

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

ΣΤΑΜΑΤΗΣ ΒΑΡΥΤΙΜΙΑΔΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΑΡΑΧΑΛΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2023

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία γίνεται μια σύντομη εισαγωγική μελέτη στις βασικές αρχές του λογισμού των μεταβολών. Ο σημαντικός αυτός κλάδος των Μαθηματικών σχετίζεται και με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, όπως η Γεωμετρία και οι Διαφορικές Εξισώσεις αλλά και με τη Φυσική και ιδιαίτερα με τη Μηχανική.

Αρχικά, παρουσιάζονται οι ιστορικές ρίζες του λογισμού των μεταβολών και βασικές έννοιες και θεωρήματα του. Γίνεται μελέτη των αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη ακρότατων συναρτησιακών, της κατασκευής των εξισώσεων Euler – Lagrange, η οποία συνοδεύεται με παρουσίαση σημαντικών παραδειγμάτων.

Στην συνέχεια, παρουσιάζεται η Hamiltonian θεωρία. Διατυπώνεται η Αρχή της Ελάχιστης δράσης (ή Αρχή του Hamilton). Με βάση αυτή την αρχή, οι βασικοί νόμοι της Κλασικής Μηχανικής βρίσκουν εναλλακτική διατύπωση αυτής η οποία βασίζεται στα αξιώματα του Νεύτωνα. Ειδικότερα, με εφαρμογή της Αρχής της Ελάχιστης Δράσης μπορούν να παραχθούν οι εξισώσεις κίνησης σε μηχανικά συστήματα. Δείχνουμε επίσης την ισοδυναμία των εξισώσεων Lagrange και των εξισώσεων του Hamilton οι οποίες περιγράφουν την κατάσταση ενός συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αναφερόμαστε επίσης στον Hamiltonian χώρο φάσεων και το θεώρημα επανάληψης του Liouville.

Εξετάζουμε το θεμελιώδες παράδειγμα Hamiltonian συστήματος, αυτού με ένα βαθμό ελευθερίας. Μελετάμε την ευστάθεια ενός κρίσιμου σημείου με εφαρμογή των συναρτήσεων Lyapunov, εξετάζοντας τη ροή του συστήματος κατά μήκος των ισοσταθμικών καμπυλών τους. Τέλος, γίνεται εισαγωγή των απεικονίσεων Poincaré που μετασχηματίζουν τα δυναμικά συστήματα ανώτερης διάστασης σε διακριτές απεικονίσεις σε χώρο φάσεων μικρότερης διάστασης. Ολοκληρώνοντας, παρουσιάζουμε μια σημαντική εφαρμογή των απεικονίσεων Poincaré. Με την κατασκευή των απεικονίσεων Poincaré για μη-αυτόνομα δυναμικά συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας, μελετάται η ευστάθεια τους με βάση το ισοδύναμο δυναμικό σύστημα το οποίο προκύπτει από την απεικόνιση Poincaré.

Summary

This dissertation provides an introductory study and presentation of the basic principles of the Calculus of Variations. This important branch of Mathematics is also related to other branches of Mathematics, such as Geometry and Differential Equations but also to Physics and especially to Mechanics.

First, reference to the historical origins of the Calculus of Variations is given, and its basic concepts and theorems are presented. We discuss the necessary conditions for the existence of extrema for functionals and the construction of the Euler – Lagrange equations, which is accompanied by the presentation of important examples.

We proceed with presenting the fundamental principles of Hamiltonian Theory. The Least Action Principle (or Hamilton's Principle) is formulated. Based on this principle, the basic laws of Classical Mechanics find an alternative formulation to the one which is based on Newton's laws. By applying the Least Action Principle, the equations of motion for mechanical systems can be derived.

We discuss the equivalence between Lagrange's equations and Hamilton's equations which may describe the state of a system for all times. We also refer to the Hamiltonian phase space and Liouville's recurrence theorem.

We consider the fundamental example of a Hamiltonian system, that is, the system with one degree of freedom. We study the stability of a critical point by applying Lyapunov functions, examining the flow of the system along their level curves. Finally, we present an introductory study of Poincaré maps which may transform higher-dimensional dynamical systems to their discrete counterparts in lower-dimensional phase spaces.

We conclude with the presentation of an important application of Poincaré maps. Constructing Poincaré maps for non-autonomous dynamical systems with two degrees of freedom allows us to study their stability based on the equivalent autonomous dynamical system derived through the Poincaré mapping reduction.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	σελ 6
Κεφάλαιο 1 : Η ιστορία του λογισμού των μεταβολών.	σελ 7
1.1 Η αρχή του ελάχιστου χρόνου.	σελ 7
1.2 Η ιστορική εξέλιξη της θεωρίας του Λογισμού των Μεταβολών.	σελ 8
1.3 Η αρχή της ελάχιστης δράσης.	σελ 8
Κεφάλαιο 2 : Ο Λογισμός των μεταβολών και η αρχή του Hamilton.	σελ 10
2.1 Βασικές έννοιες του λογισμού των μεταβολών.	σελ 10
2.2 Μερικά τυπικά προβλήματα ελαχιστοποίησης.	σελ 11
2.3 Μορφές συναρτησοειδών.	σελ 16
2.4 Χώροι με νόρμα στην μελέτη των συναρτησοειδών.	σελ 17
2.5 Παράγωγοι συναρτησοειδών.	σελ 19
Κεφάλαιο 3: Η εξίσωση Euler – Lagrange.	σελ 21
3.1 Ένα χρήσιμο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Euler – Lagrange.	σελ 27
3.2 Αρχές θεωρίας μεταβολών.	σελ 30
3.2.1 Αρχή του Fermat.	σελ 31
3.2.3 Συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.	σελ 34
3.2.4 Η σπουδαιότητα της αρχής του Hamilton.	σελ 36
Κεφάλαιο 4 : Εξισώσεις του Hamilton και χώρος φάσης.	σελ 38
4.1 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού.	σελ 38
4.1.1 Μετατροπή διαφορικών εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης σε σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης.	σελ 38
4.1.2 Η μορφή Hamilton.	σελ 39
4.2 Μετασχηματισμοί Legendre.	σελ 41
4.2.1 Η περίπτωση των δύο μεταβλητών.	σελ 41
4.2.2 Ενεργητικές και παθητικές μεταβλητές.	σελ 42
4.2.3 Η γενική περίπτωση με πολλές μεταβλητές.	σελ 42
4.3 Εξισώσεις Hamilton.	σελ 44
4.3.1 Ιδιότητες της Hamiltonian .	σελ 47
4.3.2 Διατήρηση της συμπεριφοράς των στιγμιαίων συναρτήσεων.	σελ 49

4.4 Ο Hamiltonian χώρος φάσης ((q,p) – χώρος).	σελ 50
4.4.1 Η ροή του χώρου φάσης .	σελ 51
4.5 Το θεώρημα επανάληψης του Liouville.	σελ 52
4.6 Το θεώρημα επανάληψης του Poincaré.	σελ 54
Κεφάλαιο 5 : Hamiltonian συστήματα – Συναρτήσεις Lyapunov.	σελ 57
5.1 Hamiltonian συστήματα στο επίπεδο.	σελ 57
5.2 Συναρτήσεις Lyapunov και Ευστάθεια.	σελ 62
5.3 Το θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov.	σελ 63
Κεφάλαιο 6 : Απεικονίσεις Poincaré.	σελ 69
6.1 Απεικονίσεις Poincaré.	σελ 69
6.2. Hamiltonian Συστήματα με δύο Βαθμούς Ελευθερίας.	σελ 76
Βιβλιογραφία	σελ 82

Εισαγωγή

Ένα τακτικό πρόβλημα του μαθηματικού λογισμού που συναντάμε συχνά, είναι η αναζήτηση σημείων στα οποία μία συνάρτηση f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Ο Λογισμός των Μεταβολών είναι ένας κλάδος της μαθηματικής ανάλυσης, που ασχολείται με αυτή την αναζήτηση. Αυτό το επιτυγχάνει με την μεγιστοποίηση ή την ελαχιστοποίηση των λεγόμενων συναρτησοειδών. Τα συναρτησοειδή είναι απεικονίσεις από ένα σύνολο συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς. Αντικείμενο του Λογισμού των Μεταβολών είναι η αναζήτηση ακρότατων συναρτήσεων, για τις οποίες το συναρτησοειδές παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή ή βρίσκουμε εκείνες τις συναρτήσεις που κάνουν το συναρτησοειδές “στάσιμο”, δηλαδή εκείνες τις συναρτήσεις για τις οποίες η τιμή του συναρτησοειδούς παραμένει αμετάβλητη.

Οι μέθοδοι του Λογισμού των Μεταβολών εφαρμόστηκαν με μεγάλη επιτυχία στην Θεωρητική Μηχανική αλλά και γενικότερα στη Φυσική. Η μαθηματική διατύπωση των νόμων της Φυσικής γράφεται συνήθως στην μορφή διαφορικών ή ολοκληρωτικών εξισώσεων. Σε πολλά προβλήματα της φυσικής είναι περισσότερο αναγκαία η εύρεση μιας συνάρτησης που βρίσκει την ακρότατη συμπεριφορά του φυσικού προβλήματος παρά ενός ακρότατου σημείου. Με τη θεωρία των μεταβολών βρίσκουμε τα κατάλληλα συναρτησοειδή και μετά αναζητούμε εκείνες τις συναρτήσεις οι οποίες μας περιγράφουν το τι συμβαίνει σε αυτές τις ακραίες συνθήκες και όχι μόνο τις τιμές του φυσικού φαινομένου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι φυσικοί νόμοι γράφονται με τη μορφή των συναρτησοειδών και τότε οι γνωστοί μας νόμοι διατυπώνονται με τη χρήση “ελαχίστων αρχών”, δηλαδή τεχνικών λύσεων που μας δείχνουν την συμπεριφορά των εμπλεκόμενων ιδιοτήτων που απαρτίζουν το φυσικό φαινόμενο. Έτσι το πρακτικό πλεονέκτημα της επίλυσης των φυσικών προβλημάτων, με τη μέθοδο του Λογισμού των Μεταβολών, είναι η δυνατότητα που παρέχει στην ενσωμάτωση σε ένα απλό συναρτησιακό, όλων των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων ενός προβλήματος, όπως για παράδειγμα οι οριακές συνθήκες και οι αρχικές τιμές του προβλήματος καθώς και οι περιορισμοί που συνίστανται γύρω από αυτά. Με την εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης – λύσης έχουμε την βέλτιστη προσέγγιση και απάντηση του προβλήματος.

Ο λογισμός των μεταβολών εφαρμόζεται όχι μόνο στη Φυσική αλλά και σε άλλα επιστημονικά πεδία όπως είναι η Μηχανική και η Οικονομία και προσέφερε πολλές νέες προσεγγίσεις και περιγραφές – λύσεις των προβλημάτων. Θεμελιωτές του λογισμού των μεταβολών μπορούν να θεωρηθούν οι Euler (1701-1783) και Lagrange (1736-1813), αλλά όχι πολύ «αυστηρά», διότι και άλλοι σύγχρονοί τους ασχοληθήκαν με αυτό το θέμα. Από την εποχή των Euler και Lagrange που ανέπτυξαν σημαντικές μεθόδους, ο λογισμός μεταβολών συνεχίζει μέχρι σήμερα να δίνει σημαντικές τεχνικές στη μηχανική, τη φυσική και στην εφαρμοσμένη ανάλυση.

Κεφάλαιο 1

Η ιστορία του λογισμού των μεταβολών

Ο Λογισμός των Μεταβολών εμφανίζεται ως έννοια στο λογισμό των Αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων. Η ιδέα ότι οι νόμοι της φύσης ικανοποιούν την αρχή της απλότητας και της “οικονομίας” κυριαρχεί στον τρόπο που μελετούσαν την φύση οι αρχαίοι επιστήμονες.

Για παράδειγμα ο Αριστοτέλης τον 4ο π.χ αιώνα στην πραγματεία του “ Περί Ουρανού” διατύπωσε την ιδέα ότι οι τροχιές των πλανητών είναι τέλειοι κύκλοι. Ο ίδιος αναφέρει ότι, είναι η γεωμετρική τελειότητα που αντιπροσωπεύεται στα κυκλικά σχήματα που οι τροχιές των πλανητών είναι τέλειοι κύκλοι. Αφού, οι κυκλικές γραμμές επιστρέφουν στον εαυτόν τους και η κυκλική γραμμή είναι η συντομότερη και άρα η κίνηση που ακολουθεί τη συντομότερη τροχιά είναι η ταχύτερη και προφανώς και η οικονομικότερη.

Οι άνθρωποι κατά την αρχαιότητα είχαν σαφή αντίληψη του μεγίστου και του ελαχίστου. Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι, όπως και οι Αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι η ελάχιστη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία γραμμή. Επίσης γνώριζαν ότι ο κύκλος είναι το γεωμετρικό σχήμα, που περικλείει τη μεγαλύτερη επιφάνεια για δεδομένη περίμετρο (που είναι η λύση του γνωστού ισοπεριμετρικού προβλήματος).

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα συνδέεται με το μύθο της Διδούς, τον οποίο περιγράφει ο Βιργίλιος (70 π.χ - 19 π.χ) στην Αινειάδα. Η πριγκίπισσα Διδώ της Φοινίκης όταν κατέπλευσε προς αναζήτηση ασύλου στα παράλια που είναι σήμερα γνωστά ως ο κόλπος της Τύνιδας, ζήτησε από τον τοπικό ηγεμόνα Ιόρβα, να αγοράσει τόση έκταση, όση μπορούσε να “περικλείσει με τη δορά ενός ταύρου”. Κατόπιν συμφωνίας με τον τοπικό ηγεμόνα η Διδώ τεμάχισε τη δορά του ταύρου σε λεπτές λωρίδες, τις έδεσε τη μία με την άλλη και κύκλωσε, σύμφωνα με το Βιργίλιο, μια μεγάλη έκταση γης, όπου έκτισε ένα φρούριο και κοντά σε αυτό έκτισε την πόλη της Καρχηδόνας. Ο μύθος τοποθετείται περίπου τον 9ο π.χ αιώνα και δηλώνει ότι η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος ήταν γνωστή εκείνη την εποχή. Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα θεωρείται ίσως το αρχαιότερο πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με προβλήματα βελτιστοποίησης ήταν ο Ήρων από την Αλεξάνδρεια, ο οποίος έζησε μεταξύ 150 μ.χ και 300 μ.χ. Ο Ήρων στο βιβλίο του “Κατοπτρικά ” έδειξε ότι όταν το φως ανακλάται από έναν καθρέπτη, η διαδρομή που ακολουθεί από το αντικείμενο ως τα μάτια του παρατηρητή είναι η συντομότερη δυνατή από οποιαδήποτε άλλη διαδρομή (παρόμοιο με το πρόβλημα του βραχυστόχρονου). Επειδή, κατά τον Ήωνα, το φως διαδίδεται σε ένα μόνο μέσον, η έννοια του συντομότερου πρέπει να ταυτίζεται με την έννοια του ταχύτερου. Ο Ήρων δηλαδή αναγνώρισε ότι η ανάκλαση του φωτός μπορούσε να περιγραφεί με μια αρχή ελαχίστου. Η αρχή αυτή ονομάζεται αρχή της ελάχιστης απόστασης ή αρχή του Ήωνα και βασίζεται στην ευθύγραμμη διάδοση του φωτός.

1.1 Η αρχή του ελάχιστου χρόνου

Αιώνες μετά τον Ήωνα, ο Pierre de Fermat (1601-1665) παρατήρησε ότι ο νόμος της διάθλασης ή νόμος του Snell μπορούσε να εκφραστεί υπό την μορφή της αρχής του ελαχίστου. Η αρχή αυτή, που ονομάζεται αρχή του Fermat ή αρχή του ελαχίστου χρόνου και διατυπώθηκε το 1662, ορίζει ότι η διαδρομή που επιλέγεται από το φως δια μέσου ενός ανομοιογενούς μέσου είναι αυτή για την οποία το φως απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο. Η διαδρομή ελάχιστου χρόνου δεν είναι οπωσδήποτε και η συντομότερη κατά τη διάδοση του φωτός. Ο Fermat γενίκευσε τις προβλέψεις του νόμου σε διάφορα οπτικά μέσα, όπως για παράδειγμα στην ατμόσφαιρα, όπου η ταχύτητα του φωτός είναι συνάρτηση της θέσης. Η αρχή ελαχίστου χρόνου είναι θεμελιώδους θεωρητικής σημασίας, διότι με βάση αυτή διατυπώθηκαν οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής.

1.2 Η ιστορική εξέλιξη της θεωρίας του Λογισμού των Μεταβολών

Η ιστορία της θεωρίας του Λογισμού των Μεταβολών είναι στενά συνδεδεμένη με την ιστορία των Μαθηματικών. Σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως ο Newton, ο Johann και Jacob Bernoulli, ο Huygens, ο Leibniz και άλλοι ασχολήθηκαν κατά τον 17ο αιώνα με την επίλυση προβλημάτων των ακρότατων τιμών.

Οι διάφοροι μέθοδοι όμως που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση τους ήταν ειδικές περιπτώσεις. Η ύπαρξη λύσης σε κάθε τέτοιο πρόβλημα ακρότατου απαιτεί ειδική απόδειξη, πράγμα που αποτελεί μία από τις κύριες δυσκολίες στην επίλυση αυτών των προβλημάτων. Ο Leonard Euler (1707-1783) πριν το 1732 άρχισε τη συστηματική μελέτη προβλημάτων ακρότατων τιμών, όπως το ισοπεριμετρικό, το βραχυστοχρόνου και άλλων. Η μέθοδος που ανέπτυξε ο Euler ήταν πολύ διαφορετική από τους προκατόχους του και έτσι παρήγαγε μια θεωρία, η οποία αποτέλεσε εξειδικευμένο επιστημονικό πεδίο. Τη θεωρία αυτή ο Euler την ονόμασε “Λογισμός των Μεταβολών”. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή για μια συγκεκριμένη κατηγορία συναρτησιακών (δηλαδή συναρτήσεων που έχουν ορίσματα συναρτήσεων), ο Euler ανακάλυψε μια αναγκαία συνθήκη, που πρέπει να ικανοποιείται για την ελαχιστοποίηση του αντίστοιχου συναρτησιακού. Σήμερα η συνθήκη αυτή ονομάζεται εξίσωση Euler - Lagrange και έχει την μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)} \right) = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση, για τα συναρτησιακά, είναι αντίστοιχα ότι και ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου για τις συναρτήσεις. Ούτε όμως ο Euler αλλά ούτε ο Lagrange κατόρθωσαν να το αποδείξουν με τις μεθόδους τους. Η απόδειξη έγινε πολύ αργότερα, το 1879, από τον Du Bois-Reymond, ο οποίος χρησιμοποίησε την έννοια της συνέχειας που είχε εισάγει ο Cauchy το 1820. Αλλά και ο Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ανέπτυξε μια αναλυτική θεωρία του Λογισμού των Μεταβολών. Το έργο του “Mechanique Analytique” που γράφηκε εκατό χρόνια μετά το “Principia” Νεύτωνα, αποτελεί ίσως την πιο πολύτιμη εργασία του. Η “Principia” του Νεύτωνα ήταν γραμμένη με όρους κλασσικής Ελληνικής Γεωμετρίας. Ο Lagrange χρησιμοποιώντας το Λογισμό των Μεταβολών κατάφερε να συνενώσει την Στατική και τη Δυναμική, που μέχρι τότε ήταν χωριστές έννοιες. Η γεωμετρική οπτική του Νεύτωνα εγκαταλείφθηκε και αυτός ήταν ο θρίαμβος της καθαρής Ανάλυσης, της οποίας ο Lagrange υπήρξε πρωτοπόρος.

1.3 Η αρχή της ελάχιστης δράσης

Οι αρχές ελαχίστου στην κλασσική μηχανική προήλθαν από την αρχή της ελάχιστης δράσης που διατυπώθηκε από τον μαθηματικό Euler και από το Γάλλο μαθηματικό Pierre Louis Maupertuis, χωρίς να είναι σαφές από ποιόν προέρχεται η αρχική διατύπωση. Ο Maupertuis το 1744 ή 1746 ανέφερε ότι η δράση είναι ανάλογη με το γινόμενο “μάζα, ταχύτητα, θέση” και η ποσότητα της δράσης για τις μεταβολές που συντελούνται στη φύση είναι η ελάχιστη δυνατή.

Ο όρος “δράση” δημιουργήθηκε από το Maupertuis από τη βεβαιότητα ότι η δημιουργία του Θεού λαμβάνει χώρα με την ελάχιστη προσπάθεια. Από τη διατύπωση του Maupertuis έλλειπε η σαφήνεια και από τις αποδείξεις του η ακρίβεια. Ο Euler θεώρησε την αρχή της ελάχιστης δράσης ως θεμελιώδη και στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε από τον Lagrange και αργότερα από τον Hamilton (1805-1865). Ο όρος “Αρχή του Ελαχίστου” που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα αποτελεί ιστορική κληρονομιά του 18ου αιώνα.

Σαν δράση ο Euler όρισε το ολοκλήρωμα: $\int m v ds$ δηλαδή το ολοκλήρωμα της ορμής επί τη στοιχειώδη μετατόπιση και το 1744 διετύπωσε την αρχή της ελάχιστης δράσης, σύμφωνα με την οποία η τροχιά που θα διαγράψει ένα σώμα θα είναι εκείνη για την οποία η δράση θα έχει ελάχιστη

τιμή. Άρα θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το ολοκλήρωμα $\int m v ds$. Σήμερα το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται: $\int p dq$.

Η μεγάλη σημασία της αρχής της ελάχιστης δράσης στη μηχανική δόθηκε από τον Lagrange το 1760, αν και δε χρησιμοποιήθηκε για να παραχθούν οι νόμοι της κίνησης. Αυτό έγινε εβδομήντα πέντε χρόνια αργότερα από τον William Rowan Hamilton το 1834 και 1835. Ο Hamilton εφήρμοσε την αρχή της ελάχιστης δράσης στη συνάρτηση $L = T - V$ η οποία και ονομάζεται Lagrangian και ισούται με τη διαφορά της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Με την αρχή της ελάχιστης δράσης του Hamilton αποδείχθηκαν οι Lagrangian εξισώσεις κίνησης.

Η Αρχή του ελαχίστου εφαρμόζεται εκτός της κλασσικής μηχανικής και σε άλλα επιστημονικά πεδία της φυσικής όπως στον ηλεκτρομαγνητισμό, στη θεωρία της σχετικότητας, στην κυματική θεωρία και στη κβαντομηχανική, με τα ολοκληρώματα διαδρομών από τον Richard Feynmann (1918-1988).

Κεφάλαιο 2

Ο Λογισμός των μεταβολών και η αρχή του Hamilton

Κυρίαρχη ασχολία στη φυσική επιστήμη είναι η μελέτη της ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης των φαινομένων μέσα από αντίστοιχες αρχές που έχουν θεμελιωθεί για αυτό το λόγο. Είναι διαπιστωμένο από την μελέτη των διαφόρων συστημάτων, ότι η φύση επιλέγει τον “οικονομικότερο” τρόπο για να λειτουργεί.

Πολλές από αυτές τις αρχές, μετά από προσεκτική μελέτη, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι αυτός ο οικονομικότερος τρόπος δεν είναι υποχρεωτικά η ελαχιστοποίηση αλλά η λειτουργικότητα του συστήματος μέσα από την σταθεροποιημένη ισορροπία τους. Λόγω αυτής της παρατήρησης είναι πλέον γνωστές ως αρχές των μεταβολών.

Μια τέτοια είναι η **αρχή του ελαχίστου χρόνου**, που είναι γνωστή και σαν **αρχή του Fermat**, η οποία προτάθηκε το 1657 και αναφέρει τα εξής:

“ το φως κατά τη διαδρομή του μέσα σε ένα μέσο από ένα σημείο A σε ένα σημείο B, ακολουθεί τον οπτικό δρόμο που θα του επιτρέψει να μεταβεί από το A στο B στο μικρότερο δυνατό χρόνο”.

Ο Fermat έδειξε ότι οι φυσικοί νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης μπορούν να παραχθούν από την αρχή του και υποστήριξε ότι η αρχή του είναι γενικά σωστή. Με την αρχή του Fermat μπορέσαμε να εξηγήσουμε τους κανόνες της οπτικής με απλούστερο και κομψό τρόπο, καθώς και να επεκτείνουμε αρκετά τους νόμους της γεωμετρικής οπτικής.

Γι’ αυτό και οι αρχές των μεταβολών συνεχίζουν να είναι επίκαιρες και χρήσιμες, αφού με την απλότητα τους μπορούμε να εξηγήσουμε, να κατανοήσουμε ευκολότερα τη λειτουργία της φύσης και να γενικεύσουμε τα συμπεράσματά μας.

Η αρχή των μεταβολών πάνω στην οποία μπορεί να βασιστεί όλη η κλασική μηχανική ανακαλύφθηκε από τον Hamilton και είναι γνωστή ως Αρχή του Hamilton η οποία αναφέρει τα εξής :

“μεταξύ όλων των δυνατών διαδρομών στο χώρο των αναπαραστάσεων ενός μηχανικού συστήματος, που συνδέουν την αρχική κατάσταση με την τελική κατάσταση και μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, η πραγματική κίνηση θα γίνει κατά μήκος εκείνης της διαδρομής που ελαχιστοποιεί το (χρονικό) ολοκλήρωμα Lagrange του συστήματος των εξισώσεων Lagrange.”

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να αντικαταστήσουμε του νόμους του Newton της κλασικής μηχανικής με την αρχή του Hamilton.

Η αρχή του Hamilton έχει επηρεάσει την μελέτη και εφαρμογή πολλών άλλων περιοχών της φυσικής ακόμα και μη μηχανικών συστημάτων, (όπως των πεδίων) τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν ως ‘Lagrangian’. Γι αυτό και η αρχή του Hamilton γενικά είναι μια από τις πιο κομψές και χρήσιμες αρχές της φυσική.

Για να μπορέσουμε να έχουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα από μια αρχή μεταβολών συνήθως πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα μας σε πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε χρησιμοποιώντας τον λογισμό των μεταβολών και ελαχιστοποιώντας ή μεγιστοποιώντας την τιμή ενός “συναρτησοειδούς”. Ο λογισμός των μεταβολών έχει ευρεία εφαρμογή και ανάπτυξη και τον χρησιμοποιούμε συνήθως σε ενδιαφέροντα προβλήματα της φυσικής ώστε να μπορέσουμε να τα αντιμετωπίσουμε και να κατανοήσουμε την λειτουργία τους με την χρήση των μεταβολικών αρχών.

2.1 Βασικές έννοιες του λογισμού των μεταβολών

Στον λογισμό των μεταβολών ασχολούμαστε, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με την βελτιστοποίηση μεταβλητών ποσοτήτων, οι οποίες ονομάζονται “συναρτησοειδή”. Τα

συναρτησοειδή μπορούμε να τα θεωρήσουμε ότι είναι ένας ειδικός τύπος συναρτήσεων, που έχουν ως πεδίο ορισμού συγκεκριμένες «κλάσεις συναρτήσεων» (χώροι συναρτήσεων) και σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

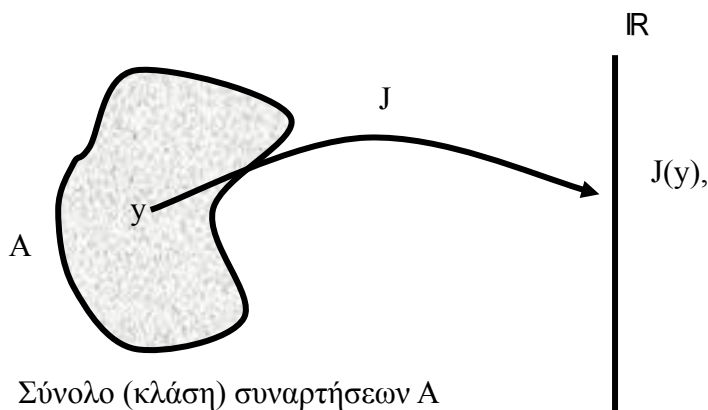
Έτσι αντί να προσπαθούμε να βρούμε πότε οι συναρτήσεις των προβλημάτων έχουν ακρότατα (ελάχιστο, μέγιστο), ο λογισμός των μεταβολών ασχολείται με την εύρεση της συνάρτησης που ελαχιστοποιεί ή την μεγιστοποιεί το αντίστοιχο συναρτησοειδές.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μερικές βασικές έννοιες στα συναρτησοειδή.

Ορισμός 2.1.1

Ένα συναρτησοειδές (ή συναρτησιακό) είναι ένας κανόνας που σε κάθε συνάρτηση $Y(t)$ μιας καλώς ορισμένης κλάσης συναρτήσεων A , αντιστοιχίζει ένα πραγματικό αριθμό. Όπως μια συνάρτηση, έτσι και ένα συναρτησοειδές, είναι ένας κανόνας, μια αντιστοιχία, με το πεδίο ορισμού της να είναι ένα σύνολο συναρτήσεων A ενώ το σύνολο τιμών της είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Δηλαδή, έστω A ένα σύνολο συναρτήσεων, λέμε ότι ένα συναρτησοειδές J επί της κλάσεως συναρτήσεων A είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε συνάρτηση $y \in A$ έναν πραγματικό αριθμό που τον συμβολίζουμε με $J(y)$, δηλαδή $J : A \rightarrow \mathbb{R}$ (σχήμα 2.1).



(Σχήμα 2.1 : Ένα συναρτησοειδές $J : A \rightarrow \mathbb{R}$)

Στον λογισμό των μεταβολών για το συναρτησοειδές J με πεδίο ορισμού ένα καλώς ορισμένο σύνολο συναρτήσεων A θέλουμε να βρούμε εκείνες τις συναρτήσεις του A που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) το J . Για παράδειγμα, το σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων y μπορεί να είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα διάστημα $[a,b]$ ή το σύνολο των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $y(a) = a$. Πάντως, την θεωρία του λογισμού των μεταβολών την χρησιμοποιούμε συνήθως σε συναρτησοειδή που ορίζονται μέσω ολοκληρωμάτων και στην εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για τα ακρότατα.

Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης ενός συναρτησοειδούς J επί του συνόλου A λέγεται *μεταβολικό πρόβλημα*.

2.2 Μερικά τυπικά προβλήματα ελαχιστοποίησης

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο λογισμός των μεταβολών αναδείχθηκε από την ανάγκη της ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης προβλημάτων της φυσικής και των μαθηματικών. Παρακάτω

θα αναπτυχθούν μερικά τέτοια προβλήματα, τα οποία και θα λύσουμε αναλυτικά όταν αναπτύξουμε τη θεωρία των συναρτησοειδών στην ανάλυση, από τη γεωμετρία, την φυσική και τα οικονομικά. Αν και εμφανίζεται περισσότερο η ανάγκη της ελαχιστοποίησης, τα προβλήματα μεγιστοποίησης λύνονται με τον ίδιο τρόπο αλλάζοντας απλώς το πρόσημο της ποσότητας που θέλουμε να μεγιστοποιηθεί. Έτσι η θεωρία των μεταβολών μπορεί και εφαρμόζεται γενικά και σε τέτοια προβλήματα.

Παράδειγμα 2.2.1 (Ελάχιστη διαδρομή - γεώδεση)

Ένα βασικό πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών είναι η εύρεση της ελάχιστης διαδρομής που συνδέει δύο σημεία A και B στο χώρο. Αν η διαδρομή δεν επηρεάζεται από κάποιο εμπόδιο ή από κάποιο άλλο περιορισμό (π.χ αναγκαστική καμπύλη διαδρομή) τότε όπως γνωρίζουμε από την γεωμετρία θα είναι η ευθεία γραμμή AB. Θα αποδείξουμε το παραπάνω γεωμετρικό συμπέρασμα με την χρήση της θεωρίας των μεταβολών.

Ας θεωρήσουμε γενικά δυο σημεία $A(a,y(a))=(a,y_0)$ και $B(b,y(b))=(b,y_1)$. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης από το σημείο A στο σημείο B, ορίζεται ως το όριο των αθροισμάτων της μορφής

$$\sum_a^b \Delta s = \sum_a^b \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sum_a^b \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad (2.1)$$

όπου
$$\Delta s = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (2.2)$$

και $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_i < x_{i+1} \dots < x_n = b$ είναι μια διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$.

Η (2.1) εκφράζει την προσέγγιση του μήκους της καμπύλης γραμμής μεταξύ των σημείων A και B, η οποία περιγράφεται με το μήκος της τεθλασμένης γραμμής που ορίζεται με βάση τα ενδιάμεσα σημεία $(x_k, y_k) = (x_k, y(x_k))$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Από την (2.2), έχουμε

$$(\Delta s)^2 = (x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad \text{και}$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Αν θεωρήσουμε $\Delta x \rightarrow 0$, τότε ότι η στοιχειώδης μεταβολή ως προς x είναι

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \Leftrightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.3)$$

Από (2.1), (2.2) και τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, έχουμε ότι το μήκος τόξου της καμπύλης που ορίζεται από την $y = y(x)$ από το σημείο A στο σημείο B, είναι:

$$L_a^b = L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2.4)$$

Για κάθε συνάρτηση του A, το συναρτησοειδές L αντιστοιχίζει ένα πραγματικό αριθμό που εκφράζει το μήκος του τόξου της καμπύλης $y = y(x)$ μεταξύ των δυο σημείων A και B. Το

αντίστοιχο πρόβλημα λογισμού μεταβολών για το ελάχιστο μήκος της γραμμής AB είναι η ελαχιστοποίηση του L δηλαδή του μήκους τόξου επί του συνόλου των δυνατών συναρτήσεων. Η προφανής απάντηση είναι ότι το τόξο που επιτυγχάνει την ελαχιστοποίηση είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των A και B, με τύπο:

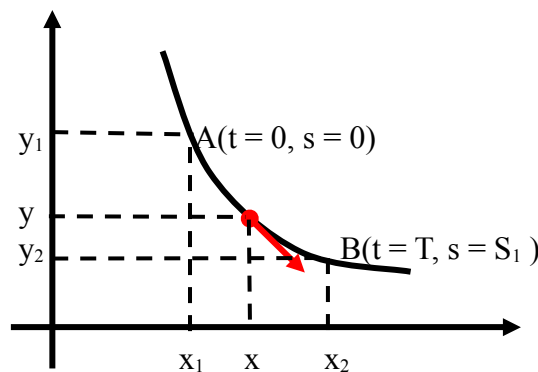
$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) + y_0 \quad (2.5)$$

Με τη βοήθεια του λογισμού μεταβολών θα αποδείξουμε παρακάτω ότι αυτό όντως συμβαίνει. Έτσι προκύπτει μια απόδειξη του γνωστού αποτελέσματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ότι η συντομότερη απόσταση μεταξύ δυο σημείων είναι μια ευθεία γραμμή.

Γενικά τα προβλήματα της μικρότερης διαδρομής τα ονομάζουμε γεωδαισία. Για παράδειγμα, γεωδαισία στην επιφάνεια μιας σφαίρας είναι οι μέγιστοι κύκλοι (οι κύκλοι που έχουν το κέντρο τους στο κέντρο της σφαίρας). Μερικές επιφάνειες (όπως η κυλινδρική ή η κωνική) είναι αναπτυκτές επιφάνειες, δηλαδή μπορούν να αναπτυχθούν σε επίπεδες χωρίς να επηρεαστεί το μήκος κάποιας διαστάσεως τους. Η γεωδαισία μπορεί να μελετηθεί σε τέτοια σχήματα όταν έχουμε αναπτύξει την επιφάνεια τους σε επίπεδη επιφάνεια και εφαρμόσουμε την λύση του προβλήματος αφού επαναφέρουμε την επιφάνεια στην αρχική της δομή. Γενικά όμως όλες οι επιφάνειες δεν είναι αναπτυκτές και τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την γεωδαισία αλλά μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα μέσα από την θεωρία των μεταβολών.

Παράδειγμα 2.2.2 (Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου)

Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι το περίφημο πρόβλημα του βραχυστόχρονου. Έστω μια σφαίρα μάζας m η οποία αφήνεται να ολισθήσει με αρχική ταχύτητα μηδέν και χωρίς τριβή, υπό την επίδραση της βαρύτητας g από ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ σε ένα σημείο $B(x_2, y_2)$ με $x_1 < x_2$ και $y_1 > y_2$, κατά μήκος ενός σύρματος που ορίζεται από μια καμπύλη $y = y(x)$ σε επίπεδο (x, y) (Σχ. 2.2).



(Σχήμα 2.2 : Η καμπύλη του βραχυστόχρονου.)

Σε αυτό το πρόβλημα αναζητούμε την καμπύλη με τον ταχύτερο χρόνο καθόδου.

Το πρόβλημα διατυπώθηκε από τον Johann Bernoulli το 1696 και πολλοί άλλοι γνωστοί μαθηματικοί της εποχής πρότειναν διάφορες λύσεις. Η λύση που δόθηκε από τον Euler οδήγησε σε γενικές μεθόδους που αποδείχθηκαν χρήσιμες στην επίλυση μιας ποικιλίας άλλων τέτοιων προβλημάτων και έθεσαν τις βάσεις για την ανάπτυξη του λογισμού των μεταβολών.

Η καμπύλη που δίνει την λύση του παραπάνω προβλήματος, είναι ένα τόξο του κυκλοειδούς, δηλαδή της καμπύλης που περιγράφεται από την κίνηση ενός σημείου πάνω στην περιφέρεια ενός κυλιόμενου τροχού.

Θα αναφέρουμε μια πιο αναλυτική περιγραφή του προβλήματος. Θα υπολογίσουμε αρχικά το χρόνο καθόδου T μιας δεδομένης καμπύλης $y = y(x)$ που συνδέει τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ (σχήμα 2.2). Έστω s το μήκος τόξου επί της καμπύλης, που αρχίζει από το αρχικό σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{S_1} \frac{dt}{ds} ds = \int_0^{S_1} \frac{1}{u} ds \quad (2.6)$$

όπου S_1 είναι το ολικό μήκος τόξου της καμπύλης και με u συμβολίζουμε την ταχύτητα της σφαίρας που “κατεβαίνει” την καμπύλη. Όμως $ds = (1 + y'(x)^2)^{\frac{1}{2}} dx$, οπότε η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{u} dx \quad (2.7)$$

Για να εκφράσουμε την ταχύτητα u ως συνάρτηση της καμπύλης y , χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας σύμφωνα με την οποία η ολική μηχανική ενέργεια (δηλαδή το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας) διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Συγκεκριμένα

$$(E_{\text{κιw}} + E_{\text{δov}})|_{t=0} = (E_{\text{κιw}} + E_{\text{δov}})|_{t=T>0}$$

η οποία για το πρόβλημα μας διατυπώνεται ως

$$\frac{1}{2} mu^2 + mgy = mgy_1 \quad (2.8)$$

Λύνοντας την (2.8) ως προς u , βρίσκουμε ότι

$$u^2 = 2g(y_1 - y(x)) \Leftrightarrow u = \sqrt{2g(y_1 - y(x))} \quad (2.9)$$

Αντικαθιστώντας την (2.9) στην (2.7) βρίσκουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος δίνεται από το συναρτησοειδές:

$$T(y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y(x))}} dx \quad (2.10)$$

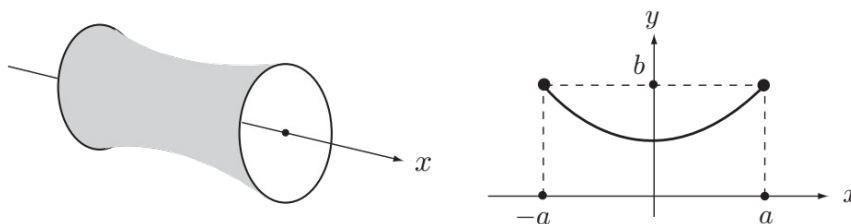
Στο συναρτησοειδές (2.10), φαίνεται ξεκάθαρα η εξάρτηση του χρόνου καθόδου T της σφαίρας πάνω στην καμπύλης y , από την καμπύλη y . Οπότε θα ψάξουμε να βρούμε την y από το σύνολο των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ και για $y_1 < y_2$ με

$$T(y) = \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y(x))^{-\frac{1}{2}} dx \quad (2.11)$$

Άρα το πρόβλημα του « βραχυστοχρόνου » έχει τη διατύπωση ενός μεταβολικού προβλήματος το οποίο συνίσταται στην ελαχιστοποίηση του συναρτησοειδούς (2.10) με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που αναφέρονται στο (2.11) και στην εύρεση εκείνης της καμπύλης y που ελαχιστοποιεί το χρόνο $T(y)$. Λόγω των συγκεκριμένων συνοριακών συνθηκών, αυτό το πρόβλημα λέγεται *πρόβλημα συγκεκριμένων (σταθερών) ακρών*.

Παράδειγμα 2.2.3 (Το πρόβλημα της ελάχιστης επιφάνειας εκ περιστροφής)

Έστω μια επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή, γύρω από τον άξονα $x'x$, μιας επίπεδης καμπύλης $y(x)$ που διέρχεται από δύο σταθερά σημεία $A(-a, b)$ και $B(a, b)$ με απόσταση $AB = 2a$. Θέλουμε να βρούμε την καμπύλη γραμμή που ενώνει τα δύο σημεία A και B και ελαχιστοποιεί το εμβαδόν της επιφάνειας που ενώνει τους δύο δημιουργούμενους κύκλους λόγω της περιστροφής.



(Σχήμα 2.3: Η παραγόμενη επιφάνεια μεταξύ των δύο κύκλων. Έχει την μορφή της περιστρεφόμενης γραμμής $y = y(x)$ με $y(-a) = y(a) = b$.)

Ευτυχώς μπορούμε να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία των λεπτών μεμβρανών. Θα θεωρήσουμε ότι ο αέρας έχει την ίδια πίεση και στις δύο πλευρές του σχηματιζόμενου φιλμ και ότι η βαρύτητα είναι αμελητέα. Οπότε η ελάχιστη συνολική δαπανόμενη ενέργεια για την περιστροφή προκύπτει όταν η περιοχή του σχηματιζόμενου φιλμ είναι ελάχιστη.

Έστω dA το στοιχειώδες εμβαδόν της καμπύλης με στοιχειώδες μήκος ds και ακτίνα $y(x)$. Τότε

$$dA = 2\pi y ds \quad (2.12)$$

όπου

$$ds = \sqrt{1+(y'(x))^2} \quad (2.13)$$

Το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας προσδιορίζεται από το ολοκλήρωμα Riemann του στοιχειώδους εμβαδού dA , με

$$A[y] = dA = 2\pi \int_a^{-a} y(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx \quad (2.14)$$

Αναζητούμε δηλαδή την καμπύλη $y(x)$ που δημιουργεί την ελάχιστη επιφάνεια από περιστροφή, μεταξύ όλων των επιπέδων καμπυλών, που οριοθετούνται ανάμεσα στους κύκλους με ακτίνες $y(-a) = b$ και $y(a) = b$. Δηλαδή η $y(x)$ πρέπει να ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό (2.14)

Παράδειγμα 2.2.4 (Η στρατηγική του ελάχιστου κόστους)

Ένας βιοτέχνης πρέπει να παράξει μια ποσότητα X ενός προϊόντος σε χρόνο T . Έστω $x = x(t)$ η ποσότητα παραγωγής του προϊόντος σε χρόνο t με κόστος παραγωγής $a+bx$ ανά μονάδα παραγωγής και κόστος αποθήκευσης γx ανά μονάδα χρόνου (όπου τα a, b, γ είναι θετικές σταθερές).

Ο όρος $\beta \dot{x}$ είναι για ένα απλό μοντέλο που φανερώνει την αύξηση του κόστους σε σχέση με την ταχύτερη παραγωγή. Το συνολικό κόστος C της τρεχούμενης παραγωγής εκφράζεται από το συναρτησιακό :

$$C[x] = \int_0^x (a + b \dot{x}) dx + \int_0^T \gamma x dt \quad (2.15)$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί:

$$C[x] = \int_0^T [(a + b \dot{x}) \dot{x} + \gamma x] dt \quad (2.16)$$

Θέλουμε να βρούμε την συνάρτηση $x(t)$ η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$ και $x(T) = X$, η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος C . Όπως θα διαπιστώσουμε από τη λύση παρακάτω, η καλύτερη στρατηγική δεν είναι ο ενιαίος ρυθμός.

2.3 Μορφές συναρτησοειδών

Οι τύποι των συναρτησοειδών που εμφανίζονται συνήθως στον κλασσικό λογισμό μεταβολών είναι εκείνοι που ορίζονται από παραστάσεις της μορφής

$$J(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx, y \in A \quad (2.17)$$

όπου με $L = L(x, y(x), y'(x))$ είναι μια δεδομένη συνάρτηση τριών μεταβλητών σε μια καλώς ορισμένη κλάση συναρτήσεων A . Στα παραπάνω παραδείγματα, τα συναρτησοειδή που περιγράφονται είναι της μορφής (2.17).

Η συνάρτηση L ονομάζεται Lagrangian προς τιμήν του Lagrange. Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματά μας, ουσιαστικά η θεωρητική μηχανική κατά Lagrange αποτελεί διατύπωση των προβλημάτων της κλασσικής μηχανικής σε μεταβολική μορφή.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση L πρέπει να είναι δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ως προς τα τρία ορίσματά της.

Για λόγους συντομίας, θα γράφουμε :

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx, y \in A \quad (2.18)$$

Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή για τις συναρτήσεις - ορίσματα της L είναι ο χρόνος, τότε γράφουμε:

$$J(y) = \int_a^b L(t, y, \dot{y}) dt, y \in A \quad (2.19)$$

όπου η τελεία πάνω από τη συνάρτηση y είναι η παράγωγος της ως προς τον χρόνο t .

2.4 Χώροι με νόρμα στην μελέτη των συναρτησοειδών

Από την μελέτη του Απειροστικού Λογισμού στο \mathbb{R} , έχουμε ότι η αναγκαία συνθήκη για να έχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ελάχιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 , είναι η $f'(x_0) = 0$ με:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.20)$$

Αφού στο Λογισμό των Μεταβολών θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα συναρτησοειδή, τότε μάλλον θα ισχύει μια ανάλογη συνθήκη και για τα συναρτησοειδή. Από τον ορισμό (2.20), της ύπαρξης του ορίου, γνωρίζουμε ότι αυτό το όριο ορίζεται με βάση την έννοια της απόστασης μεταξύ των πραγματικών αριθμών στον άξονα $x'x$ και στον άξονα $y'y$.

Άρα πρέπει να ορίσουμε στο σύνολο των συναρτήσεων μια έννοια μέτρησης της απόστασης μεταξύ των στοιχείων του. Δηλαδή πρέπει να θεωρήσουμε μια μετρική (αντίστοιχη με την μετρική που έχουμε ορίσει στο \mathbb{R} την $d(x,y) = |x - y|$) για τον προσδιορισμό της εγγύτητας μεταξύ των στοιχείων του συνόλου των συναρτήσεων.

Οπότε πρέπει να ορίσουμε την παράγωγο ενός συναρτησοειδούς J σε κάποιο στοιχείο y_0 του πεδίου ορισμού A , με την έννοια της εγγύτητας εντός του συνόλου A , έτσι ώστε να οριστεί η μέτρηση της απόστασης του $J(y_0)$ από την τιμή $J(y)$ για y κοντά στο y_0 . Οπότε ορίζουμε στο σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων A ένα υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου με νόρμα.

Ορίζουμε λοιπόν, ως διανυσματικό χώρο το σύνολο $C^2[a,b]$ με στοιχεία του τις συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $a \leq x \leq b$ και έχουν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο τους στο ίδιο διάστημα. Οι πράξεις ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο $C[a,b]$. Για την συνάρτηση $y \in C^2[a,b]$ λέμε ότι η y είναι μια συνάρτηση κλάσης C^2 επί του $[a,b]$.

Ομοίως ορίζεται και ο χώρος $C^n[a,b]$, δηλαδή το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων επί του διαστήματος $a \leq x \leq b$, των οποίων όλες οι παράγωγοι μέχρι τάξης n υπάρχουν και είναι συνεχείς.

Εφοδιάζουμε τα παραπάνω σύνολα συναρτήσεων με τη δομή του διανυσματικού χώρου και ορίζουμε σε αυτούς κατάλληλες νόρμες (οι οποίες ορίζουν το μέγεθος του y).

Η συνηθισμένη νόρμα που ορίζουμε στο \mathbb{R}^n , είναι η γνωστή μας ευκλείδεια νόρμα:

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \quad \text{με } y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

Στον ίδιο γραμμικό χώρο \mathbb{R}^n , μπορούμε να ορίσουμε και άλλες νόρμες, όπως την νόρμα :

$$\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\}$$

Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n με ορισμένη νόρμα, έχει την πολύ βασική ιδιότητα: “*δύο οποιεσδήποτε ορισμένες νόρμες $\|y\|_a$ και $\|y\|_b$ με τις οποίες μπορεί να εφοδιαστεί ο \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχουν σταθερές c_a, c_b έτσι ώστε :*

$$c_a \|y\|_a \leq \|y\|_b \leq c_b \|y\|_a .”$$

Σημαντικές νόρμες που θα χρησιμοποιήσουμε, θα αναφερθούν παρακάτω.

Ο χώρος $C[a,b]$ είναι ένας γραμμικός χώρος που τον εφοδιάζουμε με τη νόρμα:

$$\|y\|_M = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| \quad . \quad (2.21)$$

Η παραπάνω νόρμα λέγεται *νόρμα μεγίστου ή ισχυρή νόρμα*.

Στον ίδιο γραμμικό χώρο $C[a,b]$ ορίζεται ακόμα μια νόρμα:

$$\|y\|_1 = \int_a^b |y(x)| dx$$

Με τις δύο παραπάνω νόρμες μπορούμε να καθορίζουμε το «μέγεθος» μιας συνεχούς συνάρτησης $y(x)$ επί του $[a,b]$.

Στον γραμμικό χώρο $C^1[a,b]$ ορίζεται η νόρμα:

$$\|y\|_w = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)| \quad (2.22)$$

η οποία ονομάζεται *ασθενής νόρμα*. Η παραπάνω νόρμα είναι πολύ σημαντική στην μελέτη του λογισμού των μεταβολών. Η ίδια ακριβώς νόρμα ορίζεται και στον χώρο $C^n[a,b]$, με $n \geq 2$. Για παράδειγμα, η απόσταση μεταξύ δυο συναρτήσεων y_1 και y_2 του $C^1[a,b]$ ως προς την μετρική που ορίζει η ασθενής νόρμα είναι η:

$$\|y_1 - y_2\|_w = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_1'(x) - y_2'(x)| \quad (2.23)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, σε ένα ένα γραμμικό χώρο V εφοδιασμένος με νόρμα $\|\cdot\|$, ορίζεται ως απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων y_1 και y_2 του V :

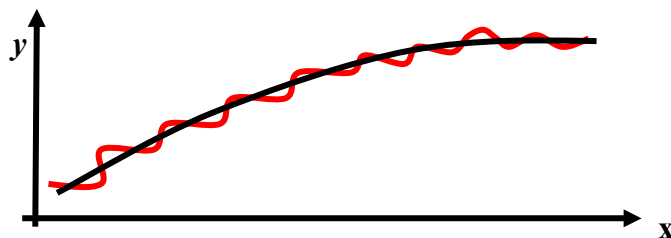
$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| \quad (2.24)$$

Έτσι, με την προηγούμενη μετρική (2.23) ο V γίνεται μετρικός χώρος.

Άρα όπως έχουμε ορίσει την έννοια της απόστασης σε ένα διανυσματικό χώρο V μέσω της μετρικής (2.24), μπορούμε να δηλώσουμε την εγγύτητα. Ορίζουμε λοιπόν ότι δυο στοιχεία ενός γραμμικού χώρου V με νόρμα $\|\cdot\|$ είναι κοντά το ένα στο άλλο, αν η απόσταση μεταξύ τους, όπως ορίζεται από την (2.24), είναι πολύ μικρή.

Έτσι δυο στοιχεία y_1 και y_2 του $C^1[a,b]$ είναι κοντά το ένα στο άλλο ως προς την ασθενή νόρμα (2.22), αν η ποσότητα $\|y_1 - y_2\|_w$ που ορίζεται από την (2.23) είναι μικρή. Δηλαδή οι y_1 και y_2 έχουν τιμές που δεν διαφέρουν πολύ, καθώς και παραγώγους που δεν διαφέρουν πολύ.

Όταν αναφερόμαστε σε νόρμες διανυσματικών χώρων συναρτήσεων θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί ως προς τις ιδιότητες που γνωρίζουμε από τον \mathbb{R}^n . Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα 2.4



(Σχήμα 2.4: Παράδειγμα δύο συναρτήσεων που είναι «κοντά» ως προς την ισχυρή νόρμα, αλλά δεν είναι «κοντά» ως προς την ασθενή νόρμα.)

μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι δυο συναρτήσεις y_1 και y_2 που απεικονίζονται δεν είναι κοντά ως προς την ασθενή νόρμα, είναι όμως κοντά ως προς την ισχυρή νόρμα, αφού η ποσότητα

$\|y_1 - y_2\| = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)|$ είναι μικρή. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η εγγύτητα ως προς την μια νόρμα δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά εγγύτητα και ως προς την άλλη νόρμα. Αυτή η παρατήρηση είναι μια θεμελιώδης διαφορά των διανυσματικών χώρων που ορίζονται από σύνολα συναρτήσεων και από τον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n .

Δυο διαφορετικές νόρμες σε ένα διανυσματικό χώρο συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητα ισοδύναμες, όπως στο \mathbb{R}^n . Η ισοδυναμία νορμών όπως αναφέραμε παραπάνω στο \mathbb{R}^n δηλώνει πρακτικά ότι στο \mathbb{R}^n , αν δυο διανύσματα είναι κοντά ως προς μια νόρμα τότε είναι κοντά και ως προς μια οποιαδήποτε άλλη νόρμα (με μια κατάλληλη «αλλαγή κλίμακας» που προσδιορίζεται από τις σταθερές c_a, c_b). Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα στους διανυσματικούς χώρους των συναρτήσεων.

2.5 Παράγωγοι συναρτησοειδών

Αφού ορίσαμε στα σύνολα των συναρτήσεων τη δομή του διανυσματικού χώρου με νόρμα θα γενικεύσουμε την έννοια της παραγωγισιμότητας των πραγματικών συναρτήσεων στην αντίστοιχη έννοια για τα συναρτησοειδή.

Έστω ότι το σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων A είναι υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου V με νόρμα $\|\cdot\|$ και ότι στο σύνολο A μπορεί να οριστεί η νόρμα του V με τις αλγεβρικές ιδιότητες του χώρου V . Τότε μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες των τοπικών μέγιστων και ελάχιστων για τα συναρτησοειδή.

Ορισμός 2.5.1

Έστω $J: A \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησοειδές επί του A , όπου $A \subseteq V$ και V είναι ένας γραμμικός χώρος με ορισμένη νόρμα $\|\cdot\|$. Θα λέμε ότι το J έχει τοπικό ελάχιστο στο $y_0 \in A$, αν ισχύει $J(y_0) \leq J(y)$ για κάθε $y \in A$ με $\|y - y_0\| < d$ για κάποιον θετικό αριθμό d .

Στην ειδική περίπτωση που το A είναι σύνολο συναρτήσεων και $A \subseteq C^1[a, b]$ εφοδιασμένο με την ασθενή νόρμα (3.22), θα λέμε ότι το J έχει ασθενές τοπικό ελάχιστο στο $y_0 \in A$. Αν η νόρμα επί του $C^1[a, b]$ είναι η ισχυρή νόρμα (2.21), τότε θα λέμε ότι έχουμε *ισχυρό τοπικό ελάχιστο*. Αναφέρουμε γενικά, ότι η νόρμα παίζει ρόλο μόνο στη θεωρία ικανών συνθηκών για τα ακρότατα.

Πριν ορίσουμε την έννοια της παραγώγου ενός συναρτησοειδούς, θα θυμηθούμε τον ορισμό του διαφορικού μιας συνάρτησης f στο x_0 . Υπενθυμίζουμε ότι η μεταβολή της f στο x_0 ορίζεται ως εξής:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (2.25)$$

Ο όρος $o(\Delta x)$ συμβολίζει όρους υψηλότερης τάξης ως προς Δx που έχουν την ιδιότητα:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

δηλαδή συγκλίνουν στο 0 ταχύτερα από το Δx .

Από την (2.25) ορίζουμε το διαφορικό της f στο x_0 :

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \quad (2.26)$$

Θα ορίσουμε την παράγωγο για συναρτησοειδή, γενικεύοντας τις (2.25) και (2.26).

Θεωρούμε συναρτησοειδές $J: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου A υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου V με νόρμα $\|\cdot\|$ και μια συνάρτηση $y_0 \in A$. Για να ορίσουμε τη μεταβολή του συναρτησοειδούς γύρω από τη y_0 , θεωρούμε πρώτα ένα στοιχείο $h \in V$ τέτοιο ώστε το $y_0 + \varepsilon h$ να ανήκει στο A για κάθε αρκετά μικρό πραγματικό αριθμό ε .

Η μεταβολή εh λέγεται μεταβολή της συνάρτησης y_0 και συμβολίζεται συχνά και ως δy_0 . Ορίζουμε την ολική μεταβολή του συναρτησοειδούς J που οφείλεται στην μεταβολή εh του y_0 ως:

$$\Delta J = J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το γραμμικό μέρος της μεταβολής ΔJ . Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$G(\varepsilon) = J(y_0 + \varepsilon h). \quad (2.27)$$

Η G είναι συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής ε , που ορίζεται με τον υπολογισμό του συναρτησοειδούς J πάνω στη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $y_0 + \varepsilon h$ με παράμετρο ε .

Υποθέτοντας ότι η G είναι επαρκώς διαφορίσιμη, μπορούμε να αναπτύξουμε την $G(\varepsilon)$ σύμφωνα με το θεώρημα Taylor και τότε θα έχουμε:

$$G(\varepsilon) = G(0) + G'(0)\varepsilon + \frac{G''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \dots \quad (2.28)$$

Επειδή $G(0) = J(y_0)$, από τις (2.27) και (2.28) θα έχουμε ότι:

$$\Delta J = J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0) = G(\varepsilon) - G(0) = G'(0)\varepsilon + \frac{G''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \dots$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι η γραμμική προσέγγιση της μεταβολής ΔJ ισούται με :

$$\Delta J = G'(0)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει φυσιολογικά ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 2.5.2

Έστω $J: A \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησοειδές επί του A με $A \subseteq V$ και V ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με νόρμα $\|\cdot\|$. Έστω $y_0 \in A$ και $h \in V$ τέτοια ώστε $y_0 + \varepsilon h \in A$ για κάθε αρκετά μικρό ε . Τότε η πρώτη μεταβολή (ή μεταβολή Gâteaux) του συναρτησοειδούς J στο y_0 κατά την διεύθυνση h ορίζεται ως εξής:

$$\delta J(y_0, h) = G'(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(y_0 + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.29)$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει στο \mathbb{R} αυτή η παράγωγος. Αν υπάρχει η (2.29) ως προς την κατεύθυνση h τότε λέμε ότι έχουμε αποδεκτή μεταβολή στο y_0 .

Από την (2.29) καταλήγουμε ότι το δJ αποτελεί γενίκευση της έννοιας της κατευθυνόμενης παραγώγου. Η ποσότητα $\varepsilon \delta J(y_0, h)$ είναι ο όρος χαμηλότερης τάξης ως προς ε της μεταβολής ΔJ . Ουσιαστικά υπάρχει μια αναλογία του δJ με την κατευθυνόμενη παράγωγο.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι προκειμένου να υπολογίσουμε την πρώτη μεταβολή $\delta J(y_0, h)$, υπολογίζουμε το J στο $y_0 + \varepsilon h$ όπου το h έχει επιλεγεί έτσι ώστε: $y_0 + \varepsilon h \in A$. Κατόπιν παίρνουμε την παράγωγο ως προς ε , την οποία υπολογίζουμε για $\varepsilon = 0$.

Κεφάλαιο 3

Η εξίσωση Euler – Lagrange

Το γενικό πρόβλημα στη θεωρία μεταβολών είναι η εύρεση μιας συνάρτησης $x_m(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί την ολοκληρωτική συνάρτηση:

$$J[x] = \int_a^b F(x, \dot{x}, t) dt \quad (3.1)$$

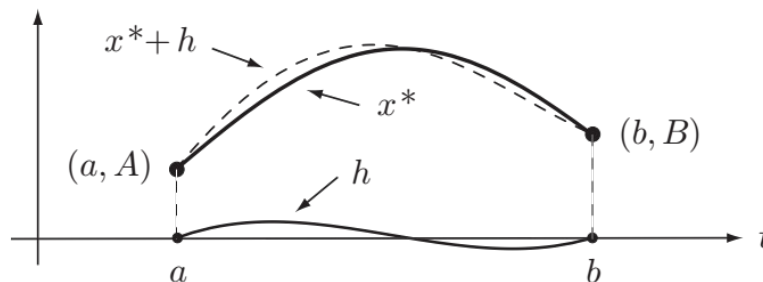
όπου F είναι συνάρτηση με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές. Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $x_m(t)$ ελαχιστοποιεί την $J[x]$ τότε θα ισχύει:

$$J[x] \geq J[x_m]$$

για όλες τις αποδεκτές συναρτήσεις $x(t)$. Δηλαδή η συνάρτηση x πρέπει να ικανοποιεί οποιεσδήποτε τελικές συνθήκες που περιγράφονται για $t = a$ και $t = b$. Θα υποθέτουμε πάντα ότι αυτές οι συνθήκες έχουν την μορφή $x(a) = A$ και $x(b) = B$, όπου τα A και B θα δίνονται. Μπορούμε να περιγράψουμε την $x(t)$ με τις $x_m(t)$ μαζί με μια μεταβαλλόμενη συνάρτηση $h(t)$ και έτσι η παραπάνω ανίσωση γράφεται:

$$J[x_m + h] \geq J[x_m]$$

για όλες τις δεκτές συναρτήσεις $h(t)$. Αφού η συνάρτηση x πρέπει να ικανοποιεί τις ίδιες τελικές συνθήκες με την x_m , για τις δεκτές συναρτήσεις h θα ισχύει $h(a) = h(b) = 0$. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε την διαταραχή κατά την $x_m = x^*$, από την συνάρτηση $h(t)$.



(Σχήμα 3.1 Η συνάρτηση $x_m = x^*$ που ελαχιστοποιεί την J , διαταράσσεται από τις αποδεκτές συναρτήσεις $h(t)$)

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα την θεωρία που ακολουθεί, θα την χωρίσουμε σε τρία ξεχωριστά βήματα.

1ο Βήμα (Η μεταβολή της J και η έννοια “στάσιμη”)

Στο πρώτο βήμα θα ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι η συνάρτηση $x(t)$ κάνει το συναρτησοειδές $J[x]$ στάσιμο.

Έστω η συνάρτηση $x_m(t)$ μια αποδεκτή συνάρτηση και $h(t)$ μια αποδεκτή μεταβολική συνάρτηση. Όταν η $h(t)$ προκαλεί μικρή μεταβολή, μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή στην $J[x]$ ως εξής:

όταν η t πάρει σταθερή τιμή, τότε οι συναρτήσεις x και \dot{x} είναι πραγματικοί αριθμοί και η μεταβολή στην F λόγω της h στην x είναι:

$$F(x_m + h, \dot{x}_m + \dot{h}, t) - F(x_m, \dot{x}_m, t) = h \frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t) + \dot{h} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t) + O(h^2 + \dot{h}^2),$$

όπου h και \dot{h} προκαλούν μικρές μεταβολές. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη της εξίσωσης με t να ανήκει στο διάστημα $[a, b]$, η μεταβολή στην J είναι:

$$J[x_m+h]-J[x_m]=\int_a^b [h \frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t)+\dot{h} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t)]dt+O(\|h\|^2) \quad (3.2)$$

για μικρές τιμές της $\|h\|$, όπου η νόρμα $\|h\| = \max_{a \leq t \leq b} |h(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |\dot{h}(t)|$.

(Όταν η νόρμα $\|h\|$ παίρνει μικρές τιμές, τότε και τα $|h(t)|$ και $|\dot{h}(t)|$ παίρνουν μικρές τιμές στο $[a, b]$).

Το δεύτερο μέρος του ολοκληρώματος μπορεί να γραφτεί:

$$\int_a^b [h \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t)]dt = [h \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t)] \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b h \frac{d}{dt} [\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t)]dt$$

και αφού το h είναι αποδεκτή μεταβλητή με $h(a) = h(b) = 0$, ο δεύτερος ολοκληρωτικός όρος της (3.2) μηδενίζεται και έτσι η (3.2) γράφεται:

$$J[x_m+h]-J[x_m]=\int_a^b [\frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t)-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t))]hdt+O(\|h\|^2) \quad (3.3)$$

Η (3.3) είναι η μεταβολή του J που προκαλείται από την αποδεκτή μεταβολή της h στην x , όταν η $\|h\|$ είναι μικρή.

Έτσι η μεταβολή της J είναι γραμμική προς την h με τον όρο $O(\|h\|)^2$. Για την περίπτωση που έχουμε συνηθισμένες συναρτήσεις, λέμε ότι η x_m κάνει την $J[x]$ στάσιμη αν ο γραμμικός όρος είναι μηδενικός, αφήνοντας μόνο τον όρο $O(\|h\|)^2$.

Ορισμός 3.1 (Στάσιμη J)

Η συνάρτηση $x_m(t)$ λέμε ότι κάνει το συναρτησοειδές $J[x]$ στάσιμο αν :

$$J[x_m+h]-J[x_m]=O(\|h\|^2) \quad (3.4)$$

όταν $\|h\|$ μικρή.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η συνθήκη για να κάνει η x_m την J στάσιμη, είναι ισοδύναμη με την συνθήκη :

$$\int_a^b [\frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t)-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t))]hdt=0 \quad (3.5)$$

για όλες τις αποδεκτές μεταβολές h .

2ο Βήμα (Οι συναρτήσεις x_m που ελαχιστοποιούν την J κάνουν την J στάσιμη)

Έστω ότι η $x_m(t)$ προκαλεί τοπικό ελάχιστο στην $J[x]$ με την έννοια ότι :

$$J[x_m+h] \geq J[x_m] \quad (3.6)$$

όταν $\|h\|$ είναι μικρό. Θα δείξουμε ότι η $x_m(t)$ κάνει την $J[x]$ στάσιμη.

Αν αντικαταστήσουμε την (3.3) στην (3.36), έχουμε:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t) \right) \right] h dt + O(\|h\|^2) \geq 0 \quad (3.7)$$

όταν $\|h\|$ είναι μικρό. Από την ανισότητα προκύπτει ότι ο περιεχόμενος όρος στο ολοκλήρωμα πρέπει να μηδενίζεται. Πράγματι στην παραπάνω ανισότητα αντικαθιστούμε όπου h το λh όπου λ θετική σταθερά και διαιρώντας με λ , έχουμε

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t) \right) \right] h dt + \lambda O(\|h\|^2) \geq 0$$

Για $\lambda \rightarrow 0$, έχουμε:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t) \right) \right] h dt \geq 0$$

για όλες τις αποδεκτές μεταβολές h . Όμως η παραπάνω ανισότητα πρέπει να αληθεύει και όταν αντικαταστήσουμε το h με $-h$, τότε η ανισότητα αληθεύει μόνο όταν το περιεχόμενο του ολοκληρώματος είναι μηδενικό.

Έτσι η ανισότητα (3.3) γράφεται :

$$J[x_m + h] - J[x_m] = O(\|h\|^2) \quad (3.8)$$

για μικρά $\|h\|$. Αυτό σημαίνει ότι η x_m κάνει την $J[x]$ στάσιμη. Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε και όταν η x_m προκαλεί τοπικό μέγιστο στο $J[x]$.

Συμπέρασμα:

Αν το συναρτησοειδές $J[x]$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στην συνάρτηση $x_m(t)$, τότε η $x_m(t)$ κάνει την $J[x]$ στάσιμη. Το ίδιο συμβαίνει και για την περίπτωση που η $J[x]$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

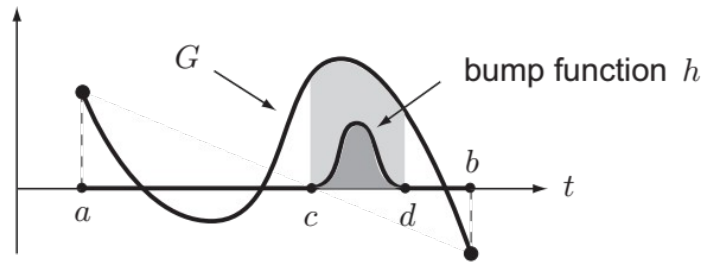
3ο Βήμα (Η εξίσωση Euler - Lagrange)

Θα αναφερθούμε τώρα στην διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση $x_m(t)$ που κάνει την $J[x]$ στάσιμη. (Είναι το αντίστοιχο για την απλή περίπτωση, όπου πρέπει $f'(x) = 0$).

Για να βρούμε το ισοδύναμο στην περίπτωση των συναρτησοειδών, επιστρέφουμε στην εξίσωση (3.5). Στο ολοκλήρωμα, η παράσταση μέσα στις αγκύλες φαίνεται λίγο περίπλοκη, αν και είναι μια συνάρτηση του t , την οποία και θα την ονομάσουμε $G(t)$. Οπότε η (3.5) γράφεται:

$$\int_a^b G(t)h(t) dt = 0$$

για όλες τις αποδεκτές μεταβλητές συναρτήσεις h . Προφανώς η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση είναι η μηδενική ($G(t) = 0$ για $a < t < b$).



(Σχήμα 3.2: $G(t) > 0$ για $t \in [c, d]$. Για την h που ορίζεται στο ίδιο διάστημα, το ολοκλήρωμα του $G \times h$ πρέπει να είναι θετικό.

Απόδειξη

Πράγματι έστω ότι η $G(t)$ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε θα υπάρχει κάποιο διάστημα (c,d) υποσύνολο του (a,b) όπου η $G(t) \neq 0$ και έστω ότι θα είναι $G(t) > 0$. Για $h(t)$ μια μεταβλητή συνάρτηση (όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2) η οποία είναι μηδενική έξω από το (c,d) και θετική μέσα . Για μια τέτοια συνάρτηση θα ισχύει :

$$\int_a^b G(t)h(t) dt = \int_c^d G(t)h(t) dt > 0 .$$

Άτοπο .

Άρα $G(t) = 0$ για κάθε $t \in (a, b)$.

Δείξαμε λοιπόν ότι :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_m, \dot{x}_m, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(x_m, \dot{x}_m, t) \right) = 0 \quad \text{για } a < t < b$$

που θα λέμε ότι η συνάρτηση $x_m(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση **Euler – Lagrange**:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και αντίστροφα. Η εξίσωση **Euler – Lagrange** είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης που γενικά είναι μη γραμμική. Παρέχει μια αναγκαία συνθήκη για τοπικό ακρότατο και είναι ανάλογη της συνθήκης $f'(x) = 0$ του διαφορικού λογισμού. Συνεπώς οι λύσεις της δεν είναι πάντα τοπικά ακρότατα.

Οπότε συμπερασματικά έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3.1 (εξίσωση Euler – Lagrange)

Αν η συνάρτηση x_m κάνει το συναρτησοειδές:

$$J[x] = \int_a^b F(x, \dot{x}, t) dt$$

στάσιμο, τότε η συνάρτηση x_m , ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση **Euler – Lagrange** :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Ισχύει και το αντίστροφο.

Είναι πρακτικό να ονομάσουμε τις λύσεις της Euler – Lagrange .

Ορισμός 3.1

Κάθε λύση της Euler – Lagrange την ονομάζουμε κρίσιμη συνάρτηση του συναρτησοειδές $J[x]$.

Οπότε:

- Αν η συνάρτηση x_m ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί το συναρτησοειδές $J[x]$, τότε η x_m κάνει την J στάσιμη και τότε η x_m είναι κρίσιμη.
- Αν η x_m είναι κρίσιμη συνάρτηση του J , τότε η x_m κάνει την J στάσιμη, αλλά δεν σημαίνει ότι ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί την J .

Παράδειγμα 3.1

Να βρείτε την κρίσιμη συνάρτηση του συναρτησοειδές :

$$J[x] = \int_1^2 \frac{\dot{x}^2}{4t} dt$$

με αρχικές συνθήκες $x(1) = 5$ και $x(2) = 11$.

Λύση

Η κρίσιμη συνάρτηση θα είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης E-L, δηλαδή της $F = \frac{\dot{x}^2}{4t}$. Άρα

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{2t}$$

και η εξίσωση E-L παίρνει την μορφή

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{2t} \right) - 0 = 0$$

και με ολοκλήρωση θα έχουμε

$$x = ct^2 + d$$

όπου τα c, d είναι οι σταθερές της ολοκλήρωσης.

Οι κρίσιμες συναρτήσεις θα είναι λοιπόν μια οικογένεια παραβολών στο σύστημα (x, t) . Οι δεκτές κρίσιμες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, είναι για $c = 2$ και $d = 3$.

Οπότε η αποδεκτή κρίσιμη συνάρτηση θα είναι :

$$x_m(t) = 2t^2 + 3.$$

Θα εξετάσουμε αν η παραπάνω είναι ακρότατο για την J.

Ξέρουμε ότι η $x_m(t) = 2t^2 + 3$ κάνει την J στάσιμη, αλλά δεν γνωρίζουμε αν αποτελεί ακρότατο. Με αυτή την θεωρία που περιγράψαμε δεν μπορούμε γενικά να αποφασίσουμε τι ακριβώς συμβαίνει. Όμως σε μερικές περιπτώσεις (όπως αυτή που εξετάζουμε εδώ) μπορούμε να το βρούμε.

Έστω h μια οποιαδήποτε μεταβολική συνάρτηση (όχι απαραίτητα μικρή), τότε:

$$\begin{aligned} J[x_m+h] - J[x_m] &= \int_1^2 \frac{(4t+\dot{h})^2}{4t} dt - \int_1^2 \frac{(4t)^2}{4t} dt = \int_1^2 (4t+2\dot{h}+\frac{\dot{h}^2}{4t}) dt - \int_1^2 4t dt = 2[h]_{t=1}^{t=2} + \int_1^2 \left(\frac{\dot{h}^2}{4t}\right) dt = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{\dot{h}^2}{4t}\right) dt \end{aligned}$$

όπου h είναι κρίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $h(1) = h(2) = 0$

Οπότε

$$J[x_m+h] - J[x_m] = \int_1^2 \left(\frac{\dot{h}^2}{4t}\right) dt \geq 0 .$$

αφού το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης είναι θετικό. Άρα η x_m μας δίνει ολικό ελάχιστο για την J. Το ολικό ελάχιστο θα έχει τιμή $J[2t^2 + 3] = 6$.

3.1 Ένα χρήσιμο ολοκλήρωμα της εξίσωσης Euler – Lagrange

Δεν είναι όλα τα παραδείγματα τόσο εύκολα όσο το παραπάνω παράδειγμα και η εξίσωση E-L έχει περίπλοκη δομή. Για την περίπτωση όμως που η συνάρτηση $F(x, \dot{x}, t)$ δεν έχει εξάρτηση με το t (δηλαδή είναι της μορφής $F = F(x, \dot{x})$). Η δευτέρου βαθμού διαφορική εξίσωση E-L μπορεί να ολοκληρωθεί μια φορά και έτσι να έχουμε μια πρώτου βαθμού ODE. Αυτό μας δίνει μεγάλη ευκολία στην επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων.

Ας δούμε τι συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση. Έστω ότι $F = F(x, \dot{x})$, τότε από τον κανόνα του γινομένου και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε :

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - F \right) = \ddot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\ddot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \dot{x} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \right). \quad (3.9)$$

Οπότε, αν η συνάρτηση x ικανοποιεί την εξίσωση E-L, θα ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

τότε θα έχουμε την πρώτου βαθμού εξίσωση : $F - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c$ (σταθερά) (3.10)

για κάποια κατάλληλη επιλογή του c. Αντιστρόφως αν η συνάρτηση x είναι μια οποιαδήποτε μη σταθερή λύση της (3.1) τότε θα ικανοποιεί την εξίσωση E-L .

Να αναφέρουμε ότι η εξίσωση (3.10) έχει πάντα σταθερές λύσεις, αλλά αυτές οι σταθερές λύσεις σπάνια ικανοποιούν την αντίστοιχη εξίσωση E-L. Συμβαίνουν γιατί ο όρος \dot{x} εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της (3.10). Αν παραβλέψουμε ότι οι σταθερές λύσεις δεν επαληθεύουν πάντα

την E-L, τότε θα έχουμε λανθασμένα αποτελέσματα. Για αυτό και πρέπει να προσέχουμε τις σταθερές λύσεις της (3.10) να ικανοποιούν την εξίσωση E-L ή να τις ελέγχουμε απευθείας στην αρχική.

Οπότε έχουμε το εξής συμπέρασμα:

Αν $F = F(x, \dot{x})$, τότε κάθε συνάρτηση x που επαληθεύει την εξίσωση E-L:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

ικανοποιεί και την πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση:

$$F - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c \text{ (σταθερά)} \quad (3.11)$$

για κάποιες τιμές της σταθεράς c . Αντιστρόφως κάθε μη σταθερή λύση της εξίσωσης (3.11) επαληθεύει την εξίσωση E-L. Σταθερές λύσεις της (3.11) μπορεί να ικανοποιούν την εξίσωση E-L, μπορεί και όχι.

Παράδειγμα 3.1.1

Να βρεθεί η κρίσιμη συνάρτηση του συναρτησοειδές :

$$J[x] = \int_0^7 \frac{(1+\dot{x}^2)^{1/2}}{x} dt$$

με $x > 0$ και τελικές συνθήκες $x(0) = 4$ και $x(7) = 3$. (Ο περιορισμός $x > 0$ μας εξασφαλίζει ότι το ολοκλήρωμα δεν γίνεται γενικευμένο).

Λύση

Εξ ορισμού, οι κρίσιμες συναρτήσεις είναι λύσεις της εξίσωσης E-L και αφού το t δεν εμφανίζεται αυτόνομο στον τύπο του περιεχομένου του ολοκληρώματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.11). Αντικαθιστώντας όπου $F = \frac{(1+\dot{x}^2)^{1/2}}{x}$ κάνοντας πράξεις, έχουμε :

$$x(1+\dot{x}^2)^{1/2} = c$$

όπου c μια σταθερά και αφού $x > 0$ τότε και $c > 0$. Λύνουμε την παραπάνω ως προς:

$$\dot{x} = \pm \frac{(c^2 - x^2)^{1/2}}{x}$$

που είναι ένα ζευγάρι συνήθων διαφορικών εξισώσεων, οι λύσεις των οποίων είναι:

$$\pm (c^2 - x^2)^{1/2} = t + D$$

όπου D είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης. Άρα οι κρίσιμες συναρτήσεις της J είναι η οικογένεια των κύκλων :

$$x^2 + (t+D)^2 = c^2$$

στο (t,x) σύστημα. Αντικαθιστώντας τις τελικές συνθήκες, βρίσκουμε $c = 5$ και $D = -3$. Οι μόνες αποδεκτές κρίσιμη συνάρτηση είναι το τόξο του κύκλου με κέντρο $K(3,0)$ και ακτίνας $R = 5$, δηλαδή :

$$x_m = +\sqrt{16+6t-t^2}, (0 \leq t \leq 7)$$

Αφού υπάρχει μόνο μια κρίσιμη συνάρτηση ως λύση, συμπεραίνουμε ότι, αν γνωρίζαμε ότι υπάρχει συνάρτηση που ελαχιστοποιεί (μεγιστοποιεί), τότε θα έπρεπε να είναι αυτή που βρήκαμε. Όμως δεν γνωρίζουμε αν η λύση είναι το τοπικό ελάχιστο (μέγιστο) της J ή τίποτα από τα δύο.

Παράδειγμα 3.1.2 (Το βραχυστόχρονο πρόβλημα)

Έστω δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία συνδέονται με μια ομαλή γραμμή σε ορθοκανονικό σύστημα. Ένα σωματίδιο αφήνεται από ηρεμία στο A και “γλιστράει” στο B , με ομοιόμορφη επιτάχυνση βαρύτητας. Ποια πρέπει να είναι η μορφή της καμπύλης γραμμής, ώστε να φτάσει στο B σε ελάχιστο χρόνο.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η γραμμή βρίσκεται σε ένα (x,z) σύστημα, με Oz όπου το A ταυτίζεται με το O και $B(a,b)$. Έστω ότι το σχήμα της γραμμής δίνεται από την καμπύλη $z = z(x)$. Τότε αφού το σωματίδιο αφήνεται από ηρεμία να πέσει, όταν $z = 0$, η αρχή της διατήρησης της ενέργειας μας δίνει ότι η ταχύτητα του σωματιδίου στην γραμμή z είναι $(2gz)^{1/2}$. Ο χρόνος T που χρειάζεται το σωματίδιο για να φτάσει στο B είναι:

$$T[z] = (2g)^{-1/2} \int_0^a \frac{(1+\dot{z}^2)^{1/2}}{z^{1/2}} dx \quad (3.12)$$

όπου $\dot{z} = dz/dx$. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η συνάρτηση $z(x)$, που ικανοποιεί τις τελικές συνθήκες $z(0) = 0$, $z(a) = b$, που ελαχιστοποιεί τον χρόνο καθόδου.

Αν x_m ελαχιστοποιεί το T , τότε πρέπει να κάνει το συναρτησοειδές T στάσιμο και έτσι να είναι κρίσιμη συνάρτηση του T . Αφού το x δεν εμφανίζεται αυτόνομο στο περιεχόμενο του ολοκληρώματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.11) της εξίσωσης E-L για :

$$F = \frac{(1+\dot{z}^2)^{1/2}}{z^{1/2}}$$

και κάνοντας τις πράξεις έχουμε :

$$z(1+\dot{z}^2) = 2c^2,$$

όπου c μια θετική σταθερά. (θα γράψουμε την $c = 2C$ για μετέπειτα ευκολία).

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται στην μορφή:

$$\dot{z} = \pm \left(\frac{2C-z}{z} \right)^{1/2},$$

που είναι ένα ζευγάρι συνήθων διαφορικών εξισώσεων. (Η σταθερή λύση $z = 2C$ δεν είναι κρίσιμη συνάρτηση του T). Με ολοκλήρωση έχουμε:

$$x = \pm \int \left(\frac{z}{2C-z} \right)^{1/2} dz .$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, αντικαθιστούμε με $z = C(1 - \cos\psi)$, όπου τότε έχουμε:

$$x = \pm C \int \left(\frac{1 - \cos\psi}{1 + \cos\psi} \right)^{1/2} \sin\psi d\psi = \pm C \int 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi d\psi = \pm C(\psi - \sin\psi) + D$$

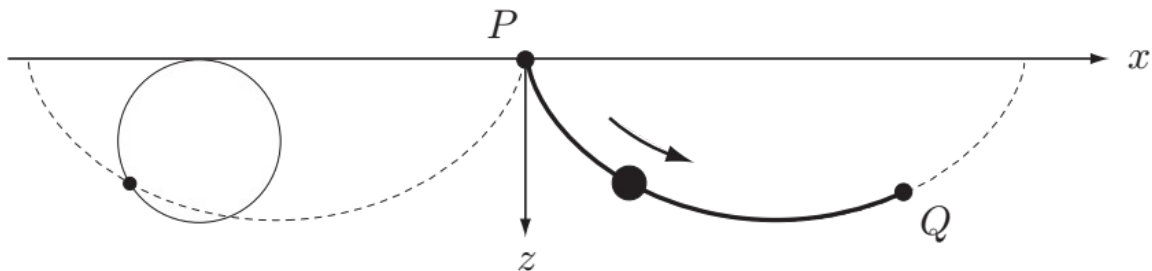
όπου D είναι η σταθερά του ολοκληρώματος. Άρα οι κρίσιμες συναρτήσεις του J έχουν την παραμετρική μορφή:

$$x = \pm C(\psi - \sin\psi) + D \quad \text{και} \quad z = C(1 - \cos\psi) ,$$

όπου ψ παράμετρος. Μιας και οι δύο επιλογές του πρόσημου αντιστοιχούν μόνο στην αλλαγή του πρόσημου της μεταβλητής, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να αποδεχτούμε μόνο το θετικό πρόσημο. Αυτές οι λύσεις είναι μια οικογένεια κυκλοειδών με ακτίνα R και μετατόπιση D στην κατεύθυνση του x .

Μας μένει να βρούμε τις αποδεκτές κρίσιμες συναρτήσεις. Για $z = 0$ όταν $x = 0$ έχουμε $D = 0$. Η ακτίνα C του κυκλοειδούς υπολογίζεται από την συνθήκη $z = b$ όταν $x = a$. Γενικά, το C πρέπει να υπολογιστεί αριθμητικά, αν και σε ιδιαίτερες περιπτώσεις, το C πρέπει να υπολογίζεται αναλυτικά.

Μια τυπική περίπτωση φαίνεται στο σχήμα 3.3 που ακολουθεί.



(Σχήμα 3.3: Η καμπύλη που ελαχιστοποιεί την $T[z]$ για τα σημεία P και Q είναι το τόξο κυκλοειδούς)

Αφού υπάρχει μόνο μια αποδεκτή κρίσιμη συνάρτηση, πρέπει να είναι και μία η ελάχιστη καμπύλη για το $T[z]$. Από την πλευρά της φυσικής καταλαβαίνουμε την μοναδική λύση, αν και πρέπει να το δείξουμε και μέσω των μαθηματικών.

3.2 Αρχές θεωρίας μεταβολών

Οι νόμοι της φυσικής συχνά μορφοποιούνται με μεταβλητές ή πεδία μέσα σε διαφορικές εξισώσεις. Οι γενικευμένες μεταβλητές $q(t)$ ενός μηχανικού συστήματος, επαληθεύουν (συχνά ως σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων) τις εξισώσεις Lagrange, τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία τις εξισώσεις Maxwell, οι κυματικές συναρτήσεις της κβαντικής μηχανικής τις εξισώσεις

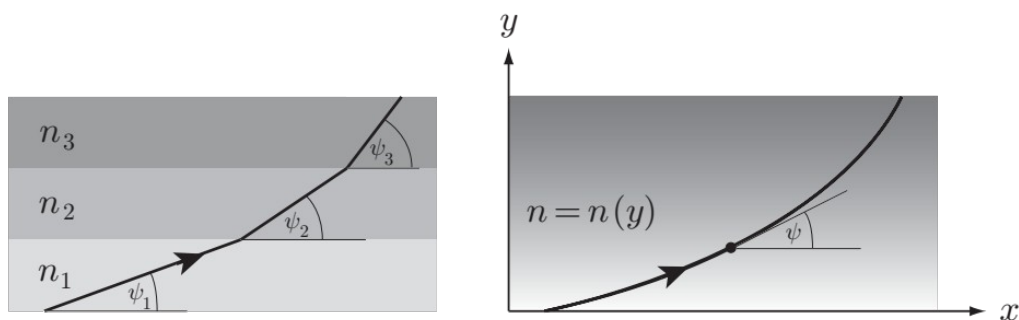
Schrodinger, κ.ο.κ. Υπάρχει όμως ένας εναλλακτικός τρόπος για να εκφράσουμε τους παραπάνω νόμους, με **αρχές μεταβολών**. Με την μεταβολική προσέγγιση, η πραγματική συμπεριφορά των φυσικών φαινομένων ξεχωρίζει από το γεγονός ότι κάνουν ένα συγκεκριμένο συναρτησοειδές, στάσιμο. Κατά κάποιο τρόπο, όλη η φυσική περιγράφεται μέσα από τα ολοκληρώματα αυτών των συναρτησοειδών.

Το γεγονός ότι εκφράζουμε τους νόμους της φυσικής μέσα από αυτές τις μεταβολικές φόρμες δεν σημαίνει αυτόματα ότι κάνουμε πιο εύκολη την επίλυσή τους. Αρκετά προβλήματα θα συνεχίσουμε να τα λύνουμε μέσα από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων. Όμως μέσα από τη θεωρία των μεταβολών μπορούμε και επεκτείνουμε την υπάρχουσα θεωρία σε νέες φόρμες. Για παράδειγμα, η θεωρία πεδίων μπορεί να εξελιχθεί στη γλώσσα της κλασικής μηχανικής χρησιμοποιώντας την θεωρία μεταβολών.

3.2.1 Αρχή του Fermat

Οι παραπάνω ιδέες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα κοινό παράδειγμα με το οποίο είμαστε εξοικειωμένοι: τις διαδρομές που ακολουθεί μια ακτίνα φωτός στην γεωμετρική οπτική.

Όταν ταξιδεύουν οι ακτίνες φωτός μέσα σε ένα ομοιογενές υλικό, τότε ταξιδεύουν σε ευθεία γραμμή. Όμως όταν ταξιδεύουν μέσα σε διαφορετικά ανομοιογενή υλικά, τότε αλλάζουν πορεία και έχουμε το φαινόμενο της ανάκλασης ή το φαινόμενο της διάθλασης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (3.4).



(Σχήμα 3.4 : Όταν μια ακτίνα φωτός διέρχεται μεταξύ διαφορετικών υλικών. Στην δεξιά περίπτωση του ίδιου υλικού ο νόμος του Snell γράφεται $n \cos\psi = \text{σταθερά}$.)

Αυτή η αλλαγή κατεύθυνσης ακολουθεί τους νόμους του Snell της διάθλασης :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

όπου n_1, n_2 είναι οι δείκτες διάθλασης του κάθε υλικού και θ_1, θ_2 οι γωνίες που σχηματίζει η ακτίνα φωτός με τα υλικά. Για την περίπτωση της γωνία ψ στο σχήμα (3.8) οι νόμοι του Snell παίρνουν την μορφή:

$$n_1 \cos\psi_1 = n_2 \cos\psi_2 = n_3 \cos\psi_3.$$

Στην πιο γενική περίπτωση, σε ένα ανομοιογενές μέσο όπου το n διαφέρει συνεχώς προς την κατεύθυνση y , περιμένουμε καμπύλες ακτίνες με τον νόμο του Snell να γράφεται στη μορφή:

$$n \cos\psi = \text{σταθερά}$$

Η μεταβολική αρχή που συνδέεται με αυτούς τους κανόνες προτάθηκε από τον Fermat το 1657 και είναι γνωστή ως **αρχή του Fermat**. Η αρχή αυτή αναφέρει:

“Από όλες τις πιθανές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει μια ακτίνα φωτός μεταξύ δύο σταθερών σημείων, η πραγματική διαδρομή που πρόκειται να ακολουθήσει η ακτίνα φωτός είναι εκείνη που ελαχιστοποιεί τον χρόνο της διαδρομής.”

Ο Fermat έδειξε ότι η αρχή του περιγράφει την αλήθεια των νόμων της ανάκλασης και διάθλασης, όπως και προβλέπει την ευθεία διαδρομή που κάνει το φως μέσα σε ομοιογενές υλικό. Η αρχική αρχή που περιέγραψε ο Fermat ενώ είναι κομψή, απλή και γενικά περιγράφει τις πραγματικές δυνατές διαδρομές που ακολουθεί μια ακτίνα φωτός στην φύση, δυστυχώς δεν είναι απόλυτα σωστή. Η σωστή διατύπωσή τους είναι η εξής:

“Η πραγματική διαδρομή που ακολουθεί μια ακτίνα φωτός μεταξύ δύο σταθερών σημείων κάνει τον χρόνο της διαδρομής στάσιμο”.

Η διαφορά της γνήσιας και της σωστής διατύπωσης της αρχής του Fermat είναι ότι η διαδρομή που ακολουθεί το φως δεν ελαχιστοποιεί απαραίτητα τον χρόνο της διαδρομής, αλλά κάνει το συναρτησοειδές του χρόνου στάσιμο. Στην πράξη, ο χρόνος είναι συνήθως ελάχιστος, αλλά όχι σε μερικές ειδικές περιπτώσεις.

Αν θεωρήσουμε την ταχύτητα του φωτός σε κενό χώρο ως c , τότε η ταχύτητα του φωτός σε ένα σημείο μέσα σε υλικό όπου η σταθερά ανάκλασης είναι n , είναι c/n . Μια υποθετική διαδρομή P σε ένα υλικό θα έχει ως εξίσωση χρόνου το ολοκλήρωμα:

$$T[P] = c^{-1} \int_P n ds \quad (3.13)$$

Αφού οι διαδρομές που κάνουν το T στάσιμο είναι οι κρίσιμες συναρτήσεις του T , μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την αρχή του Fermat, πιο κομψά ως εξής:

“Οι διαδρομές που ακολουθεί το φως μέσα σε κάποιο υλικό περιγράφονται από τις κρίσιμες συναρτήσεις του συναρτησοειδούς T για αυτό το υλικό”.

Έστω n ο δείκτης διάθλασης ενός υλικού ο οποίος εξαρτάται μόνο ως προς το y (όπως φαίνεται στο σχήμα 13.8) και έστω ακτίνες φωτός στο επίπεδο (x,y) . Τότε η ακτίνα γραμμή που συνδέει τα σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(x_1, y_1)$ πρέπει να είναι η κρίσιμη συνάρτηση του συναρτησοειδούς του χρόνου T , το οποίο στις καρτεσιανές συντεταγμένες έχει την μορφή:

$$T[y] = c^{-1} \int_{x_0}^{x_1} n(1+\dot{y}^2)^{1/2} dx \quad (3.14)$$

όπου $\dot{y} = dy/dx$ και $n = n(y)$. Αφού το n δεν εξαρτάται από το x , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική μορφή (3.40) της εξίσωσης E-L, η οποία μας δίνει:

$$\frac{n}{(1+\dot{y}^2)^{1/2}} = \text{σταθερά} \quad .$$

Αν αντικαταστήσουμε όπου $\dot{y} = \tan \psi$, με ψ την γωνία ανάμεσα στην εφαπτομένη στην ακτίνα και στον άξονα x (σχήμα 3.4), τότε η εξίσωση γράφεται:

$$n \cos \psi = \text{σταθερά}$$

όπως θα βρίσκαμε από τον νόμο του Snell για την ίδια περίπτωση.

Η μεταβολική προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και όταν επεκτείνουμε τη θεωρία μας σε μη ομοιογενή υλικά, όπου η σωστή χρήση του νόμου του Snell είναι δύσκολο να εφαρμοστεί. Η αρχή του Fermat συνεχίζει να ισχύει ενώ αν ξεκινήσουμε από το νόμο του Snell μάλλον θα καταλήξουμε σε λάθος φόρμουλα.

3.2.2 Αρχή του Hamilton

Η αρχή του Hamilton είναι η μεταβολική αρχή που είναι ισοδύναμη με την εξίσωση του Lagrange για την κίνηση. Η σύγκριση από γεωμετρική οπτική είναι ότι η αρχή του Hamilton ανταποκρίνεται στην εξίσωση του Lagrange όπως η αρχή του Fermat ανταποκρίνεται στο νόμο του Snell. Θα εξετάσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση των συστημάτων με ένα βαθμό ελευθερίας.

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας

Έστω ένα Lagrangian σύστημα με μία γενικευμένη μεταβλητή q και μια Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$. Τότε η τροχιά q_m είναι μία πραγματική κίνηση του συστήματος, αν και μόνο αν, ικανοποιεί την εξίσωση Lagrange

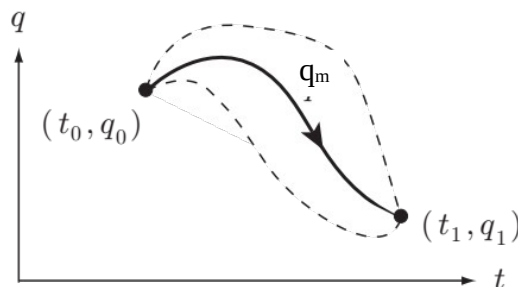
$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.15)$$

Όπως παρατηρούμε η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση E-L η οποία θα εμφανιστεί κάνοντας το συναρτησοειδές $S[q]$ στάσιμο, όπου :

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.16)$$

Το βαθμωτό μέγεθος S το ονομάζουμε **κίνηση** και το συναρτησοειδές $S[q]$ το ονομάζουμε **συναρτησοειδή δράση** και ανταποκρίνεται στην Lagrangian L (για το διάστημα $[t_0, t_1]$).

Από αυτή την απλή παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι ότι η q_m δείχνει την πραγματική κίνηση του συστήματος, αν και μόνο αν, κάνει την κίνηση $S[q]$ στάσιμη (όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5).



(Σχήμα 3.5: Αρχή του Hamilton Από όλες τις κινητικές τροχιές ενός συστήματος που συνδέει τις δύο θέσεις της μεταβλητής q με $q = q_1$ και $q = q_2$ στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$, η πραγματική κίνηση q_m κάνει τη συναρτησοειδή δράση στάσιμη.)

Αυτή είναι η **αρχή του Hamilton** για τα μηχανικά συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας.

Παράδειγμα 3.2.1

Ένας συγκεκριμένος ελκυστής με γενικευμένη μεταβλητή q έχει την Lagrangian εξίσωση:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2 .$$

Να αποδείξετε ότι η $q_m = \sin t$ είναι η κίνηση του ελκυστή και να δείξετε ότι κάνει την συναρτησοειδή δράση $S[q]$ στάσιμη σε κάθε διάστημα $[0, \tau]$.

Λύση

Η εξίσωση Lagrange που σχετίζεται με την Lagrangian $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2$ είναι:

$$\ddot{q} + q = 0$$

Αφού η q_m ικανοποιεί την εξίσωση, είναι και η κίνηση του ελκυστή. Έστω $h(t)$ μια αποδεκτή μεταβλητή. Τότε

$$\begin{aligned} S[q_m + h] - S[q_m] &= \frac{1}{2} \int_0^\tau [(\cos t + \dot{h})^2 - (\sin t + h)^2 - \cos^2 t + \sin^2 t] dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau (2 \dot{h} \cos t + \dot{h}^2 - 2 h \sin t - h^2) dt \\ &= [h \cos t]_0^\tau + \frac{1}{2} \int_0^\tau (\dot{h}^2 - h^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau (\dot{h}^2 - h^2) dt \end{aligned}$$

αφού $h(0) = h(\tau) = 0$. Οπότε θα έχουμε:

$$S[q_m + h] - S[q_m] \leq \frac{1}{2} \tau (\max_{0 \leq t \leq \tau} |h(t)|^2 + \max_{0 \leq t \leq \tau} |\dot{h}(t)|^2) \leq \frac{1}{2} \tau (\max_{0 \leq t \leq \tau} |h(t)| + \max_{0 \leq t \leq \tau} |\dot{h}(t)|)^2 = \frac{1}{2} \tau \|h\|^2 .$$

Δηλαδή

$$S[q_m + h] - S[q_m] = O(\|h\|^2) ,$$

το οποίο εξ ορισμού σημαίνει ότι η q_m κάνει το συναρτησοειδές δράσης $S[q]$ στάσιμο. (Αυτό θυμίζουμε ότι δεν σημαίνει ότι ελαχιστοποιεί το $S[q]$.)

3.2.3 Συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας

Η αρχή του Hamilton μπορεί να επεκταθεί σε συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτή την πιο γενική περίπτωση, το σύστημα έχει γενικευμένες μεταβλητές της μορφής $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ και η Lagrangian έχει τη μορφή $L = L(q, \dot{q}, t)$ και οι εξισώσεις Lagrange της κίνησης έχουν n όμοιες εξισώσεις της μορφής

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad \text{για} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (3.17)$$

Το συναρτησοειδές δράσης είναι :

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.18)$$

το οποίο και αυτό το ονομάζουμε συναρτησοειδές δράσης για την Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$.

Το σύμβολο διάνυσμα $S[q] = S[q_1, q_2, \dots, q_n]$ μας δίνει n σε πλήθος συναρτήσεις που μεταβάλλονται με n σε πλήθος ανεξάρτητες μεταβλητές h_1, h_2, \dots, h_n αντιστοίχως. Σε διανυσματική γραφή με h δηλώνουμε το $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Η θεωρία που έχουμε αναπτύξει δεν καλύπτει την περίπτωση που το συναρτησοειδές έχει περισσότερες από μία μεταβλητές, αλλά μπορεί να επεκταθεί και σε αυτή την περίπτωση. Παρακάτω θα δείξουμε πως γίνεται αυτή η επέκταση.

Έστω η γενική περίπτωση

$$J[x] = \int_a^b F(x, \dot{x}, t) dt$$

όπου $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ τα διανύσματα συναρτήσεις. Κάνοντας τις ίδιες σκέψεις με πριν, η μεταβολή στο J προκαλείται από τις αποδεκτές μεταβλητές h στο x και έχουν την μορφή:

$$J[x_m + h] - J[x_m] = \sum_{j=1}^n \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_m, \dot{x}_m, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(x_m, \dot{x}_m, t) \right) \right] h_j dt + O(\|h\|^2)$$

όπου $\|h\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + \dots + \|h_n\|^2$. Αυτή η μεταβολή είναι γραμμική στο h με όρο σφάλματος της τάξης $\|h\|^2$. Όπως πριν, λέμε ότι η συνάρτηση x_m κάνει το $J[x]$ στάσιμο αν ο γραμμικός όρος είναι μηδενικός, αφήνοντας μόνο τον σφαλματικό όρο.

Ορισμός 3.2.1

Η διανυσματική συνάρτηση x_m λέμε ότι κάνει το συναρτησοειδές $J[x]$ στάσιμο, αν

$$J[x_m + h] - J[x_m] = O(\|h\|^2)$$

όπου το h είναι μικρό.

Αν η x_m κάνει το συναρτησοειδές $J[x]$ στάσιμο, τότε:

$$\sum_{j=1}^n \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_m, \dot{x}_m, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}(x_m, \dot{x}_m, t) \right) \right] h_j dt = 0$$

Τα παραπάνω οδηγούν στο επόμενο συμπέρασμα:

Πρόταση 3.2.1 Εξίσωση Euler – Lagrange με πολλές μεταβλητές

Η διανυσματική συνάρτηση x_m κάνει το ολοκληρωτικό συναρτησοειδές:

$$J[x] = \int_a^b F(x, \dot{x}, t) dt$$

στάσιμο, αν και μόνο αν, η συνάρτηση x_m ικανοποιεί ταυτόχρονα την διαφορική εξίσωση **Euler – Lagrange**:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} \right) = 0 \quad \text{για } (1 \leq j \leq n) .$$

Αυτή η πρόταση είναι η φυσική γενίκευση της απλής θεωρίας μεταβολών και ανταποκρίνεται στο απλό αποτέλεσμα ότι μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με n μεταβλητές έχει στάσιμο σημείο, αν και μόνο αν, όλες οι πρώτες μερικές παραγωγοί της μηδενίζονται σε αυτό το σημείο.

Η πρόταση που περιγράφει την αρχή του Hamilton για συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας είναι:

Πρόταση 3.2.2 (Αρχή του Hamilton)

Η τροχιά $q_m(t)$ είναι μια πραγματική κίνηση ενός μηχανικού συστήματος, αν και μόνο αν, η q_m κάνει το συναρτησοειδές δράσης του συστήματος, στάσιμο.

Η μόνη ουσιαστική διαφορά μεταξύ αυτής της σωστής διατύπωσης και της αρχικής πρότασης (που αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου) είναι ότι η πραγματική κίνηση συνάρτηση του συστήματος δεν ελαχιστοποιεί αναγκαστικά το συναρτησοειδές δράσης, αλλά το κάνει πάντα στάσιμο. Πρακτικά, το συναρτησοειδές δράσης συνήθως ελαχιστοποιείται, αλλά υπάρχουν και ειδικές περιπτώσεις που δεν γίνεται ελάχιστο.

Όπως με την αρχή του Fermat, υπάρχει μια κομψή διατύπωση της αρχής του Hamilton, η οποία είναι λιγότερο εκτεταμένη και περισσότερο γενική. Κάνει χρήση της έκφρασης κρίσιμες συναρτήσεις της J , η οποίες είναι απλώς ταυτόχρονα λύσεις της εξίσωσης Euler – Lagrange.

Πρόταση 3.2.3 (Ο κομψός ορισμός της αρχής του Hamilton)

Οι πραγματικές συναρτήσεις κίνησης ενός μηχανικού προβλήματος είναι ίδιες με τις κρίσιμες συναρτήσεις του συναρτησοειδούς δράσης.

3.2.4 Η σπουδαιότητα της αρχής του Hamilton

Μιας και η αρχή του Hamilton είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις Lagrange, μπορούμε να πούμε ότι είναι η βασική εξέλιξη της κλασικής μηχανικής των νόμων του Newton για οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις Lagrange. Να τονιστεί ότι δεν είναι μια καινούργια θεωρία – η Νευτώνεια θεωρία είναι σωστή – αλλά μια διαφορετική διαδρομή προς το ίδιο αποτέλεσμα. Άρα μπορούμε να παράγουμε τις εξισώσεις Lagrange για την κίνηση από την Νευτώνεια θεωρία ή και από την αρχή του Hamilton.

Επειδή η αρχή του Hamilton μπορεί να επεκταθεί η εφαρμογή της σε ένα πλατύ εύρος των φυσικών φαινομένων ενώ η Νευτώνεια δεν μπορεί, η αρχή του Hamilton θεωρείται ως η πιο εφαρμόσιμη.

Το πρόβλημα με την αρχή του Hamilton ως πιο εφαρμόσιμη θεωρία της κλασικής μηχανικής είναι ότι είναι αρκετά τεχνική και δεν μπορούμε να βρούμε πάντα τις Lagrangian εξισώσεις του οποιοδήποτε συστήματος. Παρόλα αυτά, αυτή είναι η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσουμε όταν η αρχή του Hamilton είναι εφαρμόσιμη και επεκτάσιμη (π.χ στη θεωρία σωματιδίων). Οι Lagrangian εξισώσεις βρίσκονται με ευφυή τρόπο που περιέχει και τυχαιότητα, λαμβάνοντας υπόψη μας όλες τις συμμετρίες που είναι γνωστές.

Αρχικά μπορεί να φαίνεται ότι η αρχή του Hamilton δεν μας έχει περιγράψει κάτι καινούργιο. Ουσιαστικά μας λέει ότι οι συναρτήσεις κίνησης ενός μηχανικού προβλήματος είναι οι

κρίσιμες συναρτήσεις ενός συναρτησοειδούς δράσης που ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange, κάτι που ήδη γνωρίζαμε. Πάντως, επειδή οι εξισώσεις κίνησης έχουν μια ιδιαίτερη μορφή και εμπλέκονται με τις αρχές των μεταβολών, μπορούν να εμφανίσουν σημαντικές πληροφορίες και ιδιότητες που αλλιώς θα ήταν δύσκολο να δείξουμε. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η επίδραση στις εξισώσεις κίνησης με γενικευμένες μεταβλητές της μορφής $q' = (q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$, συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων q . Η άμεση προσέγγιση θα γίνει μέσω των εξισώσεων Lagrange στον γενικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων και παρατηρούμε τι συμβαίνει. Το αποτέλεσμα θα είναι ένα μπέρδεμα. Ενώ στην προσέγγιση μέσω της θεωρία μεταβολών, τις εκφράζουμε μέσω μια Lagrangian συνάρτησης $L = L(q', \dot{q}', t)$. Αν και η συνάρτηση L έχει διαφορετική συναρτησοειδή μορφή των συντεταγμένων q' , οι τιμές τους είναι ίδιες όπως πριν, ώστε το νέο συναρτησοειδές δράσης :

$$S[q'] = \int_{t_0}^{t_1} L(q', \dot{q}', t) dt$$

να παίρνει τις ίδιες τιμές όπως το παλιό, λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $q'(t)$ και $q(t)$ αναφέρονται στις ίδιες τροχιές του μηχανικού συστήματος. Οπότε, αν η τροχιά $q(t)$ κάνει το $S[q]$ στάσιμο, τότε η αντίστοιχη τροχιά $q'(t)$ κάνει το $S[q']$ στάσιμο. Έτσι οι κρίσιμες συναρτήσεις του $S[q]$ απεικονίζονται στις κρίσιμες συναρτήσεις του $S[q'(t)]$ και αντίστροφα. Άρα οι μετασχηματισμένες εξισώσεις της κίνησης είναι ίδιες με τις παλιές, αντικαθιστώντας το q με το q' . Αυτό το γεγονός εκφράζεται λέγοντας ότι οι εξισώσεις Lagrange της κίνησης είναι αμετάβλητες στους μετασχηματισμούς των γενικευμένων συντεταγμένων. Αυτό το αξιοθαύμαστο γεγονός μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σύστημα με εξισώσεις που παράγονται από τις αρχές των μεταβολών.

Έτσι έχουμε ένα γενικό τρόπο ώστε κάθε ομάδα από εξισώσεις που περιγράφουν ένα σύστημα, να μπορούν να μετασχηματιστούν σε μια άλλη ομάδα (πχ. οι μετασχηματισμοί Lorentz).

Αυτό μπορεί να συμβεί αν οι αρχικές εξισώσεις παράγονται από κάποια αρχή των μεταβολών των οποίων η Lagrangian είναι αμετάβλητη στους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.

Κεφάλαιο 4 Εξισώσεις του Hamilton και χώρος φάσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε πως οι εξισώσεις Lagrange ανασχηματίζονται σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, γνωστές ως **εξισώσεις του Hamilton**. Δεν προστίθεται κάτι καινούργιο στην επιστήμη της φυσικής και οι εξισώσεις του Hamilton δεν είναι ανώτερες από τις εξισώσεις Lagrange, όσο αφορά την λύση των αντίστοιχων προβλημάτων. Η αξία της ανώτερα πιο κομψής μορφής των εξισώσεων του Hamilton είναι ότι μας βοηθούν στην θεωρητική ανάπτυξη της κλασσικής μηχανικής. Μέσα στην κλασσική μηχανική, αποτελούν την βάση για περαιτέρω ανάπτυξη των θεωριών, όπως την θεωρία Hamilton - Jacobi και την θεωρία του χάους.

Επίσης, η Hamiltonian μηχανική μας δίνει την καλύτερη διαδρομή στην στατιστική μηχανική και συμμετέχει στην καρδιά της κβαντικής μηχανικής. Ως εφαρμογή της Hamiltonian φόρμας, αποδεικνύεται το θεώρημα του Liouville και το επαναληπτικό θεώρημα του Poincaré και μελετούμε κάποιες από τις αξιοθαύμαστες συνέπειες τους.

4.1 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού

Η κλασσική δομή ενός διαφορικού συστήματος πρώτου βαθμού με n άγνωστες συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \ , \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \ , \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \ ,\end{aligned}$$

όπου F_1, F_2, \dots, F_n είναι γνωστές συναρτήσεις των μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_n, t . Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφτεί με την διανυσματική μορφή:

$$\dot{x} = F(x, t)$$

όπου x και F είναι τα n - διάστατα διανύσματα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$. Αν μας δοθεί η τιμή του x όταν $t = t_0$, οι εξισώσεις $\dot{x} = F(x, t)$ καθορίζουν τις θέσεις $x(t)$ σε όλες τις επιμέρους στιγμές.

Ένα τυπικό παράδειγμα, είναι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αρπαχτικό - θηραμάτων :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a x_1 - b x_1 x_2 \ , \\ \dot{x}_2 &= b x_1 x_2 - c x_2\end{aligned}$$

το οποίο περιγράφει τον πληθυσμό $x_1(t)$ του θηράματος και τον πληθυσμό $x_2(t)$ του αρπαχτικού. Σε αυτή την περίπτωση, $F_1 = a x_1 - b x_1 x_2$, $F_2 = b x_1 x_2 - c x_2$.

4.1.1 Μετατροπή διαφορικών εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης σε σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης.

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης τάξης, μπορούν πάντα να μετατραπούν σε ένα ισοδύναμο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε της εξίσωση του αποσβεσμένου ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 0 \quad (4.1)$$

Θεωρούμε την μεταβλητή $u = \dot{x}$, τότε η δευτέρου βαθμού διαφορική εξίσωση (4.1) για την $x(t)$, μπορεί να γραφτεί σαν ένα ζευγάρι διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= -3x - 4u \end{aligned}$$

για τις άγνωστες $\{x(t), u(t)\}$. Αφού αυτό το βήμα είναι αντιστρεπτό, αυτό το ζευγάρι των εξισώσεων πρώτου βαθμού είναι ισοδύναμο με την (4.1).

Πρόταση 4.1

Κάθε σύστημα n -πλήθος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού με n -πλήθος αγνώστους, μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο σύστημα $2n$ -πλήθος γραμμικών εξισώσεων πρώτου βαθμού με $2n$ -πλήθος αγνώστους.

Ας πάρουμε για παράδειγμα, τις εξισώσεις της τροχιάς για ένα σωματίδιο μάζας m που έλκεται από την βαρύτητα μάζας M , τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων. Με τις πολικές συντεταγμένες, με κέντρο O , η Lagrangian είναι:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{mMG}{r}$$

και η αντίστοιχες εξισώσεις Lagrange είναι:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2}, \quad 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0,$$

ένα ζευγάρι από δευτέρου βαθμού γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους $\{r(t), \theta(t)\}$. Εισάγουμε τις νέες μεταβλητές u_r και u_θ , όπου :

$$u_r = \dot{r} \quad \text{και} \quad u_\theta = \dot{\theta},$$

και έτσι οι δύο δευτέρου βαθμού εξισώσεις, μπορούν να μετατραπούν σε τέσσερις πρώτου βαθμού εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u_r, & \dot{u}_r &= r u_\theta^2 - \frac{MG}{r^2}, \\ \dot{\theta} &= u_\theta, & \dot{u}_\theta &= -2\frac{u_r u_\theta}{r}, \end{aligned}$$

με τέσσερις αγνώστους, τους $\{r, \theta, u_r, u_\theta\}$.

4.1.2 Η μορφή Hamilton

Στο παραπάνω παράδειγμα, μετασχηματίσαμε το σύστημα σε διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού με την εισαγωγή νέων μεταβλητών ως συντεταγμένες ταχύτητες. Αυτή δεν είναι η

μοναδική επιλογή. Όταν μετασχηματίζουμε ένα σύστημα με εξισώσεις Lagrange σε πρώτου βαθμού διαφορικές εξισώσεις, μπορούμε να πάρουμε τις νέες συζυγής μεταβλητές :

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.2)$$

Αυτή η κίνηση είναι αρκετά εξυπηρετική αφού οι εξισώσεις Lagrange έχουν ήδη την μορφή:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{με} \quad (1 \leq j \leq n) \quad .$$

Το αποτέλεσμα είναι η δεξιά μεριά $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ είναι συναρτήσεις του q, \dot{q}, t και πρέπει να μετασχηματιστούν σε q, p, t . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αλλάζοντας τις εξισώσεις (4.2) ώστε να γράψουμε την \dot{q} ως συνάρτηση των q, p, t .

Για την Lagrangian στο πρόβλημα της τροχιάς, η συζυγής εξισώσεις είναι:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

και αυτές οι εξισώσεις εύκολα μετατρέπονται στις :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \quad .$$

Οι δύο δευτέρου βαθμού διαφορικές εξισώσεις Lagrange για το τροχιακό πρόβλημα είναι ισοδύναμες με το σύστημα των τεσσάρων πρώτης τάξης διαφορικών :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{mMG}{r^2} \quad ,$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \quad , \quad \dot{p}_\theta = 0 \quad ,$$

με τέσσερις αγνώστους, τους $\{r, \theta, p_r, p_\theta\}$. Αυτή είναι η **φόρμα Hamilton** των εξισώσεων Lagrange για το τροχιακό πρόβλημα.

Ίσως αναρωτηθούμε για το ποιος μπορεί να είναι ο λόγος αυτού του μετασχηματισμού (από τις εξισώσεις Lagrange σε σύστημα διαφορικών πρώτου βαθμού). Για την ανάγκη να βρούμε λύσεις σε ορισμένα προβλήματα (όπως στο τροχιακό), δεν χρειάζεται όλη αυτή η κίνηση. Το νέο σύστημα πρώτου βαθμού διαφορικών εξισώσεων μπορεί να είναι και πιο δύσκολο από την αρχική του μορφή του δευτέρου βαθμού. Το πραγματικό μας ενδιαφέρον εστιάζεται στην γενική θεωρία . Όταν οι εξισώσεις Lagrange εκφράζονται γενικά σε φόρμα Hamilton, το αποτέλεσμα είναι ένα σύστημα πρώτου βαθμού διαφορικών με μεγαλύτερη απλότητα και κομψότητα. Αυτές τις νέες εξισώσεις τις γνωρίζουμε ως **εξισώσεις Hamilton**. Αυτές οι εξισώσεις είναι η βάση για περαιτέρω ανάπτυξη στην αναλυτική μηχανική, όπως στην Hamilton - Jacobi θεωρία και χάος. Επίσης η **συνάρτηση Hamilton** που εμφανίζεται στις εξισώσεις Hamilton, είναι η καρδιά της κβαντομηχανικής.

4.2 Μετασχηματισμοί Legendre

Το γενικό πρόβλημα του μετασχηματισμού των εξισώσεων Lagrange στη φόρμα Hamilton επαφίεται στο γεγονός της αλλαγής των εξισώσεων που ορίζονται ως προς p :

$$\dot{p}_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L(q, \dot{q}, t) \quad \text{για} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (4.3)$$

σε έκφραση με το \dot{q} με τους όρους q, p, t . Αυτή η μεταβολή γίνεται ευκολότερα λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι οι $\{p_j\}$ δεν είναι γενικές συναρτήσεις του q, \dot{q}, t , αλλά είναι πρώτου βαθμού παράγωγοι της βαθμωτής Lagrangian συνάρτησης $L(q, \dot{q}, t)$. Είναι μια θαυμάσια συνέπεια το γεγονός ότι η αντίστροφη φόρμα μπορεί να γραφτεί με τον ίδιο τρόπο.

Παρακάτω θα παρατεθούν οι αντιρρήσεις και τα αποτελέσματα αυτής της ενέργειας.

4.2.1 Η περίπτωση των δύο μεταβλητών

Θα αναπτύξουμε την θεωρία των μετασχηματισμών για την περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές. Έχει όλα τα χαρακτηριστικά της γενικής περίπτωσης αν και εδώ είναι μια εύκολη περίπτωση. Έστω u_1 και u_2 συναρτήσεις με μεταβλητές τις u_1 και u_2 με τύπους :

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}, \quad v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} \quad (4.4)$$

όπου $F(u_1, u_2)$ είναι μια δοσμένη συνάρτηση των u_1, u_2 . Τότε μπορούμε να γράψουμε την αντίστροφη φόρμα, ως εξής:

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1}, \quad u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2} \quad (4.5)$$

για κάποια συνάρτηση $G(v_1, v_2)$. Στην απλή περίπτωση μπορούμε να την βρούμε στρεφόμενοι στις λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, έστω $F = 2u_1^2 + 3u_1u_2 + u_2^2$. Τότε :

$$\begin{aligned} v_1 &= 4u_1 + 3u_2 \\ v_2 &= 3u_1 + 2u_2 \end{aligned}$$

Η αντίστροφη φόρμα βρίσκεται εύκολα, λύνοντας αυτές τις εξισώσεις για u_1, u_2 που μας δίνουν :

$$\begin{aligned} u_1 &= -2v_1 + 3v_2 \\ u_2 &= 3v_1 - 4v_2 \end{aligned}$$

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να περιμένουμε ότι αυτές οι φόρμες για τα u_1, u_2 μπορούν να εκφραστούν με μια απλή συνάρτηση $G(v_1, v_2)$ με την μορφή της (4.5) αλλά είναι σωστές γιατί η δεξιά πλευρά αυτών των εξισώσεων ικανοποιούν την αναγκαία συνοχή των συνθηκών. Με απλή ολοκλήρωση έχουμε :

$$G = -v_1^2 + 3v_1v_2 - 2v_2^2$$

Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι συνεπές. Έστω $F(u_1, u_2)$ μια συνάρτηση των μεταβλητών u_1, u_2 . Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί την εξίσωση (4.5). Τότε, έστω ότι:

$$X = F(u_1, u_2) + G(v_1, v_2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2) ,$$

που είναι μια συνάρτηση με τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές u_1, u_2, v_1, v_2 . Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε αυτή την φόρμα οι μεταβλητές v_1, v_2 αντικαθίστανται από τις εκφράσεις τους ως προς u_1, u_2 .

Τότε το X είναι μια συνάρτηση με μεταβλητές u_1, u_2 μόνο. Η μερική παράγωγος ως προς u_1 , έχοντας την u_2 ως σταθερά, μας δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= \frac{\partial F}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} \times \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \frac{\partial G}{\partial v_2} \times \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \right) - (v_1 + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial u_1}) = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - v_1 \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} - u_1 \right) \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_2} - u_2 \right) \frac{\partial v_2}{\partial u_1} = \end{aligned}$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

χρησιμοποιώντας πρώτα τον κανόνα της αλυσίδας και μετά την φόρμα (4.4) και (4.5). Οπότε η X είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή u_1 . Ομοίως δείχνουμε ότι $\frac{\partial X}{\partial u_2} = 0$ και άρα το X είναι

ανεξάρτητο και από το u_2 . Άρα το X είναι σταθερά. Αυτή η σταθερά μπορεί να απορροφηθεί από την συνάρτηση G χωρίς να μεταβάλλεται η φόρμα (4.5), όπου $X = 0$. Άρα έχουμε δείξει ότι η F και G συνδέονται με τις εξισώσεις (4.4) και (4.5) και άρα πρέπει να ικανοποιούν την σχέση:

$$F(u_1, u_2) + G(v_1, v_2) = (u_1 v_1 + u_2 v_2) \quad (4.6)$$

Η παραπάνω σχέση είναι αντιστρεπτή, οπότε και το αντίστροφο αποτέλεσμα είναι σωστό. Οπότε δείξαμε ότι :

Πρόταση 4.2

Η ζητούμενη συνάρτηση $G(v_1, v_2)$ υπάρχει πάντα και μπορεί να εξαχθεί από την συνάρτηση $F(u_1, u_2)$ από την σχέση :

$$G(v_1, v_2) = (u_1 v_1 + u_2 v_2) - F(u_1, u_2) \quad (4.7)$$

όπου τα u_1, u_2 αντικαθίστανται από τις εκφράσεις τους με τα v_1, v_2 .

Παρατηρούμε ότι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων F και G είναι συμμετρική. Κάθε μια λέμε ότι είναι ο **μετασχηματισμός Legendre** της άλλης.

Παράδειγμα 4.1

Να βρείτε τον μετασχηματισμό Legendre της συνάρτησης :

$$F(u_1, u_2) = 2u_1^2 + 3u_1 u_2 + u_2^2$$

με την χρήση της (4.7)

Λύση

Για αυτή την F , παίρνουμε $u_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} = 4u_1 + 3u_2$ και $u_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 3u_1 + 2u_2$. Η ανάποδη φόρμα είναι: $u_1 = -2v_1 + 3v_2$ και $u_2 = 3v_1 - 4v_2$. Από την (4.7) έχουμε ότι η συνάρτηση G είναι:

$$\begin{aligned} G &= u_1 v_1 + u_2 v_2 - F(u_1, u_2) = (-2v_1 + 3v_2)v_1 + (3v_1 - 4v_2)v_2 - F(-2v_1 + 3v_2, 3v_1 - 4v_2) = \\ &= -2v_1^2 + 6v_1 v_2 - 4v_2^2 - (2(-2v_1 + 3v_2)^2 + 3(-2v_1 + 3v_2)(3v_1 - 4v_2) + (3v_1 - 4v_2)^2) = \\ &= -v_1^2 + 3v_1 v_2 - 2v_2^2 \end{aligned}$$

Αυτός είναι ο μετασχηματισμός Legendre της δοθείσας συνάρτηση F .

4.2.2 Ενεργητικές και παθητικές μεταβλητές

Οι μεταβλητές $u = (u_1, u_2)$ και $v = (v_1, v_2)$ καλούνται **ενεργές μεταβλητές** γιατί είναι και αυτές που μετασχηματίζονται. Οι συναρτήσεις F και G μπορεί επίσης να έχουν επιπλέον μεταβλητές οι οποίες δεν συμμετέχουν στον μετασχηματισμό, αλλά συμμετέχουν ως παράμετροι. Αυτές καλούνται **παθητικές μεταβλητές**. Στα δυναμικά προβλήματα, οι \dot{q} και p είναι οι ενεργές μεταβλητές ενώ η q είναι η παθητική μεταβλητή. Θα δούμε παρακάτω πως συνδέονται οι μερικοί παράγωγοι των F και G με τις παθητικές μεταβλητές.

Έστω $F = (u_1, u_2, w)$ και $G(v_1, v_2, w)$ επαληθεύουν τις (4.4) και (4.5), όπου w είναι μια παθητική μεταβλητή. Τότε η (4.4) ορίζει τις v_1, v_2 ως συναρτήσεις των u_1, u_2 και w , ενώ η (4.5) ορίζει τις u_1, u_2 ως συναρτήσεις των v_1, v_2 και w . Χρησιμοποιούμε την σχέση (4.6):

$$F(u_1, u_2) + G(v_1, v_2) = (u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

στην οποία αντικαθιστούμε τις v_1, v_2 από τις εκφράσεις τους ως προς u_1, u_2 και w . Μετά διαφορίζουμε το αποτέλεσμα ως προς w , αντιμετωπίζοντας τις u_1, u_2 ως σταθερές. Με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας, έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} \times \frac{\partial v_1}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial v_2} \times \frac{\partial v_2}{\partial w} \right) = u_1 \frac{\partial v_1}{\partial w} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial w}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = \left(u_1 - \frac{\partial G}{\partial v_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial w} + \left(u_2 - \frac{\partial G}{\partial v_2} \right) \frac{\partial v_2}{\partial w} = 0 + 0 = 0 \quad (\text{με τη χρήση της (4.5)}).$$

Άρα οι μερικές παράγωγοι της $F = (u_1, u_2, w)$ και $G(v_1, v_2, w)$ ως προς w , σχετίζονται:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -\frac{\partial G}{\partial w} \quad (4.8)$$

Από το αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι η F και G διατηρούνται ως προς την παθητική μεταβλητή w .

4.2.3 Η γενική περίπτωση με πολλές μεταβλητές

Η προηγούμενη θεωρία μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών.

Τα αποτελέσματα είναι αυτά που περιμένουμε, με βάση αυτά που έχουν αναφερθεί. Ας συνοψίσουμε την γενική περίπτωση:

Ορισμός 4.1 (Μετασχηματισμοί Legendre)

Έστω ότι οι μεταβλητές $v=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ορίζονται ως συναρτήσεις των ενεργητικών μεταβλητών $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ και οι παθητικές μεταβλητές $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ που ορίζονται από την σχέση:

$$v = \text{grad}_u F(u, w) \quad (4.9)$$

όπου F είναι η δοθείσα συνάρτηση των u και w . Τότε η αντίστροφη σχέση μπορεί πάντα να γραφτεί στην μορφή:

$$u = \text{grad}_v G(v, w) \quad (4.10)$$

όπου η συνάρτηση $G(v, w)$ σχετίζεται με την συνάρτηση $F(u, w)$ με την σχέση:

$$G(v, w) = u \cdot v - F(u, w) \quad (4.11)$$

όπου $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Επιπλέον, οι παράγωγοι των F και G , μέσω των παθητικών μεταβλητών $\{w_j\}$ συνδέονται ως εξής :

$$\text{grad}_w F(u, w) = -\text{grad}_w G(v, w) \quad (4.12)$$

Η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων F και G είναι συμμετρική και κάθε μια από αυτές τις συναρτήσεις λέμε ότι είναι μετασχηματισμός Legendre για την άλλη.

4.3 Εξισώσεις Hamilton

Έστω S ένα Lagrangian μηχανικό σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας και με γενικευμένες μεταβλητές $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Τότε οι εξισώσεις Lagrange για την κίνηση S , είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{για } (1 \leq j \leq n) \quad (4.13)$$

όπου $L=L(q, \dot{q}, t)$ είναι η Lagrangian του S . Αυτή είναι μια ομάδα από n δευτέρου βαθμού ODEs στις άγνωστες $q(t)=(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$. Θα μετατρέψουμε αυτές τις εξισώσεις σε φόρμα Hamilton. Δηλαδή σε μια ισοδύναμη ομάδα από $2n$ σε πλήθος πρώτου βαθμού ODEs των $2n$ πλήθος των άγνωστων $q(t), p(t)$, όπου $p(t)=(p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$, όπου $\{p_j\}$ είναι οι γενικευμένες στιγμιαίες συναρτήσεις του S . Οι $\{p_j\}$ ορίζονται ως:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1 \leq j \leq n) \quad (4.14)$$

και μπορούν να γραφτούν στην διανυσματική μορφή:

$$p = \text{grad}_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \quad (4.15)$$

Το πρώτο βήμα είναι να εξαλείψουμε τις κατευθυνόμενες συντεταγμένες \dot{q} από τις εξισώσεις Lagrange προς όφελος των στιγμιαίων συναρτήσεων p . Αυτό σημαίνει ότι η σχέση (4.15) πρέπει να αλλάξει ώστε να εκφράζει τις \dot{q} με τους όρους p, q και t . Αυτό ακριβώς κάνουν οι μετασχηματισμοί Legendre. Από την τελευταία θεωρία έχουμε ότι αυτή η αλλαγή της σχέσης (4.15) γίνεται :

$$\dot{q} = \text{grad}_p H(q, p, t) \quad (4.16)$$

όπου η συνάρτηση $H(q, p, t)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Lagrangian συνάρτησης $L(q, \dot{q}, t)$. Οι \dot{q} και p είναι οι ενεργητικές μεταβλητές και q η παθητική μεταβλητή.

Ορισμός 4.2 (Συνάρτηση Hamilton)

Η συνάρτηση $H(q, p, t)$ που είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Lagrangian συνάρτησης $L(q, \dot{q}, t)$, λέγεται Hamiltonian συνάρτηση του συστήματος S .

Αφού οι συναρτήσεις H και L είναι μετασχηματισμοί Legendre η μία της άλλης, τότε θα ισχύει η σχέση:

$$H(q, p, t) = \dot{q} \cdot p - L(q, \dot{q}, t) \quad (4.17)$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθεί η H από την L και

$$\text{grad}_q L(q, \dot{q}, t) = -\text{grad}_q H(q, p, t) \quad (4.18)$$

που συνδέει τις παραγώγους του L και H μέσω των παθητικών μεταβλητών.

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εύκολα τον μετασχηματισμό των εξισώσεων Lagrange. Οι εξισώσεις Lagrange μπορούν να γραφτούν με τους όρους των γενικευμένων στιγμιαίων συναρτήσεων $\{p_j\}$, ως εξής:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \text{για } (1 \leq j \leq n)$$

που είναι ισοδύναμη με τη διανυσματική μορφή

$$\dot{p} = \text{grad}_q L(q, \dot{q}, t) \quad (4.19)$$

Η δεξιά πλευρά αυτών των εξισώσεων συνεχίζουν να περιέχουν το \dot{q} , όμως χρησιμοποιώντας την σχέση (4.18), έχουμε:

$$\dot{p} = -\text{grad}_q H(q, p, t) \quad (4.20)$$

Αυτές είναι οι μετασχηματισμένες εξισώσεις Lagrange. Η φόρμα Hamilton των εξισώσεων Lagrange αποτελούνται από τις εξισώσεις (4.20) μαζί με τις εξισώσεις (4.16) οι οποίες ορίζουν τις στιγμιαίες γενικευμένες συναρτήσεις p .

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη σχέση. Άρα η φόρμα Hamilton και η φόρμα Lagrange είναι ισοδύναμες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Πρόταση 4.3

Οι n σε πλήθος εξισώσεις Lagrange (4.13) είναι ισοδύναμες με το σύστημα των $2n$ πλήθους των πρώτου βαθμού ODEs

$$\dot{q} = \text{grad}_q H(q, p, t) \quad , \quad \dot{p} = -\text{grad}_p H(q, p, t) \quad (4.21)$$

όπου η Hamiltonian συνάρτηση $H(q, p, t)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ και γενικεύεται από την σχέση (4.17). Αυτή είναι η διανυσματική σχέση των εξισώσεων Hamilton. Η αναπτυγμένη μορφή τους, είναι:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \text{για} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι οι n πλήθους δευτέρου βαθμού εξισώσεις Lagrange με τις n πλήθους άγνωστες $q(t)$ είναι μαθηματικά ισοδύναμες με τις $2n$ πλήθους πρώτου βαθμού εξισώσεις Hamilton με τις $2n$ πλήθους άγνωστες $q(t)$, $p(t)$. Σε κάθε μια από αυτές τις μορφές της μηχανικής, η κίνηση του συστήματος είναι καθορισμένη από την φόρμα μιας απλής συνάρτησης, της Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ στην φόρμα Lagrange και η Hamiltonian $H(q, p, t)$ στην φόρμα Hamilton. Οι εξισώσεις του Hamilton είναι ένα σύστημα από απλές κομψές πρώτου βαθμού, όπου οι συναρτήσεις F_1, F_2, \dots που εμφανίζονται στην δεξιά τους πλευρά είναι απλά οι πρώτες μερικές παράγωγοι μιας απλής συνάρτησης, της Hamiltonian H . Επιπλέον αυτές οι δεξιές μεριές ικανοποιούν την εξαιρετική συνθήκη $\text{div} F = 0$, που μας δίνει το δικαίωμα να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Liouville στην Hamiltonian μηχανική.

Πόρισμα 4.1

Όταν οι Lagrangian περιέχουν μια σαφή εξάρτηση από το t , αυτό το t έχει τη θέση μιας επιπλέον παθητικής μεταβλητής. Έτσι έχουμε την επιπλέον σχέση:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.22)$$

που μας δείχνει ότι αν η L ή η H έχουν κάποια ιδιαίτερη σχέση με το t τότε έχει και η άλλη.

Παράδειγμα 4.2

Να βρείτε την Hamiltonian και τις εξισώσεις Hamilton για το απλό εκκρεμές.

Λύση

Η Lagrangian για το απλό εκκρεμές είναι :

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g a \cos \theta \quad ,$$

όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στο νήμα και στην κάθετη, m είναι η μάζα του σωματιδίου, και a το μήκος του νήματος. Η στιγμιαία p_θ συνδυαζόμενη με την συντεταγμένη θ μας δίνει:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m a^2 \dot{\theta}$$

και έχουμε:

$$\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{ma^2} \quad (4.23)$$

Η Hamiltonian H τότε είναι:

$$H = \dot{\theta} p_{\theta} - L$$

όπου το $\dot{\theta}$ δίνεται από τον τύπο (4.23). Έτσι έχουμε:

$$H = \left(\frac{p_{\theta}}{ma^2}\right) p_{\theta} - \frac{1}{2} ma^2 \left(\frac{p_{\theta}}{ma^2}\right)^2 - mga \cos\theta = \frac{p_{\theta}^2}{2ma^2} - mga \cos\theta.$$

Αυτή είναι η Hamiltonian για το απλό εκκρεμές. Από την H μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις Hamilton, οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{ma^2}, \\ \dot{p}_{\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mga \sin\theta \end{aligned}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις Hamilton για το απλό εκκρεμές.

Αυτό το απλό παράδειγμα μας δείχνει ότι για πρακτικούς λόγους προτιμούνται οι εξισώσεις Lagrange από τις εξισώσεις Hamilton. Για να λύσουμε τις εξισώσεις Hamilton, σε αυτή την περίπτωση, διαφορίζουμε την πρώτη εξίσωση ως προς t και μετά χρησιμοποιούμε την δεύτερη εξίσωση για να εξαλείψουμε τον άγνωστο p_{θ} . Έτσι έχουμε:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin\theta = 0$$

που είναι η εξίσωση Lagrange για αυτό το σύστημα.

4.3.1 Ιδιότητες της Hamiltonian H

Η Hamiltonian συνάρτηση $H(q, p, t)$ έχει οριστεί ως ο μετασχηματισμός Legendre της $L(q, \dot{q}, t)$ και άρα μπορεί να παραχθεί από την σχέση (4.17). Είναι όμοια με την συνάρτηση της ενέργειας h:

$$h = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j - L(q, \dot{q}, t) \quad (4.24)$$

Η μόνη διαφορά μεταξύ της h και της H είναι ότι η συναρτησοειδή φόρμα του H είναι ζωτική. Το H πρέπει να μπορεί να εκφραστεί με τις q, p, t. Όμως αφού μόνο οι τιμές της h μας ενδιαφέρουν, η συναρτησοειδή φόρμα δεν παίζει σημαντικό ρόλο και μπορεί να εκφραστεί με την μορφή άλλων μεταβλητών. Αφού οι τιμές της H και τις h που παίρνουμε, είναι ίδιες, τα αποτελέσματα όσο αφορά την h μπορούν να υπολογιστούν από την H. Συγκεκριμένα, όταν η H δεν έχει ιδιαίτερη εξάρτηση από το t, η H είναι μια σταθερά της κίνησης. Αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να το αποδείξουμε:

Έστω $H = H(q, p)$ και $\{q(t), p(t)\}$ περιγράφουν μια κίνηση. Τότε για αυτήν κίνηση ισχύουν:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0$$

με εφαρμογή αρχικά του κανόνα της αλυσίδας και μετά εφαρμογή της εξίσωσης Hamilton.

Άρα η H παραμένει σταθερή για την κίνηση.

Τα συστήματα που η $H = H(q, p)$ παραμένει σταθερή, ονομάζονται **αυτόνομα**. Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόταση 4.4 (Αυτόνομα συστήματα.)

Σε κάθε αυτόνομο σύστημα, η Hamiltonian $H(q, p)$ διατηρείται.

Συμπληρωματικά, όταν S ένα συντηρητικό απλό σύστημα, η Hamiltonian H μπορεί να εκφραστεί με πιο απλή μορφή.

$$H(q, p) = T(q, p) + V(q) \quad (4.25)$$

όπου $T(q, p)$ είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος που εκφράζεται με τις μεταβλητές q, p . Σε αυτή την περίπτωση, H είναι η ολική ενέργεια του συστήματος, εκφρασμένη με τις μεταβλητές q, p .

Αυτός είναι και ο συντομότερος τρόπος για να βρούμε την H , όταν το σύστημα είναι συντηρητικό.

Παράδειγμα 4.3 (Υπολογισμός της Hamiltonian)

Να βρείτε την Hamiltonian για το αντίστροφο τετραγώνου τροχιακό πρόβλημα με βάση τα παραπάνω και να απλοποιήσετε την εξίσωση Hamilton για αυτό το σύστημα.

Λύση

Αφού το σύστημα είναι συντηρητικό θα ισχύει: $H = T + V$. Με τη χρήση των πολικών συντεταγμένων r και θ ως γενικευμένες συντεταγμένες, T και V γράφονται:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad \text{και} \quad V = -\frac{mMG}{r}$$

και οι γενικευμένες στιγμιαίες συναρτήσεις, γράφονται :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{και} \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

και έτσι έχουμε :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{και} \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

και άρα η Hamiltonian γράφεται:

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mMG}{r} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r}$$

Αυτή είναι η Hamiltonian. Οι εξισώσεις Hamilton βρίσκονται χρησιμοποιώντας αυτή την Hamiltonian που βρήκαμε στην γενική εξίσωση (4.22). Οι μερικές παράγωγοι του H είναι:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

και οι εξισώσεις Hamilton για το τροχιακό πρόβλημα είναι:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{mMG}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{p}_\theta = 0$$

Αυτές είναι οι ίδιες εξισώσεις που βρήκαμε προηγουμένως με την κλασσική διαδικασία των εξισώσεων Lagrange. Όπως και στο τελευταίο παράδειγμα, η λύση των εξισώσεων Hamilton με την επάλειψη των στιγμιαίων συναρτήσεων, οδηγεί πίσω στις εξισώσεις Lagrange.

4.3.2 Διατήρηση της συμπεριφοράς των στιγμιαίων συναρτήσεων

Από την εξίσωση Hamilton $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ έχουμε τα εξής:

αν $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ (αυτό συμβαίνει όταν η συντεταγμένη q_j είναι απύσασα από την Hamiltonian) τότε η γενικευμένη στιγμιαία συνάρτηση p_j είναι σταθερή για κάθε κίνηση.

Το αποτέλεσμα της παραπάνω παρατήρησης στην Lagrangian, μας δίνει:

αν $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (αυτό συμβαίνει όταν η συντεταγμένη q_j είναι απύσασα από την Lagrangian) τότε η γενικευμένη στιγμιαία συνάρτηση p_j είναι σταθερή για κάθε κίνηση.

Αυτά τα δύο συμπεράσματα φαίνονται λίγο διαφορετικά, αλλά είναι ισοδύναμα, αφού από την εξίσωση (4.18) $\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}$. Αυτό σημαίνει ότι οι όροι **κυκλικές συντεταγμένες**, δηλαδή όπως προηγουμένως εννοούσαμε την συντεταγμένη που δεν εμφανίζεται στην Lagrangian, μπορεί χωρίς κανένα πρόβλημα να ισχυριστούμε ότι δεν εμφανίζεται στην Hamiltonian. Οπότε συνοψίζοντας, έχουμε:

Πρόταση 4.5 (Διατήρηση της συμπεριφοράς των στιγμιαίων συναρτήσεων)

Αν q_j είναι μια κυκλική συντεταγμένη (δηλαδή δεν εμφανίζεται στην Hamiltonian), τότε η p_j , η γενικευμένη στιγμιαία συνάρτηση συζευγμένη με την q_j , είναι σταθερή σε κάθε κίνηση.

4.4 Ο Hamiltonian χώρος φάσης ((q,p) - χώρος)

Έστω ότι το μηχανικό σύστημα S έχει γενικευμένες συντεταγμένες q, συζευγμένες με τις στιγμιαίες συναρτήσεις p και η Hamiltonian $H(q,p,t)$.

Αν οι αρχικές τιμές του q και του p είναι γνωστές, τότε η επακόλουθη κίνηση του S, που περιγράφεται από τις συναρτήσεις $\{q(t), p(t)\}$, είναι μοναδικά καθορισμένη από τις εξισώσεις Hamilton. Αυτή η κίνηση μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά από την κίνηση ενός “σημείου” (που καλείται σημείο φάσης) στον Hamiltonian **χώρο φάσης**.

Ο Hamiltonian χώρος φάσης είναι ένας πραγματικός χώρος από $2n$ πλήθους διαστάσεων όπου ένα “σημείο” είναι μια ομάδα από τιμές της μορφής: $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ των ανεξάρτητων μεταβλητών $\{q,p\}$. (Να σημειώσουμε ότι ένα σημείο στον Hamiltonian χώρο φάσης εμφανίζει όχι μόνο τη σύσταση του συστήματος S αλλά και τις άμεσες στιγμιαίες μεταβλητές.

Αυτή είναι η διαφορά μεταξύ του $2n$ διαστάσεων Hamiltonian χώρου φάσεων και του n διαστάσεων Lagrangian χώρου.) Κάθε κίνηση του συστήματος S αντιστοιχεί στην κίνηση του σημείου φάσης μέσα στον χώρο φάσης.

Η μόνη περίπτωση που μπορούμε να σχεδιάσουμε τον χώρο φάσης είναι όταν το S έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας. Τότε ο χώρος φάσης είναι δύο διαστάσεων και μπορούμε να τον σχεδιάσουμε στο χαρτί.

Παράδειγμα 4.4 (Διαδρομές στον χώρο φάσης)

Έστω ότι το S έχει μια απλή μεταβλητή q και Lagrangian :

$$L = \frac{\dot{q}^2}{4} - \frac{q^2}{9} .$$

Να βρεθούν οι διαδρομές στον Hamiltonian χώρο φάσης που αντιστοιχούν στην κίνηση του S.

Λύση

Η συζυγής στιγμιαία συνάρτηση p είναι : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \dot{q}$ και η Hamiltonian είναι:

$$H = \dot{q} p - L = (2p)p - \frac{1}{4}(2p)^2 + \frac{q^2}{9} = p^2 + \frac{q^2}{9}$$

Τότε οι εξισώσεις Hamilton για το S είναι :

$$\dot{q} = 2p \quad \text{και} \quad \dot{p} = -\frac{2q}{9}$$

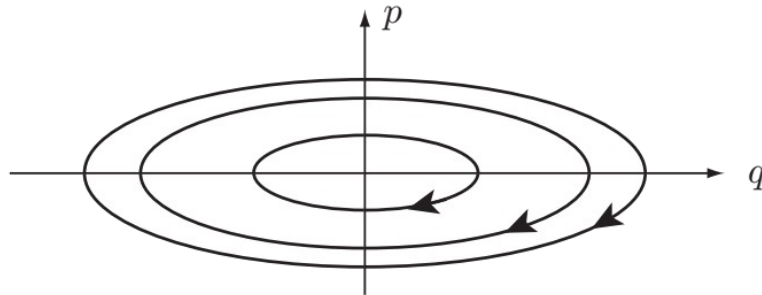
Απαλείφοντας το p, βρίσκουμε ότι το q ικανοποιεί την εξίσωση SHM :

$$\ddot{q} + \left(\frac{4}{9}\right)q = 0$$

Η γενική λύση των εξισώσεων Hamilton για το S είναι :

$$q = 3A \cos\left(\frac{2t}{3} + a\right) , \quad p = -A \sin\left(\frac{2t}{3} + a\right)$$

όπου A και a είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι παραπάνω είναι οι παραμετρικές εξισώσεις των διαδρομών του χώρου φάσης με παράμετρο τον χρόνο t και κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε μια πιθανή κίνηση του συστήματος S . Μερικές από αυτές τις διαδρομές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (4.1).



(Σχήμα 4.1: Τυπικές διαδρομές στον χώρο φάσης (q,p) που αντιστοιχούν στην κίνηση του συστήματος S με την Hamiltonian $H = p^2 + q^2/9$. Τα τόξα μας δείχνουν τις κατευθύνσεις που το σημείο φάσης κινείται πάνω στην κάθε διαδρομή, καθώς το t μεγαλώνει.)

Για αυτό το σύστημα, κάθε κίνηση του είναι περιοδική και οι διαδρομές του είναι κλειστές καμπύλες στο (q,p) επίπεδο. (Στην πραγματικότητα είναι ομοκεντρικές, όμοιες ελλειπτικές γραμμές). Τα τόξα μας δείχνουν την κατεύθυνση που κινείται το σημείο φάσης σε κάθε διαδρομή, καθώς το t αυξάνεται.

Βέβαια, τα περισσότερα μηχανικά συστήματα έχουν περισσότερους από ένα βαθμό ελευθερίας και τότε ο αντίστοιχος χώρος φάσης έχει τέσσερις διαστάσεις και έτσι δεν μπορούμε να τον σχεδιάσουμε. Αν το σύστημα αποτελείται από ένα mole αέριων μορίων, οι διαστάσεις του χώρου φάσεων γίνονται έξι φορές τον αριθμό Avogadro. Παρόλα αυτά, η έννοια του χώρου φάσης είναι χρήσιμη αφού μπορούμε να αναπτύξουμε γεωμετρικές σκέψεις σε χώρους μεγαλύτερων διαστάσεων. Αυτό βέβαια δεν θα λύσει την εξίσωση Hamilton της κίνησης, αλλά μας βοηθά να κάνουμε πολύτιμες προβλέψεις για την φύση της κίνησης.

4.4.1 Η ροή του χώρου φάσης

Οι διαδρομές των σημείων φάσης έχουν απλή δομή όταν το σύστημα είναι **αυτόνομο**, δηλαδή όταν $H = H(q,p)$. Σε αυτή την περίπτωση, η H είναι σταθερή στην κίνηση και κάθε διαδρομή της φάσης βρίσκεται σε μια “επιφάνεια” σταθερής ενεργειακής κατάστασης στον χώρο φάσης. Έτσι ο χώρος φάσης γεμίζει με μη τεμνόμενες επίπεδες επιφάνειες του H , σαν στρώματα κρεμμυδιού και κάθε διαδρομή της φάσης δεν περνάει στην άλλη επίπεδη επιφάνεια.

Για τα αυτόνομα συστήματα, υπάρχει μόνο μια διαδρομή για κάθε σημείο φάσης του χώρου φάσης. Ας εξετάσουμε γιατί συμβαίνει αυτό. Έστω ότι ένα σημείο της φάσης βρίσκεται στο (q_0, p_0) την χρονική στιγμή t_1 και ένα άλλο σημείο της φάσης είναι στη θέση στο (q_0, p_0) την χρονική στιγμή t_2 .

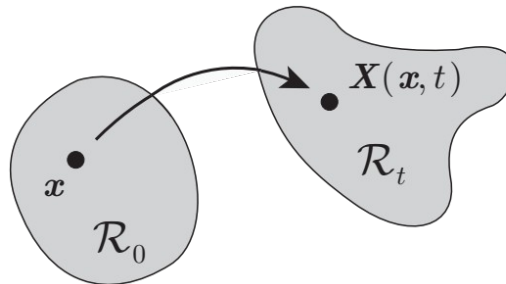
Τότε, αφού το H είναι ανεξάρτητο του t , η δεύτερη κίνηση μπορεί να συνδεθεί με την πρώτη κάνοντας την αντικατάσταση $t \rightarrow t + t_1 - t_2$ μια μετατόπιση στην αρχή των αξόνων για το t . Τότε τα δύο σημεία της φάσης ταξιδεύουν πάνω στην ίδια διαδρομή με το δεύτερο σημείο να καθυστερεί σε σχέση με το πρώτο κατά την σταθερά $t_2 - t_1$. Οπότε οι δύο διαδρομές φάσης δεν τέμνονται.

Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος φάσης είναι γεμάτος με μη τέμνουσες διαδρομές όπως οι ροές ενός υγρού όταν ρέει με σταθερή ροή. Κάθε κίνηση του συστήματος S αντιστοιχεί σε ένα σημείο φάσης που κινείται πάνω σε μια από αυτές τις διαδρομές, όπως κινούνται και τα σωματίδια ενός υγρού πάνω στην γραμμή της ροής. Τα $2n$ διαστάσεων διανύσματα $u = (\dot{q}, \dot{p})$ παίζουν τον ρόλο

της διανυσματικής ροής και οι εξισώσεις Hamilton μας υποδεικνύουν ποια είναι η κατεύθυνση τους στο σημείο (q,p) του χώρου φάσης. Λόγω αυτής της αναλογίας με την ροή στην μηχανική των υγρών, η κίνηση των σημείων φάσης στον χώρο φάσης καλείται **φάση ροής**.

4.5 Το θεώρημα επανάληψης του Liouville

Έστω ότι τα σημεία φάσης, καταλαμβάνουν μια περιοχή \mathcal{R}_0 του χώρου φάσης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (4.2).



(Σχήμα 4.2: Το θεώρημα του Liouville : η Hamiltonian φάση ροής διατηρεί τον όγκο της.)

Καθώς το t αυξάνεται, αυτά τα σημεία κινούνται πάνω στις διάφορες διαδρομές τους σύμφωνα με τις εξισώσεις Hamilton και μετά από χρόνο t , θα καταλάβουν μια περιοχή \mathcal{R}_1 του χώρου φάσης. Αυτή η καινούργια περιοχή έχει διαφορετικό σχήμα από την πρώτη \mathcal{R}_0 , αλλά όπως αναφέρει το **θεώρημα του Liouville** ο όγκος των δύο περιοχών είναι ίσος. Αυτό το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα αναφέρει ότι οι Hamiltonian χώροι φάσης διατηρούν τον όγκο τους. Το θεώρημα εύκολα εφαρμόζεται αλλά η απόδειξή του είναι λίγο περίπλοκη.

Θεώρημα Liouville

Οι κινήσεις του Hamiltonian συστήματος στον χώρο φάσης (q,p) , διατηρούν τον όγκο τους .

Απόδειξη

Θα αλλάξουμε την μορφή των μεταβλητών για να λύσουμε την απόδειξη ευκολότερα. Έστω x_1, x_2, \dots, x_{2n} οι μεταβλητές (αντί για q,p) και F_1, F_2, \dots, F_{2n} οι δεξιές πλευρές των εξισώσεων Hamilton. Τότε, οι εξισώσεις της κίνησης θα γράφονται με την διανυσματική δομή $\dot{x} = F(x, t)$.

Θα δείξουμε την απόδειξη για την περίπτωση που ο χώρος φάσης είναι δισδιάστατος (η μέθοδος είναι ίδια και στη γενική περίπτωση).

Έστω μια ομάδα σημείων φάσεων που κινούνται στο (x_1, x_2) σύστημα, που κάποια στιγμή αυτή η ομάδα καταλαμβάνει περιοχή \mathcal{R}_0 , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι αυτό συμβαίνει για $t = 0$. Μετά από χρόνο t , ένα σημείο x του \mathcal{R}_0 μετακινείται στην θέση $X = X(x, t)$ και η ομάδα καταλαμβάνει την περιοχή \mathcal{R}_1 . Στην περίπτωσή μας, των δύο διαστάσεων, ο “όγκος” $v(t)$ είναι η περιοχή για t στο (x_1, x_2) σύστημα. Τότε

$$v(t) = \int_{\mathcal{R}_t} dX_1 dX_2 = \int_{\mathcal{R}_0} J dx_1 dx_2$$

με J , ο Jacobian του μετασχηματισμού $X = X(x, t)$, ο οποίος είναι:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} . \quad (4.26)$$

Για μικρό t το X μπορεί κατά προσέγγιση να είναι:

$$X(x, t) = X(x, 0) + t \frac{\partial X}{\partial t}$$

$$X(x, t) = X(x, 0) + t \frac{\partial X}{\partial t}(x, 0) + O(t^2) = x + tF(x, 0) + O(t^2) ,$$

χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\dot{x} = F(x, t)$. Η αντίστοιχη προσέγγιση του J είναι :

$$J = 1 + t \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right] \Big|_{t=0} + O(t^2) = 1 + t \operatorname{div} F(x, 0) + O(t^2) .$$

Άρα ο όγκος του \mathfrak{R}_t είναι περίπου:

$$v(t) = \int_{\mathfrak{R}_0} (1 + t \operatorname{div} F(x, 0)) dx_1 dx_2 + O(t^2)$$

όπου το t είναι μικρό. Έτσι έχουμε :

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{v(t) - v(0)}{t} \right) = \int_{\mathfrak{R}_0} \operatorname{div} F(x, 0) dx_1 dx_2 .$$

Τελικά, αφού η αυθαίρετη αρχική τιμή του $t = 0$, αυτό το αποτέλεσμα θα ισχύει και κάθε τιμή του t , δηλαδή :

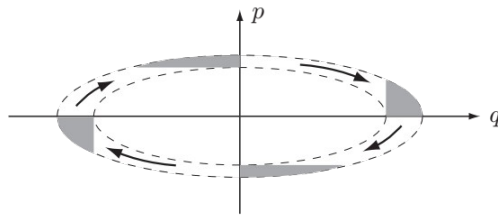
$$\frac{dv}{dt} = \int_{\mathfrak{R}_t} \operatorname{div} F(x, t) dx_1 dx_2$$

για κάθε χρονική στιγμή t . Όπως παρατηρούμε, για γενικά συστήματα εξισώσεων, η φάση δεν διατηρεί τον όγκο. Όμως, αν $\operatorname{div} F(x, t) = 0$, τότε ο όγκος διατηρείται όπως στην περίπτωση των εξισώσεων Hamilton με ένα βαθμό ελευθερίας.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(- \frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0$$

Άρα η Hamiltonian φάση ροής ικανοποιεί την συνθήκη $\operatorname{div} F = 0$ και άρα διατηρεί τον όγκο.

Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος Liouville φαίνεται παρακάτω στο σχήμα (4.3) Οι διαδρομές της φάσης της Hamiltonian $H = (p^2 + q^2)/9$, φαίνεται στο σχήμα (4.1), που είναι ομοκεντρικές ελλείψεις.



(Σχήμα 4.3: Περίπτωση του θεωρήματος Liouville με την Hamiltonian $H=(p^2+q^2)/9$. Οι σκιασμένες περιοχές κινούνται μέσα στο χώρο φάσης. Το σχήμα τους αλλάζει αλλά ο όγκος τους παραμένει σταθερός)

Το σχήμα 4.3 μας δείχνει την εξέλιξη της περιοχής της φάσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο τέτοια ελλειπτικές διαδρομές. Η περιοχή μπορεί να αλλάζει σχήμα αλλά δεν αλλάζει όγκο.

Το θεώρημα του Liouville έχει πολλές εφαρμογές και είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην στατιστική μηχανική. Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό.

Παράδειγμα 4.5

Στην θεωρία των δυναμικών συστημάτων, μια περιοδική λύση λέμε ότι είναι ασυμπτωτικά σταθερή οριακού κύκλου αν ελκύει τα σημεία από τις διπλανές περιοχές του χώρου φάσης. Να δείξετε ότι οι οριακοί κύκλοι δεν μπορούν να εμφανιστούν στη δυναμική των Hamiltonian συστημάτων.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει μια κλειστή διαδρομή στον χώρο φάσης που ελκύει τα σημεία των διπλανών περιοχών \mathcal{R} . Τότε τα σημεία που βρίσκονται σε αυτή την περιοχή \mathcal{R} πρέπει να βρίσκονται μέσα σε ένα στενό “σωλήνα” αυθαίρετα μικρής ακτίνας που θα περιέχει την διαδρομή C . Ο όγκος αυτού του σωλήνα τείνει στο μηδέν όσο αυξάνεται ο χρόνος, ώστε ο αρχικός όγκος του \mathcal{R} να μην διατηρείται. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα του Liouville και άρα οι ασυμπτωτικά σταθερές οριακού κύκλου λύσεις δεν υπάρχουν.

4.6 Το θεώρημα επανάληψης του Poincaré

Πολλά Hamiltonian συστήματα έχουν την ιδιότητα ότι κάθε διαδρομή είναι περιορισμένη σε κάποια φραγμένη περιοχή του χώρου φάσης. Τυπικά αυτό είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας, όπου οι ενεργειακές επιφάνειες συμβαίνει να είναι φραγμένες. Το θεώρημα του Liouville έχει σημαντική εφαρμογές στην κίνηση τέτοιων συστημάτων. Πρώτα θα αποδειχθεί το θεώρημα επανάληψης του Poincaré, το οποίο είναι στην πραγματικότητα ένα αποτέλεσμα της εργοδικής θεωρίας και έχει πολλές εφαρμογές εκτός της κλασικής μηχανικής. Εδώ πάντως θα αποδείξουμε το θεώρημα Poincaré για τον χώρο φάσης.

Θεώρημα 4.1 (Επανάληψης του Poincaré)

Έστω S ένα αυτόνομο Hamiltonian σύστημα και μία κίνηση σημείων φάσης που αρχικά βρίσκεται σε μια φραγμένη περιοχή \mathcal{R}_0 του χώρου φάσης. Αν οι διαδρομές όλων αυτών των σημείων βρίσκονται συνεχώς σε μια καθορισμένη φραγμένη περιοχή του χώρου φάσης, τότε κάποια από αυτά τα σημεία θα επιστρέψουν κάποια στιγμή στην περιοχή \mathcal{R}_0 .

Απόδειξη

Έστω \mathcal{R}_1 η περιοχή που βρίσκονται τα σημεία μετά από χρόνο t . (Θα υποθέσουμε ότι η \mathcal{R}_1 δεν επικαλύπτει την \mathcal{R}_0 , οπότε όλα τα σημεία που υπάρχουν στην \mathcal{R}_0 τη χρονική στιγμή $t=0$, έχουν φύγει από την \mathcal{R}_0 για $t = \tau$). Θα δείξουμε ότι κάποια από αυτά τα σημεία επιστρέφουν στην περιοχή \mathcal{R}_0 . Έστω είναι οι περιοχές που βρίσκονται κάποια σημεία μετά από χρόνο $2\tau, 3\tau, \dots, n\tau$. Από το θεώρημα του Liouville, όλες αυτές οι περιοχές έχουν τον ίδιο όγκο.

Οπότε, αν ποτέ δεν επικαλύπτονται μεταξύ του κάποιες περιοχές, ο συνολικός όγκος τους θα μεγαλώνει χωρίς όριο. Όμως από την παραδοχή που κάναμε, όλες αυτές οι περιοχές έχουν πεπερασμένο όγκο. Άρα κάποια από αυτές πρέπει να επικαλύπτει κάποια άλλη.

Θα δείξουμε ότι αυτή η επικάλυψη συμβαίνει με την αρχική περιοχή \mathcal{R}_0 .

Έστω ότι η \mathcal{R}_m επικαλύπτει την \mathcal{R}_k για $0 \leq k \leq m$. Κάθε σημείο αυτής της επικαλυπτόμενης περιοχής αντιστοιχεί σε μια τομή των διαδρομών δύο σημείων φάσης τα οποία ξεκίνησαν από κάποια σημεία x_1, x_2 του \mathcal{R}_0 την χρονική στιγμή $t=0$. Άρα όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος του Liouville, αυτό σημαίνει ότι $X(x_1, m\tau) = X(x_2, k\tau)$. Όμως το σύστημα είναι αυτόνομο, άρα οι λύσεις $X(x_1, t)$ και $X(x_2, t)$ πρέπει να διαφέρουν μόνο κατά $(m - k)\tau$ στον αρχικό χρόνο. Έτσι έχουμε ότι:

$$X(x_1, (m - k)\tau) = X(x_2, 0) = x_2$$

Έτσι το σημείο φάσης που βρισκόταν στην θέση x_1 για $t = 0$ είναι στην θέση x_2 την χρονική στιγμή $t = (m - k)\tau$. Αυτό λοιπόν το σημείο επέστρεψε στην περιοχή \mathcal{R}_0 μετά από χρόνο: $t = (m - k)\tau$.

Αφού το θεώρημα επανάληψης ισχύει για κάθε υποπεριοχή του \mathcal{R}_0 , έχουμε ότι για τα σημεία του \mathcal{R}_0 , υπάρχουν σημεία φάσης που περνούν πολύ κοντά στις αρχικές τους θέσεις.

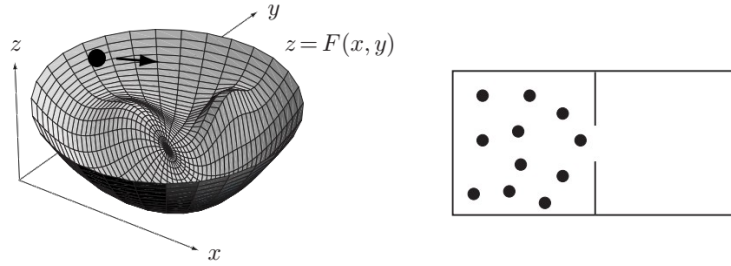
Οπότε αν ένα σύστημα S έχει ένα από αυτά τα σημεία στην αρχική του κατάσταση, τότε το S θα επαναλάβει κάποια στιγμή αυτή την κατάσταση. Για να το δείξουμε αυτό χρειαζόμαστε μια πιο δυνατή εκδοχή του θεωρήματος Poincaré:

“Η διαδρομή σχεδόν κάθε σημείου του \mathcal{R}_0 περνά εξαιρετικά πολύ κοντά στην αρχική του θέση”.

Η παραπάνω πρόταση μας δίνει το εξαιρετικό συμπέρασμα :

“ Για σχεδόν κάθε επιλογή των αρχικών συνθηκών, το σύστημα S βρίσκεται εξαιρετικά κοντά σε αυτές τις συνθήκες κάποια επόμενη στιγμή”.

Ένα παράδειγμα αυτού του φαινομένου είναι η κίνηση ενός απλού σωματιδίου κάτω από βαρύτητα σε μια ομαλή εσωτερική επιφάνεια ενός μπολ που έχει μια μη κανονικού σχήματος επιφάνεια $z = F(x, y)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (4.4)



(Σχήμα 4.4: Αριστερά: Ένα σωματίδιο “γλιστράει” σε μια μη κανονική επιφάνεια ενός μπολ. Δεξιά: Το μόρια από ένα αέριο στο αριστερό δωμάτιο θα βρεθούν ξανά σε αυτή την περιοχή σε κάποια χρονική στιγμή.

Αυτό είναι ένα αυτόνομο Hamiltonian σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας. Έστω οι καρτεσιανές γενικευμένες συντεταγμένες (x, y) του P. Τότε η Lagrangian δίνεται από :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (F_{,x}\dot{x} + F_{,y}\dot{y})^2) - mgF$$

όπου $F_{,x} = \frac{\partial F}{\partial x}$ και $F_{,y} = \frac{\partial F}{\partial y}$. Οι συζυγείς στιγμιαίες συναρτήσεις θα είναι:

$$p_x = m(\dot{x} + (F_{,x}\dot{x} + F_{,y}\dot{y})F_{,x}) \quad , \quad p_y = m(\dot{y} + (F_{,x}\dot{x} + F_{,y}\dot{y})F_{,y})$$

Επειδή η ενέργεια διατηρείται, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αυτόματα εφαρμόζεται και το θεώρημα Poincaré. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι φραγμένες οι επιφάνειες ενέργειας στον χώρο φάσης.

Παρακάτω είναι η απόδειξη του ισχυρισμού μας.

Σε αυτή την περίπτωση, το \mathcal{R}_0 είναι κάποια φραγμένη περιοχή του χώρου φάσης (x, y, p_x, p_y) . Έστω z_0 είναι η μέγιστη τιμή του z και T_0 είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια που συνδέεται με σημεία του \mathcal{R}_0 . Τότε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η μέγιστη τιμή του z στην μεταγενέστερη κίνηση δεν υπερβαίνει την τιμή $z^{\max} = z_0 + (T_0 / mg)$. Άρα αν το μπολ έχει τουλάχιστον αυτό το ύψος, οι κινήσεις περιορίζονται στις τιμές (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $F(x, y) \leq z^{\max}$. Οπότε και τα δύο x και y είναι φραγμένα στην μεταγενέστερη κίνηση. Επίσης, αν το κατώτερο σημείο του μπολ είναι $z = 0$, η τιμή του T στην μεταγενέστερη κίνηση δεν υπερβαίνει την τιμή $T^{\max} = T_0 + mgz_0$. Έτσι έχουμε ότι \dot{x} και \dot{y} είναι φραγμένες στην μεταγενέστερη κίνηση και οποίο υπονοεί ότι το ίδιο συμβαίνει και για τις p_x και p_y . Άρα αφού όλες είναι φραγμένες, τότε οι διαδρομές του χώρου φάσης που βρίσκονται στην \mathcal{R}_0 , όταν $t = 0$, περιέχονται υποχρεωτικά σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου φάσης για κάθε χρονική στιγμή t .

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Poincaré.

Ως εκ τούτου, αν το σωματίδιο P αφηθεί από κατάσταση ηρεμίας p_x από σημείο A στην επιφάνεια του μπολ, τότε όποιο και αν είναι το σχήμα του μπολ, το P θα βρεθεί κοντά σε κατάσταση ηρεμίας σε κάποια μετέπειτα χρονική στιγμή.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν ένα “δωμάτιο” περιέχει μόρια αερίου και συνδέεται με ένα άλλο κενό δωμάτιο (σχήμα 4.4) τότε μετά από κάποιο μεγάλο χρονικό διάστημα τα μόρια του αερίου θα βρεθούν πάλι στο ίδιο “δωμάτιο”. Αυτό το απίθανο αποτέλεσμα,

που φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, είναι λιγότερο απίθανο αν καταλάβουμε ότι η μετέπειτα χρονική στιγμή μπορεί να σημαίνει 10^{20} χρόνια αργότερα.

Φυσικά, δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει κάποιο σημείο που οι αρχικές του συνθήκες είναι τέτοιες που δεν θα ισχύει το θεώρημα του Poincaré. (Ας ελπίσουμε ότι δεν θα είμαστε τόσο άτυχοι).

Κεφάλαιο 5

Hamiltonian συστήματα – Συναρτήσεις Lyapunov

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε:

- στα Hamiltonian συστήματα στο επίπεδο,
- στην διερεύνηση ευστάθειά τους με τη χρήση των συναρτήσεων Lyapunov
- στην διάκριση μεταξύ ευστάθειας και ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Όπως αναφέρθηκε οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για την μελέτη δυναμικών συστημάτων στα οποία θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες.

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία δυναμικών συστημάτων είναι τα Hamiltonian συστήματα. Η αιτία εξέτασή τους προέρχεται από το γεγονός ότι σχετίζονται με την δυναμική της κίνησης των κλασικών συστημάτων που προέρχονται από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα Hamiltonian συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας.

Σε αυτά τα συστήματα δεν μπορούμε πάντα να εφαρμόσουμε τεχνικές γραμμικοποίησης για να καθορίσουμε την ευστάθεια ενός κρίσιμου σημείου. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να χρησιμοποιήσουμε την ροή κατά μήκος των ισοσταθμικών καμπυλών, ροή που ορίζεται από τις συναρτήσεις Lyapunov, για τον καθορισμό της ευστάθειας.

5.1 Hamiltonian συστήματα στο επίπεδο

Ορισμός 5.1

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο επίπεδο \mathbb{R}^2 ονομάζεται **Hamiltonian** με ένα βαθμό ελευθερίας αν μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) = - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (5.1)$$

όπου $H(x, y)$ είναι μια συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς x και y . Το σύστημα είναι **συντηρητικό** αν δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας. Στις εφαρμογές η Hamiltonian ορίζεται από την έκφραση :

$$H(x, y) = K(x, y) + V(x, y)$$

όπου K είναι η κινητική ενέργεια και V η δυναμική ενέργεια.

Θεώρημα 5.1 (διατήρηση της ενέργειας)

Η ολική ενέργεια $H(x, y)$ είναι ένα **πρώτο ολοκλήρωμα** και μια **σταθερά της κίνησης**.

Απόδειξη

Η ολική χρονική παράγωγος της H είναι:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow H = E = \text{σταθερά}, \text{αφού } \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Επομένως η H είναι σταθερή κατά μήκος των λύσεων του συστήματος (5.1) και οι τροχιές καθορίζονται από τη σχέση $H(x, y) = E$, όπου E μια σταθερά.

Ας εξετάσουμε ένα απλό μηχανικό σύστημα που είναι Hamiltonian στο επίπεδο.

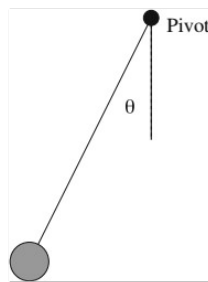
Το απλό μη γραμμικό εκκρεμές

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ενός εκκρεμούς στο επίπεδο, σύμφωνα με τον νόμο του Newton της κίνησης, είναι:

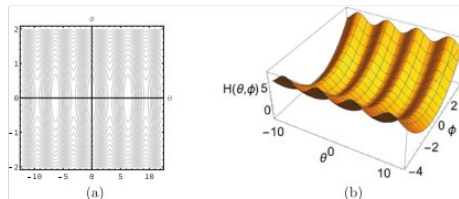
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0, \quad (5.2)$$

όπου θ η γωνία του εκκρεμούς από την κάθετο, l το μήκος του νήματος και g η επιτάχυνση βαρύτητας.

Σε αυτό το μοντέλο θεωρούμε ότι δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις στο εκκρεμές και άρα όταν τεθεί σε λειτουργία υπό γωνία θ , θα κινείται περιοδικά συνεχώς με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Το σύστημα είναι συντηρητικό αφού δεν έχουμε απώλειες ενέργειας.



Ένα απλό μη γραμμικό εκκρεμές



(Σχήμα 5.1: α) Διάγραμμα φάσης για το εκκρεμές όταν $-4\pi < \theta < 4\pi$
β) Η επιφάνεια $z = H(\theta, \phi)$.)

(Στο παραπάνω σχήμα οι άξονες στο 1.2α είναι το θ και $\dot{\theta}$.

Οι κλειστές γραμμές γύρω από τα κρίσιμα σημεία $(2n\pi, 0)$ παριστάνουν περιοδικές ταλαντώσεις και οι κυματιστές γραμμές για μεγάλες γωνιακές ταχύτητες ανταποκρίνονται σε κινήσεις όπου το εκκρεμές βρίσκεται γύρω από την αρχική του θέση. Οι κλειστές γραμμές ανταποκρίνονται σε τοπικά ελάχιστα στην επιφάνεια $z = H(\theta, \phi)$ και τα ασταθή κρίσιμα σημεία ανταποκρίνονται σε τοπικά μέγιστα στην ίδια επιφάνεια.)

Ας ορίσουμε :

$$\dot{\theta} = \phi, \quad \dot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin\theta, \quad (5.3)$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(n\pi, 0)$ στο (θ, ϕ) επίπεδο, όπου n ακέραιος. Αυτά τα κρίσιμα σημεία αποδεικνύονται ότι είναι υπερβολικά αν n είναι πρώτος και μη υπερβολικά αν n είναι άρτιος. Οπότε το θεώρημα Hartman δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν ο n είναι άρτιος. Παρόλα αυτά όμως το σύστημα (5.3) είναι Hamiltonian με $H(\theta, \phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\theta$ (κινητική + δυναμική

ενέργεια) και άρα οι οι γραμμές ροής μπορούν να σχεδιαστούν. Το διάγραμμα ροής μπορεί να σχεδιαστεί με βάση τα $\frac{d\phi}{d\theta}, \theta, \phi$.

Ορισμός 5.2

Ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^2$$

στο οποίο ο Ιακωβιανός πίνακας έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές ονομάζεται **μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο**, ενώ σε αντίθετη περίπτωση λέγεται **εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο**.

Θεώρημα 5.2

Κάθε μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο ενός αναλυτικού Hamiltonian συστήματος είναι τοπολογικά ή υπερβολικό σημείο ή ελλειπτικό σημείο. (Δηλαδή δεν μπορεί να είναι σπειροειδές σημείο).

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι το κρίσιμο σημείο είναι η αρχή των αξόνων. Τότε ο Ιακωβιανός πίνακας είναι :

$$J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}$$

με $\text{trace}(J_0) = 0$ και $\det(J_0) = \frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial y \partial x}\right)^2$.

Με τις ιδιοτιμές να ικανοποιούν την εξίσωση :

$$\lambda^2 - \text{trace}(J_0)\lambda + \det(J_0) = 0$$

και αφού $\text{trace}(J_0) = 0$ τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 + \det(J_0) = 0$$

Αν $\det(J_0) < 0$ τότε η αρχή είναι ένα υπερβολικό σημείο αφού $\lambda = \pm \sqrt{-\det(J_0)}$ δηλαδή όταν οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες.

Επίσης αν $\det(J_0) > 0$, τότε οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές $\lambda = \pm i \sqrt{\det(J_0)}$ και η αρχή είναι ελλειπτικό ή σπειροειδές σημείο.

Παρατηρούμε ότι τα κρίσιμα σημεία του συστήματος (5.1) αποτελούν στάσιμα σημεία της επιφάνειας $z = H(x,y)$. Αν η αρχή είναι σπειροειδές σημείο, τότε η αρχή δεν είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο της Hamiltonian συνάρτησης. Αν η αρχή είναι ένα ευσταθές σπειροειδές σημείο, τότε από το θεώρημα 5.1 ($H(x,y) = \text{σταθερή}$ κατά μήκος των λύσεων του συστήματος), θα έχουμε:

$$H(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} H(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) = H(0, 0)$$

για όλα τα $(x_0, y_0) \in N_\varepsilon(0, 0)$, όπου N_ε είναι μια μικρή περιοχή της αρχής. Άρα η αρχή $(0, 0)$ δεν μπορεί να είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο της $H(x, y)$ αφού δεν μπορεί να ισχύει $H(x, y) > H(0, 0)$ ή $H(x, y) < H(0, 0)$ για όλα τα σημεία (x, y) περιοχής γύρω από το σημείο $(0, 0)$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η αρχή δεν μπορεί να είναι ένα ασταθές σπειροειδές σημείο.

Άρα ένα μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο μιας Hamiltonian είναι ή ένα υπερβολικό σημείο ή ένα ελλειπτικό σημείο.

Παράδειγμα 5.1

Θεωρούμε τα συστήματα :

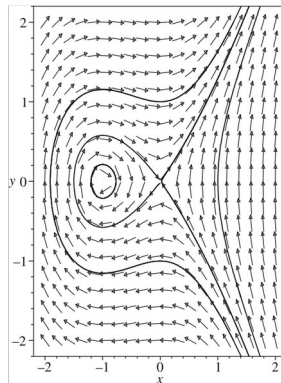
α) $\dot{x} = y, \dot{y} = x + x^2$

β) $\dot{x} = y + x^2 - y^2, \dot{y} = -x - 2xy$

Να βρεθούν οι Hamiltonian για το κάθε σύστημα και να κατασκευάσετε το διάγραμμα φάσης.

Λύση

α) Μετά την ολοκλήρωση έχουμε ότι η Hamiltonian είναι $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ και οι ολοκληρωτικές καμπύλες υπολογίζονται από την $H(x, y) = E$. Έχουμε δύο κρίσιμα σημεία το $(0, 0)$ και το $(-1, 0)$ τα οποία είναι και τα δύο μη εκφυλισμένα. Το κρίσιμο σημείο στην αρχή $(0, 0)$ είναι υπερβολικό σημείο και μετά την γραμμικοποίηση έχουμε τα ιδιοδιανύσματα $(1, -1)^T$ και $(1, 1)^T$. Το κρίσιμο σημείο $(-1, 0)$ είναι ελλειπτικό από το θεώρημα 5.1. Αν $y > 0$ τότε $\dot{x} > 0$ και αν $y < 0$ τότε $\dot{x} < 0$. Το διάγραμμα φάσης φαίνεται παρακάτω.



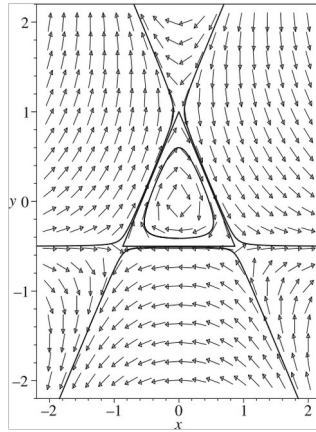
(Σχήμα 5.2: Διάγραμμα φάσης για το παράδειγμα 1)

β) Ομοίως, μετά την ολοκλήρωση έχουμε: $H(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2 y - \frac{y^3}{3}$ και οι ολοκληρωτικές καμπύλες υπολογίζονται από την $H(x, y) = E$. Τώρα έχουμε τέσσερα κρίσιμα σημεία, τα $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $\Gamma(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ τα οποία είναι και τα τέσσερα μη εκφυλισμένα. Το κρίσιμο σημείο O είναι ελλειπτικό σημείο από το θεώρημα 5.1 ενώ τα κρίσιμα σημεία A, B και Γ είναι υπερβολικά σημεία. Μετά την γραμμικοποίηση τα ιδιοδιανύσματα είναι:

για το A: $(1, \sqrt{3})^T$ και $(1, -\sqrt{3})^T$

για το B: $(1, -\sqrt{3})^T$ και $(1, 0)^T$

και για το $\Gamma(1,0)^T$ και $(1, \sqrt{3})^T$. Το διάγραμμα φάσης φαίνεται παρακάτω:



(Σχήμα 5.3: Διάγραμμα φάσης για το παράδειγμα 2)

Ορισμός 5.3

Έστω x_0 ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος 5.2. Αν $\Lambda^+(\gamma) = \Lambda^-(\gamma) = x_0$ τότε η γ ονομάζεται **ομοκλιτική τροχιά**.

Παράδειγμα ομοκλιτικής τροχιάς βλέπουμε στο σχήμα 5.2. Η ασταθής και ευσταθής πολλαπλότητα που διέρχεται από την αρχή σχηματίζουν μια ομοκλιτική τροχιά γύρω από το $(-1, 0)$.

Μια ομοκλιτική τροχιά συνδέει ένα κρίσιμο σημείο με τον εαυτό του και χρειάζεται άπειρος χρόνος για να γίνει αυτή η σύνδεση.

Ορισμός 5.4

Έστω x_0 και y_0 διακριτά κρίσιμα σημεία. Αν $\Lambda^+(\gamma) = x_0$ και $\Lambda^-(\gamma) = y_0$ τότε η γ ονομάζεται **ετεροκλιτική τροχιά**.

Παράδειγμα ετεροκλιτικών τροχιών μπορούμε να δούμε στο σχήμα 5.3. Υπάρχουν τρεις τροχιές που βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}, & -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 1, & -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1, & -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ορισμός 5.5

Η διαχωριστική γραμμή, (separatrix) είναι μια τροχιά η οποία χωρίζει το διάγραμμα φάσης σε δύο διακριτά - διαφορετικά είδη ποιοτικής συμπεριφοράς (π.χ. χωρίζει τις φραγμένες

από τις μη φραγμένες τροχιές). Η κίνηση στις διαχωριστικές καμπύλες χρειάζεται άπειρο χρόνο.

Η ομοκλινική και η ετεροκλινική τροχιά είναι παραδείγματα διαχωριστικών τροχιών.

5.2 Συναρτήσεις Lyapunov και Ευστάθεια

Θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα της μορφής $\dot{x}=f(x), x \in \mathbb{R}^2$. Η ευστάθεια των υπερβολικών κρίσιμων σημείων μπορεί να καθοριστεί από τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα.

Ένα κρίσιμο σημείο είναι ευσταθές αν το πραγματικό μέρος όλων των ιδιοτιμών είναι αρνητικό ενώ είναι ασταθές αν το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι θετικό. Αν ένα κρίσιμο σημείο είναι εκφυλισμένο, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Lyapunov για να καθοριστεί η ευστάθεια αυτού του κρίσιμου σημείου.

Έστω σύστημα ορισμένο με την $V(x,y)$, ώστε:

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

(Το αρνητικό πρόσημο εμφανίζεται από τις αναλογίες στην φυσική, λόγω ενέργειας)

Τότε

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \leq 0$$

Άρα το $V(t)$ μειώνεται πάνω στις τροχιές και η κίνηση γίνεται πάντα προς χαμηλότερο δυναμικό.

Επίσης, ισχύει $\dot{x}=\dot{y}=0$ όταν $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0$ δηλαδή στο τοπικό μέγιστο-ελάχιστο ή στο υπερβολικό σημείο της $V(x,y)$. Τα τοπικά μέγιστα συνδέονται με ασταθή κρίσιμα σημεία ενώ τα τοπικά ελάχιστα συνδέονται με ευσταθή κρίσιμα σημεία.

Παράδειγμα 5.2

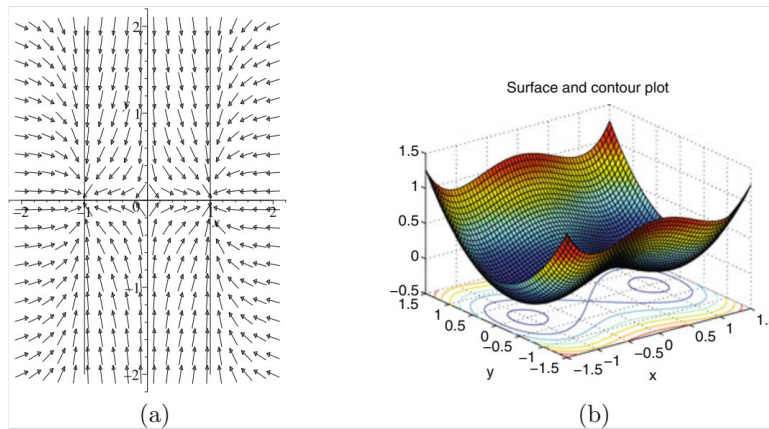
Να σχεδιάσετε το διάγραμμα φάσεων του συστήματος :

$$\dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = -y$$

καθώς επίσης και της πιθανής συνάρτησης λύση του συστήματος.

Λύση

Υπάρχουν τρία κρίσιμα σημεία του παραπάνω συστήματος, το $O(0,0)$, το $A(-1,0)$ και το $B(1,0)$. Το $O(0,0)$ είναι ασταθές ενώ τα άλλα δύο είναι ευσταθή όπως φαίνεται και από τα παρακάτω σχήματα.



(Σχήμα 5.4 (α) Διάγραμμα φάσης (β) Το δυνητικό φρέαρ)

Η συνάρτηση $z = V(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4 (β) είναι γνωστή σαν το **δυνητικό φρέαρ (πηγάδι)**. Το σύστημα εδώ είναι πολλαπλά σταθερό αφού έχει δύο ευσταθή σημεία.

Τα τοπικά ελάχιστα στο σχήμα 5.4 (β) σχετίζονται με τα Α και Β, ενώ το τοπικό μέγιστο σχετίζεται με το υπερβολικό σημείο Ο.

Ορισμός 5.6

Ένα κρίσιμο σημείο x_0 του συστήματος $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ευσταθές** αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t \geq t_0$, έχουμε $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ όταν $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \delta$ όπου $x(t)$ είναι λύση του παραπάνω συστήματος.

Ορισμός 5.7

Ένα κρίσιμο σημείο x_0 του συστήματος $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν είναι ευσταθές και υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0(t)\| = 0 \quad \text{όταν} \quad \|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \eta$$

Μια τροχιά κοντά σε ένα ευσταθές κρίσιμο σημείο θα παραμείνει κοντά σε αυτό το σημείο, ενώ μια τροχιά κοντά σε ένα ασυμπτωτικά ευσταθές κρίσιμο σημείο θα μετακινηθεί όλο και πιο κοντά στο κρίσιμο σημείο καθώς $t \rightarrow \infty$.

Το παρακάτω θεώρημα ισχύει για τα συστήματα $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ και μας βοηθά να βρούμε εκείνο το υποσύνολο του χώρου αποτελείται από όλα τα αρχικά σημεία $x(t_0)$ τα οποία τείνουν στο κρίσιμο σημείο x_0 .

5.3 Το θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov

Έστω το σύστημα $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ με f μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και E ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , το οποίο περιέχει ένα απομονωμένο κρίσιμο σημείο x_0 . Υποθέτουμε

ότι υπάρχει μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, έστω $V(x)$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- $V(x_0) = 0$
- $V(x) > 0$ αν $x \neq 0$

για $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε

1. αν $\dot{V}(x) \leq 0$ για όλα τα $x \in E$, τότε το x_0 είναι ευσταθές.
2. αν $\dot{V}(x) < 0$ για όλα τα $x \in E$, τότε το x_0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
3. αν $\dot{V}(x) > 0$ για όλα τα $x \in E$, τότε το x_0 είναι ασταθές.

(Η συνάρτηση $V(x)$ ονομάζεται **συνάρτηση Lyapunov**)

Απόδειξη

1. Διαλέγουμε μια μικρή γειτονιά N_ε γύρω από το κρίσιμο σημείο x_0 . Για αυτή την περιοχή υποθέτουμε ότι ισχύει $\dot{V}(x) \leq 0$. Άρα μια θετική ισοσταθμική που ξεκινά μέσα στο N_ε παραμένει εγκλωβισμένη εκεί για πάντα. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το ε που έχουμε επιλέξει. Το κρίσιμο σημείο είναι λοιπόν ευσταθές.

2. Αφού $\dot{V}(x) < 0$, τότε η συνάρτηση Lyapunov πρέπει να ελαττώνεται μονότονα σε κάθε μια θετική ισοσταθμική $x(t)$. Έστω φ_t η ροή που ορίζεται από την $f(x)$. Τότε ή $V(\varphi_t) \rightarrow x_0$ για $t \rightarrow \infty$ ή υπάρχει θετική ισοσταθμική $x(t)$ τέτοια ώστε:

$$V(\varphi_t) \geq n > 0 \text{ για όλα τα } t \geq t_0$$

Αφού το x_0 είναι ευσταθές, τότε υπάρχει μια δακτυλιοειδής περιοχή A , η οποία ορίζεται από το $n \leq V(x) \leq c$, η οποία περιέχει αυτή την ισοσταθμική. Έστω $\dot{V}(x)$ πλησιάζει το πάνω όριο στο A έστω $-N$, τότε θα έχουμε:

$$\dot{V}(x) \leq -N < 0, x \in A, N > 0$$

Η ολοκλήρωση μας δίνει:

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) \leq -N(t - t_0)$$

όπου $t > t_0$. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντιπαράθεση με το δεδομένο στο 2. και άρα καμιά διαδρομή δεν πλησιάζει το το κρίσιμο σημείο x_0 . Το κρίσιμο σημείο x_0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

3. Αφού $\dot{V}(x) > 0$ τότε η $V(x)$ συνεχώς μειώνεται πάνω στις τροχιές της. Έστω φ_t η ροή που ορίζεται από την $f(x)$. Τότε $V(\varphi_t) > V(x_0) > 0$ για $t > 0$ σε μια περιοχή N_ε του x_0 . Οπότε

$$V(\varphi_t) - V(x_0) \geq ct \text{ για κάποια σταθερά } c \text{ και } t > 0.$$

Έτσι για όσο θέλουμε μεγάλο t , θα ισχύει :

$$V(\varphi_t) > ct > C \text{ όπου } C \text{ είναι το μέγιστο της συνεχούς } V(x) \text{ στο συμπαγές σύνολο } \overline{N_\varepsilon}.$$

Άρα η φ_t βρίσκεται έξω από το κλειστό σύνολο N_ε και άρα x_0 ασταθές.

Δυστυχώς δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος για την εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov για αυτό και συνήθως δίνεται εξαρχής. Αν $\dot{V}(x)=0$ τότε όλες οι τροχιές βρίσκονται πάνω σε καμπύλες (επιφάνειες για \mathbb{R}^n) που ορίζονται από την $V(x) = C$, όπου C σταθερά. Ο ποσοτικός έλεγχος του $\dot{V}(x)$ μας πληροφορεί για τον ρυθμό μεταβολής του V πάνω στις τροχιές του ή αλλιώς μας πληροφορεί για την κατεύθυνση που οι τροχιές τέμνουν τις καμπύλες του επιπέδου $V(x) = C$.

Παράδειγμα 5.3

Να εξετάσετε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου O , του συστήματος :

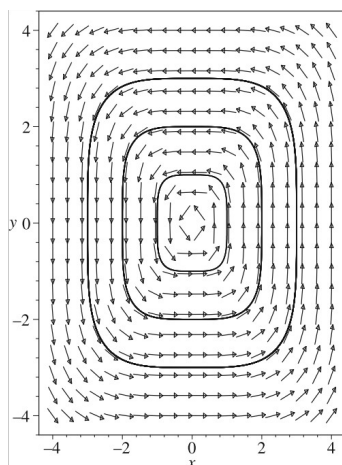
$$\dot{x} = -y^3, \dot{y} = x^3$$

Λύση

Οι ιδιοτιμές είναι και οι δύο μηδενικές και το O είναι το μόνο κρίσιμο σημείο. Μια συνάρτηση Lyapunov για αυτό το σύστημα είναι η $V(x,y) = x^4 + y^4$ και έτσι θα έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 4x^3(-y^3) + 4y^3(x^3) = 0$$

Άρα οι ισοσταθμικές γραμμές βρίσκονται πάνω στις κλειστές καμπύλες του $x^4 + y^4 = C$. Το O είναι λοιπόν ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά σταθερό. Οι τροχιές που ξεκινούν κοντά στο O παραμένουν εκεί αλλά δεν προσεγγίζουν το O ασυμπτωτικά. Αν $y > 0$ τότε $\dot{x} < 0$ και αν $y < 0$ τότε $\dot{x} > 0$. Οι παραπάνω παρατηρήσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



(Σχήμα 5.5: Διάγραμμα φάσεων για το παράδειγμα 3)

Παράδειγμα 5.4

Να εξετάσετε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου O , του συστήματος :

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - y(1 - x^2)$$

χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov: $V(x,y) = x^2 + y^2$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -2x(y) + 2y(-x - y + yx^2) = 2y^2(x^2 - 1)$$

και $\dot{V} < 0$ αν $|x| > 1$. Οπότε $\dot{V} = 0$ αν ή $y = 0$ ή $x = \pm 1$. Όταν $y = 0$, $\dot{x} = 0$ και $\dot{y} = -x$ που σημαίνει ότι οι τροχιές θα φύγουν μακριά από την $y = 0$, όταν $x \neq 0$. Άρα αν οι τροχιές ξεκινούν μέσα στον κύκλο ακτίνας 1 με κέντρο O , τότε θα προσεγγίζει το O ασυμπτωτικά. Άρα το O είναι ασυμπτωτικά σταθερό.

Ορισμός 5.8

Για μια συνάρτηση Lyapunov $V(x,y)$, ορίζουμε το **πεδίο ευστάθειας κατά Lyapunov** την περιοχή όπου ισχύει: $\dot{V}(x,y) < 0$.

Παράδειγμα 5.5

Έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = -8x - xy^2 - 3y^3, \dot{y} = 2x^2y + 2xy^2$$

Να αποδείξετε ότι το O είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov $V(x,y) = 2x^2 + 3y^2$. Να προσδιορίσετε το πεδίο ευστάθειας της $V(x,y)$.

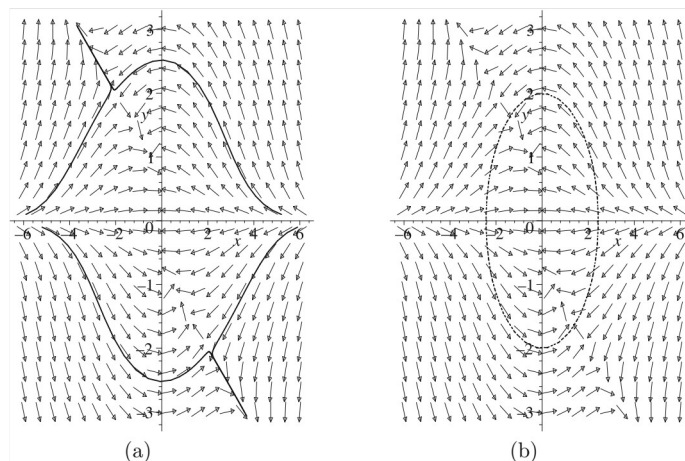
Λύση

Έχουμε:

$$\dot{V} = 4x(-8x - xy^2 - 3y^3) + 6y(2x^2y + 2xy^2) = 8x^2(y^2 - 4)$$

και $\dot{V}(x,y) \leq 0$ όταν $|y| \leq 2$. Άρα $\dot{V} = 0$ όταν $x = 0$ ή $y = \pm 2$. Όταν $x = 0$, $\dot{x} = -3y^3$ και $\dot{y} = 0$ που σημαίνει ότι οι τροχιές θα κινηθούν έξω από την ευθεία $x = 0$ όταν $y \neq 0$. Ισχύει $\dot{V} < 0$ όταν $|y| < 2$ που σημαίνει ότι $\dot{V} < 0$ όσο ισχύει $V(x,y) = 2x^2 + 3y^2 < 12$. Αυτή η περιοχή είναι το πεδίο ευστάθειας κατά Lyapunov.

Οπότε, αν μια τροχιά βρίσκεται όλη μέσα στην έλλειψη $2x^2 + 3y^2 = 12$ τότε θα τείνει ασυμπτωτικά στο O . Άρα το O είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, όπως φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα φάσης.



(Σχήμα 5.6: α) Το διάγραμμα φάσης του παραδείγματος 5. β) Το πεδίο ευστάθειας κατά Lyapunov.)

Παράδειγμα 5.6

Έστω το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = -x + y^2 + 2x^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y + y^2$$

Να αποδείξετε ότι το Ο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σε μια λεκάνη ελκυσμού και να καθορίσετε την λεκάνη ελκυσμού γνωρίζοντας την συνάρτηση Lyapunov $V(x,y) = x^2 + y^2$.

Λύση

Έχουμε από τον τύπο της V ότι :

$$\dot{V} = (2x)(-x + y^2 + 2x^2) + (2y)(-y + y^2) = 2(x^2(-1 + 2x) + y^2(y - 1 + x))$$

Άρα $\frac{dV}{dt} < 0$ για $x < 1/2$ και $y < 1 - x$. Σχεδιάζοντας αυτές τις γραμμές βλέπουμε την λεκάνη ελκυσμού να σχηματίζεται όταν $V(x,y) < \frac{1}{4}$.

Παράδειγμα 5.7

Η συνάρτηση Lyapunov για το περιοδικό μοντέλο δικτύου Hopfield χρησιμοποιώντας τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{x} = -x + 2 \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma \pi x}{2} \right) \right), \quad \dot{y} = -y + 2 \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma \pi y}{2} \right) \right),$$

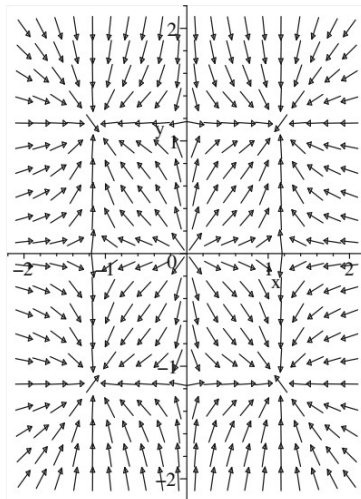
είναι

$$V(a_1, a_2) = -(a_1^2 + a_2^2) - \frac{4}{\gamma \pi^2} \left(\ln \left(\cos \left(\frac{\pi a_1}{2} \right) \right) + \ln \left(\cos \left(\frac{\pi a_2}{2} \right) \right) \right),$$

όπου

$$a_1(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma \pi x}{2} \right) \quad \text{and} \quad a_2(t) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma \pi y}{2} \right)$$

Για $\gamma = 0,7$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα ροής:



(Σχήμα 7 : Το διάγραμμα ροής του δικτύου Hopfield για $\gamma = 0,7$)

Υπάρχουν εννέα κρίσιμα σημεία, από τα οποία τέσσερα είναι ευσταθή και τα πέντε είναι ασταθή.

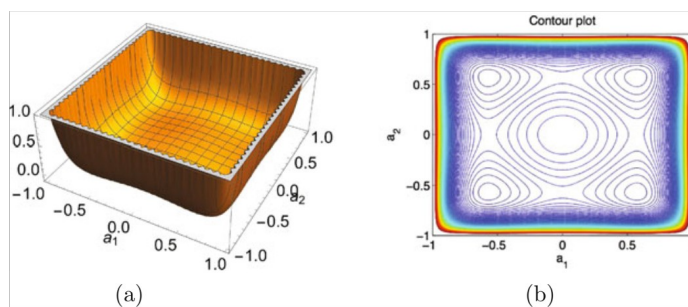
Παράδειγμα 5.8

Να σχεδιάσετε την συνάρτηση $V(a_1, a_2)$, του παραδείγματος 5.7 και τις ισοϋψείς καμπύλες όταν

$$|(\alpha_i)| \leq 1, \text{ για } i=1,2.$$

Λύση

Από το παρακάτω σχήμα της επιφάνεια που σχηματίζει η $V(a_1, a_2)$ για $\gamma = 0,7$ παρατηρούμε ότι έχουμε ένα τοπικό μέγιστο και τέσσερα τοπικά ελάχιστα.



(Σχήμα 8: α) Γραφική παράσταση της συνάρτησης Lyapunov $V(a_1, a_2)$ για $\gamma = 0,7$, β) Ισοϋψείς γραμμές για την $V(a_1, a_2)$ για $\gamma = 0,7$)

Κεφάλαιο 6

6.1 Απεικονίσεις Poincaré.

Όταν σχεδιάζουμε τις λύσεις κάποιων μη γραμμικών προβλημάτων, ο χώρος των φάσεων μπορεί να είναι τόσο πυκνός οπότε να μην μπορούμε να αντιληφθούμε την δομή του. Για τέτοιες περιπτώσεις, ο Henry Poincaré πρότεινε μια μέθοδο στα τέλη του 19ου αιώνα γνωστή ως θεωρία απεικονίσεων Poincaré .

Θεωρούμε ένα αυτόνομο, δισδιάστατο σύστημα της μορφής:

$$\dot{x}=P(x, y), \dot{y}=Q(x, y) \quad (6.1)$$

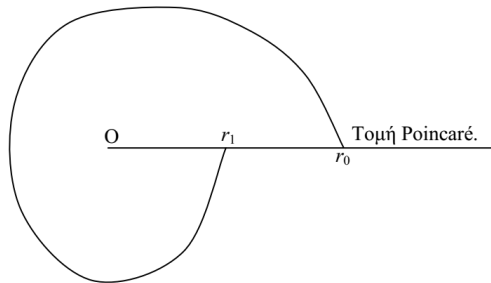
Έστω ότι υπάρχει μια καμπύλη ή ένα ευθύγραμμο τμήμα Σ , η οποία τέμνεται από τις τροχιές του συστήματος, (δεν υπάρχουν τροχιές εφαπτόμενες στην Σ). Τότε, λέμε ότι η Σ είναι **τομή Poincaré**.

Έστω ένα σημείο r_0 , το οποίο βρίσκεται επάνω στην Σ . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1, ακολουθούμε την ροή πάνω στην τροχιά μέχρι αυτή να τμήση ξανά την Σ στο σημείο r_1 . Αυτό το σημείο ονομάζεται **πρώτη επιστροφή** της διακριτής απεικόνισης Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ όπου ορίζεται :

$$r_{n+1} = P(r_n)$$

όπου το r_n απεικονίζεται στο r_{n+1} και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω στην γραμμή Σ . Η εύρεση της συνάρτησης P είναι ισοδύναμη με το να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (6.1).

Δυστυχώς, αυτό είναι πολύ σπάνια δυνατό και θα πρέπει να βασιστούμε σε αριθμητικές λύσεις για να εξαγάγουμε κάποια αποτελέσματα.



(Σχήμα 6.1 Πρώτη συνάντηση σε μια γραμμή Σ , Poincaré)

Ορισμός 6.1

Ένα σημείο r^* , το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση $P(r^*) = r^*$, ονομάζεται σταθερό σημείο περιόδου 1.

Για να μπορέσουμε καταλάβουμε την λειτουργία της μεθόδου, με την οποία βρίσκουμε τις απεικονίσεις Poincaré, θα εξετάσουμε τα παρακάτω δύο απλά παραδείγματα, για τα οποία η P μπορεί να οριστεί πλήρως.

Παράδειγμα 6.1

Θεωρούμε την γραμμή

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

Να βρείτε την απεικόνιση Poincaré του συστήματος:

$$\dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \quad (6.2)$$

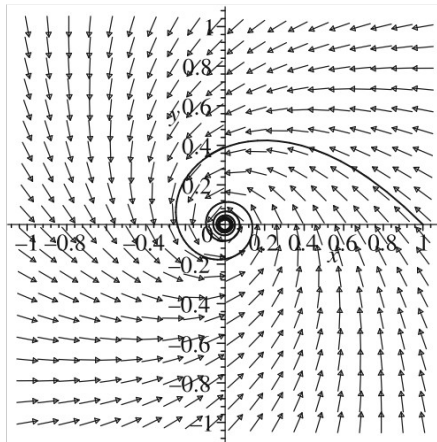
και να βρεθούν οι οκτώ πρώτες επιστροφές στο Σ για $r_0 = 1$.

Λύση

Για να λύσουμε το σύστημα το μετατρέπουμε σε σύστημα με πολικές συντεταγμένες και έτσι γράφεται :

$$\dot{r} = -r^2, \dot{\theta} = 1 \quad (6.3)$$

Το $O(0,0)$ είναι ευσταθές και αφού $\dot{\theta} = 1$ τότε είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο, ενώ η φορά της ροής, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.



(Σχήμα 6: Η τροχιά ξεκινά από το $(1,0)$, με $0 \leq t \leq 40$ για το σύστημα 6.3)

Το σύστημα των εξισώσεων $\dot{r} = -r^2, \dot{\theta} = 1$ μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $r(0) = 1$ και $\theta(0) = 0$. Τότε η λύση είναι :

$$r(t) = \frac{1}{1+t}, \theta(t) = t$$

Οι τροχιές ρέουν γύρω από το $O(0,0)$ με περίοδο 2π . Αντικαθιστώντας το t , η ροή ορίζεται από τον τύπο:

$$r(t) = \frac{1}{1+\theta(t)}$$

Η φορά της ροής είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού και οι επιστροφές πάνω στη Σ συμβαίνουν με περίοδο 2π , δηλαδή $\theta = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

Η συνάρτηση που βρίσκει αυτά τα σημεία πάνω στο Σ , είναι η:

$$r_n = \frac{1}{1+2n\pi}$$

Καθώς το $n \rightarrow \infty$, η ακολουθία των σημείων προσεγγίζει το κρίσιμο σημείο $O(0,0)$ όπως και αναμενόταν.

Έτσι θα έχουμε :

$$r_{n+1} = \frac{1}{1+2(n+1)\pi}$$

Οπότε τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε την απεικόνιση επιστροφής P , η οποία έχει τύπο:

$$r_{n+1} = P(r_n) = \frac{r_n}{1+2\pi r_n}.$$

Οι πρώτες οκτώ επιστροφές πάνω στην Σ , είναι στα σημεία $r_0=1$, $r_1=0,13730$, $r_2=0,07371$, $r_3=0,05038$, $r_4=0,03827$, $r_5=0,03085$, $r_6=0,02484$, $r_7=0,02223$, $r_8=0,01951$ με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων.

Παράδειγμα 6.2

Χρησιμοποιώντας μια μονοδιάστατη απεικόνιση πάνω στην ημιευθεία :

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < \infty, y = 0\}$$

να προσδιορίσετε την ευστάθεια του οριακού κύκλου του παρακάτω συστήματος:

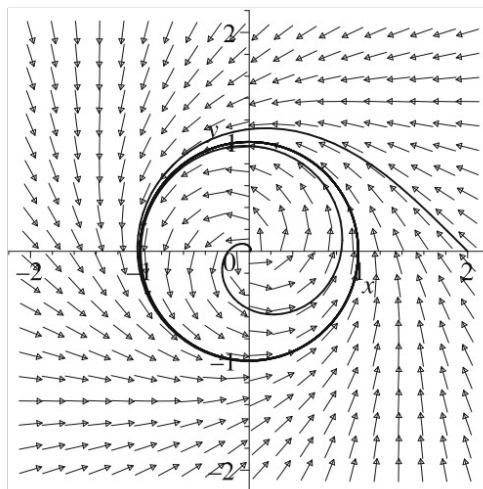
$$\dot{x} = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), \dot{y} = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (6.4)$$

Λύση

Μετατρέπουμε, όπως πριν, το σύστημα σε σύστημα με πολικές συντεταγμένες, οπότε γράφεται:

$$\dot{r} = r(1-r), \dot{\theta} = 1 \quad (6.5)$$

Έχουμε μόνο ένα κρίσιμο σημείο, το $O(0,0)$ και υπάρχει ένας οριακός κύκλος, έστω Γ , με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνας 1. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα φάσης του συστήματος (σχήμα 6.3):



(Σχήμα 6.3: Δύο τροχιές του συστήματος με την μία να αρχίζει στο $(2,0)$ και την άλλη στο $(0,1,0)$)

Το παραπάνω σύστημα των πολικών συντεταγμένων μπορεί να λυθεί, αφού και οι δύο διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες και χωριζομένων μεταβλητών. Έτσι έχουμε

$$r(t) = \frac{1}{1 + C e^{-t}}, \theta(t) = t + \theta_0$$

όπου C και θ_0 είναι σταθερές. Οι τροχιές κινούνται γύρω από την αρχή $O(0,0)$ με περίοδο 2π . Ας υποθέσουμε ότι μια τροχιά ξεκινά έξω από τον οριακό κύκλο Γ , πάνω στην τομή Σ , π.χ από το σημείο $r_0 = 2$. Δηλαδή έχουμε αρχικές συνθήκες $r(0) = 2$, $\theta(0) = 0$. Οι αντίστοιχες λύσεις τότε θα είναι:

$$r(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-t}}, \theta(t) = t.$$

Οπότε η απεικόνιση επιστροφής θα είναι :

$$r_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-2n\pi}}$$

όπου n φυσικός αριθμός.

Αν τώρα η τροχιά ξεκινά από το εσωτερικό του Γ , έστω από το σημείο $r_0 = 1/2$, τότε η αντίστοιχη λύση θα είναι :

$$r(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \theta(t) = t.$$

και η απεικόνιση επιστροφής θα είναι :

$$r_n = \frac{1}{1 + e^{-2n\pi}}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, $r_n \rightarrow 1$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής και από τις δύο πλευρές και ο οριακός κύκλος Γ είναι υπερβολικός, ευσταθής αφού $r_n \rightarrow 1$ καθώς το $n \rightarrow \infty$ για κάθε αρχικό σημείο εκτός του $(0,0)$. Ένας οριακός κύκλος λέγεται **υπερβολικός ευσταθής κύκλος** εάν για μια μικρή διαταραχή εξακολουθεί να είναι δομικά ευσταθής κύκλος. Ανάλογα ορίζεται ο **υπερβολικός ασταθής κύκλος**.

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει μια καλύτερη μέθοδο για τον καθορισμό της ευστάθειας ενός οριακού κύκλου.

Θεώρημα 6.1

Ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολλαπλασιαστή το M** με :

$$M = \left. \frac{dP}{dr} \right|_{r^0}$$

όπου r^0 είναι ένα σταθερό σημείο της απεικόνισης Poincaré που αντιστοιχεί σ' έναν οριακό κύκλο Γ . Τότε αν:

1. $|M| < 1$, ο Γ είναι ένας υπερβολικός ευσταθής οριακός κύκλος
2. $|M| > 1$, ο Γ είναι ένας υπερβολικός ασταθής οριακός κύκλος
3. $|M| = 1$ και $\frac{d^2P}{dr^2} \neq 0$, τότε ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής από την μία πλευρά και ασταθής από την άλλη. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο Γ είναι ημιευσταθής οριακός κύκλος.

(Το Θεώρημα 6.1 αναφέρεται μερικές φορές και ως το κριτήριο της παραγώγου της απεικόνισης Poincaré.)

Ορισμός 6.2

Ένα σταθερό σημείο περιόδου ένα, έστω r^0 , μιας απεικόνισης Poincaré καλείται **υπερβολικό** αν $|M| \neq 1$.

Παράδειγμα 6.3

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1 να καθορίσετε την ευστάθεια του οριακού κύκλου του παραπάνω παραδείγματος 6.2.

Λύση

Έχουμε το σύστημα:

$$\dot{r} = r(1-r), \dot{\theta} = 1$$

Η απεικόνιση επιστροφής Σ δίνεται από την:

$$r_n = \frac{1}{1 + Ce^{(-2n\pi)}} \quad (6.6)$$

όπου C είναι σταθερά. Επομένως,

$$r_{n+1} = \frac{1}{1 + Ce^{-2(n+1)\pi}} \quad (6.7)$$

Λύνοντας την (6.6) ως προς C , έχουμε:

$$C = \frac{1-r_n}{r_n e^{2n\pi}}$$

και αντικαθιστώντας στην (6.7), μας δίνει την απεικόνιση Poincaré:

$$r_{n+1} = P(r_n) = \frac{r_n}{r_n + (1-r_n)e^{-2\pi}}$$

Η απεικόνιση Poincaré έχει δύο σταθερά σημεία, ένα στο μηδέν (τετριμμένο σταθερό σημείο) και το άλλο στο $r^0 = 1$, που αναφέρονται στο κρίσιμο σημείο στην αρχή και τον οριακό κύκλο Γ , αντίστοιχα. Οπότε

$$\frac{dP}{dr} = \frac{e^{-2\pi}}{(r+(1-r)e^{-2\pi})^2}$$

και με υπολογισμούς έχουμε:

$$\left. \frac{dP}{dr} \right|_{r=1} = e^{-2\pi} \approx 0.00187 < 1$$

και άρα ο οριακός κύκλος Γ είναι υπερβολικός ευσταθής οριακός κύκλος (ελκυστής).

Ορισμός 6.3:

Ένα σημείο r^0 το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση $P^m(r^0) = r^0$ καλείται **σταθερό σημείο περιόδου m** .

Παράδειγμα 6.4

Θεωρούμε την απεικόνιση Poincaré:

$$r_{n+1} = P(r_n) = e^{i2\pi \frac{q_1}{q_2}} r_n,$$

η οποία απεικονίζει σημεία του μοναδιαίου κύκλου στον εαυτό του. Εάν $r_0 = 1$ να σχεδιαστεί η απεικόνιση Poincaré για τις παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις:

(α) $q_1=0, q_2=1$

(β) $q_1=1, q_2=2$

(γ) $q_1=2, q_2=3$

(δ) $q_1=1, q_2 = \sqrt{2}$

Να εξηγηθούν τα αποτελέσματα των Σχημάτων 6.4 (α)-(δ).

Λύση

Αρχικά θα εξετάσουμε εάν η απεικόνιση:

$$P = e^{i2\pi \frac{q_1}{q_2}}$$

είναι περιοδική και ποια είναι η περίοδό της.

Έστω ότι η P είναι περιοδική με περίοδο m . Τότε

$$P_m(r_0) = (r_0) \Rightarrow e^{i2\pi \frac{q_1}{q_2} m} r_0 = r_0 \Rightarrow 2\pi \frac{q_1}{q_2} m = 2\pi k \Rightarrow m = \frac{q_1}{q_2} k$$

Όμως m, k είναι ακέραιοι αριθμοί, άρα από την παραπάνω εξίσωση έχουμε: $k = q_1$ και επομένως $m = q_2$. Άρα η απεικόνιση $P = e^{i2\pi \frac{q_1}{q_2}}$ είναι περιοδική με περίοδο q_2 .

(α) Το $q_2=1$ και άρα η P είναι περιόδου 1. Κάθε αρχικό σημείο, όπως το $r_0=1$ απεικονίζεται συνέχεια στον εαυτό του αφού:

$$r_{n+1} = P(r_n) = e^0 r_n = r_n.$$

Στο Σχήμα 6.4(α), παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο περιόδου 1, το $r_0 = 1$. Το σταθερό σημείο είναι πάντα η αρχική τιμή.

(β) Σε αυτή την περίπτωση το $q_2 = 2$ και η P είναι περιόδου 2. Κάθε αρχικό σημείο, όπως το $r_0=1$ απεικονίζεται στο:

$$r_1 = P(r_0) = e^{i2\pi\frac{1}{2}} 1 = -1$$

και στη συνέχεια το r_1 απεικονίζεται στο r_0 αφού:

$$r_2 = P(r_1) = e^{i2\pi\frac{1}{2}} (-1) = 1 = r_0$$

Στο Σχήμα 6.4(β) παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 σταθερά σημεία περιόδου 2, τα -1 και 1.

$$r_{n+2} = P^2(r_n) = P(P(r_n)) = P(e^{i2\pi\frac{1}{2}} r_n) = e^{i2\pi\frac{1}{2}} e^{i2\pi\frac{1}{2}} r_n = e^{i2\pi} r_n = r_n$$

(γ) Σε αυτή την περίπτωση το $q_2 = 3$ και η P είναι περιόδου 3. Κάθε αρχικό σημείο, όπως το $r_0=1$ απεικονίζεται στο:

$$r_1 = P(r_0) = e^{i2\pi\frac{2}{3}} 1 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

το r_1 στο r_2 , με :

$$r_2 = P(r_1) = P^2(r_0) = e^{i2\pi\frac{2}{3}2} 1 = e^{i2\pi\frac{4}{3}} 1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

και τέλος το r_2 στο r_3 που είναι το αρχικό r_0 :

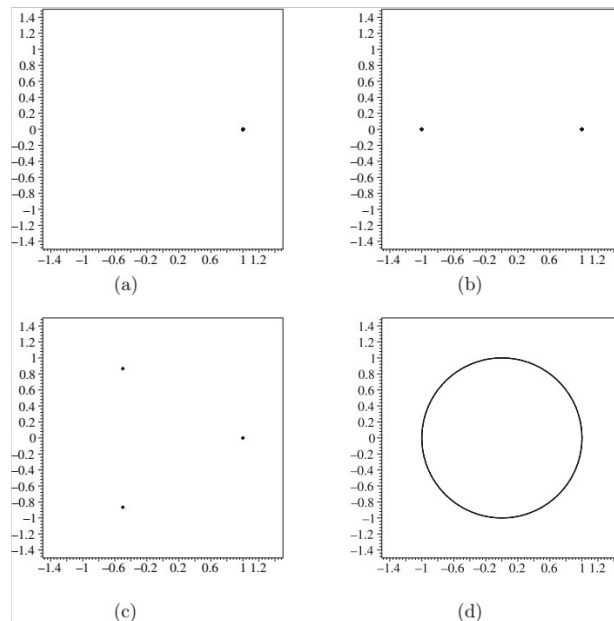
$$r_3 = P(r_2) = P^3(r_0) = e^{i2\pi\frac{2}{3}3} 1 = e^{i4\pi} 1 = r_0$$

Στο Σχήμα 6.4(γ) παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 σταθερά σημεία περιόδου 3, τα $1, \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(δ) Στην αυτή την περίπτωση τα q_1 και q_2 είναι ρητώς ανεξάρτητα αφού η σχέση $c_1 q_1 + c_2 q_2 = 0$ με c_1 και c_2 ακέραιους, ικανοποιείται μόνο όταν $c_1 = c_2 = 0$.

Αυτό μας δίνει ότι τα σημεία στην απεικόνιση ποτέ δεν επαναλαμβάνονται και δεν έχουμε περιοδική τροχιά. Δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $r_{n+m} = P^m(r_n) = r_n$. Το σχήμα (6.4(δ)) μας δείχνει τα πρώτα 1000 σημεία της απεικόνισης. Εάν ο αριθμός των επαναλήψεων έτεινε στο άπειρο, τότε σχηματίζεται ένας κλειστός κύκλος αφού τα νέα σημεία θα προσέγγιζαν άλλα σημεία οσοδήποτε κοντά. Αυτό το νέο είδος ποιοτικής συμπεριφοράς, που δεν έχουμε

συναντήσει μέχρι τώρα, λέγεται **ημιπεριοδικότητα**. Πρέπει να ξεχωρίζουμε τα ημιπεριοδικά σημεία από τα σημεία μεγάλης περιόδου. Για παράδειγμα το Σχήμα 6.4(δ) θα μπορούσε να απεικονίζει μια τροχιά μεγάλης περιόδου, π.χ περιόδου 1000.



Σχήμα 6.4: (α) Σταθερό σημείο περιόδου ένα, (β) Σταθερά σημεία περιόδου 2, (γ) Σταθερά σημεία περιόδου 3, (δ) Ημιπεριοδική συμπεριφορά.

6.2. Hamiltonian Συστήματα με δύο Βαθμούς Ελευθερίας

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε τα Hamiltonian συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας. Όπως αναφέραμε, αυτά τα συστήματα πάντα μπορούν να ολοκληρωθούν πλήρως.

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε (σε συντομία) τα Hamiltonian (ή συντηρητικά) συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας όμως με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αναλύσουμε και Hamiltonian συστήματα με n ή και άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

Το σύνολο των Hamiltonian συστημάτων με δύο βαθμούς ελευθερίας δεν είναι πάντα εντελώς ολοκληρώσιμα και όσα είναι, σχηματίζουν ένα πολύ περιορισμένο αλλά σημαντικό υποσύνολο. Οι τροχιές αυτών των συστημάτων βρίσκονται σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων και η συνολική δομή τους μπορεί να κατανοηθεί κατασκευάζοντας απεικονίσεις Poincaré. Όπως γνωρίζουμε τα πλήρως ολοκληρώσιμα συστήματα παρουσιάζουν αξιοσημείωτη κανονική συμπεριφορά σε όλα τα μέρη του χώρου των φάσεων τους, κάτι που έρχεται σε πλήρη αντίθεση με το τι συμβαίνει σε μη ολοκληρώσιμα συστήματα, τα οποία μπορεί να παρουσιάζουν μια ευρεία ποικιλία φαινομένων συμπεριλαμβανομένης της χαοτικής συμπεριφοράς. Παρακάτω δίνεται ένας σύντομος ορισμός ολοκληρωσιμότητας καθώς και ένας ορισμός για τα Hamiltonian συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Ορισμός 6.4

Ένα Hamiltonian σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad (6.8)$$

όπου H είναι η Hamiltonian του συστήματος.

Στις φυσικές εφαρμογές, τα q_1 και q_2 είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες και τα p_1 και p_2 οι γενικευμένες ορμές. Η Hamiltonian μπορεί να εκφραστεί ως:

$$H(p,q) = K_E(p,q) + V_E(p,q)$$

όπου K_E και V_E είναι η κινητική και η δυναμική ενέργεια αντίστοιχα.

Ορισμός 8.5

Το παραπάνω Hamiltonian σύστημα (6,8) με δύο βαθμούς ελευθερίας, είναι ολοκληρώσιμο εάν το σύστημα έχει δύο ολοκληρώματα, έστω F_1 και F_2 , τέτοια ώστε:

$$\{F_1, H\} = 0, \{F_2, H\} = 0, \{F_1, F_2\} = 0,$$

όπου τα F_1, F_2 και είναι συναρτησιακά ανεξάρτητα και οι αγκύλες $\{ , \}$ που εμφανίζονται είναι οι λεγόμενες αγκύλες Poisson, οι οποίες ορίζονται με τον εξής τρόπο:

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q}$$

Μερικά από τα χαρακτηριστικά των δυναμικών συστημάτων, που σχετίζονται με αυτό το είδος συστήματος, θα τα περιγράψουμε στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.5

Θεωρούμε το Hamiltonian σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας που δίνεται από την:

$$H(p,q) = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) \quad (6.9)$$

το οποίο είναι ολοκληρώσιμο με ολοκληρώματα που δίνονται από:

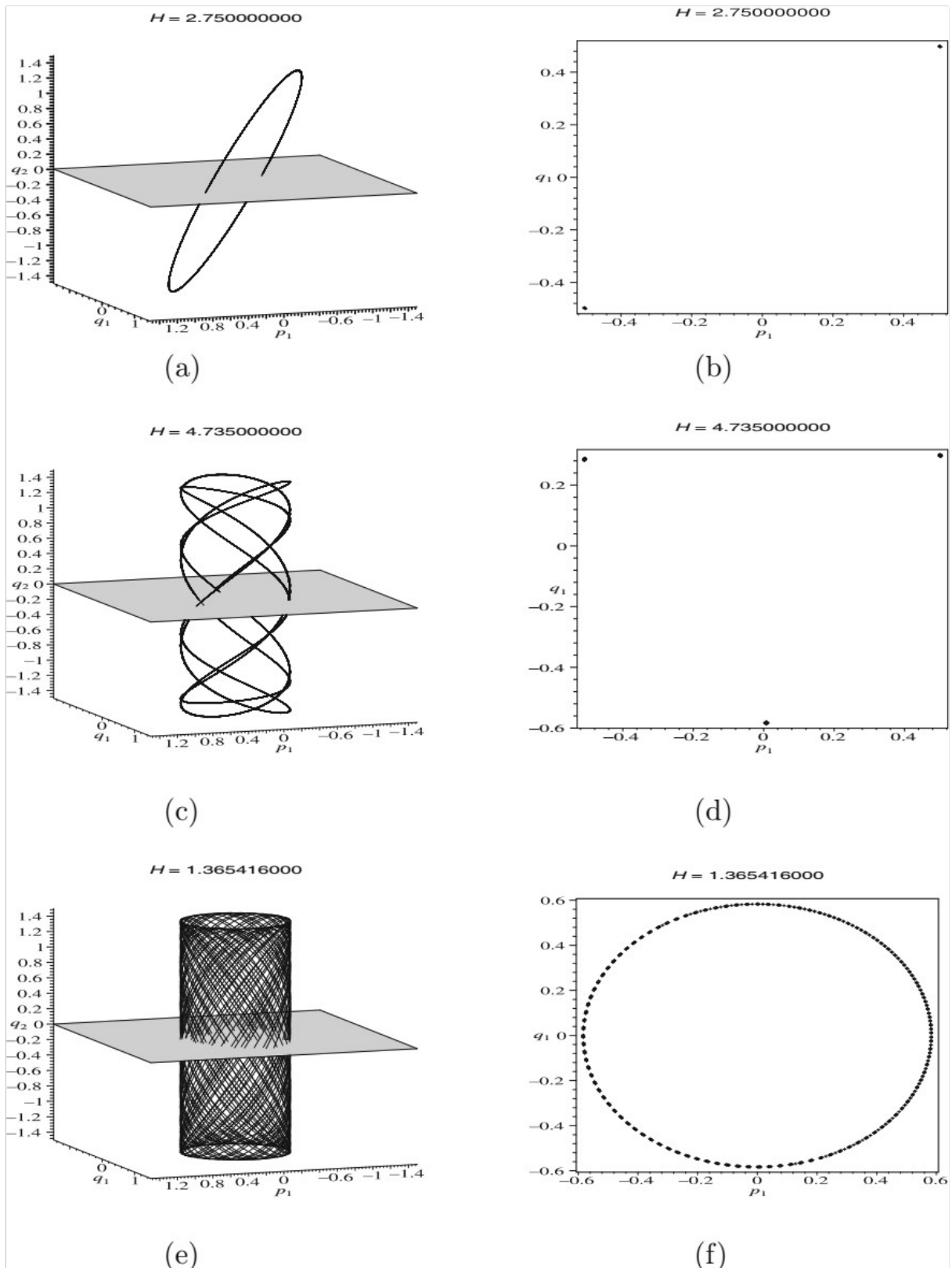
$$F_1 = (p_1^2 + q_1^2) \text{ και } F_2 = (p_2^2 + q_2^2)$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση ενός γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή δύο βαθμών ελευθερίας. Να σχεδιάσετε τρισδιάστατες και δισδιάστατες προβολές της τομής Poincaré, για το σύστημα (6.9) δεδομένου των ακόλουθων αρχικών συνθηκών για τα p_1, p_2 και q_1, q_2 για :

- (i) $\omega_1 = \omega_2 = 2$ με αρχικές συνθήκες $t = 0, p_1 = 0.5, p_2 = 1.5, q_1 = 0.5, q_2 = 0$.
- (ii) $\omega_1 = 8, \omega_2 = 3$ με αρχικές συνθήκες $t = 0, p_1 = 0.5, p_2 = 1.5, q_1 = 0.3, q_2 = 0$.
- (iii) $\omega_1 = \sqrt{2}, \omega_2 = 1$ με αρχικές συνθήκες $t = 0, p_1 = 0.5, p_2 = 1.5, q_1 = 0.3, q_2 = 0$.

Λύση

Με τη βοήθεια του Mathematica σχεδιάζουμε τις τρισδιάστατες και δισδιάστατες προβολές της τομής Poincaré, για το σύστημα (6.9) και σε σχέση με τις αρχικές συνθήκες για τα p_1, p_2 και q_1, q_2 .



(Σχήμα 6.5: Τομές Poincaré για το σύστημα 6.9 όταν (a)-(b) $\omega_1 = \omega_2 = 2$, (c)-(d) $\omega_1 = 8, \omega_2 = 3$ και (e)-(f) $\omega_1 = \sqrt{2}, \omega_2 = 1$. Οι αρχικές συνθήκες περιγράφονται στην εκφώνηση του παραδείγματος (6.5))

Τα αποτελέσματα μπορούν να ερμηνευτούν ως εξής: στις περιπτώσεις (i) και (ii) οι λύσεις είναι περιοδικές ενώ στην περίπτωση (iii) η λύση είναι ημιπεριοδική. Για την ημιπεριοδική λύση,

μια κλειστή καμπύλη θα σχηματιστεί στο επίπεδο p_1, q_1 καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο. Ο ημιπεριοδικός κύκλος ποτέ δεν κλείνει στον εαυτό του, παρ' όλα αυτά η κίνηση δεν είναι χαοτική. Οι τροχιές είναι περιορισμένες σε αναλλοίωτους τόρους.

Παράδειγμα 8.6

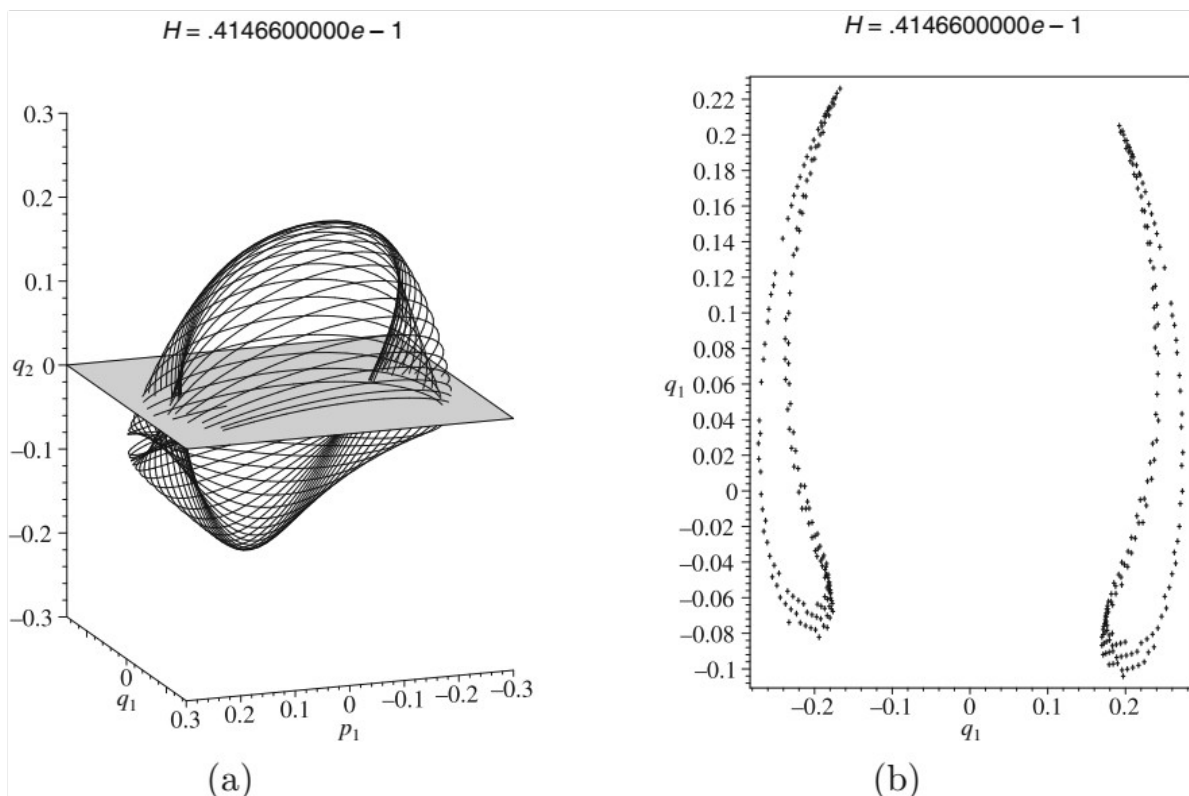
Θεωρούμε το Hamiltonian σύστημα Henon-Heiles (το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα απλό μοντέλο της κίνησης ενός αστεριού στο εσωτερικό ενός γαλαξία), το οποίο περιγράφεται από την :

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}$$

Το παραπάνω σύστημα αντιπροσωπεύει δύο απλούς αρμονικούς ταλαντωτές συνδεδεμένους με έναν κυβικό όρο. Η Hamiltonian σε αυτή την περίπτωση είναι μη ολοκληρώσιμη. Να σχεδιάσετε τρισδιάστατες και δισδιάστατες προβολές της τομής Poincaré για το παραπάνω σύστημα με τις αρχικές συνθήκες:

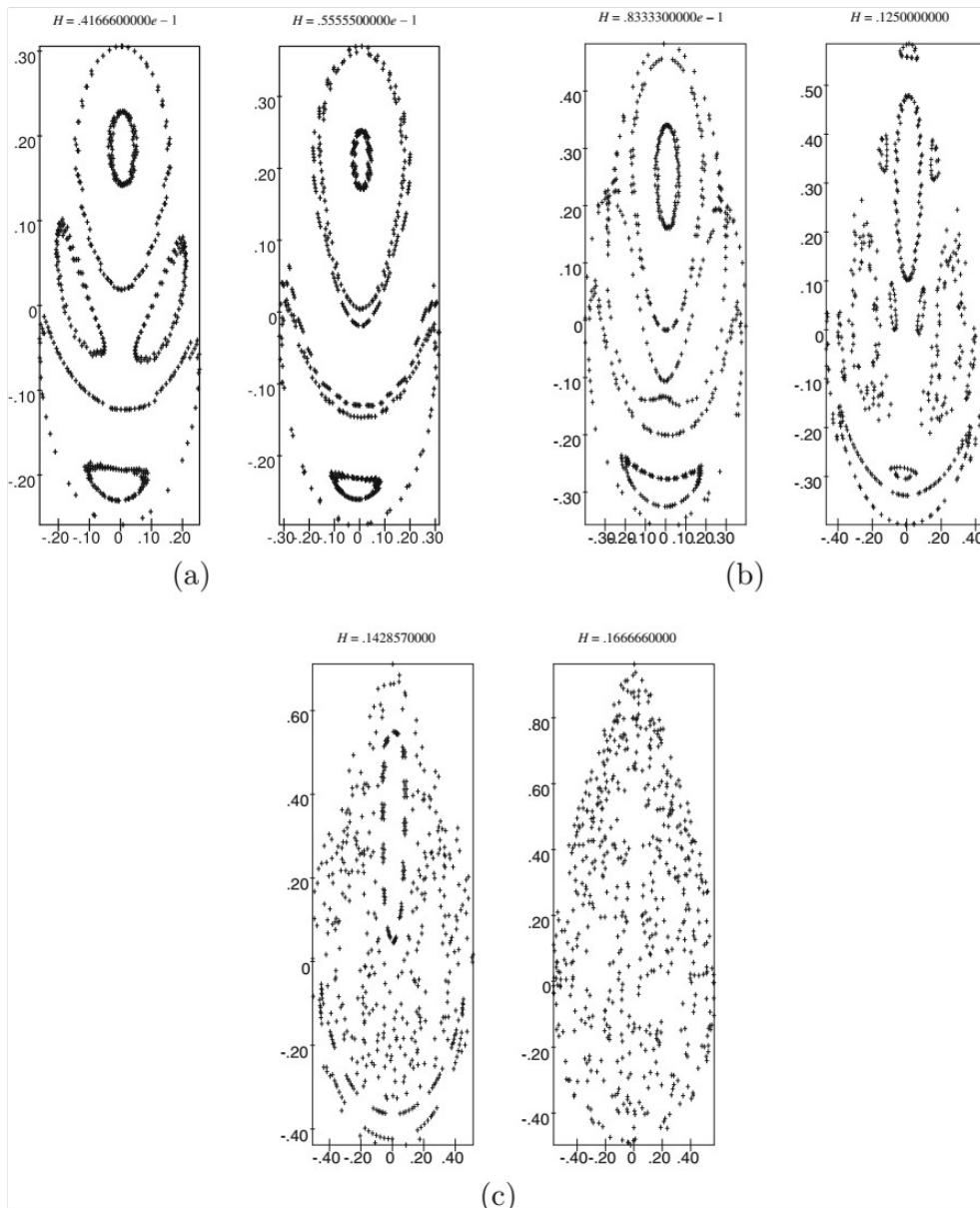
$$t=0, p_1=0,06, p_2=0,1, q_1=-0,2, q_2=-0,2$$

Λύση



(Σχήμα 6.7: (a) Τρισδιάστατη τομή Poincaré και (b) Δισδιάστατη τομή Poincaré για το σύστημα Henon – Heiles με $E = 0,041466$)

Παρατηρούμαι μια πλούσια ποικίλη συμπεριφορά στην τομή Poincaré καθώς αυξάνονται τα επίπεδα ενέργειας.



(Σχήμα 6.7: Δισδιάστατη τομή Poincaré για το σύστημα Henon – Heiles με διαφορετικά επίπεδα ενέργειας. Η ομαλότητα των καμπύλων στα (p,q) επίπεδα συνδέεται με την ολοκληρωσιμότητα του συστήματος).

Συγκεκριμένα στο σχήμα 6.7, διαφαίνεται ότι καθώς τα επίπεδα της ενέργειας αυξάνονται από 0,041666 σε 0,166666, οι κλειστές τροχιές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν την ημιπεριοδική συμπεριφορά, αντικαθιστώνται από μη κανονικές εικόνες και τελικά το επίπεδο Poincaré φαίνεται να βουλιάζει στο χάος.

Σχετικά με τις παραπάνω παρατηρήσεις, υπάρχει επίσης ένα διάσημο θεώρημα από τους Kolmogorov, Arnold, και Moser, γνωστό ως το θεώρημα KAM.

Θεώρημα 6.3

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια Hamiltonian σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας, το οποίο δίνεται από τη μορφή $H = H_0 + \varepsilon H_1$, όπου ε είναι μια μικρή παράμετρος, η H_0 είναι ολοκληρώσιμη και η H_1 κάνει την H μη ολοκληρώσιμη. Οι ημιπεριοδικοί κύκλοι, γνωστοί και ως τόροι KAM, οι

οποίοι υπάρχουν όταν $\varepsilon = 0$, θα υπάρχουν και όταν $0 < \varepsilon \ll 1$ αλλά θα παραμορφώνονται από την διαταραχή. Οι τόροι του θεωρήματος KAM διαλύονται ένας - ένας καθώς αυξάνεται το ε και τα σημεία αρχίζουν να διασπείρονται γύρω από το επίπεδο Poisson. Μια παρόμοια συμπεριφορά μπορούμε να δούμε στο παραπάνω σχήμα 6.7.

Βιβλιογραφία

- [1] Αγγελική Μελιγαλιωτη, Εφαρμογές του λογισμού των μεταβολών στη φυσική, Διπλωματική εργασία, Σχολή θετικών σπουδών και τεχνολογίας, Ε.Α.Π, 2017
- [2] Αριστοτέλης. Περί Ουρανού. Βιβλίο Δεύτερο.
- [3] A. Bacciotti and L. Rosier, Liapunov Functions and Stability in Control Theory, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [4] A.V. Bolsinov and A.T. Fomenko, Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification, CRC Press, 2004.
- [5] A.N. Michel, Ling Hou and Derong Liu, Stability of Dynamical Systems: On the Role of Monotonic and Non-Monotonic Lyapunov Functions (Systems & Control: Foundations & Applications), Birkh" auser, Boston, 2015.
- [6] Acheson, D., From Calculus to Chaos: An Introduction to Dynamics, Oxford University Press, 1997.
- [7] Arnold, V.I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, 1978.
- [8] Blanchard Philippe & Erwin Brunning. Variational Principle in Mathematical Physics: A Unified Approach. Oxford University Press.
- [9] Brizard J. Alain. An introduction to Lagrangian Mechanics. 2007.
- [10] Boyce, W. E. & DiPrima, R. C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, eighth edition, John Wiley & Sons, 2004.
- [11] C-ODE-E (Consortium for ODE Experiments), ODE Architect: The Ultimate ODE Power Tool, John Wiley, New York, 1999.
- [12] Coddington, E.A. & Levinson, N. Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1984.
- [13] Δημήτρης Τριπιντής, Εισαγωγή στο λογισμό των μεταβολών, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιου Αιγαίου, 2008
- [14] D. Logan. *Εφαρμοσμένα μαθηματικά*. Απόδοση στα ελληνικά: Βασίλης Δουγαλής, Δημήτρης Μητσούδης και Ιωάννης Στρατής. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (2002).
- [15] E.S. Cheb-Terrab and H. P. de Oliveira, Poincar' e sections of Hamiltonian systems, Comput. Phys. Comm., 95 (1996), 171.
- [16] E.S. Cheb-Terrab and H. P. de Oliveira, Poincar' e sections of Hamiltonian systems, Comput. Phys. Comm., 95 (1996), 171.
- [17] E.S. Cheb-Terrab and H. P. de Oliveira, Poincar' e sections of Hamiltonian systems, Comput. Phys. Comm., 95 (1996), 171.

- [18] Ferguson James. A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications.
- [19] Fowlers G.R. & Cassiday G. L. Analytical Mechanics. 2004.
- [20] Goldstein H. , Poole Jr. C. P. & Safko J. L. Classical Mechanics. 2001.
- [21] G.M. Zaslavsky, Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics, Oxford University Press, Oxford, UK, 2008.
- [22] G.M. Zaslavsky, Physics of Chaos in Hamiltonian Systems, World Scientific, Singapore, 1998
- [22] H. Goldstein. *Κλασική Μηχανική*. Απόδοση στα Ελληνικά: Γ. Τζιβανίδης. Εκδόσεις Πουρναρά, Θεσσαλονίκη (1980).
- [23] I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer. *Μαθηματικά για φυσικούς και μηχανικούς*. Απόδοση στα ελληνικά: Θ. Γραμμένος και Α. Σπανού. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα (2001).
- [24] J. E. Marsden και A. J. Tromba. *Διανυσματικός λογισμός*. Μεταφραση: Απόστολος Γιαννόπουλος. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (2003).
- [25] J.P. Lasalle, Stability by Liapunov's Direct Method: With Applications, Academic Press, New York, 1961.
- [26] J. Llibre, R. Moeckel, C. Sim' o, Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems (Advanced Courses in Mathematics – CRM Barcelona), Birkh' auser, Boston, 2015.
- [27] J.H. Lowenstein, Essentials of Hamiltonian Dynamics, Cambridge University Press, 2012.
- [28] J. Moser, Recent developments in the theory of Hamiltonian systems, Siam Review, 28-4 (1986), 459–485.
- [29] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.
- [30] Kibble T. W. B. & Bershire F. H. Classical Mechanics. 2004.
- [31] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., Mechanics (Course of Theoretical Physics, Volume I), third edition, Butterworth-Heinemann, 1995.
- [32] L.M. Surhone (Editor), M.T. Timpledon (Editor), S.F. Marseken (Editor), Poincar' e Map: Mathematics, Dynamical System, Henri Poincar' e, Orbit, State Space, Dynamical System, Transversality, Flow, Recurrence Plot, Apsis, Betascript Publishers, 2010.
- [33] M. Pettini, Geometry and Topology in Hamiltonian Dynamics and Statistical Mechanics (Interdisciplinary Applied Mathematics), Springer-Verlag, New York, 2007.
- [34] Malham J. A. Simon . An Introduction to Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. 2016.
- [35] Peter J. Olver. Introduction to the Calculus of Variations.

- [36] P. Galison, *Einstein's Clocks and Poincaré's Maps*, W.W. Norton and Company, London, 2004.
- [37] P. Pokorny, I. Schreiber and M. Marek, On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator, *Chaos, Solitons and Fractals* 7 (1996), 409–424.
- [38] R. Douglas Gregory, *Classical Mechanics*, Cambridge, 2006.
- [39] R.L. Devaney, M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2nd ed., Academic Press, New York, 2003.
- [40] Stephen Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*, Birkhauser, Boston 2007
- [41] Stone Michael & Goldbart Paul. *Mathematics for Physics*.
- [42] Struwe M. *Variational Methods*. Springer, 1996.
- [39] S.S. Abdullaev, *Construction of Mappings for Hamiltonian Systems and their Applications (Lecture Notes in Physics)*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [40] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747–817.
- [41] Thornton, S. T. & Marion, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. 1996.
- [42] Turner Carl. *Variational Principles*. 2012.
- [43] V.V. Nemitskii and V.V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1960.
- [44] W.H. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [45] Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 2000.