



Σχολή

Θετικών Επιστημών

Πρόγραμμα σπουδών

Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική εργασία

«Οδεύοντα κύματα, σύγκλιση στην ισορροπία και
φαινόμενα έκρηξης λύσεων σε μη-γραμμικές
παραβολικές εξισώσεις»

Ελευθέριος Αδικημενάκης

Επιβλέπων: κος Καραχάλιος Νικόλαος

Πάτρα, Σεπτέμβριος, 2023

©Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο,2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή/της φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο/η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του/της συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του/της συγγραφέα/δημιουργού. Ο/Η συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



«Οδεύοντα κύματα, σύγκλιση στην ισορροπία και
φαινόμενα έκρηξης λύσεων σε μη-γραμμικές
παραβολικές εξισώσεις»

Ελευθέριος Αδικημενάκης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων: κος Καραχάλιος Νικόλαος
2ος βαθμολογητής: Νικολόπουλος Χρήστος

Πάτρα, Σεπτέμβριος, 2023

<<Ευχαριστίες>>

Θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή και επιβλέποντα μου Νίκο Καραχάλιο που από την πρώτη στιγμή με στήριξε στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας και που κατά την διάρκεια όλων αυτών των μηνών ήταν ευχάριστος,εμπυχωτικός και υποστηρικτικός μαζί μου,δίπλα μου στο να με καθοδηγήσει κάθε στιγμή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την υπομονή και την υποστήριξη που έχω σε κάθε μου βήμα. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Νικολόπουλο Χρήστο και την κ.Χατζηνικολάου Μαρία για την συμμετοχή στην επιτροπή της διπλωματικής μου και τον χρόνο τους.

Περίληψη

Σε αυτή την διπλωματική εργασία:

- 1) στην πρώτη ενότητα γίνεται μια σύντομη εισαγωγική μελέτη στις εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης και συγκεκριμένα στην εξίσωση Fisher, μελετάται το πρόβλημα της ύπαρξης οδοντών κυμάτων (travelling waves), της σύγκλισης στην ισορροπία αλλά και το φαινόμενο της έκρηξης λύσεων σε μη-γραμμικές παραβολικές εξισώσεις σε μια διάσταση.
- 2) στην δεύτερη ενότητα θα διευρυνθεί η αριθμητική προσομοίωση των φαινομένων.

Σκοπός της διπλωματικής αυτής είναι η εισαγωγή σε σύγχρονα ερευνητικά θέματα που αφορούν την ασυμπτωτική συμπεριφορά μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων και τις μαθηματικές θεωρίες και τεχνικές αντιμετώπισής τους.

Βασικοί στόχοι:

- Η μελέτη της ύπαρξης οδοντών κυμάτων στο βασικό μοντέλο της εξίσωσης Fisher.
- Η διεύρυνση του προβλήματος της έκρηξης λύσεων σε αυτού του τύπου τις εξισώσεις
- Τα φαινόμενα αυτά θα διερευνηθούν με αριθμητικές προσομοιώσεις

Η εργασία θα αποτελέσει και εισαγωγή σε σύγχρονες προσεγγίσεις στην θεματολογία αυτή, οι οποίες συνδυάζουν τις αναλυτικές μεθόδους με αριθμητικά πειράματα, τόσο σε συνήθεις όσο και σε μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Abstract

In this thesis:

- 1) in the first section there is a brief introductory study of the reaction-diffusion equations and specifically in the Fisher equation, the problem of the existence of travelling waves, convergence equilibrium and the phenomenon of exploding solutions in non-linear parabolic equations in a dimension.
- 2) The second section will expand the numerical solution of problems.

The purpose of this thesis is the introduction to modern research topics related to the asymptotic behavior of nonlinear partial differential equations and mathematical theories. Key objectives:

- The study of the existence of traveling waves in the basic model of the Fisher equation
- The expansion of the problem of blow up solutions in this type of equations
- These phenomena will be investigated with numerical simulations

This paper will also be an introduction to modern approaches to this topic, which combine analytical methods with numerical experiments, on both ordinary and partial differential equations.

Περιεχόμενα

1	Εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης	8
1.1	Μοντέλα εξισώσεων αντίδρασης διάχυσης	8
1.1.1	Το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης του πληθυσμού	8
1.1.2	Η εξίσωση Fisher	9
1.2	Κυματική λύση και ευστάθεια	10
1.3	Σχήμα πεπερασμένων διαφορών επίλυση της εξίσωσης FISHER	15
1.4	Μια αμετάβλητη περιοχή	16
1.5	Η Ασυμπτωτική λύση	18
1.6	Ενεργειακά επιχειρήματα	19
1.6.1	Μία αμετάβλητη περιοχή	20
1.6.2	Σύγκλιση ως προς ισορροπία	21
1.6.3	Αποσύνθεση παραγώγων	22
1.7	Ενεργειακή μέθοδος	24
1.7.1	Η εξίσωση διάχυσης με γραμμική πηγή	24
1.7.2	Εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου σε μη γραμμικές ε- ξισώσεις τύπου Burgers	29
1.7.3	Εξίσωση Burgers με μη γραμμική πηγή - Ενέργεια με βάρος	36
1.7.4	Εξίσωση Burgers με μη γραμμική πηγή δύναμης μεγα- λύτερης του τετραγώνου	42
2	Αριθμητικές εξομοιώσεις	49
2.1	Εξίσωση Burger με μη γραμμική τετραγωνική πηγή	49
2.2	Εξίσωση Burger με μη γραμμική πηγή μεγαλύτερης της τετραγωνικής	58

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν μεταβολές ως προς τον χώρο και χρόνο φυσικών ποσοτήτων. Στην μαθηματική οικολογία και στην βιολογία, χαρακτηριστικά παραδείγματα μοντέλων προσπαθούν να εξηγήσουν χώρο-χρονικές μεταβολές των πληθυσμών σε έναν οικότοπο. Οι συγκεκριμένες μεταβολές αρχικά περιγράφηκαν με κάποια μοντέλα των οποίων οι όροι των εξισώσεων ήταν γραμμικοί και οι μόνες μεταβλητές στις εξισώσεις ήταν αυτές που αφορούν την πυκνότητα του πληθυσμού. Οι λύσεις όμως, όπου υπήρξαν δεν αντιπροσώπευαν την πραγματικότητα για αυτό και αναπτύχθηκαν και άλλα πληθυσμιακά μοντέλα, που θα δούμε στην συνέχεια.

Στην συγκεκριμένη διπλωματική στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε κάποια απλά μαθηματικά μοντέλα εξισώσεων αντίδρασης- διάχυσης και να εξερευνήσουμε κάποιες ιδιότητες τους χρησιμοποιώντας σχήματα πεπερασμένων διαφορών και εκτιμήσεις ενέργειας. .

1.1 Μοντέλα εξισώσεων αντίδρασης διάχυσης

1.1.1 Το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης του πληθυσμού

Το απλούστερο μοντέλο εξίσωσης αντίδρασης- διάχυσης που συναντάμε στην μαθηματική οικολογία περιγράφεται από την ακόλουθη Συνήθη Διαφορική Εξίσωση

$$v'(t) = av(t)(A - v(t)), v(0) = f_0 \quad (1.1)$$

όπου $v = v(t)$: η πυκνότητα του πληθυσμού
 $a \geq 0$: ο ρυθμός ανάπτυξης ,
 $A \geq 0$: η φέρουσα κατάσταση του περιβάλλοντος.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και η λύση είναι:

$$v(t) = \frac{Af_0}{f_0 + (A - f_0)e^{-at}}, t \geq 0 \quad (1.2)$$

Η λύση της προκειμένης διαφορικής εξίσωσης δεν είναι ρεαλιστική μιας και δεν αντιπροσωπεύει αυτό που πραγματικά συμβαίνει στον κόσμο.

1.1.2 Η εξίσωση Fisher

Στο μοντέλο που περιγράψαμε παραπάνω (1.1) υποθέτουμε πως η χωρική διακύμανση στην πυκνότητα του πληθυσμού έχει μικρή σημασία για την αύξηση του πληθυσμού, δηλαδή θεωρούμε ότι ο πληθυσμός είναι ομοιόμορφα καταμενμένος σε μια περιοχή για πάντα.

Στους πραγματικούς όμως πληθυσμούς αυτή η υπόθεση είναι αξίως αμφισβητήσιμη. Πρέπει να δώσουμε σημασία στην ολοένα τάση του πληθυσμού να διαχέεται σε μία περιοχή προσθέτοντας τον όρο Fisherian διάχυσης στο μοντέλο.

Ο στατιστικολόγος – βιολόγος Ronald Fisher στην εργασία του το 1937 *The wave of advance of advantageous genes* πρότεινε την παρακάτω εξίσωση στα πλαίσια της δυναμικής του πληθυσμού για να περιγράψει την χωρική εξάπλωση.

Έχουμε την παρακάτω Μερική Διαφορική Εξίσωση η οποία δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά.

$$u_t = du_{xx} + au(A - u) \quad (1.3)$$

όπου

d : ο συντελεστής διάχυσης

u : η πυκνότητα του πληθυσμού.

Η εξίσωση Fisher μελετάται σε συνδυασμό μιας τύπου Neumann συνοριακή συνθήκη

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \quad (1.4)$$

όπου L = μήκος του χωρίου.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε συνοριακές είναι για να δηλώσουμε ότι η περιοχή μας είναι κλειστή, δηλαδή δεν υπάρχει μετανάστευση.

Επειδή μας ενδιαφέρει η ποιοτική συμπεριφορά και όχι τα πραγματικά μεγέθη θεωρούμε ότι $d=\alpha=A=1$ και επομένως το πρόβλημα που μελετάμε είναι το παρακάτω:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad x \in (0, 1), t \in (0, T] \quad (1.5)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in [0, 1]$$

όπου $f(x)$ υποδηλώνει την αρχική κατανομή του πληθυσμού, δηλαδή ότι τα αρχικά δεδομένα ικανοποιούν ότι $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1]$

1.2 Κυματική λύση και ευστάθεια

Η λύση της ΜΔΕ (1.5) ονομάζεται οδεύον κύμα, δηλαδή είναι μία λύση με την μορφή ενός κύματος, το οποίο διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα διατηρώντας το σχήμα του. Στο πλαίσιο της δυναμικής του πληθυσμού, το οδεύον κύμα εκδηλώνεται ως ένα κύμα συλλογής της πυκνότητας του πληθυσμού σε έναν οικότοπο, όπως για παράδειγμα η πανούκλα που ταξιδεύει σε μια ήπειρο.

Είναι σημαντικό οι κυματικές λύσεις να είναι ευσταθείς μιας και δεν υπάρχουν ασταθείς λύσεις στην πράξη.

Εάν το πρόβλημα μας της δυναμικής του πληθυσμού μοντελοποιείται μέσω της εξίσωσης Fisher Kolmogorov, η λύση θα μπορούσε να μοιάζει σαν ένα οδεύον κύμα εάν η αρχική πυκνότητα του πληθυσμού μοιάζει με μια αρχική συνθήκη που δημιουργεί ένα οδεύον κύμα στην εξίσωση Fisher Kolmogorov.

Η ανάλυση ευστάθειας του οδεύοντος κύματος μπορεί να αποδειχθεί μέσω ανάλυσης ευστάθειας ενός σταθερού σημείου μιας ΣΔΕ.

Τα οδεύοντα κύματα δεν είναι σταθερές λύσεις. Εφαρμόζουμε όμως κατάλληλους μετασχηματισμούς συντεταγμένων σε ένα πλαίσιο αναφοράς που κινείται μαζί με το κύμα.

Η λύση της εξίσωσης αντίδρασης-διάχυσης είναι ένα οδεύον κύμα της μορφής

$$u(x, t) = \phi(x - ct) \quad (1.6)$$

όπου η ταχύτητα $c \in R$ και η εικόνα του κύματος $\phi : R \rightarrow R$

Έστω $\xi = x - ct$

επομένως η λύση $u = \phi(\xi)$

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi}(\xi) \frac{d\phi}{dt}(\xi) = \phi''(\xi) + \phi(\xi)(1 - \phi(\xi))$$

$$-c\phi'(\xi) = \phi''(\xi) + \phi(\xi)(1 - \phi(\xi))$$

$$\phi'' + \phi(1 - \phi) + c\phi' = 0 \quad (1.7)$$

Η εξίσωση είναι μη γραμμική και μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα με εξισώσεις πρώτου βαθμού.

$$\begin{cases} \psi = \phi' \\ \psi' + \phi(1 - \phi) + c\psi = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \psi = \phi' \\ \psi' = -\phi(1 - \phi) - c\psi = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Για την εύρεση των σημείων ισορροπίας:

$$\begin{cases} \phi' = 0 \\ \psi' = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \phi' = 0 \\ \psi' = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ -c\psi - \phi(1 - \phi) = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ \phi(1 - \phi) = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ \phi = 0 \quad \text{ή} \quad \phi = 1 \end{cases} \quad . \quad (1.14)$$

Τα σταθερά λοιπόν σημεία είναι

$$(\phi, \psi) = (0, 0) \text{ και } (\phi, \psi) = (1, 0)$$

Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε τα σταθερά σημεία ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned} J(\phi, \psi) &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \phi'}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \psi'}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\phi - 1 & -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Στο σταθερό σημείο (0,0) έχουμε:

$$\begin{aligned} J(0, 0) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} \det(J(0,0) - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & -c - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda(-c - \lambda) + 1 &= 0 \\ \lambda c + \lambda^2 + 1 &= 0 \\ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma &= c^2 - 4 \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2} = \frac{-c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}$$

Στο σταθερό σημείο (1,0)

$$\begin{aligned} J(1,0) &= \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} \det(J(1,0) - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & -c - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda(-c - \lambda) - 1 &= 0 \\ \lambda c + \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma &= c^2 + 4 \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2} = \frac{-c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 1}$$

Συνοψίζοντας : Οι ιδιοτιμές στο (1,0) είναι:

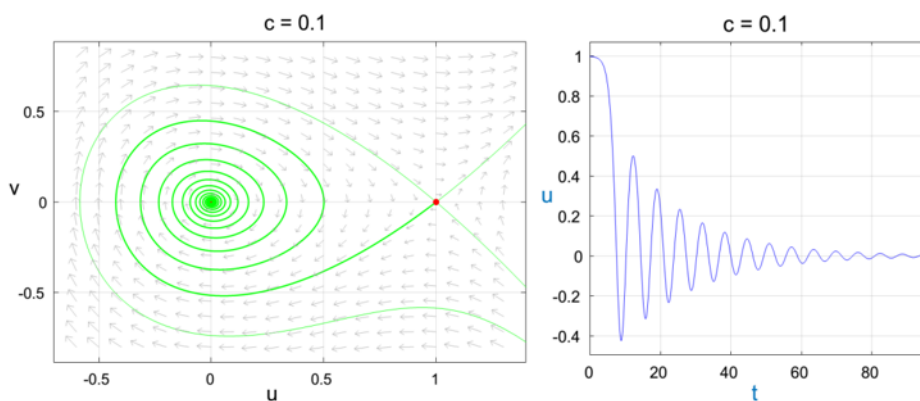
$$\lambda_{1,2} = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} = \frac{-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 1}$$

Οι ιδιοτιμές στο (0,0) είναι

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} = \frac{-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 1}$$

Για τιμές ταχύτητας που κυμαίνονται μεταξύ $0 < c < 2$

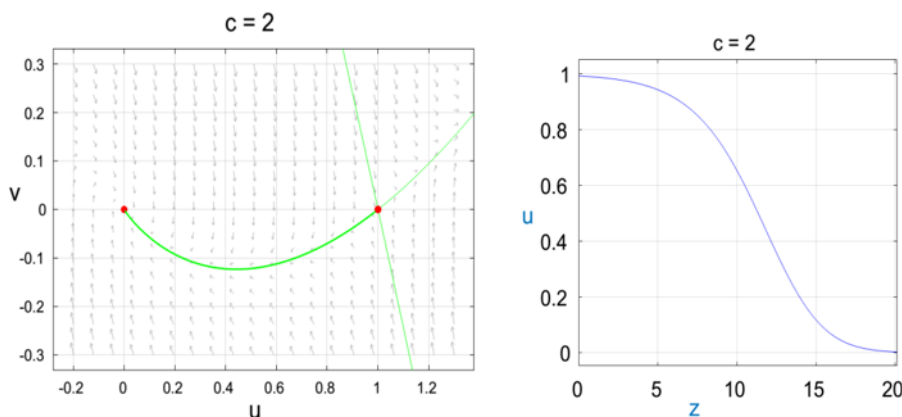
- στο (1,0) έχουμε δυο ετερόσημες πραγματικές τιμές άρα ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ
- στο (0,0) έχουμε δυο μιγαδικές τιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΕΣΤΙΑ ΜΕ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕ ΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΕΛΙΚΑ



Στην γραφική παράσταση της λύσης για ταχύτητα $c = 0.1$ παρατηρούμε ότι οι λύσεις παίρνουν τιμές που δεν συνάδουν με προβλήματα δυναμικής πληθυσμού.

Για τιμές ταχύτητας που κυμαίνονται για $c \geq 2$

- στο (1,0) έχουμε δύο ετερόσημες πραγματικές τιμές άρα ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ
- στο (0,0) έχουμε δύο αρνητικές τιμές άρα είναι ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΚΟΜΒΟΣ.



Αντιθέτως στην συγκεκριμένη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι οι λύσεις είναι από 0 έως 1.

1.3 Σχήμα πεπερασμένων διαφορών επίλυση της εξίσωσης FISHER

Η εξίσωση Fisher μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας σχήματα πεπερασμένων διαφορών.

Αν u_j^m αποτελεί μια προσέγγιση της λύσης $u(x_j, t_m)$ τότε από την explicit method και χρησιμοποιώντας:

μια διαφορά προς τα εμπρός για κάθε $t_n : u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}$

και μια κεντρική διαφορά 2ης τάξης για την

παράγωγο θέσης $x_j : u_{xx} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$ στην (1.5) έχουμε ότι:

$$u_j^{m+1} = ru_{j-1}^m + (1 - 2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta t u_j^m (1 - u_j^m), j = 1, \dots, n$$

όπου $r = \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}$.

Αρχικοποιούμε το σύστημα $u_j^0 = f(x_j), j = 0, \dots, n + 1$ για $m \geq 0$ και οι συνοριακές συνθήκες (1.4) μετασχηματίζονται σε:

$$u_0^{m+1} = (1 - 2r)u_0^m + 2ru_1^m + \Delta t u_0^m (1 - u_0^m)$$

$$u_{n+1}^{m+1} = 2ru_n^m + (1 - 2r)u_{n+1}^m + \Delta t u_{n+1}^m (1 - u_{n+1}^m)$$

. Συγκεντρωτικά έχουμε ότι το σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την εξίσωση

μας είναι το παρακάτω :

$$u_j^{m+1} = ru_{j-1}^m + (1 - 2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta tu_j^m(1 - u_j^m), j = 1, \dots, n \quad (1.15)$$

$$u_j^0 = f(x_j), j = 0, \dots, n + 1$$

$$u_0^{m+1} = (1 - 2r)u_0^m + 2ru_1^m + \Delta tu_0^m(1 - u_0^m)$$

$$u_{n+1}^{m+1} = 2ru_n^m + (1 - 2r)u_{n+1}^m + \Delta tu_{n+1}^m(1 - u_{n+1}^m)$$

Η αριθμητική λύση απεικονίζεται ως συναρτήσεϊ του x για τις διάφορες τιμές του t και παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική λύση παραμένει μέσα στο διάστημα της μονάδας καθώς και ότι η κατά προσέγγιση λύση φαίνεται να συγκλίνει προς το $u = 1$ για όλα τα x καθώς το t αυξάνεται.

1.4 Μια αμετάβλητη περιοχή

Αρχικά θέλουμε να αποδείξουμε την ιδιότητα ότι το μοναδιαίο διάστημα αποτελεί αμετάβλητη περιοχή για το μοντέλο. Αποδεικνύουμε αυτήν την ιδιότητα ύπο την προϋπόθεση ότι οι παραμέτροι του πλέγματος ικανοποιούν την απαίτηση

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2 + (\Delta x)^2} \quad (1.16)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σταθερό επίπεδο χρόνου t_n και ότι $0 \leq u_j^n \leq 1$ για $j=0, \dots, \mu+1$.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα πεπερασμένων διαφορών που προκύπτει αντικαθιστώντας στην εξίσωση Fisher την παράγωγο ως προς τον χρόνο με διαφορά προς τα εμπρός και την χωρική παράγωγο με κεντρική διαφορά 2ης τάξης και χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες βοηθητικές συναρτήσεϊς

$$K(u) = 2r + (1 - 2r)u + \Delta \tau u(1 - u)$$

$$H(u) = (1 - 2r)u + \Delta \tau u(1 - u)$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u_j^{m+1} &= \\ &= ru_{j-1}^m + (1 - 2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta tu_j^m(1 - u_j^m) \\ &\leq 2r + (1 - 2r)u_j^m + \Delta tu_j^m(1 - u_j^m) \\ &= K(u_j^m) \end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned}
 u_j^{m+1} &= \\
 &= ru_{j-1}^m + (1-2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta t u_j^m (1-u_j^m) \\
 &\geq r * 0 + (1-2r)u_j^m + r * 0 + \Delta t u_j^m (1-u_j^m) \\
 &= (1-2r)u_j^m + \Delta t u_j^m (1-u_j^m) = H(u_j^m)
 \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι η συνθήκη ευστάθειας

$$\begin{aligned}
 \Delta t &< \frac{(\Delta x)^2}{2 + (\Delta x)^2} \\
 (2 + (\Delta x)^2) * \Delta t &< (\Delta x)^2 \\
 \frac{(2 + (\Delta x)^2) * \Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} &< 0 \\
 \frac{2 * \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t * (\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} - 1 &< 0 \\
 2r + \Delta t - 1 &< 0 \\
 1 - 2r - \Delta t &> 0
 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}
 H(u_j^m) &= (1-2r) * u_j^m + \Delta t (u_j^m - (u_j^m)^2) \\
 K(u_j^m) &= 2r + (1-2r) * u_j^m + \Delta t (u_j^m - (u_j^m)^2) \\
 K'(u) = H'(u) &= (1-2r) + (1-2u) * \Delta t \geq 1 - 2r - \Delta t > 0
 \end{aligned}$$

Άρα οι συναρτήσεις K,H, είναι αυστηρά αύξουσες.

Οπότε αφού $u_j^m \leq 1$ και K αύξουσα συνάρτηση $K(u_j^m) \leq K(1)$:

$$u_j^{m+1} \leq K(u_j^m) \leq K(1) = 2r + 1 * 2r + \Delta t * 0 = 1$$

και

$$\begin{aligned}
 0 &\leq u_j^m \\
 H(0) &\leq H(u_j^m)
 \end{aligned}$$

και

$$u_j^{m+1} \geq H(u_j^m) \geq H(0) = (1-2r) * 0 + \Delta t * 0 = 0$$

άρα

$$0 \leq u_j^{m+1} \leq 1$$

για

$$j = 0, 1, \dots, n + 1$$

Επομένως με επαγωγή στο επίπεδο του χρόνου έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.4.1 Υποθέτοντας ότι η u_j^m δημιουργείται από το σχήμα πεπερασμένων διαφορών (1.14) και ότι οι παραμέτροι του πλέγματος ικανοποιούν την σχέση (1.15), καθώς και ότι $0 \leq f(x) \leq 1 \forall x \in [-L, L]$. Τότε για την προσεγγιστική λύση u_j^m ισχύει:

$$0 \leq u_j^m \leq 1, j = 0, \dots, n + 1, m \geq 0$$

Από τις αποδείξεις και τα πειράματα που έγιναν στα προηγούμενα κεφάλαια, όλοι οι υπολογισμοί που παρουσιάζονται δείχνουν ότι οι αριθμητικές λύσεις συγκλίνουν ως προς την $u=1$ όσο ο χρόνος αυξάνεται. Έτσι εάν ο πληθυσμός βρίσκεται κάτω από την φέρουσα ικανότητα του περιβάλλοντος ($A=1$) καθώς ο χρόνος αυξάνεται συγκλίνει ως προς την τιμή του A .

1.5 Η Ασυμπτωτική λύση

Στα αριθμητικά πειράματα παρατηρήσαμε ότι οι κατά προσέγγιση λύσεις παρέμειναν πάντα εντός του μοναδιαίου διαστήματος και ότι πλησίαζαν την κατάσταση $u=1$ όσο ο χρόνος αυξανόταν. Την πρώτη παρατήρηση την αποδείξαμε στο παραπάνω θεώρημα και τώρα θα αναλύσουμε εάν είναι σωστός ο ισχυρισμός ότι όσο αυξάνεται ο χρόνος η λύση συγκλίνει στο 1.

Για να αποφύγουμε τεχνικές δυσκολίες θεωρούμε ότι η αρχική κατανομή φ ικανοποιεί την ακόλουθη απαίτηση:

$$0 < f(x) \leq 1 \tag{1.17}$$

για όλα τα $x \in [0, 1]$.

Από το Θεώρημα 1.4.1 και την απαίτηση (1.16) για τα αρχικά δεδομένα συνεπάγεται ότι: $0 \leq u_j^m \leq 1, j = 0, \dots, m + 1, n \geq 0$

Προκειμένου να αναλύσουμε το σχήμα (1.14) ορίζουμε

$$u_m^- = \min_{j=0, \dots, n+1} u_j^m \tag{1.18}$$

και παρατηρούμε ότι $0 \leq \bar{u}_m \leq 1$ για $m \geq 0$.
Από την απαίτηση (1.8) έχουμε επίσης ότι

$$\bar{u}_0 > 0$$

και από το σχήμα πεπερασμένων διαφορών (1.14) έχουμε :

$$u_j^{m+1} \geq 2r\bar{u}_m + (1 - 2r)u_j^m + \Delta t u_j^m (1 - u_j^m)$$

για $j = 0, \dots, n+1$. Υποθέτοντας ότι οι παραμέτροι του πλέγματος ικανοποιούν την συνθήκη (1.15) προκύπτει ότι το πολυώνυμο

$$P_m(u) = 2r\bar{u}_m + (1 - 2r)u + \Delta t u(1 - u)$$

ικανοποιεί

$$P'_m(u) = 1 - 2r + \Delta t(1 - 2u) \geq 1 - 2r - \Delta t > 0$$

για όλα τα $u \in [0, 1]$ και τότε

$$u_j^{m+1} \geq P_m(u_j^m) \geq P_m(\bar{u}_m) = \bar{u}_m + \Delta t \bar{u}_m (1 - \bar{u}_m)$$

για $m \geq 0$.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε ότι το \bar{u}_m τείνει στο 1 καθώς το m τείνει στο άπειρο συγκρίνοντας το \bar{u}_m με το u_m που δημιουργείται από το διακριτό λογιστικό μοντέλο. Δηλαδή:

$$u_{m+1} = u_m + \Delta t u_m (1 - u_m), u_0 = \bar{u}_0 > 0 \quad (1.19)$$

Υποθέτοντας ότι $\bar{u}_m \geq u_m$ παίρνουμε ότι

$$\bar{u}_{m+1} - u_{m+1} \geq G(\bar{u}_m) - G(u_m) = G'(\bar{u}_m)(\bar{u}_m - u_m) \geq 0$$

και έτσι επαγωγικά προκύπτει ότι $\bar{u}_m \geq u_m$ για κάθε $m \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα σύμφωνα με το οποίο εάν u_m είναι η προσεγγιστική λύση που δημιουργήθηκε από την (1.14) και υποθέτοντας ότι $\Delta t < 1$ για την u_m ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: Αν $0 < f_0 \leq 1$ τότε $u_m \rightarrow 1$ καθώς $m \rightarrow \infty$.

1.6 Ενεργειακά επιχειρήματα

Παραπάνω μελετήσαμε ορισμένες ιδιότητες διακριτών προσεγγίσεων της εξίσωσης Fisher για το μοντέλο:

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} + u(1 - u) \\
 u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 \\
 u(x, 0) &= f(x)
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Σε αυτήν την ενότητα θα εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για το συνεχές μοντέλο.

Γενικά υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ομαλή λύση και εξάγουμε τις ιδιότητες μίας τέτοιας λύσης.

Μερικές ιδιότητες που καταγράφηκαν παραπάνω είναι:

- 1) Οι διακριτές λύσεις οριοθετούνται σε μία αμετάβλητη περιοχή.
- 2) Η $u=1$ είναι ασυμπτωματική λύση
- 3) Οι παράγωγοι φαίνονται να αποσυντίθενται γρήγορα όσο αυξάνεται ο χρόνος.

1.6.1 Μία αμετάβλητη περιοχή

Έστω ότι το πρόβλημα 1.19 έχει λύση.

Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μοναδική ομαλή συνάρτηση u που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της 1.19

Θα δείξουμε ότι στο διάστημα $[\varepsilon, \varepsilon+1]$ με $0 < \varepsilon < 1$ είναι μία αμετάβλητη περιοχή του u .

Για τον σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι:

$$0 < \varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon, \forall x \in [0, 1]$$

Για να αποδείξουμε ότι το u θα μείνει στο διάστημα $[\varepsilon, 1+\varepsilon]$ θα υποθέσω αρχικά το αντίθετο. Υποθέτω ότι το u υπερβαίνει την τιμή $1+\varepsilon$.

Έπειτα από την κανονικότητα του u θα πρέπει να υπάρχει μια χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε

$$u(x, t) \leq 1 + \varepsilon, \forall x \in [0, 1], t < t_0$$

Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμή $t = t_0$ υπάρχει $x = x_0$ τέτοιο ώστε:

- i) $u_t(x_0, t_0) \geq 0$
- ii) $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$
- iii) $u(x_0, t_0) = 1 + \varepsilon$

Έχουμε ότι:

$$u_t(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) + u(x_0, t_0)(1 - u(x_0, t_0))$$

και από το ii) και iii) καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} u_t(x_0, t_0) &= u_{xx}(x_0, t_0) + u(x_0, t_0)(1 - u(x_0, t_0)) \\ &= u_{xx}(x_0, t_0) + (1 + \varepsilon)(1 - 1 - \varepsilon) = u_{xx}(x_0, t_0) - \varepsilon(1 + \varepsilon) < 0 \end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το i).

Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο σημείο (x_0, t_0) και κατά συνέπεια το u παραμένει στο $[\varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

Παρομοίως δείχνουμε ότι το u δεν μπορεί να γίνει μικρότερο του ε .

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής αποτέλεσμα:

Ας υποθέσουμε ότι η u ικανοποιεί ότι $u, u_x, u_{xx}, u_t \in C([0, 1] \times [0, \infty))$ τότε εάν η αρχική συνθήκη ικανοποιεί $0 < \varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon$ έχουμε και ότι $0 < \varepsilon \leq u(x, t) \leq 1 + \varepsilon, \forall x \in [0, 1], t \geq 0$.

1.6.2 Σύγκλιση ως προς ισορροπία

Είδαμε ότι οι διακριτές λύσεις που δημιουργούνται στο σχήμα συγκλίνουν στο $u_j^n = 1$ καθώς $t_n \rightarrow \infty$.

Έστω ότι η u είναι η λύση του (1.19) για αρχική συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί $0 < \varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon$ και προσδιορίζεται από

$$E(t) = \int_0^1 (u(x, t) - 1)^2 dx, t \geq 0 \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_0^1 2(u(x,t) - 1)u_t dx = \int_0^1 2(u(x,t) - 1)(u_{xx}(x,t) + u(x,t)(1 - u(x,t))) dx \\
&= \int_0^1 2(u(x,t) - 1)u_{xx}(x,t) - 2 \int_0^1 u(x,t)(1 - u(x,t))^2 dx \\
&= -2 \int_0^1 (u_x)^2 dx - 2 \int_0^1 u(1 - u)^2 dx \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα ότι $u(x,t) \geq \varepsilon > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$E'(t) \leq -2 \int_0^1 \varepsilon(1 - u)^2 dx = -2\varepsilon \int_0^1 (1 - u)^2 dx = -2\varepsilon E(t) \quad (1.23)$$

Από την ανισότητα Gronwall που λέει ότι:

Αν $y : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί $y'(t) \leq \alpha y(t)$ για $t \in (0, b)$ και κατάλληλο α , τότε $y(t) \leq e^{\alpha t} y(0) \forall t \in [0, b]$, έχουμε:

$$E(t) \leq e^{-2\varepsilon t} E(0)$$

και επομένως φτάνουμε στο παρακάτω συμπέρασμα:

Έστω ότι η u η λύση με την αρχική συνάρτηση της f να ικανοποιεί

$$0 < \varepsilon \leq f(x) < 1 + \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1].$$

Τότε η u προσεγγίζει την ασυμπτωτική λύση $u = 1$ αφού:

$$\int_0^1 (u(x,t) - 1)^2 dx \leq e^{-2\varepsilon t} \int_0^1 (u(x,0) - 1)^2 dx \leq e^{-2\varepsilon t} \int_0^1 (1 - f(x))^2 dx, \forall t \geq 0$$

1.6.3 Αποσύνθεση παραγώγων

Για να το μελετήσουμε αυτό ορίζουμε μια συνάρτηση την:

$$F(t) = \int_0^1 (u_x(x,t))^2 dx, t \geq 0 \quad (1.24)$$

όπου η u λύνει το πρόβλημα (1.19).

Με παραγωγή της $u_t = u_{xx} + u(1 - u)$ ως προς x παίρνω:

$$(u_x)_t = (u_x)_x + (u_x - 2uu_x)$$

εάν ορίσω:

$$\begin{aligned} v &= u_x & (1.25) \\ v_t &= v_{xx} + (1 - 2u)v \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0 \end{aligned}$$

Τώρα έχω ότι: Η (1.21) από την (1.22) γίνεται:

$$F(t) = \int_0^1 v^2(x, t) dx$$

Τώρα έχω ότι

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 v^2(x, t) dx = 2 \int_0^1 v(x, t)v_t(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^1 v(x, t)(v_{xx}(x, t) + (1 - 2u)v(x, t)) dx \\ &= 2 \int_0^1 vv_{xx} dx + 2 \int_0^1 (1 - 2u)v^2 dx \\ &= -2 \int_0^1 (v_x)^2 dx + 2 \int_0^1 (1 - 2u)v^2 dx \\ &\leq -2 \int_0^1 (v_x)^2 dx + 2 \int_0^1 v^2 dx \end{aligned} \quad (1.26)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\varepsilon \leq u(x, t) \leq 1 + \varepsilon, \forall x \in [0, 1], t \geq 0$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Poincaré όπου σύμφωνα με την οποία αν $w(0) = w(1) = 0$ τότε

$$\pi^2 \int_0^1 (w(x))^2 dx \leq \int_0^1 (w'(x))^2 dx$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $w(x)$.

Αφού λοιπόν έχουμε τις συνοριακές συνθήκες $v(0, t) = v(1, t) = 0$

$$\int_0^1 (v_x(x, t))^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 (v(x, t))^2 dx$$

$$-2 \int_0^1 (v_x(x, t))^2 dx \leq -2\pi^2 \int_0^1 (v(x, t))^2 dx$$

και επομένως από:

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -2 \int_0^1 (v_x)^2 dx + 2 \int_0^1 v^2 dx \\ &\leq -2\pi^2 \int_0^1 v^2 dx + 2 \int_0^1 v dx \\ &= 2(1 - \pi^2)F(t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

και από την ανισότητα Gronwall ότι:

$$F'(t) \leq e^{2(1-\pi^2)t} F(0)$$

και έχουμε ότι:

Έστω η ομαλή λύση της (1.19) για μια συνεχή/παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $0 \leq \varepsilon \leq f(x) \leq 1 + \varepsilon$. Τότε η χωρική παράγωγος του u φθίνει ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u_x(x, t))^2 dx &\leq e^{2(1-\pi^2)t} \int_0^1 u_x(x, 0)^2 dx \\ &\leq e^{2(1-\pi^2)t} \int_0^1 f'(x)^2 dx \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.7 Ενεργειακή μέθοδος

Για την μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων χρησιμοποιούμε την ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΘΟΔΟ.

Μέσα από την εξίσωση παράγονται συναρτησιακά που μας βοηθούν να βγάλουμε τα κατάλληλα συμπεράσματα για την συμπεριφορά των λύσεων χωρίς να χρειάζεται αναλυτική επίλυση.

1.7.1 Η εξίσωση διάχυσης με γραμμική πηγή

Θα εφαρμόσουμε την ενεργειακή μέθοδο για να μελετήσουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης για το πρόβλημα :

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} + \alpha u, & x \in (0, 1), t > 0, \alpha > 0 \\
 u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\
 u(x, 0) &= u_0(x)
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

Έστω ότι η $u = u(x, t)$ είναι μια λύση του προβλήματος (1.23) η οποία αντιστοιχεί σε αυθαίρετα αρχικά δεδομένα $u_0(x)$. Ορίζω την ενέργεια

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 \tag{1.30}$$

όπου $\|\cdot\|$ δηλώνει την νόρμα στο $L^2(0, 1)$: χώρος τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Γνωρίζουμε ότι εάν $f \in L^2(0, 1)$ τότε $\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(x, t) dx < \infty$

Πολλαπλασιάζοντας την διαφορική εξίσωση (1.23) με u και ολοκληρώνοντας στο $(0, 1)$ έχουμε:

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^1 u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \alpha \int_0^1 u^2 dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη και χρησιμοποιώντας τον τύπο των συνοριακών

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 uu_{xx} dx + \alpha \int_0^1 u^2 dx &= \int_0^1 u[u_x]_x dx + \alpha \|u\|^2 \\
 &= u(1)u_x(1) - u(0)u_x(0) - \int_0^1 u_x u_x dx + \alpha \|u\|^2 \\
 &= - \int_0^1 u_x^2 dx + \alpha \|u\|^2 \\
 &= -\|u_x\|^2 + \alpha \|u\|^2 = -\alpha \|u_x\|^2 \\
 &= -\alpha \|u_x\|^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\|u\|^2}{\|u_x\|^2} \right) \\
 &\leq -\alpha \|u_x\|^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \sup_H \frac{\|u\|^2}{\|u_x\|^2} \right) \\
 &\leq \|u_x\|^2 \neq 0
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

όπου H το σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων πάνω στο οποίο θεωρούμε το \sup .

Οι λύσεις είναι κλασσικές επομένως:

$$H = u \in C^2(0, 1)/u = 0, x = 0, 1$$

Έστω R_E σταθερά τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{R_E} = \sup_H \frac{\|u\|^2}{\|u_x\|^2}$$

Θυμάμαι ότι η ανισότητα Poincaré (Πρόκειται για μια ανισότητα, αποτέλεσμα των χώρων Sobolev. Επιτρέπει ουσιαστικά να δώσει φραγή σε μια συνάρτηση που χρησιμοποιώντας φραγή στις παραγώγους της και την γεωμετρία της περιοχής ορισμού της)

$$\|u_x\|^2 \geq \pi^2 \|u\|^2 \tag{1.32}$$

Χρησιμοποιώντας προχωρημένες τεχνικές και τον Λογισμό των Μεταβολών η

ανισότητα Poincaré γράφεται στην μεταβολική μορφή

$$\frac{1}{\pi^2} = \sup_H \frac{\|u\|^2}{\|u_x\|^2} \quad (1.33)$$

ή

$$\pi^2 = \inf_H \frac{\|u_x\|^2}{\|u\|^2}$$

Η σταθερά

$$R_E = \pi^2$$

είναι η βελτιστή σταθερά για την ανισότητα Poincaré . Άρα η

$$\frac{dE}{dt} \leq -\alpha \|u_x\|^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \sup_H \frac{\|u\|^2}{\|u_x\|^2} \right) \quad (1.34)$$

και από το την (1.26)

$$\frac{dE}{dt} \leq -\alpha \|u_x\|^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad (1.35)$$

Αν $\alpha < \pi^2$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\pi^2}$ και $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\pi^2} > 0$

Στην συνέχεια έστω $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\pi^2=c} > 0$

Έτσι από την (1.28)

$$\frac{dE}{dt} \leq -\alpha c \|u_x\|^2 \quad (1.36)$$

χρησιμοποιώντας ξανά την ανισότητα Poincaré (1.25) η (1.29) γίνεται:

$$\frac{dE}{dt} \leq -\alpha c \pi^2 \|u\|^2 = -\alpha c \pi^2 \frac{1}{2} 2 \|u\|^2 = -2\alpha c \pi^2 E \quad (1.37)$$

$$\frac{dE}{dt} - 2\alpha c \pi^2 E \leq 0$$

$$\frac{d(e^{2\pi^2\alpha t}E)}{dt} \leq 0$$

ολοκληρώνοντας την ανισότητα

$$E(t) \leq e^{-2\pi^2\alpha t} E(0)$$

προηγουμένως είπαμε ότι αν

$$\alpha < \pi^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad (1.38)$$

καθώς $t \rightarrow \infty$ με τουλάχιστον εκθετική μείωση.

Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε και για $\alpha = \pi^2$

Θεώρημα 1.7.1 Θεωρούμε την κλασσική λύση $u(x, t)$ του προβλήματος για αυθαίρετα δεδομένα $u_0(x)$. Αν $\alpha \leq \pi^2$ τότε η μηδενική λύση $u = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής ως προς την L^2 νόρμα.

Ουσιαστικά η παράμετρος α εκφραζει την ένταση της γραμμικής πηγής. Μια ερώτηση θα μπορούσε να είναι τι γίνεται όταν $\alpha > \pi^2$.

Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό οι λύσεις ορίζονται για κάθε $t > 0$. Είναι δυνατόν ναδειχθεί ότι για $\alpha > \pi^2$ οι λύσεις οι οποίες είναι ευσταθείς είναι οι μη μηδενικές λύσεις ισορροπίας. Δηλαδή οι μηδενικές λύσεις του προβλήματος συνοριακών

$$\begin{aligned} -u_{xx} &= \alpha u, 0 < x < 1, \alpha > \pi^2 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή για $\alpha > \pi^2$ η μηδενική λύση γίνεται ασταθής και η ευστάθεια μεταβιβάζεται στις λύσεις ισορροπίας. Η απώλεια της ευστάθειας της μηδενικής λύσης για $\alpha > \pi^2$ και η μετάβαση στις ευσταθείς λύσεις ισορροπίας = φαινόμενο διακλάδωσης.

1.7.2 Εφαρμογή της ενεργειακής μεθόδου σε μη γραμμικές εξισώσεις τύπου Burgers

Εδώ θα εξετάσουμε την επίδραση της παρουσίας μη γραμμικών όρων στην ευστάθεια των λύσεων.

Θα ασχοληθούμε με την ευστάθεια της μηδενικής λύσης.

Εξίσωση Burgers με μη-γραμμική πηγή- Μη γραμμική ευστάθεια υπό συνθήκη

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u^2, & x \in (0, 1), \beta > 0, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 & \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Η σταθερά $\beta > 0$ εκφράζει την ένταση της μη γραμμικής πηγής.

Μια "γραμμική προσέγγιση" του προβλήματος θα μπορούσε να θεωρήσει ότι $|u| = |u_x| < 1$.

Θα καταλήγαμε στην ουσία σε μια γραμμική εξίσωση με αμελητέους τους μη γραμμικούς όρους.

Η μηδενική λύση είναι ευσταθής θεωρώντας την γραμμική προσέγγιση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου δεν είναι αμελητέοι οι μη γραμμικοί όροι. Όπως είδαμε και στην περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων θα παράγουμε κατάλληλες εξισώσεις ενέργειας χειριζόμενοι τους μη γραμμικούς όρους.

Θεώρημα 1.7.1 Έστω η κλασσική λύση του προβλήματος:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u^2, & x \in (0, 1), \beta > 0, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 & \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι τα αρχικά δεδομένα είναι αρκετά μικρά, δηλαδή ότι $\|u_0\| < \frac{2}{\beta}$. Τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$ με εκθετικό αριθμό.

Απόδειξη:

Πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση του προβλήματος (1.39) με u , ολοκληρώνουμε στο $(0, 1)$ και παίρνοντας επίσης υπόψιν ότι

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = \int_0^1 u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \beta \int_0^1 u^3 dx$$

Η παραπάνω σχέση προέκυψε κατόπιν ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και εφαρμογής συνοριακών την

$$\int_0^1 u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{3} [u^3(1) - u^3(0)] = 0 \quad (1.40)$$

Η παραπάνω σχέση είναι κρίσιμης σημασίας. Φέρει το όνομα "σχέση ορθογωνιότητας" του όρου $u \frac{\partial u}{\partial x}$ και παράγει πιο απλές εξισώσεις ενέργειας.

Μπορεί να τις συναντήσουμε και σε εξισώσεις υδροδυναμικής, οι οποίες εφαρμόζονται σε χωρία μεγαλύτερης διάστασης.

Ολοκληρώνοντας κατα παράγοντες και πάλι τον όρο

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2$$

παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = -\|u_x\|^2$$

Έτσι έχουμε την εξίσωση ενέργειας:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = \|u_x\|^2 + \beta \int_0^1 u^3 dx$$

Από τον πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης παρατηρούμε ότι πάλι εμφανίζεται η χρονική παράγωγος της:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|^2$$

που είναι και η ενεργειακή ποσότητα που θα μελετήσουμε.

Μιας και δεν μπορούμε να ξέρουμε εξ αρχής το πρόσημο της $u(x, t)$ δεν μπορούμε να γνωρίζουμε και το πρόσημο της

$$\int u^3 dx$$

. Ο συγκεκριμένος όρος μπορεί να οδηγήσει σε φαινόμενα αστάθειας.

Μιας και από την γραμμική θεωρία πληροφορούμαστε ότι αν

$$|u| \ll 1$$

η μηδενική λύση είναι πάντα γραμμικά ευσταθής μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ευστάθεια της μηδενικής λύσης είναι δυνατή όταν έχουμε μικρά δεδομένα.

Για να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε τον μη γραμμικό όρο

$$-\|u_x\|^2 + \beta \int_0^1 u^3 dx$$

θα κάνουμε χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \phi \psi dx \leq \left(\int_0^1 \phi^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \psi^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\phi, \psi \in L^2(0, 1)$$

θέτοντας $\phi = u$ και $\psi = u^2$ βρίσκουμε ότι:

$$\int_0^1 u^3 dx = \int_0^1 uu^2 dx \leq \left(\int_0^1 u^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 u^2 dx \right)^{1/2}$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της ανισότητας είναι ο $E(t)^{1/2}$.

Θα επιθυμούσαμε με κάποιον τρόπο να συσχετίσουμε τον όρο $-||u_x||^2$ με τον όρο

$$\left(\int_0^1 u^4 dx\right)^{1/2}$$

Σημαντικής σημασίας είναι η χρήση της ανισότητας Sobolev

$$\int_0^1 u^4 dx \leq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 u_x^2 dx\right)^2$$

Εισάγοντας την παραπάνω εξίσωση στην

$$\int_0^1 u^3 dx = \int_0^1 uu^2 dx \leq \left(\int_0^1 u^4 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{1/2}$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^3 dx &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 u_x^2 dx\right) \left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} ||u|| ||u_x||^2 \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει μια εκτίμηση του μη γραμμικού όρου $\int u^3 dx$ από τους όρους που εμφανίζονται με γραμμικό τρόπο στην εξίσωση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||u||^2 = \int_0^1 u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \beta \int_0^1 u^3 dx$$

Συνδέοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||u||^2 \leq -||u_x||^2 \left(1 - \frac{1}{2} \beta ||u(t)||\right) \quad (1.41)$$

Θα μελετήσουμε τώρα την παραπάνω ανισότητα ξεκινώντας από την υπόθεση

“μικρών αρχικών δεδομένων” δηλαδή ότι η L^2 - νόρμα της u_0 είναι αρκετά μικρή.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η αρχική συνθήκη $u(x, 0) = u_0$ είναι τέτοια ώστε

$$\|u_0\| < \frac{2}{\beta}$$

$$(\|u_0\|^2 = \int_{-L}^L u_0^2(x) dx < \frac{4}{\beta^2})$$

Ο λόγος που κάνουμε την παραπάνω υπόθεση είναι ότι επειδή θα θέλαμε ο όρος

$$(1 - \frac{1}{2}\beta\|u(t)\|)$$

να είναι θετικός. Και αυτό μιας και θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 < 0$$

όπου στην συνέχεια με ολοκλήρωση θα μας έδινε ότι

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2$$

Η λύση μας θα παραμένει φραγμένη αποκλείοντας κάποιο φαινόμενο αστάθειας.

Για την λύση λοιπόν του αρχικού προβλήματος συμβαίνουν τα εξής

1. Για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$u(t) < \frac{2}{\beta}$$

2. υπάρχει $k < \infty$ έτσι ώστε

$$\|u(k)\| = \frac{2}{\beta}$$

και

$$\|u(k)\| < \frac{2}{\beta}, [0, k]$$

Αν ισχύει αυτό τότε

$$1 - \frac{1}{2}\beta\|u(t)\| > 0, 0 \leq t < k$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση στην

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -\|u_x\|^2 (1 - \frac{1}{2}\beta\|u(t)\|)$$

μας δίνει ότι

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 < 0, 0 \leq t < k$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι:

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 = \|u_0\|^2 < \frac{4}{\beta^2}, 0 \leq t < k$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης και επειδή η $\|u(t)\|$ θεωρείται συνεχής ως προς t προκύπτει ότι $\|u(k)\| \neq \frac{2}{\beta}$ δηλαδή ερχόμαστε σε αντίφαση με την 2. Επομένως δεν μπορεί να ισχύει το συμπέρασμα 2. Άρα θα ισχύει το συμπέρασμα 1 για το αρχικό πρόβλημα.

Σημειώνουμε για μια ακόμα φορά ότι οι λύσεις $u(x, t)$ του προβλήματος θεωρούνται κλασσικές, δηλαδή $u \in C^2$ ως προς x και $u \in C^1$ ως προς t

Συνοψίζοντας, η υπόθεση των μικρών αρχικών δεδομένων

$$\|u_0\| < \frac{2}{\beta}$$

οδηγεί στην $\|u(t)\| < \frac{2}{\beta}, \forall t \geq 0$

Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2$$

Καθώς ισχύει

$$1 - \frac{1}{2}\beta\|u(t)\| \geq 1 - \frac{1}{2}\beta\|u_0\| > 0, \forall t \geq 0$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -\|u_x\|^2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta\|u(t)\|\right) \leq -\|u(x)\|^2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta\|u_0\|\right)$$

Με την χρήση της ανισότητας Poicaré

$$\|u_x\|^2 \geq \pi^2 \|u\|^2$$

και αφού

$$1 - \frac{1}{2}\beta\|u_0\| > 0$$

έχουμε

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 \leq -\pi^2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta\|u_0\|\right) \|u\|^2 = -A \|u\|^2$$

έχοντας θέσει

$$A = \pi^2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta\|u_0\|\right)$$

πολλαπλασιάζοντας τώρα με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$e^{2At}$$

βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2 e^{2At}) \leq 0$$

η οποία με ολοκλήρωση μας δίνει:

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{-2At} \|u_0\|^2$$

από την οποία προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος.

1.7.3 Εξίσωση Burgers με μη γραμμική πηγή - Ενέργεια με βάρος

Προηγουμένως αποδείξαμε ότι εάν

$$\|u_0\| < 2\beta^{-1}$$

τότε η λύση του αρχικού προβλήματος συγκρίνει στην μηδενική λύση $u = 0$ ως προς την L^2 νόρμα, τουλάχιστον με εκθετικό ρυθμό.

Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε τι θα συμβεί αν υπερβούμε την συνθήκη αυτή. Σε μια τέτοια περίπτωση είναι δυνατόν να έχουμε φαινόμενα αστάθειας .

Ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα είναι η έκρηξη της λύσης μετά από πεπερασμένο χρόνο . Δηλαδή είναι δυνατόν η λύση του προβλήματος να μην ορίζεται για κάθε $t > 0$ αλλά να υπάρχει κάποιος χρόνος $T_{max} > 0$ τέτοιος ώστε η λύση να ορίζεται για

$$t \in (0, T_{max})$$

και

$$\lim_{t \rightarrow T_{MAX}} \|u(t)\|_x = \infty$$

όπου $\|\cdot\|_x$ είναι η κατάλληλη νόρμα.

Για το αρχικό μας πρόβλημα η παρουσία της μη γραμμικότητας λόγω των όρων βu^2 , $\beta > 0$ προδιαθέτει φαινόμενα έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο.

Τώρα θα δείξουμε χρησιμοποιώντας την L^2 ενέργεια με βάρος, ότι η έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο δεν μπορεί να υπάρξει ως προς την L^2 νόρμα. Η τεχνική βασίζεται σε κατάλληλη τροποποίηση της ενεργειακής μεθόδου.

Ο όρος $u \frac{\partial u}{\partial x}$ είναι σημαντικός προκειμένου να βρεθούν κατάλληλα φράγματα για την λύση και κατά συνέπεια την ευστάθεια της.

Θα εστιάσουμε στις μη αρνητικές λύσεις του αρχικού προβλήματος $u(x, t) \geq 0$ οι οποίες είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχουν αν $u_0 \geq 0$. Επίσης θέλουμε να δούμε την περίπτωση όπου η παράμετρος β μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές.

Θεώρημα 1.7.1 Θεωρούμε την κλασσική λύση $u(x, t)$ του αρχικού προβλήματος για τυχαία αρχικά δεδομένα και $\beta > 0$. Η λύση αυτή ικανοποιεί το φράγμα:

$$\|u(t)\|^2 \leq O(\beta^2 e^{3\beta})$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση βάρους $\mu(x) = e^{-\kappa x}$ για κάποια σταθερά $\kappa > 0$

Στην συνέχεια ορίζουμε μια νέα ενεργειακή ποσότητα την λεγόμενη ενέργεια ή νόρμα βάρους.

$$F(t) = \int_0^1 \mu u^2 dx = \int_0^1 \mu(x) u^2(x, t) dx$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε ότι

$$F_t = 2 \int_0^1 \mu u u_t$$

Σημειώνουμε ότι

$$u_t = -u u_x + u_{xx} + \beta u^2$$

Από τις 2 τελευταίες σχέσεις και με ολοκλήρωση κατά παραγοντες και χρήση

των συνοριακών βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
 F_t &= \\
 &= 2 \int_0^1 \mu u (-u u_x + u_{xx} + \beta u^2) dx \\
 &= 2\beta \int_0^1 \mu u^3 dx + \frac{2}{3} \int_0^1 \mu_x u^3 dx - 2 \int_0^1 \mu u_x^2 dx + \int_0^1 \mu_{xx} u^2 dx \\
 &= -2\left(\frac{k}{3} - \beta\right) \int_0^1 \mu u^3 dx - 2 \int_0^1 \mu u_x^2 dx + k^2 \int_0^1 \mu u^2 dx
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder

$$\int_0^1 |fg| dx \leq \left(\int_0^1 |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Συγκεκριμένα εφαρμόζουμε την ανισότητα θέτοντας

$$f = \mu^{\frac{2}{3}} u^2, \quad g = \mu^{\frac{1}{3}}, \quad p = 3/2, \quad q = 3$$

έχουμε παρατηρήσει ότι

$$\int_0^1 \mu u^2 dx = \int_0^1 \mu^{2/3} u^2 \mu^{1/3} dx$$

Τότε

$$\int_0^1 \mu u^2 dx \leq \int_0^1 (\mu u^3)^{2/3} dx \int_0^1 \mu^{1/3} dx$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$- \int_0^1 \mu u^3 dx \leq - \frac{(\int_0^1 \mu u^2 dx)^{3/2}}{(\int_0^1 \mu)^{1/2}}$$

Στην συνέχεια για συντομία όπου $\langle \cdot \rangle$ είναι το ολοκλήρωμα από 0 έως 1 .

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{k} (1 + e^{-k})$$

και επομένως

$$- \langle \mu u^3 \rangle \leq - \frac{\langle \mu u^2 \rangle^{3/2}}{\langle \mu \rangle^{1/2}}$$

όπου

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{k}(1 - e^{-k})$$

και επομένως

$$- \langle \mu u^3 \rangle \leq - \frac{\kappa^{1/2} \langle \mu u^2 \rangle^{3/2}}{(1 - e^{-k})^{1/2}}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $\lambda > 0$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα

$$\lambda \langle \mu u^2 \rangle \leq \langle \mu u_x^2 \rangle$$

για κάθε συνάρτηση

$$u \in H = [u \in C^2(0, 1) : u = 0, x = 0, 1]$$

Πράγματι εφαρμόζοντας την ανισότητα Poincaré

$$\|u_x\|^2 \geq \pi^2 \|u\|^2$$

, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \mu u^2 \rangle &= \int_0^1 e^{-kx} u^2 dx \leq \int_0^1 u^2 dx \leq \pi^2 \int_0^1 u_x^2 dx = \pi^2 \int_0^1 e^{-kx} e^{kx} u_x^2 dx \\ &= \max_{x \in [0,1]} |e^{-kx}| \pi^2 \int_0^1 \exp^{-kx} u_x^2 dx = \\ &= \pi^2 e^k \int_0^1 e^{-kx} u_x^2 dx = \pi^2 e^k \langle \mu u_x^2 \rangle \end{aligned}$$

Δηλαδή η

$$\lambda \langle \mu u^2 \rangle \leq \langle \mu u_x^2 \rangle$$

ισχύει για $\lambda = \frac{1}{\pi^2 e^k}$. Στην συνέχεια επιλέγουμε $\kappa = 3\beta + 1$ και έχουμε:

$$F_t = -\frac{2}{3} \langle \mu u^3 \rangle - 2 \langle \mu u_x^2 \rangle + k^2 \langle \mu u^2 \rangle$$

και έχουμε ότι

$$F_t \leq -\frac{2k^{1/2}}{3(1-e^{-k})^{1/2}}F^{3/2} + (k^2 - 2\lambda)F$$

Ας σημειώσουμε τώρα την παρακάτω παρατήρηση:

Αν $k^2 < 2\lambda$ που σημαίνει ότι επιλέγουμε $k = 3\beta + 1$ τέτοιο ώστε ικανοποιείται η

$$k^2 e^k < \frac{2}{\pi^2}$$

τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

για κάθε αρχική συνθήκη u_0 .

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις θα μπορούσαμε να πούμε ότι

$$F_t \leq \gamma F, \gamma = k^2 - 2\lambda < 0$$

η οποία θα οδηγούσε στο ίδιο συμπέρασμα με την χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα.

Επιπλέον επειδή η F και L^2 - νόρμα ισοδύναμες θα είχαμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$$

για κάθε αρχική συνθήκη u_0 .

Όμως η συνθήκη $k^2 e^k < \frac{2}{\pi^2}$ δεν ικανοποιείται για καμιά τιμή $\beta > 0$.

Ωστόσο μπορούμε να επιτύχουμε ένα αποτέλεσμα ευστάθειας χωρίς να επιβάλλονται περιοριστικές συνθήκες για το μέγεθος της παραμέτρου β ή το μέγεθος των αρχικών δεδομένων.

Συνεχίζουμε την ανάλυση μας από την σχέση :

$$F_t \leq -\frac{2k^{1/2}}{3(1-e^{-k})^{1/2}}F^{3/2} + (k^2 - 2\lambda)F$$

Διαιρούμε την ανισότητα με $F^{3/2}$ και θέτουμε το $u = F^{-1/2}$. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε την ανισότητα

$$\frac{du}{dt} + Au \geq B$$

όπου

$$A = \frac{k^2}{2} - \lambda$$

$$B = \frac{k^{1/2}}{3(1 - e^{-k})^{1/2}}$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα την ανισότητα

$$\frac{du}{dt} + Au \geq B$$

και ολοκληρώνοντας, λύνουμε ως προς $F^{1/2}$ για να καταλήξουμε στην

$$F^{1/2}(t) \leq \frac{1}{F^{-1/2}(0)e^{-At} + (B/A)(1 - e^{-At})}$$

Παίρνοντας το όριο

$$\|u(t)\| < \frac{2}{\beta}$$

καθώς $t \rightarrow \infty$ βρίσκουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F^{1/2}(t) \leq \frac{A}{B}$$

Επιπλέον επειδή

$$F(t) = \langle \mu u^2 \rangle \geq e^{-k} \langle u^2 \rangle = e^{-k} \langle u^2 \rangle = e^{-k} \|u\|^2$$

Από την

$$F^{1/2}(t) \leq \frac{1}{F^{-1/2}(0)e^{-At} + (B/A)(1 - e^{-At})}$$

, το παραπάνω όριο και υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|^2 \leq p(k)^2$$

με την σταθερά $p(k)$ να δίνεται από την σχέση:

$$p(k)$$

$$= e^{k/2} \frac{A}{B}$$

$$= \left(\frac{e^{k/2} k^2}{2} - \frac{e^{-k/2} 2}{\pi^2} \right) \frac{3(1 - e^{-k})^{1/2}}{k^{1/2}}$$

$$= 3 \frac{e^{k/2} k^{3/2}}{2} (1 - e^{-k})^{1/2} - \frac{6e^{-k/2} (1 - e^{-k})^{1/2}}{\pi^2 k^{1/2}}$$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλο k έχουμε ότι $p(k) = O(e^{k/2}k^{3/2})$ και επειδή $\kappa = 3\beta + 1$ τελικά

$$\|u(t)\|^2 \leq O(\beta^3 e^{3\beta})$$

Το θεώρημα εδώ είναι ένα αποτέλεσμα ευστάθειας ανεξάρτητο από το μέγεθος των αρχικών δεδομένων και της σταθεράς β καθώς η λύση παραμένει φραγμένη για κάθε $t \geq 0$ τουλάχιστον ως προς την L^2 νόρμα. Με προχωρημένες μεθόδους μπορεί ναδειχθεί ότι η λύση του αρχικού προβλήματος συγκλίνει σε κάποια θετική λύση ισορροπίας ή ενδεχομένως να παρουσιάζει έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο ως προς κάποια άλλη νόρμα.

1.7.4 Εξίσωση Burgers με μη γραμμική πηγή δύναμης μεγαλύτερης του τετραγώνου

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος αν η μη γραμμική πηγή στο αρχικό πρόβλημα είναι της μορφής βu^2 - δηλαδή τετραγωνικής - τότε η $\|u\|_{L^2}$ παραμένει φραγμένη για κάθε $t \geq 0$ ανεξάρτητα από το μέγεθος της παραμέτρου $\beta > 0$. Είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς αν αυτό το αποτέλεσμα εξακολουθεί να ισχύει σε περίπτωση που η μη γραμμική πηγή είναι μεγαλύτερου βαθμού.

Προκειμένου να το διαπιστώσουμε από αυτό θα θεωρήσουμε το πρόβλημα Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u^{2+\delta}, \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (1.42)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

όπου δ είναι κάποια θετική σταθερά.

Θα δείξουμε ότι είναι δυνατόν να καθορίσουμε αρχικά δεδομένα για την οποία η αντίστοιχη λύση δεν είναι δυνατόν να οριστεί για κάθε $t > 0$.

Θεώρημα 1.7.1 Θεωρούμε την κλασσική λύση $u(x, t)$ του αρχικού προβλήματος. Υπάρχουν αρχικά δεδομένα $u(x, 0) = u_0$ για τα οποία οι αντίστοιχες λύσεις δεν ορίζονται ολικά ως προς τον χρόνο

Απόδειξη

Θεωρούμε την πρώτη ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος ιδιοτιμών

$$-u_{xx} = \lambda u, 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

η οποία αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = \pi$ δηλαδή την ιδιοσυνάρτηση $\phi = \sin \pi x$.

Για κάποιο θετικό αριθμό n ο οποίος θα προσδιοριστεί στην συνέχεια θεωρούμε μια νέα ενεργειακή ποσότητα την

$$F(t) = \langle \phi^n u \rangle$$

Υπολογίζουμε πρώτα την παράγωγο ως προς t της $F(t)$. Παραγωγίζοντας την

$$F(t) = \langle \phi^n u \rangle$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$u_t = -uu_x + u_{xx} + \beta u^{2+\delta}$$

βρίσκουμε με παραγοντική ολοκλήρωση ότι

$$\begin{aligned} F_t(t) &= \langle \phi^n u_t \rangle = \langle \phi^n (-uu_x + u_{xx} + \beta u^{2+\delta}) \rangle = \\ &= -\pi^2 n F + n(n-1) \langle \phi^{n-1} \phi_x^2 u \rangle + \beta \langle \phi^n u^{2+\delta} \rangle + \frac{n}{2} \langle \phi^n \phi_x u^2 \rangle \end{aligned}$$

αφού $\phi = \sin \pi x$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$F_t \geq -n\pi^2 F + \beta \langle \phi^n u^{2+\delta} \rangle - \frac{1}{2} n\pi \langle \phi^{n-1} u^2 \rangle$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα την ανισότητα Hölder για να τροποποιήσουμε κατάλληλα την παραπάνω ανισότητα.

Συγκεκριμένα θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Hölder για την εκτίμηση του ολοκληρώματος

$$\langle \phi^{\frac{2n}{2+\delta}} u^2 \rangle = \int_0^1 \phi^{\frac{2n}{2+\delta}} u^2 dx$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για $f = 1$, $g = \phi^{\frac{2n}{2+\delta}} u^2$ για $p = \frac{2+\delta}{2}$, $q = \frac{2+\delta}{\delta}$ οι οποίοι ικανοποιούν την συνθήκη $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ έχουμε ότι

$$\langle \phi^{\frac{2n}{2+\delta}} u^2 \rangle = \int_0^1 \phi^{\frac{2n}{2+\delta}} u^2 dx \leq \left(\int_0^1 1 dx \right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \left(\int_0^1 \phi^n dx \right)^{\frac{2}{2+\delta}}$$

ή διαφορετικά

$$\langle \phi^n u^{2+\delta} \rangle^{2/(2+\delta)} \langle 1 \rangle^{\delta/(2+\delta)} \geq \langle \phi^{2n/2+\delta} u^2 \rangle$$

Επιλέγοντας $n = 1 + 2/\delta$ και αντικαθίστοντας βρίσκουμε:

$$\langle \phi^{1+2/\delta} u^{2+\delta} \rangle \geq \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle^{\frac{2+\delta}{2}}$$

Συγκρίνοντας τους όρους $\langle \phi^n u^{2+\delta} \rangle$ και $\langle \phi^{n-1} u^2 \rangle$ με τους $\langle \phi^{1+2/\delta} u^{2+\delta} \rangle$ και $\langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$ και λαμβάνοντας υπόψιν $n = 1 + 2/\delta$ βλέπουμε ότι

$$\langle \phi^n u^{2+\delta} \rangle = \langle \phi^{1+2/\delta} u^{2+\delta} \rangle$$

και

$$\langle \phi^{n-1} u^2 \rangle = \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$$

Με την αντιστοίχιση αυτή, χρησιμοποιούμε την

$$\langle \phi^{1+2/\delta} u^{2+\delta} \rangle \geq \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle^{\frac{2+\delta}{2}}$$

έτσι ώστε να πάρουμε την ανισότητα

$$F_t \geq -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 F + \beta \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle^{(2+\delta)/2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right) \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξί μέλος της παραπάνω ανίσωσης υπάρχουν οι όροι $\langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$ και $F(t) = \langle \phi^{(\delta+2)/\delta} u \rangle$

Σκοπός μας είναι να υπάρχει παντού ο όρος $\langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$

Αυτό θα επιτευχθεί με κατάλληλη χρήση της ανισότητας Cauchy Schwartz

$$\int_0^1 fg dx \leq \left(\int_0^1 f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2 dx \right)^{1/2}, \forall f, g \in L^2$$

Κατα αρχήν παρατηρούμε ότι

$$\langle \phi^{(\delta+2)/\delta} u \rangle = \int_0^1 \phi^{(\delta+2)/\delta} u dx = \int_0^1 \phi^{1/\delta} \phi^{(\delta+1)/\delta} u dx$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν την ανισότητα Cauchy Schwartz για $f = \phi^{1/\delta}$ και $g = \phi^{(\delta+1)/\delta} u$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \phi^{(\delta+2)/\delta} u \rangle &= \\ &= \int_0^1 \phi^{(\delta+2)/\delta} u dx \\ &= \int_0^1 \phi^{1/\delta} \phi^{(\delta+1)/\delta} u dx \\ &\leq \left(\int_0^1 \phi^{2/\delta} u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \phi^{2(\delta+1)/\delta} dx \right)^{1/2} \\ &= \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle^{1/2} \langle \phi^{2(\delta+1)/\delta} \rangle^{1/2} \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε ότι

$$\langle \phi^{(\delta+2)/\delta} u^2 \rangle \leq \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle \langle \phi^{2(\delta+1)/\delta} \rangle$$

Επειδή όμως

$$|\phi| = |\sin \pi x| \leq 1$$

έχουμε ότι

$$\langle \phi^{2(\delta+1)/\delta} \rangle = \int_0^1 \phi^{2(\delta+1)/\delta} dx \leq 1$$

και άρα

$$F(t)^2 = \langle \phi^{(\delta+2)/\delta} u \rangle^2 \leq \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$$

$$F_t \geq -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 G^{1/2} + \beta G^{(2+\delta)/2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)G$$

έχοντας ορίσει ότι

$$G(t) := \langle \phi^{2/\delta} u^2 \rangle$$

Έχουμε

$$G^{1/2} \geq F$$

Μέσω της ανισότητας

$$F_t \geq -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 G^{1/2} + \beta G^{(2+\delta)/2} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)G$$

θα προσδιορίσουμε κατάλληλη συνθήκη για τα αρχικά δεδομένα.

Πρώτα για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $x(t)$ ορίζουμε από το δεξί μέλος της ανισότητας

$$R(x(t)) = -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 x(t) + \beta x(t)^{2+\delta} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)x(t)^2$$

Είναι φανερό ότι

$$F_t \geq R(G^{1/2})$$

θέλουμε από την

$$R(x(t)) = -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 x(t) + \beta x(t)^{2+\delta} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)x(t)^2$$

να κατασκευάσουμε μια διαφορική ανισότητα η οποία να περιέχει μόνο την συνάρτηση F . Αυτή η απαίτηση θα μας οδηγήσει και στην διαμόρφωση των συνθηκών για τα αρχικά δεδομένα.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η αρχική συνθήκη $u(x, 0) = u_0(x)$ επιλέγεται έτσι ώστε για την

$$F(0) := \langle \phi^{(\delta+2)/\delta} u_0 \rangle^2$$

να ισχύει

$$R(F(0)) = -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 F(0) + \beta F(0)^{2+\delta} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)F(0)^2 > 0$$

Υπενθυμίζουμε ότι ασχολούμαστε με κλασσικές λύσεις. Κατά συνέπεια η συνάρτηση $F(t)$ είναι C^1 -συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Επομένως και η συνάρτηση $R(F(t))$ πρέπει να είναι συνεχής. Αρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_1 > 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$R(F(t)) = -\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 F(t) + \beta F(t)^{2+\delta} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)F(t)^2 > 0, \forall t \in (0, t_1)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι στο διάστημα $(0, t_1)$ ισχύει $R'(x) > 0$.

Επομένως η συνάρτηση $R(x(t))$ είναι αύξουσα στο $(0, t_1)$

Επομένως $R(G^{1/2}) \geq R(F), \forall t \in (0, t_1)$

$$\frac{dF(t)}{dt} \geq R(F(t)) > 0, \forall t \in (0, t_1)$$

Η $F(t)$ είναι αύξουσα στο $(0, t_1)$ ενώ ήδη είδαμε ότι και η $R(F(t))$ είναι επίσης αύξουσα στην $(0, t_1)$. Άρα και λόγω της συνέχειας της $R(F(t))$ θα πρέπει $R(F(t)) \neq 0$

Είναι μια διαφορική ανισότητα χωριζόμενων μεταβλητών μπορούμε να την ξαναγράψουμε στην μορφή

$$\frac{dF(t)}{R(F(t))} \geq t, \forall t \in (0, t_1)$$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0, t_1]$ βρίσκουμε ότι

$$\int_{F(0)}^{F(t_1)} \frac{dF}{R(F)} \geq t_1$$

Επίσης παρατηρούμε ότι στην έκφραση για τη $R(F)$ ο μεγαλύτερος βαθμός ως προς F είναι $2 + \delta > 2$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{F(0)}^{\infty} \frac{dF}{R(F)}$$

συγκλίνει. Επιπλέον ισχύει

$$\int_{F(0)}^{\infty} \frac{dF}{R(F)} \geq \int_{F(0)}^{F(t_1)} \frac{dF}{R(F)}$$

Λαμβάνουμε λοιπόν την σχέση

$$+\infty > \int_{F(0)}^{\infty} \frac{dF}{R(F)} \geq \int_{F(0)}^{F(t_1)} \frac{dF}{R(F)} \geq t_1$$

Ερχόμαστε με αυτό σε αντίθεση εάν υποθέσουμε ότι

$$t_1 = +\infty$$

επομένως η λύση δεν ορίζεται ολικά ως προς τον χρόνο.

Κεφάλαιο 2

Αριθμητικές εξομοιώσεις

2.1 Εξίσωση Burger με μη γραμμική τετραγωνική πηγή

Προκειμένου να εξετάσουμε αριθμητικά την επίδραση της παρουσίας μη γραμμικού τετραγωνικού όρου στην ευστάθεια των λύσεων της εξίσωσης Burger χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα Mathematica.

Το πρόβλημα που μελετήθηκε ήταν

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= u_{xx} + \beta u^2, x \in (0, 1), \beta > 0, t > 0 \\u(0, t) &= u(1, t) = 0, \forall t \geq 0 \\u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

όπου $\beta > 0$: η ένταση της μη γραμμικής πηγής.

Όπως είδαμε και παραπάνω εάν:

- $\|u_0\| < \frac{2}{\beta}$ τότε η λύση του προβλήματος συγκλίνει στην μηδενική λύση $u = 0$ ως προς την L^2 νόρμα, τουλάχιστον με εκθετικό ρυθμό. Είναι όμως και δυνατόν να συγκλίνει στην μηδενική λύση όταν δεν τηρείται η συνθήκη αυτή.
- $\|u_0\| > \frac{2}{\beta}$ είναι πιθανόν να συναντήσουμε φαινόμενα έκρηξης όπως η έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο.

Μπορεί δηλαδή η λύση να μην ορίζεται για κάθε $t > 0$ αλλά να υπάρχει χρόνος $T_{max} > 0$ ώστε η λύση να ορίζεται. Η παρουσία μη γραμμικών όρων όπως ο

βu^2 , $\beta > 0$ προδιαθέτει φαινόμενα έκρηξης.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αριθμητικής μελέτης με το πακέτο Mathematica. Χρησιμοποιήθηκε:

Η εντολή NDSolve για την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, εντολές διακριτοποίησης χώρου και χρόνου.

Στα πειράματά μας ορίσαμε διάφορα β προκειμένου να μελετήσουμε την συμπεριφορά της λύσης ανάλογα με την ένταση της μη γραμμικής τετραγωνικής πηγής,

καθώς και δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες την :

- Gaussιανή $u(x, 0) = Ae^{-100(-0.5+x)^2}$
- τριγωνομετρική $u(x, 0) = A\sin(\pi x)^2$

όπου A το πλάτος της συνάρτησης.

Στην συνέχεια για κάθε μία από τις αρχικές μας συνθήκες υπολογίσαμε την νόρμα της.

$$\|u_0\|^2 = \int_{-L}^L u_0^2(x) dx,$$

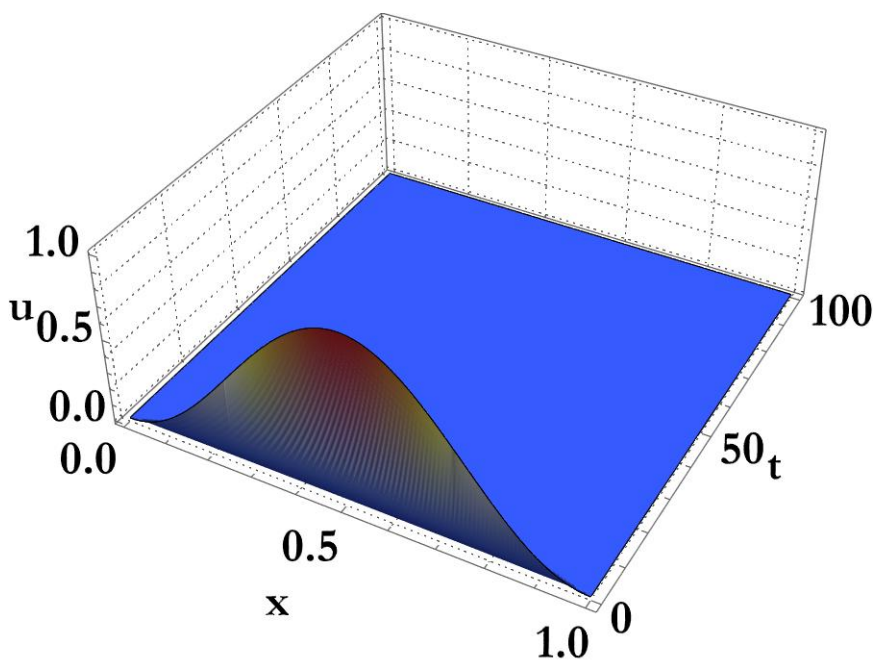
για $L = 1$.

Για $A = 1$ οι αρχικές συνθήκες με τις αντίστοιχες νόρμες είναι οι παρακάτω:

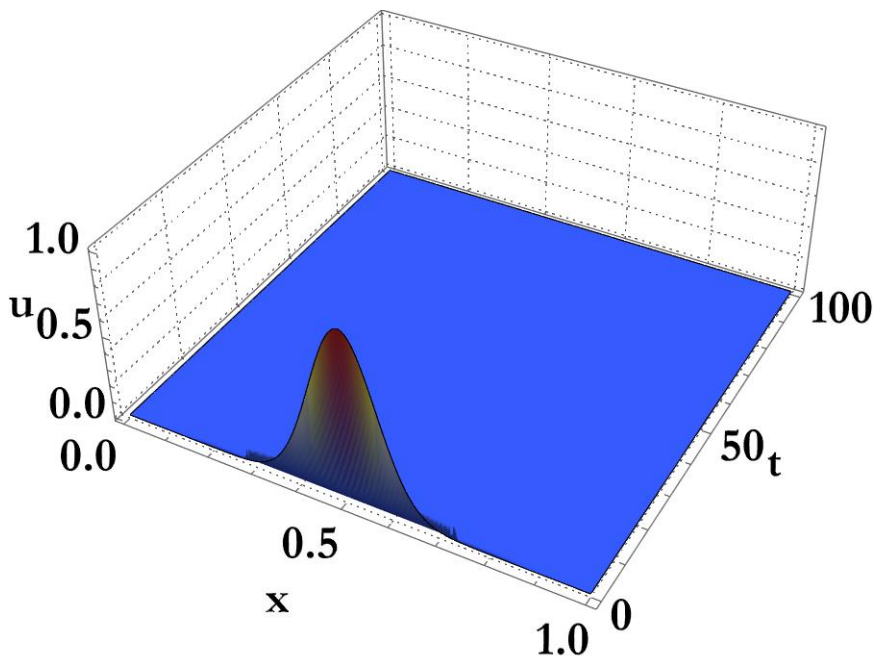
$$u_0 = e^{-100(-0.5+x)^2}, \quad \|u_0\| = 0,354022$$

$$u_0 = \sin(\pi x)^2, \quad \|u_0\| = 0,612372$$

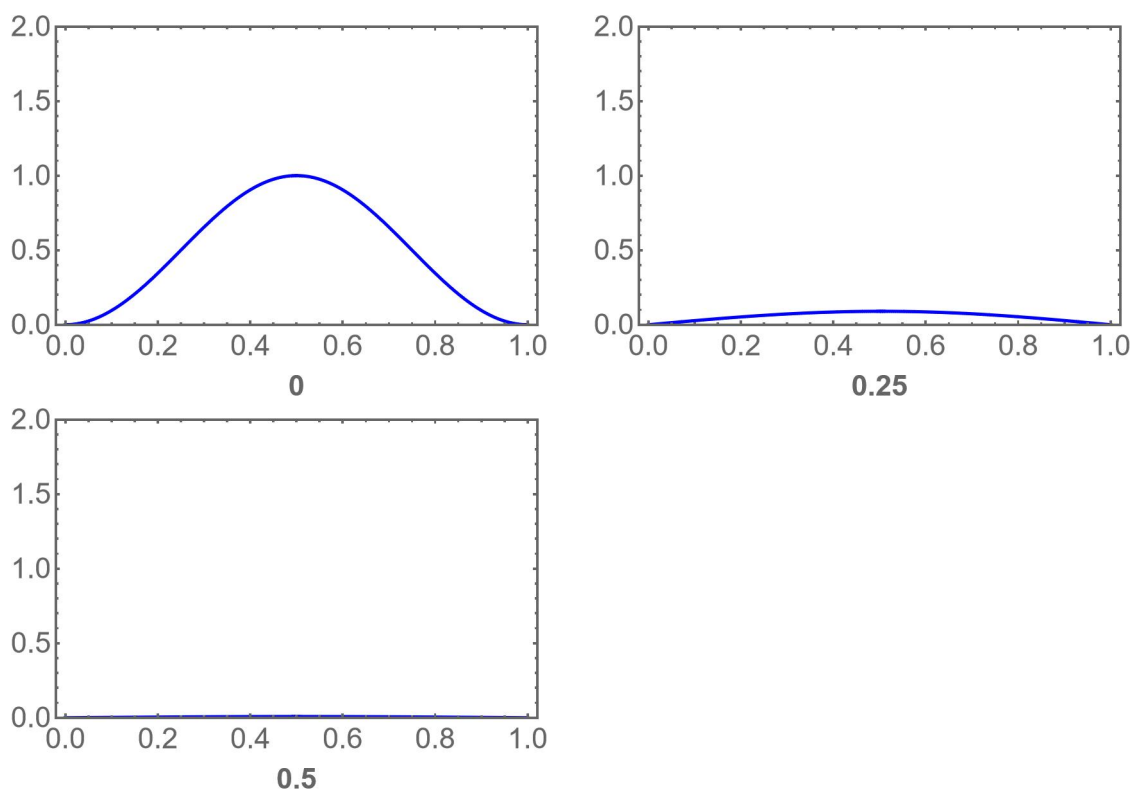
- για $\beta = 3$, $\frac{2}{\beta} \simeq 0,67$ και σύμφωνα με το θεώρημα $\|u_0\| < \frac{2}{\beta}$ η σύγκλιση στην μηδενική λύση θα πρέπει σίγουρα να επιτυγχάνεται.



Σχήμα 2.1: Παρατηρούμε την σύγκλιση στην μηδενική λύση για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη.



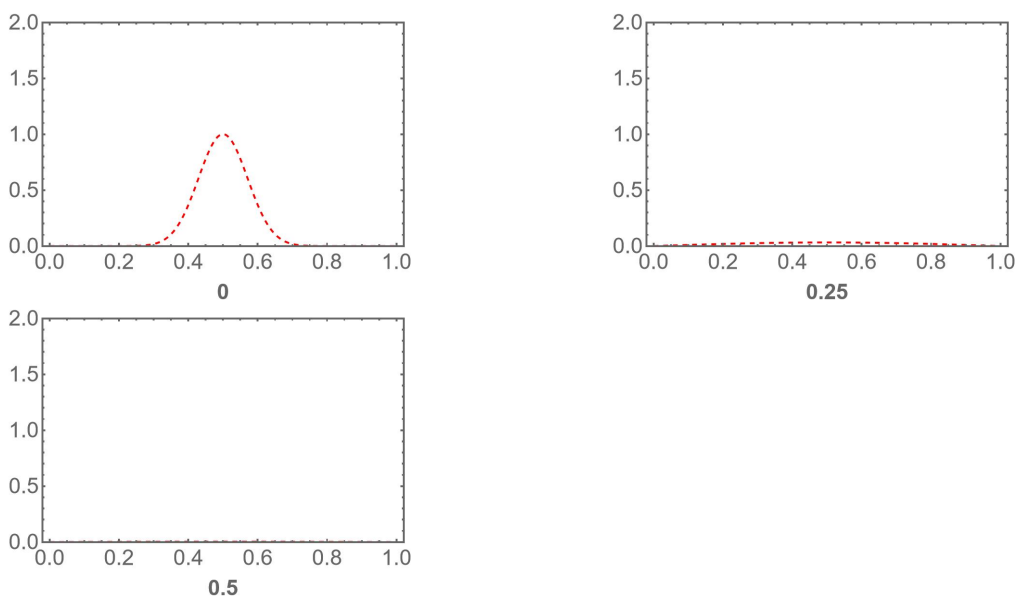
Σχήμα 2.2: Παρατηρούμε την σύγκλιση στην μηδενική λύση για την εκθετική αρχική συνθήκη.



Σχήμα 2.3: Παρατηρούμε την σύγκλιση στην μηδενική λύση για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη

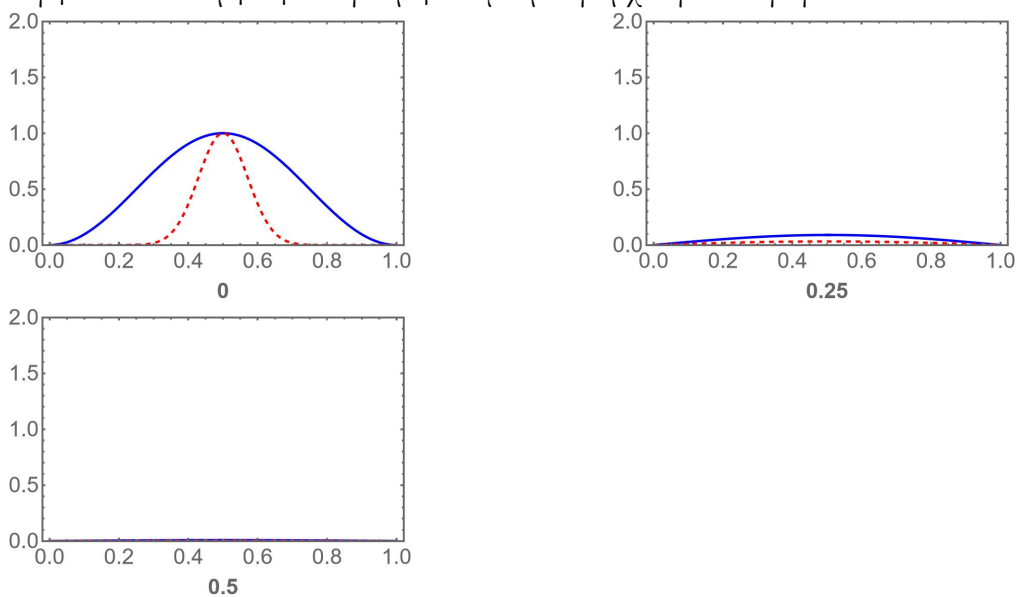
Στο Σχήμα 2.3 βλέπουμε στιγμιότυπα της λύσης για $t = 0$ (αρχική συνθήκη), $t = 0.25$, $t = 0.5$ (όπου έχει επιτευχθεί η σύγκλιση της λύσης στο 0) για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη.

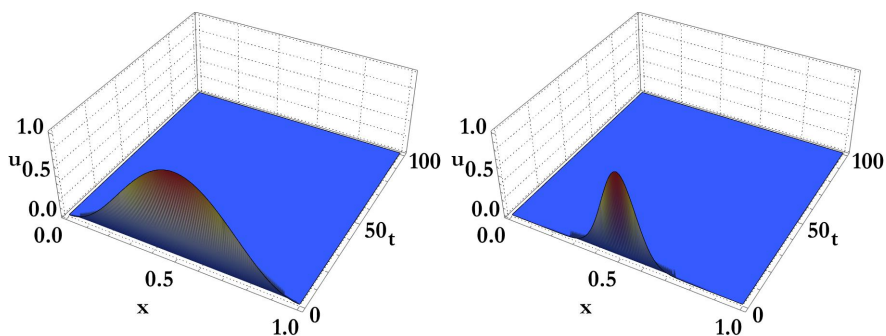
Στο σχήμα 2.4 βλέπουμε τα στιγμιότυπα της λύσης για $t = 0$ (αρχική συνθήκη), $t = 0.25$, $t = 0.5$ (όπου έχει επιτευχθεί η σύγκλιση της λύσης στο 0) για την Gaussιανή αρχική συνθήκη.



Σχήμα 2.4: Παρατηρούμε την σύγκλιση στην μηδενική λύση για την Gaussιανή αρχική συνθήκη

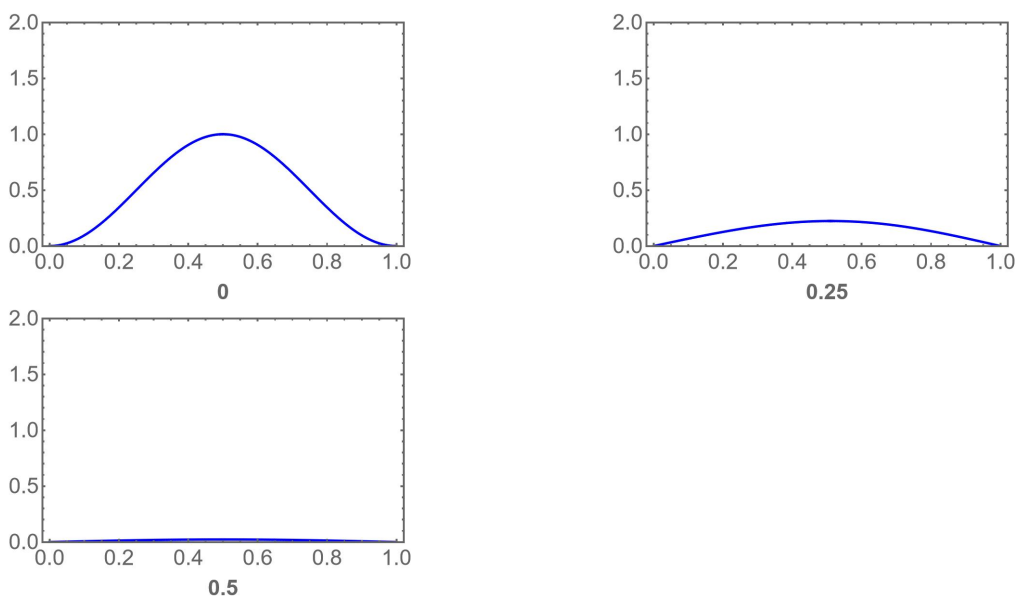
Σχήμα 2.5: Τα στιγμιότυπα της λύσης για $t = 0$ (αρχική συνθήκη), $t = 0.25$, $t = 0.5$ (όπου έχει επιτευχθεί η σύγκλιση στην μηδενική λύση) και για τις δύο αρχικές συνθήκες ταυτόχρονα. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση προς την μηδενική λύση γίνεται πιο αργά για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη.





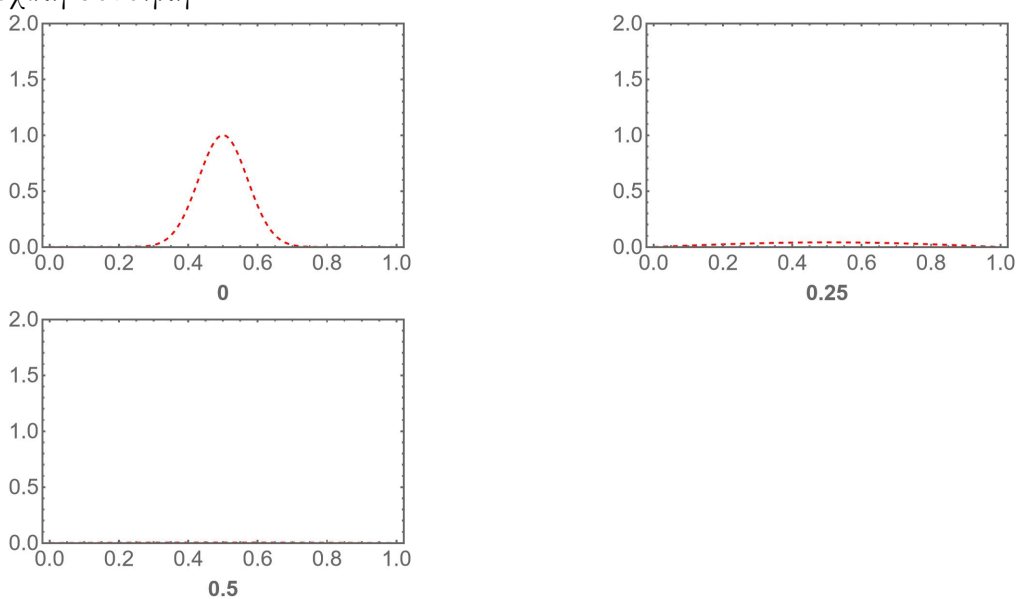
Σχήμα 2.6: Και για τις δύο αρχικές συνθήκες παρατηρούμε σύγκλιση στην μηδενική λύση εάν και $\|u_0\| > \frac{2}{\beta}$

- Για $\beta = 10$, $\frac{2}{\beta} = 0,2$
στο σχήμα 2.6 παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή εάν και $\|u_0\| > \frac{2}{\beta}$ και από ότι είδαμε και παραπάνω είτε επιτυγχάνεται σύγκλιση στην μηδενική λύση είτε θα έχουμε έκρηξη της λύσης, εδώ έχουμε σύγκλιση στην μηδενική λύση και για τις δύο αρχικές συνθήκες.
Στα σχήματα 2.7, 2.8, 2.9 παρατηρούμε τα στιγμιότυπα των λύσεων.

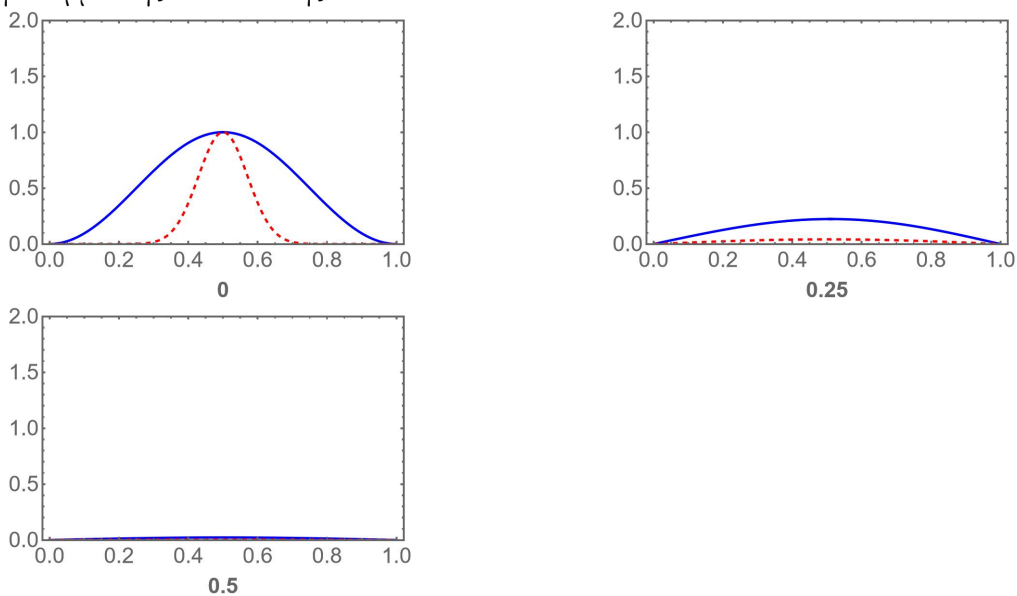


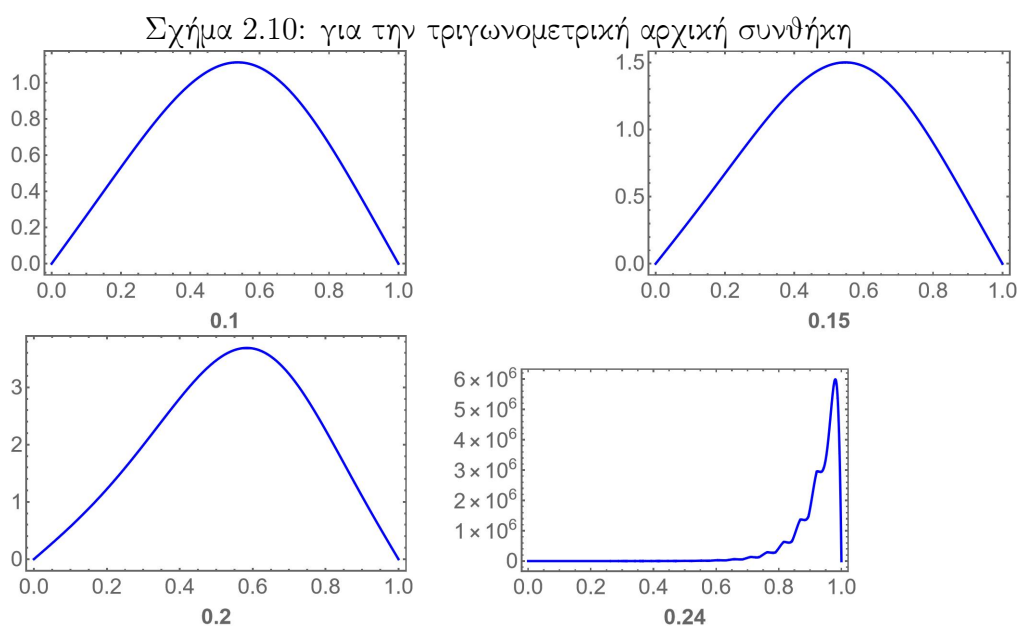
Σχήμα 2.7: Τα στιγμιότυπα της λύσης για $t = 0$ (αρχική συνθήκη), $t = 0.25$, $t = 0.5$ (όπου έχει επιτευχθεί η σύγκλιση στην μηδενική λύση) για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη

Σχήμα 2.8: Τα στιγμιότυπα της λύσης για $t = 0$ (αρχική συνθήκη), $t = 0.25$, $t = 0.5$ (όπου έχει επιτευχθεί η σύγκλιση στην μηδενική λύση) για την εκθετική αρχική συνθήκη



Σχήμα 2.9: Τα στιγμιότυπα της λύσης για $t = 0$ (αρχική συνθήκη), $t = 0.25$, $t = 0.5$ (όπου έχει επιτευχθεί η σύγκλιση στην μηδενική λύση) και για τις 2 αρχικές συνθήκες ταυτόχρονα. Και εδώ παρατηρούμε ότι η λύση για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη συγκλίνει πιο αργά στο 0. Φαίνεται πως η πιο αργή σύγκλιση της τριγωνομετρικής αρχικής συνθήκης από ότι της Gaussιανής έχει να κάνει με ότι η νόρμα της τριγωνομετρικής αρχικής συνθήκης είναι μεγαλύτερη από την νόρμα της Gaussιανής.





Για $\beta > 13$ παρατηρούμε ότι η λύση του προβλήματος δεν ορίζεται ολικά ως προς τον χρόνο. Πρόκειται για κατωφλική τιμή.

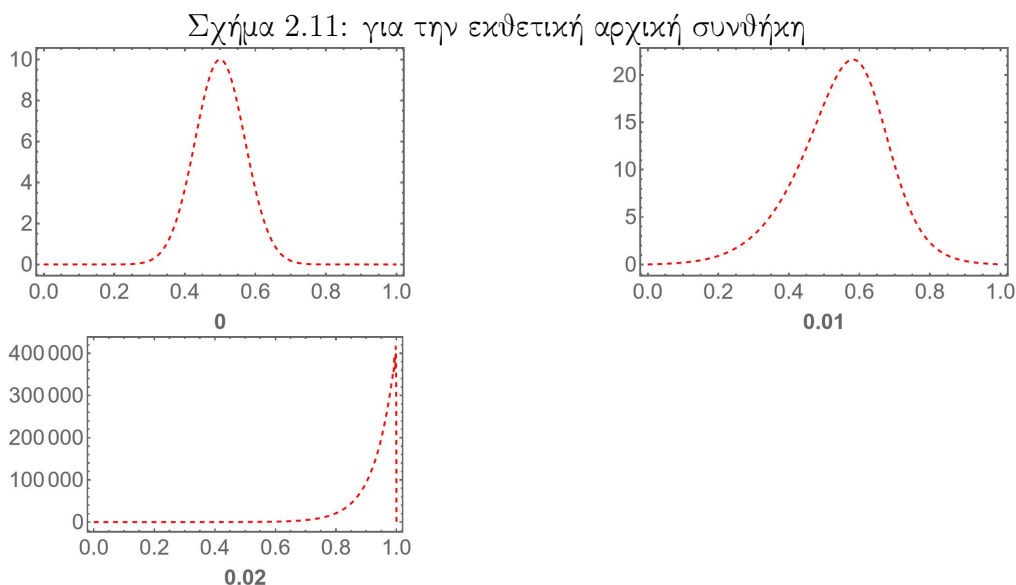
- Για $\beta = 15 \frac{2}{15} = 0,13$

Η $\|u_0\| > \frac{2}{\beta}$ και για τις δύο αρχικές συνθήκες.

Το Mathematica δίνει μια αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης της λύσης, αναφέροντας πιθανή ύπαρξη ανωμαλίας για την χρονική στιγμή $T_{max} = 0.2495$ για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη.

Στο σχήμα 2.10 παρατηρούμε το χωρικό προφίλ της λύσης του προβλήματος. Βλέπουμε στιγμιότυπα της λύσης για διαδοχικές χρονικές στιγμές μεταξύ $t = 0.10$ και $t = 0.24$. Βλέπουμε μεγάλη αύξηση της λύσης καθώς προσεγγίζει τον χρόνο έκρηξης.

Στο σχήμα 2.11 παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά της λύσης για την εκθετική αρχική συνθήκη μεταξύ $t = 0$ και $t = 0.02$.



Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι επιβεβαιώνεται το θεώρημα για την σύγκλιση στην μηδενική λύση. Επίσης από μια ορισμένη κατωφλική τιμή της β (ένταση της γραμμικής πηγής) φαίνεται ότι καμιά λύση δεν ορίζεται ολικά ως προς τον χρόνο, δηλαδή για μεγάλες τιμές του β .

2.2 Εξίσωση Burger με μη γραμμική πηγή μεγαλύτερης της τετραγωνικής

Προκειμένου να εξετάσουμε αριθμητικά την επίδραση της παρουσίας μη γραμμικού όρου μεγαλύτερου του τετραγωνικού στην ευστάθεια των λύσεων της εξίσωσης Burger χρησιμοποιήσαμε και εδώ το πρόγραμμα Mathematica.

Το πρόβλημα που μελετήθηκε ήταν

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x &= u_{xx} + \beta u^{2+\delta}, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\
 u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\
 u(x, 0) &= u_0(x)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Μελετάμε την περίπτωση όπου $\delta = 1$ δηλαδή έχουμε κυβική μη γραμμικότητα. Θεωρούμε την αρχική συνθήκη $u_0 = 10\sin(\pi x)$
 Για κάθε αρχική συνθήκη μπορούμε να βρούμε την κατωφλική τιμή για την

ένταση της πηγής β με την βοήθεια του τύπου:

$$F(0) = \langle \phi^3 u_0 \rangle$$

και της ανίσωσης

$$-\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)\pi^2 F(0) + \beta F(0)^{2+\delta} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)F(0)^2 > 0$$

Για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη $u_0 = 10\sin(\pi x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F(0) &= \\ &= \langle \phi^3 u_0 \rangle = \int_0^1 (\sin \pi x)^3 10 \sin(\pi x) dx = \\ &= \int_0^1 10 (\sin \pi x)^4 dx = 3.75 \end{aligned}$$

και

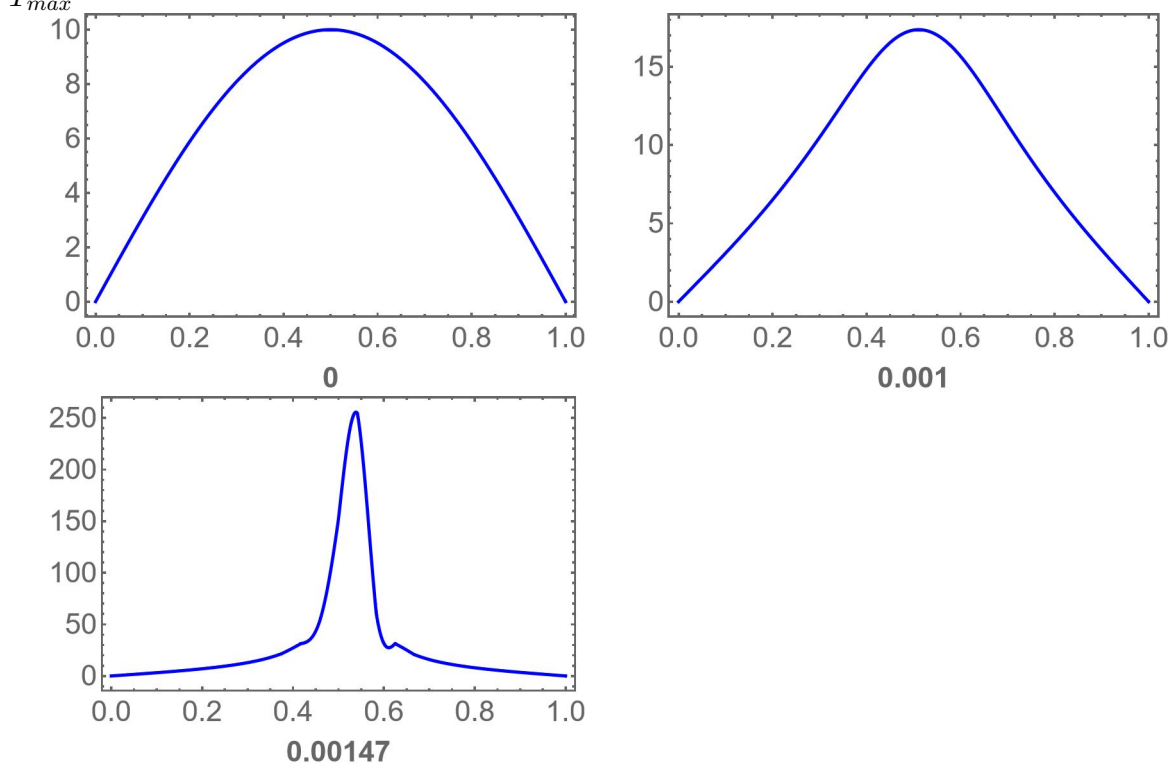
$$\beta F(0)^3 > \frac{3}{2}\pi F(0)^2 + 3\pi^2 F(0)$$

Επομένως βρίσκουμε την κρίσιμη τιμή β :

$$\beta > \frac{1.5\pi 3.75^2 + 3\pi^2 3.75}{3.75^3} \approx 3.36$$

Για $\beta = 3.5$ το Mathematica δίνει αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης της λύσης αναφέροντας την ύπαρξη ανωμαλίας για $T_{max} = 0,00147$ για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη.

Σχήμα 2.12: Παρατηρούμε τα στιγμιότυπα της λύσης για την τριγωνομετρική αρχική συνθήκη για t από 0 έως 0,002, βλέπουμε μεγάλη αύξηση της λύσης για κάθε χρονικό βήμα καθώς και η έκρηξη της λύσης καθώς προσεγγίζεται η τιμή T_{max}



Και για τιμές μικρότερες όμως της κρίσιμης τιμής η λύση εκρύνεται, π.χ για $\beta = 2$ παίρνουμε αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης $T_{MAX} = 0.002624485838665052$.

Όσο μικραίνει το β τόσο πιο μεγάλη γίνεται η αριθμητική εκτίμηση του χρόνου έκρηξης, όμως για την τιμή του $\beta = 0.179$ παρατηρούμε ότι η λύση ορίζεται ολικά ως προς τον χρόνο- οπότε και η τιμή αυτή του χρόνου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως κατωφλική.

Συνοψίζοντας οι αριθμητικές εξομοιώσεις, έδωσαν ενδείξεις για το ότι η συνθήκη που δίνει την κρίσιμη τιμή δεν πρέπει να είναι βέλτιστη: Επιλύοντας το πρόβλημα με την ίδια αρχική συνθήκη και για τιμές μικρότερες της «κρίσιμης τιμής», παρατηρήσαμε φαινόμενα έκρηξης. Θεωρώντας ολοένα και μικρότερες τιμές, για την παράμετρο β παρατηρήσαμε ότι η λύση εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο με τον χρόνο έκρηξης να είναι πιο μεγάλος για μικρότερες τιμές της β (δηλαδή η λύση παρέμενε φραγμένη για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα).

Βιβλιογραφία

Burgers, J. M. (1940) Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. *Nederl. Akad. Wefensh.*

Chorin, A.J. & Marsden, J.E. (1990) *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*-2nd edition. Springer.

Cole, J.D. (1951) On a Quasilinear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics*.

Partial Differential Equation: $u_t + u u_x = \epsilon u_{xx}$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. *Comm. Pure Appl. Math.*

Shingavera, I. & Lizárraga-Celaya, C. (2011) *Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica*. Springer.

Straughan, B. (2004) *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, 2nd edn. Springer.

Tveito, A. & Winther, R. (2005) *Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach*. Springer.

Zachmanoglou, E.C. & D.W. Thoe (1976) *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover Publications.

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 και τα άρθρα 2,4,6 παρ. 3 του Ν. 1256/1982, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον.