ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αξιοποίηση του λογισμικού «Wolfram Mathematica» στη μαθηματική εκπαίδευση

Σχεδιασμός, υλοποίηση και αξιολόγηση μαθημάτων Α’ και Β’ Λυκείου σε φροντιστηριακές μονάδες

Ευάγγελος Γεωργίου

153338

Α΄ Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Καραχάλιος

Β΄ Επιβλέπων καθηγητής: Δημήτριος Σωτηρόπουλος

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2025

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/ δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης

Ευχαριστίες

Δανειζόμενος τα λόγια του ποιητή θα έλεγα ότι ο δρόμος αυτού του μεταπτυχιακού ήταν μακρύς, γεμάτος περιπέτειες, γεμάτος γνώσεις. Στον δρόμο αυτό πήρα τη βοήθεια διαφόρων ανθρώπων, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Αρχικά όλους τους καθηγητές των θεματικών ενοτήτων και τους επιβλέποντες της διπλωματικής εργασίας, προεξάρχοντος του καθηγητή Νικόλαου Καραχάλιου, ο οποίος υπήρξε εξόχως υποστηρικτικός και ενθαρρυντικός καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης. Επιπλέον να ευχαριστήσω τη μητέρα μου και τα αδέρφια μου για την ψυχολογική τους στήριξη και βέβαια το πιο μεγάλο μου ευχαριστώ προς τη σύζυγό μου Θεοδώρα που ήταν αρωγός όλο το διάστημα του μεταπτυχιακού προγράμματος με όλους τους πιθανούς και απίθανους τρόπους. Χωρίς αυτήν δεν θα τα είχα καταφέρει…

Η προσπάθεια αυτή αφιερώνεται στη μνήμη του πατέρα μου Γρηγόρη

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην αξιοποίηση των Τεχνολογιών Πληροφορικής και Επικοινωνιών (Τ.Π.Ε.) στη μαθηματική εκπαίδευση, με ιδιαίτερη έμφαση στο λογισμικό Mathematica. Η έρευνα διαρθρώνεται σε τρεις βασικούς άξονες: τη θεωρητική προσέγγιση του λογισμικού όπως και άλλων μαθηματικών λογισμικών πακέτων, την πρακτική εφαρμογή του Mathematica στη διδασκαλία και την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητάς του.

Στο πρώτο μέρος καταγράφεται η ιστορική εξέλιξη των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση, παρουσιάζονται συγκεκριμένα μαθηματικά λογισμικά ευρείας χρήσης, ενώ αναλύεται ενδελεχώς το λογισμικό Wolfram Mathematica, η ιστορική του αναδρομή, οι βασικές του λειτουργίες και εντολές καθώς και οι δυνατότητές του. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει τον σχεδιασμό, την ανάπτυξη και την παράδοση 14 μαθημάτων για την Άλγεβρα και τα Μαθηματικά της Α' και Β' Λυκείου, αξιοποιώντας τις δυνατότητες του λογισμικού. Τα μαθήματα δημιουργήθηκαν με στόχο τη διερεύνηση του βαθμού διεισδυτικότητας του λογισμικού Mathematica στην ύλη και τις μεθοδολογίες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δεδομένου ότι πρόκειται για μαθηματικό πακέτο με ευρεία ερευνητική και πανεπιστημιακή χρησιμότητα.

Η ερευνητική διάσταση της εργασίας συμπληρώνεται με τη διεξαγωγή στατιστικής έρευνας μέσω τριών ξεχωριστών ερωτηματολογίων σε μαθητές και εκπαιδευτικούς. Τα ερωτηματολόγια διερεύνησαν τόσο την προϋπάρχουσα γνώση και χρήση του Mathematica όσο και την αποτίμηση των στάσεων μετά το πέρας των μαθημάτων που σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν.

Τα ευρήματα της έρευνας κατέδειξαν περιορισμένη αρχική εξοικείωση με το λογισμικό τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς. Ωστόσο, μετά την εφαρμογή των παραδόσεων, καταγράφηκε σημαντικά θετική ανταπόκριση από τους συμμετέχοντες μαθητές. Η έρευνα υποδεικνύει ότι η ενσωμάτωση του Mathematica στη διδακτική πράξη μπορεί να συμβάλει θετικά στην οπτικοποίηση και ευκολότερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην επίλυση απαιτητικών

ασκήσεων, αλλά και στον σχεδιασμό σύνθετων γεωμετρικών σχημάτων και στη γενικότερη ενίσχυση του ενδιαφέροντος για το μάθημα.

Η εργασία καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η αξιοποίηση εξειδικευμένων λογισμικών όπως το Mathematica μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο για τον εκσυγχρονισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης, την αύξηση της ελκυστικότητας του μαθήματος και την ενίσχυση της συμμετοχής και της συνεργασίας των μαθητών.

Abstract

This thesis focuses on the use of Information and Communication Technologies (ICT) in mathematics education, with particular emphasis on the Mathematica software. The research is structured around three main axes: the theoretical approach to the software as well as other mathematical software packages, the practical application of Mathematica in teaching, and the evaluation of its effectiveness.

The first part gives the historical development of ICT in education, presents specific mathematical software in wide use, while the Wolfram Mathematica software, its historical background, its basic functions and commands and its capabilities are thoroughly analyzed. The second part includes the design, development and delivery of 14 courses for Algebra and Mathematics of the 1st and 2nd High Schools, utilizing the capabilities of the software. The courses were created with the aim of investigating the degree of penetration of the Mathematica software in the material and methodologies of secondary education, given that it is a mathematical package with broad research and university utility.

The research dimension of the work is complemented by conducting statistical research through three separate questionnaires to students and teachers. The questionnaires investigated both the pre-existing knowledge and use of Mathematica and the assessment of attitudes after the completion of the courses that were designed and presented.

The findings of the research demonstrated limited initial familiarity with the software by both students and teachers. However, after the implementation of the lectures, a significantly positive response was recorded from the participating students. The research indicates that the integration of Mathematica into teaching practice can contribute positively to the visualization and easier understanding of mathematical concepts, to the solution of demanding exercises, but also to the design of complex geometric shapes and to the general enhancement of interest in the subject.

The paper concludes that the use of specialized software such as Mathematica can be an important tool for the modernization of mathematical education, increasing the attractiveness of the subject and enhancing student participation and collaboration.

Περιεχόμενα

Συγκεντρωτικός κατάλογος γραφημάτων

Συγκεντρωτικός κατάλογος εικόνων

Εισαγωγή

Μία, έστω και γρήγορη, εξέταση στη ροής της παγκόσμιας ιστορίας αρκεί για να εξάγουμε το συμπέρασμα πως η ανθρωπότητα εξελίσσεται ραγδαία και περνά συνεχώς από το ένα στάδιο τεχνολογικής προόδου στο άλλο. Ειδικά στις μέρες μας, οι νέες τεχνολογίες διεισδύουν σχεδόν σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, φέρνοντας ραγδαίες αλλαγές σε κάθε πτυχή της επιστήμης αλλά και της καθημερινότητας. Οι εξελίξεις αυτές σαφώς και δεν αφήνουν ανεπηρέαστο τον χώρο της εκπαίδευσης. Η ενσωμάτωση νέων τεχνολογικών εργαλείων στη μάθηση και τη διδασκαλία καθώς και η ανάπτυξη εκπαιδευτικών λογισμικών με την ταυτόχρονη αξιοποίηση του διαδικτύου αλλάζουν ριζικά και δυναμικά το μαθησιακό μοντέλο που γνωρίζαμε μέχρι πρόσφατα.

Η εργασία αυτή έχει σκοπό να διερευνήσει τις αλλαγές που φέρνει στον χώρο της εκπαίδευσης η τεχνολογική έκρηξη, μέσω της ενσωμάτωσης των Τ.Π.Ε. (Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνιών) στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς τα σύγχρονα εκπαιδευτικά λογισμικά και τα ψηφιακά παιχνίδια αποτελούν πλέον σημαντικά εργαλεία που ενισχύουν την παιδαγωγική διαδικασία, καθιστώντας την περισσότερο διαδραστική, ελκυστική και προσαρμοσμένη στις ατομικές ανάγκες των μαθητών (Prensky, 2003).

Η μελέτη επικεντρώνεται στα μαθηματικά λογισμικά πακέτα τα οποία καθίστανται ολοένα και πιο σημαντικά τόσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα στην τάξη όσο και για τη διαδικασία μάθησης, καθώς δημιουργούν υψηλότερα μαθησιακά αποτελέσματα συγκριτικά με τον παραδοσιακό τρόπο μελέτης (Cansu et al., 2023).

Κυριότερος σκοπός της εργασίας είναι η ενδελεχής μελέτη του λογισμικού Wolfram Mathematica. Αρχικά γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή, ενώ στην πορεία διερευνώνται οι δυνατότητες που δίνει το λογισμικό στον χρήστη. Η έρευνα δομείται σε δύο βασικούς άξονες: Βιβλιογραφική μελέτη του λογισμικού μέσω αναφορών σε επιστημονικά περιοδικά και βιβλία, αλλά και μελέτη μέσω χρήσης του λογισμικού κατά τη διδακτική διαδικασία. Η παρουσίαση μαθημάτων με τη βοήθεια του Mathematica σε παιδιά Α’ και Β’ Λυκείου και η συμπλήρωση σχετικών ερωτηματολογίων πριν και μετά τις παραδόσεις, βοήθησε στην εξαγωγή σημαντικών συμπερασμάτων σχετικά με τη χρησιμότητα του συστήματος.

Η έρευνα επιβεβαίωσε και στην πράξη αυτό που υποστηρίζει η επιστημονική κοινότητα στην μεγάλη πλειοψηφία της (ενδεικτικά Panagiotakopoulos et al., 2005, Leong, 2013, Papert, 1991). Τα μαθηματικά λογισμικά πακέτα εν γένει, και το λογισμικό Mathematica πιο ειδικά, συμπληρώνουν ιδανικά τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας της μαθηματικής επιστήμης, χωρίς ωστόσο να τον αντικαθιστούν στην ολότητά του. Δημιουργούν περιβάλλοντα διαδραστικά και ελκυστικά για τους μαθητές, ενώ παρέχουν σχεδόν απεριόριστες δυνατότητες για ευέλικτη διδασκαλία στους εκπαιδευτικούς. Η χρήση τους φαίνεται πως θα αυξάνεται συνεχώς τα επόμενα χρόνια με συνέπεια η δυναμική αυτή να προσφέρει πεδίο έρευνας για επόμενες εργασίες σχετικά με την εξέλιξή τους.

Δομή και Μεθοδολογία της εργασίας

Η εργασία δομήθηκε σε τέσσερα κεφάλαια τα οποία χωρίζονται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος βρίσκεται το θεωρητικό τμήμα της εργασίας και αποτελείται από τα δύο πρώτα κεφάλαια ενώ το δεύτερο μέρος είναι το ερευνητικό κομμάτι στο οποίο εντάσσονται το τρίτο και το τέταρτο κεφάλαιο.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετήθηκε βιβλιογραφικά η ενσωμάτωση των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση, αφού πρώτα έγινε μια ιστορική αναδρομή στα ελληνικά και τα παγκόσμια δεδομένα χρήσης των νέων τεχνολογιών. Ακόμα μελετήθηκε πιο ειδικά η σχέση των Τ.Π.Ε. με το μάθημα και την επιστήμη των μαθηματικών και ο βαθμός χρησιμότητας των τεχνολογικών εργαλείων στην διαδικασία μάθησης των θετικών μαθημάτων.

Το δεύτερο κεφάλαιο μελετά τα μαθηματικά λογισμικά πακέτα και τις δυνατότητες κάποιων εξ αυτών, δίνοντας βαρύτητα στο λογισμικό Wolfram Mathematica, που είναι άλλωστε και το κυρίως θέμα της παρούσας εργασίας. Εξετάζεται η δομή του λογισμικού, τα εργαλεία και οι επιλογές που προσφέρει στον χρήστη, ενώ παρουσιάζονται και κάποιες βασικές εντολές από ύλη που αξιοποιείται σε μεγάλο βαθμό στην εκπαίδευση και την έρευνα.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται οι παραδόσεις μαθημάτων που έγιναν με χρήση του λογισμικού Mathematica μέσα σε φροντιστηριακές τάξεις σε μαθητές Α’ και Β’ λυκείου. Ετοιμάστηκαν και παρουσιάστηκαν μαθήματα από δεκατέσσερις παραγράφους μέσα από την ύλη των μαθημάτων Άλγεβρας και Μαθηματικών, όλα με εντολές του λογισμικού, τα οποία περιγράφονται αναλυτικά, εμπλουτισμένα με εικόνες για μεγαλύτερη σαφήνεια. Ενδεικτικά, ολοκληρωμένες παραδόσεις κάποιων μαθημάτων υπάρχουν στα παραρτήματα της εργασίας.

Το κύριο μέρος της εργασίας ολοκληρώνεται με το τέταρτο κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζεται η στατιστική μελέτη που έγινε και τα αποτελέσματα αυτής. Έγιναν τρεις στατιστικές έρευνες, δύο αφορούσαν τους μαθητές και μία εκπαιδευτικούς μαθηματικών. Οι έρευνες προς τους μαθητές έλαβαν χώρα η μία πριν την παρουσίαση των μαθημάτων και η μία μετά. Σκοπός ήταν η εξαγωγή συμπερασμάτων αφενός αρχικά για τις γνώσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά λογισμικά και το λογισμικό Mathematica, αφετέρου για τις στάσεις τους σχετικά με την ποιότητα του μαθήματος μέσω χρήσης του λογισμικού. Αντίστοιχα το ερωτηματολόγιο προς τους εκπαιδευτικούς είχε σκοπό να εξετάσει τις γνώσεις των καθηγητών μαθηματικών γύρω από το λογισμικό Mathematica καθώς και τον βαθμό χρήσης του κατά τη διδασκαλία ή την προετοιμασία μαθήματος.

Περιορισμοί της εργασίας

Η έρευνα επιχειρεί να εντοπίσει τον βαθμό χρησιμότητας του λογισμικού Wolfram Mathematica στην εκπαιδευτική διαδικασία σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και τις στάσεις των μαθητών σχετικά με την ποιότητα της διδασκαλίας και τη βοήθεια στη μάθηση που παρέχει το λογισμικό. Ωστόσο υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί οι οποίοι πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την εξαγωγή και την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Ένας βασικός περιορισμός έγκειται στον αριθμό των μαθητών και των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στις στατιστικές έρευνες. Το δείγμα αποτελούνταν από μαθητές σε συγκεκριμένους φροντιστηριακούς χώρους των νομών Θεσσαλονίκης και Χαλκιδικής, στους οποίους ο συγγραφέας της εργασίας έχει άμεση πρόσβαση, και μολονότι επιχειρήθηκε η μέγιστη δυνατή αντιπροσωπευτικότητα, ο αριθμός του δείγματος κρίνεται μικρός.

Ένα ακόμα στοιχείο που πρέπει να τονιστεί όσον αφορά τους περιορισμούς της έρευνας είναι ο αριθμός και το περιεχόμενο των μαθημάτων που ετοιμάστηκαν και παρουσιάστηκαν. Με δεδομένο ότι η έρευνα έγινε σε πραγματικό χρόνο και η διδασκαλία των μαθημάτων με τη χρήση του λογισμικού έλαβε χώρα μέσα σε τάξεις φροντιστηρίων, τα μαθήματα που ετοιμάστηκαν έπρεπε να συμβαδίσουν με την ύλη που προτείνει το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ως εκ τούτου οι παραδόσεις περιορίστηκαν σε συγκεκριμένες παραγράφους και μόνο στις τάξεις της Α’ και Β’ λυκείου καθώς το διακύβευμα των Πανελληνίων Εξετάσεων πρακτικά απέτρεψε τη συμμετοχή και των μαθητών της Γ’ λυκείου.

Τέλος, ως έναν ακόμα περιορισμό θα ήταν φρόνιμο να αξιολογήσουμε τον βαθμό επίδρασης της παρουσίας του καθηγητή στην αίθουσα στις απαντήσεις των μαθητών. Δεδομένου ότι η έρευνα συντελέστηκε μέσα σε τάξη, εν ώρα διδασκαλίας, και έχοντας υπόψιν το γεγονός ότι ο καθηγητής του τμήματος επέλεξε το συγκεκριμένο λογισμικό, ενδεχομένως να υπάρχει ένα μικρό ποσοστό που να απάντησε θετικότερα του αναμενόμενου σχετικά με το Mathematica, για λόγους συστολής.

Θεωρητικό μέρος

Κεφάλαιο 1ο
Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνιών (Τ.Π.Ε.)

1.1 Τεχνολογίες Πληροφορικής και Επικοινωνιών

Οι Τεχνολογίες της Πληροφορικής και των Επικοινωνιών (Τ.Π.Ε.) αναφέρονται στη χρήση σύγχρονων ψηφιακών τεχνολογιών που επιτρέπουν την κωδικοποίηση, την επεξεργασία, τη διαχείριση, την αποθήκευση καθώς και την αναζήτηση και τη μετάδοση των πληροφοριών σε ψηφιακή μορφή με τη χρήση υπολογιστών, δικτύων υπολογιστών και του διαδικτύου (Πορπόδη, 2017).

Η ραγδαία τεχνολογική εξέλιξη έχει επηρεάσει βαθιά και οριζόντια την κοινωνία, δημιουργώντας νέες δυνατότητες αλλά και μεγάλες προκλήσεις, ενώ έχει οδηγήσει στην εκτεταμένη χρήση των Τ.Π.Ε. σε όλους τους τομείς της οικονομίας όπως στις επιχειρήσεις, τις μεταφορές, τον τουρισμό, τη δημόσια διοίκηση, αλλά αντίστοιχα και στις κοινωνικές δραστηριότητες όπως στην υγεία, την εκπαίδευση και τις διαπροσωπικές σχέσεις και επικοινωνίες. Οι Τ.Π.Ε. είναι το εργαλείο που επιτρέπει τη δημιουργία ενός παγκόσμιου δικτύου επικοινωνίας και συνεργασίας (Castells, 2000), ούτως ώστε οι πληροφορίες να διακινούνται ταχύτερα και πιο αποτελεσματικά, επιτρέποντας τη βελτίωση των διαδικασιών παραγωγής, των υπηρεσιών και της διοίκησης (Brynjolfsson & McAfee, 2014).

Στη σύγχρονη εποχή, η ψηφιοποίηση και οι Τ.Π.Ε. έχουν οδηγήσει σε μια παγκόσμια οικονομία, όπου οι πληροφορίες και τα δεδομένα αποτελούν σημαντικούς παράγοντες για την ανάπτυξη και την οικονομική και κοινωνική ευημερία. Ο ψηφιακός μετασχηματισμός των επιχειρήσεων και των οργανισμών απαιτεί την εφαρμογή προηγμένων τεχνολογιών για την αποτελεσματική λήψη αποφάσεων και την ενίσχυση της ανταγωνιστικότητας (Westerman et al., 2011). Ταυτόχρονα, οι Τ.Π.Ε. συμβάλλουν στη βελτίωση των υπηρεσιών υγείας, επιτρέποντας την απομακρυσμένη παρακολούθηση των ασθενών και την εξατομίκευση της θεραπείας, ενώ, όπως θα αναλυθεί και παρακάτω, η συμβολή τους στην εκπαίδευση είναι εξίσου σημαντική, παρέχοντας νέες δυνατότητες μάθησης με προηγμένες εκπαιδευτικές μεθόδους, που ενισχύουν τη διαδραστικότητα και τη συνεργασία μαθητών και εκπαιδευτικών.

1.2 Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση

1.2.1 Εισαγωγή Τ.Π.Ε. στην ελληνική εκπαίδευση

Οι υπολογιστές και οι Τ.Π.Ε. γενικότερα, εισήχθησαν στον τομέα της εκπαίδευσης τη δεκαετία του 1970 σε πολλές χώρες της Ευρώπης, αρχής γενομένης από τις Σκανδιναβικές, στις Η.Π.Α. αλλά και στην Αυστραλία και τη Νέα Ζηλανδία (Καράμηνας, 2001). Αρχικά η χρήση τους περιοριζόταν σε ερευνητικά πλαίσια κι ως επί το πλείστον σε πρότυπα και πειραματικά σχολεία. Περίπου 10 χρόνια αργότερα, στις αρχές της δεκαετίας του 1980, η πληροφορική έγινε μάθημα στις χώρες αυτές. Προϊόντος του χρόνου όλο και περισσότερες χώρες ενσωμάτωναν τις νέες τεχνολογίες στα προγράμματα σπουδών τους κι ο χρόνος χρήσης υπολογιστών κέρδιζε συνεχώς έδαφος.

Στην Ελλάδα η πληροφορική εισήχθη και διδάσκεται από το 1993 στη δευτεροβάθμια γενική και επαγγελματική εκπαίδευση, με βάση τα αναλυτικά προγράμματα του Υπουργείου Παιδείας. Ο στόχος ήταν να εκπαιδευθούν οι μαθητές σε δύο βασικούς τομείς: στην εκμάθηση του υλικού μέρους των υπολογιστών, αυτό που διεθνώς αποκαλείται hardware και στη χρήση και τον προγραμματισμό του λειτουργικού τους μέρους, δηλαδή στο software (Παπαδόπουλος, 2020). Έτσι, μεταξύ 1986 και 1992, δημιουργήθηκαν τα πρώτα εργαστήρια υπολογιστών σε 500 Γυμνάσια και Λύκεια, αποκλειστικά για τη διδασκαλία της Πληροφορικής, ενώ από το 1992 μέχρι το 1996 προστέθηκαν άλλα 800 (Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών Ε.Α.-Ι.Τ.Υ., 2013)[1].

[1] Στοιχεία από την ιστοσελίδα του Ε.Α.-Ι.Τ.Υ., σήμερα ΙΤΥΕ-Διόφαντος, http://www.cti.gr/el/

Ωστόσο, η ουσιαστική ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία ξεκίνησε με τα προγράμματα «Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Πληροφορικής» (Ε.Π.Π.Σ.Π.) και «Οδύσσεια» (1997-2002), το μεν πρώτο μέσω του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, το δε δεύτερο μέσω του Ινστιτούτου Τεχνολογίας και Υπολογιστών (Ι.Τ.Υ.). Τα προγράμματα αυτά, καθένα με τις διαφοροποιήσεις του, θέλησαν να δώσουν μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στις νέες τεχνολογίες, με στόχο την αξιοποίηση της πληροφορικής όχι μόνο ως αυτόνομο γνωστικό αντικείμενο και αυτοτελές μάθημα, αλλά και ως εργαλείο καθημερινής χρήσης για τη διδασκαλία, τη μάθηση και την επικοινωνία.

Μέσω των παραπάνω προγραμμάτων, το μάθημα της πληροφορικής και η χρήση των Τ.Π.Ε. εντάχθηκε και στα σχολικά προγράμματα των τάξεων του δημοτικού, στις αρχές της δεκαετίας του 2000. Την ανάγκη αυτή διατύπωνε, για πολύ καιρό, πλήθος ακαδημαϊκών και εκπαιδευτικών με αρθρογραφία στον τύπο και με δημοσιεύσεις σε επιστημονικά περιοδικά. Λόγου χάρη οι Δρόσος και Κυρίδης (2001: 13) τόνιζαν την αργοπορία των ελληνικών δημοτικών σχολείων στην ενσωμάτωση των Τ.Π.Ε. τη στιγμή που οι πιο ανεπτυγμένες οικονομικά χώρες δαπανούσαν ήδη τεράστια ποσά για τον εξοπλισμό των σχολείων με Η/Υ, τη δικτύωση τους με το διαδίκτυο και την ανάπτυξη πολυάριθμων πιλοτικών προγραμμάτων με σκοπό την όσο το δυνατόν καλύτερη αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη σχολική τάξη. Αντίστοιχες θέσεις διατύπωναν την εποχή εκείνη κι οι Τζωρτζάκης και Πολάκης (2001: 83), οι οποίοι διαπίστωναν ότι η πλειοψηφία της ελληνικής κοινωνίας φαίνεται να έχει κατανοήσει την αναγκαιότητα εισαγωγής των υπολογιστών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και δικτύωσης των σχολείων με το διαδίκτυο.

1.2.2 Χρήση των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση σήμερα

Η ενσωμάτωση των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση είναι μια δυναμική και διαρκώς μεταβαλλόμενη διαδικασία. Συντελείται σταδιακά και παράλληλα με την εξέλιξη της τεχνολογίας, όπως άλλωστε ήδη αναφέρθηκε. Η επιτυχής ενσωμάτωση των Τ.Π.Ε. στην εκπαιδευτική διαδικασία δεν είναι δεδομένη, επιβάλλεται πολιτική βούληση για να επιτευχθεί σε μέγιστο βαθμό και προϋποθέτει τη σύμπραξη της εκπαιδευτικής πολιτικής, της πανεπιστημιακής εκπαίδευσης, των επιμορφωτικών προσπαθειών, αλλά κυρίως του εκπαιδευτικού, ο οποίος πρέπει να είναι πρόθυμος να επαναπροσδιορίσει ρόλους και σταθερές που ίσχυαν ως τώρα (Τζιφόπουλος & Μπίκος, 2011: 588). Αποκτά ρόλο ρυθμιστικό και καθοδηγητικό κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, ο εκπαιδευτικός, καθώς πλέον οι Τ.Π.Ε. θα αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία που διαθέτει, εφόσον η αξιοποίησή τους ενισχύει τη μάθηση και παρέχει δημιουργία και συνεργασία μεταξύ των μαθητών σε ένα ευρύ φάσμα μαθημάτων (Gall & Breeze, 2008).

Οι Τ.Π.Ε. χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση σε πολλές μορφές, όπως τα εκπαιδευτικά λογισμικά μάθησης, τα ηλεκτρονικά βιβλία, εκπαιδευτικά παιχνίδια, εφαρμογές για τη δημιουργία περιεχομένου και πλατφόρμες για εξ αποστάσεως εκπαίδευση. Οι μαθητές με χρήση υπολογιστών, ταμπλετών και άλλων ψηφιακών συσκευών αποκτούν γνώσεις και δεξιότητες με νέους τρόπους, πιο διαδραστικούς και συχνά πιο ελκυστικούς, ενώ οι εκπαιδευτικοί από την άλλη μεριά έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθούν και να αξιολογούν την πρόοδο των μαθητών με αυτοματοποιημένα εργαλεία (Clark & Mayer, 2016), ενώ μέσω πλατφορμών εξ αποστάσεως εκπαίδευσης, υπάρχει πλέον η δυνατότητα για μάθηση σε οποιονδήποτε χώρο και χρόνο (Anderson, 2008). Χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης των Τ.Π.Ε. στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση είναι η περίοδος της πανδημίας Covid 19 όπου περισσότεροι από 1,5 δισεκατομμύριο μαθητές παγκοσμίως συμμετείχαν σε κάποια μορφή διαδικτυακής εκπαίδευσης (Totlis et al., 2021) κατά τη διάρκειά της, μέσω χρήσης βιντεοδιαλέξεων, ψηφιακών εργαλείων και διαδικτυακών μαθημάτων και διαγωνισμάτων. Επιπλέον, η ενσωμάτωση των Τ.Π.Ε. επιτρέπει τη δημιουργία εικονικών, ψηφιακών τάξεων που καθιστούν την εκπαιδευτική διαδικασία περισσότερο ευέλικτη και προσιτή για μαθητές από διαφορετικά υπόβαθρα, προσφέροντας με τον τρόπο αυτό πιο εξατομικευμένη μάθηση, όπου αυτή είναι απαραίτητη (Hattie, 2009). Ως εκ τούτου, εξασφαλίζεται, μέσω της χρήσης των Τ.Π.Ε., ένας πιο πολυμεσικός και πολυαισθητηριακός τρόπος προσέγγισης της μάθησης (Σολωμονίδου, 2002), κάτι που προτιμάται από την πλειοψηφία των μαθητών (Tomlinson, 2000).

Συμπερασματικά, ως τα κύρια πλεονεκτήματα της χρήσης Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση θα μπορούσαν να ορισθούν τα εξής: Από τη μια, το γεγονός της ενίσχυσης, σε πολύ μεγάλο βαθμό, της μαθησιακής εμπειρίας. Οι μαθητές μπορούν να αλληλεπιδρούν με πιο διαδραστικούς και ενδιαφέροντες τρόπους, όπως για παράδειγμα με τη χρήση παιχνιδιών μάθησης, διεθνώς γνωστά με τον όρο serious games, που σε ένα μεγάλο ποσοστό των περιπτώσεων ενισχύουν το ενδιαφέρον τους για μάθηση και τους παρακινούν για συμμετοχή (Gee, 2003). Επιπλέον, οι Τ.Π.Ε. επιτρέπουν την καλύτερη οργάνωση και διαχείριση του εκπαιδευτικού υλικού, προσφέρουν δυνατότητες για συνεργασία και επικοινωνία, ακόμα και σε απομακρυσμένα γεωγραφικά σημεία, ενώ οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθούν την πρόοδο των μαθητών και να εξατομικεύουν την εκπαιδευτική διαδικασία.

Στον αντίποδα, μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις της χρήσης των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση είναι η ανισότητα πρόσβασης σε τεχνολογίες, ιδιαίτερα σε απομακρυσμένες περιοχές ή σε χώρες με περιορισμένους πόρους. Λόγω αυτού του ψηφιακού χάσματος ελλοχεύει ο κίνδυνος για μαθητές και σχολεία πολλών ταχυτήτων, γεγονός που μπορεί να επιδεινώσει τις κοινωνικές ανισότητες (Van Dijk, 2020). Επίσης, η χρήση νέων τεχνολογιών απαιτεί εκπαίδευση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών ώστε να είναι σε θέση να ενσωματώσουν τα εργαλεία Τ.Π.Ε. στη διδασκαλία τους, αλλά και να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις που προκύπτουν από την τεχνολογική πολυπλοκότητα. Ασφαλώς τέλος, πρέπει να αναφερθεί και η παράμετρος του κόστους που έχει η διαδικασία ενσωμάτωσης και ανανέωσης των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση. Καθώς οι τεχνολογίες εξελίσσονται ραγδαία, η υλικοτεχνική υποδομή οφείλει να συμβαδίζει και να ανανεώνεται αναλόγως, γεγονός ιδιαίτερα κοστοβόρο καθώς απαιτεί σημαντικές δημόσιες και ιδιωτικές επενδύσεις.

1.2.3 Τ.Π.Ε. και Μαθηματικά

Τα Μαθηματικά, σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, θεωρούνται ένα από τα μαθήματα με την πιο συχνή και διαδεδομένη χρήση των Τ.Π.Ε. κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς αποτελούν ένα γνωστικό πεδίο το οποίο προσφέρεται για την ανάπτυξη νέων μεθόδων μάθησης μέσω της εκπαιδευτικής τεχνολογίας και της ψηφιοποίησης. Με δεδομένο επίσης ότι εφαρμόζονται σε διαφορετικές επιστήμες (φυσικές, οικονομικές, ιατρικές κ.ά.) και χρησιμοποιούνται για την περιγραφή καταστάσεων της καθημερινής ζωής μέσω επίλυσης προβλημάτων, η χρήση νέων τεχνολογιών καθίσταται ιδανική για την παραστατικότητα που μπορεί να προσφέρει μέσω εικόνων, οπτικοποιήσεων και προσομοιώσεων.

Πιο συγκεκριμένα, η χρήση διαδραστικών πινάκων επιτρέπει τον σχεδιασμό δύσκολων γεωμετρικών σχημάτων και γραφικών παραστάσεων, με τη συμμετοχή μάλιστα όλης της τάξης (Kutluca et al., 2019). Λογισμικά όπως το Wolfram Mathematica και το GeoGebra, που θα αναλυθούν παρακάτω, χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της γεωμετρίας και της άλγεβρας, επιτρέποντας στους μαθητές να επιλύουν σύνθετες ασκήσεις και να εξερευνούν μαθηματικές έννοιες σε πραγματικό χρόνο. Στις μικρότερες τάξεις οι εφαρμογές μαθηματικών παιχνιδιών βοηθούν τους μαθητές να εξασκηθούν στις μαθηματικές πράξεις με διασκεδαστικό τρόπο, ενισχύοντας το ενδιαφέρον τους, ενώ με την βοήθεια των ταμπλετών (tablets) οι μαθητές μπορούν να καταγράφουν και να αποθηκεύουν τις σημειώσεις τους με ηλεκτρονικό τρόπο, δημιουργώντας διαδραστικές, ελκυστικές παρουσιάσεις.

Η χρήση της επαυξημένης πραγματικότητας (AR) επιτρέπει στους μαθητές να αλληλεπιδρούν με μαθηματικά αντικείμενα και τρισδιάστατα σχήματα ενισχύοντας την οπτική κατανόηση, ενώ στατιστικά λογισμικά ανάλυσης δεδομένων, όπως το Excel και το SPSS βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες των γραφημάτων και των διαγραμμάτων στην πράξη (Lai & Cheong, 2022).

Τα ηλεκτρονικά βιβλία μαθηματικών παρέχουν ενσωματωμένα βίντεο και διαδραστικά παραδείγματα που διευκολύνουν την κατανόηση και οι διαδικτυακές πλατφόρμες εξυπηρετούν στη δημιουργία ομάδων συζήτησης (forum και chat) για να λυθούν μαθηματικά προβλήματα από κοινού. Τέλος, τα λογισμικά προσομοίωσης επιτρέπουν στους μαθητές να εξερευνήσουν τα μαθηματικά με πρακτικό τρόπο, προσομοιώνοντας τις ύλες που διδάσκονται σε φυσικά ή άλλα φαινόμενα (Cirneanu & Moldoveanu, 2024).

Μεγάλο πλήθος ερευνών έχει υποστηρίξει τα οφέλη της χρήσης νέων τεχνολογιών στο μάθημα των μαθηματικών, από τα πρώτα κιόλας χρόνια ενσωμάτωσης. Ενδεικτικά μπορεί να αναφερθεί ότι, σύμφωνα με τους Newton & Rogers (2001), οι μαθητές δραστηριοποιούνται περισσότερο όταν τα μαθήματα θετικού προσανατολισμού υποστηρίζονται από τις Τ.Π.Ε., ενώ οι Jimoyiannis et al. (2001) υποστήριζαν ότι η μάθηση μέσω προσομοιώσεων με χρήση Τ.Π.Ε. έχει σημαντικά θετικά αποτελέσματα. Ο Hollebrands (2007), επιπλέον, τόνιζε τις νέες ευκαιρίες που παρέχονται στους εκπαιδευόμενους μέσω των νέων τεχνολογιών, των οποίων οι μαθηματικές δεξιότητες αναβαθμίζονται σημαντικά. Αντίστοιχα αποτελέσματα διατυπώνουν και σύγχρονες έρευνες, με τον Young (2023) να αναφέρει ότι μαθητές που χρησιμοποιούν συνεργατικά εργαλεία Τ.Π.Ε. επιδεικνύουν βελτιωμένες δεξιότητες στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ενώ οι Makhmudova et al. (2020) υποστηρίζουν τη δυνατότητα δημιουργίας ενός ανοιχτού συστήματος διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω χρήσης των Τ.Π.Ε. το οποίο διασφαλίζει την υλοποίηση δημιουργικής και διαφοροποιημένης προσέγγισης στην εκπαιδευτική διαδικασία, που θα ανταποκρίνεται στο σύγχρονο εκπαιδευτικό πρότυπο μαθητικοκεντρικής μάθησης, με τον εκπαιδευτικό να έχει καθοδηγητικό και συμβουλευτικό ρόλο.

Κεφάλαιο 2ο

Μαθηματικά λογισμικά πακέτα (Software Mathematics Packages) – Το λογισμικό Mathematica

Σημαίνοντα ρόλο στην αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση παίζουν τα διάφορα μαθηματικά λογισμικά πακέτα που ενσωματώνονται στα εκπαιδευτικά προγράμματα ολοένα και περισσότερων χωρών και χρησιμοποιούνται μέσα στις σχολικές, και όχι μόνο, τάξεις αλλά και κατά τη μελέτη και την έρευνα μαθητών και ερευνητών. Υπάρχει μεγάλος αριθμός μαθηματικών λογισμικών, κάθε ένα από τα οποία εξειδικεύεται σε κάποιον συγκεκριμένο κλάδο της επιστήμης, έχοντας όμως ωστόσο και μια μεγάλη τομή κοινών εργασιών που εκτελούν. Στη συγκεκριμένη εργασία θα παρουσιαστούν, κυρίως, τα λογισμικά που έχουν απήχηση στην ελληνική επικράτεια, σε όλα τα επίπεδα βαθμίδων εκπαίδευσης, θα γίνει όμως αναφορά και για τα δεδομένα σε παγκόσμιο επίπεδο.

2.1 Λογισμικά πακέτα (Software Packages)

Αρχικά θα γίνει ένας διαχωρισμός των εννοιών και μια αποσαφήνιση των όρων που σχετίζονται με τα λογισμικά πακέτα.

Με την έννοια «λογισμικό» (διεθνώς «software») εννοούμε ένα σύνολο οδηγιών, δεδομένων ή προγραμμάτων που χρησιμοποιούνται για τη λειτουργία υπολογιστών και την εκτέλεση συγκεκριμένων εργασιών. Διακρίνεται σε δύο κύριες κατηγορίες, το Λογισμικό Εφαρμογών και το Λογισμικό Συστήματος. Στο λογισμικό εφαρμογών κατατάσσουμε τα προγράμματα σχεδίασης, φωτογραφιών και βίντεο, τα παιχνίδια, τους φυλλομετρητές καθώς και τα εκπαιδευτικά προγράμματα. Στο λογισμικό συστήματος έχουμε το Λειτουργικό Σύστημα (O.S.) και τα Ειδικά Εργαλεία (utilities) (Κατσούλας, Όροβας & Παναγιωτίδης, 2017).

Ως πακέτο λογισμικού ορίζεται, σύμφωνα με το Αμερικανικό Εθνικό Ίδρυμα Προτυποποίησης (2001), μια συλλογή από προγράμματα λογισμικού που έχουν σχεδιαστεί για να εκτελούν συγκεκριμένες εργασίες, συμπεριλαμβανομένων των εργαλείων υποστήριξης των εργασιών αυτών. Οι εργασίες αυτές είναι κατά κύριο λόγο η εισαγωγή και επεξεργασία δεδομένων, η αποθήκευσή τους καθώς και η ανάκτησή τους ανά πάσα στιγμή για περαιτέρω επεξεργασία και ανάλυση.

Το εκπαιδευτικό λογισμικό είναι μια ειδική κατηγορία του λογισμικού εφαρμογών που χρησιμοποιείται για να εκπληρωθούν συγκεκριμένοι μαθησιακοί στόχοι (Panagiotakopoulos et al., 2005). Διακρίνεται σε λογισμικό γενικού σκοπού, με εφαρμογές όπως το Word, το Excel, το PowerPoint κ.ά. και σε λογισμικό τυπικής μορφής, το οποίο χρησιμοποιείται ως μέσο άμεσης υποβοήθησης της εκπαιδευτικής διαδικασίας (C.A.I. – Computer Assisted Instruction). Το τελευταίο έχει δυνατότητες εξάσκησης (practice), φροντιστηριακής εκπαίδευσης (tutorial), λύσης προβλημάτων (solving), προσομοιώσεων (simulations) καθώς και μοντελοποιήσεων (modelings).

Τέλος, ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας (C.A.S., Computational Algebra System) ή σύστημα συμβολικής άλγεβρας (S.A.S., Symbolic Algebra System) είναι ένα πακέτο λογισμικού που περιλαμβάνει ένα σύνολο αλγορίθμων για την εκτέλεση αριθμητικών διαδικασιών σε αλγεβρικά αντικείμενα, μια γλώσσα για την υλοποίησή τους και ένα περιβάλλον για τη χρήση της γλώσσας. Μπορεί επιπλέον να περιλαμβάνει τη δυνατότητα γραφικών, ενώ για να είναι αποτελεσματικό απαιτεί μια μεγάλη βιβλιοθήκη αλγορίθμων, αποδοτικές δομές δεδομένων και έναν γρήγορο πυρήνα (Aladev, 2004; Geddes, 1992; Sulaiman et al., 2020). Ένα τέτοιο σύστημα διευκολύνει την κατασκευή πειραμάτων μέσω προσομοιώσεων και εργαλείων εικονικής πραγματικότητας.

2.2 Μαθηματικά λογισμικά πακέτα (Software Mathematics Packages)

Έχοντας ομονοήσει, σε μεγάλο βαθμό, η επιστημονική κοινότητα για τα οφέλη της χρήσης νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση γενικά, αλλά και στη μαθηματική εκπαίδευση ειδικότερα, υπάρχει πλέον σημαντική ενσωμάτωση πολυάριθμων εκπαιδευτικών λογισμικών διδασκαλίας και εκμάθησης των Μαθηματικών που χρησιμοποιούνται από μαθητές, εκπαιδευτικούς και ερευνητές καθώς, σύμφωνα με τον Κόμη (2004), τα εκπαιδευτικά λογισμικά εξάσκησης και πρακτικής έχουν άμεσα εκπαιδευτικά αποτελέσματα στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης, φαντασίας και δεξιοτήτων. Τα εκπαιδευτικά λογισμικά που αφορούν τη μαθηματική επιστήμη έχουν, ίσως, την πρωτοκαθεδρία στην παγκόσμια αγορά, με ένα ποσοστό αυτών να έχει ευρεία χρήση και στην Ελλάδα. Η βιβλιογραφία καταγράφει ένα μεγάλο πλήθος μαθηματικών λογισμικών, μερικά από τα οποία έχουν προσανατολισμό καθαρά εκπαιδευτικό, ενώ άλλα ειδικεύονται σε κάποιον τομέα των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Ως εκ τούτου ο χρήστης που ενδιαφέρεται για έρευνα στον τομέα της άλγεβρας ή της ανάλυσης μπορεί να χρησιμοποιήσει συναφή λογισμικά όπως το KANT ή το Derive. Αντίστοιχα ο ενδιαφερόμενος για χρηματοοικονομικά μαθηματικά μπορεί να βρει σημαντική βοήθεια σε λογισμικά όπως το MInitab που ειδικεύεται σε αυτό το πεδίο ή ασφαλώς στο στατιστικό πακέτο SPSS ενώ ένας μηχανικός θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει λογισμικά όπως το Mathcad ή το GrafEq. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί μια σύντομη ανάλυση σε μερικά από τα μαθηματικά λογισμικά πακέτα και εφαρμογές, κυρίως σε αυτά που έχουν περισσότερο εκπαιδευτική προσέγγιση σε επίπεδο πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας κλίμακας. Τα δεδομένα που θα παρουσιαστούν πάρθηκαν από τον φορέα E.M.I.S. (European Mathematical Information Service), από τις επίσημες ιστοσελίδες συγκεκριμένων λογισμικών, αλλά κι από σχετικές επιστημονικές δημοσιεύσεις:

GeoGebra: Το GeoGebra είναι ένα λογισμικό που έχει σχεδιαστεί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών συνδυάζοντας εργαλεία που βρίσκουν εφαρμογή στη γεωμετρία, την άλγεβρα, την ανάλυση και τη στατιστική, εξ' ου και προτιμάται από τη συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών στην Ελλάδα, όπως αποδεικνύει και η στατιστική έρευνα που παρουσιάζεται παρακάτω. Χωρίζει τις εντολές που διαθέτει, σε τρία επίπεδα, το πρώτο για μαθητές και ύλη τετάρτης και πέμπτης δημοτικού (Grades 4-5), το δεύτερο αφορά την έκτη δημοτικού και το γυμνασιακό επίπεδο (Grades 6-8), ενώ το τελευταίο αφορά το λυκειακό επίπεδο (Grades 9-12). Ανήκει στην κατηγορία των ελεύθερων λογισμικών και είναι συμβατό τόσο σε Η/Υ όσο και σε φορητές συσκευές. Είναι ιδανικό για μαθητές και δασκάλους όλων των επιπέδων, επιτρέποντας την εύκολη δημιουργία γεωμετρικών σχημάτων και γραφικών παραστάσεων, ενώ με την αλλαγή τιμών, το λογισμικό επιτρέπει τη μετατόπιση ή τον μετασχηματισμό τους. Επιπλέον, δίνει τη δυνατότητα επίλυσης εξισώσεων κι ανισώσεων, τον υπολογισμό σύνθετων παραστάσεων, την εύρεση ακρότατων κ.α. και γενικά αποτελεί ένα λογισμικό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορες πτυχές της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Matlab: Είναι κι αυτό ένα εξαιρετικά δημοφιλές λογισμικό στην επιστήμη των μαθηματικών, της φυσικής, τη μηχανική και στους χρηματοοικονομικούς υπολογισμούς και την ανάλυση δεδομένων. Το Matlab συνδυαστικά με την εργαλειοθήκη που το συνοδεύει, χρησιμοποιείται για την επίλυση διαφόρων μαθηματικών προβλημάτων με χρήση πινάκων και γενικότερα γραμμικής άλγεβρας, αλλά και για μεγάλο όγκο υπολογιστικών προβλημάτων με την επίλυση εξισώσεων, διαφορικών εξισώσεων, συστημάτων εξισώσεων, με υπολογισμό σύνθετων ολοκληρωμάτων, αλλά και επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης (Moler, 2004).

Function Probe: Στην ελληνική εκπαίδευση χρησιμοποιείται ευρέως και το συγκεκριμένο λογισμικό, με τον τίτλο «Φωτόδεντρο[2]». Πρόκειται για ένα πολυεποπτικό εργαλείο για τη σύγχρονη άλγεβρα, την τριγωνομετρία και την ανάλυση, που επιτρέπει τη διερεύνηση των συναρτήσεων και τη μαθηματική μοντελοποίηση, όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται. Είναι ένα κατεξοχήν «ανοιχτό» περιβάλλον μάθησης, προορισμένο να χρησιμοποιείται σε τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου. Το Function Probe δεν είναι αυστηρά συνδεδεμένο με συγκεκριμένο διδακτικό υλικό, αφήνοντας περιθώρια ευελιξίας και δημιουργικότητας σε εκπαιδευτικούς και μαθητές.

Geometer's Sketchpad: Το Geometer's Sketchpad είναι ένα ακόμα παγκοσμίως διαδεδομένο λογισμικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών[3]. Παρέχει στους μαθητές όλων των επιπέδων, από την τρίτη τάξη δημοτικού μέχρι και το πανεπιστημιακό επίπεδο, έναν απτό τρόπο εκμάθησης μαθηματικών που αυξάνει

[2] https://photodentro.edu.gr/edusoft/r/8531/180
[3] http://www.keypress.com

την κατανόησή τους. Επικεντρώνεται στον τομέα της γεωμετρίας, επιτρέποντας στους χρήστες να δημιουργούν γεωμετρικά σχήματα και γεωμετρικές κατασκευές.

Octave: Λογισμικό ανοιχτού κώδικα που είναι προσανατολισμένο στη μαθηματική επιστήμη, είναι συμβατό με το Matlab και εκτελείται σε GNU/Linux, macOS, BSD και Microsoft Windows [4]. Χρησιμοποιείται κυρίως για αριθμητικούς υπολογισμούς, ενώ διαθέτει ενσωματωμένα εργαλεία σχεδίασης και οπτικοποίησης σχημάτων δύο και τριών διαστάσεων.

3D-XplorMath: Το 3D-XplorMath είναι ένα δωρεάν διαθέσιμο λογισμικό πρόγραμμα μαθηματικής οπτικοποίησης. Χρησιμοποιείται κυρίως σε αμερικανικά πανεπιστήμια και ένας από τους κύριους σκοπούς του είναι να διευκολύνει τον χρήστη να δει συγκεκριμένες οπτικές αναπαραστάσεις διαφόρων μαθηματικών αντικειμένων και διαδικασιών[5]. Παρουσιάζει σειρά διαφορετικών σχημάτων μαθηματικού ενδιαφέροντος, που κυμαίνονται από απλές επίπεδες καμπύλες έως πολύεδρα και φράκταλ.

Maxima: Ένα λογισμικό σύστημα χειρισμού αριθμητικών εκφράσεων και μαθηματικών διαδικασιών, όπως η διαφόριση, η ολοκλήρωση, οι σειρές Taylor, οι μετασχηματισμοί Fourier και Laplace, η επίλυση διαφορικών εξισώσεων, χρήση διανυσμάτων, πινάκων και τανυστών κ.α.. Επίσης μπορεί να σχεδιάσει σχήματα και γραφικές παραστάσεις τριών διαστάσεων. Είναι απόγονος του Macsyma, συστήματος άλγεβρας υπολογιστών που αναπτύχθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1960 στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης, και είναι διαθέσιμο στο κοινό, χάρη στη φύση του ανοιχτού κώδικα που διαθέτει[6].

Χελωνόκοσμος – Αβάκιο: Το Αβάκιο - Χελωνόκοσμος είναι ένα μαθηματικό λογισμικό μικρής εμβέλειας και χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών και πειραματισμού, δίνοντας τη δυνατότητα ανάπτυξης και εκτέλεσης συμβολικών εκφράσεων που οδηγούν στην αναπαράσταση γεωμετρικών σχημάτων και στον χειρισμό γεωμετρικών αναπαραστάσεων με δυναμικό τρόπο

---

[4] https://www.gnu.org/software/octave
[5] https://3d-XplorMath.org/TopLevel/features.html
[6] https://maxima.sourceforge.io

(Πορπόδη, 2017). Απευθύνεται κυρίως σε μικρότερες ηλικίες και χρησιμοποιείται κυρίως στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αποτελείται από συνδεδεμένες περιοχές εργασίας, τις Ψηφίδες, που χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη συγκεκριμένων εργασιών.

Geometer's Sketchpad: Πρόκειται για ένα ακόμα μαθηματικό λογισμικό με γεωμετρικό προσανατολισμό, που επιτρέπει στους χρήστες να δημιουργούν απαιτητικές γεωμετρικές κατασκευές και σχεδιαγράμματα. Ωστόσο δεν έχει αποκλειστικά γεωμετρική χρησιμότητα καθώς διευκολύνει τη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας και της θεωρίας αριθμών, ενθαρρύνοντας τους μαθητές όχι μόνο να λύνουν προβλήματα ή να υπολογίζουν λύσεις, αλλά να δημιουργούν τις λύσεις και να κατασκευάζουν μοντέλα για επίλυση των προβλημάτων. (Leong, 2013).

Pari/GP: Το PARI/GP είναι ένα ελεύθερο λογισμικό που αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1980 στο Πανεπιστήμιο του Μπορντό. Πρόκειται για σύστημα άλγεβρας σχεδιασμένο για γρήγορους υπολογισμούς αριθμητικής και θεωρίας αριθμών, αλλά και σύνθετες διαδικασίες ανώτερης ανάλυσης. Έτσι έχει ευρεία χρησιμότητα, από παραγοντοποιήσεις παραστάσεων μέχρι και σχεδίαση ελλειπτικών καμπυλών και συναρτήσεων *L*. Περιέχει επίσης πληθώρα εντολών για υπολογισμό πινάκων, σειρών, παραγώγων και ολοκληρωμάτων (Batut et al., 2008).

2.3 Λογισμικό Mathematica

Το μαθηματικό λογισμικό πακέτο Wolfram Mathematica είναι από αυτά που δεν αναφέρθηκαν παραπάνω καθώς αποτελεί τη βασική μελέτη της παρούσας εργασίας. Θεωρείται ένα από τα πιο ισχυρά και πολύπλευρα υπολογιστικά συστήματα στον κόσμο, και όπως αναφέρεται στην επίσημη ιστοσελίδα του, είναι ευρέως αναγνωρισμένο τόσο για την τεχνική του ικανότητα όσο και για την ευκολία χρήσης του, καθώς παρέχει ένα ενιαίο, ολοκληρωμένο και συνεχώς επεκτεινόμενο σύστημα που καλύπτει όλο το εύρος της μαθηματικής επιστήμης, ενώ είναι διαθέσιμο μέσω οποιουδήποτε προγράμματος περιήγησης ιστού σε όλα τα σύγχρονα συστήματα υπολογιστών[7]. Πρόκειται για ένα υψηλής απόδοσης λογισμικό CAS, το οποίο έχει ήδη τεράστια συμβολή στην εκπαίδευση και προσφέρει πληθώρα πλεονεκτημάτων (Κουμπιά, 2023). Συγκεκριμένα, είναι ένα υπολογιστικό πακέτο με πάρα πολλές εφαρμογές σε σχεδόν όλους τους τομείς των φυσικών επιστημών (Χημεία, Φυσική, Βιολογία κ.ά.), των οικονομικών επιστημών, καθώς και των πολυτεχνιακών επιστημών, διότι έχει την ευχέρεια πραγματοποίησης μαθηματικών υπολογισμών, αλγεβρικών, τριγωνομετρικών και υπερβατικών πράξεων, σύνθετων παραγωγίσεων και ολοκληρώσεων και υπολογισμού σειρών. Έχει επιπλέον εξαιρετικές δυνατότητες επίλυσης συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων, μετασχηματισμών Fourier και Laplace, καθώς και εύκολο χειρισμό πινάκων, διανυσμάτων και τανυστών. Ακόμα υποστηρίζει, με ένα μεγάλο φάσμα επιλογών και εργαλείων, τη σχεδίαση απαιτητικών γεωμετρικών σχημάτων ή γραφικών παραστάσεων, τόσο στον δυσδιάστατο, όσο και στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ δίνει τη δυνατότητα δυναμικής αναπαράστασης σχεδίων, τα οποία μεταβάλλονται προϊόντος του χρόνου ή καθώς αλλάζει κάποια παράμετρος.

2.3.1 Ιστορική αναδρομή λογισμικού

Το λογισμικό Mathematica σχεδιάστηκε το 1988 από τον φυσικό Stephen Wolfram και έχει αναπτυχθεί από την εταιρεία Wolfram Research of Champaign στο Ιλινόις των Η.Π.Α.. Όπως ο ίδιος έχει δηλώσει (Wolfram, 2011), οι απαιτήσεις ανώτερης άλγεβρας και πολύπλοκων μαθηματικών πράξεων πάνω στη μελέτη της θεωρητικής φυσικής, τον ώθησαν να αρχίσει να χρησιμοποιεί μαθηματικά υπολογιστικά συστήματα, από τα μέσα της δεκαετίας του 1970. Σύντομα οι ανάγκες του ξεπέρασαν τα υφιστάμενα συστήματα και από το 1979 ξεκίνησε ο σχεδιασμός ενός δικού του μαθηματικού λογισμικού συστήματος, μετεξέλιξη του οποίου μπορεί να θεωρηθεί το Mathematica.

[7] https://www.wolfram.com/mathematica/

Το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτήθηκε για τον σχεδιασμό του λογισμικού, η χαώδης θεωρία και το ογκώδες τυπολόγιο, μαζί με όλες τις φόρμουλες και τα γραφήματα, βασίστηκαν κυρίως στο βιβλίο των Abramowitz and Stegun «Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables» (1964). Πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό έργο, σημείο αναφοράς στη μαθηματική επιστήμη, το οποίο χρησιμοποιεί η αμερικανική πολιτεία ως βάση και πρότυπο για τα μαθηματικά. Χρειάστηκε σχεδόν μια δεκαετία ώστε να ενοποιήσει το σύστημα άλγεβρας υπολογιστή, τις γλώσσες προγραμματισμού, τα συστήματα γραφικών και τις αριθμητικές βιβλιοθήκες σε ένα ενιαίο σύστημα.

Το σύστημα ενοποιήθηκε, ήταν συνεκτικό και αυτοματοποιημένο, όπως ήθελε ο ίδιος ο Wolfram, και υλοποιήθηκε από την εταιρεία που είχε ιδρύσει. Στόχος της εταιρείας ήταν να παρέχει το πλαίσιο που θα επιτρέψει στον χρήστη του υπολογιστή να αξιοποιήσει πλήρως τις δυνατότητές του τις επόμενες δεκαετίες. Να καταστήσει δυνατό να υπολογίζεται οτιδήποτε μπορεί να υπολογιστεί, όποτε και όπου χρειάζεται, και να γίνουν προσιτά όλα τα όρια του υπολογιστικού σύμπαντος.

Από την πρώτη έκδοση του Mathematica τον Ιούνιο του 1989 (Mathematica 1.0), μέχρι και την τελευταία που κυκλοφόρησε τον Ιούλιο του 2024 (Mathematica 14.1), έχουν υπάρξει συνολικά 53 (!) εκδόσεις, κάποιες από τις οποίες πρόσθεταν κάποια επιπλέον εφαρμογή ή εργαλείο και κάποιες άλλες επικαιροποιούσαν προηγούμενες εκδόσεις με νέα μαθηματικά δεδομένα. Παρακάτω παρατίθενται οι πιο βασικές εκδόσεις του λογισμικού, μαζί με την ημερομηνία κυκλοφορίας τους:

- Mathematica 1.0 / Ιούνιος 1989
- Mathematica 2.0 / Ιανουάριος 1991
- Mathematica 3.0 / Σεπτέμβριος 1996
- Mathematica 4.0 / Μάιος 1999
- Mathematica 5.0 / Ιούνιος 2003
- Mathematica 6.0 / Μάιος 2007
- Mathematica 7.0 / Νοέμβριος 2008

- Mathematica 8.0 / Νοέμβριος 2010
- Mathematica 9.0 / Νοέμβριος 2012
- Mathematica 10.0 / Ιούλιος 2014
- Mathematica 10.4 / Μάρτιος 2016
- Mathematica 11.0 / Αύγουστος 2016
- Mathematica 11.1 / Μάρτιος 2017
- Mathematica 12.0 / Απρίλιος 2019
- Mathematica 13.0 / Δεκέμβριος 2021
- Mathematica 14.0 / Ιανουάριος 2024
- Mathematica 14.1 / Ιούλιος 2024

2.3.2 Δομή λογισμικού Mathematica

Η δομή του Wolfram Mathematica είναι πολυεπίπεδη και βασίζεται στην αρχή της "διαλογικής αξιολόγησης" (evaluative dialogue), όπως περιγράφει ο ίδιος ο Stephen Wolfram στο βιβλίο του "A New Kind of Science" (2002). Θεωρείται ως ένα αρθρωτό σύστημα λογισμικού το οποίο συνδυάζει τον πυρήνα (Kernel), που περιέχει τον κώδικα επεξεργασίας δεδομένων και που στην ουσία εκτελεί τους υπολογισμούς, με ισχυρά μαθηματικά εργαλεία και με ένα εύχρηστο περιβάλλον εργασίας και διεπαφής (frontend), το οποίο χειρίζεται την αλληλεπίδραση με τον χρήστη (Wolfram Research, Inc., 1988).

Οι εφαρμογές που αναπτύσσονται στο Mathematica πιο συχνά γράφονται στο Notebook Mathematica (σημειωματάριο) με τη γλώσσα Wolfram Language, η οποία υποστηρίζει διάφορα είδη προγραμματισμού (συναρτησιακό, αντικειμενοστραφή κ.α.) (Maeder, 2000). Αυτός είναι πιο συχνός τρόπος εργασίας στο σύστημα Wolfram Mathematica, καθώς τα σημειωματάρια συνδυάζουν την είσοδο και την έξοδο του συστήματος Wolfram με κείμενο, γραφικά, παλέτες και άλλο υλικό και μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε για συνεχείς υπολογισμούς είτε ως μέσο παρουσίασης ή δημοσίευσης των αποτελεσμάτων[8].

Άλλος τρόπος διεπαφής του Wolfram Mathematica είναι η επικοινωνία με άλλα προγράμματα (Wolfram Symbolic Transfer Protocol WSTP). Η τελευταία έχει σημαίνοντα ρόλο καθότι καθιστά το σύστημα Wolfram ικανό να αλληλεπιδρά όχι μόνο με ανθρώπινους χρήστες αλλά και με άλλα προγράμματα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ενός τυποποιημένου πρωτοκόλλου για αμφίδρομη επικοινωνία μεταξύ εξωτερικών προγραμμάτων και του πυρήνα της γλώσσας Wolfram.

Τέλος, ένας κοινός τρόπος αλληλεπίδρασης είναι η διεπαφή που βασίζεται σε κείμενο από το πληκτρολόγιο. Θεωρείται ιδιαίτερα άμεση διεπαφή καθώς πληκτρολογώντας ο χρήστης το κείμενο, έχει αυτόματη αλληλεπίδραση με τον πυρήνα του Wolfram Mathematica. Άξιο αναφοράς ωστόσο είναι το γεγονός ότι μολονότι η διεπαφή που βασίζεται σε κείμενο παρέχει πρόσβαση στις περισσότερες από τις δυνατότητες του πυρήνα της γλώσσας Wolfram, η λειτουργικότητα γραφικών και η δυναμική διαδραστικότητα της διεπαφής του συστήματος Wolfram δεν είναι πάντα διαθέσιμες.

2.3.3 Σύνταξη εντολών/Χρήσεις λογισμικού

Για να ξεκινήσει το σύστημα Wolfram Mathematica με μια διεπαφή που βασίζεται σε κείμενο, πληκτρολογείται η απαιτούμενη εντολή σε μια γραμμή εντολών του λειτουργικού συστήματος ή γίνεται διπλό κλικ σε ένα εικονίδιο πυρήνα του συστήματος Wolfram.

Στην αρχή κάθε εντολής το Wolfram Mathematica εμφανίζει την ένδειξη «In[n]:=» για να δηλώσει ότι είναι έτοιμο να λάβει δεδομένα για την n-οστη εντολή, καθώς κάθε μία αριθμείται με διαδοχικούς αριθμούς, ξεκινώντας από το 1. Στη συνέχεια, εισάγεται η καταχώριση και μέσω του πλήκτρου «Enter» το σύστημα θα

[8] https://reference.wolfram.com/language/tutorial/TheStructureOfTheWolframSystem.html

επεξεργαστεί τα δεδομένα και θα δημιουργήσει ένα αποτέλεσμα, το οποίο εμφανίζεται με την ένδειξη «Out[n]=».

Εάν η καταχώριση είναι σύντομη, μπορεί να δοθεί σε μία μόνο γραμμή, ενώ εάν η καταχώριση είναι μεγαλύτερη, μπορεί να δοθεί σε πολλές γραμμές. Υπάρχει πάντα η δυνατότητα μετακίνησης του κέρσορα προς τα πίσω για εισαγωγή ή διαγραφή χαρακτήρων. Μπορεί ωστόσο να γίνει διαγραφή και μέσω των πλήκτρων: Ctrl+H ή Ctrl+D ή Backspace ή Delete, αντίστοιχα, ενώ με το Ctrl+G ή το Ctrl+K γίνεται διαγραφή της ήδη πληκτρολογημένης εισόδου.

Στην περίπτωση διεπαφής «notebook», ο χρήστης αλληλεπιδρά με το Wolfram Mathematica δημιουργώντας διαδραστικά έγγραφα. Αρχικά το σύστημα εμφανίζει ένα άδειο σημειωματάριο με έναν δρομέα που αναβοσβήνει. Μετά την πληκτρολόγηση του κειμένου από τον χρήστη, η γλώσσα Wolfram θα ερμηνεύσει το κείμενό αυτό ως είσοδο. Με χρήση του συνδυασμού «Shift+Enter» το σύστημα ενημερώνεται ότι έχει ολοκληρωθεί η εισαγωγή δεδομένων, η οποία επισημαίνεται ως «In[n]:=». Έπεται η επεξεργασία και η εξαγωγή αποτελέσματος που εμφανιστεί με την αντίστοιχη ένδειξη «Out[n]=».

Οι μαθηματικές δυνατότητες του λογισμικού είναι τεράστιες, με μια πληθώρα επιλογών που καλύπτει, ενδεχομένως, τις ανάγκες κάθε χρήστη. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα παρουσιαστούν παρακάτω ορισμένες ενδεικτικές εντολές, οι οποίες αφορούν μαθηματικές διαδικασίες που διδάσκονται οι μαθητές στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον εφαρμογές, άλλωστε, θα παρουσιαστούν και στο επόμενο κεφάλαιο όπου παρουσιάζεται ο σχεδιασμός μαθημάτων συγκεκριμένων παραγράφων της ύλης λυκειακών μαθημάτων.

Αρχικά, στον τομέα της γραμμικής άλγεβρας, το λογισμικό μπορεί να υπολογίσει πολύ εύκολα και γρήγορα, σημαντικά στοιχεία του κλάδου, όπως την ορίζουσα ενός πίνακα, τον αντίστροφό του, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα. Οι απαιτούμενες εντολές είναι «Det», «Inverse», «Eigenvalues» και «Eigenvectors» αντίστοιχα ενώ κάθε μία ακολουθείται από αγκύλη μέσα στην οποία παρουσιάζεται ο πίνακας. Επί παραδείγματι, θα υπολογιστεί η ορίζουσα, ο αντίστροφος πίνακας και οι ιδιοτιμές μαζί με τα ιδιοδιανύσματα για τον πίνακα A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

- <u>Ορίζουσα πίνακα:</u>

```
In[13]:= A = {{2, 1}, {1, 2}}

Out[13]= {{2, 1}, {1, 2}}

In[14]:= Det[A]

Out[14]= 3
```

Εικόνα 2.1: Υπολογισμός ορίζουσας πίνακα από το λογισμικό Mathematica

- <u>Αντιστροφή πίνακα:</u>

```
In[15]:= Inverse[A]
```

Out[15]= $\left\{\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right\}$

Εικόνα 2.2: Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα από το λογισμικό Mathematica

- <u>Ιδιοτιμές πίνακα:</u>

```
In[16]:= Eigenvalues[A]

Out[16]= {3, 1}
```

Εικόνα 2.3: Υπολογισμός ιδιοτιμών πίνακα από το λογισμικό Mathematica

‣ Ιδιοδιανύσματα πίνακα:

```
In[17]:= Eigenvectors[A]
Out[17]= {{1, 1}, {-1, 1}}
```

Εικόνα 2.4: Υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων από το λογισμικό Mathematica

Όσο αφορά τον κλάδο της Ανάλυσης, οι επιλογές και οι δυνατότητες που δίνει το λογισμικό είναι ακόμα περισσότερες, κάποιες βασικές από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

‣ Παραγώγιση συνάρτησης: Για να παραγωγισθεί μια συνάρτηση μέσω του Wolfram Mathematica, χρησιμοποιείται η εντολή «D» πριν από τον τύπο της συνάρτησης. Να αναφερθεί ότι μετά από κάθε εντολή η συνάρτηση παρουσιάζεται μέσα σε αγκύλες. Στην περίπτωση της παραγώγισης, εντός της αγκύλης, αλλά και μέσα σε άγκιστρα, θα εμφανιστεί επιπλέον και η μεταβλητή της συνάρτησης καθώς κι ένας αριθμός που υποδηλώνει την τάξη της παραγώγου που υπολογίζεται, δηλαδή η μορφή θα έχει ως εξής: D[f[x],{x,k}]. Ως παράδειγμα, παρουσιάζεται η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης f(x)=$x^2 \cdot \ln x$:

```
In[3]:= D[(x^2) * Log[x], {x, 3}]
```

Out[3]= $\frac{2}{x}$

Εικόνα 2.5: Παραγώγιση συνάρτησης με το λογισμικό Mathematica

‣ Ολοκλήρωση συνάρτησης: Για την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης χρησιμοποιείται η εντολή «Integrate». Και σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση παρουσιάζεται μέσα σε αγκύλες μαζί με τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, σε μια διάταξη της μορφής: Integrate[f[x],x]. Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f(x)=$x^3 \cdot e^{2x}$:

```
In[4]:= Integrate[x^3 * Exp[2 x], x]
```

Out[4]= $\frac{1}{8} e^{2x} \left(-3 + 6x - 6x^2 + 4x^3\right)$

Εικόνα 2.6: Ολοκλήρωση συνάρτησης με το λογισμικό Mathematica

‣ <u>Όριο συνάρτησης</u>: Για τον υπολογισμό ορίου συνάρτησης ή ακολουθίας χρησιμοποιείται η εντολή «Limit», στη μορφή: Limit[f[x],x→x_o]. Για παράδειγμα θα υπολογιστεί από το Wolfram Mathematica το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^6-64}{x-2}$:

```
In[7]:= Limit[(x^6 - 64) / (x - 2), x → 2]
Out[7]= 192
```

Εικόνα 2.7: Υπολογισμός ορίου συνάρτησης με το λογισμικό Mathematica

‣ <u>Τιμή συνάρτησης/παράστασης</u>: Ο υπολογισμός της τιμής μιας συνάρτησης, ενδεχομένως σε περιπτώσεις άρρητων ή ιδιαιτέρως μεγάλων αριθμών, επιτυγχάνεται από το λογισμικό μέσω της εντολής «N». Μέσα σε αγκύλη παρουσιάζεται η συνάρτηση ή η παράσταση και μαζί ένας αριθμός, ο οποίος υποδηλώνει τον αριθμό των δεκαδικών που θα εμφανίσει το αποτέλεσμα. Η μορφή έχει ως εξής: N[expr , k] κι ως παράδειγμα θα υπολογιστεί ο αριθμός π με ακρίβεια 50 δεκαδικών ψηφίων:

```
In[12]:= N[Pi, 50]
Out[12]= 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
```

Εικόνα 2.8: Υπολογισμός άρρητου αριθμού με το λογισμικό Mathematica

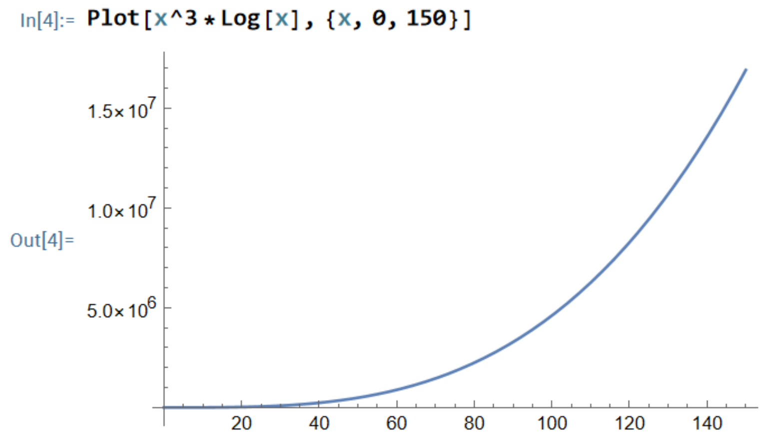
‣ Άθροιση ακολουθίας: Η εντολή της άθροισης έχει ανάλογη δομή με τις παραπάνω περιπτώσεις. Εκτελείται με την ένδειξη «Sum», ενώ μέσα σε αγκύλες τοποθετούνται η ακολουθία καθώς και ο πρώτος με τον τελευταίο όρο της άθροισης, τα οποία μπαίνουν μέσα και σε άγκιστρα. Η διάταξη συνεπώς είναι η εξής: Sum[a_n , {n , n_1 , n_τ}] κι ως ένα παράδειγμα θα υπολογιστεί το άπειρο άθροισμα της ακολουθίας $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu^2}$

```
In[2]:= Sum[1 / n^2, {n, 1, Infinity}]
```

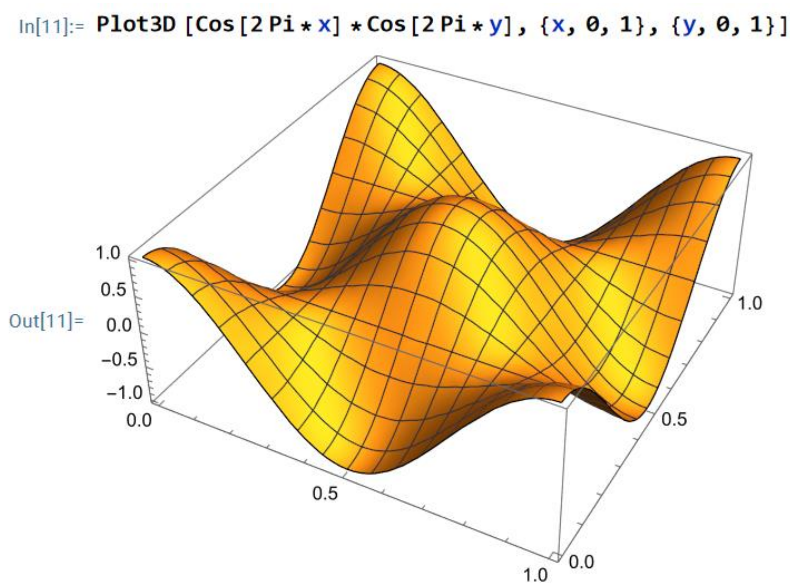
Out[2]= $\frac{\pi^2}{6}$

Εικόνα 2.9: Υπολογισμός άπειρου αθροίσματος σειράς με το λογισμικό Mathematica

‣ Σχεδίαση γραφικής παράστασης συνάρτησης: Με διάφορες εντολές της ομάδας «Plot» μπορεί το λογισμικό να σχεδιάσει μια μεγάλη ποικιλία γραφημάτων. Από γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων δύο μεταβλητών, μέσω της δομής Plot[f[x],{x,a,b}], μέχρι γραφικές παραστάσεις τριών διαστάσεων με τις εντολές «Plot3D» και «ParametricPlot3D», αλλά και καμπύλες επιφανειών πεπλεγμένων συναρτήσεων ή και ισοϋψείς καμπύλες, μέσω των εντολών «ImplicitPlot» και «ContourPlot». Ακόμα υπάρχει η δυνατότητα για απεικόνιση διανυσματικών πεδίων και πεδίων κατευθύνσεων με χρήση των αντίστοιχων εντολών «PlotVectorField» και «PlotGradientField». Ως ενδεικτικά παραδείγματα θα σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=$x^3 \cdot \ln x$, x>0 και g(x,y)=συν(2πx)·συν(2πy), 0≤ $x \leq 1$ και 0≤ $y \leq 1$:



Εικόνα 2.10: Σχεδίαση γραφικής παράστασης με το λογισμικό Mathematica



Εικόνα 2.11: Σχεδίαση γραφικής παράστασης τριών διαστάσεων με το λογισμικό Mathematica

Άξια αναφοράς είναι η δυνατότητα που έχει ο χρήστης να παρακάμψει αρκετές από τις παραπάνω εντολές, καθώς η πλειονότητα αυτών υπάρχει εναλλακτικά στην επιλογή «Palettes». Έτσι, αντί της εντολής «Integrate», για παράδειγμα, επιλέγεται το σύμβολο ολοκλήρωσης και το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο σε συντομότερο, ίσως, χρόνο. Τέλος, να σημειωθεί εκ νέου ότι στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, παρουσιάζεται ένα πολύ μικρό κομμάτι των δυνατοτήτων του λογισμικού, τόσο σε υπολογιστικό όσο και σε σχεδιαστικό πλαίσιο.

Ερευνητικό μέρος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

Σχεδιασμός μαθημάτων με το λογισμικό Mathematica

3.1 Εισαγωγικά

Για την υλοποίηση της έρευνας επιλέχθηκε ο σχεδιασμός μαθημάτων Α' και Β' Λυκείου με τη χρήση του λογισμικού Mathematica. Για την επιλογή των τάξεων ελήφθη υπόψη η δομή και το περιεχόμενο της ύλης καθώς και η άνεση που δίνει η ενδοσχολική εξέταση των μαθητών στο τέλος της χρονιάς. Σε αντιδιαστολή, η ενδεχόμενη επιλογή σχεδιασμού μαθημάτων από την ύλη της Γ' Λυκείου θα αντιμετώπιζε τη βασική παράμετρο της σημαντικότητας της χρονιάς για κάθε μαθητή λόγω των Πανελληνίων Εξετάσεων για εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Γι'αυτό κρίθηκε σκόπιμο να αποφευχθεί, μολονότι το αντικείμενο των μαθηματικών της Γ' Λυκείου θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον σχετικά με τη διδασκαλία του μέσω του λογισμικού Mathematica. Έτσι αποφασίσθηκε η έρευνα να ασχοληθεί με παραγράφους από τα μαθήματα της Άλγεβρας Α' Γενικού Λυκείου, της Άλγεβρας Β' Γενικού Λυκείου και των Μαθηματικών Προσανατολισμού Β' Γενικού Λυκείου.

Πιο συγκεκριμένα, από την ύλη της Άλγεβρας Α' Λυκείου σχεδιάστηκαν και παρουσιάσθηκαν σε μαθητές οι παράγραφοι:

***Τίτλος βιβλίου:* «ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ»**

Κεφάλαιο 5^{ο}: ΠΡΟΟΔΟΙ

· 5.1: Ακολουθίες

· 5.2: Αριθμητική πρόοδος

· 5.3: Γεωμετρική πρόοδος

Κεφάλαιο 6^{ο}: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

· 6.1: Η έννοια της συνάρτησης

· 6.2: Γραφική παράσταση συνάρτησης

· 6.3: Η συνάρτηση $f(x)=αx+β$

Αντίστοιχα από την ύλη Άλγεβρας Β' Λυκείου σχεδιάστηκαν οι παράγραφοι:

***Τίτλος βιβλίου:* «ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ»**

Κεφάλαιο 4^{ο}: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

· 4.3: Πολυωνυμικές εξισώσεις κι ανισώσεις

· 4.4: Εξισώσεις κι ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Κεφάλαιο 5^{ο}: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

· 5.1: Εκθετική συνάρτηση

· 5.2: Λογάριθμοι

· 5.3: Λογαριθμική συνάρτηση

Τέλος, από τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου επιλέχθηκαν για την έρευνα οι παράγραφοι:

***Τίτλος βιβλίου:* «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ»**

Κεφάλαιο 3^{ο}: ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

· 3.2: Η παραβολή

· 3.3: Η έλλειψη

· 3.4: Η υπερβολή

Η επιλογή των παραγράφων που σχεδιάστηκαν από κάθε μάθημα έγινε με βάση τρεις, κυρίως, παραμέτρους:

Πρώτον η ποικιλία και ο πλουραλισμός υλών που οφείλει η έρευνα να εξασφαλίσει, δεδομένων ασφαλώς των χρονικών ορίων και των περιορισμών που αυτή έχει. Επιλέχθηκαν επομένως διάφορες θεματικές με ποικιλία ασκησιολογίου και μεθοδολογιών η κάθε μία, ώστε να εξασφαλιστεί, κατά το δυνατόν, η όσο το δυνατόν ευρύτερη εικόνα για τη χρησιμότητα του λογισμικού σε διαφορετικές ύλες των μαθηματικών.

Δεύτερον η πολυφωνία κι ο όσο το δυνατόν μεγαλύτερος αριθμός μαθητών που εν δυνάμει θα πάρει μέρος στην έρευνα. Εφόσον η έρευνα έλαβε χώρα σε συγκεκριμένες φροντιστηριακές τάξεις με δεδομένο αριθμό μαθητών, η επιλογή διάφορων παραγράφων από διαφορετικά μαθήματα οδήγησε σε διάδραση με μαθητές διαφόρων τάξεων με συνέπεια να εξασφαλίζεται μεγαλύτερο δείγμα συμμετεχόντων.

Τρίτον η επιλογή των παραγράφων που σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν έγινε και με γνώμονα την χρονική περίοδο που έλαβε χώρα η έρευνα συγκριτικά με την πορεία της ύλης των μαθημάτων σε ρεαλιστικό χρόνο. Κι αυτό διότι η έρευνα συντελέστηκε παράλληλα και ταυτόχρονα με την εξέλιξη των μαθημάτων κι επ'ουδενί δεν είχε σκοπό να επηρεάσει την απρόσκοπτη πορεία αυτών, πολλώ δε μάλλον τις επιδόσεις και την πρόοδο των μαθητών που θα λάβουν μέρος σε αυτή.

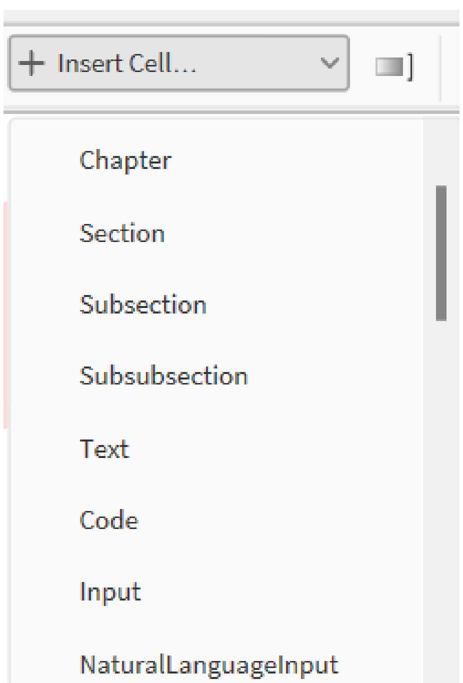
Η σχεδίαση της κάθε προαναφερθείσας παραγράφου δομήθηκε στο εξής πλαίσιο:
→ Θεωρία: Αναφορά ορισμών, διατύπωση θεωρημάτων, τυπολόγιο, αποδείξεις τύπων και θεωρημάτων.

→ Ασκήσεις: Λυμένα παραδείγματα, λύση επιλεγμένων ασκήσεων του εκάστοτε σχολικού βιβλίου, λύση ασκήσεων της Τράπεζας Θεμάτων του υπουργείου.

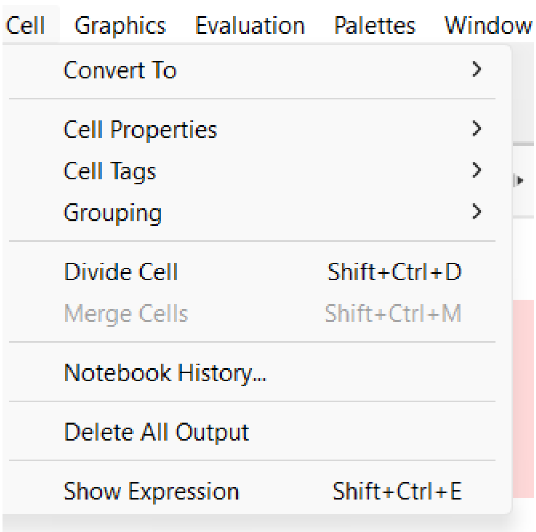
→ «Το κάτι παραπάνω»: Επιπλέον γνώσεις και πληροφορίες μαθηματικού ενδιαφέροντος που άπτονται της κάθε παραγράφου.

Για την υλοποίηση της παραπάνω δομής απαιτήθηκε η χρήση διαφόρων εντολών που παρέχει το λογισμικό, μέσω του διπόλου «input» - «output» και οι οποίες θα παρουσιασθούν αναλυτικά στη συνέχεια, αλλά και με τη χρήση του «text» που παρέχει το λογισμικό, για τη διατύπωση ορισμών, αποδείξεων και άλλων κειμένων.

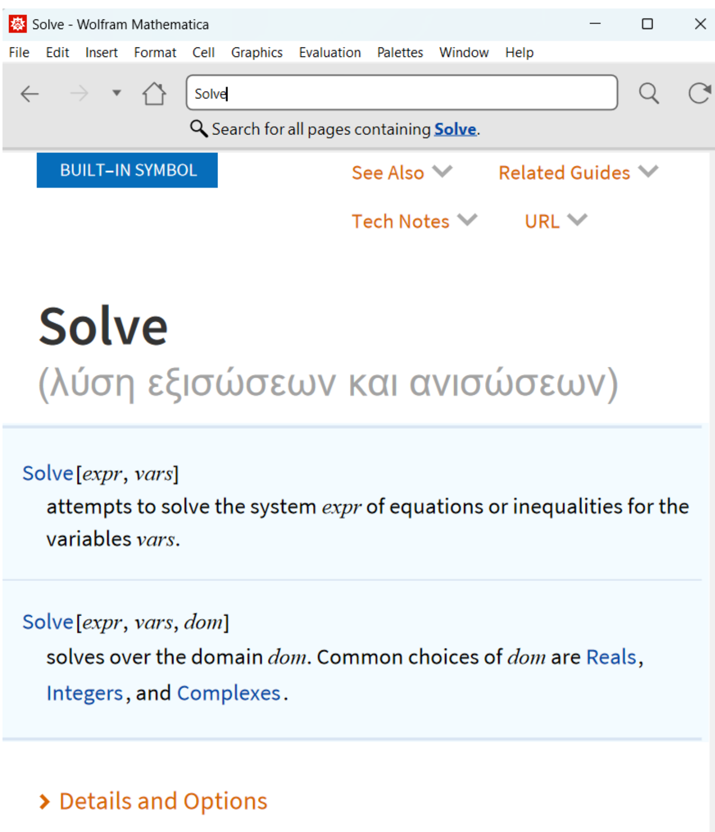
Επιπλέον για την κατηγοριοποίηση κάθε παραγράφου σε τμήματα θεωρίας, παραδειγμάτων, λύσων ασκήσεων έγινε χρήση των δομών κατηγοριοποίησης που παρέχεται από το λογισμικό και συγκεκριμένα των «Title», «Section», «Subsection», «Subsubsection», ενώ οι ενότητες χωρίστηκαν με χρησιμοποίηση του «Divide Cell» και του «Grouping», αμφότερα υπηρεσίες που παρέχει η επιλογή «Cell» του Mathematica (εικόνα 3.1). Επιπρόσθετα, στην υλοποίηση των μαθημάτων σημαντικό ρόλο έπαιξε η επιλογή «Palettes», καθώς η συγγραφή μαθηματικών κειμένων απαιτεί τη συχνή χρήση συμβόλων και σχεδίων που υπάρχουν στη συγκεκριμένη επιλογή. Τέλος, πολύ σημαντικό στοιχείο κατά τον σχεδιασμό των μαθημάτων ήταν η χρησιμοποίηση της επιλογής «Help» (εικόνα 3.2), καθώς οι δυνατότητες που παρέχει το λογισμικό είναι πολλές, με εξαιρετικά μεγάλο αριθμό επιλογών. Επομένως η βοήθεια που παρέχεται από το λογισμικό μέσω της ομώνυμης επιλογής είναι απαραίτητη, εφόσον μέσω παραδειγμάτων και με μια σύντομη περιγραφή δίνει στον χρήστη τη γνώση για κάθε εντολή που θέλει να χρησιμοποιήσει.



Εικόνα 3.1: Επιλογές “Section”, “Subsection”, “Subsubsection”, “Text”, “Input”



Εικόνα 3.2: Επιλογές "Cell", "Divide Cell", "Grouping", "Palettes"



Εικόνα 3.3: Παράδειγμα χρήσης της επιλογής "Help" για βοήθεια στην εντολή "Solve"

3.2 Σχεδιασμός μαθημάτων Άλγεβρας Α΄Λυκείου

Όπως αναφέρθηκε, για το μάθημα της Άλγεβρας Α΄Λυκείου επιλέχθηκε να σχεδιαστούν δύο κεφάλαια της ύλης, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει τρεις παραγράφους. Συγκεκριμένα, το κεφάλαιο «Πρόοδοι» με τις παραγράφους «Ακολουθίες», «Αριθμητική Πρόοδος», «Γεωμετρική Πρόοδος» και το κεφάλαιο «Συναρτήσεις» με τις παραγράφους «Έννοια της Συνάρτησης», «Γραφική Παράσταση Συνάρτησης», «Συνάρτηση f(x)=αx+β». Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των παρουσιάσεων με προβολή επιλεγμένων εικόνων από κάθε παράγραφο. Πλήρης παρουσίαση των μαθημάτων, σε μορφή pdf, καθώς και το σύνολο των εικόνων υπάρχουν στο τέλος της εργασίας και στην ενότητα «Παραρτήματα».

3.2.1 Ακολουθίες

Αρχικά, με χρήση της επιλογής «text», δόθηκε ο ορισμός της ακολουθίας καθώς κι ένα απλό παράδειγμα ακολουθιών ώστε να γίνει κατανοητή στους μαθητές αυτή η καινούρια, για τους ίδιους, έννοια. Έπειτα με εφαρμογή της εντολής «Table» του Mathematica (εικόνα 3.4) βρέθηκαν οι πρώτοι όροι διαφόρων ακολουθιών, ενώ με χρήση των εντολών «ListPlot» και «Show» σχεδιάστηκε η γραφική παράσταση ακολουθιών και αυτόνομα αλλά και ταυτόχρονα σε κοινούς άξονες.

✓ Η εύρεση των παραπάνω τιμών γίνεται πολύ εύκολα με το **Mathematica Wolfram**:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Table[2 n^2 + 1, {n, 1, 3}]
        πίνακας τιμών

        {3, 9, 19}
```

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Table[3 n - (-1)^n/(5 n - 1), {n, 1, 3}]
        πίνακας τιμών
```

Out[ ]= $\left\{\frac{13}{4}, \frac{53}{9}, \frac{127}{14}\right\}$

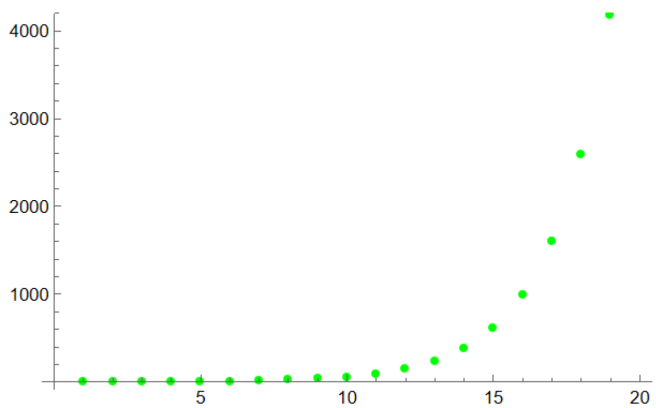
Εικόνα 3.4: Χρησιμοποίηση της εντολής «Table» για εύρεση τιμών ακολουθίας

Στη συνέχεια μελετήθηκε η έννοια του αναδρομικού τύπου μιας ακολουθίας. Δόθηκαν κι εδώ κάποια απλά παραδείγματα μέσω του «text» πριν γίνει χρήση εντολών του λογισμικού. Συγκεκριμένα για να βρεθούν κάποιοι πρώτοι όροι ορισμένων ακολουθιών, οι οποίες είναι δοσμένες σε αναδρομική μορφή, χρησιμοποιήθηκε η αναδρομική σχέση «Do», ώστε, δοθέντος του πρώτου όρου, το λογισμικό να εντοπίσει οποιονδήποτε όρο. Μετά μέσω της «Table» και πάλι εμφανίστηκαν οι ζητούμενοι όροι. Έπειτα στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» αναφέρθηκε η ακολουθία Fibonacci, που είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο στη μαθηματική επιστήμη όσο και γενικότερα. Κρίθηκε λοιπόν φρόνιμο να μελετηθεί η συγκεκριμένη ακολουθία με χρήση του Mathematica, βρίσκοντας αρχικά τους πρώτους 20 όρους της μέσω της εντολής «TableFibonacci», ενώ στη συνέχεια σχεδιάστηκε η γραφική απεικόνιση με χρήση της «ListPlot». Να αναφερθεί ότι στη συγκεκριμένη γραφική παράσταση, και για να υπάρξει μια διαφοροποίηση από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις που σχεδιάστηκαν, χρησιμοποιήθηκε διαφορετικός χρωματισμός, εν προκειμένω το πράσινο χρώμα, μέσω της εντολής «PlotStyle->RGB» (εικόνα 3.5).

✓ Για να δούμε την ακολουθία Fibonacci και με χρήση του **Mathematica Wolfram** :

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Table[Fibonacci[n], {n, 20}]
        πίνα···  αριθμός Fibonacci

Out[ ]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765}

In[ ]:= ListPlot[%, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 0]]
        διάγραμμα απ··· στυλ διαγρά···  μοντέλο RGB
```

Out[ ]=



Εικόνα 3.5: Χρησιμοποίηση της εντολής «Table[Fibonacci]» και «ListPlot» για εύρεση τιμών και γραφική αναπαράσταση της ακολουθίας Fibonacci

Στην πορεία, στην ενότητα «Ασκήσεις» επιλύθηκε πλήθος ασκήσεων από το σχολικό βιβλίο. Για την επίλυση των ασκήσεων, εκτός των εντολών «Table» και «Do», που ήδη αναφέρθηκαν και που εφαρμόστηκαν και σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιήθηκε και η εντολή απλοποίησης «Simplify» καθώς και η εντολή εύρεσης τιμής«N». Πιο συγκεκριμένα, σε άσκηση που δόθηκε ο τύπος του νιοστού όρου $α_ν$ της ακολουθίας και ζητήθηκε να οριστεί η ακολουθία αναδρομικά, αφού βρέθηκε, μέσω του λογισμικού, η διαφορά eq=$α_{ν+1}$ - $α_ν$, απλοποιήθηκε το αποτέλεσμα μέσω του «Simplify[eq]» και βρέθηκε και ο πρώτος της όρος $α_1$ μέσω του «N[α[1]]».

Τέλος, στο κομμάτι των παρουσιάσεων «Τράπεζα Θεμάτων» έγινε χρήση της εντολής «Solve» καθώς σε υποερώτημα της άσκησης ο μαθητής καλείται να ελέγξει κατά πόσο η δοσμένη ακολουθία παίρνει την τιμή 120. Επομένως, μέσω της συγκεκριμένης εντολής και με χρήση των δεικτών «Integers» και «n>0» μέσα στην εντολή, αποδείχθηκε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που παίρνει την τιμή 120. Επιπροσθέτα, στο τελευταίο ερώτημα χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Factor», ώστε να παραγοντοποιηθεί μια παράσταση, διαδικασία που ήταν απαραίτητη για να αποδειχθεί μια ζητούμενη σχέση.

3.2.2 Αριθμητική πρόοδος

Στην παράγραφο αυτή δόθηκαν αρχικά, με χρήση του «text», ο ορισμός της αριθμητικής προόδου, ο τύπος του ν-οστού όρου μιας αριθμητικής προόδου καθώς και η απόδειξη του τύπου. Στη συνέχεια, για κατανόηση του τύπου μέσω παραδειγμάτων, χρησιμοποιήθηκε η αναδρομική εντολή «Do» ώστε να βρεθεί συγκεκριμένος όρος κάποιων ακολουθιών. Ακολούθησε η έννοια του αθροίσματος ν-όρων αριθμητικής προόδου, η οποία, αφού ορίστηκε μέσω «text», μελετήθηκε εξετάζοντας διάφορα παραδείγματα. Στα δύο πρώτα παραδείγματα ζητήθηκε η εύρεση του αθροίσματος κάποιων όρων μιας αριθμητικής προόδου. Εδώ χρησιμοποιήθηκαν συνδυαστικά οι εντολές «Do» , «Table» και «Sum» ούτως ώστε το λογισμικό να τρέξει την αναδρομική σχέση που ορίζεται από την ακολουθία, να διαβάσει τους αντίστοιχους όρους και τέλος να αθροίσει τους όρους αυτούς (εικόνα 3.6).

✓ Η παραπάνω διαδικασία εύρεσης του αθροίσματος των 1000 πρώτων όρων της α.π. γίνεται πολύ εύκολα με το **Mathematica Wolfram**:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= a[1] = -205; Do[a[n + 1] = a[n] + 9, {n, 1, 1000}];
                     βρόχος Do

In[ ]:= Table[a[n], {n, 1, 1000}];
        πίνακας τιμών

In[ ]:= Sum[a[n], {n, 1, 1000}]
        άθροιση

Out[ ]= 4290500
```

Εικόνα 3.6: Συνδυαστική χρήση των εντολών «Do», «Table» και «Sum» για εύρεση αθροίσματος αριθμητικής προόδου

Σε επόμενα παραδείγματα ζητήθηκε εκ νέου η εύρεση αθροίσματος ν όρων αριθμητικής προόδου με τη διαφοροποίηση όμως ότι πλέον δεν είναι γνωστό το πλήθος των όρων αλλά ο τελευταίος όρος της ακολουθίας σε μια περίπτωση ή είναι γνωστοί δύο όροι της ακολουθίας σε ένα άλλο παράδειγμα. Στις συγκεκριμένες περιπτώσεις εκτός των εντολών «Do», «Table», «Sum» που χρησιμοποιήθηκαν και στα προηγούμενα, προηγήθηκε η εντολή «Solve» ούτως ώστε στη μεν πρώτη περίπτωση εξισώνοντας την ακολουθία με τον τελευταίο της όρο να βρεθεί το άγνωστο πλήθος ν (εικόνα 3.7) ή επιλύοντας το σύστημα που προκύπτει να βρεθεί ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω της ακολουθίας στη δεύτερη περίπτωση (εικόνα 3.8).

✓ Ας διερευνήσουμε την παραπάνω άσκηση με εντολές του **Mathematica Wolfram**:

Αρχικά με μια εντολή *"Solve"* θα λύσουμε την εξίσωση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$ για να βρούμε το άγνωστο πλήθος όρων (ν):

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
        Solve[7 + (v - 1) × 3 == 157, v]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων
Out[ ]= {{v → 51}}
```

Έπειτα, με εντολή *"Sum"* θα βρεθεί το άθροισμα των 51 πρώτων όρων, αφού πρώτα οριστεί η ακολουθία:

```
In[ ]:= a[1] = 7; Do[a[n + 1] = a[n] + 3, {n, 1, 51}];
                  βρόχος Do
In[ ]:= Table[a[n], {n, 1, 51}];
        πίνακας τιμών
In[ ]:= Sum[a[n], {n, 1, 51}]
        άθροιση
Out[ ]= 4182
```

Εικόνα 3.7: Εύρεση του πλήθους ν των όρων μιας α.π. με χρήση της εντολής «Solve» και χρήση των εντολών «Do», «Table» και «Sum» για εύρεση αθροίσματος της αριθμητικής προόδου

✓ Ας δούμε την παραπάνω άσκηση με εντολές του **Mathematica Wolfram**:

Αρχικά με μια εντολή *"Solve"* θα λύσουμε το σύστημα $\begin{matrix} \alpha_3 = \alpha_1 + (3-1)\,\omega \\ \alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\,\omega \end{matrix}$ για να βρούμε τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Solve[a1 + 2 ω == 11 && a1 + 5 ω == 23, {a1, ω}]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]= {{a1 → 3, ω → 4}}
```

Έπειτα, με εντολή *"Sum"* θα βρεθεί το άθροισμα των 100 πρώτων όρων, αφού πρώτα οριστεί η ακολουθία:

```
In[ ]:= a[1] = 3; Do[a[n + 1] = a[n] + 4, {n, 1, 100}];
                  βρόχος Do

In[ ]:= Table[a[n], {n, 1, 100}];
        πίνακας τιμών

In[ ]:= Sum[a[n], {n, 1, 100}]
        άθροιση

Out[ ]= 20100
```

Εικόνα 3.8: Λύση συστήματος εξισώσεων για εύρεση του πρώτου όρου και της διαφοράς όρων μιας α.π. με χρήση της εντολής «Solve» και χρήση των εντολών «Do», «Table» και «Sum» για εύρεση αθροίσματος της αριθμητικής προόδου

Η παρουσίαση της παραγράφου συνεχίστηκε με την έννοια του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας. Ο τύπος και η απόδειξή του δόθηκαν μέσω «text» και ακολούθησαν παραδείγματα στα οποία χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Mean» για την εύρεση του αριθμητικού μέσου δύο τιμών. Επίσης σε δεύτερο παράδειγμα όπου ο μέσος ήταν γνωστός, αλλά στις τιμές υπήρχε άγνωστη μεταβλητή, έγινε και πάλι χρήση της εντολής «Solve» για την επίλυση της εξίσωσης που προέκυπτε. Στην ενότητα «Το κάτι παραπάνω» με χρήση της εντολής «Product» δόθηκε στους μαθητές η δυνατότητα, εκτός του αθροίσματος, να υπολογίζουν και το γινόμενο ν-όρων αριθμητικής προόδου, κάτι που δεν υπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια στο λυκειακό επίπεδο.

Η παράγραφος ολοκληρώνεται με την επίλυση ασκήσεων μέσα από το βιβλίο άλλα και με επίλυση ενός ζητήματος από την Τράπεζα Θεμάτων. Και σε αυτές τις ενότητες χρησιμοποιήθηκαν αυτόνομα αλλά και συνδυαστικά οι εντολές «Do», «Table», «Sum» και «Solve» τόσο για τον υπολογισμό τιμών και αθροισμάτων των προόδων που δίνονταν όσο και για την επίλυση εξισώσεων και συστημάτων, όπου αυτά προέκυπταν.

3.2.3 Γεωμετρική πρόοδος

Σε αντιστοιχία με την παράγραφο της αριθμητικής προόδου, έτσι και στην γεωμετρική η μελέτη ξεκίνησε με χρήση του «text» για τη διατύπωση του ορισμού καθώς και την απόδειξη του τύπου εύρεσης του νιοστού όρου. Έπειτα παρουσιάστηκαν λυμένα παραδείγματα με χρήση της επαναληπτικής δομής «Do» για τον εντοπισμό όρων σε διάφορες περιπτώσεις γεωμετρικών προόδων. Χρήζει αναφοράς και η χρησιμοποίηση της εντολής «N[_]» ώστε να δοθεί η αριθμητική τιμή ορισμένων αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια έγινε αναφορά στο άθροισμα ν-όρων γεωμετρικής προόδου. Ο τύπος παρουσιάστηκε μέσω «text» ενώ στα πρώτα παραδείγματα, εφαρμογής του τύπου, χρησιμοποιήθηκαν συνδυαστικά οι εντολές «Do», «Table» και «Sum» ούτως ώστε το λογισμικό να «τρέξει» τη δομή επανάληψης, να παρουσιάσει τις ζητούμενες τιμές της προόδου και τέλος να τις αθροίσει. Εδώ να αναφερθεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις χρήσης της εντολής «Table» χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο « ; » στο τέλος της εντολής ώστε το λογισμικό να διαβάσει μεν τις ζητούμενες τιμές, αλλά να μην τις εμφανίσει ως output. Συνεπώς η παρουσίαση των τιμών, που περιγράφηκε παραπάνω, μπορεί να χαρακτηριστεί κρυφή παρουσίαση καθώς δεν εμφανίζονται τα αποτελέσματα. Η μελέτη της παραγράφου συνεχίστηκε με την παρουσίαση κάποιων επιπλέον λυμένων παραδειγμάτων. Σε ένα από αυτά ζητήθηκε το άθροισμα μιας γεωμετρικής προόδου με άγνωστο το πλήθος των όρων και γνωστές δύο τιμές της ακολουθίας, ενώ σε ένα άλλο δινόταν ως γνωστός ο τελευταίος όρος της γεωμετρικής προόδου. Στην περίπτωση αυτή, πριν τη συνδυαστική χρήση των εντολών «Do», «Table» και «Sum», απαιτήθηκε η χρησιμοποίηση της «Solve» ώστε να λυθεί η εξίσωση που θα δώσει το πλήθος των όρων ν. Στη συγκεκριμένη εξίσωση εφαρμόστηκε και η εντολή «Simplify» στο τέλος για απλούστευση του αποτελέσματος (εικόνα 3.9).

✓ Ας διερευνήσουμε την παραπάνω άσκηση με εντολές του **Mathematica Wolfram**:

Αρχικά με μια εντολή *"Solve"* θα λύσουμε την εξίσωση $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ για να βρούμε το άγνωστο πλήθος όρων (ν):

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        (* διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων *)
        Solve[1 × (1/2)^(ν-1) == 1/256, ν, Reals] // Simplify
        (* λύση εξισώσεων και ανισώσεων | πεδίο πρ··· | απλοποίησ *)
Out[ ]= {{ν → 9}}
```

Έπειτα, με εντολή *"Sum"* θα βρεθεί το άθροισμα των 9 πρώτων όρων, αφού πρώτα οριστεί η ακολουθία:

```
In[ ]:= a[1] = 1; Do[a[n + 1] = a[n] × 1/2, {n, 1, 9}];
        (* βρόχος Do *)

In[ ]:= Table[a[n], {n, 1, 9}];
        (* πίνακας τιμών *)

In[ ]:= Sum[a[n], {n, 1, 9}]
        (* άθροιση *)
Out[ ]= 511/256
```

Εικόνα 3.9: Εύρεση του πλήθους ν των όρων μιας γ.π. με χρήση της εντολής «Solve» και χρήση των εντολών «Do», «Table» και «Sum» για εύρεση αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου. Εντολή «Simplify» για απλοποίηση αποτελεσμάτων.

Στην πορεία αναφέρθηκε η έννοια των διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου και αποσαφηνίστηκε ο όρος γεωμετρικός μέσος. Ο αντίστοιχος τύπος με την απόδειξή του παρουσιάστηκαν μέσω του «text», ενώ στο παράδειγμα της συγκεκριμένης ενότητας εφαρμόστηκε η εντολή «GeometricMean» για την εύρεση του μέσου δύο δοθέντων τιμών (εικόνα 3.10).

✓ Πολύ απλά και με το **Mathematica Wolfram :**

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        (* διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων *)

In[ ]:= GeometricMean[{10, 90}]
        (* γεωμετρικός μέσος *)

Out[ ]= 30
```

Εικόνα 3.10: Εύρεση γεωμετρικού μέσου

Στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» αναφέρθηκε ο τύπος $α_ν = α_κ \cdot λ^{ν-κ}$ ο οποίος δοθέντος όρου μιας γεωμετρικής προόδου και γνωρίζοντας τον λόγο λ, εντοπίζει οποιονδήποτε άλλο όρο της. Ο τύπος αυτός δεν αναφέρεται στα σχολικά βιβλία, εφαρμόζεται όμως πολύ εύκολα με το λογισμικό Mathematica μέσω μιας δομής επανάληψης «Do». Έπειτα παρουσιάστηκε η λύση από κάποιες επιλεγμένες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου καθώς και από την Τράπεζα Θεμάτων του υπουργείου. Μία από αυτές που επελέγησαν είναι και η γνωστή άσκηση με τον Ινδό εφευρέτη του σκακιού που ως αντάλλαγμα της εξαιρετικής του εφεύρεσης ζήτησε κόκκους ρυζιού πάνω σε κάθε τετράγωνο του σκακιού οι οποίοι θα αυξάνονται γεωμετρικά από τετράγωνο σε τετράγωνο. Η λύση της επέβαλε τη γνωστή διάταξη: «Do», «Table», «Sum» για να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των κόκκων, αλλά και τη χρήση της εντολής «Divide» ώστε να προσεγγιστεί ο αριθμός των τόνων του ρυζιού που τελικά αξίωνε (εικόνα 3.11).

Η ακολουθία είναι η: 1, 2, 4, 8... ενώ το σκάκι διαθέτει 64 τετραγωνάκια, συνεπώς θα βρούμε το S_{64}:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
        a[1] = 1; Do[a[n + 1] = a[n] × 2, {n, 1, 64}];
                  βρόχος Do

In[ ]:= Table[a[n], {n, 1, 64}];
        πίνακας τιμών

In[ ]:= Sum[a[n], {n, 1, 64}] // Simplify
        άθροιση                 απλοποίηση

Out[ ]= 18 446 744 073 709 551 615

In[ ]:= Divide[18 446 744 073 709 551 615., 20 000.]
        διαίρεση

Out[ ]= 9.22337 × 10^14
```

Συνεπώς ο εφευρέτης ζήτησε μια τεράστια ποσότητα ρυζιού, περί των 922.337.000.000 τόνων !!

Εικόνα 3.11: Εύρεση τόνων ρυζιού στην άσκηση του εφευρέτη του σκακιού

3.2.4 Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες των μαθηματικών για τα παιδιά της Α' Λυκείου και όχι μόνο. Γι' αυτό τον λόγο επιλέχθηκε να δοθεί βαρύτητα στην παράγραφο αυτή με μεγάλο πλήθος παραδειγμάτων και ασκήσεων.

Το λογισμικό, με το πλήθος των αντίστοιχων εντολών που διαθέτει, δίνει τη δυνατότητα αυτή. Αρχικά, μέσω του «text» δόθηκε ο ορισμός της συνάρτησης και βασικών εννοιών αυτής. Έπειτα παρουσιάστηκαν αρκετά λυμένα παραδείγματα. Σε κάποια από αυτά, αφού οριζόταν η συνάρτηση μέσω αντίστοιχης εντολής του λογισμικού, βρίσκονταν τιμές της συνάρτησης για διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Σε άλλο παράδειγμα ζητήθηκε η εύρεση των ριζών της συνάρτησης. Η λύση δόθηκε με δύο τρόπους. Μία με χρήση της «Solve», επιλύοντας στην ουσία το λογισμικό την αντίστοιχη εξίσωση και μία με χρήση της εντολής «FindRoot», η οποία δίνει αυτομάτως τις ρίζες μιας συνάρτησης (εικόνα 3.12).

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Solve[x^2 - 3 x - 4 == 0, x]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]= {{x → -1}, {x → 4}}
```

ή ορίζοντας συνάρτηση και χρησιμοποιώντας την εντολή *“FindRoot”*:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμ
        f[x_] := x^2 - 3 x - 4

In[ ]:= FindRoot[f[x], {x, 5}]
        εύρεση ριζών

Out[ ]= {x → 4.}

In[ ]:= FindRoot[f[x], {x, -5}]
        εύρεση ριζών

Out[ ]= {x → -1.}
```

Εικόνα 3.12: Εύρεση ριζών συνάρτησης με χρήση των εντολών «Solve» και «FindRoot»

Τα επόμενα παραδείγματα της παραγράφου αναφέρονταν στην πολύ σημαντική έννοια του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης. Εδώ, εκτός από τη χρήση των εντολών «Solve» και «Reduce» που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων όπου οι περιορισμοί το επέβαλαν (εικόνα 3.13), χρησιμοποιήθηκε και η αντίστοιχη εντολή «FunctionDomain» η οποία είναι αυτή που δίνει αυτομάτως το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης (εικόνα 3.14). Να σημειωθεί πως όταν η συνάρτηση δεν έχει περιορισμούς και πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών το output της εντολής «FunctionDomain» είναι η λέξη «True».

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
```

ii) f(x)= $\frac{x-1}{x^2-5x+6}$

```
In[ ]:= Solve[x^2 - 5 x + 6 == 0, x]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων
Out[ ]= {{x -> 2}, {x -> 3}}
```

Άρα θα έχουμε x≠2 και x≠3

iii) f(x)= $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
In[ ]:= x^2 - 5 x + 6 ≥ 0
Out[ ]= 6 - 5 x + x^2 ≥ 0
In[ ]:= Reduce[%, x]
        μείωση έκφρασης
Out[ ]= x ≤ 2 || x ≥ 3
```

Εικόνα 3.13: Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης με χρήση των εντολών «Solve» και «Reduce»

```
In[•]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[•]:= f[x_] = x^2 - 5 x + 6

Out[•]= 6 - 5 x + x^2

In[•]:= FunctionDomain[f[x], x]
        πεδίο ορισμού συνάρτησης

Out[•]= True

        Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[•]:= f[x_] = (x - 1) / (x^2 - 5 x + 6)

Out[•]= (-1 + x) / (6 - 5 x + x^2)

In[•]:= FunctionDomain[f[x], x]
        πεδίο ορισμού συνάρτησης

Out[•]= x < 2 || 2 < x < 3 || x > 3
```

Εικόνα 3.14: Εύρεση πεδίου ορισμού συνάρτησης με χρήση της εντολής «FunctionDomain»

Στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» αναφέρθηκαν οι έννοιες του μεγίστου και του ελαχίστου μιας συνάρτησης, τις οποίες θα συναντήσει ο μαθητής στις δύο επόμενες τάξεις του λυκείου. Στο αντίστοιχο παράδειγμα βρέθηκαν τα ακρότατα μιας συνάρτησης με χρήση των εντολών «FindMinimum» και «FindMaximum» με τις οποίες το λογισμικό εντοπίζει αυτόματα το ελάχιστο και το μέγιστο αντίστοιχα. Όσον αφορά τις ασκήσεις μέσα από το σχολικό βιβλίο, δουλεύτηκαν θέματα εύρεσης πεδίου ορισμού, αλλά και ριζών συνάρτησης, μέσω των αντίστοιχων εντολών του λογισμικού. Να αναφερθεί ότι στον ορισμό συναρτήσεων που είχαν απόλυτη τιμή χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Abs», ενώ σε συναρτήσεις που είχαν ριζικά επιλέχθηκε το αντίστοιχο σύμβολο της ρίζας μέσα από την επιλογή «Palettes», αντί της ισοδύναμης εντολής «Sqrt». Τέλος, στο ζήτημα που επιλέχθηκε μέσα από την Τράπεζα Θεμάτων, δινόταν μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου για την οποία ήθελε να αποδειχθεί η ισότητα δύο τιμών και να λυθεί μια εξίσωση. Ο ορισμός μιας τέτοιου είδους συνάρτησης επέβαλε τη χρήση της εντολής «Which» μέσω της οποίας διαχωρίσθηκαν οι κλάδοι της συνάρτησης, ενώ η εντολή «Solve» έλυσε την ζητούμενη εξίσωση (εικόνα 3.15).

α)

Έχουμε:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμώ

In[ ]:= f[x_] := Which [x < 0, 8 - x, x ≥ 0, 2 x + 5]
                 ποιο

In[ ]:= f[-5]
Out[ ]= 13

In[ ]:= f[4]
Out[ ]= 13
```

Οπότε πράγματι ισχύει f(-5) = f(4) = 13

β)

```
In[ ]:= Solve[f[x] == 9, x]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων
Out[ ]= {{x → -1}, {x → 2}}
```

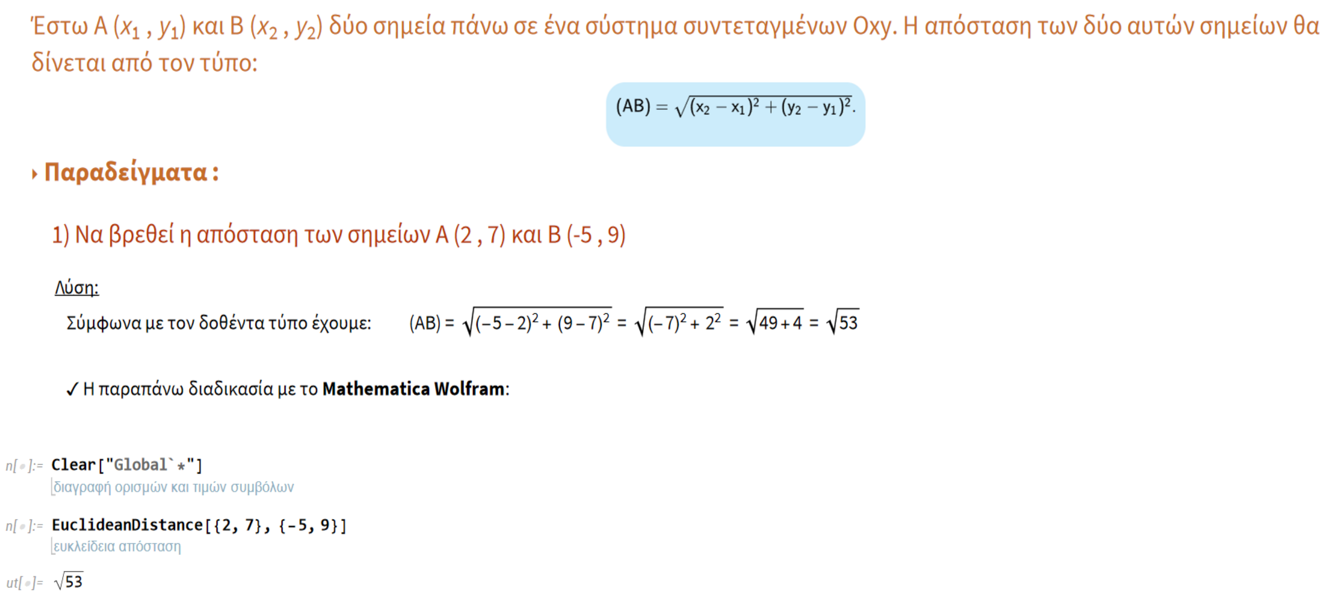
Συνεπώς οι λύσεις της εξίσωσης f(x) = 9 είναι οι:

x = -1 και x = 2

Εικόνα 3.15: Ορισμός συνάρτησης πολλαπλού τύπου, ισότητα τιμών, επίλυση εξίσωσης

3.2.5 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Η μελέτη της συγκεκριμένης παραγράφου ξεκίνησε με τον ορισμό της γραφικής παράστασης συνάρτησης καθώς και την παρουσίαση βασικών στοιχείων και εννοιών (καρτεσιανό σύστημα αξόνων, τεταρτημόρια, συμμετρίες κ.α.), τα οποία δόθηκαν με χρήση της επιλογής «text». Έπειτα αναφέρθηκε ο τύπος της απόστασης δύο σημείων στο επίπεδο. Για το αντίστοιχο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε η εντολή «EuclideanDistance» από το λογισμικό (εικόνα 3.16), ενώ σε παράδειγμα όπου η απόσταση ήταν γνωστή και ζητούμενο ήταν η τετμημένη του ενός σημείου, έγινε συνδυαστική χρήση των εντολών «EuclideanDistance» και «Solve», ώστε η μεν πρώτη να δομήσει τον τύπο της απόστασης, η δε δεύτερη να επιλύσει την εξίσωση που προκύπτει.



Έστω A (x_1 , y_1) και B (x_2 , y_2) δύο σημεία πάνω σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy. Η απόσταση των δύο αυτών σημείων θα δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Παραδείγματα :

1) Να βρεθεί η απόσταση των σημείων A (2 , 7) και B (-5 , 9)

Λύση:

Σύμφωνα με τον δοθέντα τύπο έχουμε: $(AB) = \sqrt{(-5-2)^2 + (9-7)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

✓ Η παραπάνω διαδικασία με το **Mathematica Wolfram**:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
In[ ]:= EuclideanDistance[{2, 7}, {-5, 9}]
        ευκλείδεια απόσταση
Out[ ]= √53
```

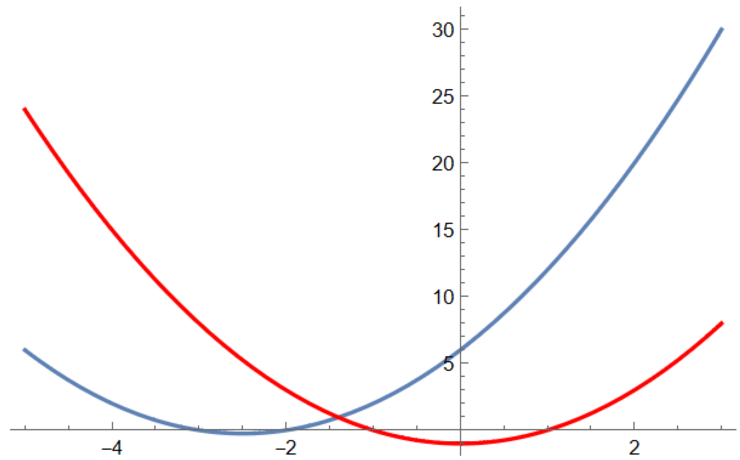
Εικόνα 3.16: Χρήση της εντολής «EuclideanDistance» για υπολογισμό απόστασης δύο σημείων

Στη συνέχεια μελετήθηκαν προτάσεις που βρίσκουν τα σημεία τομής και τις σχετικές θέσεις μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης με τους δύο άξονες ή και τα αντίστοιχα για δύο γραφικές παραστάσεις μεταξύ τους. Στα παραδείγματα αυτής της υποενότητας της παραγράφου το λογισμικό βοήθησε ιδιαίτερα μέσω των εντολών «Solve» και «Reduce», καθώς για να βρεθούν τα παραπάνω καλούμαστε να λύσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις και ανισώσεις.

Η μεγάλη χρησιμότητα όμως του λογισμικού σε αυτή την παράγραφο της ύλης φάνηκε όταν επιχειρήθηκε η χάραξη γραφικών παραστάσεων, κάτι για το οποίο οι μαθητές της Α’ Λυκείου δεν είναι ιδιαίτερα καταρτισμένοι. Εν τούτοις, η χρησιμοποίηση της εντολής «Plot» βοήθησε στον σχεδιασμό διαφόρων γραφικών παραστάσεων. Ενδεικτικά στην παρακάτω περίπτωση σχεδιάστηκαν δύο καμπύλες στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων μέσω της εντολής «Show» και μάλιστα σε δύο διαφορετικές κλίμακες, ώστε στην πρώτη να γίνεται εμφανές το σημείο τομής ενώ στην δεύτερη να φαίνεται εποπτικά η σχετική τους θέση (εικόνα 3.17).

```
In[◦]:= Show[eik1, eik2]
        προβολή γραφικών
```

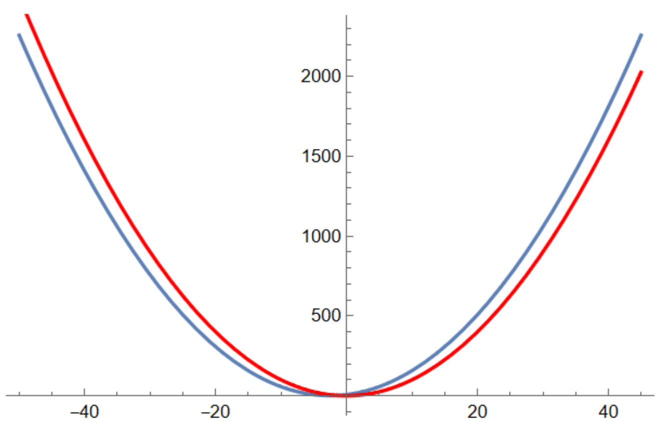
Out[◦]=



Σε μεγαλύτερες διαστάσεις οι γραφικές παραστάσεις θα έδειχναν κάπως έτσι:

```
In[◦]:= eik3 = Plot[g[x], {x, -50, 45}];
               διάγραμμα
        eik4 = Plot[f[x], {x, -50, 45}, PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}}];
               διάγραμμα                στυλ διαγράμμα⋯ μοντέλο RGB

In[◦]:= Show[eik3, eik4]
        προβολή γραφικών
```

Out[◦]=



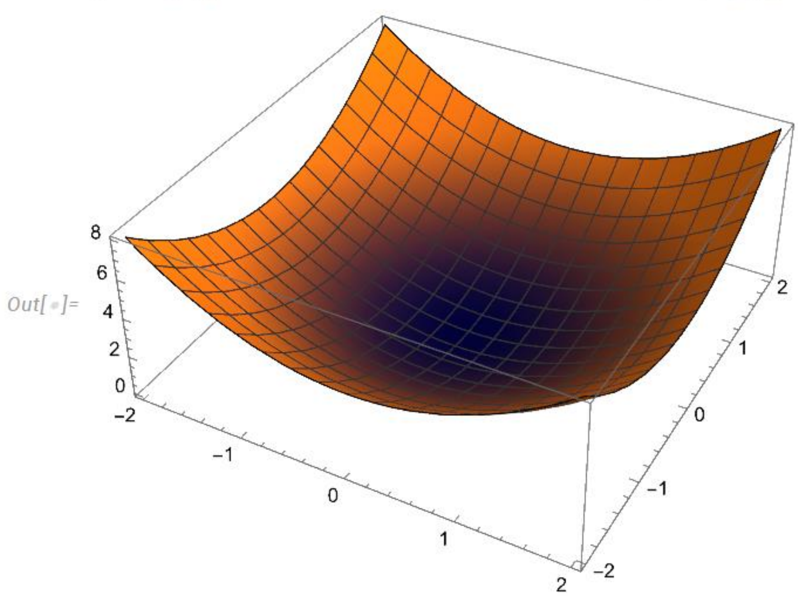
Εικόνα 3.17: Γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων σε διαφορετικές κλίμακες μέσω εντολών «Plot» και «Show»

Για να διαφοροποιείται οπτικά η μία γραφική παράσταση από την άλλη, αλλά και για λόγους αισθητικούς, επιλέχθηκαν διαφορετικοί χρωματισμοί για τη σχεδίαση της κάθε γραφικής παράστασης. Αυτό επετεύχθη μέσω της εντολής «PlotStyle» και με διαφορετική κάθε φορά επιλογή στις παραμέτρους του μοντέλου «RGB». Επί παραδείγματι: RGB[1,0,0] για κόκκινο χρώμα, RGB[0,1,0] για πράσινο χρώμα, RGB[0,0,1] για μπλε χρώμα, RGB[1,0,1] για μωβ χρώμα κ.λ.π. Επιπλέον σε μία περίπτωση αντί του μοντέλου «RGB» επιλέχθηκε το «Gray» για χάραξη γραφικής παράστασης με γκρίζο χρώμα.

Στην πορεία της μελέτης υπήρξε η ενότητα «Και το κάτι παραπάνω». Εκεί επιλέχθηκε να παρουσιαστεί στους μαθητές η γραφική παράσταση συναρτήσεων με περισσότερες της μίας μεταβλητές. Μελετήθηκαν, έτσι, με τη βοήθεια του λογισμικού, συναρτήσεις δύο και τριών μεταβλητών και με χρήση της εντολής «Plot3D» σχεδιάστηκαν οι γραφικές τους παραστάσεις (εικόνα 3.18)

f(x,y)= $x^2 + y^2$

```
In[∘]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:= Plot3D[x^2 + y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ColorFunction → "RustTones"]
        3D διάγραμμα                               συνάρτηση χρώματος
```



Εικόνα 3.18: Γραφική παράσταση συνάρτησης δύο μεταβλητών μέσω «Plot3D»

Τέλος, στις ενότητες επίλυσης ασκήσεων μέσα από το σχολικό βιβλίο και από την Τράπεζα Θεμάτων του υπουργείου, επιλέχθηκαν ασκήσεις στις οποίες ζητούνταν να βρεθούν σημεία τομής με τους δύο άξονες, σχετικές θέσεις γραφικών παραστάσεων αλλά και ασκήσεις που επέβαλαν την απλοποίηση του τύπου κάποιων συναρτήσεων. Για τη λύση όλων των παραπάνω θεμάτων χρησιμοποιήθηκαν μεμονωμένα ή και συνδυαστικά οι εντολές «Solve» , «Reduce» και «Simplify». Σε κάθε περίπτωση όμως η άσκηση ξεκινούσε με χρήση της εντολής «FunctionDomain» για εύρεση του εκάστοτε πεδίου ορισμού.

3.2.6 Η συνάρτηση f(x)=αx+β

Η μελέτη της συγκεκριμένης παραγράφου ξεκίνησε με τη διατύπωση ορισμένων απαραίτητων εννοιών, μέσω του «text». Ορίστηκε και δόθηκε έμφαση στην κλίση μιας ευθείας με την λύση αρκετών παραδειγμάτων σχετικά με αυτή. Έπειτα αναφέρθηκε ο τύπος της ευθείας και μέσω της εντολής «Plot» σχεδιάστηκε πλήθος ευθειών, σε διαφορετικό χρώμα η κάθε μία. Στην συνέχεια παρουσιάστηκαν λυμένα παραδείγματα που πραγματεύονταν παράλληλες ή κάθετες ευθείες. Σε ένα από αυτά ζητήθηκε η εύρεση παραμέτρου ώστε να προκύπτει παραλληλία μεταξύ δύο ευθειών. Εφόσον η άσκηση επέβαλε την εξίσωση των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών, απαιτήθηκε η χρήση της εντολής «Solve» και καθώς η εξίσωση περιείχε απόλυτες τιμές χρησιμοποιήθηκε ταυτόχρονα και η εντολή «Abs» (εικόνα 3.19).

2) Δίνονται οι ευθείες (ε): $f(x) = |κ-1| \cdot x + 3$
(η): $g(x) = |3κ+4| \cdot x - 1$
Να βρεθούν οι τιμές του $κ \in \mathbb{R}$ ώστε οι δύο ευθείες να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

<u>Λύση:</u>

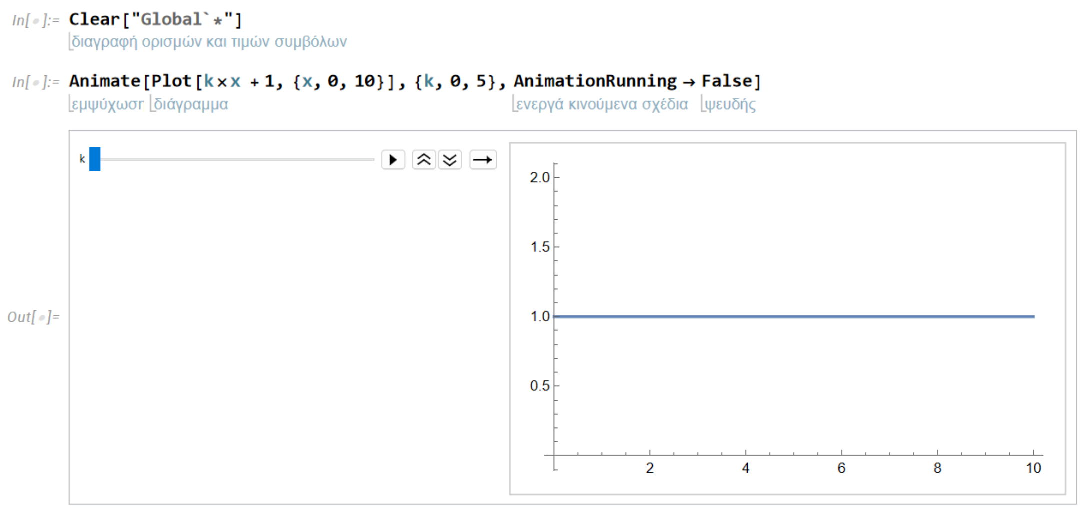
Πρέπει $λ_ε = λ_η \Rightarrow |κ-1| = |3κ+4|$

✓ Αυτή η εξίσωση λύνεται πολύ εύκολα με το **Mathematica Wolfram**:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Solve[Abs[k - 1] == Abs[3 × k + 4], k]
        λύση ·· απόλυτη τιμή    απόλυτη τιμή

Out[ ]= {{k → -5/2}, {k → -3/4}}
```

Εικόνα 3.19: Λύση εξίσωσης με απόλυτες τιμές μέσω της εντολής «Abs»

Στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» παρουσιάστηκε στους μαθητές η εντολή «Animate» ώστε να μελετηθεί η φυσιογνωμία μιας παραμετρικής ευθείας καθώς μεταβάλλεται με τον χρόνο η τιμή της παραμέτρου. Επίσης με τη συγκεκριμένη εντολή επιδιώχθηκε να δοθεί μια φυσική κίνηση σε κάποιες έννοιες που φαντάζουν στατικές στο μυαλό των μαθητών (εικόνα 3.20).



Εικόνα 3.20: Χρήση εντολής «Animate» για «κίνηση» της ευθείας καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος

Τέλος, στην ενότητα της επίλυσης ασκήσεων μέσα από το σχολικό βιβλίο αλλά και από την Τράπεζα Θεμάτων, έγινε συχνή χρήση της εντολής «Plot», καθώς επιλέχθηκε να σχεδιαστούν αρκετές ευθείες. Μέσα από τη χάραξη των εν λόγω ευθειών εντοπίστηκαν τα σημεία τομής τους με τους άξονες, τα διαστήματα στα οποία οι γραφικές παραστάσεις είναι πάνω ή κάτω από τον άξονα x'x, αλλά και σημεία τομής δύο ευθειών μεταξύ τους, μέσω της κοινής τους χάραξης, με την εντολή «Show». Όλα τα προηγούμενα τα οποία βρέθηκαν γραφικά, επιβεβαιώθηκαν έπειτα και αλγεβρικά με τις εντολές «Solve» και «Reduce». Άξια αναφοράς η άσκηση στην οποία δινόταν συνάρτηση πολλαπλού τύπου, κάθε κλάδος της οποίας ήταν τμήμα μιας ευθείας. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ορίστηκε με χρήση της εντολής «Which», πριν γίνει η χάραξή της με την αντίστοιχη εντολή «Plot».

3.3 Σχεδιασμός μαθημάτων Άλγεβρας Β' Λυκείου

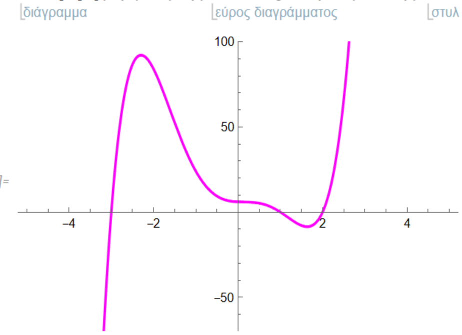
3.3.1 Πολυωνυμικές εξισώσεις

Η μελέτη της παραγράφου ξεκίνησε με τον ορισμό της έννοιας της πολυωνυμικής εξίσωσης καθώς και το γενικότερο θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτεί η κατανόησή της, όλα με την βοήθεια του «text». Έπειτα παρουσιάστηκε μεγάλο πλήθος λυμένων παραδειγμάτων, στην πλειονότητα των οποίων επιλύθηκαν, μέσω της «Solve», διάφορες πολυωνυμικές εξισώσεις. Στην πορεία, μελετήθηκαν οι πολυωνυμικές ανισώσεις. Παρουσιάστηκαν και σε αυτό το σκέλος του μαθήματος αρκετά λυμένα παραδείγματα, στα οποία έγινε χρήση της εντολής «Reduce».

Στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» επιλέχθηκε να γίνει η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ούτως ώστε να βρεθούν γραφικά οι ρίζες της και η σχετική της θέση ως προς τον άξονα x'x. Με χρήση της «Plot» και των επιλογών «PlotRange» και «PlotStyle» δόθηκε στους μαθητές μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για το τι παριστάνει ο τύπος της συνάρτησης που βλέπει μπροστά του. Έτσι αντιλαμβάνονται πολύ καλύτερα τι ακριβώς βρίσκουν όταν την εξισώνουν με το μηδέν ή όταν λύνουν ανίσωση για πάνω ή κάτω από το μηδέν (εικόνα 3.21).

$P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$

```
In[]:= Clear["Global`*"]
       διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[]:= f[x_] := (x - 1) × (x² + x - 6) × (2 x² + x + 1)

In[]:= Plot[f[x], {x, -5, 5}, PlotRange → {-70, +100}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 1]]
       διάγραμμα          εύρος διαγράμματος          στυλ διαγρά⋯  μοντέλο RGB

Out[]=
```



Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η C_p τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία με τετμημένες x = -3 , x = 1 , x = 2, ενώ είναι πάνω από τον άξονα στα διαστήματα (-3 , 1)U(2 , +∞) και κάτω από αυτόν στα (-∞ , -3)U(1 , 2), οπότε αντίστοιχα έχουμε και τις απαντήσεις στα: P(x) = 0 , P(x) > 0 , P(x) < 0

Εικόνα 3.21 Χάραξη γραφικής παράστασης πολυωνυμικής εξίσωσης με «Plot»

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε η λύση κάποιων από τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου. Στην πλειονότητα αυτών λύθηκαν πολυωνυμικές εξισώσεις με χρήση των εντολών «Solve» και «Reduce». Σε μία από τις ασκήσεις αυτές ζητήθηκε η εύρεση δύο παραμέτρων οι οποίες υπήρχαν μέσα στην πολυωνυμική συνάρτηση. Αυτό επετεύχθη με την λύση ενός συστήματος που προέκυπτε, καθώς δινόταν δύο από τις ρίζες της συνάρτησης. Το σύστημα λύθηκε πολύ απλά από το λογισμικό μέσω της «Solve». Στη συνέχεια μια δεύτερη «Solve» εντόπισε και τις υπόλοιπες ρίζες της συνάρτησης (εικόνα 3.22)

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= P[x_] := x^4 + α x^3 + β x^2 - 16 x - 12

In[ ]:= P[-1]
Out[ ]= 5 - α + β

In[ ]:= P[2]
Out[ ]= -28 + 8 α + 4 β

In[ ]:= Solve[P[-1] == 0 && P[2] == 0, {α, β}]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων
Out[ ]= {{α → 4, β → -1}}
```

Συνεπώς έχουμε πλέον P(x)= $x^4 + 4x^3 - 1x^2 - 16x - 12$

Θέλουμε τώρα να λύσουμε και P(x)=0 ⇒ $x^4 + 4x^3 - 1x^2 - 16x - 12 = 0$

```
In[ ]:= Solve[x^4 + 4 x^3 - x^2 - 16 x - 12 == 0, x, Reals]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων             πεδίο πρ
Out[ ]= {{x → -3}, {x → -2}, {x → -1}, {x → 2}}
```

Εικόνα 3.22 Λύση συστήματος και εξίσωσης με εντολή «Solve»

Τέλος, η παρουσίαση της παραγράφου ολοκληρώθηκε με τη λύση μιας επιλεγμένης άσκησης μέσα από την Τράπεζα Θεμάτων. Σε δοθέν πολυώνυμο η άσκηση ζητάει την εύρεση της μοναδικής ακέραιας ρίζας. Για να βρεθεί η ρίζα χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Solve», όμως για να εξασφαλιστεί ότι θα πρόκειται για ακέραια ρίζα, επιλέχθηκε μαζί και η επιλογή «Integers». Σε δεύτερο υποερώτημα η άσκηση ζητάει την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Εδώ επιλέχθηκε η εντολή «Factor» από το λογισμικό, η οποία έδωσε τη ζητούμενη παραγοντοποίηση.

3.3.2 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Η παρουσίαση αυτής της παραγράφου βασίστηκε εξ' ολοκλήρου στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, όπως άλλωστε φανερώνει και ο τίτλος της. Συνεπώς, τόσο στη μελέτη λυμένων παραδειγμάτων όσο και στην επίλυση ασκήσεων του σχολικού βιβλίου έγινε εκτενής χρήση των εντολών «Solve» και «Reduce» για τον παραπάνω σκοπό. Αξίζει να επισημανθεί πως στην περίπτωση των άρρητων εξισώσεων κι ανισώσεων χρησιμοποιήθηκαν εναλλάξ τόσο η εντολή «Sqrt», όσο και το σύμβολο των ριζών μέσα από την επιλογή «Palettes». Επιπλέον, στις κλασματικές εξισώσεις, στις οποίες ο τυχόν μηδενισμός του παρονομαστή επιβάλλει τον περιορισμό κάποιων τιμών, επελέγησαν δύο δρόμοι. Στον έναν από αυτούς ορίστηκε συνάρτηση, για την οποία βρέθηκε το πεδίο ορισμού με χρήση της εντολής «FunctionDomain». Στην άλλη περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν περιορισμοί μέσα στην εντολή «Solve» με χρήση του στοιχείου «&&» ανάμεσά τους (εικόνα 3.23)

$\frac{x^2+x+1}{x} + \frac{3x^2-x+1}{(x-3)x} = \frac{x^2-2}{x-3}$

Θα πάρουμε περιορισμούς για τις τιμές του x που μηδενίζουν τους παρονομαστές: $x \neq 0$ και $x \neq 3$.

Έπειτα θα πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών, που είναι ο όρος x(x-3) κι η εξίσωση θα γίνει:

$(x-3)(x^2+x+1) + (3x^2-x+1) = x(x^2-2) \Rightarrow$

$x^3 + x^2 + x - 3x^2 - 3x - 3 + 3x^2 - x + 1 - x^3 + 2x = 0 \Rightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot(-2) = 1+8 = 9$

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot1} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

✓ Μέσω της εντολής *"Solve"* η παραπάνω εξίσωση λύνεται αμέσως με το **Mathematica Wolfram**:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Solve[(x^2 + x + 1) / x + (3 x^2 - x + 1) / (x^2 - 3 x) == (x^2 - 2) / (x - 3) && x ≠ 0 && x ≠ 3, x, Reals]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων                                                          πεδίο πρ

Out[ ]= {{x → -1}, {x → 2}}
```

Εικόνα 3.23 Λύση κλασματικής εξίσωσης με εύρεση περιορισμών

Στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» παρουσιάστηκε μια γραφική επίλυση ορισμένων εξισώσεων και ανισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε περίπτωση ορίσθηκε συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση σχεδιάστηκε μέσω της εντολής «Plot», ούτως ώστε να βρεθούν εύκολα οι ρίζες και το πρόσημο της κάθε μίας και αντίστοιχα οι λύσεις των εξισώσεων ή ανισώσεων στην εκάστοτε περίπτωση. Τέλος, στο κομμάτι της λύσης επιλεγμένου ζητήματος μέσα από την Τράπεζα Θεμάτων του υπουργείου, αφού βρέθηκαν στο πρώτο ερώτημα δύο παράμετροι με λύση συστήματος μέσω της «Solve» παρακάτω ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι δοθέν πολυώνυμο είναι παράγοντας ενός άλλου πολυωνύμου. Στο ερώτημα αυτό επιλέχθηκε η εντολή «PolynomialMod», η οποία με output την τιμή μηδέν αποδεικνύει το ζητούμενο (εικόνα 3.24). Επιπρόσθετα, στο τελευταίο υποερώτημα υπήρχε μια τριγωνομετρική εξίσωση η οποία με μια αντικατάσταση μετατρεπόταν σε πολυωνυμική. Συνεπώς το λογισμικό με δύο εντολές «Solve», μία για την πολυωνυμική και μία για την τριγωνομετρική εξίσωση, έδινε τη ζητούμενη λύση.

```
In[•]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμ
In[•]:= P[x_] := 2 x^3 - x^2 + 2 x - 1

In[•]:= p[x_] := x^2 + 1
In[•]:= PolynomialMod[P[x], p[x]]
        modulo πολυωνύμων
Out[•]= 0
```

Εικόνα 3.24 Χρήση εντολής «PolynomialMod»

3.3.3 Η εκθετική συνάρτηση

Η μελέτη της συγκεκριμένης παραγράφου ξεκίνησε με μια υπενθύμιση στους μαθητές των βασικών ιδιοτήτων των δυνάμεων. Έπειτα ορίστηκε η εκθετική συνάρτηση και διαχωρίστηκαν οι δύο βασικές της μορφές ως προς τη μονοτονία. Επιπλέον οι μαθητές γνώρισαν τον άρρητο αριθμό e (αριθμός Euler) και σταχυολογήθηκαν εφαρμογές του αριθμού αυτού, με εκτενή αναφορά στον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Όλα τα προηγούμενα παρουσιάστηκαν με χρήση της επιλογής «text» εμπλουτισμένο με εικόνες και σχήματα. Μετά έγινε η γραφική παράσταση κάποιων εκθετικών συναρτήσεων με χρήση της εντολής «Plot» και με διαφορετικές κάθε φορά επιλογές στις παραμέτρους της επιλογής «RGB» για πλουραλισμό χρωμάτων.

Στη συνέχεια η μελέτη μεταφέρθηκε στην επίλυση εκθετικών εξισώσεων και ανισώσεων. Αφού πρώτα δόθηκε, με χρήση του «text», το θεωρητικό υπόβαθρό τους, στην πορεία παρουσιάστηκαν λυμένα παραδείγματα με τη βοήθεια των εντολών «Solve» και «Reduce». Με τις ίδιες εντολές επιλύθηκαν και εκθετικά συστήματα, με τη μόνη διαφορά πως στην περίπτωση αυτή απαιτείται η χρήση του στοιχείου «&&» μέσα στην εντολή και ανάμεσα στις δύο εξισώσεις καθώς και η αναφορά και των δύο αγνώστων στοιχείων τα οποία θα πρέπει να βρίσκονται μέσα σε άγκιστρα (εικόνα 3.25).

```
In[∘]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:= Solve[2 × 3^x - 3 × 2^y == -22 && 5 × 3^x + 1/2 × 2^y == 9, {x, y}, Reals]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων                                 πεδίο πρ

Out[∘]= {{x → 0, y → 3}}
```

Εικόνα 3.25 Λύση εκθετικού συστήματος με εντολή «Solve»

Στην πορεία, η επιπλέον γνώση της παραγράφου είχε να κάνει με τη σημαντική πληροφορία ότι κάθε συνάρτηση που πληροί κάποιες προϋποθέσεις μπορεί να γραφτεί προσεγγιστικά ως πολυωνυμική συνάρτηση. Έτσι, αφού πρώτα ορίστηκε από το λογισμικό η εκθετική συνάρτηση e^x με χρήση της εντολής «ExponentialGeneratingFunction», στη συνέχεια βρέθηκε το προσεγγιστικό της πολυώνυμο χρησιμοποιώντας την εντολή «Series» (εικόνα 3.26).

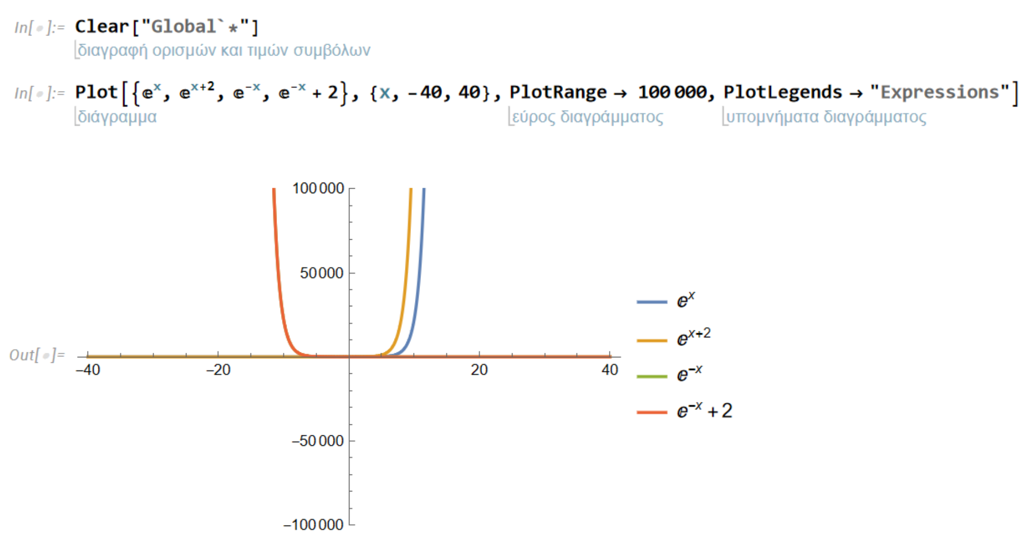
```
In[∘]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:= ExponentialGeneratingFunction[1, n, x]
        συνάρτηση γεννήτριας εκθετικών

Out[∘]= e^x

In[∘]:= Series[%, {x, 0, 10}]
        δημιουργία σειράς
```

$$\text{Out[∘]=}\ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40\,320} + \frac{x^9}{362\,880} + \frac{x^{10}}{3\,628\,800} + O[x]^{11}$$

Εικόνα 3.26 Προσεγγιστικό πολυώνυμο με χρήση της εντολής «Series»

Να επισημανθεί η χρήση του στοιχείου «%» στην παραπάνω εντολή. Το συγκεκριμένο στοιχείο μέσα σε μια εντολή δίνει το ακριβώς προηγούμενο αποτέλεσμα μέσα στην εντολή χωρίς αυτό να ξαναγραφτεί. Εν προκειμένω αναφέρεται στην συνάρτηση e^x που ορίστηκε ακριβώς από πάνω. Σε αντιστοιχία με αυτό, το λογισμικό προσφέρει και το στοιχείο «%%» για να περιγράψει το προτελευταίο αποτέλεσμα, χωρίς αυτό να αναφερθεί και αναδρομικά ισχύει και το στοιχείο «$\overbrace{\%\%\ldots\%}^{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$» για να περιγράψει το ν-φορές προηγούμενο αποτέλεσμα. Τέλος, η ένδειξη O[x][11] που υπάρχει στο Output του προσεγγιστικού πολυωνύμου παριστάνει το σφάλμα προσέγγισης συγκριτικά με την εκθετική συνάρτηση και το αντίστοιχο πολυώνυμό της. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το σφάλμα προσέγγισης είναι ενδέκατου βαθμού. Όσο μεγαλύτερης τάξης το σφάλμα προσέγγισης, τόσο πιο κοντά στη συνάρτηση είναι το κάθε πολυώνυμο.

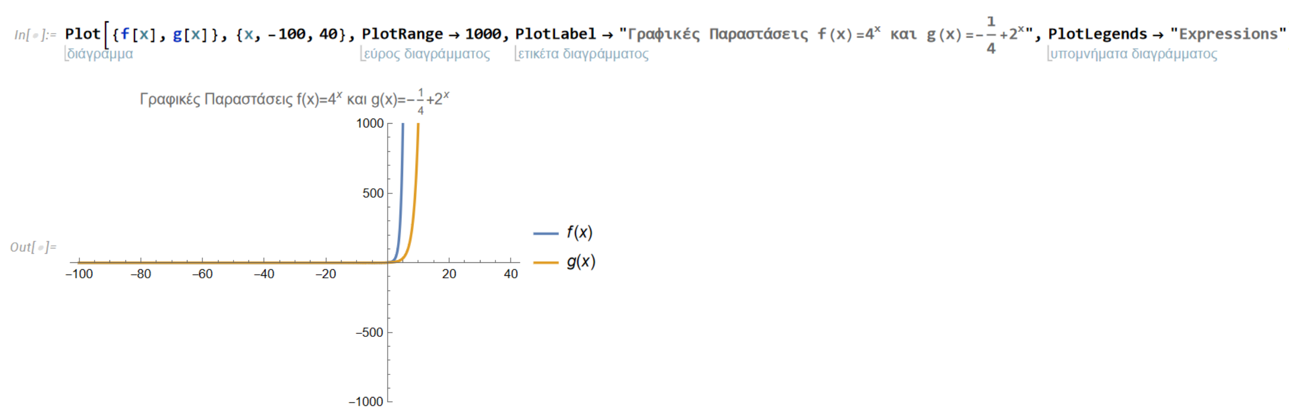
Στην ενότητα της λύσης ασκήσεων του σχολικού βιβλίου επιλέχθηκε να λυθούν αρκετές εκθετικές εξισώσεις, ανισώσεις και συστήματα. Εκτός αυτών όμως, επιλύθηκε και μία άσκηση που ζητούσε την γραφική παράσταση τεσσάρων εκθετικών συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. Για τον σκοπό αυτό μέσα στην εντολή «Plot» και εντός άγκιστρων γράφτηκαν μαζί και οι τέσσερις συναρτήσεις. Ακόμα επιλέχθηκε η ένδειξη «PlotLegends -> “Expressions”» ώστε να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις σε διαφορετικούς χρωματισμούς και να αναφέρεται το όνομα της κάθε μίας δίπλα από το αντίστοιχο χρώμα (εικόνα 3.27)



Εικόνα 3.27 Χάραξη γραφικών παραστάσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων

Να τονιστεί παραπάνω κι η χρησιμοποίηση της επιλογής «PlotRange» η οποία ορίζει το σύνολο τιμών το οποίο θα γίνει ορατό στην γραφική παράσταση που σχεδιάζεται. Εδώ ορίστηκε μια συγκεκριμένη τιμή. Το λογισμικό παρέχει επιπλέον τις επιλογές «PlotRange -> Automatic» , «PlotRange -> All» , «PlotRange -> Full» , «PlotRange -> {min , max}» κ.ά.

Τέλος, στη λύση άσκησης μέσα από την Τράπεζα Θεμάτων το ζήτημα που επιλύθηκε έδινε δύο εκθετικές συναρτήσεις για τις οποίες ζητούσε να βρεθούν τα κοινά σημεία των δύο αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων, οι σχετικές τους θέσεις πάνω στο επίπεδο και να σχεδιαστούν αυτές στο ίδιο σύστημα αξόνων. Έγινε επομένως χρήση των εντολών «Solve» και «Reduce» για τα δύο πρώτα υποερωτήματα και χρήση της εντολής «Plot» για τη χάραξη. Να αναφερθεί ότι στη συγκεκριμένη χάραξη των γραφικών παραστάσεων, εκτός των επιλογών «PlotLegends» και «PlotStyle» που αναφέρθηκαν και παραπάνω, χρησιμοποιήθηκε και η επιλογή «PlotLabel» με την οποία μπήκε ένας υπέρτιτλος πάνω από την γραφική παράσταση που σχεδιάστηκε (εικόνα 3.28).



Εικόνα 3.28 Χάραξη γραφικών παραστάσεων – Χρήση επιλογής «PlotLabel»

3.3.4 Λογάριθμοι

Στην παράγραφο αυτή καλείται ο μαθητής να γνωρίσει μια τελείως νέα έννοια για αυτόν, την έννοια του λογαρίθμου. Συνεπώς, αφού πρώτα μέσω «text» ορίστηκε ο λογάριθμος και αποδείχθηκαν οι βασικότατες ιδιότητές του, στη συνέχεια παρουσιάστηκε πλήθος εφαρμογών με τη βοήθεια του λογισμικού. Πιο συγκεκριμένα υπολογίστηκαν λογάριθμοι ή και παραστάσεις που απαιτούσαν εφαρμογή των ιδιοτήτων τους. Για τους σκοπούς αυτούς χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Log» στις διάφορες εκφάνσεις της. Εν προκειμένω υπήρξαν εφαρμογές με λογάριθμο βάσης α=2 συνεπώς έγινε χρήση της εντολής «Log2». Έπειτα ορίστηκε ο δεκαδικός λογάριθμος κι επομένως στις εφαρμογές του χρησιμοποιήθηκε η εντολή «Log10», ενώ μετά αναφέρθηκε κι ο φυσικός ή νεπέριος λογάριθμος, όπου για εκεί εφαρμόστηκε η εντολή «Log» (εικόνα 3.29).

1) Να υπολογιστεί η παράσταση:
$K = \ln(50e) - \ln 25 - \ln 2$

Λύση:

Έχουμε:

$K = \ln(50e) - \ln 25 - \ln 2 = \ln\left(\frac{50e}{25 \cdot 2}\right) = \ln\left(\frac{50e}{50}\right) = \ln e = 1$ **($\ln e = \ln_e e = 1$)**

✓ Πολύ απλά και με το **Mathematica Wolfram :**

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= FullSimplify[Log[50 × e] - Log[25] - Log[2]]
        πλήρης απλοπο·· λογάριθμος    λογάριθμος λογάριθμο

Out[ ]= 1
```

Εικόνα 3.29 Υπολογισμός παράστασης με φυσικούς λογαρίθμους

Και οι υπόλοιπες ενότητες της παρουσίασης εφάρμοζαν τις ιδιότητες των λογαρίθμων σε ένα πλήθος ασκήσεων, μέσω των διαφόρων εντολών «Log» του λογισμικού. Για παράδειγμα η ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» παρουσίασε τη δυνατότητα του λογισμικού να υπολογίζει ταυτόχρονα τον λογάριθμο ενός αριθμού με διαφορετικές βάσεις (εικόνα 3.30). Οι ενότητες που έχουν να κάνουν με επίλυση ασκήσεων τόσο του σχολικού βιβλίου όσο και της Τράπεζας Θεμάτων επίσης πραγματεύονταν ασκησιολόγιο που βασιζόταν στις ιδιότητες των λογαρίθμων και είχαν να κάνουν είτε με υπολογισμό παραστάσεων είτε με απόδειξη κάποιων σχέσεων. Σε πολλές περιπτώσεις ο υπολογισμός των παραστάσεων έγινε με χρήση της εντολής «FullSimplify», εφόσον με τη συγκεκριμένη εντολή το λογισμικό απλουστεύει όσο το δυνατόν περισσότερο μια παράσταση, δίνοντας στην ουσία το αποτέλεσμά της (εικόνα 3.31).

Και το κάτι παραπάνω....!

Δεν είναι πάντα εύκολο να βρούμε τον λογάριθμο οποιουδήποτε αριθμού. Ιδίως λογάριθμοι δεκαδικών αριθμών, ή λογάριθμοι με πιο “ασυνήθιστη” βάση δεν υπολογίζονται πάντα με τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω.

✓ Κάτι όμως που είναι πολύ δύσκολο για μας, είναι εξόχως εύκολο για το **Mathematica Wolfram :**

π.χ.:

Να υπολογιστούν οι λογάριθμοι $\ln(1{,}5)$, $\log(1{,}5)$, $\log_2(1{,}5)$, $\log_{\sqrt{2}}(1{,}5)$

Λύση:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Log[{2, E, 10, √2}, 1.5]
        λογάρι···  σταθερά e

Out[ ]= {0.584963, 0.405465, 0.176091, 1.16993}
```

Εικόνα 3.30 Ταυτόχρονος υπολογισμός λογαρίθμου διαφόρων βάσεων

1) Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

(i) $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3}$

(ii) $9^{\frac{1}{2}\log_3 18-1}$

Λύση:

(i)

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= FullSimplify[4^(1-1/2×Log2[3])]
        πλήρης απλοποίηση

Out[ ]= 4/3
```

(ii)

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= FullSimplify[9^(1/2×Log[3,18]-1)]
        πλήρης απλοποίηση

Out[ ]= 2
```

Εικόνα 3.31 Υπολογισμός παραστάσεων με χρήση εντολής «FullSimplify»

3.3.5 Η λογαριθμική συνάρτηση

Στην εισαγωγή της συγκεκριμένης παραγράφου ορίστηκε η λογαριθμική συνάρτηση, αναφέρθηκε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της, ενώ διαχωρίστηκαν και οι δύο μορφές της ανάλογα με την μονοτονία. Όλες οι παραπάνω αναφορές έγιναν με χρήση της επιλογής «text» καθώς επίσης και με εικόνες ή διαγράμματα που βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των ορισμών. Έπειτα, με χρήση της εντολής «Plot» σχεδιάστηκαν οι γραφικές παραστάσεις των λογαριθμικών συναρτήσεων με βάσεις α=2, α=10, α=e και α=$\frac{1}{2}$. Χρησιμοποιήθηκε η επιλογή «PlotStyle» για να εμφανιστεί κάθε γραφική παράσταση με διαφορετικό χρώμα. Πιο συγκεκριμένα στη συνάρτηση $\log_2 x$ έγινε χρήση της επιλογής «PlotStyle -> Gray» για να σχεδιαστεί η συνάρτηση σε γκρι χρώμα. Η συνάρτηση $\log x$ (α=10) σχεδιάστηκε σε κόκκινο χρώμα, εφόσον εφαρμόστηκε η επιλογή «PlotStyle -> RGB [1,0,0]», ενώ η συνάρτηση $\ln x$ (α=e) έγινε σε κίτρινο χρώμα με την επιλογή

«PlotStyle -> RGB [1,1,0]». Τέλος η γραφική παράσταση της $\log_{\frac{1}{2}} x$ σχεδιάστηκε σε πράσινο χρώμα καθώς επιλέχθηκε η παράμετρος «PlotStyle -> RGB [0,1,0]». Αξίζει να αναφερθεί ότι οι παράμετροι στο στοιχείο «RGB» παίρνουν οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα (0 , +∞) και ανάλογα με τον συνδυασμό των τριών παραμέτρων προκύπτει και διαφορετικό χρώμα ή απόχρωση.

Ακολούθως η παρουσίαση της παραγράφου συνεχίστηκε με τη μελέτη λογαριθμικών εξισώσεων και ανισώσεων. Αφού πρώτα αναφέρθηκε το θεωρητικό υπόβαθρο, στη συνέχεια παρουσιάστηκε πλήθος λυμένων εφαρμογών. Οι εντολές «Solve» και «Reduce» ήταν αυτές που χρησιμοποιήθηκαν εκτενέστερα. Η μεν πρώτη για τη λύση των εξισώσεων και των συστημάτων (εικόνα 3.32), η δε δεύτερη για τη λύση των ανισώσεων (εικόνα 3.33).

2) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} x \cdot y = 8 \\ \log y = 2 \log x \end{Bmatrix}$$

<u>Λύση:</u>

✓ Το σύστημα λύνεται πολύ απλά με το **Mathematica Wolfram** :

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Solve[x × y == 8 && Log10[y] == 2 × Log10[x], {x, y}, Reals] // FullSimplify
        λύση εξισώσεων και··· λογάριθμος βάσ··· λογάριθμος βάσης 10  πεδίο πρ···  πλήρης απλοποίηση

Out[ ]= {{x → 2, y → 4}}
```

Εικόνα 3.32 Λύση λογαριθμικού συστήματος

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= Reduce[Log[1/2, x^2 + x] > Log[1/2, 2], x, Reals]
        μείωση··· λογάριθμος  λογάριθμος  πεδίο πρ

Out[ ]= -2 < x < -1 || 0 < x < 1
```

Εικόνα 3.33 Λύση λογαριθμικής ανίσωσης

Σε όλες τις περιπτώσεις, εντός της κάθε εντολής, έγινε χρήση της επιλογής «Reals» ώστε να μας δώσει το λογισμικό τις πραγματικές λύσεις και να αποκλείσει από τις απαντήσεις του τυχόν μιγαδικές λύσεις. Επιπλέον σε ορισμένα παραδείγματα χρησιμοποιήθηκε και η εντολή «FullSimplify» στο τέλος του αντίστοιχου Input και σε δομή "….//FullSimplify", ώστε να πάρουμε τις απαντήσεις όσο το δυνατόν πιο απλοποιημένες. Η εν λόγω εντολή, όπως και άλλες αντίστοιχες, μπορεί να δομηθεί είτε στη διάταξη που αναφέρθηκε, δηλαδή στο τέλος μιας άλλης εντολής είτε και στην αρχή της.

Στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» παρουσιάστηκε η δυνατότητα που μας δίνει το λογισμικό, μέσω της εντολής «Series», να προσεγγίσουμε κάθε λογαριθμική συνάρτηση μέσω ενός αντίστοιχου πολυωνύμου. Εδώ η προσέγγιση ήταν μέχρι τάξης 4^{ου} βαθμού, κάτι που αναφέρεται στην εντολή μέσα σε άγκιστρα, ενώ στο αποτέλεσμα υπάρχει κι η ένδειξη $O[...]^5$ όπου εννοεί το σφάλμα της προσέγγισης το οποίο είναι 5^{ης} τάξης.

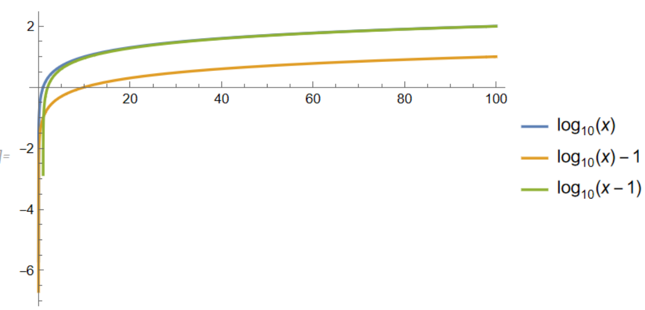
Στη διαδικασία επίλυσης ασκήσεων τόσο από το σχολικό βιβλίο όσο και από τη συλλογή του υπουργείου, επελέγησαν κυρίως θέματα επίλυσης λογαριθμικών εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων, σε αντιστοιχία με αυτά που περιγράφηκαν παραπάνω. Επιλέχθηκε επιπλέον και ένα ζήτημα που επέβαλε τη χάραξη τριών γραφικών παραστάσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. Για τον σκοπό αυτό γράφτηκαν και οι τρεις συναρτήσεις μαζί μέσα σε άγκιστρα και εντός της «Plot», ενώ έγινε χρήση και της επιλογής «PlotLegends -> "Expressions"» ώστε να εμφανιστούν οι τρεις συναρτήσεις δίπλα από το αντίστοιχο χρώμα τους (εικόνα 3.34).

2) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
f(x) = logx,   *g*(x) = logx-1 και h(x) = log(x-1)

<u>Λύση:</u>

```
In[]:= Clear["Global`*"]
       διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[]:= Plot[{Log10[x], Log10[x] - 1, Log10[x - 1]}, {x, 0, 100}, PlotRange → All, PlotLegends → "Expressions"]
       διάγ··· λογάριθμο··· λογάριθμος βά··· λογάριθμος βάσης 10   εύρος διαγρ··· όλα υπομνήματα διαγράμματος
```

Out[]=



Εικόνα 3.34 Χάραξη τριών γραφικών παραστάσεων σε ίδιο σύστημα αξόνων

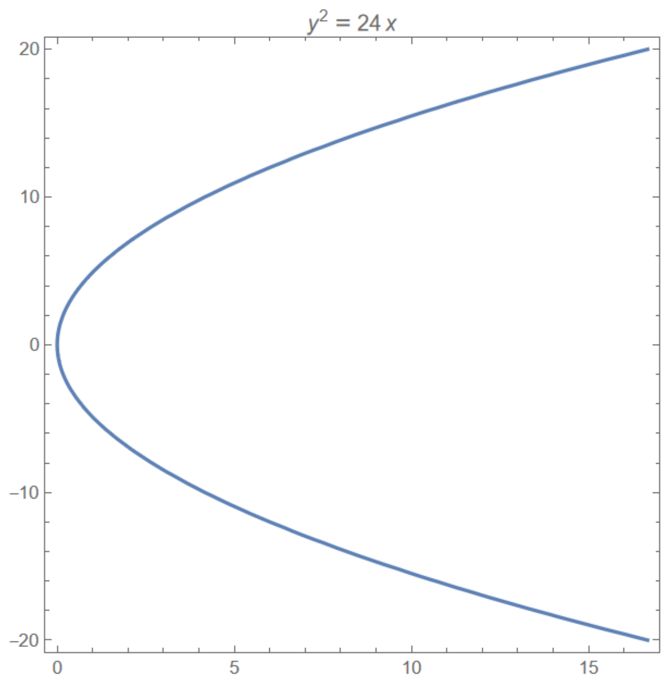
3.4 Σχεδιασμός μαθημάτων Μαθηματικών Προσανατολισμού Β’ Λυκείου

3.4.1 Παραβολή

Η μελέτη της παραγράφου για την παραβολή, ως μία κωνική τομή, ξεκίνησε με χρήση του «text» για τη διατύπωση του ορισμού της, του αντίστοιχου τυπολογίου και σημαντικών εννοιών που την αφορούν όπως οι εστίες, η διευθετούσα κ.ά., ενώ χρησιμοποιήθηκαν και αρκετές εικόνες και γραφικές παραστάσεις ώστε να γίνουν πιο εύκολα αντιληπτές οι θεωρίες. Μετά παρουσιάστηκαν αρκετά λυμένα παραδείγματα. Στην πλειονότητά τους ζητούσαν να βρεθεί ο τύπος της παραβολής, δοσμένης της εστίας ή της διευθετούσας και στη συνέχεια να σχεδιαστεί η αντίστοιχη γραφική παράσταση. Για τις διάφορες χαράξεις των συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε η εντολή «ContourPlot». Πρόκειται για εντολή του Mathematica που σχεδιάζει κωνικές τομές ή γενικά καμπύλες της μορφής f(x,y)=c στις οποίες οι μεταβλητές x και y είναι σε μια πεπλεγμένη μορφή. Δομείται γράφοντας τον τύπο της καμπύλης μέσα στην εντολή καθώς και τις δύο μεταβλητές με τα όριά τους μέσα σε άγκιστρα (εικόνα 3.35). Στα διάφορα παραδείγματα χρησιμοποιήθηκαν επιπλέον, μεμονωμένα ή συνδυαστικά, οι επιλογές «AxesLabel», «PlotLabel» και «Rasterize». Η πρώτη όρισε στους άξονες τις μεταβλητές x και y, η δεύτερη εμφάνισε τον τύπο της παραβολής πάνω από τη γραφική παράσταση ενώ η τρίτη μετακίνησε κατά 90^o τη γραφική παράσταση.

```
In[ ]:= ContourPlot[y² == 24 x, {x, 0, 30}, {y, -20, 20}, PlotRange → All, PlotLabel → y² == 24 x]
        διάγραμμα ισοϋψών                                 εύρος διαγρ⋯   όλα   ετικέτα διαγράμματος
```

Out[ ]=

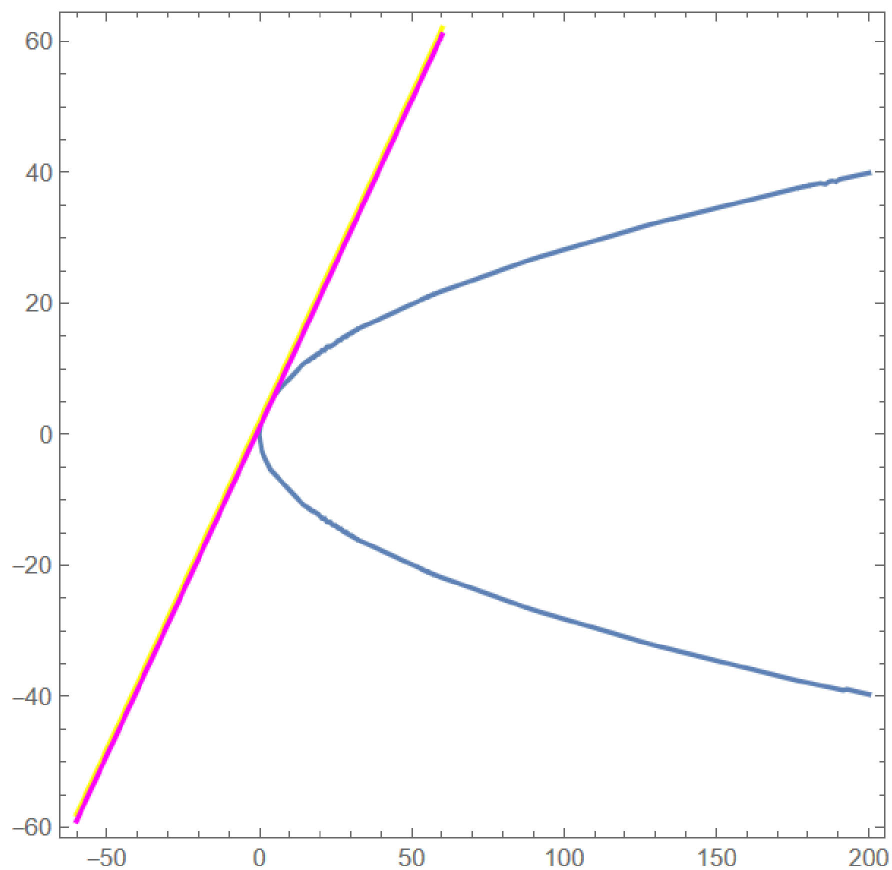


Εικόνα 3.35 Χρήση της εντολής «ContourPlot»

Στην πορεία, αναφέρθηκαν οι ιδιότητες της παραβολής και οι τύποι της εφαπτομένης της. Παρουσιάστηκαν λυμένες εφαρμογές που πραγματεύονται την εφαπτομένη καμπύλης, μέσα στις οποίες γινόταν και η ταυτόχρονη χάραξη της εκάστοτε καμπύλης και της αντίστοιχης εφαπτομένης της. Για το σχεδιασμό αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι εντολές «Plot» για την εφαπτομένη, «ContourPlot» για την παραβολή και «Show» για την ταυτόχρονη προβολή τους (εικόνα 3.36). Να επισημανθεί η χρήση του στοιχείου « ; » που έχει ως σκοπό τη μη εμφάνιση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων κάθε εντολής. Έτσι στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε το στοιχείο για να μη σχεδιαστούν αυτόνομα οι εφαπτομένες και η παραβολή, αλλά να τις εμφανίσει το λογισμικό όλες μαζί στο ίδιο σχήμα μέσω της εντολής «Show». Η ενότητα αυτή έκλεισε με την αναφορά στην ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής. Έγινε χρήση του «text» για το αντίστοιχο κείμενο ενώ παρουσιάστηκαν και κάποιες εικόνες για να δείξουν την ακριβή ερμηνεία της ιδιότητας και τις πολύ σημαντικές εφαρμογές που αυτή έχει στη χρήση τηλεσκοπίων, στη λειτουργία των φαναριών των αυτοκινήτων κ.ά.

```
In[∘]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:= eik3 = ContourPlot[y^2 == 8 x, {x, 0, 200}, {y, -300, 300}, PlotRange → All];
               διάγραμμα ισοϋψών                              εύρος διαγρ···  όλα

In[∘]:= eik4 = Plot[x + 2, {x, -60, 60}, PlotStyle → RGBColor[1, 1, 0]];
               διάγραμμα                  στυλ διαγρά···  μοντέλο RGB

In[∘]:= eik5 = Plot[x + 1, {x, -60, 60}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 1]];
               διάγραμμα                  στυλ διαγρά···  μοντέλο RGB

In[∘]:= Show[eik3, eik4, eik5]
        προβολή γραφικών
```

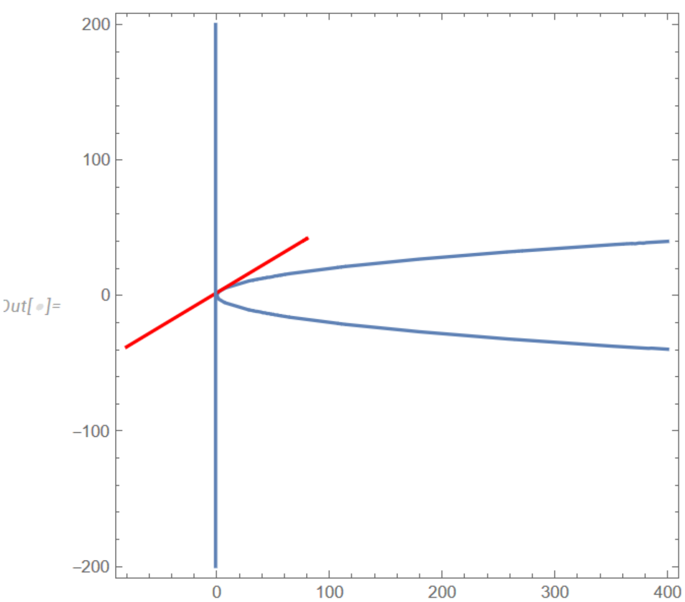
Out[∘]=



Εικόνα 3.36 Χάραξη παραβολής και εφαπτομένης

Στη συνέχεια της παρουσίασης αναφέρθηκε η δυνατότητα που παρέχει το λογισμικό για σχεδίαση καμπυλών σε τρεις διαστάσεις. Συγκεκριμένα, μέσω της εντολής «Plot3D» σχεδιάστηκε ένα ελλειπτικό παραβολοειδές, ώστε να γίνει αντιληπτή από τους μαθητές η συσχέτιση των όσων μαθαίνουν στις δύο διαστάσεις με αυτά που ισχύουν στον τρισδιάστατο χώρο.

Τέλος, στις ενότητες επίλυσης ασκήσεων επιλέχθηκαν θέματα στα οποία οι μαθητές καλούνται αφενός να βρούνε τον τύπο της παραβολής, αφετέρου να σχεδιάσουν την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Ακόμα λύθηκαν ασκήσεις που απαιτείτο η εύρεση της εφαπτομένης και η κοινή της χάραξη μαζί με την καμπύλη. Για όλες τις περιπτώσεις υπήρξε συνδυαστική χρήση των εντολών «Plot», «ContourPlot» και «Show», ενώ σε άσκηση που απαιτήθηκε η λύση εξίσωσης που είχε να κάνει με τις κλήσεις εφαπτομένης και άλλης ευθείας, χρησιμοποιήθηκε η «Solve». Όσον αφορά την άσκηση της Τράπεζας Θεμάτων, εκεί ζητήθηκε η εύρεση εστίας, διευθετούσας και εφαπτομένης μιας δοθείσας παραβολής. Έπειτα ο μαθητής καλείται να τα σχεδιάσει όλα σε ίδιο σύστημα αξόνων. Κι εδώ η χρησιμοποίηση «ContourPlot» για τη σχεδίαση της εφαπτομένης και της διευθετούσας, μαζί με την «Plot» για την ευθεία, έδωσαν το ζητούμενο αποτέλεσμα (εικόνα 3.37).



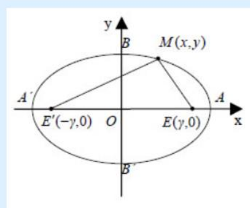
Εικόνα 3.37 Σχεδίαση παραβολής, διευθετούσας και εφαπτομένης

3.4.2 Έλλειψη

Η παρουσίαση ξεκίνησε με διατύπωση του ορισμού της έλλειψης, προβολή εικόνων με τις δύο βασικές γραφικές της παραστάσεις και λεπτομερή αναφορά του αντίστοιχου τυπολογίου (εικόνα 3.38). Έπειτα έγιναν εφαρμογές μέσω παραδειγμάτων. Εκεί ζητήθηκε και η χάραξη των αντίστοιχων ελλείψεων, η οποία έγινε με χρησιμοποίηση της «ContourPlot». Να τονιστεί ότι εδώ έγινε χρήση και των επιλογών «Axes -> True» και «AspectRatio -> Automatic», με την πρώτη να ορίζει τους άξονες x και y και τη δεύτερη να επιλέγει αυτομάτως την κλίμακα παρουσίασης ούτως ώστε να προκύψει γραφική παράσταση ικανοποιητικών διαστάσεων.

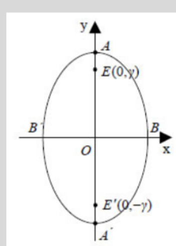
Αποδεικνύεται ότι η έλλειψη με **εστίες Ε (γ , 0)** , **Ε' (-γ , 0)**, **μεγάλο άξονα (ΑΑ') =2α** πάνω στον x'x και **μικρό άξονα (ΒΒ')=2β** πάνω στον y'y, έχει την μορφή:

$$\textbf{(C):}\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{με } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



Αντίστοιχα η έλλειψη με **εστίες Ε (0 , γ)** , **Ε' (0 , -γ)**, **μεγάλο άξονα (ΑΑ') =2α** πάνω στον y'y και **μικρό άξονα (ΒΒ')=2β** πάνω στον x;x, έχει την μορφή:

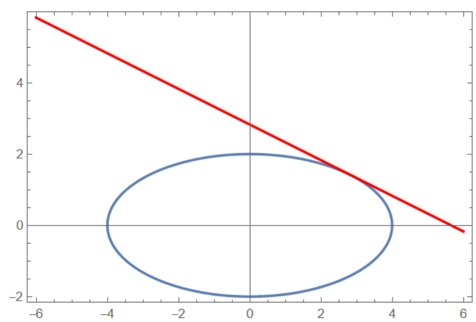
$$\textbf{(C):}\ \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \quad \text{με } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



Εικόνα 3.38 Παρουσίαση τύπων και γραφικών παραστάσεων έλλειψης

Η μελέτη της παραγράφου συνεχίστηκε με την αναφορά κάποιων επιπλέον σημαντικών εννοιών που αφορούν την έλλειψη, όπως οι εξισώσεις εφαπτομένης έλλειψης, η εκκεντρότητά της καθώς και βασικές της ιδιότητες που έχουν να κάνουν με τις συμμετρίες και την ανακλαστική ιδιότητα μιας έλλειψης. Παρουσιάστηκαν λυμένα παραδείγματα που, εκτός των άλλων, περιείχαν και τη κοινή χάραξη καμπύλης και εφαπτομένης (εικόνα 3.39), ενώ στην ενότητα «Και το κάτι παραπάνω» διατυπώθηκε και σχεδιάστηκε μέσω της εντολής «ContourPlot3D» ένα ελλειψοειδές τριών διαστάσεων.

```
In[]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[]:= eikC = ContourPlot[x^2/4^2 + y^2/2^2 == 1, {x, -4, 4}, {y, -2, 2}, PlotRange → All, Axes → True, AspectRatio → Automatic];
               διάγραμμα ισοϋψών                                    εύρος διαγρ···  όλα  επιλο···  αλη···  λόγος διαστάσεων  αυτόματο

In[]:= eikε = Plot[-1/2 x + 4/√2, {x, -6, 6}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]];
               διάγραμμα                            στυλ διαγρά···  μοντέλο RGB

In[]:= Show[eikC, eikε]
        προβολή γραφικών

Out[]=
```



Εικόνα 3.39 Σχεδίαση έλλειψης και εφαπτομένης

Τέλος, στη διαδικασία επίλυσης ασκήσεων χρησιμοποιήθηκε το «text» για την παρουσίαση κάποιων εξ' αυτών, όπως σε αυτές που το ζητούμενο ήταν η εύρεση του τύπου δοθέντων δύο στοιχείων (εστίες, εκκεντρότητα, άξονες κ.α.). Σε μία άλλη άσκηση που επιλέχθηκε προς λύση, ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι γνωστό σημείο ανήκει σε έλλειψη. Εδώ, μέσω της εντολής «Simplify» και με ένδειξη «True» ως αποτέλεσμα, είχαμε το ζητούμενο (εικόνα 3.40).

1) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ $\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, για όλες τις τιμές του $t \in \mathbb{R}$.

Λύση :

✓ Θα το αποδείξουμε με το **Mathematica Wolfram** χρησιμοποιώντας εντολής αλήθειας:

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= x = α (1 - t^2) / (1 + t^2);
        y = (2 β t) / (1 + t^2);

In[ ]:= Simplify[x^2 / α^2 + y^2 / β^2 == 1]
        απλοποίηση

Out[ ]= True
```

Το output "True" δείχνει ότι η έκφραση ισχύει, οπότε το σημείο Μ ανήκει στην έλλειψη (C).

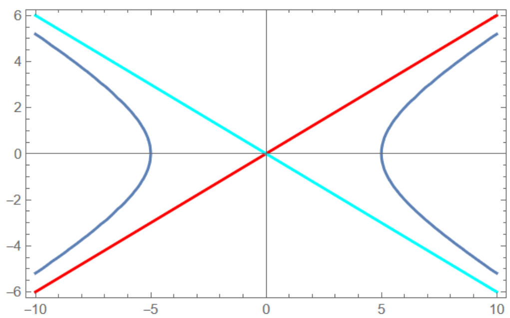
Εικόνα 3.40 Επαλήθευση σχέσης μέσω «δομής αληθείας»

Η άσκηση που λύθηκε μέσα από την Τράπεζα Θεμάτων ζητούσε, εκτός των άλλων, την εύρεση των αξόνων και την εστιακή απόσταση. Για τον λόγο αυτό έγινε χρήση της εντολής «EuclideanDistance», η οποία δίνει αμέσως την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων.

3.4.3 Υπερβολή

Σε αντιστοιχία με την παρουσίαση των προηγούμενων παραγράφων που είχαν να κάνουν με κωνικές τομές, έτσι και σε αυτή την περίπτωση έγινε πρώτα μια ενδελεχής αναφορά στον ορισμό της υπερβολής και στους βασικούς της τύπους. Χρησιμοποιήθηκε το «text» για τον σκοπό αυτό, αλλά και πολλές εικόνες για την προβολή των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων. Στα πρώτα βασικά παραδείγματα έγινε εφαρμογή των τύπων και χάραξη της κάθε υπερβολής με χρήση της εντολής «ContourPlot». Στην πορεία έγινε μελέτη των εφαπτομένων και των ασυμπτώτων μιας υπερβολής και σχεδιάστηκαν γραφικές τους παραστάσεις σε ίδιο σύστημα αξόνων (εικόνα 3.41), ενώ το θεωρητικό μέρος ολοκληρώνεται με την αναφορά στην εκκεντρότητα της υπερβολής και στην ανακλαστική της ιδιότητα.

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]
        διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:= eikC1 = ContourPlot[x^2 / 5^2 - y^2 / 3^2 == 1, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotRange → All, Axes → True, AspectRatio → Automatic];
                διάγραμμα ισοϋψών                                                    εύρος διαγρ···  όλα  επιλο···  αλη···  λόγος διαστάσεων  αυτόματο

In[ ]:= eikε1 = Plot[3/5 x, {x, -10, 10}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]];
                διάγραμμα                στυλ διαγρά···  μοντέλο RGB

In[ ]:= eikε2 = Plot[-3/5 x, {x, -10, 10}, PlotStyle → RGBColor[0, 1, 1]];
                διάγραμμα                 στυλ διαγρά···  μοντέλο RGB

In[ ]:= Show[eikC1, eikε1, eikε2]
        προβολή γραφικών

Out[ ]=
```

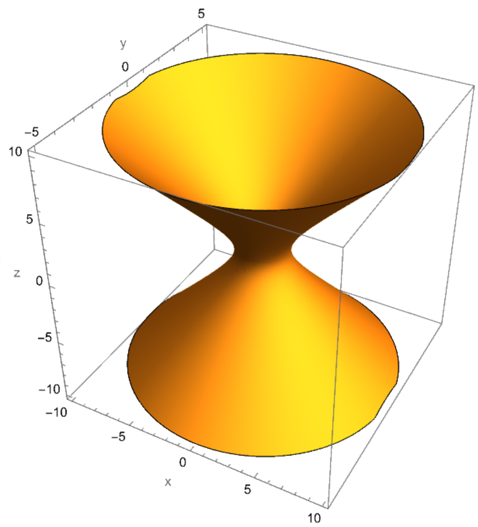


Εικόνα 3.41 Σχεδίαση υπερβολής και ασυμπτώτων

Στην εξέλιξη της παρουσίασης της παραγράφου έγινε προβολή των όσων μελετήθηκαν παραπάνω σε τρισδιάστατο χώρο. Μέσω της εντολής «ContourPlot3D» σχεδιάστηκε ένα υπερβολοειδές (εικόνα 3.42). Μέσα στην εντολή αυτή έγινε χρήση διαφόρων επιλογών τις οποίες παρέχει το λογισμικό. Χρησιμοποιήθηκε η επιλογή «AxesLabel» για να δώσει όνομα στους τρεις άξονες, η επιλογή «BoxRatios» για τις αναλογίες των διαστάσεων του «κουτιού» μέσα στο οποίο θα σχεδιαστεί το γράφημα, όπως και η επιλογή «Mesh» για να οριστεί πλέγμα μέσα στο κουτί κ.ά.

```
In[∘]:= ContourPlot3D[(x / 2) ^2 + y^2 - (z / 2) ^2 == 1, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}, Mesh → None, PlotPoints → 50, PlotRange → All,
        3D διάγραμμα ισοϋψών                                                                                    πλέγμα  κανένα  αριθμός σημείων δι⋯  εύρος διαγρ⋯  όλα
          AxesLabel → {"x", "y", "z"}, BoxRatios → {10, 10, 10}]
          ετικέτες αξόνων                 αναλογίες κουτιού
```

Out[∘]=



Εικόνα 3.42 Σχεδίαση υπερβολοειδούς τριών διαστάσεων

Οι ασκήσεις οι οποίες επιλύθηκαν είχαν ως κύρια ζητούμενα, στη μεγάλη τους πλειοψηφία, την εύρεση του τύπου μιας υπερβολής, δοθέντων κάποιων στοιχείων, και η μετέπειτα γραφική της απεικόνιση. Συνεπώς κι εδώ έγινε εκτενής χρήση της εντολής «ContourPlot» η οποία σχεδιάζει τέτοιου είδους κωνικές τομές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

Διεξαγωγή της στατιστικής έρευνας

4.1 Στόχοι και δείγμα της έρευνας

Ο σκοπός της έρευνας που παρουσιάζεται στη συνέχεια είναι να διερευνηθούν οι στάσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απέναντι στην αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία με έμφαση στο λογισμικό Mathematica. Πραγματοποιήθηκαν τρεις επιμέρους έρευνες. Δύο από αυτές αφορούν τους μαθητές και εξετάζουν τις στάσεις τους πριν και μετά την παρουσίαση των μαθημάτων με το λογισμικό Mathematica, ενώ η τρίτη αφορά καθηγητές μαθηματικών και επιδιώκει να εντοπίσει τον βαθμό γνώσης και χρήσης του λογισμικού από τους ίδιους.

Πιο συγκεκριμένα, μέσω της χρήσης ηλεκτρονικών και έντυπων ερωτηματολογίων η έρευνα είχε ως στόχο να μελετήσει τη γνώμη και τις γνώσεις των μαθητών γύρω από τις νέες τεχνολογίες και από το λογισμικό Mathematica, καθώς και τον βαθμό στον οποίο έχουν καταφέρει να τα ενσωματώσουν στη μελέτη τους. Στο δεύτερο στάδιο η μελέτη επικεντρώθηκε στις εντυπώσεις και τις παρατηρήσεις των μαθητών σχετικά με την παράδοση μαθημάτων μαθηματικών με τη χρήση του λογισμικού. Στον άλλο πυλώνα της έρευνας, επιχειρήθηκε η προσέγγιση των γνώσεων και των στάσεων των καθηγητών μαθηματικών σχετικά με το λογισμικό Mathematica, και ειδικότερα κατά πόσο κρίνεται εύχρηστο στην παραγωγή μαθηματικών κειμένων και στη διδασκαλία των μαθημάτων καθώς και η σύγκρισή του με άλλα αντίστοιχα μαθηματικά λογισμικά.

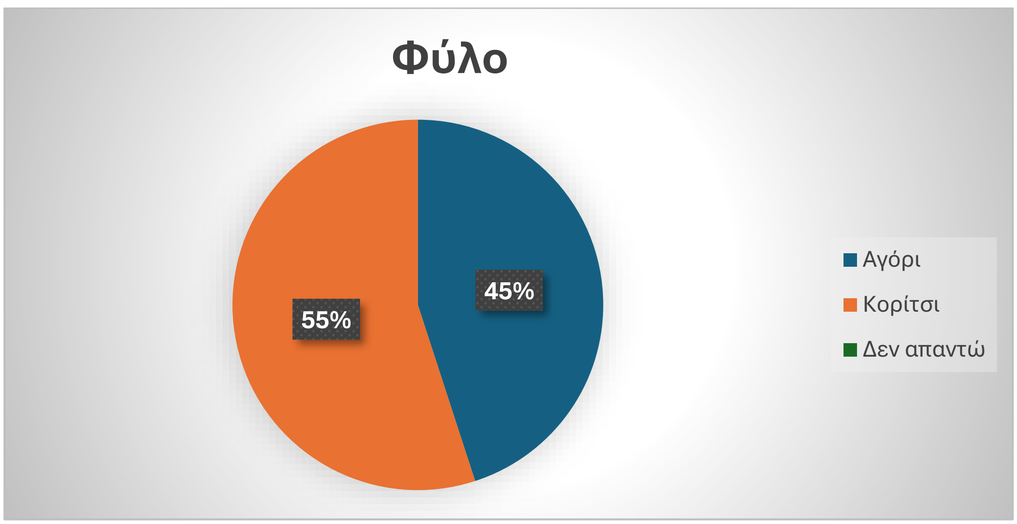
Το δείγμα των μαθητών το οποίο πήρε μέρος στην έρευνα αποτελούταν από μαθητές Α’ και Β’ Λυκείου συγκεκριμένων φροντιστηριακών μονάδων στους νομούς Θεσσαλονίκης και Χαλκιδικής. Η αντιπροσωπευτικότητα εξασφαλίστηκε, τηρουμένων των αναλογιών πληθυσμού και δείγματος, με επιλογή μαθητών και από τα δύο φύλα, από όλες τις κατευθύνσεις (θετική και θεωρητική) καθώς και από την επιλογή μαθητών κάθε γνωστικού επιπέδου, σύμφωνα με τις βαθμολογίες τους και τις αξιολογήσεις των καθηγητών τους.

Το αντίστοιχο δείγμα των καθηγητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα απαρτίζονταν από μαθηματικούς οι οποίοι δραστηριοποιούνται σε εκπαιδευτικό έργο στον δημόσιο και στον ιδιωτικό τομέα στους νομούς Θεσσαλονίκης και Χαλκιδικής. Έγινε επιλογή μαθηματικών και των δύο φύλων, μεταξύ 25 και 65 ετών, καθώς και με διαφορετικό εκπαιδευτικό υπόβαθρο [βασικό πτυχίο (bachelor), μεταπτυχιακές σπουδές (master), διδακτορικοί τίτλοι (PhD)].

4.2 Επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων των μαθητών

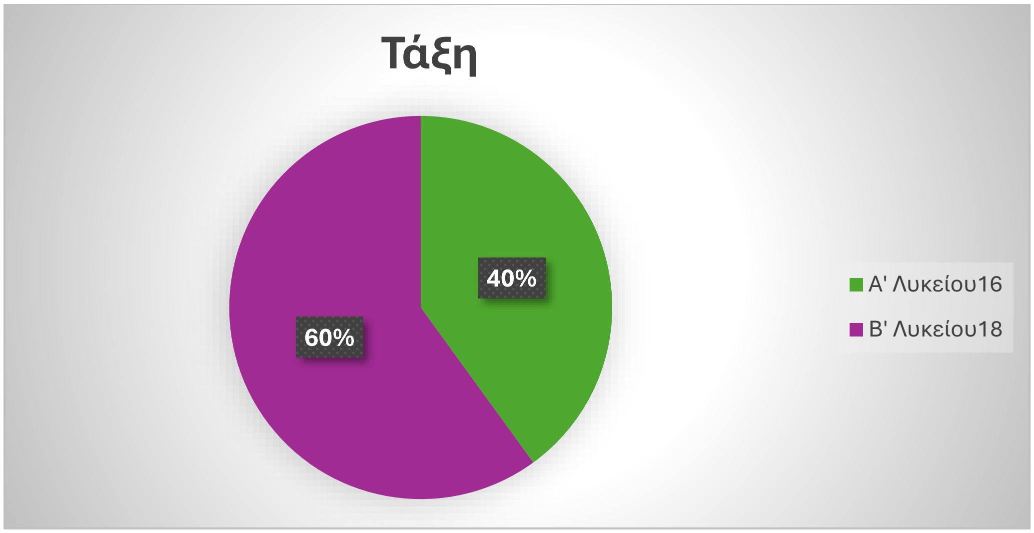
4.2.1 Φύλο / Τάξη / Μάθημα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 40 μαθητές. Από αυτούς 18 ήταν αγόρια (ποσοστό 45%) και 22 ήταν κορίτσια (ποσοστό 55%).



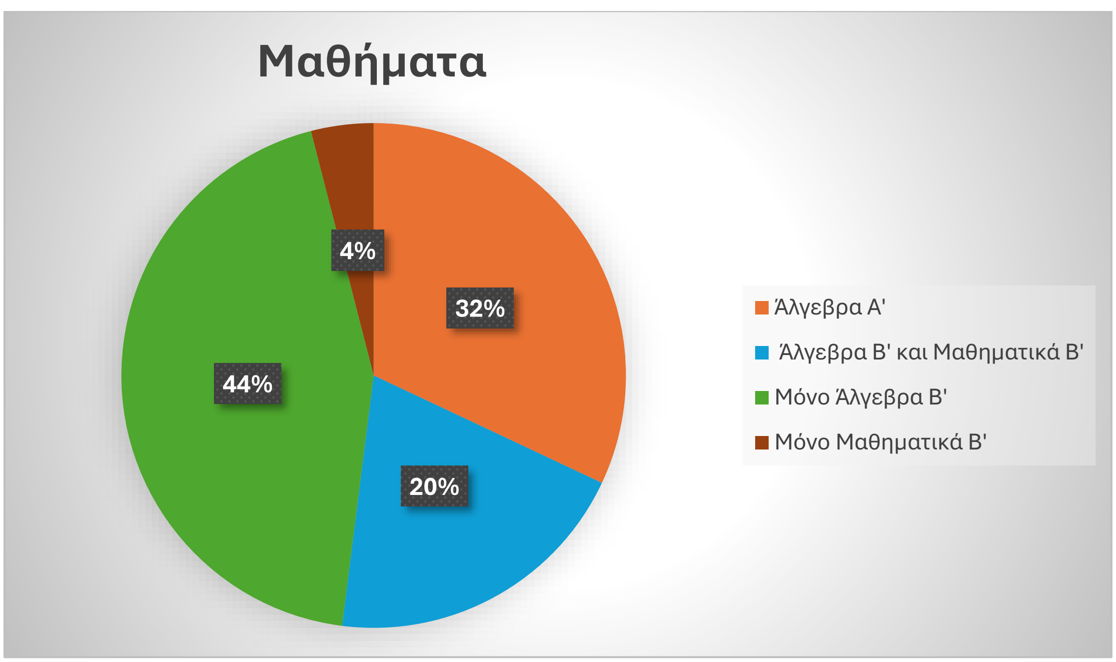
Γράφημα 4.1: Φύλο μαθητών

Από τους παραπάνω, 16 είναι μαθητές Α’ Λυκείου, ενώ 24 είναι μαθητές Β’ Λυκείου.



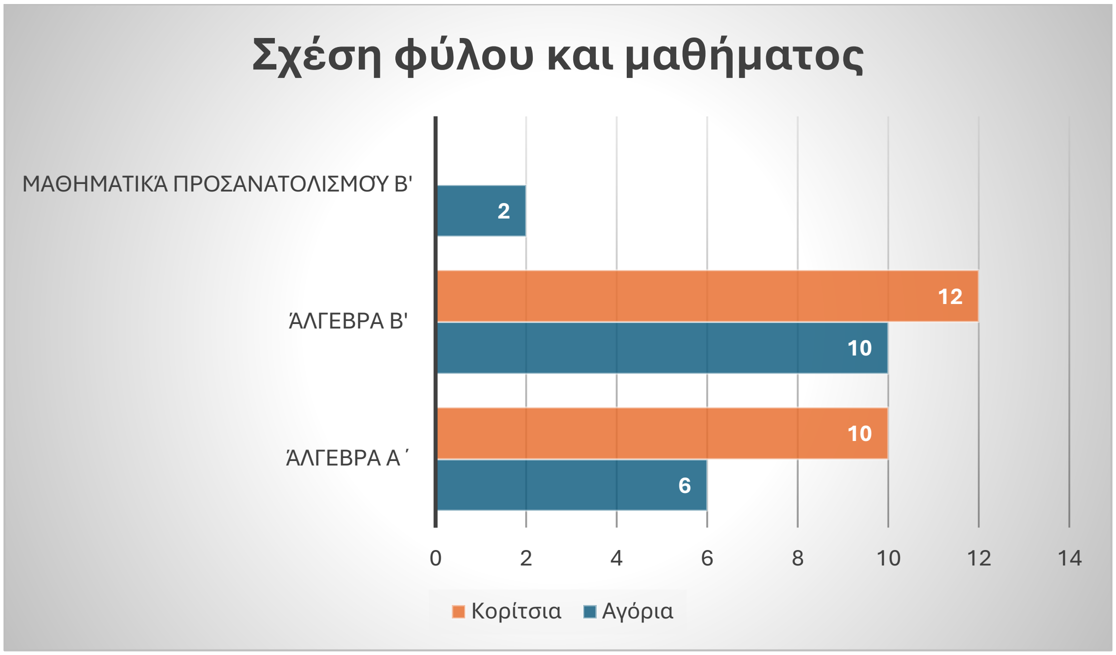
Γράφημα 4.2: Τάξη μαθητών

Επίσης, από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, 16 παρακολούθησαν το μάθημα της Άλγεβρας Α' Λυκείου, 22 παρακολούθησαν μόνο το μάθημα της Άλγεβρας Β' Λυκείου, 2 μαθητές παρακολούθησαν μόνο τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β', ενώ 10 από τους μαθητές της Β' Λυκείου παρακολούθησαν και την Άλγεβρα και τα Μαθηματικά Προσανατολισμού.



Γράφημα 4.3: Ποσοστό μαθημάτων παρακολούθησης

Συνδυαστικά η συσχέτιση φύλου και μαθήματος από το δείγμα παριστάνεται στον παρακάτω πίνακα:



Γράφημα 4.4: Σχέση φύλου και μαθήματος

4.2.2 Παρουσίαση δεδομένων μαθητών 1ης έρευνας (πριν την παράδοση μαθημάτων με το λογισμικό Mathematica)

Το παρακάτω ερωτηματολόγιο μοιράσθηκε εντός τάξης και απαντήθηκε από τους μαθητές κατά το πρώτο δεκαήμερο του Νοεμβρίου 2024.

4.2.2.1 Χρόνος ενασχόλησης με ηλεκτρονικά μέσα (Η/Υ, smartphone, tablet)

Στην πρώτη ερώτηση της έρευνας οι μαθητές κλήθηκαν να τοποθετηθούν σχετικά με τον χρόνο ενασχόλησης με κάποιο ηλεκτρονικό μέσο όπως ο ηλεκτρονικός υπολογιστής ή το έξυπνο κινητό τους τηλέφωνο. Οι επιλογές που δόθηκαν κυμαίνονταν από την απάντηση «Καθόλου» μέχρι και την απάντηση « Χρήση πάνω από 6 ώρες την ημέρα», με αρκετές ακόμα ενδιάμεσες επιλογές. Οι απαντήσεις που δόθηκαν φαίνονται στο διάγραμμα, από το οποίο προκύπτει η ευρεία χρήση ηλεκτρονικών μέσων από τους μαθητές Λυκείου για μεγάλο μέρος της ημέρας.

Γράφημα 4.5: Συχνότητα ενασχόλησης με ηλεκτρονικές συσκευές

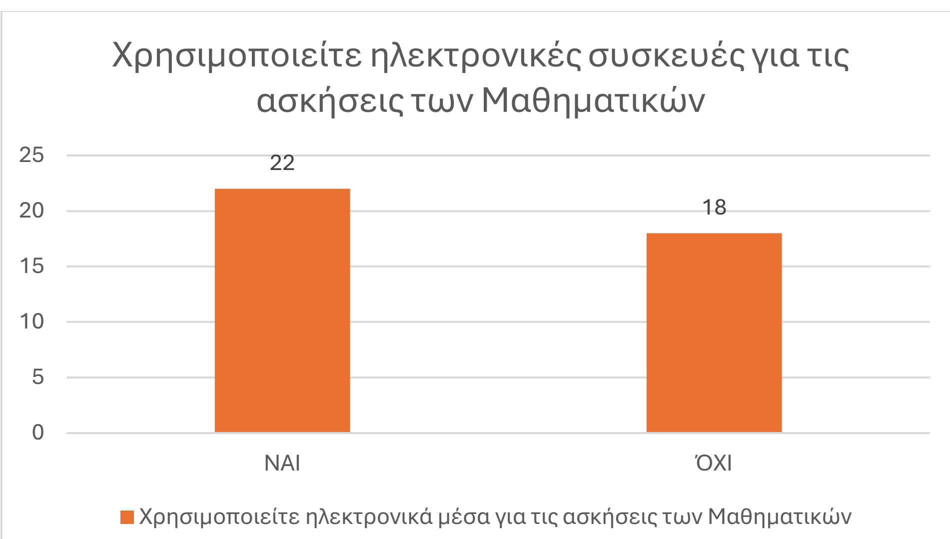
4.2.2.2 Είδος ενασχόλησης με ηλεκτρονικά μέσα

Με την ερώτηση αυτή η έρευνα θέλει να εξετάσει το περιεχόμενο χρήσης των ηλεκτρονικών μέσων από τους μαθητές. Οι απαντήσεις που δόθηκαν δίνουν ξεκάθαρη την εικόνα πως οι μαθητές καταναλώνουν τον περισσότερο χρόνο τους στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης ενώ στον αντίποδα το μικρότερο μερίδιο παίρνει η ενημέρωση, η οποία δεν αποτελεί άμεση προτεραιότητα των εφήβων.

Γράφημα 4.6: Κυριότερος λόγος χρήσης ηλεκτρονικών συσκευών

4.2.2.3 Χρήση ηλεκτρονικών μέσων στα Μαθηματικά

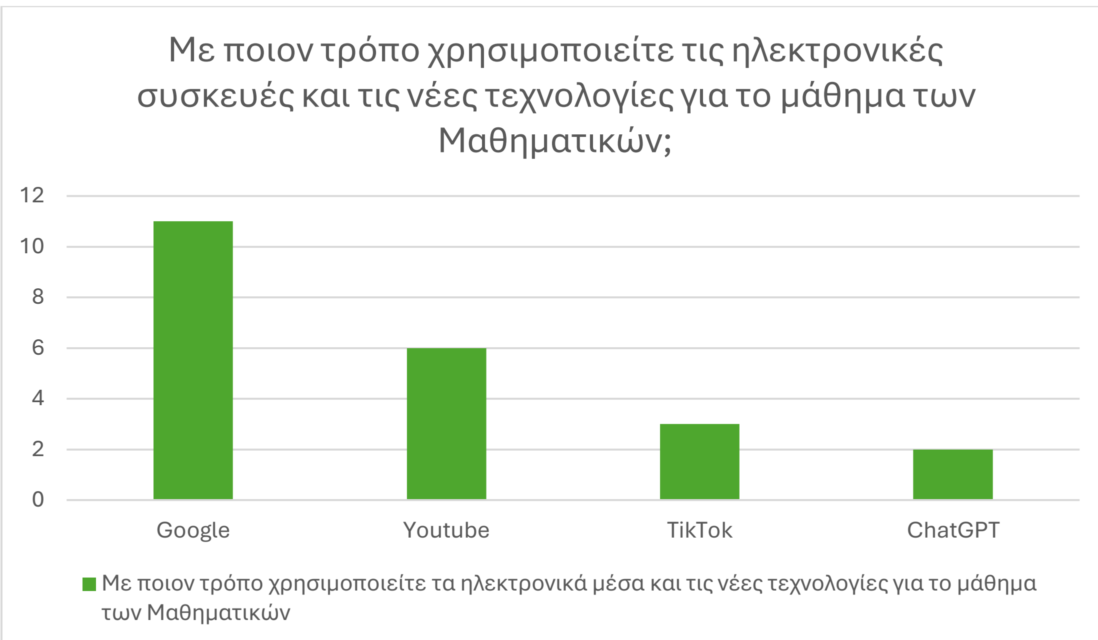
Έπειτα οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν με «Ναι» ή «Όχι» στην ερώτηση για το αν χρησιμοποιούν τον Η/Υ ή κάποιο άλλο μέσο για βοήθεια στις ασκήσεις των μαθηματικών. Εδώ οι απαντήσεις ήταν σχετικά μοιρασμένες.



Γράφημα 4.7: Χρήση ηλεκτρονικών συσκευών από τους μαθητές για τις ασκήσεις των μαθηματικών

4.2.2.4 Μέθοδοι χρήσης ηλεκτρονικών συσκευών στα Μαθηματικά

Οι μαθητές που απάντησαν καταφατικά στην προηγούμενη ερώτηση κλήθηκαν να παρουσιάσουν τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τα ηλεκτρονικά μέσα για βοήθεια στις ασκήσεις Μαθηματικών. Η έρευνα μέσω της μηχανής αναζήτησης «Google» και η προβολή αντίστοιχων βίντεο στις πλατφόρμες «YouTube» και «TikTok» ήταν η πλειοψηφία των απαντήσεων. Η χρήση της τεχνητής νοημοσύνης μέσω του «ChatGPT» έκανε την εμφάνισή της στις απαντήσεις, ίσως σε επόμενες έρευνες η απάντηση αυτή να είναι η πλειοψηφούσα. Παρατηρούμε ότι στις απαντήσεις δεν εμφανίστηκε καθόλου οποιοδήποτε αμιγώς μαθηματικό λογισμικό.

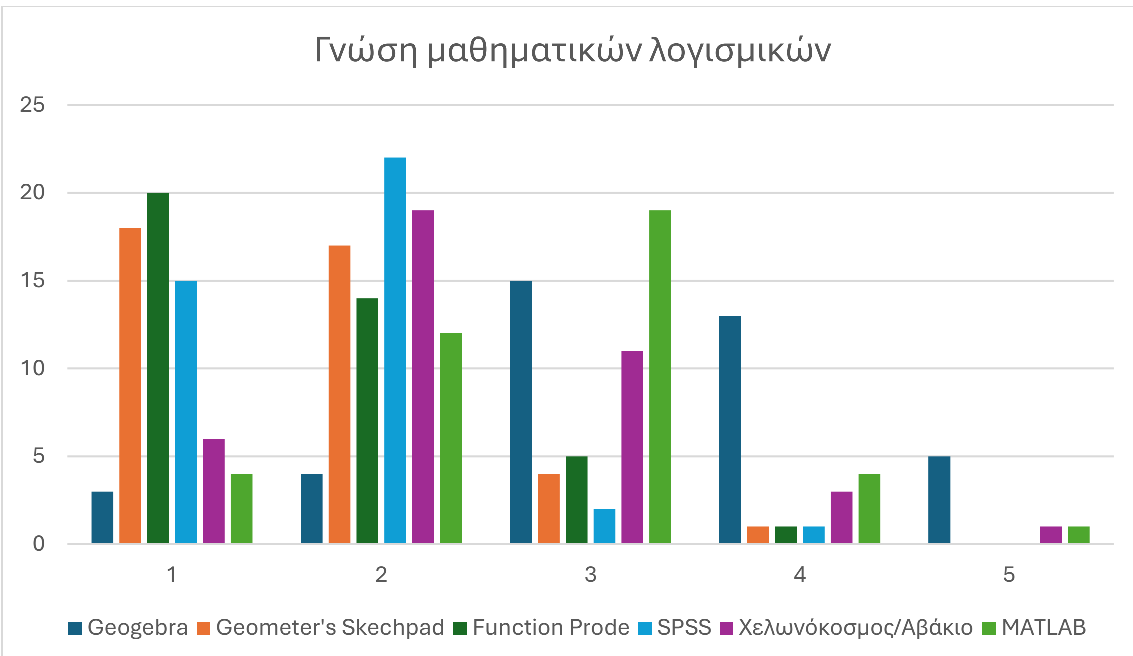


Γράφημα 4.8: Τρόπος χρήσης των νέων τεχνολογιών από τους μαθητές για το μάθημα των μαθηματικών

4.2.2.5 Γνώση μαθηματικών λογισμικών πακέτων

Στη συνέχεια η έρευνα θέλησε να μελετήσει το κατά πόσο οι μαθητές γνωρίζουν κάποια μαθηματικά λογισμικά κι αν τυχόν έχουν χρησιμοποιήσει κάποια από αυτά.

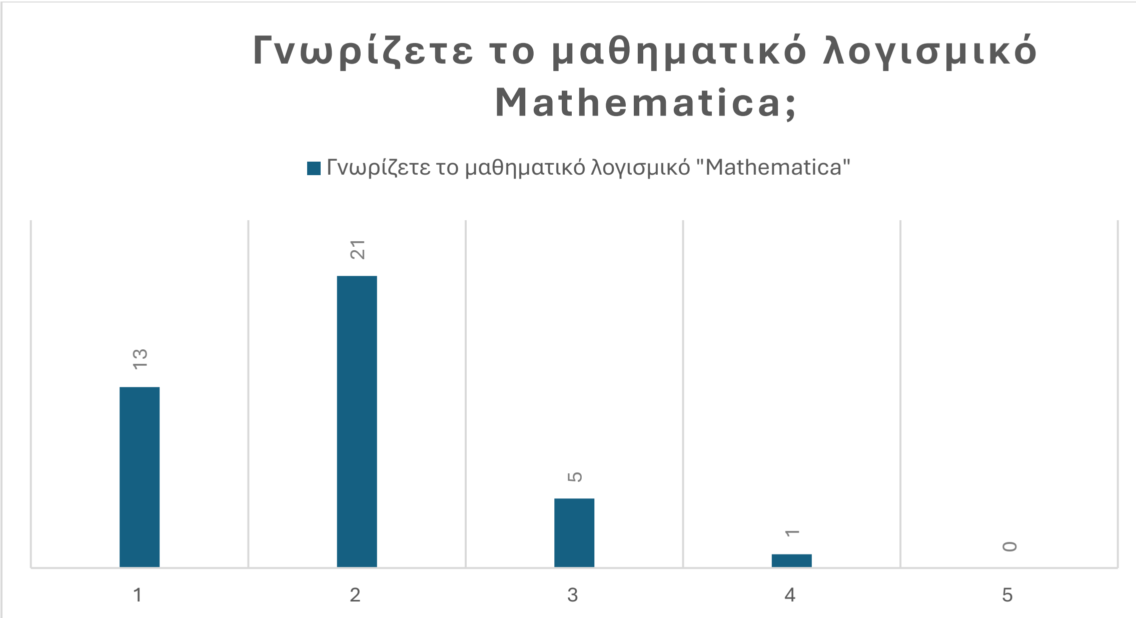
Για τον λόγο αυτό ρωτήθηκαν αρχικά αν γνωρίζουν έστω και ονομαστικά κάποια από αυτά. Οι απαντήσεις δομήθηκαν σε κλίμακα από το 1 έως το 5, όπου το 1 σημαίνει ότι δεν γνωρίζει ο ερωτώμενος καθόλου το συγκεκριμένο λογισμικό και το 5 ότι το γνωρίζει πολύ καλά και το έχει χειριστεί. Να αναφερθεί ότι το λογισμικό Mathematica που αποτελεί το κύριο μέρος αυτής της έρευνας δεν δόθηκε ως πιθανή απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Ενώ εύκολα γίνεται κατανοητό ότι το λογισμικό «GeoGebra», το οποίο χρησιμοποιείται εκτενέστερα στις σχολικές τάξεις είναι το πλέον γνώριμο στους μαθητές.



Γράφημα 4.9: Βαθμός γνώσης μαθηματικών λογισμικών από τους μαθητές

4.2.2.6 Γνώση του λογισμικού Mathematica

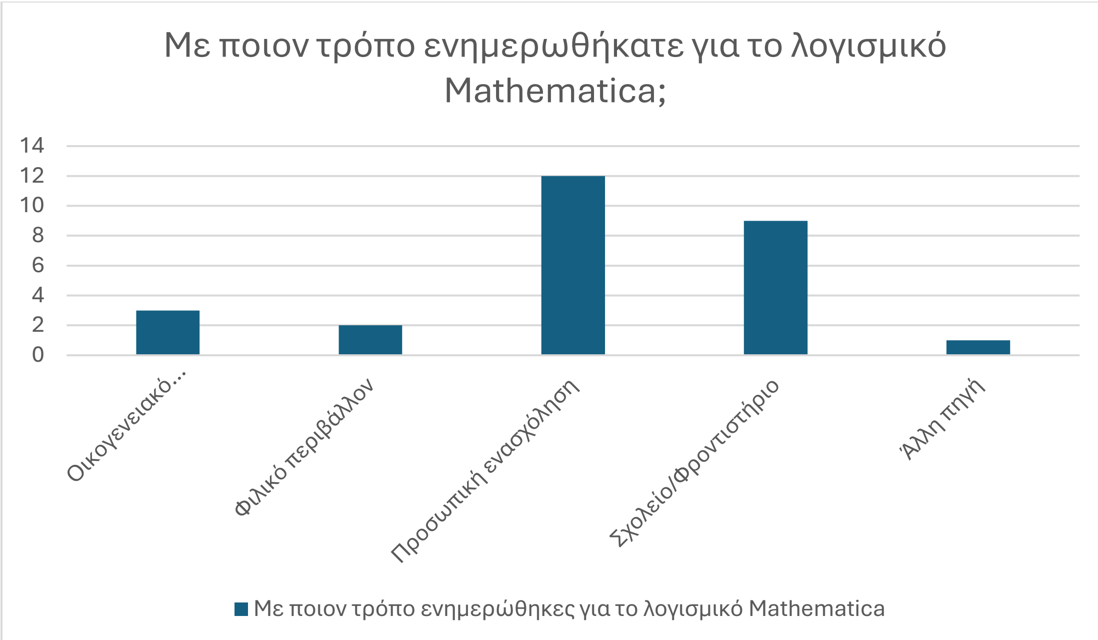
Στην ίδια κλίμακα 1 έως 5, ρωτήθηκαν οι μαθητές για το κατά πόσο έχουν γνώση του λογισμικού Wolfram Mathematica με το 1 και πάλι να σημαίνει την πλήρη άγνοια του μαθητή για το συγκεκριμένο λογισμικό και το 5 να σημαίνει πολύ καλή γνώση του. Από τις απαντήσεις συμπεραίνουμε ότι το συγκεκριμένο λογισμικό δεν έχει γίνει ευρέως γνωστό σε μαθητές λυκείου.



Γράφημα 4.10: Βαθμός γνώσης του λογισμικού Mathematica από τους μαθητές

4.2.2.7 Τρόπος απόκτησης γνώσεων για το Mathematica

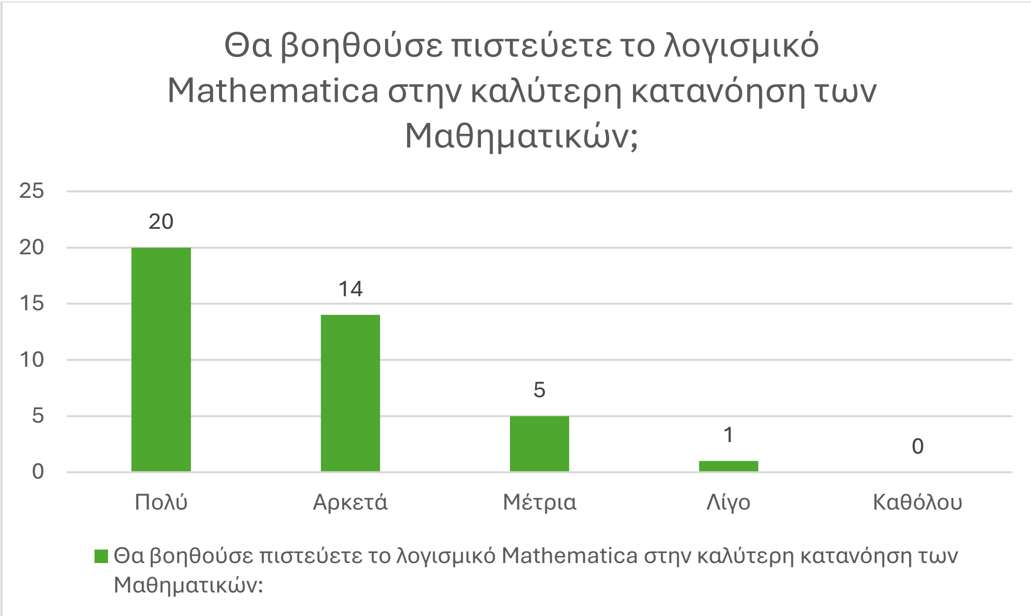
Από τους μαθητές που δεν απάντησαν το «1» στην προηγούμενη ερώτηση, η έρευνα θέλησε να εξετάσει με ποιον τρόπο ενημερώθηκαν για το λογισμικό Mathematica. Η κυριότερη πηγή αποδεικνύεται πως είναι η προσωπική ενασχόληση μέσω της πλοήγηση στοδιαδίκτυο, ενώ ακολουθεί η γνώμη κάποιου εξιδεικευμένου καθηγητή.



Γράφημα 4.11: Τρόπος απόκτησης γνώσης σχετικά με το λογισμικό Mathematica

4.2.2.8 Στάση απέναντι στη χρήση του Mathematica

Το πρώτο σκέλος της έρευνας έκλεισε με μια ερώτηση η οποία θέλησε να εξετάσει τις στάσεις των μαθητών σχετικά με την πιθανή ενσωμάτωση του λογισμικού τόσο στη μελέτη όσο και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι απαντήσεις ήταν σε μεγάλο ποσοστό θετικές, δείχνοντας πως οι νέοι επιθυμούν την ένταξη νέων τεχνολογιών και νέων μεθόδων διδασκαλίας στη μελέτη τους.



Γράφημα 4.12: Εκτίμηση των μαθητών για τη συμβολή του Mathematica στην κατανόηση των μαθηματικών

Μετά τη συμπλήρωση του παραπάνω ερωτηματολογίου από τους μαθητές (ολοκληρωμένο παρατίθεται στα «Παραρτήματα – Παράρτημα B_1» της εργασίας), την καταγραφή των απαντήσεων, την ανάλυση και την επεξεργασία τους, περατώθηκε το πρώτο στάδιο της έρευνας. Ακολούθησε η παράδοση μαθημάτων Μαθηματικών και Άλγεβρας Α΄και Β΄Λυκείου μέσα σε φροντιστηριακές τάξεις με χρήση του λογισμικού Mathematica. Οι εν λόγω παραδόσεις, οι οποίες παρουσιάστηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3 της εργασίας και μερικές υπάρχουν ακέραιες στα «Παραρτήματα - Παράρτημα Α» της έρευνας, έλαβαν χώρα σε φροντιστηριακές τάξεις στους νομούς Θεσσαλονίκης και Χαλκιδικής κατά τους μήνες Νοέμβριο - Δεκέμβριο 2024 και σε συνολικό διάστημα τεσσάρων εβδομάδων.

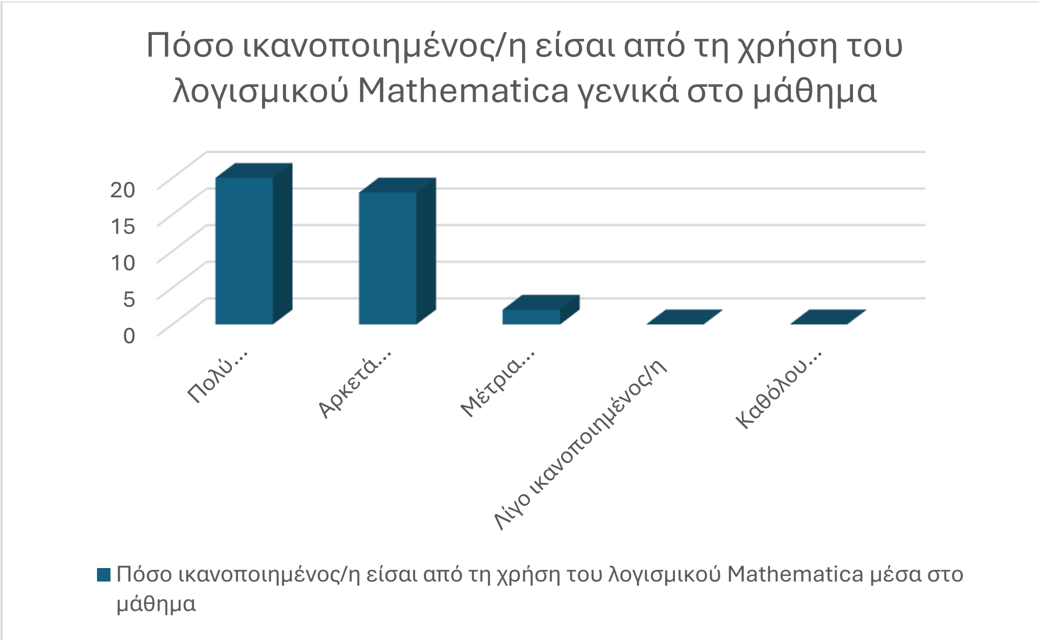
Στη συνέχεια η έρευνα πέρασε στο επόμενό της στάδιο με τον διαμοιρασμό και τη συμπλήρωση από τους μαθητές του δεύτερου ερωτηματολογίου (ολόκληρο το ερωτηματολόγιο παρατίθεται στα «Παραρτήματα – Παράρτημα B_2») , το οποίο αφορούσε τις στάσεις των μαθητών σχετικά με το λογισμικό, εφόσον πλέον είχαν παρακολουθήσει τις παραδόσεις μαθημάτων με τη χρήση του Mathematica και είχαν γνώση για τις εφαρμογές και τις δυνατότητες που δίνει.

4.2.3 Παρουσίαση δεδομένων μαθητών 2ης έρευνας (μετά την παράδοση μαθημάτων με χρήση του Mathematica)

Το δείγμα της συγκεκριμένης έρευνας είναι το ίδιο με την προηγούμενη, επομένως οι στατιστικές αναλύσεις που αφορούν το φύλο, την τάξη και τα μαθήματα που παρακολούθησε το δείγμα είναι αυτές που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Το ερωτηματολόγιο μοιράσθηκε και συμπληρώθηκε με τη λήξη των παραδόσεων με το Mathematica, το δεύτερο δεκαήμερο του Δεκεμβρίου 2024.

4.2.3.1 Γνώμη για τη χρήση του λογισμικού Mathematica στο μάθημα

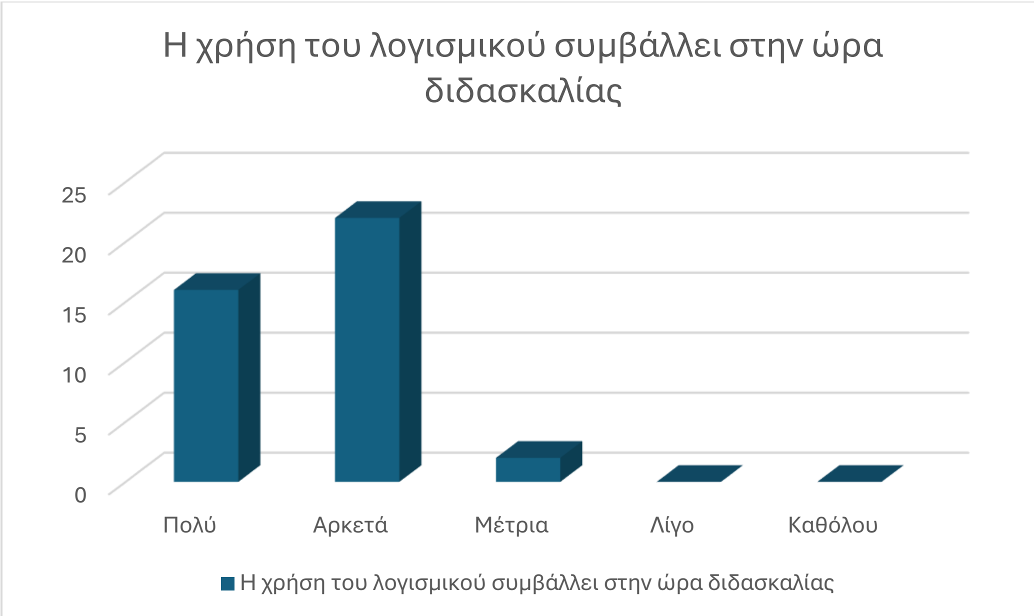
Στην πρώτη ερώτηση του δεύτερου ερωτηματολογίου οι μαθητές κλήθηκαν να αξιολογήσουν την χρησιμοποίηση του λογισμικού γενικά στο μάθημά τους. Αφού σημειωθεί ότι τονίστηκε προς τους μαθητές η ανάγκη αντικειμενικότητας, καθώς πολύ από αυτούς θα έτειναν να αξιολογήσουν θετικά για λόγους και μόνο συστολής απέναντι στον ερευνητή, οι απαντήσεις αξιολογούνται άκρως θετικές ως προς τη χρήση του λογισμικού.



Γράφημα 4.13: Βαθμός ικανοποίησης των μαθητών από το λογισμικό Mathematica μέσα στο μάθημα

4.2.3.2 Γνώμη για τον βαθμό συμβολής του Mathematica στην ώρα διδασκαλίας του μαθήματος

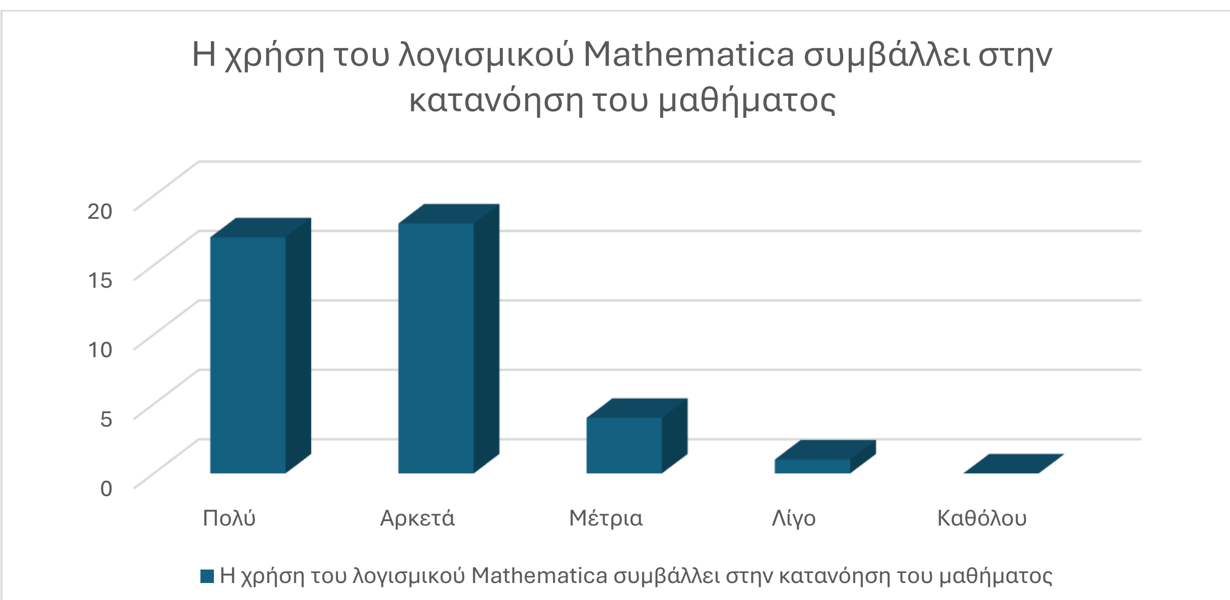
Στη συνέχεια οι μαθητές ρωτήθηκαν για τον βαθμό συμβολής του λογισμικού ειδικότερα κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Και σε αυτή την ερώτηση οι απαντήσεις είναι κατά τη συντριπτική πλειοψηφία τους θετικές.



Γράφημα 4.14: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην ώρα της διδασκαλίας

4.2.3.3 Γνώμη για τη συμβολή του Mathematica στην κατανόηση του μαθήματος

Αντίστοιχα ήταν τα αποτελέσματα και στο ερώτημα σχετικά με τον βαθμό στον οποίο συμβάλλει το λογισμικό όσον αφορά την καλύτερη και πιο εύκολη κατανόηση του μαθήματος από τους μαθητές.

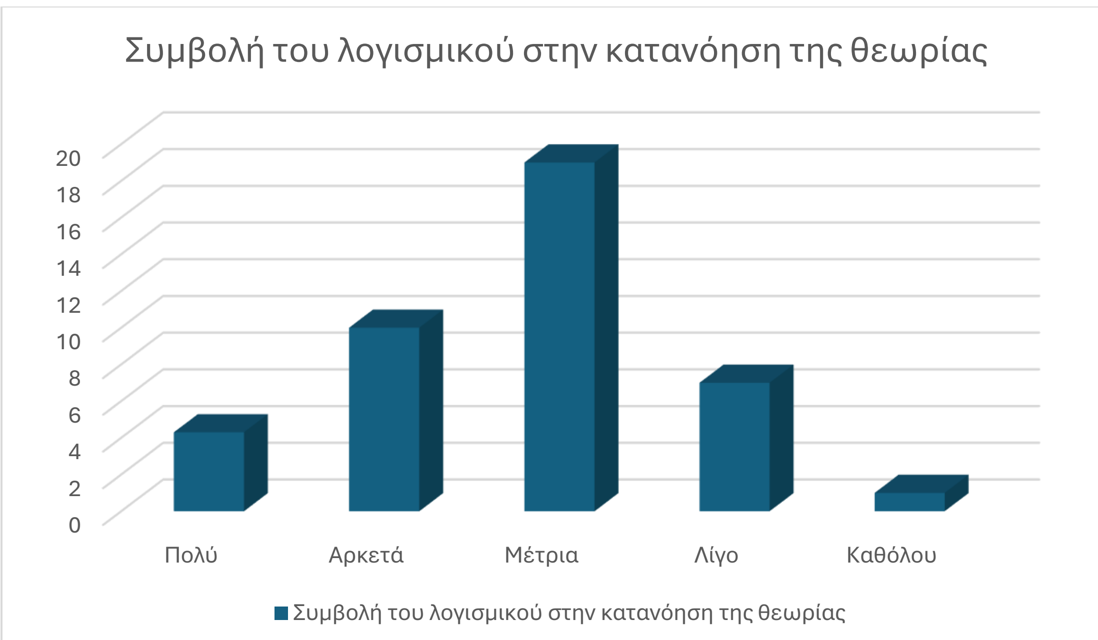


Γράφημα 4.15: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην κατανόηση του μαθήματος

Έπειτα οι ερωτήσεις έγιναν πιο συγκεκριμένες και αφορούσαν ξεχωριστά κομμάτια της μαθηματικής διδασκαλίας.

4.2.3.4 Γνώμη για συμβολή του Mathematica στην κατανόηση της θεωρίας

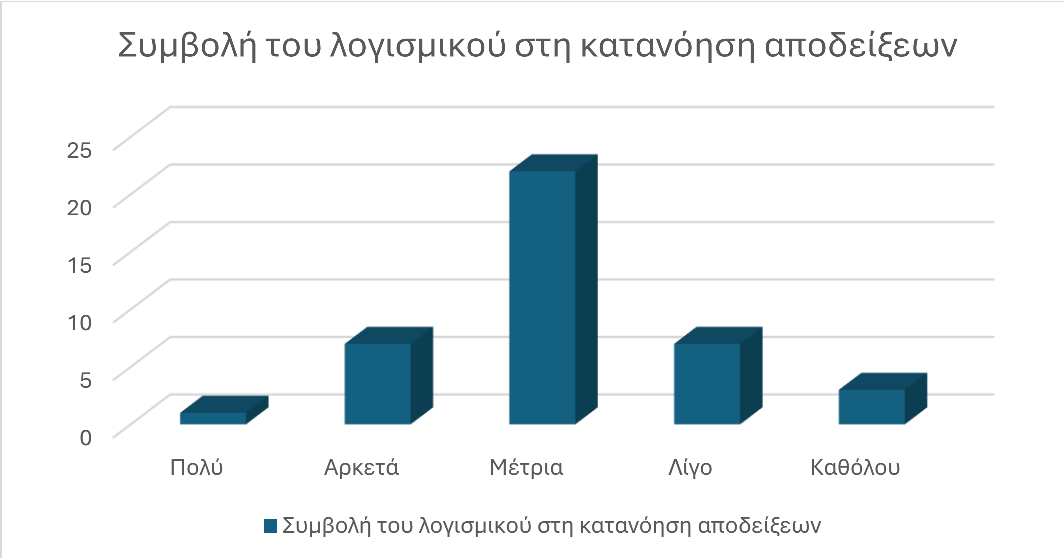
Στη συγκεκριμένη ερώτηση διερευνήθηκε το κατά πόσο η χρήση του λογισμικού Mathematica βοήθησε στην πιο εύκολη κατανόηση της θεωρίας. Σε αυτή την περίπτωση υπήρξε μια μικρή διαφοροποίηση καθώς οι απαντήσεις ήταν μοιρασμένες. Ίσως οι μαθητές έλαβαν ως κριτήριο την παράμετρο, όχι τόσο της κατανόησης της θεωρίας, όσο την αποστήθισή της στην οποία το λογισμικό δεν έχει ιδιαίτερη συμμετοχή.



Γράφημα 4.16: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην κατανόηση της θεωρίας

4.2.3.5 Συμβολή του λογισμικού στη κατανόηση αποδείξεων

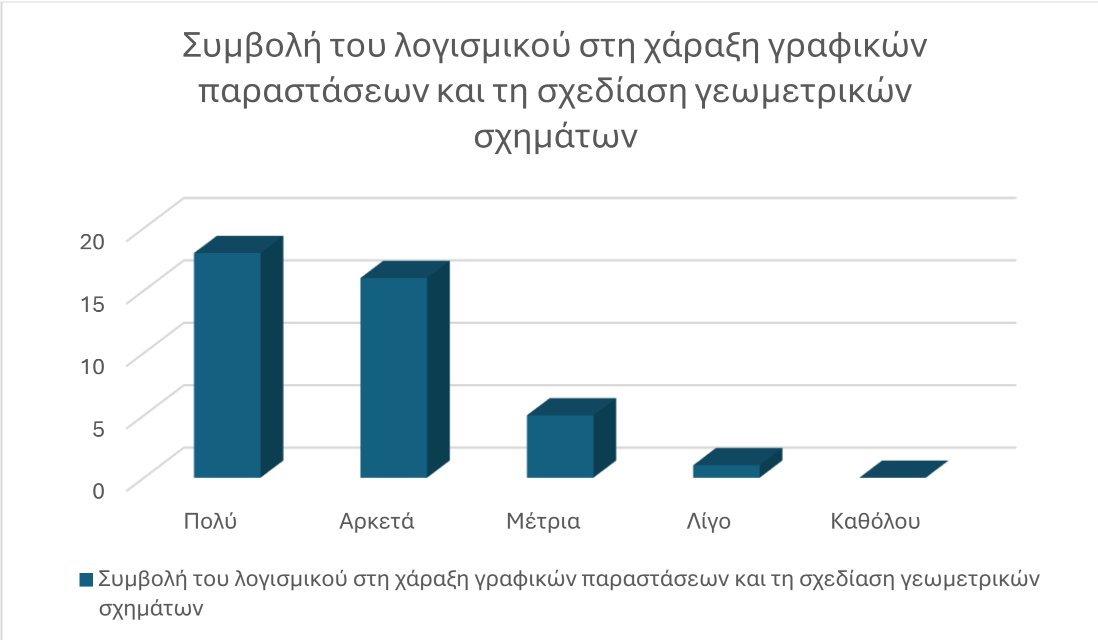
Αντίστοιχα με την προηγούμενη ερώτηση, έτσι και στην ερώτηση για τη συμβολή του λογισμικού στην κατανόηση αποδείξεων οι απαντήσεις είχαν σημείο συσσώρευσης στο κέντρο και παρέπεμπαν σε «καμπάνα» κανονικής κατανομής.



Γράφημα 4.17: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην κατανόηση των αποδείξεων

4.2.3.6 Συμβολή του λογισμικού στη χάραξη γραφικών παραστάσεων και τη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων

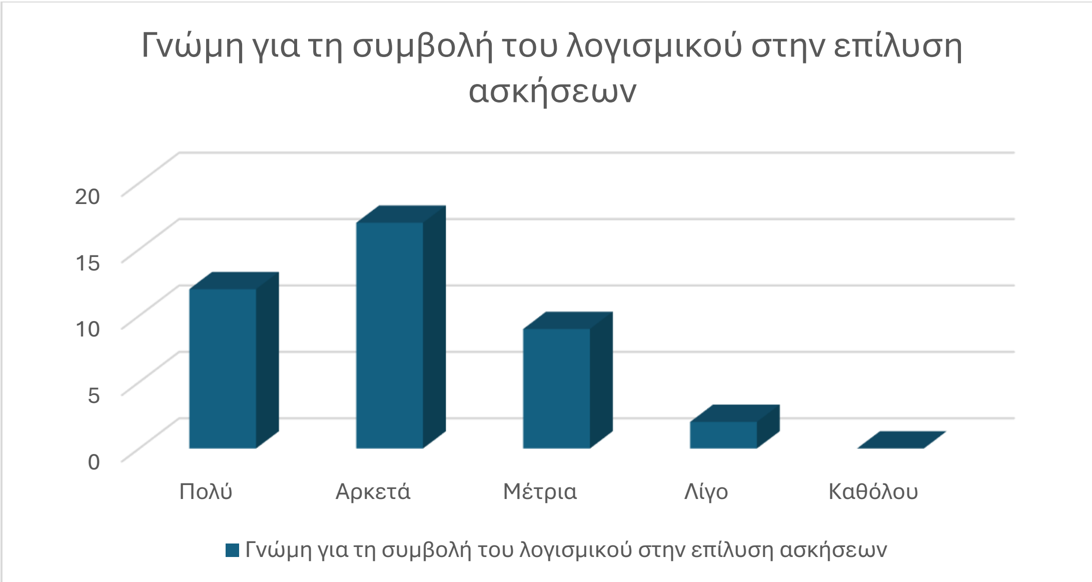
Οι δυνατότητες που δίνει το λογισμικό για σχεδίαση γραφικών παραστάσεων και γεωμετρικών σχημάτων όσο απαιτητικά κι αν είναι αυτά, καθώς και η πληθώρα επιλογών σε χρώματα και εφαρμογές σχεδίασης καθιστούν, καθώς φαίνεται, την διαδικασία ιδιαίτερα εντυπωσιακή, αλλά και απλή στα μάτια των μαθητών. Τα αποτελέσματα στην αντίστοιχη ερώτηση συνηγορούν προς αυτό το συμπέρασμα.



Γράφημα 4.18: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην σχεδίαση γραφικών παραστάσεων

4.2.3.7 Γνώμη για τη συμβολή του λογισμικού στην επίλυση ασκήσεων

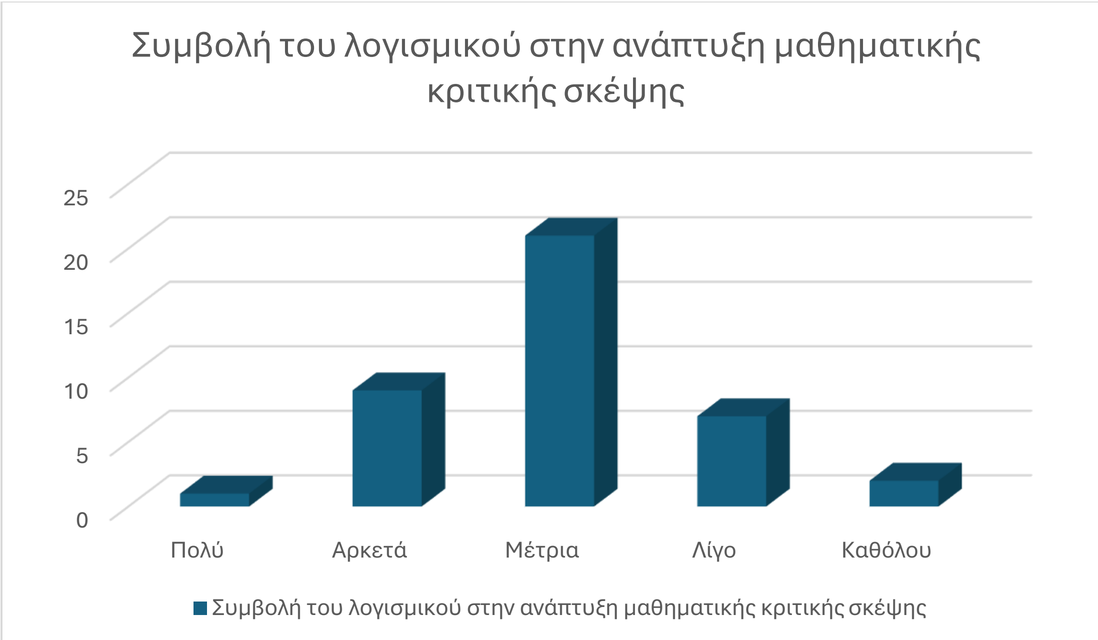
Στις περισσότερες των περιπτώσεων οι ασκήσεις, κατά την παράδοση των μαθημάτων, λύνονταν και με τον συμβατικό τρόπο επίλυσης, χειρόγραφα δηλαδή με χρήση του «text» ή του πίνακα, αλλά και με τις αντίστοιχες εντολές του Mathematica. Συνεπώς οι μαθητές εύκολα αντιλαμβάνονταν την ειδοποιό διαφορά τόσο σε ταχύτητα όσο και ευκολία, γεγονός που αποκρυσταλλώθηκε στις απαντήσεις τους στην αντίστοιχη ερώτηση.



Γράφημα 4.19: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην επίλυση ασκήσεων

4.2.3.8 Γνώμη για τη συμβολή του λογισμικού στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης γύρω από τα κεφάλαια που διδάχθηκαν

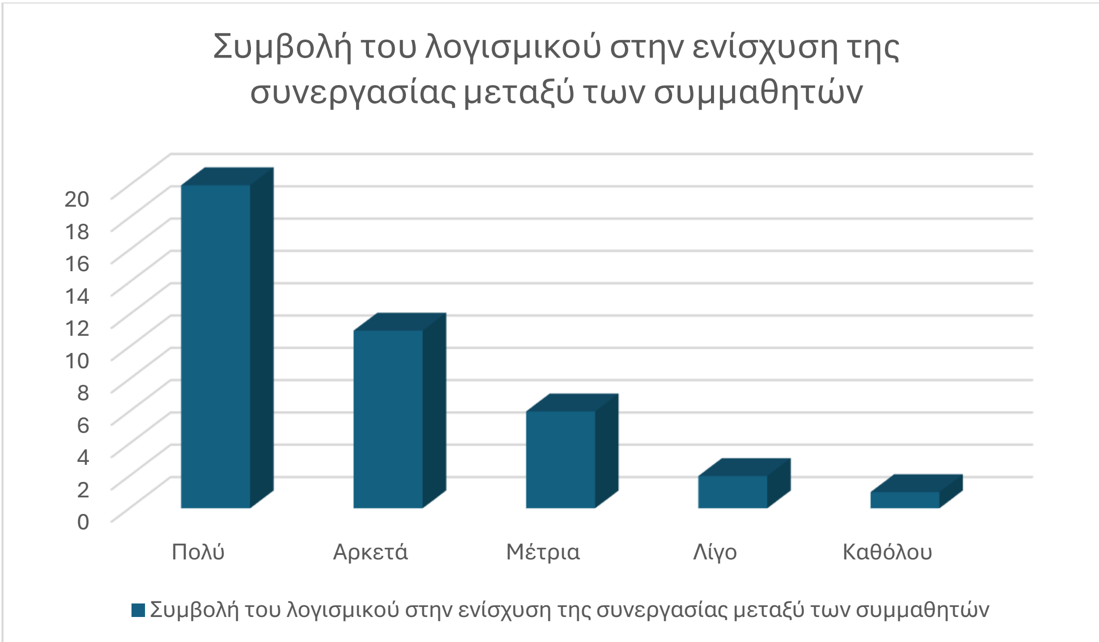
Σημαντικό στοιχείο στην επιστήμη των μαθηματικών είναι οι επαγωγικοί και οι παραγωγικοί συλλογισμοί που πρέπει να γίνονται από οποιονδήποτε ασχολείται με αυτά. Η επόμενη ερώτηση επομένως θέλησε να διερευνήσει κατά πόσο το λογισμικό αυξάνει την κριτική και δημιουργική σκέψη των μαθητών πάνω σε διάφορα κεφάλαια των μαθηματικών. Αναμφισβήτητα τέτοιου είδους συμπεράσματα απαιτούν μεγαλύτερο χρόνο επαφής και ζύμωσης με το λογισμικό και μπορούν να μελετηθούν σε μελλοντικές έρευνες. Ωστόσο η εικόνα που προκύπτει στη συγκεκριμένη έρευνα δείχνει να έχει τα χαρακτηριστικά μιας κανονικής κατανομής.



Γράφημα 4.20: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην ανάπτυξη μαθηματικής κριτικής σκέψης

4.2.3.9 Συμβολή του λογισμικού στην ενίσχυση της συνεργασίας μεταξύ των συμμαθητών

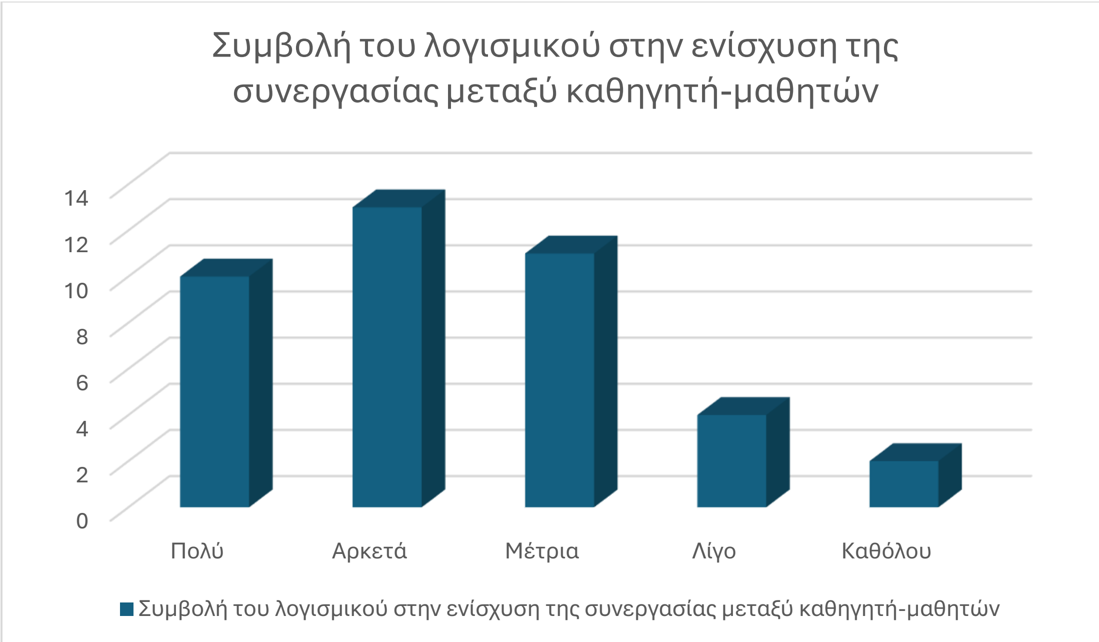
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της ερώτησης που έχει να κάνει με τη συνεργασία των συμμαθητών κατά τη χρήση του λογισμικού. Οι απαντήσεις δίνουν ένα παράπλευρο στοιχείο το οποίο πρέπει να ληφθεί υπόψη, καθώς φαίνεται να ενισχύεται σημαντικά η διάδραση μεταξύ των μαθητών εξαιτίας της χρήσης του λογισμικού.



Γράφημα 4.21: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην ενίσχυση της συνεργασίας μεταξύ των συμμαθητών

4.2.3.10 Συμβολή του λογισμικού στην ενίσχυση συνεργασίας μεταξύ καθηγητή-μαθητών

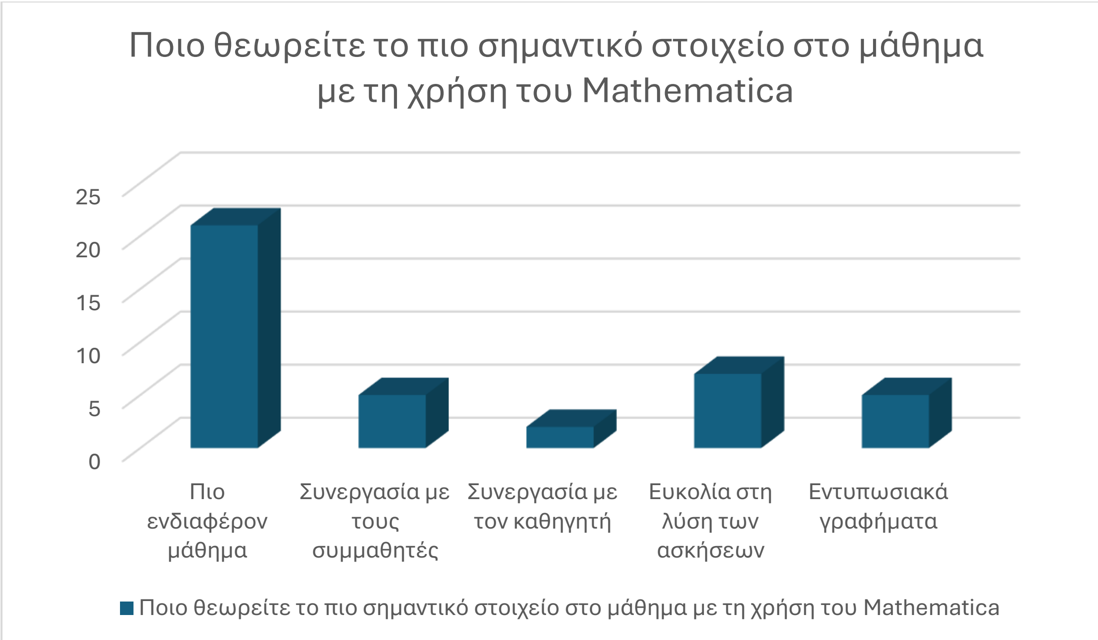
Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη ερώτηση, οι απαντήσεις και στο ερώτημα που αφορά τη συνεργασία καθηγητή - μαθητών δείχνουν τη σημαντικότητα του λογισμικού και σε αυτό το θέμα. Από τα αποτελέσματα προκύπτει μια σαφέστατη ενίσχυση της συνεργασίας μεταξύ των δύο πλευρών, συμπεραίνοντας έτσι, από τα δύο τελευταία ερωτήματα, πως η ανάπτυξη νέων τεχνολογιών και η ορθή τους χρήση μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να βελτιώσει τις ανθρώπινες σχέσεις και συνεργασίες κι όχι μόνο το αντίθετο.



Γράφημα 4.22: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στην ενίσχυση της συνεργασίας μεταξύ μαθητών-εκπαιδευτικού

4.2.3.11 Γνώμη των μαθητών για το πιο σημαντικό στοιχείο στο μάθημα με χρήση του λογισμικού Mathematica

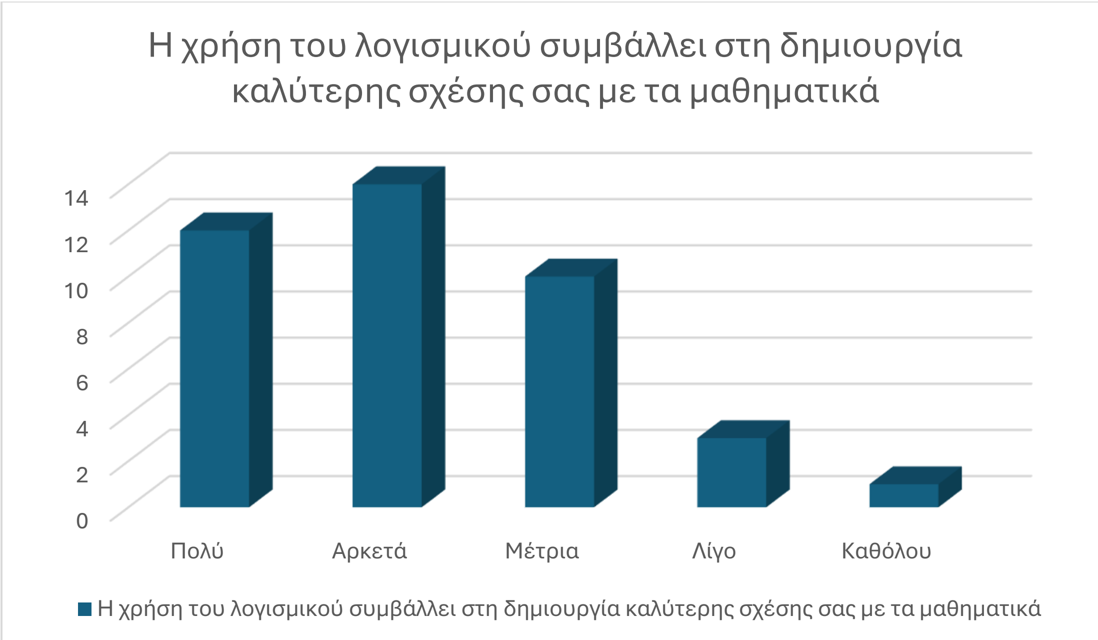
Στη συνέχεια του ερωτηματολογίου οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν για την πιο σημαντική ωφέλεια που εισέπραξαν κατά τις παραδόσεις μαθημάτων με το Mathematica. Η συντριπτική πλειοψηφία των συμμετεχόντων δήλωσε ότι το μάθημα γίνεται πιο ενδιαφέρον, υπήρξαν ωστόσο απαντήσεις μαθητών και σε όλες τις άλλες επιλογές. Οι μαθητές, μέσω αυτού του ερωτήματος, δείχνουν τον δρόμο για το πώς θα πρέπει να γίνεται το μάθημα των μαθηματικών τα επόμενα χρόνια ώστε να τραβάει την προσοχή και τη προσήλωση των παιδιών μέσω της ομαλής ενσωμάτωσης νέων τεχνολογιών στο μάθημα.



Γράφημα 4.23: Γνώμη των μαθητών σχετικά με το πιο σημαντικό στοιχείο που προσδίδει το λογισμικό Mathematica στο μάθημα

4.2.3.12 Συμβολή της χρήσης του λογισμικού Mathematica στη δημιουργία καλύτερης σχέσης με τα μαθηματικά

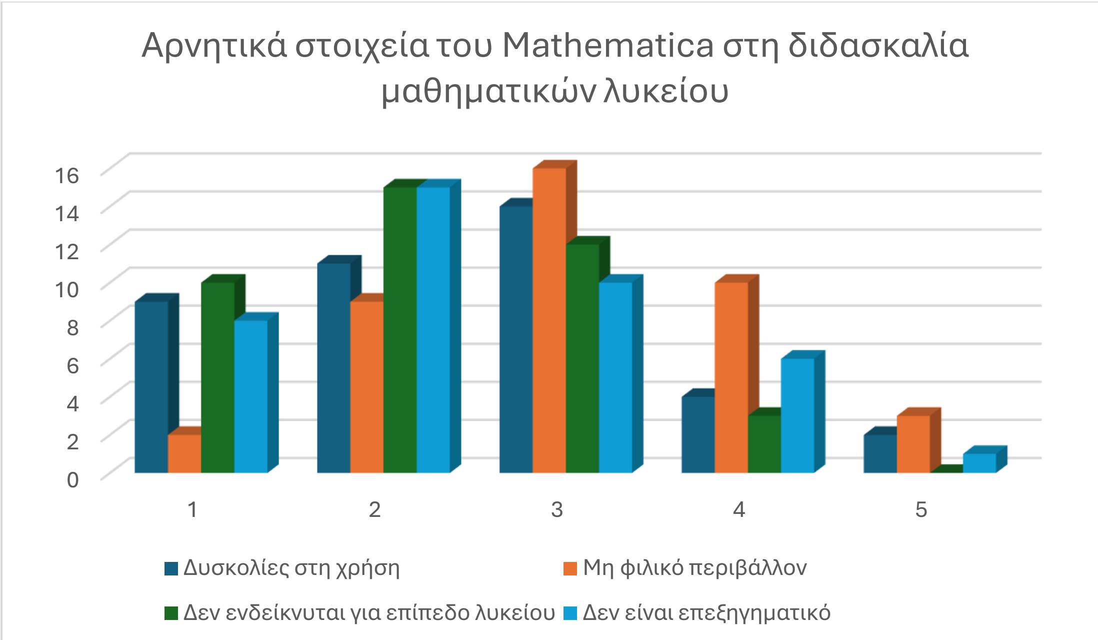
Πολύ σημαντικά αποτελέσματα, που δίνουν και την μεγάλη εικόνα της έρευνας, προκύπτουν με την ερώτηση που σχετίζεται με την ανάπτυξη καλύτερων σχέσεων των μαθητών με τα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η σχέση αυτή δύναται να βελτιωθεί σημαντικά μέσω της συστηματικής χρήσης του λογισμικού.



Γράφημα 4.24: Βαθμός συμβολής του λογισμικού Mathematica στη δημιουργία καλύτερης σχέσης με τα μαθηματικά

4.2.3.13 Αρνητικά στοιχεία του λογισμικού Mathematica στη διδασκαλία των μαθηματικών

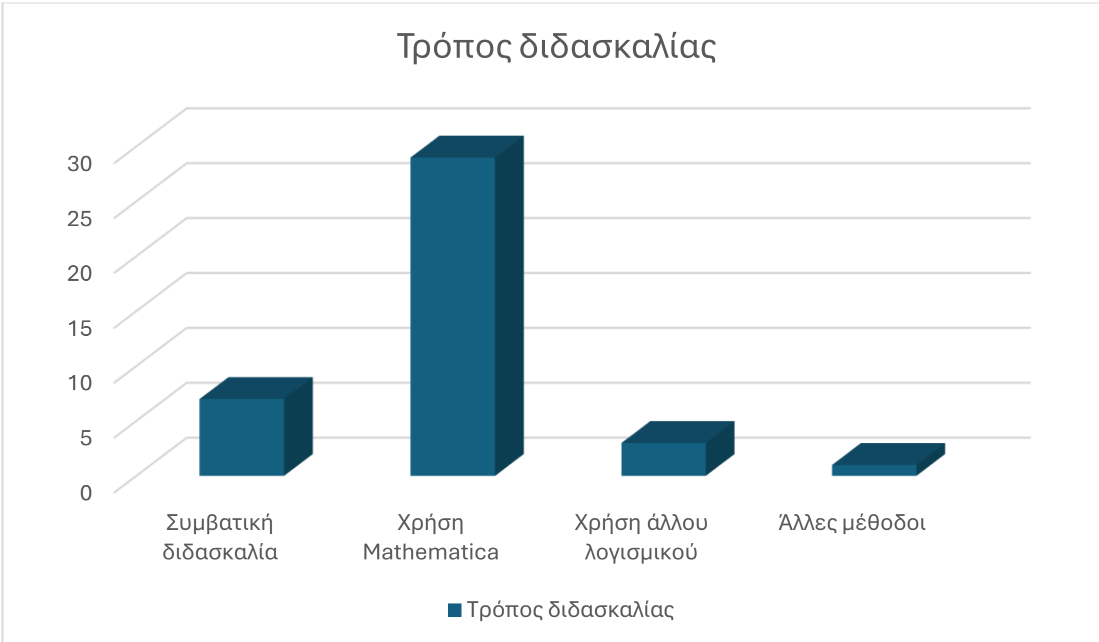
Στην προτελευταία ερώτηση, η έρευνα θέλησε να εντοπίσει τα αρνητικά στοιχεία που βρίσκουν οι μαθητές σχετικά στο λογισμικό και τη χρήση του μέσα στην τάξη. Για τον λόγο αυτό στη συγκεκριμένη ερώτηση δόθηκε η δυνατότητα αξιολόγησης των απαντήσεων σε κλίμακα από 1 έως 5, με το 1 να σημαίνει «Καθόλου αρνητικό» ενώ το 5 ερμηνεύεται ως «Εξόχως αρνητικό». Η πλειοψηφία των μαθητών στάθηκε στο περιβάλλον του λογισμικού, το οποίο δεν κρίθηκε ως ιδιαίτερα ελκυστικό και δευτερευόντως στη δυσκολία που είχαν στη σύνταξη κάποιων εντολών, όταν τους ζητήθηκε να χειριστούν το Mathematica. Λιγότεροι ήταν οι μαθητές που εξέφρασαν επιφυλάξεις σχετικά με το κατά πόσο το λογισμικό ενδείκνυται για το λυκειακό επίπεδο και πόσο επεξηγηματικό είναι όσον αφορά τα αποτελέσματα που δίνουν οι εκάστοτε εντολές του.



Γράφημα 4.25: Γνώμη των μαθητών σχετικά με τα αρνητικά στοιχεία του λογισμικού Mathematica

4.2.3.14 Παρακολούθηση διδασκαλίας με τον συμβατικό τρόπο παράδοσης, με χρήση λογισμικού Mathematica ή με χρήση κάποιου άλλου λογισμικού πακέτου

Το ερευνητικό κομμάτι σχετικά με τις στάσεις των μαθητών γύρω από το λογισμικό Mathematica ολοκληρώνεται με την ερώτηση για το κατά πόσο οι συμμετέχοντες μαθητές θα επέλεγαν το λογισμικό για την περαιτέρω διεξαγωγή των σπουδών τους ή κάποια άλλη μορφή διδασκαλίας. Η συντριπτική πλειοψηφία επέλεξε τη συνέχιση της διδασκαλίας με το λογισμικό, γεγονός που καταδεικνύει τη θέληση των μαθητών για συνεχή ενσωμάτωση νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία με ενίσχυση των διαδραστικών μεθόδων διδασκαλίας. Ασφαλώς στα συμπεράσματα του συγκεκριμένου αποτελέσματος πρέπει να ληφθεί υπόψη και η παράμετρος της συναισθηματικής απάντησης, καθώς οι μαθητές ενδεχομένως να θεωρούν υποχρέωση την επιλογή του λογισμικού έναντι των υπόλοιπων απαντήσεων.

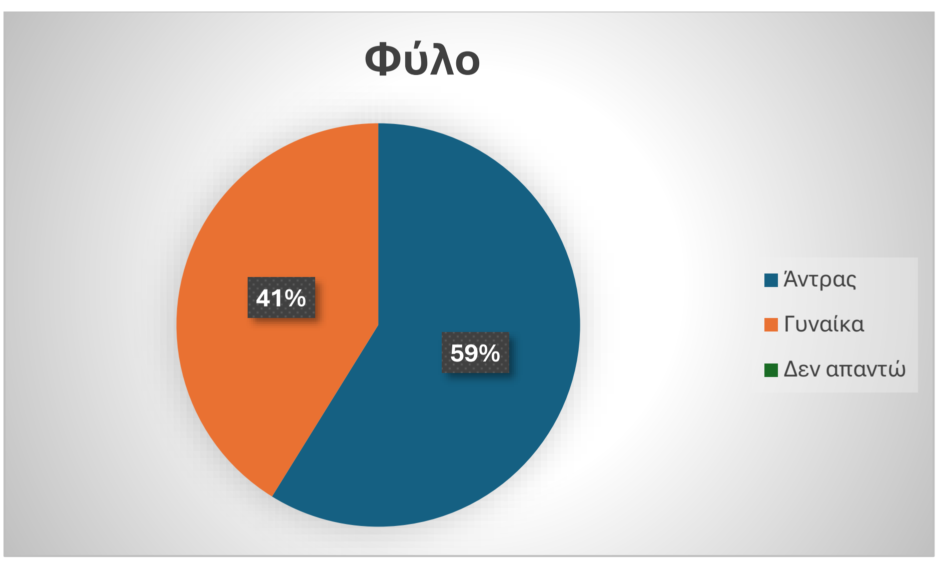


Γράφημα 4.26: Επιλογή τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών από τους μαθητές

4.3 Επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων των καθηγητών

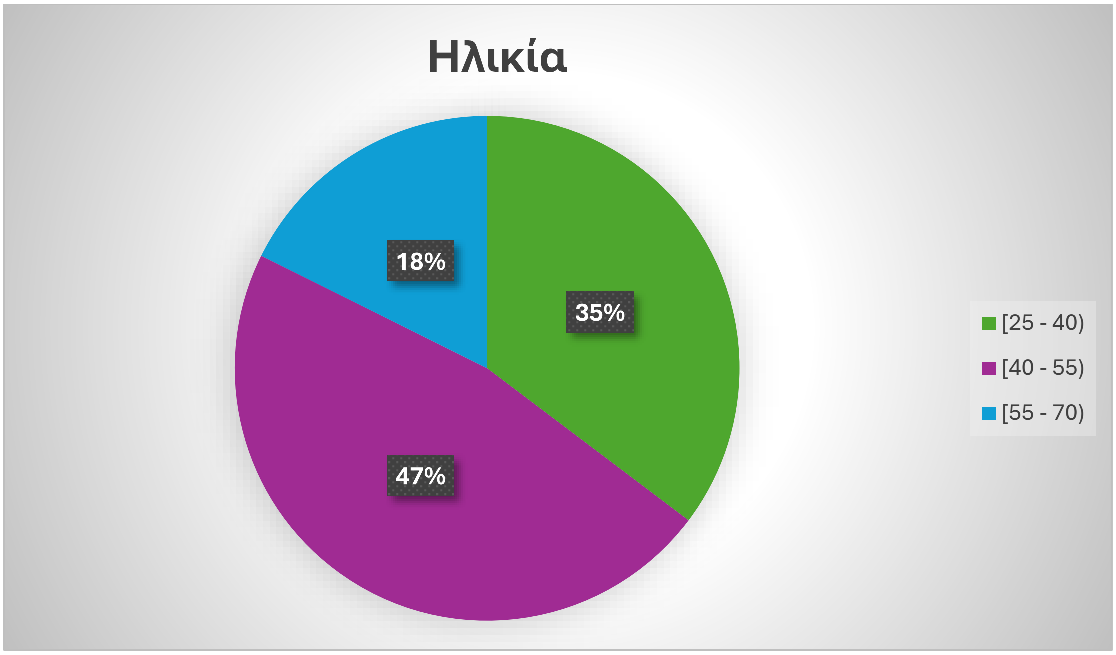
4.3.1 Φύλο/ Ηλικία/Εκπαίδευση

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 17 καθηγητές και καθηγήτριες μαθηματικών. Από αυτούς οι 10 ήταν άντρες και οι 7 γυναίκες.



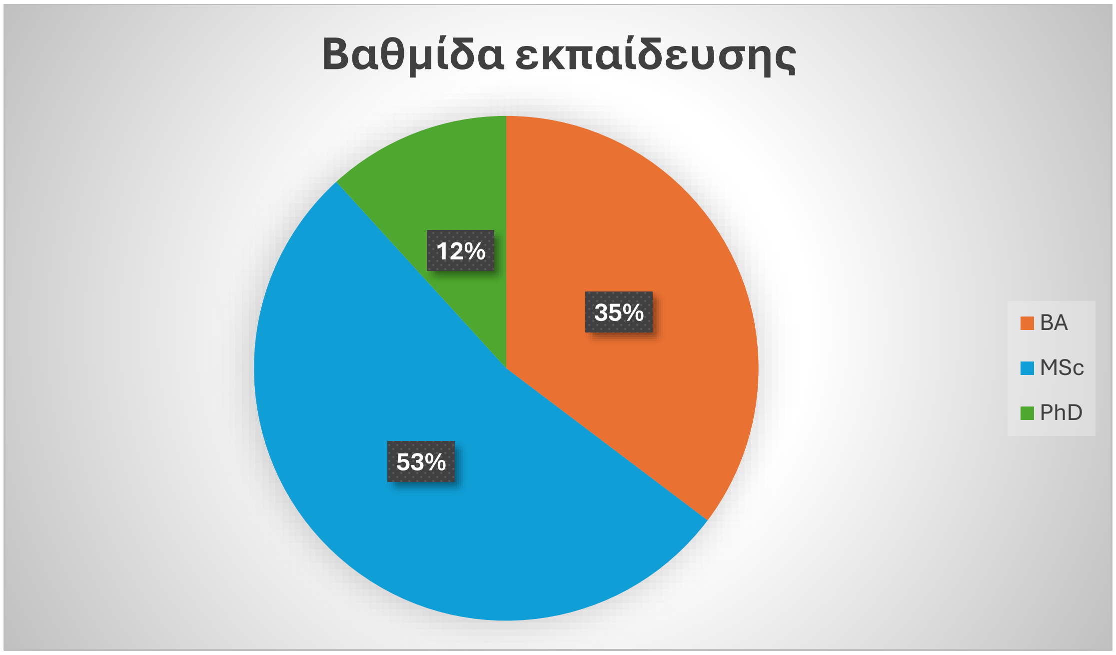
Γράφημα 4.27: Φύλο εκπαιδευτικών

Ηλικιακά το δείγμα χωρίστηκε σε κλάσεις δεκαπενταετίας, με 6 ερωτηθέντες να βρίσκονται στο διάστημα από 25 έως 40 ετών, 8 στο διάστημα 40 έως 55 ετών και 3 καθηγητές είναι ηλικίας μεταξύ των 55 και 70 ετών.



Γράφημα 4.28: Ηλικία εκπαιδευτικών

Η αντιπροσωπευτικότητα της έρευνας επέβαλλε την παρουσία όλων των βαθμίδων πανεπιστημιακής εκπαίδευσης στο δείγμα. Συνεπώς από τους 17 ερωτηθέντες καθηγητές οι 6 διαθέτουν βασικό πτυχίο μαθηματικών (επίπεδο Bachelor), 9 είναι κάτοχοι κάποιου μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών (επίπεδο Master), ενώ 2 από αυτούς είναι διδάκτορες μαθηματικών (επίπεδο PhD).



Γράφημα 4.29: Βαθμίδα εκπαίδευσης των καθηγητών

4.3.2 Παρουσίαση δεδομένων καθηγητών

Το ερωτηματολόγιο που θα παρουσιαστεί παρακάτω μοιράστηκε στους καθηγητές μαθηματικών κατά το πρώτο δεκαήμερο του Νοεμβρίου 2024, με χρήση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου.

4.3.2.1 Χρήση μαθηματικών λογισμικών για την προετοιμασία μαθήματος

Στην πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου, το οποίο βρίσκεται στα «Παραρτήματα – Παράρτημα Β3», οι ερωτηθέντες κλήθηκαν να απαντήσουν κατά πόσο χρησιμοποιούν λογισμικά μαθηματικών για να προετοιμάσουν τα μαθήματά τους, διάφορα διαγράμματα, τις ασκήσεις κτλ. Οι απαντήσεις δείχνουν ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθηματικών κάνει χρήση μαθηματικών πακέτων κατά την προετοιμασία του μαθήματος.

Γράφημα 4.30: Βαθμός χρήσης λογισμικών από του εκπαιδευτικούς για την προετοιμασία μαθήματος

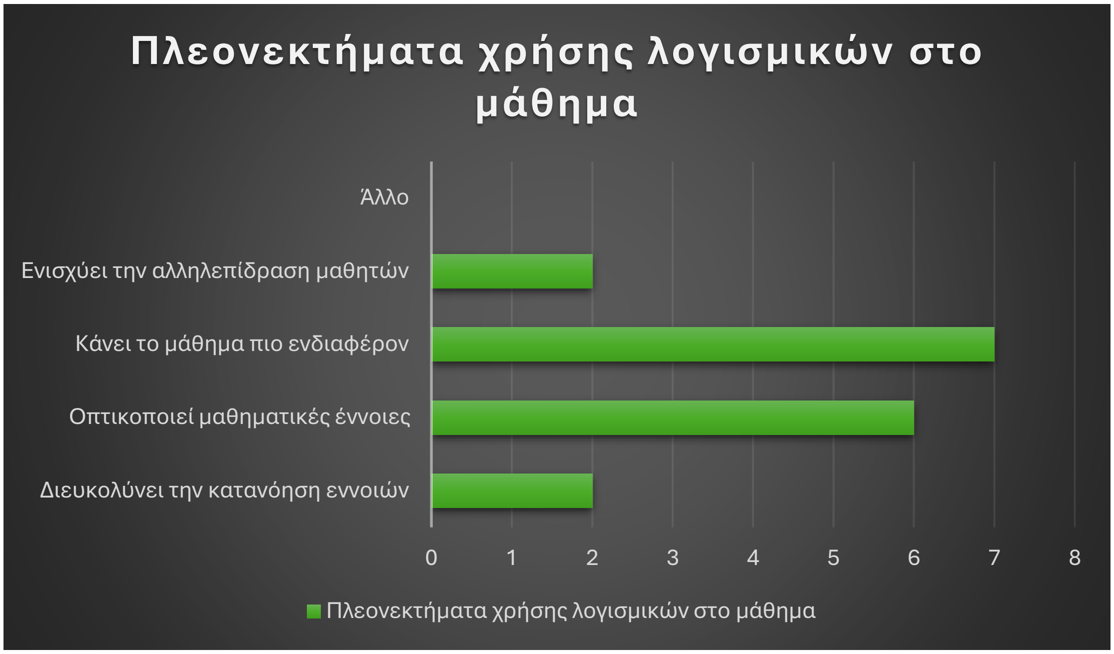
4.3.2.2 Χρήση μαθηματικών λογισμικών στη διδασκαλία

Μικρές διαφοροποιήσεις, συγκριτικά με το προηγούμενο ερώτημα, είχαν οι απαντήσεις που δόθηκαν στο ερώτημα το οποίο αφορούσε τη χρησιμοποίηση λογισμικών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσα στη τάξη. Λιγότεροι είναι οι καθηγητές που κάνουν χρήση λογισμικών μέσα στην τάξη, συγκριτικά με αυτούς που τα χρησιμοποιούν για την προετοιμασία μαθημάτων. Αυτή η διαφοροποίηση ίσως σε ένα βαθμό να οφείλεται στην παράμετρο του χρόνου και στην πίεση της μεγάλης ύλης των μαθημάτων που εκ των πραγμάτων μπαίνει ως προτεραιότητα στον προγραμματισμό ενός καθηγητή.

Γράφημα 4.31: Βαθμός χρήσης λογισμικών από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία

4.3.2.3 Πλεονεκτήματα στη χρήση μαθηματικών λογισμικών στη διδασκαλία

Έπειτα οι ερωτηθέντες απάντησαν σχετικά με τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η χρήση λογισμικών κατά τη διδασκαλία. Εδώ σχεδόν όλες οι απαντήσεις είχαν να κάνουν με την οπτικοποίηση των μαθηματικών που πετυχαίνεται μέσω του λογισμικού, καθώς και η ελκυστικότητα του μαθήματος που δίνει αυτή ακριβώς η οπτικοποίηση. Σε δεύτερο πλάνο έρχονται οι απαντήσεις για την αλληλεπίδραση και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών που ενισχύονται λόγω της χρήσης λογισμικών.



Γράφημα 4.32: Γνώμη εκπαιδευτικών σχετικά με τα πλεονεκτήματα της χρήσης λογισμικών στο μάθημα

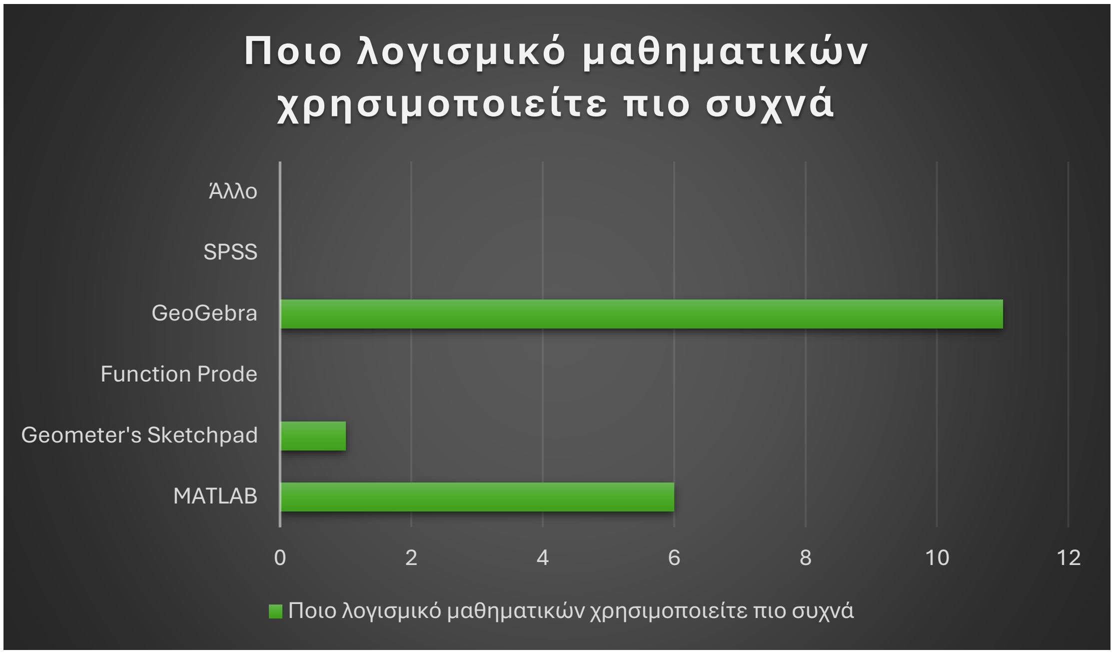
4.3.2.4 Προκλήσεις/δυσκολίες κατά τη χρήση λογισμικών μαθηματικών στην τάξη

Σε αντιδιαστολή, αλλά και συμπληρωματικά της προηγούμενης ερώτησης, τώρα η έρευνα θέλησε να διερευνήσει τα μειονεκτήματα που υπάρχουν στη διδασκαλία των μαθηματικών με τη βοήθεια κάποιου λογισμικού. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν σχετικά μοιρασμένες, με το ζήτημα του χρόνου να τίθεται ως πρωτεύον πρόβλημα.

Γράφημα 4.33: Γνώμη εκπαιδευτικών σχετικά με τις προκλήσεις της χρήσης λογισμικών κατά τη διδασκαλία

4.3.2.5 Συχνότερη χρήση μαθηματικών λογισμικών

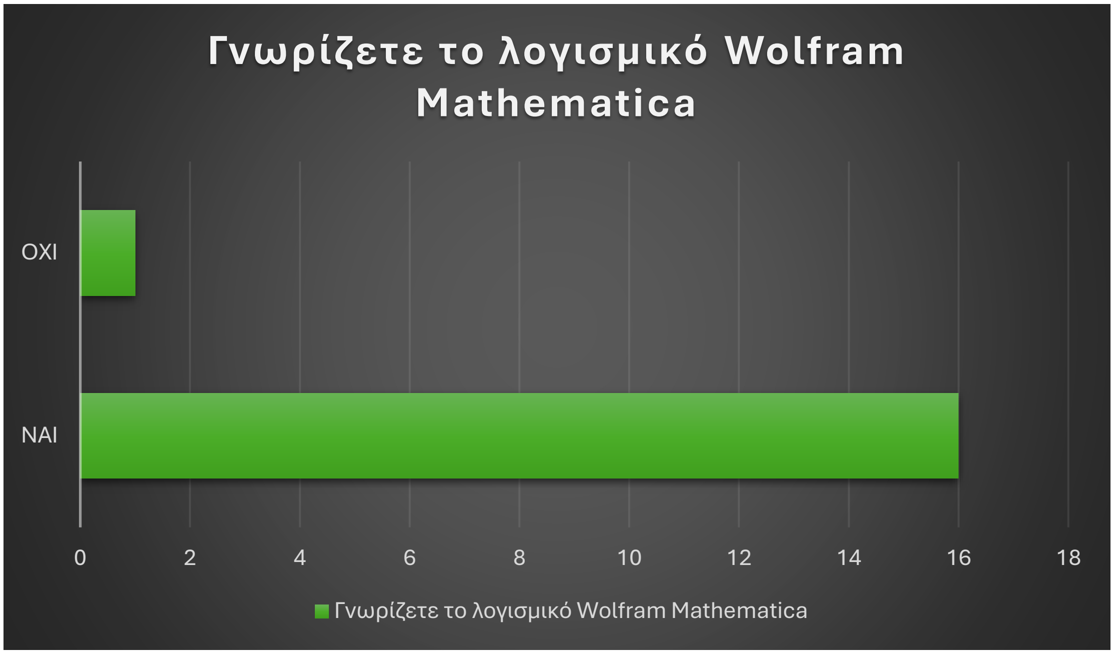
Σε αυτό το σημείο η έρευνα θέλησε να εντοπίσει τις στάσεις και τις προτιμήσεις των καθηγητών σχετικά με το λογισμικό που προτιμούν για την προετοιμασία των μαθημάτων ή των εργασιών και κατά την ώρα διδασκαλίας. Τεχνηέντως αφέθηκε το Wolfram Mathematica εκτός επιλογών ώστε να ερευνηθεί αυτόνομο στη συνέχεια του ερωτηματολογίου. Οι απαντήσεις δείχνουν μια σαφή τάση των καθηγητών στα λογισμικά GeoGebra και MATLAB τα οποία προτείνει και το υπουργείο Παιδείας ως εργαλεία χρήσης στις σχολικές αίθουσες.



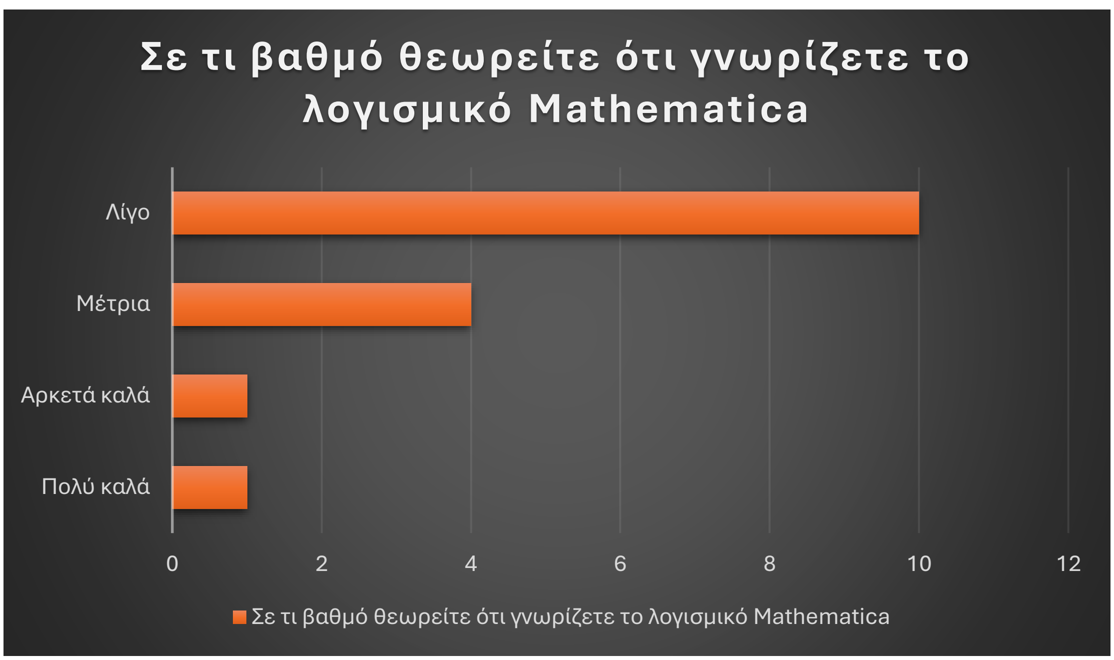
Γράφημα 4.34: Προτίμηση μαθηματικού λογισμικού από τους εκπαιδευτικούς

4.3.2.6 Γνώση και χρήση του λογισμικού Wolfram Mathematica

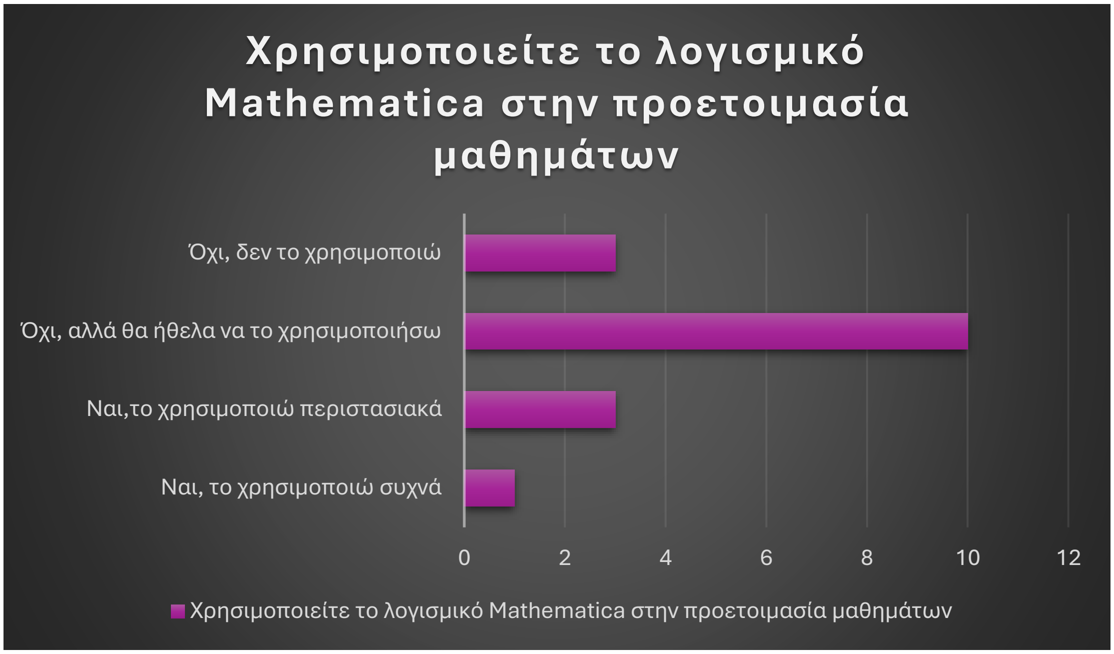
Θέλοντας πλέον η έρευνα να εστιάσει στο Wolfram Mathematica, ρώτησε τους μαθηματικούς αν γνωρίζουν το λογισμικό κι αν ναι, σε ποιο βαθμό. Σχεδόν στην ολότητά τους οι ερωτηθέντες γνώριζαν το λογισμικό, μικρό ωστόσο ποσοστό έχει καλή γνώση του και ακόμα μικρότερο κάνει συστηματική χρήση του. Ωστόσο μέσω των απαντήσεων συμπεραίνουμε ότι μεγάλο μέρος των καθηγητών θα ήταν πρόθυμο να εντάξει στον τρόπο διδασκαλίας του το Mathematica κι ας μην το έχει κάνει έως τώρα.



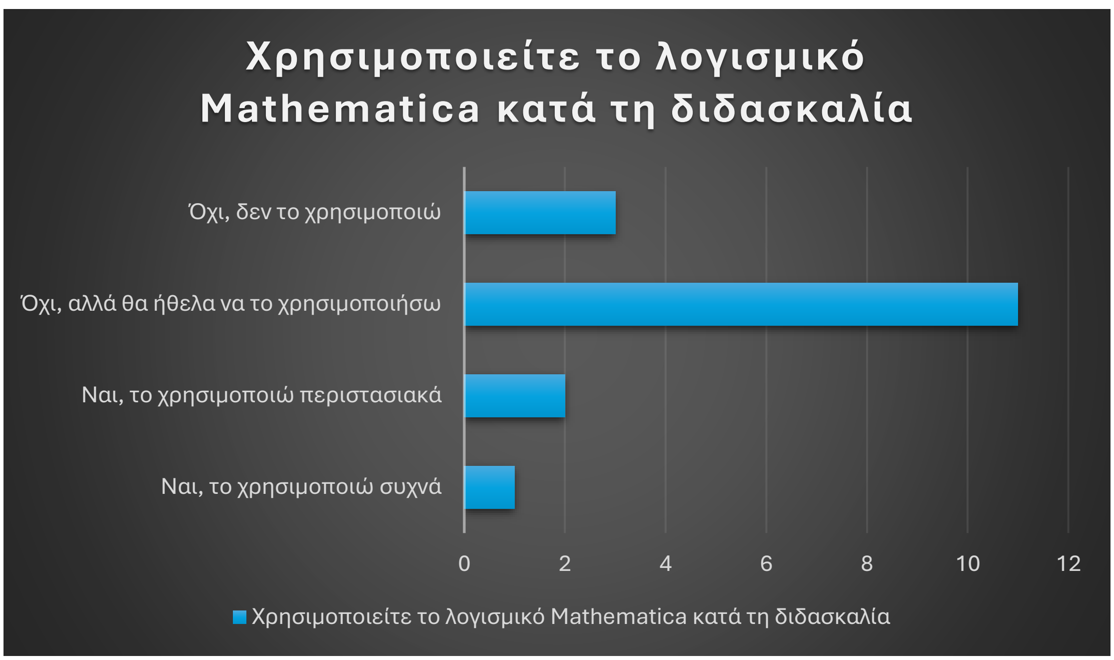
Γράφημα 4.35: Γνώση του λογισμικού Mathematica από τους εκπαιδευτικούς (Ναι/Όχι)



Γράφημα 4.36: Βαθμός γνώσης του λογισμικού Mathematica από τους εκπαιδευτικούς



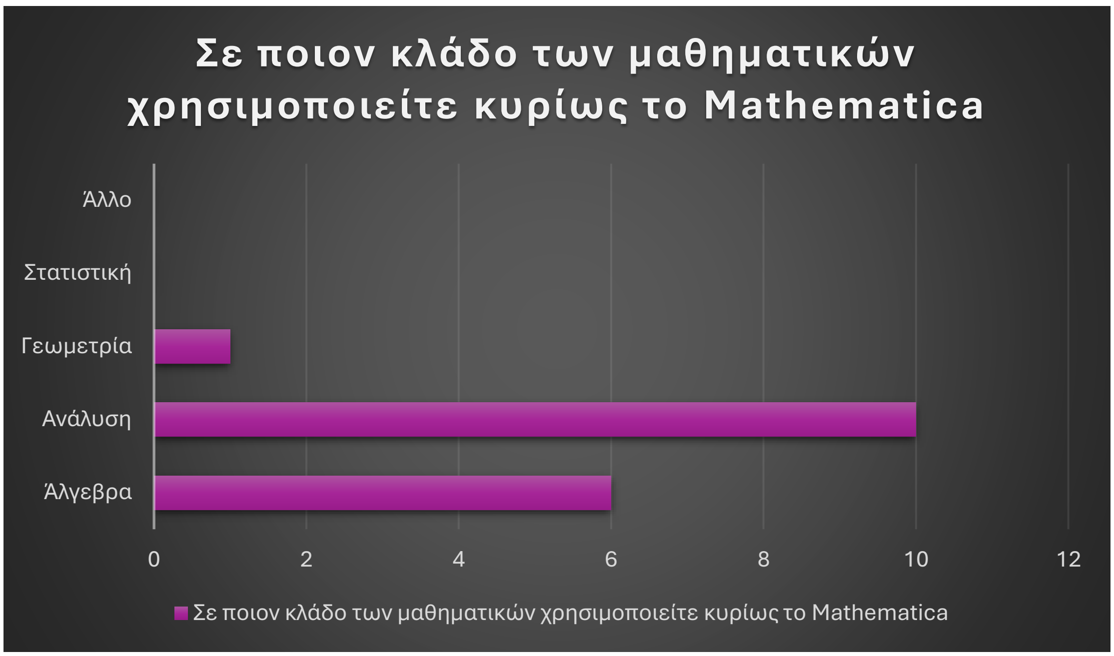
Γράφημα 4.37: Βαθμός χρήσης του λογισμικού Mathematica από τους εκπαιδευτικούς κατά την προετοιμασία των μαθημάτων



Γράφημα 4.38: Βαθμός χρήσης του λογισμικού Mathematica από τους εκπαιδευτικούς κατά τη διδασκαλία

4.3.2.7 Κλάδος μαθηματικών που γίνεται χρήση του Mathematica

Η έρευνα ολοκληρώθηκε με ένα πιο εξειδικευμένο ερώτημα καθώς αναζητήθηκε από τους καθηγητές ο κλάδος των μαθηματικών στον οποίο κάνουν πιο συχνή χρήση του λογισμικού Mathematica, εφόσον το χρησιμοποιούν. Η Ανάλυση και η Άλγεβρα ήταν οι απαντήσεις που πλειοψήφησαν, ενώ η στατιστική δεν υπήρξε ως απάντηση και η Γεωμετρία είχε πολύ χαμηλό ποσοστό. Κι αν για τη στατιστική ένας προφανής λόγος είναι η απουσία της σχεδόν από όλα τα προγράμματα σπουδών, η μη επιλογή της γεωμετρίας, με την πληθώρα σχημάτων, ίσως δείχνει την επιλογή άλλων, εξειδικευμένων, λογισμικών για το μάθημα αυτό.



Γράφημα 4.39: Κλάδος των μαθηματικών που γίνεται πιο συχνή χρήση του λογισμικού Mathematica από τους εκπαιδευτικούς

Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε στην αξιοποίηση του λογισμικού Wolfram Mathematica στη μαθηματική εκπαίδευση, μέσα από τον σχεδιασμό, την υλοποίηση και την αξιολόγηση μαθημάτων Α’ και Β’ Λυκείου σε φροντιστηριακές μονάδες. Η έρευνα δομήθηκε γύρω από τρεις βασικούς άξονες: τη θεωρητική προσέγγιση του λογισμικού όπως και άλλων μαθηματικών λογισμικών πακέτων, την πρακτική εφαρμογή του Mathematica στη διδασκαλία και την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητάς του. Ο σκοπός της έρευνας ήταν πολλαπλός. Από τη μία διερεύνησε τις στάσεις και τις απόψεις των μαθητών λυκείου καθώς και των εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με τη χρησιμότητα διάφορων τεχνολογικών εργαλείων και μαθηματικών λογισμικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επιπλέον, μελετήθηκε επισταμένα το λογισμικό Wolfram Mathematica ως προς τις δυνατότητές του σε ύλη και μεθοδολογίες λυκειακού επιπέδου, και στη συνέχεια επιχειρήθηκε να εξεταστεί η γνώση μαθητών και καθηγητών γύρω από το εν λόγω λογισμικό, καθώς και η γνώμη τους γι’ αυτό, μετά το πέρας των παραδόσεων μαθημάτων με τη χρήση του.

Πιο συγκεκριμένα, η έρευνα χωρίστηκε σε τρεις βασικούς πυλώνες. Πρώτον, χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο πριν την παράδοση μαθημάτων με χρήση του λογισμικού, όπου το βασικό ερώτημα που διερευνήθηκε ήταν ο βαθμός γνώσης του Mathematica από μαθητές και καθηγητές. Έπειτα, έλαβε χώρα η διδασκαλία διαφόρων παραγράφων από την ύλη της Άλγεβρας και των Μαθηματικών σε μαθητές της Α’ και Β’ λυκείου με την υβριδική μορφή παραδοσιακού τρόπου και χρήσης του λογισμικού. Στον πυλώνα αυτό της έρευνας, αξιολογήθηκαν οι εντυπώσεις των μαθητών στη νέα μορφή μαθήματος, η συμμετοχή τους και ο βαθμός εμπέδωσης της ύλης. Τέλος, υπήρξε και συμπλήρωση ερωτηματολογίου μετά το πέρας των μαθημάτων, ώστε να αξιολογηθεί το λογισμικό από τους μαθητές ως προς τη χρησιμότητά του στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Αναφορικά λοιπόν με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα βασικά ευρήματα της έρευνας που εκπονήθηκε έδειξαν ότι η πλειοψηφία των μαθητών γνώριζε από ελάχιστα έως καθόλου το λογισμικό Mathematica, ενώ όσοι το γνώριζαν, το είχαν μάθει κυρίως από προσωπική ενασχόληση και όχι μέσω του σχολείου. Όσον αφορά τους καθηγητές, η μεγάλη πλειοψηφία είχε γνώση του λογισμικού, αλλά ένα πολύ μικρό ποσοστό το χρησιμοποιεί για τη διδασκαλία ή την προετοιμασία των μαθημάτων. Περισσότεροι ερωτηθέντες επιλέγουν άλλα λογισμικά για βοήθεια, όπως το GeoGebra και το MATLAB, κυρίως δε για τα μαθήματα της ανάλυσης, της άλγεβρας και της γεωμετρίας.

Σχετικά με τον δεύτερο πυλώνα της έρευνας, η διαδικασία προετοιμασίας μαθημάτων με τη βοήθεια του λογισμικού αλλά και αυτή της διδασκαλίας μέσα στην τάξη, έδειξαν μια πολύ καλή διεισδυτικότητα του Mathematica στην ύλη και τις απαιτήσεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι επιλογές του λογισμικού καλύπτουν, εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων, το μεγαλύτερο φάσμα των μεθοδολογιών που υπάρχουν, ενώ η δυνατότητα χρήσης κειμένου εξυπηρετεί στην παράδοση της θεωρίας. Τέλος, οι ασκήσεις λύνονται πολύ ευκολότερα και συντομότερα με χρήση απλών εντολών όπως οι «Solve», «Reduce», «Plot» κ.ά.

Όσον αφορά τον τρίτο πυλώνα του ερευνητικού πλαισίου της εργασίας, οι απαντήσεις στο τελευταίο ερωτηματολόγιο, αυτού που έλαβε χώρα μετά τη χρήση του Mathematica, κατέδειξαν μία σαφή προτίμηση των μαθητών σε μάθημα με χρήση του λογισμικού και δευτερευόντως σε υβριδική μορφή που θα συνδυάζει τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας με την ουσιαστική συμμετοχή του συστήματος. Τα ευρήματα, επιπλέον, έδειξαν ότι οι μαθητές δηλώνουν ιδιαίτερα ικανοποιημένοι με τη χρήση του Mathematica στους τομείς της επίλυσης ασκήσεων και της σχεδίασης γεωμετρικών σχημάτων ή γραφικών παραστάσεων, ενώ ως τα σημαντικότερα θετικά στοιχεία που προσδίδει στο μάθημα αναφέρθηκαν η ενίσχυση της συνεργασίας των μαθητών και η αύξηση του ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά μέσω της οπτικοποίησης και της διαδραστικότητας που επιτυγχάνεται.

Συμπερασματικά, η έρευνα προκρίνει την ενσωμάτωση του λογισμικού στην εκπαιδευτική διαδικασία, ως ένα ουσιαστικό τεχνολογικό εργαλείο το οποίο μπορεί, δυνητικά, να συνδυαστεί αρμονικά με τον κλασικό τρόπο διδασκαλίας, δίνοντας μια πιο διαδραστική και ταυτόχρονα ελκυστική όψη στο μάθημα των μαθηματικών, οδηγώντας με αυτό τον τρόπο προς την κατεύθυνση της εκπλήρωσης του κυρίαρχου διακυβεύματος που δεν είναι άλλο από τη βελτιωτική αλλαγή της διδασκαλίας και την αναβάθμιση της ποιότητας της παρεχόμενης εκπαίδευσης.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η έρευνα επεδίωξε να προσεγγίσει τη μελέτη της ενσωμάτωσης και του βαθμού χρησιμότητας του λογισμικού Mathematica στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Όπως όμως ήδη αναφέρθηκε μέσα από τους περιορισμούς της έρευνας, τα ζητήματα του μεγέθους του δείγματος, του βαθμού αντιπροσωπευτικότητας, αλλά και του αριθμού και του είδους των μαθημάτων που παραδόθηκαν στην τάξη, καθιστούν αναγκαία την προοπτική περαιτέρω ερευνών.

Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να σχεδιάσουν και να παραδώσουν μέσα στην τάξη περισσότερες παραγράφους, σε πιο πολλά μαθήματα, και σε πιο πολλές τάξεις όπως για παράδειγμα η Γεωμετρία της Α’ και Β’ Λυκείου ή η Ανάλυση της Γ’ Λυκείου.

Επιπλέον θα μπορούσαν να ερευνηθούν οι στάσεις και οι απόψεις περισσότερων μαθητών ή και καθηγητών, μεγαλώνοντας το δείγμα της έρευνας, ενώ παράλληλα μπορεί να εξεταστεί το λογισμικό και οι δυνατότητές του παράλληλα με άλλα αντίστοιχα λογισμικά, δίνοντας έτσι την ευκαιρία εξαγωγής συγκριτικών συμπερασμάτων για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του καθενός.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, οι μελλοντικοί ερευνητές θα έχουν τη δυνατότητα να πάνε τη συγκεκριμένη μελέτη πολλά βήματα παραπέρα, καθιστώντας το λογισμικό Wolfram Mathematica βασικό εργαλείο εκπαιδευτικής προόδου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Abramowitz, M., & Stegun, I. (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards.

Aladev, V.Z. (2004). Computer algebra systems: a new software toolbox for Maple. Fultus Books.

Anderson, T. (2008). *The Theory and Practice of Online Learning*. Athabasca: Athabasca University Press.

Batut, C., Belabas, K., Bernardi, D., Cohen, H., Olivier, M. (2008). User's Guide to PARI / GP. Institute de Mathematiques de Bordeaux, UMR 5251 du CNRS.

Brynjolfsson, E., & McAfee, A. (2014). *The second machine age: Work, progress, and prosperity in a time of brilliant technologies*. W W Norton & Co.

Castells, M. (2000). Toward a Sociology of the Network Society. *Contemporary Sociology, 29*(5), 693-699. https://doi.org/10.2307/2655234

Cirneanu, A.-L., & Moldoveanu, C.-E. (2024). Use of Digital Technology in Integrated Mathematics Education. *Applied System Innovation*, 7(4), 66. https://doi.org/10.3390/asi7040066

Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2016). *E-learning and the science of instruction* (4th ed.). Hoboken, NJ: Wiley. https://doi.org/10.1002/9781119239086

Ekin, C. C., Polat, E., & Hopcan, S. (2023). Drawing the big picture of games in education: A topic modeling-based review of past 55 years. *Computers & Education, 194*, 104700. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104700

Gall, M., & Breeze, N. (2008). Music and eJay: An opportunity for creative collaborations in the classroom. *International Journal of Educational Research, 47*(1), 27–40.

Geddes, K. O., Czapor, S. R., & Labahn, G. (1992). *Algorithms for computer algebra*. Kluwer Academic.

Gee, J. P. (2003). What video games have to teach us about learning and literacy? *Computers in Entertainment (CIE), 1*, 20-20. http://dx.doi.org/10.1145/950566.950595

Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses related to achievement*. London: Routledge

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 164-192

Jimoyiannis, A., & Komis, V. (2001). Computer simulations in physics teaching and learning: A case study on students' understanding of trajectory motion. *Computers & Education, 36*(2), 183-204. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(00)00059-2

Kutluca, T., Yalman, M., & Tum, A. (2019). Use of interactive whiteboard in teaching mathematics for sustainability and its effect on the role of teacher. *Discourse and Communication for Sustainable Education,* 10 (1). https://doi.org/10.2478/dcse-2019-0009

Lai, J. W., & Cheong, K. H. (2022). Adoption of virtual and augmented reality for mathematics education: A scoping review. *IEEE Access*, 10, 13693-13703. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3145991

Leong, K.E. (2013). Impact of Geometer's Sketchpad On Students Achievement In Graph Functions. *Malaysian Online Journal of Educational Technology, 1*(2), 19-33.

Maeder, R. (2000). *Computer Science with MATHEMATICA Theory and Practice for Science, Mathematics, and Engineering*. Cambridge University Press

Makhmudova, D. M. (2020). Using Information Technology Tools in Mathematics Lessons for Teaching Future Teachers. *International Journal of Scientific & Technology Research,* 9(3), 4168-4171. Available at: http://www.ijstr.org/final-print/mar2020/Using-Information-Technology-Tools-In-Mathematics-Lessons-For-Teaching-Future-Teachers.pdf

Moler, C. (2004). *Numerical Computing with Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics

Newton, L. R., & Rogers, L. (2001). Teaching Science with ICT

Papert, S. (1991). *Νοητικές θύελλες*. Σταματίου, Α. (Μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Οδυσσέας

Prensky, M. (2003). Digital game-based learning. *ACM Computers in Entertainment*

Sulaiman, I., Lah, H.A., Mat, R., Yaacob, Y., Ghani, R.A., Rahman, M.N.A., & Mustafa, W.A. (2020). Computer Algebra System (CAS) As a Mathematical Kernel for Web-based Physics Educational Symbolic Package. *Journal of Physics: Conference Series, 1529*(4), 042041-042041

Tomlinson, C. A., & Allan, S. (2000). *Leadership for differentiating schools & classrooms*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development

Totlis, T., Tishukov, M., Piagkou, M., Kostares, M., & Natsis, K. (2021). Online educational methods vs. traditional teaching of anatomy during the COVID-19 pandemic. *Anat Cell Biol, 54*, 332-339

Van Dijk, J. (2020). *The Network Society*. Sage Publications

Westerman, G., Calméjane, C., Ferraris, P., & Bonnet, D. (2011). Digital Transformation: A Roadmap for Billion-Dollar Organizations. MIT Center for Digital Business

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Kindle Edition

Wolfram, S. (2011). The Background and Vision of Mathematica. *Stephen Wolfram Writings*. Retrieved from https://writings.stephenwolfram.com/2011/10/the-background-and-vision-of-mathematica

Wolfram Research, Inc. (1988). *Web Mathematica: Add dynamic computation and visualization to your website*. Wolfram Research. https://www.wolfram.com/products/webmathematica/ (Accessed: 1 October 2023)

Young, J. (2023). The Role of Technology in Enhancing Urban Mathematics Education. *Journal of Urban Mathematics Education, 16*(1), 1-13. https://journals.tdl.org/jume

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Δρόσος, Β., & Κυρίδης, Α. (2000). Πληροφορική – επικοινωνιακή τεχνολογία και εκπαίδευση των εκπαιδευτικών: Η διεθνής εμπειρία. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 115, 15-20

Καράμηνας, Ι. (2001). Ιστοσελίδες δημοτικών σχολείων στο διαδίκτυο. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 116, 47-52

Κατσούλας, Ν., Όροβας, Χ., & Παναγιωτίδης, Σ. (2017). Λειτουργικά συστήματα και ασφάλεια πληροφοριακών συστημάτων. Αθήνα: Ι.Τ.Υ.Ε. «Διόφαντος»

Κόμης, Β. (2004). Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών. Αθήνα: Εκδόσεις Νέες Τεχνολογίες

Κουμπιά, Σ. (2023). Η χρήση του λογισμικού Mathematica στη μοντελοποίηση φυσικοχημικών φαινομένων: Εφαρμογές στη διδασκαλία της χημείας

Μπίκος, Τζ., & Τζιφόπουλος, (2011). Εκπαιδευτικοί και ΤΠΕ: διευκολυντές και εμπόδια στη χρήση ψηφιακών εφαρμογών στη σχολική τάξη. *Πρακτικά 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου*, Πάτρα, 588-595

Παναγιωτακόπουλος, Χ., Πιερρακέας, Χ., & Πιντέλας, Π. (2005). Σχεδίαση εκπαιδευτικού λογισμικού. Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλας

Παπαδόπουλος, Κ. (2020). Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στα Μαθηματικά και τη διδακτική τους, με τη βοήθεια των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας. Θεσσαλονίκη: Ιδιωτική έκδοση

Πορπόδη, Μ. (2017). Διερεύνηση της χρήσης των Τεχνολογιών Πληροφορικής και Επικοινωνιών στην εκπαίδευση και στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Αθήνα: Ιδιωτική έκδοση

Σολωμονίδου, Χ. (2002). Συνεργατική μάθηση με τη χρήση Τ.Π.Ε.: Εμπειρίες από Δημοτικά Σχολεία Θεσσαλίας. *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου. Οι Τ.Π.Ε. στην Εκπαίδευση*, Ρόδος, 127-132.

Τζωρτζακάκης, Γ., & Πολλάκης, Γ. (1999). Η πληροφορική στην εκπαίδευση: Προβληματισμοί από τη σκοπιά των εκπαιδευτικών. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 108-109, 33-38.

Διαδικτυακοί τόποι

Αμερικανικό Εθνικό Ίδρυμα Προτυποποίησης (2001) https://www.ansi.org/membership/overview-webinar?gad_source=1&gclid=EAIaIQobChMIztishr73igMVDgMGAB0wTghvEAAYASAAEgKEavD_BwE

European Mathematical Information Service (2017) Mathematics Software https://www.emis.de/PSU-mirrors/MathLists/Software

https://doi.org/10.1088/1742-6596/1529/4/042041

https://photodentro.edu.gr/edusoft/r/8531/180

http://www.keypress.com/

https://www.gnu.org/software/octave

https://3d-XplorMath.org/TopLevel/features.html

https://maxima.sourceforge.io

https://www.wolfram.com/mathematica/

https://reference.wolfram.com/language/tutorial/TheStructureOfTheWolframSystem.html

Παραρτήματα

Παράρτημα A1: Παρουσίαση μαθημάτων

Παράρτημα A2: Συγκεντρωτικοί πίνακες εντολών που χρησιμοποιήθηκαν

σε κάθε κεφάλαιο

Παράρτημα B₁: Ερωτηματολόγιο προς τους μαθητές πριν τη διεξαγωγή μαθημάτων με το Mathematica

Παράρτημα B₂: Ερωτηματολόγιο προς τους μαθητές μετά τη διεξαγωγή μαθημάτων με το Mathematica

Παράρτημα B₃: Ερωτηματολόγιο προς τους εκπαιδευτικούς

Το σύνολο των παραρτημάτων βρίσκονται διαθέσιμα στον σύνδεσμο: https://drive.google.com/drive/folders/1spDnsXJ7FfREgf12g7HyRFRqnsfg9El0?usp=sharing