Σχολή

Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

«Ασαφείς αρνήσεις,ασαφείς συνεπαγωγές και Εφαρμογές»

Μαγγενάκης Παναγιώτης

Επιβλέπων καθηγητής

Παπαδόπουλος Βασίλειος

Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη , Μάρτιος 2023

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας , θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Παπαδόπουλο Βασίλεο , για την πολύτιμη βοήθεια , άψογη συνεργασία, υποστήριξη και εμπιστοσύνη .

Επίσης , θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους γονείς μου και όλους τους ανθρώπους που με πίστεψαν και με βοήθησαν στην διάρκεια των σπουδών μου.

Αφιερώνεται στους γονείς μου

Γεώργιο και Μαγδαληνή

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Ένας αγαπημένος μου καθηγητής, μου είχε πει κάποτε: Τα μαθηματικά είναι μια πολύ αυστηρή επιστήμη. Τίποτα δεν τίθεται σε διαπραγμάτευση. Δεν υπάρχει λίγο λάθος ή λίγο σωστό. Σε οτιδήποτε μαθηματικώς τεκμηριωμένο δεν χωρά καμία αμφισβήτηση. Από μαθηματικής άποψης λοιπόν, κάτι «θα ισχύει» εξολοκλήρου ή «δεν θα ισχύει καθόλου». Προσεγγίζοντας τις παραπάνω λογικές προτάσεις, ως μαθηματικές προτάσεις, θα μπορούσε κανείς να πει ότι εδώ έχουμε την απλή εφαρμογή της «αρχής της αντίφασης». Ο νόμος των βασικών δύο άκρων του «ναι» και του «όχι». Στη μαθηματική κλασική λογική, κυριαρχούν το «ναι» ή το «όχι». Κάτι άλλο, έξω από αυτά, ή ενδιάμεσα από αυτά, δεν υπάρχει. Η μήπως υπάρχει;

Μπορούν άραγε τα μαθηματικά να μην είναι απόλυτα; Να μην είναι αυστηρά; Η απάντηση είναι η αναμενόμενη: Ακόμα και στην πιο χαλαρή τους μορφή, τα μαθηματικά στη βάση τους θα παραμένουν πάντα αυστηρά!

Στην παρούσα εργασία όλη η προσπάθεια που θα γίνει θα αφορά στο πόσο καλά καθορισμένο και μαθηματικά βαθμολογημένο είναι το γκρι που θα συναντήσουμε, το ενδιάμεσο ή ανάμεσα στο άσπρο και το μαύρο. Με απλά λόγια, θα δώσουμε μια απάντηση στο ερώτημα: Είναι όλα στα μαθηματικά άσπρο ή μαύρο; Δεν υπάρχει γκρι; και αν υπάρχει, είναι ένα και μοναδικό; Πόσες αποχρώσεις του γκρι μπορεί να υπάρχουν μεταξύ του άσπρου και του μαύρου; Η απάντηση είναι και πάλι μαθηματική. Όπως υπάρχει το γκρι και στη ζωή, υπάρχει και στα μαθηματικά. Και φυσικά, όχι απλώς ένα γκρι, αλλά άπειρα! Ένας ατέλειωτος, μη -πεπερασμένος όγκος από γκρι αποχρώσεις. Μια σημαντική σκέψη που περνά από το μυαλό του αναγνώστη στην παρούσα φάση είναι υπό την μορφή ερώτησης αν «η αντιπαραβολή της ζωής μας και των μαθηματικών ευσταθεί» και εδώ η απάντηση είναι πολύ απλή. Τα μαθηματικά υπάρχουν για να ερμηνεύουν, να εξηγούν και να διευκολύνουν τη ζωή και την καθημερινότητά μας. Δεν θα μπορούσε να συμβεί τίποτε άλλο από το γεγονός πως τα μαθηματικά θα αποτελούν μια ρεαλιστική απεικόνιση της ίδιας της ανθρώπινης ζωής.

Ας δούμε όμως όλα τα παραπάνω σε απλές πρακτικές εφαρμογές της καθημερινότητάς μας. Στο ερώτημα αν όλα στη ζωή είναι άσπρο ή μαύρο και αν υπάρχει στο ενδιάμεσο και το χρώμα γκρι, πως πιστεύεται θα απαντούσε ένας ποδοσφαιριστής που βρίσκεται μπροστά στον αντίπαλο τερματοφύλακα, λίγα δευτερόλεπτα πριν σουτάρει για να σκοράρει; Είναι προφανές ότι στο μυαλό του ποδοσφαιριστή υπάρχει το γκολ ως άσπρο και η αστοχία του γκολ ως μαύρο. Κάτι ενδιάμεσο υπάρχει; Μπορεί να υπάρχει; Στο μυαλό ενός καλαθοσφαιριστή λίγο πριν σουτάρει προς το καλάθι υπάρχει κάτι ενδιάμεσο, ανάμεσα στο να πετύχει το καλάθι ή να αστοχήσει; Ας πάρουμε με την ίδια λογική ένα μαθητή που δίνει εξετάσεις. Η διτιμία είναι αυτονόητη. Ο μαθητής είτε θα περάσει τις εξετάσεις, είτε θα αποτύχει. Μπορεί να υπάρχει κάτι ενδιάμεσο σε αυτό; Η απάντηση είναι φυσικά «όχι»! Τι συμβαίνει λοιπόν; Είναι εν τέλει το γκρι κομμάτι της ζωής και της καθημερινότητάς μας, ναι ή όχι; Εδώ θα δώσουμε ξανά την απάντηση «ναι», αφού όμως πρώτα αναφέρουμε άλλο ένα παράδειγμα, το οποίο θα ξεκαθαρίσει αρκετά τα πράγματα.

Έχουμε μια ηλεκτρική κουζίνα. Η κουζίνα αυτή είναι αναμμένη, είτε σβηστή. Έχουμε δηλαδή την κλασική διτιμία. Το «ναι» αναμμένη και το «όχι» σβηστή. Αν όμως δώσουμε λίγο περισσότερο βάση στον τρόπο λειτουργίας της ηλεκτρικής αυτής κουζίνας κοιτώντας τους διακόπτες της θα προσέξουμε τα εξής: Ο διακόπτης ξεκινάει από την ένδειξη 0 (σβηστή κουζίνα) και μετά βαθμολογεί διάφορα στάδια λειτουργίας. Αυτό εξαρτάται βέβαια από το εκάστοτε μοντέλο και την εταιρεία κατασκευής. Το σίγουρο είναι ότι όσο ο διακόπτης θα γυρίζει τόσο πιο ψηλά θα ανεβαίνει η θερμοκρασία της κουζίνας και τόσο πιο μεγάλος θα είναι ο «βαθμός λειτουργίας» της. Δηλαδή αν ο διακόπτης έχει επάνω του τις ενδείξεις 0,1,2,3,4,5, τότε στην ένδειξη 1 θα λειτουργεί στο 20% των δυνατοτήτων της κουζίνας, στην ένδειξη 2 στο 40% των δυνατοτήτων, ομοίως στην ένδειξη 3 στο 60% , στην ένδειξη 4 στο 80% και τέλος στην ένδειξη 5 η κουζίνα θα λειτουργεί στο 100% των δυνατοτήτων της. Τι μας δείχνει αυτό το παράδειγμα; Ότι προφανώς για τον τρόπο και το βαθμό λειτουργίας της ηλεκτρικής κουζίνας, υπάρχει και άσπρο και μαύρο και γκρι. Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω παραδείγματα που έγιναν σε μορφή απλών προτάσεων-ερωτημάτων μας δίνουν να καταλάβουμε ότι όντως το «γκρι» υπάρχει, ναι το ενδιάμεσο υπάρχει, αλλά εξαρτάται πάντα και μόνο από τον τρόπο και το είδος της ερώτησης που θα θέσουμε εμείς ως προβληματισμό.

Έχοντας πλέον αποσαφηνίσει τον τρόπο που θα προσεγγίζουμε τα προβλήματα αυτά, σειρά έχει να αναπτύξουμε το συλλογιστικό μας για τη μέθοδο που θα ακολουθήσουμε ώστε να μπορούμε να σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις να δίνουμε σαφή μαθηματική απάντηση. Αυτός είναι ένας από τους ουσιαστικούς στόχους της εργασίας. Να μπορέσουμε να αποσαφηνίσουμε στον αναγνώστη τη διαφορά μεταξύ κλασικών και ασαφών προτάσεων και κατ' επέκταση κλασικών και ασαφών συνόλων. Αφού δώσουμε όλους τους ορισμούς που αφορούν τα κλασικά σύνολα και τις πράξεις με αυτά, θα περάσουμε στον ορισμό και τις πράξεις που αφορούν στα ασαφή σύνολα. Ο τομέας της ασαφούς λογικής θα και η έννοια της ασάφειας αυτής καθαυτής συνδέονται με χώρους μερικής διάταξης. Δηλαδή τα ζεύγη των σημείων μέσα στο χώρο που θα μελετούμε, θα παρουσιάζουν ελάχιστο άνω φράγμα, μέγιστο κάτω φράγμα και σχέσεις ανισο-ισότητας μεταξύ τους. Για αυτό τον λόγο είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε μια εκτενή αναφορά στα δικτυωτά.

Μελετώντας στη συνέχεια σε βάθος τις αρνήσεις θα δούμε ότι το σύνολο των ασαφών κιαι δυνατών συνεπαγωγών δεν αποτελούν πλήρες δικτυωτό, αν και θα αποτελούν πάντα επιμεριστικό δικτυωτό. Αντίστοιχα μετά τις αρνήσεις θα μελετήσουμε τις συνεπαγωγές με το σύνολο των συνεπαγωγών να αποτελούν ένα πλήρες και επιμεριστικό δικτυωτό, θα μελετήσουμε τον ορισμό και τον τρόπο λειτουργίας των αρνήσεων. Τις ισχυρές και δυνατές αρνήσεις. Θα δοκιμάσουμε να πειραματιστούμε κατασκευάζοντας και ισχυρές και δυνατές αρνήσεις, θα δώσουμε βαρύτητα σε μια ιδιοκατασκευή μιας οικογένειας δυνατών αρνήσεων. Από εκεί θα περάσουμε στις συνεπαγωγές, θα δώσουμε ορισμός και παραδείγματα. Θα ορίσουμε και αξιωματικά τις ασαφείς συνεπαγωγές. Θα δοθούν αναλυτικά αποδείξεις για αξιώματα που αφορούν τις ασαφείς συνεπαγωγές και μετά θα περάσουμε σε κατασκευές ασαφών συνεπαγωγών. Θα χρησιμοποιήσουμε τις αρνήσεις που θα κατασκευάσουμε και με μια γενίκευση της κλασικής συνεπαγωγής θα κατασκευάσουμε και εμείς τις δικές μας συνεπαγωγές. Θα παρουσιαστούν δύο ιδιαίτερες εφαρμογές που θα μας βοηθήσουν να χρησιμοποιήσουμε τις συνεπαγωγές που κατασκευάσαμε. Θα εξετάσουμε τις συνεπαγωγές σε μικρούς και μεγάλους βαθμούς αλήθειας ώστε να αποφασίσουμε αν και κατά πόσο είναι λειτουργικές.

Στο τέλος αυτής της εργασίας θα αναφέρουμε τα συμπεράσματα και τα πορίσματα των εφαρμογών αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 . Από την κλασική στην ασαφή λογική

1.1 Εισαγωγή

Το πέρασμα από τη κλασική στην ασαφή λογική δεν θα μπορούσε ποτέ να γίνει χωρίς αναλυτική επεξήγηση και οργανωτική παράθεση όλων των ορισμών και των θεωρημάτων. Για να φτάσουμε όμως εκεί θα πρέπει πρώτα να απαντήσουμε στα ερωτήματα:

Τι είναι κλασική λογική;

Τι είναι ασαφής λογική;

Πώς λειτουργεί ο προτασιακός λογισμός;

Ποιες είναι οι πιο δημοφιλείς πράξεις μεταξύ των ασαφών συνόλων;

Αρχικά θα πρέπει να διευκρινίσουμε πως η κλασική αλλά και η ασαφής λογική διέπονται από σύνολα και προτάσεις, οι οποίες παράγουν τέτοια σύνολα.

Συνεπώς πίσω από κάθε τέτοια πρόταση βρίσκεται ένα σύνολο στοιχείων που αντιστοιχίζονται με αυτή την πρόταση και ένα άλλο σύνολο στοιχείων που απλώς δεν αντιστοιχίζονται με την πρόταση.

Για παράδειγμα:

1) «Η Αθήνα βρίσκεται στην Ελλάδα»
2) «Στους 3^{o}C έχει αρκετό κρύο»
3) «Το 5 είναι άρτιος αριθμός»
4) «Πού θα πάμε απόψε;»
5) «Το ξενοδοχείο είναι….»

Στις παραπάνω προτάσεις έχουμε τις εξής παρατηρήσεις: Η πρώτη πρόταση είναι αληθής. Αν θεωρούσαμε λοιπόν την υπόθεση ότι τίθεται ως ερώτηση γεωγραφίας σε ένα σχολείο της χώρας του Μεξικό, όσοι απαντήσουν πως η πρόταση είναι αληθής ανήκουν στο σύνολό μας, όσοι απαντήσουν ότι η πρόταση είναι λάθος δεν ανήκουν στο ζητούμενο σύνολο. Με έναν τέτοιο απλό τρόπο έχουμε κατασκευάσει σύνολα της κλασικής λογικής, κάποιο να επαληθεύει την πρόταση και κάποιο όχι. Από την άλλη η πρόταση 3) είναι μια ψευδής πρόταση. Συνεχίζοντας η πρόταση 4) είναι μια πρόταση που δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε αληθής, ούτε ψευδής.

Βλέποντας την πρόταση 5) μπορούμε να πούμε πως είναι μια πρόταση χωρίς νόημα!

Προφανώς οι προτάσεις χωρίς νόημα δεν μπορούν να χαρακτηριστούν αληθείς ή ψευδείς.

Συνεπώς οι προτάσεις χωρίς νόημα δεν θα μας απασχολήσουν. Επίσης οι προτάσεις με νόημα, που παρ΄όλα αυτά δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως ψευδείς ή αληθείς, όπως η πρόταση 4), δεν θα μας απασχολήσουν επίσης.

Δεν έχουμε αναφερθεί ακόμα στην πρόταση 2). Η πρόταση 2) είναι μια από τις προτάσεις με νόημα. Άρα θα εξετάσουμε αν είναι αληθής, ψευδής ή τίποτα από τα δύο. Τι θα γινόταν όμως αν η πρόταση 2) είναι ταυτόχρονα και τα δύο; Δηλαδή, αν η πρόταση 2) είναι ταυτόχρονα και ψευδής; Εδώ βρισκόμαστε μπροστά σε μια φράση της ασαφούς λογικής. Γιατί ασαφής; Ο χαρακτηρισμός «αρκετό κρύο» είναι μια εννοιολογική ασάφεια. Και αυτό γιατί πέραν του γεγονότος ότι δεν προσδιορίζει το πόσο ακριβώς είναι αυτό το αρκετό κρύο, η φράση αρκετό μπορεί να ερμηνευτεί διαφορετικά, ανάλογα με συνθήκες και παραμέτρους ρευστές και απρόβλεπτες.

Για παράδειγμα η θερμοκρασία 3^oC για κάποιον που ζει στην Ελλάδα μπορεί όντως να χαρακτηριστεί ως «αρκετό κρύο» αλλά για έναν κάτοικο της Νορβηγίας θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «καθόλου κρύο». Δεδομένων των καιρικών διαφορών Ελλάδας και Νορβηγίας η μεγάλη απόκλιση μεταξύ των δύο απαντήσεων είναι απόλυτα δικαιολογημένη. Πιθανώς, για έναν κάτοικο του Κατάρ η θερμοκρασία 3^oC να μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «πάρα πολύ κρύο» και ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός θα ήταν απόλυτα δικαιολογημένος.

Κατά συνέπεια, καταλαβαίνουμε όλοι πως οι προτάσεις που αφορούν την ασαφή λογική είναι αυτές που ξεφεύγουν από την γνωστή αρχή της αντίφασης. Δηλαδή ξεφεύγουμε από το σύνολο των απαντήσεων Ναι → 1 και Όχι → 0 και βρισκόμαστε πλέον σε κάθε πιθανό σημείο χανήκει [0,1]. Άρα η γενίκευση αυτή της κλασικής λογικής του {0,1}, είναι αυτή που μας δίνει τον δρόμο προς την ασαφή λογική και το σύνολο [0,1] για όλα τα πιθανά αποτελέσματα της ασαφούς πρότασης που θα εξετάσουμε.

Ας έχουμε εδώ υπόψιν ότι όλες οι ασαφείς προτάσεις αποτελούν γενίκευση-προέκταση αυτών της κλασικής λογικής. Επίσης πολλά από τα σύνολα της κλασικής λογικής μπορούν να παρουσιάσουν ιδιότητες που θα τα κάνουν συγχρόνως και ασαφή σύνολα.

Πριν ακόμα δώσουμε ορισμούς και θεωρήματα της ασαφούς λογικής, ας δούμε πως θα αντιμετωπίζαμε μια πρόταση που περιέχει ασάφεια και πως θα κατασκευάζαμε πρόχειρα ένα ασαφές σύνολο που θα δηλώνει τον «βαθμό αλήθειας» της πρότασής μας. Ας θεωρήσουμε την πρόταση: «Το αυτοκίνητο είναι παλαιό;».

Είναι προφανές ότι στην παραπάνω ερώτηση μπορούν να δοθούν οι απαντήσεις:

1) «Ναι είναι»
2) «Όχι δεν είναι»

Που κυμαίνονται στο φάσμα της κλασικής λογικής.

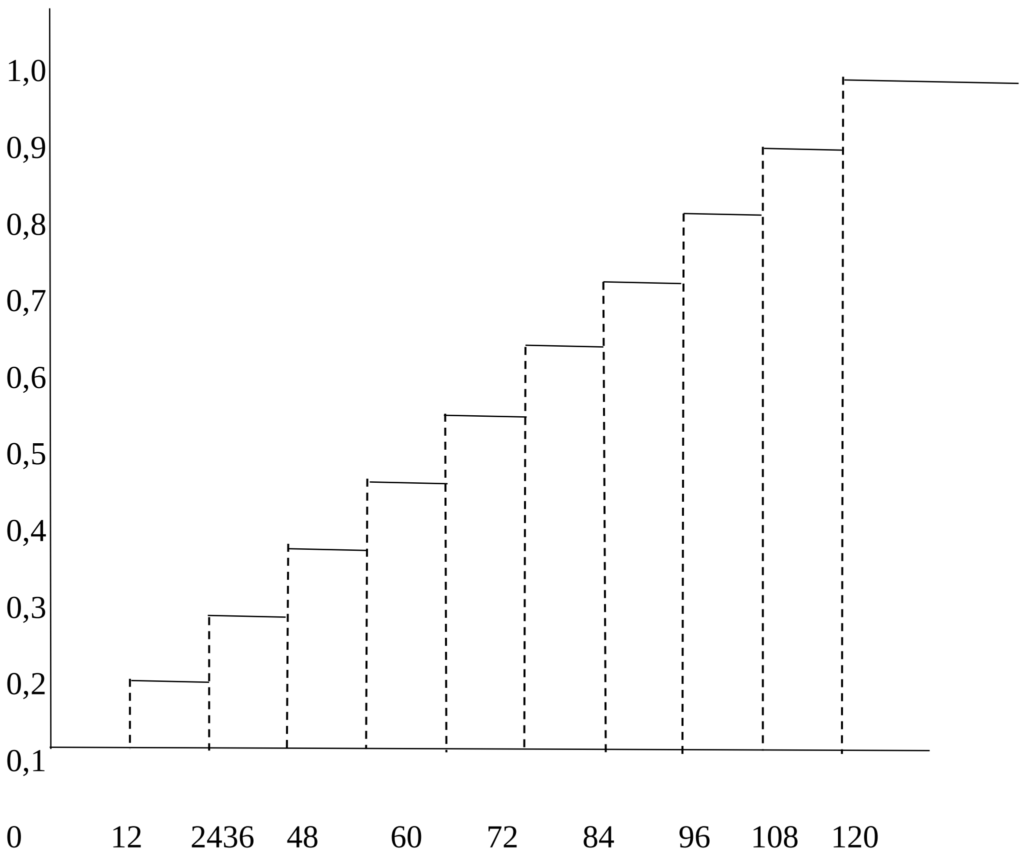
Όμως, μπορούν εύκολα να δοθούν και απαντήσεις που περιέχουν ασάφεια όπως:

3) «Είναι λίγο παλαιό»
4) «Είναι αρκετά παλαιό»
5) «Είναι πολύ παλαιό» και ούτω καθεξής

Οι λέξεις, λίγο, αρκετά, πολύ, είναι λέξεις ασάφειας. Η δουλειά μας στον κλάδο αυτό στρέφεται αποκλειστικά στο πως θα καταφέρουμε να ποσοτικοποιήσουμε αυτές τις εκφράσεις ασάφειας ώστε να μπορούμε να μετρήσουμε τον «βαθμό αλήθειας» της αρχικής πρότασης που αυτές περιέχουν. Για να γίνει αυτό αντιληπτό θα κατασκευάσουμε αυτό που στην θεωρία της ασαφούς λογικής ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής. Ουσιαστικά πρόκειται για μια διαδικασία αντιστοίχησης μηνών ή ετών κυκλοφορίας ενός αυτοκινήτου με μια αριθμητική τιμή στο διάστημα [0,1]. Με αυτό τον τρόπο περιγράφουμε με σχετική ακρίβεια την ποσότητα που αντιστοιχεί στους μήνες-χρόνια κυκλοφορίας ενός αυτοκινήτου δίνοντάς μας την απαιτούμενη απάντηση για τον «βαθμό συμμετοχής» ενός αυτοκινήτου στην «αλήθεια» [1] ή στο «ψέμα» [0]. Η διαδικασία αυτή αντιστοίχισης ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής και είναι επί της ουσίας ο τρόπος με τον οποιο κατασκευάζεται το ασαφές σύνολο. Σε παρακάτω παράγραφο θα δούμε εκτενώς τον ορισμό.

Θεωρούμε λοιπόν την αντιστοίχηση :

Μήνες κυκλοφορίας		Βαθμός αλήθειας
0-12 μήνες	→	0
12-24 μήνες	→	0,1
24-36 μήνες	→	0,2
36-48 μήνες	→	0,3
48-60 μήνες	→	0,4
60-72 μήνες	→	0,5
72-84 μήνες	→	0,6
84-96 μήνες	→	0,7
96-108 μήνες	→	0,8
108-120 μήνες	→	0,9
120-μήνες	→	1

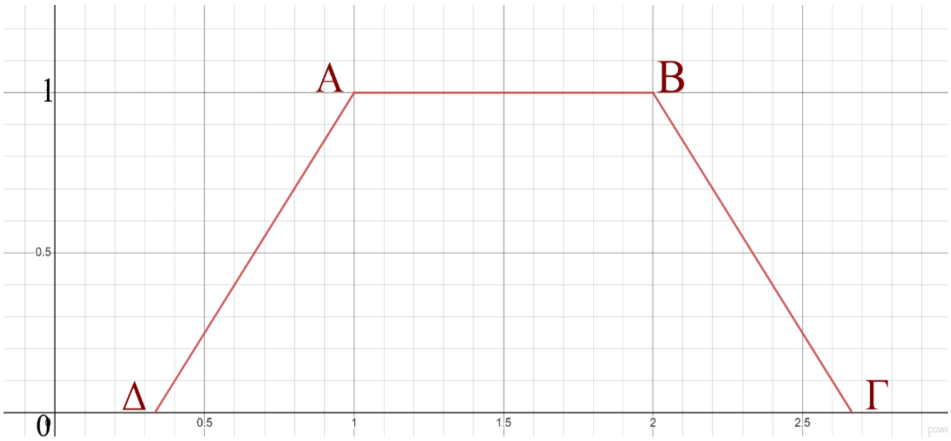


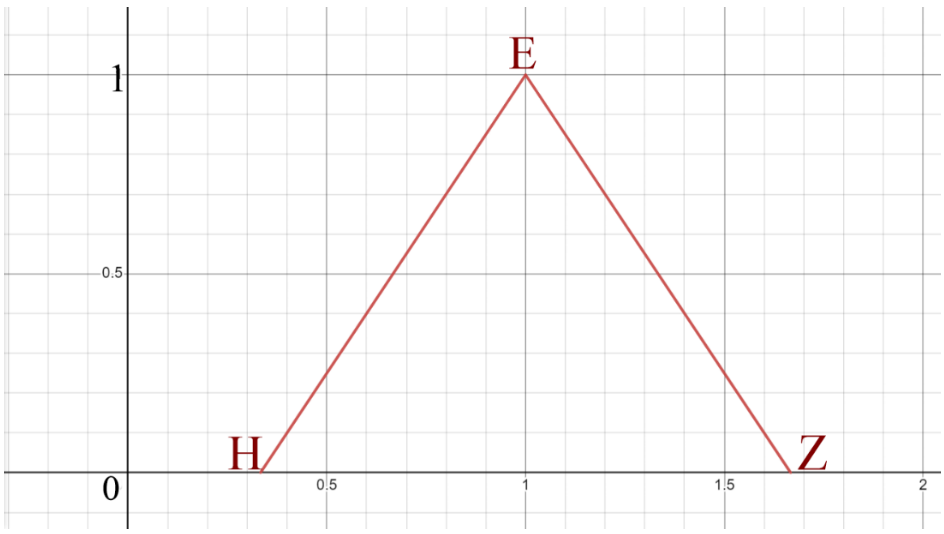
Με αυτό τον τρόπο καταφέραμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο που να δείχνει, ανάλογα με τους μήνες κυκλοφορίας ενός αυτοκινήτου, τον βαθμό αλήθειας με τον οποίο επαληθεύεται η πρόταση «Το αυτοκίνητο είναι παλαιό;» δίνονται ως απαντήσεις ποσοτικά αποτελέσματα για το «πόσο παλαιό είναι το αυτοκίνητο».

Εδώ να αναφέρουμε ότι ένα ασαφές σύνολο X ονομάζεται ασαφής αριθμός αν ισχούν τα παρακάτω :

- Υπάρχει τουλάχιστον ένα x∈X , ώστε A(x)=1
- Το στήριγμα (το σύνολο ορισμού)S(A) είναι συμπαγές υποσύνολο του X
- Ο χώρος ανάμεσα στο γράφημα του A και τον άξονα OX να είναι κυρτό σύνολο.

Ας δούμε παρακάτω μερικές περιπτώσεις συναρτήσεων συμμετοχής και ασαφών αριθμών .





1.2 Κλασικές συνολο-θεωρητικές πράξεις και σύνολα

Είναι απόλυτα αναγκαίο να ξεκινήσουμε την περιήγηση στον χώρο των συνόλων απο τις ιδιότητες και τις πράξεις μεταξύ των κλασσικών συνόλων. Άλλωστε έχουμε αναφέρει πως τα ασαφή σύνολα αποτελούν γενίκευση των κλασικών. Συνεπώς θα πάρουμε το γνωστό Ω ως το σύνολο αναφοράς. Το σύνολο όλων των συνόλων του Ω ονομάζεται δυναμοσύνολο του Ω και συμβολίζεται $P(\Omega)=\{A \,/\, A \subseteq \Omega\}$.

Εφοδιάζοντας το P(Ω) με τις αλγεβρικές πράξεις:

$\forall$ A, B $\subseteq$ P (Ω)

- **της ένωσης $A \cup B = \{x \setminus x \in A$ ή $x \in B\}$**
- **της τομής $A \cap B = \{x \setminus x \in A$ και $x \in B]$**
- **και του συμπληρώματος $A^c = \{x \setminus x$ δεν ανήκει $A\}$**

Έστω A $\subseteq$Ω και A ≠ Ø η χαρακτηριστική συνάρτηση του A ορίζεται ως $I_A : \Omega \rightarrow \{0,1\}$ με

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \in A \\ O \text{ αν } x \notin A \end{cases}$$

Το σύνολο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων όλων των υποσυνόλων του Ω το συμβολίζουμε 2^Ω

Θεωρούμε το σύνολο 2^Ω στο οποίο ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

$I_1 \vee I_2 = \max\{I_1(x), I_2(x)\}$

$I_1 \wedge I_2 = \min\{I_1(x), I_2(x)\}$

$I^c = 1 - I(x) \quad \forall x \in \Omega$ και $\forall\ I_1, I_2 \in 2^\Omega$

Τα αλγεβρικά συστήματα $(P(\Omega), \cup, \cap, ^C)$ και $(2^\Omega, \vee, \wedge\ ^c)$ είναι ισομορφικά (δηλαδή 1-1 και επί).

Συνεπώς έχουμε μια ταυτοποίηση των συνόλων P(Ω) και 2^Ω.

Το (P(Ω), U, ∩,^{C}) ή ισοδύναμα (2^{Ω}, V, Λ, ^{c}) έχει την δομή μιας άλγεβρας Boole όπως θα δούμε παρακάτω.

1.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΣΑΦΟΥΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

Με χρήση των σκέψεων του εμπνευστή της Ασαφούς λογικής L. Zadeh έχουμε τον παρακάτω ορισμό του ασαφούς συνόλου.

Έστω X ένα σύνολο αναφοράς (κλασικό σύνολο). Ονομάζουμε ασαφές υποσύνολο του X κάθε συνάρτηση A:X → [0,1].

Για κάθε x∈X, η τιμή A (x) ονομάζεται τιμή συμμετοχής και εκφράζει το βαθμό αλήθειας που το x ανήκει στο A (membershipvalue). Η συνάρτηση A:x→ [0, 1] ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής.[BaczynskiMichal&BalasubramaniamJayaram,(2008)]

Οι κυριότερες ασαφείς συνολοθεωρητικές πράξεις γίνονται στο ασαφές δυναμοσύνολο (F (x) = $[0,1]^{x}$)

Έστω το ασαφές δυναμοσύνολο

F(X) = $[0,1]^{x}$= {A⊆X|x∈X→A (x) ∈ [0,1]}

Ας δούμε τώρα μια επέκταση των κλασικών πράξεων (∪,∩,^{c}) από το κλασικό δυναμοσύνολο στο σύνολο των ασαφών υποσυνόλων του X μέσω της δομής ([0,1] ∪ ,∩, ^{c}, 0, 1) που αποδεικνύεται ότι είναι ένα πλήρες δικτυωτό και μια DeMorgan άλγεβρα είναι οι εξής:

(A ∪ B) (x) = max {A (x), B (x)}

(A ∩ B) (x) = min {A (x), B (x)}

A^{c} = 1 – A (x)

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες των κλασικών συνόλων εκτός από τις (A∩A^{c}) = Ø νόμος της αντίθεσης (Lawofcontradiction) και (AUA^{c}) = X συμπλήρωμα (Lawofexcludedmiddle).

Δηλαδή στο $F(X)=[0,1]^x$ έχουμε

$(A\cap A^c) \neq \emptyset \sim 0$ και

$(A\cup A^c) \neq X \sim 1$

Συμπερασματικά , όταν παρατηρήσουμε οτι δεν ισχύουν οι νόμοι τις αντίφασης και του συμπληρώματος έχουμε στην ουσία περάσει στο φάσμα της ασαφούς λογικής.Βέβαια αυτό συμβαίνει ενώ $F(X) = [0,1]^x$ δεν είναι συμπληρωμένο υπό την έννοια της Άλγεβρας BOOLE, αφού $(A\cup A^c)(x) = \max\{A(x), A^c(x)\}$.

π.χ. για $A(x) = \frac{1}{5}$ έχουμε $\max\{A(x), A^c(x)\} = \max\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\} = \frac{4}{5} \neq 1$

και $(A\cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$

π.χ. για $A(x) = \frac{1}{7}$ έχουμε $\min\{A(x), A^c(x)\} = \min\{\frac{1}{7},\frac{6}{7}\} = \frac{1}{7} \neq 0$

Επομένως οι νόμοι της αντίφασης και του συμπληρώματος δεν ισχύουν για κάθε τιμή $A(x) \in (0,1)$, αλλά ισχύουν μόνο στα άκρα του διαστήματος [0,1] δηλ. όταν $A(x) = 0$ ή $A(x) = 1$.

Εξάλλου όπως θα δούμε παρακάτω στα δικτυωτά η κλασική δομή($P(X) = \{0,1\}^x, \cup,\cap, ^c, I = X, 0 \neq \emptyset$) είναι μια άλγεβρα Boole που παράγεται από την Αλγεβρική δομή του $\{0,1\}$ που είναι η άλγεβρα Boole της απλής διτιμίας, ενώ η δομή ($F(X) = [0,1]^x, \cup,\cap, ^c, 1 = X, 0 \neq \emptyset$) αποδεικνύεται ότι είναι ένα πλήρες δικτυωτό και μια DeMorgan άλγεβρα και μια άλγεβρα Kleene, αλλά όχι όμως μια άλγεβρα Boole, αφού το F(X) δεν έχει συμπληρωματικά στοιχεία παρόμοια με αυτά της άλγεβρας Boole, δηλαδή

$(A \cap A^c) \neq \emptyset \sim 0$ και

$(A \cup A^c) \neq X \sim 1$

Ενώ έχει ουδέτερα στοιχεία τα $1 = X$, $0 = \emptyset$, αφού $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = A$

Επίσης το

$(F(X), \cup,\cap,^c, 0, 1) \sim [0,1]^x, \cup,\cap,^c, 0,1)$

Οι παραπάνω ορισμοί και ιδιότητες των πράξεων των ασαφών συνόλων (ασαφή ένωση, ασαφή τομή, συμπλήρωμα) είναι επεκτάσεις των κλασικών πράξεων. Παρά το γεγονός οτι αυτές οι πράξεις είναι μοναδικές για τα κλασικά σύνολα, στην ασαφή λογική αυτές οι πράξεις μπορούν να οριστούν και με άλλους τρόπους. Μια ευρύτερη ομάδα ασαφών τομών - ενώσεων που κατασκευάζονται ανάλογα με το ασαφές πλαίσιο που έχουν στόχο να περιγράψουν αναφέρονται συνήθως ως t-norms και t-conorms αντίστοιχα.

1.3 Δικτυωτά (Lattices)

«Ένα σύνολο L ≠ Ø ονομάζεται μερικώς διατεταγμένο εάν είναι εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης «≤».

Δηλαδή ∀a, b, c∈L ισχύουν:

- ***a≤a   ανακλαστική (reflexivity)***
- ***a ≤ b και b ≤ a → a = b   αντισυμμετρική (antisymmetry)***
- ***a ≤ b και b ≤ c → a ≤ c   μεταβατική (transitivity)***

Το σύνολο L ≠ Ø εφοδιασμένο με μια σχέση διάταξης «≤» δηλαδή το ζεύγος (L, ≤) ονομάζεται δικτυωτό, αν ∀a, b, ∈, L ισχύει ότι aVb = sup{a,b} και a Λ b = inf{a,b} υπάρχουν και ανήκουν στο L. Ένα απλό παράδειγμα δικτυωτού είναι το (P(Ω), ⊂) με sup{A, B} = A∪B» [Σουλιώτης , 2018]

1.3.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΚΤΥΩΤΟΥ

«Αν (L, ≤) είναι δικτυωτό και ορίσουμε aVb = sup {a,b}, a Λ b = inf {a,b} ∀a, b∈L τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι το αλγεβρικό σύστημα (L, V, Λ) ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

L1) aVa = a και aΛa = a αυτοπάθεια (idempotency)

L2) aVb = bVaκαι aΛb = bΛa αντιμεταθετική (commutativity)

L3) aV (bVc) = aV (bVc) και aΛ(bΛc) = aΛ (bΛc) προσεταιριστική (associativity)

L4) aΛ (bVc) = a καιaV (bΛc) = a απορροφητικότητα (apsorption Laws).»

Ισχύει και το αντίστροφο, που δηλώνεται με την παρακάτω πρόταση:

«ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω ότι στο αλγεβρικό σύστημα (L, V, Λ) οι πράξεις V,Λ ικανοποιούν τις ιδιότητες L1 έως L4. Τότε ορίζουμε την σχέση της μερικής διάταξης ≤ στο L, έτσι ώστε ∀a, b∈La≤b⇔aVb.

Τότε το (L, ≤) είναι δικτυωτό (που είναι και ο γνήσιος ορισμός του δικτυωτού, ο οποίος πρωτοδόθηκε από του Dedekind).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Κάθε δικτυωτό μπορεί να θεωρείται είτε ως ένα σύνολο μερικώς διατεταγμένο, όπου κάθε ζεύγος στοιχείων του έχει ένα sup και ένα inf, είτε ως ένα σύνολο με δύο διμελείς εσωτερικές πράξεις που πληρούν τις ιδιότητες L1 έως L4.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα παρακάτω τρία είναι ισοδύναμα:

- *(L, ≤) είναι ένα δικτυωτό ή*
- *(L, V, Λ) είναι ένα δικτυωτό ή*
- *το σύνολο L ικανοποιεί τις ιδιότητες L1 έως L4.*

Άρα το (P(Ω), ⊆) και το αλγεβρικό σύστημα (P(Ω), ∪,∩,⊆) και το αλγεβρικό σύστημα (P(Ω), ∪,∩,^{c}) είναι ταυτόσημα.»[Σουλιώτης,2018]

1.3.2 ΕΙΔΙΚΑ ΔΙΚΤΥΩΤΑ

Επιμεριστικό δικτυωτό

Ένα δικτυωτό (L, V, Λ) ονομάζεται επιμεριστικό (distributive) αν ικανοποιεί την επιμεριστική ιδιότητα ∀a,b,c∈L, a Λ (bVc) = (aΛb) V (aΛc) και

aV (bΛc) = (aVb) Λ (aVc)

Φραγμένο δικτυωτό

Ένα δικτυωτό (L, ≤) ονομάζεται φραγμένο (bounded) αν υπάρχουν στο L δύο τουλάχιστον στοιχεία 0 και 1 τέτοια ώστε ∀a∈L να ισχύει: 0 ≤a≤ 1

Συμπληρωμένο δικτυωτό

Ένα φραγμένο δικτυωτό ονομάζεται συμπληρωμένο (complemented) εάν υπάρχει πράξη (^{c}) ώστε ∀a∈L και a^c∈L και να ισχύει $aVa^c = 1$ και $a\Lambda a^c = 0$

Πλήρες δικτυωτό

Αν σε ένα δικτυωτό (L, ≤) κάθε υποσύνολο A⊆L με A ≠ Ø έχει sup και inf, τότε λέγεται πλήρες.

1.3.3. ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΑ ΚΛΑΣΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Άλγεβρα Boole

Κάθε συμπληρωμένο και επιμεριστικό δικτυωτό είναι μια άλγεβρα Boole.

ΆλγεβραDeMorgan (Softalgebra)

Η ύπαρξη του συμπληρώματος σε μια άλγεβρα αποτελεί ισχυρή απαίτηση, την οποία συναντάμε στην λογική του Αριστοτέλη. Για την ερμηνεία και επεξεργασία των εννοιών τα ων ασαφών συνόλων χρειαζόμαστε μια πιο ευέλικτη δομή.

Αν (L, ≤) είναι ένα φραγμένο και επιμεριστικό δικτυωτό το οποίο έχουμε εφοδιάσει με μια εσωτερική πράξη (^{c}), έτσι ώστε ∀a, b∈L να ισχύουν οι ιδιότητες.

1. $(a^c)^c = a$ προκαλεί εμπλοκή (involutive) και
2. $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$, $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$δηλαδή ισχύουν οι νόμοι DeMorgan

Τότε (L, V, Λ, ^{c}) ονομάζεται άλγεβρα DeMorgan ελαστική άλγεβρα

Παράδειγμα άλγεβρας DeMorgan

Θεωρούμε το [0,1] και ορίζουμε σε αυτό το σύνολο τις πράξεις ∀a, b∈ [0,1]

- $a \vee b = \max\{a,b\}$
- $a \wedge b = \min\{a,b\}$
- $a^c = 1 - a$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ([0,1], V, Λ, ^{c}) είναι μια άλγεβρα DeMorgan. Όμως δεν είναι άλγεβρα Boole, αφού δεν ισχύει ότι:

$a \vee a^c = 1$ καιa$\wedge a^c = 0$

Δηλαδή κάθε άλγεβρα Boole είναι και μια άλγεβρα DeMorgan αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Άλγεβρα Kleene

Αν μια άλγεβρα DeMorgan έχει την ιδιότητα $(x \wedge x^c) \leq (y \vee y^c)$, ∀x, y τότε λέγεται άλγεβρα Kleene

Παράδειγμα άλγεβρας Kleene

Το ([0,1}, ≤) ή ισοδύναμα το ([0,1], V, Λ) είναι μια άλγεβρα Kleene αφού

$(x \wedge x^c) \leq (y \wedge y^c) \Leftrightarrow (x \wedge (1-x) \leq (y V (/1-y))$ $nx-x^2 \leq y + (1-y) \Leftrightarrow x-x^2 \leq 1$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Συμπεράσματα

1. Το (P(X), ⊆) ή ισοδύναμα (P(X), V, Λ) είαι μια άλγεβρα Boole, άρα και μια άλγεβρα DeMorgan αλλά και μια άλγεβρα Kleene ενώ
2. Το ([0,1], ≤) ή ισοδύναμα το ([0,1], V, Λ) είναι μια άλγεβρα DeMorgan αλλά και μια άλγεβρα Kleene, αλλά όχι μια άλγεβρα Boole.

Θεώρημα (DeMorgan της Άλγεβρας)

Έστω μια DeMorgan Άλγεβρα $(M,V,\Lambda,{}^c)$ και ένα σύνολο Ω. Το σύνολο $M^\Omega = \{f|f : \Omega \rightarrow M\}$ όλων των συναρτήσεων f. Για κάθε f, $g \in M^\Omega$ και $\forall x \in \Omega$ ορίζουμε:

- (f V g) (x) = f (x) V g (x)
- (f Λ g) (x) = f (x) Λ g (x)
- $f^c(x) = 1-f(x)$
- 0 (x) = 0
- 1 (x) = 1

Τότε ισχύει ότι: το αλγεβρικό σύστημα $(M^\Omega, V, \Lambda, {}^c)$ είναι επίσης μια άλγεβρα Morgan.

Επίσης, αν το $(M, V, \Lambda, {}^c)$ είναι πλήρες δικτυωτό, τότε και το $(M^\Omega, V, \Lambda, {}^c)$ είναι πλήρες δικτυωτό.

1.3.4. ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΣΤΗ ΚΛΑΣΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

1ος πίνακας (της αρνήσεως)

Α	Α'
Α	ψ
Ψ	α

2ος πίνακας (ένωσης)

Α	Β	Α VΒ
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

3ος πίνακας (τομής)

Α	Β	Α Λ Β
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

4ος πίνακας (συνεπαγωγής)

Α	Β	Α → Β
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

5ος πίνακας (ισοδυναμίας)

A	B	A nB
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

1.4 Πράξεις στα ασαφή σύνολα

Μελετώντας τις πράξεις που μπορούν να πραγματοποιηθούν μεταξύ προτάσεων της ασαφούς λογικής, θα πράξουμε ακριβώς όπως και στον ορισμό των ασαφών συνόλων. Θα πάρουμε προτάσεις (σύνολα δηλαδή) των συνόλων της κλασικής λογικής και θα γενικεύσουμε τις πράξεις μεταξύ εκείνων των συνόλων.

Θα έχουμε λοιπόν να γενικεύσουμε τις έννοιες της «ένωσης» και της «τομής» δύο ή περισσοτέρων συνόλων. Οι έννοιες αυτές στο φάσμα των προτάσεων ερμηνεύονται ως «η» (ένωση) και «και» (τομή).

T-norms, το «και» στην ασαφή λογική.

Ξεκινώντας από την τομή ή αλλιώς την σύζευξη με την λέξη «και» (ή το σύμβολο Λ) θα πρέπει να πούμε πως αυτή εκφράζεται μεταξύ δύο ασαφών προτάσεων μέσω των ιδιοτήτων του min, και θα έχουμε τον εξής ορισμό:

Το «και» ή T-norm (Triangularnorm) θα είναι στην ασαφή λογική, με απεικόνιση:

Δ: [0,1] x [0,1] → [0,1] όπου αν x,y∈ [0,1] τότε και η εικόνα τους, δηλαδή το «και» (Δ (x,y) θα συμβολίζεται με xΔy και θα απαιτούμε να έχει τις ιδιότητες που απορρέουν από τις ιδιότητες του min. Οι ιδιότητες του min είναι οι παρακάτω:

i) $x\Delta y = y\Delta x$, $\forall x,y \in [0,1]$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
ii) $x\Delta (y\Delta z) = (x\Delta y)\, \Delta z$, $\forall x,y,z \in [0,1]$ προσεταιριστική ιδιότητα)
iii) $x\Delta 1 = x$, $\forall x \in [0,1]$ (συνοριακή συνθήκη)

iv) $\left.\begin{array}{l} x\leq y \\ \text{αν} \\ \omega \leq \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x\ \Delta\ \omega \leq y \Delta \varphi,\ \forall x,y,\omega,\varphi \in [0,1]$ (μονοτονία)

Παρόμοιες ιδιότητες ασαφούς «και» (Δ) είναι και το επί (·). Και αυτό γιατί ισχύουν ακριβώς οι προηγούμενες ιδιότητες ως εξής:

i) $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x, y \in [0,1]$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $x\cdot (y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$, $\forall x,y,z \in [0,1]$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) $x\cdot 1 = x$, $\forall x \in [0,1]$ (συνοριακή συνθήκη)

iv) $\left.\begin{array}{l} x\leq y \\ \text{αν} \\ \omega \leq \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x\cdot \omega \leq y\cdot \varphi \quad \forall x,y,\omega,\varphi, \in [0,1]$

(μονοτονία)

Εδώ πρέπει να γίνει μια παρατήρηση:

Αποδεικνύεται ότι το Λ είναι το πιο μεγάλο ασαφές «και» που μπορεί να παραχθεί.

T-conorm, το «ή» στην ασαφή λογική έχοντας ολοκληρώσει τον ορισμό της σύζευξης «και» ας δώσουμε και αυτόν του «ή».

Το «ή» ή t-conorm ή s-norm ή triangularconorm (συμβολίζεται με ∇) στην ασαφή λογική είναι μια απεικόνιση

$\nabla: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ όπου αν $x,y \in [0,1]$ η εικόνα τους, δηλαδή το «ή» (ή $\nabla (x,y)$ αυτό θα συμβολίζεται με $x\nabla y$ και θα απαιτούμε να έχει ιδιότητες που προκύπτουν από το max.

Παρακάτω θα παραθέσω όλες τις ιδιότητες του max:

i) $x\nabla y = y\nabla x$, $\forall x,y,z \in [0,1]$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $x \nabla (y \cdot\nabla z) = (x \nabla y) \cdot\nabla z$, $\forall\ x,y,z \in [0,1]$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) $x \nabla 0 = x$, $\forall\ x \in [0,1]$ (συνοριακή συνθήκη)

iv) $\left.\begin{array}{l} x\leq y \\ \text{αν} \\ \omega \leq \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x\nabla \omega \leq y\nabla \varphi \quad \forall\ x,y,\omega,\varphi, \in [0,1]$

(μονοτονία)

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζουμε τα «ή» που ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες και στα οποία ανήκουν και τα εξής:

- max = V και
- probor (η probabilistic OR) = x∇y=x+y-xy

Αποδεικνύεται ότι το V είναι μικρότερο ασαφές «ή» που μπορεί να παραχθεί. Δηλαδή αν το ∇ είναι ένα ασαφές «ή» και x,y∈ [0,1] τότε xVy≤x∇y

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 . Η άρνηση στην ασαφή λογική

2.1 Εισαγωγή στην άρνηση

Οι ασαφείς αρνήσεις είναι γενικεύσεις των κλασικών αρνήσεων ή αλλιώς των κλασικών συμπληρωμάτων, οι βασικές ιδιότητες των οποίων φαίνονται παρακάτω:

Αν Α τότε	Α΄	
αλήθεια	$\Rightarrow$	ψέματα
ψέματα	$\Rightarrow$	αλήθεια

Ορισμός

Ειδικότερα, η άρνηση N στην ασαφή λογική είναι μια συνάρτηση N: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

i) $N(0) = 1$ και $N(1) = 0$ N(1)

ii) N είναι μια φθίνουσα συνάρτηση N(2)

Η ιδιότητα (N1) είναι γενίκευση της κλασικής άρνησης όπως φαίνεται και από τον πίνακα αλήθειας της κλασικής άρνησης. Η (N2) εκφράζει την πεποίθησή μας ότι όσο αυξάνεται ο βαθμός αλήθειας μιας πρότασης τόσο μειώνεται ο βαθμός αλήθειας της άρνησής της. Καθότι ο παραπάνω ορισμός καλύπτει μια ευρεία κατηγορία αρνήσεων έχουν προστεθεί και επιπλέον αξιώματα-ιδιότητες.

Ορισμός

Μια ασαφής άρνηση καλείται αυστηρή (strict) εάν ικανοποιεί τις παρακάτω προτάσεις.

- Η συνάρτηση N είναι γνησίως φθίνουσα (N3)
- Η συνάρτηση N είναι συνεχής (N4)

Ορισμός

Μια ασαφής άρνηση καλείται δυνατή (strong) εάν ισχύει: $N(N(x)) = x$, $\forall x \in [0,1]$.(N5)

Η τελευταία αυτή ιδιότητα επί της ουσίας δείχνει ότι η άρνηση της άρνησης δίνει κατάφαση.

$\neg(\neg p)$ = p

Θεώρημα

Η οικογένεια των ασαφών αρνήσεων επαληθεύει τις παρακάτω εσωτερικές πράξεις:

$(N_1 \vee N_2)(x) = \max(N_1(x), N_2(x)), \forall x \in [0,1]]$

$(N_1 \wedge N_2)(x) = \min(N_1(x), N_2(x), \forall x \in [0,1]$

[BaczynskiMichal&BalasubramaniamJayaram,(2008)]

Απόδειξη

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι οι πράξεις όπως ορίζονται παραπάνω ικανοποιούν τις ιδιότητες (N_1) και (N_2) του παραπάνω ορισμού της ασαφούς άρνησης.

Παρακάτω θα παραθέσουμε μερικές από τις πιο γνωστές οικογένειες ασαφών αρνήσεων.

Ας ξεκινήσουμε από την πιο γνωστή, την κλασική άρνηση Nc (x) = 1-x. Η παραπάνω άρνηση είναι μια δυνατή άρνηση (strongnegation). Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε με απλά λόγια γιατί λέγεται δυνατή. Ας πάρουμε το παράδειγμα της παλαιότητας του αυτοκινήτου που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο.

Ένα αυτοκίνητο που βρίσκεται στον 4^{ο} χρόνο χρήσης του θα έχει «βαθμό παλαιότητας» Π(4) = 0,3 τότε με βάση την συνάρτηση της κλασικής άρνησης, ο βαθμός αλήθειας της άρνησης ή αλλιώς ο «βαθμός νεότητας» του αυτοκινήτου είναι N(4) = 0,7.

Με την χρήση μιας άλλης, μη-δυνατής άρνησης ο «βαθμός νεότητας» του αυτοκινήτου θα μπορούσε να δίνεται από πιο πολύ μικρότερη τιμή, όπως π.χ. 0,4 ή 0,3.

Παρακάτω θα δούμε πως λειτουργούν με το συγκεκριμένο παράδειγμα διάφορες άλλες αρνήσεις.

Θα θεωρήσουμε επίσης την ελάχιστη ασαφή άρνηση και την μέγιστη ασαφή άρνηση οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\text{ελάχιστη } N_{D1} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in (0,1) \end{cases}$$

$$\text{μέγιστη } N_{D2} = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ R, & x \in [0,1] \end{cases}$$

Οι παραπάνω αρνήσεις ανήκουν στην κατηγορία αρνήσεων με τύπο

$$N^t(x) = \begin{cases} 1, & x < t \\ 1 \text{ ή } 0, & x = t \\ 0, & x > t \end{cases}$$

η οποία είναι μια μη-συνεχής άρνηση. Άρα όχι αυστηρή ούτε δυνατή. Επίσης είναι γνωστές οι αρνήσεις.

ΤΥΠΟΣ	**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**
$N(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0{,}8\,(1-x) & x \in [1/2, 1] \end{cases}$	N_1 N_2 N_3
$N(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0{,}5, & x \in [1/2, 0{,}8] \\ 2{,}5\,(1-x), & x \in (0{,}8, 1) \end{cases}$	N_1 N_2 N_3

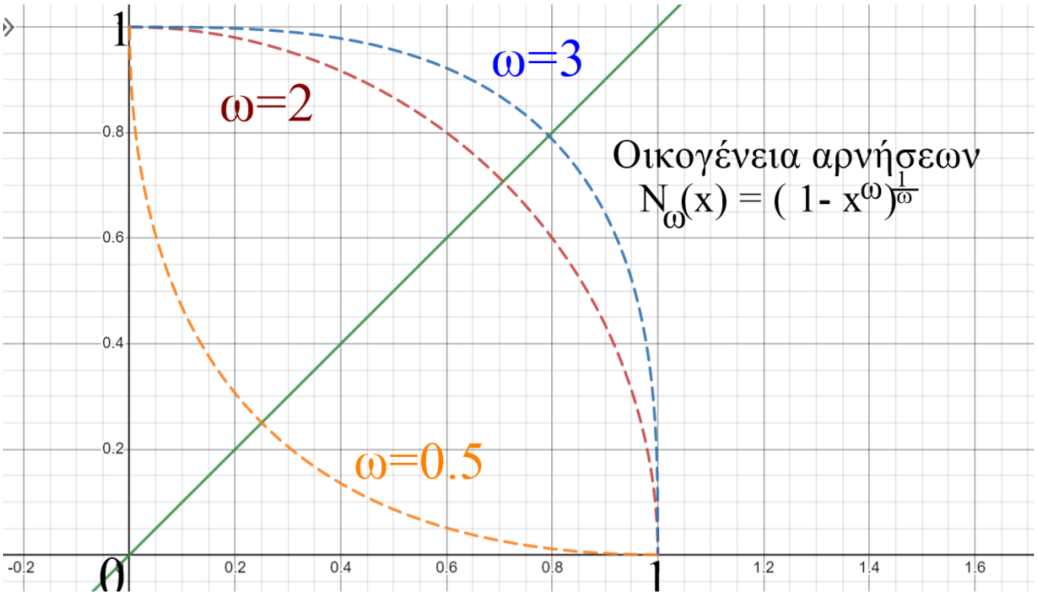
$N_k(x) = 1-x^2$ N_1έωςN_4strict

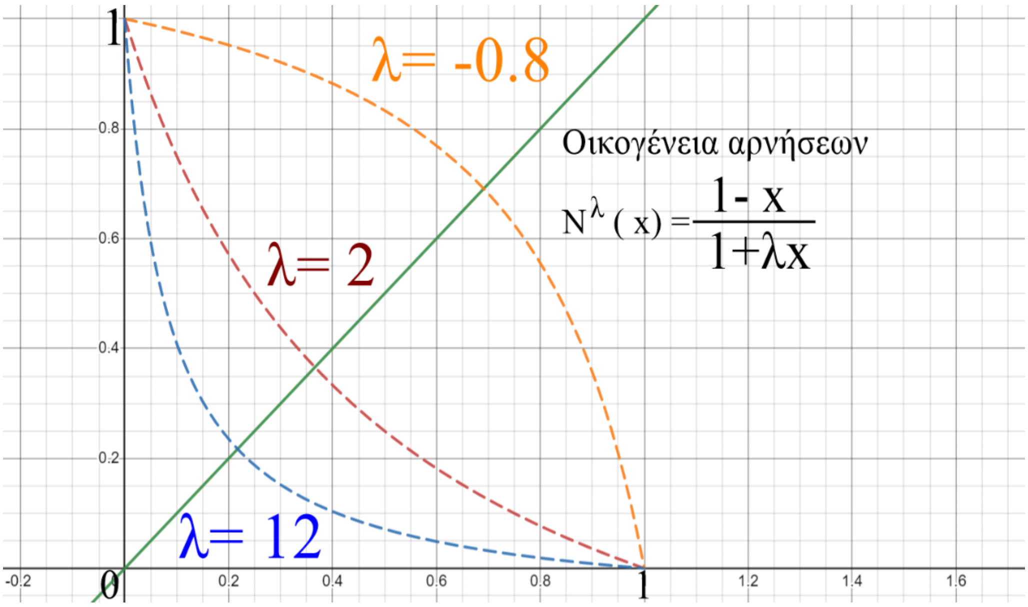
$N_R(x) = 1 - \sqrt{x}$ N_1 έως N_4strict

$N^\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda\chi}$, $\lambda \in (-1, +\infty)$ N_1 έως N_5strong

$N^\omega(x) = (1-x^\omega)^{1/\omega}$, $\omega \in (0, +\infty)$ N_1 έως N_5strong

Παρακάτω βλέπουμε ορισμένα παραδείγματα απο τις 2 τελευταίες οικογένειες δυνατών ασαφών αρνήσεων .





2.2 Συναρτήσεις ασαφών αρνήσεων, ισχυρές και δυνατές αρνήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικές συναρτήσεις αυστηρών ασαφών αρνήσεων και κάποιες άλλες δυνατών ασαφών αρνήσεων, μαζί με κάποιες προσωπικές κατασκευές που μπορεί να παρουσιάζουν κάποιο σοβαρό ενδιαφέρον.

Να θυμηθούμε ότι άρνηση N στην ασαφή λογική είναι μια συνάρτηση N: [0,1] → [0,1] που ικανοποιεί τις παρακάτω δυο συνθήκες:

- **N (0) = 1 και N (1) = 0 (N1)**
- **N είναι μια φθίνουσα συνάρτηση (N2)**

Επιπλέον, μια άρνηση θα καλείται αυστηρή (strict) εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- **Η συνάρτηση N να είναι γνησίως φθίνουσα (N3)**
- **Η συνάρτηση N να είναι συνεχής (N4)**

Τέλος, μια ασαφής άρνησης καλείται δυνατή (strong) εάν ισχύει ότι:

N (N(x)) = x $\forall x \in (0,1)$ (N5)

Θα αναφέρω μερικές αυστηρές αρνήσεις (strict) όπως οι παρακάτω:

1) $N_1(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$
2) $N_2(x) = 1 - \ln[(e-1)x+1]$

Αναλυτικά\

1) Η συνάρτηση $N_1(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$ είναι:

α) $N_1(0)=1$, $N_1(1) = 0$ (N_1)

β) $N_1(x)$ γνησίως φθίνουσα (N_3)

γ) $N_1(x)$ συνεχής (N_4)

Ας δούμε πως αποδεικνύονται τα β και γ καθώς το α (N1) είναι προφανές.

Πάμε στο (N2) το οποίο θα οδηγήσει στο (N3), καθώς η $N_1(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1]. Όντως

N_1 (x) = $\frac{2\,(x^2+1)-2x\,(2x)}{(x^2+1)^2}$ = - $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

N1 (x) = $\frac{2\,(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$ και ο πίνακας μεταβολών :

x	-∞	-1	0	1	+∞
N1(x)	+	0	-	+	
N1(x)	↗		↘	↗	

Άρα η N_1 είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,1]

Είναι προφανές ότι ισχύει η (N4) καθώς η N_1 (x) είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα η N_1 (x) είναι μια αυστηρή άρνηση εδώ να σημειωθεί ότι παρομοίως η N_{12} (x) = 1 - $\frac{(2x)^2}{(x^2+1)^2}$

N_{13} (x) = 1 - $\frac{(2x)^3}{(x^2+1)^3}$

N_{14} (x) = 1 - $\frac{(2x)^4}{(x^2+1)^4}$, N_{15} (x) = 1 - $\frac{(2x)^5}{(x^2+1)^5}$

Είναι παρομοίως ισχυρές ασαφείς αρνήσεις. Εδώ θα παρουσιάσω μια κατασκευή που αφορά την ακολουθία των συναρτήσεων.

N_{1v} (x) = 1 - $\frac{(2x)^v}{(x^2+1)^v}$ είναι μια ακολουθία ισχυρών αρνήσεων για v$\notin \mathbb{N}$

→ Πράγματι, η N_{1v} (x) είναι μια ακολουθία συναρτήσεων με N_{1v} (0) = 1 και N1v(1)= 0 (N1)

→ ΗN_1v (x) είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

→ Τέλος η N_{1v} (x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0,1] και αυτό αποδεικνύεται εύκολα:

Με τον πίνακα μεταβολών

x	-∞	-1	1	+∞
N1(x)	+	0 -	0 +	
	↗	↘	↗	

Άρα η N_{1v} (x) είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] (N3)

Εδώ να σημειωθεί ότι η ακολουθία των συναρτήσεων N1v (x) δεν! αποτελεί μια δυνατή άρνηση, γιατί δεν πληρεί την προϋπόθεση (N5), δηλαδή N_{1v} (N_{1v} (x)) $\neq$ x$\forall$x$\in$[0.1]

Επίσης, εδώ θα πρέπει να σημειωθεί πως αυτή η ακολουθία συναρτήσεων του V$\in \mathbb{N}$ θα μπορούσε να μετατραπεί σε οικογένεια συναρτήσεων με $\lambda \in \mathbb{R}$, την

$N1\lambda(x)=1-\frac{(2x)^{\lambda}}{(x^2+1)^{\lambda}}$, $\lambda \in [1,+\infty)$

Παρομοίως, με εύκολο τρόπο αποδεικνύεται ότι N_2 (x) = 1 – ln [(e-1) x +1] είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και

N_2 (0) = 1 και N_2 (1) = 0. Άρα ισχυρή άρνηση.

Επίσης, ακριβώς με τον παραπάνω τρόπο αποδεικνύεται ότι η ακολουθία συναρτήσεων N_{2v} (x) = 1 – $[\ln [(e-1)\ x+1]]^{v}$είναι μια ακολουθία ισχυρών ασαφών αρνήσεων, γιατί

V$\in \mathbb{N}$

→ Ισχύει η (N1) με (N_{2v}) (0) = 1 και N_{2v} (1) =0

→ Είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (N4)

→ Είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων στο [0,1]. Όντως ισχύει ότι

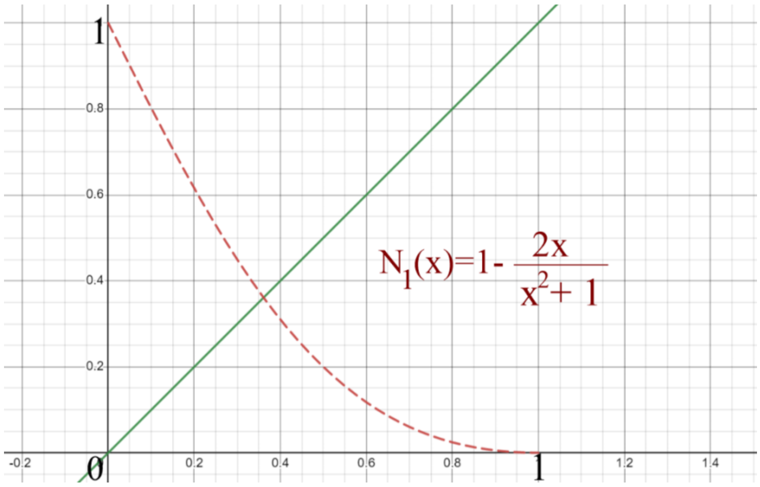
$N_{2v}(x) = -v[\ln(e-1)x+1)^{v-1}\frac{e-1}{(e-1)x+1}$όπου

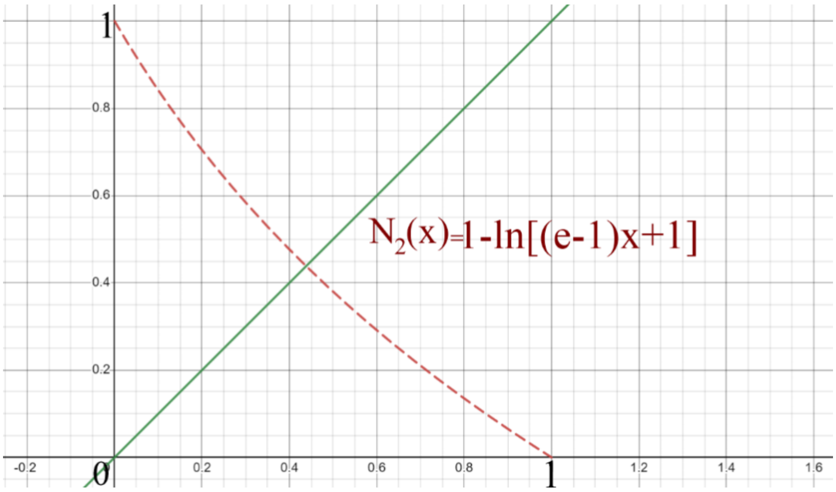
$v>0$, $[\ln(e-1)x+1]^{v-1}>0$, $\frac{e-1}{(e-1)x+1}>0$

άρα με το (-) μπροστά έχω:

N_{2v} (x) < 0 για x$\in$ [0,1]. Άρα η ακολουθία των συναρτήσεων αυτών αποτελεί μια ακολουθία ισχυρών αρνήσεων, όχι όμως και δυνατών. Δεν ισχύει η (N5), δηλαδή N_{2v} (N_{2x} (x)) $\neq$ x, $\forall$x$\in$ [0,1].

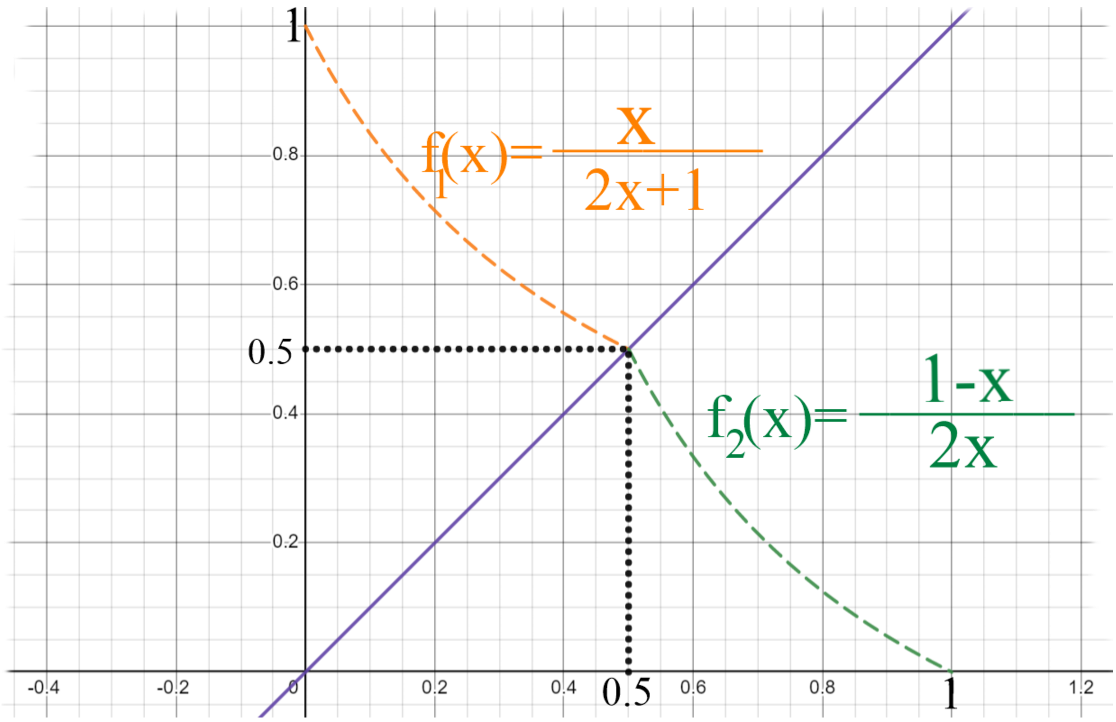
Και σε αυτή την περίπτωση της N_{2v} (x) η ακολουθία συναρτήσεων N_{2v} (x) μπορεί να μετατραπεί σε οικογένεια συναρτήσεων $N_{2λ}$ (x), με λ ∈ [1, +∞]και $N_{2λ}$ (x) = 1-[ln[(e-1) x +1]]^{λ}.





Στο δεύτερο μέρος αυτής της παραγράφου θα ασχοληθούμε με την κατασκευή μιας συνάρτησης δυνατής άρνησης και μιας ακολουθίας συναρτήσεων δυνατών ασαφών αρνήσεων που βασίζεται πάνω σε αυτή την συνάρτηση.

$$N^2{}_{\mathrm{PM}}(x)=\begin{cases} f\,1(x) = \frac{1}{2x+1},\ 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ \\ f\,2(x)= \frac{1-x}{2x},\ \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$



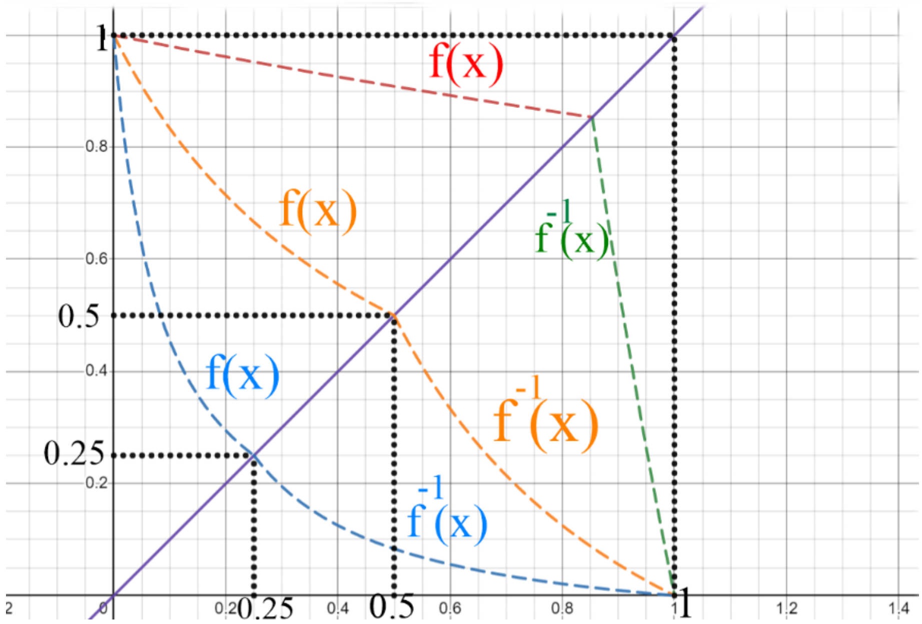
Η κατασκευή βασίζεται σε μια δίκλαδη συνάρτηση, η οποία θα πρέπει να είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, αντιστρέψιμη και με την ιδιότητα (N5) δηλαδή (N5) : N (N(x)) = x, ∀x∈ [0,1].

Δεδομένου πως η συνάρτηση θα είναι 1-1, μέσα στο διάστημα [0,1] θα παρουσιάζει συμμετρία με την αντίστροφή της και θα τέμνουν και οι δύο τον άξονα y=x στο ίδιο σημείο, έστω xo. Είναι γνωστό και εύκολα αποδεικνύεται πως η αντίστροφη συνάρτηση f(x), η $f^{-1}(x)$ έχει την ίδια μονοτονία. Άρα προχωρώντας το σκεπτικό θα πάρω μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο [0,1] με f(0) =1 θα βρω το σημείο τομής της f(x) με τον άξονα y=x και θα την «κόψω» εκεί. Από το σημείο εκείνο, το (xo,yo) με xo=yo θα συνεχιστεί η συνάρτηση της ασαφούς αρνήσεως με τον τύπο της αντίστροφης, της $f^{-1}(x)$.

Έτσι θα πάρω στο σημείο x=1, $f^{-1}(1) = 0$

Δηλαδή

$$N(x)=\begin{cases} f(x), & x\in [0,x_0] \\ f^{-1}(x), & x\in (x_0,1] \end{cases}$$



Αυτό που ουσιαστικά επιτυγχάνεται με αυτή την κατασκευή είναι η δυνατότητα να πάρουμε την ιδιότητα (N5), γιατί η παραπάνω κατασκευή N(x) έχει την ιδιότητα N(N(x)) =x

Δηλαδή η σύνθεση της με τον εαυτό της δίνει την ταυτοτική συνάρτηση. Άρα η άρνηση της άρνησης δίνει κατάφαση. Συνεπώς μια δυνατή ασαφής άρνηση. Θεωρώ τότε την συνάρτηση f(x) = $\frac{1}{2x+1}$Η συνάρτηση f(x) είναι:

→ Συνεχής στο διάστημα [0,1]

→ Γνησίως φθίνουσα στο [0,1]

→ f (0) = 1

→ Πολύ σημαντικό το γεγονός πως f($\frac{1}{2}$) = $\frac{1}{2}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$).

Η f(x) αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x}$, ∀x∈ [0,1]. Ισχύει $f^{-1}(1)=0$ kai$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Έχουμε λοιπόν τη δίκλαδη ασαφή άρνηση:

$$N_3(x)=\begin{cases} \frac{1}{2x+1}, & 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{2x}, & \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$

Η N_3 (x) έχει:

- N_3 (0) =1 και N_3 (1) = 0 (N1)
- N_3 συνεχής στο [0,1]
- N_3 γνησίως φθίνουσα στο [0,1]
- N_3 (N_3 (x)) = x, ∀ x ∈ [0,1]

Τα παραπάνω αποδεικνύονται εύκολα με πράξεις σύνθεσης συναρτήσεων και παραγώγισηεπιπέδου Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ.

Εδώ θα κάνω την παρατήρηση που έκανα και στις δύο προηγούμενες αρνήσεις.

Δηλαδή, υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων της μορφής

$$N_{3v}(x)=\begin{cases} \frac{1}{vx+1}, & 0\leq x\leq (\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v) \\ \frac{1-x}{vx}, & (\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v)<x\leq 1 \end{cases} \qquad V \in \mathbb{N}$$

Η παραπάνω ακολουθία συναρτήσεων αποτελεί μια ακολουθία δυνατών αρνήσεων. Ισχύουν οι ιδιότητες:

→ N_{3v} (0) = 1 και N_{3v} (1) = 0 (N1)

→ N_3 (v) συνεχής στο [0,1]. Αποδεικνύεται εύκολα με την χρήση πλευρικών ορίων στο σημείο x_{ov} = $\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v$. Παρεπιπτόντως, ο τρόπος για να βρεθεί το σημείο x_{ov} = $\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v$ είναι απλώς να λύσω στην εξίσωση $f_v(x)$ = x ώστε το σημείο (x_o, y_o) να βρίσκεται πάνω στο άξονα y=x. Ο τρόπος για να το βρω είναι: $\frac{1}{vx+1}$ = x⇔vx^2+x-1

= 0 με Δ= 4ν+1 άρα $x_{0(1,2)} = \frac{-1\pm\sqrt{4v+1}}{2v}$ ή $x_{01} = \frac{-1-\sqrt{4v+1}}{2v}$ απορρίπτεται άρα $x_{02} = \frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v$

→ Η ακολουθία ασαφών αρνήσεων είναι γνησίως φθίνουσα. Όντως

$$N_{3v}(x) = \begin{cases} \frac{v}{vx+1}, & 0 \leq x < \left(\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v\right) \\ \frac{1-v}{vx}, & \left(\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v\right) < x \leq 1 \end{cases}$$

Στο σημείο $x_{0v} = \frac{\sqrt{4v+1}}{2v}$-1/2ν η $N'_{3v}(x)$ (η παράγωγος της άρνησης) δεν ορίζεται, αλλά η $N_{3v}(x)$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, άρα επαληθεύεται η μονοτονία σε όλο το [0,1].

→ Τέλος το πιο δύσκολο κομμάτι είναι η απόδειξη της (Ν5). Κατά τη σύνθεση της $N_{3v}(x)$ με τον εαυτό της έχω:

$$N3v(x) = \begin{cases} f_v(x) = \frac{1}{vx+1}, & 0 \leq x \leq \left(\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v\right) \\ f^{-1}_v(x) = \frac{1-x}{vx}, & \left(\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v\right) < x \leq 1 \end{cases}$$

α) Η σύνθεση $f_v(x)$ με $f_v(x)$ δίνει το σημείο $x_0 = \frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v$

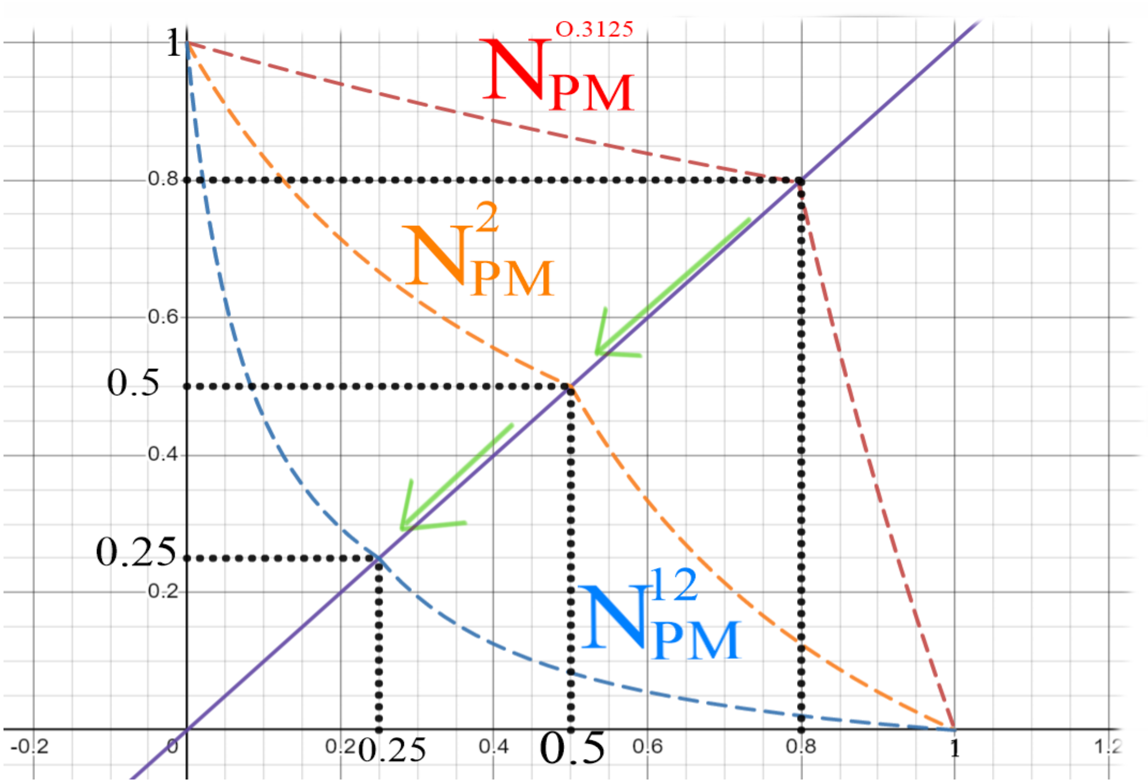
β) Η σύνθεση f_v^{-1} (x) με f_v^{-1} δίνει το κενό

γ) Η σύνθεση $f_v^{-1}(f_v(x)) = x$, $\forall x \in \left(\frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v, 1\right]$

δ) Η σύνθεση$f_v(f_v^{-1}(x)) = x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{4v+1}}{2v} - 1/2v\right]$

Για τις διάφορες τιμές του ν∈ ℕ το σημείο xo ξεκινάει από το xo = $\frac{1}{2}$ και ακολουθώντας τον τύπο $x_{0\nu} = \frac{\sqrt{4\nu+1}}{2\nu} - 1/2\nu$ παρουσιάζει φθίνουσα τιμή, περίπου όπως φαίνεται στο σχήμα.

Όπως και στις δύο προηγούμενες ακολουθίες συναρτήσεων, μπορεί εύκολα να μετατρέπει σε οικογένεια συναρτήσεων αν στη θέση του ν∈ ℕ τοποθετήσω τολ∈(0,+∞) . Στο παρακάτω γράφημα θα δούμε την πως καθώς το λ→+∞ το σταθερό σημείο μικραίνει και τείνει στο μηδέν. Αντίστοιχα όταν το λ→ 0 το σταθερό σημείο α τείνει προς το 1.Παρακάτω βλέπουμε τρεις από τις αρνήσεις της οικογένειας.Θα συμβολίσουμε την κατασκευή μας N^{λ}_{PM} (x).



Μπορούμε να δούμε σε μία απλή εφαρμογή το πως λειτουργεί το παραπάνω θεώρημα αν για την κατασκευή μιας δυνατής κλαδωτής άρνησης της μορφής της N^{λ}_{PM} (x) χρησιμοποιήσουμε μία εκ των ισχυρών N_1(x) ή N_2(x). Σε αυτή την περίπτωση θα χρειαστεί φυσικά να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση σε κάθε μία εκ των αρνήσεων. Σε αυτό ακριβώς το σημείο έχουμε να αντιμετωπίσουμε διαφόρων ειδών προβλήματα . Αρχικά στην άρνηση N1(x) το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε έχει να κάνει με το γεγονός πως η αντίστροφη συνάρτηση $N^{-1}{}_1(x)=\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{1-x}$παρουσιάζει πρόβλημα για την τιμή x=1. Βέβαια με μία εύκολη μετατροπή σε κλαδωτή συνάρτηση το πρόβλημα μπορεί να ξεπεραστεί . Πάρα ταύτα , το πλέον σημαντικό πρόβλημα σε αυτή την κατασκευή είναι η εύρεση του σταθερού σημείου του Banach. Στην επίλυση της εξίσωσης N1(x)=xπαρατηρούμε οτι το σημείο τομής των 2 συναρτήσεων αυτών (άρα και της αντιστρόφου) είναι αριθμός άρρητος . Αυτό είναι κάτι που δυσκολεύει πάρα πολύ την προσπάθεια κατασκευής δυνατής άρνησης με την χρήση των N1(x) και $N^{-1}{}_1(x)$ με την μορφή κλαδωτής συνάρτησης , οι οποίες θα ενώνονται ακριβώς πάνω στο σταθερό σημείο της y=x. Ακριβώς το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζούμε και κατά την κατασκευή της αντίστοιχης δυνατής άρνησης με την χρήση της ισχυρής $N_2(x)$ και της αντιστρόφου της . Αυτός είναι ένας από τους πολύ σημαντικούς λόγους που κάνει ενδιαφέρουσα την οικογένεια συναρτήσεων $N^{\lambda}{}_{PM}$ (x). Γιατί δίνει πολλές «καλές» τιμές στο σταθερό σημείο , ρητές και εύκολες στην χρήση τους . Η ουσία της κατασκευής βρίσκεται στο γεγονός πως γα τον υπολογισμό του σταθερού σημείου απαιτείται απλώς η επίλυση ενός τριωνύμου. Του τριωνύμου $\lambda x^2+x-1 = 0$, $\forall x\in [0, 1]$ και $\lambda\in(0,+\infty)$. Αυτό κάνει σχετικά απλό τον υπολογισμό του σταθερού σημείου και πολύ χρηστική την άρνηση $N^{\lambda}{}_{PM}$ (x).

2.3 Εφαρμογές στις ασαφείς αρνήσεις

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα που αφορά στην παλαιότητα του αυτοκινήτου, μπορούμε να δούμε πως λειτουργούν οι διάφορες αρνήσεις πάνω σ' αυτό το ζήτημα. Ας πάρουμε ως παράδειγμα και πάλι ένα αυτοκίνητο που διανύει τον 4^o χρόνο ζωής. Τότε η συνάρτηση συμμετοχής του αυτοκινήτου θα υπολογίζει την παλαιότητα ως Π(4)=0,3.

Η γνωστή δυνατή άρνηση N(x)=1-x θα υπολογίζει N(4)=0,7.

- Η άρνηση $N_1(x)=1-\frac{2x}{x2+1}$ θα δίνει:

$N_1(0,3)=1-\frac{2.0,3}{0,32+1}=1-\frac{0,6}{0,09+1}=1-\frac{0,6}{1,09}=1-0,55=0,45$

- Η άρνηση $N_2(x)=1-\ln((l-1)x+1)$ θα δίνει:

$N_2(0,3)=1-\ln((l-1)0,3+1)=1-\ln(1,5155)=1-0,4157=0,5843$

Παρατηρούμε ότι η $N_2(x)$ είναι άρνηση πιο κοντά στην N(x) από την $N_1(x)$

Δοκιμάζοντας το αντίστοιχο και για την

$$N_3(x)=\begin{cases} \frac{1}{2x+1},\ 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{2x},\ \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases}$$ θα έχουμε

$N_3(0,3)=\frac{1}{2.0,3+1}=\frac{1}{0,6+1}=\frac{1}{1,6}=0,625$

Προφανώς η $N_3(x)$ ως δυνατή άρνηση βρίσκεται ακόμα πιο κοντά, αριθμητικά, στην κλασική άρνηση N(x). Ας κάνουμε και δοκιμές με μερικές ακόμα ασκήσεις όπως:

Η $N_K(x)=1-x^2$ που θα δώσει για x=0,3

$N_K(0,3) = 1-0,3^2 = 1-0,09 = 0,91$

Εδώ παρατηρούμε πως η δυνατή άρνηση $N_K(x)$ δίνει τιμή μεγαλύτερη της κλασικής άρνησης που εδώ το 0,7.

Τέλος η άρνηση $N_R (x) = 1 - \sqrt{x}$ θα δώσει $N_R(0,3) – 1 - \sqrt{0,3} = 1-0,55 = 0,45$

Και εδώ έχουμε μια δυνατή άρνηση η οποία δίνει πολύ χαμηλή τιμή ως προς το 0,7 της κλασικής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 . Εισαγωγή στην ασαφή συνεπαγωγή

3.1 Εισαγωγή στις συνεπαγωγές

"Στην ασαφή λογική η αλήθεια ή το ψεύδος των ασαφών προτάσεων είναι ζήτημα βαθμού. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την κλασική λογική όπου η αλήθεια και το ψεύδος παίρνουν τις τιμές 1 ή 0. Με ανάλογο τρόπο οι ασαφείς συνεπαγωγές γενικεύουν τις συνεπαγωγές της κλασικής λογικής. Έστω x, y∈ [0,1] οι βαθμοί αλήθειας δύο ασαφών προτάσεων p και q. Δεδομένου ότι η κλασική συνεπαγωγή ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση x⇒y ≡ η (x) Vy"

"Ανάλογα με την επιλογή των ασαφών πράξεων προκύπτουν διάφορες ασαφείς συνεπαγωγές. Εάν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε όπου η (x) = 1-x (κλασική άρνηση) και θέσουμε ∇ = V = max, η ασαφής συνεπαγωγή γίνεται x⇒y ≡ (1-x) ∀x, y∈ [0,1]."[Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.]

Για παράδειγμα, ο βαθμός αλήθειας της συνεπαγωγής 0.4 ⇒ 0.3 με βάση την παραπάνω σχέση είναι 0.4 ⇒ 0.3 ≡ (1-0.4) V 0.3 = 0.6 V 0.3 = 0,6

Συνεπώς προσδιορίζουμε τους βαθμούς αλήθειας μιας συνεπαγωγής, δηλαδή την ασαφή συνεπαγωγή

J: [0,1] x [0,1] → [0,1] ώστε

J (x,y) = x⇒y και αν αναφερθούμε στην προηγούμενη σχέση θα έχουμε την συνεπαγωγή J (x,y) = x⇒y = (1-x) Vy

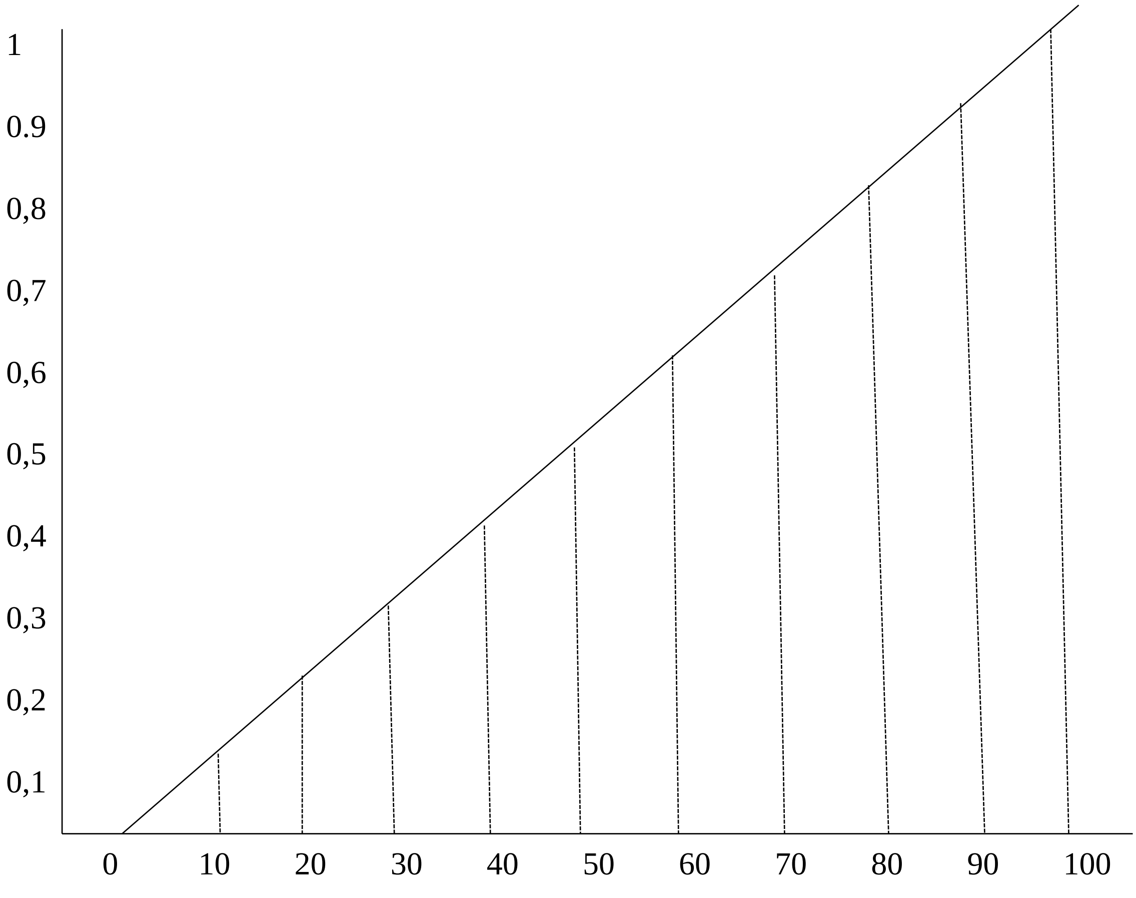
Για να μπορέσουμε να μεταφέρουμε την ασαφή συνεπαγωγή στα ασαφή σύνολα θα χρειαστεί να δώσουμε ένα παράδειγμα.

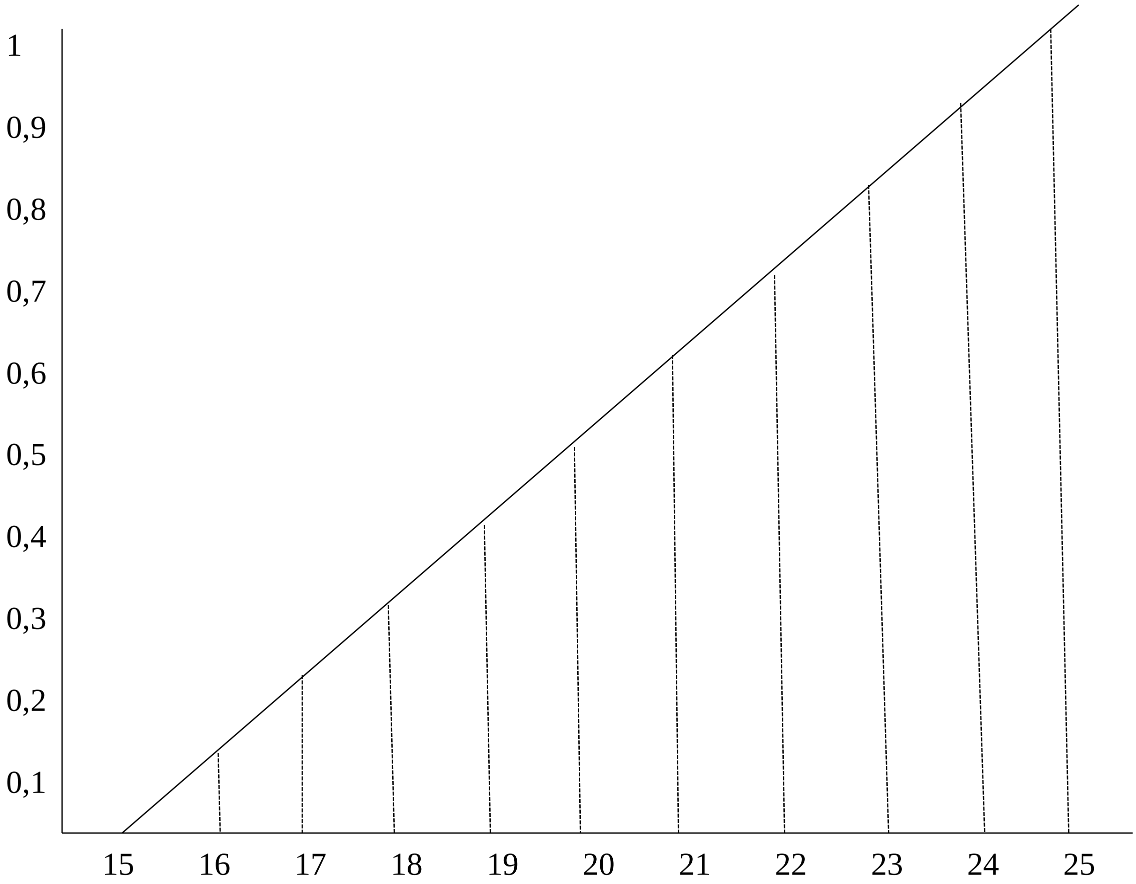
Ας θεωρήσουμε ένα πολύ καλά μονωμένο σπίτι. Το σπίτι αυτό, κατά την διάρκεια του χειμώνα και χωρίς τη χρήση θέρμανσης διατηρεί ελάχιστη θερμοκρασία στους 15^{o}C. Ανάλογα με το ποσοστό χρήσης του καυστήρα του σπιτιού, η θερμοκρασία στο εσωτερικό του σπιτιού αυξάνεται με την χρήση της συνεπαγωγής.

Ποσοστό λειτουργίας καυστήρα ⇒ θερμοκρασία στο εσωτερικό του σπιτιού. Έτσι θεωρούμε τις παρακάτω συμμετοχής.

$$A(x)=\begin{cases} 0{,}01X, & 0\leq x\leq 100 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases} \frac{x_{1-15}}{10}, & 15 \leq x\leq 25 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$





Για την εύρυθμη λειτουργία του προβλήματος θα θεωρήσουμε ότι το σπίτι είναι πολύ καλά μονωμένο και η θερμοκρασία του, παρά το χειμερινό κρύο δεν πέφτει κάτω από τους 15°C. Επίσης, λόγω μεγάλης έκτασης του οικήματος και δυσκολίας του καυστήρα δεν μπορεί να ανεβάσει την θερμοκρασία πάνω από τους 25°C.

“Η παραπάνω ασαφής συνεπαγωγή με σχέση ποσοστό λειτουργίας καυστήρα ⇒ θερμοκρασία σπιτιού ανάμεσα σε 2 γλωσσικές μεταβλητές μπορεί να παράξει πολλές αριθμητικές συνεπαγωγές της μορφής A (x) ⇒B (x) π.χ. ποσοστό λειτουργίας 60% ⇒ θερμοκρασίας 21°C. Ποιος άραγε να είναι ο βαθμός αλήθειας της παραπάνω συνεπαγωγής ;” [Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.]… Από τον ορισμό των συναρτήσεων A (x) και B (x) θα έχουμε ότι:

A (60%) = 0.6 και B (21°C) = 0.6

60% ⇒ 21°C = A (60%) ⇒ B (21°C) = 0.6 ⇒ 0.6 = (1-0.6) V 0.6 = 0.4 V 0.6 = 0.6

Δηλαδή ο βαθμός αλήθειας της συνεπαγωγής ποσοστό λειτουργίας 60% ⇒ θερμοκρασία σπιτιού 21ºC είναι ίσος με 0.6

Μια άλλη ενδεχόμενη συνεπαγωγή είναι 100% ⇒ 25ºC. Ακριβώς όπως η προηγούμενη πράξη, θα έχουμε ότι:

- 100% ⇒ 25ºC = A (100%) ⇒ B (25ºC) = 1 ⇒ 1 = (1-L) VL = 0 V 1 =1. Στην συνέχεια ας εξετάσουμε μερικές ακόμη περιπτώσεις προσδιορισμού του βαθμού αλήθειας της συνεπαγωγής:
- 80% ⇒ 21ºC = A (80%) ⇒ B (21ºC) = 0.6 ⇒ 0.8 = (1-0.6) V 0.8 = 0.4 V 0.8 = 0.8
- 40% ⇒ 24ºC = A (40%) ⇒ B (24ºC) = 0.9 ⇒ 0.4 = (1-0.9) V 0.4 = 0.1 V 0.4 = 0.4
- 20% ⇒ 22ºC ⇒ A (20%) ⇒ B (22ºC) = 0.7 ⇒ 0.2 = (1-0.7) V 0.2 = 0.3 V 0.2 = 0.3

"Δηλαδή εντελώς πρακτικά, η ασαφής συνεπαγωγή A ⇒ B μεταξύ δύο συνόλων A και B με A: x → [0,1], B: y → [0,1] ουσιαστικά περιλαμβάνει άπειρες συνεπαγωγές μεταξύ των τιμών αλήθειας A(x) ⇒B(y) όπου x∈X, y∈Y και αν χρησιμοποιήσουμε την επέκταση της κλασικής συνεπαγωγής τότε: A(x) ⇒B(y) = (1-A(x)) VB (y).

Όλα όσα αναφέραμε παραπάνω προέρχονται και απορρέουν από τη γενίκευση της κλασικής συνεπαγωγής. Παρ' όλα αυτά όπως το ασαφές και (Δ), το ασαφές ή (∇) και η άρνηση (n) έτσι και η ασαφής συνεπαγωγή ορίζεται και αξιωματικά.

Στο σημείο αυτό και πριν ολοκληρώσουμε την αξιωματική θεμελίωση της ασαφούς συνεπαγωγής θα αναφερθούμε σε ένα μη μαθηματικό συνεπάγεται. Πρόκειται για την συνεπαγωγή του Mamdani και ορίζεται:

Jmamdani (x,y) = x⇒y = A (x) ⇒B (y) = min (x,y) = xΛy. "[Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.]

"Η ασαφής συνεπαγωγή Mamdani είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος ασαφούς συνεπαγωγής. Ήταν μεταξύ των πρώτων συστημάτων ελέγχου που δημιουργήθηκαν από την θεωρία των ασαφών συνόλων. Προτάθηκε το 1975 σε μια προσπάθεια να ελεγχθεί η συνεργασία μιας ατμομηχανής και ενός ατμολέβητα, συνθέτοντας ένα σύνολο κανόνων γλωσσικών ελέγχου που διατυπώνονται από

έμπειρους χειριστές. Σε παρακάτω παράγραφος θα αναφερθούμε αναλυτικά στις συμμετρικές ασαφείς συνεπαγωγές, τις ασύμμετρες συνεπαγωγές και άλλων ειδών συνεπαγωγές".[Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.]

Χρησιμοποιώντας την ασαφή συνεπαγωγή του Mamdani, το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος της συνεπαγωγής «ποσοστό λειτουργίας καυστήρα» ⇒ «θερμοκρασία σπιτιού» μεταβάλλονται και πλέον διαμορφώνονται ως εξής:

- 60% ⇒ 21ºC = A (60%) ⇒ B (21ºC) = 0.6 ⇒ 0.6 = 0.6 Λ 0.6 = 0.6
- 100% ⇒ 25ºC = A (100%) ⇒ B (25ºC) = 1⇒1 = 1 Λ 1 = 1
- 80% ⇒ 21% = A(80%) ⇒ B (21ºC) = 0.6 ⇒ 0.8 = 0.8 Λ 0.6 = 0.6
- 40% ⇒ 24ºC = A (40%) ⇒ B (24ºC) = 0.9 ⇒ 0.4 = 0.4 Λ 0.9 = 0.4
- 20% ⇒ 22ºC ⇒ A (20%) ⇒ B (22ºC) = 0.7 ⇒ 0.2 = 0.2 Λ 0.7 = 0.2

Βέβαια, η ασαφής συνεπαγωγή του Mamdani δεν είναι η μοναδική γνωστή και ευρέως χρησιμοποιούμενη μηχανική συνεπαγωγή. Η συνεπαγωγή του Larsen είναι και αυτή μια συμμετρική συνεπαγωγή που ορίζεται ως:

$J_{Larsen}(x,y) = x \Rightarrow y = A(x) \Rightarrow B(n) = x \cdot y$

Ας δούμε τώρα πως η συνεπαγωγή Larsen διαμορφώνει τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος της συνεπαγωγής «ποσοστό λειτουργίας του καυστήρα» ⇒ «θερμοκρασία σπιτιού» θα έχουμε:

- 60% ⇒ 21ºC = A (60%) ⇒ B (21ºC) = 0.6 ⇒ 0.6 = 0.6 · 0.6 = 0.36
- 100% ⇒ 25ºC = A (100%) ⇒ B (25ºC) = 1⇒1 = 1 · 1 = 1
- 80% ⇒ 21% = A(80%) ⇒ B (21ºC) = 0.6 ⇒ 0.8 = 0.8 · 0.6 = 0.48
- 40% ⇒ 24ºC = A (40%) ⇒ B (24ºC) = 0.9 ⇒ 0.4 = 0.4 · 0.9 = 0.36
- 20% ⇒ 22ºC ⇒ A (20%) ⇒ B (22ºC) = 0.7 ⇒ 0.2 = 0.2 · 0.7 = 0.14

Από τους παραπάνω υπολογισμούς και τα αποτελέσματα των τιμών των διαφόρων συνεπαγωγών διαπιστώνουμε ότι οι τιμές των δύο συμμετρικών συνεπαγωγών (JMamdani και Larsen) είναι σχετικά κοντινές. Παρ' όλα αυτά θα δούμε παρακάτω άλλες περιπτώσεις μη συμμετρικών συνεπαγωγών (π.χ. JKleene – Dienes) που παρουσιάζουν μια αρκετά μεγάλη απόκλιση στις τιμές τους συγκριτικά με τις δύο παραπάνω συνεπαγωγές.

3.2 Αξιωματική θεμελίωση της ασαφούς συνεπαγωγής

"Ασαφής συνεπαγωγή είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών J: [0,1] x [0,1] → [0,1] που πληρεί στο μέγιστο τα παρακάτω αξιώματα:

1. *Αν a≤b συνεπάγεται ότι J (a,x) ≥J (b,x) (μονοτονία ως προς την πρώτη μεταβλητή)*
2. *Αν a≤b συνεπάγεται ότι J (x,a) ≤J (x,b) (μονοτονία ως προς τη δεύτερη μεταβλητή)*
3. *J (0,a) = 1. Αυτό σημαίνει ότι το ψεύδος συνεπάγεται οτιδήποτε (κυριαρχία του ψεύδους)*
4. *J (1,b) = b. Αυτό σημαίνει ότι η αλήθεια δεν συνεπάγεται οτιδήποτε (ουδετερότητα της αλήθειας)*
5. *J (a,a) = 1 (ταυτότητα)*
6. *J (a,J (b,x)) = J (b,J (a,x) (ιδιότητα της αλλαγής)*

   Αυτό το αξίωμα γενικεύει την ταυτότητα a⇒(b⇒x) ≡ b⇒ (a⇒x) που ισχύει στην κλασική λογική. Πράγματι:

   a ⇒ (b ⇒ x) = n (a) v (b ⇒ x) = n (a) v (n(b) vx) = n (a) vn (b) vx = n (b) v (n (a) vx) = n (b) v (a ⇒ x) = b ⇒ (a ⇒ x)

7. *J (a,b) = 1 ⇔a≤b (συνοριακή συνθήκη). Σημαίνει ότι οι ασαφείς συνεπαγωγές είναι αληθείς αν και μόνο αν ο ακόλουθος όρος είναι τουλάχιστον τόσο αληθής όσο ο ηγούμενος όρος. Μην ξεχνάμε ότι ξεκινάμε από μια ασαφή συνεπαγωγή A ⇒ B, αν A (x) ⇒ B (x) = 1, δηλαδή αν a⇒b = 1 ⇔J (a,b) = 1 ⇔A (x) ≤B (x)*
8. *J (a, b) = J (n (b), n (a)). Δηλαδή δύο ασαφείς συνεπαγωγές είναι ταυτόσημες αν ο ηγούμενος και ο ακόλουθος όρος εναλλαχθούν αφού προηγουμένως πάρουμε την άρνηση τους. Ουσιαστικά το συγκεκριμένο αξίωμα είναι μια γενίκευση της μεθόδους της εις άτοπον απαγωγής της κλασικής λογικής. Πράγματι αν p και q δύο προτάσεις της κλασικής λογικής p,q∈ {a,1}, τότε p⇒q≡ (q) ⇒n (p)*
9. *HJ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Αυτό το αξίωμα διασφαλίζει ότι μικρές μεταβολές στους βαθμούς αλήθειας της προηγούμενης ή της ακόλουθης*

πρότασης δεν δημιουργούν μεγάλες αλλαγές στους βαθμούς αλήθειας της ασαφούς συνεπαγωγής.”[Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.]

Καμία από τις παραπάνω αξιωματικές ιδιότητες της ασαφούς συνεπαγωγής δεν εμπεριέχει συμμετρία των ασαφών συνεπαγωγών του Mamdani και του Larsen που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Συνεπώς, θα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και χρησιμότητα ο προσδιορισμός μη συμμετρικών ασαφών συνεπαγωγών, οι οποίες θα διακρίνουν τη σχέση μεταξύ αιτίας και αιτιατού.

3.2.1. ΜΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΣΑΦΕΙΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΕΣ

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν θεωρήσουμε την κλασική συνεπαγωγή $a \Rightarrow b$, όπου a, b$\in$ {0,1}, τότε πληρούνται όλες οι περιγραφείσες αξιωματικές ιδιότητες της ασαφούς συνεπαγωγής, πλην της 9. Επίσης, πρέπει να δοθεί σημασία στο γεγονός ότι η κλασική συνεπαγωγή είναι περιορισμός της ασαφούς συνεπαγωγής, καθώς η κλασική συνεπαγωγή είναι συνάρτηση

J: $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ έναντι J: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ της ασαφούς

Μπορούμε όμως να ορίσουμε μια ασαφή συνεπαγωγή, η οποία θα αποτελεί γενίκευση της κλασικής συνεπαγωγής ως εξής:

J_c: $[0,1] \rightarrow [0,1]$ μεJ_c (a,b) = n (a) v b = max {(1-a), b} $\forall$ a,b $\in$ [0,1] δηλαδήJ_c (a,b) = a c$\Rightarrow$ b = max {1-a, b}

Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι πληρεί όλα τα αξιώματα εκτός του 7. Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι η γενίκευση της κλασικής συνεπαγωγής ορίζεται ως:

J_c (x,y) = x c$\Rightarrow$ y = n(x) vy = (1-x) vy

τυπικά μπορούμε αντί για v=max να θέσουμε μια t-conorm (∇) και αντί για n (x) = 1-x μια οποιαδήποτε άρνηση, $n_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$, $\lambda > -1$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την t-conorm, x∇y = x+y – xy (probor) και ως άρνηση την n(x) = 1-x τότε: J_c (x,y) = xc$\Rightarrow$n(x) Vy = n (x) + y-n (x) y = (1-x) Vy συνεπώς

J_c (x,y) = xc$\Rightarrow$y = (1-x) +y – (1-x)y = 1-x+y-y+xy=1-x+xy

“Προκύπτει έτσι μια νέα συνεπαγωγή η J_c *(x,y)=1-x+xy η οποία καλείται ασαφής συνεπαγωγή Reichenbach (Jaeichenbach), [KlirandYuan, 1995].*

Αν στη σχέση $J_c(x,y) = xc \Rightarrow y = n(x) \vee y = (1-x) \vee y$ *χρησιμοποιήσουμε την άρνηση* $n_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$, $\lambda > -1$ *και t-conorm (∇) το probor, προκύπτει η συνεπαγωγή:*

$J_c(x,y) = xc \Rightarrow y = n\lambda(x) \nabla y = n_\lambda(x)+y - n_\lambda(x)\, y$ *άρα*

$J_c(x,y) = \frac{1-x}{1+\lambda x} + y - \frac{y(1-x)}{1+\lambda x}$ *άρα*

$J_c(x,y) = \frac{1-x+y\,(1+\lambda x)-y(1-x)}{1+\lambda x}$, $\lambda > -1$

Κατ’ αυτόν τον τρόπο, δηλαδή ως επέκταση της κλασικής συνεπαγωγής, μπορούμε να κατασκευάσουμε κι άλλες ασαφείς συνεπαγωγές, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μια t-conorm και μια άρνηση. Συμβολίζουμε όλες τις παραγόμενες ασαφείς συνεπαγωγές με J_c *ώστε να είναι πρόδηλο ότι προέρχονται από την κλασική συνεπαγωγή, παράγονται δηλαδή από τη μορφή n(x)∇y. Η μορφή όμως αυτή δεν είναι μοναδική.Μέχρι τώρα είδαμε την κλασική συνεπαγωγή να ορίζεται από την εξής σχέση:* $p \Rightarrow q = n(p) \vee q$ $(p,q \in \{0,1\}$*. Όμως μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι ισχύει και η σχέση* $p \Rightarrow q = n(p) \vee (p \cap q)$*, που είναι ένας δεύτερος και ισοδύναμος τρόπος έκφρασης της κλασικής συνεπαγωγής.”[Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.]*Η κλασική αυτή συνεπαγωγή είναι δυνατόν να επεκταθεί στην ασαφή λογική. Θεωρώντας x,y∈ [0,1] έχουμε:

$J_c(x,y) = x \Rightarrow y = n(x) \nabla (x \Delta y)$

Πρέπει όμως η τριάδα Δ,n,∇ να είναι τριάδα DeMorgan. Μια τέτοια τριάδα DeMorgan είναι η:

$\Delta = \Lambda = \min$

$n(x) = 1-x$

$\nabla = V = \max$

ΧρησιμοποιώνταςτηνπαραπάνωτριάδαDeMorganέχουμεJ (x,y) = x⇒y = max {1-x, min (x,y)} ηοποίαονομάζεταιασαφήςσυνεπαγωγήZadeh (zadeh), [KlirandYuan, 1995].Κατ’ αυτόν τον τρόπο μπορούμε να παράξουμε και άλλες ασαφείς συνεπαγωγές. Έστω ότι Δ = n (x)-1-x και ∇ = probor. Τότε:J (x,y) = x⇒y = (1-x) ∇ (x,y) = 1-x+xy-(1-x)xy=1-x+xy-xy+x^2y=1-x+x^2y η οποία ονομάζεται ασαφής συνεπαγωγή KlirandYuan 1 (Jklirandyaun 1), [KlirandYuan, 1995]. Με αφετηρία και πάλι την κλασική συνεπαγωγή p⇒q ≡(n(p)Λn(q)Vq(p,q∈ {0,1}) στο ίδιο πνεύμα, θεωρώντας x,y∈ [0,1], ορίζουμε την ασαφή συνεπαγωγή:

J_{c2} (x,y) = x ⇒ y = (n (v) Δ n (y) ∇ n (n)

3.2.2 ΘΕΩΡΗΜΑSMETZ-MAGREZ

ΜιασυνάρτησηJ: [0,1] x [0,1] → [0,1] πληρείταααξιώματα 1 ως 9 τωνασαφώνσυνεπαγωγώνγιαμιασυγκεκριμένηάρνησηπανκαιμόνοανυπάρχειμιαγνήσια αύξουσακαισυνεχήςσυνάρτησηf: [0,1] → [0, +∞] τέτοιαώστε, [Baczynski, 2004,]:

- F (0) = 0,
- J (x,y) = $f^{(-1)}$ (f(1) - f(x) + f(y)), ∀x,y∈ [0,1]
- n(x) = f^{-1} (f(1) – f(x)), ∀x∈ [0,1]

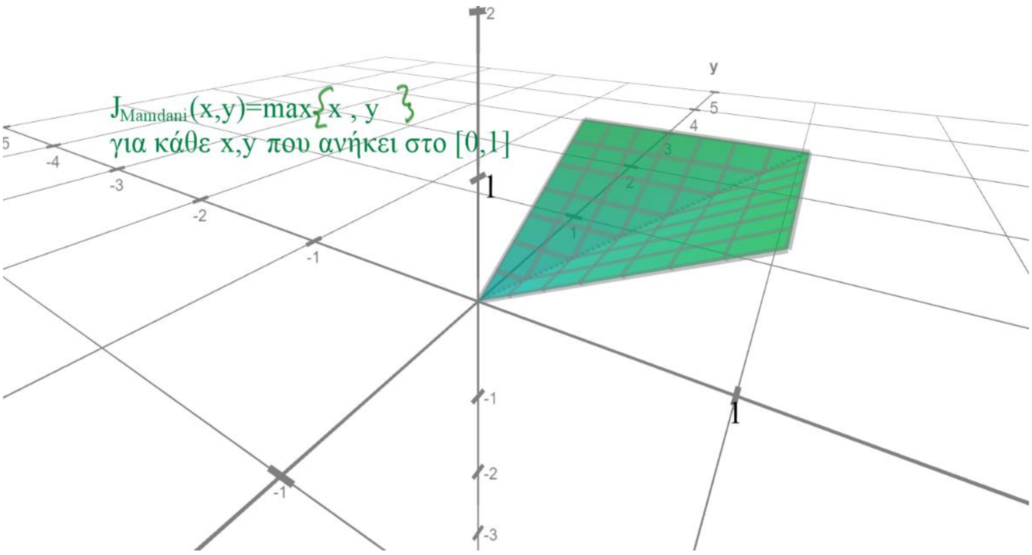
Το θεώρημα Smetz-Magrez είναι πολύ σημαντικό διότι δίνει τη δυνατότητα παραγωγής συνεπαγωγών που πληρούν όλα τα αξιώματα.Ας δώσουμε παρακάτω τον τεχνικό ορισμό της ψευδοαντίστροφης συνάρτησης $f^{(-1)}$ που χρησιμοποιείται στο θεώρημα Smetz-Magrez.

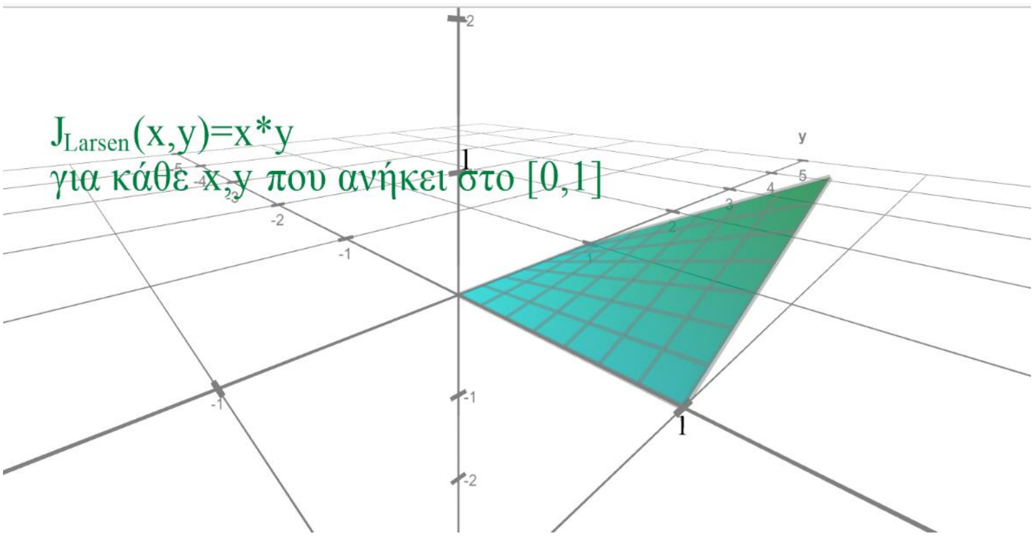
ΟΡΙΣΜΟΣ: Ας θεωρήσουμε f: [0,1] → R μιας γνησίως αύξουσα συνεχή συνάρτηση μ f(0) = 0. Η ψευδοαντίστροφη συνάρτηση $f^{(-1)}$: R → [0,1] πάντα υπάρχει και ορίζεται ως εξής:

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ f^{(-1)}(x) & , \text{αν } x \in [0, f(1)] \\ 1 & , \text{αν } x \in (f(1), +\infty) \end{cases}$$

3.2.3. ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝΑΣΑΦΩΝ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΩΝ

Στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν έχουμε συγκεντρώσει τις σημαντικές και ευρέως χρησιμοποιούμενες συμμετρικές ασαφείς συνεπαγωγές $J_{Mamdani}(x,y)$ και $J_{Larsen}(x,y)$. έχουν προταθεί από τους αντίστοιχους επώνυμους επιστήμονες. Οι παρακάτω συμμετρικές συνεπαγωγές , λόγω ακριβώς της ιδιότητας της συμμετρίας (αν αλλάξω θέση το χμε το γδεν αλλάζε η τιμή της συνεπαγωγής) είναι ευρέως χρισιμοποιούμενες και διαδεδομένες. Γνωστές και ώς «μη μαθηματικές συνεπαγωγές» . Στην επόμενη παράγραφο θα παρατεθεί αναλύτικος πίνακας με τις σημαντικότερες συνεπαγωγές , τον δημιουργό τους και το αντίστοιχο έτος.





3.3 Αποδείξεις και πράξεις στις ασαφείς συνεπαγωγές

Ο τελεστής της συνεπαγωγής (→) διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κλασική δί-τιμη λογική.

1ον Από την κλασική συνεπαγωγή μπορούμε να αποκτήσουμε όλους τους άλλους λογικούς συνδέσμους, όπως την διάζευξη (v), την σύζευξη (Λ) και την άρνηση (-).

2ον Ο τελεστής της συνεπαγωγής στην κλασική λογική έχει τον βασικό ρόλο για την παραγωγή συμπερασμάτων, όπως modusponens, modusTollens, hypotheticalsyllogism, όπως φαίνονται στα σχήματα παρακάτω:

Modus pones

$p \rightarrow q$

p

$\therefore q$

Modus Tollens

$p \rightarrow q$

$\neg q$

$\therefore \neg p$

Hypothetical syllogism

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\therefore p \rightarrow r$

Πίνακαςαληθείαςστηνκλασικήσυνεπαγωγή

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Μια ασαφής συνεπαγωγή είναι μια γενίκευση της κλασικής συνεπαγωγής, με τον ίδιο τρόπο που ένα t-norm και ένα t-conorm είναι γενικεύσεις της κλασικής σύζευξης και διάζευξης αντίστοιχα. Στη συνέχεια εισάγουμε τις βασικότερες ιδιότητες των ασαφών συνεπαγωγών ενώ παρακάτω θα δούμε τις σχέσεις που συνδέουν την άρνηση και τις συνεπαγωγές στο γενικότερο πλαίσιο της ασαφούς λογικής.

Στη διεθνή βιβλιογραφία, μπορούμε να βρούμε αρκετούς ορισμούς της ασαφούς συνεπαγωγής που βασίζονται στις χαρακτηριστικές ιδιότητες της κλασικής συνεπαγωγής.

Ορισμός 1.1 Μια συνάρτηση I: [0,1] x [0,1] → [0,1] θα λέμε ότι είναι μια ασαφής συνεπαγωγή εάν ικανοποιεί για κάθε x, x_1, x_2, y, y_1, y_2∈ [0,1] τα εξής:

(I1) $x_1 \leq x_2$ τότε I (x_1, y) ≥ (x_2, y) φθίνουσα ως προς τη $1^η$ μεταβλητή

(I2) y, $\leq y_2$ τότε I(x_1,y) ≥I(x,y_2) αύξουσα στη $2^η$ μεταβλητή

(I3) I (0,0) = 1

(I4) I (1,1) = 1

(I5) I (1,0) = 0

Το σύνολο όλων των ασαφών συνεπαγωγών το συμβολίζουμε με FI

Ο ορισμός 1.1 εκτός του αντικατοπτρίζει του πίνακα αληθείας της κλασικής συνεπαγωγής μας δίνει και τις ελάχιστες συνθήκες {I (1), I(2), I(3), I(4), I(5)}, ώστε το σύνολο των ασαφών συνεπαγωγών δηλαδή το (FI, ≤), να είναι ένα πλήρες επιμεριστικό δικτυωτό με πράξεις.

(I V J) (x,y) = max (I(x,y), J (x,y), x,y∈ [0,1]
(I Λ J) (x,y) = min (I(x,y), J (x,y) x,y∈ [0,1]

Με τον παρακάτω πίνακα μπορούμε να διαπιστώσουμε την ανεξαρτησία των αξιωμάτων (I1) έως (I5) του ορισμού 1.1.

Ασαφής συνεπαγωγή	I1	I2	I3	I4	I5
I(x,y) = max {1-x, min[x,y]}	X	√	√	√	√
I(x,y) = max {y, min [1-x, 1-y]}	√	X	√	√	√
$I(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ αν } y < 1 \\ 1, \text{ αν } y = 1 \end{cases}$	√	√	X	√	√
$I(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ αν } x > 0 \\ 1, \text{ αν } x = 1 \end{cases}$	√	√	√	X	√
I(x,y) = 1	√	√	√	√	X

Παρατήρηση 1

Από τα αξιώματα

(I2) $y_1 \le y_2$ τότε $I(x,y_1) \le I(x,y_2)$ και

(I3) $I(0,0) = 1$ παρατηρώ ότι $0 \le y$ τότε $1 = I(0,0) \le I(0,y) \le 1$

Άρα $I(0,y) = 1$ αριστερό σύνορο (LB)

και για $y = 1$ έχουμε

$I(0,1) = 1$ Συνθήκη κανονικότητας (NC)

Ενώ από τα αξιώματα

(I1) $x_1 \le x_2$ τότε $I(x_1,y) \ge I(x_2,y)$ και

(I4) $I(1,1) = 1$ έχουμε

$x \le 1$ τότε $1 = I(1,1) \le I(x,1) \le 1$

επομένως $I(x,1) = 1$ δεξιό σύνορο (RB)

Συνεπώς κάθε ασαφής συνεπαγωγή που περιορίζεται στο σύνολο $\{0,1\}^2$ συμπίπτει με την κλασική συνεπαγωγή

Ενδιαφέρον παρουσιάζει, επίσης, το αξίωμα $I(0,y) = 1$ (LB) που μας οδηγεί στο γεγονός ότι το ψεύδος συνεπάγεται οτιδήποτε (κυριαρχία ψεύδους)

Δεδομένου ότι υπάρχουν άπειρες ασαφείς συνεπαγωγές στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται μερικές βασικές ασαφείς συνεπαγωγές και στη συνέχεια δίνονται και οι γραφικές παραστάσεις των εννέα ασαφών συνεπαγωγών του πίνακα.

Lukasiewicz 1923[15]	$I_{LK}(x,y) = \min\{1, 1-x+y\}$
Godel 1932[9]	$I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \le y \\ y & \text{αν } x > y \end{cases}$
Reichentach 1935[18]	$I_{RC}(x,y) = 1-x+xy$
Kleene-Dienes 1938[11];	$I_{KD} = \max(1-x, y)$

1949[2]	
Goguen 1969[7]	$I_{GG}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \leq y \\ \frac{y}{x} \text{ αν } x > y \end{cases}$
Rescher 1969[19]	$I_{RS}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \leq y \\ 0 \text{ αν } x > y \end{cases}$
Yager 1980[24]	$I_{YG}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x = y = 0 \\ y^x \text{ αν } x > 0, y > 0 \end{cases}$
Weber 1983[23]	$I_{WB}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \leq y \\ y \text{ αν } x > y \end{cases}$
Fodor 1993[4]	$I_{FD}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \leq y \\ \max\{1-x,y\} \text{ αν } x > y \end{cases}$

Θα πρέπει να σημειώσουμε, επίσης, ότι για το σύνολο των ασαφών συνεπαγωγών, επειδή είναι ένα δικτυωτό, ισχύει η έννοια της μερικής διάταξης. Μπορούν εύκολα να εντοπιστούν αρκετές ασαφείς συνεπαγωγές που δ εν είναι συγκρίσιμες και άλλες που είναι. Από τον πίνακα έχουμε τις παρακάτω αλυσίδες διάταξης.

$$I_{KD}<I_{RC}<I_{LK}<I_{WB} \qquad (1.1)$$

$$I_{RS}<I_{GD}<I_{GG}<I_{LK}<I_{WB} \qquad (1.2)$$

$$I_{YG}<I_{RC}<I_{LK}<I_{WB} \qquad (1.3)$$

$$I_{RS}<I_{GD}<I_{FD}<I_{LK}<I_{WB} \qquad (1.4)$$

Πάντως η μικρότερη ασαφής συνεπαγωγή στο σύνολο των ασαφών συνεπαγωγών είναι:

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x = 0 \text{ ή } y = 1 \\ 0 \text{ αν } x>0 \text{ και } y<1 \end{cases} \qquad x,y \in [0,1]$$

Ενώ η μεγαλύτερη είναι:

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x<1 \text{ ή } y>0 \\ 0 \text{ αν } x = 1 \text{ και } y = 0 \end{cases} \qquad x,y\in [0,1]$$

Μερικές ακόμη ιδιότητες των ασαφών συνεπαγωγών. Στη βιβλιογραφία συναντάμε και επιπρόσθετες ιδιότητες των συνεπαγωγών. Οι περισσότερες είναι γενικεύσεις της δίτιμης λογικής. Οι σημαντικότερες από αυτές παρουσιάζονται παρακάτω.

- Η αριστερή ουδετερότητα της αλήθειας (NP) (neutralityproperty) που δίνεται από τη σχέση $I(1,y) = y$, $y\in [0,1]$

Η αριστερή ουδετερότητα της αλήθειας είναι γενίκευση του νόμου της κλασικής λογικής $1 \to p\equiv p$

Δηλαδή η τιμή αλήθειας της συνεπαγωγής είναι η τιμή του επόμενου όρου

- Η αρχή της ανταλλαγής (EP) (exchangeprinciple) που δίνεται από την σχέση:

$I(x, I(y,z) = I(y, I(x,z)), y, x, z, \in [0,1]$

Η αρχή της ανταλλαγής (EP) είναι γενίκευση της κλασικής ταυτολογίας $p\to(q\to r) \equiv q\to(p\to r)$

- Η αρχή της ουδετερότητας (IP) (identidyprinciple)

$I(x,x) = 1$, $x\in [0,1]$;

Γενίκευση της κλασικής ταυτολογίας $p\to p$

- Η ιδιότητα της διάταξης (OP) (orderingproperty)

$I(x,y) = 1 \Leftrightarrow x\leq y$, $x,y\in [0,1]$;

Στη συνέχεια θα δώσουμε αρκετές προτάσεις με τις αποδείξεις τους που θα μας φανερώσουν κάποια συσχέτιση με τις παραπάνω ιδιότητες των ασαφών συνεπαγωγών.

Πρόταση 1

Έστω μια συνάρτηση I : [0,1] x [0,1] → [0,1]. Αν η …. ικανοποιεί την αριστερή ουδετερότητα της αλήθειας (NP) (neutralityproperty) δηλαδή:

I (0,y)=1, y∈ [0,1], τότε ικανοποιεί και τις ιδιότητες I3 και NC

Απόδειξη

Θα πρέπει να δείξουμε, λοιπόν, ότι ισχύουν:

(I3) I (0,0) = 1

(NC) I (0,1) = 1

Πράγματι, εφόσον ισχύει I (0,y)=1, y∈ [0,1], τότε για y=0 έχουμε I(0,0)=1 ενώ για y=1 έχουμε I(0,1)=1

Πρόταση 2

Έστω μια συνάρτηση I:[0,1]x[0,1]→[0,1]. Αν I ικανοποιεί το δεξιό σύνορο (RB), δηλαδή I(x,1)=1, x∈[0,1], τότε ικανοποιεί τις I.4 και NC

Απόδειξη

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(I4) I(1,1)=1

(NC) I(0,1)=1

Εφόσον I(x,1)=1, τότε για x=1 έχουμε I(1,1)=1 για x=0 έχουμε:I(0,1)=1

Πρόταση 3

Έστω μια συνάρτηση I:[0,1]x[0,1]→[0,1]. Αν η I ικανοποιεί την (NP) δηλαδή I(1,y)=y, y∈[0,1], τότε ικανοποιεί τις I4 και I5.

Απόδειξη

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(I4) I(1,1)=1

(I5) I(1,0)=1

Αφού ισχύει η (NP), δηλαδή I(1,y)=y, y∈[0,1], τότε για y=1. Έχουμε: I(1,1)=1 ενώ για y=0 έχουμε I(1,0)=1

Πρόταση 4

Έστω μια συνάρτηση I:[0,1]x[0,1]→[0,1]. Αν η I ικανοποιεί την (IP), δηλαδή I(x,x)=1, x∈[0,1], τότε ικανοποιεί τις I3 και I4.

Απόδειξη

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(I3) I(0,0)=1

(I4) I(1,1)=1

Πράγματι στη σχέση I(x,x)=x, x∈[0,1], για x=0 και για x=1 έχουμε I3 και I4.

Πρόταση 5

Έστω μια συνάρτηση I:[0,1]x[0,1]→[0,1]. Αν η I ικανοποιεί την (OP), δηλαδή I(x,y)=1⇔x≤y,x,y∈[0,1], τότε ικανοποιεί τις I3 και I4, NC, LB, RB και την IP

Απόδειξη

Με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις στη σχέση

I(x,y)=1 ⇔x,y∈ [0.1]

Έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα

√ I3 I(0,0)=1 αφού 0≤0

√ I4 I(1,1)=1 αφού 1≤1

√ NC I(0,1)=1 αφού 0≤1

√ LB I(0,y)=y αφού 0≤y

√ RB I(x,1)=1 αφού x≤1

√ IP $I(x,x)=1$ αφού $x \leq x$

Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει πόσο δυνατές συνθήκες είναι οι (OP) και η (EP) που μαζί με την (I2), παράγουν όλες τις άλλες συνθήκες (ιδιότητες) που περιγράψαμε μέχρι τώρα.

Πρόταση 6

Έστω μια συνάρτηση $I:[0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$. Αν η I ικανοποιεί την (OP) δηλαδή $I(x,y)=1 \Leftrightarrow x \leq y$, $x,y \in [0,1]$ και την αρχή της ανταλλαγής (EP) $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$, $y, x, z, \in [0,1]$, τότε ικανοποιεί όλα τα αξιώματα I1, I3, I4, LB, RB, NC, NP και την IP.

Απόδειξη

Εφόσον ισχύουν οι ιδιότητες OP και EP από την πρόταση 5 έχουμε ότι ισχύουν I1, I3, I4, LB, RB, NC, NP και η IP. Αρκεί να δείξουμε, λοιπόν, ότι ισχύουν οι I1, I5 και NP.

Θα δείξουμε πρώτα την I1 δηλαδή αν:

$x_1 \leq x_2$τότε $I(x_1, y) \geq (x_2, y)$ Έστω $x_1 \leq x_2$ με $x_1, x_2 \in [0.1]$ από την EP

$I(x_2, I(I(x_2, y)y)) = I(I(x_2, y), I(x_2,y)=1$. ΆρααπόOP $(I(x,y)=1 \Leftrightarrow x \leq y$ έχουμε $x_2 \leq 1$ $((I(x_2, y)y))$ επειδή$x_1 \leq x_2$ τότεκαι $x_1 \leq I(I(x_2, y)y))$, τελικάέχουμε$I=I(x_1,I(I(x_2,y)y))=I(i(x_2,y),I(x_1,y))$ άρα $I(x_1,y) \leq I(x_2,y)$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την (NP) δηλαδή $I(I,x)=x$, $x \in [0,1]$. Πράγματι

$I(x,I(1,x)=I(1,I(x,x))=I(1,1)=1$ άρα $x \leq I(1,x)$ (I)

Επίσης $I(1,I(1,x),x))=I(I(1,x),I(1,x)=1$ άρα $1 \leq I(I(1,x),x)$

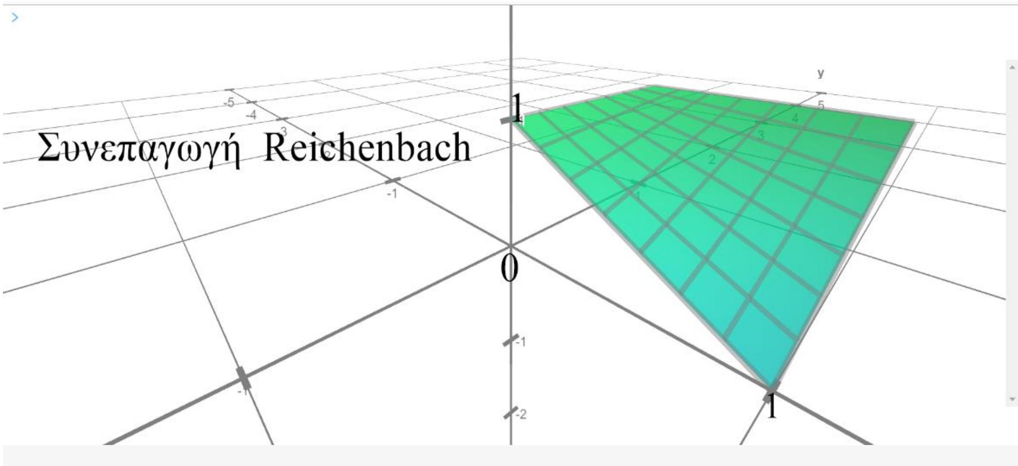
Δηλαδή$I(I(1,x),x)=1$ άρα $I(1,x) \leq x$ (II)

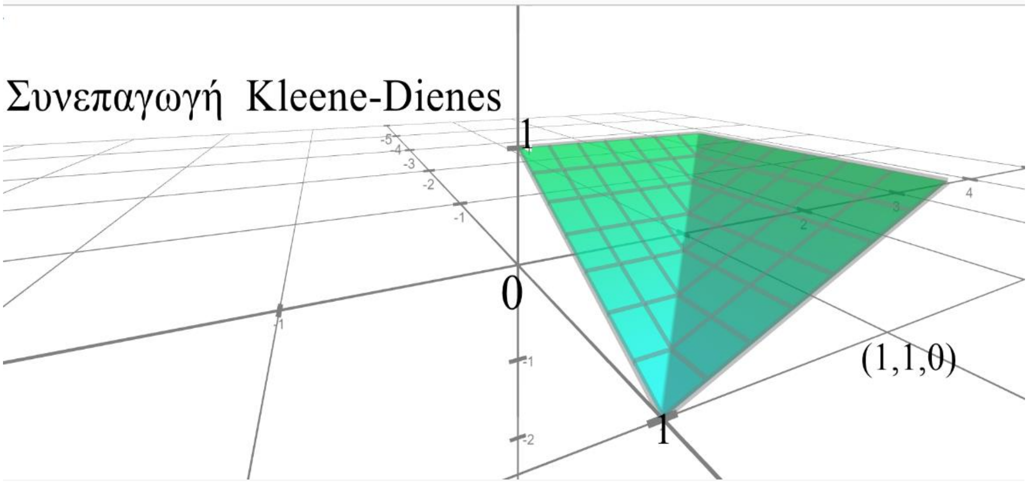
Από τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε τελικά ότι: $I(1,x)=x$, $x \in [0,1]$ που είναι NP

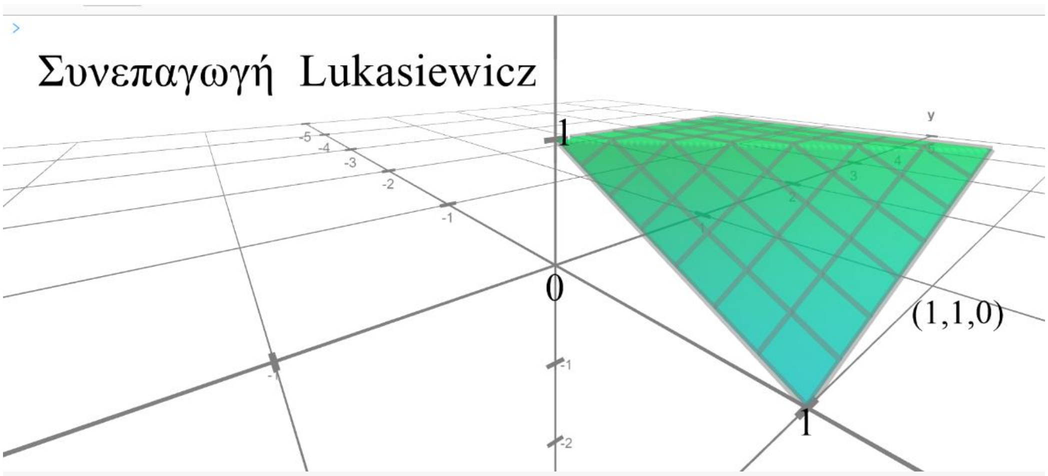
Η ιδιότητα (I5), ισχύει αν στην σχέση $I(1,x)=x$, $x \in [0,1]$ βάλουμε όπου x το O. Έτσι θα έχουμε $I(1,0)=0$ που είναι η (I5).

Θα είχε ενδιαφέρον για μια ασαφή συνεπαγωγή, αν από τις EP και OP ίσχυε και η ιδιότητα I2, όμως αυτό δεν ισχύει πάντα.

Ας δούμε ενδεικτικά μερικές από τις πιο γνωστές συνεπαγωγές :







3.4 Κατασκευή ασαφούς συνεπαγωγής από ασαφή άρνηση

Έχουμε κάνει αναφορά σε προηγούμενες παραγράφους για τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται οι ασαφείς συνεπαγωγές . Ένας από αυτούς τους τρόπους είναι και η χρήση της κλασικής συνεπαγωγής ως ασαφούς . Δηλαδή αν έχω μια άρνηση N(x) τότε η συνάρτηση max{N(x),y} είναι μία συνεπαγωγή της μορφής x =>y . Η οικογένεια ασαφών αρνήσεων που κατασκευάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο με τον τύπο

$$N^{\lambda}_{PM}(x)=\begin{cases} \frac{1}{\lambda x-1},\ 0 \leq x \leq \left(\frac{\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda}-1/2\lambda\right) \\ \frac{1-x}{\lambda x},\ \left(\frac{\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda}-1/2\lambda\right)<x\leq 1,\ \lambda \in (0,+\infty) \end{cases}$$

είναι μια οικογένεια δυνατών αρνήσεων κα από αυτήν μπορούμε να πάρουμε την οικογένεια ασαφών συνεπαγωγών $J^{\lambda}_{PM}(x,y) = \max\{ N^{\lambda}_{PM}(x) , y(x) \}$ για διαφόρων τύπων συναρτήσεις συμμετοχής στην θέση του y(x) . Πριν όμως προχωρήσουμε σε εφαρμογές με την παραπάνω συνεπαγωγή ας δούμε πρώτα ποια από τα εννέα αξιώματα των συνεπαγωγών επαληθεύει η $J^{\lambda}_{PM}(x,y)$. Κατ' αρχάς στην θέση της συνάρτησης συμμετοχής y(x) θα θέσουμε μια απλή γραμμική συνάρτηση με αύξουσα μονοτονία (Ή κάποια υπογραμμική , όπως ενα ριζικό).

1. Ανα$\leq b \Leftrightarrow J^{\lambda}_{PM}(b,y) \leq J^{\lambda}_{PM}(a,y)$ που φυσικά ισχύει γιατί η άρνηση μας είναι γνησίως φθίνουσα .
2. Ανα$\leq b \Leftrightarrow J^{\lambda}_{PM}(x,a) \leq J^{\lambda}_{PM}(x,b)$ και ισχύει γιατί η υποτιθέμενη μεταβλητή yείναι γνησίως αύξουσα.
3. $J^{\lambda}_{PM}(0,a)=1$. Η κυριαρχία του ψεύδους ισχύει γιατί η άρνηση δίνει $N^{\lambda}_{PM}(0)=1$.
4. $J^{\lambda}_{PM}(1,b)=b$και ισχύει γιατί $N^{\lambda}_{PM}(1)=0$
5. $J^{\lambda}_{PM}(0,a)=\frac{\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda}$ -1/2λ . Άρα η ιδιότητα φαίνεται να μην ισχύει γιατί $J^{\lambda}_{PM}(a,a)$είναι διαφορετικό του 1 . Από την συνεπαγωγή $\max\{N^{\lambda}_{PM}(a) ,a\}$ παίρνω σχέση $\frac{1}{\lambda a-1} = a \Leftrightarrow \lambda a^2 +a-1=0$. Τότε η διακρίνουσα Δ θα είναι Δ=

1+4λ και βρίσκω a= $\frac{\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda}$-1/2λ . Με την βοήθεια της μεθόδου της συζυγούς παράστασης βρίσκω οτι για λ→ 0 θα έχω a→ 1 ! Που αυτό είναι το ζητούμενο . Αλλά για λ→+∞ θα βρω οτι η τιμή του a→ 0 . Άρα η τιμή της συνεπαγωγής εξαρτάται από την συγκεκριμένη τιμή που θα δώσουμε στην παράμετρο λ της οικογένειας των συνεπαγωγών που εξετάζουμε .

6. $J^{\lambda}_{PM}(a , J^{\lambda}_{PM}(b,x)) = J^{\lambda}_{PM}(b , J^{\lambda}_{PM}(a,x))$. η γνωστή ιδιότητα της αλλαγής . Δηλαδή θέλουμε :$J^{\lambda}_{PM}(a , J^{\lambda}_{PM}(b,x)) = \max\{ N^{\lambda}_{PM}(a) , J^{\lambda}_{PM}(b,x) \} = \max\{N^{\lambda}_{PM}(a),N^{\lambda}_{PM}(b),x\} = \max\{ N^{\lambda}_{PM}(b), N^{\lambda}_{PM}(a),x\} = \max\{N^{\lambda}_{PM}(b),J^{\lambda}_{PM}(a,x)\}= J^{\lambda}_{PM}(b , J^{\lambda}_{PM}(a,x))$ Άρα ισχύει !
7. $J^{\lambda}_{PM}(a,b)=1 \Leftrightarrow a\leq b$. Είναι η συνοριακή συνθήκη και ισχύει και αυτή .
8. $J^{\lambda}_{PM}(a,b)= J^{\lambda}_{PM}(N^{\lambda}_{PM}(b) , N^{\lambda}_{PM}(a))$. Δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε οτι : $J^{\lambda}_{PM}(N^{\lambda}_{PM}(b) , N^{\lambda}_{PM}(a)) = \max\{ N^{\lambda}_{PM}(N^{\lambda}_{PM}(b)), N^{\lambda}_{PM}(a)\} = \max\{b,N^{\lambda}_{PM}(a)\}= J^{\lambda}_{PM}(a,b)$. Άρα και αυτή η ιδιότητα ισχύει . Φυσικά να αναφέρουμε ότι έχουμε αποδείξει πως $N^{\lambda}_{PM}(N^{\lambda}_{PM}(b))=b$.
9. Προφανώς η ασαφής συνεπαγωγή $J^{\lambda}_{PM}(a,b)$ είναι μια συνεχής συνεπαγωγή στο πεδίο [0,1] X[0,1] (Αυτό βέβαια εξαρτάται και από τον τύπο της y(x) συνάρτησης συμμετοχής).

Θα λέγαμε λοιπόν οτι συνολικά η οικογένεια συνεπαγωγών που μας ενδιαφέρει είναι πολύ καλά αξιωματικά ορισμένη και καλύπτει σχεδόν το σύνολο των αξιωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Εφαρμογές στις συνεπαγωγές

4.1 Εφαρμογή της συνεπαγωγής $J_{PM}(x,y)$

Αφού εξετάσαμε την παραπάνω συνεπαγωγή ως τις αξιωματικές της ιδιότητες αυτό που θα είχε μεγάλη σημασία είναι να δοκιμάσουμε παραδείγματα στα οποία η παραπάνω συνεπαγωγή να έβρισκε εφαρμογές.

Συνθέτοντας δύο ενδιαφέρουσες εφαρμογές θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε το πόσο καλά «λειτουργεί» η παραπάνω συνεπαγωγή σε χαμηλό «βαθμό αλήθειας» αλλά και σε υψηλό «βαθμό αλήθειας». Θα ξεκινήσουμε συντάσσοντας δύο προβλήματα που για να επιλυθεί θα χρειαστούν την χρήση της παραπάνω συνεπαγωγής.

4.2 Αλλαγή σχέσης ταχυτήτων

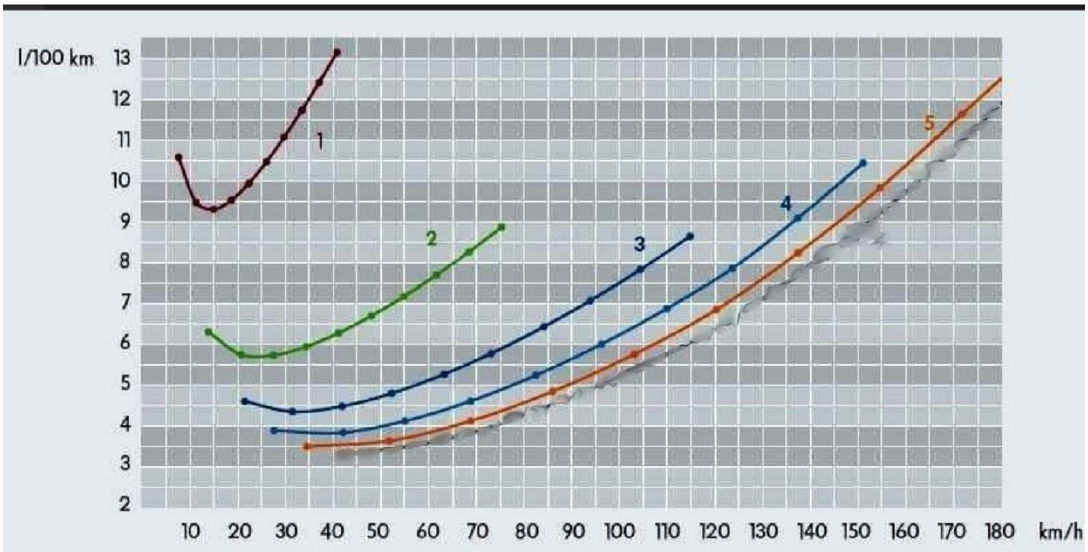
Θα κατασκευάσουμε ένα πολύ πρακτικό πρόβλημα του οποίου την λύση θα πετύχουμε χρησιμοποιώντας την άρνηση $N_{PM}(x)$ και την συνεπαγωγή $J_{PM}(x,y)$. Η συνεπαγωγή αυτή του συγκεκριμένου προβλήματος θα αφορά την συνεπαγωγή:

κατανάλωσης καυσίμου σε L/100Km. ⇒ Ταχύτητα του αυτοκινήτου σε Km/h

Στόχος του προβλήματος είναι χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνεπαγωγή να κατασκευάσουμε μια εφαρμογή λογισμικού, ένα πρόγραμμα το οποίο λειτουργεί σαν εφαρμογή στον δέκτη-οθόνη του κοκ-πιτ του αυτοκινήτου. Ανάλογα με την τιμή του βαθμού αλήθειας που θα δίνει η συνεπαγωγή το πρόγραμμα θα δίνει εντολή στον οδηγό ώστε να αλλάξει την σχέση(ταχύτητα) στο κιβώτιο ταχυτήτων. Ο σκοπός αυτός του προγράμματος είναι η οικονομική (σε κατανάλωση) οδήγηση. Χρησιμοποιώντας την συνεπαγωγή και την άρνηση που κατασκευάσαμε. Σε συνδυασμό με μια συνάρτηση συμμετοχή που αφορά στην κατανάλωση L/100Km θα προσπαθήσουμε να κάνουμε τον εξής συλλογισμό: Κάθε φορά που η κατανάλωση θα φτάνει σε ένα σημείο όπου πέρα από το οποίο γίνεται σπατάλη (π.χ. 6 L/100Km) τότε το αποτέλεσμα της ασαφούς συνεπαγωγής θα δίνει στο πρόγραμμα την εντολή να εμφανίσει στην οθόνη του οδηγού την ένδειξη: «βάλε την επόμενη ταχύτητα» ή απλά «βάλει την ταχύτητα “τάδε”». Εδώ θα πρέπει να διευκρινίσουμε πως για κάθε μία σχέση του κιβωτίου θα χρησιμοποιηθεί και διαφορετική άρνηση από την οικογένεια αρνήσεων $N_{PM}(x)$ καθώς και διαφορετική συνεπαγωγή.

Αρχικά θα υποθέσουμε ότι η συνεπαγωγή και η εφαρμογή κατ' επέκταση δεν θα λειτουργήσουν για την πρώτη ταχύτητα (σχέση κιβωτίων 1). Συνεπώς μελετάμε την οικονομική αλλαγή σχέσεων από τη 2η σχέση και μετά, καθώς η 1η υπάρχει μόνο για να κάνουμε την εκκίνηση. Πηγαίνοντας στην δεύτερη σχέση θα θεωρήσουμε τα εξής: Το αυτοκίνητο στην 2η ταχύτητα θα κινηθεί στο εύρος των 10-60 Km/h σε ταχύτητα. Οπότε θα φτιάξουμε μια συνάρτηση συμμετοχής για αυτά τα ποσά. Τα ποσά που δίνουμε στη συνάρτηση έχουν να κάνουν με πραγματικά νούμερα που προέρχονται από τον παρακάτω πίνακα μελέτης της σχέσης ταχύτητας-κατανάλωσης ανάλογα με την σχέση του κιβωτίου, όπως μας δίνεται για ένα δημοφιλές αυτοκίνητο Ι.Χ. γνωστής εταιρείας κατασκευής αυτοκινήτων μέσω κυβισμού και κατανάλωσης.

(1)

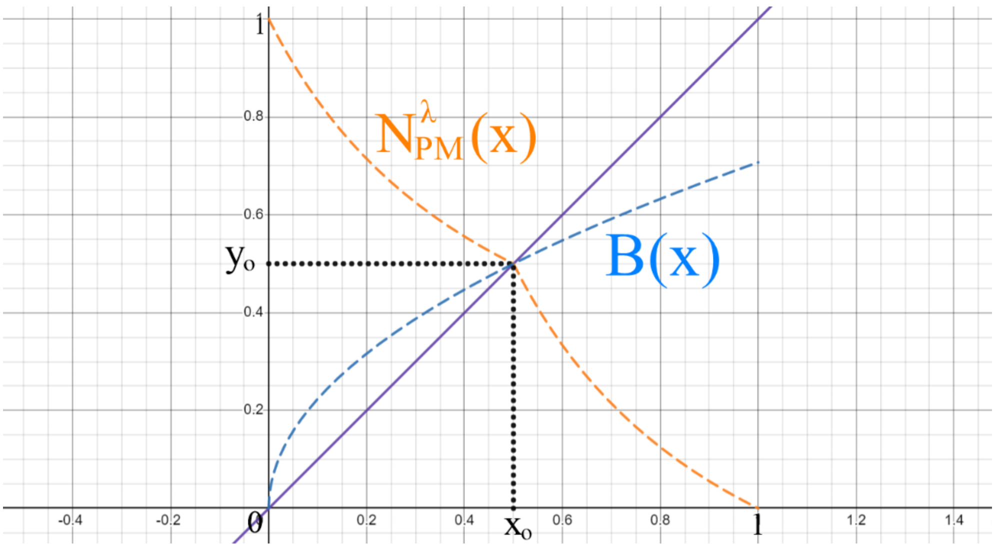


$$A(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{5}+1)\sqrt{x} - \frac{2+2\sqrt{5}}{8}, & 2 \leq x \leq 10 \\ 0, & x>10,\ x<2 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}x - \frac{1}{5}, & 10 \leq x, \leq 60 \\ 0, & 0 \leq x<10 \text{ και } x>60 \end{cases}$$

$$\mathbf{J_{PM}(x,y)=} \quad \max \left\{ \begin{array}{l} N^{\lambda}_{PM}\,(x) = = \frac{1}{\lambda x+1},\ 0 \le x \le \frac{-1+\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda},\ B(x) \\ \\ N^{\lambda}_{PM}\,(x) = = \frac{1-x}{\lambda x},\ \frac{-1+\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda} < x \le 1,\ \ B(x) \end{array} \right\}$$

Ο τρόπος που κατασκευάζουμε αυτή την συνεπαγωγή έχει την εξής λογική :Για κάθε μία σχέση του κιβωτίου θα χρησιμοποιηθεί και διαφορετική άρνηση από την οικογένεια αρνήσεων $N^{\lambda}_{PM}(x)$ καθώς και διαφορετική συνεπαγωγή εκ των J^{λ}_{PM} (x,y).Η λογική της κατασκευής βασίζεται στο γεγονός πως καθώς η κατανάλωση ξεπερνά το «σημείο τομής» των συναρτήσεων όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα (το οποίο είναι βοηθητικό και όχι ρεαλιστικό, καθώς οι δύο συναρτήσεις δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού) το πρόγραμμα θα μας δίνει την εντολή για αλλαγή στην σχέση ταχυτήτων. Καθώς η συνεπαγωγή θα έχει την μορφή $\mathbf{J_{PM}(x,y)=max\{N^{\lambda}_{PM}(x)\ ,\ B(x)\ \}}$, θα διαλέγουμε την κατάλληλη άρνηση ώστε το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων να είναι στην ελάχιστη ή στην ιδανική κατανάλωση καυσίμου. Θεωρητικά ,κάτι σαν το παρακάτω :



Έτσι , για $x_o \le x$, η συνάρτηση $N^{\lambda}_{PM}(x) \le B(x)$.Συνεπώς για κάθε x_κ μεγαλύτερο τουx_o η συνεπαγωγή θα διαβάζει:

$J_{PM}(x\kappa,y\kappa)=\max\{N^{\lambda}_{PM}(x\kappa)\ ,\ B(x\kappa)\ \} = B(x\kappa)$. Ακριβώς την στιγμή που οι δύο συναρτήσεις γίνονται ίσες , το πρόγραμμα θα εμφανίζει την εντολή στην οθόνη του υπολογιστή : «βάλε την επόμενη ταχύτητα» , ή πιο συγκεκριμένα «βάλε την ταχύτητα 'τάδε'» . Αυτό θα το επαναλάβουμε για την 2η , 3η και 4η σχέση ταχυτήτων .

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι με βάση το γράφημα (1) ,στην 2η σχέση ταχυτήτων η χαμηλότερη κατανάλωση επιτυγχάνεται σε ταχύτητα περίπου στις 21,5 Km/h.Κατά συνέπεια θα πρέπει να μικρύνουμε το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων ($N_{PM}(x)$, $B(x)$) πιο πριν από το (½, ½) , σε μικρότερο σημείο της μεταβλητής x.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να μεγαλώσουμε το λ (για λ=2 παίρνω x_0=½) και με συνέπεια να μικρύνει το σταθερό σημείο του Banach.

Αν για παράδειγμα πάρουμε την άρνηση $N^{13}_{PM}(x) = \frac{1}{13x+1}$ τότε το σταθερό σημείο μετατοπίζεται στην τιμή $\frac{1}{13x+1} = x \Leftrightarrow 13x^2 + x - 1 = 0$ $\Delta = 53$

$x_{1,2} = \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1\pm\sqrt{53}}{26}\frac{-1-\sqrt{53}}{20} < 0,\ x_2 = \frac{-1\pm\sqrt{53}}{26} = \mathbf{0,242}$

$B(x_2) = \frac{1}{50}x_2 - \frac{1}{5} = 0,242 \Leftrightarrow \frac{1}{50}x_2 - \frac{1}{5} + 0,242 = 0$

$\frac{1}{50}x_2 = \frac{\frac{200}{1}}{5} + \frac{242}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{50}x_2 = \frac{442}{1000} \Leftrightarrow \mathbf{x_{2A}=22,1}$

Συνεπώς με αυτή την αλλαγή βρίσκουμε ότι συναρτήσεις $N^{\lambda}_{PM}(x)$ και B(x) τέμνονται στο σημείο x_2=0,242. Είναι μια βολική τιμή γιατί αντιστοιχεί στο x_0=22,1 Km/h. Και αυτό γιατί τιμή περίπου 22,5 η κατανάλωση του αυτοκινήτου φτάνει στο ελάχιστο της 2ης ταχύτητας. Οπότε καθώς η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής A(x) περνάει το σημείο x_0=22,1 Km/h εμφανίζεται στον δέκτη του αυτοκινήτου η ένδειξη. Άλλαξε ταχύτητα σε 3η. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αναζητούμε την κατάλληλη συνεπαγωγή από την οικογένεια των συνεπαγωγών. $N^{\lambda}_{PM}(x)$ ώστε η τομή των 2 συναρτήσεων να γίνεται στο σημείο x_3=32 Km/h. Έτσι επιλέγω μετά από κατάλληλες πράξεις την άρνηση

$N^{3}_{PM}(x) = \frac{1}{3x+1}$. Λύνω και έχω $3x^2+x-1=0$

$\Delta=1+113$ και $x_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{13}}{6} \rightarrow x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{6} < 0$

$\rightarrow x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{6} = \mathbf{0,434}$

Λύνω

$A(x_{3A})=\frac{1}{50}x-\frac{1}{5}=0,434 \Leftrightarrow \frac{1}{50}x_{3A} = \frac{1}{5} + \frac{434}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{5\emptyset}x_{3A} = \frac{634}{100\emptyset} \Leftrightarrow \mathbf{x_{3A}=31,7}$

Άρα οι συναρτήσεις N^3_{PM} (x) και B(x) τέμνονται στο x=0,434 και τότε έχουμε ταχύτητα x_3=31,7 Km/h. Με δεδομένο ότι στα 32 έχουμε την ελάχιστη κατανάλωση για την 3η ταχύτητα τότε από το σημείο x_3=31,7 Km/h και μετά εμφανίζεται στον δέκτη του οδηγού η εντολή: «Άλλαξε την ταχύτητα σε 4η». Τέλος αν στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι η 4η ταχύτητα παίρνει ελάχιστη τιμή κατανάλωσης στα 42 Km. Αναζητούμε την κατάλληλη άρνηση N_{PM}(x) από την οικογένεια αρνήσεων N^{λ}_{PM} (x) ώστε να καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Ομοίως μετά από πράξεις επιλέγουμε την άρνηση $N_{PM}^{0,9}(x) = \frac{1}{0,9x+1}$.

Οι συναρτήσεις $N_{PM}^{0,9}$ (x) και B(x) τέμνονται στο σημείο **0,636**. Στο σημείο αυτό η συνάρτηση A(x) παίρνει την τιμή $\mathbf{x_{4A}=41,8}$. Συνεπώς πολύ βολικά από τη στιγμή που το αυτοκίνητο φτάνει στην ταχύτητα x_{4A}=41,8 Km/h εμφανίζεται στον δέκτη του οδηγού η ένδειξη: «Άλλαξε ταχύτητα σε 5η». Συνολικά έχουμε ολοκληρώσει την μελέτη και κατασκευή του προγράμματος-εφαρμογής με την ιδιότητα να προσφέρει οικονομική αλλαγή των ταχυτήτων.

2η→3η

J^{13}_{PM} (x,y) = max { N^{13}_{PM} (x), B(x)} = B(3,38) = 0,242 και A (x_{2A}) = 0,242 με x_{2A}=22,1 Km/h εμφανίζεται η ένδειξη: «Άλλαξε ταχύτητα σε 3η¨»

3η→4η

J^{3}_{PM} (x,y) = max { N^{3}_{PM} (x), B(x)} = B(4,72) = 0,434 και A (x_{3A}) = 0,434 με x_{3A}=31,7 Km/h εμφανίζεται η ένδειξη: «Άλλαξε ταχύτητα σε 4η¨»

4η→5η

$J^{0,9}_{PM}$ (x,y) = max { $N^{0,9}_{PM}$ (x), B(x)} = B(6,38) = 0,636 και A (x_{4A}) = 0,636 με x_{4A}=41,8 Km/h εμφανίζεται η ένδειξη: «Άλλαξε ταχύτητα σε 5η¨»

4.3 Χαμηλή κατανάλωση

Μετά την πρώτη εφαρμογή όπου δοκιμάσαμε την συνεπαγωγή μας σε χαμηλούς βαθμούς αλήθειας θα κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο η συνεπαγωγή θα επαληθεύεται για υψηλό βαθμό αλήθειας. Ας δούμε κατ' αρχάς τον τρόπο που θα συντάξουμε αυτό το πρόβλημα. Η εφαρμογή αυτή θα μοιάζει με την πρώτη και θα αφορά την χαμηλή κατανάλωση καυσίμου. Μόνο που σε αυτή την περίπτωση το πρόγραμμα που θα κατασκευάσουμε δεν θα δείχνει κάποια ένδειξη ή προτροπή στον οδηγό για να αλλάξει την σχέση των ταχυτήτων αλλά απλώς θα ενημερώνει τον οδηγό μέσω της οθόνης ενδείξεων, για τρόπο οδήγησής του και κατά πόσο αυτός είναι οικονομικός ή όχι.

Στην οθόνη του οδηγού θα προβάλλονται οι εξής τρεις ενδείξεις:

1) Πολύ χαμηλή κατανάλωση
2) Οικονομική οδήγηση
3) Μεγαλύτερη κατανάλωση

Κάθε μια από τις παραπάνω ενδείξεις θα συνδεθεί κατάλληλα με κάθε μια από τις συναρτήσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε την ζητούμενη, για το πρόβλημα, ασαφή συνεπαγωγή. Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι η συνεπαγωγή που θα διέπει το παραπάνω πρόβλημα θα ακολουθεί την σχέση:

Κατανάλωση αυτοκινήτου σε L/100km→ Ταχύτητα αυτοκινήτου σε km/h.

Έχουμε δηλαδή την συνεπαγωγή του πρώτου προβλήματος. Επίσης να τονίσουμε και πάλι ότι η κατανάλωση του προβλήματος θα αφορά την μελέτη, κάθε σχέσεως ταχυτήτων επιμέρους. Και πάλι επιμελώς θα αφήσουμε εκτός της μελέτης την $1^{η}$ σχέση ταχυτήτων και θα ασχοληθούμε σε βάθος με τις σχέσεις $2^{η}$, $3^{η}$, $4^{η}$, $5^{η}$. Αυτό συμβαίνει γιατί η πρώτη σχέση ταχυτήτων αφορά μόνο την εκκίνηση του αυτοκινήτου. Με παρόμοιο τρόπο με την πρώτη εφαρμογή μας θα κατασκευάσουμε δύο συναρτήσεις συμμετοχής, A(x) και B(x) με την συνεπαγωγή: A(x)⇔B(x)

Η συνάρτηση συμμετοχής A(x) θα δείχνει τον βαθμό αλήθειας της εκάστοτε κατανάλωσης του αμαξώματος σε L/100km και η συνάρτηση B(x) θα δείχνει τον βαθμό αλήθειας της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε km/h. Θεωρώ εδώ σημαντικό να αναφέρω πως στην κατασκευή της συνεπαγωγής που μας ενδιαφέρει η βαρύτητα θα δοθεί στην συνάρτηση B(x) και την ασαφή άρνηση $N^{λ}_{PM}$ (x) που είχαμε κατασκευάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο και χρησιμοποιήσαμε και στην πρώτη εφαρμογή. Σε αυτή την εφαρμογή για κάθε σχέση ταχυτήτων θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετική συνάρτηση B(x) και πιθανώς διαφορετική άρνηση από τις αρνήσεις της οικογένειας $N^{λ}_{PM}$ (x). Ο τρόπος λειτουργίας της συνεπαγωγής που θα εφαρμόσουμε, τη $J^{λ}_{PM}$ (x,y) = max { $N^{λ}_{PM}$ (x), B(x)} θα είναι ο εξής. Γνωρίζουμε ότι η άρνηση που έχουμε στα χέρια μας αποτελείται από δύο κλάδους και κάνει την συνεπαγωγή να γράφεται:

$$J^{\lambda}_{PM}(x,y) = \max \left\{ \begin{array}{l} N^{\lambda}_{PM}(x) = \frac{1}{\lambda x+1},\ 0 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda},\ B(x) \\ \\ N_{PM}{}^{\lambda}{}_{2}(x) = \frac{1-x}{\lambda x},\ \frac{-1+\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda} < x \leq 1, B(x) \end{array} \right\}$$

Ο τρόπος λειτουργίας της εφαρμογής είναι εφάμιλλος με αυτόν της πρώτης εφαρμογής. Δηλαδή ανάλογα με το ποια συνάρτηση από τις τρεις

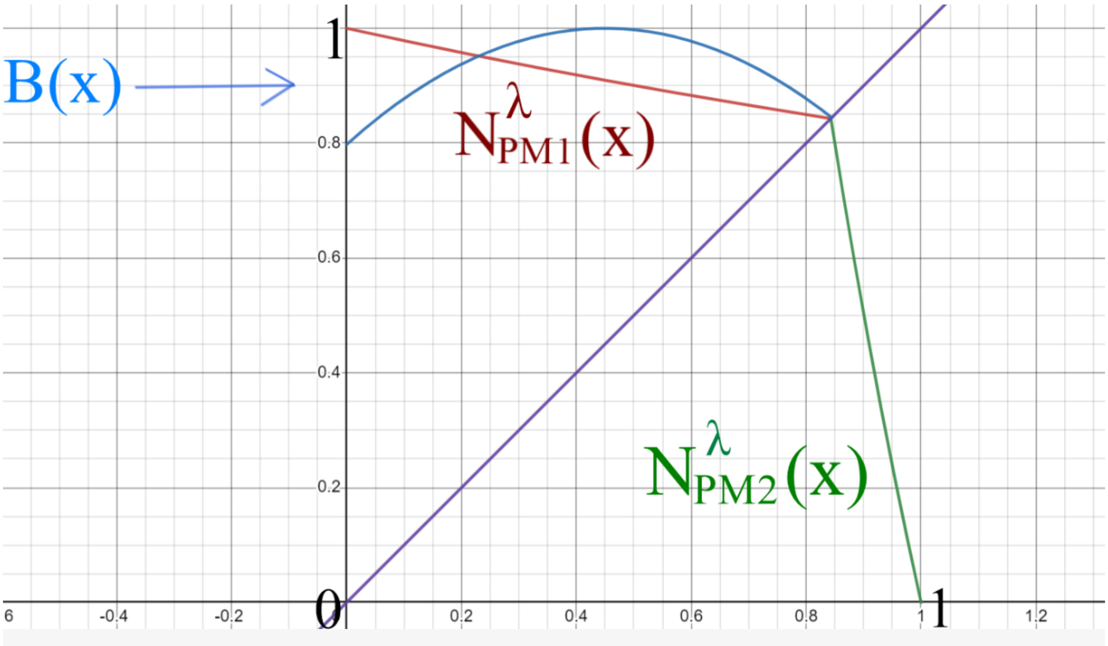
{ N^{λ}_{PM1} (x), N^{λ}_{PM2} (x), B(x)} δίνει μεγαλύτερη τιμή και προκρίνεται η τιμή της από την συνεπαγωγή J^{λ}_{PM} (x,y) θα παίρνει και έναν χαρακτηρισμό που θα εμφανίζεται ως ένδειξη στην οθόνη ενδείξεων του αυτοκινήτου. Πιο συγκεκριμένα οι χαρακτηρισμοί θα είναι:

- **Όταν προκρίνεται η συνάρτηση N^{λ}_{PM1} (x): πολύ χαμηλή κατανάλωση**
- **Όταν προκρίνεται η συνάρτηση N^{λ}_{PM2} (x): μεγαλύτερη κατανάλωση**
- **Όταν προκρίνεται η συνάρτηση B(x): οικονομική οδήγηση**

Προχωρώντας στην ουσία της κατασκευής θα διαχειρίσουμε την μελέτη μας σε 4 στάδια, ένα για κάθε διαφορετική σχέση ταχυτήτων.

Για παράδειγμα:

Για την κατασκευή της συνεπαγωγής στην 2η ταχύτητα θα πρέπει να λάβουμε υπ’όψιν πως το αυτοκίνητο θα βρίσκεται στο φάσμα της τιμής 10-50 km/h, γνωρίζοντας ότι η ελάχιστη κατανάλωση επιτυγχάνεται στην περιοχή των 23 km/h και πως μετά τα 40km/h περίπου η κατανάλωση αυξάνει αρκετά, ώστε να παύει ουσιαστικά να θεωρείται πλέον ιδιαιτέρως οικονομική οδήγηση με 2η ταχύτητα και άνω των 42-44 km/h. Καθώς κατασκευάζουμε την συνάρτηση B(x), θα ήταν καλό να αναλύσουμε σε αυτό το σημείο την γενική λογική πάνω στην οποία αναπτύσσουμε την εφαρμογή. Αν, θεωρητικά, μπορούσαμε να απεικονίσουμε τις συναρτήσεις N^{λ}_{PM1} (x), N^{λ}_{PM2} (x), B(x) στο ίδιο διάστημα ορισμού (σύνολο [0,1]), κάτι που βέβαια δεν είναι ούτε δυνατό ούτε εφικτό, τότε η μορφή της γραφικής παράστασης θα μπορούσε να λύσει πολλές απορίες όσον αφορά τη μέθοδο προσέγγισης της λειτουργίας της εφαρμογής. Ας δούμε παρακάτω:



Με βάση την δομή που έχουμε δώσει ως τώρα και το παραπάνω σχήμα, υπάρχουν τρία διαστήματα όπου σε κάθε μια από τις συναρτήσεις του γραφήματος παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή σε σχέση με τις άλλες. Όταν η N^{λ}_{PM1} (x) είναι η μεγαλύτερη θα βλέπουμε την ένδειξη: Πολύ χαμηλή κατανάλωση, όταν η B(x) είναι η μεγαλύτερη, θα βλέπουμε την ένδειξη: Οικονομική οδήγηση και όταν η N^{λ}_{PM2} (x) είναι μεγαλύτερη θα βλέπουμε την ένδειξη: Μεγαλύτερη κατανάλωση.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε, κοιτώντας το σχήμα ότι η συνάρτηση B(x) ορίζεται από το $x_0 = 0$ εως το x_1=σταθερό σημείο του Banach για την αντίστοιχη άρνηση που θα χρησιμοποιήσουμε. Έχοντας πλέον μιας εικόνα για το τι θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε μπορούμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη για την κάθε διαφορετική σχέση ξεχωριστά.

4.3.1. ΣΧΕΣΗ 2

Χρησιμοποιώντας πάντα ως οδηγό τον πίνακα της 1ης εφαρμογής που θα δίνει τη συνάρτηση κατανάλωσης σε L/100km και ταχύτητας σε km/h, ξεχωριστά για κάθε σχέση-ταχύτητα θα θεωρήσουμε την συνάρτηση $B_1(x)$ στο φάσμα τιμών μεταξύ 10-50 km/h. Μετά από μελέτη και προσεκτική ανάλυση η συνάρτηση B(x) θα είναι:

$$B_1(x) = \begin{cases} [-x^2+70_x-325] \cdot 0{,}001111, & 10 \leq x \leq 44{,}05 \\ 0, & 44{,}05 < x \leq 50 \end{cases}$$

Το σημείο στο οποίο επιλέξαμε να μηδενίσουμε την $B_1(x)$ φυσικά δεν είναι τυχαίο. Έχουμε διαλέξει την ασαφή άρνηση :

$$N^{0,11}_{PM} = \begin{cases} N^{0,11}_{PM1}(x) = \frac{1}{0{,}11\,x+1}, & 0 \leq x \leq \frac{10}{11} \\ N^{0,11}_{PM2}(x) = \frac{1-x}{0{,}11\,x}, & \frac{10}{11} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Άρα γίνεται κατανοητό πως την στιγμή όπου το αυτοκίνητο φτάνει την ταχύτητα 44,05km/h η συνάρτηση συμμετοχής $B_1(x)$ παίρνει την τιμή $B_1(x_0)=\frac{10}{11}$. Άρα από το σημείο αυτό και πέρα η συνάρτηση $B_1(x)$ μηδενίζεται, αφήνοντας μόνο τη συνάρτηση $N^{0,11}_{PM2}(x)$. Συνεπώς από τα 44,05 km/h και μετά η ένδειξη θα είναι: «Μεγαλύτερη κατανάλωση». Όσο η $B_1(x)$ θα είναι μεγαλύτερη η ένδειξη θα είναι: «Οικονομική οδήγηση». Τέλος όσο η $N^{0,11}_{PM1}(x)$ είναι η μεγαλύτερη συνάρτηση η ένδειξη θα είναι: «Πολύ χαμηλή κατανάλωση». Λέγοντας παραπάνω για «μεγαλύτερη» συνάρτηση, θα κάνουμε τώρα μια διευκρίνιση σ' αυτό το σημείο.

Εννοούμε μεγαλύτερη την $N^{0,11}_{PM1}(x)$ όταν για κάποια x_0 ισχύει:

$J^{0,11}_{PM}(x_0,y) = \max\{N^{0,11}_{PM1}(x_0), B_1(x_0)\} = N^{0,11}_{PM1}(x_0)$ και έχουμε την ένδειξη «Πολύ χαμηλή κατανάλωση». Ομοίως θεωρούμε μεγαλύτερη την $B_1(x)$ όταν για κάποια x_0 ισχύει:

$J^{0,11}_{PM}(x_0,y) = \max\{N^{0,11}_{PM1}(x_0), B_1(x_0)\} = B_1(x_0)$ και έχουμε την ένδειξη «Οικονομική οδήγηση».

Τέλος, θεωρούμε μεγαλύτερη την $N^{0,11}_{PM2}(x)$ όταν για κάποια x_0 ισχύει ότι:

$J^{0,11}_{PM}$ (x_0,y) = max { $N^{0,11}_{PM2}$ (x_0), $B_1(x_0)$} = $N^{0,11}_{PM2}$ (x_0) και έχουμε την ένδειξη «μεγαλύτερη κατανάλωση».

4.3.2. ΣΧΕΣΗ 3η

Συνεχίζουμε να χρησιμοποιούμε ως οδηγό τον πίνακα της εφαρμογής (1) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η τρίτη ταχύτητα βρίσκεται σε σχετικά οικονομική κατανάλωση στο φάσμα των 20-80Km/h κατασκευάζουμε καινούργια συνάρτηση $B_2(x)$ την :

$$B_2(x) = \begin{cases} [-x^2+100_x-1275] \cdot 0{,}000816, & 20 \leq x \leq 65{,}65 \text{ km/h} \\ 0, & 65{,}65 < x \leq 80 \end{cases}$$

Προφανώς το σημείο x_0=65,65 θα είναι το σταθερό σημείο Banach της άρνησης που θα χρησιμοποιήσουμε που θα είναι η

$$N^{0,3125}_{PM}(x) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}3125\,x+1}, & 0 \leq x \leq 0{,}8 \\ \frac{1-x}{0{,}3125\,x}, & 0{,}8 < x \leq 1 \end{cases}$$

Συνεπώς για την 3η σχέση-ταχύτητα θα ισχύει ότι $B_2(65{,}65)=0{,}8$ και αυτό σημαίνει πως το αυτοκίνητο κάνει «οικονομική οδήγηση» μέχρι τα 65,65 km/h και από εκεί και μέχρι τα 80 km/h κάνει «μεγαλύτερη κατανάλωση». Αν ο οδηγός συνεχίσει με την 3η ταχύτητα και πάνω από τα 80 Km/h τότε δεν θα παίρνει στον δέκτη του καμία ένδειξη, καθώς είναι απόλυτα βέβαιο πως όχι μόνο δεν κάνει «οικονομική οδήγηση» ή δεν έχει χαμηλή κατανάλωση αλλά αντιθέτως έχει πολύ υψηλή κατανάλωση.

4.3.3. ΣΧΕΣΗ 4η

Με τη χρήση του πίνακα κατανάλωσης-ταχύτητας και με τη βοήθεια των προηγούμενων συναρτήσεων της σχέσης 3ης, θα θεωρήσουμε το φάσμα της πιθανής οικονομικής κατανάλωσης μεταξύ των ταχυτήτων 25-90 km/h. Παίρνοντας την συνάρτηση $B_2(x)$ και πραγματοποιώντας μια δεξιά μετατόπιση κατά 10 μονάδες θα έχω την $B_3(x)$:

$$B_3(x) = \begin{cases} [-(x-10)^2+100(x-10)-1275]\,0{,}000816, & 25 \leq x \leq 76{,}65 \\ 0 & 76{,}65 < x \leq 90 \end{cases}$$

Και για άρνηση θα χρησιμοποιήσουμε πάλι ακριβώς την ίδια την

$$N^{0,3125}_{PM}(x) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}3125\,x+1}, & 0 \leq x \leq 0{,}8 \\ \frac{1-x}{0{,}3125\,x}, & 0{,}8 < x \leq 1 \end{cases}$$

Μπορούμε να πούμε πως και εδώ το σταθερό σημείο του Banach είναι το 0,8 και σε αυτό το σημείο η $B_2(x)$ παίρνει την τιμή 75,65, δηλαδή B(75,65)=0,8. Άρα μέχρι τα 76,65 Km/h το αμάξωμα κάνει «οικονομική οδήγηση», ενώ μετά μέχρι τα 90 km/h κάνει «μεγαλύτερη κατανάλωση».

4.3.4. ΣΧΕΣΗ 5η

Ολοκληρώνουμε την κατασκευή της εφαρμογής με την 5η ταχύτητα, για την οποία θα υποθέσουμε ότι το όχημα κινείται στο φάσμα των ταχυτήτων 30-100 km/h, όπου μπορεί θεωρητικά να έχει πιθανώς χαμηλή κατανάλωση. Παίρνοντας ως οδηγό τις συναρτήσεις της τέταρτης σχέσης θα θεωρήσουμε την συνάρτηση συμμετοχής $B_4(x)$ ως εξής:

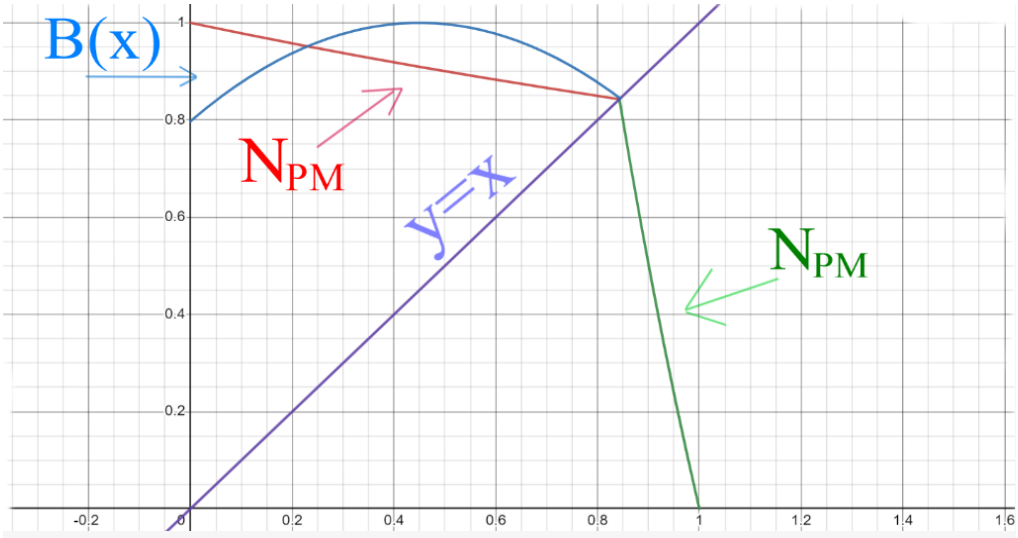
$$B_4(x) = \begin{cases} [-(x-20)^2+100(x-20)-1275]\,0{,}000816, & 30 \leq x \leq 85{,}65 \\ 0 & 85{,}65 < x \leq 100 \end{cases}$$

Προφανώς εδώ το σταθερό σημείο του Banach θα επαληθεύει την τιμή 85,65 km/h και αυτό θα γίνεται μέσω της άρνησης

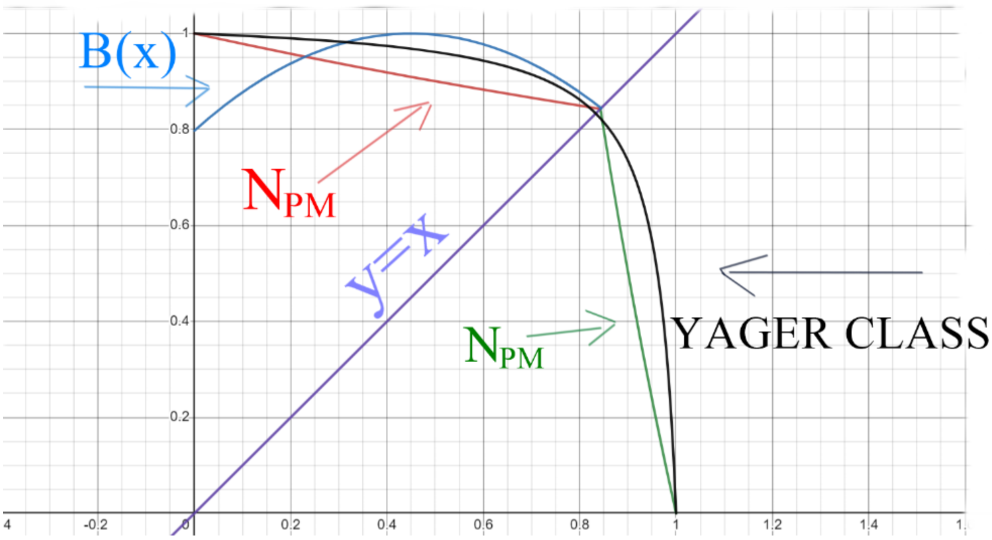
$$N^{0,3125}_{PM}(x) \begin{cases} \frac{1}{0,3125+1}, & 0 \leq x \leq 0,8 \\ \frac{1-x}{0,3125\,x}, & 0,8 < x \leq 1 \end{cases}$$

Και εδώ ισχύουν οι παρατηρήσεις που ισχύουν και στις προηγούμενες τρεις σχέσεις. Έχοντας ολοκληρώσει την εφαρμογή χρησιμοποιώντας την άρνηση – και κατ' επέκταση – την συνεπαγωγή που κατασκευάσαμε ας δούμε κάποιους από τους λόγους της χρησιμότητάς της σε ένα τέτοιο παράδειγμα. Η συνεπαγωγή αυτή λειτουργεί εξαιρετικά για το ζητούμενο παράδειγμα καθώς και για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου λ οι δύο γραφικές των επιμέρους κλάδων της άρνησης τείνουν σχηματικά να πάρουν τη μορφή γραμμικής συνάρτησης σχηματίζοντας μια έντονη «γωνία» στο σημείο τομής τους, στο σημείο του άξονα y=x, το γνωστό ως σταθερό σημείο τον Banach. Η γωνία αυτή είναι επωφελής για την κατασκευή της εφαρμογής μας. Συγκρίνοντας την δική μας άρνηση με άλλες παρόμοιες που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε στην θέση τους βλέπουμε ότι αυτή υπερτερεί στο σημείο (x_0,x_0) πάνω στον άξονα y=x. Για παράδειγμα, ας δούμε τις διαφορές σε σύγκριση με μια πασίγνωστη κλάση συναρτήσεων, των YagerClass, η οποία είναι πολύ κοντά στη δική μας. Θα κάνουμε και πάλι την ιδια υπόθεση με πριν ώστε να γίνει απολύτως κατανοητό το σκεπτικό μας. Ενώ στην πραγματικότητα οι συναρτήσεις που θα δείτε στα παρακάτω γραφήματα δεν έχουν κοινό πεδίο ορισμού , εντούτοις , κάνοντας μια υποθετική αναγωγή στο διάστημα [0,1] μπορούμε να δούμε τα σημεία τομής τους , κάτι που είναι και το ζητούμενο . Θεωρώντας λοιπόν τις συναρτήσεις των δύο παρακάτω γραφημάτων μπορεί να εξηγηθεί ακριβώς ο λόγος που η δική μας κατασκευή βοηθάει περισσότερο στην χρήση αυτής της εφαρμογής . Και ο λόγος είναι οτι το σημείο τομής βρίσκεται αρκετά πιο αριστερά σε αντίθεση με την οικογένεια συναρτήσεων YAGERCLASS.

1



2



Yager class$N^{\omega}(x)=(1-x^{\omega})\frac{1}{\omega}$, $\omega\in (0+\infty)$

$$N^{\lambda}_{PM}(x)=\begin{cases} \frac{1}{\lambda x-1},\ 0\leq x\leq \frac{\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda}-1/2\lambda \\ \\ \frac{1-x}{\lambda x},\ \frac{\sqrt{4\lambda+1}}{2\lambda}-1/2\lambda<x\leq 1\ ,\lambda\in(0+\infty) \end{cases}$$

Φαίνεται πολύ εύκολα στα δύο διαγράμματα ότι η άρνηση Nω(x) δεν βοηθάει στην εύρυθμη λειτουργία της εφαρμογής καθώς περιορίζει πολύ το διάστημα όπου η συνάρτηση B(x) βρίσκεται «πάνω» από την άρνηση. Συνεπώς δεν είναι τόσο πρακτική στην αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος.

4.4 Συμπεράσματα

Έχοντας αναπτύξει αρκετά εφαρμογές σε αρνήσεις και συνεπαγωγές μπορούμε να πούμε ότι είμαστε σε θέση να δώσουμε απαντήσεις και να καταλήξουμε σε συμπεράσματα τα οποία θα μπορέσουν να μας βοηθήσουν να διευκρινίσουμε τυχούσες απορίες ή ερωτήσεις και να αποτελέσουν ίσως μελλοντικό εφαλτήριο σαν περαιτέρω μελέτη και ανάπτυξη των «εργαλείων» της ασαφούς λογικής.

Ξεκινώντας από το κομμάτι των ασαφών αρνήσεων και των κατασκευών που τις αφορούν θα σταθούμε στα εξής:

Υπάρχουν εύκολες φόρμες κατασκευής δυνατών ασαφών αρνήσεων που βασίζονται πάνω σε γνωστό θεώρημα της ασαφούς λογικής και επιτρέπει σε κάθε καλά ορισμένη συνάρτηση στο f:[0,1], γνησίως φθίνουσα και αντιστρέψιμη, με τις ιδιότητες f(0)=1 και f(1)=0 να μας δώσει μια δυνατή άρνηση. Πώς; Θεωρούμε το a∈ (0,1) το γνωστό σταθερό σημείο του Banach τότε θα ισχύει ότι η άρνηση N(x) = f(x) θα δίνει :

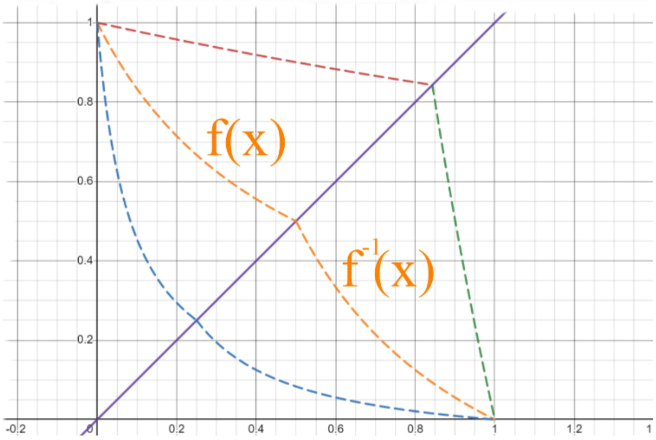
N([0,a])=[a,1] και N([a,1])=[0,a]

Επίσης ισχύει ότι N(0)=1 και N(1)=0

Έστω τότε f^{-1}:[a,1]→[0,a] να είναι η αντίστροφη της f(x) στο διάστημα [a,1] με $f^{-1}(a)$=a και $f^{-1}(1)$=0. Τότε ορίζουμε τη δυνατή άρνηση

$$N(x) = \begin{cases} f(x), \; x \in [0,a] \\ \\ f^{-1}(x), \; x \in [0,1] \end{cases}$$

Κατά το ίδιο θεώρημα όλες οι δυνατές αρνήσεις μπορούν να κατασκευαστούν κατά αυτόν τον τρόπο, πάντα στο διάστημα [0,1].[BustinceH. , Camion M.J ,De Miguel L. , Indurain E.(2021)]



Να τονίσουμε εδώ ότι όλες οι παραπάνω δυνατές αρνήσεις αποτελούν ένα επιμεριστικό δικτυωτό. Όχι όμως πλήρες. Επίσης υπάρχουν διάφορα πορίσματα και λύμματα που συμπληρώνουν το παραπάνω θεώρημα. Για παράδειγμα:

“Ορίζουμε ως φ την οικογένεια όλων των αυξουσών αμφιμονότιμων («1-1» και επί) συναρτήσεων από το [0,1] στο [0,1]. Θα θεωρούμε ούτε ότι οι συναρτήσεις f,g:[0,1]n→[0,1] είναι συναρτήσεις Φ-συζυγείς αν υπάρχει συνάρτηση φ∈Φ έτσι ώστε g=fφ όπου $f\varphi(x_1,\dots x_\nu)=\varphi^{-1}(f(\varphi(x_1)\dots\dots,\varphi(x_n))$ για $x_1,\dots\dots x_n\in$ [0,1]. Ή πιο απλοποιημένα, οι συναρτήσεις f,g θα ονομάζονται Φ-συζυγείς αν $g=\varphi^{-1}$ o f o φ.

Σε άλλη πρόταση, αν η συνάρτηση φ ∈ Φ, και N είναι μια αυστηρή ασαφής άρνηση τότε και η συζυγής της N, η Nφ θα είναι μια αυστηρή ασαφής άρνηση.

Ομοίως αν η N είναι μια δυνατή ασαφής άρνηση, τότε και η συζυγής της N, η Nφ θα είναι μια δυνατή ασαφής άρνηση. Επίσης, το λήμμα που αναφέρει ότι αν N_1, N_2 είναι ασαφείς αρνήσεις με την ιδιότητα $N_1 o N_2$ = id[0,1] (id=n ταυτοτική συνάρτηση) τότε η N_1 είναι μια συνεχής άρνηση.” [Baczynski&BalasubramaniamJayaram(2008)]

“Δυο ακόμη θεωρήματα που πηγάζουν από τις παραπάνω ιδιότητες αναφέρουν τα εξής:

Αν δίνεται συνάρτηση N:[0,1]→[0,1] τότε όλα τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) N είναι μια ισχυρή άρνηση

(ii) Υπάρχουν συναρτήσεις φ, y∈ Φ τέτοιες ώστε $N(x)=y^{-1}(1-\varphi(x))$, x∈ [0,1].

Αντίστοιχα, δίνεται συνάρτηση N:[0,1]→[0,1] τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) N είναι μια δυνατή άρνηση

(ii) Η N είναι Φ-συζυγής με την κλασική άρνηση Nc. Με άλλα λόγια υπάρχει φ∈Φ τέτοιο ώστε $N(x)=(N_c)\varphi(x)=\varphi^{-1}(1-\varphi(x)$, x∈ [0,1].

(iii) Υπάρχει μια γνησίως αύξουσα, συνεχής συνάρτηση g=[0,1]→[0,∞), με g(0)=0 τέτοια ώστε $N(x)=g^{-1}(g(1)-g(x)$, x∈ [0,1]

(iv) Υπάρχει μια γνησίως φθίνουσα, συνεχής συνάρτηση f:[0,1]→[0,∞] τέτοια ώστε f(1)=0 και $N(x)=f^{-1}(f-(0)-f(x))$, x∈ [0,1]” [Baczynski&BalasubramaniamJayaram(2008)]

Όλα τα παραπάνω θεωρήματα, προτάσεις και λήμματα βοηθούν και οδηγούν στην κατασκευή αυστηρών ή και δυνατών αρνήσεων.

Τέτοιες αρνήσεις θα χρησιμοποιήσουμε ώστε να περάσουμε στην επόμενη φάση των εφαρμογών μας, που αφορούν στην κατασκευή των ασαφών συνεπαγωγών.

Η σκέψη γύρω από την κατασκευή των ασαφών συνεπαγωγών που χρησιμοποιήσαμε στις εφαρμογές μας βασίστηκε στα παρακάτω δεδομένα:

i) Η άρνηση που χρησιμοποιήθηκε ήταν δυνατή και σε κάθε περίπτωση, προερχόμενη από την οικογένεια των ασαφών αρνήσεων που κατασκευάσαμε και

ii) Η συνεπαγωγή αυτή αποτελεί προέκταση της κλασικής συνεπαγωγής και στηρίζεται στην έκφραση. A(x)⇒B(x) ισοδύναμη με $\max\{N_{PM}(x), B(x)\}$

Οι παραπάνω κατασκευές αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμες στην αντιμετώπιση των εφαρμογών που κατασκευάσαμε. Με κατάλληλες κάθε φορά ρυθμίσεις ώστε να μπορούμε να ελέγχουμε εμείς το σημείο στο οποίο οι συναρτήσεις θα τέμνονται μπορούμε να διαλέξουμε τα διαστήματα στα οποία είτε η N(x) είτε η B(x) παίρνουν τη μεγαλύτερη τιμή. Προτιμούμε να συμβαίνει αυτό γύρω από το σταθερό σημείο της άρνησης, ίσως και ακριβώς πάνω στο σταθερό σημείο της άρνησης. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ίσως ως το σημαντικότερο πλεονέκτημα της κατασκευής$N^{\lambda}_{PM}(x)$ που παρουσιάσαμε στην εργασία αυτή . Δηλαδή το γεγονός πως το σταθερό σημείο της άρνησης που βρίσκεται πάνω στον άξονα y=xυπολογίζεται πολύ εύκολα με την απλή λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής $\lambda x^2+x-1 = 0$, $\forall x\in [0,1]$ και $\lambda\in(0,+\infty)$.

Όσον αφορά τώρα στις συνεπαγωγές,η πρώτη εφαρμογή λειτουργεί για μικρούς βαθμούς αλήθειας και η δεύτερη για μεγάλους. Μπορεί λοιπόν κανείς να θεωρήσει ότι οι συνεπαγωγές αυτές έχουν δοκιμαστεί, έχουν αποδειχτεί χρήσιμες. Μάλιστα στη δεύτερη εφαρμογή παραθέτουμε μια σύγκριση της κατασκευής μας με μια γνωστή οικογένεια αρνήσεων.

Αν θέλαμε να γενικεύσουμε τον τρόπο κατασκευής, των συνεπαγωγών θα λέγαμε ότι ουσιαστικά παίρνουμε την γνησίως φθίνουσα άρνηση από την οικογένεια αρνήσεων$N^{\lambda}_{PM}(x)$ και την συνδυάζουμε με:

i) Είτε με μια αύξουσα συνάρτηση B(x)

ii) Είτε με μια συνάρτηση B(x) που παρουσιάζει αλλαγή μονοτονίας, ώστε να έχει παραπάνω από ένα σημεία τομής με την άρνηση. Συμπερασματικά, η άρνηση $N^{\lambda}_{PM}(x)$ έχει πιθανές εφαρμογές στις οποίες μπορεί να φανεί χρήσιμη. Αυτό το δεδομένο θα μπορέσει να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης σε μελλοντικές εργασίες είτε δημοσιεύσεις με παρόμοιες ή καλύτερες εφαρμογές που να αναδεικνύουν τις ιδιαιτερότητες μιας τέτοιας άρνησης.

Βιβλιογραφικές αναφορές

ΞένηΒιβλιογραφία

1. BaczynskiMichal& Balasubramaniam Jayaram: Fuzzy Implications, Springer, Verlang Berlin Heidelberg (2008).
2. Souliotis G. ,Makariadis S. , Papadopoylos B. : Parametric Fuzzy Implications Produced via Fuzzy Negations with a Case Study in Enviromental Variables(2021)
3. BustinceH. , Camion M.J ,De Miguel L. , Indurain E. : Strong Negations and Restricted Equivalence Functions revisited : An Analytical and Topological approach(2021)
4. Klir, G.J., Yuan, B.: Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and applications. PrenticeHall, New Jersey (1995)

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Μποτζώρης Γ.,Παπαδόπουλος Β.:Ασαφή Σύνολα, Εκδόσεις σοφία,θεσσαλονίκη (2015).
2. Ντούγιας, Σ.Κ.: Απειροστικός Λογισμός.Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (1984)
3. Σουλιώτης Γ. : Μεταπτυχιακή Εργασία Ασαφείς Συνεπαγωγές σελ 11-29 , Ξάνθη (2018)
4. Μπετσάκος Δ. : Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση Μέρος Α , Θεσσαλονίκη (2009)
5. Καρυοφύλλης Χ. , Κωνσταντιλάκη – Σαββοπούλου Χ. : Τοπολογία Μετρικών Χώρων , Θεσσαλονίκη (2000)