες"
5. Το αξίωμα παραλληλίας: "Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες, τότε αυτές οι δύο αν επεκταθούν επ' αόριστον θα τμηθούν απ' την μεριά που οι εσωτερικές γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο κάθετες".

Picture 4 - Το αξίωμα της παραλληλίας



3.1.4. Ο Αρχιμήδης

Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος αναγνωρίζεται ως μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές ιδιοφυΐες όλων των εποχών και ένας από τους λαμπρότερους επιστήμονες της κλασικής αρχαιότητας. (Calinger, 1999) Άφησε σπουδαίες παρακαταθήκες σε πολλούς τομείς του επιστητού. Όσον αφορά τη γεωμετρία:

- Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης, για τον υπολογισμό του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται από μία καμπύλη, όπως ο κύκλος.
- Ανακάλυψε τύπο που δίνει το εμβαδόν τριγώνου από τις πλευρές του, και την επέκτασή του στα εγγεγραμμένα τετράπλευρα.
- Έδωσε μια εξαιρετικά ακριβή προσέγγιση για τον αριθμό π.
- Είχε αποδείξει ότι η επιφάνεια κι ο όγκος μιας σφαίρας είναι τα 2/3 των αντίστοιχων του περιγεγραμμένου στη σφαίρα κλειστού κυλίνδρου και αυτό θεωρείται ως το μεγαλύτερο των μαθηματικών επιτευγμάτων του.
- Εξέφρασε τους όγκους στερεών εκ περιστροφής κωνικών εφαρμόζοντας "απειροστικές" μεθόδους ανάλυσης των στερεών αυτών. (ανώτερη μετρική γεωμετρία)

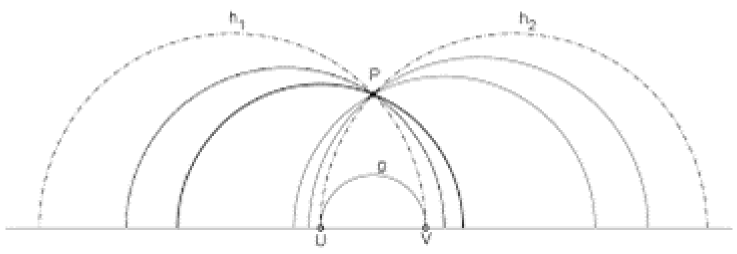
3.1.5. Μη ευκλείδειες γεωμετρίες

Το 5ο αξίωμα της παραλληλίας του Ευκλείδη δεν ήταν δυνατό να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τις άλλες προτάσεις της γεωμετρίας, δηλαδή μέσα στο πλαίσιο που έθεσε ο Ευκλείδης. Έτσι, τον 19ο αιώνα ο Ρώσος μαθηματικός Nikolai Lobatchevsky αντικατέστησε το αξίωμα με την εξής πρόταση:

- «Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας (ε) περνάνε περισσότερες από δύο ευθείες παράλληλες στην (ε)».

Από την παραλλαγή του 5ου αξιώματος του Ευκλείδη προέκυψε έτσι η πρώτη μορφή μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, η υπερβολική. Αυτό φαίνεται να το γνώριζε και ο Gauss λίγες δεκαετίες πριν. Την ίδια περίοδο με τον Lobatchevsky, δημοσιεύτηκαν και οι ανακαλύψεις του Bolyai, που έγιναν ανεξάρτητα, καθιστώντας του δύο τελευταίους εισηγητές της Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η συνέπεια της Υπερβολικής γεωμετρίας απέδειξε ότι το 5ο αίτημα είναι ανεξάρτητο από τις άλλες υποθέσεις τις Ευκλείδειας γεωμετρίας και δεν μπορεί να εξαχθεί από τα άλλα τέσσερα αιτήματα. (5) Σε αυτή την γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο μπορούσε να είναι λιγότερο από 180^{o}. Το μοντέλο του Poincaré είναι το πιο απλό και στο οποίο ισχύουν ιδιότητες προερχόμενες από την Ευκλείδειο Γεωμετρία.

Picture 5 - Το μοντέλο του Poincare



Την ίδια περίοδο, ο Γερμανός μαθηματικός Riemann οδηγήθηκε στην ανακάλυψη ενός άλλου είδους Μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, της σφαιρικής/ελλειπτικής. Βασική της θέση είναι:

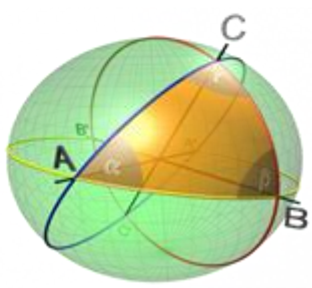
- Από σημείο εκτός ευθείας δεν άγεται καμία παράλληλη προς την αρχική ευθεία

Ή αλλιώς

- Δύο ευθείες γραμμές πάντοτε τέμνονται

Σε αυτή τη γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου μπορεί να είναι παραπάνω από 180° μοίρες.

Picture 6 - Μοντέλο σφαιρικής γεωμετρίας



Η συνεισφορά της ανακάλυψης των Μη Ευκλείδειων γεωμετριών είναι πολύτιμη, αφού αποδεικνύει ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι η μοναδική δυνατότητα περιγραφής του χώρου, όπως πιστευόταν για περισσότερους από 20 αιώνες, αλλά άνοιξαν και άλλα μονοπάτια στην ανθρώπινη νόηση.

3.2. Η διδασκαλία της γεωμετρίας στο σχολικό περιβάλλον

3.2.1. Η παιδαγωγική αξία της γεωμετρίας

Η διδασκαλία της γεωμετρίας στο σχολικό περιβάλλον είναι αναμφισβήτητη, αφού διδάσκει την αποδεικτική διαδικασία και ευνοεί την καλλιέργεια της λογικομαθηματικής σκέψης. Στην εγχώρια και διεθνή βιβλιογραφία τονίζεται η σπουδαιότητα της γεωμετρίας. Σύμφωνα με τον Τουμάση, (Τουμάσης, 2004) οι βασικοί λόγοι της σπουδαιότητας της διδασκαλίας της γεωμετρίας είναι οι εξής:

- Βοηθάει στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου
- Καλλιεργεί την ικανότητα νοερής σύλληψης των αντικειμένων
- Συνδέει άμεσα τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο
- Βοηθάει στην κατανόηση άλλων αφηρημένων μαθηματικών ιδεών από άλλες περιοχές των μαθηματικών, μέσω της δημιουργίας γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας
- Αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος – στην πραγματικότητα του πιο απλού και κατανοητού για τους μαθητές (Τουμάσης, 2004)

Σύμφωνα με Τζανάκη και Κούρκουλο (Τζανάκης & Κούρκουλος, 1999) η σπουδαιότητα της γεωμετρίας έγκειται στην παροχή μαθηματικής παιδείας:

- Απόκτηση ενδιαφέροντος για την επίλυση προβλημάτων και την απάντηση ερωτημάτων με χαρακτήρα «γρίφου».
- Ανάπτυξη ικανότητας εκτίμησης καταστάσεων
- Ικανότητα σύλληψης, διατύπωσης και εμπειρικής επαλήθευσης εικασιών
- Μέριμνα για εμπειρική ή και νοητική αιτιολόγηση εικασιών
- Δυνατότητα άρθρωσης και ελέγχου συλλογισμών
- Δυνατότητα ορθολογικής οργάνωσης και ακριβούς διατύπωσης της σκέψης
- Ανάπτυξη ικανότητας μοντελοποίησης καταστάσεων

Ο Van de Walle (Walle, 2005) παραθέτει τους δικούς του λόγους για τους οποίους η μελέτη της γεωμετρίας είναι σημαντική:

- Με τη γεωμετρία μπορεί να αποκτηθεί μια πιο σφαιρική εκτίμηση του κόσμου.
- Με τις γεωμετρικές διερευνήσεις μπορούν να αναπτυχθούν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και συλλογιστικής του χώρου.
- Η γεωμετρία παίζει ρόλο κλειδί στη μελέτη άλλων περιοχών των μαθηματικών.
- Η γεωμετρία χρησιμοποιείται καθημερινά από πολλούς ανθρώπους αλλά και επιστημονικούς κλάδους (π.χ. η μηχανική και η αξιοποίηση του χώρου).
- Η γεωμετρία είναι μια ευχάριστη δραστηριότητα

Το NCTM (Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών) έχει περιγράψει τέσσερις κύριους στόχους της διδασκαλίας και της μάθησης της γεωμετρίας που ξεκινάει από το προσχολικό επίπεδο και φτάνει έως την Γ’Λυκείου. Οι στόχοι είναι να μπορέσουν οι μαθητές:

- να αναλύσουν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων και να αναπτύσσουν μαθηματικά επιχειρήματα σχετικά με τα γεωμετρικά.
- να προσδιορίζουν θέσεις και να περιγράφουν χωρικές σχέσεις χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία συντεταγμένων και άλλα συστήματα αναπαράστασης.
- να εφαρμόζουν μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιούν τη συμμετρία για την ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων.
- να χρησιμοποιούν οπτική χωρική συλλογιστική και γεωμετρική μοντελοποίηση για την επίλυση προβλημάτων.

Τα συμπεράσματα των ερευνητών σχετικά με την παραδοσιακή και την άτυπη (πρακτική) Ευκλείδεια γεωμετρία δείχνουν ότι μόνο ένας μικρός αριθμός μαθητών μπορεί να κατανοεί τη παραγωγική δομή του μαθήματος, και να ανακαλύπτει γεωμετρικές αποδείξεις βασισμένες σε μια ακολουθία αποδεικτικών συλλογισμών. (Μπαραλής, 2016)

Έτσι, η διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας, όπως διαμορφώνεται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, παρουσιάζει διδακτικές προκλήσεις σε όλες τις βαθμίδες αλλά και προκαλεί δυσκολίες κατανόησης στους μαθητές.

3.2.2. Οι δυσκολίες

Μελέτες έχουν δείξει ότι στις μικρότερες τάξεις, όταν οι μαθητές διδάσκονται περιγραφική ή πρακτική γεωμετρία (μη αποδεικτική γεωμετρία), μπορούν εύκολα να αναγνωρίσουν γεωμετρικά σχήματα. Ωστόσο, αντιμετωπίζουν προκλήσεις - δυσκολίες όσον αφορά την κατανόηση των χαρακτηριστικών - ιδιοτήτων αυτών των σχημάτων, καθώς επίσης και στην ειδική ορολογία που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους. (Τουμάσης, 2004)

Ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, έχει διαπιστωθεί μέσα από έρευνες ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την παραγωγική δομή του μαθήματος και την αφαιρετική σκέψη που αυτό απαιτεί. Στο πλαίσιο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης που ολοκληρώνεται στο Γυμνάσιο, η διδασκαλία της Γεωμετρίας είχε πάντοτε ως κύριο στόχο τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με οδηγό την εποπτεία, τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων, τις μετρήσεις και τους υπολογισμούς. (Θωμαΐδης, 2015) Με τον τρόπο διάρθρωσης των κεφαλαίων στο σχολικό βιβλίο, δεν υπάρχει ένα διακριτό θεωρητικό υπόβαθρο, ώστε οι μαθητές να λάβουν τις κατάλληλες θεωρητικές βάσεις για την κατανόηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διδασκαλία της γεωμετρίας στο λύκειο να ξεκινάει από μηδενικές βάσεις. Οι μαθητές στην αρχή του Λυκείου, φαίνεται να μην κατανοούν το ρόλο, τη σημασία και τη φύση των ορισμών και των αξιωμάτων. Αυτά τα θεμελιώδη στοιχεία είναι απαραίτητα για την απόκτηση επίγνωσης του περιεχομένου και της λειτουργίας των Μαθηματικών, όπως και για την ανάπτυξη μαθηματικού τρόπου απόδειξης και επεξεργασίας.(10)

Η Γεωμετρία αποτελεί ένα χώρο, όπου η αλληλεπίδραση εικόνων και εννοιών είναι απαραίτητη (Mariotti, 1995) Έτσι, σύμφωνα με τη μελέτη των Δακορώνια και Αναστασάκη (Δακορώνια & Αναστασάκης, 2021), ο ρόλος της εικόνας στο σχολικό βιβλίο παίζει κομβικό ρόλο για την κατανόηση των μαθητών. Έτσι, παρατηρούν ότι με το πέρασμα των χρόνων, από το 1975 ως σήμερα, η επιλογή των εικόνων στα σχολικά βιβλία ήταν τέτοια, που έδινε όλο και λιγότερη έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία, και περισσότερη έμφαση σε ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα χωρίς απόδειξη, με αποτέλεσμα η διδασκαλία της γεωμετρίας εν γένει να μην είναι συνυφασμένη με τη γεωμετρική απόδειξη. Κατά τον Δημάκο και Νικολουδάκη (Δημάκος & Νικολουδάκης, 2008), οι δυσκολίες στη διδασκαλία της γεωμετρίας στο σχολικό περιβάλλον συνοψίζονται στους εξής λόγους:

- Στην ασσυμετρία επικοινωνίας μεταξύ δασκάλου και μαθητών.
- Στα διαφορετικά επίπεδα Van Hiele που λειτουργούν οι συμμετέχοντες στη διαδικασία διδασκαλίας.
- Στην τάση πολλών μαθηματικών να αναφέρουν μόνο τα τελικά τους αποτελέσματα αποκρύπτοντας συστηματικά τις ενδιάμεσες διαδικασίες.
- Η παραδοσιακή διδασκαλία ωθεί το δάσκαλο στο να λειτουργεί σε θεωρητικό επίπεδο.

Μία αντίληψη που δυσκολεύει την προσέγγιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας από τη μεριά του εκπαιδευτικού στην παραδοσιακή διδασκαλία είναι η μη κατανόηση του διαφορετικού γνωστικού επιπέδου κάθε μαθητή, σύμφωνα με τη θεωρία των Van Hieles. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μαθητικό υποκείμενο να γίνεται αντιληπτό ως ομοιογενές κατά την εκπαιδευτική διαδικασία και να μην εφαρμόζονται διαφορετικές προσεγγίσεις.

3.2.3. Τα επίπεδα Van Hiele

Οι παιδαγωγοί Pierre van Hiele και Dina van Hiele-Geldo ανέπτυξαν κατά τη δεκαετία του 1950 μία σημαντική θεωρία για τον τρόπο κατανόησης της γεωμετρίας από τη μεριά των μαθητών. Ήταν οι ίδιοι εκπαιδευτικοί και αντιμετώπιζαν ποικίλες προκλήσεις στην τάξη. Προσπάθησαν να κατηγοριοποιήσουν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών. Η συνεισφορά του καθενός ήταν διαφορετική, αφού η Dina van Hiele-Geldo προσπάθησε να εξηγήσει πώς μπορούν να βοηθηθούν οι μαθητές από διδακτική άποψη να προχωρήσουν σε επόμενα επίπεδα, ενώ ο σύζυγός της ασχολήθηκε με τη διαμόρφωση του μοντέλου και τη βαθύτερη ανάλυση των επιπέδων. Έτσι διέκριναν πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης από τα οποία περνούν όλοι οι μαθητές. Τα επίπεδα δεν περιγράφουν τις γνώσεις που κατέχει κάθε μαθητής, αλλά τον τρόπο σκέψης των γεωμετρικών ιδεών. Τα επίπεδα είναι ιεραρχικά και διαδοχικά και δεν υπάρχει δυνατότητα μεταπήδησης. Η μετάβασή τους δεν αποτελεί φυσική διαδικασία, αλλά πραγματοποιείται κάτω από την επίδραση ενός προγράμματος διδασκαλίας–μάθησης. (Δημάκος & Νικολουδάκης, 2008). Τα επίπεδα διακρίνονται ως εξής:

- Επίπεδο 0: Οπτικοποίηση
- Επίπεδο 1: Ανάλυση
- Επίπεδο 2: Άτυπη έκπτωση
- Επίπεδο 3: Επίσημη έκπτωση
- Επίπεδο 4: Αυστηρότητα

Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλοί μελετητές έχουν βγάλει το συμπέρασμα ότι για τους μαθητές έως την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στόχος είναι να επιτευχθούν τα πρώτα τέσσερα επίπεδα.

- Επίπεδο 0: Εποπτική αντίληψη – Νοερή απεικόνιση – Τα σχήματα κρίνονται από την εμφάνισή τους.

Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές χρησιμοποιούν την οπτική αντίληψη και τη μη λεκτική σκέψη. (Vojkuvkova, 2012) Οι γεωμετρικές έννοιες θεωρούνται μάλλον ως συνολικές οντότητες παρά ότι έχουν συστατικά ή χαρακτηριστικά. Γεωμετρικά σχήματα, για παράδειγμα, αναγνωρίζονται από το σχήμα τους στο σύνολό τους, δηλαδή από τη φυσική τους εμφάνιση- όχι από τα μέρη ή τις ιδιότητες τους. (Crowley, 1987). Επίσης, το παιδί, σε αυτό το επίπεδο, είναι σε θέση να αναγνωρίζει συγκεκριμένα σχήματα και να χρησιμοποιεί απλό λεξιλόγιο. Επιπροσθέτως, είναι σε θέση να συγκρίνει το σχήμα με κάποιο αντικείμενο της καθημερινής ζωής, δηλαδή να αναγνωρίζει «με τι μοιάζει». Σε αυτό το επίπεδο βρίσκονται συνήθως τα περισσότερα παιδιά προσχολικής ηλικίας και στόχος των εκπαιδευτικών προσχολικής αγωγής είναι να στρέψουν την προσοχή των νηπίων στην αναγνώριση των στοιχείων των σχημάτων. (Seefeldt & Barbour, 1998) Έτσι, από την παρακάτω εικόνα, ο μαθητής είναι σε θέση να αναγνωρίσει ποια σχήματα είναι τετράγωνα, συγκρίνοντάς τα με προηγούμενα τετράγωνα που έχει δει, όχι όμως και το ότι έχουν ορθές γωνίες ή ότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. Η μορφή ενός σχήματος έχει μεγαλύτερη σημασία από οποιοδήποτε άλλο χαρακτηριστικό - ιδιότητα μπορεί να έχει. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορεί να παρατηρηθεί με ένα τετράγωνο του οποίου οι πλευρές σχηματίζουν γωνία 45° με την οριζόντιο. Ένα τέτοιο τετράγωνο μπορεί να μην αναγνωριστεί ως τετράγωνο από ένα άτομο σε αυτό το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

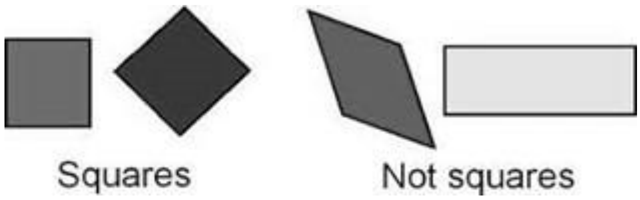
- Επίπεδο 1: Ανάλυση γεωμετρικών μορφών και σχέσεων – Τα σχήματα είναι φορείς των ιδιοτήτων τους

Στο επίπεδο 1, ξεκινάει η ανάλυση των γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα, μέσω της παρατήρησης και του πειραματισμού οι μαθητές αρχίζουν να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά των μορφών. (Crowley, 1987) Το σχήμα γίνεται περισσότερο αντιληπτό ως μέρος μίας ομάδας παρά ως μεμονωμένο. Εστιάζοντας σε μία τάξη σχημάτων, είναι σε θέση να συμμετάσχουν σε λογικούς συλλογισμούς για να προσδιορίσουν τα καθοριστικά χαρακτηριστικά των σχημάτων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των ορθογωνίων, μπορούν να επικεντρωθούν στα θεμελιώδη χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν ένα ορθογώνιο από άλλα σχήματα, όπως η παρουσία τεσσάρων πλευρών, τεσσάρων ορθών γωνιών, απέναντι παράλληλες πλευρές, απέναντι πλευρές ίσες, ίσες διαγώνιοι, κλπ.

Καθώς τα παιδιά μαθαίνουν διάφορα σχήματα, συνειδητοποιούν ότι τα σχήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν με βάση τις κοινές τους ιδιότητες. Έτσι, οι ιδέες για ένα συγκεκριμένο σχήμα μπορούν να γενικευτούν και να τις συμπεριλάβουν σε όλα τα σχήματα που ταιριάζουν στην τάξη - ομάδα εκείνη. Για παράδειγμα, «Όλοι οι κύβοι έχουν έξι ίσες έδρες, και κάθε μία από αυτές είναι ένα τετράγωνο». Ωστόσο, δεν υπάρχουν σχέσεις μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων ή με άλλες στενές σχετικές κατηγορίες σχημάτων. (Pusey, 2003)

Οι σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων, ωστόσο, δεν μπορούν ακόμη να εξηγηθούν από μαθητές σε αυτό το επίπεδο, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σχημάτων δεν φαίνονται ακόμη, και οι ορισμοί δεν είναι ακόμη κατανοητοί. (Crowley, 1987)

Picture 7 - Αντίληψη σχημάτων στο επίπεδο 1



- Επίπεδο 2: Μη τυπική παραγωγή: αρχή παραγωγικής σκέψης και μαθηματικών συλλογισμών – Οι ιδιότητες διατάσσονται: κάποιες προκύπτουν από άλλες

Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές είναι ικανοί να συσχετίζουν σχήματα, με κριτήριο τις ιδιότητές τους. Επιπλέον, ένας μαθητής θα μπορούσε να αρχίσει να βλέπει πώς ένα σχήμα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί με πολλά διαφορετικά ονόματα εάν μοιράζεται τις ίδιες ιδιότητες (το τετράγωνο είναι ορθογώνιο, αλλά ένα ορθογώνιο δεν είναι απαραίτητα τετράγωνο. (Pusey, 2003)

Σταδιακά αναπτύσσονται οι ικανότητες των μαθητών στο συλλογισμό πάνω στις ιδιότητες . Έτσι, οι μαθητές είναι σε θέση να ταξινομούν σχήματα χρησιμοποιώντας μόνο μερικές βασικές ιδιότητες ή και μόνο τις απολύτως αναγκαίες. Για παράδειγμα, ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και (τουλάχιστον) μία ορθή γωνία είναι ένα τετράγωνο, και ένα παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία είναι ορθογώνιο. Αυτή η λογική οργάνωση των ιδεών είναι η πρώτη εκδήλωση αφαιρετικής ικανότητας (Clements & Battista, 1992).

Οι μαθητές εκτιμούν περισσότερο τη σημασία των λογικών επιχειρημάτων. Ωστόσο δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν την παραγωγική σκέψη.

- Επίπεδο 3: Γεωμετρικοί συλλογισμοί, παραγωγική σκέψη – Το νόημα της συνεπαγωγής.

Οι μαθητές, δεν περιορίζονται απλώς στην αναγνώριση σχημάτων και των ιδιοτήτων τους, αλλά είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται τη σημασία της παραγωγικής σκέψης, διατυπώνοντας υποθέσεις και να αναρωτιούνται για την αλήθεια τους. Μπορούν επίσης να στοιχειοθετούν τις δικές τους αποδείξεις χρησιμοποιώντας αξιώματα. Οδηγούνται, αναλύοντας μη τυπικά επιχειρήματα, για τον έλεγχο των υποθέσεων, στην ανάπτυξη ενός δομημένου συστήματος με «προφανείς αλήθειες» που περιλαμβάνει αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα και άλλα συμπεράσματα.

Τα άτομα σε αυτό το επίπεδο, κατανοούν και εκτιμούν τη αναγκαιότητα αυτού του συστήματος για την κατοχύρωση της γεωμετρικής αλήθειας, εργάζονται με αφηρημένες προτάσεις για τις γεωμετρικές ιδιότητες και εξαγάγουν συμπεράσματα με βάση τη λογική, παρά την διαίσθηση.

- <u>Επίπεδο 4</u>: Αυστηρότητα, αφηρημένη Γεωμετρία

Σε αυτό το επίπεδο υπάρχει κατανόηση των ίδιων των αξιωματικών συστημάτων και όχι η παραγωγή συμπερασμάτων μέσα σε ένα σύστημα. Οι μαθητές κατανοούν μη Ευκλείδειες γεωμετρίες και είναι σε θέση να τις συγκρίνουν με την Ευκλείδεια. Επίσης, μπορούν να μελετήσουν τη Γεωμετρία χωρίς πρότυπα αναφοράς και να αιτιολογήσουν χρησιμοποιώντας τυπικά Γεωμετρικά δεδομένα όπως αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα. (Clements & Battista, 1992).

Όπως αναφέρθηκε, η μετάβαση των μαθητών από το ένα επίπεδο σε επόμενο δεν είναι μία φυσική διαδικασία αλλά εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη διδακτική προσέγγιση και τις μεθόδους διδασκαλίας. Έτσι είναι ανάγκη ο εκπαιδευτικός να είναι σε θέση να αναγνώσει το επίπεδο των μαθητών και να προωθεί την επικοινωνία στο ίδιο αυτό επίπεδο. Επειδή κάθε επίπεδο έχει το δικό του εννοιολογικό σύστημα και συστήματα σχέσεων, όταν εκπαιδευτικός και μαθητής δεν συζητούν στο ίδιο επίπεδο, τότε η επικοινωνία αποτυγχάνει. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, οι Van Hiele προτείνουν ένα θεωρητικό μοντέλο πέντε φάσεων για τη μαθησιακή διαδικασία.

Έτσι οι περίοδοι διδασκαλίας είναι οι εξής:

- Διερεύνηση (inquiry)
- Καθοδηγούμενος προσανατολισμός (directed orientation)
- Επεξήγηση (explanation)
- Ελεύθερος προσανατολισμός (free orientation)
- Ολοκλήρωση (integration)

Το μοντέλο των Van Hiele έχει εφαρμοστεί σε μία πληθώρα μελετών παγκοσμίως, προκειμένου να καταδειχθεί αν το επίπεδο των μαθητών είναι το προσδοκώμενο ανάλογα και με τη βαθμίδα εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τη μελέτη των (Haviger & Vojkůvková, 2014) από δείγμα 215 μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Τσεχίας, έδειξαν ότι το 96,7% των μαθητών ήταν στο επίπεδο 1, 86,5% στο επίπεδο 2, 39,1 στο επίπεδο 3 και 8,8% στο επίπεδο 4.

Σύμφωνα με τη μελέτη του Usiskin το 1982, με συμμετοχή 2.700 μαθητών των ΗΠΑ, το επίπεδο 5 δεν υπάρχει, είτε δεν είναι ελέγξιμο, ενώ τα υπόλοιπα είναι, καθώς κάθε μαθητής μπορούσε να αντιστοιχηθεί σε ένα επίπεδο. Η πλειονότητα των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατατάχθηκε στο πρώτο ή δεύτερο επίπεδο. (Καλαϊτζίδης & Παππά, 2021)

Μια μεταγενέστερη έρευνα που διεξήχθη από τους Gutierrez και Jaime (1998), χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της προσέγγισης των Gutierrez, Jaime, και Fortuny (1991), αποκάλυψε ότι η περισσότεροι από τους 309 μαθητές που συμμετείχαν, των οποίων η ηλικία κυμαινόταν από 11 έως 18 ετών, είχαν επιτύχει υψηλή ή πλήρη απόκτηση του πρώτου επιπέδου και πρόοδευαν προς την απόκτηση του δεύτερου σταδίου γεωμετρικής σκέψης. (Καλαϊτζίδης & Παππά, 2021)

Ευρήματα από ανάλογες έρευνες που έγιναν στην Ελλάδα είναι παρόμοια με αυτά που συζητήθηκαν προηγουμένως. Συγκεκριμένα, η έρευνα του Τζίφα (2005), όπου χρησιμοποιήθηκε το Van Hiele geometry test του Usiskin (1982), αποκάλυψε ότι το 60,6% 1838 μαθητών των Γυμνασίων και Λυκείων της Ελλάδας που συμμετείχαν, βρίσκονταν στα επίπεδα 1 και 2 με το αυστηρό κριτήριο και με το ελαστικό κριτήριο 48,6%. Το αυστηρό κριτήριο δηλώνει δυσκολότερη κατάταξη σε ανώτερα επίπεδα, ενώ το ελαστικό ευκολότερη.

Στη έρευνα που διεξήγαγαν οι Δημάκος και Νικολουδάκης (2009), προέκυψε ότι τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια. Από την έρευνα αυτή, διαπιστώθηκε ότι συνολικά το 21,6% του δείγματος, που αποτελούνταν από μαθητές της Α' Λυκείου, κατηγοριοποιήθηκαν στο πρώτο επίπεδο. Επιπλέον, το 46,8% των συμμετεχόντων κατατάχθηκε στο δεύτερο επίπεδο, ενώ το 16,8% στο τρίτο επίπεδο. (Καλαϊτζίδης & Παππά, 2021)

Σύμφωνα με την έρευνα του Σαλονικιού (2008), όσον αφορά το βαθμό απόκτησης του επιπέδου 2 κατά Van Hiele χρησιμοποιώντας το μοντέλο Gutierrez, Jaime και Fortuny (1991), ανακαλύφθηκε ότι περίπου το 95% από τους 110 μαθητές από τις τάξεις Δ’ και ΣΤ’ του Δημοτικού, σχεδόν όλοι οι μαθητές του δείγματος, κατατάσσονταν τουλάχιστον στην «ενδιάμεση απόκτηση» του επιπέδου 2. (Καλαϊτζίδης & Παππά, 2021)

Τέλος, στη μελέτη και στη προσπάθειά του να εξηγήσει για ποιο λόγο οι μαθητές δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν τη διδασκαλία της Γεωμετρίας του Λυκείου, ο Ζάχος (2000) ανακάλυψε ότι 75% των μαθητών του δείγματός του, που αποτελείται από 458 μαθητές της Β’ τάξης του Λυκείου, βρίσκονταν κάτω από το επίπεδο 4 Van Hiele, οπότε και αδυνατούσαν να παρακολουθήσουν με ευκολία τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. (Καλαϊτζίδης & Παππά, 2021)

3.3. Ο ρόλος των σχημάτων

Τα γεωμετρικά σχήματα έχουν αναμφισβήτητα σπουδαίο ρόλο στη διαδικασία κατανόησης και επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων. Τα σχήματα ενισχύουν τη γεωμετρική διαίσθηση κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου (Panaoura, Gagatsis, & Lemonides, 2007). Σύμφωνα με τη (Mesquita, 1998) η οπτική ενίσχυση της διαίσθησης μπορεί να είναι τόσο ισχυρή που να αποτελέσει τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού. Για τον Fischbein, το γεωμετρικό σχήμα είναι κατά βάση μία νοητική οντότητα (mental entity) με χαρακτήρα εννοιολογικό (conceptual) και σχηματικό (figural). Έτσι τα σχήματα αποτελούν σχηματικές έννοιες (figural concepts). Όταν τα σχήματα και οι έννοιες εναρμονίζονται τέλεια σε εννοιολογικό σχήμα, τότε φτάνουμε στο ψηλότερο σημείο του γεωμετρικού συλλογισμού. (Fischbein & Nachlieli, Concepts and figures in geometrical reasoning., 1998)

Τα γεωμετρικά σχήματα αποτελούνται από:

- Τον ορισμό (the definition)
- Την εικόνα (the images) με βάση την αντιληπτική-αισθητηριακή εμπειρία, όπως η εικόνα ενός σχεδίου
- Τη σχηματική έννοια (the figural concept)

Έτσι, ένα γεωμετρικό σχήμα είναι:

(α) Μια νοητική εικόνα, οι ιδιότητες της οποίας ελέγχονται πλήρως από έναν ορισμό.

(β) Το σχέδιο δεν είναι το ίδιο το γεωμετρικό σχήμα, αλλά μια γραφική ή μια συγκεκριμένη, υλική ενσωμάτωσή του.

(γ) Η διανοητική εικόνα ενός γεωμετρικού σχήματος είναι συνήθως, η αναπαράσταση του υλοποιημένου μοντέλου αυτού.

Το ίδιο το γεωμετρικό σχήμα είναι μόνο η αντίστοιχη ιδέα που είναι η αφηρημένη, εξιδανικευμένη, εξαγνισμένη εικονιστική οντότητα, που καθορίζεται αυστηρά από τον ορισμό της. Το γνήσιο νόημα της λέξης κύκλος στη γεωμετρία, όπως τη χειρίζεται η συλλογιστική μας διαδικασία, δεν μπορεί να αναχθεί σε έναν καθαρά τυπικό ορισμό. Είναι μια εικόνα που ελέγχεται εξ ολοκλήρου από έναν ορισμό. Χωρίς αυτού του είδους τις χωρικές εικόνες, η γεωμετρία δεν θα υπήρχε ως κλάδος των μαθηματικών. (Fischbein, 1993)

3.3.1. Το ερμηνευτικό μοντέλο του Duval

Παρά την κομβική σημασία του γεωμετρικού σχήματος στην επίλυση προβλημάτων, έχει φανεί ότι είτε δεν χρησιμοποιούνται αρκετά σχήματα στην εκπαιδευτική διαδικασία, είτε ότι όταν αυτά χρησιμοποιούνται δεν μπορούν να αξιοποιηθούν από τους μαθητές για την επίλυση προβλημάτων. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές είναι κρίσιμος για την επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος. Πάνω σε αυτή τη βάση ο Duval ανέπτυξε ένα δικό του θεωρητικό μοντέλο προσέγγισης των γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι διέκρινε τέσσερις τύπους γνωστικής κατανόησης:

- Η αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension)
- Η διαδικαστική κατανόηση (sequential apprehension)
- Η λεκτική κατανόηση (discursive apprehension)
- Η λειτουργική κατανόηση (operative apprehension)

Η <u>αντιληπτική κατανόηση</u> σχετίζεται με την συνολική κατανόηση του σχήματος, πώς μοιάζει ένα σχήμα με την πρώτη ματιά. Το παιδί είναι ικανό να διαχωρίσει τα τμήματά του αλλά δεν είναι σε θέση να παρέχει αιτιολογήσεις, αποδείξεις ή να κατασκευάσει το σχήμα.

Η <u>διαδικαστική κατανόηση</u> σχετίζεται με την αντίληψη του τρόπου με τον οποίο είναι δομημένα τα επιμέρους στοιχεία, ως προϋπόθεση για την κατασκευή ή περιγραφή ενός σχήματος. Σε αυτό το επίπεδο υπάρχουν κατασκευαστικοί περιορισμοί και μαθηματικές ιδιότητες χωρίς η κατανόηση αυτή να εμπίπτει σε αντιληπτικούς νόμους.

Η <u>λεκτική κατανόηση</u> είναι ο έλεγχος των λεκτικών δηλώσεων που αφορούν το σχήμα (ονομασίες, ορισμοί, διαδικασίες). Απαιτείται όταν εντάσσεται η επεξεργασία του σχήματος, σε ένα γενικότερο πλαίσιο κατανόησης μιας εκφώνησης, παρακολούθησης στα πλαίσια μιας απόδειξης, ενός τυπικού μαθηματικού συλλογισμού.

Η <u>λειτουργική κατανόηση</u> σχετίζεται με τον απαγωγικό συλλογισμό, και δημιουργεί συνθήκες πρόσβασης στη λύση του προβλήματος. Συνδέεται άμεσα με τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί ένα σχήμα, νοερά ή φυσικά, και οδηγεί τελικά στη λύση.

3.4. Σύγχρονες αντιλήψεις

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει διατυπωθεί ένα πλήθος θεωριών για τη διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών στο σχολικό περιβάλλον, αφού το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας έχει δείξει την ανεπάρκειά του. Η αντίληψη των εκπαιδευτικών σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης των μαθητών στη διδασκαλία των μαθηματικών παίζει πολύ μεγάλο ρόλο, αφού αποτυπώνεται στις πρακτικές τους κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, διαμορφώνει τη διδακτική τους συμπεριφορά και επηρεάζει τον τρόπο και τον βαθμό μάθησης των μαθητών. Για αυτόν τον λόγο θα πρέπει να εγκαταλειφθεί το παραδοσιακό μοντέλο μάθησης, που αντιμετωπίζει τον εκπαιδευτικό ως την πηγή της γνώσης και τον μαθητή ως αποδέκτη.

Οι σύγχρονες, καινοτόμες προτάσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών, αμφισβητούν τόσο τη στρουκτουραλιστική δομή- στη βάση της θεωρίας των συνόλων- όσο και τη μετάδοση τυποποιημένων γνώσεων από το δάσκαλο στο μαθητή. Εισάγουν μία σειρά από αλλαγές στο θεωρητικό επίπεδο αλλά και στο περιεχόμενο της διδασκαλίας. Για παράδειγμα οι Αρχές και Πρότυπα για τα σχολικά μαθηματικά, που δημιουργήθηκαν από το εθνικό συμβούλιο καθηγητών μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ, υποστηρίζουν ότι όλοι οι μαθητές πρέπει να μάθουν ενδιαφέροντα μαθηματικά και πως η διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων πρέπει να αποτελεί το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών. (Πιπίνος, 2006)

3.4.1. Εποικοδομιστικό μοντέλο (constructivism)

Ο όρος εποικοδομισμός ή κονστρουκτιβισμός, διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον καθηγητή ψυχολογίας Von Glaserfeld to 1989 στο άρθρο του Constructivism in Education. Βασικοί εκπρόσωποι είναι επίσης οι Piaget, Vygotsky, Bruner και Dewey. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή αντίληψη, η μάθηση είναι μια ενεργή διαδικασία μέσα στην οποία η έννοια δημιουργείται στη βάση της εμπειρίας, ενώ η γνώση κατασκευάζεται μέσα από την εμπειρία. (Μακρή-Μπότσαρη, 2006)

Ο μαθητής τίθεται στο κέντρο και υποβοηθάται από τον εκπαιδευτικό να οικοδομήσει γνώσεις βασισμένες στις δικές του προϋπάρχουσες γνώσεις, παρατηρήσεις και εμπειρίες (μαθητοκεντρική διδασκαλία). Γίνεται αποδεκτό ότι ο μαθητής διαθέτει γνώσεις πριν ενταχθεί στην εκπαίδευση και ο ρόλος του σχολείου είναι να συμβάλλει στην οικοδόμηση νέων γνώσεων και στην εξέλιξη των υπαρχουσών. Το μαθητικό υποκείμενο δεν αντιμετωπίζεται ως παθητικός δέκτης, αλλά δομεί τη γνώση ενεργητικά με τον δικό του τρόπο. Η επαναστατική πτυχή του Κονστρουκτιβισμού έγκειται στον ισχυρισμό ότι η γνώση δεν μπορεί και δεν χρειάζεται να είναι "αληθινή" με την έννοια ότι ταιριάζει με την οντολογική πραγματικότητα, αλλά μόνο πρέπει να είναι "βιώσιμη" με την έννοια ότι ταιριάζει μέσα στους βιωματικούς περιορισμούς που περιορίζουν τις δυνατότητες δράσης και σκέψης του γνωστικού οργανισμού. (Von Glasersfeld, 1989)

Οι Driver και Oldham πρότειναν το 1985 ένα μοντέλο εποικοδομητικής διδασκαλίας σε πέντε φάσεις:

1. Η φάση προσανατολισμού: πρόκειται για την εισαγωγή στο μάθημα.
   - Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να βρει τρόπο να προκαλέσει το ενδιαφέρον ή την περιέργεια του μαθητή για το αντικείμενο.
   - Θα πρέπει να εξηγήσει τι ακολουθεί στη συνέχεια για την καλύτερη αφοσίωση των μαθητών.

2. Φάση ανάδειξης των ιδεών των μαθητών.
   - Οι μαθητές εκφράζουν τις σκέψεις – ιδέες τους σε γραπτή ή προφορική μορφή με βάση τις εντυπώσεις τους από τη φάση του προσανατολισμού. Για τους μαθητές, η αποσαφήνιση των ιδεών που έχουν ήδη, τους βοηθά να αποκτήσουν στη δόμηση νέων ιδεών, εμπιστοσύνη. Για τις δικές τους διαδικασίες σκέψης, τους ενημερώνει και τους ενθαρρύνει, να σκεφτούν και να ασκήσουν κριτική στις ιδέες που έχουν ήδη. (Μανώλης, n.d.) Όλων των ομάδων οι απόψεις, παρουσιάζονται μέσα στη Τάξη, ώστε εκείνει που είναι πιο κοντά στο επιστημονικό πρότυπο, να υοθετηθεί. (Ollerenshaw & Ritchle, 1993)

3. Η φάση αναδόμησης των ιδεών των μαθητών.

   - Οι μαθητές, στη φάση αυτή, ενθαρρύνονται να ελέγξουν τις ιδέες τους, για να τις επεκτείνουν, να αντικαταστήσουν προϋπάρχουσες ιδέες με άλλες, ή να αναπτύξουν ιδέες όπου δεν έχουν άποψη. Η επιδίωξη του διδάσκοντα είναι η οικειοθελής και αυτόβουλη μετατόπιση των παιδιών από τις ιδέες τους σε άλλες ιδέες που είναι πιο κοντά στα επιστημονικά πρότυπα. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των δύο ή τριών. Στη συνέχεια ακολουθούν γραπτές οδηγίες για το πώς να εκτελούν συγκεκριμένα έργα και προσπαθούν να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματά τους. Στόχος αυτών των έργων, είναι να οδηγηθούν σε αδιέξοδο οι μαθητές, βλέποντας την διάσταση μεταξύ, του τι αναμένεται από αυτούς, και του πειραματικού αποτελέσματος. Έτσι θα οδηγηθούν σε ενδοπροσωπική σύγκρουση. Αυτή η σύγκρουση θα τους κάνει να αισθάνονται δυσαρεστημένοι, γεγονός που πιθανότατα θα τους οδηγήσει σε εννοιολογική αλλαγή. (Κόκουτας, 2002)

4. Η φάση της εφαρμογής.

   - Γίνεται συσχέτιση της γνώσης με τις καθημερινές εμπειρίες της ζωής. Η πραγματική αξία της μάθησης έγκειται στην ικανότητά της να παρέχει λύσεις σε προβλήματα που προηγουμένως δεν επιλύονταν. (Μανώλης, χ.χ.) Κατά συνέπεια, πρέπει να δοθεί στους μαθητές η ευκαιρία να διερευνήσουν πώς οι νεοαποκτηθείσες γνώσεις τους μπορούν να εφαρμοστούν στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

5. Η φάση της ανασκόπησης.

   - Οι μαθητές κατανοούν και αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα των ανακαλύψεών τους. Συγκρίνουν τις αρχικές τους απόψεις με τις τρέχουσες. Μετά τη συζήτηση, όσοι μαθητές αλλάζουν άποψη, γράφουν τις καινούριες ιδέες τους, και τους λόγους που οδηγήθηκαν στην εγκατάλειψη των προγενεστέρων απόψεών τους. Στοιχεία αυτορρύθμισης και μεταγνώσης, μπορεί να θεωρηθούν οι διαδικασίες αυτές.

<u>Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία</u>

Ο κοινωνικός εποικοδομισμός θεωρεί ότι η γνώση δεν είναι ατομική υπόθεση, αλλά ότι προκύπτει μέσα από τις κοινωνικές σχέσεις. Σύμφωνα με τον Vygotsky, οι γνώσεις δομούνται μέσω των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ατόμων, και οι ίδιες οι γνώσεις είναι κοινωνικά καθορισμένες μέσα από κώδικες. Η μάθηση ως διαδικασία και η γνώση ως περιεχόμενο, προσδιορίζονται από τις κοινωνικοπολιτιστικές περιστάσεις. (Vygotsky & Cole, 1978)

Έτσι, το παραπάνω μοντέλο διδασκαλίας είναι απαραίτητο να συνδυαστεί με τη συνεργατική μάθηση. Ο Baloche (1998) υποστηρίζει: "Για να είναι η συνεργατική μάθηση μια αποτελεσματική παιδαγωγική της ισότητας, πρέπει να υπάρχουν, μεταξύ άλλων,

- αλληλεπίδραση που βοηθά τους συμμετέχοντες να μάθουν για τον εαυτό τους και ο ένας για τον άλλον ως άτομα και
- συνθήκες που να ενθαρρύνουν την αλληλεπίδραση ίσου καθεστώτος. (Baloche, 1998)

Οι Onwuegbuzie,Collins, and Jiao (2009) επισημαίνουν, ότι η ατομική υπευθυνότητα είναι το κλειδί για την επιτυχία της συνολικής ομάδας και συμβάλλει στην αποτροπή του "κοινωνικού loafing", ή της μειωμένης ατομικής προσπάθειας που προκύπτει από την υπερβολική εξάρτηση από άλλα μέλη της ομάδας. (Onwuegbuzie, Collins, & Jiao, 2009) Οι Jacob, Power & Inn (2002) προτείνουν ότι η συνεργατική μάθηση προάγει "τις διεθνικές σχέσεις και την αποδοχή των μαθητών με ακαδημαϊκές δυσκολίες" Σε μια μελέτη που διεξήχθη από τον Hussain (2012),διαπιστώθηκε ότι, "η συνεργασία και η συνεργατικότητα ανέπτυξαν πνεύμα συνεισφοράς μεταξύ των μαθητών ξεπερνώντας τη συστολή και την εσωστρέφειά τους". (Ramsook, 2018)

3.4.2. Ρεαλιστικά Μαθηματικά

Ο μαθηματικός Freudenthal θεωρείται ο θεμελιωτής της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ΡΜΕ). Η προσέγγιση αυτή άρχισε να διαμορφώνεται στην Ολλανδία, στις αρχές της δεκαετίας του ’70 με το πρόγραμμα Wiskobas. Ο Freudenthal επέκρινε έντονα στο παραδοσιακό μοντέλο της διδασκαλίας των μαθηματικών, σύμφωνα με το οποίο τα τελικά αποτελέσματα του έργου των επιστημόνων μαθηματικών, χρησιμοποιήθηκαν ως σημεία εκκίνησης για την εκπαίδευση των μαθηματικών στα σχολεία. Αντίθετα, υποστήριξε, ως εναλλακτική λύση, ότι ως σημείο εκκίνησης θα πρέπει να λάβει τη δραστηριότητα των μαθητών, η εκπαίδευση των μαθηματικών, και όχι τα μαθηματικά ως ένα έτοιμο/ολοκληρωμένο σύστημα γνώσης. Μέσω της διδακτικής φαινομενολογίας του, ο Freudenthal υποστήριξε την ιδέα ότι τα μαθηματικά πρέπει να βασίζονται στην πραγματικότητα και να ευθυγραμμίζονται με τις ατομικές εμπειρίες του μαθητή, δίνοντάς τους έτσι την ευκαιρία να επανεφεύρουν τα μαθηματικά.

Ο Freudenthal αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες ως «εργαλεία» για την οργάνωση και την κατανόηση των φαινομένων του πραγματικού κόσμου. (Κολέζα, 2000) Ο σχεδιασμός κάθε διδασκαλίας, γίνεται με τέτοιον τρόπο ώστε, οι μαθητές από μόνοι τους να κάνουν τις ανακαλύψεις, και από την άλλη, από τον δάσκαλο προκαθορίζεται, το τι θα ανακαλύψουν ή η σειρά με την οποία θα πραγματοποιήσουν τις ανακαλύψεις τους. (Κολέζα, 2000) Ως ακολούθως, ξεκινώντας από τα ίδια τα φαινόμενα, ο μαθητής, διδάσκεται πώς να διαχειρίζεται μαθηματικές έννοιες και δομές, και όχι το αντίστροφο. Δηλαδή, πρέπει να δοθεί η ευκαιρία τα μαθηματικά να αναπτυχθούν με μία διαδικασία καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης, αντί να διδάσκονται στους μαθητές έτοιμα μαθηματικά.

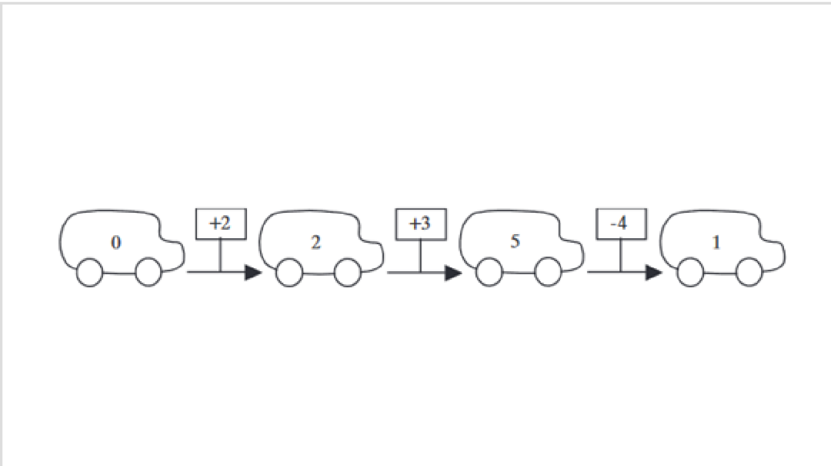
Έτσι, κύρια χαρακτηριστικά της PME είναι:

- Τα μαθηματικά αναπτύσσονται μέσα από πλαίσια.
- Τα μαθηματικά υποστηρίζουν ανάπτυξη δραστηριοτήτων με νόημα.
- Η ιδέα των μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα.
- Τα μαθηματικά είναι για όλους.

Όπως υποστηρίχθηκε παραπάνω, η εξερεύνηση μίας μαθηματικής έννοιας γίνεται με προβλήματα σε ένα συγκεκριμένο πραγματικό πλαίσιο. Έτσι η έννοια του προβλήματος-πλαισίου (context problem) έρχεται να αντικαταστήσει το παραδοσιακό λεκτικό πρόβλημα. Το πλαίσιο δεν αποτελείται μόνο από ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων που περιγράφουν μια πλαστή-κοινότοπη ιστορία, η οποία τις περισσότερες φορές έρχεται σε αντιπαράθεση με την καθημερινή γνώση των μαθητών και δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα μεταμφιεσμένο λεκτικό πρόβλημα. Αντίθετα, το πρόβλημα-πλαίσιο αναφέρεται σε μία πραγματική κατάσταση και στηρίζεται στις προϋπάρχουσες άτυπες γνώσεις από τη σφαίρα ενδιαφερόντων των μαθητών. (Κολέζα, 2000)

Χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος-πλαισίου χρησιμοποιήθηκε στην Ολλανδία στο πλαίσιο ερευνητικού προγράμματος, για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σε εξάχρονα παιδιά. Με την επεξεργασία ενός τέτοιου προβλήματος πλαισίου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να δραματοποιήσουν τις δραστηριότητές τους και να υλοποιήσουν τις δικές τους ιδέες, εμπειρίες ή φαντασιώσεις, οι οποίες συχνά έρχονται σε αντιπαραβολή με τις ιδέες των συμμαθητών τους ή με τις μαθηματικές ιδιότητες που είναι άγνωστες και πρέπει να γίνουν κτήμα τους. (Πιπίνος, 2006)

Ως ακολούθως, μέσα από τις διεργασίες της μαθηματικοποίησης είναι εφικτή η μεταφορά της σκέψης από το ερμηνευτικό πλαίσιο (λεωφορείο) στο αριθμητικό πλαίσιο. Η ρεαλιστική εκπαίδευση γεφυρώνει με αυτό τον τρόπο το χάσμα ανάμεσα στην άτυπη, διαισθητική και συνδεδεμένη με το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος διαδικασία, και στην τυπική, αναστοχαστική, αφαιρετική και βαθμιαία σχηματοποιημένη και γενικευμένη διαδικασία. (Πιπίνος, 2006)



Το πρόγραμμα Wiskobas (υπεύθυνο για τη μαθηματική εκπαίδευση σε μαθητές 2-12 ετών), συνεισέφερε επίσης στη δόμηση της θεωρίας των ρεαλιστικών μαθηματικών, με την ανάπτυξη του μοντέλου της προοδευτικής μαθηματικοποίησης.

Ο Treffers(1987) ορίζει την μαθηματικοποίηση ως μια δραστηριότητα δόμησης και οργάνωσης, κατά την οποία οι ικανότητες και οι γνώσεις που αποκτήθηκαν, χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη δομών και άγνωστων σχέσεων. Διαχωρίζει δύο κατηγορίες, την οριζόντια και την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση.

➢ Οριζόντια μαθηματικοποίηση.

Η μετάβαση από τον φυσικό κόσμο στον κόσμο των συμβόλων.

Δηλαδή ένα πραγματικό πρόβλημα μεταφράζεται από τον μαθητή σε μαθηματικό πρόβλημα, μέσα από μία σειρά ενεργειών όπως:

1. Η διατύπωση και αναπαράσταση του προβλήματος με διαφόρους τρόπους.
2. Η αναγνώριση κοινών χαρακτηριστικών ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις.
3. Η μοντελοποίηση στη βάση διαισθητικών και άτυπων μαθηματικών γνώσεων.
4. Η επινόηση ή εφαρμογή εργαλείων, συμβόλων κλπ.

Έτσι ο μαθητής προσπαθεί να εντοπίσει μαθηματικές έννοιες που βρίσκονται μέσα στο πλαίσιο του προβλήματος.

➢ Κατακόρυφη μαθηματικοποίηση.

Χρησιμοποιούνται εργαλεία για την επεξεργασία και αντιμετώπιση των πραγματικών προβλημάτων που έχουν μεταφραστεί σε μαθηματικά, όπως:

1. Χρήση, συνδυασμός ή βελτίωση μαθηματικών μοντέλων.
2. Διαμόρφωση ενός νέου μαθηματικού μοντέλου.
3. Γενίκευση.

Η PME έχει έξι βασικές αρχές σχετικά με την εκπαιδευτική διαδικασία πάνω στις οποίες στηρίζεται:

- <u>Αρχή της δράσης (Activity principle)</u>.

  Οι μαθητές αντιμετωπίζονται ως ενεργοί συμμετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τονίζεται ότι, ο καλύτερος τρόπος να μάθει κανείς μαθηματικά είναι να κάνει μαθηματικά.

- <u>Αρχή της πραγματικότητας (reality principle)</u>.

  Οι μαθητές πρέπει να μάθουν να χρησιμοποιούν τη μαθηματική κατανόηση και τα εργαλεία της για την επίλυση προβλημάτων.

- <u>Αρχή του επιπέδου(level principle)</u>:

  Τα επίπεδα κατανόησης που περνούν οι μαθητές είναι διάφορα, όπως η δημιουργία διαφόρων επιπέδων από σχηματοποιήσεις και συντομεύσεις, η διάκριση των ευρύτερων σχέσεων, η απόκτηση της διορατικότητας στις βασικές αρχές, και η ικανότητα ανακάλυψης άτυπων λύσεων, συνδεδεμένες με το πλαίσιο. Για να φτάσει κανείς σε ένα επόμενο επίπεδο, η προϋπόθεση είναι να προβληματιστεί σχετικά με τις δραστηριότητες που πραγματοποιεί. Αυτός ο προβληματισμός μπορεί να προκαλείται από την αλληλεπίδραση.

- Αρχή της αλληλοσύνδεσης (intertwinement principle).

  Τα πεδία των μαθηματικών, περιεχομένου όπως, η γεωμετρία, ο αριθμός, ο χειρισμός των δεδομένων και η μέτρηση, δεν θεωρούνται ως μεμονωμένα κεφάλαια του προγράμματος σπουδών, αλλά σε μεγάλο βαθμό είναι ενσωματωμένα. Προσφέρονται στους μαθητές, πλούσια προβλήματα στα οποία, μπορούν να χρησιμοποιήσουν γνώσεις και διάφορα μαθηματικά εργαλεία.

- Αρχή της αλληλεπίδρασης (interaction principle).

  Η εκμάθηση των μαθηματικών δεν είναι μόνο μια ατομική δραστηριότητα, αλλά και μια κοινωνική δραστηριότητα. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, τους βοηθάει να μοιραστούν τις ιδέες και τις στρατηγικές τους και να πάρουν ιδέες για την βελτίωσή τους.

- Αρχή της καθοδήγησης (guidance principle).

  Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να έχει ενεργό ρόλο στην καθοδήγηση του μαθητή, πάνω στη βάση της καθοδηγούμενης επανα-ανακάλυψης των μαθηματικών από τον μαθητή.

Η διδακτική προσέγγιση των ρεαλιστικών μαθηματικών εφαρμόζεται έκτοτε μέχρι σήμερα στις Κάτω Χώρες και έχει φέρει αποτελέσματα. Συγκεκριμένα στη δεκαετία του 1980, το μερίδιο της αγοράς για τα σχολικά βιβλία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τα οποία είχαν παραδοσιακή και μηχανιστική προσέγγιση ήταν 95% και τα σχολικά βιβλία με μια προσέγγιση προσανατολισμένη στη μεταρρύθμιση είχαν μερίδιο αγοράς μόνο 5%. Το 2004, τα εγχειρίδια που ήταν προσανατολισμένα στη μεταρρύθμιση κατέκτησαν μερίδιο αγοράς 100% και τα μηχανιστικά εγχειρίδια εξαφανίστηκαν. Η RME είχε επιρροή σε όλο τον κόσμο. Για παράδειγμα, η σειρά των βιβλίων της RME “Mathematics in Context” του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Wisconsin & του Ινστιτούτου Freudenthal (2006) έχουν ένα σημαντικό μερίδιο της αγοράς στις ΗΠΑ.

3.4.3. Σύστημα Μοντεσσόρι

Η μέθοδος Μοντεσσόρι πήρε το όνομά της από την παιδαγωγό και γιατρό Maria Montessori που άρχισε να την αναπτύσσει το 1897 και εφαρμόζεται έως σήμερα σε 60.000 σχολεία ανά τον κόσμο. Η μέθοδος Μοντεσσόρι ήταν επαναστατική, γιατί διαμορφώθηκε σε μία περίοδο στην οποία τα παιδιά ήταν καθηλωμένα στα θρανία και η διδασκαλία γινόταν με άκαμπτο, θεωρητικό τρόπο. Έτσι δόθηκε έμφαση στην ανάπτυξη του παιδιού σε σωματικό, ψυχολογικό και κοινωνικό επίπεδο, που μέχρι τότε παραμελούταν.

Στο μοντεσσοριανό σύστημα ο εκπαιδευτικός δεν έχει θέση αυθεντίας και αυτό αποτυπώνεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει έδρα στο κέντρο της σχολικής αίθουσας. Ο ρόλος των εκπαιδευτικών είναι καθοδηγητικός προς τα παιδιά, με κριτήριο και σεβασμό προς την αυτονομία τους. Έτσι τα παιδιά επιλέγουν τις δικές τους δραστηριότητες με υλικά που έχουν επιλεχθεί προσεκτικά για την καθοδήγησή τους. Απορρίπτεται τόσο η τακτική της τιμωρίας, όσο και εκείνη της επιβράβευσης. Η παρέμβαση του εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων πρέπει να γίνεται όταν κρίνεται απολύτως αναγκαίο, αφήνοντας το παιδί να δράσει μόνο του, τόσο στις δυσκολίες του μαθήματος όσο και στις δυσκολίες των κοινωνικών σχέσεων με τα άλλα παιδιά. Εκτός από το πλαίσιο του μαθήματος, δίνεται επίσης έμφαση στην ανεξαρτησία του παιδιού στην καθημερινή ζωή, βοηθώντας το με τις καθημερινές ενέργειες φροντίδας του εαυτού.

Όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών, η Μοντεσσόρι πίστευε ότι το μυαλό του παιδιού είναι μαθηματικό και βασίζεται στην τάξη της αντιληπτικής επίγνωσης που συναντάται στην ανάπτυξη των αισθήσεων. Η απόκτηση των μαθηματικών αρχών θεωρείται ότι αναπτύσσεται λογικά από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και από το απλό στο σύνθετο. Έτσι η εκπαίδευση γίνεται βαθμιαία χωρίς να δίνονται έτοιμες έννοιες από τον εκπαιδευτικό.

Οι έννοιες γίνονται αντιληπτές από τα παιδιά όχι θεωρητικά, αλλά αισθητηριακά με τα κατάλληλα αντικείμενα. Προκειμένου να διδαχθούν οι γεωμετρικές έννοιες, χρησιμοποιούνται ξύλινα στερεά και κάρτες ονοματολογίας.

<u>Γεωμετρία μέσω των αισθήσεων</u>

Τα πρώιμα υλικά γεωμετρίας περιλαμβάνουν τα τριγωνικά κουτιά, το γεωμετρικό ντουλάπι, τις γεωμετρικές βάσεις και τα στερεά. Ονομάζουμε αυτές τις πρώιμες σπουδές "Εξερεύνηση των μορφών". Σε αυτές τις πρώτες δραστηριότητες, τα παιδιά απλώς μαθαίνουν τα ονόματα των σχημάτων και αρχίζουν να συνδέουν το όνομα με το σχήμα. Σύμφωνα με τον αληθινό Μοντεσσοριανό τρόπο, οι πρώιμες δραστηριότητες γεωμετρίας αυξάνουν επίσης τον συντονισμό χεριού/ματιού και τις λεπτές κινητικές δεξιότητες, καθώς το παιδί διαγράφει το περίγραμμα του σχήματος με το δάχτυλο ή το μολύβι. (Bourne, n.d.)

<u>Ονομάζοντας και Γνωρίζοντας</u>

Αφού το παιδί εξερευνήσει τις μορφές και τα σχήματα, καλείται να κατανοήσει τις μορφές και τις λεπτομέρειές τους. Αυτές είναι οι κάρτες ονοματολογίας (ή οι φάκελοι γεωμετρίας) που περιλαμβάνουν μεγάλο μέρος του προγράμματος σπουδών γεωμετρίας 6-9. Πρόσθετα υλικά περιλαμβάνουν το κουτί με τα ραβδιά γεωμετρίας και τις κάρτες εντολών. Τώρα, το παιδί μαθαίνει τα διάφορα μέρη και τους τύπους των γραμμών, των γωνιών, των τριγώνων και άλλων σχημάτων. (Bourne, n.d.)

Τα Χρυσά Στοιχεία της Γεωμετρίας

Στα 9-12, το παιδί εισάγεται σε τρεις μεγάλες έννοιες της γεωμετρίας: τη σύμπτωση, την ομοιότητα και την ισοδυναμία. Αυτές οι έννοιες αναφέρονται ως τα "Χρυσά Στοιχεία" της γεωμετρίας. Η δυναμική πτυχή αυτού του επιπέδου περιλαμβάνει την αποσυναρμολόγηση σχημάτων, τη μετακίνησή τους και, στη συνέχεια, την επανατοποθέτησή τους με τέτοιο τρόπο ώστε να παρουσιάζουν ισοδυναμία με ένα άλλο σχήμα. Για παράδειγμα, ένα παιδί μπορεί να αναδιαμορφώσει ένα τρίγωνο για να δείξει ότι είναι ισοδύναμο με ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο. (Bourne, n.d.)

3.4.4. Μέθοδος Polya

Η συνεισφορά του Gyorgy Polya στη διδακτική των μαθηματικών είναι πολύτιμη, μέσα από το βιβλίο του How to solve it (1945) που παρουσιάζει μία σειρά από βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να λυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα:

1. Κατανόηση του προβλήματος.

   Σε αυτό το σημείο το πρόβλημα πρέπει να χωριστεί σε μέρη, δηλαδή να βρεθούν τα δεδομένα και τα ζητούμενα και να χαρακτηριστεί η συνθήκη. Ο Polya προτρέπει επίσης σε χάραξη σχήματος, το οποίο μπορεί να είναι πολύ βοηθητικό.

2. Επινόηση ενός σχεδίου.

   Πρέπει να βρεθεί η σχέση μεταξύ δεδομένων και ζητουμένων. Εάν αυτό είναι αδύνατο, τότε χρειάζεται η εξέταση παλαιότερων προβλημάτων και η ανάκληση ορισμών και θεωρημάτων που μπορεί να βοηθήσουν. Επίσης η αναδιατύπωση του προβλήματος και η εισαγωγή βοηθητικών στοιχείων.

3. Εκτέλεση ενός σχεδίου.

   Εκτελείται το σχέδιο της λύσης που διαμορφώθηκε με εξέταση των βημάτων και έλεγχο της ορθότητάς τους.

4. Ανασκόπηση.

   Ελέγχεται η ορθότητα της στρατηγικής που ακολουθήθηκε, και αν είναι δυνατό να βρεθεί το αποτέλεσμα με εναλλακτικούς τρόπους αλλά να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος για κάποιο άλλο πρόβλημα.

Ο Polya δίνει μεγάλη σημασία στον ρόλο του εκπαιδευτικού σε αυτή τη διαδικασία λύσης του προβλήματος. Συγκεκριμένα, προτείνει μία σειρά ερωτήσεων που πρέπει να υποβάλει ο εκπαιδευτικός προκειμένου να διευκολύνει τους μαθητές, όπως:

- Τι σας ζητείται να βρείτε ή να δείξετε;
- Μπορείτε να επαναδιατυπώσετε το πρόβλημα με δικά σας λόγια;
- Μπορείτε να σκεφτείτε μια εικόνα ή ένα διάγραμμα που θα μπορούσε να σας βοηθήσει να κατανοήσετε το πρόβλημα;
- Υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για να μπορέσετε να βρείτε μια λύση;
- Καταλαβαίνετε όλες τις λέξεις που χρησιμοποιήθηκαν για τη διατύπωση του προβλήματος;
- Χρειάζεται να κάνετε μια ερώτηση για να πάρετε την απάντηση; (Polya, 1945)

Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να επιλέξει τη δυσκολία της ερώτησης λαμβάνοντας υπόψη το επίπεδο κατανόησης κάθε μαθητή, ώστε όλοι να μπορούν να διατυπώσουν μία εποικοδομητική ιδέα. Έτσι, μέσα από μία σειρά ερωτήσεων, ο εκπαιδευτικός, καθοδηγεί τον μαθητή προς τη λύση του προβλήματος. Ξεκινώντας από πιο γενικές ερωτήσεις και πηγαίνοντας βαθμιαία σε πιο συγκεκριμένες, έχει ως στόχο να ωθήσει τους μαθητές στην κατασκευή του δικού τους σχεδίου. Ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται ότι το να δώσει ένα έτοιμο σχέδιο, όσο καλό και αν είναι, δεν πρόκειται να βοηθήσει.

4. Η δημιουργικότητα

Στον πυρήνα της, η δημιουργικότητα μπορεί να οριστεί ως η ικανότητα παραγωγής έργου που είναι ταυτόχρονα πρωτότυπο (πρωτότυπο, απροσδόκητο) και κατάλληλο (χρήσιμο, προσαρμοστικό όσον αφορά τους περιορισμούς εργασιών) (Sternberg & Lubart, 1999). Αυτός ο ορισμός είναι σε μεγάλο βαθμό αποδεκτός σε όλους τους κλάδους και περιλαμβάνει δύο κρίσιμες πτυχές της δημιουργικότητας: την καινοτομία και τη χρησιμότητα.

Ιστορικά, η δημιουργικότητα ήταν συχνά συνυφασμένη με τη θεϊκή έμπνευση σε πολλούς πολιτισμούς. Οι Έλληνες φιλόσοφοι, για παράδειγμα, συνέδεσαν τη δημιουργικότητα με την «ιδιοφυΐα» και τη θεϊκή παρέμβαση (Proctor, 2014). Οι περίοδοι του Διαφωτισμού και των Ρομαντικών: Κατά τη διάρκεια του Διαφωτισμού, η δημιουργικότητα θεωρούνταν όλο και περισσότερο ως μια πτυχή της λογικής και της νόησης (Kaufman, 2014).

Αντίθετα, η ρομαντική περίοδος έβλεπε τη δημιουργικότητα ως έκφραση ατομικής ιδιοφυΐας και συναισθήματος. Με την έλευση της ψυχολογίας τον 20ο αιώνα, η εστίαση μετατοπίστηκε προς την κατανόηση της δημιουργικότητας ως γνωστικής διαδικασίας. Αυτή η εποχή οδήγησε στην εργασία του J.P. Guilford για την αποκλίνουσα σκέψη (Guilford, 1950) και αργότερα στο συνθετικό μοντέλο που προτάθηκε από τον Amabile, το οποίο υπογράμμισε την αλληλεπίδραση δεξιοτήτων σχετικών με τον τομέα, διαδικασιών που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα και εγγενών κινήτρων εργασίας (Amabile, 1983).

Κατά την κοινωνικοπολιτισμική και τη συστημική προοπτική, που εμφανίστηκε στο τελευταίο μέρος του 20ου αιώνα, δίνοντας έμφαση στη δημιουργικότητα ως κοινωνικό και συστημικό φαινόμενο, το μοντέλο συστημάτων του Csikszentmihalyi περιγράφει τη δημιουργικότητα ως μια αλληλεπίδραση μεταξύ του ατόμου, του τομέα και του πεδίου (Csikszentmihalyi, 1988).

Τέλος, με τις εξελίξεις στη νευροεπιστήμη, η κατανόηση της δημιουργικότητας έχει εξελιχθεί περαιτέρω. Οι ερευνητές διερευνούν τώρα τα συγκεκριμένα δίκτυα του εγκεφάλου και τις νευροβιολογικές διεργασίες που στηρίζουν τη δημιουργική σκέψη (Dietrich & Kanso, 2010).

4.1. Εννοιολογική προσέγγιση

Η δημιουργικότητα είναι μια πολύπλευρη έννοια, που συχνά συνδέεται με την ικανότητα παραγωγής νέων και πολύτιμων αποτελεσμάτων, είτε είναι ιδέες, αντικείμενα ή λύσεις. Ενώ ο ίδιος ο όρος φαίνεται απλός, η ολοκληρωμένη κατανόησή του απαιτεί μια διεπιστημονική προοπτική, αντλώντας γνώσεις από τομείς όπως η ψυχολογία, η νευροεπιστήμη, η εκπαίδευση, οι επιχειρήσεις και οι τέχνες. Η πλήρης κατανόηση της δημιουργικότητας απαιτεί μια λεπτομερή εξέταση θεμελιωδών έργων σε αυτούς τους αντίστοιχους τομείς. Το έργο του ψυχολόγου J.P. Guilford (1967) ανέδειξε τον κεντρικό ρόλο της αποκλίνουσας σκέψης στη δημιουργικότητα. Η αποκλίνουσα σκέψη, η ικανότητα δημιουργίας πολλαπλών λύσεων σε ένα πρόβλημα, έγινε ακρογωνιαίος λίθος για την έρευνα δημιουργικότητας. Άλλες ψυχολογικές θεωρίες, όπως η Componential Theory of Creativity του Amabile (1983), έδωσαν έμφαση στη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ δεξιοτήτων σχετικών με τον τομέα, διαδικασιών που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα και εγγενών κινήτρων εργασίας για την προώθηση της δημιουργικότητας.

Ο Csikszentmihalyi (1988) διεύρυνε την προοπτική υποστηρίζοντας ότι η δημιουργικότητα δεν μπορεί να αποδοθεί αποκλειστικά σε άτομα. Εμφανίζεται μέσα σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό σύστημα, που περιλαμβάνει τον τομέα, το πεδίο και το άτομο. Μια δημιουργική ιδέα αναγνωρίζεται μόνο όταν κρίνεται πολύτιμη από το πεδίο, κάτι που βοηθά στην κατανόηση του γιατί ορισμένες ιδέες κερδίζουν αποδοχή ενώ άλλες όχι.

Στις νευροεπιστήμες, η σύγχρονη θεώρηση έχει εμβαθύνει την κατανόησή μας για τα νευροβιολογικά υποστρώματα της δημιουργικότητας. Μελέτες όπως αυτή του Dietrich (2004) έχουν προτείνει ότι καμία μεμονωμένη περιοχή ή δίκτυο του εγκεφάλου δεν είναι υπεύθυνη για τη δημιουργικότητα. Αντίθετα, περιλαμβάνει τη δυναμική αλληλεπίδραση πολλαπλών δικτύων εγκεφάλου, ειδικά του προεπιλεγμένου τρόπου λειτουργίας και των δικτύων εκτελεστικού ελέγχου. Παράλληλα, έθεσε τη σημασία των ασυνείδητων διαδικασιών στη δημιουργική σκέψη, που υπογράμμισε τη σημασία των περιόδων επώασης όπου η συνειδητή σκέψη εκτρέπεται από το πρόβλημα, διευκολύνοντας τις δημιουργικές ιδέες.

Η δημιουργικότητα είναι απαραίτητη και σε τομείς όπως η Εκπαίδευση και οι Επιχειρήσεις. Στην εκπαίδευση, ο ρόλος της δημιουργικότητας υπογραμμίζεται από τον Robinson (2011) που υποστήριξε τη σημασία της καλλιέργειας της δημιουργικότητας στην εκπαίδευση για την προετοιμασία των μαθητών για το απρόβλεπτο του μέλλοντος και για θέσεις εργασίας που μπορεί να μην υπάρχουν ακόμη. Στον επιχειρηματικό κόσμο, η έμφαση στη δημιουργικότητα είναι εξίσου σημαντική. Το έργο της Amabile (1998) τόνισε τον ρόλο της δημιουργικότητας στην προώθηση της καινοτομίας. Πρότεινε ότι οι οργανισμοί πρέπει να καλλιεργήσουν ένα περιβάλλον όπου η δημιουργικότητα ενθαρρύνεται και ανταμείβεται.

Οι τέχνες προσφέρουν επίσης ένα πλούσιο πλαίσιο δημιουργικότητας. Ο Gardner (1993) εξερεύνησε τις ζωές επτά εξαιρετικά δημιουργικών ατόμων σε διαφορετικούς καλλιτεχνικούς τομείς και σημείωσε ότι ενώ κάθε άτομο εμφάνιζε μοναδικές δημιουργικές διαδικασίες, τα κοινά νήματα περιελάμβαναν την αφοσίωση στην τέχνη, την ανάληψη κινδύνων και την ικανότητα να δημιουργεί νέες συνδέσεις.

Συνολικά, η δημιουργικότητα είναι ένα πολύπλοκο κατασκεύασμα που περιλαμβάνει γνωστικές διαδικασίες, νευροβιολογικούς μηχανισμούς και κοινωνικοπολιτισμικούς παράγοντες. Ενώ η ικανότητα δημιουργίας νέων και πολύτιμων αποτελεσμάτων αποτελεί τον πυρήνα της δημιουργικότητας, η κατανόηση των αποχρώσεων της, περιλαμβάνει τη διερεύνηση των ψυχολογικών της στοιχείων, των νευροεπιστημονικών υποστρωμάτων, του ρόλου της στην εκπαίδευση, τις επιχειρήσεις και τις τέχνες. Παρά τη φευγαλέα φύση της, η δημιουργικότητα παραμένει μια κρίσιμη δεξιότητα για τον 21ο αιώνα, καθιστώντας αναγκαία τη συνεχή μελέτη και προώθησή της.

Η σημασία της δημιουργικότητας εξηγείται σε μεγάλο βαθμό και από τη χρησιμότητά της. Η δημιουργικότητα είναι εξαιρετικά πολύτιμη και αναπόσπαστη σε διάφορους τομείς της ζωής τόσο για τα άτομα όσο και για τις κοινωνίες. Κάποιοι από τους λόγους για τους οποίους η δημιουργικότητα είναι σημαντική, είναι οι εξής:

- <u>Επίλυση προβλημάτων</u>.

  Η δημιουργικότητα είναι θεμελιώδης για την επίλυση προβλημάτων. Δίνει τη δυνατότητα στα άτομα να βλέπουν πέρα από τα παραδοσιακά όρια και να επινοούν νέες μεθόδους αντιμετώπισης προκλήσεων, οδηγώντας σε καινοτόμες λύσεις.

- <u>Προσωπική και Επαγγελματική Ανάπτυξη</u>.

  Στην προσωπική ζωή, η δημιουργικότητα επιτρέπει μεγαλύτερη αυτοέκφραση και ολοκλήρωση. Επαγγελματικά, οι δημιουργικοί υπάλληλοι είναι πιο πιθανό να καινοτομήσουν, να προσαρμοστούν στις αλλαγές και να οδηγήσουν στην ανάπτυξη στον οργανισμό τους.

- Οικονομική Ανάπτυξη.

  Στο ευρύτερο οικονομικό πλαίσιο, η δημιουργικότητα τροφοδοτεί την καινοτομία και την επιχειρηματικότητα. Αποτελεί κινητήρια δύναμη για την ανάπτυξη νέων προϊόντων, υπηρεσιών και τεχνολογιών, ενισχύοντας την οικονομική ανάπτυξη και τη δημιουργία θέσεων εργασίας.

- Εκπαίδευση.

  Στην εκπαίδευση, η δημιουργικότητα ενισχύει τη μάθηση και τη δέσμευση. Βοηθά τους μαθητές να σκεφτούν κριτικά, να προσεγγίσουν τα προβλήματα από διαφορετικές οπτικές γωνίες και να αναπτύξουν πάθος για ανακάλυψη και μάθηση.

- Κοινωνική πρόοδος.

  Οι κοινωνίες ευδοκιμούν όταν ενθαρρύνεται η δημιουργικότητα. Σπρώχνει τα όρια, αμφισβητεί τους καθιερωμένους κανόνες και οδηγεί σε κοινωνικές, τεχνολογικές και πολιτιστικές προόδους.

- Αντιμετώπιση της αβεβαιότητας.

  Η δημιουργικότητα είναι ένα ουσιαστικό εργαλείο για την πλοήγηση στην αβεβαιότητα. Σε έναν όλο και πιο ασταθή και πολύπλοκο κόσμο, η ικανότητα να βρίσκουμε δημιουργικές λύσεις σε απρόβλεπτα προβλήματα είναι ανεκτίμητη.

- Προώθηση της διαφορετικότητας και της ένταξης.

  Η δημιουργικότητα ενθαρρύνει την εκτίμηση διαφορετικών προοπτικών και πολιτισμών. Προωθεί ένα περιβάλλον χωρίς αποκλεισμούς όπου εκτιμώνται μοναδικές ιδέες και απόψεις, προωθώντας την πολιτιστική κατανόηση και συνεργασία.

Στην ουσία, η δημιουργικότητα δεν αφορά μόνο την τέχνη ή τη δημιουργία νέων ιδεών, αλλά μια κριτική ικανότητα που παίζει καθοριστικό ρόλο στην προσωπική ανάπτυξη, την επαγγελματική επιτυχία, την κοινωνική πρόοδο και τον πολιτιστικό εμπλουτισμό. Αποτελεί τον κινητήρα, ο οποίος οδηγεί την ανθρώπινη πρόοδο και εξέλιξη.

4.2. Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά αναφέρεται στην ικανότητα διατύπωσης νέων μαθηματικών εννοιών, επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων με πρωτότυπους τρόπους ή δημιουργίας απαρατήρητων σχέσεων μεταξύ υπαρχουσών μαθηματικών εννοιών. Δεν περιορίζεται στη σφαίρα των επαγγελματιών μαθηματικών ή ερευνητών της μαθηματικής επιστήμης.

Περιλαμβάνει επίσης τις καινοτόμες στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στο σχολείο ή τις εφευρετικές τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι για να εξηγήσουν μαθηματικές έννοιες.

Τρεις βασικές πτυχές της δημιουργικότητας εντοπίζονται στα μαθηματικά (Srirama, 2004; Sheffield, 2009).

- Η πρώτη αφορά τη δημιουργία νέων μαθηματικών εννοιών, θεωριών ή τεχνικών. Για παράδειγμα, η ανάπτυξη του λογισμού από τους Newton και Leibniz αντιπροσώπευε ένα σημαντικό δημιουργικό άλμα στον τομέα των μαθηματικών.

- Η δεύτερη αφορά την επίλυση προβλημάτων όπου η δημιουργικότητα είναι συχνά απαραίτητη όταν προσεγγίζουμε σύνθετα ή αφηρημένα μαθηματικά προβλήματα. Αυτό θα μπορούσε να περιλαμβάνει τη σκέψη μιας νέας στρατηγικής για την επίλυση ενός προβλήματος ή την εύρεση μιας μοναδικής απόδειξης για ένα μαθηματικό θεώρημα.

- Η Τρίτη αφορά την αναγνώριση και τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών ιδεών. Ένα παράδειγμα θα ήταν η συνειδητοποίηση της σύνδεσης μεταξύ γεωμετρίας και άλγεβρας, που οδηγεί στην ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας.

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά μπορεί επίσης να εκδηλωθεί με τη μορφή οπτικών αναπαραστάσεων, εναλλακτικών μεθόδων επίλυσης προβλημάτων ή δημιουργίας ενδιαφερουσών ερωτήσεων που οδηγούν σε βαθύτερη κατανόηση ή νέους τομείς εξερεύνησης.

Η μαθηματική δημιουργικότητα είναι αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών πρακτικών και συχνά συνδέεται με βαθύτερη κατανόηση, αυξημένη δέσμευση και προηγμένη μαθηματική σκέψη (Leikin, 2013).

4.2.1. Προσεγγίσεις

Οι παραπάνω προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν στην έννοια της δημιουργικότητας, έχουν εφαρμογή και στα μαθηματικά.

Η προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων στη δημιουργικότητα στα μαθηματικά είναι ένας από τους θεμελιώδεις πυλώνες της μαθηματικής δημιουργικότητας. Περιλαμβάνει την ικανότητα να επινοούνται πρωτότυπες και καινοτόμες λύσεις σε πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα. Η αξία της προσέγγισης επίλυσης προβλημάτων για την ανάδειξη της δημιουργικής πτυχής των μαθηματικών δεν μπορεί να υπερεκτιμηθεί.

Ο George Polya (1957), ένας Ούγγρος μαθηματικός, ήταν μια από τις πρωτοπόρες προσωπικότητες που υπογράμμισε τη σημασία της επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά. Παρείχε μια ευρετική προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων στρατηγικών όπως, η κατανόηση του προβλήματος, η επινόηση ενός σχεδίου, η υλοποίηση του σχεδίου και η αναδρομή. Αν και αυτά τα βήματα μπορεί να φαίνονται διαδικαστικά, ο Polya τόνισε ότι η χρήση αυτών των στρατηγικών ήταν μια δημιουργική διαδικασία. Τα βήματα δεν είναι άκαμπτοι κανόνες αλλά οδηγοί που οδηγούν τον στοχαστή σε δημιουργικές λύσεις.

Για παράδειγμα, η «κατανόηση του προβλήματος» απαιτεί από κάποιον να ερμηνεύσει το πρόβλημα με τρόπο που να έχει νόημα γι' αυτόν, κάτι που μπορεί να απαιτεί δημιουργική σκέψη.

Η «κατάρτιση ενός σχεδίου» απαιτεί δημιουργική σκέψη για τον προσδιορισμό της καλύτερης μεθόδου αντιμετώπισης του προβλήματος.

Η «εκτέλεση του σχεδίου» θα μπορούσε να περιλαμβάνει την εφαρμογή γνωστών στρατηγικών με νέους τρόπους.

Τέλος, το «κοιτάζοντας πίσω» ενθαρρύνει τον προβληματισμό σχετικά με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και θα μπορούσε να οδηγήσει στην ανακάλυψη άλλων δημιουργικών μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος.

Ο Γάλλος μαθηματικός Henri Poincaré έδωσε επίσης πολύτιμες πληροφορίες για τη δημιουργική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Ο Poincaré (1952) πρότεινε ότι η δημιουργικότητα στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων περιλαμβάνει δύο φάσεις: την προπαρασκευαστική φάση, κατά την οποία εφαρμόζεται συνειδητή προσπάθεια στο πρόβλημα και τη διαφωτιστική φάση, η οποία συμβαίνει υποσυνείδητα και έχει ως αποτέλεσμα μια ξαφνική λύση ή στιγμή «Εύρηκα».

Τέτοιες στιγμές ενόρασης, συμβαίνουν μετά από μια περίοδο συνειδητής προσπάθειας που ακολουθείται από μια περίοδο επώασης, όπου το πρόβλημα αφήνεται μόνο του. Η λύση εμφανίζεται τότε αυθόρμητα, συχνά όταν το μυαλό είναι χαλαρό ή απασχολημένο με άσχετες δραστηριότητες. Αυτή η προοπτική υπογραμμίζει τη σύνθετη, μη γραμμική και όντως δημιουργική φύση της επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά.

Στο εκπαιδευτικό πλαίσιο, η προώθηση της προσέγγισης επίλυσης προβλημάτων μπορεί να ενισχύσει τη δημιουργικότητα. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να επινοήσουν τις δικές τους λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα, παρέχοντας την ευκαιρία να σκεφτούν δημιουργικά και να ασχοληθούν σε βάθος με τις μαθηματικές έννοιες που παίζουν. Αυτή η δημιουργική ενασχόληση ενισχύει τη μάθηση και προωθεί την κατανόηση των μαθηματικών πέρα από την απομνημόνευση κατά λέξη.

Η προσέγγιση δημιουργίας σύνδεσης είναι μια βασική πτυχή της δημιουργικότητας στα μαθηματικά που τονίζει τη σημασία της αναγνώρισης και της δημιουργίας νέων δεσμών μεταξύ φαινομενικά ανόμοιων μαθηματικών εννοιών, αρχών ή θεωριών. Αυτή η διαδικασία συχνά αποτελεί τη βάση για σημαντικές προόδους στη μαθηματική γνώση.

Ένα κλασικό παράδειγμα δημιουργικότητας που δημιουργεί συνδέσεις είναι η ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας από τον René Descartes. Συνδέοντας δημιουργικά την άλγεβρα και τη γεωμετρία, δύο πεδία που παραδοσιακά θεωρούνταν χωριστά, ο Descartes άνοιξε νέους δρόμους μαθηματικής εξερεύνησης και άνοιξε το δρόμο για περαιτέρω προόδους στα μαθηματικά (Bell, 1951).

Στην έρευνά τους για τη μαθηματική δημιουργικότητα, οι Leikin, Berman, & Koichu (2013) παρατήρησαν ότι τα εξαιρετικά δημιουργικά άτομα συχνά διαπρέπουν στο να κάνουν συνδέσεις. Αυτό περιλαμβάνει την παρατήρηση μοτίβων, αναλογιών ή δομικών ομοιοτήτων που άλλοι μπορεί να παραβλέψουν και την εφαρμογή αυτών των παρατηρήσεων για την ανάπτυξη καινοτόμων λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα ή τη δημιουργία νέων μαθηματικών εννοιών.

Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, η προώθηση μιας προσέγγισης δημιουργίας σύνδεσης, μπορεί να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση και πιο ευέλικτη σκέψη. Για παράδειγμα, οι μαθητές που μπορούν να δουν τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών τομέων των μαθηματικών, όπως η γεωμετρία και η άλγεβρα, έχουν συχνά μια βαθύτερη κατανόηση και των δύο περιοχών. (Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών, 2000)

Επιπλέον, η δημιουργία συνδέσεων μεταξύ των μαθηματικών και των πραγματικών πλαισίων, μπορεί να κάνει τις μαθηματικές έννοιες πιο ουσιαστικές και σχετικές για τους μαθητές, ενισχύοντας τα κίνητρα και τη δέσμευσή τους (Boaler, 2001). Συνεπώς, η προσέγγιση δημιουργίας σύνδεσης είναι μια κρίσιμη πτυχή της μαθηματικής δημιουργικότητας που συνεπάγεται την αναγνώριση και την εκμετάλλευση των συνδέσεων εντός των μαθηματικών και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων τομέων.

Η προσέγγιση δημιουργικού συλλογισμού, γνωστή και ως προσέγγιση ανακάλυψης, επικεντρώνεται στην ικανότητα να σκεφτόμαστε πέρα από δεδομένες πληροφορίες, να αναγνωρίζουμε μοτίβα και να γενικεύουμε αυτά τα μοτίβα σε άλλα πλαίσια ή προβλήματα.

Ο Derek Haylock, μια αξιοσημείωτη φυσιογνωμία στην εκπαίδευση των μαθηματικών, συνέβαλε καθοριστικά στην περιγραφή αυτής της προσέγγισης στο έργο του, δίνοντας έμφαση στο ρόλο του δημιουργικού συλλογισμού στα μαθηματικά. (Haylock, 1987)

Ο δημιουργικός συλλογισμός περιλαμβάνει την εξέταση μαθηματικών προβλημάτων ή σεναρίων από διαφορετικές οπτικές γωνίες, τον εντοπισμό υποκείμενων προτύπων ή αρχών και στη συνέχεια την εφαρμογή αυτών των προτύπων με νέους, συχνά καινοτόμους τρόπους. Διαφέρει από την απλή εφαρμογή γνωστών μεθόδων ή διαδικασιών. Απαιτεί ένα στοιχείο δημιουργικής σκέψης και εξερεύνησης.

Ένα παράδειγμα δημιουργικού συλλογισμού θα μπορούσε να είναι η διαδικασία απόδειξης ενός μαθηματικού θεωρήματος. Οι μαθηματικοί δεν πρέπει μόνο να χρησιμοποιούν γνωστές μαθηματικές αρχές αλλά και να συλλογίζονται δημιουργικά για να κατασκευάσουν μια απόδειξη. Αυτή η διαδικασία συχνά περιλαμβάνει πολλή ευφάνταστη σκέψη για να δούμε, πώς μπορούν να συνδεθούν διαφορετικές μαθηματικές αρχές, για να γίνει ένα συνεκτικό επιχείρημα.

Στο εκπαιδευτικό πλαίσιο, η προώθηση της δημιουργικής λογικής είναι θεμελιώδης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή τους διαδικασία, οικοδομώντας τη δική τους κατανόηση αντί απλώς να απορροφούν πληροφορίες. Αυτή η προσέγγιση ευθυγραμμίζεται με τη θεωρία της κονστρουκτιβιστικής μάθησης, η οποία υποστηρίζει ότι η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργά τη δική τους κατανόηση (Piaget, 1973).

Οι δάσκαλοι μπορούν να προωθήσουν τη δημιουργική λογική παρέχοντας εργασίες ανοιχτού τύπου, ενθαρρύνοντας πολλαπλές λύσεις και προωθώντας ένα περιβάλλον στην τάξη που εκτιμά την περιέργεια, την αμφισβήτηση και την εξερεύνηση. Μέσω αυτών των πρακτικών, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με τα μαθηματικά με έναν βαθύτερο, πιο ουσιαστικό τρόπο, ενισχύοντας τελικά μια ισχυρότερη κατανόηση και εκτίμηση του θέματος. (Liljedahl, 2005)

Εν ολίγοις, η προσέγγιση του δημιουργικού συλλογισμού υπογραμμίζει τον ουσιαστικό ρόλο της δημιουργικότητας στη μαθηματική συλλογιστική, τόσο στην προώθηση της μαθηματικής γνώσης όσο και στην προώθηση αποτελεσματικών, ελκυστικών εμπειριών μάθησης στην τάξη.

Ακόμη μια προσέγγιση είναι αυτή του Ervynck (1991) ο οποίος αποδίδει τη μαθηματική δημιουργικότητα μέσω ενός μοντέλου τριών σταδίων.

- Το πρώτο θεωρείται ως προκαταρκτικό και τεχνικό στάδιο. Πρόκειται για ένα στάδιο τεχνικής ή πρακτικής εφαρμογής των μαθηματικών κανόνων και διαδικασιών, χωρίς ο ίδιος ο χρήστης να το έχει συνειδητοποιήσει.
- Το δεύτερο στάδιο είναι αυτό της αλγοριθμικής δραστηριότητας στο οποίο πραγματοποιείται η εκτέλεση μαθηματικών τεχνικών, όπως αυτό στο οποίο ο αλγόριθμος βρίσκει εφαρμογή και επαναλαμβάνεται.
- Στο τρίτο στάδιο, αυτό της δημιουργικής δραστηριότητας, εμφανίζεται η πραγματική μαθηματική δημιουργικότητα και συνίσταται στη λήψη μη αλγοριθμικών αποφάσεων. Όπως αναφέρει ο Ervynck (1991), οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν μπορεί να είναι πολύ διαφορετικής φύσης και περιλαμβάνουν μια επιλογή.

4.2.2. Διευκόλυνση

Η εκπαίδευση στα μαθηματικά προσφέρει ένα γόνιμο έδαφος για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας. Η δυναμική φύση επίλυσης προβλημάτων των μαθηματικών επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν διαφορετικές προσεγγίσεις σε ένα πρόβλημα, ενισχύοντας έτσι τη δημιουργικότητα.

Ο Sheffield (2009) πρότεινε ότι οι μαθηματικές εργασίες ανοιχτού τύπου, θα μπορούσαν να καλλιεργήσουν τη δημιουργικότητα προσφέροντας ευκαιρίες για τη διαμόρφωση μοναδικών λύσεων.

Ομοίως, η Leikin (2013) υποστήριξε τη χρήση πολλαπλών λύσεων (MST) στην τάξη, υποστηρίζοντας ότι, προάγουν τη μαθηματική δημιουργικότητα ενθαρρύνοντας διαφορετικές μεθόδους λύσης και ενισχύοντας τη μαθηματική ευελιξία.

4.2.3. Μελλοντική κατεύθυνση

Η έμφαση στη δημιουργικότητα στα μαθηματικά έχει πιθανά οφέλη. Μπορεί να ενισχύσει τη μαθηματική κατανόηση, να προωθήσει μια βαθύτερη εκτίμηση του θέματος και δεξιότητες σκέψης υψηλότερης τάξης. (Silver, 1997)

Επιπλέον, ευθυγραμμίζεται με το πλαίσιο δεξιοτήτων του 21ου αιώνα που εκτιμά τη δημιουργικότητα ως κρίσιμη δεξιότητα. (Partnership for 21st Century Skills, 2009)

Επιπροσθέτως, με την αυξανόμενη επιρροή της τεχνολογίας στα μαθηματικά, η υπολογιστική δημιουργικότητα παρέχει μια ενδιαφέρουσα λεωφόρο για μελλοντική εξερεύνηση. Αυτό περιλαμβάνει την ανάπτυξη υπολογιστικών μοντέλων ή αλγορίθμων που παρουσιάζουν δημιουργική συμπεριφορά σε μαθηματικές εργασίες. (McCormack et al., 2019)

4.2.4. Κριτική

Όσο ιδιαίτερης σημασίας κι αν είναι η δημιουργικότητα στα μαθηματικά, έχουν τεθεί κρίσιμες προοπτικές σχετικά με την κατανόησή και την εφαρμογή της, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της εκπαίδευσης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες μορφές κριτικής στη δημιουργικότητα.

Ο κοινός ορισμός της δημιουργικότητας περιλαμβάνει τη δημιουργία πρωτότυπων και χρήσιμων ιδεών ή λύσεων. Στα μαθηματικά, ωστόσο, πολλά προβλήματα έχουν καθιερωμένες λύσεις και η εστίαση είναι συχνά στην κατανόηση και την εφαρμογή γνωστών μεθόδων, παρά στη δημιουργία πρωτότυπων. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μια ένταση μεταξύ της προώθησης της δημιουργικότητας και της διασφάλισης της γνώσης βασικών μαθηματικών τεχνικών και εννοιών. (Silver, 1997)

Επίσης, η αξιολόγηση της δημιουργικότητας στα μαθηματικά παρουσιάζει σημαντικές προκλήσεις. Τα παραδοσιακά τεστ συχνά επικεντρώνονται στη σωστή εφαρμογή των διαδικασιών και μπορεί να μην καταγράφουν τη δημιουργική σκέψη. Από την άλλη πλευρά, εργασίες ανοιχτού τύπου που θα μπορούσαν να επιδείξουν δημιουργικότητα είναι συχνά πιο δύσκολο να αξιολογηθούν με συνέπεια. Η πολυπλοκότητα της αξιολόγησης της δημιουργικότητας μπορεί να περιορίσει την ενσωμάτωσή της στην εκπαίδευση των μαθηματικών. (Leikin, 2013)

Ακόμη, πολλά εκπαιδευτικά συστήματα λειτουργούν μέσα σε ένα αυστηρά δομημένο πρόγραμμα σπουδών που αφήνει ελάχιστο χώρο για εξερεύνηση και δημιουργική σκέψη. Οι χρονικοί περιορισμοί, οι πιέσεις στις εξετάσεις και η ανάγκη κάλυψης μιας τεράστιας σειράς θεμάτων, μπορούν να οδηγήσουν σε εστίαση στη μάθηση κατά λάθος σε βάρος της ενθάρρυνσης της δημιουργικότητας. Οι δάσκαλοι μπορεί να βρουν πρόκληση να ενσωματώσουν δημιουργικές εργασίες και συζητήσεις μέσα σε αυτούς τους περιορισμούς. (Sheffield, 2009)

Επίσης, η μαθηματική δημιουργικότητα μερικές φορές παρεξηγείται ως αποκλειστική σε άτομα που λειτουργούν στα υψηλότερα επίπεδα μαθηματικής σκέψης, όπως επαγγελματίες μαθηματικοί ή εξαιρετικά ταλαντούχοι μαθητές. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε υποτίμηση της δυνατότητας για δημιουργικότητα σε όλους τους μαθητές και να εμποδίσει τις προσπάθειες για την ενίσχυση της δημιουργικότητας στη γενική εκπαίδευση των μαθηματικών. (Sriraman, 2004)

Τέλος, πολλοί μαθητές, και μάλιστα ορισμένοι δάσκαλοι, μπορεί να φοβούνται τα μαθηματικά. Μπορεί να το δουν ως ένα άκαμπτο, πολύπλοκο θέμα που προορίζεται για λίγους εκλεκτούς. Αυτή η αντίληψη μπορεί να καταπνίξει την αναγνώριση και την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, καθώς οι μαθητές μπορεί να μην αισθάνονται ελεύθεροι να εξερευνήσουν και να εκφράσουν τις δημιουργικές τους σκέψεις εντός του θέματος. (Boaler, 2001)

Εν ολίγοις, ενώ η δημιουργικότητα είναι μια σημαντική πτυχή των μαθηματικών, οι επικρίσεις που διατυπώνονται αποτελούν έκκληση για δράση για τους εκπαιδευτικούς και τους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής. Υπογραμμίζουν την ανάγκη για στοχαστικές στρατηγικές και πολιτικές για την καλλιέργεια και αξιολόγηση της δημιουργικότητας εντός των περιορισμών και της πραγματικότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης.

4.3. Προβλήματα με πολλαπλές λύσεις

Στα μαθηματικά, μια απόδειξη είναι ένα λογικό επιχείρημα που αποδεικνύει ότι μια συγκεκριμένη πρόταση ή θεώρημα είναι αληθής. Το επιχείρημα βασίζεται σε ένα σύνολο αξιωμάτων (ή αυτονόητων αληθειών), ορισμών και θεωρημάτων που έχουν δημιουργηθεί προηγουμένως.

Ο σκοπός μιας απόδειξης είναι διπλός. Αφενός, παρέχει βεβαιότητα ότι μια δήλωση είναι αληθής. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στα μαθηματικά, επειδή η πειθαρχία βασίζεται στον εαυτό της. Η μεταγενέστερη εργασία συχνά εξαρτάται από την αλήθεια της προηγούμενης εργασίας. Αφετέρου, μια απόδειξη παρέχει συχνά διορατικότητα, ή εξηγεί γιατί η δήλωση είναι αληθινή, εμβαθύνοντας την κατανόηση.

Οι μαθηματικές αποδείξεις ποικίλλουν ως προς τον τύπο και τη δομή τους. Μερικές από τις πιο συνηθισμένες αποδείξεις είναι η άμμεση, η έμμεση, η αντίφαση και η επαγωγή (Solow, 2002).

Η <u>άμεση απόδειξη</u>, είναι η περίπτωση που γίνεται υπόθεση για την αλήθεια της υπόθεσης (το αρχικό, «αν» μέρος ενός θεωρήματος) και από αυτή τη βάση εξάγεται μια σειρά από λογικές συναγωγές που οδηγούν στο συμπέρασμα (το «τότε» μέρος ενός θεωρήματος).

Αντίθετα, στην <u>έμμεση απόδειξη</u>, υποθέτει κανείς την άρνηση του συμπεράσματος και δείχνει ότι αυτή η υπόθεση οδηγεί αναπόφευκτα στην άρνηση της υπόθεσης. Σε μια απόδειξη με αντίφαση, γίνεται υπόθεση για αντίθετο από τη δήλωση που πρόκειται να αποδειχθεί και στη συνέχεια παρατίθεται ότι αυτή η υπόθεση οδηγεί σε αδυναμία ή αντίφαση.

Τέλος, η <u>απόδειξη μέσω επαγωγής</u> χρησιμοποιείται συνήθως για την απόδειξη δηλώσεων για όλους τους φυσικούς αριθμούς ή για μια άπειρη ακολουθία αντικειμένων. Συνήθως περιλαμβάνει δύο βήματα: τη βασική περίπτωση (δείχνοντας ότι η πρόταση είναι αληθής για την πρώτη ή μια συγκεκριμένη περίπτωση) και το επαγωγικό βήμα (που δείχνει ότι αν η πρόταση είναι αληθής για μια περίπτωση, ισχύει και για την επόμενη περίπτωση).

Για κάποιο πρόβλημα μπορούν να υπάρχουν παραπάνω από ένας τρόπος λύσης και άρα παραπάνω από μια απόδειξη. Προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, που συχνά ονομάζονται προβλήματα μη-δομημένα ή ανοιχτού τύπου, μπορούν να απαντηθούν σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών. Αυτά τα προβλήματα μπορεί να έχουν περισσότερες από μία έγκυρες λύσεις ή μπορούν να επιλυθούν με διαφορετικές μεθόδους και συχνά αντικατοπτρίζουν τους τύπους προβλημάτων που αντιμετωπίζονται σε πραγματικές καταστάσεις. Τα ανοιχτά προβλήματα είναι σημαντικά στην εκπαίδευση γιατί ενισχύουν τη δημιουργικότητα, την κριτική σκέψη και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων.

Παρά τα οφέλη τους, υπάρχουν επίσης προκλήσεις που σχετίζονται με αυτούς τους τύπους προβλημάτων, όπως οι παρακάτω: Οι παραδοσιακές μέθοδοι δοκιμών βασίζονται συχνά σε μία μόνο σωστή απάντηση, καθιστώντας την αξιολόγηση ανοιχτών προβλημάτων πιο περίπλοκη. Η αξιολόγηση πολλαπλών έγκυρων λύσεων ή διαφορετικών μεθόδων απαιτεί μια πιο λεπτή, υποκειμενική κρίση και περισσότερο χρόνο από τον αξιολογητή. (Jonassen, 2000)

Λόγω της πολυπλοκότητάς τους, τα ανοιχτά προβλήματα απαιτούν συνήθως περισσότερο χρόνο για να λυθούν από εκείνα με μία μόνο σωστή λύση. Αυτό μπορεί να είναι δύσκολο σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, όπου υπάρχει περιορισμένος χρόνος για διδασκαλία και αξιολόγηση. (Goel & Pirolli, 1989)

Οι μαθητές που συνηθίζουν να αντιμετωπίζουν «κλειστά» προβλήματα, όπου υπάρχει μία μόνο σωστή απάντηση, μπορεί να βρουν τα ανοιχτά προβλήματα απογοητευτικά ή μπερδεμένα. Μπορεί να παλεύουν με την αβεβαιότητα και την ασάφεια που μπορεί να παρουσιάσουν αυτά τα προβλήματα. (Kapur, 2014)

Η επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου, απαιτεί συχνά δεξιότητες σκέψης υψηλότερης τάξης, όπως ανάλυση, αξιολόγηση και δημιουργία. Οι μαθητές που δεν έχουν αναπτύξει αυτές τις δεξιότητες μπορεί να βρουν αυτά τα προβλήματα ιδιαίτερα προκλητικά. (Bloom, 1956)

Παρά τις προκλήσεις, τα ανοιχτά προβλήματα προσφέρουν σημαντικά εκπαιδευτικά οφέλη. Αντικατοπτρίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την πολυπλοκότητα των προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και προωθούν την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, της επίλυσης προβλημάτων και της δημιουργικότητας.

Η σχέση μεταξύ προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις και της δημιουργικότητας στα μαθηματικά είναι αρκετά σημαντική. Τέτοια προβλήματα απαιτούν συχνά δεξιότητες δημιουργικής σκέψης, καθώς επεκτείνονται πέρα από το πεδίο των προβλημάτων ρουτίνας, προσανατολισμένα στη διαδικασία με μία μόνο σωστή απάντηση.

Τα ανοιχτά προβλήματα ενθαρρύνουν τους μαθητές να σκέφτονται δημιουργικά. Αντί να αναζητούν μια ενιαία σωστή λύση, οι μαθητές πρέπει να εξετάσουν διαφορετικές δυνατότητες, προσεγγίσεις και στρατηγικές. Αυτή η διαδικασία συχνά περιλαμβάνει αποκλίνουσα σκέψη, ένα βασικό συστατικό της δημιουργικότητας, η οποία περιλαμβάνει τη δημιουργία πολλαπλών λύσεων σε ένα πρόβλημα. (Guilford, 1950)

Τα προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, παρέχουν ένα πλούσιο έδαφος για μαθηματική εξερεύνηση. Οι μαθητές μπορούν να δοκιμάσουν διάφορες υποθέσεις, να κάνουν εικασίες και να εξερευνήσουν διαφορετικά μονοπάτια λύσης. Αυτή η διαδικασία αντικατοπτρίζει τη δουλειά των επαγγελματιών μαθηματικών και ενισχύει τη μαθηματική δημιουργικότητα. (Sriraman, 2004)

Διερευνώντας διαφορετικές λύσεις στο ίδιο πρόβλημα, οι μαθητές αποκτούν μια βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος και των υποκείμενων μαθηματικών εννοιών. Μπορούν να δουν το πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες και να εκτιμήσουν τη διασύνδεση των μαθηματικών εννοιών, η οποία είναι το κλειδί για τη μαθηματική δημιουργικότητα. (Liljedahl, 2005)

Επίσης, σύμφωνα με τον Haylock (1987), τα ανοιχτά προβλήματα μπορεί να είναι πιο απαιτητικά και χρονοβόρα από τα προβλήματα με μία μόνο λύση. Η επίλυση αυτών των προβλημάτων συχνά περιλαμβάνει ένα επίπεδο επιμονής, ανθεκτικότητας και προθυμίας για ανάληψη κινδύνων. Ιδιότητες που συνδέονται με δημιουργικές προσπάθειες στα μαθηματικά.

Τέλος, τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, συχνά προσφέρονται για συνεργασία και επικοινωνία, καθώς οι μαθητές συζητούν και συγκρίνουν τις διαφορετικές προσεγγίσεις και λύσεις τους. Αυτή η αλληλεπίδραση μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων ιδεών, ενισχύοντας περαιτέρω τη δημιουργικότητα. (English, 1997)

Η σύνδεση μεταξύ προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις και δημιουργικότητας είναι αρκετά εμφανής στον τομέα της γεωμετρίας. Η γεωμετρία προσφέρει ένα μοναδικό πλαίσιο για τέτοια προβλήματα λόγω της οπτικής και χωρικής φύσης της.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα είναι η οπτικοποίηση, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα σχηματισμού νοητικών εικόνων και αναπαραστάσεων. Στο πλαίσιο της γεωμετρίας, η οπτικοποίηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απεικονίσει διανοητικά γεωμετρικά σχήματα, δομές και μετασχηματισμούς.

Για παράδειγμα, όταν προσπαθεί κανείς να λύσει ένα γεωμετρικό πρόβλημα, μπορεί να φανταστεί ένα σχήμα να περιστρέφεται, να ανακλάται ή να αλλάζει με άλλους τρόπους. Μπορεί επίσης να περιλαμβάνει τη θέαση μοτίβων, τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών γεωμετρικών ιδιοτήτων, ή το σχηματισμό μιας εικόνας, μιας γεωμετρικής έννοιας. (Bishop, 1980)

Σχετική έρευνα δείχνει ότι, οι δεξιότητες οπτικοποίησης μπορούν να βελτιωθούν με εξάσκηση και διδασκαλία. Στρατηγικές διδασκαλίας όπως, η σχεδίαση διαγραμμάτων, η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ή φυσικοί χειρισμοί, όπως οι γεωπίνακες και τα τάνγκραμ, μπορούν να βοηθήσουν στην ενίσχυση αυτών των δεξιοτήτων. (Battista, 2007)

Επίσης ακόμα ένα πλεονέκτημα θεωρείται ο χωρικός συλλογισμός που σχετίζεται στενά με την οπτικοποίηση αλλά είναι ευρύτερος σε εύρος. Αναφέρεται στην ικανότητα κατανόησης, λογικής και προβλέψεων σχετικά με τις χωρικές σχέσεις.

Στη γεωμετρία, αυτό περιλαμβάνει την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο, τα σχήματα σχετίζονται μεταξύ τους σε ένα επίπεδο ή χώρο, πώς μπορούν να μετασχηματιστούν ή πως μπορεί να γίνει η πλοήγηση σε ένα γεωμετρικό χώρο. Ο χωρικός συλλογισμός είναι θεμελιώδης σε πολλούς τομείς των μαθηματικών.

Για παράδειγμα, η κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής γραμμής περιλαμβάνει χωρικό συλλογισμό. Στα πιο προηγμένα μαθηματικά, όπως ο λογισμός ή η τοπολογία, η κατανόηση της έννοιας του ορίου ή των ιδιοτήτων σύνθετων γεωμετρικών δομών περιλαμβάνει εξελιγμένες δεξιότητες χωρικής συλλογιστικής.

Στο πλαίσιο της γεωμετρίας, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις αναφέρονται στους διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορούν να εκφραστούν γεωμετρικές έννοιες, σχέσεις ή προβλήματα. Αυτές μπορεί να περιλαμβάνουν συμβολικές αναπαραστάσεις (π.χ. εξισώσεις, τύπους), οπτικές αναπαραστάσεις (π.χ. διαγράμματα, σκίτσα, μοντέλα), λεκτικές περιγραφές ή φυσικές εκδηλώσεις (π.χ. χειραγώγηση). Η ανακάλυψη και η κατανόηση αυτών των διαφορετικών αναπαραστάσεων είναι μια ζωτική πτυχή της γεωμετρικής μάθησης και της επίλυσης προβλημάτων. Μερικές από τις πιο συνηθισμένες είναι οι συμβολικές, οι οπτικές, οι προφορικές και οι φυσικές.

Οι <u>συμβολικές αναπαραστάσεις</u> περιλαμβάνουν αλγεβρικές εκφράσεις, εξισώσεις ή άλλα μαθηματικά σύμβολα, που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα, το Πυθαγόρειο θεώρημα συχνά αναπαρίσταται συμβολικά ως $a^2 + b^2 = c^2$. Με το χειρισμό αυτών των συμβόλων, οι μαθητές μπορούν να λύσουν προβλήματα ή να αποδείξουν θεωρήματα.

Οι <u>οπτικές αναπαραστάσεις</u> είναι απαραίτητες στη γεωμετρία, δεδομένης της εγγενούς χωρικής φύσης της. Τα διαγράμματα, τα σκίτσα ή τα μοντέλα που δημιουργούνται από υπολογιστή μπορούν να απεικονίσουν οπτικά γεωμετρικές έννοιες, σχέσεις ή μετασχηματισμούς.

Για παράδειγμα, για να κατανοήσουμε την έννοια της συμμετρίας ανάκλασης, μπορούμε να σχεδιάσουμε το σχήμα και την αντανάκλασή του πάνω από μια γραμμή συμμετρίας.

Οι προφορικές ή λεκτικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν την περιγραφή γεωμετρικών εννοιών, σχέσεων ή διαδικασιών χρησιμοποιώντας τη γλώσσα. Αυτές οι περιγραφές μπορούν να βοηθήσουν στην αποσαφήνιση ή την εμβάθυνση της κατανόησης.

Για παράδειγμα, η εξήγηση της διαδικασίας περιστροφής ενός σχήματος, γύρω από ένα σημείο, μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

Τέλος, <u>οι φυσικές αναπαραστάσεις</u> περιλαμβάνουν τη χρήση χειρισμών ή συγκεκριμένων μοντέλων για την αναπαράσταση γεωμετρικών εννοιών. Απτά αντικείμενα όπως γεωμετρικά στερεά, γεωπίνακες ή origami μπορούν να προσφέρουν έναν πρακτικό τρόπο για να διερευνηθούν γεωμετρικές ιδέες.

Η κατανόηση πολλαπλών αναπαραστάσεων, μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τη γεωμετρική κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων. Διαφορετικές αναπαραστάσεις, μπορούν να παρέχουν διαφορετικές προοπτικές για ένα πρόβλημα και μπορούν να είναι χρήσιμες σε διαφορετικά στάδια επίλυσης προβλημάτων.

Για παράδειγμα, μια οπτική αναπαράσταση μπορεί να είναι χρήσιμη στα αρχικά στάδια για την κατανόηση του προβλήματος, ενώ μια συμβολική αναπαράσταση μπορεί να είναι χρήσιμη στο στάδιο της επίλυσης προβλημάτων ή της απόδειξης.

Επιπλέον, η ικανότητα ευέλικτης εναλλαγής μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της μαθηματικής επάρκειας και της δημιουργικότητας σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (2000). Η ενθάρρυνση των μαθητών να εξερευνήσουν και να κατανοήσουν πολλαπλές αναπαραστάσεις, μπορεί να ενισχύσει αυτήν την ευελιξία και να προωθήσει τη δημιουργική επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία.

Η κατασκευή αποδείξεων στα μαθηματικά, ιδιαίτερα στη γεωμετρία, απαιτεί συχνά δημιουργικότητα. Μια μαθηματική απόδειξη είναι ένα επιχείρημα που χρησιμοποιεί λογικό συλλογισμό για να καταδείξει την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης ή θεωρήματος. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους η δημιουργικότητα μπορεί «να παίξει» κατά τη διάρκεια της κατασκευής απόδειξης.

Τα αρχικά στάδια της κατασκευής απόδειξης, απαιτούν συχνά δημιουργική σκέψη για τη δημιουργία ιδεών, σχετικά με τον τρόπο προσέγγισης της απόδειξης. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει τη δημιουργία καταιγισμού ιδεών στρατηγικών, τη δημιουργία εικασιών ή την αξιοποίηση της γνώσης σχετικών προβλημάτων ή θεωρημάτων. (Polya, 1957)

Επίσης, πολλά θεωρήματα, μπορούν να αποδειχθούν με πολλούς τρόπους και η εξερεύνηση αυτών των διαφορετικών μεθόδων, μπορεί να ενισχύσει τη δημιουργικότητα. Για παράδειγμα, το Πυθαγόρειο θεώρημα έχει εκατοντάδες γνωστές αποδείξεις, καθεμία από τις οποίες προσφέρει μια μοναδική προοπτική για το θεώρημα. Η εξεύρεση ή η κατανόηση διαφορετικών αποδείξεων για το ίδιο θεώρημα μπορεί να είναι μια δημιουργική άσκηση. (Nelsen, 1993)

Ακόμη, η κατασκευή δημιουργικής απόδειξης συχνά περιλαμβάνει, τη χρήση και τη μετατόπιση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων του προβλήματος ή του θεωρήματος. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει διαγράμματα, εξισώσεις ή λεκτικές περιγραφές. Για παράδειγμα, οι γεωμετρικές αποδείξεις, συχνά βασίζονται σε οπτικά διαγράμματα, αλλά περιλαμβάνουν επίσης συμβολικό ή αλγεβρικό συλλογισμό. (Duval, 2006)

Τέλος, ενώ πολλά θεωρήματα έχουν τυπικές, γνωστές αποδείξεις, υπάρχει επίσης περιθώριο για να βρεθούν πρωτότυπες αποδείξεις. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στα μαθηματικά της έρευνας, αλλά μπορεί επίσης να ενθαρρυνθεί σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα. Η κατασκευή μιας πρωτότυπης απόδειξης, απαιτεί βαθιά κατανόηση του θεωρήματος και του πλαισίου του, καθώς και την ικανότητα δημιουργικής και κριτικής σκέψης. (Movshovitz-Hadar, 1993)

Μέσω της δημιουργικότητας και της γεωμετρίας, μπορούν να λυθούν προβλήματα που προκύπτουν στην πραγματικότητα. Η εφαρμογή γεωμετρικών εννοιών σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου, μπορεί να βοηθήσει να γίνουν αυτές οι έννοιες πιο συγκεκριμένες και ουσιαστικές. Για παράδειγμα, η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι γωνίες και τα σχήματα στην αρχιτεκτονική, ή πώς χρησιμοποιούνται οι μετασχηματισμοί στα γραφικά του υπολογιστή, μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση και την εκτίμηση των εννοιών από τους μαθητές. (Jones, 2002)

Επίσης, τα προβλήματα της πραγματικότητας συχνά παρουσιάζουν πολύπλοκα, ανοιχτά σενάρια που απαιτούν δημιουργική επίλυση προβλημάτων. Για παράδειγμα, ο σχεδιασμός ενός κτιρίου ή ο σχεδιασμός μιας διαστημικής αποστολής, μπορεί να περιλαμβάνει τη χρήση γεωμετρικών εννοιών με καινοτόμους τρόπους για την εξεύρεση λύσεων. Η εργασία πάνω σε αυτά τα προβλήματα μπορεί να ενισχύσει τις δημιουργικές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. (Lesh & Zawojewski, 2007)

Η σύνδεση της γεωμετρίας με τα πλαίσια του πραγματικού κόσμου, συχνά περιλαμβάνει την ενσωμάτωση γνώσεων και μεθόδων από διαφορετικούς κλάδους. Για παράδειγμα, η χρήση της γεωμετρίας στις φυσικές επιστήμες, τη μηχανική ή την επιστήμη των υπολογιστών περιλαμβάνει μια διεπιστημονική κατανόηση. Αυτό το είδος σκέψης μπορεί να ενισχύσει τη δημιουργικότητα, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών πεδίων, και να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους με διάφορους τρόπους. (English, 2016)

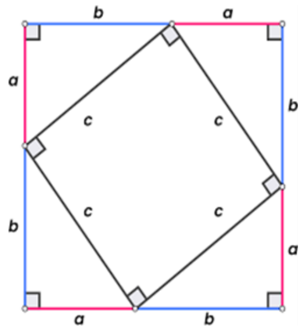
4.4. Η κατασκευή βοηθητικών γραμμών

Οι βοηθητικές γραμμές, είναι γραμμές (ή σημεία ή ακόμη και σχήματα), που προστίθενται σε ένα γεωμετρικό διάγραμμα, για να βοηθήσουν στην επίλυση ενός προβλήματος ή στην απόδειξη ενός θεωρήματος. (Posamentier και Salkind, 2002)

Αυτές οι γραμμές δεν αποτελούν μέρος του αρχικού προβλήματος, αλλά εισάγονται από τους ανθρώπους που προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα, για να διευκολύνουν την κατανόηση ή την επίλυσή του. Μία από τις θεμελιώδεις χρήσεις των βοηθητικών γραμμών είναι στις γεωμετρικές αποδείξεις. Συχνά, μια άμεση διαδρομή προς μια απόδειξη δεν είναι άμεσα εμφανής από το δεδομένο διάγραμμα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η κατασκευή μιας βοηθητικής γραμμής μπορεί να δημιουργήσει ίσα τρίγωνα, παράλληλες γραμμές ή άλλα βοηθητικά σχήματα, αποκαλύπτοντας έτσι τη διαδρομή προς την απόδειξη.

Για παράδειγμα, για να αποδειχθεί ότι, οι γωνίες βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, θα χρειαστεί να σχεδιαστεί μια βοηθητική γραμμή που διχοτομεί τη γωνία κορυφής. Αυτό δημιουργεί δύο ίσα τρίγωνα, επιτρέποντας τη χρήση των ιδιοτήτων του ίδιου τριγώνου, για να δειχτεί ότι, οι γωνίες βάσης είναι ίσες. Ένα άλλο παράδειγμα προκύπτει από τη γεωμετρική επίλυση του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Picture 8 - Απόδειξη πυθαγορείου με βοηθητικές γραμμές



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABC, όπου AC είναι η υποτείνουσα, και AB και BC είναι οι άλλες δύο πλευρές. Ας υποθέσουμε ότι $AB = a, BC = b$ και $AC = c$. Σχεδιάζονται τρία αντίγραφα αυτού του τριγώνου και τοποθετούνται ώστε να σχηματίσουν ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς c, το μήκος της υποτείνουσας. Το εμβαδόν αυτού του τετραγώνου είναι c^2.

Για να εξεταστεί το τετράγωνο, μπορεί να φανεί ως μεγαλύτερο τετράγωνο (με μήκος πλευράς $a + b$) με αφαιρεμένα τέσσερα τρίγωνα. Το εμβαδόν αυτού του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι $(a + b)^2$.

Αυτοί οι δύο τρόποι προβολής του τετραγώνου, δίνουν δύο διαφορετικές εκφράσεις για το εμβαδόν του, οι οποίες πρέπει να είναι ίσες: $c^2 = (a + b)^2 - 4 * \frac{1}{2}ab =$ $= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = \alpha^2 + \beta^2$. Επομένως, ισχύει ότι $a^2 + b^2 = c^2$, που είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Αυτή η απόδειξη βασίζεται στη χρήση βοηθητικών γραμμών για την κατασκευή του τετραγώνου και τον διαχωρισμό του σε διαφορετικές περιοχές, και αποτελεί ένα σαφές παράδειγμα του πώς, οι βοηθητικές γραμμές μπορούν να βοηθήσουν στην αποκάλυψη κρυφών σχέσεων και να παρέχουν αποδείξεις γεωμετρικών θεωρημάτων.

Στο πλαίσιο προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις, η δημιουργική χρήση βοηθητικών γραμμών, μπορεί συχνά να αποκαλύψει εναλλακτικές λύσεις. Για παράδειγμα, σε πολλά γεωμετρικά προβλήματα που περιλαμβάνουν κύκλους ή πολύγωνα, η σχεδίαση βοηθητικών ακτινών ή διαγώνιών, μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος ή απόδειξης ενός αποτελέσματος.

Ιστορικά, η χρήση βοηθητικών γραμμών χρονολογείται από τα έργα των αρχαίων μαθηματικών. Για παράδειγμα, τα Euclid's Elements, ένα θεμελιώδες κείμενο στην ιστορία των μαθηματικών, χρησιμοποιεί συχνά βοηθητικές γραμμές στις αποδείξεις του. (Euclid & Heath, 1956)

Ένα ευρύ φάσμα γεωμετρικών προβλημάτων, από σχετικά απλά έως πιο σύνθετα, μπορεί να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά, μέσω της στρατηγικής χρήσης βοηθητικών γραμμών. Στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι ερευνητές έχουν αναδείξει τον ρόλο των βοηθητικών γραμμών στην προώθηση της στρατηγικής και δημιουργικής σκέψης.

Σύμφωνα με τους Aichele και Peeples (1991), η σκόπιμη προσθήκη γραμμών σε ένα γεωμετρικό σχήμα, επιτρέπει στους μαθητές να οραματιστούν και να ανακαλύψουν σχέσεις, που δεν ήταν άμεσα εμφανείς στο αρχικό διάγραμμα, ενισχύοντας έτσι τη χωρική λογική και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων.

Στο πλαίσιο της απόδειξης θεωρημάτων, οι Posamentier και Krulik (2009), προτείνουν ότι η δημιουργική χρήση βοηθητικών γραμμών, μπορεί συχνά να οδηγήσει σε πιο κομψές και λιγότερο περίπλοκες αποδείξεις. Θεωρούν τις βοηθητικές γραμμές ως μία από τις «στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων» που μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά τόσο σε βασικές όσο και σε προηγμένες γεωμετρικές αποδείξεις.

Όπως αναφέρει ο Senk (1985), η εισαγωγή βοηθητικών γραμμών αποτελεί ένα ιδιαίτερα βοηθητικό εργαλείο προς την λύση των γεωμετρικών προβλημάτων. Η δυσκολία με τις βοηθητικές γραμμές αποτελεί απόδειξη του, γιατί είναι αναγκαίο να διδαχθούν οι μαθητές όχι μονάχα ότι μπορούν, αλλά και με ποιόν τρόπο θα μπορέσουν να μετατρέψουν ένα σχήμα σε μια ολοκληρωμένη μαθηματική απόδειξη.

Όταν πρόκειται για προβλήματα με πολλαπλές λύσεις, η δημιουργική χρήση βοηθητικών γραμμών, μπορεί να αποκαλύψει εναλλακτικές οδούς προς μια λύση, ενθαρρύνοντας την ευέλικτη και αποκλίνουσα σκέψη. (National Council of Teachers of Mathematics, 2000)

Οι Hershkowitz και Kuzniak (2018), στην έρευνά τους για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, τονίζουν τη χρήση βοηθητικών γραμμών ως κρίσιμη στρατηγική στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. Υποστηρίζουν ότι η εισαγωγή βοηθητικών στοιχείων μπορεί συχνά να αλλάξει την οπτική και χωρική δομή ενός προβλήματος, επιτρέποντας στους μαθητές να αντιληφθούν γεωμετρικές σχέσεις που δεν ήταν ορατές πριν. Προτείνουν περαιτέρω ότι αυτή η πρακτική μπορεί να ενισχύσει τη γεωμετρική διαίσθηση και τις συλλογιστικές ικανότητες των μαθητών.

Αντίστοιχα, το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών - NCTM (2000) υπογραμμίζει το ρόλο των βοηθητικών γραμμών στη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας. Τονίζει τη σημασία των βοηθητικών γραμμών για την προώθηση της επίλυσης προβλημάτων, της επικοινωνίας και του συλλογισμού στη γεωμετρία. Επισημαίνει επίσης, το ρόλο αυτών των γραμμών στο να μπορούν οι μαθητές να κάνουν και να διερευνούν μαθηματικές εικασίες.

Οι Mamona-Downs και Downs, (2005) συζητούν τη χρήση βοηθητικών γραμμών ως κεντρικό ευρετικό. Προτείνουν ότι η πρακτική της προσθήκης γραμμών απαιτεί μια παραγωγική ισορροπία μεταξύ της διορατικότητας, ιδιαίτερα της οπτικοποίησης, και της ανάλυσης. Επιπλέον, υποστηρίζουν ότι αυτή η ισορροπία είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Ομοίως, ο Weber (2001) επικεντρώνεται στις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη γεωμετρική επίλυση προβλημάτων. Διαπιστώνει ότι η χρήση βοηθητικών γραμμών, αν και είναι απαραίτητη για την επίλυση πολλών γεωμετρικών προβλημάτων, απαιτεί υψηλό επίπεδο γεωμετρικής κατανόησης και οπτικοποίησης. Σύμφωνα με τον Weber, η εκπαίδευση των μαθητών να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τις βοηθητικές γραμμές είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξή τους, ως ικανοί λύτες προβλημάτων στη γεωμετρία.

4.4.1. Δυσκολίες

Σε διάφορες έρευνες και μελέτες της βιβλιογραφίας, οι ερευνητές εντοπίζουν δυσκολίες στη χρήση των βοηθητικών γραμμών ως τρόπο να ανταπεξέλθουν σε ένα πρόβλημα. Κατά τον Hsu (2007) αυτές οι δυσκολίες, οφείλονται σε μεγάλο βαθμό, στην μη ικανότητα των μαθητών να προσεγγίσουν με δυναμικό τρόπο αυτά τα σχήματα, για να εφαρμόσουν τη λύση που χρειάζεται να εφαρμοστεί.

Η χρήση βοηθητικών γραμμών στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, μπορεί να είναι πρόκληση για τους μαθητές, ιδιαίτερα εκείνους που είναι νέοι σε αυτή τη στρατηγική ή δεν έχουν ισχυρή θεμελιώδη κατανόηση των γεωμετρικών αρχών. Όπως προκύπτει από τη σχετική βιβλιογραφία, υπάρχουν παράγοντες που συμβάλλουν σε αυτή τη δυσκολία. Ένας από αυτούς είναι η γνωστική πολυπλοκότητα που είναι το ζήτημα που ανέφερε και ο Hsu (2007).

Η διαδικασία απόφασης για το πού και πώς να χαράξουμε βοηθητικές γραμμές περιλαμβάνει υψηλό επίπεδο γνωστικής ζήτησης. Απαιτεί χωρική οπτικοποίηση, ικανότητα αντίληψης των σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών στοιχείων και βάθος κατανόησης των γεωμετρικών αρχών. Αυτές οι δεξιότητες δεν είναι πάντα καλά ανεπτυγμένες στους μαθητές, ιδιαίτερα στους νεότερους. (Weber, 2001)

Επίσης, η προσθήκη βοηθητικών γραμμών είναι συχνά μια εκτός ρουτίνας, αντισυμβατική στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, που σημαίνει ότι δεν είναι μια απλή, βήμα προς βήμα διαδικασία, που μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο τρόπο σε κάθε περίπτωση. Αντίθετα, απαιτεί ευέλικτη, κριτική και δημιουργική σκέψη, η οποία μπορεί να είναι πρόκληση για μαθητές που έχουν συνηθίσει σε πιο διαδικαστικές εργασίες, αλλά και σε λύσεις οι οποίες έχουν ένα μοτίβο το οποίο επαναλαμβάνεται συνεχώς. (Hershkowitz & Kuzniak, 2018)

Ακόμα ένας παράγοντας είναι η έλλειψη έκθεσης. Εάν οι μαθητές δεν είχαν μεγάλη εμπειρία με βοηθητικές γραμμές ή δεν έχουν διδαχθεί ρητά να τις χρησιμοποιούν, μπορεί να δυσκολευτούν να εφαρμόσουν αυτή τη στρατηγική αποτελεσματικά. Οι μέθοδοι διδασκαλίας που δίνουν υπερβολική έμφαση στις διαδικασίες ρουτίνας και στην απομνημόνευση, μπορεί να αφήσουν τους μαθητές ακατάλληλους να χρησιμοποιούν πιο δημιουργικές και στρατηγικές προσεγγίσεις όπως η χρήση βοηθητικών γραμμών. (Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών, 2000)

Ο Sriraman (2004) υποστηρίζει ότι, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, όταν προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν βοηθητικές γραμμές στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας, μπορεί να προκύψουν από την έλλειψη εμπειρίας με προβλήματα ανοιχτού τύπου ή πολλαπλών λύσεων. Θεωρεί ότι, η παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών, τείνει να επικεντρώνεται σε προβλήματα με μεμονωμένες, ξεκάθαρες λύσεις, οι οποίες μπορεί να μην προετοιμάζουν επαρκώς τους μαθητές για πιο σύνθετες εργασίες επίλυσης προβλημάτων που περιλαμβάνουν στρατηγική χρήση βοηθητικών γραμμών.

Η έρευνα των Seldens και Seldens (2003) για τη μαθηματική απόδειξη και την επίλυση προβλημάτων, υποδηλώνει ότι, πολλοί μαθητές αγωνίζονται να δημιουργήσουν πρωτότυπες βοηθητικές κατασκευές, επειδή δεν κατανοούν, πώς αυτές οι κατασκευές, μπορούν να αποκαλύψουν νέες, χρήσιμες σχέσεις μέσα σε ένα γεωμετρικό σχήμα. Τα ευρήματά τους, υπογραμμίζουν τη σημασία της βαθιάς κατανόησης των γεωμετρικών σχέσεων για την αποτελεσματική χρήση βοηθητικών γραμμών.

Επίσης, η Leikin (2009) επισημαίνει ότι, ενώ οι βοηθητικές γραμμές είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, οι μαθητές συχνά δεν σκέφτονται να τις χρησιμοποιήσουν. Μπορεί να διστάζουν να τροποποιήσουν ένα δεδομένο διάγραμμα ή μπορεί να δυσκολεύονται να απεικονίσουν την πιθανή επίδραση των βοηθητικών γραμμών στο πρόβλημα. Η Leikin (2009) προτείνει ότι η προώθηση της δημιουργικότητας και η προώθηση της χρήσης βοηθητικών κατασκευών, πρέπει να είναι σαφείς στόχοι στη διδασκαλία της γεωμετρίας.

Ακόμη, ο Jones (2002) υπογραμμίζει ότι οι δυσκολίες στη χρήση βοηθητικών γραμμών, μπορούν να αποδοθούν στις περιορισμένες δεξιότητες χωρικής οπτικοποίησης των μαθητών, οι οποίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην κατανόηση και χρήση αυτών των γραμμών. Υποστηρίζει παιδαγωγικές στρατηγικές που καλλιεργούν ρητά τις ικανότητες χωρικής συλλογιστικής και οπτικοποίησης των μαθητών.

Σε γενικές γραμμές, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη χρήση βοηθητικών γραμμών για την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων, είναι πολύπλευρες και περιλαμβάνουν γνωστικούς, εκπαιδευτικούς και στάσεις. Οι ερευνητές προτείνουν την ανάγκη για περισσότερη εστίαση στην επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου, τη βαθύτερη κατανόηση των γεωμετρικών σχέσεων, την προώθηση της δημιουργικότητας και την ανάπτυξη δεξιοτήτων χωρικής απεικόνισης στη μαθηματική εκπαίδευση.

4.5. Σύγχρονες εφαρμογές της δημιουργικότητας στο σχολικό περιβάλλον

Η βιβλιογραφία δείχνει ότι η μαθηματική δημιουργικότητα έχει κατά καιρούς πάρει μορφή μέσα από διάφορες εφαρμογές για το σχολικό περιβάλλον. Μια από αυτές είναι η χρήση μαθηματικών παιχνιδιών. Ο Boaler (2016) συζητά, πώς τα παιχνίδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την τόνωση της μαθηματικής δημιουργικότητας στους μαθητές, καλλιεργώντας την αγάπη για τα μαθηματικά, ενώ παράλληλα ενισχύουν τις δεξιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων.

Πολυάριθμες μελέτες έχουν τονίσει τη σχέση μεταξύ δημιουργικότητας και επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά. Οι δημιουργικές δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων ενθαρρύνουν τους μαθητές να σκέφτονται διαφορετικά, να προσεγγίζουν τα προβλήματα από πολλαπλές οπτικές γωνίες και να βρίσκουν μοναδικές λύσεις.

Για παράδειγμα, μια μελέτη της Leikin (2009) υποστηρίζει ότι η τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να είναι πολύτιμο εργαλείο για την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας στους μαθητές. Επίσης οι εργασίες ανοιχτού τύπου παρέχουν στους μαθητές την ευκαιρία να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες σε ένα μη περιοριστικό περιβάλλον. Τέτοιες εργασίες απαιτούν συχνά από τους μαθητές να επινοήσουν τις δικές τους στρατηγικές και λύσεις, διεγείροντας έτσι τη δημιουργική σκέψη. Αυτές οι εργασίες μπορούν επίσης να προωθήσουν την αποκλίνουσα σκέψη, καθώς θα μπορούσαν να υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις ή προσεγγίσεις. Η βιβλιογραφία επίσης δείχνει ότι τα ανοιχτά προβλήματα μπορούν να ενισχύσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα (Sheffield, 2009).

Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά μοντέλα για να λύσουν σενάρια πραγματικού κόσμου, όπως να καθορίσουν τον πιο οικονομικό τρόπο για την κατασκευή μιας παιδικής χαράς, δεδομένου ενός προϋπολογισμού και μιας λίστας πιθανού εξοπλισμού και κόστους.

Τα ανοιχτά προβλήματα διεγείρουν την αποκλίνουσα σκέψη και τις δημιουργικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Τα προβλήματα ρουτίνας, τα οποία δεν έχουν άμεση ή προφανή λύση, μπορούν επίσης να ενισχύσουν τη δημιουργικότητα. (Mann, 2005)

Επίσης, η έρευνα των Henningsen & Stein, (1997) υποστηρίζει ότι τα ανοιχτά προβλήματα μπορούν να τονώσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα, προκαλώντας τους μαθητές να σκεφτούν πέρα από τις συμβατικές στρατηγικές λύσης, ενθαρρύνοντας την καινοτόμο και πρωτότυπη μαθηματική σκέψη.

Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η διαίρεση ενός πλέγματος 7 επί 7 σε ίσες περιοχές των 5 τετραγώνων το καθένα. Αυτό το είδος προβλήματος μπορεί να λυθεί με πολλούς τρόπους και ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται δημιουργικά. Ακόμη, οι μαθητές μπορούν να επιδείξουν δημιουργικότητα διατυπώνοντας τα δικά τους προβλήματα. (Silver, 1997)

Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα λέξεων με βάση μια συγκεκριμένη μαθηματική πράξη. Αυτό όχι μόνο απαιτεί κατανόηση της έννοιας αλλά διεγείρει επίσης τη δημιουργικότητα στη διατύπωση του προβλήματος.

Επιπροσθέτως, τα μαθηματικά παιχνίδια και τα παζλ μπορούν να τονώσουν τη δημιουργικότητα. (Sriraman, 2004)

Σκάκι, Sudoku, Rubik's Cube ή διάφορες δραστηριότητες μέσω προγραμματισμού υπολογιστών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ενίσχυση της δημιουργικής σκέψης στην επίλυση προβλημάτων.

Μέσα από διάφορα παιχνίδια οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν τη γεωμετρία ως παιχνίδι. Το Origami μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα ισχυρό εργαλείο για την εξερεύνηση γεωμετρικών εννοιών με πρακτικό και δημιουργικό τρόπο.

Η Boakes (2009) προτείνει ότι το origami όχι μόνο προάγει την κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά και τις ιδιότητες και τους μετασχηματισμούς τους, ενισχύοντας έτσι τη χωρική λογική και τη δημιουργικότητα.

Η διασταύρωση της τέχνης και της γεωμετρίας, μπορεί να τονώσει τη δημιουργικότητα. Σύμφωνα με τον Brinkmann (2010), οι εργασίες που περιλαμβάνουν τη σχεδίαση γεωμετρικών μοτίβων, ψηφιακών σχημάτων ή ψηφιακής γεωμετρικής τέχνης, μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση εννοιών όπως η συμμετρία, η κλίμακα, η αναλογία και οι μετασχηματισμοί.

Η γεωμετρία είναι αναπόσπαστο μέρος του αρχιτεκτονικού σχεδιασμού και οι εργασίες που περιλαμβάνουν αρχιτεκτονικό σχέδιο μπορούν να τονώσουν τη δημιουργικότητα στη γεωμετρία. Σύμφωνα με τους Pittalis & Christou (2010), ο σχεδιασμός δομών απαιτεί βαθιά κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών όπως η μέτρηση του εμβαδού, του όγκου και της γωνίας και μπορεί να προσφέρει ευκαιρίες για δημιουργική επίλυση προβλημάτων.

Η επίλυση και η δημιουργία γεωμετρικών παζλ, είναι ακόμη ένας τρόπος που μπορεί να ενισχύσει τη χωρική λογική και τη δημιουργικότητα. Η μελέτη της Stoyanova (2003) αναφέρει ότι τα παζλ όπως το Tangram ή το Pentominoes, περιλαμβάνουν τη διάταξη γεωμετρικών σχημάτων με πολλούς τρόπους, γεγονός που προάγει τη δημιουργική σκέψη και για αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιούνται συχνά από τους εκπαιδευτικούς κατά τη μαθησιακή διαδικασία των σχολικών τάξεων από τις πρώτες κιόλας τάξεις που οι μαθητές διδάσκονται γεωμετρία και μαθηματικά.

Υπάρχουν συχνά περισσότεροι από ένας τρόπος για να αποδειχθεί ένα γεωμετρικό θεώρημα και η εύρεση αυτών των διαφορετικών τρόπων μπορεί να ενισχύσει τη δημιουργικότητα.

Σύμφωνα με τους Maher & Martino (1996), οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν διαφορετικούς τρόπους για να αποδείξουν θεωρήματα, όπως το Πυθαγόρειο θεώρημα ή ιδιότητες παράλληλων γραμμών που κόβονται από ένα εγκάρσιο, το οποίο ενθαρρύνει τη δημιουργική σκέψη. Η εμβάθυνση σε μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, όπως η σφαιρική ή η υπερβολική γεωμετρία, μπορεί να τονώσει τη δημιουργικότητα, καθώς προκαλούν την υπάρχουσα κατανόηση των μαθητών για τη γεωμετρία. (Bulmer & Zaslavsky, 1999)

Ένας ακόμη τρόπος είναι, η ενθάρρυνση των μαθητών να διερευνήσουν ένα μαθηματικό φαινόμενο, ο οποίος μπορεί να ενισχύσει τη δημιουργικότητα. (Chamberlin & Moon, 2005)

Για παράδειγμα, μπορεί να εξερευνήσουν τα μοτίβα στη φύση, όπως η ακολουθία Fibonacci που βρίσκεται στα πέταλα λουλουδιών ή να δοκιμάσουν εικασίες σχετικά με μαθηματικές έννοιες, όπως ιδιότητες των πρώτων αριθμών.

Μια ακόμα μορφή είναι η ενσωμάτωση Τεχνολογίας. Οι Wijers, Jonker και Kerstens, (2016) σκιαγραφούν την εφαρμογή της κινητής τεχνολογίας στην προώθηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, περιγράφοντας ένα παιχνίδι που ονομάζεται MobileMath που χρησιμοποιεί, την τεχνολογία κινητής τηλεφωνίας για να τονώσει το ενδιαφέρον και τη δημιουργική σκέψη για τα μαθηματικά. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων και λογισμικού στην τάξη μπορεί επίσης να προωθήσει τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ορισμένο λογισμικό επιτρέπει την οπτικοποίηση και τον χειρισμό αφηρημένων εννοιών και βοηθά στην εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών με δημιουργικό και διαδραστικό τρόπο. (Borba & Villarreal, 2005)

Ακόμη μια πτυχή είναι η μάθηση βάσει έργου. Οι Blumenfeld et al. (1991) υποστηρίζουν ότι η μάθηση βάσει έργου, μπορεί να ενισχύσει τη μαθηματική δημιουργικότητα, επιτρέποντας στους μαθητές να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Παράλληλα, η μάθηση βάσει διερεύνησης μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να κάνουν ερωτήσεις, να εξερευνήσουν και να κάνουν ανακαλύψεις, προωθώντας έτσι τη δημιουργική σκέψη και τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Σε αυτή την προσέγγιση, οι δάσκαλοι είναι διευκολυντές, καθοδηγώντας τους μαθητές να διατυπώσουν τις δικές τους ερωτήσεις και να βρουν τις δικές τους λύσεις.

Μια άλλη μορφή είναι η μαθηματική μοντελοποίηση. Οι Kaiser & Sriraman (2006) υπογραμμίζουν τη σημασία της μαθηματικής μοντελοποίησης ως εργαλείου για την προώθηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, για να μοντελοποιήσουν και να κατανοήσουν πολύπλοκες καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Στο ίδιο πλαίσιο, μια μελέτη από τον Stillman (2009) αποκαλύπτει ότι, οι εργασίες μαθηματικής μοντελοποίησης, μπορούν να διεγείρουν τη δημιουργικότητα των μαθητών, καθώς είναι επιφορτισμένοι με την εννοιολόγηση αφηρημένων μαθηματικών μοντέλων για την αναπαράσταση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Αυτό όχι μόνο βοηθά στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας, αλλά και στην εφαρμογή των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο. Επίσης, η χρήση γεωμετρικών σχημάτων για τη μοντελοποίηση αντικειμένων ή φαινομένων του πραγματικού κόσμου μπορεί να προωθήσει τη δημιουργικότητα.

Οι Lesh & Zawojewski (2007) υποστηρίζουν ότι εργασίες όπως η χρήση σφαιρών για τη μοντελοποίηση της Γης ή κυλίνδρων για τη μοντελοποίηση ουρανοξυστών, βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τη συνάφεια της γεωμετρίας και ενθαρρύνουν τη δημιουργική εφαρμογή των γεωμετρικών εννοιών.

Μια διαθεματική προσέγγιση βοηθά τους μαθητές να δουν τη συνάφεια και την εφαρμογή των μαθηματικών σε άλλους τομείς, γεγονός που μπορεί να αυξήσει το ενδιαφέρον, τη δέσμευση και τη δημιουργική σκέψη. Για παράδειγμα, η ενσωμάτωση της τέχνης και των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να οπτικοποιήσουν και να κατανοήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με πιο συγκεκριμένο και δημιουργικό τρόπο.

Σημαντικός επίσης είναι και ο ρόλος των δασκάλων στην ενθάρρυνση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Οι δάσκαλοι διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ενθάρρυνση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την ενθάρρυνση της αμφισβήτησης, την προώθηση μιας νοοτροπίας ανάπτυξης, την παροχή ευκαιριών για εξερεύνηση και ανακάλυψη και τη διευκόλυνση ενός περιβάλλοντος που υποστηρίζει την ανάληψη κινδύνων και τα λάθη. (Leikin, 2009)

Τέλος, οι παραδοσιακές δοκιμές συχνά αποτυγχάνουν να συλλάβουν επαρκώς τις δημιουργικές ικανότητες. Επομένως, χρειάζονται εναλλακτικές μέθοδοι αξιολόγησης. Αυτά θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν αξιολογήσεις χαρτοφυλακίου, παρουσιάσεις ή εργασίες που θέτει προβλήματα που επιτρέπουν δημιουργική σκέψη και πολλαπλές λύσεις όπως αναφέρει ο Dweck (2006).

5. Βασικά συμπεράσματα εργασίας

Η εργασία εξέτασε τις πτυχές της δημιουργικότητας στα μαθηματικά μέσα από το μάθημα της σχολικής γεωμετρίας, αναζητώντας προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στο σχολικό περιβάλλον. Σε αυτή την εργασία εξετάστηκε ο ρόλος της γεωμετρίας και η δημιουργικότητα.

Η έρευνα κατέληξε ότι μια σειρά από προσεγγίσεις μπορούν να εφαρμοστούν για να βοηθήσουν στην εκμάθηση των μαθηματικών αλλά και όχι μόνο, συνεισφέροντας γενικά ως ένα διαθεματικό πεδίο στη γενική γνώση των μαθητών.

Η βιβλιογραφία έδειξε αρκετές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται για την εκπλήρωση του σκοπού της εκπαίδευσης, μέσω μαθηματικών ή γεωμετρικών διαδικασιών. Σίγουρα ιδιαίτερα σημαντική προσέγγιση είναι η χρήση μαθηματικών παιχνιδιών, όρος που συχνά στη βιβλιογραφία απαντάται ως game-based learning και περιλαμβάνει μια διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές μαθαίνουν διασκεδάζοντας. Τέτοιες εφαρμογές είναι ιδιαίτερα αγαπητές από τα παιδιά και ιδιαίτερα δημοφιλείς στις πλατφόρμες παιχνιδιών. Αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά πρόσφατη και μαζί με την αποδοχή έχει συναντήσει και αρκετή κριτική, καθώς οι μαθητές εξαρτώνται από τη χρήση της τεχνολογίας, έστω και σε μικρό βαθμό, από μικρή ηλικία.

Μια αντίστοιχη προσέγγιση χωρίς τη χρήση της τεχνολογίας είναι οι δημιουργικές δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων. Μέσω αυτών, οι μαθητές μπορούν να σκεφτούν και να χρησιμοποιήσουν μαθηματικά και γεωμετρικά σχήματα. Το γεγονός ότι αυτές οι δραστηριότητες αποτελούν μιας μορφής διασκέδασης, τις κάνουν πιο αποδεκτές από τους μαθητές.

Σε αυτή τη διαδικασία αναφέρθηκαν επίσης τα ανοιχτά προβλήματα και η απαίτηση από τους μαθητές να δομήσουν τα δικά τους προβλήματα. Αυτές οι δύο τακτικές έχουν ως στόχο να σκεφτούν οι μαθητές πιο αντισυμβατικές λύσεις και πέρα από τις τετριμμένες απαντήσεις.

Αρκετές τακτικές αναφέρθηκαν, ως τακτικές που στοχεύουν αποκλειστικά τη γεωμετρία. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να φτιάξουν εκπαιδευτικές δραστηριότητες που θα φαίνονται επίσης ως παιχνίδι στους μαθητές. Τέτοιες δραστηριότητες είναι η κατασκευή ενός Origami και η σύνδεση της γεωμετρίας με άλλες τέχνες όπως η ζωγραφική, η αρχιτεκτονική, κ.α.

Μέσα από τη σχεδίαση γεωμετρικών μοτίβων, ψηφιακών σχημάτων ή ψηφιακής γεωμετρικής τέχνης, ο μαθητής αντιλαμβάνεται στοιχεία που είναι σημαντικά για να ανταπεξέλθει σε γεωμετρικά προβλήματα. Ταυτόχρονα αυξάνεται και η δημιουργικότητά του. Σε αυτό επίσης βοηθάει η δόμηση ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ή τα γεωμετρικά παζλ που μπορούν να δοθούν στους μαθητές.

Τέλος, αναφέρθηκαν σύγχρονες λύσεις που εστιάζουν και αυτές αποκλειστικά στη γεωμετρία. Τέτοιες λύσεις αποτελούν τα ψηφιακά εργαλεία και η γεωμετρική μοντελοποίηση, που εφαρμόζονται ήδη με ιδιαίτερη επιτυχία.

Όλες οι παραπάνω προσεγγίσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την προώθηση της δημιουργικότητας των μαθητών. Η διπλωματική εργασία συνείσφερε στην ανάλυση αυτών των προσεγγίσεων και με τον τρόπο της προσέφερε στη γενική γνώση.

Ως μελλοντική έρευνα, θα πρέπει να πραγματοποιηθούν πιο εκτενείς μελέτες στο θέμα της γεωμετρικής δημιουργικότητας, με τη χρήση εμπειρικής μελέτης, για την πιο αντικειμενική προσέγγιση και τη σύγκριση μεταξύ τρόπων έκφρασης της δημιουργικότητας.

Βιβλιογραφία

- Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία:

Aichele, D. B., & Peeples, J. A. (1991). Auxiliary lines and other problem-solving strategies. Mathematics Teacher, 84(4), 278-282.

Amabile, T. M. (1983). The social psychology of creativity: A componential conceptualization. Journal of Personality and Social Psychology, 45(2), 357–376.

Amabile, T. M. (1998). How to kill creativity. Harvard Business Review, 76(5), 76-87.

Baloche, L. A. (1998). *The cooperative classroom: Empowering learning*. . Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 843-908). Information Age Publishing.

Bell, E. T. (1951). Mathematics, Queen and Servant of Science. McGraw-Hill.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education–a review. Educational Studies in Mathematics, 11(3), 257-269.

Bloom, B.S. (Ed.). (1956). Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals: Handbook I, cognitive domain. Longmans, Green.

Blumenfeld, P. C., Soloway, E., Marx, R. W., Krajcik, J. S., Guzdial, M., & Palincsar, A. (1991). Motivating project-based learning: Sustaining the doing, supporting the learning. Educational psychologist, 26(3-4), 369-398.

Boakes, N. J. (2009). Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. RMLE Online, 32(7), 1-12.

Boaler, J. (2001). Mathematical Modelling and New Theories of Learning. Teaching Mathematics and its Applications, 20(3), 121-128.

Boaler, J. (2016). Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages, and Innovative Teaching. Jossey-Bass.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. Springer.

Brinkmann, A. (2010). Geometry and art: Exploring mathematics through creative work. The Mathematical Intelligencer, 32(3), 23-30

Bulmer, M., & Zaslavsky, O. (1999). Teaching a mathematics course for pre-service teachers using a constructivist, cooperative and reflective approach. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30(3), 369-387.

Calinger, R. (1999). *A Contextual History of Mathematics.* Hoboken, New Jersey: Prentice-Hall.

Clagett, M. (1999). *Ancient Egyptian Science: A Source Book.* (Τόμ. 3). Philadelphia: American Philosophical Society.

Clements, D. H., & Battista, M. (1992). *Geometry and spatial reasoning. Handbook of research on mathematics teaching and learning.*

Crowley, M. L. (1987). *The van Hiele model of the development of geometric thought. Learning and teaching geometry.*

Csikszentmihalyi, M. (1988). Society, culture, and person: A systems view of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives (pp. 325–339). Cambridge University Press.

Dietrich, A. (2004). The cognitive neuroscience of creativity. Psychonomic Bulletin & Review, 11(6), 1011-1026.

Dietrich, A. (2004). Neurocognitive mechanisms underlying the experience of flow. Consciousness and Cognition, 13(4), 746-761.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131.

Dweck, C. S. (2006). Mindset: The new psychology of success. Random House.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. Educational studies in Mathematics, 34(3), 183-217.

English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. International Journal of STEM Education, 3(1), 1-8.

Euclid, & Heath, T. L. (1956). The thirteen books of Euclid's Elements. Dover Publications.

Eves, H. (1963). *A Survey of Geometry* (Τόμ. 1). Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Eves, H. (1990). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών.* Αθήνα: ΤΡΟΧΑΛΙΑ.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 1193-1211.

Gardner, H. (1993). Creating Minds: An Anatomy of Creativity Seen Through the Lives of Freud, Einstein, Picasso, Stravinsky, Eliot, Graham, and Gandhi. Basic Books.

Goel, V., & Pirolli, P. (1989). Motivating the Notion of Generic Design Within Information-Processing Theory: The Design Problem Space. AI magazine, 10(1), 19-36.

Guilford, J.P. (1967). The Nature of Human Intelligence. McGraw-Hill.

Haviger, J., & Vojkůvková, I. (2014). The van Hiele geometry thinking levels: gender and school type differences. Procedia-Social and Behavioral Sciences. *International Conference on Education & Educational Psychology* , (σσ. 977-981).

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. Educational Studies in Mathematics, 18(1), 59-74.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. Journal for research in mathematics education, 524-549.

Hershkowitz, R., & Kuzniak, A. (2018). Mathematics education: A spectrum of work in mathematical sciences departments. Springer.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. Educational technology research and development, 48(4), 63-85.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), Aspects of teaching secondary mathematics: perspectives on practice (pp. 121-139). RoutledgeFalmer.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310.

Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. Cognitive Science, 38(5), 1008-1022.

Kaufman, J. C. (2014). Creativity and Its Discontents. American Psychologist, 69(5), 437-446.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students (pp. 129-145). Sense Publishers.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. Psychological Test and Assessment Modeling, 55(4), 385-400.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 763-804). Information Age Publishing.

Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(2-3), 219-236.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. Journal for research in mathematics education, 194-214.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem-solving. Journal of Mathematical Behavior, 24(3-4), 385-401.

Mariotti, M. A. (1995). *Images and concepts in geometrical reasoning. In Exploiting mental imagery with computers in mathematics education.* Springer Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

McCormack, J., Gifford, T., & Hutchings, P. (2019). Autonomy, Authenticity, Authorship and Intention in Computer Generated Art. In ICCC (pp. 196-203).

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. 17(2), . *The Journal of Mathematical Behavior*, 183-195.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge based programming. For the Learning of Mathematics, 13(1), 22-34.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM.

Nelsen, R. (1993). Proofs without words: Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America.

Ollerenshaw, C., & Ritchle, R. (1993). *Primary Science : Making it Work.* . London: David Fulton Publishers.

Onwuegbuzie, A. J., Collins, K., & Jiao, Q. (2009). *Performance of cooperative learning groups in a postgraduate education research methodology course: The role of social interdependence. Active Learning in Higher Education, 10(3),* (Τόμ. 3).

Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In these Proceedings.

Partnership for 21st Century Skills. (2009). P21 Framework Definitions.

Piaget, J. (1973). To Understand is To Invent. Grossman Publishers.

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. Educational Studies in Mathematics, 75(2), 191-212.

Poincaré, H. (1952). Science and Method. Dover Publications.

Polya, G. (1945). *How to solve it* . Princeton, New Jersey : Princeton University Press.

Popper, K. R. (2002). *Ο κόσμος του Παρμενίδη – δοκίμια για τον Προσωκρατικό Διαφωτισμό.* (F. A. Petersen, Επιμ., & Κ. Πετρόπουλος, Μεταφρ.) Αθήνα: ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΑ.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2009). Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions, grades 6-12: A resource for the mathematics teacher. Corwin Press.

Posamentier, A., & Salkind, C. (2002). Challenging problems in geometry (2nd ed.). Dover Publications.

Proctor, R. W. (2014). Creativity: A history of the word. In R. W. Proctor & E. J. Capaldi (Eds.), Psychology of science: Implicit and explicit reasoning (pp. 265-278). Oxford University Press.

Pusey, E. L. (2003). *The Van Hiele model of reasoning in geometry: a literature review.*

Ramsook, L. (2018). COOPERATIVE LEARNING AS A CONSTRUCTIVIST STRATEGY IN TERTIARY EDUCATION. *International Journal of Education and Research, 6*(12).

Robinson, K. (2011). Out of Our Minds: Learning to be Creative. Capstone Publishing Ltd.

Seefeldt, C., & Barbour, N. (1998). *Early Childhood Education: An Introduction.* Indianapolis, Indiana: Merrill.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? Journal for Research in Mathematics Education, 34(1), 4-36.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity—Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 87-100). Sense Publishers.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM, 29(3), 75-80.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. The Mathematics Educator, 14(1), 19-34.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1999). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook of creativity (pp. 3–15). Cambridge University Press.

Stillman, G. (2009). What Does "Applying Mathematics" Mean in the School Curriculum?. In J. Vincent, J. Dowsey, & R. Pierce (Eds.), Making Connections in Mathematics (pp. 89-104). Springer.

Stoyanova, E. (2003). Extending students' understanding of mathematics via problem posing. The Australian Mathematics Teacher, 59(2), 32-40.

Vojkuvkova, I. (2012). *The van Hiele Model of Geometric Thinking.* Prague: Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics.

Von Glasersfeld, E. (1989). Constructivsm in education. . Στο *The international encyclopedia of education-research and studies* (Τόμ. supplementary, 1, σσ. 162-163).

Vygotsky, L. S., & Cole, M. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes.* . Harvard university press.

Walle, J. V. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: μια εξελικτική διδασκαλία.* Αθήνα: Τυπωθήτω.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101-119.

Wijers, M., Jonker, V., & Kerstens, K. (2016). MobileMath: The phone, the game, and mathematics. In Mobile learning: The next generation (pp. 135-156). Routledge.

- Ελληνική Βιβλιογραφία:

Δημάκος, Γ., & Νικολουδάκης, Ε. (2008). Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση με χρήση της Θεωρίας των Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης του van Hiele και τη βοήθεια των Τ.Π.Ε. στα πλαίσια της Συνεργατικής Μάθησης. Στο Κ. Τζανάκης, & Μ. Κούρκουλος (Επιμ.), *5η Διεθνής Διημερίδα Διδακτικής Μαθηματικών*, (σσ. 179-194). Ρέθυμνο.

Καλαϊτζίδης, Π., & Παππά, Α. (2021). Διερεύνηση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των τελειόφοιτων μαθητών του δημοτικού σχολείου και του γυμνασίου κατά Van Hiele.

Κόκκοτας, Π. (2002). Η εποικοδομητική προσέγγιση της διδασκαλίας και της μάθησης. Στο *ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ.* Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2000). *Εισαγωγή στο «Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση»* . Αθήνα: Leader Books.

Μακρή-Μπότσαρη, Ε. (2006). Σύγχρονες αντιλήψεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία και η εφαρμογή τους με εργαλεία υπολογιστικής και δικτυακής Τεχνολογίας. Στο *Επιμορφωτικό υλικό γενικού μέρους του προγράμματος σπουδών για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.* Αθήνα: ΕΑΙΤΥ - Τομέας Επιμόρφωσης και Κατάρτισης (ΤΕΚ).

Μπαραλής, Γ. (2016). Οι γεωμετρικές έννοιες στα σχολικά βιβλία της Α' τάξης του Δημοτικού Σχολείου. *4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών της Εκπαίδευσης.* Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Πιπίνος, Γ. (2006). Διδακτική αξιοποίηση της θεωρίας των van hiele. *Επιστημονικό βήμα, 5*.

Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (1999). Η τεκμηρίωση στα μαθηματικά: επιστημολογικά ζητήματα και διδακτικές προεκτάσεις. *4ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή.*

Διδακτική των μαθηματικών και πληροφορική στην εκπαίδευση (σσ. 39-40). Ρέθυμνο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Τουμάσης, Μ. (2004). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: GUTENBERG.

➢ Ιστότοποι:

Bourne, L. (χ.χ.). *https://www.blog.montessoriforeveryone.com*. Ανάκτηση από Montessori for Everyone: https://www.blog.montessoriforeveryone.com

http://askisopolis.gr/. (χ.χ.). Ανάκτηση από http://askisopolis.gr/.

Δακορώνια, Ε., & Αναστασάκης, Μ. (2021). ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΡΟΩΘΟΥΝ ΟΙ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟ 1975 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ;. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών. 15*, σσ. 24-44. ΕΚΤ. Ανάκτηση από https://epublishing.ekt.gr

Θωμαΐδης, Γ. (2015). Συνέχειες και ασυνέχειες κατά τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *5η Ημερίδα Μαθηματικών Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί. "Μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο"*. Θεσσαλονίκη. Ανάκτηση από http://www.kalamari.gr/images/stories/hmerida_mathimatikwn/4hmeridamathimatikwn/thomaidis.pdf

Μανώλης, Χ. (χ.χ.). *ΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΕΠΟΙΚΟΔΟΜΗΤΙΣΜΟΥ*. Ανάκτηση από SCIENTIFIC JOURNAL ARTICLES: http://scientific-journal-articles.org

- Πηγές Εικόνων:

Πάπυρος του Rhind - https://schoolpress.sch.gr

Πάπυρος της Μόσχας - https://el.wikipedia.org

Τα πλατωνικά στερεά - https://schoolpress.sch.gr

Το αξίωμα της παραλληλίας - http://www.pspa.eu

Το μοντέλο του Poincare - http://www.math.ntua.gr

Μοντέλο σφαιρικής γεωμετρίας - https://schoolpress.sch.gr/giannakopoulos

Αντίληψη σχημάτων στο επίπεδο 1 - https://www.mff.cuni.cz

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.