

ΧΑΙΡΙΚΑΚΗΣ ΜΑΡΚΟΣ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ
ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ: ΑΠΟ ΤΟ
ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΩΣ ΤΗΝ
ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗ
ΔΙΑΔΟΣΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,
Πάτρα 2024

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθ. Νικόλαος Καραχάλιος (Επιβλέπων Α')
Τμήμα Μαθηματικών
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Καθ. Μαρία Χατζηνικολάου (Επιβλέπων Β')
Τμήμα Μαθηματικών
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Στους γιους μου, Αντώνη και Αλέξη

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή, βασίζεται στην μελέτη θεμάτων, που μου προτάθηκαν από τον Επιβλέποντα Καθηγητή, κ. Νικόλαο Καραχάλιο, τον οποίο ευχαριστώ θερμά για την ολόπλευρη και ευγενική του υποστήριξη και καθοδήγηση.

Μάρκος Χαιρικάκης

Σεπτέμβριος 2024

Σύνοψη των αποτελεσμάτων της εργασίας

Η μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS),

$$iu_t + \rho u_{xx} + \delta |u|^2 u = 0,$$

αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη, και καθολικά μοντέλα, για την μη-γραμμική κυματική διάδοση. Εμφανίζεται ως μαθηματικό μοντέλο, του οποίου η εφαρμογή ξεκινά από την περιγραφή κυματικών φαινομένων, σε υδάτινα κύματα, ως την μη-γραμμική οπτική, την φυσική της συμπυκνωμένης ύλης, αλλά και την μαθηματική βιολογία. Ανάλογης σημασίας, είναι και οι σημαντικές παραλλαγές της εξίσωσης NLS, οι οποίες περιλαμβάνουν γραμμικούς όρους ανώτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, ή και μη-γραμμικότητες που εμπλέκουν παραγώγους. Αυτές οι παραλλαγές, προκύπτουν συχνά, ως αποτέλεσμα προσπαθειών ακριβέστερης περιγραφής των διαδικασιών που καθορίζουν τα παραπάνω κυματικά φαινόμενα.

Σημαντικό μέρος της εργασίας, είναι αφιερωμένο, στην μελέτη της γενικευμένης εξίσωσης Schrödinger ανώτερης τάξης (ENLS),

$$i\phi_t + \rho \phi_{xx} + \delta |\phi|^2 \phi = -i\sigma \phi_{xxx} - 3i\alpha |\phi|^2 \phi_x,$$

όπου οι συντελεστές α , ρ , σ , δ , είναι πραγματικοί.

Στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζουμε την παραγωγή της εξίσωσης, επιλέγοντας ένα από τα πολυποίκιλα πεδία φυσικών εφαρμογών στα οποία απαντάται, την δυναμική των νηματίων στροβιλισμού (vortex filaments). Τα νημάτια στροβιλισμού αποτελούν λεπτές δομές, οι οποίες παρατηρούνται στην κίνηση των ρευστών, και η μελέτη τους συγκεντρώνει σημαντικές πειραματικές και θεωρητικές ερευνητικές προσπάθειες.

Η εξίσωση Hirota, (όπου τελικά η σχέση μεταξύ των συντελεστών $\alpha, \rho, \sigma, \delta$ είναι συγκεκριμένη), με την κατασκευή της οποίας ασχολούμαστε, μπορεί να προέλθει είτε από τις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού, είτε από τις εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών για την περιγραφή της εξέλιξης του μετασχηματισμού Hasimoto.

Μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός του διανυσματικού δυναμικού, από το οποίο παράγεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου και το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού αντίστοιχα.

Στη συνέχεια προσδιορίζεται η εξίσωση κίνησης του νηματίου στροβιλισμού και έπειτα ορίζονται οι εξισώσεις για κινούμενες καμπύλες στο χώρο.

Στο τέλος του κεφαλαίου για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων παρουσιάζονται η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger και η Τροποποιημένη εξίσωση Korteweg-de Vries που προκύπτουν από την εξίσωση Hirota.

Στο 2ο Κεφάλαιο γίνεται αναλυτικά, μελέτη της δυναμικής της εξίσωσης του Νεύτωνα $F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0$ για δύο διαφορετικές περιπτώσεις των παραμέτρων λ και μ , με τη βοήθεια δύο αντίστοιχων παραδειγμάτων. Αιτία για αυτή τη μελέτη είναι ότι οι ακριβείς λύσεις της (ENLS), όπως και η δυναμική τους μπορούν να προσδιοριστούν από τις λύσεις και την δυναμική της εξίσωσης του Νεύτωνα.

Στο 3ο κεφάλαιο εστιάζουμε στην διερεύνηση συνθηκών, για την ύπαρξη αναλυτικών λύσεων μοναχικών κυμάτων αναζητώντας λύσεις με την μορφή οδεύοντος κύματος (traveling wave). Επικεντρωνόμαστε στη συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των συντελεστών της εξίσωσης που οδηγεί στην ύπαρξη λύσεων φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων καθώς επίσης γίνεται διερεύνηση των τιμών που μπορεί να πάρει ο κυματαριθμός k_0 .

Τέλος ερευνούμε τις συνθήκες που οδηγούν στην αστάθεια διαμόρφωσης (modulation instability), των λύσεων επιπέδων κυμάτων της ENLS.

Περιεχόμενα

1	Παραγωγή εξισώσεων NLS ανώτερης τάξης	7
1.1	Μαγνητικό πεδίο παραγόμενο από ρευματοφόρο αγωγό	8
1.2	Κινήσεις ρευστών	11
1.3	Εσωτερικές Εξισώσεις για Κινούμενες Καμπύλες στο Χώρο	15
1.4	Η εξίσωση Hirota	16
2	Στοιχεία από την Δυναμική της Εξίσωσης του Νεύτωνα	19
2.1	Ομοκλινικές Τροχιές	19
2.2	Ετεροκλινικές Τροχιές	27
3	Ακριβείς λύσεις μοναχικών κυμάτων	33
3.1	Αριθμητικές μελέτες	38
3.2	Αστάθεια διαμόρφωσης επιπέδων κυμάτων	41

Κεφάλαιο 1

Παραγωγή εξισώσεων NLS ανώτερης τάξης

Διάφορες έρευνες σε ρευστά, έχουν δείξει ότι για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds,¹ αναδύονται μέσα στη μάζα του ρευστού λεπτές δομές, που ονομάζονται νημάτια στροβιλισμού (vortex filaments).

Εργαστηριακές και αριθμητικές μελέτες, έχουν δείξει ότι αυτές οι δομές έχουν σχετικά μεγάλη διάρκεια ζωής σε σχέση με τη διάρκεια των συνηθισμένων στροβίλων, κι έτσι μπορούν να θεωρηθούν επίμονες (persistent). Αν και αριθμητικές προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι αυτά τα νημάτια δεν συνεισφέρουν αποφασιστικά στη συνολική κίνηση του ρευστού, καθώς κατέχουν ένα μικρό μέρος της κινητικής ενέργειας και της στροφορμής του, έχουν πιθανώς στενή σχέση με στιγμιότυπα της συμπεριφοράς του ρευστού, σε καθεστώς τυρβώδους ροής. Επίσης, οι δομές αυτές διατηρούν την αυτοτέλειά τους για αρκετό χρόνο, και συμπεριφέρονται ως αυτόνομες οντότητες, χωρίς εμφανή αλληλεπίδραση με το ρευστό που τις περιβάλλει. Όπως έχει προταθεί, συχνά χρησιμοποιείται η έννοια των λεπτών σωλήνων στροβιλισμού (thin vortex tubes), για την προσέγγιση του στροβιλισμού στον τρισδιάστατο χώρο. Μολονότι πολλές φορές, οι σωλήνες στροβιλισμού προσεγγίζονται ως γραμμικά αντικείμενα, άμεσες παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι τα νημάτια στροβιλισμού είναι περισσότερο πολύπλοκα, και διαθέτουν μη τετριμμένη δομή, ως προς την καμπυλότητα, και την στρέψη τους. Πειραματικά, έχουν παρατηρηθεί περίπλοκες συστροφές ενός λεπτού σωλήνα στροβιλισμού, σε περιστρεφόμενο δοχείο.

Η προέλευση των μη γραμμικών εξισώσεων διασποράς για την περιγραφή των νηματίων στροβιλισμού, καθορίζεται από την εξέλιξη του μετασχηματισμού Hasimoto:

$$(1.1) \quad \varphi(x, t) = \kappa(x, t) e^{i \int \tau(\sigma, t) d\sigma}$$

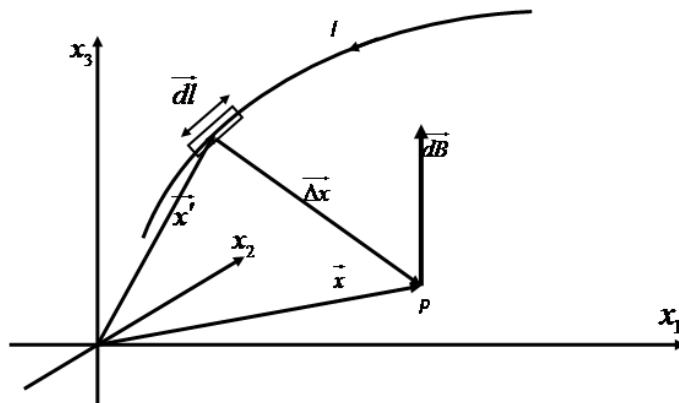
όπου οι συναρτήσεις $\kappa(x, t)$, $\tau(\sigma, t)$ παριστάνουν αντίστοιχα την καμπυλότητα και τη στρέψη των εξελισσόμενων νηματίων, ενώ η μεταβλητή x παριστάνει την α-

¹Ο αριθμός Reynolds ορίζεται ως, ο λόγος των δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις ιξώδους και συνεπώς ποσοτικοποιεί την μεταξύ τους σημαντικότητα για μια συγκεκριμένη κατάσταση ροής. Συχνά προκύπτουν κατά τη διάρκεια πειραμάτων μοντελοποίησης, προκειμένου να προσδιορίσουμε την σχέση μεταξύ δυο διαφορετικών περιπτώσεων ροής ρευστού. Επίσης χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό του είδους μια ροής, όπως είναι η στρωτή και η τυρβώδης ροή.

πόσταση που μετράμε κατά μήκος του νηματίου. Όταν οι συναρτήσεις αυτές είναι καλώς ορισμένες, η μορφή των νηματίων είναι μοναδικά ορισμένη, ως μία καμπύλη που εξελίσσεται στο χώρο. Πειραματικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι τα νηματία αυτά υποστηρίζονται από κύματα, αποτελούμενα από ελικοειδείς στρεβλώσεις, στην μορφή οδεύοντος κύματος, που μπορούν να περιγραφούν από τη θεωρία σολιτονίων. Από άλλα πειράματα, έχει φανεί ότι αυτές οι στρεβλώσεις παρουσιάζουν ευστάθεια κατά τη διάρκεια μιας σύγκρουσης (άλλη μία ομοιότητα με τη συμπεριφορά των σολιτονίων).

Η εξίσωση Hirota, με την κατασκευή της οποίας θα ασχοληθούμε εδώ, μπορεί να προέλθει είτε από τις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού, είτε από τις εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών για την περιγραφή της εξέλιξης του μετασχηματισμού (1.1). Η κατασκευή αυτή, θα γίνει ανεξάρτητα για κάθε χώρο, τουλάχιστον μέχρι το σημείο του προσδιορισμού του διανυσματικού δυναμικού με τις σχέσεις (1.15) και (1.21), από τις οποίες παράγεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου και το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού αντίστοιχα. Η μετέπειτα ακολουθούμενη διαδικασία είναι πανομοιότυπη και αφορά και τις δύο περιπτώσεις.

1.1 Μαγνητικό πεδίο παραγόμενο από ρευματοφόρο αγωγό



Σχήμα 1.1: Ένταση $d\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου σε σημείο P, που οφείλεται σε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ ενός ρευματοφόρου αγωγού. Τα διανύσματα θέσης αναφέρονται σε τυχαίο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) .

Έστω αγωγός που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται σε σημείο P, με διάνυσμα θέσης \vec{x} . Η ένταση του μαγνητικού πεδίου, που οφείλεται σε ένα στοιχειώδες τμήμα του αγωγού μήκους $d\vec{l}$ και διανύσματος θέσης \vec{x}' , δίνεται από το νόμο των Biot - Savart :

$$(1.2) \quad \vec{dB} = kI \frac{d\vec{l} \times \vec{\Delta x}}{|\vec{\Delta x}|^3} \Rightarrow d\vec{B} = kI \frac{d\vec{l} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Αν η διατομή του αγωγού είναι dS , και η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(\vec{x}')$, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται από τη σχέση $I = \vec{J}(\vec{x}') dS$. Αν χρησιμοποιήσουμε μονάδες από το σύστημα CGS, για την ηλεκτρική σταθερά ισχύει $k = \frac{1}{c}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός. Έτσι η σχέση (1.2) γίνεται:

$$(1.3) \quad \vec{dB} = \frac{1}{c} \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'.$$

Για να βρούμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στην επίδραση ολόκληρου του αγωγού, πρέπει να ολοκληρώσουμε την (1.3) κατά μήκος του αγωγού. Έτσι θα έχουμε:

$$(1.4) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'.$$

Επειδή όμως $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$, η σχέση (1.4) γίνεται:

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \int \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \vec{J}(\vec{x}') d^3x' \Rightarrow$$

$$(1.5) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x',$$

αφού ισχύει επίσης ότι $\vec{\nabla} \Phi \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{A})$ για κάθε βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\vec{x})$. Επίσης καθώς $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$, η (1.5) γίνεται:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) = 0.$$

Δηλαδή:

$$(1.6) \quad \vec{\nabla} \vec{B} = 0.$$

Στην συνέχεια, με χρήση της ταυτότητας $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του \vec{B} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) \Rightarrow$$

$$(1.7) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right) - \frac{1}{c} \Delta \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

Όμως $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$, οπότε, για τον πρώτο όρο του δεξιού μέρους της (1.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' &= \int \vec{J}(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = - \int \vec{J}(\vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \\ &= \left[-\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') d^3 x' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \vec{\nabla} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = 0.$$

Η εξίσωση (1.8), είναι συνεπής με το γεγονός ότι έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης, άρα και σταθερής πυκνότητας ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$). Επίσης, καθώς ισχύει ότι $\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, ο δεύτερος όρος της (1.7) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Delta \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' &= \int \vec{J}(\vec{x}') \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' \\ &= \int \vec{J}(\vec{x}') [-4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')] d^3 x' = -4\pi \int \vec{J}(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3 x' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1.9) \quad \Delta \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' = -4\pi \vec{J}(\vec{x}').$$

Αντικαθιστώντας τις (1.8) και (1.9) στην (1.7), βρίσκουμε τελικά, ότι ο στροβιλισμός του B είναι :

$$(1.10) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}').$$

Έτσι λοιπόν, προκύπτουν οι δύο βασικοί νόμοι για τα μαγνητοστατικά πεδία:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}').$$

Η σχέση (1.6) μας υποδεικνύει την ύπαρξη διανυσματικού δυναμικού $\vec{V}(\vec{x})$ από το οποίο παράγεται το μαγνητικό πεδίο

$$(1.11) \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}),$$

έτσι ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$. Από τις σχέσεις (1.5) και (1.11) συμπεραίνουμε ότι το διανυσματικό δυναμικό $\vec{V}(\vec{x})$ θα είναι της μορφής:

$$(1.12) \quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 x' + \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}),$$

όπου $\Psi(\vec{x})$ αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την (1.11) στην (1.10), παίρνουμε:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Αφού η (1.12) ισχύει και όταν θέσουμε $\vec{V} + \vec{\nabla}\Psi$ στη θέση του \vec{V} , επιλέγουμε τέτοιο \vec{V} ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Με αυτή την επιλογή, η (1.13) γίνεται:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} + \vec{\nabla}\Psi)] - \Delta(\vec{V} + \vec{\nabla}\Psi) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \\ \Delta(\vec{\nabla}\Psi) - \Delta \vec{V} - \Delta(\vec{\nabla}\Psi) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \Rightarrow \\ \Delta \vec{V} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned}$$

Τέλος για $\Psi(\vec{x}) = 0$ η (1.14) παίρνει τη μορφή:

$$(1.15) \quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

1.2 Κινήσεις ρευστών

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό και υποθέτουμε ότι $\vec{u}(\vec{x})$, είναι το πεδίο ταχυτήτων του. Ο στροβιλισμός σε κάθε σημείο \vec{x} του ρευστού, δίνεται από τη σχέση:

$$(1.16) \quad \vec{\xi} = \vec{\nabla} \times \vec{u}.$$

Ως γραμμή στροβιλισμού θεωρούμε κάθε καμπύλη, που σε οποιοδήποτε σημείο της, το διάνυσμα στροβιλισμού $\vec{\xi}$ είναι εφαπτόμενο σε αυτήν. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν μια τέτοια καμπύλη, προκύπτει από μια ροή που υπακούει στις εξισώσεις του Euler,

$$(1.17) \quad \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0,$$

$$(1.18) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0,$$

και η καμπύλη αυτή είναι γραμμή στροβιλισμού σε κάποια χρονική στιγμή, θα παραμένει γραμμή στροβιλισμού και στη συνέχεια, κινούμενη ως «υλική γραμμή» του ρευστού. Έστω C_t μια κλειστή καμπύλη τη χρονική στιγμή t . Η κυκλοφορία του ρευστού κατά μήκος της C_t , σύμφωνα με το θεώρημα κυκλοφορίας του Kelvin, παραμένει σταθερή στο πέρασμα του χρόνου. Η κυκλοφορία ενός σωλήνα στροβιλισμού είναι

$$\Gamma_{C_t} = \int_{C_t} \vec{u} \cdot d\vec{s},$$

και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος του Stokes, προκύπτει ότι:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \Gamma_{C_t} &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \vec{N} dA = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{u} d\vec{A} \Rightarrow \\ \Gamma_{C_t} &= \int_S \vec{\xi} d\vec{A}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι το $\text{supp } \vec{\xi}$ είναι ένας σωλήνας στροβιλισμού, κάθετος στην στοιχειώδη επιφάνεια dA . Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε το πεδίο ταχυτήτων σε κάποιο σημείο \vec{x} , έξω από το σωλήνα στροβιλισμού. Η εξίσωση (1.18) μας υποδεικνύει την ύπαρξη διανυσματικού δυναμικού $\vec{V}(\vec{x})$ από το οποίο παράγεται το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού $\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$, έτσι ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$. Επιλέγουμε το δυναμικό αυτό έτσι ώστε να ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Μετά από αυτή την επιλογή, το διάνυσμα στροβιλισμού γίνεται :

$$(1.20) \quad \vec{\xi} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} = -\Delta \vec{V}.$$

Λύνουμε τη (1.20), κάνοντας χρήση της συνάρτησης Green, και βρίσκουμε ότι

$$(1.21) \quad \vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

Εύκολα, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η λύση (1.21) έχει την ιδιότητα

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^2x' = 0.$$

Τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού::

$$(1.22) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) = \dots = -\frac{1}{4\pi} \int_S \vec{\xi}(\vec{x}') d\vec{A} \int_l \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Σημειώνουμε ότι $d\vec{x}'$ συμβολίζει ένα στοιχειώδες διάνυσμα μήκους, κατά μήκος της γραμμής στροβιλισμού l .

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.19), η (1.22) γίνεται :

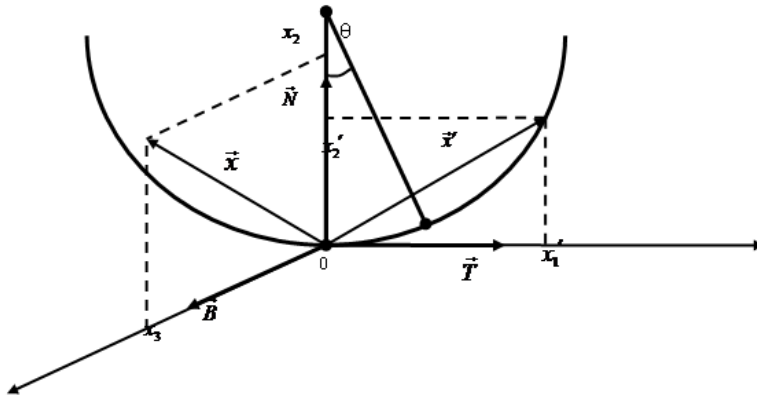
$$(1.23) \quad \vec{u}(\vec{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_l \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}.$$

Θα θεωρήσουμε στην συνέχεια, έναν σωλήνα στροβιλισμού, αμελητέου πάχους. Ένας τέτοιος σωλήνας θα αναφέρεται ως *νημάτιο στροβιλισμού*. Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την εξέλιξη ενός νηματίου στροβιλισμού πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.23) για σημεία που βρίσκονται κοντά στο νηματίο. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε ένα καμπύλο τμήμα του νηματίου, το οποίο κατά προσέγγιση το θεωρούμε κυκλικό τόξο.

Παίρνουμε σύστημα αξόνων, οι δύο από τους οποίους βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με το κυκλικό τόξο, και έχουν μοναδιαία διανύσματα το \vec{T} (εφαπτόμενο στο τόξο) και το \vec{N} (κάθετο). Ο τρίτος άξονας είναι κάθετος στο προηγούμενο επίπεδο, και έχει μοναδιαίο διάνυσμα το \vec{B} .

Αφού το \vec{x} βρίσκεται στο επίπεδο του κυκλικού τόξου, θα ισχύει

$$(1.24) \quad \vec{x} = x_1' \vec{T} + x_2' \vec{N} = R\vec{T} \sin \theta + R(1 - \cos \theta) \vec{N},$$



Σχήμα 1.2: Τομή τμήματος ενός νηματίου στροβιλισμού, το οποίο κατά προσέγγιση θεωρούμε ως κυκλικό τόξο. Το τμήμα αυτό περνά από την αρχή ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , με μοναδιαία διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Το \vec{T} είναι εφαπτόμενο στο νηματίο, το \vec{N} ανήκει στο επίπεδο του κυκλικού τόξου και είναι κάθετο στο \vec{T} , το δε \vec{B} είναι κάθετο στα \vec{T}, \vec{N} .

όπου R η ακτίνα καμπυλότητας στο 0. Για σημεία \vec{x}' κοντά στο 0 θα έχουμε

$$\theta \simeq 0 \Rightarrow \sin \theta \simeq \theta \Rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \simeq 2 \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \vec{x}' &\simeq R\theta\vec{T} + R\frac{\theta^2}{2}\vec{N} = l\vec{T} + \frac{1}{2R}l^2\vec{N} \Rightarrow \\ (1.25) \quad \vec{x}' &\simeq l\vec{T} + \frac{1}{2}kl^2\vec{N}, \end{aligned}$$

όπου το l συμβολίζει το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στη γωνία θ , και το k την καμπυλότητα του νηματίου. Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.25) ως προς l , παίρνουμε:

$$(1.26) \quad d\vec{x}' = (\vec{T} + kl\vec{N})dl.$$

Για ένα τυχαίο σημείο $\vec{x} = (0, x_2, x_3)$ έχουμε ότι:

$$\vec{x} = x_2\vec{N} + x_3\vec{B} \Rightarrow \vec{x} - \vec{x}' = -l\vec{T} + (x_2 - \frac{1}{2}kl^2)\vec{N} + x_3\vec{B}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}' &= \begin{vmatrix} \vec{T} & \vec{N} & \vec{B} \\ -l & x_2 - \frac{1}{2}kl^2 & x_3 \\ dl & kldl & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left[-klx_3\vec{T} + x_3\vec{N} + (-kl^2 - x_2 + \frac{1}{2}kl^2)\vec{B} \right] dl \Rightarrow \\ (1.27) \quad (\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}' &= \left[-klx_3\vec{T} + x_3\vec{N} - (x_2 + \frac{1}{2}kl^2)\vec{B} \right] dl. \end{aligned}$$

Για τα σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά στο νηματίο ισχύει

$$\vec{x} \simeq 0 \Rightarrow (x_2, x_3) \simeq (0, 0),$$

οπότε η (1.27) γίνεται

$$(1.28) \quad (\vec{x} - \vec{x}') \times d\vec{x}' = -\frac{1}{2}kl^2\vec{B}dl.$$

Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'|^2 &= l^2 + (x_2 - \frac{1}{2}kl^2)^2 + x_3^2 = l^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{4}k^2l^4 - kl^2x_2 \Rightarrow \\ |\vec{x} - \vec{x}'|^2 &= l^2(1 - kx_2) + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{4}k^2l^4. \end{aligned}$$

Θεωρώντας όμως ότι $kx_2 \ll 1$ και $kl \ll 1$, παίρνουμε ότι

$$(1.29) \quad |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \simeq l^2 + x_2^2 + x_3^2 = l^2 + |x|^2 \Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'|^2 \simeq l^2 + r^2,$$

όπου $r = |\vec{x}|$.

Τώρα πια είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που μας δίνει το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού. Με χρήση των (1.28) και (1.29), η (1.23) γίνεται

$$(1.30) \quad \vec{u}(\vec{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{-\frac{1}{2}kl^2\vec{B}}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl,$$

όπου L το μισό μήκος του νηματίου.

Επειδή όμως η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια, το ολοκλήρωμα (1.30) γράφεται ως:

$$(1.31) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} k\vec{B} \int_0^L \frac{l^2}{(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dl.$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.31) το πεδίο ταχυτήτων προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$(1.32) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} k\vec{B} \left(\log \frac{2L}{r} - 1 \right).$$

Αν το x παριστάνει μήκος που μετράται κατά μήκος του νηματίου, και $\vec{X}(x, t)$ παριστάνει ένα διάνυσμα θέσης πάνω στο νηματίο, τότε $\vec{u} = \frac{\partial \vec{X}(x, t)}{\partial t}$. Εισάγοντας την αλλαγή μεταβλητής για τον χρόνο

$$t' = t \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\log \frac{2L}{r} - 1 \right),$$

έχουμε ότι $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t'} = k\vec{B}$. Έτσι, η εξίσωση που καθορίζει την κίνηση του νηματίου στροβιλισμού είναι:

$$(1.33) \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = k\vec{B}.$$

1.3 Εσωτερικές Εξισώσεις για Κινούμενες Καμπύλες στο Χώρο

Η μετατόπιση κατά μήκος του νηματίου ορίζει ένα μοναδιαίο διάνυσμα, εφαπτόμενο στην καμπύλη: $\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} = \vec{T}$. Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ικανοποιούν τις σχέσεις Serret - Frenet:

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \vec{T}_x &= \kappa \vec{N} \\ \vec{N}_x &= \tau \vec{B} - \kappa \vec{T} \\ \vec{B}_x &= -\tau \vec{N}, \end{aligned}$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα και τ η στρέψη της καμπύλης. Όταν τα κ, τ είναι καθορισμένα σε κάθε σημείο της καμπύλης, τότε εκτός από τη θέση της καμπύλης είναι ορισμένο με μοναδικό τρόπο και το σχήμα της.

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες από τις εξισώσεις Serret - Frenet, παίρνουμε την σχέση

$$(1.35) \quad (\vec{N} + i\vec{B})_x + i\tau(\vec{N} + i\vec{B}) = -\kappa\vec{T}.$$

Εάν η στρέψη πλησιάζει μια σταθερή τιμή τ_0 σε περιοχές της καμπύλης που είναι μακριά από τις τιμές ενδιαφέροντος, τότε η εξίσωση (1.35) μπορεί να ξαναγραφτεί:

$$(1.36) \quad \vec{\Psi}_x + i\tau_0\vec{\Psi} = -\psi\vec{T}$$

όπου

$$(1.37) \quad \psi(x, t) = \kappa(x, t)e^{i \int_0^x (\tau - \tau_0) d\sigma}$$

και

$$(1.38) \quad \vec{\Psi}(x, t) = (\vec{N} + i\vec{B})e^{i \int_0^x (\tau - \tau_0) d\sigma}$$

Δεδομένου ότι η μιγαδική ποσότητα $\psi(x, t)$ περιέχει τόσο καμπυλότητα όσο και στρέψη, παρέχει μια πλήρη περιγραφή της συνεστραμμένης καμπύλης. Για αυτήν την ποσότητα, ή για συναρτήσεις που σχετίζονται στενά με αυτήν, δημιουργούνται διάφορες εξισώσεις εξέλιξης. Ο προσδιορισμός του όρου τ_0 είναι βολικός σε διαφορετικό στάδιο της ανάλυσης όταν λαμβάνονται υπόψη γραμμικές εξισώσεις που σχετίζονται με τις μεθόδους αντίστροφης σκέδασης.

Εάν, ωστόσο, το κύριο μέλημα είναι ο γεωμετρικός προσδιορισμός των ίδιων των καμπυλών, τότε ο ορισμός της $\psi(x, t)$ που δίνεται από τον Hasimoto είναι προτιμότερος.

Σύμφωνα με τις $\vec{\Psi}(x, t)$ και $\psi(x, t)$ η πρώτη από τις εξισώσεις Serret-Frenet παίρνει τη μορφή :

$$(1.39) \quad \vec{T}_x = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\vec{\Psi} + \psi\bar{\vec{\Psi}}).$$

όπου το σύμβολο της άνω παύλας δηλώνει τον συζυγή μιγαδικό.

Στη θέση των συνηθισμένων διανυσμάτων $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ είναι βολικό να περιγραφεί η καμπύλη με τα τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{\Psi}, \bar{\vec{\Psi}}$ και \vec{T} . Αποδεικνύεται εύκολα ότι ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$(1.40) \quad \vec{\Psi}\bar{\vec{\Psi}} = \vec{T}\bar{\vec{\Psi}} = \bar{\vec{T}}\vec{\Psi} = 0, \vec{\Psi}\bar{\Psi} = 2.$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που χρησιμοποίησε ο Hasimoto, η χρονική παράγωγος των $\vec{T}, \vec{\Psi}$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων :

$$(1.41) \quad \begin{aligned} \vec{T}_t &= \bar{\lambda}\vec{\Psi} + \lambda\bar{\vec{\Psi}} + \mu\vec{T}, \\ \vec{\Psi}_t &= a\vec{\Psi} + b\bar{\vec{\Psi}} + c\vec{T}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\bar{\vec{\Psi}}$ και \vec{T} τις σχέσεις (1.41), και κάνοντας χρήση της (1.40) έχουμε :

$$a + \bar{a} = 0, \quad b = \mu = 0, \quad c = -2\lambda$$

Δηλαδή για τους συντελεστές έχουμε βρει :

$$a = iR, \quad R \in \mathbb{R}, \quad b = 0, \quad \lambda = -\frac{c}{2}, \quad \mu = 0.$$

Άρα, οι σχέσεις (1.41) γράφονται ως

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \vec{\Psi}_t &= iR\vec{\Psi} + c\vec{T}, \\ \vec{T}_t &= -\frac{c}{2}\vec{\Psi} - \frac{c}{2}\bar{\vec{\Psi}}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τις $\vec{\Psi}_{tx}$ και $\vec{\Psi}_{xt}$ όπως προκύπτουν από την (1.36) και την πρώτη από τις (1.42), όπως επίσης εξισώνοντας αντίστοιχα τις \vec{T}_{xt} και \vec{T}_{tx} , από (1.39) και (1.42) δεύτερη, καταλήγουμε :

$$(1.43) \quad \psi_t + c_x - i(\tau_0 c - R\psi) = 0,$$

$$(1.44) \quad R_x = \frac{i}{2}(c\bar{\psi} - \bar{c}\psi).$$

Στις εξισώσεις (1.43) και (1.44) η μεταβολή των τιμών R, ψ και c μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την συγκεκριμενοποίηση των συναρτήσεων έτσι ώστε να προκύψουν διάφοροι τύποι καμπυλών χώρου. Ειδικότερα, εάν οι βοηθητικές συναρτήσεις R και c εκφραστούν συναρτήσει της ψ και των χωρικών παραγώγων της, θα προκύψει μια εξίσωση εξέλιξης για τη χωρική και χρονική μεταβολή της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης.

1.4 Η εξίσωση Hirota

Κάποιες άλλες γνωστές εξισώσεις εξέλιξης μπορούν να παραχθούν προσδιορίζοντας το c με τέτοιο τρόπο ώστε η έκφραση για την R_x της (1.44) να είναι τέλεια παράγωγος. Μια τέτοια επιλογή είναι :

$$(1.45) \quad c = f\psi + i\nu\psi_x + \varepsilon\psi_{xx},$$

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση που θα καθοριστεί σταδιακά ενώ το ν και το ε είναι πραγματικές σταθερές. Τότε :

$$(1.46) \quad R = -\frac{\nu}{2}|\psi|^2 + \frac{i}{2}\varepsilon(\psi_x\bar{\psi} - \bar{\psi}_x\psi) + C(t).$$

όπου το $C(t)$ προκύπτει κατά την ολοκλήρωση της (1.44) ως προς x .

Αντικατάσταση των (1.45) και (1.46) στην (1.43) δείχνει ότι η εξίσωση εξέλιξης που μας ενδιαφέρει πρέπει να έχει τη μορφή :

$$(1.47) \quad \psi_t + (f\psi)_x + i(\nu + \tau_0\epsilon)\psi_{xx} + \epsilon\psi_{xxx} + i\frac{\nu}{2}|\psi|^2\psi + \frac{\epsilon}{2}|\psi|^2\psi_x - \frac{1}{2}\psi^2\bar{\psi}_x - \tau_0\nu\psi_x + i(\tau_0f - C)\psi = 0.$$

Για να έχουμε μια εξίσωση η οποία να περιλαμβάνει μόνο ψ ή $|\psi|$ και παράγωγα του ψ , ο όρος $\psi^2\bar{\psi}_x$ πρέπει να εξαλειφθεί. Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα θέτοντας

$$f = (\psi, \bar{\psi}) \text{ και απαιτώντας να ισχύει : } \psi \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{1}{2}\epsilon\psi^2$$

Τότε αφού η f είναι πραγματική συνάρτηση θα έχουμε :

$$f = \frac{1}{2}\epsilon|\psi|^2 + \mu,$$

όπου μ πραγματική σταθερά. Οπότε :

$$(1.48) \quad \psi_t + \frac{3}{2}\epsilon|\psi|^2\psi_x + p\psi_x + 2iq\psi_{xx} + \epsilon\psi_{xxx} + iq|\psi|^2\psi + ir\psi = 0$$

όπου :

$$(1.49) \quad p = \mu - \tau_0\nu, \quad q = \frac{1}{2}(\nu + \tau_0\epsilon) \quad \text{και} \quad r = \mu\tau_0 - C.$$

Οι σταθερές p και r μπορούν να τεθούν ίσες με το μηδέν χωρίς απώλεια της γενικότητας αφού οι όροι περιλαμβάνουν μόνο ψ ή ψ_x και αφαιρούνται εύκολα με απλές αλλαγές των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών. (Τέτοιοι μετασχηματισμοί είναι όμως πρωταρχικής σημασίας για τον προσδιορισμό της γεωμετρικής σημασίας της εξαρτημένης μεταβλητής ψ). Βρίσκουμε τα μ , ν και C συναρτήσεις των q και ϵ και έχουμε :

$$\mu = 2\tau_0q - \tau_0^2\epsilon, \quad \nu = 2q - \tau_0\epsilon \quad \text{και} \quad C = 2\tau_0^2q - \tau_0^3\epsilon$$

Η τελική μορφή της εξίσωσης εξέλιξης είναι τότε :

$$(1.50) \quad \psi_t + \frac{3}{2}\epsilon|\psi|^2\psi_x + iq|\psi|^2\psi + p\psi_x + 2iq\psi_{xx} + \epsilon\psi_{xxx} = 0$$

με

$$(1.51) \quad R = -(q - \frac{1}{2}\tau_0\epsilon)|\psi|^2 + \frac{1}{2}i\epsilon(\psi_x\bar{\psi} - \bar{\psi}_x\psi) + \tau_0^2(2q - \tau_0\epsilon)$$

και

$$(1.52) \quad c = f\psi + i(2q - \tau_0\epsilon)\psi_x + \epsilon\psi_{xx}$$

όπου

$$(1.53) \quad f = \frac{1}{2}\epsilon|\psi|^2 + \tau_0(2q - \tau_0\epsilon)$$

Η εξίσωση (1.50) μπορεί να γραφτεί στη μορφή των τριών παραμέτρων που δόθηκε από τον Hirota επαναπροσδιορίζοντας τη μεταβλητή του μήκους τόξου. Αν συμβολίσουμε με s την αρχική μεταβλητή x και x την καινούργια τότε θέτοντας $s = lx$ έχουμε :

$$(1.54) \quad \psi_t + 3\alpha|\psi|^2\psi_x - i\rho\psi_{xx} + \sigma\psi_{xxx} - i\delta|\psi|^2\psi = 0$$

όπου $\alpha = \mu/2l$, $\delta = -q$, $\rho = -2q/l^2$ και $\sigma = \epsilon/l^3$. Η απαλοιφή του l μεταξύ των συντελεστών οδηγεί στη συνθήκη :

$$(1.55) \quad \alpha\rho = \sigma\delta$$

Όπως είναι γνωστό, οι εξισώσεις (1.50) ή (1.54) περιέχουν τόσο η μη γραμμική εξίσωση Schrodinger όσο και τη τροποποιημένη εξίσωση Korteweg-de Vries. Τα συμπεράσματα για αυτές τις περιπτώσεις συνοψίζονται παρακάτω.

(1) Μη γραμμική εξίσωση Schrödinger

Θέτοντας $\epsilon = 0$ και $q = -1$ στις (1.50), (1.51) και (1.52) έχουμε :

$$(1.56) \quad i\psi_t + |\psi|^2\psi_x + 2\psi_{xx} = 0$$

με

$$(1.57) \quad R = |\psi|^2 - 2\tau_0^2$$

και

$$(1.58) \quad c = -2\tau_0\psi - 2i\psi_x$$

Οι ελικοειδής καμπύλες που απαντούν στη μοναδική σολιτονική λύση της μη γραμμικής εξίσωσης Schrodinger έχουν περιγραφεί από τον Hasimoto.

(2) Τροποποιημένη εξίσωση Korteweg-de Vries

Θέτοντας $\epsilon = 1$ και $q = 0$ έχουμε :

$$(1.59) \quad \psi_t + \frac{3}{2}|\psi|^2\psi_x + \psi_{xxx} = 0$$

με

$$(1.60) \quad R = \frac{1}{2}\tau_0|\psi|^2 - \tau_0^3 + \frac{1}{2}i(\psi_x\bar{\psi} - \bar{\psi}_x\psi)$$

και

$$(1.61) \quad c = \psi\left(\frac{1}{2}|\psi|^2 - \tau_0^2\right) - i\tau_0\psi_x + \psi_{xx}$$

Αν η ψ υποτεθεί ότι είναι πραγματική, τότε σύμφωνα με τον ορισμό (1.37), έχουμε μια καμπύλη που έχει σταθερή στρέψη ίση με τ_0 και έτσι τα αποτελέσματα προέρχονται από την τροποποιημένη εξίσωση Korteweg-de Vries.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία από την Δυναμική της Εξίσωσης του Νεύτωνα

Σε αυτό το κεφάλαιο μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την δυναμική της εξίσωσης του Νεύτωνα.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα που βοηθούν σε αυτό το σκοπό. Θα δούμε την εξίσωση του Νεύτωνα $F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0$ για δύο διαφορετικές περιπτώσεις των παραμέτρων λ και μ .

2.1 Ομοκλινικές Τροχιές

Έστω η εξίσωση :

$$(2.1) \quad F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0 \quad , \quad (\text{εξίσωση Duffing}).$$

με $\lambda = -\kappa_0^2 < 0$ και $\mu = \mu_0^2 > 0$ όπου $\kappa_0, \mu_0 > 0$.

- (α) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας και μελετήστε την ευστάθειά τους.
- (β) Σχεδιάστε τις τροχιές κοντά στα σημεία ισορροπίας.
- (γ) Προσδιορίστε το επιτρεπτό διάστημα κίνησης που αντιστοιχεί σε αρχική ενέργεια $E_0 = 0$. Με φυσικά επιχειρήματα, σχεδιάστε την αντίστοιχη τροχιά.
- (δ) Βρείτε την αντίστοιχη λύση της τροχιάς του ερωτήματος (γ). Συζητήστε τη συμπεριφορά της καθώς $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Απάντηση

- (α) Πράγματι η εξίσωση (2.1) είναι η εξίσωση του Νεύτωνα με $K(F) = \kappa_0^2 F - \mu_0^2 F^3$.
Θέτοντας $F' = G$, η (2.1) γράφεται στη μορφή συστήματος :

$$(2.2) \quad \begin{cases} F' = G \\ G' = \kappa_0^2 F - \mu_0^2 F^3 \end{cases}$$

Βήμα 1 : Τα σημεία ισορροπίας είναι : $\bar{F}^* = (F^*, 0)$ όπου F^* ρίζες της $K(F) = \kappa_0^2 F - \mu_0^2 F^3 = 0$ ή $F(\kappa_0^2 - \mu_0^2 F^2) = 0$ από την οποία βρίσκουμε τις θέσεις ισορροπίας:

$$F_0^* = 0, \quad F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}, \quad \text{και} \quad F_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$$

Άρα τα σημεία (καταστάσεις ισορροπίας) είναι :

$$\bar{F}_0^* = (0, 0), \quad \bar{F}_1^* = \left(\frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right), \quad \text{και} \quad \bar{F}_2^* = \left(-\frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right)$$

Βήμα 2 (Ευστάθεια καταστάσεων ισορροπίας)

Βρίσκουμε για τη συνάρτηση (2.1) τη συνάρτηση δυναμικού :

$$V(F) = - \int K(F) dF = - \int (\kappa_0^2 F - \mu_0^2 F^3) dF = \mu_0^2 \frac{F^4}{4} - \kappa_0^2 \frac{F^2}{2}$$

Τότε $V'(F) = -K(F)$, (δηλαδή στις θέσεις ισορροπίας η $V(F)$ λαμβάνει ακρότατα) και $V''(F) = -K'(F) = -(\kappa_0^2 - 3\mu_0^2 F^2) = 3\mu_0^2 F^2 - \kappa_0^2$.

Για τη θέση $F_0^* = 0$, $V''(F_0^*) = V''(0) = -\kappa_0^2$ λαμβάνει τοπικό μέγιστο. Άρα η κατάσταση ισορροπίας $F_0^* = (0, 0)$ είναι ασταθής. Θυμίζουμε ότι η εξίσωση γραμμικοποίησης για την εξίσωση του Νεύτωνα είναι :

$$(Γ) \quad \ddot{\theta} = -\frac{1}{m} V''(F^*) \theta, \quad \theta = F - F^*$$

όπου F^* , θέση ισορροπίας. Στην περίπτωση της εξίσωσης (2.1), $m = 1$.

Επομένως για τη θέση $F_0^* = 0$, η εξίσωση (Γ) γίνεται : $\ddot{\theta} = -V''(0)\theta$ ή $\ddot{\theta} = \kappa_0^2 \theta$ δηλαδή η εξίσωση της απωστικής δύναμης $\ddot{\theta} = \omega^2 \theta$, με $\omega^2 = \kappa_0^2$.

Συνεχίζουμε με τη μελέτη της ευστάθειας για τις θέσεις $F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ και $F_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$. Και για τις δύο αυτές συμμετρικές θέσεις (σημειώστε ότι η $V(F)$ είναι άρτια) έχουμε $V''(F_{1,2}^*) = 2\kappa_0^2 > 0$. Άρα στις θέσεις $F_{1,2}^* = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ η $V(F)$ λαμβάνει τοπικό ελάχιστο. Επομένως οι καταστάσεις $\bar{F}_{1,2}^* = \left(\pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right)$ είναι ευσταθείς.

Για τις θέσεις αυτές, από τη (Γ), βλέπουμε ότι και για τις δύο θέσεις, η εξίσωση γραμμικοποίησης είναι :

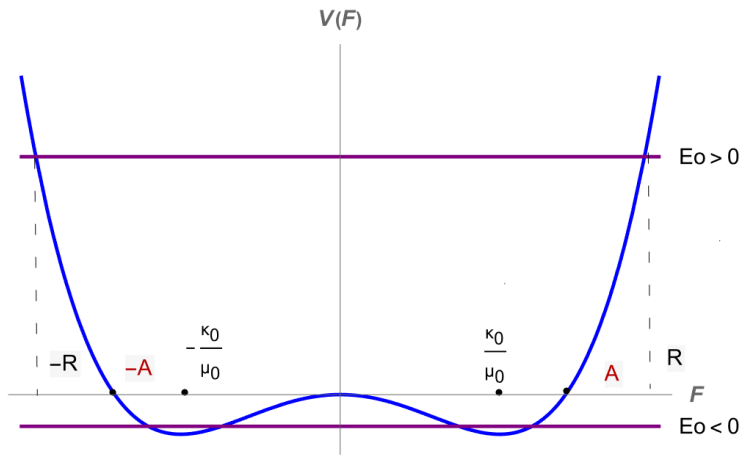
$$(ΑΓ) \quad \ddot{\theta} = -2\kappa_0^2 \theta \quad \text{ή} \quad \ddot{\theta} + 2\kappa_0^2 \theta = 0$$

Δηλαδή η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$ με $\omega^2 = 2\kappa_0^2$.

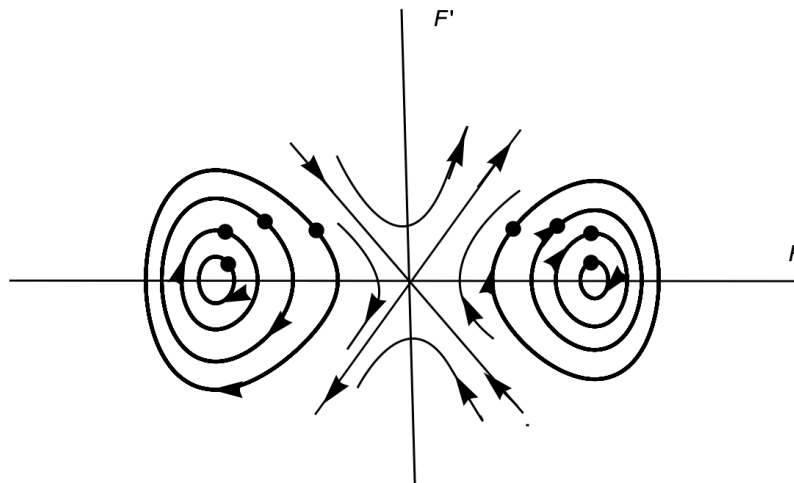
Επιπλέον, για το γράφημα της συνάρτησης δυναμικού $V(F)$ παρατηρούμε ότι :

$$V(F) \rightarrow \infty \text{ καθώς } F \rightarrow \pm\infty.$$

(β) Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $V(F)$ και από κάτω το φασικό επίπεδο :



Σχήμα 1.α



Σχήμα 1.β

Δομή των τροχιών κοντά στα σημεία ισορροπίας :

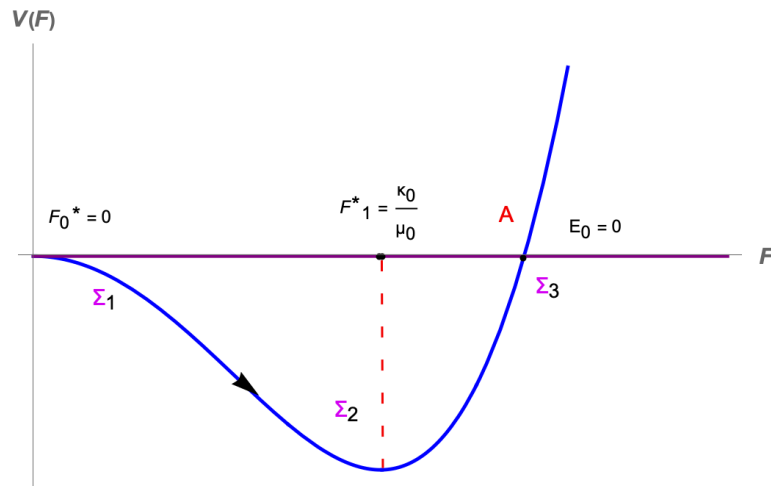
Όπως είδαμε στο ερώτημα α), κοντά στις θέσεις $F_{1,2}^* = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}$, η εξίσωση γραμμικοποίησης είναι η (ΑΤ), δηλαδή του αρμονικού ταλαντωτή. Κοντά στις θέσεις αυτές, βρισκόμαστε για αρχικές ενέργειες $E_0 < 0$, (Σχήμα 1.α).

Αν σκεφτούμε με βάση την κίνηση που θα διέγραφε ένα σφαιρίδιο που κινείται πάνω στο γράφημα της $V(F)$, τότε, για $E_0 < 0$, το σφαιρίδιο εκτελεί ταλαντώσεις στα "πηγάδια" της συνάρτησης δυναμικού, που προσομοιάζουν στο δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή. Σε αυτές τις ταλαντώσεις αντιστοιχούν οι κυκλικές, κλειστές τροχιές στο φασικό χώρο (το επίπεδο $F' - F$).

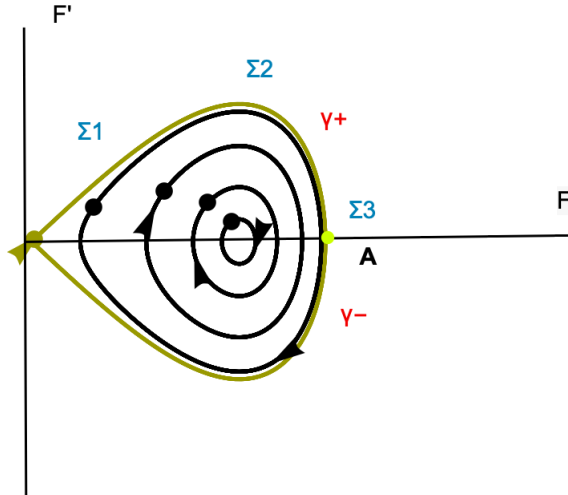
Αντίστοιχα στην γειτονιά του τοπικού μεγίστου, $F_0^* = 0$, το σύστημα προσεγγίζεται από την εξίσωση της απωστικής δύναμης $\ddot{\theta} = \kappa_0^2 \theta$, και οι τροχιές είναι υπερβολικού τύπου μαζί με τις δύο χαρακτηριστικές ασύμπτωτες ευθείες (ευσταθής και ασταθής υπόχωρος).

- (γ) Για $E_0 = 0$, προκύπτει το επιτρεπτό διάστημα κίνησης $[F_0^*, A]$ ή $[-A, F_0^*]$ (Σχήμα 1.α), αναλόγως με το αν το σφαιρίδιο θα κινηθεί προς τα δεξιά ή τα αριστερά. Για να σχεδιάσουμε την αντίστοιχη τροχιά, σκεφτόμαστε ξανά την κίνηση του σφαιριδίου, χρησιμοποιώντας και τη διατήρηση της ενέργειας.

$$(E) \quad E(F, F') = \frac{1}{2} F'^2 + V(F) = E_0$$



Σχήμα 2.α



Σχήμα 2.β

Καθώς το σφαιρίδιο κατεβαίνει από τη θέση $F_0^* = 0$ μειώνεται η δυναμική του ενέργεια $V(F)$. Για να παραμείνει σταθερή και ίση με $E_0 = 0$ η ολική ενέργεια (E), θα πρέπει να αυξάνεται η κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}F'^2$, δηλαδή η ταχύτητα. Άρα η F' αυξάνει ως συνάρτηση της θέσης στο φασικό πεδίο (Σχήμα 2.β).

Όταν το σφαιρίδιο περνάει από τη θέση Σ_2 , δηλαδή διέρχεται από τη θέση $F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ όπου η $V(F)$ γίνεται ελάχιστη, η ταχύτητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Κατά την άνοδο προς τη θέση $F = A$, η $V(F)$ αρχίζει να αυξάνει. Για να παραμείνει σταθερή η ολική ενέργεια (E), θα πρέπει η κινητική ενέργεια να μειώνεται. Άρα και η ταχύτητα μειώνεται.

Η ταχύτητα γίνεται μηδέν στη θέση $F = A$, δηλαδή στα σημεία τομής της $V(F)$ με τους άξονες.

Πράγματι από την (E) έχουμε :

$$F' = G = \pm \sqrt{2(E_0 - V(F))}, (*) \quad \text{και} \quad G = F' = 0 \quad \text{όταν} \quad V(F) = E_0.$$

Στην περίπτωση μας, $E_0 = 0$, επομένως $G = 0$ όταν $V(F) = 0$ ή $\mu_0^2 \frac{F^4}{4} - \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} = 0$.

Δηλαδή στις θέσεις $F_0^* = 0$ και $F = A = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}$ ή $F = -A = -\frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}$.

Συνεχίζοντας, όταν το σφαιρίδιο φτάσει στη θέση $F = A = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}$ έχει διαγράψει τη τροχιά γ_+ και μετά η κίνηση εκτελείται κατά την αντίθετη φορά από τη θέση $F = A$ προς την $F_0^* = 0$, διαγράφοντας την συμμετρική φορά γ_- .

Από την (*) βλέπουμε πράγματι ότι οι τροχιές είναι συμμετρικές ως προς τον F-άξονα. Με αυτό το τρόπο η κίνηση στο επιτρεπτό διάστημα κίνησης $[0, A] = [0, \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}]$ από τη θέση $F_0^* = 0$ στη θέση $F = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}$ και αντίστροφα στην τροχιά του σχήματος 2.β, $\gamma_+ \cup \gamma_- = \gamma$.

Σε κάθε σημείο της τροχιάς η ενέργεια (E) παραμένει σταθερή και ίση με $E_0 = 0$. Στο εσωτερικό της τροχιάς γ , οι τροχιές είναι κυκλικές, αντιστοιχούν σε ενέργεια $E_0 < 0$ και όταν $E_0 < 0$ με E_0 να είναι κοντά στην τιμή τοπικού ελαχίστου της $V(F)$, $V(F_1^*) = \frac{-\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$, προσομοιάζουν σε κλειστές τροχιές που περιγράφονται από την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή (ΑΤ).

Όταν $E_0 < 0$ αλλά $E_0 \rightarrow 0$, οι τροχιές παραμένουν κλειστές (αφού $E_0 < 0$) αλλά αρχίζουν να παραμορφώνονται από ελλείψεις σε κλειστές τροχιές που μοιάζουν με το σχήμα της καμπύλης γ . Οι κλειστες αυτές τροχιές δε περιγράφονται από την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή (ΑΤ) και λέγονται μη-γραμμικές ταλαντώσεις (Σαν την κλειστή τροχιά \odot του Σχήματος 2.β.).

- (δ) Η τροχιά γ του επιτρεπτού διαστήματος $[F_0^*, A] = [0, \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}]$, αντιστοιχεί σε μια ιδεατή κίνηση όπου το σφαιρίδιο, από τη θέση του τοπικού μεγίστου $F_0^* = 0$, θα φτάσει στη θέση $F = A = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2}$ και θα επιστρέψει στη θέση $F_0^* = 0$. Θα υπολογίσουμε τη λύση $F(\xi)$, που μας δίνει τη θέση του σφαιριδίου, όταν αυτό κινείται πάνω στη τροχιά γ . Η λύση θα προκύψει από την επίλυση της (E) για $E_0 = 0$.

Πράγματι καθώς η γ διαγράφεται όταν $E_0 = 0$, από την (E) έχουμε :

$$E(F, F') = \frac{1}{2} F'^2 + V(F) = E_0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2} F'^2 + \mu_0^2 \frac{F^4}{4} - \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} = 0 \quad , \quad (\text{αφού } E_0 = 0 \quad \text{για τη } \gamma)$$

$$\frac{1}{2} F'^2 = \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} - \mu_0^2 \frac{F^4}{4}$$

$$F'^2 = \kappa_0^2 F^2 - \mu_0^2 \frac{F^4}{2}$$

$$\text{και } F' = \pm \sqrt{\kappa_0^2 F^2 - \mu_0^2 \frac{F^4}{2}}$$

Προχωρούμε στην επίλυση της $\Sigma \Delta E$

$$(2.3) \quad F' = \sqrt{\kappa_0^2 F^2 - \mu_0^2 \frac{F^4}{2}}, \quad \text{για } F > 0$$

που αντιστοιχεί στη τροχιά γ . Για $F < 0$ έχουμε την συμμετρική ως προς τον G-άξονα γύρω από τη θέση ισορροπίας $F_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$.

Η (2.3) είναι ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών:

$$\frac{dF}{d\xi} = \sqrt{\kappa_0^2 F^2 - \frac{\mu_0^2 F^4}{2}} \rightarrow \frac{dF}{\sqrt{\kappa_0^2 F^2 - \frac{\mu_0^2 F^4}{2}}} = d\xi \rightarrow \frac{dF}{\sqrt{F^2(\kappa_0^2 - \frac{\mu_0^2 F^2}{2})}} = d\xi$$

$$\xrightarrow{F > 0} \frac{dF}{F\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{\mu_0^2 F^2}{2}}} = d\xi \rightarrow$$

$$(2.4) \int \frac{dF}{F\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{\mu_0^2 F^2}{2}}} = \xi + \xi_0, \text{ (όπου } \xi_0 \text{ σταθερά ολοκλήρωσης).}$$

Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (4) χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητικής $F = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech} \theta$. Για αυτή την αλλαγή μεταβλητικής $dF = -\frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech} \theta \tanh \theta d\theta$. Επίσης χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $1 - \operatorname{sech}^2 \theta = \tanh^2 \theta$. Έτσι το ολοκλήρωμα (4) γίνεται :

$$\int \frac{dF}{F\sqrt{\kappa_0^2 - \frac{\mu_0^2 F^2}{2}}} = \int \frac{-\frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech} \theta \tanh \theta d\theta}{\frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech} \theta \sqrt{\kappa_0^2 - \frac{2\kappa_0^2}{\mu_0^2} \frac{\mu_0^2}{2} \operatorname{sech}^2 \theta}} = \int \frac{-\tanh \theta d\theta}{\sqrt{\kappa_0^2(1 - \operatorname{sech}^2 \theta)}}$$

$$(2.5) \quad = - \int \frac{d\theta}{\kappa_0} = -\frac{\theta}{\kappa_0}.$$

Άρα από τις σχέσεις (2.4) και (2.5) έχουμε :

$$(2.6) \quad -\frac{\theta}{\kappa_0} = \xi + \xi_0 \rightarrow \theta = -(\kappa_0 \xi + \kappa_0 \xi_0).$$

Καθώς χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητικής $F = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech} \theta$, βρίσκουμε με αντικατάσταση της (2.6) στην αλλαγή μεταβλητικής, ότι η λύση είναι:

$$F(\xi) = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech} [-(\kappa_0 \xi + \kappa_0 \xi_0)] \quad \text{ή}$$

$$F(\xi) = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{2} \operatorname{sech}(\kappa_0 \xi + \xi_1) \quad \text{ή}$$

$$(2.7) \quad F(\xi) = \sqrt{\frac{2|\lambda|}{|\mu|}} \operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|}|\xi|)$$

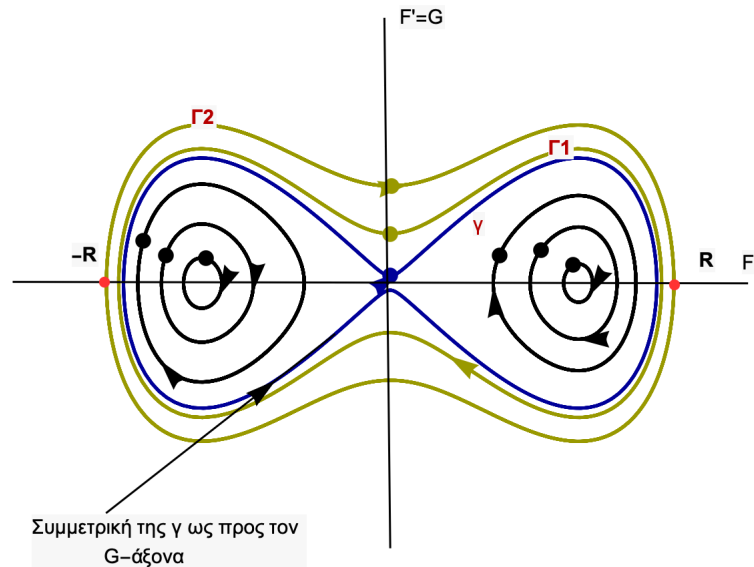
Η (2.7) περιγράφει τη θέση του σωματιδίου όταν αυτό κινείται πάνω στη γ . Παρατηρούμε ότι $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 0 = F_0^*$ αλλά και $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = 0 = F_0^*$.

Δηλαδή η τροχιά γ δεν είναι κλειστή αλλά διαγράφεται σε άπειρο χρόνο $T = \infty$: Αυτό προκύπτει από τις παραπάνω οριακές σχέσεις. Το σωματίδιο που ξεκινάει από τη θέση $F_0^* = 0$, επιστρέφει στη θέση $F_0^* = 0$ όταν $\xi \rightarrow \infty$ και όχι σε πεπερασμένο χρόνο.

Η τροχιά γ , συναντά εφαρμογές σε πολλά φυσικά συστήματα των οποίων η περιγραφή βασίζεται (ή καταλήγει να γίνεται πολλές φορές από) στην εξίσωση του Νεύτωνα. Λέγεται ομοκλιτική τροχιά και αντιστοιχεί στην ιδεατή κίνηση από το ασταθές σημείο ισορροπίας στον εαυτό του. Διαγράφεται όπως είδαμε σε "άπειρο" χρόνο.

Ερώτηση: Για την εξίσωση του Duffing στο Παράδειγμα 1, $F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0$ ποια είναι η μορφή των τροχιών όταν $E_0 > 0$;

Απάντηση: Καθώς $V(F) \rightarrow \infty$ για $F \rightarrow \pm\infty$, για οποιαδήποτε $E_0 > 0$, το 'σφαιρίδιο' βρίσκεται παγιδευμένο εντός της $V(F)$. Το σωματίδιο εκτελεί ταλαντώσεις εντός του επιτρεπτού διαστήματος $[-R, R]$. Το σωματίδιο ταλαντώνεται από τη θέση $-R$ στη θέση R . Για $E_0 > 0$ αλλά $E_0 \rightarrow 0$ η κλειστή τροχιά θα μοιάζει με το σχήμα "∞" που δημιουργούν οι δύο ομοκλιτικές τροχιές. (Βλέπε τροχιά Γ_1 στο Σχήμα 3). Για $E_0 > 0$ αλλά όχι κοντά στο μηδέν, από τη μορφή της Γ_1 , διαπιστώνεται ότι η αντίστοιχη τροχιά έχει τη μορφή της Γ_2 (του ανοιγμένου "∞").



Σχήμα 3.

2.2 Ετεροκλινικές Τροχιές

(α) Σχεδιάστε τις τροχιές στον φασικό χώρο για την εξίσωση του Νεύτωνα :

$$(2.8) \quad F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0 \quad .$$

με $\lambda = \kappa_0^2 > 0$ και $\mu = -\mu_0^2 < 0$ όπου $\kappa_0, \mu_0 > 0$.

(β) Υπολογίστε την λύση που αντιστοιχεί στην ετεροκλινική τροχιά γ^+ (ή γ^-) για αρχική ενέργεια $E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$ και επιβεβαιώστε από τη μορφή της λύσης, ότι διαγράφεται σε άπειρο χρόνο.

Απάντηση

(α) Στην περίπτωση της εξίσωσης (2.8) έχουμε $K(F) = \mu_0^2 F^3 - \kappa_0^2 F$ και η συνάρτηση δυναμικού είναι $V(F) = -\int K(F)dF = -\int (\mu_0^2 F^3 - \kappa_0^2 F)dF = \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} - \mu_0^2 \frac{F^4}{4}$.

Τα σημεία ισορροπίας $\bar{F}^* = (F^*, 0)$ όπου \bar{F}^* - θέσεις ισορροπίας είναι ακριβώς τα ίδια με του προηγούμενου παραδείγματος :

$$\begin{aligned} \bar{F}_0^* &= (F_0^*, 0) = (0, 0), & \bar{F}_1^* &= (F_1^*, 0) = \left(\frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right) \quad \text{και} \\ \bar{F}_2^* &= (F_2^*, 0) = \left(-\frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right) \end{aligned}$$

Ωστόσο έχει εναλλαγεί η ευσταθειά τους, καθώς η $K(F)$ στην (2.8) έχει το αντίθετο πρόσημο της $K(F)$ στο πρώτο παράδειγμα, όπως και η $V(F)$. Για το λόγο αυτό η (2.8) λέγεται αντεστραμμένη εξίσωση Duffing.

Πράγματι η εξίσωση γραμμικοποίησης είναι :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{m} K'(F)\theta = -\frac{1}{m} V''(F^*)\theta, \quad \mu\epsilon \quad m = 1 \quad \text{και} \\ V''(F) &= -K'(F) = -(\mu_0^2 F^3 - \kappa_0^2 F)' = \kappa_0^2 - 3\mu_0^2 F^2 \end{aligned}$$

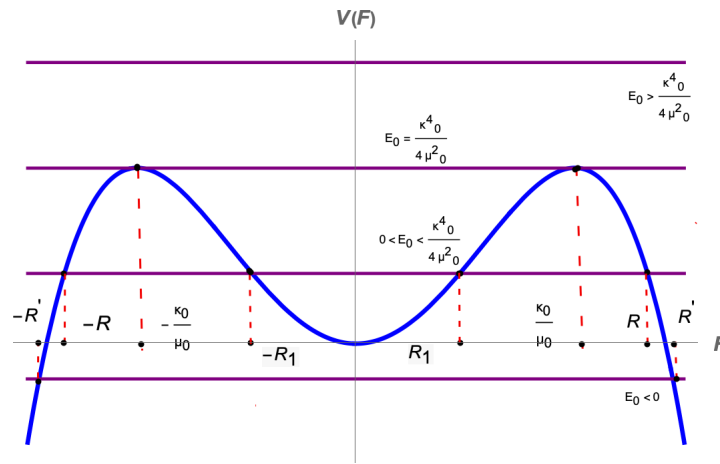
Βήμα 1 : (Ευστάθεια σημείων ισορροπίας)

- Για τη θέση $\bar{F}_0^* = (F_0^*, 0) = (0, 0)$ έχουμε $V''(F_0^*) = V''(0) = \kappa_0^2 > 0$. Δηλαδή στη θέση $F_0^* = 0$ η $V(F)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.
- Για τις συμμετρικές θέσεις $\bar{F}_{1,2}^* = (F_{1,2}^*, 0) = \left(\pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right)$ έχουμε :
 $V''(F_{1,2}^*) = -2\kappa_0^2 < 0$. Δηλαδή στις θέσεις $F_{1,2}^* = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ η $V(F)$ παρουσιάζει τοπικά μέγιστα.

Επομένως το $\bar{F}_0^* = (0, 0)$ είναι ευσταθές και η εξίσωση γραμμικοποίησης είναι αυτή του αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{\theta} = -\kappa_0^2 \theta$.

Τα σημεία $\bar{F}_{1,2}^* = \left(\pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}, 0\right)$ είναι ασταθή και η εξίσωση γραμμικοποίησης είναι αυτή της απωστικής δύναμης $\ddot{\theta} = 2\kappa_0^2 \theta$. Επίσης για τη $V(x)$ παρατηρούμε ότι $\lim_{F \rightarrow \pm\infty} V(F) = -\infty$.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4.

Επίσης παρατηρούμε ότι η τιμή του τοπικού μεγίστου στις θέσεις $F_{1,2}^* = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ είναι : $V\left(\pm \frac{\kappa_0}{\mu_0}\right) = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$.

Βήμα 2 : (Τροχιές στο φασικό χώρο)

(i) Αν η αρχική ενέργεια είναι $0 < E_0 < \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$ υπάρχουν οι εξείς δυνατότητες :

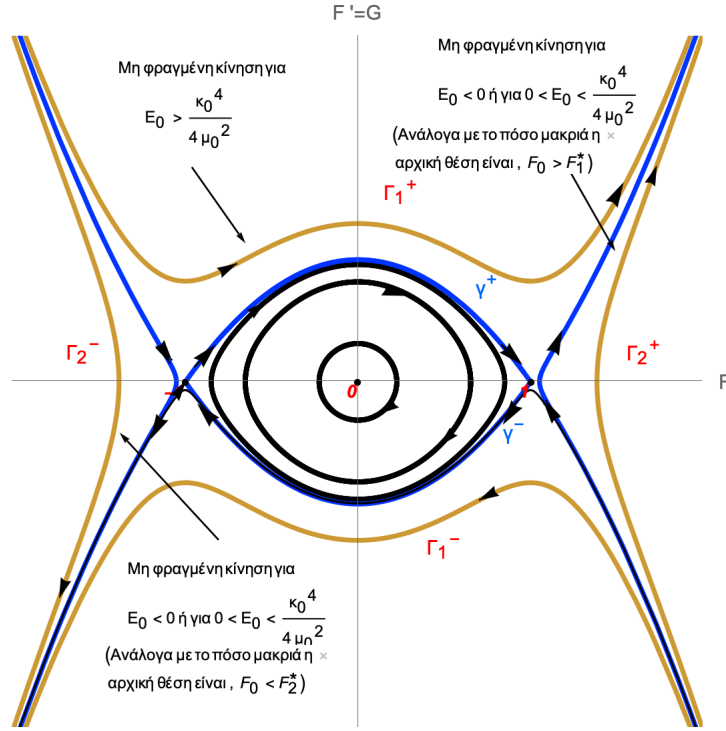
- Το σωματίδιο να εκτελεί ταλαντώσεις στο επιτρεπτό διάστημα κίνησης $[-R_1, R_1]$ εντός του πηγαδιού, γύρω από την ευσταθή θέση ισορροπίας $F_0^* = 0$, αν η αρχική του θέση είναι εντός του διαστήματος $[-R_1, R_1]$.
- Επίσης για $0 < E_0 < \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$ υπάρχει η δυνατότητα να εκτελέσει μη-φραγμένες κινήσεις αν η αρχική του θέση είναι στα αρχικά διαστήματα κίνησης $(-\infty, R]$ ή $[R, +\infty)$.

(ii) Για $E_0 < 0$, τα μοναδικά επιτρεπτά διαστήματα κίνησης είναι της μορφής $(-\infty, R']$ και $[R', +\infty)$, επομένως σε αυτή τη περίπτωση, το σωματίδιο εκτελεί μη-φραγμένες κινήσεις.

(iii) $E_0 = 0$. Αυτή είναι ακριβώς η τιμή του τοπικού ελαχίστου $V(F_0^*) = 0$. Το " επιτρεπτό διάστημα κίνησης", είναι η θέση ισορροπίας $F_0^* = 0$. Το σωματίδιο παραμένει ακίνητο στη θέση αυτή.

(iv) Για $E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$ το επιτρεπτό διάστημα κίνησης είναι το $[-\frac{\kappa_0}{\mu_0}, \frac{\kappa_0}{\mu_0}] = [F_2^*, F_1^*]$. Δηλαδή υπάρχει τροχιά που συνδέει τις θέσεις των δύο τοπικών μεγίστων. Από φυσικής πλευράς, αυτή η τροχιά επίσης είναι " ιδεατή " με την έννοια ότι το σωματίδιο ξεκινάει για παράδειγμα από τη θέση ισορροπίας $F_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$ που είναι ασταθής, και κατευθύνεται στη θέση $F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ που είναι ασταθής (ή από την αντίθετη κατεύθυνση

$F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ προς την $F_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$). Με βάση όλα τα παραπάνω σκεπτόμενοι όπως και στο πρώτο παράδειγμα, οι τροχιές στο φασικό χώρο, θα είναι αυτές του Σχήματος 5.



Στο Σχήμα 5, οι τροχιές γ^+, γ^- αντιστοιχούν στις "ιδεατές" τροχιές με ενέργεια $E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$. Οι τροχιές αυτές που συνδέουν δύο ασταθή σημεία ισορροπίας λέγονται ετεροκλινικές (ενώ στο πρώτο παράδειγμα που συνδέει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας με τον εαυτό του, ομοκλινική).

Οι τροχιές \odot εντός των γ^+ και γ^- είναι κλειστές, και αντιστοιχούν στις ταλαντώσεις του σωματιδίου όταν αυτό βρίσκεται εντός του πηγαδιού, με επιτρεπτά διαστήματα της μορφής $[-R_1, R_1]$, (περιοδικές λύσεις του συστήματος).

Οι τροχιές Γ_2^- και Γ_2^+ αντιστοιχούν σε μη-φραγμένες κινήσεις που αντιστοιχούν στα επιτρεπτά διαστήματα κίνησης της μορφής $(-\infty, R]$ και $[R, +\infty)$.

Αυτό μπορούμε να το σκεφτούμε βλέποντας ότι κάθε σημείο από αυτές τις τροχιές αντιστοιχεί σε θέσεις $F < -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$ ή $F > \frac{\kappa_0}{\mu_0}$. Ειδικότερα, αυτές οι τροχιές μπορούν να αντιστοιχούν είτε στις μη-φραγμένες κινήσεις των μη-φραγμένων επιτρεπτών διαστημάτων για $0 < E_0 < \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$ είτε στις μη-φραγμένες κινήσεις των μη-φραγμένων επιτρεπτών διαστημάτων για $E_0 < 0$, ανάλογα με το πόσο μακριά βρισκόμαστε από τις θέσεις $F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}$ ή $F_2^* =$

$-\frac{\kappa_0}{\mu_0}$ αρχικά.

Η τροχιά Γ_1^+ αντιστοιχεί σε μη φραγμένη κίνηση για αρχική ενέργεια $E_0 > \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$: Το σωματίδιο έχει τόσο μεγάλη ενέργεια ώστε προερχόμενο από το $F = -\infty$, περνάει από την ασταθή θέση ισορροπίας $F_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0}$, από τη θέση του τοπικού ελαχίστου $F_0^* = 0$ αλλά και από τη θέση του τοπικού μεγίστου $F_1^* = \frac{\kappa_0}{\mu_0}$, και κατευθύνεται στο $F = +\infty$.

Η Γ_1^- περιγράφει την αντίστοιχη κίνηση, αλλά με την αντίθετη φορά, από το $F = +\infty$ στο $F = -\infty$.

- (β) Θα επιλύσουμε ξανά τη ΣΔΕ της ενέργειας $E(F, F') = \frac{1}{2}F'^2 + V(F) = E_0$, ως προς F , για την ενέργεια $E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$ που αντιστοιχεί στην ετεροκλινική τροχιά. Πράγματι, έχουμε :

$$\begin{aligned} E(F, F') = \frac{1}{2}F'^2 + V(F) = E_0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}F'^2 + \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} - \mu_0^2 \frac{F^4}{4} &= \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2} \quad \rightarrow \\ F'^2 = 2\left(\frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2} + \mu_0^2 \frac{F^4}{4} - \kappa_0^2 \frac{F^2}{2}\right) \quad \text{ή} \quad F' = \sqrt{2} \sqrt{\mu_0^2 \frac{F^4}{4} - \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} + \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}} &\rightarrow \\ F' = \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{\mu_0 F^2}{2} - \frac{\kappa_0^2}{2\mu_0}\right)^2} \quad \text{ή} \quad F' = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\mu_0 F^2 - \frac{\kappa_0^2}{\mu_0}\right) &\rightarrow \\ \frac{dF}{d\xi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\mu_0 F^2 - \frac{\kappa_0^2}{\mu_0}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{dF}{\left(\mu_0 F^2 - \frac{\kappa_0^2}{\mu_0}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} d\xi &\rightarrow \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \int \frac{dF}{\left(\mu_0 F^2 - \frac{\kappa_0^2}{\mu_0}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \xi + \xi_0$$

Ένας από τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της (2.9) είναι ξανά με αλλαγή μεταβλητής υπερβολικών συναρτήσεων. (φυσικά το ολοκλήρωμα υπολογίζεται και με τον συνήθη τρόπο χωρισμού σε μερικά κλάσματα).

Θέτουμε $F = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \tanh \theta$ και $dF = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \operatorname{sech}^2 \theta$.

Έτσι :

$$\begin{aligned} \int \frac{dF}{\left(\mu_0 F^2 - \frac{\kappa_0^2}{\mu_0}\right)} &= \int \frac{\frac{\kappa_0}{\mu_0} \operatorname{sech}^2 \theta d\theta}{\left(\mu_0 \frac{\kappa_0^2}{\mu_0^2} \tanh^2 \theta - \frac{\kappa_0^2}{\mu_0}\right)} = \int \frac{\frac{\kappa_0}{\mu_0} \operatorname{sech}^2 \theta d\theta}{\frac{\kappa_0^2}{\mu_0^2} (\tanh^2 \theta - 1)} = \\ \frac{1}{\kappa_0} \int \frac{\operatorname{sech}^2 \theta d\theta}{\tanh^2 \theta - 1} &= \frac{1}{\kappa_0} \int \frac{\operatorname{sech}^2 \theta d\theta}{-\operatorname{sech}^2 \theta} = \frac{1}{\kappa_0} \int -d\theta = \\ (2.10) \quad &= -\frac{1}{\kappa_0} \theta. \end{aligned}$$

Επομένως, από τις (2.9) και (2.10), έχουμε ότι :

$$-\frac{1}{\kappa_0}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \xi_0 \quad \text{ή} \quad \theta = -(\kappa_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \xi_0)$$

Καθώς θέσαμε $F = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \tanh \theta$, βρίσκουμε τελικά ότι η λύση που αντιστοιχεί στην ετεροκλινική τροχιά είναι :

$$F(\xi) = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \tanh[-(\kappa_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \xi_0)] \quad \text{ή}$$

$$F(\xi) = -\frac{\kappa_0}{\mu_0} \tanh(\kappa_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \xi_0) \quad \text{ή}$$

$$F(\xi) = -\sqrt{\frac{\kappa_0^2}{\mu_0^2}} \tanh(\sqrt{\frac{\kappa_0^2}{2}}\xi + \xi_0) \quad \text{ή}$$

$$F(\xi) = -\sqrt{\frac{|\lambda|}{|\mu|}} \tanh(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\xi + \xi_0) \quad \text{ή}$$

$$(2.11) \quad F(\xi) = -\sqrt{\frac{|\lambda|}{|\mu|}} \tanh \sqrt{\frac{|\lambda|}{2}} \xi.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = -\frac{\kappa_0}{\mu_0} = F_2^*$ και $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = \frac{\kappa_0}{\mu_0} = F_1^*$

δηλαδή η λύση αυτή που αντιστοιχεί στη ενέργεια $E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$, συνδέει τις ασταθείς θέσεις ισορροπίας F_1^* και F_2^* σε άπειρο χρόνο.

Κεφάλαιο 3

Ακριβείς λύσεις μοναχικών κυμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό, θα επικεντρωθούμε στην διερεύνηση συνθηκών, για την ύπαρξη αναλυτικών λύσεων μοναχικών κυμάτων (solitary waves). Η μέθοδος που ακολουθείται, βασίζεται στην μέθοδο υποβιβασμού σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν, αναζητώντας λύσεις της (1.54), με την μορφή οδεύοντος κύματος (traveling wave).

Ειδικότερα, αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$(3.1) \quad \varphi(x, t) = e^{i(k_0x - \omega_0t)} F(\xi), \quad \xi = x - vt.$$

Στην (3.1), η $F(\xi)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση, που περιγράφει την περιβάλλουσα του κύματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να θεωρηθεί πραγματική. Οι πραγματικές παράμετροι k_0, ω_0 , είναι αντίστοιχα, ο κυματαριθμός και η κυκλική συχνότητα. Η παράμετρος v , αντιστοιχεί στην ομαδική ταχύτητα του κύματος, σε διάγραμμα $x - t$, και συνδέεται με την έννοια της ομαδικής ταχύτητας v_g ενός παλμού, που διαδίδεται σε οπτική ίνα. Οι παράμετροι k_0, ω_0 και v είναι άγνωστες παράμετροι, που πρέπει να προσδιοριστούν.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον, το ότι η συνθήκη ισορροπίας (1.55) εμφανίζεται ξανά, αυτή την φορά, ως απαραίτητη συνθήκη για την υποστήριξη λύσεων οδεύοντος κύματος της μορφής (3.1).

Θεώρημα 1. Έστω $\sigma \neq 0$. Η εξίσωση (1.54) υποστηρίζει λύσεις οδεύοντος κύματος της μορφής (3.1), για κάθε $k_0 \neq \frac{\rho}{3\sigma}$, αν ισχύει η συνθήκη (1.55), και τα ω_0, v ικανοποιούν τη σχέση

$$(3.2) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sigma} [(v + 3k_0^2\sigma - 2k_0\rho)(3k_0\sigma - \rho) + \sigma(\rho k_0^2 - \sigma k_0^3)].$$

Απόδειξη. Αρχικά, υπολογίζουμε τις παραγώγους της φ παίρνοντας υπόψη μας ότι $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v, \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (-vF' - i\omega_0F)e^{i(k_0x - \omega_0t)} \\ \varphi_x &= (F' + ik_0F)e^{i(k_0x - \omega_0t)} \\ \varphi_{xx} &= (F'' + 2ik_0F' - k_0^2F)e^{i(k_0x - \omega_0t)} \\ \varphi_{xxx} &= (F''' + 3ik_0F'' - 3k_0^2F' - ik_0^3F)e^{i(k_0x - \omega_0t)} \end{aligned}$$

Να σημειώσουμε, ότι ο τόνος παριστάνει την συνήθη παράγωγο της F ως προς ξ . Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (1.54), και μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -vF' - i\omega_0 F - i\rho F'' + 2\rho k_0 F' + i\rho k_0^2 F + \sigma F''' + 3i\sigma k_0 F'' - 3\sigma k_0^2 F' \\ -i\sigma k_0^3 F + 3\alpha F^2 F' + 3i\alpha k_0 F^3 - i\delta F^3 = 0 \end{aligned}$$

Διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$(3.4) \quad F''' - \frac{v + 3k_0^2\sigma - 2\rho k_0}{\sigma} F' + \frac{3\alpha}{\sigma} F^2 F' = 0,$$

$$(3.5) \quad F'' - \frac{\omega_0 - \rho k_0^2 + \sigma k_0^3}{3\sigma k_0 - \rho} F + \frac{3\alpha k_0 - \delta}{3\sigma k_0 - \rho} F^3 = 0,$$

για τις οποίες απαιτούμε να ισχύουν οι προϋποθέσεις

$$(3.6) \quad \sigma \neq 0, \rho \neq 3\sigma k_0.$$

Για να είναι το παραπάνω σύστημα καλώς ορισμένο, θα πρέπει η (3.5) να είναι άλλη μια φορά παραγωγίσιμη. Κάνοντας την παραγωγή της αυτή, η (3.5) γίνεται

$$F''' - \frac{\omega_0 - \rho k_0^2 + \sigma k_0^3}{3\sigma k_0 - \rho} F' + 3\frac{3\alpha k_0 - \delta}{3\sigma k_0 - \rho} F^2 F' = 0,$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων ίδιας τάξης, παίρνουμε τις σχέσεις:

$$(3.7) \quad \frac{v + 3k_0^2\sigma - 2\rho k_0}{\sigma} = \frac{\omega_0 - \rho k_0^2 + \sigma k_0^3}{3\sigma k_0 - \rho} = \lambda,$$

$$(3.8) \quad \frac{3\alpha}{\sigma} = 3\frac{3\alpha k_0 - \delta}{3\sigma k_0 - \rho} = \mu,$$

όπου τα λ, μ είναι μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.

Η συνθήκη (3.8), συνεπάγεται άμεσα ότι $\alpha\rho = \sigma\delta, \forall k_0 \in \mathbb{R}$. Η συνθήκη (3.2) εξάγεται λύνοντας την (3.7), ως προς ω_0 . \square

Πόρισμα 1. Έστω $\sigma, \rho \neq 0$. Η εξίσωση (1.54) υποστηρίζει λύσεις οδεύοντος κύματος, της μορφής (3.1), με κυματαριθμό $k_0 = 0$, αν ισχύει η συνθήκη (1.55) για τους συντελεστές, και τα ω_0, v ικανοποιούν τη σχέση:

$$(3.9) \quad \frac{v}{\sigma} = -\frac{\omega_0}{\rho}.$$

Με δεδομένες τις σχέσεις (3.7) και (3.8), που καθιστούν το σύστημα των (3.4) και (3.5) συνεπές, η συνήθης διαφορική εξίσωση 2ης τάξης που προκύπτει, είναι ουσιαστικά μια συντηρητική εξίσωση Duffing:

$$(3.10) \quad F'' + \lambda F + \mu F^3 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση, έχει Χαμιλτονιανή την

$$(3.11) \quad H(F, F') = \frac{F'^2}{2} + \lambda \frac{F^2}{2} + \mu \frac{F^4}{4}.$$

Οι ακριβείς λύσεις της (1.54), όπως και η δυναμική τους μπορούν να προσδιοριστούν από τις λύσεις και την δυναμική της (3.10).

Για να περιορίσουμε τον αριθμό των παραμέτρων που εμπλέκονται στην μελέτη μας, πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $t \rightarrow \rho t$, και ξαναγράφουμε την εξίσωση (1.54) στην μορφή

$$(3.12) \quad \varphi_t + 3\frac{\alpha}{\rho}|\varphi|^2\varphi_x - i\varphi_{xx} + \frac{\sigma}{\rho}\varphi_{xxx} - i\frac{\delta}{\rho}|\varphi|^2\varphi = 0.$$

Στην συνέχεια, προχωρούμε στον μετασχηματισμό

$$(3.13) \quad \frac{\delta}{\rho}|\varphi|^2 \rightarrow s|\varphi|^2, s = \text{sign}\left(\frac{\delta}{\rho}\right),$$

και η εξίσωση (3.12), παίρνει τη μορφή

$$(3.14) \quad \varphi_t + 3As|\varphi|^2\varphi_x - i\varphi_{xx} + B\varphi_{xxx} - is|\varphi|^2\varphi = 0,$$

όπου οι σταθερές A , B και s ορίζονται ως

$$(3.15) \quad A = \frac{\alpha}{\delta}, B = \frac{\sigma}{\rho}, s = \text{sign}\left(\frac{\delta}{\rho}\right).$$

Επανερχόμαστε στις συνθήκες συνέπειας (3.7), (3.8), για τις εξισώσεις (3.14), (3.15). Συγκρίνοντας τους συντελεστές της αρχικής εξίσωσης (1.54), με αυτούς της εξίσωσης (3.14), παρατηρούμε ότι

$$(3.16) \quad \alpha \rightarrow As, \rho \rightarrow 1, \sigma \rightarrow B, \delta \rightarrow s.$$

Τότε, οι συνθήκες (3.7), (3.8), γράφονται αντίστοιχα ως:

$$(3.17) \quad \lambda = \frac{v + 3k_0^2B - 2k_0}{B} = \frac{\omega_0 - k_0^2 + Bk_0^3}{3k_0B - 1},$$

$$(3.18) \quad \mu = \frac{As}{B} = \frac{3Ask_0 - s}{3Bk_0 - 1}.$$

Τώρα, με την βοήθεια των (3.15), (3.17), (3.18), μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2. Θεωρούμε την εξίσωση (3.14).

I. Ύπαρξη οδοντών κυμάτων

Έστω οι συντελεστές s, A, B που ορίζονται από την (3.13) και την (3.15). Τότε, η εξίσωση (3.14) υποστηρίζει λύσεις οδοντών κυμάτων, της μορφής (3.1) για κάθε κυματαριθμό $k_0 \neq \frac{1}{3B}$, αν

$$(3.19) \quad A = B, \text{ και } \omega_0 = k_0^2 - Bk_0^3 + \frac{(v + 3k_0^2B - 2k_0)(3k_0B - 1)}{B}.$$

II. Φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια

Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η (3.19). Τότε η εξίσωση (3.14) υποστηρίζει λύσεις οδοντών κυμάτων (3.1), της μορφής των φωτεινών σολιτονίων με περιβάλλουσα

$$(3.20) \quad F(\xi) = \pm\sqrt{2|\lambda|}\operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|}\xi),$$

αν οι συντελεστές λ και μ που προσδιορίζονται από τις (3.17) και (3.18) είναι τέτοιοι ώστε

$$(3.21) \quad \mu = 1, \lambda < 0.$$

Η εξίσωση (3.14) υποστηρίζει λύσεις οδοντών κυμάτων (3.1), της μορφής των σκοτεινών σολιτονίων με περιβάλλουσα

$$(3.22) \quad F(\xi) = \pm\sqrt{|\lambda|}\tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}}\xi\right),$$

αν οι συντελεστές λ και μ είναι τέτοιοι ώστε

$$(3.23) \quad \mu = -1, \lambda > 0.$$

Απόδειξη. I. Το σκέλος αυτό έχει ουσιαστικά αποδειχθεί από το θεώρημα 1. Οι συνθήκες (3.19), είναι οι συνθήκες (1.55) και (3.2), στις οποίες έχουν εισαχθεί οι νέοι συντελεστές A και B από την (3.15).

II.

Φωτεινά σολιτόνια

Σύμφωνα με τη μελέτη της εξίσωσης του Νεύτωνα που έχει γίνει στο 2ο κεφάλαιο, για $\mu = \mu_0^2 > 0$ και $\lambda = -\kappa_0^2 < 0$, όπου $\kappa_0, \mu_0 > 0$, η ομοκλινική τροχιά γ έχει εξίσωση :

$$(3.24) \quad F' = \sqrt{\kappa_0^2 F^2 - \frac{F^4}{2}}, \quad \text{για } F > 0$$

ενώ η συμμετρική της ως προς τον G-αξονα :

$$(3.25) \quad F' = -\sqrt{\kappa_0^2 F^2 - \frac{F^4}{2}}, \quad \text{για } F < 0$$

όπου $F \in [-\kappa_0\sqrt{2}, \kappa_0\sqrt{2}]$.

Οι λύσεις δε, των φωτεινών σολιτονίων που αντιστοιχούν στις συμμετρικές ομοκλινικές τροχιές (3.24) και (3.25) είναι:

$$F(\xi) = \pm\frac{\kappa_0}{\mu_0}\sqrt{2}\operatorname{sech}(\kappa_0\xi)$$

Έτσι για $\mu = \mu_0^2 = 1 > 0$ και $\lambda = -\kappa_0^2 < 0$ οι λύσεις για την περιβάλλουσα των φωτεινών σολιτονίων είναι τελικά:

$$F_{\pm}^{(bs)}(\xi) = \pm\sqrt{2|\lambda|}\operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|}\xi),$$

Συνοψίζοντας, τα φωτεινά σολιτόνια, αντιστοιχούν σε δυναμική ενέργεια $V(F) = \frac{F^4}{4} + \lambda \frac{F^2}{2}$, που περιγράφει ένα διπλό πηγάδι δυναμικού, με ευσταθή κέντρα $(F, F') = (\pm \kappa_0, 0) = (\pm \sqrt{|\lambda|}, 0)$, ένα σε κάθε πηγάδι. Τα κέντρα περιστοιχίζονται από συμμετρικές ομοκλινικές τροχιές, οι οποίες ορίζουν τις λύσεις των φωτεινών σολιτονίων.

Σκοτεινά σολιτόνια

Στην περίπτωση τώρα που $\lambda = \kappa_0^2 > 0$ και $\mu = -\mu_0^2 < 0$, όπου $\kappa_0, \mu_0 > 0$, οι ετεροκλινικές τροχιές περιγράφονται από την εξίσωση:

$$(3.26) \quad F' = \pm \sqrt{2} \sqrt{\mu_0^2 \frac{F^4}{4} - \kappa_0^2 \frac{F^2}{2} + \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}}$$

ενώ οι λύσεις των σκοτεινών σολιτονίων που αντιστοιχούν στις συμμετρικές ετεροκλινικές τροχιές (3.26) είναι:

$$F(\xi) = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0} \tanh\left[-\left(\kappa_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \xi\right]$$

Για $\mu = -\mu_0^2 = -1 < 0$ και $\lambda = \kappa_0^2 > 0$ οι λύσεις για την περιβάλλουσα των σκοτεινών σολιτονίων είναι τελικά:

$$F(\xi) = \pm \sqrt{|\lambda|} \tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}} \xi\right)$$

Συνοψίζοντας, η δυναμική ενέργεια $V(F) = -\frac{F^4}{4} + \lambda \frac{F^2}{2}$ περιγράφει αντεστραμμένο διπλό πηγάδι δυναμικού, με ευσταθές κέντρο $(F, F') = (0, 0)$, τοποθετημένο ανάμεσα στα δύο σαγματικά σημεία, τα οποία αντιστοιχούν στα δυο συμμετρικά τοπικά μέγιστα του αντεστραμμένου δυναμικού. Οι ετεροκλινικές τροχιές που συνδέουν τα σαγματικά σημεία, ορίζουν τις λύσεις των σκοτεινών σολιτονίων. \square

Στην περίπτωση που ο κυματαριθμός είναι $k_0 = 0$ έχουμε το ακόλουθο:

Πόρισμα 2. I. Υπαρξη οδευόντων κυμάτων.

Θεωρούμε τους συντελεστές s, A, B που ορίζονται από τις (3.13), και (3.15). Η εξίσωση (3.14) επιδέχεται λύσεις οδευόντων κυμάτων (3.1), για κυματαριθμό $k_0 = 0$, αν

$$(3.27) \quad A = B, \quad \text{και} \quad \frac{v}{B} = -\omega_0.$$

II. Φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια.

Έστω ότι επαληθεύεται η συνθήκη (3.19). Τότε η εξίσωση (3.14) επιδέχεται λύσεις οδευόντων κυμάτων (3.1) της μορφής φωτεινών σολιτονίων, με κυματαριθμό $k_0 = 0$, και περιβάλλουσα συνάρτηση

$$(3.28) \quad F(\xi) = \pm \sqrt{2|\lambda|} \operatorname{sech}(\sqrt{|\lambda|} \xi),$$

αν οι παράμετροι μ, v, B, ω_0 είναι τέτοιες ώστε

$$(3.29) \quad \mu = 1, \quad \omega_0 > 0, \quad \frac{v}{B} < 0.$$

Η εξίσωση (3.14) επιδέχεται λύσεις οδευόντων κυμάτων (3.1) της μορφής σκοτεινών σολιτονίων, με κυματαριθμό $k_0 = 0$, και περιβάλλουσα συνάρτηση

$$(3.30) \quad F(\xi) = \pm \sqrt{2|\lambda|} \tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{2}} \xi\right),$$

αν οι παράμετροι μ, v, B, ω_0 είναι τέτοιες ώστε

$$(3.31) \quad \mu = -1, \quad \omega_0 < 0, \quad \frac{v}{B} > 0.$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση του κυματαριθμού $k_0 = 0$, η εξίσωση (3.20) γίνεται

$$\lambda = \frac{v}{B} = -\omega_0.$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2, για τα φωτεινά σολιτόνια απαιτούμε $\mu = 1$ και $\lambda < 0$, παίρνοντας έτσι την (3.29). Για τα σκοτεινά σολιτόνια, απαιτούμε $\mu = -1$ και $\lambda > 0$, παίρνοντας αντίστοιχα την (3.31). \square

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση, είναι ότι η ENLS (1.54) δεν επιδέχεται λύσεις στάσιμων κυμάτων:

Θεώρημα 3. Δεν υπάρχουν περιοδικές ως προς τον χρόνο λύσεις, της μορφής

$$\varphi(x, t) = F(x)e^{-i\omega_0 t},$$

για την εξίσωση ENLS (1.54).

Απόδειξη. Μια περιοδική ως προς το χρόνο λύση της μορφής $\varphi(x, t) = F(x)e^{-i\omega_0 t}$ προκύπτει ως μια ειδική περίπτωση της λύσης (3.1), αν θέσουμε $k_0 = v = 0$. Οπωσδήποτε, από το πόρισμα 1, προκύπτει ότι αν $v = 0$ τότε $\omega_0 = 0$. Έτσι στην περίπτωση αυτή η φ δεν μπορεί να είναι περιοδική ως προς τον χρόνο, αλλά είναι μια λύση σταθερής κατάστασης, ανεξάρτητη από τον χρόνο. \square

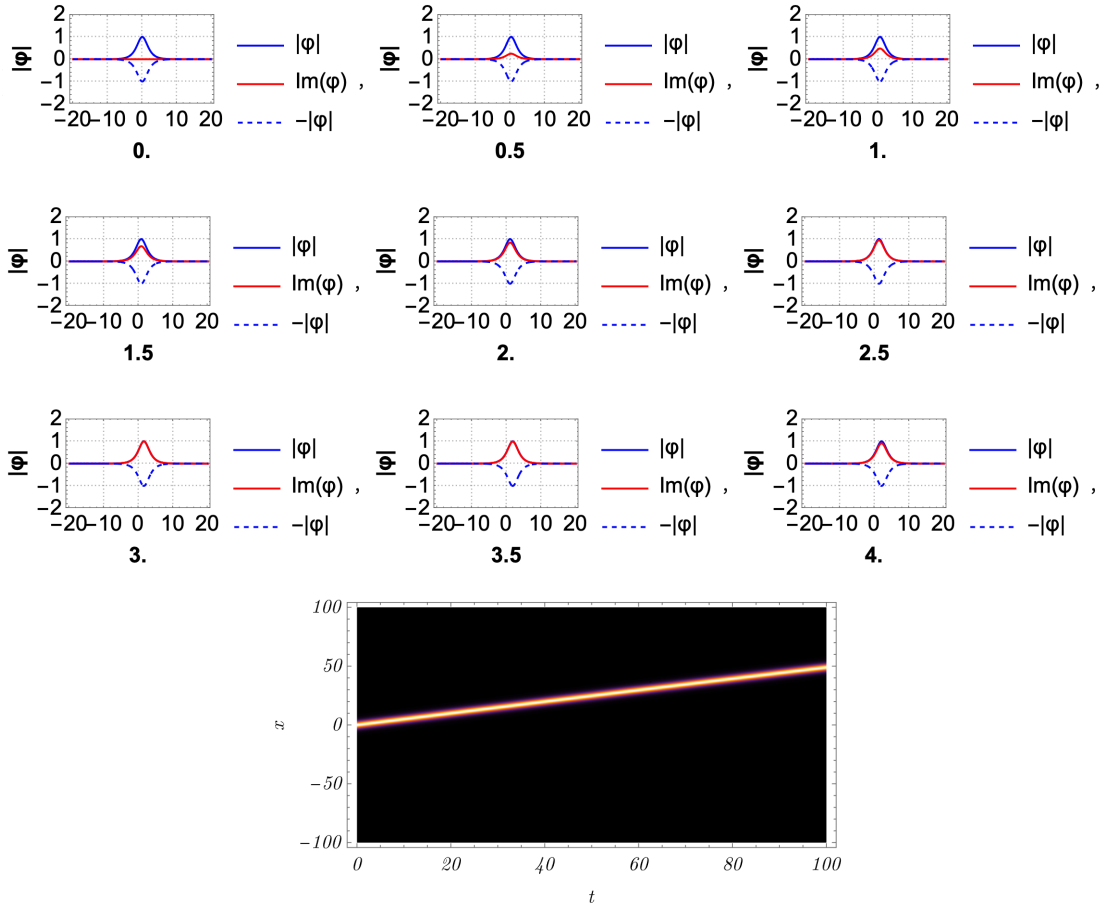
3.1 Αριθμητικές μελέτες

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε αποτελέσματα αριθμητικών εξομοιώσεων, οι οποίες διερευνούν αριθμητικά, τις συνθήκες του Θεωρήματος 2 για την ύπαρξη φωτεινών και σκοτεινών σολιτονίων. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την περίπτωση των φωτεινών σολιτονίων, για $k_0 = 0$, και τις συνθήκες του πορίσματος 2. Τότε από τις σχέσεις (3.9) και (3.15), προκύπτει ότι, λύσεις οδευόντων κυμάτων της μορφής (3.1) υπάρχουν, αν ισχύει η συνθήκη

$$(3.32) \quad A = B, \quad \frac{v}{B} = -\omega_0.$$

Για λύσεις φωτεινών σολιτονίων, οι παράμετροι μ, v, B και ω_0 , είναι τέτοιες ώστε

$$(3.33) \quad \mu = 1, \quad \omega_0 > 0, \quad \frac{v}{B} < 0.$$



Σχήμα 3.1: Πάνω εικόνες: έχουμε την πυκνότητα $|\phi|(x,0)^2$ της αρχικής κατάστασης ενός φωτεινού σολιτονίου [αρχική συνθήκη (3.33)], και στιγμιότυπα για διαφορετικές χρονικές στιγμές. Κάτω εικόνα: η ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξής της. Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $A = B = 1$, $\omega_0 = 0.5$, $v = 0.5$, $s = 1$.

Η πάνω εικόνα του σχήματος 3.1, παρουσιάζει την μορφή της πυκνότητας $|\phi|^2$, για την αρχική συνθήκη

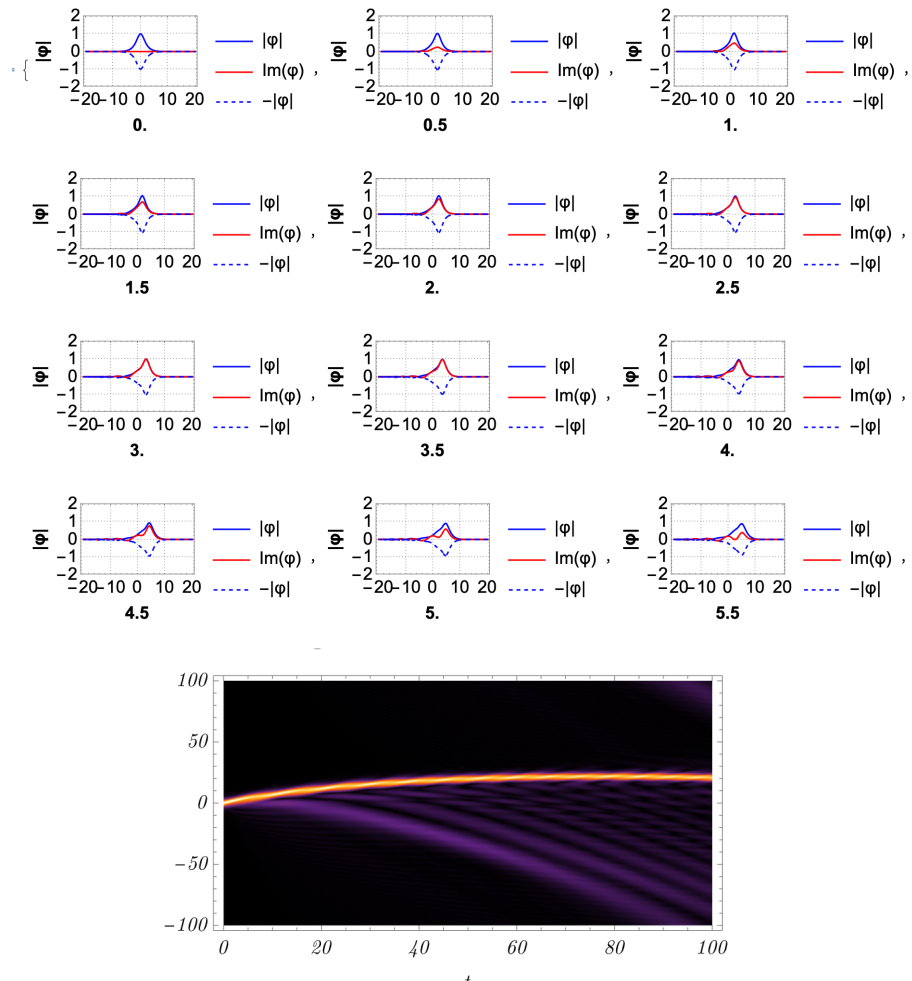
$$(3.34) \quad \varphi_0(x) = \operatorname{sech}(\sqrt{0.5}x)$$

Βλέπουμε ότι το μέτρο $|\phi|$ είναι μια οδεύουσα συνάρτηση. Το μέτρο $|\phi|$ περιβάλλει το φανταστικό μέρος $Im[\phi]$, το οποίο εκτελεί μια οδεύουσα ταλάντωση.

Η κάτω εικόνα του σχήματος 3.1 παρουσιάζει την ισοσταθμική επιφάνεια της εξέλιξης της πυκνότητας της αρχικής συνθήκης (με άλλα λόγια, την προβολή της στο xt -επίπεδο). Το αρχικό φωτεινό σολιτόνιο $\phi_{bs}(x) = \operatorname{sech}(\sqrt{0.5}x)$, έχει τη μορφή της (3.28), για τις τιμές των παραμέτρων $A = B = 1$ και $\mu = 1$. Για τη συγκεκριμένη τιμή του μ , η σχέση (3.18) συνεπάγεται ότι $s = 1$. Έχουμε επίσης επιλέξει $\omega_0 = 0.5$, που σε συνδυασμό με το $k_0 = 0$, καταλήγουμε μέσω της (3.17), στην τιμή του $\lambda = -0.5$.

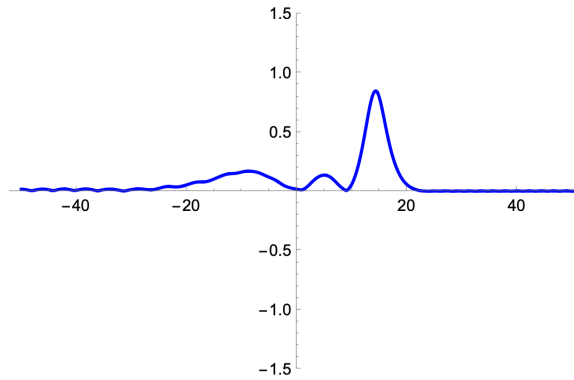
Τα αποτελέσματα του σχήματος 3.1, βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με τα αναλυτικά αποτελέσματα της ύπαρξης μοναχικών παλμών, όπως αυτά διατυπώθηκαν στο θεώρημα 2 και στο πόρισμα 2. Δηλαδή, ο παλμός ταξιδεύει με ταχύτητα $v = 0.5$, όπως αναμένεται από την (3.29). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο παλμός αυτός παραμένει ευσταθής.

Αξίζει τέλος να εξετάσουμε τα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου παύει να ισχύει η συνθήκη ισορροπίας $A=B$. Αν δοκιμάσουμε λοιπόν για $A=1.4$ και $B=1$, ενώ ο κυματαριθμός k_0 εξακολουθεί να είναι ίσος με μηδέν, θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα :



Σχήμα 3.2: Οι τιμές των παραμέτρων είναι πλέον : $A = 1.4$ και $B = 1$. Δεν ισχύει η συνθήκη $A = B$.

Παρατηρούμε ότι ο παλμός του φανταστικού μέρους της λύσης, $\text{Im}[\varphi]$, έχει διαταραχθεί σημαντικά ενώ έχει αλλοιωθεί επίσης η μορφή του οδεύοντος κύματος. Έχει όπως λέμε ακτινοβολία. Η ακτινοβολία αυτή φαίνεται έντονα και στο επόμενο σχήμα.



Ακτινοβολία Κύματος

3.2 Αστάθεια διαμόρφωσης επιπέδων κυμάτων

Στην παράγραφο αυτή, θα ερευνήσουμε συνθήκες που οδηγούν στην αστάθεια διαμόρφωσης (modulation instability), των λύσεων επιπέδων κυμάτων της εξίσωσης (3.14). Οι λύσεις αυτές έχουν την μορφή

$$(3.35) \quad \varphi^{(0)}(x, t) = \varphi_0 e^{i(kx - \omega t)}.$$

Στην περίπτωση μας, υποθέτουμε ότι το επίπεδο κύμα έχει σταθερό πλάτος $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, κυματαριθμό k , και κυκλική συχνότητα ω . Θα δείξουμε ότι για $k \neq 0$, υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές στις συνθήκες της αστάθειας μεταξύ της μη γραμμικής εξίσωσης (3.14), και του ορίου της για $A = B = 0$, δηλαδή της εξίσωσης Schrödinger.

Ξεκινάμε, αντικαθιστώντας την (3.35) στην (3.14). Με αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε την σχέση διασποράς, που εκφράζει την κυκλική συχνότητα ω , ως συνάρτηση των k και φ^2 :

$$-i\omega\varphi + 3As|\varphi_0|^2 ik\varphi + ik^2\varphi - iBk^3\varphi - is|\varphi_0|^2\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$(3.36) \quad \omega = -s\varphi_0^2 + 3Ask\varphi_0^2 + k^2 - Bk^3.$$

Θεωρούμε μια διαταραχή της λύσης (3.35), που έχει την μορφή

$$(3.37) \quad \varphi(x, t) = \varphi^{(0)}(x, t) + \varphi^{(1)}(x, t), \varphi^{(1)}(x, t) \in \mathbb{C}, \forall x, t \in \mathbb{R},$$

όπου η $\varphi^{(1)}(x, t)$ θεωρείται πολύ μικρή, με την έννοια

$$(3.38) \quad |\varphi^{(1)}(x, t)| \ll |\varphi^{(0)}(x, t)|, \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, θεωρούμε ότι η $\varphi^{(1)}(x, t)$ είναι της μορφής:

$$(3.39) \quad \varphi^{(1)}(x, t) = \varphi_1(x, t)e^{i(kx - \omega t)}.$$

Τότε η φ_1 , μπορεί να διαχωριστεί στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος της

$$(3.40) \quad \varphi_1(x, t) = U(x, t) + iW(x, t).$$

Οι U, W θεωρούνται επίσης αρμονικές, δηλαδή

$$(3.41) \quad \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ W_0 \end{pmatrix} e^{i(Kx - \Omega t)} + c.c., \quad U_0, W_0 \in \mathbb{R},$$

όπου τα K, Ω είναι αντίστοιχα ο κυματαριθμός και η συχνότητα της διαταραχής.

Θεώρημα 4. Θεωρούμε την εξίσωση (3.14), με $A, B \in \mathbb{R}$. Οι λύσεις (3.35) του επιπέδου κύματος παρουσιάζουν αστάθεια διαμόρφωσης (*modulationally unstable*), δηλαδή οι διαταραχές της μορφής $\varphi_1(x, t)$ που ορίζονται από τις (3.39), (3.40) και (3.41) εμφανίζουν εκθετική αύξηση, αν και μόνο αν

$$(3.42) \quad 1 \neq 3kB, K^2 < 2s\varphi_0^2 \left[1 - \frac{3K(A-B)}{1-3KB} \right].$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διαταραγμένη λύση (3.37). Οι παράγωγοί της είναι

$$\begin{aligned} \varphi_t &= [\varphi_{1t} - i\omega(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_x &= [\varphi_{1x} + ik(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_{xx} &= [\varphi_{1xx} + 2ik\varphi_{1x} - k^2(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}, \\ \varphi_{xxx} &= [\varphi_{1xxx} + 3ik\varphi_{1xx} - 3k^2\varphi_{1x} - ik^3(\varphi_0 + \varphi_1)] e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Επίσης, λόγω της (3.38), έχουμε

$$|\varphi_0 + \varphi_1|^2 = \varphi_0^2 + \varphi_0(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) + |\varphi_1|^2 \simeq \varphi_0^2 + \varphi_0(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1),$$

καθώς και $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \simeq 0$. Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις στην (3.14), οπότε:

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} &+ 3As\varphi_0^2 \left[\varphi_{1x} + ik(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) \left(1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \right] - i(1 - 3kB)\varphi_{1xx} \\ &+ (2k - 3k^2)\varphi_{1x} + B\varphi_{1xxx} - is\varphi_0^2(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) \left(1 + \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \\ &- i(\omega - 3Ask\varphi_0^2 - k^2 + k^3B + s\varphi_0^2)(\varphi_0 + \varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

Όμως, λόγω της (3.36), ο τελευταίος όρος μηδενίζεται. Καταλήγουμε έτσι, στην παρακάτω εξίσωση για την $\varphi_1(x, t)$:

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \varphi_{1t} &+ 3As\varphi_0 [\varphi_{1x} + ik(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1)] - i(1 - 3kB)\varphi_{1xx} \\ &+ (2k - 3k^2B)\varphi_{1x} + B\varphi_{1xxx} - is\varphi_0^2(\varphi_1 + \bar{\varphi}_1) = 0. \end{aligned}$$

Εισάγουμε την (3.40), στην (3.43), και διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, βρίσκουμε τις εξισώσεις:

$$(3.44) \quad U_t + 3As\varphi_0^2 U_x + (1 - 3kB)W_{xx} + k(2 - 3kB)U_x + BU_{xxx} = 0,$$

$$(3.45) \quad \begin{aligned} W_t + 3As\varphi_0^2(W_x + 2kU) &- (1 - 3kB)U_{xx} + k(2 - 3kB)W_x \\ &+ BW_{xxx} - 2s\varphi_0^2 U = 0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις αυτές, τις περιοδικές εκφράσεις των U, W από την (3.41). Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο παρακάτω αλγεβρικό σύστημα για τα U_0, W_0 :

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \{-i\Omega + iK[3As\varphi_0^2 + k(2 - 3kB)] - iK^3B\} U_0 \\ -(1 - 3kB)K^2 W_0 = 0, \end{aligned}$$

$$(3.47) \quad [2s\varphi_0^2(3Ak - 1) + K^2(1 - 3kB)] U_0 + \{-i\Omega + iK [3As\varphi_0^2 + k(2 - 3kB)] - iBK^3\} W_0 = 0.$$

Αν η ορίζουσα του ομογενούς συστήματος είναι διαφορετική από μηδέν, υπάρχει μόνο η μηδενική λύση. Επειδή αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις για τα U_0, W_0 , απαιτούμε η ορίζουσα να είναι μηδέν. Δηλαδή,

$$(3.48) \quad \{\Omega - [3As\varphi_0^2 + k(2 - 3kB)] K + BK^3\}^2 = -K^2 [K^2(1 - 3kB)K^2 - 2s\varphi_0^2(1 - 3kA)(1 - 3kB)].$$

Το πρώτο μέρος αυτής της σχέσης είναι μη αρνητικό, άρα το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το δεύτερο. Κατά συνέπεια,

$$(3.49) \quad K^2(1 - 3kB)^2 < 2s\varphi_0^2(1 - 3kA)(1 - 3kB).$$

Από την σχέση αυτή, με την προϋπόθεση $1 \neq 3kB$, προκύπτει άμεσα η συνθήκη αστάθειας (3.42). \square

Εξετάζουμε μερικές οριακές περιπτώσεις της σχέσης διασποράς (3.48).

Στην περίπτωση που έχουμε στάσιμο κύμα, δηλαδή $k = 0$, η (3.48) περιορίζεται στη μορφή :

$$(3.50) \quad (\Omega - 3AKs\varphi_0^2 + BK^3)^2 = K^2(K^2 - 2s\varphi_0^2).$$

Η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις:

$$(3.51) \quad \Omega = 3AKs\varphi_0^2 - BK^3 \pm K\sqrt{K^2 - 2s\varphi_0^2}.$$

Από την (3.51), προκύπτει ότι η κυκλική συχνότητα Ω γίνεται μιγαδική (δηλαδή $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$), αν και μόνο αν

$$(3.52) \quad s = 1, K^2 - 2\varphi_0^2 < 0.$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα, είναι παρόμοια με εκείνα που αφορούν τις συνθήκες αστάθειας για τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger ($A = B = 0$). Να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση $s = -1$, η (3.51) συνεπάγεται ότι το κύμα έχει πάντα ευσταθή διαμόρφωση, όπως ισχύει και για την μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Έτσι, στην περίπτωση του στάσιμου κύματος, η μόνη διαφορά με την μη γραμμική εξίσωση Schrödinger, είναι η ύπαρξη ενός μη μηδενιζόμενου πραγματικού ταλαντούμενου μέρους της κυκλικής συχνότητας της διαταραχής $\Omega_r = 3AKs\varphi_0^2 - BK^3$, όπως προκύπτει από την (3.51). Επιπλέον, είναι γνωστό, ότι στο όριο της NLS ($A=B=0$), για $s = 1$, η συνθήκη αστάθειας διαμόρφωσης, δεν εξαρτάται από το k .

Από την άλλη, στην περίπτωση που ισχύει $A, B \neq 0$ και $k \neq 0$, η συνθήκη (3.42) παρουσιάζει κάποιες ενδιαφέρουσες διαφορές. Αρχικά, το κριτήριο αστάθειας είναι βελτιωμένο για την εστιάζουσα περίπτωση ($s = +1$), όπως φαίνεται από μια άμεση σύγκριση των σχέσεων (3.42) και (3.52). Επίσης - και περισσότερο ενδιαφέρον - είναι το αποτέλεσμα του ότι η συνθήκη (3.42), δείχνει ότι τα επίπεδα κύματα της μορφής (3.35), μπορούν να εμφανίζουν αστάθεια διαμόρφωσης και στην αφεστιάζουσα περίπτωση ($s = -1$). Η παραπάνω διαπίστωση, πιστοποιεί μια σημαντική διαφορά, σε σχέση με την αφεστιάζουσα περίπτωση της NLS, για

την οποία τέτοια αστάθεια απουσιάζει. Συνοψίζοντας την σύγκριση με το μοντέλο NLS, μπορούμε να πούμε ότι στάσιμα κύματα ($k = 0$), μπορούν να είναι ασταθή μόνο στην περίπτωση $s = 1$, ενώ οδεύοντα επίπεδα κύματα, της μορφής (3.35), με $k \neq 0$, μπορούν να είναι ασταθή για $s = 1$, αλλά και για $s = -1$, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων.

Αν ορίσουμε την περιοχή αστάθειας (instability band), ως το κλειστό διάστημα $B_I = [K_{min}, K_{max}]$ για σταθερό φ_0 , από το οποίο επιλέγονται κυματαριθμοί της διαταραχής (3.39), με την ιδιότητα να επαληθεύεται η (3.42) $\forall K \in B_I$, οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (3.48) ως προς Ω , είναι μιγαδικής μορφής. Τα φανταστικά μέρη αυτών των λύσεων, ευθύνονται για την αύξηση των διαταραχών (3.39), και επιφέρουν την αστάθεια διαμόρφωσης του επιπέδου κύματος (3.35). Ειδικότερα, το $\text{Im}(\Omega) = \Omega_i$ μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση του $K \in B_I$. Το πιθανό μέγιστο της καμπύλης $\Omega_i(K)$, που σημειώνεται με Ω_{crit} , επιτυγχάνεται στο $K = K_{crit}$ και είναι συδεδεμένο με τη μέγιστη αύξηση των διαταραχών.

Βιβλιογραφία

- [1] M. Hirsch, S. Smale and R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Academic Press (Elsevier), 2004.
- [2] Lamb G L Jr 1977, *Solitons on moving space curves J. Math. Phys.* 18, 1654-61.
- [3] Hirota R 1973, *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation J. Math. Phys.* 14, 805-809.
- [4] Zakharov V E and Ostrovsky L A 2009, *Modulation instability: the beginning Physica D.* 238,540-548.
- [5] Σ. Διαμαντίδης, *Μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις διασποράς : εξισώσεις Schrodinger ανώτερης τάξης*. Διδακτορική διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2017.