



## **ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

### **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Η φύση των μαθηματικών στη διαλεκτική της φύσης του  
Φρίντριχ Ένγκελς: θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών υπό το  
πρίσμα του διαλεκτικού υλισμού.**

Κουρουτζάκη Γεωργία

Επιβλέπων καθηγητής: Αλέξανδρος Δασκαλάκης

Ιούνιος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Κουρουτζάκη Γεωργίας που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο/η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του/της συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση της συγγραφέα/δημιουργού. Η συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τη σχέση των μαθηματικών με τη φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού μέσα από τη μελέτη των απόψεων των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν σχετικά με θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες. Σκοπός της εργασίας είναι να αναδείξει ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν ένα αποκομμένο και ουδέτερο σύστημα αφηρημένων συμβόλων, αλλά ιστορικό προϊόν της ανθρώπινης πρακτικής δραστηριότητας και της σχέσης του ανθρώπου με την υλική πραγματικότητα. Αρχικά εξετάζεται ο ορισμός των μαθηματικών στον διαλεκτικό υλισμό ως επιστήμης που μελετά τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου. Αναλύεται η έννοια της αφαίρεσης, ο ρόλος των αξιωμάτων και η ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών από τις πρακτικές ανάγκες των αρχαίων κοινωνιών έως τη συγκρότησή τους ως συστηματικής επιστήμης. Παράλληλα, μελετώνται οι έννοιες του αριθμού, του μηδενός και του απείρου, όχι μόνο ως μαθηματικά αντικείμενα αλλά και ως φιλοσοφικές κατηγορίες που αντανakλούν βαθύτερες σχέσεις της πραγματικότητας. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην έννοια του απείρου και στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού, ο οποίος εξετάζεται ως ιστορικό και επιστημονικό αποτέλεσμα της ανάγκης μελέτης της κίνησης και της μεταβολής. Μέσα από την ανάλυση της απροσδιοριστίας, των ορίων και του διαφορικού λογισμού αναδεικνύεται η διαλεκτική σχέση πεπερασμένου και απείρου, ποσότητας και ποιότητας, συνέχειας και μεταβολής. Εξετάζεται επίσης η ενασχόληση του Μαρξ με τα μαθηματικά χειρόγραφα και ο τρόπος με τον οποίο προσέγγισε την παράγωγο και το διαφορικό όχι μόνο ως τεχνικές μαθηματικές διαδικασίες αλλά ως εκφράσεις βαθύτερων σχέσεων και μετασχηματισμών. Τέλος, η εργασία επιχειρεί να αναδείξει τη σημασία που μπορεί να έχει η φιλοσοφική και ιστορική προσέγγιση των μαθηματικών στη διδακτική τους. Υποστηρίζεται ότι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την ιστορική τους εξέλιξη και τις αντιφάσεις που τις γέννησαν μπορεί να συμβάλει σε μια βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση των μαθηματικών, πέρα από τη μηχανική αποστήθιση τύπων και αλγορίθμων.

## The Nature of Mathematics in Friedrich Engels' *Dialectics of Nature*: Fundamental Concepts of Mathematics in the Light of Dialectical Materialism

Georgia Kouroutzaki

### Abstract

This postgraduate thesis examines the relationship between mathematics and the philosophy of dialectical materialism through the study of the views of Marx, Engels, and Lenin on fundamental mathematical concepts. The aim of the thesis is to demonstrate that mathematics does not constitute an isolated and neutral system of abstract symbols, but rather a historical product of human practical activity and humanity's relationship with material reality. Initially, the thesis explores the definition of mathematics within dialectical materialism as the science that studies the forms of space and the quantitative relations of the real world. The concept of abstraction, the role of axioms, and the historical development of mathematics from the practical needs of ancient societies to its establishment as a systematic science are analyzed. At the same time, the concepts of number, zero, and infinity are examined not only as mathematical objects but also as philosophical categories reflecting deeper relations of reality. Particular emphasis is placed on the concept of infinity and the development of infinitesimal calculus, which is approached as a historical and scientific result of the need to study motion and change. Through the analysis of indeterminacy, limits, and differential calculus, the dialectical relationship between finite and infinite, quantity and quality, continuity and change is highlighted. The thesis also examines Marx's engagement with mathematical manuscripts and the way he approached the derivative and the differential not merely as technical mathematical procedures but as expressions of deeper relations and transformations. Finally, the thesis attempts to highlight the importance that the philosophical and historical approach to mathematics may have for mathematics education. It is argued that understanding mathematical concepts through their historical development and the contradictions that gave rise to them can contribute to a deeper and more meaningful understanding of mathematics, beyond the mechanical memorization of formulas and algorithms.

## Περιεχόμενα

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Περίληψη.....                                                                                                                                      | iii |
| Abstract.....                                                                                                                                      | iv  |
| Πρόλογος: Γιατί αυτό το θέμα.....                                                                                                                  | 7   |
| Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....                                                                                                                          | 10  |
| 1.1 Σκοπός, ερευνητικά ερωτήματα και μεθοδολογία.....                                                                                              | 10  |
| 1.2 Σχέση φιλοσοφίας και επιστήμης. Η φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν.....                                           | 11  |
| 1.3 Η σχέση του διαλεκτικού υλισμού με τις μαθηματικές έννοιες.....                                                                                | 16  |
| 1.4 Κριτική αποτίμηση της θεώρησης των μαθηματικών από τη σκοπιά του διαλεκτικού υλισμού.....                                                      | 19  |
| 1.5 Διάρθρωση του κειμένου.....                                                                                                                    | 20  |
| Κεφάλαιο 2: Η αντανάκλαση της φιλοσοφίας στα μαθηματικά: θεμελιώδεις έννοιες από την διαλεκτική της φύσης: ορισμός μαθηματικών-αριθμός-μηδέν ..... | 23  |
| 2.1 Ο ορισμός των μαθηματικών από τον Ένγκελς.....                                                                                                 | 23  |
| 2.2 Αξιώματα- μη ευκλείδεια γεωμετρία.....                                                                                                         | 29  |
| 2.2.1 Αξίωμα.....                                                                                                                                  | 30  |
| 2.2.2 Μη ευκλείδεια γεωμετρία.....                                                                                                                 | 32  |
| 2.3 Αριθμός- μονάδα- μηδέν.....                                                                                                                    | 35  |
| 2.3.1 Η φιλοσοφική αξία του αριθμού στον διαλεκτικό υλισμό.....                                                                                    | 35  |
| 2.3.2 Η φιλοσοφική αξία της μονάδας στον διαλεκτικό υλισμό.....                                                                                    | 38  |
| 2.3.3 Η φιλοσοφική αξία του μηδέν στον διαλεκτικό υλισμό.....                                                                                      | 40  |
| 2.3.3.1 Το Μηδέν στα μαθηματικά.....                                                                                                               | 42  |
| 2.3.4 Η διαλεκτική τριάδα 0 (μη ύπαρξη) – 1( ύπαρξη) - $\infty$ (άπειρο) στον διαλεκτικό υλισμό τον Μαρξ και Ένγκελς.....                          | 44  |
| Κεφάλαιο 3: Άπειρο- Απειροστικός λογισμός.....                                                                                                     | 48  |
| 3.1 Εισαγωγή.....                                                                                                                                  | 48  |
| 3.2 Άπειρο.....                                                                                                                                    | 48  |
| 3.2.1 Η προσέγγιση του απείρου στον Cantor.....                                                                                                    | 54  |
| 3.2.2 Dedekind- άπειρα σύνολα και η διαλεκτική έννοια του απείρου.....                                                                             | 57  |

|                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2.3 Άπειρο, πεπερασμένο και απροσδιοριστία υπό το πρίσμα του διαλεκτικού υλισμού.....                          | 57 |
| 3.3 Απειροστικός λογισμός.....                                                                                   | 62 |
| 3.3.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή.....                                                                             | 63 |
| 3.3.2 Η ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού από τη σκοπιά του διαλεκτικού υλισμού.....                            | 64 |
| Κεφάλαιο 4: Τα μαθηματικά χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ.....                                                          | 70 |
| 4.1 Γιατί ασχολήθηκε ο Μαρξ.....                                                                                 | 70 |
| 4.1.1 Γιατί δεν ασχολήθηκε μόνο με την αριθμητική.....                                                           | 70 |
| 4.1.2 Γιατί ασχολήθηκε με τον απειροστικό λογισμό.....                                                           | 72 |
| 4.2 Για την έννοια της παράγωγης συνάρτησης.....                                                                 | 75 |
| 4.3 Για το διαφορικό.....                                                                                        | 82 |
| 4.4 Ο Μαρξ, ο διαφορικός λογισμός και η διαλεκτική μέθοδος. Από την αναλυτική σκέψη στην έννοια του τελεστή..... | 85 |
| 4.5 Ο διαφορικός λογισμός ως «άρνηση της άρνησης» και η παραγωγή πραγματικών αποτελεσμάτων.....                  | 88 |
| 4.6 Τρόπος διαφορίσης στον Μαρξ: μορφή και περιεχόμενο.....                                                      | 89 |
| 4.7 Το μέτρο ως διαλεκτική κατηγορία: ενότητα ποσότητας, ποιότητας και ορίου ύπαρξης.....                        | 90 |
| Κεφάλαιο 5: Η σχέση του Κεφαλαίου και της ενασχόλησης του Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό.....                   | 94 |
| 5.1 Εισαγωγή.....                                                                                                | 94 |
| 5.2 Οικονομικές κρίσεις.....                                                                                     | 95 |
| Κεφάλαιο 6: Επίλογος.....                                                                                        | 98 |
| Βιβλιογραφικές Αναφορές                                                                                          |    |

## Πρόλογος: Γιατί αυτό το θέμα

Δύο ερωτήματα που δέχονται οι εκπαιδευτικοί μαθηματικοί, είναι « Γιατί τα μαθαίνουμε όλα αυτά; Γιατί δεν καταλαβαίνω τίποτα και μου φαίνονται κινέζικα;». Σε αυτά τα ερωτήματα μπορεί να δώσει απάντηση ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία παίρνοντας υπόψη την ανάδειξη της σύνδεσης των μαθηματικών με προβλήματα της καθημερινότητας, όπως επίσης με την ανάδειξη μιας έννοιας μέσα από την ιστορία της εξέλιξης της. Όταν ξεκινάς από την παράθεση ορισμών και κανόνων και μετά προχωράς σε ατέλειωτες ασκήσεις είναι λογικό οι μαθητές να νιώθουν ότι αυτοί οι ορισμοί ήρθαν «ουρανοκατέβατοι» στο μυαλό ενός επιστήμονα και εμείς αναγκάζουμε τους μαθητές να τα μαθαίνουν όλα αυτά για να τους «παιδεύουμε».

Οι πιο συνηθισμένες απαντήσεις που δίνονται σε αυτά τα ερωτήματα είναι ότι τα παιδιά σήμερα δεν έχουν καμία όρεξη να μάθουν και να αποκτήσουν γνώσεις, θέλουν το εύκολο και το γρήγορο, δεν θέλουν να κοπιάσουν. Ωστόσο αυτές οι απαντήσεις αμφισβητούνται από την πραγματικότητα.

Το ότι σήμερα τα παιδιά δεν έχουν όρεξη να μάθουν το απορρίπτει η ίδια η ανάπτυξη των παιδιών. Όσοι έχουν συναναστραφεί με πολύ μικρά παιδιά, θα ξέρουν ότι πριν ακόμα μάθουν να μιλούν πρέπει να προσέχουμε που θα σκαρφαλώσουν για να βρουν κάτι, τι θα βάλουν στο στόμα τους, κ.α. Αργότερα όταν κατακτήσουν την ομιλία «κουραζόμαστε» να ακούμε όλη μέρα συνεχώς το γιατί αυτό, γιατί το άλλο. Όλα αυτά συμβαίνουν γιατί από την ίδια του φύση του ο άνθρωπος έχει την περιέργεια, έχει την ανάγκη να ανακαλύψει τον κόσμο γύρω του, ανάλογα με το επίπεδο ανάπτυξης του σε κάθε ηλικία. Θέλει να τα μάθει όλα, θέλει να τα ανακαλύψει όλα όσα υπάρχουν γύρω του. Αυτό το στοιχείο ατονεί, αυτή η έλλειψη περιέργειας μειώνεται μέσα στα πλαίσια του σημερινού σχολείου και ένας από τους λόγους είναι ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται σήμερα η επιστημονική γνώση, είναι αποκομμένος από την πραγματικότητα.

Ακόμη δεν είναι σύγχρονο φαινόμενο οι άνθρωποι να προσπαθούν να αποφύγουν τον κόπο, να θέλουν να κάνουν κάτι πιο εύκολα και πιο γρήγορα. Αυτός ήταν ένας από τους λόγους που η ανθρωπότητα ανέπτυξε τις επιστήμες. Ήθελε πάντοτε να καλυτερεύσει τις συνθήκες της ζωής του, να τις κάνει πιο ξεκούραστες και πιο ασφαλείς.

Η σύνδεση της επιστήμης των μαθηματικών με την φιλοσοφία μπορεί να απαντήσει σε ερωτήματα όπως τι είναι τελικά τα μαθηματικά, πως αναπτύχθηκαν οι έννοιες που ξέρουμε σήμερα, τι σχέση έχουν τα μαθηματικά με την πραγματικότητα γύρω μας. Αυτή η σύνδεση σε συνδυασμό με τις επιστήμες της παιδαγωγικής, της παιδικής ψυχολογίας και άλλων επιστημών μπορεί να έχει άμεσο αντίκτυπο στον τρόπο διδασκαλίας της επιστήμης των μαθηματικών.

Αυτή η ανάγκη για νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών αναδεικνύει τη σημασία των επιστημολογικών και φιλοσοφικών θεωρήσεων. Στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, έχει επισημανθεί ότι η φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών δεν αποτελεί μια αφηρημένη θεωρητική ενασχόληση, αλλά ένα οργανικό εργαλείο που συμβάλλει στη συγκρότηση της ίδιας της διδακτικής πράξης και στην κατανόηση του γνωστικού αντικειμένου ( Ποτάρη & Ψυχάρης, 2018).

Η παιδαγωγική δεν ταυτίζεται με την φιλοσοφία, αλλά και δεν γίνεται χωρίς αυτήν γιατί για να προετοιμαστούν οι σκοποί και τα μέσα της αγωγής, ξεκινάμε από μια φιλοσοφική κοσμοθεώρηση, από συγκεκριμένες μεθοδολογικές προσεγγίσεις.

Η διαλεκτική προσέγγιση της αγωγής θεωρεί ότι η εκπαίδευση αποτελεί μια δυναμική διαδικασία που εξελίσσεται συνεχώς και αλληλεπιδρά με διάφορους παράγοντες. Η αγωγή δεν αντιμετωπίζεται ως κάτι σταθερό και αμετάβλητο, αλλά ως μια διαδικασία που επηρεάζεται από τις κοινωνικές εξελίξεις και τις αλλαγές στις υλικές και πολιτισμικές συνθήκες ζωής. Ακόμη, τα παιδιά δεν λειτουργούν ως παθητικοί αποδέκτες, αλλά συμμετέχουν ενεργά στην συγκρότηση της προσωπικότητάς τους. Για αυτούς τους λόγους ο διαλεκτικός υλισμός μπορεί να είναι το θεωρητικό πλαίσιο ερμηνείας της αγωγής, καθώς αναδεικνύει τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στο άτομο και την κοινωνία και υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη και η εκπαίδευση αποτελούν προϊόν της αλληλεπίδρασης κοινωνικών συνθηκών και ανθρώπινης δράσης.

Ακόμα πέρα από τη διδασκαλία της υπάρχουσας επιστημονικής γνώσης, η φιλοσοφική άποψη των επιστημών που ερευνούν διάφορα επιστημονικά ερωτήματα που γεννιούνται κυρίως από τις κοινωνικές ανάγκες που προκύπτουν στην εκάστοτε χρονική περίοδο, παίζει καθοριστικό ρόλο για την βάση στην οποία τίθενται τα σύγχρονα ερωτήματα, αλλά και στη μέθοδο, τον τρόπο και τον στόχο της πορείας επίλυσης τους .

Η φιλοσοφία δηλαδή δεν επιβάλλει έτοιμες λύσεις σε μια επιστήμη, εδώ στην επιστήμη των μαθηματικών, αλλά όμως προσφέρει διαφορετικούς τρόπους για την πορεία της επιστημονικής σκέψης, χρησιμεύει ως μέθοδος στη θεωρητική επιστημονική σκέψη, ως κατά τον Λένιν, θεωρία της γνώσης. Το παραπάνω αναδείχτηκε ως κομβικό στον 19<sup>ο</sup> και στον 20<sup>ο</sup> αιώνα όπου οι επιστημονικές ανακαλύψεις άρχισαν να παίζουν καθοριστικό ρόλο στον σύνολο των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Οι επιστημονικές ανακαλύψεις έφεραν και φέρνουν ουσιαστικές αλλαγές στην υλική ζωή (ηλεκτρισμός, μέσα μεταφοράς κλπ) ασκώντας επαναστατική επίδραση σε όλες τις πτυχές της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Επιλέγεται ο διαλεκτικός υλισμός και όχι κάποιο άλλο φιλοσοφικό ρεύμα γιατί αποτελεί ένα φιλοσοφικό ρεύμα που εξετάζει την φιλοσοφία και την επιστήμη ως ένα ενιαίο σύνολο στο οποίο τόσο η φιλοσοφία όσο και η επιστήμη δεν μπορούν να αναπτυχθούν αποκομμένα η μία από την άλλη. Τόσο η εξέλιξη της επιστημονικής θεωρίας γεννά φιλοσοφικά ερωτήματα, κλασικό παράδειγμα των μαθηματικών είναι ο απειροστικός λογισμός, όσο και οι διάφορες φιλοσοφικές θεωρίες πρέπει να βρίσκουν αντίκρισμα, να επιβεβαιώνονται από την πράξη, που σήμερα όσο ποτέ είναι άρρηκτα δεμένη με την επιστημονική γνώση.

Ο διαλεκτικός υλισμός μελετά την πορεία των επιστημών μέσα από την ιστορία τους και την αλληλεπίδραση που αυτές έχουν με την οικονομική ανάπτυξη της κοινωνίας. Αναδεικνύεται με αυτόν τον τρόπο και η πορεία εξέλιξης θεμελιακών εννοιών των μαθηματικών που θα εξετάσουμε παρακάτω, μέσα από τις κοινωνικές συνθήκες που επικρατούσαν την εκάστοτε περίοδο που έπαιζαν τον πιο κρίσιμο ρόλο στην εξέλιξη αυτών των εννοιών. Προσέγγιση που αναδεικνύει ζητήματα όπως η σύνδεση των μαθηματικών, όχι μόνο της απλής αριθμητικής, αλλά και των θεωρητικών μαθηματικών με την υλική πραγματικότητα, τι είναι το άπειρο και άλλα.

## Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

### 1.1 Σκοπός, ερευνητικά ερωτήματα και μεθοδολογία

Η παρούσα διπλωματική εργασία εντάσσεται στο πεδίο της φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών και εξετάζει τη σχέση θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών με τη φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού, όπως αυτή διαμορφώθηκε κυρίως από τους Καρλ Μαρξ, Φρίντριχ Ένγκελς και Β. Ι. Λένιν. Αφετηρία της εργασίας αποτελεί η θέση ότι τα μαθηματικά δεν συνιστούν ένα απομονωμένο σύστημα αφηρημένων συμβόλων και λογικών κατασκευών, αλλά αποτελούν ιστορικό προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας και της αλληλεπίδρασης του ανθρώπου με την υλική πραγματικότητα.

Σκοπός της εργασίας είναι να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο ο διαλεκτικός υλισμός προσεγγίζει βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως ο αριθμός, το μηδέν, το άπειρο και ο απειροστικός λογισμός, καθώς και να αναδείξει τις φιλοσοφικές και επιστημολογικές προεκτάσεις αυτής της προσέγγισης. Παράλληλα, επιχειρείται να εξεταστεί κατά πόσο η ιστορική και φιλοσοφική ερμηνεία των μαθηματικών μπορεί να συμβάλει στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στη διδακτική τους αξιοποίηση.

Με βάση τον παραπάνω σκοπό, διαμορφώνονται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Πώς ορίζονται τα μαθηματικά στο πλαίσιο της φιλοσοφίας του διαλεκτικού υλισμού και ποια είναι η σχέση τους με την αντικειμενική πραγματικότητα;
2. Με ποιον τρόπο ερμηνεύονται θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, όπως ο αριθμός, η μονάδα, το μηδέν και το άπειρο, από τους Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν;
3. Πώς προσεγγίζεται η ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού μέσα από τη διαλεκτική αντίληψη της κίνησης, της μεταβολής και της σχέσης πεπερασμένου και απείρου;
4. Ποια είναι η σημασία των Μαθηματικών Χειρογράφων του Μαρξ για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και διαλεκτικής μεθόδου;
5. Μπορεί η ιστορικοφιλοσοφική προσέγγιση των μαθηματικών να συμβάλει στη διδασκαλία και στην ουσιαστικότερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών;

Η εργασία αποτελεί θεωρητική βιβλιογραφική μελέτη και στηρίζεται στην ποιοτική ανάλυση πρωτογενών και δευτερογενών πηγών. Στις πρωτογενείς πηγές περιλαμβάνονται κυρίως έργα των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν, όπως η *Διαλεκτική της Φύσης*, ο *Αντι-Ντύρινγκ*, τα *Μαθηματικά Χειρόγραφα*, ο *Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός* και άλλα κείμενα που αναφέρονται στη σχέση φιλοσοφίας και επιστήμης. Παράλληλα αξιοποιούνται δευτερογενείς πηγές από τα πεδία της ιστορίας των μαθηματικών, της φιλοσοφίας των μαθηματικών, της επιστημολογίας και της διδακτικής των μαθηματικών.

Η μεθοδολογική προσέγγιση βασίζεται στη συγκριτική και ερμηνευτική ανάλυση των πηγών. Εξετάζονται οι θέσεις των κλασικών του διαλεκτικού υλισμού για συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, αναλύονται στο ιστορικό και επιστημονικό τους πλαίσιο και συσχετίζονται με τη σύγχρονη συζήτηση γύρω από τη φύση και τα θεμέλια των μαθηματικών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και στη σύνδεσή τους με τις κοινωνικές και επιστημονικές ανάγκες κάθε εποχής.

Η εργασία επιδιώκει να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο η φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού προσέγγισε τα μαθηματικά ως ιστορικά αναπτυσσόμενη μορφή γνώσης και να διερευνήσει τη σημασία αυτής της προσέγγισης για τη σύγχρονη κατανόηση και διδασκαλία των μαθηματικών.

## **1.2 Σχέση φιλοσοφίας και επιστήμης. Η φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν**

Η σχέση επιστήμης και φιλοσοφίας είναι αναμφίβολα ένα ζήτημα του οποίου η λύση έχει καθοριστική σημασία για ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων τόσο πρακτικών όσο και θεωρητικών. Στο σύνολο της η επιστήμη, ως μία από τις μορφές της συνείδησης, αποτελεί κατά την άποψη της παρούσας εργασίας έναν εξειδικευμένο κοινωνικό θεσμό και ειδική μορφή της ανθρώπινης δραστηριότητας για τη γνώση του αντικείμενου κόσμου, έτσι δεν μπορεί ούτε να πραγματοποιηθεί, ούτε να υπάρξει χωρίς αυτή τη διαδικασία της σκέψης που ιστορικά πήρε τη μορφή των φιλοσοφικών συλλογισμών και συστημάτων.

Η σχέση μεταξύ φιλοσοφίας και επιστήμης δεν ήταν πάντα ίδια, άλλαζε στην πάροδο των αιώνων. Πολλοί αστοί φιλόσοφοι δεν τοποθετούν μαζί με τις άλλες επιστήμες την φιλοσοφία. Κάποιοι τη θεωρούν ως κρίκο σύνδεσης ανάμεσα στην θεολογία και την επιστήμη. Όπως γράφει ο Russell στην *Ιστορία της Δυτικής φιλοσοφίας* η φιλοσοφία είναι μεταξύ θεολογίας, η οποία μελετά τα ζητήματα που δεν έχουμε μέχρι σήμερα επιστημονική γνώση και επιστήμης η οποία επικαλείται την ανθρώπινη λογική παρά την αυθεντία (Russell, 2004).

Η γέννηση της φιλοσοφίας έγινε στον αρχαίο κόσμο με τις επιστήμες εκείνη την περίοδο να μην έχουν την υπόσταση που έχουν σήμερα. Παρατηρούσαν τι γίνεται γύρω τους και προσπαθούσαν μέσα από την εμπειρία τους να τα κατανοήσουν. Αργότερα τον 16<sup>ο</sup>, 17<sup>ο</sup> και τον 18<sup>ο</sup> αιώνα η ανάπτυξη της παραγωγής δεν μπορούσε να γίνει χωρίς να προχωρήσουν οι φυσικές επιστήμες έτσι άρχισαν να αναπτύσσονται πειραματικά επιστήμες όπως η φυσική, η χημεία, η βιολογία. Ασχολούνταν κυρίως με την καθημερινή παρατήρηση και συγκέντρωση στοιχείων, με την οργάνωση και ταξινόμηση αυτών των στοιχείων, ασχολούνταν δηλαδή με τη μελέτη του μερικού και όχι του γενικού. Τη σύνδεση που υπήρχε ανάμεσα σε όλες τις επιμέρους γνώσεις που συσώρευαν προσπαθούσαν να την καθορίσουν μέσα από τη φιλοσοφία. Οι Marx και Engels (1975) για την εποχή εκείνη και την άποψη που είχαν για τη φιλοσοφία λένε:

για το 18<sup>ο</sup> αιώνα ήταν χαρακτηριστική η ιδέα της εγκυκλοπαίδειας... ιδέα που στηριζόταν στην επίγνωση ότι όλες οι επιστήμες συνδέονται μεταξύ τους, αλλά δεν ήταν ακόμη σε θέση να πραγματοποιήσει το πέρασμα από τη μία επιστήμη στην άλλη, απλώς και μόνο μπορούσε να παρατάξει τη μία δίπλα στην άλλη» (Marx & Engels, τ.1, σ.599).

Με λίγα λόγια η φιλοσοφία προσπαθούσε να ενώσει με έναν ενιαίο τρόπο τις επιστήμες να παίξει τον ρόλο της «επιστήμης των επιστήμων». Η φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν αντιτάχθηκε σε αυτό. Ο Ένγκελς έλεγε πως «το καθήκον μας δεν είναι να σκαρφιζόμαστε συνδέσεις ανάμεσα στα φαινόμενα, αλλά να ανακαλύψουμε τις συνδέσεις, τους νόμους που υπάρχουν στην ίδια την πραγματικότητα» (Κωνσταντίνοφ κ.ά., 2006, σ.49). Ο διαλεκτικός υλισμός έθεσε σε άλλη βάση την επιστήμη της φιλοσοφίας

θεωρώντας πως « η φιλοσοφία μελετάει τον ίδιο κόσμο που μελετούν και οι άλλες επιστήμες. Ωστόσο, η φιλοσοφία εξετάζει πιο γενικές συνδέσεις και σχέσεις από ότι οι ιδιαίτερες, οι ειδικές επιστήμες, που μελετούν ορισμένους χωριστούς τομείς φαινομένων» (Κονσταντίνοφ κ.ά., 2006, σ.50).

Βρίσκουμε δείγματα ενός απλοϊκού υλισμού και μιας φυσικής αντίληψης των φαινομένων παρουσιάζονται από την αρχαιότητα, από τους αρχαίους Αιγύπτιους, Έλληνες, Κινέζους και άλλους πολιτισμούς. Άλλοι πολιτισμοί θεωρούσαν πως τα πάντα προέρχονται από το νερό, άλλοι από τη φωτιά, άλλοι από τον αέρα, όλοι όμως είχαν κάτι κοινό έψαχναν την ουσία στην υλική βάση των πραγμάτων. Αλλά και τη διαλεκτική τη συναντάμε σε μια πρώιμη μορφή στον αρχαίο κόσμο. Χαρακτηριστική είναι η άποψη του Αριστοτέλη, τον οποίο ο Μαρξ ονόμασε Μέγα Αλέξανδρο της ελληνικής φιλοσοφίας, ότι το μερικό και το γενικό δεν είναι ξεκομμένα το ένα από το άλλο. Στις *Βασικές Αρχές της Μαρξιστικής Φιλοσοφίας* αναφέρεται για τον Αριστοτέλη ότι «έβγαλε το συμπέρασμα ότι για να γνωρίσουμε το γενικό είναι ανάγκη να ξεκινάμε από το μερικό. Η θεωρητική σκέψη πρέπει να στηρίζεται στα δεδομένα των αισθήσεων. Αυτό ήταν μια πολύτιμη και γόνιμη προσπάθεια του αρχαίου φιλόσοφου να σκεφτεί διαλεκτικά.» (Κονσταντίνοφ κ.ά., 2006, σ. 86).

Ωστόσο, οι σπουδαιότερες θεωρητικές πηγές για την διαμόρφωση του διαλεκτικού υλισμού ήταν ο υλισμός του Φόιερμπαχ και η διαλεκτική του Χέγκελ. Ο Γκέοργκ Βίλχελμ Φρίντριχ Χέγκελ υπήρξε ο σημαντικότερος εκπρόσωπος της διαλεκτικής φιλοσοφίας. Ο Ένγκελς αναφέρει:

η νεότερη γερμανική φιλοσοφία βρήκε την ολοκλήρωση της στο σύστημα του Χέγκελ όπου για πρώτη φορά περιγράφει όλο το φυσικό, ιστορικό και πνευματικό κόσμο σαν ένα προτσές, δηλαδή σε αδιάκοπη κίνηση, αλλαγή, μετασχηματισμό, εξέλιξη, και όπου προσπάθησε να αποδείξει την εσωτερική συνάφεια σε αυτήν την κίνηση και εξέλιξη (Marx & Engels, 1975, τ.2, σ.144-145).

Για τον Χέγκελ όμως, η πραγματικότητα είναι αποτέλεσμα της εξέλιξης του Πνεύματος. Η ιστορία εξελίσσεται μέσα από αντιφάσεις και συγκρούσεις, όπου κάθε στάδιο γεννά το αντίθετό του και τελικά οδηγείται σε μια ανώτερη σύνθεση (Hegel, 1993). Η εγγεληνή

διαλεκτική αποτέλεσε σημαντικό εργαλείο σκέψης, αλλά παρέμενε ιδεαλιστική, αφού θεωρούσε πρωταρχική την ιδέα και όχι την ύλη (Μαρξ, 2009).

Ο Λούντβιχ Φόιερμπαχ άσκησε κριτική στον ιδεαλισμό του Χέγκελ και ανέπτυξε έναν ανθρωπολογικό υλισμό. Υποστήριξε ότι η θρησκεία αποτελεί προβολή των ανθρώπινων ιδιοτήτων και αναγκών (Φόιερμπαχ, 2012). Παρότι ο Φόιερμπαχ επανέφερε τον υλισμό στο επίκεντρο της φιλοσοφίας, ο υλισμός του παρέμενε στατικός και δεν μπορούσε να εξηγήσει επαρκώς την ιστορική και κοινωνική αλλαγή.

Ο Μαρξ και ο Ένγκελς αξιοποίησαν τόσο τη διαλεκτική του Χέγκελ όσο και τον υλισμό του Φόιερμπαχ. Ωστόσο, μετασχημάτισαν ριζικά αυτές τις ιδέες. Υποστήριξαν ότι η ιστορία δεν κινείται από την εξέλιξη των ιδεών αλλά από τις υλικές συνθήκες παραγωγής και τις ταξικές αντιθέσεις. Με αυτόν τον τρόπο διαμόρφωσαν τον ιστορικό και διαλεκτικό υλισμό.

Η φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού μελετά τους πιο γενικούς νόμους, αυτό που αποτελεί την βάση των φαινομένων τα οποία βρίσκονται σε μια αδιάκοπη κίνηση και μεταβολή, αλλά και την αντανάκλαση τους στη γνώση του ανθρώπου.

Ο διαλεκτικός υλισμός βασίζεται σε δύο αλληλένδετες αρχές: τον υλισμό και τη διαλεκτική. Ο υλισμός υποστηρίζει ότι η ύλη είναι η πρωταρχική πραγματικότητα και ότι η συνείδηση αποτελεί προϊόν υλικών συνθηκών (Μαρξ, 2009). Από την άλλη πλευρά, η διαλεκτική προσφέρει τη μέθοδο κατανόησης της πραγματικότητας ως διαδικασίας, όλα τα φαινόμενα βρίσκονται σε συνεχή κίνηση και αλλαγή.

Στον διαλεκτικό υλισμό, κάθε φαινόμενο χαρακτηρίζεται από:

- εσωτερικές αντιφάσεις
- συνεχή μεταβολή
- μετατροπή ποσοτικών αλλαγών σε ποιοτικές
- άρνηση της άρνησης

Ο διαλεκτικός υλισμός δεν είναι μόνο φιλοσοφική θεωρία αλλά και μέθοδος ανάλυσης της κοινωνίας και της ιστορίας. Μέσω αυτής, ο μαρξισμός επιδιώκει να εξηγήσει τις κοινωνικές αλλαγές και να θεμελιώσει την επαναστατική δράση. Η θεωρία αυτή άσκησε τεράστια επίδραση στην πολιτική και φιλοσοφική σκέψη του 20ού αιώνα. Ο Ένγκελς επέκτεινε τη διαλεκτική στην ανάλυση της φύσης και υποστήριξε ότι οι νόμοι της διαλεκτικής ισχύουν

τόσο στην κοινωνία όσο και στη φύση. Στο έργο του *Αντι-Ντύρινγκ* αλλά και στη *Διαλεκτική της φύσης* περιγράφει βασικές αρχές, όπως η μετατροπή της ποσότητας σε ποιότητα και η άρνηση της άρνησης, εξηγώντας μέσα από αυτές τις έννοιες πως οι σταδιακές αλλαγές μπορούν να οδηγήσουν σε ποιοτικά άλματα. Ενώ ο Λένιν συστηματοποίησε περαιτέρω τον διαλεκτικό υλισμό στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Στο έργο του *Υλισμός και Εμπειριοκριτικισμός* υπερασπίστηκε τον διαλεκτικό υλισμό απέναντι σε ιδεαλιστικές και агνωστικιστικές τάσεις (Λένιν, 1988). Στο έργο του *Φιλοσοφικά Τετράδια* επανεξέτασε τη εγγεληνή διαλεκτική και υπογράμμισε τη σημασία της αντίφασης ως βασικού νόμου της ανάπτυξης (Λένιν, 1977). Για τον Λένιν, η διαλεκτική δεν ήταν απλώς λογική μέθοδος αλλά εργαλείο κατανόησης και αλλαγής της πραγματικότητας.

Η εξέλιξη από τον ιδεαλισμό του Χέγκελ στον υλισμό του Μαρξ και του Λένιν αποτελεί μία από τις σημαντικότερες μεταβολές στη νεότερη φιλοσοφία. Ο διαλεκτικός υλισμός επιδίωξε να συνδυάσει την επιστημονική ανάλυση της κοινωνίας με μια δυναμική θεωρία της ιστορικής εξέλιξης. Για τον λόγο αυτό επηρέασε βαθιά όχι μόνο τη φιλοσοφία αλλά και την πολιτική θεωρία, την κοινωνιολογία και τα επαναστατικά κινήματα του 20ού αιώνα.

Ο διαλεκτικός υλισμός δε είναι ο μόνος υλισμός που αναπτύχθηκε. Κατά τον 17ο και 18ο αιώνα αναπτύχθηκε ο μηχανιστικός υλισμός. Φιλόσοφοι όπως ο Τόμας Χομπς και ο Ζυλιέν Οφρέ ντε Λα Μετρί υποστήριξαν ότι ο κόσμος λειτουργεί σαν μηχανή, ακολουθώντας αυστηρούς φυσικούς νόμους (Hobbes, 1996). Ο άνθρωπος θεωρήθηκε μέρος της φύσης και οι νοητικές λειτουργίες εξηγήθηκαν ως αποτέλεσμα φυσικών διεργασιών.

Ο μηχανιστικός υλισμός συνδέθηκε στενά με την ανάπτυξη της φυσικής και της επιστήμης της εποχής, ιδιαίτερα με τη μηχανική του Νεύτωνα. Παρόλο που συνέβαλε στην απόρριψη μεταφυσικών εξηγήσεων, επικρίθηκε επειδή αντιμετώπιζε τη φύση και την κοινωνία με υπερβολικά στατικό τρόπο (La Mettrie, 1996). Στον 20ό αιώνα εμφανίστηκε ο επιστημονικός ή φυσικαλιστικός υλισμός. Η θεωρία αυτή υποστηρίζει ότι όλα τα φαινόμενα, ακόμη και η συνείδηση και η σκέψη, μπορούν να εξηγηθούν μέσω της φυσικής και της βιολογίας (Copleston, 1993). Ο σύγχρονος φυσικαλισμός συνδέεται με τις νευροεπιστήμες και τη γνωσιακή επιστήμη, καθώς θεωρεί ότι οι νοητικές καταστάσεις αποτελούν προϊόν λειτουργιών του εγκεφάλου. Σε αντίθεση με τον διαλεκτικό υλισμό, ο φυσικαλιστικός υλισμός δεν δίνει έμφαση στις κοινωνικές αντιφάσεις αλλά στη μελέτη της φύσης μέσω εμπειρικών και επιστημονικών μεθόδων.

Επιπλέον, αναπτύχθηκε και ο πολιτισμικός υλισμός, κυρίως από τον ανθρωπολόγο Μάρβιν Χάρις. Η θεωρία αυτή προσπαθεί να εξηγήσει τα πολιτισμικά φαινόμενα μέσα από υλικούς και οικονομικούς παράγοντες, όπως η τεχνολογία, το περιβάλλον και οι ανάγκες επιβίωσης (Harris, 1979). Για παράδειγμα, έθιμα και θρησκευτικές πρακτικές ερμηνεύονται ως αποτέλεσμα πρακτικών αναγκών των κοινωνιών και όχι μόνο ιδεολογικών πεποιθήσεων.

### 1.3 Η σχέση του διαλεκτικού υλισμού με τις μαθηματικές έννοιες

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη σχέση του διαλεκτικού υλισμού των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν με θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών. Η σύνδεση των μαθηματικών με την φιλοσοφία προέκυψε ήδη από την αρχαιότητα, κυρίως στην αρχαία Ελλάδα, όταν οι πρώτοι φιλόσοφοι προσπάθησαν να εξηγήσουν τον κόσμο με λογικό και συστηματικό τρόπο. Οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι, όπως ο Θαλής και ο Πυθαγόρας, αναζητούσαν τις βασικές αρχές της φύσης και πίστευαν ότι οι αριθμοί και οι μαθηματικές σχέσεις μπορούν να εξηγήσουν την τάξη του σύμπαντος (Boyer & Merzbach, 2011).

Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η σχολή του Πυθαγόρα τον 6ο αιώνα π.Χ. Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι «τα πάντα είναι αριθμός» και πίστευαν ότι οι μαθηματικές αναλογίες αποτελούν τη βάση της πραγματικότητας (Russell, 2004). Από εκείνη την περίοδο άρχισε να διαμορφώνεται η ιδέα ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο πρακτικό εργαλείο αλλά και μέσο κατανόησης της αλήθειας και της φύσης του κόσμου.

Αργότερα, ο Πλάτωνας συνέδεσε ακόμη περισσότερο τα μαθηματικά με τη φιλοσοφία. Υποστήριζε ότι τα μαθηματικά βοηθούν τον άνθρωπο να φτάσει στη γνώση των αιώνιων και τέλειων ιδεών (Copleston, 1993). Στην Ακαδημία του υπήρχε η φράση «μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω», δηλαδή να μην εισέρχεται κανείς χωρίς να γνωρίζει γεωμετρία. Για τον Πλάτωνα, τα μαθηματικά καλλιεργούσαν τη λογική σκέψη και οδηγούσαν στη φιλοσοφική αλήθεια.

Ο Αριστοτέλης συνέχισε αυτή τη σχέση αλλά με διαφορετικό τρόπο. Προσπάθησε να οργανώσει τη λογική και τις επιστήμες συστηματικά, εξετάζοντας πώς τα μαθηματικά συνδέονται με τη φύση και την ανθρώπινη γνώση (Copleston, 1993). Έτσι, η φιλοσοφία των μαθηματικών άρχισε να αναπτύσσεται ως ξεχωριστός τομέας.

Κατά τη νεότερη εποχή, η σύνδεση έγινε ακόμη ισχυρότερη με φιλοσόφους και επιστήμονες όπως ο Ντεκάρτ, ο Λάιμπνιτς και ο Νεύτωνας. Η ανάπτυξη της φυσικής και των θετικών επιστημών δημιούργησε την ανάγκη να εξεταστεί αν τα μαθηματικά αποτελούν ανακάλυψη ή ανθρώπινη επινόηση και πώς μπορούν να περιγράψουν με τόση ακρίβεια τη φύση (Boyer & Merzbach, 2011). Όπως αναφέρεται στο συλλογικό έργο *Φιλοσοφία και Επιστήμη* (1984):

η πλατιά προσφυγή στα μαθηματικά χαρακτήριζε πάντα τη φυσική. Ήδη ο Γαλιλαίος έλεγε ότι το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη μαθηματική γλώσσα. Όμως ο μαθηματικός μηχανισμός που χρησιμοποιείται στη φυσική δημιουργείται, κατά κανόνα, στο περιθώριο της. Οι διάφορες μαθηματικές θεωρίες εμφανίζονται σύμφωνα, πριν από όλα, με τη λογική ανάπτυξης των ίδιων των μαθηματικών (*Φιλοσοφία και επιστήμη*, 1984, σ.125).

Η ανάγκη της σύνδεσης των μαθηματικών με τη φιλοσοφία προέκυψε από την προσπάθεια του ανθρώπου να κατανοήσει τον κόσμο, τη γνώση και την αλήθεια μέσω της λογικής και της απόδειξης. Τα μαθηματικά συνέβαλαν στην ερμηνεία φαινομένων τα οποία δεν ανήκαν αποκλειστικά στο πεδίο τους. Αυτή η ικανότητα που έχουν τα μαθηματικά προκύπτει από το ότι τα μαθηματικά δεν μελετούν ένα συγκεκριμένο φυσικό φαινόμενο της αντικειμενικής πραγματικότητας όπως κάνουν άλλες επιστήμες όπως η φυσική, η χημεία, η βιολογία. Αλλά όπως αναφέρει ο Rybnikov (1986):

τα μαθηματικά δημιουργούνται από την άμεση αντανάκλαση των ιδιοτήτων των αντικειμένων... που τις εξάγουν με αφαίρεση από την πραγματικότητα και τις επικυρώνουν με τυπικούς ορισμούς. ...τα μαθηματικά εμφανίζονται ως μέθοδος διατύπωσης ποσοτικών νομοτελειών, ως μέσο λύσης προβλημάτων και ως εργαλείο κατασκευής και επεξεργασίας θεωριών. Από αυτές αντλούν νέες έννοιες, νέα προβλήματα και νέα κίνητρα για τη δική τους ανάπτυξη (Rybnikov, 1986, σ. 50).

Η μεγάλη ανάδειξη της αναγκαιότητας της σύνδεσης των μαθηματικών με τη φιλοσοφία φάνηκε έντονα στο τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα και στις αρχές του 20<sup>ου</sup> με την μεγάλη κρίση των μαθηματικών για τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού και της θεωρίας συνόλων. Ο David

Hilbert αναφέρει για τη θεωρία συνόλων ότι έπρεπε να αναγνωρίσουν ότι η θέση στην οποία βρίσκονταν σε σχέση με τα παράδοξα δεν έπρεπε να συνεχιστεί, λέγοντας «Πού λοιπόν πρέπει να αναζητήσει κανείς την αλήθεια αν η ίδια η μαθηματική σκέψη συνθηκολογήσει;» (Hilbert, 1967).

Σύμφωνα με τον Κολμογκόροφ, όπως αναφέρει ο Rybnikov (1986):

η εμφάνιση των παραδόξων εξηγείται με το γεγονός ότι, στην έννοια του απείρου συνόλου αποδίδεται υπερβολική γενικότητα, που την καθιστά ακατάλληλη για εφαρμογές. Η αφαίρεση που οδηγεί στην έννοια του απείρου συνόλου, έχει νόημα μόνο κάτω από ισχύ συμπληρωματικών περιορισμών και συνθηκών, η εξακρίβωση των οποίων είναι άμεσο καθήκον της επιστήμης (σ.44).

Τα παράδοξα δημιουργήθηκαν όταν οι επιστήμονες μιλούσαν για άπειρα σύνολα σαν να είναι ολοκληρωμένα αντικείμενα, δίνοντας υπερβολικά γενική σημασία στην έννοια του απείρου, δηλαδή το άπειρο δεν μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς περιορισμούς και προϋποθέσεις. Για αυτό ο Κολμογκόροφ χρησιμοποιεί την έκφραση «δυνάμει άπειρο» και κάνει κριτική στην έκφραση «ενεργεία άπειρο». Το «δυνάμει άπειρο» θεωρείται διαδικασία που συνεχίζεται χωρίς τέλος, όπως για παράδειγμα στους φυσικούς αριθμούς που ανεβαίνουμε κατά ένα ξανά και ξανά. Δεν έχουμε ποτέ μπροστά μας όλους τους φυσικούς αριθμούς ολοκληρωμένους, αλλά είναι μια διαδικασία που συνεχίζεται ασταμάτητα, μια αδιάκοπη διαδικασία εξέλιξης. Αντίθετα, στο «ενεργεία άπειρο» το άπειρο θεωρείται σαν ένα ολοκληρωμένο σύνολο που υπάρχει ανεξάρτητα από τη διαδικασία δημιουργίας του, σαν κάτι έτοιμο αποκομμένο από την πραγματικότητα, σαν ένα σύνολο όλων των συνόλων χωρίς όρια και χωρίς σύνδεση με πραγματικές διαδικασίες.

Σύμφωνα με το διαλεκτικό υλισμό, ως φιλοσοφία που εξετάζει τις σχέσεις και όχι τα σώματα, βλέπει τις ποιοτικές αλλαγές και όχι μόνο τις ποσοτικές, αναλύει την έννοια του απείρου όχι ως ένα αντικείμενο αλλά ως συνεχής εξέλιξη και μεταβολή, η προσέγγιση αυτή μπορεί να προσφέρει ένα ερμηνευτικό πλαίσιο για τον απειροστικό λογισμό που είναι τα μαθηματικά των σχέσεων, εξετάζει όχι μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά τα μαθηματικά, αλλά και στη θεωρία συνόλων.

## 1.4 Κριτική αποτίμηση της θεώρησης των μαθηματικών από τη σκοπιά του διαλεκτικού υλισμού

Η φιλοσοφική προσέγγιση των μαθηματικών από τη σκοπιά του διαλεκτικού υλισμού έχει ουσιαστική συμβολή στην προσπάθεια σύνδεσης της ανάπτυξης των μαθηματικών με την ιστορική εξέλιξη της ανθρώπινης κοινωνίας, της επιστήμης και της πρακτικής δραστηριότητας. Σε αντίθεση με φιλοσοφικές θεωρίες που αντιμετωπίζουν τις μαθηματικές έννοιες ως ανεξάρτητες από την ανθρώπινη εμπειρία, ο διαλεκτικός υλισμός θεωρεί ότι οι μαθηματικές έννοιες προκύπτουν μέσα από την αφαίρεση πραγματικών σχέσεων του υλικού κόσμου (Ένγκελς, 2006).

Η θέση αυτή είναι το άλλο άκρο από τον μαθηματικό πλατωνισμό. Σύμφωνα με τον Πλάτωνα και τους σύγχρονους εκπροσώπους του πλατωνισμού, οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν ανεξάρτητα από τον άνθρωπο σε ένα αφηρημένο πεδίο ιδεών και οι μαθηματικοί τις ανακαλύπτουν και δεν τις δημιουργούν (Balaguer, 2018). Αντίθετα, για τον διαλεκτικό υλισμό οι μαθηματικές έννοιες δεν αποτελούν αιώνιες αλήθειες αλλά ιστορικά διαμορφωμένα προϊόντα της ανθρώπινης γνώσης. Το πλεονέκτημα του διαλεκτικού υλισμού είναι ότι μπορεί να ερμηνεύσει την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, ενώ ο πλατωνισμός δυσκολεύεται να εξηγήσει γιατί οι μαθηματικές έννοιες μεταβάλλονται και εμπλουτίζονται ιστορικά.

Ακόμη, ο διαλεκτικός υλισμός διαφοροποιείται από τον λογικισμό των Frege και Russell. Ο λογικισμός επιδίωξε να θεμελιώσει όλα τα μαθηματικά αποκλειστικά στη λογική, θεωρώντας ότι οι μαθηματικές αλήθειες αποτελούν ειδική κατηγορία λογικών αληθειών (Russell, 2004). Ο διαλεκτικός υλισμός υποστηρίζει ότι η λογική δεν προηγείται της πραγματικότητας, αλλά αποτελεί προϊόν της ιστορικής ανάπτυξης της ανθρώπινης γνώσης. Από αυτή την άποψη, η λογική δεν μπορεί να αποτελέσει το μοναδικό θεμέλιο των μαθηματικών, καθώς οι ίδιες οι λογικές κατηγορίες διαμορφώνονται μέσα από την αλληλεπίδραση ανθρώπου και φύσης.

Μια ακόμη διαφορετική προσέγγιση είναι ο φορμαλισμός του Hilbert. Σύμφωνα με τον φορμαλισμό, τα μαθηματικά συνιστούν ένα σύστημα συμβόλων και κανόνων χειρισμού τους, χωρίς να είναι απαραίτητη οποιαδήποτε αναφορά σε εξωμαθηματική πραγματικότητα (Hilbert, 1927/1967). Ωστόσο ο διαλεκτικός υλισμός ασκεί κριτική στον φορμαλισμό ότι

αποκόπτει τα μαθηματικά από τις πραγματικές συνθήκες μέσα στις οποίες γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η σύγκριση με τον διαισθητισμό του Brouwer. Ο διαισθητισμός υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά αποτελούν δημιουργία της ανθρώπινης σκέψης και απορρίπτει την ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων ανεξάρτητων από τη νοητική δραστηριότητα (Brouwer, 1975). Παρά το γεγονός ότι και οι δύο προσεγγίσεις απορρίπτουν τον πλατωνισμό, διαφέρουν ριζικά ως προς την προέλευση των μαθηματικών. Για τον διαισθητισμό η πηγή των μαθηματικών είναι η ανθρώπινη νόηση, ενώ για τον διαλεκτικό υλισμό είναι η υλική πραγματικότητα.

Εν κατακλείδι, ο διαλεκτικός υλισμός παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς την ιστορική και κοινωνική ερμηνεία της ανάπτυξης των μαθηματικών. Επιτρέπει την κατανόηση των μαθηματικών ως δυναμικής και εξελισσόμενης μορφής γνώσης και αναδεικνύει τη σχέση τους με την επιστημονική και κοινωνική εξέλιξη.

## 1.5 Διάρθρωση του κειμένου

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη σύνδεση θεμελιωδών εννοιών των μαθηματικών με τη φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού μέσω παραθέσεων των απόψεων τους για έννοιες των μαθηματικών των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν, κυρίως από το πρωτότυπο συγγραφικό τους έργο, και σχολιασμού αυτών των απόψεων αλλά και παράθεσης παραδειγμάτων.

Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο της εργασίας δίνεται η άποψη του διαλεκτικού υλισμού για τον ορισμό των μαθηματικών ως επιστήμης που είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την πραγματικότητα και έχει σαν αντικείμενο τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις που υπάρχουν στον κόσμο γύρω μας. Γίνεται αναφορά στο ρόλο που παίζουν τα αξιώματα στα μαθηματικά, ως αφετηριακά σημεία που έχουν προκύψει από τη συσσωρευμένη εμπειρία της ανθρωπότητας, αλλά και το πως αυτή η άποψη για τα αξιώματα, ότι δηλαδή δεν αποτελούν τα αξιώματα αιώνιες και αδιαμφισβήτητες αλήθειες, οδήγησε στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες.

Αναλύεται η φιλοσοφική αξία του αριθμού, της μονάδας και του μηδέν, όχι ως απλά μαθηματικά σύμβολα, αλλά ως έννοιες που έχουν προκύψει από την ανάγκη του ανθρώπου να κατανοήσει τον κόσμο, την ανάγκη της μέτρησης, της διάκρισης αντικειμένων. Δεν αποτελούν «αδέες» αλλά αντανάκλαση πραγματικών σχέσεων ποσοτήτων, εμπεριέχουν μέσα τους ποιότητα. Η μονάδα και το μηδέν αποτελούν συμβολικές αναπαραστάσεις των θεμελιωδών εννοιών της ύπαρξης και μη ύπαρξης.

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο εξετάζεται η άποψη του διαλεκτικού υλισμού για το άπειρο, το οποίο θεωρεί ότι έχει υλική βάση, λαμβάνεται από την πραγματικότητα και δεν αποτελεί ιδεατή έννοια των μαθηματικών. Ο διαλεκτικός υλισμός μελετά το άπειρο σε διαλεκτική σχέση με το πεπερασμένο και θεωρεί ότι από αυτή τη σύνδεση απείρου και πεπερασμένου μπορεί να γίνεται κατανοητή η υλική βάση του απείρου και στα μαθηματικά. Μέσα από αυτή τη σχέση απείρου και πεπερασμένου μπορεί να ερμηνευτεί και η έννοια της απροσδιοριστίας στα μαθηματικά, κατά την οποία καταρρέει η άμεση ταυτότητα των ποσοτήτων και αποκαλύπτεται η αναγκαιότητα της σχέσης. Ακριβώς γιατί η απροσδιοριστία αποτελεί ένδειξη ότι η αλήθεια δεν βρίσκεται στην απομονωμένη τιμή αλλά στη διαδικασία που τη γεννά.

Εξετάζεται ακόμη η ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού από τη σκοπιά του διαλεκτικού υλισμού, κατά την οποία δεν είναι ξεκομμένη από την κοινωνική και οικονομική ανάπτυξη της εποχής και τις νέες ανάγκες που γεννήθηκαν. Η απλή αριθμητική δεν μπορούσε να λύσει τα νέα προβλήματα που προέκυψαν, τα οποία είχαν μέσα τους την κίνηση, την εξέλιξη και όχι τη στατικότητα. Για αυτό χρειαζόταν κάτι νέο που θα μπορούσε να μελετήσει τις σχέσεις και την κίνηση, αυτό το νέο, αυτό το ποιοτικό άλμα ήταν ο απειροστικός λογισμός.

Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο εξετάζουμε την ενασχόληση του Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό. Ένας λόγος είναι ότι ο Μαρξ θεωρούσε υποχρέωση του να δείξει ότι ο διαλεκτικός υλισμός δεν αφορά μόνο τις κοινωνικές επιστήμες αλλά και τις φυσικές. Ακόμη ήθελε να διώξει, όπως έλεγε «το πέπλο μυστηρίου» που υπήρχε στον διαφορικό λογισμό. Τέλος, ακριβώς επειδή ο Μαρξ κατανοεί την οικονομία, όχι ως στατική περιγραφή, αλλά ως σχέσεις σε συνεχή κίνηση επειδή ο απειροστικός λογισμός είναι τα μαθηματικά των σχέσεων και κίνησης, ήθελε να τα αξιοποιήσει στην πολιτική οικονομία και το *Κεφάλαιο*, αφού οι τιμές που μελετά η πολιτική οικονομία παρουσιάζονται σε αυξήσεις ή μειώσεις στην πάροδο του χρόνου.

Ακόμη, αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο ο Μαρξ στα *Μαθηματικά Χειρόγραφα* ασχολείται με την παράγωγο συνάρτησης και το διαφορικό με έναν αξιοσημείωτο, όχι από άποψη μαθηματικών, αλλά από άποψη διαλεκτικής σκέψης, τρόπο κατά τον οποίο βλέπει μέσα στο διαφορικό και την παράγωγο σχέσεις, ποιοτικές αλλαγές, βλέπει τη σχέση μορφής και περιεχομένου, βλέπει το μέτρο ως ενότητα ποσότητας, ποιότητας και ορίου ύπαρξης.

Το 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρεται στη σχέση της ενασχόλησης του Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό και το *Κεφάλαιο* και τις οικονομικές κρίσεις, όπου μπορούν να κατανοηθούν ως μια κατάσταση όπου οι εσωτερικές αντιφάσεις του συστήματος φτάνουν σε ένα σημείο μη σταθερότητας, σε ένα κρίσιμο όριο.

## Κεφάλαιο 2: Η αντανάκλαση της φιλοσοφίας στα μαθηματικά: θεμελιώδεις έννοιες από την διαλεκτική της φύσης: ορισμός μαθηματικών-αριθμός-μηδέν

### 2.1 Ο ορισμός των μαθηματικών από τον Ένγκελς-Υλιστική θεμελίωση της μαθηματικής γνώσης

Ο διαλεκτικός υλισμός δεν αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως ένα σύνολο αφηρημένων μορφών και εννοιών που δημιούργησαν κάποιοι σοφοί, αλλά ως ένα ιστορικά διαμορφωμένο προϊόν της ανθρώπινης πρακτικής και της σχέσης του ανθρώπου με τον αντικειμενικό κόσμο. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο ο Ένγκελς έδωσε στα μαθηματικά τον εξής ορισμό στο βιβλίο του *Αντι-Ντίρινγκ* ότι «τα καθαρά μαθηματικά έχουν σαν αντικείμενο τις μορφές του χώρου και τις ποσοτικές σχέσεις του πραγματικού κόσμου, δηλαδή μια πολύ πραγματική ύλη» (Ένγκελς, 2006, σ.48). Ο ορισμός που δίνει ο Ένγκελς έχει θεμελιώδη σημασία ακριβώς γιατί απορρίπτει τόσο τον ιδεαλισμό όσο και τον φορμαλισμό που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως επιστήμη των εννοιών και των κανόνων χωρίς αναφορά στην πραγματικότητα. Για την υψηλή αφαίρεση που συναντάμε στις μαθηματικές έννοιες ο Ένγκελς (2006) αναφέρει:

Το ότι η ύλη αυτή εμφανίζεται σε μια εξαιρετικά αφηρημένη μορφή δεν μπορεί παρά να σκεπάζει μόνο επιφανειακά την προέλευση της από τον εξωτερικό κόσμο. Για να μπορέσουμε να εξετάσουμε τις μορφές και τις σχέσεις αυτές στην καθαρότητα τους, πρέπει να τις χωρίσουμε, όμως, τελείως από το περιεχόμενο τους, να βάλουμε αυτό το περιεχόμενο στην άκρη ως αδιάφορο... όμως, όπως σε όλους τους τομείς της σκέψης, σε μια συγκεκριμένη βαθμίδα της εξέλιξης διαχωρίζονται από τον πραγματικό κόσμο οι νόμοι... και αντιπαρά τίθενται στον κόσμο αυτό σαν κάτι το αυτοτελές, σαν νόμοι που έρχονται απέξω και στους οποίους ο κόσμος πρέπει να συμμορφωθεί. Έτσι έγιναν τα πράγματα στην κοινωνία και το κράτος. Έτσι και όχι αλλιώς, τα καθαρά μαθηματικά εφαρμόζονται έπειτα στον κόσμο, παρόλο που έχουν

παρθεί από αυτό τον κόσμο και παρόλο που δεν αντιπροσωπεύουν παρά ένα μέρος των μορφών, από τις οποίες συντίθεται αυτός ο κόσμος και ακριβώς μόνο για αυτό το λόγο είναι γενικά εφαρμόσιμα (σ.48-49).

Εδώ ο Ένγκελς αναγνωρίζει την αφηρημένη μορφή η οποία συγκαλύπτει την προέλευση από τον εξωτερικό κόσμο, αλλά αναδεικνύει ότι αυτό δεν σημαίνει ότι είναι μια αυθαίρετη επινόηση της νόησης αλλά μια διαδικασία κατά την οποία απογυμνώνεται το κύριο που εξετάζεται εκείνη τη στιγμή από τα δευτερεύοντα στοιχεία του ούτως ώστε να αναδειχθούν οι πιο γενικές, οι πιο καθολικές σχέσεις. Κοντολογίς, η αφηρημένη μαθηματική έννοια δεν είναι ένα αυθαίρετο δημιούργημα, είναι το αποτέλεσμα μιας ιστορικά ανεπτυγμένης γνωστικής διαδικασίας, μιας διαδικασίας που στηρίζεται, έχει τις βάσεις της στην πρακτική σχέση του ανθρώπου με τη φύση.

Ο παραπάνω ορισμός των μαθηματικών συνδέεται με τη ευρύτερη θεωρία της γνώσης του διαλεκτικού υλισμού. Για τον Μαρξ και τον Ένγκελς η γνώση δεν είναι μια απλή παθητική αντανάκλαση του πραγματικού αλλά κινείται από το συγκεκριμένο που αντιλαμβάνονται οι αισθήσεις μας προς την αφηρημένη έννοια και έπειτα επιστρέφει στο συγκεκριμένο ως νοητικά ανώτερο σύνολο. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο τα μαθηματικά αποτελούν μια ανώτερη μορφή αφαίρεσης, η οποία όμως δεν αποσπάται από τον κόσμο αλλά επιτρέπει την βαθύτερη κατανόηση του. Η χρησιμότητα των μαθηματικών στη φυσική, στην αστρονομία, στη βιομηχανία επιβεβαιώνει ακριβώς αυτήν τη διαλεκτική σχέση θεωρίας και πραγματικότητας.

Κατά τον Λένιν ο ορισμός της έννοιας της ύλης είναι πως «η ύλη είναι φιλοσοφική κατηγορία που χρησιμεύει για να υποδηλώσει την αντικειμενική πραγματικότητα που έχει δοθεί στον άνθρωπο από τα αισθήματα του και που αντιγράφεται, φωτογραφίζεται, απεικονίζεται από τα αισθήματα μας, ενώ υπάρχει ανεξάρτητα από αυτά» (Λένιν, 1988, σ.52).

Αφετηριακό σημείο λοιπόν του διαλεκτικού υλισμού είναι η αναγνώριση της αντικειμενικής ύπαρξης της ύλης έξω και ανεξάρτητα από την ανθρώπινη συνείδηση, από τα αισθήματα και το πνεύμα, μιας ύλης αιώνια κινούμενης και αναπτυσσόμενης. Την αντικειμενική ύπαρξη της ύλης έξω από την συνείδηση του ανθρώπου επιβεβαιώνουν τα πορίσματα της σύγχρονης κοσμολογίας. Η Γη, το ηλιακό μας σύστημα, το σύμπαν υπήρχε πριν από την ύπαρξη του ανθρώπου και της συνείδησης του. Ο ίδιος ο άνθρωπος και η συνείδηση του γεννήθηκαν σε

μια ορισμένη μόνο βαθμίδα ανάπτυξης της φύσης, αποτελούν δηλαδή προϊόν ανάπτυξης της ύλης.

Οι επιστημονικές ανακαλύψεις των φυσικών επιστημών επιβεβαιώνουν πως η ύλη είναι το πρωτεύον και η συνείδηση, το πνεύμα το δευτερεύον. Δεν μπορεί να υπάρξει καμία έννοια, εδώ των μαθηματικών που να μην έχει την προέλευση της από την υλική πραγματικότητα. (Κονσταντίνοφ κ.ά., 2006). Αυτό αναδεικνύεται και από την ιστορία των μαθηματικών από τους αρχαίους πολιτισμούς μέχρι και σήμερα.

Η ανάγκη των ανθρώπων να κατανοήσουν και να επιδράσουν στη φύση είτε μέσα από τις μηχανικές κατασκευές, είτε μέσα από τη γεωργία και το εμπόριο οδήγησαν στην ανάγκη της μέτρησης της γης, της ημέρας, το κύκλο των πλημμύρων και των εποχών, των μεγάλων κατασκευών ως ένδειξη δύναμης του κάθε πολιτισμού ή τόπων λατρείας.

Η συνεχής και αιώνια εξέλιξη της κοινωνίας έφτασε στο σημείο που πλέον οι εμπειρικοί κανόνες δεν ήταν επαρκείς, χρειαζόταν κάτι άλλο. Χρειαζόταν η μετάβαση από μία κατώτερη σε μία ανώτερη μορφή γνώσης. Οι ανάγκες των ανθρώπων πολλαπλασιάζονταν και οι επιστήμονες της εποχής κλήθηκαν να βρουν τις απαντήσεις στα νέα ερωτήματα που είχαν γεννηθεί. Η συσσώρευση όλων των εμπειρικών παρατηρήσεων και πρακτικών τεχνικών που είχαν δημιουργηθεί, μη μπορώντας να απαντήσει σε αυτά τα νέα ερωτήματα που είχαν γεννηθεί, δημιούργησε την ανάγκη για ένα νέο επίπεδο οργάνωσης της γνώσης, για την θεωρητική της συστηματοποίηση.

Από αυτό φαίνεται και η διαλεκτική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ποσότητα και την ποιότητα, το πως η ποσοτική συσσώρευση εμπειρικών γνώσεων οδηγεί εν τέλει σε ένα ποιοτικό άλμα, στην προκειμένη περίπτωση τη συγκρότηση των μαθηματικών ως επιστήμη με έννοιες, ορισμούς, αξιώματα και αποδείξεις. Για τον διαλεκτικό υλισμό αυτή η μετάβαση δεν γίνεται τυχαία, ούτε είναι αποκλειστικά πνευματική, αλλά είναι ιστορικά αναγκαία καθώς ανταποκρίνεται στις νέες απαιτήσεις της κοινωνικής ζωής. Αυτή η μετάβαση των μαθηματικών από σύστημα εμπειρικών τεχνικών σε ολοκληρωμένη και συγκροτημένη επιστήμη δεν μπορεί να κατανοηθεί ανεξάρτητα από τις κοινωνικές και ιστορικές συνθήκες της αρχαιότητας και ειδικότερα του ελληνικού κόσμου.

Οι πρώτοι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας είχαν αναπτύξει σημαντικές αριθμητικές και γεωμετρικές γνώσεις για να λύνουν πρακτικές ανάγκες, όπως η μέτρηση της

γης, η φορολογία, η αστρονομία, οι κατασκευές έργων. Ωστόσο οι κοινωνικές και πνευματικές συνθήκες που επέτρεψαν αυτό το ποιοτικό άλμα υπήρξαν στην αρχαία Ελλάδα. Η ανάπτυξη της πόλης-κράτους, η σχετική αποδέσμευση ενός μέρους των πολιτών από την άμεση παραγωγική διαδικασία λόγω της δουλοκτησίας, η άνθηση του εμπορίου και της ναυσιπλοΐας, καθώς και η συγκρότηση ενός δημόσιου χώρου συζήτησης και φιλοσοφικής αντιπαράθεσης δημιούργησαν το αναγκαίο υπόβαθρο για να αναπτυχθεί η αφηρημένη σκέψη, η λογική απόδειξη. Έτσι, η ελληνική φιλοσοφία από τους προσωκρατικούς φιλόσοφους ως τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη διαμόρφωσαν την αναζήτηση καθολικών αρχών, αναγκαίων σχέσεων θεμελίωσης της γνώσης επηρεάζοντας έτσι και τα μαθηματικά (Russell, 2004; Boyer & Merzbach, 2011).

Η ιστορική αυτή εξέλιξη επιβεβαιώνει ότι τα μαθηματικά δεν αναπτύχθηκαν σε ένα κοινωνικό και πολιτισμικό κενό, αλλά υπήρξαν προϊόν συγκεκριμένων υλικών αναγκών και κοινωνικών πρακτικών. Όπως τονίζει ο Χασάπης (2005), οι κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής γνώσης είναι καθοριστικές, καθώς τα μαθηματικά συγκροτούνται ιστορικά μέσα από τις ανάγκες των ανθρώπινων κοινοτήτων για οργάνωση και διαχείριση του περιβάλλοντος τους.

Όλη αυτή η διαδικασία κορυφώθηκε στην ελληνιστική Αλεξάνδρεια τον 3<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ., που υπήρξε ένα από τα μεγαλύτερα πνευματικά κέντρα του αρχαίου κόσμου, όπου η συγκέντρωση της γνώσης, η λειτουργία της βιβλιοθήκης η οποία έδινε την δυνατότητα επαφής με διαφορετικές επιστημονικές παραδόσεις, έδωσαν στον Ευκλείδη όλες εκείνες τις απαραίτητες ιστορικές προϋποθέσεις για να οργανώσει την μαθηματική γνώση. Με το έργο του *Στοιχεία* ο Ευκλείδης κάνει μία επανάσταση για την εποχή, μετατρέποντας την προϋπάρχουσα εμπειρική και αποσπασματική γνώση σε μια επιστήμη πλέον. Μια επιστήμη με ορισμούς και αξιώματα, με λογικές αποδείξεις των θεωρημάτων απαντώντας στο γιατί ισχύει κάτι και όχι απλά ότι φαίνεται εμπειρικά ότι ισχύει.

Η εμπειρία και η παρατήρηση μέσω των ανθρώπινων αισθήσεων είναι το αναγκαίο για να υποτεθεί κάτι, αλλά αν μένει εκεί μένει στα όρια του υποκειμενικού. Η συνεπής απόδειξη ότι κάτι ισχύει είναι αυτή που οδηγεί στην αντικειμενική αλήθεια που δεν χωρά αμφισβήτηση, που ανοίγει τον δρόμο στην παραπάνω εξέλιξη της εκάστοτε επιστήμης. Το έργο του Ευκλείδη αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του πως μια επιστήμη αναδύεται μέσα από την πράξη, ξεπερνά την άμεση εμπειρία και επιστρέφει πάλι σε αυτήν αυτή τη

φορά όμως σε ένα ανώτερο επίπεδο, ως ένα ισχυρό εργαλείο για την βαθύτερη κατανόηση αλλά και μετασχηματισμού του κόσμου.

Η αξιωματική μέθοδος του επηρεάστηκε από την άποψη του Αριστοτέλη για τα μαθηματικά ως επιστήμη (1.ορισμοί, 2.αξιώματα, 3. Θεωρήματα και αποδείξεις). Με βασικό οδηγό την Λογική που χρησιμοποιούνταν στην φιλοσοφία έγινε δυνατό να αποδείξεις αυτό που εικάζεις όχι εμπειρικά, μέθοδο που περιέχει το σφάλμα, αλλά με λογικό τρόπο που καταλήγει σε συμπεράσματα που ισχύουν καθολικά. Η ανάπτυξη της φιλοσοφίας ήταν αυτή που άνοιξε το δρόμο στον Ευκλείδη για να οργανώσει την μαθηματική γνώση σε Επιστήμη.

Εν κατακλείδι, η συνεχής εξέλιξη της κοινωνίας όμως γέννησε ερωτήματα πιο περίπλοκα που δεν μπορούσαν να απαντηθούν χωρίς την ανάγκη της αφαίρεσης και της γενίκευσης των εμπειρικών δεδομένων σε καθολικούς νόμους που διέπουν την ύπαρξη και την κίνηση, την εξέλιξη της ύλης. Αυτό είναι το δεύτερο στοιχείο που αναδεικνύει ο παραπάνω ορισμός του Ένγκελς, η αναγκαιότητα της αφαίρεσης των μορφών από το περιεχόμενο τους για να μπορούν να εξεταστούν οι μορφές. Σύμφωνα με αυτόν, για να κατανοήσει ο άνθρωπος την πραγματικότητα, οφείλει να αποσπά τις μορφές από το περιεχόμενό τους, προκειμένου να τις εξετάσει ως αυτοτελή αντικείμενα σκέψης (Ένγκελς, 2006).

Η διαδικασία αυτή δεν συνιστά αυθαίρετη απομάκρυνση από την πραγματικότητα, αλλά αναγκαίο στάδιο για την εις βάθος κατανόηση των φαινομένων. Και επειδή η ύλη γύρω μας συναντάτε σε διάφορες μορφές και ποσότητες είτε αφορά τις φυσικές, χημικές, βιολογικές διεργασίες, τα μαθηματικά ως επιστήμη των μορφών του χώρου και των ποσοτικών σχέσεων του πραγματικού κόσμου, γίνονται εφαρμόσιμα σε όλες τις παραπάνω επιστήμες ακριβώς λόγω του υψηλού βαθμού αφαίρεσης που τα χαρακτηρίζει.

Η ιστορική πορεία της ανθρωπότητας επιβεβαιώνει αυτή τη διαδικασία. Οι άνθρωποι στην ιστορική εξέλιξη τους πρώτα είχαν μπροστά τους μετρήσιμα αντικείμενα και μέσα από τη μακρόχρονη συλλογή εμπειριών έγιναν ικανοί να αντιληφθούν την έννοια της μέτρησης απομονώνοντας τις όποιες ιδιότητες είχαν αυτά τα μετρήσιμα αντικείμενα. Με τον ίδιο τρόπο αναπτύχθηκαν όλες οι μαθηματικές έννοιες.

Μάλιστα η ανάπτυξη της γλώσσας έπαιξε καθοριστικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία αφού η ίδια η ονομασία ενός αντικειμένου αποτελεί πράξη αφαίρεσης. Σύμφωνα με τον Τσάιλντ «η ονομασία ενός πράγματος είναι μια πράξη αφαίρεσης» (Τσάιλντ, 1971, σ.64). Οτιδήποτε

παίρνει ένα όνομα αποσπάται από τις ιδιότητες που έχει και μπαίνει μέσα σε μια πιο γενική κατηγορία. Η λέξη τρίγωνο για παράδειγμα δεν αφορά μόνο το γεωμετρικό αντικείμενο που έχει αυτά τα χαρακτηριστικά, λέμε για παράδειγμα το τρίγωνο των Βερμούδων. Ο Ένγκελς αναφέρει «για να γνωρίσουμε τις λεπτομέρειες, πρέπει να τις απομονώσουμε από τα φυσικά ή ιστορικά τους πλαίσια και να εξετάσουμε τις ιδιότητες, τις ιδιαίτερες αιτίες και τις επιδράσεις κλπ της κάθε μιας ξεχωριστά.» (Ένγκελς, 2006, σ.26).

Αποτελεί η αφαίρεση μια μέθοδο επιστημονικής έρευνας, μια από τις μορφές της γνώσης η οποία «συνιστάτε στην νοερή απόσπαση μιας σειράς ιδιοτήτων των αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων και τη διάκριση μιας ιδιότητας είτε σχέσης. Αφαίρεση σημαίνει και το προτσές μιας τέτοιας απόσπασης και τα αποτελέσματα του» (Κασιούρας, 1995, σ.45). Η διαδικασία της αφαίρεσης επιτρέπει την συστηματοποίηση της εμπειρίας και κατ' επέκταση τη διαμόρφωση θεωριών που υπερβαίνουν το άμεσο και το επιμέρους. Στα πλαίσια των μαθηματικών η αφαίρεση συνίσταται στις μορφές και στις ποσότητες.

Από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη οι έννοιες που ορίζονται στην αρχή (σημείο, ευθεία κ.α.) αποτελούν καθαρές αφαιρέσεις οι οποίες δεν αντιστοιχούν αυτούσιες σε υλικά αντικείμενα, αλλά λειτουργούν ως ιδεατά εργαλεία σκέψης. Μόνο με αυτόν τον τρόπο μπόρεσαν και τα μαθηματικά να προχωρήσουν από την εμπειρική συλλογή σε μια συγκροτημένη επιστήμη. Από τα παραπάνω αναδεικνύεται πως από ένα σημείο και μετά η αφαίρεση είναι αναγκαία στην πορεία ανάπτυξης των επιστημών ακόμα κι αν κατά την διαδικασία αυτή παραβλέπουμε ορισμένες φορές και υποκειμενικές δυνατότητες του ανθρώπου.

Ένα ακόμα παράδειγμα στα μαθηματικά αποτελούν τα σύνολα των αριθμών. Χρησιμοποιούμε καθημερινά, στηριζόμαστε πάνω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, ταυτόχρονα όμως είναι αδύνατο ένας άνθρωπος να απαριθμήσει όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Στα σύγχρονα μαθηματικά ο βαθμός αφαίρεσης είναι πολύ υψηλός με αποτέλεσμα να χάνουμε τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα. Όμως πρέπει να μην ξεφεύγουμε από το ότι η αφαίρεση δεν οδηγεί στην απομάκρυνση από το περιεχόμενο, από την ουσία του αντικειμένου και του φαινομένου αλλά το αντίθετο, η φαινομενική αυτή απομάκρυνση όχι μόνο δεν αναιρεί τη σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα αλλά επιβεβαιώνει τον βαθύτερο χαρακτήρα της αφαίρεσης ως μέσο για την προσέγγιση της αλήθειας.

Ο Λένιν αναφέρει ότι η νόηση, ανερχόμενη από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, δεν απομακρύνεται, αν είναι σωστή, από την αλήθεια, αλλά την πλησιάζει, για αυτό όλες οι επιστημονικές αφαιρέσεις αντανakλούν τη φύση βαθύτερα, πιστότερα, πληρέστερα (Λένιν, 1983). Αυτό συνέβη και με όλες τις μαθηματικές αφαιρέσεις όπως οι έννοιες στα Στοιχεία του Ευκλείδη, ήταν αναγκαίες για να γνωρίσουμε καλύτερα το συγκεκριμένο, για να βρούμε τους καθολικούς νόμους που διέπουν τα φαινόμενα. Οι επιστημονικές αφαιρέσεις δεν αποτελούν αυθαίρετες κατασκευές, αλλά αντανakλούν τη φύση με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια.

Η διαλεκτική σχέση μεταξύ συγκεκριμένου και αφηρημένου αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της επιστημονικής μεθόδου. Ο διαλεκτικός υλισμός υποστηρίζει ότι ξεκινάμε πάντα από την υλική πραγματικότητα, η οποία είναι πολύπλοκη και συγκεκριμένη. Με την ανάλυση απομονώνουμε βασικές πλευρές και σχέσεις, κάνουμε δηλαδή αφαιρέσεις. Μέσα από τη σύνθεση αυτών των αφαιρέσεων καταλήγουμε να αναπαράγουμε θεωρητικά το συγκεκριμένο ως ένα ενιαίο σύνολο σχέσεων. Δηλαδή, το συγκεκριμένο στη σκέψη είναι το αποτέλεσμα της θεωρητικής επεξεργασίας του πραγματικού συγκεκριμένου. Η πορεία από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο είναι μέθοδος γνώσης και όχι διαδικασία δημιουργίας της πραγματικότητας. Η γνώση ξεκινά από το συγκεκριμένο, προχωρά στο αφηρημένο μέσω της ανάλυσης και της γενίκευσης, και τελικά επιστρέφει στο συγκεκριμένο, εμπλουτισμένη με νέα κατανόηση. Το κριτήριο της αλήθειας παραμένει πάντοτε η πράξη. Μια θεωρία επιβεβαιώνεται όταν μπορεί να εφαρμοστεί στην πραγματικότητα και να παράγει αποτελέσματα που συμφωνούν με τις προβλέψεις της.

Συνεπώς, η αφαίρεση δεν συνιστά απομάκρυνση από την ουσία των φαινομένων, αλλά αναγκαίο στάδιο για την αποκάλυψή της. Μέσω αυτής, ο άνθρωπος κατορθώνει να διεισδύσει πέρα από την επιφάνεια των πραγμάτων και να συλλάβει τους βαθύτερους νόμους που διέπουν τον κόσμο. Η εξέλιξη των μαθηματικών αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της διαδικασίας, επιβεβαιώνοντας ότι η πρόοδος της γνώσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ικανότητα του ανθρώπου να αφαιρεί, να γενικεύει και να επιστρέφει στο συγκεκριμένο με νέους όρους κατανόησης.

## 2.2 Αξιώματα-μη ευκλείδεια γεωμετρία

### 2.2.1 Αξίωμα

Πέρα από τον ορισμό των μαθηματικών, ο Ένγκελς στο βιβλίο του *Η διαλεκτική της φύσης* κάνει συγκεκριμένες φιλοσοφικές παρατηρήσεις σε κρίσιμες έννοιες των μαθηματικών.

Η πρώτη αναφορά στις σημειώσεις για τα μαθηματικά αφορά τον ρόλο των αξιωμάτων. Σύμφωνα με τον Ένγκελς (2005):

Τα μαθηματικά αξιώματα είναι οι λίγοι προσδιορισμοί της σκέψης που χρειάζονται τα μαθηματικά σαν αφετηριακά σημεία... Αφετηριακό σημείο τους είναι η έννοια του μεγέθους. Δίνουν στο μέγεθος έναν ελλιπή ορισμό και ύστερα προσθέτουν απ' έξω τους άλλους στοιχειώδεις προσδιορισμούς του μεγέθους που δεν περιέχονται στον ορισμό, με μορφή αξιωμάτων (σ.235).

Αυτός ο ορισμός του Ένγκελς για τα αξιώματα αποκτά ιδιαίτερη σημασία όταν αντιπαρατίθεται με ιδεαλιστικές απόψεις οι οποίες αντιμετωπίζουν τα αξιώματα ως αιώνιες και αυταπόδεικτες αλήθειες.

Τι πρέπει να θεωρείται αξίωμα και τι όχι έχει απασχολήσει πολύ την μαθηματική κοινότητα από την πρώτη κιόλας συστηματική προσπάθεια οργάνωσης των μαθηματικών με τέτοιο τρόπο, ως επιστήμη, που είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* δεν περιορίστηκε μόνο στη συγκέντρωση της ήδη υπάρχουσας γνώσης, αλλά επιχείρησε να τη δομήσει σε ένα αυστηρό λογικό σύστημα. Ξεκίνησε παραθέτοντας 21 ορισμούς και 5 αξιώματα.

Αυτά τα αξιώματα φαίνονται ως φυσικά και χωρίς απόδειξη, ως προφανείς και αυτονόητες αλήθειες οι οποίες δεν χρειάζονται καμία απόδειξη αφού αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία οικοδομείται ολόκληρο γεωμετρικό οικοδόμημα.

Η έννοια του αυτονόητου όμως δεν είναι τόσο απλή όσο φαίνεται αρχικά. Σύμφωνα με τον Ένγκελς το αυτονόητο τους αποκτήθηκε κληρονομικά, μπορούν να αποδειχθούν διαλεκτικά. Δηλαδή τα αξιώματα δεν προκύπτουν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη εμπειρία, αλλά αποτελούν την συμπύκνωση μιας μακροχρόνιας και επαναλαμβανόμενης πρακτικής και εμπειρικής δράσης των ανθρώπων. Ο Λένιν γράφει χαρακτηριστικά: «η πρακτική δράση του ανθρώπου χρειάστηκε να οδηγήσει δισεκατομμύρια φορές τη συνείδηση του ανθρώπου στο

να επαναλάβει τις διάφορες λογικές μορφές, έτσι ώστε αυτές να μπορέσουν να αποκτήσουν τη σημασία του αξιώματος» (Λένιν, 1977, τ.29, σ.172). Κοντολογίς αυτό που σήμερα φαίνεται αυτονόητο είναι αποτέλεσμα μιας μακροχρόνιας διαδικασίας ιστορικής και κοινωνικής εμπειρίας.

Παίρνοντας ως παράδειγμα το 3<sup>ο</sup> αξίωμα του Ευκλείδη σύμφωνα με το οποίο ένας κύκλος ορίζεται από ένα κέντρο και μία απόσταση (ακτίνα). Σήμερα αυτό φαντάζει τόσο προφανές και αυτονόητο αφού για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε έναν κύκλο τα μόνα που χρειαζόμαστε είναι ένα κέντρο και μία ακτίνα. Είναι μια πρόταση που δεν επιδέχεται απόδειξης και μας φαντάζει φυσική. Ωστόσο σε αυτό το συμπέρασμα κατάφεραν να καταλήξουν οι άνθρωποι έχοντας συσσωρεύσει την πείρα πολλών ετών. Κάθε φορά που ήθελαν να φέρουν έναν κύκλο, μπορούσαν να το κάνουν ξέροντας που θέλουν να κάνουν τον κύκλο (τη θέση του) και πόσο μεγάλος να είναι (απόσταση) και το έκαναν αυτό ξανά και ξανά, κάθε φορά ακόμα και όταν δεν ήξεραν την έννοια του κύκλου και ακτίνας, όταν ζωγράφιζαν στις σπηλιές το κεφάλι ενός ζώου που σκότωσαν στο κυνήγι.

Αυτή η συσσωρευμένη παρατήρηση στην πάροδο των χρόνων είναι η ζωντανή διαλεκτική απόδειξη των αξιωμάτων. Η συσσώρευση αυτών των εμπειριών οδήγησε στη διαμόρφωση γενικευμένων εννοιών, οι οποίες αργότερα εκφράστηκαν ως αξιώματα. Έτσι, η «αυταπόδεικτη» φύση τους δεν είναι παρά η αντανάκλαση της σταθερότητας των εμπειρικών παρατηρήσεων μέσα στον χρόνο. Από αυτή την άποψη, τα αξιώματα μπορούν να θεωρηθούν ως μορφές γνώσης που έχουν αποδειχθεί από την πράξη και έχουν αποκτήσει έναν υψηλό βαθμό αφαίρεσης.

Ωστόσο στην ιστορία της φιλοσοφίας αναπτύχθηκε και μια διαφορετική άποψη για το τι είναι αξίωμα. Η άποψη αυτή υποστηρίζει ότι τα αξιώματα δεν προκύπτουν από την εμπειρία αλλά προηγούνται της εμπειρίας. Αυτή η ερμηνεία στο αξίωμα είχε τις βάσεις της στον ιδεαλισμό του Πλάτωνα, ο οποίος θεωρούσε ότι οι μαθηματικές αλήθειες ανήκουν σε έναν υπερβατικό κόσμο ιδεών, ανεξάρτητο από την αισθητή πραγματικότητα (Πλάτων, 1976).

Αργότερα και ο Καντ εξέφραζε μια αντίστοιχη άποψη μέσω της άποψης της *a priori* φύσης των αξιωμάτων, ότι δηλαδή δεν αποτελούν, όπως σωστά αναδεικνύει ο διαλεκτικός υλισμός συσσωρευμένη εμπειρία, αλλά προηγούνται ως ιδέες της εμπειρίας, ο Καντ μάλιστα πίστευε ότι ο χώρος ανήκει στην συνείδηση του ανθρώπου και όχι στα εξελισσόμενα φαινόμενα. Θεωρούσε ότι ο χώρος δεν αποτελεί ιδιότητα των πραγμάτων καθ'αυτών, αλλά μορφή της

ανθρώπινης αντίληψης. Χαρακτηριστικά στο έργο του *Κριτική του καθαρού λόγου*, ο Καντ είχε διατυπώσει την άποψη ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι έτσι δομημένος ώστε ο άνθρωπος να αντιλαμβάνεται τη γεωμετρία μόνο ως ευκλείδεια. Σύμφωνα με τον Shapiro ο Kant, όπου ήταν η μεγαλύτερη φιλοσοφική φυσιογνωμία τα τέλη του 18<sup>ου</sup> και αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα, πίστευε ότι τα μαθηματικά είναι γνωστά, a priori, και εφαρμόζονται καθολικά.

Με βάση αυτές τις ιδέες θεωρούσε ότι το αξίωμα της παραλληλίας είναι μια αναγκαία αλήθεια που δεν θα μπορούσε να είναι ψευδής (Shapiro, 2000).

Οι δικές του ιδέες (του Καντ) «σχετικά με το χώρο και τη γεωμετρία λειτούργησαν ως τροχοπέδη για την αποδοχή της μη ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία καθυστέρησε έτσι σημαντικά» (Davis, 2020, σ.133). Αξιοσημείωτο παράδειγμα αυτού αποτελεί η στάση του Gauss ο οποίος ήταν ο πρώτος που «αντιλήφθηκε ότι η μη ευκλείδεια γεωμετρία είναι εξίσου έγκυρη με την Ευκλείδεια, και ως λογικό σύστημα και ως περιγραφή του σύμπαντος» (Davis, 2020, σ.107), ωστόσο δεν είχε δημοσιεύσει τις ιδέες του για την μη ευκλείδεια γεωμετρία για να μην έρθει σε αντιπαράθεση με την φιλοσοφία του Kant (Davis, 2020). Οι κοινωνικές συνθήκες όμως της εποχής προσέκρουαν σε αυτές τις αντιλήψεις γιατί ήταν αναγκαία η πρόοδος των μαθηματικών για να μπορέσουν να προχωρήσουν.

Όλα τα παραπάνω αναδεικνύουν ότι το ζήτημα του τι πρέπει να θεωρείται αξίωμα και τι όχι, δεν αποτελεί ένα τεχνικό θέμα αλλά είναι βαθιά φιλοσοφικό. Η προσέγγιση του διαλεκτικού υλισμού τονίζει ότι τα αξιώματα συνδέονται άμεσα με την πρακτική ζωή των ανθρώπων και την ιστορική εξέλιξη της γνώσης. Από την άλλη πλευρά η ιδεαλιστική αντίληψη αντιμετωπίζει τα αξιώματα ως έμφυτες, ως προϋπάρχουσες μορφές σκέψης.

### **2.2.2 Μη ευκλείδεια γεωμετρία**

Η ιδεαλιστική θεώρηση ότι τα αξιώματα αποτελούν a priori αιώνιες και αδιαμφισβήτητες αλήθειες δέχτηκε ένα μεγάλο χτύπημα από την μη ευκλείδεια γεωμετρία του Lobachevski και του Bolyai, παρά το ότι η ιδεαλιστική αντίληψη αποτελούσε τροχοπέδη στην ανάπτυξη της επιστήμης των μαθηματικών. Οι δυο αυτοί μαθηματικοί ανακάλυψαν την μη ευκλείδεια γεωμετρία ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, σχεδόν ταυτόχρονα. Ο Ρώσος Lobachevsky δημοσίευσε την εργασία του το 1829 ενώ ο Ουγγρο-Ρουμάνος Bolyai το 1832.

Ήταν πολλοί αυτοί που πίστευαν ότι το 5<sup>ο</sup> αξίωμα δεν έπρεπε να περιλαμβάνεται στα αξιώματα και μπορεί να συναχθεί από τα άλλα 4 αξιώματα. Η αμφισβήτηση του 5<sup>ου</sup>

αξιώματος του Ευκλείδη κατά τον Davis ανέδειξε τη διαφορά ανάμεσα σε ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα με την γεωμετρία ως πλαίσιο μελέτης του φυσικού σύμπαντος (Davis, 2020). Σε αυτή τη σύνδεση του χώρου και του χρόνου με την ύλη συνέβαλλε ουσιαστικά η ανάπτυξη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας από τον Lobachevsky. Στο έργο του *Νέες αρχές της Γεωμετρίας* με πλήρη θεωρία των παραλλήλων ανέφερε ότι «δεν μπορεί να υπάρχει στο νου μας καμία αντίφαση, όταν παραδεχόμαστε ότι ορισμένες δυνάμεις της φύσης ακολουθούν μια γεωμετρία και άλλες δική τους ιδιαίτερη γεωμετρία» (Κονσταντίνοφ κ.ά., 2006, σ.220). Ανέδειξε αυτή τη σύνδεση ανάμεσα στο χώρο και την κινούμενη ύλη με την οποία οι ιδιότητες της κινούμενης ύλης καθορίζουν τις ιδιότητες του χώρου, ο χώρος δεν είναι παντού και πάντα ο ίδιος.

Η ύπαρξη πολλαπλών γεωμετρικών συστημάτων δεν σημαίνει ότι όλα είναι εξίσου «πραγματικά» με την ίδια έννοια, αλλά ότι το ποιο σύστημα περιγράφει καλύτερα τον φυσικό χώρο είναι ζήτημα εμπειρικής διερεύνησης. Δηλαδή, η μαθηματική δυνατότητα προηγείται ως λογική κατασκευή, αλλά η εφαρμογή της κρίνεται μέσα από την επιστημονική πράξη. Αυτό ενισχύει την ιδέα ότι τα μαθηματικά δεν προηγούνται της εμπειρίας ως έτοιμες μορφές, αλλά αναπτύσσονται σε διαλεκτική σχέση με αυτήν.

Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι η μη Ευκλείδεια γεωμετρία βρήκε πολλές εφαρμογές όπως στη Θεωρία της Σχετικότητας, μέσω της οποίας ο Αϊνστάιν αποκάλυψε τις μορφές σύνδεσης του χώρου και του χρόνου με την κινούμενη ύλη. Στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας, ο χώρος (και ο χωροχρόνος γενικότερα) δεν είναι επίπεδος, όπως υποθέτει η ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά καμπύλος, με την καμπυλότητά του να εξαρτάται από την κατανομή της ύλης και της ενέργειας. Αυτό αποτελεί ένα ισχυρό επιχείρημα υπέρ της θέσης ότι οι μαθηματικές δομές δεν είναι απλώς δημιουργήματα της σκέψης, αλλά εργαλεία που αντανακλούν —σε διαφορετικό βαθμό ακρίβειας— την αντικειμενική πραγματικότητα.

Η ανακάλυψη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας επιβεβαιώνει το σημείο του ορισμού του Ένγκελς σύμφωνα με τον οποίο τα καθαρά μαθηματικά (της εποχής του) αντιπροσωπεύουν ένα μέρος των μορφών του χώρου. Ακριβώς γιατί ο χώρος και ο χρόνος είναι οι μορφές ύπαρξης της ύλης και «οι δύο μορφές ύπαρξης της ύλης δεν είναι φυσικά τίποτα χωρίς την ύλη, είναι κενές έννοιες, αφαιρέσεις που υπάρχουν μόνο στο μυαλό μας» (Ένγκελς, 2005, σ.214). Από αυτή την άποψη, οι γεωμετρικές έννοιες δεν μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες από τον υλικό κόσμο, αλλά προκύπτουν ως γενικεύσεις των ιδιοτήτων του.

Επιπλέον, η ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών εννοιών αποκαλύπτει ότι αυτό που σε μια δεδομένη εποχή θεωρείται αυτονόητο ή αναγκαίο, μπορεί σε μια άλλη να αποδειχθεί περιορισμένο ή ακόμη και λανθασμένο ως καθολική αρχή. Η ευκλείδεια γεωμετρία, για παράδειγμα, δεν εγκαταλείφθηκε πλήρως, αλλά επανατοποθετήθηκε ως ειδική περίπτωση μέσα σε ένα ευρύτερο φάσμα γεωμετρικών δυνατοτήτων. Αυτό συνάδει με τη διαλεκτική αντίληψη της γνώσης ως διαδικασίας που εξελίσσεται μέσω αντιφάσεων, υπερβάσεων και ενσωματώσεων.

Η περίοδος κατά την οποία προχώρησε η ανακάλυψη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας δεν ήταν μόνο αποτέλεσμα μακρόχρονων προβληματισμών γύρω από το 5<sup>ο</sup> αίτημα του Ευκλείδη αλλά και ιστορικών συνθηκών. Και στις δύο γενέτειρες των μεγάλων αυτών μαθηματικών η κατάσταση ήταν παρόμοια. Οι κοινωνικές σχέσεις και οικονομικές σχέσεις που επικρατούσαν τόσο στη Ρωσία όσο και στην Αυστροουγγαρία ήταν φεουδαρχικές με την οικονομία να στηρίζεται κατά κύριο λόγο στον αγροτικό τομέα, ενώ σε αντίθεση με την Δυτική Ευρώπη η βιομηχανική επανάσταση άργησε να έρθει στη Ρωσία. Παρ' όλα αυτά όμως στα πανεπιστήμια αναπτύσσονταν νέες ιδέες.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, αυτή την περίοδο στην Ευρώπη υπήρχε μια άνθηση των μαθηματικών με τις επαναστατικές εξελίξεις στον απειροστικό λογισμό. Ήταν μια περίοδος υψηλής αφαιρετικής σκέψης, όπου έδωσε την δυνατότητα στους Lobachevsky και Bolyai να αμφισβητήσουν την αποκλειστική ύπαρξη της ευκλείδειας γεωμετρίας και να δημιουργήσουν θεωρητικά ένα αξιωματικό γεωμετρικό σύστημα εξίσου συνεπές με το ευκλείδειο. Τα μαθηματικά διένυαν μια δυναμική και ως ένα βαθμό μια αυτόνομη πορεία. Οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν ότι η λογική συνέπεια και η μαθηματική αυστηρότητα μπορούσαν να υπάρχουν ακόμη και σε ένα πλαίσιο όπου οι παραδοσιακές και ξεπερασμένες αντιλήψεις μπορούσαν να αμφισβητηθούν αναδεικνύοντας ότι όσα εμπόδια να μουν στην ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης αργά ή γρήγορα ξεπερνιούνται.

Εν κατακλείδι, η ανακάλυψη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας δεν αποτελεί μόνο ένα μαθηματικό επίτευγμα, αλλά και μια βαθιά φιλοσοφική τομή. Αναδεικνύει ότι τα αξιώματα και οι μαθηματικές έννοιες δεν είναι αιώνιες και αμετάβλητες, αλλά ιστορικά διαμορφωμένες μορφές γνώσης, οι οποίες προκύπτουν από τη συνεχή αλληλεπίδραση του ανθρώπου με τον κόσμο. Με αυτόν τον τρόπο, επιβεβαιώνεται η θέση του Ένγκελς ότι τα μαθηματικά, ακόμη

και στις πιο αφηρημένες τους μορφές, παραμένουν συνδεδεμένα με την υλική βάση από την οποία προέρχονται.

## 2.3 Αριθμός-μονάδα-μηδέν

### 2.3.1 Η φιλοσοφική αξία του αριθμού στον διαλεκτικό υλισμό

Η έννοια του αριθμού αποτελεί μία από τις πιο θεμελιώδεις κατηγορίες της ανθρώπινης σκέψης και ταυτόχρονα ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα για τη μελέτη της σχέσης ανάμεσα στη νόηση και την αντικειμενική πραγματικότητα. Στο πλαίσιο του διαλεκτικού υλισμού, όπως αυτός διαμορφώθηκε από τον Μαρξ και τον Ένγκελς και αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Λένιν, ο αριθμός δεν αντιμετωπίζεται ως αφηρημένη οντότητα, αλλά ως προϊόν ιστορικής και κοινωνικής εξέλιξης, στενά συνδεδεμένο με την πρακτική δράση του ανθρώπου.

Σύμφωνα με τον διαλεκτικό υλισμό κατά τον οποίο η γνώση δεν προκύπτει ανεξάρτητα από τον υλικό κόσμο, αλλά αποτελεί αντανάκλασή του μέσα στη συνείδηση του ανθρώπου, ο αριθμός, ως έννοια, δεν αποτελεί εξαίρεση. Αντίθετα, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο η ανθρώπινη σκέψη αφαιρεί, γενικεύει και συστηματοποιεί τις εμπειρίες που αντλεί από την πράξη. Οι πρώτες μορφές αριθμητικής σκέψης εμφανίστηκαν μέσα από την ανάγκη του ανθρώπου να μετρήσει, να συγκρίνει και να οργανώσει αντικείμενα του υλικού κόσμου — είτε αυτά ήταν ζώα, εργαλεία ή προϊόντα εργασίας.

Ο Ένγκελς επισημαίνει ότι τα μαθηματικά, και ιδιαίτερα η αριθμητική, προέρχονται από την πρακτική δραστηριότητα του ανθρώπου και όχι από κάποια έμφυτη ή υπερβατική ικανότητα του νου. Στο *Αντι-Ντύρινγκ* ο Ένγκελς (2006) αναφέρει:

οι έννοιες του αριθμού και σχήματος έχουν παρθεί από τον πραγματικό κόσμο και από πουθενά αλλού. Τα δέκα δάχτυλα, με τα οποία οι άνθρωποι έμαθαν να μετρούν, με τα οποία, συνεπώς, έμαθαν να ολοκληρώνουν την πρώτη αριθμητική πράξη, είναι οτιδήποτε άλλο εκτός από μία ελεύθερη δημιουργία του νου. Για τη μέτρηση, δε χρειάζονται μονάχα μετρήσιμα αντικείμενα, αλλά και η ικανότητα, στη θεώρηση

αυτών των αντικειμένων, να αφήνει κανείς στην άκρη όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες εκτός από τον αριθμό τους (σ.48).

Ο αριθμός, επομένως, δεν είναι μια «καθαρή ιδέα», αλλά η αντανάκλαση πραγματικών σχέσεων ποσοτήτων. Η έννοια του «δύο», για παράδειγμα, δεν υπάρχει ανεξάρτητα από τα αντικείμενα που απαριθμούνται, αλλά προκύπτει από την επαναλαμβανόμενη εμπειρία της συνύπαρξης δύο αντικειμένων. Μέσα από τη διαδικασία της αφαίρεσης, ο άνθρωπος αποσπά το κοινό χαρακτηριστικό της «δυναδικότητας» και το μετατρέπει σε αφηρημένη έννοια.

Αυτή η διαδικασία αφαίρεσης αποτελεί βασικό στοιχείο της διαλεκτικής μεθόδου. Ο Μαρξ, αναλύοντας τη μέθοδο της πολιτικής οικονομίας, υπογραμμίζει ότι η επιστημονική γνώση προχωρά από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και στη συνέχεια επιστρέφει στο συγκεκριμένο ως κατανοημένο σύνολο. Ο αριθμός, ως αφηρημένη έννοια, εντάσσεται ακριβώς σε αυτή τη διαδικασία: αποτελεί μια αφαιρετική σύλληψη που, ωστόσο, έχει τις ρίζες της στην υλική πραγματικότητα.

Παράλληλα, η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του αριθμού επιβεβαιώνει τη διαλεκτική του φύση. Οι πρώτοι αριθμοί ήταν φυσικοί και συνδέονταν άμεσα με τη μέτρηση αντικειμένων. Στη συνέχεια, οι εμπορικές σχέσεις χρειάστηκαν την έκφραση της «χασούρας» και του ελλείμματος ανάγκη που οδήγησε στην αρνητική έκφραση των αριθμών. Η ανάγκη για τη μοιρασιά, το να καταφέρουν να εκφράσουν τον διαχωρισμό του όλου σε μέρη οδήγησε αναπόφευκτα στα κλάσματα και μετέπειτα στους δεκαδικούς αριθμούς που ήταν πιο «εύχρηστοι» σε σχέση με τα κλάσματα και τελικά την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών. Κάθε νέα μορφή αριθμού προέκυψε από την ανάγκη επίλυσης συγκεκριμένων πρακτικών ή θεωρητικών προβλημάτων, γεγονός που καταδεικνύει τη στενή σύνδεση ανάμεσα στην ανάπτυξη των μαθηματικών και την εξέλιξη της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Ο Ένγκελς αναφέρεται χαρακτηριστικά στη *Διαλεκτική της Φύσης* στο γεγονός ότι ακόμη και οι πιο αφηρημένες μαθηματικές έννοιες έχουν την προέλευσή τους στον υλικό κόσμο. Αυτό ισχύει και για τους φαινομενικά «καθαρούς» αριθμούς, οι οποίοι, παρά την αφηρημένη τους μορφή, αποτελούν γενικεύσεις πραγματικών σχέσεων. Η ανάπτυξη, για παράδειγμα, των μιγαδικών αριθμών δεν προέκυψε αυθαίρετα, αλλά ως αναγκαιότητα για την επίλυση εξισώσεων που δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με τα υπάρχοντα μέσα.

Ο Λένιν, στα *Φιλοσοφικά Τετράδια*, επεκτείνει αυτή τη θέση, υπογραμμίζοντας ότι ακόμη και οι πιο αφηρημένες έννοιες της λογικής και των μαθηματικών είναι προϊόντα της ανθρώπινης πρακτικής (Λένιν, 1977). Η επανάληψη συγκεκριμένων πράξεων οδηγεί στη σταθεροποίηση ορισμένων μορφών σκέψης, οι οποίες στη συνέχεια αποκτούν τον χαρακτήρα του «αυτονόητου». Έτσι, οι αριθμητικές πράξεις, όπως η πρόσθεση ή ο πολλαπλασιασμός, εμφανίζονται ως λογικά αναγκαίες, ενώ στην πραγματικότητα αποτελούν συμπυκνωμένη εμπειρία.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σχέση ανάμεσα στον αριθμό και την ποιότητα, μια σχέση που βρίσκεται στον πυρήνα της διαλεκτικής. Στην *Διαλεκτική της Φύσης* αναφέρει ο Ένγκελς (2005):

ο μεμονωμένος αριθμός προικίζεται ήδη με ποιότητα μέσα στο αριθμητικό σύστημα και η ποιότητα εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα. Το 9 δεν είναι μόνο το 1 προσθεμένο 9 φορές, αλλά και η βάση των 90,900.000... Ο βασικός αριθμός καθορίζει λοιπόν, όχι μόνο τη δική του ποιότητα, αλλά και την ποιότητα των άλλων αριθμών (σ.237).

Ο αριθμός επομένως, δεν είναι κάτι «ουδέτερο» αλλά αποκτά διαφορετική ποιότητα ανάλογα με το αριθμητικό σύστημα ή το μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο τον εξετάζουμε. Δηλαδή η ίδια «ποσότητα» μπορεί να συμπεριφέρεται διαφορετικά. Ο αριθμός 2 στους ακέραιους είναι ένας απλός θετικός αριθμός, στους ρητούς μπορεί να γραφεί ως  $2/1$ , στους πραγματικούς συμμετέχει σε πράξεις όπως  $\sqrt{2}$  ο οποίος δεν είναι ρητός. Η ποιότητα του 2 αλλάζει γιατί ανήκει σε διαφορετικά σύνολα με διαφορετικές ιδιότητες. Το 0 στον πολλαπλασιασμό μηδενίζει τα πάντα, ενώ στην πρόσθεση δεν αλλάζει απολύτως τίποτα, ο ίδιο αριθμός μέσα σε ένα διαφορετικό πλαίσιο κάνει δύο τόσο διαφορετικά πράγματα.

Ο Ένγκελς τονίζει ότι οι ποσοτικές αλλαγές μπορούν να οδηγήσουν σε ποιοτικές μεταβολές. Ο αριθμός, ως έκφραση της ποσότητας, δεν είναι απλώς ένα μέσο μέτρησης, αλλά συνδέεται άμεσα με τις μεταβολές της πραγματικότητας. Για παράδειγμα, η αύξηση της θερμοκρασίας ενός σώματος πέρα από ένα ορισμένο σημείο οδηγεί σε αλλαγή της φυσικής του κατάστασης. Εδώ, η ποσότητα (θερμοκρασία) μετατρέπεται σε ποιότητα (στερεό, υγρό,

αέριο), γεγονός που αποδεικνύει ότι οι αριθμητικές σχέσεις έχουν αντικειμενικό περιεχόμενο.

Από αυτή την άποψη, ο αριθμός δεν είναι ουδέτερο εργαλείο, αλλά μορφή γνώσης που αποτυπώνει πραγματικές σχέσεις του κόσμου. Η μαθηματική σκέψη δεν απομακρύνεται από την πραγματικότητα, αλλά διεισδύει βαθύτερα σε αυτήν, αποκαλύπτοντας δομές και σχέσεις που δεν είναι άμεσα αντιληπτές. Αυτό εξηγεί γιατί τα μαθηματικά μπορούν να εφαρμοστούν με τόση επιτυχία στις φυσικές επιστήμες: επειδή οι έννοιές τους, συμπεριλαμβανομένου του αριθμού, έχουν τις ρίζες τους στην ίδια την πραγματικότητα.

Επιπλέον, η κοινωνική διάσταση της έννοιας του αριθμού δεν πρέπει να παραβλέπεται. Η ανάπτυξη των αριθμητικών συστημάτων συνδέεται άμεσα με την εξέλιξη των κοινωνικών σχέσεων και της παραγωγής. Η ανάγκη για καταγραφή, ανταλλαγή και οργάνωση αγαθών οδήγησε στην ανάπτυξη πιο σύνθετων αριθμητικών μορφών. Ο αριθμός, επομένως, δεν είναι μόνο γνωσιολογική κατηγορία, αλλά και κοινωνικό προϊόν.

Συνοψίζοντας, η φιλοσοφική αξία του αριθμού στο πλαίσιο του διαλεκτικού υλισμού έγκειται στο γεγονός ότι αποτελεί ταυτόχρονα προϊόν και εργαλείο της ανθρώπινης πρακτικής. Δεν είναι ούτε έμφυτη ιδέα ούτε αυθαίρετη κατασκευή, αλλά αντανάκλαση της αντικειμενικής πραγματικότητας μέσα από τη διαδικασία της αφαίρεσης και της γενίκευσης. Η ιστορική του εξέλιξη, η εφαρμογή του στις επιστήμες και η σύνδεσή του με την κοινωνική πράξη επιβεβαιώνουν τη διαλεκτική του φύση και τον ρόλο του ως βασικής μορφής γνώσης.

### ***2.3.2 Η φιλοσοφική αξία της μονάδας στον διαλεκτικό υλισμό***

Η έννοια της μονάδας αποτελεί το πιο στοιχειώδες και ταυτόχρονα θεμελιώδες δομικό στοιχείο της αριθμητικής σκέψης. Παρότι εμφανίζεται ως κάτι αυτονόητο και απλό, η μονάδα έχει βαθιές φιλοσοφικές προεκτάσεις, ιδιαίτερα όταν εξετάζεται υπό το πρίσμα του διαλεκτικού υλισμού. Στη μαρξιστική φιλοσοφία, η μονάδα δεν θεωρείται μια αφηρημένη και αυτάρκης έννοια, αλλά όπως ο αριθμός έτσι και αυτή αποτελεί προϊόν της ιστορικής εξέλιξης της ανθρώπινης σκέψης και της πρακτικής της δραστηριότητας.

Η έννοια του «ενός» προκύπτει από την ανάγκη του ανθρώπου να διακρίνει, να απομονώνει και να ταυτοποιεί επιμέρους αντικείμενα μέσα στον κόσμο. Πριν ακόμη διαμορφωθεί ως αφηρημένη έννοια, η μονάδα υπήρξε ως πρακτική διάκριση: ένα ζώο, ένα εργαλείο, ένα

αντικείμενο. Μέσα από την επαναλαμβανόμενη εμπειρία αυτής της διάκρισης, η έννοια της μονάδας σταθεροποιήθηκε ως αφηρημένη κατηγορία.

Η μονάδα, επομένως, δεν είναι απλώς ένα σημείο εκκίνησης της αριθμητικής, αλλά η αντανάκλαση της ιδιότητας των αντικειμένων να υπάρχουν ως διακριτές οντότητες. Ωστόσο, αυτή η «απλότητα» είναι αποτέλεσμα μιας σύνθετης διαδικασίας αφαίρεσης κατά την οποία ο άνθρωπος αγνοεί τις ποιοτικές διαφορές των αντικειμένων και συγκρατεί μόνο το κοινό τους χαρακτηριστικό, δηλαδή την ύπαρξή τους ως «ένα».

Η διαδικασία αυτή συνδέεται άμεσα με τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στο συγκεκριμένο και το αφηρημένο. Ο Μαρξ, στην ανάλυσή του για τη μέθοδο της επιστήμης, τονίζει ότι η σκέψη προχωρά από το άμεσο και συγκεκριμένο προς το αφηρημένο και στη συνέχεια επιστρέφει στο συγκεκριμένο ως νοητικά επεξεργασμένο σύνολο. Η μονάδα αποτελεί ένα τέτοιο αφηρημένο στάδιο αφού αποσπάται από την ποικιλία των αντικειμένων και λειτουργεί ως βάση για την ανάπτυξη των αριθμητικών σχέσεων.

Παράλληλα, η μονάδα δεν είναι μια στατική έννοια, αλλά εμπεριέχει διαλεκτικές αντιφάσεις. Ο Ένγκελς (2005) αναφέρει στην *Διαλεκτική της Φύσης*:

τίποτα δεν φαίνεται πιο απλό από την ποσοτική μονάδα και τίποτα δεν είναι πιο πολλαπλό από αυτήν ...η μονάδα και το πολλαπλό είναι αζεχώριστα, πως είναι έννοιες που η μία διεισδύει στην άλλη, και πως το πολλαπλό περιέχεται στη μονάδα τόσο, όσο και η μονάδα στο πολλαπλό (σ.238).

Αυτή η διαλεκτική σχέση ανάμεσα στο ένα και το πολλά έχει απασχολήσει και αυτή τη φιλοσοφία ήδη από την αρχαιότητα, αλλά στο πλαίσιο του διαλεκτικού υλισμού αποκτά υλική θεμελίωση. Η μονάδα δεν είναι μια μεταφυσική αρχή, αλλά έκφραση της πραγματικής ιδιότητας των αντικειμένων να είναι διακριτά και ταυτόχρονα να εντάσσονται σε σύνολα. Η ενότητα και η πολλαπλότητα δεν είναι αντιθετικές έννοιες, αλλά αλληλοσυμπληρώνονται και μετασχηματίζονται η μία στην άλλη.

Ο Λένιν, αναλύοντας τη διαλεκτική του Χέγκελ κατά τον οποίο κάθε ταυτότητα εμπεριέχει διαφορά και κάθε ενότητα εμπεριέχει αντίθεση (Hegel, 2009) υπογραμμίζει ότι η ενότητα των αντιθέτων αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της πραγματικότητας. Στην περίπτωση της μονάδας, αυτή η ενότητα εκφράζεται στη σχέση της με τον αριθμό: η μονάδα είναι

ταυτόχρονα αυτόνομη και μέρος ενός συνόλου. Αυτή η διττή φύση αποκαλύπτει τον διαλεκτικό χαρακτήρα ακόμη και των πιο απλών μαθηματικών εννοιών. Από τη μία, αποτελεί το απλούστερο στοιχείο της αριθμητικής από την άλλη, περιέχει τη δυνατότητα της πολλαπλότητας, καθώς η επανάληψή της οδηγεί στη δημιουργία των αριθμών, όχι απλώς ως άθροισμα αλλά ως ενότητα. Ο αριθμός «δύο», για παράδειγμα, δεν είναι παρά η σύνθεση δύο μονάδων. Η μονάδα είναι συμπυκνωμένο πολλαπλό και το πολλαπλό είναι διασπασμένη ενότητα. Για παράδειγμα  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  και  $10=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ .

Επιπλέον, η έννοια της μονάδας έχει και σημαντική κοινωνική διάσταση. Η ανάγκη για καταμέτρηση και οργάνωση της παραγωγής οδήγησε στη σταθεροποίηση της μονάδας ως μέτρου. Στην ανταλλαγή εμπορευμάτων, για παράδειγμα, η μονάδα αποκτά συγκεκριμένο περιεχόμενο ως μέτρο αξίας ή ποσότητας. Ο Μαρξ, στο *Κεφάλαιο*, λέει ότι ακόμη και οι πιο αφηρημένες κατηγορίες έχουν υλική και κοινωνική βάση. Έτσι, η μονάδα δεν είναι απλώς μαθηματική έννοια, αλλά και στοιχείο των κοινωνικών σχέσεων. Μια κοινωνία αποτελείται από πολλούς ανθρώπους αλλά λειτουργεί ως ενιαίο σύστημα.

Η εξέλιξη των μαθηματικών επιβεβαιώνει επίσης τη δυναμική φύση της μονάδας. Σε διαφορετικά συστήματα μέτρησης, η μονάδα μπορεί να οριστεί με διαφορετικούς τρόπους, γεγονός που δείχνει ότι δεν πρόκειται για απόλυτη έννοια, αλλά για σχετική κατασκευή που εξαρτάται από τις ανάγκες της πρακτικής. Αυτό δεν αναιρεί την αντικειμενικότητά της, αλλά αναδεικνύει τη διαλεκτική σχέση ανάμεσα στο υποκειμενικό και το αντικειμενικό.

Συνοψίζοντας, η μονάδα, παρά την φαινομενική της απλότητα, αποτελεί μια βαθιά διαλεκτική έννοια. Είναι ταυτόχρονα προϊόν αφαίρεσης και αντανάκλασης της πραγματικότητας, βάση της αριθμητικής και στοιχείο της πολλαπλότητας, γνωσιολογική κατηγορία και κοινωνικό εργαλείο. Στο πλαίσιο του διαλεκτικού υλισμού, η μονάδα αποκαλύπτει τον τρόπο με τον οποίο η ανθρώπινη σκέψη μετασχηματίζει την εμπειρία σε έννοιες και τις έννοιες σε εργαλεία κατανόησης και μετασχηματισμού του κόσμου.

### **2.3.3 Η φιλοσοφική αξία του μηδέν στον διαλεκτικό υλισμό**

Στο πλαίσιο του διαλεκτικού υλισμού, ακόμη και έννοιες που φαινομενικά δηλώνουν απουσία, όπως το μηδέν, αποκτούν ιδιαίτερη σημασία. Κατά τον διαλεκτικό υλισμό των Μαρξ και Ένγκελς το μηδέν « δεν είναι χωρίς περιεχόμενο, επειδή είναι η άρνηση κάθε καθορισμένης ποσότητας. Αντίθετα το μηδέν έχει εντελώς καθορισμένο περιεχόμενο ....είναι

πιο σπουδαίος από όλους τους άλλους αριθμούς που ορίζει ...το μηδέν είναι πλουσιότερο σε περιεχόμενο από κάθε άλλο αριθμό» (Ένγκελς, 2005, σ.239).

Το μηδέν, δηλαδή, δεν αποτελεί απλώς την έλλειψη ή το «τίποτα», αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως ενεργή στιγμή μέσα σε διαδικασίες μετασχηματισμού. Δεν είναι μια απλή ανυπαρξία αλλά μια καθορισμένη άρνηση, ένα «τίποτα» που προκύπτει μέσα από σχέσεις. Όταν το τοποθετούμε δεξιά των αριθμών τότε δεκαπλασιάζει την τιμή αυτών των αριθμών μέσα στο αριθμητικό μας σύστημα.

Αλλά και στην αναλυτική γεωμετρία αναδεικνύεται η μεγάλη αξία του όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Ένγκελς «είναι το σημείο από το οποίο εξαρτώνται όλα, στο οποίο αναφέρονται όλα και το οποίο τα καθορίζει όλα» (Ένγκελς, 2005, σ.240) αφού είναι εκείνο το σημείο της ευθείας το οποίο καθορίζει τα θετικά μεγέθη προς μία κατεύθυνση και τα αρνητικά προς την άλλη κατεύθυνση. Η φιλοσοφική και μαθηματική διερεύνηση του μηδενός αποκαλύπτει ότι πρόκειται για μια έννοια βαθιά συνδεδεμένη με την κίνηση, την αλλαγή και τη σχέση μεταξύ αντιθέτων.

Στη διαλεκτική του Χέγκελ, το «είναι» και το «μηδέν» αποτελούν δύο έννοιες που αλληλοδιαπλέκονται και οδηγούν στο «γίγνεσθαι» (Hegel, 2009). Το καθαρό είναι, χωρίς προσδιορισμούς, είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με το μηδέν, και από αυτή τη σύμπτωση προκύπτει η κίνηση( γίγνεσθαι).

Οι Μαρξ και Ένγκελς διατηρούν αυτή τη λογική, αλλά την εντάσσουν σε υλιστικό πλαίσιο. Το μηδέν δεν είναι αφηρημένη κατηγορία της σκέψης αλλά σχετίζεται με πραγματικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, η καταστροφή μιας υλικής μορφής δεν οδηγεί σε απόλυτη ανυπαρξία, αλλά σε μετασχηματισμό της ύλης. Η έννοια του απόλυτου μηδενός στη θερμοκρασία αντιπροσωπεύει ένα θεωρητικό όριο όπου η θερμική κίνηση των σωματιδίων ελαχιστοποιείται. Ωστόσο, ακόμη και σε αυτή την κατάσταση, η κβαντική μηχανική δείχνει ότι υπάρχει υπολειμματική ενέργεια, γεγονός που σημαίνει ότι το μηδέν δεν αντιστοιχεί σε πλήρη ανυπαρξία (Courant & Robbins, 1996).

Αυτό επιβεβαιώνει τη διαλεκτική θέση ότι το μηδέν δεν είναι απόλυτο αλλά σχετικό και εξαρτάται από το πλαίσιο μέσα στο οποίο εξετάζεται. Οι έννοιες αποκτούν νόημα μόνο μέσα σε συγκεκριμένες σχέσεις (Marx & Engels, 1975).

Από διαλεκτική σκοπιά, το μηδέν εκφράζει τη στιγμή κατά την οποία μια ποσότητα αναιρείται και μετατρέπεται σε κάτι νέο. Αυτό συνδέεται με την έννοια της άρνησης στη διαλεκτική (Ένγκελς, 2005). Η άρνηση της άρνησης αποτελεί έναν από τους βασικούς νόμους της διαλεκτικής. Κάθε μορφή ύπαρξης εμπεριέχει την άρνησή της, και η διαδικασία εξέλιξης προκύπτει μέσα από τη σύγκρουση αυτών των αντιθέσεων. Το μηδέν μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα μιας άρνησης. Ωστόσο, δεν αποτελεί τελικό σημείο. Αντίθετα, λειτουργεί ως μεταβατικό στάδιο που οδηγεί σε νέα μορφή ύπαρξης.

Τέτοιο παράδειγμα στη μαρξιστική θεωρία της ιστορίας, είναι η μετάβαση από τη φεουδαρχία στον καπιταλισμό, κατά την οποία δεν είναι αποτέλεσμα ενός «κενού», αλλά προϊόν της άρνησης των προηγούμενων σχέσεων παραγωγής (Μαρξ, 2009). Το ίδιο ισχύει και για τη μετάβαση σε μελλοντικά κοινωνικά συστήματα.

Το μηδέν, επομένως, δεν είναι τέλος αλλά ενδιάμεσο στάδιο, όπου το παλιό έχει αναιρεθεί και το νέο βρίσκεται υπό διαμόρφωση όπως συμβαίνει στα φαινόμενα της πραγματικότητας «το απόλυτο μηδέν του θερμομέτρου δεν αντιπροσωπεύει με κανέναν τρόπο μια καθαρή αφηρημένη άρνηση, αλλά μια καθορισμένη κατάσταση της ύλης: το όρο όπου εξαφανίζεται το τελευταίο ίχνος ανεξάρτητης κίνησης μορίων, και όπου η ύλη δρα μόνο σαν μάζα» (Ένγκελς, 2005, σ.240).

### ***2.3.3.1 Το Μηδέν στα μαθηματικά***

Η έννοια του μηδενός στην αριθμητική δεν αποτελεί απλώς μια τεχνική σύμβαση, αλλά μία από τις πιο ριζικές αφαιρέσεις στην ιστορία των μαθηματικών. Η εισαγωγή του μηδενός επέτρεψε τη μετάβαση από πρακτικά συστήματα μέτρησης σε αφηρημένα αριθμητικά συστήματα με εσωτερική συνοχή (Boyer & Merzbach, 2011).

Το μηδέν λειτουργεί ως ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, γεγονός που σημαίνει ότι δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης. Η ιδιότητα αυτή είναι θεμελιώδης για τη συγκρότηση της έννοιας της ταυτότητας στα μαθηματικά (Courant & Robbins, 1996). Χωρίς το μηδέν, δεν θα μπορούσε να οριστεί με σαφήνεια η έννοια της ισότητας ούτε η διατήρηση ποσότητας.

Παράλληλα, το μηδέν αποτελεί τη βάση για την κατανόηση των αρνητικών αριθμών. Οι αρνητικοί αριθμοί αποκτούν νόημα μόνο σε σχέση με το μηδέν, το οποίο λειτουργεί ως

σημείο συμμετρίας. Για κάθε θετικό αριθμό υπάρχει ένας αντίθετος αρνητικός, και η σχέση τους εκφράζεται μέσω της εξισορρόπησης στο μηδέν (Stewart, 2016).

Από διαλεκτική σκοπιά, αυτή η σχέση εκφράζει την ενότητα των αντιθέτων. Το μηδέν δεν ανήκει ούτε στη μία ούτε στην άλλη πλευρά, αλλά αποτελεί το σημείο στο οποίο οι αντιθέσεις συνυπάρχουν και αλληλοαναιρούνται. Αυτό συνάδει με τη βασική αρχή του διαλεκτικού υλισμού ότι κάθε έννοια ορίζεται μέσω των σχέσεών της με τις αντίθετές της (Marx & Engels, 1975).

Επιπλέον, το μηδέν επιτρέπει τη λειτουργία του δεκαδικού συστήματος θέσης, στο οποίο η αξία ενός ψηφίου εξαρτάται από τη θέση του. Χωρίς το μηδέν ως δείκτη απουσίας μονάδων σε μια συγκεκριμένη θέση, το σύστημα αυτό δεν θα μπορούσε να υπάρξει (Boyer & Merzbach, 2011).

Ακόμη στον απειροστικό λογισμό, ο οποίος αποτελεί το κατεξοχήν πεδίο όπου η έννοια του μηδενός αποκτά δυναμικό χαρακτήρα. Η βασική αρχή του λογισμού είναι η μελέτη της συμπεριφοράς μεγεθών καθώς τείνουν προς το μηδέν (Stewart, 2016).

Η παράγωγος ορίζεται ως: 
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Στον παραπάνω ορισμό, το μέγεθος  $h$  δεν γίνεται ποτέ ακριβώς μηδέν, αλλά προσεγγίζει το μηδέν. Αυτή η ιδέα είναι κρίσιμη, καθώς αν το  $h$  ήταν ίσο με μηδέν, η παράσταση θα ήταν απροσδιόριστη. Αντίθετα, η έννοια του ορίου επιτρέπει την κατανόηση της συμπεριφοράς της συνάρτησης σε απειροελάχιστη κλίμακα (Courant & Robbins, 1996).

Η μαθηματική αυτή διαδικασία έχει σαφή διαλεκτική σημασία. Το μηδέν δεν αποτελεί στατικό σημείο αλλά διαδικασία προσέγγισης. Η πραγματικότητα περιγράφεται μέσω συνεχών μεταβολών και όχι μέσω απόλυτων καταστάσεων, κάτι που αντανακλά τη διαλεκτική αρχή της κίνησης (Ένγκελς, 2005).

Επιπλέον, ο λογισμός βασίζεται στην έννοια του συνεχούς, όπου οι αλλαγές συμβαίνουν βαθμιαία. Το μηδέν λειτουργεί ως όριο που καθορίζει αυτές τις μεταβάσεις. Αυτή η ιδέα συνδέεται άμεσα με τη διαλεκτική έννοια της μετατροπής ποσοτικών αλλαγών σε ποιοτικές (Μαρξ, 2009).

Τέλος στην έννοια του ορίου, η οποία αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με το μηδέν. Το όριο δεν αναφέρεται σε μια στατική τιμή αλλά σε μια διαδικασία προσέγγισης (Stewart, 2016).

Το μηδέν λειτουργεί ως κατεύθυνση προς την οποία τείνουν τα μεγέθη. Αυτή η ιδέα επιτρέπει την κατανόηση φαινομένων όπως η συνέχεια και η ασυνέχεια, τα οποία αποτελούν βασικές έννοιες στη μαθηματική ανάλυση (Courant & Robbins, 1996).

Από φιλοσοφική σκοπιά, το όριο εκφράζει τη μετάβαση από το ποσοτικό στο ποιοτικό, μια από τις βασικές αρχές του διαλεκτικού υλισμού (Μαρξ, 2009). Το μηδέν, ως οριακή τιμή, καθιστά δυνατή αυτή τη μετάβαση.

#### ***2.3.4 Η Διαλεκτική Τριάδα 0(μη ύπαρξη)–1(ύπαρξη)–∞(άπειρο) στον Διαλεκτικό Υλισμό των Μαρξ και Ένγκελς***

Στο πλαίσιο του διαλεκτικού υλισμού όπως αναλύθηκε παραπάνω, οι μαθηματικές έννοιες του μηδενός (0), της μονάδας (1) και του απείρου (∞) ερμηνεύονται όχι ως μεταφυσικές κατηγορίες, αλλά ως αφηρημένα μοντέλα διαλεκτικών σχέσεων. Αν και στα μαθηματικά οι έννοιες αυτές έχουν αυστηρά ορισμένο λειτουργικό ρόλο, στη φιλοσοφική ανάλυση μπορούν να ιδωθούν ως συμβολικές αναπαραστάσεις θεμελιωδών μορφών ύπαρξης, σχέσης και διαδικασίας. Είναι χρήσιμο να εξεταστεί η διαλεκτική σχέση της τριάδας 0-1-∞.

Το μηδέν, από διαλεκτική σκοπιά, δεν περιορίζεται η σημασία του μόνο σε λειτουργικό επίπεδο, αλλά μπορεί να ερμηνευτεί ως στιγμή άρνησης. Δεν αποτελεί απόλυτη ανυπαρξία, αλλά κατάσταση κατά την οποία μια συγκεκριμένη μορφή έχει αρθεί ή μηδενιστεί ως προς έναν ορισμένο προσδιορισμό. Στη φύση και την κοινωνία, καμία κατάσταση δεν καταλήγει σε απόλυτο μηδέν. Αντίθετα, κάθε καταστροφή είναι ταυτόχρονα και μετασχηματισμός. Ο Ένγκελς τονίζει ότι η ύλη δεν καταστρέφεται αλλά μετασχηματίζεται συνεχώς (Ένγκελς, 2005).

Επομένως, το 0 δεν εκφράζει «τίποτα», αλλά το όριο μιας διαδικασίας, στο οποίο μια μορφή παύει να υφίσταται με συγκεκριμένο τρόπο, ενώ η υλική της βάση παραμένει.

Για τη φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού, το 1 μπορεί να θεωρηθεί ως στιγμή καθορισμένης ύπαρξης ή σταθεροποίησης μορφής. Εκφράζει μια προσωρινή ενότητα, όπου μια διαδικασία αποκτά συγκεκριμένο προσδιορισμό. Το 1 αντιπροσωπεύει μια προσωρινή ενότητα, όπως για παράδειγμα ένας ζωντανός οργανισμός. Τον βλέπουμε ως «ένα», αλλά

αυτή η ενότητα είναι προσωρινή, τα κύτταρα αλλάζουν, μεταβάλλονται. Το 1 είναι απλώς η στιγμή που μια μορφή καταφέρει να σταθεροποιηθεί πριν αλλάξει. Ωστόσο, αυτή η σταθερότητα δεν είναι απόλυτη. Κάθε μορφή ύπαρξης εμπεριέχει εσωτερικές αντιφάσεις που οδηγούν στην αλλαγή της (Μαρξ, 2009). Έτσι, το 1 δεν είναι τελικό στάδιο αλλά στιγμιαία ισορροπία μέσα σε μια ευρύτερη διαδικασία. Η έννοια της ταυτότητας στα μαθηματικά δεν είναι οντολογική αλλά λειτουργική. Στα μαθηματικά το  $1=1$  είναι μια ταυτολογία, και στατικό. Στη φιλοσοφία το «1» δεν είναι ύπαρξη με την έννοια της αιώνιας ουσίας. Ονομάζεται κάτι «ένα» επειδή στην παρούσα φάση λειτουργεί ως ένα σταθερό σύστημα σχέσεων. Το 1 δεν σημαίνει «ύπαρξη» με μεταφυσική έννοια, αλλά σταθερότητα σχέσης μέσα σε ένα σύστημα.

Το άπειρο αποτελεί μία από τις πιο σύνθετες έννοιες των μαθηματικών και θα το μελετήσουμε παρακάτω πιο αναλυτικά. Δεν είναι αριθμός, αλλά έννοια που περιγράφει απεριόριστες διαδικασίες ή μη φραγμένα μεγέθη (Stewart, 2016), είναι μια διαδικασία δίχως τέλος. Στον απειροστικό λογισμό, το άπειρο εμφανίζεται τόσο σε οριακές διαδικασίες όσο και σε σειρές που δεν συγκλίνουν. Ωστόσο, το μαθηματικό άπειρο δεν πρέπει να ταυτίζεται με μεταφυσική αιωνιότητα. Από διαλεκτική σκοπιά, το άπειρο μπορεί να ερμηνευθεί ως ατέρμονη διαδικασία μετασχηματισμού. Ο Ένγκελς υποστηρίζει ότι η φύση δεν γνωρίζει στατικά όρια αλλά συνεχή εξέλιξη και μεταβολή (Ένγκελς, 2005). Επομένως, το  $\infty$  δεν εκφράζει στατικότητα, αλλά αδιάκοπη κίνηση. Δεν είναι «τέλος του χρόνου», αλλά άρνηση του τέλους ως σταθερής κατάστασης.

Ο απειροστικός λογισμός αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό μαθηματικό πεδίο στο οποίο η διαλεκτική σχέση μεταξύ πεπερασμένου και απείρου, καθώς και μεταξύ ύπαρξης και ορίου, εκφράζεται με αυστηρό τυπικό τρόπο. Η θεμελιώδης έννοια του ορίου συνδέει άμεσα το μηδέν και το άπειρο όχι ως στατικά μεγέθη, αλλά ως κατευθύνσεις διαδικασιών (Stewart, 2016).

Η παράγωγος ορίζεται μέσω μιας διαδικασίας στην οποία μια μεταβολή τείνει στο μηδέν αλλά δεν γίνεται μηδέν όπως αναφέραμε παραπάνω. Αυτή η φαινομενικά τεχνική λεπτομέρεια έχει βαθιά φιλοσοφική σημασία: το μηδέν δεν λειτουργεί ως τελική κατάσταση αλλά ως διαδικασία προσέγγισης της μη-μεταβολής μέσα στη μεταβολή.

Αυτό σημαίνει ότι η μετάβαση από την ποσότητα στην ποιότητα δεν συμβαίνει απότομα, αλλά μέσω απειροελάχιστων μεταβολών που συσσωρεύονται μέχρι να προκύψει μια νέα

κατάσταση. Αυτή η λογική αντιστοιχεί άμεσα στη θεωρία του Ένγκελς για τη μετατροπή ποσοτικών αλλαγών σε ποιοτικές (Ένγκελς, 2005).

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, η τριάδα  $0-1-\infty$  μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

- Το  $0$  εκφράζει την αποδόμηση μιας συγκεκριμένης μορφής ύπαρξης. Είναι η στιγμή που το παλιό διαλύεται. Δεν είναι το «τίποτα» αλλά η κατάσταση όπου η προηγούμενη μορφή έχει καταρρεύσει.
- Το  $1$  εκφράζει την προσωρινή σταθεροποίηση μιας νέας μορφής. Είναι η στιγμή που προκύπτει κάτι νέο, η προσωρινή ηρεμία.
- Το  $\infty$  εκφράζει τη διάλυση κάθε σταθερότητας μέσα σε συνεχή εξέλιξη. Η σταθερή μορφή « $1$ » πιέζεται από νέες δυνάμεις και οδηγείται ξανά στη μεταβολή.

Το κρίσιμο σημείο είναι ότι αυτά τα τρία δεν είναι ξεχωριστές καταστάσεις, αλλά διαφορετικές εκφράσεις της ίδιας διαδικασίας, του ίδιου κύκλου ζωής ενός πράγματος, όχι 3 στιγμιαίες φωτογραφίες, αλλά ένα βίντεο που δείχνει την εξέλιξη. Για παράδειγμα το « $1$ » είναι ένα παγάκι, το «άπειρο» είναι η διαδικασία θέρμανσης στο παγάκι. Τα μόρια κινούνται πιο έντονα (έχουμε ποσοτικές αλλαγές) και η σταθερότητα του πάγου κλονίζεται. Ο πάγος λιώνει και έχουμε το «μηδέν». Η μορφή παγάκι παύει πλέον να υπάρχει και παίρνουμε κάτι νέο, το καινούριο «ένα» το νερό. Δεν μπορώ να έχω το λιώσιμο «μηδέν» χωρίς να υπάρχει η μορφή «ένα». Είναι όλα κομμάτια της ίδιας διαδικασίας.

Επιπλέον, στα μαθηματικά η έννοια του απείρου εμφανίζεται τόσο ως όριο αύξησης όσο και ως όριο σύγκλισης. Στις απειροσειρές, για παράδειγμα, έχουμε περιπτώσεις όπου άπειροι όροι οδηγούν σε πεπερασμένο αποτέλεσμα. Αυτό δημιουργεί μια διαλεκτική αντίφαση μεταξύ πεπερασμένου και απείρου, η οποία δεν επιλύεται καταργώντας το ένα από τα δύο, αλλά ενσωματώνοντάς τα σε μια ενιαία διαδικασία (Courant & Robbins, 1996).

Επομένως το άπειρο δεν είναι «τέλος», αλλά άρνηση του σταθερού ορίου, ενώ το μηδέν είναι η άρνηση της καθορισμένης ποσότητας. Η μονάδα ( $1$ ), αντίστοιχα, είναι η προσωρινή σταθεροποίηση μέσα σε αυτή τη ρευστή διαδικασία.

Έτσι, ο λογισμός δεν περιγράφει στατικά αντικείμενα, αλλά τη διαρκή κίνηση μεταξύ μηδενικής μεταβολής, καθορισμένης τιμής και απεριόριστης εξέλιξης. Αυτό τον καθιστά, σε

φιλοσοφικό επίπεδο, ιδιαίτερα συμβατό με τη διαλεκτική μεθοδολογία (Marx & Engels, 1975).

## Κεφάλαιο 3 : Άπειρο-Απειροστικός λογισμός

### 3.1 Εισαγωγή

Τόσο ο Μαρξ όσο και ο Ένγκελς ασχολήθηκαν με τον απειροστικό λογισμό. Μάλιστα ο Ένγκελς αναγνωρίζει το πόσο σημαντικό ήταν αυτό το επίτευγμα στα μαθηματικά που αναφέρει: «από όλα τα θεωρητικά επιτεύγματα αναμφίβολα κανένα δεν θεωρείται τόσο υψηλός θρίαμβος του ανθρώπινου πνεύματος όσο η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού»(Ένγκελς, 2005, σ.245). Την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού την θεωρεί αποκλειστικό κατόρθωμα του ανθρώπινου πνεύματος.

Τι είναι όμως αυτό που κάνει τον απειροστικό λογισμό να αποτελεί ένα μαθηματικό άλμα σε σχέση με τα μέχρι τότε μαθηματικά; Οι μέχρι τότε θεωρίες των μαθηματικών τόσο στην άλγεβρα όσο και στην γεωμετρία εξέταζαν τα φαινόμενα στατικά, με την εισαγωγή του απειροστικού λογισμού μπήκε μέσα στα μαθηματικά η κίνηση, δεν ασχολούνταν πλέον τα μαθηματικά μόνο με στατικές καταστάσεις όπως η ανόργανη φύση, αλλά περνούσαν στο κατώφλι της κίνησης, της διαδικασίας, της ζωντανής φύσης. Από αυτήν την άποψη η ενασχόληση του Μαρξ και του Ένγκελς, δύο διαλεκτικών υλιστών με τον απειροστικό λογισμό ήταν απολύτως αναμενόμενη αφού σύμφωνα με τον Ένγκελς τα μαθηματικά των σταθερών μεγεθών κινούνται μέσα στα πλαίσια της τυπικής λογικής ...τα μαθηματικά των μεταβλητών μεγεθών δεν είναι στην ουσία τίποτε άλλο από την εφαρμογή της διαλεκτικής σε μαθηματικές σχέσεις(Ένγκελς, 2006).

Ένας ακόμη λόγος για τον οποίο ασχολήθηκαν με τον απειροστικό λογισμό είναι το ότι κατά την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού εμφανίστηκαν πολλά φιλοσοφικά προβλήματα εξαιτίας του ότι ο απειροστικός λογισμός καταπιάνεται με απείρως μικρές και απείρως μεγάλες ποσότητες, άρα καταπιάνεται με την έννοια του απείρου. Τι είναι όμως τελικά το άπειρο;

### 3.2 Άπειρο

Η ιστορία του απείρου ξεκινά από πολύ παλιά. Ο αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος Αναξίμανδρος( 610πχ-546πχ) ασχολήθηκε με το άπειρο και μάλιστα με πρωτοπόρες ιδέες σε σχέση με τις απόψεις που κυριαρχούσαν την εποχή εκείνη. Θεωρείται ο πρώτος συγγραφέας

φιλοσοφικού έργου στον δυτικό κόσμο, καθώς επίσης και ένας φιλόσοφος που προσπάθησε να δώσει στην δημιουργία του κόσμου, στα μετεωρολογικά φαινόμενα μια επιστημονική εξήγηση. Από το έργο του *Περί φύσεως* έχει διασωθεί μόνο ένα απόσπασμα. Ο Αναξίμανδρος ως αρχή όλων των όντων θεωρούσε το «άπειρο» το οποίο προσδιορίζει ως «ύλη χωρίς συγκεκριμένους ποιοτικούς προσδιορισμούς και δίχως όρια στο χώρο, αιώνιο, αγέννητο, αγέραστο και άφθαρτο, που βρίσκεται σε διαρκή κίνηση» (Kirk κ. ά., 1998, σ.110-115).

Με το άπειρο ασχολήθηκε και ο Αριστοτέλης. Συγκεκριμένα ο Αριστοτέλης ήταν αυτός που εισήγαγε για πρώτη φορά την διάκριση μεταξύ του μεγέθους και του αριθμού, σε αντιδιαστολή με την άποψη των Πυθαγορείων ότι τα πάντα είναι αριθμός. Κάνοντας την παραπάνω διάκριση ο Αριστοτέλης διέκρινε αυτά που ονομάζουμε σήμερα στα μαθηματικά "διακριτό" και "συνεχές". Η διάκριση που έκανε ο Αριστοτέλης ανάμεσα στον αριθμό και το μέγεθος είναι το ότι το μέγεθος «είναι αυτό που διαιρείται σε μέρη διαιρετά επ' άπειρον» (Katz, 2019, σ.66) και ένας από τους λόγους που ασχολήθηκε τόσο πολύ με όλες τις παραπάνω έννοιες ήταν η θέληση του να μελετήσει και να καταφέρει να ανασκευάσει τα παράδοξα του Ζήνωνα. Η παραπάνω διάκριση του Αριστοτέλη αναδείχθηκε πολύ σημαντική στον Ευκλείδη για τη συγγραφή των *Στοιχείων*. Όλα τα επόμενα χρόνια η φιλοσοφική συζήτηση για το άπειρο, το αν είναι ή όχι πραγματικό παρέμενε ζωντανή, ενώ όσον αφορά τα μαθηματικά προτιμούσαν να καταπιάνονται μόνο με τα πεπερασμένα σύνολα.

Μια ολοκληρωμένη εργασία πάνω στο θέμα του απείρου έγινε από έναν γερμανό μαθηματικό, τον George Cantor (1845-1918) με το έργο του πάνω στη Θεωρία Συνόλων μέσα από το οποίο μελέτησε τις γενικές ιδιότητες των απείρων συνόλων, συνέκρινε ποσοτικά διαφορετικά άπειρα σύνολα εισάγοντας τον όρο του πληθάριμου αποδεικνύοντας μάλιστα ότι ο πληθάριμος των πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερος από τον πληθάριμο των φυσικών, ο οποίος θεωρείται ο ελάχιστος άπειρος πληθάριμος, καταφέροντας έτσι να ταξινομήσει ως προς τους πληθάριμους τους, τα άπειρα σύνολα.

Η παραπάνω ιστορική αναδρομή είναι λίγο πολύ γνωστή. Το ερώτημα που γεννιέται στην παρούσα εργασία είναι ποια η άποψη του διαλεκτικού υλισμού για το άπειρο; Τι θα μπορούσε να έχει γίνει διαφορετικά στη διαμάχη για το άπειρο στο πέρασμα των χρόνων αν ο διαλεκτικός υλισμός ήταν η κυρίαρχουσα φιλοσοφική άποψη; Ας μην ξεχνάμε άλλωστε τον «πόλεμο» που δέχτηκε ο Cantor για τη θεωρία συνόλων του από τον Kronecker του

οποίου η άποψη για τα μαθηματικά συμπυκνώνεται στη φράση του «ο Θεός δημιούργησε τους αριθμούς. Όλα τα υπόλοιπα είναι ανθρώπινο δημιούργημα».

Ο διαλεκτικός υλισμός υποστηρίζει ότι «το μαθηματικό άπειρο λαμβάνεται από την πραγματικότητα, αν και όχι συνειδητά, και επομένως μπορεί να ερμηνευθεί μόνο από την πραγματικότητα, και όχι από τον εαυτό του ή από τη μαθηματική αφαίρεση» (Ένγκελς, 2006, σ.396). Με το παραπάνω αναδεικνύεται η υλική βάση του απείρου, ότι το άπειρο υπάρχει γύρω μας, είναι παρμένο από την φύση, δεν είναι μια ιδεατή έννοια που δημιούργησαν οι μαθηματικοί. Και αυτό γιατί ο διαλεκτικός υλισμός μελετά το άπειρο σε διαλεκτική σχέση με το πεπερασμένο και όχι αποκομμένα το ένα από το άλλο. Μέσα από αυτή τη σύνδεση μπορεί να γίνεται κατανοητή η υλική βάση του απείρου και στα μαθηματικά.

Η θέση του διαλεκτικού υλισμού για την υλική προέλευση των μαθηματικών εννοιών συνδέεται άμεσα με τη σύγχρονη επιστημολογική συζήτηση στην Ελλάδα γύρω από τη φύση των μαθηματικών. Η ανάδειξη της κοινωνικής και ιστορικής συνιστώσας των μαθηματικών βοηθά στην αποδόμηση της κυρίαρχης πλατωνικής αντίληψης ότι τα μαθηματικά είναι μια «ουράνια» και αποκομμένη από τον κόσμο αλήθεια, αναδεικνύοντας αντίθετα τον ανθρώπινο και πρακτικό τους χαρακτήρα (Χασάπης, 2005).

Για τον διαλεκτικό υλισμό η φύση είναι αντικειμενικά υπαρκτή και άπειρη τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά. Το άπειρο αποτελεί την αδιάκοπη μεταβολή και εξέλιξη των πεπερασμένων υλικών αντικειμένων, «το πεπερασμένο είναι άρνηση του απείρου, ωστόσο το κάθε πεπερασμένο αντικείμενο αποτελεί μορφή εκδήλωσης του απείρου» (Κασιούρας, 1995, σ.32). Το άπειρο δεν αποτελεί ένα αφηρημένο ιδεαλιστικό σχήμα, αλλά είναι μια υλική διαλεκτική διαδικασία που αφορά τόσο τη φύση όσο και τη γνώση. Μάλιστα κατά τον Τσάιλντ η ανακάλυψη της γραφής ήταν το πρώτο βήμα για να υπερβεί η γνώση τα όρια του χώρου και του χρόνου, αφού η γνώση της εκάστοτε χρονικής περιόδου, μέσω της γραφής πέρασε στους αιώνες των αιώνων, στο άπειρο (Τσάιλντ, 1971).

Η ύλη, η κίνηση και η ανθρώπινη κατανόηση βρίσκονται σε μια συνεχή, απεριόριστη εξέλιξη χωρίς αρχή και τέλος κάνοντας το άπειρο μια ιδιότητα της ύλης. Ο υλικός κόσμος είναι απέραντος σε χώρο και σε χρόνο, αλλά αυτά τα χωροχρονικά χαρακτηριστικά του εξετάζονται από τις επιστήμες ξεχωριστά και μπορούν να είναι και πεπερασμένα και απέραντα. Η φύση δεν έχει κάποιο απόλυτο όριο, ενώ κάθε πεπερασμένο φαινόμενο ή υλικό αντικείμενο έχει μια απεριόριστη συνέχεια διαδικασιών και ιδιοτήτων. Η απειρία της ύλης

δεν έγκειται μόνο στο γεγονός ότι έχουμε ατέλειωτα αντικείμενα, αλλά στο ότι το κάθε ορισμένο υλικό αντικείμενο δεν είναι μια απλή ουσία αλλά είναι πολύπλοκο και ανεξάντλητο σε άπειρο βαθμό.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της άποψης αποτελεί ο ανθρώπινος οργανισμός που είναι ένα περίπλοκος οργανισμός στον οποίο συνεχώς συντελούνται ατέλειωτες και πολύπλοκες διαδικασίες. Παράδειγμα αυτού αποτελούν και οι πρόσφατες ανακαλύψεις της φυσικής με τη μελέτη των «στοιχειωδών» σωματιδίων τα οποία έχουν τις ιδιότητες τόσο της συνέχειας όσο και της ασυνέχειας, τις ιδιότητες του σωματιδίου αλλά και του κύματος. Το ότι η ύλη είναι άπειρη και αιώνια επιβεβαιώνεται και από την αρχή διατήρησης και μετατροπής της ενέργειας, την οποία ο Ένγκελς ονόμασε «μεγάλο βασικό νόμο της κίνησης» (Ένγκελς, 2006, σ.17).

Με βάση αυτή την αρχή σε ένα κλειστό σύστημα η συνολική ενέργεια ούτε αυξάνεται, ούτε μειώνεται αλλά παραμένει πάντα αμετάβλητη. Το μόνο που γίνεται είναι να αλλάζει μορφή ή να μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο. Ωστόσο η αφθαρσία και το αδημιούργητο της ύλης δεν εκφράζονται μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά. Ο Ένγκελς με την αφθαρσία της ενέργειας από ποιοτική άποψη, εννοεί την ιδιότητα της υλικής κίνησης να μετατρέπεται πάντα από τη μια μορφή σε άλλη, ιδιότητα που δεν την χάνει ποτέ.

Σύμφωνα με τον Ένγκελς «κατά βάθος, δεν μπορούμε να γνωρίσουμε τίποτα παρά μόνο το άπειρο» (Ένγκελς, 2005, σ.212). Πόση αλήθεια κρύβει αυτή η πρόταση, μέσα από το πεπερασμένο κατανοούμε το άπειρο, μέσα από κάθε γνώση που έχουμε κατακτήσει για τη φύση κατανοούμε το άπειρο, αφού κάθε γνώση που κατακτούμε δεν είναι μια γνώση που αναδείχθηκε από την εμπειρία και σταμάτησε εκεί. Αν συνέβαινε αυτό ακόμη στα μαθηματικά θα ασχολιόμασταν με τα εμπειρικά προβλήματα που κληρονομήσαμε από τα γραπτά των αιγυπτίων, των αρχαίων ελλήνων και των άλλων πολιτισμών.

Η επιστημονική πρόοδος έγκειται στο γεγονός ότι οι νόμοι που ανακαλύπτει ισχύουν καθολικά για τα φαινόμενα και όχι μόνο για κάτι πολύ συγκεκριμένο. Ο νόμος της βαρύτητας ισχύει για οποιοδήποτε αντικείμενο και η γνώση αυτού του νόμου αποτελεί μια άπειρη γνώση αφού γνωρίζουμε κάτι καθολικό. Για αυτό και η πρόοδος της επιστήμης συμπλήρωσε όποτε χρειάστηκε τέτοιους νόμους, όπως συμπληρώθηκε η κλασική μηχανική με τους μετασχηματισμούς του Lagrange. Είναι γνώση η οποία πέρασε από την ειδικότητα στην καθολικότητα και γι' αυτό αποτελεί επιστημονική αλήθεια.

Η ανάδειξη της σχέσης που έχει το άπειρο με το καθολικό από τον Ένγκελς ξεδιαλώνει την έννοια του απείρου, όπως αναφέρει «ο τύπος της καθολικότητας είναι ο τύπος της αυτοπλήρωσης, άρα του απείρου, είναι η σύνθεση πολυάριθμων πεπερασμένων μέσα στο άπειρο» (Ένγκελς, 2005, σ.212). Ένας άνθρωπος κατά την διάρκεια της ζωής του γνωρίζει πεπερασμένα αντικείμενα και φαινόμενα, ωστόσο σε κάθε πεπερασμένο αντικείμενο ή φαινόμενο εμπεριέχεται το άπειρο, όπως λέει ο Κασιούρας (1995):

η ύπαρξη ενός σώματος είναι δυνατό να αποκαλυφθεί σε οποιεσδήποτε και οσοδήποτε απομακρυσμένες περιοχές του σύμπαντος, όπου μπορούν να διεισδύουν οι φωτεινές ακτίνες που δημιουργούνται από το σώμα αυτό στο προτσές της αλληλεπίδρασης με άλλα σώματα. Έτσι το πεπερασμένο περικλείει μέσα του το άπειρο (σ.32).

Από τα παραπάνω φαίνεται η διαλεκτική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο άπειρο και το πεπερασμένο. Ο Λένιν (1977) αναφέρει στα *Φιλοσοφικά Τετράδια*:

ενότητα του πεπερασμένου και του απείρου δεν είναι εξωτερική τους αντιπαραβολή... αλλά το καθένα αυτό καθεαυτό είναι αυτή η ενότητα και το καθένα είναι μόνο η άρση του ίδιου του εαυτού του... το πεπερασμένο είναι μονάχα έξοδος από τα όρια του εαυτού του. Γι' αυτό μέσα σε αυτό εμπεριέχεται και το άπειρο που είναι το έτερο αυτού του ίδιου του πεπερασμένου (τ.29, σ.102-103).

Η σχέση του απείρου και του πεπερασμένου προσεγγίζεται διαλεκτικά, μέσα από την αλληλεπίδραση και τη μετάβαση από το ένα στο άλλο. Εκατομμύρια χρόνια πριν όταν άνθρωπος ήταν τροφосуλλέκτης και κυνηγός δεν είχε καμία μόνιμη κατοικία, ήταν νομάς που κινούνταν και αυτός μαζί με τα ζώα, συνήθως σε κυκλική κίνηση, για να μπορεί να εξασφαλίζει την τροφή του, η οποία τότε ήταν πολύ περιορισμένη με αποτέλεσμα να περνά και μέρες πείνας. Εκείνη την εποχή ο άνθρωπος γνώριζε το άπειρο του χώρου, αφού δεν έβρισκε πουθενά κάποιο τέλος και το πεπερασμένο της τροφής.

Στο άλμα της γεωργικής επανάστασης ο άνθρωπος έχοντας κατακτήσει τη γνώση για την καλλιέργεια της γης άφησε πίσω του τη νομαδική ζωή και έμεινα σταθερά σε έναν τόπο.

Ταυτόχρονα η καλλιέργεια της γης που προσέφερε όχι μόνο επαρκή τροφή για την επιβίωση και την αναπαραγωγή του, αλλά και πλεόνασμα που ήταν και η αιτία για τις επερχόμενες αλλαγές. Μέσα δηλαδή από την γεωργική επανάσταση ο άνθρωπος πέρασε στο πεπερασμένο του χώρου και στο άπειρο της τροφής.

Για τον Λένιν η ουσία του ζητήματος του απείρου δεν είναι το πως το άπειρο φτάνει στο πεπερασμένο αλλά η διευκρίνιση της αλληλουχίας τους αναφέροντας ότι «αλλά η άπειρη πρόοδος εκφράζει κάτι περισσότερο (από ότι η απλή σύγκριση του πεπερασμένου με το άπειρο) μέσα σε αυτήν την πρόοδο βρίσκεται η αλληλουχία ακόμη και αυτών που ξεχωρίζονται» (Λένιν, 1977, τ.29, σ.103), η αλληλουχία όλων των μερών της άπειρης προόδου. Το άπειρο εκδηλώνεται μέσα από μια αλληλουχία πεπερασμένων καταστάσεων. Για παράδειγμα ο χρόνος, κάθε χρονική στιγμή είναι πεπερασμένη ενώ συνολικά ο χρόνος είναι άπειρος, ή ακόμα και η επιστημονική γνώση είναι πεπερασμένη σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, ωστόσο προχωρά αδιάκοπα αποκαλύπτοντας νέες αλήθειες μέσα από μια άπειρη διαδικασία..

Έτσι και το μαθηματικό άπειρο μπορούμε να το κατανοούμε σε διαλεκτική σχέση με το πεπερασμένο. Η ίδια η έννοια του ορίου αποτελεί πέρασμα από πεπερασμένο στο άπειρο, αφού αποτελεί μια διαδικασία κατά την οποία προσθέτουμε άπειρα μικρά διαστήματα για να υπολογίσουμε το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη. Αλλά και οι ακολουθίες, οι σειρές, η θεωρία συνόλων γεφυρώνουν το άπειρο με το πεπερασμένο. Ένα από τα πολλά παραδείγματα είναι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$  έχουμε ΑΠΕΙΡΟ=ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ. Εν κατακλείδι το πεπερασμένο υπάρχει πάντα ως μέρος του απείρου, ενώ το άπειρο πραγματώνεται μέσα από συνεχείς μεταβολές του πεπερασμένου. Αυτή η αλληλεξάρτηση για τον διαλεκτικό υλισμό είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση της φύσης, της γνώσης και της κοινωνίας.

Εκτός από τη διαλεκτική σχέση του απείρου με το πεπερασμένο, το άπειρο είναι γεμάτο από αντιφάσεις. Σύμφωνα με τον Ένγκελς ακριβώς επειδή το άπειρο είναι μια αντίφαση είναι μια άπειρη διαδικασία, η οποία εξελίσσεται δίχως τέλος στο χρόνο και στο χώρο και η εξαφάνιση αυτής της αντίφασης θα σήμαινε και το τέλος του απείρου(Ένγκελς, 2006).

Τέτοιες αντιφάσεις συναντάμε στα μαθηματικά από τα αρχαία χρόνια με τα Παράδοξα του Ζήνωνα, αργότερα με το παράδοxo του Hilbert για το ξενοδοχείο του απείρου, το παράδοxo

του Russell. Αλλά και στη θεωρία συνόλων του Cantor έχουμε τέτοιες αντιφάσεις με το παράδοξο του απείρου όπου μέσα σε ένα πεπερασμένο μπορούν να υπάρχουν άπειρες υποδιαίρεσεις. Έλυνε αυτά τα παράδοξα, τα οποία προκύπτουν από την ίδια τη φύση του απείρου, η θεωρία συνόλων του Cantor με την κατάταξη των απείρων συνόλων σε αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα, δηλαδή υπάρχουν άπειρα σύνολα τα οποία μπορώ να μετρήσω όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών και άλλα που δεν μπορώ όπως στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, το σύνολο των σημείων μιας ευθείας. Αριθμήσιμο καλούμε ένα σύνολο τα στοιχεία του οποίου μπορούμε να τα αριθμήσουμε από τους φυσικούς αριθμούς, ορίζοντας δηλαδή μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου που μελετάμε και του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Πόσο αντιφατικό ακούγεται σε έναν άνθρωπο ότι ενώ οι φυσικοί αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ τα μαθηματικά τους κατατάσσουν στα αριθμήσιμα σύνολα, ενώ το σύνολο  $(0,1)$  είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο. Οποιαδήποτε κύκλο κι αν κοιτάξουμε βλέπουμε μπροστά μας κάτι πεπερασμένο, ωστόσο αν βάλουμε ανθρώπους να περπατούν πάνω σε ένα κύκλο όλοι θα βρίσκονται μπροστά και πίσω από τους άλλους ταυτόχρονα, ενώ αν τους διατάξουμε σε σειρά πάντα θα έχουν δύο συγκεκριμένους ανθρώπους δίπλα τους.

### ***3.2.1 Η προσέγγιση του απείρου στον Cantor***

Η συμβολή του Cantor έγκειται στη θεμελίωση της θεωρίας των συνόλων και στη συστηματική μελέτη του απείρου ως μαθηματικής έννοιας. Πριν από αυτόν, το άπειρο αντιμετωπιζόταν κυρίως ως φιλοσοφική ή διαισθητική έννοια, χωρίς αυστηρό τυπικό ορισμό. Πίστευαν ότι το άπειρο ήταν μια αφηρημένη ιδέα χωρίς εσωτερική οργάνωση. Ο Cantor έδειξε ότι αυτό είναι λάθος, το άπειρο έχει διαβαθμίσεις και ιεραρχία. Ο Cantor εισάγει την ιδέα ότι τα άπειρα σύνολα μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους ως προς το “μέγεθός” τους, μέσω της έννοιας της αντιστοιχίας ένα-προς-ένα (Dauben, 1990).

Η βασική του τομή είναι ότι δεν υπάρχει ένα μοναδικό άπειρο, αλλά διαφορετικά επίπεδα απείρου. Για παράδειγμα, το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι και τα δύο άπειρα, αλλά δεν έχουν το ίδιο “πλήθος στοιχείων”. Το δεύτερο είναι αυστηρά μεγαλύτερο σε ισχύ. Αυτό οδηγεί στη διάκριση μεταξύ μετρήσιμου και μη μετρήσιμου απείρου (Cantor, 1915). Η πιο γνωστή του ιδέα είναι ότι το άπειρο μπορεί να ιεραρχηθεί σε επίπεδα, κάτι που εκφράζεται μέσω των λεγόμενων καρδινάλιων αριθμών ( $\aleph_0$ ,  $\aleph_1$  κ.λπ.). Έτσι, το άπειρο παύει να είναι μια ενιαία έννοια και γίνεται δομή με εσωτερικές

διαφορές και σχέσεις (Dauben, 1990). Δεν είναι ένα πράγμα, αλλά υπάρχουν πολλά «είδη» απείρου, αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα. Μπορούμε να πούμε ότι το άπειρο  $A$  είναι μικρότερο από το άπειρο  $B$ , για παράδειγμα ο ωκεανός πριν τον Cantor είναι παντού νερό, μετά τον Cantor μπαίνουν επίπεδα, διαβαθμίσεις ρηχά, βαθιά, άβυσσος. Κάθε επίπεδο έχει τους δικούς του κανόνες

Παρότι ο Cantor δεν εργάζεται στο πλαίσιο της διαλεκτικής φιλοσοφίας, η θεωρία του οδηγεί σε μια σημαντική μετατόπιση: το άπειρο δεν είναι “τέλος” ή απόλυτη πληρότητα, αλλά μια ανοικτή κλίμακα επεκτασιμότητας. Το άπειρο στο σύστημα του Cantor δεν είναι ένα ενιαίο “κάτι”, αλλά αποτέλεσμα σχέσεων μεταξύ συνόλων. Αυτό σημαίνει ότι η έννοια του απείρου είναι θεμελιωδώς σχεσιακή ( προκύπτει σε σχέση με το πεπερασμένο) και όχι απόλυτη. Όπως τονίζει η σύγχρονη μαθηματική ανάλυση, κάθε άπειρο σύνολο αποκτά νόημα μόνο μέσα από συγκρίσεις με άλλα σύνολα (Jech, 2003). Αυτό έχει σημαντική φιλοσοφική συνέπεια, ότι το άπειρο δεν είναι αντικείμενο. Το να μετράς  $1,2,3,4\dots$  δεν θα οδηγήσει στο αντικείμενο που λέγεται άπειρο, αλλά το άπειρο είναι η ίδια η δυνατότητα να προσθέτεις πάντα έναν ακόμα αριθμό.

Το άπειρο μπορεί να μελετηθεί μαθηματικά μέσω της θεωρίας των συνόλων. Τα άπειρα σύνολα μπορούν να συγκριθούν ως προς την πληθικότητά τους, οδηγώντας στη διάκριση μεταξύ διαφορετικών “μεγεθών” απείρου (Cantor, 1915).

Για παράδειγμα:

- το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι άπειρο αλλά μετρήσιμο ( $\aleph_0$ )
- το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μη μετρήσιμο και “μεγαλύτερο”

Αντίθετα, στον διαλεκτικό υλισμό, το άπειρο δεν αντιμετωπίζεται ως μαθηματική οντότητα αλλά ως έκφραση της ατέρμονης κίνησης της ύλης. Ο Ένγκελς υποστηρίζει ότι η φύση δεν γνωρίζει απόλυτες σταθερές αλλά συνεχή μετασχηματισμό και αλληλεπίδραση αντιθέσεων (Ένγκελς, 2005).

Σε αυτή την προοπτική:

- δεν υπάρχουν “άπειρα σύνολα” ως αντικείμενα
- υπάρχει όμως άπειρη διαδικασία μεταβολής
- η ύλη δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται, αλλά μετασχηματίζεται

Το άπειρο, λοιπόν, δεν είναι ποσότητα αλλά ποιότητα της κίνησης της ύλης.

Η βασική διαφοροποίηση μεταξύ Cantor και διαλεκτικού υλισμού είναι ο τρόπος ύπαρξης του απείρου:

- Στον Cantor, το άπειρο είναι μαθηματικό αντικείμενο με τυπικές ιδιότητες
- Στον διαλεκτικό υλισμό, το άπειρο είναι διαδικασία υλικής αδιάκοπης μεταβολής

Ο Cantor εργάζεται σε ένα αφηρημένο, αξιωματικό σύστημα όπου τα άπειρα σύνολα είναι συγκρίσιμα και ιεραρχήσιμα (Jech, 2003). Αντίθετα, ο Μαρξ και ο Ένγκελς προσεγγίζουν την πραγματικότητα ως ιστορική και υλική διαδικασία, όπου οι έννοιες δεν έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη από την υλική βάση τους (Μαρξ, 2009).

Παρά τις διαφορές, υπάρχει ένα σημαντικό σημείο σύγκλισης: και οι δύο προσεγγίσεις απορρίπτουν την απλοϊκή ιδέα του απείρου ως ενιαίου και αδιαφοροποίητου.

- Ο Cantor δείχνει ότι υπάρχουν πολλαπλά επίπεδα απείρου
- Η διαλεκτική δείχνει ότι η πραγματικότητα είναι εσωτερικά αντιφατική και πολυεπίπεδη

Έτσι, το άπειρο δεν είναι “μία έννοια”, αλλά δομή (σχέσεις) διαφορών( ποιοτικών). Στον Cantor αυτό εκφράζεται ως ιεραρχία πληθικοτήτων, ενώ στον διαλεκτικό υλισμό ως ιστορική και φυσική εξέλιξη αντιφάσεων (Ένγκελς, 2005 ; Dauben, 1990). Στον Cantor, το άπειρο παραμένει στατικό ως προς τον ορισμό του. Η μεταβολή αφορά τη σύγκριση μεταξύ δομών, όχι την ίδια τη φύση της πραγματικότητας.

Αντίθετα, στον διαλεκτικό υλισμό, η μεταβολή είναι πρωταρχική. Δεν υπάρχουν σταθερά αντικείμενα, αλλά μόνο προσωρινές σταθεροποιήσεις μέσα σε μια ατέρμονη διαδικασία (Marx & Engels, 1975).

Μπορούμε να συνοψίσουμε ως εξής:

- Ο Cantor “μετρά” το άπειρο
- Ο διαλεκτικός υλισμός “ερμηνεύει” το άπειρο ως κίνηση

Η σύγκριση μεταξύ Cantor και διαλεκτικού υλισμού αποκαλύπτει δύο διαφορετικές αλλά συμπληρωματικές προσεγγίσεις του απείρου. Ο Cantor μετατρέπει το άπειρο σε αυστηρά μαθηματικό αντικείμενο με πολλαπλές βαθμίδες, ενώ ο Μαρξ και ο Ένγκελς το εντάσσουν

στη διαρκή υλική εξέλιξη της πραγματικότητας. Παρά τις διαφορές τους, και οι δύο προσεγγίσεις συμβάλλουν στην αποδόμηση της ιδέας του απείρου ως απλής, ενιαίας και στατικής έννοιας, αναδεικνύοντάς το ως πολυδιάστατο και δυναμικό φαινόμενο.

### ***3.2.2 Dedekind-άπειρα σύνολα και η διαλεκτική έννοια του απείρου***

Στη θεμελίωση της σύγχρονης θεωρίας συνόλων, ο Richard Dedekind εισάγει έναν αυστηρό ορισμό του απείρου μέσω της έννοιας των Dedekind-άπειρων συνόλων. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, ένα σύνολο χαρακτηρίζεται ως άπειρο αν μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του, δηλαδή αν περιέχει ένα υποσύνολο ισοδύναμης πληθικότητας με το ίδιο το σύνολο (Dedekind, 1888). Η ιδιότητα αυτή αποκαλύπτει ότι το άπειρο δεν είναι απλώς ζήτημα “μεγέθους”, αλλά δομική ιδιότητα ενός συστήματος που επιτρέπει την αυτο-ομοιότητα μέσω απειροτήτων αντιστοιχιών.

Η έννοια αυτή συνδέεται στενά με τη μεταγενέστερη εργασία του Georg Cantor, ο οποίος ανέπτυξε την ιεράρχηση διαφορετικών απείρων μέσω καρδιναλικών αριθμών, δείχνοντας ότι τα άπειρα σύνολα δεν είναι ομοιογενή αλλά διαρθρωμένα σε διαφορετικά επίπεδα (Cantor, 1915; Dauben, 1990).

Το μαθηματικό άπειρο (όπως στο Dedekind και στον Cantor) είναι τυπικά ορισμένο και στατικό ως προς τη δομή του, ενώ το διαλεκτικό άπειρο είναι δυναμικό και ιστορικά εξελισσόμενο. Το πρώτο περιγράφει σχέσεις εντός ενός λογικού συστήματος, ενώ το δεύτερο αναφέρεται στην ίδια την κίνηση της φύσης και της κοινωνίας ως διαδικασία χωρίς τελικό σημείο (Μαρξ, 2009). Έτσι, το Dedekind-άπειρο μπορεί να θεωρηθεί ως μαθηματική ιδεατή αναπαράσταση της απεριόριστης επαναληψιμότητας, ενώ στη διαλεκτική φιλοσοφία το άπειρο δεν είναι ιδιότητα συνόλων αλλά χαρακτηριστικό της ίδιας της υλικής πραγματικότητας ως συνεχούς αλλαγής.

### ***3.2.3 Άπειρο, πεπερασμένο και απροσδιοριστία υπό το πρίσμα του διαλεκτικού υλισμού***

Στον διαλεκτικό υλισμό, η πραγματικότητα δεν νοείται ως σύνολο στατικών οντοτήτων, αλλά ως διαδικασία διαρκούς μεταβολής, όπου κάθε μορφή ύπαρξης εμπεριέχει την ίδια της την άρνηση και την υπέρβασή της. Η σκέψη αυτή επιτρέπει μια βαθύτερη φιλοσοφική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών του πεπερασμένου, του απείρου και της απροσδιοριστίας όχι ως ανεξάρτητων ποσοτικών κατηγοριών, αλλά ως αφηρημένων εκφράσεων διαλεκτικών σχέσεων.

Το πεπερασμένο, στο πλαίσιο αυτό, δεν αποτελεί μια απομονωμένη σταθερότητα, αλλά μια προσωρινή μορφή ορισμένης υλικής κατάστασης. Όπως σημειώνει ο Ένγκελς, η φύση δεν γνωρίζει απόλυτες σταθερές, αλλά μόνο μορφές που προκύπτουν και καταργούνται μέσα στη συνεχή κίνηση της ύλης (Ένγκελς, 2005). Κατά συνέπεια, κάθε “πεπερασμένο” μέγεθος στα μαθηματικά μπορεί να ιδωθεί ως αφηρημένη αντανάκλαση μιας τέτοιας προσωρινής σταθεροποίησης.

Αντίστοιχα, το άπειρο δεν πρέπει να κατανοηθεί ως υπερβατική ή ανεξάρτητη οντότητα, αλλά ως έκφραση της ατελείωτης διαδικασίας μετασχηματισμού. Ο Μαρξ υπογραμμίζει ότι οι κοινωνικές και υλικές μορφές δεν είναι αιώνιες, αλλά ιστορικά προσδιορισμένες και μεταβαλλόμενες (Μαρξ, 2009). Με αυτή την έννοια, το “άπειρο” δεν είναι ένα τελικό οντολογικό σημείο, αλλά η θεωρητική σύλληψη της απουσίας τελικού σταδίου στην εξέλιξη των μορφών.

Η μαθηματική έννοια της απροσδιοριστίας, όπως η μορφή  $0/0$ , μπορεί επίσης να ερμηνευθεί διαλεκτικά ως σημείο όπου η άμεση ταυτότητα των ποσοτήτων καταρρέει και αποκαλύπτεται η αναγκαιότητα της σχέσης. Το γεγονός ότι η έκφραση αυτή δεν αντιστοιχεί σε έναν συγκεκριμένο αριθμό δεν αποτελεί αδυναμία του συστήματος, αλλά ένδειξη ότι η αλήθεια δεν βρίσκεται στην απομονωμένη τιμή, αλλά στη διαδικασία που τη γεννά.

#### ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0/0$

Ας πάρουμε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Το όριο αυτό έχει απροσδιοριστία  $0/0$  και συχνά εφαρμόζεται μηχανικά ο κανόνας L’Hospital, παραγωγίζοντας αριθμητή και παρονομαστή έχω

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Αυτός είναι ο φορμαλιστικός τρόπος με τον οποίο το λύνουμε. Ωστόσο αν δούμε μια πιο γεωμετρική προσέγγιση χρησιμοποιώντας το θεώρημα παρεμβολής, αναδεικνύεται το πως η αλήθεια βρίσκεται στη «διαδικασία».

Έστω ένα γεωμετρικός κύκλος για πολύ μικρές γωνίες  $\chi$  κοντά στο 0. Το  $\sin x$  είναι πάντα μικρότερο από το τόξο  $x$ , είναι πάντα μικρότερο από τη εφαπτομένη  $\tan x$ . Άρα ισχύει ότι

$$\sin x < x < \tan x$$

Διαιρώ όλα τα μέλη με  $\sin x$  και έχω

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Καθώς το  $x$  πλησιάζει το 0, το  $\cos x$  πλησιάζει το 1. Αφού η συνάρτηση είναι ανάμεσα σε δυο τιμές που πλησιάζουν το 1, αναγκαστικά και η ίδια τείνει να γίνει 1.

Αν κοιτάζει κανείς μόνο τους αριθμούς στο  $x=0$  θα δει ότι έχει το τίποτα (0/0). Αν όμως κοιτάξεις τη σχέση του ημιτόνου με τη γωνία  $x$  καθώς κινούνται βλέπεις ότι τρέχουν προς το 0 με την ίδια ταχύτητα. Αυτή η ισορροπία στην κίνηση είναι που δίνει το αποτέλεσμα 1.

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $\frac{\infty}{\infty}$  (μετάβαση από την ποσότητα στην ποιότητα)

Ας πάρουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Εδώ και ο αριθμητής και ο παρονομαστής τείνουν στο άπειρο. Αν δω μόνο το αποτέλεσμα  $\frac{\infty}{\infty}$  έχω ένα χάος. Αν όμως κοιτάξω την διαδικασία, τον ρυθμό αύξησης, βλέπω ότι η εκθετική συνάρτηση αυξάνεται πολύ πιο γρήγορα από τη πολωνυμική. Αναδεικνύεται δηλαδή ότι το άπειρο δεν είναι ένα, υπάρχουν διαφορετικές ποιότητες απείρου. Εδώ η εκθετική «νικά» την πολωνυμική οπότε το αποτέλεσμα του ορίου είναι το  $\infty$ . Αν είχαμε το αντίστροφο, να «νικάει» δηλαδή ο παρονομαστής θα είχαμε αποτέλεσμα το 0.

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ  $1^\infty$

Ας πάρουμε το

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Η βάση τείνει στο 1 ενώ ο εκθέτης στο άπειρο. Η διαλεκτική όμως προσέγγιση παρατηρεί ότι εδώ έχω μια σύγκρουση ανάμεσα στη βάση που πλησιάζει το 1 και στον εκθέτη που την τραβάει στο άπειρο. Αυτή η εσωτερική σύγκρουση δεν καταλήγει ούτε στο 1 ούτε στο άπειρο. Γεννάει κάτι εντελώς νέο το  $e$ .

Η αλήθεια λοιπόν δεν βρίσκεται και εδώ στην απομονωμένη τιμή 1 ή  $\infty$ , αλλά στη διαδικασία της αλληλεπίδρασης τους. Το  $e$  είναι η ποιοτική αλλαγή που προκύπτει από αυτήν την ποσοτική σύγκρουση.

Εν κατακλείδι, η απροσδιοριστία είναι σημείο κρίσης, όπου οι παλιοί κανόνες δεν επαρκούν και χρειάζεται κάτι νέο για να δώσει τη λύση. Αν το δούμε σχηματικά θα μπορούσαμε να πούμε το εξής:

1. Στατική αριθμητική:  $5/5=1$ ,  $0/5=0$  και λοιπά. Εδώ έχουμε καθαρούς κανόνες
2. Απροσδιοριστία: οι κανόνες δεν επαρκούν και έτσι το σύστημα «παγώνει»
3. Διαφορικός λογισμός: εισάγεται η έννοια της κίνησης και λύνει το πρόβλημα. Αποκαλύπτεται η αναγκαιότητα της σχέσης.

Τέτοιες μορφές μπορούν να ιδωθούν ως στιγμές όπου η ποσοτική σχέση παύει να είναι άμεσα προσδιορίσιμη και απαιτεί μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο κατανόησης — δηλαδή στη σύλληψη της κίνησης ως συνόλου. Ο Ένγκελς τονίζει ότι η μετατροπή ποσοτικών διαφορών σε ποιοτικές αλλαγές αποτελεί θεμελιώδη νόμο της διαλεκτικής φύσης (Ένγκελς, 2005).

Έτσι, το πεπερασμένο, το άπειρο και η απροσδιοριστία δεν είναι ανεξάρτητες μαθηματικές κατηγορίες, αλλά αφηρημένες μορφές μιας ενιαίας διαλεκτικής κίνησης. Το πεπερασμένο αντιστοιχεί στη στιγμιαία σταθεροποίηση, το άπειρο στην ατέρμονη διαδικασία υπέρβασής της και η απροσδιοριστία στο σημείο όπου η παλαιά μορφή σχέσης παύει να επαρκεί και απαιτεί νέα οργάνωση της κατανόησης.

Η διαλεκτική αυτή ανάγνωση αναδεικνύει ότι τα μαθηματικά, παρότι λειτουργούν με αφηρημένα σύμβολα, μπορούν να ιδωθούν ως αντανάκλαση της υλικής πραγματικότητας υπό τη μορφή γενικών σχέσεων. Όπως σημειώνουν ο Μαρξ και ο Ένγκελς, οι επιστημονικές αφαιρέσεις δεν έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη, αλλά προκύπτουν από την επεξεργασία της πραγματικής κίνησης των πραγμάτων (Marx & Engels, 1975).

Συνεπώς, το άπειρο δεν είναι “πράγμα” απέναντι στο πεπερασμένο, αλλά η θεωρητική έκφραση της αδιάκοπης υπέρβασης κάθε πεπερασμένης μορφής. Η απροσδιοριστία δεν είναι κενό νοήματος, αλλά ένδειξη ότι η πραγματικότητα δεν μπορεί να συλληφθεί μέσω στατικών σχέσεων, αλλά μόνο μέσω διαδικασιών.

**Παραδείγματα από τα μαθηματικά**

**A. Το πεπερασμένο ως προσωρινή σταθεροποίηση**

Στα μαθηματικά, το πεπερασμένο εμφανίζεται ως σταθερή τιμή ή ορισμένο όριο. Για παράδειγμα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Η ποσότητα τείνει σε μια συγκεκριμένη τιμή, όμως αυτή η «σταθερότητα» προκύπτει μόνο ως αποτέλεσμα διαδικασίας. Διαλεκτικά, αυτό αντιστοιχεί σε μια προσωρινή μορφή ύπαρξης, η οποία δεν έχει απόλυτο χαρακτήρα αλλά αποτελεί στιγμιαία ισορροπία μέσα σε κίνηση. Όπως σημειώνει ο Ένγκελς, καμία μορφή στη φύση δεν είναι απόλυτα σταθερή, αλλά υπάρχει μόνο ως στιγμιαία κατάσταση μέσα σε συνεχή μεταβολή (Ένγκελς, 2005).

**B. Το άπειρο ως διαδικασία υπέρβασης ορίων**

Το άπειρο στα μαθηματικά εμφανίζεται κυρίως ως όριο απεριόριστης αύξησης

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Εδώ το άπειρο δεν είναι αριθμός, αλλά κατεύθυνση. Το  $x$  δεν «φτάνει» το άπειρο, αλλά το προσεγγίζει. Αυτό έχει την άμεση διαλεκτική σημασία ότι το άπειρο δεν είναι αντικείμενο, αλλά διαδικασία υπέρβασης κάθε πεπερασμένου ορίου. Ο Μαρξ τονίζει ότι οι μορφές της πραγματικότητας δεν είναι αιώνιες, αλλά ιστορικά προσδιορισμένες και μεταβαλλόμενες (Μαρξ, 2009). Έτσι, το άπειρο μπορεί να ιδωθεί ως θεωρητική έκφραση της απουσίας τελικής μορφής.

**Γ. Η απροσδιοριστία 0/0 ως κατάργηση στατικής σχέσης**

Μία από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου το μαθηματικό σύστημα αναγκάζεται να περάσει από τη στατική στην διαλεκτική κατανόηση είναι η μορφή:  $\frac{0}{0}$

Η έκφραση αυτή δεν έχει συγκεκριμένη τιμή, διότι κάθε αριθμός την ικανοποιεί:  $a * 0 = 0$

Άρα δεν μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά ο λόγος.

Η απροσδιοριστία δεν σημαίνει «απουσία νοήματος», αλλά ότι η πληροφορία δεν βρίσκεται στη στιγμή, αλλά στη διαδικασία. Αυτό φαίνεται καθαρά στον απειροστικό λογισμό:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Όταν το  $x$  είναι πολύ κοντά στο 0, τότε το  $\sin x$  είναι σχεδόν ίσο με το  $x$ , οπότε το κλάσμα

$$\frac{\sin x}{x}$$

είναι πολύ κοντά στο 1.

Αν βάλεις κατευθείαν  $x=0$ , παίρνεις  $0/0$  (απροσδιόριστο), αλλά το όριο είναι 1.

Παρότι η μορφή είναι  $0/0$ , το όριο δίνει συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Δηλαδή, η αλήθεια δεν βρίσκεται στο στατικό σημείο αλλά στη μεταβολή. Διαλεκτικά, αυτό αντιστοιχεί στη στιγμή όπου μια παλιά μορφή σχέσης καταρρέει και απαιτείται νέα οργάνωση κατανόησης — μια μετάβαση από την ποσότητα στην ποιότητα (Ένγκελς, 2005).

#### Α. Ενότητα των τριών κατηγοριών

Στο διαλεκτικό υλισμό, οι τρεις έννοιες δεν είναι ανεξάρτητες αλλά στιγμές μιας ενιαίας κίνησης:

- **Πεπερασμένο** → προσωρινή σταθεροποίηση
- **Άπειρο** → διαδικασία υπέρβασης σταθερότητας
- **Απροσδιοριστία (0/0)** → σημείο ρήξης της στατικής σχέσης

Η μαθηματική ανάλυση δείχνει ότι αυτές οι καταστάσεις συνδέονται μέσω ορίων, όπου η συμπεριφορά των συναρτήσεων δεν καθορίζεται από μεμονωμένες τιμές αλλά από τη συνολική τους εξέλιξη. Έτσι, το μαθηματικό άπειρο δεν είναι «πράγμα», αλλά διαδικασία. Αντίστοιχα, η απροσδιοριστία δεν είναι «κενό», αλλά ένδειξη ότι απαιτείται μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο ανάλυσης.

Η διαλεκτική θεώρηση του Μαρξ και του Ένγκελς επιτρέπει την ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών όχι ως στατικών ποσοτήτων, αλλά ως αφηρημένων μορφών κίνησης. Το πεπερασμένο, το άπειρο και η απροσδιοριστία δεν είναι απομονωμένες κατηγορίες, αλλά εκφράσεις μιας ενιαίας διαδικασίας μεταβολής, όπου κάθε σταθερότητα εμπεριέχει την άρνησή της και κάθε όριο υποδηλώνει την υπέρβασή του.

### 3.3 Απειροστικός λογισμός

### 3.3.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Η ιστορική εξέλιξη του απειροστικού λογισμού συνιστά μια από τις σημαντικότερες διαδρομές στην ιστορία των μαθηματικών, καθώς αντικατοπτρίζει τη σταδιακή μετάβαση από γεωμετρικές διαισθήσεις σε αυστηρά θεμελιωμένες αναλυτικές δομές. Οι απαρχές του εντοπίζονται στην αρχαία ελληνική μαθηματική σκέψη, όπου ο Εύδοξος ο Κνίδιος εισήγαγε τη μέθοδο της εξάντλησης για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Αρχιμήδη, ο οποίος πέτυχε αξιοσημείωτη ακρίβεια στον υπολογισμό γεωμετρικών μεγεθών, θέτοντας ουσιαστικά τα θεμέλια της έννοιας του ολοκληρώματος, χωρίς ωστόσο να διαθέτει την έννοια του ορίου με τη σύγχρονη μορφή της.

Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα και της πρώιμης νεότερης εποχής, σημαντικές συμβολές προήλθαν τόσο από τον ισλαμικό όσο και από τον ευρωπαϊκό χώρο. Ο Ιμπν αλ-Χάιθαμ μελέτησε προβλήματα που σχετίζονται με αθροίσματα δυνάμεων φυσικών αριθμών, προσεγγίζοντας έννοιες που αργότερα θα ενταχθούν στον ολοκληρωτικό λογισμό. Παράλληλα, στην Ευρώπη, μαθηματικοί όπως ο Ισαάκ Μπάροου διερεύνησαν τη σχέση μεταξύ εμβαδών και εφαπτομένων, προσεγγίζοντας διαισθητικά τη θεμελιώδη σύνδεση παραγώγου και ολοκληρώματος, χωρίς όμως να διαθέτουν ακόμη ένα πλήρως ανεπτυγμένο θεωρητικό πλαίσιο.

Η καθοριστική τομή πραγματοποιείται τον 17ο αιώνα με το έργο των Ισαάκ Νεύτων και Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς, οι οποίοι, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, θεμελίωσαν τον απειροστικό λογισμό. Ο Νεύτων, στο πλαίσιο της μελέτης της κίνησης και της φυσικής, εισήγαγε την έννοια των «ροών», εστιάζοντας στον ρυθμό μεταβολής μεγεθών ως προς τον χρόνο. Αντιθέτως, ο Λάιμπνιτς ανέπτυξε μια συμβολική και περισσότερο αναλυτική προσέγγιση, εισάγοντας τη σημειογραφία των διαφορικών και ολοκληρωμάτων που διατηρείται μέχρι σήμερα. Η συμβολή τους κατέστησε δυνατή τη συστηματική μελέτη τόσο των στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής (παραγώγοι) όσο και των αθροιστικών ποσοτήτων (ολοκληρώματα), εγκαινιάζοντας μια νέα εποχή στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.

Κατά τον 18ο αιώνα, ο απειροστικός λογισμός γνώρισε εκτεταμένη ανάπτυξη και εφαρμογή, με εξέχουσα μορφή τον Λεονάρντ Όιλερ, ο οποίος συνέβαλε καθοριστικά στη συστηματοποίηση και επέκταση των μεθόδων του. Ο Όιλερ εισήγαγε νέους συμβολισμούς, ανέπτυξε τη θεωρία των συναρτήσεων και εφάρμοσε τον λογισμό σε πλήθος προβλημάτων

φυσικής και μηχανικής. Ωστόσο, παρά την επιτυχία του, ο απειροστικός λογισμός εξακολουθούσε να βασίζεται σε διαισθητικές έννοιες, όπως τα «απειροστά μικρά», χωρίς αυστηρή θεμελίωση.

Η ανάγκη για αυστηρότητα οδήγησε, τον 19ο αιώνα, στη διαμόρφωση μιας πιο ακριβούς και λογικά συνεκτικής βάσης. Μαθηματικοί όπως ο Ωγκυστέν-Λουί Κωσί και ο Καρλ Βάιερστρας εισήγαγαν τον αυστηρό ορισμό του ορίου και επαναδιατύπωσαν τις έννοιες της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος με βάση αυτόν. Η μετάβαση αυτή σηματοδότησε τη γέννηση της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης, απαλλάσσοντας τον λογισμό από τις ασαφείς έννοιες των απειροελαχίστων και προσδίδοντάς του λογική πληρότητα.

Στον 20ό αιώνα, ο απειροστικός λογισμός επεκτάθηκε σε νέους και πιο αφηρημένους τομείς, όπως η Συναρτησιακή Ανάλυση και η Διαφορική Γεωμετρία, ενώ αναπτύχθηκαν ισχυρά εργαλεία για τη μελέτη πολύπλοκων φαινομένων, όπως οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Παράλληλα, νέες έννοιες, όπως οι κατανομές και οι γενικευμένες συναρτήσεις, επέτρεψαν τη μοντελοποίηση φαινομένων που δεν μπορούσαν να περιγραφούν με τις κλασικές μεθόδους.

Στη σύγχρονη εποχή, ο απειροστικός λογισμός αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών και τεχνολογικών πεδίων. Από τη φυσική και τη μηχανική έως την οικονομία και την επιστήμη δεδομένων, και από τη μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων έως την εκπαίδευση αλγορίθμων στην τεχνητή νοημοσύνη, οι έννοιες του απειροστικού λογισμού παραμένουν κεντρικές. Η ιστορική του διαδρομή αποκαλύπτει όχι μόνο την εξέλιξη μιας μαθηματικής θεωρίας, αλλά και τη βαθύτερη ανθρώπινη προσπάθεια κατανόησης της μεταβολής και της συνέχειας στον κόσμο.

### ***3.3.2 Η ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού από τη σκοπιά του διαλεκτικού υλισμού***

Ο απειροστικός λογισμός αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές επαναστάσεις, όπου σύμφωνα με τον Ένγκελς ο απειροστικός λογισμός αποτελεί θρίαμβο του ανθρώπινου πνεύματος, ένα καθαρό και αποκλειστικό κατόρθωμα του (Ένγκελς, 2006). Με τον απειροστικό λογισμό τα μαθηματικά πέρασαν από την στατικότητα στην κίνηση και συνεπώς στην διαλεκτική. Τα μέχρι τότε μαθηματικά μπορούν να αντιστοιχηθούν με την ανόργανη φύση, ενώ ο απειροστικός λογισμός είναι η ζωντανή φύση. Με τον απειροστικό λογισμό μπορούν πλέον να μελετηθούν διαδικασίες.

Ο Ένγκελς δεν αποδίδει την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού στους Newton και Leibniz αλλά την ολοκλήρωση αυτού του έργου. Ως διαλεκτικός υλιστής βλέπει όλη την εξέλιξη της επιστήμης, πως η μία έννοια παίρνει την σκυτάλη από την προηγούμενη, οπότε δεν μπορεί παρά να θεωρεί καμπή στην είσοδο της κίνησης στα μαθηματικά το μεταβλητό μέγεθος του Καρτέσιου. Όπως αναφέρει ο Ένγκελς τα μεταβλητά μεγέθη είναι αυτά που εισήγαγαν στα μαθηματικά στην διαλεκτική και αυτήν την πρόοδο την έφερε ο Descartes (Ένγκελς, 2006), κατά τον Ένγκελς ένας διαλεκτικός φιλόσοφος.

Βρισκόμαστε στις αρχές του 17<sup>ου</sup> αιώνα όπου έχουμε ανεπτυγμένη την τυπογραφία και ταχύτερη την αλληλογραφία, οπότε δίνεται η δυνατότητα στους επιστήμονες να γνωρίζουν ο ένας το έργο του άλλου και να μπορούν να το σχολιάσουν, να το κριτικάρουν, να το αναπτύξουν περαιτέρω. Σε αυτήν την περίοδο μπαίνουν οι βάσεις της αναλυτικής γεωμετρίας, με κύριες ιδέες την αντιστοιχία των γεωμετρικών τόπων με αλγεβρικές εξισώσεις και δεύτερη το γεωμετρικό πλαίσιο αυτής της αντιστοιχίας, το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, του κλάδου που έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην επινόηση του απειροστικού λογισμού, από τους Pierre de Fermat και Rene Descartes.

Οι δύο αυτοί μαθηματικοί στα έργα τους είχαν διαφορετικές προσεγγίσεις. Ο Fermat ξεκινούσε πάντα από την εξίσωση. Ο Fermat υποστήριζε ότι «εάν κατά την επίλυση ενός αλγεβρικού προβλήματος καταλήξουμε σε μια εξίσωση με δύο αγνώστους, τότε η λύση της είναι ένας τόπος, δηλαδή μια ευθεία γραμμή ή μια καμπύλη» (Katz, 2019, σ.497). Στο έργο του ανέπτυξε τη σύνδεση των αλγεβρικών εξισώσεων με την γεωμετρία σε μια γενική μορφή, σε μια θεωρητική συσχέτιση των γεωμετρικών και των αλγεβρικών ιδιοτήτων. Υστερούσε σε σχέση με τον Descartes στη χρήση ενός μόνο άξονα και όχι ενός συστήματος αξόνων, επίσης για τον Fermat οι μόνες γνήσιες λύσεις των αλγεβρικών εξισώσεων είναι οι θετικές.

Ο Descartes κατά τον Katz δεν ασχολήθηκε όπως ο Fermat με τη σχέση της άλγεβρας με την γεωμετρία μέσα από την μελέτη των τόπων, αλλά προσπαθούσε να καταδείξει την σχέση της άλγεβρας με την γεωμετρία μέσω της γεωμετρικής κατασκευής των λύσεων των αλγεβρικών εξισώσεων (Katz, 2019). Έδειξε πως οι εξισώσεις μπορούν να περιγράψουν ευθείες και καμπύλες παρατηρώντας ότι αφού υπάρχουν άπειρα διαφορετικά σημεία που ικανοποιούν μια αλγεβρική εξίσωση μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη πάνω στην οποία

βρίσκονται, ανέπτυξε το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ώστε να γίνεται η γεωμετρική αναπαράσταση των αλγεβρικών εξισώσεων.

Συμπερασματικά οι δύο αυτοί μαθηματικοί προσέγγιζαν πολύ διαφορετικά το αντικείμενο της αναλυτικής γεωμετρίας με τον Fermat να ξεκινά πάντα από την εξίσωση και κατόπιν να περιγράφει την καμπύλη και τον Descartes να καταλήγει στην εξίσωση μέσα από την γεωμετρική περιγραφή της καμπύλης. Λόγω των παραπάνω η συμβολή του Descartes για την μετέπειτα ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού είναι κομβική και δικαίως ο Ένγκελς του δίνει αυτήν την αναγνώριση.

Το αν πράγματι ο απειροστικός λογισμός αποτελεί θρίαμβο του ανθρώπινου πνεύματος αναδεικνύεται μέσα από την πορεία εξέλιξης του.

Η περίοδος ανάπτυξης του απειροστικού λογισμού είναι η περίοδος κατά την οποία η αστική τάξη, που είναι το νέο ενάντια στο παλιό φεουδαρχικό σύστημα, είναι σε ανοδική πορεία. Ιδιαίτερα στην Ευρώπη αποκτούν όλο και μεγαλύτερη δύναμη οι έμποροι, οι τραπεζίτες και οι βιοτέχνες. αποτελούν ισχυρές δυνάμεις η Αγγλία, η Γαλλία, η Ολλανδία, η Ισπανία. Έχουμε μεγάλη ανάπτυξη του εμπορίου ιδιαίτερα μέσω του Ατλαντικού και της Ασίας, όπου οι ευρωπαϊκές δυνάμεις έχουν δημιουργήσει αποικίες σε Αμερική, Αφρική και Ασία.. Έχει αρχίσει η πρόωμη βιομηχανία με αύξηση της παραγωγής σε κλάδους όπως αυτός της κλωστοϋφαντουργίας. Ταυτόχρονα έχουμε την ανάπτυξη των τραπεζών και των χρηματιστηρίων, για να διευκολυνθεί το εμπόριο.

Αυτή η μεγάλη αλλαγή που συντελείται σε κοινωνικοοικονομικό επίπεδο, από την ανερχόμενη τάξη φέρνει μαζί της και την ανάπτυξη των επιστημών πολλών κλάδων όπως η αστρονομία, η φυσική με την επιβεβαίωση από τον Γαλιλαίο του ηλιοκεντρικού μοντέλου, τον νόμο της βαρύτητας από τον Νεύτωνα αλλά και μια σειρά άλλες σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια έχουμε την αλματώδη ανάπτυξη των μαθηματικών με τον απειροστικό λογισμό. Μια ανάπτυξη που δεν είναι ξεκομμένη από την κοινωνική και οικονομική ζωή των ισχυρών κρατών, από τις νέες ανάγκες που γεννιούνται. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι σε αυτές τις χώρες βρίσκονται οι άνθρωποι που κάνουν αυτές τις ανακαλύψεις και δεν θα μπορούσε να είναι διαφορετικά. Ο Newton είναι Άγγλος, ο Fermat Γάλλος, ο Descartes Γάλλος, ο Leibniz Γερμανός.

Ούτε τυχαίες είναι οι εφαρμογές που βρήκε ο απειροστικός λογισμός στον υπολογισμό της ταχύτητας και της επιτάχυνσης (Newton), στον υπολογισμό των τροχιών των πλανητών, στην ανάλυση των παλιρροιών, αλλά και στα οικονομικά για τον υπολογισμό τόκων, την ανάλυση χρηματοοικονομικών δεδομένων, στις θεωρίες των πιθανοτήτων και της στατιστικής για την εκτίμηση κινδύνων. Βρήκε εφαρμογή στην μηχανική και στις κατασκευές με τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων για νέες πιο πολύπλοκες κατασκευές. Οι εμπορικές δραστηριότητες θέλουν ασφάλεια των εμπορευμάτων. Αυτή περνάει μέσα από την επιστημονική γνώση της αστρονομίας, των παλιρροιών και άλλα.

Το τραπεζικό σύστημα αναπτύσσεται και χρειάζεται υπολογισμούς τόκων, αποδόσεων, δανείων, συναλλαγματικές ισοτιμίες, εκτίμηση ρίσκων κι κινδύνων, τα πρώτα χρηματιστήρια απαιτούν και μαθηματικά μοντέλα. Σε όλα αυτά τα νέα ερωτήματα οι επιστήμες κλήθηκαν να δώσουν απαντήσεις. Σε αυτά τα ερωτήματα έπρεπε να δώσουν απαντήσεις και τα μαθηματικά. Και τα μέχρι τότε μαθηματικά ήταν κατά κύριο λόγο στατικά, στοιχειώδη.

Μέσα στο κοινωνικό και οικονομικό πλαίσιο της εκάστοτε εποχής μπορεί να εξεταστεί η εξέλιξη του απειροστικού λογισμού. Οι Newton και Leibnitz στις μελέτες τους πάνω στον απειροστικό λογισμό στηρίχτηκαν στο έργο πολλών μαθηματικών πριν από αυτούς, έργα στα οποία μελετούνταν το εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από καμπύλες, το πρόβλημα μεγίστων-ελαχίστων, ο υπολογισμός όγκων και η εύρεση εφαπτομένης.

Τόσο στην αρχαία Ελλάδα όσο και στο Ισλάμ είχαν κατορθώσει οι τότε μαθηματικοί να υπολογίσουν ορισμένα εμβαδά και όγκους που ορίζονταν από καμπύλες με την μέθοδο της εξαντλήσεως. Ωστόσο εκείνη την εποχή δεν υπήρχαν ανάγκες που περιγράψαμε παραπάνω για να αποτελεί αναγκαιότητα ο απειροστικός λογισμός. Αρκούνταν στο να λύνουν συγκεκριμένα προβλήματα της καθημερινής πρακτικής που δεν παρουσίαζαν την πολυπλοκότητα των κατοπινών χρόνων.

Κατά τον Katz η κύρια ιδέα που κληροδοτήθηκε στις επόμενες γενιές των ερευνητών από τους αρχαίους Έλληνες ήταν το ότι η δοθείσα περιοχή έπρεπε να βρεθεί ο τρόπος ώστε να αναλυθεί σε πολύ μικρές περιοχές για τις οποίες ο όγκος ή το εμβαδόν ήταν γνωστό (Katz, 2019). Μαζί με αυτή την ιδέα ως κληρονομιά και σε συνδυασμό με την ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας δόθηκε η δυνατότητα να κατασκευαστούν νέα είδη καμπυλών αλλά και στερεών που δημιουργούνται από την περιστροφή αυτών των καμπυλών γύρω από μια

ευθεία του επιπέδου τους. Το νέο άπειρο πλήθος περιπτώσεων απαιτούσε νέες μεθόδους για τον υπολογισμό όγκου και εμβαδών, την εύρεση μεγίστου-ελαχίστου και εφαπτομένης.

Οι ιδέες που ανέπτυξε ο Newton πάνω στον λογισμό αφορούσαν την κίνηση και την ιδέα της κίνησης την έκανε θεμελιώδη. Τα δύο προβλήματα τα οποία θεωρούσε ως βασικά ήταν «1. Δοθέντος του μήκους της απόστασης συνεχώς να υπολογισθεί η ταχύτητα της κίνησης σε οποιαδήποτε στιγμή. 2. Δοθείσης της ταχύτητας της κίνησης συνεχώς να υπολογιστεί το μήκος του διαστήματος που έχει διανυθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.» (Katz, 2019, σ.582). Δεν όρισε ούτε την έννοια του χρόνου, ούτε την ταχύτητα, αλλά η έννοια της συνεχώς μεταβαλλόμενης κίνησης ήταν τελείως διαισθητική, διαίσθηση που χρησιμοποίησε και στην κατασκευή του διαφορικού και της παραγώγου, την οποία θα δούμε αναλυτικά παρακάτω εξετάζοντας τα μαθηματικά χειρόγραφα του Μαρξ. Αυτό που έχει φανεί ως εδώ είναι ότι είχε αντιληφτεί την έννοια της κίνησης και με τέτοιο τρόπο κατασκεύασε την θεωρία του.

Ενώ ο Newton προσέγγισε τον απειροστικό λογισμό μέσω των ιδεών του για την ταχύτητα και την απόσταση, ο Leibnitz τον προσέγγισε μέσω των αθροισμάτων και διαφορών, ενώ και οι δύο κατά τον Katz παρουσίαζαν το ενδιαφέρον τους κυρίως στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων οι οποίες υπήρχαν σε σημαντικά φυσικά προβλήματα της εποχής στον υπολογισμό εμβαδών (Katz, 2019). Αυτό από μόνο του αναδεικνύει την διαλεκτική σχέση που υπάρχει τόσο ανάμεσα στους διάφορους κλάδους των επιστημών όπως η φυσική και μαθηματικά, όσο και στην κοινωνική και οικονομική ανάπτυξη που υπάρχει στα πλαίσια της οποίας γίνονται οι όποιες επιστημονικές ανακαλύψεις.

Όσον αφορά τον Leibnitz η διαλεκτική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα αθροίσματα και τις διαφορές, όπου το ένα είναι η αντιστροφή του άλλου ήταν αυτή που οδήγησε την δική του προσέγγιση για τον λογισμό. Βλέπουμε δύο ταυτόχρονες, αλλά διαφορετικές προσεγγίσεις για το ίδιο θέμα ακριβώς γιατί ήταν διαφορετικό το φιλοσοφικό υπόβαθρο του καθενός. Η κύρια φιλοσοφική άποψη του Newton ήταν ο εμπειρισμός και ο μαθηματικός τρόπος σκέψης. Πίστευε ότι η γνώση αποκτάται από τον άνθρωπο μέσω της παρατήρησης και του πειράματος καθώς επίσης εισήγαγε την αρχή «δεν επινοώ υποθέσεις», υποδηλώνοντας ουσιαστικά το ότι η επιστήμη πρέπει να περιορίζεται σε ότι μπορεί να αποδεικνύει εμπειρικά.

Η τυπική λογική ήταν αρκετή για να τα θεμελιώνει και να τα αναπτύσσει. Όμως οι ιστορικές ανάγκες απαιτούσαν την μελέτη μεταβλητών μεγεθών που βρήκαν την έκφραση τους στον

απειροστικό λογισμό και η τυπική λογική πλέον δεν είναι αρκετή. Η εφαρμογή της διαλεκτικής στα μαθηματικά γίνεται αναγκαία όπως λέει ο Ένγκελς (2006):

η απλή διαδικασία απόδειξης υποχωρεί αποφασιστικά ...όλες οι αποδείξεις των ανώτερων μαθηματικών είναι λανθασμένες αν τις πάρουμε αυστηρά από την άποψη των στοιχειωδών μαθηματικών, δε γίνεται αλλιώς, αν θέλουμε, να αποδείξουμε τα αποτελέσματα, τα οποία αποκτήσαμε στον τομέα της διαλεκτικής, με τη βοήθεια της τυπικής λογικής (σ.174).

Τα παράδοξα του απείρου εμφανίζονται γιατί προσπαθήσαμε να εξηγήσουμε το άπειρο με την τυπική λογική.

Η επιστήμη έχει ανάγκη από άλματα, από την κίνηση της σκέψης σε ανώτερα ποιοτικά νέα αποτελέσματα, όπως αυτό του απειροστικού λογισμού, όπου κατά τον Κόπκιν η τυπική λογική δεν αφήνει τέτοια περιθώρια, η προώθηση τολμηρών ιδεών δεν μπορεί στην αρχή να υποστηρίζεται από αυστηρή λογική συνέπεια. Χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι δεν χρειάζονται συγκεκριμένα λογικά κριτήρια για την ανάπτυξη των νέων επιστημονικών θεωριών.

Μέσα στο παραπάνω πλαίσιο εξετάζουμε την ιστορική διαδρομή του απειροστικού λογισμού.

## Κεφάλαιο 4: Τα μαθηματικά χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ

### 4.1 Γιατί ασχολήθηκε ο Καρλ Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό

#### 4.1.1 Γιατί δεν ασχολήθηκε μόνο με την αριθμητική

Ένα ζήτημα που τίθεται στον πρόλογο της έκδοσης των *Μαθηματικών Χειρόγραφων* του Μαρξ είναι το τι τον παρακίνησε να προχωρήσει στον διαφορικό λογισμό από την μελέτη της άλγεβρας και της αριθμητικής του εμπορίου. Σίγουρα δεν ήταν κάτι τυχαίο, αλλά συνειδητή επιλογή, αφού οι Μαρξ και Ένγκελς θεωρούσαν υποχρέωση τους να δείξουν τον τρόπο με τον οποίο ο διαλεκτικός υλισμός είναι συνδεδεμένος με τις κοινωνικές επιστήμες όσο και με τις φυσικές και τα μαθηματικά, πράγμα που έκανε και ο ίδιος ο Ένγκελς με την *Διαλεκτική της Φύσης*.

Ένα στοιχείο είναι η φιλοσοφική άποψη του διαλεκτικού υλισμού για την ιστορική ανάπτυξη της γνώσης. Λέει ο Μαρξ (1987) στα χειρόγραφα του :

Η πραγματική και επομένως η πιο απλή σχέση του νέου με το παλιό αποκαλύπτεται μόλις το νέο αποκτήσει την τελική του μορφή, και μπορούμε να πούμε πως ο διαφορικός λογισμός απέκτησε αυτήν την σχέση μέσα από τα θεωρήματα του Τέιλορ και του Μακ Λωρρίν (σ.172).

Από το παραπάνω αναδεικνύεται η άποψη του διαλεκτικού υλισμού κατά την οποία η ανάπτυξη μια έννοιας ακολουθεί μια ιστορική πορεία, συνδέει το καινούριο με το παλιό με τρόπο διαλεκτικό και έτσι πετιέται, όπως έλεγε, το πέπλο του μυστηρίου που ντύνουν το διαφορικό λογισμό κάνοντας να φαίνονται τα μαθηματικά ως ταχυδακτυλουργίες (Μαρξ, 1987).

Η εμπορική αριθμητική ήταν η πρώτη αριθμητική που χρησιμοποιήθηκε ως απόρροια της συσσώρευσης πλούτου και την ανάγκη της καταγραφής του πλεονάσματος, αλλά και στα πλαίσια της ανταλλαγής και της αγοροπωλησίας της ατομικής ιδιοκτησίας της καπιταλιστικής κοινωνίας. Από αυτήν περάσαμε στην άλγεβρα που εμπεριέχει πιο αφηρημένες έννοιες χρησιμοποιώντας σύμβολα και πράξεις μεταξύ αφηρημένων ποσοτήτων, ακριβώς γιατί η καπιταλιστική κοινωνία μέσα από την ανάπτυξη της είχε δημιουργήσει

τεράστιο όγκων κερδών, νέων μεθόδων παραγωγής όπου η απλή αριθμητική δεν επαρκούσε και χρειαζόταν νέοι πιο γενικοί και καθολικοί κανόνες. Και από την άλγεβρα περνάμε στον διαφορικό λογισμό με την ανάγκη της καπιταλιστικής κοινωνίας να χειριστεί μεταβολές, όρια, να μελετήσει οικονομικά φαινόμενα στην εξέλιξη τους ώστε να προβλέψει, να ελαχιστοποιήσει τη χασούρα. Η μαθηματική σκέψη δηλαδή δεν είναι ένα έτοιμο εργαλείο αλλά αναπτύσσεται συνεχώς διαλεκτικά δεμένη με τις ανάγκες της εκάστοτε εποχής και κοινωνίας.

Ακόμη για τον διαλεκτικό υλισμό δεν μπορείς να κατανοήσεις μια ανώτερη έννοια αν δεν έχεις πρώτα κατανοήσει σε βάθος την κατώτερη με τις αντιθέσεις της. Η εμπορική αριθμητική έχει να κάνει με στατικές ποσότητες, στην άλγεβρα συναντούμε την μεταβλητότητα ενώ στον διαφορικό λογισμό έχοντας κατανοήσει πλήρως την μεταβλητότητα που εισήχθηκε πριν περνάς στην έννοια της κίνησης, της εξέλιξης ενός φαινομένου μέσα από ποσοτικές σχέσεις. χωρίς την άλγεβρα και την μεταβλητή ποσότητα ο διαφορικός λογισμός φαίνεται ως τεχνική και όχι ως αναγκαιότητα της μαθηματικής σκέψης.

Αναδεικνύεται έτσι ότι η διαλεκτική της μετάβασης από την ποσότητα ως καθορισμένο μέγεθος, στην ποσότητα σε διαδικασία μεταβολής και τελικά στην ποσότητα η οποία μέσα από την άρνηση της άρνησης γεννά ένα νέο ποιοτικό περιεχόμενο. Θα το δούμε πιο αναλυτικά στη συνέχεια όταν θα εξετάσουμε τη λειτουργία της παραγωγού. Μέσα από τη παράγωγο μετράς τον ρυθμό μεταβολής, την κίνηση, την αλλαγή. Πχ.  $f(x)=x^2$  και  $f(2)=4$  ενώ  $f'(x)=2x$  και  $f'(2)=4$ . Στο πρώτο παράδειγμα έχουμε έναν αριθμητικό υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης στο  $x=2$ , ενώ στο δεύτερο έχουμε την παράγωγο, τον ρυθμό μεταβολής στο  $x=2$ .

Τα παραπάνω αντιτίθενται στον εμπειρισμό, διότι ο εμπειρισμός τείνει να ανάγει τη γνώση σε άμεση αισθητηριακή εμπειρία και σε συσσώρευση παρατηρήσεων, αποκόπτοντας τις επιστημονικές έννοιες από την εσωτερική τους ανάπτυξη και αναγκαιότητα. Στο εμπειριστικό πλαίσιο, η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα και από την άλγεβρα στον διαφορικό λογισμό ερμηνεύεται ως απλή αύξηση της πολυπλοκότητας των εργαλείων επίλυσης προβλημάτων, και όχι ως ποιοτική μεταβολή της ίδιας της μαθηματικής σκέψης.

Ωστόσο, όπως αναδεικνύεται στην επιστημολογική ανάλυση του Γιώργου Ρουσόπουλου, τα μαθηματικά δεν αποτελούν απλή επαγωγική γενίκευση της εμπειρίας, αλλά ένα σύστημα εννοιών που αναπτύσσεται μέσω εσωτερικών εννοιολογικών μετατοπίσεων και ιστορικών

τομών (Ρουσόπουλος, 2022). Ο εμπειρισμός, επομένως, αδυνατεί να εξηγήσει γιατί η έννοια της μεταβλητής ή του ορίου δεν προκύπτει απλώς από παρατήρηση, αλλά από την ανάγκη υπέρβασης περιορισμών προηγούμενων μορφών μαθηματικής σκέψης. Έτσι, περιορίζεται σε μια περιγραφική προσέγγιση των φαινομένων, χωρίς να συλλαμβάνει τη γενετική δομή των εννοιών.

Αντίστοιχα, ο θετικισμός αντιτίθεται σε μια τέτοια ιστορική και εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών, καθώς επιχειρεί να τα αναγάγει σε πλήρως τυποποιημένα, λογικά συστήματα, αποκομμένα από τη διαδικασία συγκρότησής τους. Στο θετικιστικό πλαίσιο, οι μαθηματικές έννοιες όπως η συνάρτηση, το όριο και η παράγωγος αντιμετωπίζονται ως αυστηρά ορισμένα σύμβολα μέσα σε ένα κλειστό αξιωματικό σύστημα, χωρίς αναφορά στην εξέλιξη ή στις εσωτερικές αντιφάσεις που τις γέννησαν. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Ρουσόπουλο, μια τέτοια προσέγγιση παραγνωρίζει ότι η μαθηματική γνώση συγκροτείται ιστορικά μέσα από αλληπάλληλες εννοιολογικές αναθεωρήσεις και όχι ως στατική λογική δομή (Ρουσόπουλος, 2022).

Ο θετικισμός, συνεπώς, αποτυγχάνει να εξηγήσει γιατί η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα και τελικά στον διαφορικό λογισμό δεν είναι απλώς τεχνική εξέλιξη, αλλά αναγκαία αναδιάρθρωση του ίδιου του εννοιολογικού πλαισίου των μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο, η θετικιστική θεώρηση περιορίζει τη γνώση σε τυπική περιγραφή, αγνοώντας τη δυναμική και εξελικτική της διάσταση.

#### ***4.1.2 Γιατί ασχολήθηκε με τον απειροστικό λογισμό***

Τα μαθηματικά χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ είναι ένα σύνολο 1000 περίπου χειρόγραφων σε εργασίες πάνω στα μαθηματικά. Ένα τμήμα αυτών των χειρογράφων, που περιέχει τις απόψεις του Μαρξ πάνω στις αρχές του διαφορικού λογισμού, εκδόθηκε το 1968. Σε αυτά περιλαμβάνονται οι μελέτες του Μαρξ πάνω σε έργα μαθηματικών όπως του Newton, του Leibniz, του d' Alembert, του Lagrange, όπου προσεγγίζει κριτικά τις έννοιες του ορίου, της παραγώγου, του απειροστού.

Στο ερώτημα τι τον έκανε να ασχοληθεί με τον απειροστικό λογισμό, που δεν ήταν το κύριο αντικείμενο του ενδιαφέροντος του Μαρξ, υπάρχουν τουλάχιστον δύο απαντήσεις. Η μία είναι ότι ο Μαρξ στην διαδικασία της έρευνας του για κάποιο θέμα με το οποίο δεν

αισθανόταν πολύ εξοικειωμένος, εδώ με τον διαφορικό λογισμό, προσπαθούσε να γίνει τέλειος γνώστης του ως τα θεμέλια του αντικειμένου με το οποίο καταπιανόταν.

Ο δεύτερος λόγος, ο οποίος τον οδήγησε στην μελέτη του διαφορικού λογισμού ήταν η εφαρμογή των μαθηματικών στην πολιτική οικονομία στο πλαίσιο της προσπάθειας του να εμβαθύνει στις αφηρημένες μορφές κίνησης που διέπουν την καπιταλιστική παραγωγή ενασχόληση του αυτή δεν ήταν αποκομμένη από το συνολικό θεωρητικό του πρόγραμμα. Αντίθετα, εντάσσεται στη συνειδητή του προσπάθεια να κατανοήσει την οικονομία όχι ως στατική περιγραφή, αλλά ως σχέσεις σε συνεχή κίνηση. Η πολιτική οικονομία, όπως την ανέπτυξε στο *Κεφάλαιο*, απαιτεί τη σύλληψη της αξίας, της συσσώρευσης και της εκμετάλλευσης ως δυναμικά μεγέθη που μεταβάλλονται στην πάροδο του χρόνου. Σε αυτό το πλαίσιο ο απειροστικός λογισμός προσφέρει εκείνο το θεωρητικό υπόβαθρο της συνεχούς μεταβολής, επιτρέποντας τη σύλληψη της κίνησης, όχι ως σύνολο διακριτών καταστάσεων, αλλά ως συνεχή διαδικασία (Μαρξ, 2009).

Είναι χαρακτηριστικό αυτό που γράφει σε ένα γράμμα του προς τον Ένγκελς στις 31 Μάη του 1873: «Έχω προσπαθήσει επανειλημμένα, στην ανάλυση των κρίσεων, να υπολογίσω τις αυξομειώσεις θεωρώντας τες φανταστικές καμπύλες και σκέφτηκα να βγάλω από αυτά με μαθηματικό τρόπο έναν σπουδαίο νόμο για τις κρίσεις.» (Μαρξ, 1987, σ.17). Αναλύει στο γράμμα αυτό ότι οι τιμές που μελέτα για τα οικονομικά παρουσιάζονται με αυξήσεις ή μειώσεις στην πάροδο του χρόνου, πράγμα που σήμερα με την πρόοδο και την θεμελίωση του απειροστικού λογισμού μπορούμε εύκολα να κατανοήσουμε ότι ο λογισμός είναι αυτός που μπορεί να μελετήσει φαινόμενα σε εξέλιξη και όχι στατικά.

Η ενασχόληση του με τον διαφορικό λογισμό επικεντρώνεται σε θεμελιώδεις έννοιες όπως η παράγωγος, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης. Η σημασία της παραγώγου για τη σκέψη του Μαρξ δεν έγκειται στον τεχνικό της χαρακτήρα, αλλά στο γεγονός ότι εκφράζει τη μετάβαση από στατικές ποσότητες σε σχέσης μεταβολής. Στην πολιτική οικονομία, αντίστοιχα, οι οικονομικές κατηγορίες δεν μπορούν να κατανοηθούν ως αμετάβλητες ποσότητες, αλλά ως μεγέθη που μετασχηματίζονται μέσα στην ιστορική κίνηση της παραγωγής.

Η χρήση του απειροστικού λογισμού ως αναλογίας για την κατανόηση της οικονομικής κίνησης σχετίζεται με τη γενικότερη του μεθοδολογική αρχή ότι οι κοινωνικές μορφές πρέπει να αναλύονται ως διαδικασίες και όχι ως στατικές δομές. Όπως η παράγωγος περιγράφει τη

στιγμιαία μεταβολή μιας συνάρτησης, έτσι και οι οικονομικές κατηγορίες εκφράζουν στιγμιαίες ισορροπίες μέσα σε μια συνολική διαδικασία συσσώρευσης και κρίσης.

Ο Ένγκελς σημειώνει ότι η διαλεκτική μέθοδος απαιτεί τη μελέτη των φαινομένων ως κινήσεων και όχι ως απομονωμένων δεδομένων (Ένγκελς, 2005). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο η ενασχόληση του Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό μπορεί να θεωρηθεί ως προσπάθεια να βρεθεί μια έκφραση της κίνησης, ιδιαίτερα στο πεδίο της πολιτικής οικονομίας.

Τέλος, ο Μαρξ θέλει να διώξει τον «μυστικιστικό διαφορικό λογισμό του Νεύτωνα» (Μαρξ, 1987, σ.187) δείχνοντας ότι ο διαφορικός λογισμός δεν είναι θαύματα και μαγικά, όπως τα χρησιμοποιούν οι φορμαλιστές νομίζοντας πως έχουν να κάνουν μόνο με παιχνίδια σύμβολων, αλλά υπάρχει πίσω από αυτά τα σύμβολα η πραγματικότητα, η κίνηση, η μεταβολή, η εξέλιξη. Προσπάθησε να αποσαφηνίσει την διαλεκτική που υπάρχει στους συμβολικούς υπολογισμούς και «αφού κατανοήσει και διακρίνει τα πραγματικά από τα τεχνικά στοιχεία μέσα από τη διαλεκτική σχέση που συνδέονται, τότε αφαιρεί το συγκεκριμένο περιεχόμενο με το οποίο αναπτύχθηκε και τον χρησιμοποιεί πλέον τεχνικά και μόνο, δηλαδή τελεστικά.» (Μαρξ, 1987, σ.10).

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο Μαρξ μελετά τον απειροστικό λογισμό κυρίως μέσω κλασικών μαθηματικών έργων της εποχής του, επιχειρώντας να κατανοήσει τη λογική τους δομή. Δεν προσπαθεί να αναπτύξει ένα νέο σύστημα, αλλά να διερευνήσει τη μεθοδολογική συγγένεια μεταξύ της μαθηματικής ανάλυσης και της οικονομικής θεωρίας. Για τον Μαρξ τα μαθηματικά δεν είναι εξωτερικό εργαλείο, αλλά πιθανό μοντέλο για τη σύλληψη δυναμικών κοινωνικών σχέσεων. Η προσέγγιση του απειροστικού λογισμού λειτουργεί ως θεωρητικό εργαλείο σκέψης για την κατανόηση της καπιταλιστικής παραγωγής, ενισχύοντας τη συνολική επιστημονική αξία του έργου του. Οι έννοιες του διαφορικού λογισμού, όπως η παράγωγος, τον απασχολούν στο βαθμό που αυτές μπορούν να φωτίσουν τις έννοιες της μεταβολής και της δυναμικής στην πολιτική οικονομία.

Εν κατακλείδι, η αξία αυτών των χειρόγραφων δεν είναι μαθηματική, αλλά είναι φιλοσοφική και ιστορική, είναι μια υλιστική και διαλεκτική ανάλυση της γέννησης και της εξέλιξης μιας μαθηματικής έννοιας. Τα χειρόγραφα δεν περιέχουν νέες μαθηματικές αποδείξεις. Η ουσιαστική και σημαντική αξία των χειρογράφων είναι η μελέτη που κάνει ο Μαρξ στο πως εξελίσσεται ιστορικά η επιστημονική γνώση, εδώ ο απειροστικός λογισμός και οι έννοιες των απειροστών, είναι η αναλυτική σκέψη και ο διαλεκτικός τρόπος που χρησιμοποιεί ο Μαρξ

στην μελέτη των μαθηματικών (Μαρξ, 1987), η σύνδεση της φιλοσοφίας με τις επιστήμες και συγκεκριμένα τα μαθηματικά.

Αντιμετωπίζει τον διαφορικό λογισμό ως ζωντανή ύλη, προσπαθώντας να τον καταλάβει στο επίπεδο της πραγματικότητας και μετά μέσα από τη διαλεκτική σχέση που συνδέει τα πραγματικά από τα τεχνικά στοιχεία κάνει αφαίρεση του περιεχομένου και χειρίζεται εν προκειμένω το διαφορικό ως τελεστή.

## 4.2 Για την έννοια της παράγωγης συνάρτησης

Στα *Μαθηματικά Χειρόγραφα* του ο Μαρξ ασχολείται με τον τελεστικό ρόλο των συμβόλων. Αναφέρεται στον πρόλογο ότι όταν μια μέθοδος χρησιμοποιείται επανειλημμένα, τότε το ειδικό σύμβολο που χρησιμοποιείται στην μέθοδο αυτή υποδηλώνει την προέλευση της, όπως έλεγε ο ίδιος ο Μαρξ «την στρατηγική δράσης της» και αυτό το σύμβολο είναι διαφορετικό από το συμβολισμό που εισάγεται για την διαδικασία που ο Μαρξ αποτελούσε «πραγματικό», το οποίο κατά τον Μαρξ εισάγεται ως νέο και διαφορετικό γιατί αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μην κάνουμε κάθε φορά όλη την προηγούμενη διαδικασία από τη αρχή, έτσι που αφού έχουμε κατανοήσει την προέλευση του νέου συμβόλου, να μπορούμε να το χρησιμοποιούμε σαν αποτέλεσμα της προηγούμενης διαδικασίας χωρίς να την επαναλαμβάνουμε κάθε φορά. Όλα αυτά αναδεικνύονται από τις δύο εργασίες που έστειλε ο Μαρξ στον Ένγκελς. Η πρώτη αφορά την έννοια της παραγώγου συνάρτησης.

Στην έννοια της παραγώγου ο Μαρξ δεν βλέπει μια απλή τεχνική αλλά μια μορφή σχέσης, μια ποιοτική αλλαγή, μια μαθηματική μορφή της κίνησης κατά την οποία η μεταβολή είναι το όριο μιας εξαφανιζόμενης διαφοράς. Η παράγωγος μετράει την μεταβολή σε ένα διάστημα που τείνει στο μηδέν, μετράει δηλαδή την κίνηση, τον ρυθμό μεταβολής. Όταν το  $\Delta x \rightarrow 0$  και το  $\Delta y \rightarrow 0$  έχουμε  $0/0$  αριθμητικά, αλλά παίρνουμε ένα πραγματικό αποτέλεσμα ακριβώς γιατί σημασία δεν έχει η κάθε τιμή ξεχωριστά αλλά η αναλογία τους.

Έτσι μπορεί δύο ποσότητες να μηδενίζονται ωστόσο η σχέση που τις συνδέει παραμένει και δίνει πραγματικά αποτελέσματα. Αυτό ενδιαφέρει πολύ τον Μαρξ όχι ως μαθηματική έννοια, αλλά ως φιλοσοφικά σημαντικό για τον διαλεκτικό υλισμό. Για το Μαρξ το κεφάλαιο δεν είναι απλά χρήματα ή μέσα παραγωγής, είναι σχέση ανάμεσα σε αυτούς που έχουν τα μέσα παραγωγής και σε αυτούς που πουλούν την εργατική τους δύναμη. Είτε αλλάζουν οι

ιδιοκτήτες, εξελίσσονται οι μηχανές αλλάζουν και οι εργάτες, η εκμεταλλευτική σχέση παραμένει.

Ακόμη όταν  $\Delta x \rightarrow 0$  και το  $\Delta y \rightarrow 0$  έχουμε  $0/0$  αριθμητικά αλλά ο λόγος δίνει συγκεκριμένη τιμή πως γίνεται αυτό; Ο Μαρξ εδώ δε θεωρεί το  $0/0$  μαθηματικό λάθος, βλέπει μια εσωτερική αντίφαση μέσα στη σχέση των δύο ποσοτήτων οι οποίες χρειάζονται η μία την άλλη, για να μεταβληθεί το  $y$  σε  $y_1$  πρέπει πρώτα να μεταβληθεί το  $x$  σε  $x_1$ . Η μεταβολή γίνεται τόσο μικρή που στο τέλος εξαφανίζεται αλλά η σχέση αυτής της μεταβολής των δύο ποσοτήτων παράγει πραγματικό, συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Σε κοινωνικό επίπεδο έχουμε κεφάλαιο και εργασία. Το κεφάλαιο έχει ανάγκη την εργατική δύναμη για να παράγει υπεραξία, η εργατική τάξη έχει ανάγκη το κεφάλαιο για να επιβιώσει (μισθός) μέσα στις καπιταλιστικές σχέσεις παραγωγής. Αυτά τα δύο δεν υπάρχουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο αλλά ταυτόχρονα έχουν εντελώς αντίθετα συμφέροντα, αυτή η σύγκρουση συμφερόντων, αυτή η αντίφαση είναι που παράγει την νέα ποιοτικά ανώτερη μορφή κοινωνικής σχέσης. η κοινωνική αντίφαση δεν καταστρέφει άμεσα το σύστημα αλλά το ωθεί να μετασχηματιστεί σε μια νέα μορφή ποιοτικά ανώτερη από την προηγούμενη, οι εσωτερικές αντιφάσεις του καπιταλιστικού συστήματος είναι αυτές που οδηγούν στον μετασχηματισμό της καπιταλιστικής σχέσης σε άλλη μορφή αυτή των σοσιαλιστικών σχέσεων παραγωγής.

Παρακάτω δίνεται ο τρόπος με τον οποίο ο Μαρξ (1987) προσεγγίζει την έννοια της παραγωγού μέσα από συγκεκριμένες συναρτήσεις:

### 1<sup>η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Έχουμε την συνάρτηση  $y = ax$

Όταν το  $x$  αυξάνεται σε  $x_1$  τότε

$$y_1 = ax_1 \text{ και } y_1 - y = a(x_1 - x)$$

Σύμφωνα τώρα με την πράξη της διαφορίσης, ας θεωρήσουμε ότι το  $x_1$  παίρνει την τιμή  $x$ . Τότε:

$$x_1 = x, x_1 - x = 0 \text{ οπότε } a(x_1 - x) = a * 0 = 0$$

Επιπλέον επειδή το  $y$  γίνεται  $y_1$ , εξαιτίας της αύξησης του  $x$  σε  $x_1$ , έχουμε ταυτόχρονα:

$$y_1 = y, \quad y_1 - y = 0 \text{ οπότε η } y_1 - y = a(x_1 - x) \text{ γίνεται } 0=0.$$

Κάνοντας λοιπόν πρώτα διαφόριση και μετά αναιρώντας την οδηγούμαστε κυριολεκτικά στο τίποτα. Όλη η δυσκολία στην κατανόηση της πράξης της διαφόρισης βρίσκεται ακριβώς στο να διακρίνουμε σε τι διαφέρει από μια τέτοια απλή διαδικασία και γι' αυτό οδηγεί σε πραγματικά αποτελέσματα.

Αν διαιρέσουμε το  $a(x_1 - x)$  και το αριστερό μέλος της αντίστοιχης εξίσωσης με τον παράγοντα  $x_1 - x$  παίρνουμε

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Επειδή το  $y$  είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, δεν μπορεί να κάνει καμία ανεξάρτητη κίνηση και συνεπώς το  $y_1$  δεν μπορεί να γίνει ίσο με το  $y$  και έτσι το  $y_1 - y = 0$ , χωρίς πρώτα το  $x_1$  να γίνει ίσο με το  $x$ .

Από την άλλη, είδαμε ότι το  $x_1$  δεν μπορεί να γίνει ίσο με το  $x$  στη συνάρτηση  $a(x_1 - x)$  χωρίς η τελευταία να γίνει  $=0$ . Ο παράγοντας  $x_1 - x$  ήταν συνεπώς απαραίτητα μια πεπερασμένη διαφορά όταν τα δύο μέλη της εξίσωσης διαιρέθηκαν με αυτόν.

Συνεπώς τη στιγμή της κατασκευής του λόγου  $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$  το  $x_1 - x$  είναι πάντα μια πεπερασμένη διαφορά. Αυτό συνεπάγεται ότι το  $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$  είναι ένας λόγος

πεπερασμένων διαφορών και αντίστοιχα  $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Άρα  $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$  ή  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$  όπου η σταθερά  $a$  παριστάνει την οριακή τιμή του λόγου των πεπερασμένων διαφορών των μεταβλητών. Επειδή το  $a$  είναι σταθερό, δεν μπορεί να μεταβληθεί συνεπώς στο δεξιό μέλος της εξίσωσης που έχει γίνει ίσο με  $a$  δεν μπορεί να συμβεί τίποτα, κάτω από

αυτές τις προϋποθέσεις η διαδικασία της διαφορίσης επιτελείται στο αριστερό μέλος

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ή } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Και αυτό είναι χαρακτηριστικό τέτοιων απλών συναρτήσεων όπως η  $ax$ .

Αν στον παρονομαστή αυτού του λόγου, το  $x_1$  μειώνεται ώστε να προσεγγίσει το  $x$ , τότε φτάνει στο όριο της μείωσης του μόλις το  $x_1$  γίνει ίσο με το  $x$ . τότε η διαφορά γίνεται

$$x_1 - x_1 = x - x = 0, \text{ οπότε επίσης } y_1 - y = y - y = 0.$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει  $\frac{0}{0} = a$ .

Επειδή στην έκφραση  $\frac{0}{0}$  έχει χαθεί κάθε ίχνος από την προέλευση και σημασία της, την αντικαθιστούμε με το  $\frac{dy}{dx}$ , στο οποίο οι πεπερασμένες διαφορές  $x_1 - x$  ή  $\Delta x$  και  $y_1 - y$  ή  $\Delta y$  εμφανίζονται συμβολικά ως αναιρούμενες ή μηδενισμένες διαφορές. Με άλλα λόγια το  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  γίνεται  $\frac{dy}{dx}$ .

Οπότε  $\frac{dy}{dx} = a$  (σ. 49-51).

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μια συνάρτηση στην οποία για κάθε τιμή του  $x$  αντιστοιχεί μια στατική τιμή του  $y$ . Έχουμε δηλαδή μια αλγεβρική σχέση ανάμεσα σε ποσότητες η οποία είναι στατική. Τον Μαρξ τον ενδιαφέρει η μελέτη της κίνησης, δηλαδή το πως μεταβάλλεται η εξαρτημένη τιμή  $y$  καθώς αλλάζει το  $x$ .

Η πρώτη ρήξη της ακινησίας έρχεται όταν το  $x$  γίνεται  $x_1$ , τότε και το  $y$  γίνεται  $y_1$ , επομένως η διαφορά γίνεται  $y_1 - y = a(x_1 - x)$ , διαφορά που μας δείχνει πως μεταβάλλεται το  $y$  όταν αλλάζει το  $x$ . Ωστόσο αυτό που θέλουμε να μελετηθεί είναι ο ρυθμός μεταβολής  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , γιατί αυτή η διαφορά  $\Delta y$  δεν είναι απλώς μια πράξη αλλά μια διαδικασία κατά την οποία η ποσότητα αυτοαναιρείται και παράγει κάτι νέο τον ρυθμό μεταβολής της. Για να το κάνει αυτό διαιρεί με τον παράγοντα  $x_1 - x$  και εξηγεί γιατί μπορεί να διαιρέσει, γιατί δηλαδή δεν

είναι 0 αυτή η ποσότητα. Ο Μαρξ σε μια διαλεκτική σύνδεση της φιλοσοφίας και των μαθηματικών λέει ότι εφόσον το  $y$  είναι εξαρτημένη μεταβλητή δεν μπορεί να δράσει ανεξάρτητα από το  $x$ , έτσι για να μπορέσει το  $y$  να γίνει ίσο με το  $y_1$  πρέπει πρώτα το  $x$  να γίνει ίσο με το  $x_1$ . Επομένως τη στιγμή που δημιουργείται ο λόγος των πεπερασμένων διαφορών αυτό δεν έχει γίνει ακόμα και έτσι μου δίνεται η δυνατότητα να διαιρέσω με το  $x_1 - x$  και να δημιουργήσω έναν λόγο πεπερασμένων διαφορών, έναν ρυθμό μεταβολής

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha.$$

Όταν συντελείται η διαδικασία της διαφορίσης κατά τον Μαρξ αυτή συντελείται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αφού το δεξί είναι μια σταθερά. Όταν το  $x_1$  πάρει την τιμή του  $x$ , φτάσει δηλαδή στο όριο της μείωσης του, τότε και το  $y_1$  παίρνει την τιμή  $y$ , έχουμε δηλαδή μια δεύτερη διαφορίση, μια άρνηση της άρνησης, και έτσι μηδενίζονται οι διαφορές οπότε έχω  $\frac{0}{0} = \alpha$ .

Σε αυτό το σημείο στην έκφραση  $\frac{0}{0}$  λέει ο Μαρξ «έχει χαθεί κάθε ίχνος από την προέλευση και τη σημασία της, την αντικαθιστούμε με το  $\frac{dy}{dx}$ , στο οποίο οι πεπερασμένες διαφορές εμφανίζονται συμβολικά ως αναιρούμενες ή μηδενισμένες διαφορές και έχουμε τελικά  $\frac{dy}{dx} = \alpha$ » (Μαρξ, 1987, σ.50).

Στην προσέγγιση του Μαρξ προκύπτει ότι η οριακή σχέση  $\frac{0}{0} = \alpha$ . Από τη σκοπιά της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης η έκφραση  $\frac{0}{0}$  αποτελεί μια απροσδιόριστη μορφή και η παράγωγος δεν ορίζεται ως πηλίκο μηδενικών ποσοτήτων, αλλά ως όριο του λόγου μεταβολών. Ο Μαρξ όμως επιλέγει συνειδητά αυτή τη διατύπωση για να αναδείξει ότι στην έκφραση  $\frac{0}{0}$  έχει χαθεί κάθε ίχνος από τη στατική αριθμητική προέλευση των μεγεθών, αλλά διατηρείται η εσωτερική σχέση των μεταβολών τους. Για το λόγο αυτό η στατική μορφή αντικαθιστάται από το  $\frac{dy}{dx}$ , στο οποίο οι πεπερασμένες διαφορές  $\Delta x, \Delta y$  εμφανίζονται συμβολικά ως αναιρούμενες ή μηδενισμένες διαφορές, λειτουργώντας πλέον ως ένας νέος ποιοτικά ανώτερος τελεστής.

Εφόσον έχουμε οδηγηθεί από την προηγούμενη διαδικασία άρνηση της άρνησης σε μια νέα ποιότητα τότε μπορούμε να δώσουμε έναν νέο συμβολισμό στο αποτέλεσμα, συμβολισμό

που περιλαμβάνει μέσα του όλη την προηγούμενη διαδικασία, που όμως τον χρησιμοποιούμε πλέον τελεστικά για να μην κάνουμε πάντα από την αρχή αυτήν την διαδικασία.

Έτσι κατά τον Μαρξ το νέο αυτό σύμβολο γίνεται το αυτόνομο σημείο εκκίνησης για την επόμενη διαδικασία(η νέα ποιότητα τώρα με τη σειρά της στα πλαίσια της αέναης εξέλιξης, υπόκειται σε συνεχείς μεταβολές οι οποίες οδηγούν πάλι σε μια άλλη νέα ποιότητα) πράγμα που φαίνεται πιο καθαρά σε συναρτήσεις δεύτερης τάξης και πάνω.

Ο Μαρξ μάλιστα αναφέρει ότι τα  $dx$  και  $dy$  δεν είναι απειροελάχιστες ποσότητες που προσεγγίζουν το  $\frac{0}{0}$  όπως υποστηρίζουν πολλοί μαθηματικοί, αλλά είναι  $\frac{0}{0}$ . Αυτό το τελευταίο το αναδεικνύει μέσα από μια άλλη περίπτωση την συνάρτηση  $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$ , μια συνάρτηση που παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον γιατί δεν είναι όπως η προηγούμενη γραμμική και χωρίς καμπυλότητα, πράγμα που την κάνει σταθερή άρα προβλέψιμη, αφού η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή. Ενώ η παραπάνω συνάρτηση που μελετά στα χειρόγραφα του έχει παράγωγο μια συνάρτηση που συνεχίζει να εξαρτάται από το  $x$ , μια ακόμη περίπτωση που αναλύει ο Μαρξ (1987):

## 2<sup>η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Έχουμε την συνάρτηση  $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$

Το  $x$  αυξάνεται σε  $x_1$  οπότε έχουμε:

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e$$

$$\begin{aligned} y_1 - y &= a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) \\ &= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + b((x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x) \end{aligned}$$

Επομένως έχω

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c \text{ (σ.52).}$$

Όταν όμως η μεταβλητή  $x_1$  ελαττώνεται μέχρι να φτάσει το όριο της μείωσης της τότε το  $x_1$  γίνεται  $x$  άρα έχω τελικά

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$$

η οποία είναι η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης.

Στην παραπάνω διαδικασία ο Μαρξ αποδεικνύει την παράγωγο χωρίς καθόλου να χρησιμοποιήσει απειροστά αλλά και «μυστικιστικές» εξαλείψεις όρων που έκαναν οι μαθηματικοί στηριζόμενοι στην διαίσθηση τους για το αποτέλεσμα, κάτι που θα δούμε παρακάτω στις μεθόδους του Newton και του Lagrange. Αυτό οφείλεται ακριβώς στον διαλεκτικό υλισμό με τον οποίο ο Μαρξ προσπάθησε να εξηγήσει την παράγωγο συνάρτησης.

Από την μία λόγω της σκέψης ότι το  $\chi_1$  θα γίνει ακριβώς  $\chi$ , χρειάζεται η μετατόπιση του για να εκφραστεί η μεταβολή, αλλά μετά αναιρείται για να καταλήξεις στο ουσιαστικό περιεχόμενο, συντελείται δηλαδή μια άρνηση της άρνησης που είναι η παράγωγος, και από την άλλη αλλάζοντας τον τελεστή από  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  σε  $\frac{dy}{dx}$  εφόσον έχει ολοκληρωθεί η προηγούμενη διαδικασία και περνάει το αποτέλεσμα της σε ένα νέο συμβολισμό, ο οποίος εμπεριέχει μέσα του την προηγηθείσα διαδικασία το περιεχόμενο της οποίας εμφανίζεται πλέον στο δεξιό μέρος της εξίσωσης και τώρα γίνεται ο ίδιος αφετηρία για μια νέα διαδικασία παραγωγίσιμης. Όπως αναφέρει ο Μαρξ στα χειρόγραφα του «τα σύμβολα  $\frac{d^2y}{d^2x}, \frac{d^3y}{d^3x}$ , κτλ, δηλώνουν απλά τη γενεαλογική εξέλιξη των «παραγώγων» σχετικά με την παράγουσα συνάρτηση του  $\chi$ » (Μαρξ, 1987, σ.55).

Τελικά η παράγωγος εκφράζει την τάση της ποσότητας  $y$  να μεταβάλλεται σε σχέση με το  $\chi$ , την δυναμική μορφή που ενσωματώνει ολόκληρη η διαδικασία της μεταβολής, την εσωτερική κίνηση της ίδιας της συνάρτησης, ένα γνωστικό άλμα από το στατικό που είναι ο τύπος της συνάρτησης στο δυναμικό που είναι η παράγωγος. Η παράγωγος παράγεται μέσα από μια διαδικασία διαφοράς και άρσης της, μια παραγωγική και όχι στατική σχέση πράγμα που ταυτίζεται με την ίδια την έννοια της γνώσης η οποία κατά τον διαλεκτικό υλισμό δεν είναι απλώς η περιγραφή του κόσμου, αλλά μια διαδικασία αποκάλυψης του πραγματικού κόσμου.

Ο Μαρξ στα χειρόγραφα του περιλαμβάνει και εργασίες για το διαφορικό αναλύοντας την συνάρτηση  $y = uz$  και αυτό γιατί τα πράγματα είναι διαφορετικά σε μια τέτοια συνάρτηση. Η συνάρτηση της μορφής

$$y = ax^3 + bx^2 + cx - e$$

είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση με παράγωγο την

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Αυτή η συνάρτηση εκφράζει μια πλήρως καθορισμένη πορεία με την μορφή της σχέσης να παραμένει ίδια όσο αλλάζει το  $x$ , έχει η σχέση αυτή ποσότητα αλλά δεν έχει εσωτερική αντίφαση. Ενώ η συνάρτηση  $y = uz$  είναι πολύ διαφορετική. Αν το  $u$  είναι σταθερό τότε πρόκειται για μια γραμμική σχέση, αν όμως το  $u$  μεταβάλλεται με το  $z$  τότε η μορφή δεν είναι επακριβώς γνωστή, αυτό καθιστά τη σχέση αυτή πιο ανοιχτή. Υπάρχει χώρος για εσωτερική αντίφαση και εξέλιξη αφού το  $u$  μπορεί να αλλάζει, να εξαρτάται από το  $z$  ή και από άλλες μεταβλητές, το  $y$  δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο δηλαδή το  $x$  αλλά και από το μέσο, τη σχέση  $u$ , για αυτό υπάρχει εσωτερική κίνηση, η μορφή της σχέσης καθορίζει και το περιεχόμενο.

### 4.3 Για το διαφορικό

Ο τρόπος με τον οποίο ο Μαρξ (1987) αναλύει το διαφορικό για την συνάρτηση  $y = uz$  δίνεται παρακάτω:

Έστω ότι το  $y$  γίνεται  $y_1$  τότε έχω  $y_1 = u_1x_1$

Η διαφορά γίνεται:  $y_1 - y = u_1z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z)$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ή } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = z_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Στο δεξιό μέλος έστω  $x_1 = x$  οπότε  $x_1 - x = 0$ , όμοια έχω  $u_1 - u = 0, z_1 - z = 0$

και έστω στο αριστερό μέλος  $y_1 - y = 0$ . Τότε προκύπτει η εξίσωση Α)

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx} \text{ ή } dy \text{ ή } d(uz) = zdu + u dz \text{ (σ.62).}$$

Και εδώ ο Μαρξ αναλύει το διαφορικό της συγκεκριμένης συνάρτησης προσπαθώντας να ξεκαθαρίσει, όχι τον τύπο, αλλά ότι τα  $du$ ,  $dy$ ,  $dz$  δεν είναι κάποια απειροστά όπου εισέρχονται στον τύπο με κάποια μεταφυσική διαδικασία, αλλά είναι αποτέλεσμα της

οριακής διαδικασίας, δηλαδή το διαφορικό προκύπτει από το όριο του λόγου μεταβολών  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Στην αρχή γράφει

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z)$$

δηλαδή σπάει τη μεταβολή σε δύο μέρη το ένα λόγω της αλλαγής του  $u$  και το άλλο λόγω της αλλαγής του  $z$ . Μέχρι στιγμής δεν εμφανίζεται κανένα απειροστό. Αμέσως μετά διαιρεί με τη μεταβολή του  $x$ , δηλαδή μετατρέπει την απλή διαφορά σε ρυθμό μεταβολής και παίρνει

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ή } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = z_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Εδώ ο Μαρξ αναφέρεται στη στιγμή όπου οι διαφορές μηδενίζονται και μας μένει τελικά

$$dy \text{ ή } d(uz) = zdu + u dz.$$

Ο Μαρξ δουλεύει με πραγματικές διαφορές ( $y_1 - y$ ) και με λόγους διαφορών και πηγαίνει από την διαφορά στο διαφορικό βάζοντας τις μεταβολές μηδέν, ( σήμερα στο όριο αντί για  $x_1 = x \rightarrow x_1 - x = 0$  βάζουμε  $\lim x_1 \rightarrow x$  ) δεν μιλάει δηλαδή για κάτι πολύ μικρό, αλλά για μηδέν. Βλέπει ο Μαρξ το διαφορικό ως ανάλυση της μεταβολής και όχι ως απειροστό όπως ο Leibniz ή ως φυσικό ρυθμό όπως ο Newton.

### Η μέθοδος του Newton

Ο Newton δεν χρησιμοποιεί διαφορικά αλλά τις λεγόμενες «ροές» δηλαδή ρυθμούς μεταβολής στον χρόνο. Για τον Newton οι βασικές ιδέες για τον λογισμό αφορούσαν την κίνηση( Katz, 2019). Με βάση την μέθοδο που χρησιμοποιούσε, για την συνάρτηση  $y = u * z$ , όπου οι  $u, z$  συναρτήσεις του χρόνου  $t$  έχουμε : παίρνει πρώτα τον ρυθμό μεταβολής

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(u * z),$$

έπειτα χρησιμοποιεί τον κανόνα του γινομένου και παίρνει

$$y = \dot{u} * z + u * \dot{z}.$$

Για τον Newton τα  $\dot{u}, \dot{z}$  είναι ταχύτητες μεταβολής, δεν υπάρχουν καθόλου απειροστά και όλα βασίζονται στην κίνηση στο χρόνο.

### Η μέθοδος του Lagrange

Ο Lagrange στη μέθοδο του δεν χρησιμοποιεί ούτε τα απειροστά του Leibniz ούτε τις ροές του Newton, αλλά το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor και κάνει μια αλγεβρική μέθοδο. Ξεκινά από μια συνάρτηση  $f(x)$  και την αναπτύσσει σε σειρά Taylor ως εξής:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots$$

Ο διαφορικός συντελεστής (παράγωγος) προκύπτει ως ο συντελεστής του  $h$ .

Και οι τρεις μέθοδοι οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα αλλά διαφέρουν στην ουσία ως προς τη φιλοσοφική βάση και την μαθηματική θεμελίωση. Ο Lagrange προσεγγίζει το πρόβλημα με έναν αλγεβρικό τρόπο και ο Μαρξ έδωσε τεράστια σημασία σε αυτόν τον τρόπο γιατί δεν εμπεριέχονται οι τότε ασαφείς έννοιες των απειροστών και του ορίου (Μαρξ, 1987), αλλά και γιατί ο Lagrange δείχνει πως ο διαφορικός λογισμός προκύπτει από την άλγεβρα. Γεφυρώνει το παλιό με το νέο, κάτι το οποίο ταιριάζει απόλυτα με τη φιλοσοφική αντίληψη του Μαρξ ότι η εξέλιξη έχει ιστορική συνέχεια. Ωστόσο μέσα από την μελέτη αυτής της μεθόδου την θεώρησε ανεπαρκή ως μέθοδο, όπως γράφει ο ίδιος «δεν μπορούσε να επιλύσει τις δυσκολίες σχετικά με τη θεμελίωση του διαφορικού λογισμού» (Μαρξ, 1987, σ.21). Για τον Μαρξ ο διαφορικός λογισμός έχει ποιοτική διαφορά από την άλγεβρα, είναι ποιοτικά ανώτερος.

Ακόμα, ο Μαρξ παρατηρεί « η πραγματική σχέση του νέου με το παλιό αποκαλύπτεται μόλις το νέο αποκτήσει την τελική του μορφή... ο διαφορικός λογισμός απέκτησε αυτή τη σχέση μέσα από τα θεωρήματα του Taylor και Μακ-Λωρίν» (Μαρξ, 1987, σ.35).

Ο Newton εισάγει την έννοια των ροών, δηλαδή των ρυθμών μεταβολής ως προς τον χρόνο. Η προσέγγιση του είναι περισσότερο φυσική, συνδέοντας άμεσα τα μαθηματικά με την έννοια της κίνησης. Ωστόσο κατά τον Μαρξ η μέθοδος αυτή παραμένει σε ένα επίπεδο διαισθητικής σύλληψης της κίνησης και δεν παρέχει αυστηρή θεμελίωση της παραγώγου, αφού δεν εξηγεί επαρκώς τη μετάβαση από τη μεταβολή στο διαφορικό μέγεθος.

Ο Μαρξ ακολουθεί έναν διαφορετικό τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω. Ξεκινά από πεπερασμένες διαφορές, συγκρίνοντας δύο καταστάσεις της συνάρτησης και αναλύει αλγεβρικά τη μεταβολή  $y_1 - y$ . Στη συνέχεια διαιρεί με τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής και, χωρίς να εισάγει την έννοια του ορίου, περνά στο διαφορικό θέτοντας μηδέν τις διαφορές. Καταλήγει στον ίδιο τύπο, αλλά η διαδικασία που ακολουθεί αποτελεί μια

διαλεκτική μετάβαση από το πεπερασμένο στο απειροστό. Ο Μαρξ μελέτησε με σεβασμό τις μεθόδους των μεγάλων αυτών επιστημών και παρόλο που δεν ήταν μαθηματικός, ο διαλεκτικός τρόπος σκέψης του επέτρεψε να κατανοήσει την ανεπάρκεια αυτών των μεθόδων, τις εννοιολογικές δυσκολίες των πρώιμων μορφών του διαφορικού λογισμού, του οποίου η αυστηρή θεμελίωση επετεύχθη αργότερα μέσω της θεμελίωσης της έννοιας του ορίου.

#### **4.4 Ο Μαρξ, ο διαφορικός λογισμός και η διαλεκτική μέθοδος. Από την αναλυτική σκέψη στην έννοια του τελεστή.**

Ο Μαρξ μέσα από τη ανάλυση που κάνει στα χειρόγραφα αναδεικνύει την άποψη του διαλεκτικού υλισμού κατά την οποία οι έννοιες, εν προκειμένω μαθηματικές, δεν είναι ουρανοκατέβατες επιφοιτήσεις. Η έννοια έχει ιστορία, αναπτύσσεται ιστορικά μέσα από τις πρακτικές ανάγκες του ανθρώπου, αναπτύσσονται μέσα από αντιφάσεις στην υπάρχουσα θεωρία και προβλήματα που προκύπτουν και μετά σταθεροποιούνται. Είναι χαρακτηριστικό πως στο διαφορικό λογισμό βλέπει μια ποσότητα που μηδενίζεται, αλλά διατηρεί την σχέση και παράγει ένα νέο περιεχόμενο ποιοτικά ανώτερο από το προηγούμενο.

Φαίνεται καθαρά ότι ο διαφορικός λογισμός εμφανίστηκε από την ανάγκη που γεννήθηκε να υπολογιστούν ταχύτητες, ρυθμοί μεταβολής και άλλα, αποτέλεσε δηλαδή απάντηση σε ένα υπαρκτό πρόβλημα δεν γεννήθηκε στη σφαίρα της μαθηματικής φαντασίας. Οι έννοιες στην αρχή μπορεί να παρουσιάζουν ασάφειες και δυσκολίες αλλά μετασχηματίζονται, παίρνουν νέα μορφή, χωρίς να διαγράφουν την παλιά, αλλά την ενσωματώνουν σε ποιοτικά ανώτερο επίπεδο.

Μάλιστα για τον διαλεκτικό υλισμό οι αντιφάσεις αποτελούν την κινητήρια δύναμη για την ανάπτυξη των εννοιών και όχι ως προβλήματα που πρέπει να αποφύγουμε. Αντίθετα οι σημερινές κυρίαρχες τάσεις όπως φορμαλισμός, πλατωνισμός, στρουκτουραλισμός κ.α. αντιμετωπίζουν τις έννοιες, όχι ως ιστορικές διαδικασίες, αλλά ως τυπικά αντικείμενα μέσα σε τυπικά συστήματα, θεμελιωμένα μέσα από αξιώματα χωρίς να τους απασχολεί η ιστορική γέννηση της έννοιας. Φαίνονται έτσι τα μαθηματικά ως παιχνίδι του μυαλού που πρώτα αναπτύσσονται αυτά και μετά βρίσκουν την εφαρμογή τους, ενώ κατά τον διαλεκτικό υλισμό ισχύει το ανάποδο η ανάγκη της πρακτικής εφαρμογής για την κατανόηση του πραγματικού

κόσμου οδηγεί στην ανάπτυξη των εννοιών, ανεξάρτητα από το αν η θεωρητική γνώση σήμερα έχει φτάσει σε τόσο υψηλό επίπεδο που πολλές φορές ξεχνιέται η σύνδεση της με την πραγματικότητα.

Σε αυτό το πλαίσιο, ο διαφορικός λογισμός δεν αντιμετωπίζεται απλώς ως ένα σύνολο τεχνικών υπολογισμών, αλλά ως μορφή σκέψης που συλλαμβάνει την ίδια την κίνηση της πραγματικότητας. Η έννοια της παραγώγου, για παράδειγμα, δεν είναι απλώς ένα μαθηματικό εργαλείο, αλλά μια αφηρημένη έκφραση του ρυθμού μεταβολής ενός φαινομένου. Η παράγωγος ορίζεται τυπικά ως:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ωστόσο, στη διαλεκτική ανάγνωση που επιχειρεί ο Μαρξ, η σημασία αυτής της σχέσης δεν περιορίζεται στον τυπικό της ορισμό. Αντίθετα, η παράγωγος γίνεται κατανοητή ως έκφραση της εσωτερικής κίνησης ενός συστήματος, ως στιγμιαία σύλληψη της μεταβολής που χαρακτηρίζει ένα φαινόμενο. Με αυτόν τον τρόπο, ο διαφορικός λογισμός αποκτά εννοιολογικό βάθος πέρα από την καθαρά τεχνική του χρήση, καθώς συνδέεται με τη φιλοσοφική έννοια της κίνησης ως θεμελιώδους χαρακτηριστικού της πραγματικότητας.

Η προσέγγιση αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως διαλεκτική, διότι δεν περιορίζεται στη στατική ανάλυση αυτών των στοιχείων, αλλά επιχειρεί να κατανοήσει τη δυναμική τους σχέση και τη διαδικασία μέσω της οποίας αυτά μετασχηματίζονται σε ανώτερες μορφές σκέψης.

Αξίζει να τονιστεί η στάση του απέναντι στη μετάβαση από τη «ζωντανή» μαθηματική διαδικασία στην αφηρημένη τυπική της αναπαράσταση. Ο Μαρξ προσεγγίζει τον διαφορικό λογισμό ως μια μορφή «ζωντανής ύλης» της σκέψης, δηλαδή ως ένα πεδίο όπου η κίνηση, η μεταβολή και η συνέχεια δεν είναι εξωτερικά επιβαλλόμενες έννοιες, αλλά εσωτερικά στοιχεία. Η μαθηματική αφαίρεση δεν καταργεί αυτή τη ζωντανή διάσταση, αλλά τη μετασχηματίζει σε τυπική δομή.

Σε αυτό το σημείο αναδεικνύεται η διαλεκτική διαδικασία της αφαίρεσης. Ο Μαρξ δεν απορρίπτει το εμπειρικό ή «πραγματικό» περιεχόμενο των εννοιών, αλλά το ενσωματώνει σε ένα υψηλότερο επίπεδο θεωρητικής σύλληψης. Η αφαίρεση δεν σημαίνει απώλεια περιεχομένου, αλλά μετασχηματισμό του σε πιο γενική μορφή. Έτσι, ο διαφορικός λογισμός

μπορεί να ιδωθεί όχι ως αποκοπή από την πραγματικότητα, αλλά ως αναγωγή της πραγματικότητας σε μορφή σχέσεων.

Σε αυτό το πλαίσιο, η έννοια του διαφορικού ως τελεστή αποκτά ιδιαίτερη σημασία. Ο τελεστής δεν είναι πλέον απλώς ένα υπολογιστικό εργαλείο, αλλά μια μορφή σχέσης που δρα πάνω σε συναρτήσεις και μετασχηματίζει τη δομή τους. Η σκέψη του Μαρξ, αν και δεν εκφράζεται με τη σύγχρονη μαθηματική ορολογία της θεωρίας τελεστών, κινείται προς μια τέτοια κατανόηση ότι η μαθηματική πράξη δεν είναι στατική, αλλά διαδικασία μετασχηματισμού.

Αυτή η προσέγγιση διαφοροποιείται ριζικά από μια καθαρά φορμαλιστική ή θετικιστική θεώρηση των μαθηματικών. Στον φορμαλισμό, οι μαθηματικές έννοιες αντιμετωπίζονται ως σύμβολα εντός ενός κλειστού συστήματος κανόνων, αποκομμένου από οποιαδήποτε αναφορά σε πραγματικότητα ή κίνηση. Αντίθετα, στη διαλεκτική ανάγνωση που επιχειρεί ο Μαρξ, οι μαθηματικές αφαιρέσεις έχουν νόημα μόνο στο βαθμό που αντανακλούν πραγματικές σχέσεις και διαδικασίες.

Η σημαντική συνεισφορά αυτής της προσέγγισης δεν εντοπίζεται, επομένως, στο πεδίο της καθαρά μαθηματικής εξέλιξης, αλλά στη μεθοδολογική αναδιάρθρωση του τρόπου με τον οποίο κατανοούνται οι αφηρημένες έννοιες. Ο Μαρξ δεν προσφέρει νέα μαθηματικά θεωρήματα, αλλά μια διαφορετική επιστημολογική οπτική: ότι οι αφαιρέσεις δεν είναι αυθύπαρκτες λογικές οντότητες, αλλά ιστορικά και υλικά προσδιορισμένες μορφές σκέψης.

Η συμβολή αυτή είναι κρίσιμη για την ανάπτυξη του διαλεκτικού υλισμού, καθώς δείχνει πώς η επιστημονική σκέψη μπορεί να συλλάβει την πραγματικότητα όχι ως σύνολο στατικών αντικειμένων, αλλά ως δίκτυο σχέσεων σε συνεχή μεταβολή. Ο διαφορικός λογισμός λειτουργεί εδώ ως προνομιακό παράδειγμα αυτής της σύλληψης, καθώς ενσωματώνει την έννοια της κίνησης στη δομή του ίδιου του μαθηματικού φορμαλισμού.

#### **4.5 Ο διαφορικός λογισμός ως «άρνηση της άρνησης» και η παραγωγή πραγματικών αποτελεσμάτων**

Για τον Ένγκελς, η έννοια της «άρνησης της άρνησης» περιγράφει μια διαδικασία μέσω της οποίας ένα φαινόμενο δεν καταργείται απλώς, αλλά μετασχηματίζεται σε ανώτερη μορφή

ύπαρξης, διατηρώντας ταυτόχρονα στοιχεία της προηγούμενης κατάστασής του (Ένγκελς, 2005). Αυτή η λογική μπορεί να φωτίσει με ιδιαίτερο τρόπο τη δομή του διαφορικού λογισμού, όπου η μαθηματική διαδικασία της παραγωγίσης δεν αποτελεί απλή αποδόμηση μιας συνάρτησης, αλλά μετατροπή της σε νέα μορφή σχέσης: τον ρυθμό μεταβολής.

Ο διαφορικός λογισμός ξεκινά από μια αρχική συνάρτηση  $f(x)$ , η οποία εκφράζει μια ποσότητα ως στατική σχέση τιμών. Μέσω της διαδικασίας του ορίου, η συνάρτηση “αρνείται” την άμεση στατικότητα της και μετασχηματίζεται σε μια νέα μαθηματική οντότητα, την παράγωγο  $f'(x)$ . Αυτή η πρώτη άρνηση δεν καταστρέφει το αρχικό περιεχόμενο, αλλά το ανασυνθέτει ως σχέση μεταβολής.

Η έκφραση

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

αποτυπώνει ακριβώς αυτή τη διαλεκτική μετάβαση: η αρχική συνάρτηση δεν εξαφανίζεται, αλλά επανεμφανίζεται μέσα στη δομή της διαφοράς και του ορίου. Η «άρνηση» εδώ δεν είναι εξάλειψη, αλλά εσωτερικός μετασχηματισμός της μορφής.

Η δεύτερη φάση της διαδικασίας, η «άρνηση της άρνησης», εμφανίζεται όταν η νέα μορφή (η παράγωγος) δεν αντιμετωπίζεται ως τελικό αποτέλεσμα, αλλά επανεντάσσεται σε ένα ευρύτερο σύστημα ανάλυσης. Για παράδειγμα, η δεύτερη παράγωγος  $f''(x)$  εκφράζει τη μεταβολή της ίδιας της μεταβολής, δηλαδή μια ανώτερη βαθμίδα κατανόησης της κίνησης. Εδώ η μαθηματική διαδικασία δεν σταματά στην πρώτη άρνηση (παράγωγος), αλλά προχωρά σε αναστοχασμό της ίδιας της μεταβολής, οδηγώντας σε πιο σύνθετες περιγραφές δυναμικών συστημάτων.

Η «άρνηση της άρνησης», όπως περιγράφεται από τον Ένγκελς στη *Διαλεκτική της Φύσης*, δεν σημαίνει επιστροφή στο αρχικό σημείο, αλλά ανάδυση μιας νέας ποιότητας που περιέχει σε ανώτερο επίπεδο τα προηγούμενα στάδια (Ένγκελς, 2005). Αντίστοιχα, στον διαφορικό λογισμό, η αρχική συνάρτηση δεν καταργείται από την παράγωγο, αντίθετα, επιβιώνει ως εσωτερική δομή μέσα στη νέα μορφή ανάλυσης. Έτσι, η μαθηματική διαδικασία αποκτά χαρακτηριστικά διαλεκτικής εξέλιξης όπου κάθε στάδιο εμπεριέχει και υπερβαίνει το προηγούμενο.

Το κρίσιμο σημείο είναι ότι αυτή η διαδικασία οδηγεί σε πραγματικά αποτελέσματα, δηλαδή σε περιγραφές φυσικών φαινομένων όπως η κίνηση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση. Ο διαφορικός λογισμός δεν παραμένει σε αφηρημένο επίπεδο, αλλά αποδίδει με ακρίβεια δυναμικές ιδιότητες του πραγματικού κόσμου. Η ταχύτητα, για παράδειγμα, δεν είναι απλώς μαθηματική έννοια, αλλά μέτρο πραγματικής κίνησης, που προκύπτει μέσω της διαλεκτικής μετάβασης από θέση σε μεταβολή θέσης.

Έτσι, η διαλεκτική αρχή της «άρνησης της άρνησης» δεν αποτελεί μόνο φιλοσοφική έννοια, αλλά και μεθοδολογικό σχήμα που μπορεί να φωτίσει τη δομή του απειροστικού λογισμού. Η μαθηματική ανάλυση δεν είναι στατική λογική κατασκευή, αλλά διαδικασία διαδοχικών υπερβάσεων, όπου κάθε νέο επίπεδο περιέχει και μετασχηματίζει το προηγούμενο, οδηγώντας σε όλο και πιο ολοκληρωμένες περιγραφές της κίνησης.

#### 4.6 Τρόπος διαφορίσης στον Μαρξ: μορφή και περιεχόμενο

Στη θεωρητική προσέγγιση του Καρλ Μαρξ, η σχέση μορφής και περιεχομένου δεν είναι εξωτερική ή συμβατική, αλλά εσωτερικά διαλεκτική. Η μορφή δεν λειτουργεί ως απλό «περίβλημα» ενός προϋπάρχοντος περιεχομένου, αλλά ως ενεργός τρόπος αποκάλυψής του. Το περιεχόμενο δεν υφίσταται ανεξάρτητα από τη μορφή, αλλά συγκροτείται μέσα από αυτήν. Αυτή η αρχή γίνεται ιδιαίτερα εμφανής στη μελέτη του Μαρξ για τον απειροστικό λογισμό, όπως αποτυπώνεται στα λεγόμενα μαθηματικά χειρόγραφα του.

Η βασική μαθηματική μορφή της διαφορίσης εκφράζεται ως

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Σε αυτή τη δομή, η μορφή του ορίου δεν είναι εξωτερική προς το περιεχόμενο, αλλά το καθιστά δυνατό, η έννοια της στιγμιαίας μεταβολής δεν υπάρχει ανεξάρτητα από αυτή τη μορφή έκφρασης. Ο Μαρξ, στα χειρόγραφα του, προσεγγίζει ακριβώς αυτή τη λογική που λέει ότι η μαθηματική μορφή δεν είναι ουδέτερη, αλλά αποκαλύπτει μια εσωτερική δομή σχέσεων.

Στα μαθηματικά χειρόγραφα, η έμφαση δεν δίνεται στον τύπο ως τέτοιο, αλλά στη λογική του περιεχομένου που εκφράζει, δηλαδή τη μετάβαση από το πεπερασμένο στο απειροστικά

μεταβαλλόμενο. Έτσι, η μορφή της παραγώγου λειτουργεί ως αναλυτικό εργαλείο αποκάλυψης του περιεχομένου της κίνησης.

Αυτή η προσέγγιση συνδέεται άμεσα με τη διαλεκτική αντίληψη της σχέσης μορφής-περιεχομένου. Ο Μαρξ δεν αντιμετωπίζει τη μορφή ως εξωτερικό σχήμα, αλλά ως αναγκαίο τρόπο ύπαρξης του περιεχομένου. Στα μαθηματικά χειρόγραφα, αυτό μεταφράζεται στην ιδέα ότι οι μαθηματικές αφαιρέσεις δεν είναι αυθαίρετες κατασκευές, αλλά συμπυκνώσεις πραγματικών σχέσεων μεταβολής.

Η έννοια της «διαφόρισης» μπορεί επομένως να ιδωθεί όχι μόνο ως μαθηματική πράξη, αλλά ως μεθοδολογική αρχή με βάση την οποία η ανάλυση μιας μορφής αποκαλύπτει το περιεχόμενό της μέσω της εσωτερικής της διάσπασης σε σχέσεις μεταβολής. Ο Ένγκελς επισημαίνει ότι οι επιστημονικές αφαιρέσεις αποκτούν νόημα μόνο όταν συνδέονται με πραγματικές διαδικασίες κίνησης της φύσης και της κοινωνίας (Ένγκελς, 2005). Μέσα σε αυτό το πλαίσιο τα μαθηματικά χειρόγραφα μπορούν να ιδωθούν ως προσπάθεια κατανόησης του τρόπου με τον οποίο οι αφηρημένες μορφές (όπως η παράγωγος) αντανακλούν πραγματικές δυναμικές σχέσεις.

Ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζει τον διαφορικό λογισμό αναδεικνύει ότι η μορφή δεν είναι απλώς εργαλείο αναπαράστασης, αλλά ενεργός μηχανισμός αποκάλυψης του περιεχομένου. Η «διαφόριση», υπό αυτή την έννοια, γίνεται γενική αρχή ανάλυσης: η διάσπαση της μορφής αποκαλύπτει την εσωτερική της κίνηση και το πραγματικό της περιεχόμενο.

#### **4.7 Το μέτρο ως διαλεκτική κατηγορία: ενότητα ποσότητας, ποιότητας και ορίου ύπαρξης**

Η έννοια του μέτρου αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις κατηγορίες της υλιστικής διαλεκτικής, καθώς επιτρέπει τη σύλληψη του αντικειμένου στην ενότητά του, δηλαδή στη σύνδεση της ποιότητας και της ποσότητάς του. Στις Βασικές αρχές της Μαρξιστικής φιλοσοφίας αναφέρεται « το μέτρο είναι μία από τις σημαντικότερες κατηγορίες της υλιστικής διαλεκτικής. Με τη βοήθεια του συλλαμβάνουμε το αντικείμενο στην ενότητα, στη σύνδεση της ποιότητας και της ποσότητας. Είναι το όριο ύπαρξης του αντικειμένου» (Κονσταντίνοφ κ.ά., 2006)

Για τον διαλεκτικό υλισμό το μέτρο δεν είναι απλώς μια ποσοτική σχέση, αλλά η συγκεκριμένη ενότητα μέσα στην οποία μια ποιότητα υφίσταται σε καθορισμένες ποσοτικές παραμέτρους. Η υπέρβαση αυτών των ορίων οδηγεί σε ποιοτική μεταβολή, γεγονός που αναδεικνύει τον δυναμικό χαρακτήρα της πραγματικότητας. Ο Ένγκελς στη *Διαλεκτική της Φύσης*, υποστηρίζει ότι το μέτρο συνδέεται άμεσα με τον νόμο της μετατροπής της ποσότητας σε ποιότητα, ότι τα φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα δεν μεταβάλλονται αδιάκοπα με ομαλό τρόπο, αλλά παρουσιάζουν σημεία καμπής, όπου μια ποσοτική συσσώρευση οδηγεί σε ξαφνική ποιοτική αλλαγή (Ένγκελς, 2005). Το μέτρο, επομένως, λειτουργεί ως το όριο μέσα στο οποίο μια ποιότητα διατηρεί την ταυτότητά της. Όταν το ποσοτικό στοιχείο υπερβεί αυτό το όριο, το αντικείμενο μετατρέπεται σε κάτι νέο.

Η έννοια αυτή αποκτά ιδιαίτερη σημασία και στο έργο του Μαρξ, ο οποίος αναλύει τις κοινωνικές και οικονομικές μορφές ως ενότητες ποιοτικών και ποσοτικών σχέσεων. Στο *Κεφάλαιο*, για παράδειγμα, η αξία ενός εμπορεύματος δεν είναι απλώς ποσοτικό μέγεθος, αλλά η έκφραση συγκεκριμένων κοινωνικών σχέσεων παραγωγής. Το μέτρο, σε αυτή την περίπτωση, καθορίζεται από το κοινωνικά αναγκαίο εργατικό χρόνο, δηλαδή από μια ποσοτική δομή που ορίζει την ίδια την ποιότητα της αξίας (Μαρξ, 2009).

Η διαλεκτική κατηγορία του μέτρου μπορεί να αποδοθεί σχηματικά ως η ενότητα τριών στοιχείων:

- της ποιότητας (το “τι” είναι το αντικείμενο),
- της ποσότητας (το “πόσο” υπάρχει),
- και του ορίου (το σημείο πέρα από το οποίο η ποιότητα μετασχηματίζεται).

Το μέτρο δεν είναι απλώς σταθερότητα, αλλά δυναμική ισορροπία. Εντός του μέτρου, οι ποσοτικές μεταβολές δεν αλλάζουν την ουσία του αντικειμένου. Ωστόσο, όταν η ποσότητα υπερβεί ένα κρίσιμο όριο, τότε έχουμε ποιοτική μεταβολή. Αυτή η λογική αποτελεί θεμελιώδη διαλεκτικό νόμο.

Η σημασία του μέτρου ως ορίου ύπαρξης του αντικειμένου αναδεικνύεται και από τον Λένιν. Ο Λένιν, στο *Φιλοσοφικά Τετράδια*, επισημαίνει ότι η διαλεκτική πρέπει να συλλαμβάνει τα φαινόμενα όχι ως στατικά, αλλά ως διαδικασίες όπου κάθε κατάσταση εμπεριέχει την τάση υπέρβασής της (Λένιν, 1977). Το μέτρο, υπό αυτή την έννοια, δεν είναι απλώς όριο σταθερότητας, αλλά και όριο μετάβασης.

Η διαλεκτική λειτουργία του μέτρου μπορεί να γίνει πιο κατανοητή μέσω απλών παραδειγμάτων από τη φυσική και τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, το νερό παραμένει σε υγρή κατάσταση μέσα σε ένα συγκεκριμένο εύρος θερμοκρασίας. Αυτό το εύρος αποτελεί το μέτρο του φαινομένου. Όταν η θερμοκρασία υπερβεί ένα κρίσιμο σημείο, επέρχεται ποιοτική αλλαγή (βρασμός ή πήξη). Η ποσότητα (θερμοκρασία) μετατρέπεται σε ποιότητα (κατάσταση ύλης), επιβεβαιώνοντας τον διαλεκτικό νόμο που περιγράφουν οι Ένγκελς και Λένιν.

Στα μαθηματικά, μια ανάλογη λογική μπορεί να παρατηρηθεί στη συμπεριφορά συναρτήσεων κοντά σε κρίσιμα σημεία. Για παράδειγμα, μια συνεχής μεταβολή μιας παραμέτρου μπορεί να διατηρεί τη δομή μιας συνάρτησης μέχρι να φτάσει σε σημείο ασυνέχειας ή αστάθειας, όπου η συμπεριφορά της αλλάζει ριζικά. Το μέτρο, σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να νοηθεί ως το “εύρος σταθερότητας” μιας μαθηματικής δομής.

Η διαλεκτική κατανόηση του μέτρου επιτρέπει, συνεπώς, τη σύλληψη της πραγματικότητας ως ενιαίας διαδικασίας όπου η σταθερότητα και η μεταβολή δεν αντιτίθενται απόλυτα, αλλά συνυπάρχουν. Η ποιότητα δεν είναι ανεξάρτητη από την ποσότητα, αλλά συγκροτείται μέσα από αυτήν, ενώ η ποσότητα αποκτά νόημα μόνο εντός συγκεκριμένων ποιοτικών πλαισίων.

Η συμβολή της διαλεκτικής αυτής κατηγορίας είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς απομακρύνει τη σκέψη από μηχανιστικές ή στατικές αντιλήψεις της πραγματικότητας. Αντί να θεωρούμε τα αντικείμενα ως αμετάβλητες οντότητες, η έννοια του μέτρου μας επιτρέπει να τα κατανοούμε ως δυναμικές ενότητες που βρίσκονται σε συνεχή σχέση με τα όρια και τις μεταβολές τους.

Έτσι, το μέτρο δεν είναι απλώς μια ποσοτική αναλογία, αλλά μια θεμελιώδης κατηγορία κατανόησης της πραγματικότητας. Αποτελεί το σημείο στο οποίο η ποιότητα διατηρείται, αλλά ταυτόχρονα και το σημείο από το οποίο ξεκινά η δυνατότητα της μετατροπής της σε κάτι νέο. Μέσα από αυτή τη διπλή λειτουργία, το μέτρο συνδέει την σταθερότητα με τη μεταβολή και την ταυτότητα με την εξέλιξη.

## Κεφάλαιο 5: Η σχέση του *Κεφαλαίου* και της ενασχόλησης του Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό

### 5.1 Εισαγωγή

Η βασική θέση που προκύπτει είναι ότι η σημασία του απειροστικού λογισμού για το *Κεφάλαιο* δεν είναι εργαλειακή, αλλά επιστημολογική και αφορά τον τρόπο με τον οποίο ο Μαρξ κατανοεί τη δυναμική των οικονομικών κατηγοριών ως διαδικασιών και όχι ως στατικών μεγεθών.

Όπως είδαμε και παραπάνω στα μαθηματικά χειρόγραφα, ο διαφορικός λογισμός προσεγγίζεται ως θεωρία της μεταβολής. Η έννοια της παραγώγου εκλαμβάνεται όχι απλώς ως τεχνικός τύπος, αλλά ως σύλληψη της στιγμιαίας κίνησης ενός μεγέθους. Η βασική μαθηματική δομή της παραγώγου εκφράζει την ιδέα ότι η κίνηση μπορεί να συλληφθεί μέσω σχέσης μεταξύ απειροστικών διαφορών.

Στο *Κεφάλαιο*, ο Μαρξ αναλύει έννοιες όπως αξία, χρήμα, κεφάλαιο και υπεραξία όχι ως απομονωμένα αντικείμενα, αλλά ως σχέσεις που μετασχηματίζονται ιστορικά. Η αξία δεν είναι στατικό μέγεθος, αλλά κοινωνική σχέση που εκφράζεται ποσοτικά μέσω του χρόνου εργασίας. Η καπιταλιστική παραγωγή, επομένως, δεν μπορεί να κατανοηθεί χωρίς τη σύλληψη της μεταβολής των σχέσεων αυτών στον χρόνο.

Η έννοια του ορίου στον απειροστικό λογισμό έχει ιδιαίτερη σημασία. Το όριο εκφράζει τη συμπεριφορά ενός συστήματος όταν πλησιάζει μια κρίσιμη κατάσταση χωρίς να την «καταλαμβάνει» ως στατικό σημείο.

Στην πολιτική οικονομία, αντίστοιχα, οι κρίσεις του καπιταλιστικού συστήματος δεν είναι εξωτερικά γεγονότα, αλλά εσωτερικά όρια της ίδιας της ανάπτυξής του. Το σύστημα τείνει προς καταστάσεις που δεν μπορούν να σταθεροποιηθούν, αλλά οι οποίες αποκαλύπτουν τις εσωτερικές του αντιφάσεις.

Ο απειροστικός λογισμός λειτουργεί ως θεωρητικό ανάλογο της διαλεκτικής σκέψης: εισάγει την έννοια της συνέχειας, της μεταβολής και της εσωτερικής διαφοροποίησης των μεγεθών. Αντίστοιχα, το *Κεφάλαιο* συλλαμβάνει την καπιταλιστική κοινωνία όχι ως στατική δομή, αλλά ως διαδικασία διαρκούς μετασχηματισμού.

## 5.2 Οικονομικές κρίσεις

Η πιο γόνιμη περιοχή στην οποία μπορεί να εντοπιστεί μια αναλογική σχέση μεταξύ του απειροστικού λογισμού και της ανάλυσης του Καρλ Μαρξ στο *Κεφάλαιο* είναι η θεωρία των οικονομικών κρίσεων. Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω ο ίδιος ο Μαρξ αναφέρει σε ένα γράμμα του προς τον Ένγκελς τον Μάη του 1873 «έχω προσπαθήσει επανειλημμένα, στην ανάλυση κρίσεων, να υπολογίσω αυτές τις αυξομειώσεις θεωρώντας τις φανταστικές καμπύλες και σκέφτηκα να βγάλω από αυτά με μαθηματικό τρόπο έναν σπουδαίο νόμο για τις κρίσεις» (Μαρξ, 1987, σ.17). Αν και ο Μαρξ δεν χρησιμοποιεί μαθηματικό φορμαλισμό, η μεθοδολογία του παρουσιάζει σαφή συγγένεια με τη λογική των ορίων και των ασυνεχειών

που χαρακτηρίζουν τον διαφορικό λογισμό. Οι οικονομικές κρίσεις στο καπιταλιστικό σύστημα δεν εμφανίζονται ως εξωτερικά γεγονότα, αλλά ως εσωτερικά όρια της ίδιας της δυναμικής του συστήματος, δηλαδή ως σημεία όπου οι ποσοτικές μεταβολές συσσωρεύονται μέχρι να προκαλέσουν ποιοτική ρήξη.

Σε αυτή τη λογική, η κρίση μπορεί να κατανοηθεί ως κατάσταση όπου οι εσωτερικές αντιφάσεις του συστήματος φτάνουν σε σημείο μη σταθερότητας, δηλαδή σε ένα “κρίσιμο όριο”. Όπως στον απειροστικό λογισμό η συμπεριφορά μιας συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο μπορεί να αλλάξει ριζικά, έτσι και στο *Κεφάλαιο* οι οικονομικές σχέσεις δεν εξελίσσονται γραμμικά, αλλά μέσω συσσώρευσης αντιφάσεων που οδηγούν σε απότομες μεταβολές της συνολικής δομής.

Ο Ένγκελς επισημαίνει ότι στη διαλεκτική φύση των φαινομένων οι ποσοτικές μεταβολές οδηγούν αναγκαστικά σε ποιοτικά άλματα (Ένγκελς, 2005). Αυτή η αρχή συνδέεται άμεσα με τη λογική των κρίσεων: η σταδιακή συσσώρευση ποσοτικών αντιφάσεων (υπερπαραγωγή, υπερσυσσώρευση κεφαλαίου, πτώση κερδοφορίας) οδηγεί σε ξαφνική ποιοτική κατάρρευση ή αναδιάρθρωση του συστήματος.

Η ανάλυση των οικονομικών κρίσεων στο έργο του Μαρξ βασίζεται στη διαλεκτική κατανόηση της καπιταλιστικής οικονομίας ως δυναμικού και αντιφατικού συστήματος. Παρότι ο Μαρξ δεν διέθετε ούτε επιδίωξε τη χρήση του σύγχρονου προχωρημένου απειροστικού λογισμού, η θεωρητική του προσέγγιση παρουσιάζει αξιοσημείωτη συγγένεια με έννοιες που σήμερα αποδίδονται μέσω της μαθηματικής ανάλυσης συνεχών μεταβολών, όπως τα όρια, οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές και τα μη γραμμικά συστήματα.

Ο σύγχρονος απειροστικός λογισμός και η θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων επιτρέπουν την περιγραφή φαινομένων όπου μικρές μεταβολές στις παραμέτρους οδηγούν σε μεγάλες και απότομες αλλαγές στη συνολική συμπεριφορά του συστήματος. Αυτή η λογική είναι ιδιαίτερα συμβατή με τη μαρξιστική ανάλυση των κρίσεων, όπου η συσσώρευση ποσοτικών αντιφάσεων (όπως η πτώση του ποσοστού κέρδους ή η υπερπαραγωγή) οδηγεί σε ποιοτική ρήξη του συστήματος. Στο *Κεφάλαιο*, οι κρίσεις δεν εμφανίζονται ως ομαλή εξέλιξη αλλά ως απότομες μεταβάσεις που προκύπτουν από την εσωτερική αντίφαση του καπιταλιστικού τρόπου παραγωγής.

Επιπλέον, αυτή η οπτική μπορεί να προσφέρει και μια ερμηνεία για την ενασχόληση του Μαρξ με τον απειροστικό λογισμό στα μαθηματικά χειρόγραφα. Η ενασχόλησή του δεν αφορά την τεχνική εφαρμογή των μαθηματικών, αλλά τη μεθοδολογική τους αξία ως γλώσσα κίνησης, μεταβολής και οριακής συμπεριφοράς. Με άλλα λόγια, ο Μαρξ ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά μπορούν να συλλάβουν τη διαδικασία και όχι τη στατική κατάσταση των φαινομένων.

Ο Ένγκελς υποστηρίζει ότι η διαλεκτική φύση της πραγματικότητας χαρακτηρίζεται από μετατροπές ποσότητας σε ποιότητα και από εσωτερικές αντιφάσεις που οδηγούν σε ρήξεις (Ένγκελς, 2005). Αυτή η αρχή είναι εξαιρετικά κοντά στη σύγχρονη μαθηματική κατανόηση των μη γραμμικών συστημάτων, όπου η σταδιακή μεταβολή παραμέτρων οδηγεί σε κρίσιμες μεταβάσεις κατάστασης.

Παρότι ο Μαρξ δεν διέθετε, ούτε θα μπορούσε ιστορικά να διαθέτει, τη σύγχρονη αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού, η θεωρητική του σύλληψη των καπιταλιστικών κρίσεων εμφανίζει μια αξιοσημείωτη εννοιολογική συγγένεια με αυτόν, στο βαθμό που οργανώνεται γύρω από μια βαθιά δυναμική κατανόηση της μεταβολής. Στον πυρήνα της μαρξιστικής ανάλυσης δεν βρίσκονται στατικά μεγέθη, αλλά σχέσεις σε διαρκή κίνηση, όπου οι ποσοτικές μεταβολές συσσωρεύονται και, υπό ορισμένες συνθήκες, μετατρέπονται σε ποιοτικές, μια λογική που θυμίζει τη μετάβαση από την απλή μεταβολή στη στιγμιαία μεταβολή του απειροστικού λογισμού. Οι κρίσεις δεν εμφανίζονται ως εξωτερικά ή τυχαία γεγονότα, αλλά ως εσωτερικά παραγόμενα «οριακά φαινόμενα» του ίδιου του συστήματος, όπου η συνεχής εξέλιξη των οικονομικών μεγεθών οδηγεί σε σημεία ασυνέχειας και ρήξης.

Υπό αυτή την έννοια, η μαρξιστική σκέψη προσεγγίζει φιλοσοφικά μια λογική συγγενή προς εκείνη του λογισμού, όχι ως τυπικό μαθηματικό εργαλείο, αλλά ως τρόπο κατανόησης της πραγματικότητας όπου το συνεχές και το ασυνεχές, η ποσότητα και η ποιότητα, η τάση και το όριο συνδέονται εσωτερικά. Η συγγένεια αυτή δεν αφορά τη χρήση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, αλλά τη βαθύτερη σύλληψη της κίνησης ως διαδικασίας που εμπεριέχει εντάσεις, μετασχηματισμούς και κρίσιμα σημεία, κάτι που καθιστά τη μαρξιστική θεωρία των κρίσεων ιδιαίτερα πρόσφορη για ανάγνωση υπό το πρίσμα των εννοιών του απειροστικού λογισμού.

## Κεφάλαιο 6: Επίλογος

Η παρούσα εργασία επιχείρησε να διερευνήσει τη σχέση ανάμεσα στις θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και τη φιλοσοφία του διαλεκτικού υλισμού, όπως αυτή διαμορφώθηκε κυρίως μέσα από το έργο των Μαρξ, Ένγκελς και Λένιν. Η μελέτη των πρωτογενών και δευτερογενών πηγών ανέδειξε ότι ο διαλεκτικός υλισμός αντιμετωπίζει τα μαθηματικά όχι ως ένα κλειστό και αυτάρκες σύστημα αφηρημένων εννοιών, αλλά ως μορφή γνώσης που έχει

τις ρίζες της στην αντικειμενική πραγματικότητα και στην ιστορική πρακτική δραστηριότητα του ανθρώπου.

Η ανάλυση του ορισμού των μαθηματικών από τον Ένγκελς έδειξε ότι οι μαθηματικές έννοιες θεωρούνται αποτέλεσμα αφαίρεσης πραγματικών σχέσεων του υλικού κόσμου. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, ο αριθμός, η μονάδα και το μηδέν δεν αντιμετωπίζονται ως αυθύπαρκτες ιδέες αλλά ως ιστορικά διαμορφωμένες έννοιες που προέκυψαν από τις ανάγκες της ανθρώπινης δραστηριότητας και της κοινωνικής εξέλιξης.

Η διερεύνηση της έννοιας του απείρου ανέδειξε ότι ο διαλεκτικός υλισμός απορρίπτει την αντίληψη του απείρου ως κάτι στατικό και ολοκληρωμένο, αλλά το προσεγγίζει ως διαδικασία αδιάκοπης εξέλιξης και μεταβολής. Η σχέση πεπερασμένου και απείρου παρουσιάστηκε ως διαλεκτική ενότητα, μέσα από την οποία επιχειρείται η ερμηνεία τόσο της μαθηματικής όσο και της φυσικής πραγματικότητας.

Ιδιαίτερο βάρος δόθηκε στον απειροστικό λογισμό και στα Μαθηματικά Χειρόγραφα του Μαρξ. Η μελέτη τους έδειξε ότι η ενασχόληση του Μαρξ με τα μαθηματικά δεν αποτελούσε απλή προσωπική ενασχόληση, αλλά συνδεόταν με τη γενικότερη προσπάθειά του να κατανοήσει φαινόμενα κίνησης, μεταβολής και ανάπτυξης, τόσο στη φύση όσο και στην κοινωνία. Μέσα από αυτή την οπτική, ο απειροστικός λογισμός εμφανίζεται ως μαθηματική έκφραση διαδικασιών που χαρακτηρίζονται από συνεχή μεταβολή και εσωτερικές αντιφάσεις.

Η εργασία υποστηρίζει ότι η ιστορική και φιλοσοφική προσέγγιση των μαθηματικών μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στη διδασκαλία τους. Η κατανόηση της προέλευσης και της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν τα μαθηματικά όχι ως ένα σύνολο έτοιμων κανόνων και τύπων, αλλά ως αποτέλεσμα μιας μακράς ιστορικής διαδικασίας αναζήτησης, αμφισβήτησης και δημιουργίας γνώσης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί και η έννοια της απροσδιοριστίας στα όρια. Στη συνήθη διδασκαλία, οι μορφές απροσδιοριστίας παρουσιάζονται συχνά ως τεχνικές περιπτώσεις όπου εφαρμόζονται μηχανικά κανόνες παραγοντοποίησης ή ο κανόνας de l'Hôpital. Ωστόσο, η φιλοσοφική και διαλεκτική προσέγγιση αναδεικνύει ότι η

απροσδιοριστία εκφράζει βαθύτερα τη σύγκρουση και τη σχέση μεταξύ ποσοτήτων που μεταβάλλονται ταυτόχρονα. Στις απροσδιοριστίες δεν σημαίνει ότι «δεν υπάρχει αποτέλεσμα», αλλά ότι η αλήθεια δεν βρίσκεται στις απομονωμένες τιμές των μεγεθών αλλά στη σχέση της μεταβολής τους. Έτσι, όταν ο μαθητής κατανοήσει ότι το όριο εξετάζει τη συμπεριφορά μιας σχέσης και όχι απλώς την αντικατάσταση αριθμών, τότε μπορεί να οδηγηθεί πιο ουσιαστικά στην εύρεση του ορίου χωρίς αποστήθιση τεχνικών μεθόδων.

Για παράδειγμα, στο όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

η ουσιαστική κατανόηση δεν βρίσκεται μόνο στην παραγοντοποίηση του αριθμητή αλλά στο γεγονός ότι εξετάζουμε τη σχέση μεταβολής δύο μεγεθών που τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Η απροσδιοριστία αποκαλύπτει ότι πίσω από τη φαινομενική «κατάρρευση» της αριθμητικής πράξης κρύβεται μια βαθύτερη σχέση, η οποία οδηγεί στην έννοια της παραγώγου και του ρυθμού μεταβολής. Με αυτόν τον τρόπο, ο μαθητής δεν περιορίζεται στην αποστήθιση διαδικασιών αλλά κατανοεί γιατί οι διαδικασίες αυτές λειτουργούν.

Αντίστοιχα, η έννοια του μηδενός μπορεί να διδαχθεί όχι απλώς ως ένας αριθμός ή ως «τίποτα», αλλά ως αποτέλεσμα ιστορικής και φιλοσοφικής εξέλιξης της ανθρώπινης σκέψης. Το μηδέν εκφράζει ταυτόχρονα την απουσία και τη δυνατότητα ύπαρξης, λειτουργώντας ως αναγκαίο στοιχείο όλων των αριθμητικών σχέσεων. Μέσα από αυτή την προσέγγιση, οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν βαθύτερα γιατί το μηδέν έχει τόσο ιδιαίτερο ρόλο στα μαθηματικά και γιατί οδηγεί σε κρίσιμες έννοιες όπως η συνέχεια, το όριο και η απροσδιοριστία. Έτσι, η εμφάνιση του μηδενός στα όρια δεν αντιμετωπίζεται ως «πρόβλημα προς αποφυγή», αλλά ως σημείο όπου αποκαλύπτονται οι βαθύτερες σχέσεις της μεταβολής.

Μια τέτοια προσέγγιση μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση μαθητών που δεν αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως ένα σύνολο άκαμπτων τύπων αλλά ως διαδικασία κατανόησης σχέσεων. Η έμφαση μετατοπίζεται από τη μηχανική εφαρμογή κανόνων στην κατανόηση της ουσίας των εννοιών. Με αυτόν τον τρόπο, η διδασκαλία των μαθηματικών αποκτά πιο ουσιαστικό, δημιουργικό και επιστημονικό χαρακτήρα, ενισχύοντας την κριτική σκέψη και την ικανότητα του μαθητή να ερμηνεύει τις μαθηματικές διαδικασίες και όχι απλώς να τις εκτελεί.

Επιπλέον, η διαλεκτική προσέγγιση μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση μιας πιο κριτικής στάσης απέναντι στη γνώση. Η επιστήμη παρουσιάζεται όχι ως ένα κλειστό και ολοκληρωμένο σύστημα αληθειών αλλά ως μια διαρκώς εξελισσόμενη διαδικασία αναζήτησης και εμβάθυνσης. Μέσα από αυτή την οπτική, οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν ότι ακόμη και οι πιο αφηρημένες μαθηματικές έννοιες αποτελούν προϊόντα της ανθρώπινης δραστηριότητας και ιστορικής εξέλιξης, γεγονός που καθιστά τα μαθηματικά περισσότερο κατανοητά και ουσιαστικά.

Συνολικά, η εργασία επιχείρησε να αναδείξει ότι η σχέση μαθηματικών και φιλοσοφίας δεν αποτελεί μια εξωτερική ή δευτερεύουσα σύνδεση, αλλά μια βαθιά και ουσιαστική σχέση που αφορά τον ίδιο τον χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Ο διαλεκτικός υλισμός προσφέρει ένα θεωρητικό πλαίσιο μέσα από το οποίο τα μαθηματικά μπορούν να γίνουν κατανοητά ως μορφή γνώσης που γεννιέται από την πράξη, εξελίσσεται ιστορικά και επιστρέφει ξανά στην πραγματικότητα συμβάλλοντας στον μετασχηματισμό της. Έτσι, τα μαθηματικά δεν εμφανίζονται ως ένας αφηρημένος κόσμος έξω από την ανθρώπινη ζωή, αλλά ως μια από τις σημαντικότερες μορφές με τις οποίες ο άνθρωπος επιχειρεί να κατανοήσει, να ερμηνεύσει και να αλλάξει τον κόσμο γύρω του.

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Davis, D. (2020). *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Ένγκελς, Φ. (2006). *Αντι-Ντίρινγκ*. Σύγχρονη εποχή.
- Ένγκελς, Φ. (2005). *Η διαλεκτική της φύσης*. Σύγχρονη εποχή.
- Hegel, G. W. F. (2009). *Η επιστήμη της λογικής*. Εκκρεμές.
- Hegel, G. W. F. (1993). *Η φαινομενολογία του πνεύματος*. Δωδώνη.
- Κασιούρας, Δ. Γ. (1995). *Σύντομο κοινωνικοπολιτικό λεξικό*. Σύγχρονη εποχή.
- Katz, V. J. (2019). *Ιστορία των μαθηματικών, μια εισαγωγή*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Kirk, G. S., Raven, J. E., & Schofield, M. (1998). *Οι Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι* (ελλ. μτφρ.). Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.
- Κονσταντίνοφ, Φ. Β., Μπερέστνεφ, Β. Φ., Γκλέζερμαν, Γ. Ε., Ντίνρικ, Μ. Α., Καμμάρι, Μ. Ντ., Κουζνετσόφ, Ι. Β., Κόπνιν, Π. Β., Ρόξενταλ, Μ. Μ., Σίσκιν, Α.Φ., Φεντοσέγεφ, Π. Ν. & Φράντσεφ, Γ.Π. (2006). *Βασικές αρχές της μαρξιστικής φιλοσοφίας*. Σύγχρονη εποχή.
- Λένιν, Β. Ι. (1977). *Άπαντα* (Τόμ.29: Φιλοσοφικά τετράδια). Σύγχρονη Εποχή.
- Λένιν, Β. Ι. (1988). *Υλισμός και εμπειριοκριτικισμός*. Σύγχρονη Εποχή.
- Μαρξ, Κ. (2009). *Το κεφάλαιο* (Τόμ.1: Το προτσές παραγωγής του κεφαλαίου). Σύγχρονη εποχή.
- Μαρξ, Κ. (1987). *Τα μαθηματικά χειρόγραφα του Καρλ Μαρξ*. Εκδόσεις Γλάρους.
- Πλάτων. (1976). *Πολιτεία* (Ι. Ν. Γρυπάρης, Μετφρ.). Ζαχαρόπουλος.
- Ποτάρη, Δ., & Ψυχάρης, Γ. (2018). Φιλοσοφικές και επιστημολογικές θεωρήσεις για τη συγκρότηση της διδακτικής των μαθηματικών. Στο *Πρακτικά 8<sup>ου</sup> πανελλήνιου συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*, (σσ. 45-58).
- Rybnikov, K. A. (1986). *Εισαγωγή στη μεθοδολογία των μαθηματικών*. Επιστήμη και κοινωνία.

- Ρουσόπουλος, Γ. (2022). *Η επιστημολογία των μαθηματικών*. Εκδόσεις Οκτώ.
- Τσάλντ, Β. Γ. (1971). *Ο άνθρωπος πλάθει τον εαυτό του*. Κέδρος.
- Φιλοσοφία και επιστήμη*. (1984). Gutenberg.
- Φοίερμαχ, Λ. (2012). *Η ουσία του χριστιανισμού: η ουσία της θρησκείας*. ΚΨΜ.
- Χασάπης, Δ. (Επιμ.). (2005). *Κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης*. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Balaguer, M. (2018). *Platonism in metaphysics*. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). Wiley.
- Brouwer, L. E. J. (1975). *Collected works* (Vol. 1). North-Holland.
- Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Open Court.
- Copleston, F. (1993). *A history of philosophy*. Image Books.
- Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?*. Oxford University Press.
- Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press.
- Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Vieweg.
- Harris, M. (1979). *Cultural materialism: The struggle for a science of culture*. Random House.
- Hilbert, D. (1967). The foundations of mathematics. Στο J. van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931* (σσ. 464–479). Harvard University Press.
- Hobbes, T. (1996). *Leviathan*. Oxford University Press.
- Houlgate, S. (2006). *The opening of Hegel's logic*. Purdue university Press.
- Jech, T. (2003). *Set theory* (3rd millennium ed.). Springer.

La Mettrie, J. O. de. (1996). *Man a machine*. Hackett Publishing.

Marx, K., & Engels, F. (1975). *Collected works* (Vols. 1-50). Lawrence & Wishart.

Russell, B. (2004). *History of western philosophy*. Routledge.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics*. Oxford University Press Inc.

Stewart, J. (2016). *Calculus: Early transcendentals*. Cengage Learning.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.