«Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο»
«Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά»

Διπλωματική εργασία

«Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης και η επίδρασή του στη διαμόρφωση της θεωρίας ωφελιμότητας»

«ΚΟΚΚΙΝΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ»

Επιβλέπων καθηγητής «ΠΟΛΙΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ»

Πάτρα, «ΜΑΪΟΣ 2023»

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει συγγραφεί από εμένα αποκλειστικά και αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος. Κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, οι όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε ακριβώς είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία μελετά το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης. Ένα παιχνίδι τύχης με άπειρο αναμενόμενο κέρδος που ελάχιστοι άνθρωποι είναι πρόθυμοι να συμμετάσχουν. Στην προσπάθεια ερμηνείας του παραπάνω παράδοξου προέκυψε η θεωρία της ωφελιμότητας. Μια θεωρία που αποτελεί πυλώνα της σύγχρονης θεωρίας αποφάσεων με εκτενείς εφαρμογές σε πληθώρα επιστημών. Στην εργασία αυτή αναλύονται οι βασικές αρχές της θεωρίας ωφελιμότητας και παρουσιάζονται οι εφαρμογές της στα οικονομικά και τον αναλογισμό. Η παραπάνω ανάλυση έχει ως αποτέλεσμα την πλήρη κατανόηση των μεθόδων λήψης αποφάσεων ενός ορθολογικού ατόμου. Η εγκυρότητα και η εφαρμογή αυτών των αποτελεσμάτων στη σύγχρονη κοινωνία διερευνώνται με τη χρήση ενός ερωτηματολογίου.

Abstract

This paper studies the St Petersburg paradox. A game of chance with infinite expected profit that few people are willing to play. In the attempt to interpret the above paradox, the utility theory emerged. A theory that is a pillar of modern decision theory with extensive applications in a multitude of sciences. In this paper, the basic principles of utility theory are analyzed and their applications in economics and actuarial are presented. The above analysis results in a complete understanding of the decision-making methods of a rational person. The validity and applicability of these results to modern society are investigated using a questionnaire.

«Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης και η επίδρασή του στη διαμόρφωση της θεωρίας ωφελιμότητας»

«ΚΟΚΚΙΝΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ»

Επιτροπή επίβλεψης διπλωματικής εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
«ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ»
Αναπληρωτής καθηγητής πανεπιστημίου Πειραιώς

Συν-επιβλέπων καθηγητής:
«ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΟΥΣΗΣ»
Καθηγητής πανεπιστημίου Αιγαίου

Για τη μητέρα μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης είναι ένα παιχνίδι τύχης που απασχολεί εκτενώς την επιστημονική κοινότητα από τις αρχές του 18^{ου} αιώνα έως σήμερα. Το παιχνίδι αυτό οδηγεί σε ένα διαισθητικό παράδοξο και σημειώνει ότι η αναμενόμενη τιμή δεν είναι πάντα αποδοτικό κριτήριο λήψης αποφάσεων κάτω από αβεβαιότητα. Η προσπάθεια επίλυσης του παράδοξου οδήγησε στην ανάδειξη μιας νέας θεωρίας, εκείνης της θεωρίας ωφελιμότητας, με κύριο εργαλείο της θεωρίας αυτής εκείνο της αναμενόμενης ωφελιμότητας το οποίο δείχνει να είναι πιο αποδοτικό και ρεαλιστικό κριτήριο λήψης αποφάσεων.

Το νέο αυτό μοντέλο λαμβάνει υπόψη του τις υποκειμενικές προτιμήσεις του ατόμου και τη συμπεριφορά του απέναντι στον κίνδυνο. Οι προτιμήσεις αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν με μια συνάρτηση ωφελιμότητας, η οποία καθιστά δυνατή τη διάταξη των επιλογών ενός ατόμου εκχωρώντας έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε δυνατή εναλλακτική ενός προβλήματος απόφασης. Το μοντέλο αυτό βρήκε ευρεία εφαρμογή σε πολλές επιστήμες με σημαντικότερη συνεισφορά στα οικονομικά και τον αναλογισμό, όπου η διαχείριση κινδύνων είναι ευρέως διαδεδομένη.

<u>Διάρθρωση της εργασίας.</u>

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση του παραδόξου και σημειώνονται οι θέσεις και τα αποτελέσματα της μελέτης του παράδοξου από τους επιστήμονες του 18^{ου} αιώνα. Στη συνέχεια καταγράφονται συνοπτικά μερικές λύσεις που προτάθηκαν για το παράδοξο και αποτελούν θέμα συζήτησης στους κύκλους της επιστημονικής κοινότητας έως σήμερα.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η θεωρία ωφελιμότητας με έμφαση στις συναρτήσεις ωφελιμότητας και τις συναρτήσεις αποστροφής κινδύνου. Καταγράφονται οι πιο σημαντικές ιδιότητες που πρέπει να έχουν οι συναρτήσεις ωφελιμότητας και δίνονται μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται μερικές από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της θεωρίας ωφελιμότητας στην οικονομική επιστήμη και τον αναλογισμό, όπως για παράδειγμα η λήψη επενδυτικών αποφάσεων, η λήψη αποφάσεων marketing και η λήψη αποφάσεων κάλυψης κινδύνων από ασφαλιστικές εταιρείες.

Στο κεφάλαιο 5 γίνεται αναφορά στις σύγχρονες προσεγγίσεις του παράδοξου. Καταγράφονται οι νέες θεωρίες που προέκυψαν από τη μελέτη του παράδοξου από επιστήμονες του 20^{ου} και του 21^{ου} αιώνα.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο λαμβάνει χώρα μια στατιστική ανάλυση που έχει σκοπό να διερευνήσει τα κριτήρια με τα οποία λαμβάνει ένα άτομο αποφάσεις καθώς και να κατηγοριοποιήσει τον πληθυσμό ανάλογα με τη στάση του απέναντι στον κίνδυνο. Επιπλέον γίνεται μια προσομοίωση του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης από όπου ανακτώνται ρεαλιστικά στατιστικά δεδομένα τα οποία συγκρίνονται με τις μελέτες όσων ασχολήθηκαν με το παράδοξο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΗΣ ΑΓΙΑΣ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ

2.1 Παρουσίαση του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον διακεκριμένο Ελβετό μαθηματικό Nicolas Bernoulli το 1713. Το παράδοξο εξετάζει το παρακάτω παίγνιο:

Έστω ότι παίζουμε ένα τυχερό παιχνίδι κατά το οποίο ένα δίκαιο νόμισμα ρίπτεται συνεχώς έως ότου εμφανισθεί για πρώτη φορά κεφαλή.

- Αν στη πρώτη ρίψη έρθει κεφαλή τότε ο παίκτης κερδίζει 1€ και το παιχνίδι τελειώνει. Αν έρθουν γράμματα τότε το κέρμα ρίπτεται ξανά.
- Αν στη δεύτερη ρίψη έρθει κεφαλή τότε ο παίκτης κερδίζει 2€ και το παιχνίδι τελειώνει. Αν έρθουν γράμματα τότε το κέρμα ρίπτεται ξανά.
- …
- Αν στη n-οστή ρίψη έρθει κεφαλή τότε ο παίκτης κερδίζει 2^{n-1}€ και το παιχνίδι τελειώνει. Αν έρθουν γράμματα τότε το κέρμα ρίπτεται ξανά, κοκ. (Peters, 2011)

Με άλλα λόγια ο τυχαίος αριθμός ρίψεων n του νομίσματος ακολουθεί μια γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ½ και οι πληρωμές αυξάνονται εκθετικά.

Η αναμενόμενη πληρωμή από αυτό το παιχνίδι είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\infty \tag{2.1}$$

Το παραπάνω άθροισμα αποτελεί άμεση εφαρμογή της αρχής της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πόσα χρήματα είναι πραγματικά διατεθειμένος να πληρώσει κάποιος για να παίξει αυτό το παιχνίδι;

Σύμφωνα με την παραπάνω προσέγγιση η αναμενόμενη χρηματική αξία του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης είναι άπειρη. Επομένως φαίνεται λογικό να είναι κάποιος διατεθειμένος να πληρώσει οποιοδήποτε πεπερασμένο ποσό για μια μόνο ευκαιρία να παίξει το παιχνίδι. Πρακτικά όμως είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο παίκτης θα κερδίσει ένα πολύ μικρό ποσό. Για παράδειγμα με πιθανότητα ½ ο παίκτης δεν κερδίζει περισσότερα από 1€ και με πιθανότητα ¾ δεν κερδίζει περισσότερα από 2€. Φαίνεται λοιπόν να έχουμε ένα αντιπαράδειγμα στην αρχή της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας. Με αυστηρή λογική το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης δεν είναι παράδοξο εφόσον δεν προκύπτει κάποια τυπική αντίφαση. Παρόλα αυτά δείχνει αφελές να λάβουμε υπόψη ως μοναδικό κριτήριο απόφασης μόνο την αναμενόμενη αξία.

2.2 Η ιστορία του παραδόξου

2.2.1 Η συνεισφορά του Nicolas Bernoulli και του Pierre Remond de Montmort

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης πήρε το όνομά του από ένα από τα κορυφαία επιστημονικά περιοδικά του δεκάτου ογδόου αιώνα, το Commentarri Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.(Δημοσιεύσεις της Αυτοκρατορικής Ακαδημίας Επιστημών της Πετρούπολης), στο οποίο ο Daniel Bernoulli (1700-1782) δημοσίευσε μια εργασία με τίτλο «Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis» (Έκθεση μιας νέας Θεωρίας για την Μέτρηση Κινδύνου) το 1738.

Όπως αναφέραμε και στη προηγούμενη παράγραφο το παράδοξο παρουσιάστηκε για πρώτη φορά σε μια πρώιμη εκδοχή του από τον Nicolas Bernoulli (1687-1759), ξάδερφο του Daniel Bernoulli. Ο Nicolas αναφέρει το παράδοξο σε μια επιστολή του προς τον Pierre Remond de Montmort στις 9 Σεπτεμβρίου του 1713. Ο Nicolas ζήτησε από τον de Montmort να φανταστεί ένα παράδειγμα στο οποίο ρίχνεται ένα δίκαιο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί ένα έξι. Ενδεικτικά αναφέρει:

«Ποια είναι η προσδοκία του Β…εάν ο Α υποσχεθεί στον Β ότι θα του δώσει μερικά νομίσματα σε αυτήν την εξέλιξη 1,2,4,8,16,…κλπ. ή 1,3,9,27,…κλπ. ή 1,4,9,16,25,…κλπ. ή 1,8,27,64,…κλπ. αντί για 1,2,3,4,5,…κλπ. όπως προηγουμένως. Αν και ως επί των πλείστων αυτά τα προβλήματα δεν είναι δύσκολα θα βρείτε κάτι περίεργο» (N.Bernoulli προς τον Montmort, 9 Σεπτεμβρίου 1713)

Ωστόσο φαίνεται ο Montmort να μην κατάλαβε τον προβληματισμό του Nicolas και απάντησε:

«Δεν δυσκολεύομαι, το μόνο μέλημα είναι να βρούμε το άθροισμα της σειράς των οποίων οι αριθμητές βρίσκονται σε πρόοδο τετραγώνων κύβων κλπ. ενώ οι παρονομαστές βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο» (Montmort προς N.Bernoulli, 15 Νοεμβρίου 1713)

Ο ίδιος ο Montmort δεν έκανε κανένα υπολογισμό. Αν το είχε κάνει θα ανακάλυπτε ότι η αναμενόμενη τιμή της πρώτης σειράς για παράδειγμα (1,2,4,8,16,…κλπ.) είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{6^n} \cdot 2^{n-1},$$

η οποία είναι αποκλίνουσα σειρά. (Stanford Encyclopedia of Philosophy: The St. Petersburg Paradox, 2019)

Στη συνέχεια ο Nicolas επισυνάπτει το συμπέρασμά του για το παραπάνω πρόβλημα στον Montmort, ένα συμπέρασμα που όπως αποδείχθηκε ήταν σωστό. Αναφέρει ότι:

« Θα πρέπει ο Β να δώσει στον Α ένα άπειρο άθροισμα και ακόμη περισσότερο από το άπειρο (αν επιτρέπεται η έκφραση) για να μπορέσει να έχει το πλεονέκτημα να του δώσει μερικά νομίσματα σε αυτή την εξέλιξη 1,2,4,8,16κλπ. (N. Bernoulli προς τον Montmort, 20 Φεβρουαρίου 1714)

Στην ίδια επιστολή προτείνει τη δική του λύση η οποία ακολουθεί την εξής λογική. Ο Nicolas παρατηρεί ότι στη γενική μορφή έχει να αντιμετωπίσει σειρές της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot f(n) \tag{2.2}$$

όπου $p(n)$ αναπαριστά την πιθανότητα να εμφανιστεί έξι στη n-οστή ρίψη και το $f(n)$ αναπαριστά την ανταμοιβή όταν αυτό συμβεί. Προφανώς υπάρχουν δύο τρόποι να γίνουν οι σειρές της παραπάνω μορφής συγκλίνουσες. Είτε να τροποποιηθούν τα $p(n)$ είτε τα $f(n)$. Ο Nicolas επέλεξε να κάνει το πρώτο και πρότεινε τα ενδεχόμενα με πολύ μικρή πιθανότητα να μην λαμβάνονται υπόψη παρόλο που οι ενδεχόμενες ανταμοιβές είναι εξαιρετικά μεγάλες. Δηλαδή πρότεινε να επιβάλλεται το $p(n)$ να είναι μηδέν για ένα n αρκετά μεγάλο και κατά συνέπεια η σχέση (2.2) να γίνεται πεπερασμένη.

(Huang, 2013)

2.2.2 Η συνεισφορά του Cramer

Ο αμέσως επόμενος μαθηματικός που ασχολήθηκε με το πρόβλημα ήταν ο Gabriel Cramer (1704-1752) το 1728, ο οποίος διάβασε για το παράδοξο σε ένα βιβλίο που δημοσίευσε ο Montmort και πρότεινε μια απλούστερη και πιο κομψή διατύπωση σε μια επιστολή του προς τον Nicolas. Ενδεικτικά αναφέρει:

«για να γίνει πιο απλή η υπόθεση θα υποθέσω ότι ο Α στρίβει ένα νόμισμα και ο Β αναλαμβάνει να του δώσει ένα νόμισμα αν εμφανιστεί κεφαλή στη πρώτη ρίψη, 2 αν αυτό συμβεί στη δεύτερη ρίψη,4 αν συμβεί στη τρίτη ρίψη, 8 αν συμβεί στη τέταρτη κλπ. Το παράδοξο συνίσταται στο γεγονός ότι σύμφωνα με τους υπολογισμούς ο Α θα πρέπει να δώσει στον Β ένα άπειρο ποσό το οποίο φαίνεται παράλογο» (Cramer προς N. Bernoulli, 21 Μαΐου 1728)

Στην ίδια επιστολή ο Cramer πρότεινε μια λύση που έφερε επανάσταση στο αναπτυσσόμενο πεδίο της θεωρίας αποφάσεων. Ο Cramer επεσήμανε ότι δεν είναι η αναμενόμενη νομισματική αξία που πρέπει να καθοδηγεί τις επιλογές ενός ορθολογικού ατόμου αλλά η χρησιμότητα των χρημάτων για το άτομο. Σύμφωνα με τον ίδιο για κάθε άτομο υπάρχει ένα χρηματικό ποσό ικανό να ικανοποιήσει οποιαδήποτε επιθυμία του. Ένα μεγαλύτερο ποσό από αυτό δεν αποφέρει μεγαλύτερη ευχαρίστηση στο άτομο αφού έχουν ήδη ικανοποιηθεί οι επιθυμίες του. Συνεπώς η αξία του μεγαλύτερου ποσού δεν είναι μεγαλύτερη από του πρώτου. Ο ίδιος ο Cramer στην ίδια επιστολή με πριν αναφέρει:

«Οι μαθηματικοί εκτιμούν το χρήμα σε αναλογία με τη ποσότητά του και ο ορθολογικός άνθρωπος σε σχέση με τη χρησιμότητα που του αποφέρει. Αυτό που καθιστά τη μαθηματική προσδοκία άπειρη, είναι η μεγάλη ανταμοιβή που μπορώ να λάβω αν η κεφαλή εμφανιστεί πολύ αργά στη 100^{η} ή στη 1000^{η} ρίψη. Αυτή η ανταμοιβή αν σκεφτώ λογικά δεν μου προσφέρει μεγαλύτερη ευχαρίστηση, δεν με κάνει να θέλω περισσότερο να παίξω το παιχνίδι από το να κέρδιζα μόνο 10 ή 20 εκατομμύρια νομίσματα. (Cramer προς N. Bernoulli, 21 Μαΐου 1728)

Για τον ίδιο το ποσό αυτό υπολογίζεται στο 2^{24}. Οποιοδήποτε μεγαλύτερο ποσό προσφέρει την ίδια ικανοποίηση με αυτό. Επομένως εφαρμόζοντας αυτή τη λύση στην έκφραση (2.2) , ορίζουμε ως $f(n)$ να είναι η συνάρτηση $f(n) = min\{2^n, 2^{24}\}$ η οποία είναι φραγμένη και οδηγεί σε μια πεπερασμένη αναμενόμενη αξία, αφού το άθροισμα πλέον γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{24} \frac{1}{2^{n+1}} 2^n + \sum_{n=25}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} 2^{24} = 12 + 1 = 13$$

Αν και η τιμή 13 φαίνεται σαφώς να λύνει το παράδοξο παρόλα αυτά η τιμή εξακολουθεί να είναι υψηλή για ένα λογικό άτομο για το συγκεκριμένο παιχνίδι. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται με ένα απλό παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι παίζουμε το παιχνίδι 100 φορές και ας χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Chebyshev για να δούμε τι θα συμβεί.

Αρχικά θα ορίσουμε ως $Y = min\{X, 2^{24}\}$ ώστε να ακολουθούμε το μοντέλο του Cramer. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι το Y έχει μεγάλη διακύμανση. Συγκεκριμένα $VarY \approx 3 \times 2^{23} \approx 2{,}5 \times 10^7$

Αν τώρα πάρουμε την ανισότητα Chebyshev

$$P(|\overline{Y_n} - EY| \geq \varepsilon) \leq \frac{VarY}{n\varepsilon^2}$$

Για $n = 100$ και την παραπάνω διακύμανση, παρατηρούμε ότι για να πετύχουμε την ποσότητα $\frac{VarY}{n\varepsilon^2} < 1$ θα πρέπει να διαλέξουμε ένα ε της τάξεως $\varepsilon > \sqrt{2{,}5 \times 10^5}$. Πράγμα που μας δείχνει ότι το $\overline{Y_n}$ μπορεί να πάρει τιμή πού μακριά από τη μέση τιμή, υποδηλώνοντας ότι η εκτίμησή μας για τη Y απέχει από τη πραγματικότητα. Φυσικά ο Cramer ήταν αδύνατο να σημειώσει τη παραπάνω παρατήρηση καθώς η ανισότητα Chebyshev δεν είχε αποδειχθεί στην εποχή του. (Huang, 2013)

Την ίδια διαπίστωση έκανε και ο Cramer βελτιώνοντας ο ίδιος το μοντέλο του χρησιμοποιώντας την τετραγωνική ρίζα ως συνάρτηση χρησιμότητας. Αυτό το μοντέλο είναι πιο λογικό αφού δείχνει ότι πάντα απολαμβάνουμε περισσότερη ευχαρίστηση για όλο και μεγαλύτερες ανταμοιβές. Για παράδειγμα δύο εκατομμύρια θα φέρουν μεγαλύτερη ευχαρίστηση από ένα εκατομμύριο. Όχι όμως τη διπλάσια. Κάτω από τη παραπάνω υπόθεση η μέση αναμενόμενη χρησιμότητα γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^{n-1}}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$$

Ενώ η αναμενόμενη χρησιμότητα (ηθική αξία, moral value) του παιχνιδιού της αγίας Πετρούπολης είναι:

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} \cong 2{,}914$$

Σαφώς καλύτερη τιμή από το 13 του προηγούμενου μοντέλου. Τη διαφορά στο δεύτερο μοντέλο κάνει η ιδιότητα που οι σύγχρονοι ακαδημαϊκοί ονομάζουν φθίνουσα οριακή χρησιμότητα. Μια ιδιότητα που όπως θα δούμε παρακάτω υιοθέτησε τόσο ο Daniel Bernoulli, ο οποίος σχεδόν παράλληλα με τον Cramer οδηγήθηκε σε μια παρόμοια λύση, όσο και οι σύγχρονοι επιστήμονες που ασχολήθηκαν με το θέμα. (Huang, 2013)

2.2.3 Η συνεισφορά του Daniel Bernoulli

Αν και η εργασία του D. Bernoulli δημοσιεύτηκε το 1738, ο ίδιος ολοκλήρωσε την εργασία του το 1731. Δηλαδή μόλις τρία χρόνια μετά τη δημοσίευση του Cramer. Παρόλα αυτά δεν γνώριζε για την εργασία του. Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με τον Cramer πρότεινε αντί να υπολογιστεί η αναμενόμενη αξία των νομισματικών κερδών, να υπολογιστεί η προσδοκώμενη αξία του κέρδους στη χρησιμότητα. Για τον σκοπό αυτό εισήχθη από τον D. Bernoulli μια συνάρτηση χρησιμότητας $u(x)$ η οποία καθορίζει τη χρησιμότητα ενός πλούτου x\$. O D. Bernoulli πρότεινε τη λογαριθμική συνάρτηση ως συνάρτηση ωφελιμότητας. Η πρότασή του βασίστηκε στη διαίσθηση ότι η αύξηση του πλούτου πρέπει να αντιστοιχεί σε μια αύξηση της χρησιμότητας που είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον πλούτο που έχει ήδη το άτομο. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{du}{dx} = \frac{k}{x}$$

για κάποια θετική σταθερά k. Έπειτα από ολοκλήρωση παίρνουμε τη λύση της παραπάνω εξίσωσης η οποία είναι:

$$u = klnx - klna,$$

όπου a είναι ο πλούτος του ατόμου πριν το παιχνίδι. Προφανώς ο αρχικός πλούτος αποδίδει μηδενική χρησιμότητα, δηλαδή $u(a) = 0$. Αν x είναι ο πλούτος μετά από το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης, το $x - a$ είναι η ανταμοιβή που προκύπτει. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα που αποκτήθηκε από τη πληρωμή μπορεί να υπολογιστεί σαν ένας σταθμισμένος μέσος όρος ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (k \ln(\alpha + 2^n) - k \ln a) = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln(\alpha + 2^n) - k \ln a$$

Στη συνέχεια αν δηλώσουμε το προτεινόμενο ποντάρισμα ως s, τότε η ωφελιμότητά του θα είναι η ίδια με την αναμενόμενη ωφελιμότητα που θα αποκτηθεί. Πιο συγκεκριμένα:

$$k \ln(a + s) - k \ln a = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln{(a + 2^n)} - k \ln a$$

Που λύνοντας ως προς s δίνει ότι:

$$s = \prod_{n=0}^{\infty} (a + 2^n)^{\frac{1}{2^{n+1}}} - a \tag{2.3}$$

(Huang, 2013)

Επομένως ο παραπάνω τύπος υπολογίζει το ποντάρισμα που θα πρέπει να είναι διατεθειμένος ο κάθε παίκτης να υποστεί ανάλογα με τον αρχικό του πλούτο ώστε να παίξει το παιχνίδι.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας που παραθέτει ενδεικτικά πονταρίσματα για διαφορετικό αρχικό πλούτο σύμφωνα με την ανάλυση του Bernoulli. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.3) διαφορετικές τιμές πλούτου α, οδηγούμαστε στα προτεινόμενα πονταρίσματα s.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

Εκτίμηση τιμής πονταρίσματος για διαφορετικό αρχικό πλούτο

Αρχικός πλούτος α	0	10	100	1000	10^4	10^5	10^6
Προτεινόμενο ποντάρισμα s	2,0	3,0	4,4	6,0	7,6	9,3	10,9

Πέρα από τη πρώτη στήλη που περιμέναμε το προτεινόμενο ποντάρισμα να είναι μηδέν οι υπόλοιπες στήλες φαίνονται λογικές.

Οι ομοιότητες με το μοντέλο του Cramer είναι περισσότερο από εμφανείς. Ακόμα και ο ίδιος ο D. Bernoulli το παραδέχτηκε στην τελική έκδοση της εργασίας του λέγοντας χαρακτηριστικά:

«Πράγματι βρήκα τη θεωρία του Cramer τόσο παρόμοια με τη δική μου που φαίνεται θαύμα το ότι καταλήξαμε ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο σε τόσο στενή συμφωνία σε αυτό το θέμα» (D. Bernoulli 1738)

2.2.4. Η συνεισφορά του G.L.L. Buffon

Ο Γάλλος φυσιοδίφης- μαθηματικός G.L.L. Buffon έχει διαφορετική οπτική τόσο ως προς τον τρόπο που προσεγγίζει το παράδοξο όσο και ως προς τις λύσεις που προτείνει σε σχέση με τους Cramer και D. Bernoulli. Το επιστημονικό του έργο βασίστηκε γενικά στις μεθόδους εμπειρικής παρατήρησης και το πείραμα. Ως εκ τούτου πρότεινε επαναλαμβανόμενα πειράματα για τον προσδιορισμό της ηθικής αξίας του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης. Για την ακρίβεια είναι ο πρώτος στην ιστορία που πραγματικά εκτέλεσε πείραμα παίζοντας το παιχνίδι. Βρήκε ένα παιδί το οποίο έπαιξε το παιχνίδι για 2048 φορές και εξέτασε τα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα αυτά δημοσίευσε στο έργο του με τίτλο "Essai d' Arithmetique Morale" (Δοκίμια για την ηθική αριθμητική) το 1777. Ο Buffon σε αντίθεση με τους προηγούμενους δεν λαμβάνει υπόψη την ανταμοιβή του παιχνιδιού του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης, αλλά τον συνολικό αριθμό των ρίψεων έως ότου εμφανιστεί κεφαλή για πρώτη φορά. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται στο έργο του με Τ. Για παράδειγμα έστω ότι εμφανίζεται κεφαλή στη Τ-οστή ρίψη. Τότε η πιθανότητα $P(T = k) = \frac{1}{2^k}$, $k = 1,2, \dots$ Αν πραγματοποιηθούν $N = 2^s$ παιχνίδια τότε θα έχουμε μια ακολουθία $T_1, T_2, \dots, T_N$ από ανεξάρτητες μεταβλητές Τ. Ως εκ τούτου το ενδεχόμενο $\{T = k\}$ αναμένεται να συμβεί σε

$$E \sum_{j=1}^{N} I\{T_j = k\} = N \cdot P(T = k) = \frac{N}{2^k} = 2^{s-k}$$

παιχνίδια. Πιο συγκεκριμένα περιμένουμε ότι:

Το ενδεχόμενο $\{T = 1\}$ αναμένεται να συμβεί σε 2^{s-1} παιχνίδια,

Το ενδεχόμενο $\{T = 2\}$ αναμένεται να συμβεί σε 2^{s-2} παιχνίδια,

.

.

.

Το ενδεχόμενο $\{T = s\}$ αναμένεται να συμβεί σε 1 παιχνίδι

(Huang, 2013)

Αν προσθέσουμε όλα τα παραπάνω προκύπτουν $2^s - 1$ παιχνίδια. Αυτό σημαίνει ότι ένα παιχνίδι λείπει από τη καταμέτρηση. Αυτό συμβαίνει επειδή υπάρχει μια μικρή πιθανότητα να χρειαστούν πάνω από s ρίψεις έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά κεφαλή, όμως αναμένεται να συμβεί σε λιγότερο από ένα παιχνίδια. Ο Buffon ισχυρίζεται ότι ο αριθμός των ρίψεων στο τελευταίο ημιτελές παιχνίδι δεν μπορεί να εκτιμηθεί καλά και πιστεύει ότι δεν προκύπτει κάποιο σημαντικό σφάλμα στους υπολογισμούς αν δεν το λάβουμε υπόψη. Σύμφωνα με τα παραπάνω η αναμενόμενη συνολική απόδοση υπολογίζεται σε:

$$\sum_{i=1}^{s} 2^{s-i} \cdot 2^{i-1} = N \cdot \frac{s}{2}$$

Η ισοδύναμα η αναμενόμενη μέση απόδοση είναι s/2. Το ιδιαίτερο με την ανάλυση του Buffon είναι ότι η μέση απόδοση των παιχνιδιών εξαρτάται από τον αριθμό Ν των παιχνιδιών.

Συμπερασματικά ο Buffon πρότεινε τη γεωμετρική κατανομή να περιγράφει το T. O πίνακας 2.2 που ακολουθεί δείχνει τόσο τα στατιστικά αποτελέσματα και τις ανταμοιβές τους από το πείραμα του, όσο και τις εκτιμήσεις που ο ίδιος έκανε βασιζόμενος στη γεωμετρική κατανομή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ BUFFON

ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΥΡΩΝ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ BUFFON	ΑΝΤΑΜΟΙΒΕΣ	ΠΡΟΣΣΕΓΓΙΣΗ BUFFON ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ
0	1060	1	$2^{10} = 1024$
1	494	2	$2^{9} = 512$
2	232	4	$2^{8} = 256$
3	137	8	$2^{7} = 128$
4	56	16	$2^{6} = 64$
5	29	32	$2^{5} = 32$
6	25	64	$2^{4} = 16$
7	8	128	$2^{3} = 8$
8	6	256	$2^{2} = 4$
9	-	512	$2^{1} = 2$
10	-	1024	$2^{0} = 1$

(Hey, Pasca, 2010)

Ο παραπάνω πίνακας έδωσε συνολικές αμοιβές αξίας 10.057 Ecu (Γαλλικό νόμισμα της εποχής) με μια μέση απόδοση της τάξεως των 4,91 Ecu

Η ερμηνεία του Buffon για το παράδοξο είναι η εξής. Υποστηρίζει ότι ο κάθε παίκτης του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης θα πρέπει να αγνοεί τη πιθανότητα να κερδίσει πολλά χρήματα από το παιχνίδι, καθώς η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι πολύ μικρή. Ο ίδιος έχει χρησιμοποιεί στο έργο του τον όρο «ηθική βεβαιότητα» για να στηρίξει τον παραπάνω ισχυρισμό (Λεπτομέρειες για τον όρο παρουσιάζονται στη συνέχεια στην ανάλυση των λύσεων του παραδόξου). Εμπειρικά φέρνει το παράδειγμα ενός ανδρός 56 ετών ο οποίος πιστεύοντας ότι η υγεία του είναι καλή, θα αγνοούσε τη πιθανότητα να πεθάνει μέσα στις επόμενες 24 ώρες αν και οι πίνακες θνησιμότητας της εποχής έδειχναν ότι η πιθανότητα να συμβεί αυτό ήταν 10.189 προς 1. Επομένως ο Buffon μια πιθανότητα της τάξεως του 1/10000 ή μικρότερη, τη θεωρεί αμελητέα και την αγνοεί. (Hey, Pasca, 2010)

Επιπλέον ο Buffon θέτει πρόβλημα φερεγγυότητας ως προς το αν οι πληρωμές μπορούν να πραγματοποιηθούν αν γίνουν πολύ μεγάλες. Υποστηρίζει ότι η αποπληρωμή θα πρέπει να είναι ένα πεπερασμένο ποσό καθώς κανένας δεν είναι σε θέση να αποπληρώσει ένα άπειρο χρηματικό ποσό.

2.3 Κάποιες λύσεις που έχουν προταθεί για το παράδοξο

2.3.1 Η συνάρτηση ωφελιμότητας

Η κλασική λύση του παραδόξου είναι η αμφισβήτηση της εγκυρότητας της ποσότητας 2.1 και η άμεση αντικατάστασή της. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τόσο ο Cramer όσο και ο D. Bernoulli συμφωνούν πως το μοντέλο όπου η αξία ενός αντικειμένου βασίζεται στη τιμή, δεν είναι αποδοτικό. Στις πρώτες κιόλας παραγράφους του έργου του ο D. Bernoulli φέρει το εξής παράδειγμα για να εξηγήσει τον προβληματισμό του:

« έστω ότι με κάποιο τρόπο, ένας πολύ φτωχός άνθρωπος αποκτά ένα λαχείο το οποίο με ίδια πιθανότητα είτε δεν θα του αποφέρει τίποτα είτε θα του αποφέρει είκοσι χιλιάδες δουκάτα. Αυτός ο άνθρωπος θα σκεφτεί τη πιθανότητα να κερδίσει δέκα χιλιάδες δουκάτα; Θα ήταν ασύνετος αν πουλούσε το λαχείο του για εννιά χιλιάδες δουκάτα; Εμένα μου φαίνεται ότι η απάντηση είναι αρνητική. Από την άλλη τείνω να πιστεύω ότι ένας πλούσιος δεν θα αρνηθεί να αγοράσει του λαχείο για εννιά χιλιάδες δουκάτα. Αν δεν κάνω λάθος είναι ξεκάθαρο πως δεν μπορούν όλοι οι άνθρωποι να χρησιμοποιούν τον ίδιο κανόνα για να αξιολογήσουν τον τζόγο. Συνεπώς ο κανόνας που έχει καθιερωθεί πρέπει να απορριφθεί.» (D. Bernoulli 1738)

Τα ψυχολογικά και συμπεριφορικά ζητήματα που εμπλέκονται στην αξιολόγηση της προτεινόμενης λοταρίας, όπως χαρακτηριστικά περιγράφονται στο παραπάνω παράδειγμα ώθησαν του Cramer και D. Bernoulli να υπολογίσουν την προσδοκώμενη αξία του κέρδους στη χρησιμότητα, αντί της προσδοκώμενης αξίας των νομισματικών κερδών.

Για τον σκοπό αυτό ο D. Bernoulli εισήγαγε τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x)$, η οποία καθορίζει τη χρησιμότητα ενός πλούτου x\$. Καθώς ένα επιπλέον δολάριο αξίζει γενικά λιγότερο για έναν πλούσιο απ' ότι για έναν φτωχό, το $u(x)$ θεωρείται κοίλο, έτσι ώστε το $du(x)/dx$ να μειώνεται μονότονα. Εάν και υπάρχουν εξαιρετικές περιπτώσεις που μπορούν να καταστήσουν αυτή την υπόθεση άκυρη (ο ίδιος αναφέρει έναν πλούσιο φυλακισμένο που χρειάζεται μόνο άλλα 2000 δουκάτα για να εξαγοράσει την ελευθερία του) κατά τα άλλα η υπόθεση επιβεβαιώνεται συμπεριφορικά. Η συνάρτηση που πρότεινε ως συνάρτηση χρησιμότητας είναι η λογαριθμική. Ο Cramer πρότεινε τη χρήση της τετραγωνικής ρίζα αντί αυτής. Οι δύο προσεγγίσεις είναι πάρα πολύ κοντά με τη διαφορά ότι ο Cramer δεν έλαβε υπόψη του τον συνολικό πλούτο ενός ατόμου, αλλά μόνο το κέρδος από το λαχείο. (Peters, 2011)

Όπως είναι φυσικό η νέα αυτή έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας συζητήθηκε για χρόνια και ερευνήθηκε από πάρα πολλούς μαθηματικούς και οικονομολόγους εγείροντας πολλά ερωτήματα μερικά εκ των οποίων απαντήθηκαν και άλλα όχι. Τα χαρακτηριστικότερα που κατά κύριο λόγο απασχολούν μέχρι σήμερα τους επιστήμονες είναι τα εξής:

i. Η επίλυση του παραδόξου που βασίζεται σε μια συνάρτηση ωφελιμότητας δεν μπορεί να προέλθει από πιο θεμελιώδης εκτιμήσεις πέρα από τη διαίσθηση των πρωτοπόρων Cramer και D. Bernoulli;
ii. Τόσο η λογαριθμική και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας όσο και πολλές άλλες κοίλες συναρτήσεις λειτουργούν. Ποια είναι η προτιμότερη;

Τα ερωτήματα αυτά έφεραν επικριτές στην ιδέα που υποστηρίζουν ότι δεν έχει σημασία ο τύπος της συνάρτησης χρησιμότητας. Όποια και να είναι αυτή το αποτέλεσμα μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να δώσει ξανά μια άπειρη αναμενόμενη τιμή. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα όπου εφαρμόζουμε στη προσέγγιση του Bernoulli την αλλαγή της 2^n με την e^{2n}. Η αναμενόμενη χρησιμότητα είναι ίση με:

$$\Delta E = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (ln(x + e^{2n} - c) - lnx) = \infty$$

Όπου x αναπαριστά τον αρχικό πλούτο του ατόμου και c το κόστος για να παίξει το παιχνίδι. (Peters, 2011)

Παρόλα αυτά η ιδέα παραμένει ακέραια έχοντας σήμερα τις μεγαλύτερες εφαρμογές τόσο στην οικονομική όσο και στην αναλογιστική επιστήμη.

2.3.2 Η στάθμιση πιθανοτήτων

Μια εναλλακτική μέθοδος για την επίλυση του παραδόξου προτάθηκε από τον Nicolas Bernoulli. Υπέθεσε ότι τα ενδεχόμενα με μικρή πιθανότητα μπορούν να παραλειφθούν μετατρέποντας την άπειρη αναμενόμενη αξία του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης σε πεπερασμένη τιμή. Μια παρόμοια ιδέα είχε ειπωθεί από τον θείο του Jacob Bernoulli ο οποίος όρισε τον όρο ηθική βεβαιότητα στο βιβλίο του με τίτλο Ars Conjectandi. Τις απόψεις των δύο συμμερίστηκε και ο Buffon. Οι σύγχρονοι υποστηρικτές της λύσης αυτής όπως ο Nicolas J.J. Smith βασίζουν το επιχείρημά τους στην ακόλουθη αρχή:

Ορθολογικά Αμελητέες Πιθανότητες (Rationally Negligible Probabilities R.N.P.): Για κάθε λοταρία που περιλαμβάνει οποιοδήποτε πρόβλημα απόφασης που αντιμετοπίζει ο καθένας, υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε το άτομο να μην χρειάζεται να εξετάσει τα αποτελέσματα αυτής της λοταρίας για πιθανότητες μικρότερες του ε και να καταλήξει σε μια απολύτως λογική απόφαση. (Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox)

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα αυτής της λύσης είναι ότι η επιλογή του ε είναι υποκειμενική. Προφανώς δεν μπορεί να οριστεί ένα ε για όλες τις λοταρίες αλλά ακόμη και για μια συγκεκριμένη το ε μπορεί να αλλάξει τιμή ανάλογα με τη προσέγγιση. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι ότι αν εφαρμόσουμε την RNP και αφαιρέσουμε κάποιες πιθανότητες, τότε θα πρέπει να αυξήσουμε όλες τις υπόλοιπες ώστε όλες μαζί να αθροίζονται στη μονάδα όπως απαιτείται από τα αξιώματα των πιθανοτήτων και αυτό πρέπει να γίνει με κάποιο συστηματικό τρόπο. Τέλος οι μικρές πιθανότητες έχουν μεγάλη επιρροή στο αποτέλεσμα του παιχνιδιού καθώς οι αποδόσεις τους είναι υψηλές, πράγμα που αμφισβητεί το ίδιο το επιχείρημα. (Faeq ,2019)

2.3.3. Η υπόθεση των πεπερασμένων πόρων

Ορισμένοι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης πρέπει να απορριφθεί καθώς βασίζεται σε μη ρεαλιστικές υποθέσεις. Τόσο ο χρόνος που ένας παίκτης μπορεί να παίξει το παιχνίδι όσο και τα χρήματα που μπορεί να διαθέσει ένα καζίνο ή μια τράπεζα για να αποπληρώσει τον παίκτη θεωρούνται πεπερασμένα, με αποτέλεσμα το ενδεχόμενο ένας παίκτης να κερδίσει ένα άπειρο χρηματικό ποσό φαίνεται μη ρεαλιστικό στον πραγματικό κόσμο. Ο ίδιος ο Buffon είχε υπολογίσει ότι μετά από 29 γύρους δεν θα υπήρχαν αρκετά χρήματα στο βασίλειο της Γαλλίας για να καλύψει το στοίχημα. Ένας σύγχρονος υποστηρικτής αυτής της υπόθεσης ο Jeffrey(1983) αναφέρει χαρακτηριστικά:

«όποιος προσφέρεται να αφήσει τον παίκτη να παίξει το στοίχημα της Αγίας Πετρούπολης είναι ψεύτης, γιατί προσποιείται ότι έχει μια απεριόριστα μεγάλη τράπεζα»

Τα αντεπιχειρήματα της παραπάνω θέσης είναι ποικίλα. Ένα από αυτά είναι ότι εφόσον εισάγουμε μια μη μηδενική πιθανότητα στη υπόθεση ότι η τράπεζα είναι αξιόπιστη, τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα θα είναι άπειρη όσο χαμηλή και αν είναι η αξιοπιστία της τράπεζας καθώς οποιαδήποτε μη μηδενική πιθανότητα επί άπειρο ισούται με άπειρο. Ακόμα παραπέρα έστω και αν η τράπεζα δεν έχει διαθέσιμο πριν το παιχνίδι το απαιτούμενο χρηματικό ποσό ώστε να καλύψει το στοίχημα, μια και μόνο υπόσχεσή της στον παίκτη ότι θα του διαθέσει το ποσό σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα, είναι αρκετή. (Stanford Encyclopedia of Philosophy: The St. Petersburg Paradox, 2019)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σχόλιο του Jeffrey ευσταθεί και παίζουμε το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης σε ένα καζίνο όπου οι πόροι του είναι πεπερασμένοι. Ας ονομάσουμε W τον συνολικό πλούτο του καζίνου, ο οποίος είναι και το μέγιστο κέρδος του παίκτη. Τότε $n^* = 1 + \log_2 W$ είναι ο δείκτης πάνω από τον οποίο το καζίνο δεν μπορεί να αποπληρώσει τον παίκτη ο οποίος κερδίζει W αντί για 2^n που θα κέρδιζε χωρίς την υπόθεση των πεπερασμένων πόρων αν το παιχνίδι τελείωνε σε n γύρους. Σύμφωνα με τα παραπάνω η πληρωμή που μπορεί να ληφθεί από αυτό το παιχνίδι εκφράζεται από τη συνάρτηση $min(2^n, W)$ που οδηγεί στην παρακάτω πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή.

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} min(2^n, W) = \sum_{n=1}^{n^*-1} \frac{1}{2^{n+1}} 2^n + \sum_{n=n^*}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} W = \sum_{n=1}^{n^*-1} \frac{1}{2} + W \sum_{n=n^*}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{n^*}{2} + \frac{W}{2^{n^*}}$$

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις αναμενόμενες τιμές Ε για διαφορετικά ποσά W.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3

Αναμενόμενη αξία Ε του παιχνιδιού για διαφορετικό πλούτο W

ΠΑΙΚΤΕΣ	BANKROLL W ($)	ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΑΞΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ ($)	ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΕΣ ΡΙΨΕΙΣ ΕΩΣ ΝΑ ΚΕΡΔΙΘΕΙ ΤΟ W	ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΕΣ ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΕΧΕΙ Ο ΠΑΙΚΤΗΣ 50% ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΚΕΡΔΙΣΕΙ ΤΟ W	ΧΡΟΝΟΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ (ΕΝΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΤΟ ΛΕΠΤΟ)
ΦΙΛΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ	100	7,56	6	44	44 min
ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΟΥ-ΧΟΣ	1 εκ.	20,91	19	363.408	256 ημέρες
ΔΙΣΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΟΥ-ΧΟΣ	1 δις.	30,84	29	372.130.559	708 χρόνια
BILL GATES (2015)	79,2 δις	37,15	36	47.632.711.549	90.625 χρόνια
Α.Ε.Π. ΗΠΑ	13,8 τρις	44,57	43	6.096.987.078.286	11.600.052 Χρόνια
ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ Α.Ε.Π.	54,3 τρις	46,54	45	24.387.948.313.146	46.400.206 χρόνια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΘΕΩΡΙΑ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι σημαντικότεροι τύποι συναρτήσεων ωφελιμότητας (utility functions) που συναντά κανείς ευρέως στις εφαρμογές. Θα αναλυθούν οι βασικές ιδιότητες που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις αυτές ώστε να αποτελούν συναρτήσεις ωφελιμότητας. Τέλος, με τη βοήθεια των συναρτήσεων αυτών θα οριστούν οι συναρτήσεις αποστροφής κινδύνου (risk aversion functions) και θα αναλυθεί η σημασία τους στη θεωρία αποφάσεων.

3.1 Συναρτήσεις ωφελιμότητας και ιδιότητές τους

3.1.1 Θεωρία αποφάσεων εισαγωγή

Η έννοια της ωφελιμότητας και οι συναρτήσεις ωφελιμότητας που προτάθηκαν ως λύσεις του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης, οδήγησαν σε μια συστηματική θεωρία, εκείνη της θεωρίας ωφελιμότητας με σημαντικές εφαρμογές στα οικονομικά και τον αναλογισμό. Το βασικότερο μαθηματικό εργαλείο της παραπάνω θεωρίας είναι οι συναρτήσεις ωφελιμότητας. Συναρτήσεις που μετρούν την αξία που αποδίδει ένα άτομο σε ένα αγαθό. Προκειμένου να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος που προσδιορίζονται οι συναρτήσεις αυτές καθώς και οι ιδιότητές τους, θα γίνει μια μικρή αναφορά σε ζητήματα της θεωρίας αποφάσεων. Όταν ένα άτομο αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα αποφάσεων κάτω από ένα περιβάλλον αβεβαιότητας, τότε το μόνο σίγουρο είναι ότι οι προτιμήσεις του είναι μοναδικές και υποκειμενικές. Παρόλα αυτά η επιλογή των πράξεών του ενόψει αβεβαιότητας μπορεί να τον κατηγοριοποιήσει ως συντηρητικό (δηλαδή άνθρωπο που αποστρέφεται τον κίνδυνο) ή ριψοκίνδυνο (δηλαδή άνθρωπο που ρισκάρει). Είναι γεγονός ότι ο ίδιος άνθρωπος μπορεί σε άλλες αποφάσεις του να είναι ριψοκίνδυνος και σε άλλες συντηρητικός. Από εμπειρικές έρευνες έχει προκύψει ότι οι περισσότεροι άνθρωποι είναι συντηρητικοί στις προτιμήσεις τους. Παρόλα αυτά τείνουν να γίνουν ριψοκίνδυνοι σε αποφάσεις μικρής ζημίας αλλά μεγάλου κέρδους. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα λαχείο που κοστίζει 0,50€ και έχει πιθανότητα 1 στις 100.000 να κερδίσει 10.000 €. Η αναμενόμενη απόδοσή του είναι 0,10€. Πολλοί όμως άνθρωποι αγοράζουν τέτοια λαχεία πράγμα που αποδεικνύει ριψοκίνδυνη συμπεριφορά. Στη συνέχεια θα δούμε πώς η κατηγοριοποίηση αυτή των ανθρώπων επιδρά στις ιδιότητες των συναρτήσεων ωφελιμότητας. (Μαγείρου, 2012)

3.1.2 Ιδιότητες συναρτήσεων ωφελιμότητας.

Οι συναρτήσεις ωφελιμότητας λοιπόν όπως έχουμε ήδη πει είναι συναρτήσεις πραγματικών αριθμών που σε κάθε τιμή ενός αγαθού (όχι απαραίτητα του χρήματος) «αποδίδουν» μια ηθική αξία (moral value) η οποία εξαρτάται από τον τύπο του ατόμου που λαμβάνει μια απόφαση. Αν είναι δηλαδή συντηρητικός ή ριψοκίνδυνος. Ας δούμε μερικές ιδιότητες των συναρτήσεων ωφελιμότητας.

Ιδιότητα 1) Μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$ είναι αύξουσα.

Ερμηνεία: Έστω $u(x)$ μια συνάρτηση ωφελιμότητας και x_1, x_2 δύο αγαθά μεταξύ των οποίων πρέπει να επιλέξει το άτομο. Προφανώς αν $x_1 > x_2$, δηλαδή το αγαθό x_1 προτιμάται από το αγαθό x_2 τότε θα πρέπει $u(x_1) > u(x_2)$ δηλαδή η ευχαρίστηση που μας αποφέρει το αγαθό x_1 να είναι μεγαλύτερη από την ευχαρίστηση που μας αποφέρει το αγαθό x_2. Άρα η $u(x)$ είναι αύξουσα. (Μαγείρου, 2012)

Στη περίπτωση που τα x_1, x_2 είναι χρηματικά ποσά η ιδιότητα 1 μας δείχνει ότι το άτομο προτιμά τα περισσότερα χρήματα από τα λίγα.

Ιδιότητα 2) Έστω $u(x)$,$v(x)$ συναρτήσεις ωφελιμότητας όπου $v(x) = au(x) + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$. Τότε οι αποφάσεις που λαμβάνονται μεγιστοποιώντας την αναμενόμενη αξία της $v(x)$ είναι ίδιες με αυτές που λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τη $u(x)$.

Ερμηνεία: Έστω ότι ένα άτομο προτιμά το ποσό x_0 από μια λοταρία που έχει αποτελέσματα x_1 με πιθανότητα p και x_2 με πιθανότητα 1-p. Τότε θα ισχύει:

$$u(x_0) > pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνήθεις ιδιότητες της διάταξης θα αποδείξουμε ότι

$$v(x_0) > pv(x_1) + (1-p)v(x_2)$$

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε τη πρώτη ανισότητα με $\alpha > 0$ οπότε έχουμε:

$$\alpha u(x_0) > \alpha pu(x_1) + \alpha(1-p)u(x_2)$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε β και στα δύο μέλη και παίρνουμε:

$$\alpha u(x_0) + \beta > \alpha pu(x_1) + \alpha(1-p)u(x_2) + (p+1-p)\beta$$

ή

$$\alpha u(x_0) + \beta > p(\alpha u(x_1) + \beta) + (1-p)(\alpha u(x_2) + \beta)$$

δηλαδή

$$v(x_0) > pv(x_1) + (1-p)v(x_2)$$

(Μαγείρου, 2012)

Για να αποδείξουμε τις ιδιότητες 3 και 4 πρέπει πρώτα να ορίσουμε πιο αυστηρά πότε ένας άνθρωπος είναι συντηρητικός, πότε ριψοκίνδυνος και πότε κινδυνοουδέτερος. Όταν ένας άνθρωπος που αντιμετωπίζει οποιαδήποτε λοταρία με αναμενόμενη αξία $E(x)$, είναι διατεθειμένος να ανταλλάξει το δικαίωμά του με ένα βέβαιο ποσό x_0 μικρότερο του $E(x)$, τότε είναι συντηρητικός. Ενώ αν απαιτεί ένα ποσό x_0 μεγαλύτερο από το $E(x)$ για να αποχωρήσει τότε είναι ριψοκίνδυνος. Τέλος όταν είναι πρόθυμος να ανταλλάξει το δικαίωμά του για ένα ποσό ίσο με $E(x)$, τότε είναι κινδυνοουδέτερος. Για την απόδειξη των παρακάτω ιδιοτήτων θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα μία λοταρία που οδηγεί σε δύο επιλογές x_1, x_2 με πιθανότητα να πραγματοποιηθούν p και 1-p αντίστοιχα.

Ιδιότητα 3) Η συνάρτηση ωφελιμότητας ενός συντηρητικού ατόμου είναι κοίλη.

Ερμηνεία: Σύμφωνα με τα παραπάνω ένα συντηρητικό άτομο θα προτιμήσει να «παραιτηθεί» από το δικαίωμά του σε μια λοταρία για ένα σίγουρο ποσό, ακόμα και μικρότερο της αναμενόμενης τιμής, από το να συνεχίσει στη λοταρία. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει μόνο δύο τιμές x_1 και x_2. Τότε με όρους ωφελιμότητας η προτίμησή του αυτή αντικατοπτρίζεται στη παρακάτω ανισότητα:

$$u\big(E(X)\big) = u(px_1 + (1-p)x_2) \geq pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$$

Αυτός όμως είναι ακριβώς ο ορισμός μιας κοίλης συνάρτησης f. Δηλαδή αν x, y ανήκουν στο πεδίο ορισμού της και $\lambda \in [0,1]$, τότε θα ισχύει:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Επομένως αποδείξαμε ότι η $u(x)$ είναι κοίλη. (Μαγείρου, 2012)

Ιδιότητα 4) Η συνάρτηση ωφελιμότητας ενός ριψοκίνδυνου ατόμου είναι κυρτή.

Απόδειξη: Η απόδειξη της ιδιότητας είναι εντελώς παρόμοια με την προηγούμενη. Η προτίμηση ενός ριψοκίνδυνου ατόμου περιγράφεται με όρους ωφελιμότητας από την ανισότητα:

$$u\big(E(X)\big) = u(px_1 + (1-p)x_2) \leq pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$$

Όπου έχουμε τον ορισμό μιας κυρτής συνάρτησης.

3.2 Υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας

3.2.1 Εισαγωγή

Για κάθε πρόβλημα ωφελιμότητας δημιουργούνται μοντέλα τα οποία μελετούν τη συμπεριφορά του ατόμου όσον αφορά τις αποφάσεις του. Σε κάθε μοντέλο ορίζεται συνήθως μια συνάρτηση ωφελιμότητας που το αντανακλά. Δεν είναι όμως πάντα εύκολο να φτιαχτεί μια τέτοια συνάρτηση. Ένας παράγοντας που συμβάλλει σε αυτό είναι το λεγόμενο κριτήριο της ορθολογικότητας (rationality). Είναι αναμενόμενο όταν μελετάμε ένα μοντέλο αποφάσεων ή επενδύσεων να συμφωνούμε ότι το άτομο που αποφασίζει σίγουρα προτιμά περισσότερα χρήματα από λιγότερα και είναι ικανό να επεξεργάζεται πληροφορίες αποτελεσματικά και να τις χρησιμοποιεί ώστε να μεγιστοποιήσει τον πλούτο του. Όταν ένα άτομο υπακούει στα παραπάνω λέμε ότι είναι ορθολογικό. Όσο εύλογη και αν φαίνεται η παραπάνω υπόθεση στην πραγματικότητα δεν συναντάται στο σύνολο των μοντέλων. Όταν δεν συμβαίνει αυτό λέμε ότι το άτομο είναι άπληστο (greedy). Για ένα ορθολογικό άτομο οι προτιμήσεις του μπορούν πολύ πιο εύκολα να αντιπροσωπεύονται από μια συνάρτηση ωφελιμότητας. Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με ορθολογικά άτομα. Η υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι μια έννοια που χρησιμεύει ως οδηγός αναφοράς για αποφάσεις ορθολογικών ατόμων κάτω από αβεβαιότητα. Η υπόθεση της αναμενόμενης ωφελιμότητας επιβάλλει περιορισμούς στις συναρτήσεις ωφελιμότητας ώστε να αντικατοπτρίζουν τις αποφάσεις των ορθολογικών ατόμων, παικτών, επενδυτών. Παρακάτω θα δούμε ποιες ιδιότητες- αξιώματα θα πρέπει να πληρούν οι προτιμήσεις-αποφάσεις ενός ορθολογικού ατόμου ώστε να υπακούουν στην υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας και να υπάρχει πάντα μια συνάρτηση ωφελιμότητας που να περιγράφει το μοντέλο.

3.2.2 Κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας

Η θεωρία αποφάσεων με τη χρήση μιας συνάρτησης ωφελιμότητας βασίζεται στο κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας. Το κριτήριο αυτό λέει πως όταν κάποιος πρέπει να πάρει μια απόφαση μετρά την αναμενόμενη ωφελιμότητα που θα απολαύσει για κάθε πιθανό ενδεχόμενο και διαλέγει εκείνο με τη μεγαλύτερη τιμή, σε σύγκριση πάντα με τον πλούτο του. Μεταξύ δύο ενδεχομένων με την ίδια αναμενόμενη ωφελιμότητα απλά το άτομο δεν έχει προτίμηση.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε έναν επενδυτή και μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$ και ας υποθέσουμε ότι έχει να διαλέξει ανάμεσα σε δύο επενδύσεις που θα οδηγήσουν στα τυχαία καθαρά κέρδη x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι επενδυτής έχει πλούτο w. Το αποτέλεσμα της επένδυσης i είναι $w + x_i,\ i = 1,2, ...$ Τότε σύμφωνα με το κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας ο επενδυτής θα επιλέξει την επένδυση ένα από την επένδυση δύο αν και μόνο αν ισχύει:

$$E[u(w + x_1)] > E[u(w + x_2)]$$

Ενώ θα είναι αδιάφορος ως προς τις δύο επενδύσεις αν ισχύει:

$$E[u(w + x_1)] = E[u(w + x_2)]$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση ωφελιμότητας $v(x)$ που ορίζεται ως $v(x) = au(x) + \beta$ όπου $u(x)$ είναι μια άλλη συνάρτηση ωφελιμότητας και α, β πραγματικές σταθερές, τότε οι αποφάσεις που λαμβάνονται σύμφωνα με το κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας θα είναι οι ίδιες και για τις δύο συναρτήσεις.

Δηλαδή:

$$E[v(w + x_1)] > E[v(w + x_2)]$$

Αν και μόνο αν

$$\alpha E[u(w + x_1)] + \beta > \alpha E[u(w + x_2)] + \beta$$

που ισοδυναμεί με

$$E[u(w+x_1)] > E[u(w+x_2)]$$

(Dickson, 2016)

3.2.3 Θεωρία των Von Neuman και Morgenstern

Το 1947 οι Von Neuman και Morgenstern απέδειξαν ότι για κάθε άτομο του οποίου οι προτιμήσεις ικανοποιούν μια σειρά από αξιώματα ορθολογικής συμπεριφοράς (axioms of rational behavior), τα οποία θα παρουσιάσουμε παρακάτω, υπάρχει μια συνάρτηση ωφελιμότητας. Δηλαδή κάθε άτομο που παίρνει μια απόφαση κάτω από αβεβαιότητα υπακούοντας σ' αυτά τα αξιώματα δρα με τέτοιο τρόπο ώστε να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης χρησιμότητας που σχετίζεται με τις αποφάσεις του. Όταν συμβαίνει αυτό το άτομο είναι ορθολογικό. Τα αξιώματα αυτά αποτελούν τη βάση της υπόθεσης αναμενόμενης ωφελιμότητας και περιέχουν μια ευρεία γκάμα εφαρμογών τόσο στη μικροοικονομία όσο και στη θεωρία επενδύσεων.

Ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο έχει να πάρει μια απόφαση κάτω από βεβαιότητα. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n$ διαφορετικές επιλογές για να διαλέξει. Τα παρακάτω αξιώματα ορίζουν έναν ορθολογικό λήπτη αποφάσεων και είναι τα εξής:

1) Ανακλαστικότητα (Reflexivity). Για κάθε επιλογή x_i ισχύει $x_i \geq x_i$ (Δηλαδή είναι τουλάχιστον εξίσου επιθυμητή η επιλογή x_i με την ίδια την x_i). Το αξίωμα θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια απλή μαθηματική αναγκαιότητα και έχει μικρή διαισθητική σημασία.
2) Πληρότητα (Completeness). Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών επιλογών x_i, x_j από ένα σύνολο $x_1, x_2, \dots, x_n$, τρία πράγματα μπορούν να συμβούν:
   i. $x_i > x_j$. Δηλαδή να προτιμάται η επιλογή x_i από την x_j
   ii. $x_j > x_i$. Δηλαδή να προτιμάτε η επιλογή x_j από την x_i
   iii. $x_i = x_j$. Δηλαδή να είμαστε αδιάφοροι ως προς τις δύο επιλογές
3) Μεταβατικότητα (transitivity). Για οποιεσδήποτε επιλογές x_i, x_j, x_k από το σύνολο $x_1, x_2, \dots, x_n$, αν ισχύει $x_i > x_j$ και $x_j > x_k$ τότε $x_i > x_k$. Δηλαδή αν προτιμούμε την επιλογή x_i από την x_j και την επιλογή x_j από την x_k τότε προτιμάμε και την επιλογή x_i από την x_k.
4) Ισχυρή ανεξαρτησία (Strong independence). Έστω p οποιοσδήποτε αριθμός $p \in [0,1]$. Ας θεωρήσουμε το p την πιθανότητα να επιλέξουμε την επιλογή x_i. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι $x_i = x_j$ (δηλαδή είμαστε αδιάφοροι μεταξύ των x_i και x_j), τότε ισχύει $px_i + (1-p)x_k = px_j + (1-p)x_k$, όπου x_k μια τρίτη επιλογή. Το αξίωμα υπονοεί ότι σε πιο πολύπλοκα ζητήματα που εμπλέκονται περισσότερες από δύο αποφάσεις, οι προτιμήσεις μας δεν επηρεάζονται από τη συμπερίληψη.
5) Συνέχεια (Continuity). Αν $x_i > x_j > x_k$ τότε υπάρχει αριθμός $p \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $px_i + (1-p)x_k = x_j$. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ της «καλύτερης»

επιλογής και της «χειρότερης» μπορώ να βρω μια σύνθετη επιλογή που να είναι αδιάφορη ως προς τη «μεσαία».

6) Σειρά κατάταξης (Ranking). Υποθέτοντας ότι $x_i > x_j > x_k$ και $x_i > x_m > x_k$ και επιπλέον ότι $px_i + (1-p)x_k = x_j$ και $ax_i + (1-a)x_k = x_m$ όπου $a, p \in [0,1]$. Τότε έπεται ότι αν $p > a$ τότε $x_j > x_m$ ενώ $p = a$ τότε $x_j = x_m$. Ουσιαστικά υποδηλώνει ότι εφόσον η πιθανότητα p να επιλεγεί το x_i από την πρώτη σειρά προτίμησης είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα α, τότε προτιμώ την x_j από την x_m εφόσον ανήκει στη σειρά προτίμησης με τη μεγαλύτερη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί. (Babaei, 2013)

3.3 Τύποι συναρτήσεων ωφελιμότητας

Για να ορίσουμε μια συνάρτηση ωφελιμότητας για ένα πρόβλημα αποφάσεων ο τυπικός τρόπος είναι να ορίσουμε για κάθε διαφορετικό επίπεδο πλούτου την αντίστοιχη τιμή της ωφελιμότητας για το άτομο. Για παράδειγμα για πλούτο 0 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $u(0) = 0$, για πλούτο 10 να πούμε ότι $u(10) = 5$, για πλούτο 20 ότι $u(20) = 8$ κοκ. Πέρα από τη δυσκολία κατασκευής της συνάρτησης $u(x)$, ο συγκεκριμένος τρόπος δεν είναι ικανοποιητικά πρακτικός καθώς εμπεριέχει πολλά προβλήματα στην περαιτέρω μελέτη της. Είναι σίγουρα πιο αποδοτικό να θεωρήσουμε ως συναρτήσεις ωφελιμότητας ήδη υπάρχουσες μαθηματικές συναρτήσεις που μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλες για το εκάστοτε πρόβλημα. Υπάρχουν δεκάδες τύποι συναρτήσεων που πληρούν τις υποθέσεις και τις ιδιότητες περιγράψουμε τις προηγούμενες παραγράφους και έχουν χρησιμοποιηθεί ως συναρτήσεις ωφελιμότητας. Παρακάτω θα περιγράψουμε τις κυριότερες από αυτές.

3.3.1 Εκθετική συνάρτηση.

Μια συνάρτηση της μορφής $u(x) = -exp\{-\beta x\}$ για κάποιο $\beta > 0$ ονομάζεται εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας (exponential utility function). Κύριο χαρακτηριστικό αυτών των συναρτήσεων είναι ότι οι αποφάσεις που βασίζονται σε αυτές δεν εξαρτώνται από το πλούτο του ατόμου. Ειδικότερα:

Ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο με πλούτο w πρέπει να πάρει μια απόφαση μέσα από την n διαφορετικές επιλογές. Κάθε επιλογή i όπου $i = 1,2,\dots,n$ θα οδηγήσει σε έναν πλούτο $w + x_i$ όπου x_i περιγράφει τον αναμενόμενο πλούτο όταν πραγματοποιηθεί η i-οστή επιλογή. Τότε σύμφωνα με το κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας το άτομο θα υπολογίσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα για κάθε ενδεχόμενο ($E\big(u(w + x_i)\big)$, $\forall\, i = 1,2,\dots,n$) και θα προτιμήσει το ενδεχόμενο j από το ενδεχόμενο i αν και μόνο αν ισχύει:

$$E\left(u\big(w + x_j\big)\right) > E\big(u(w + x_i)\big), \quad \forall\, i,j = 1,2,\dots,n, \qquad i \neq j$$

Αντικαθιστώντας την εκθετική συνάρτηση στην παραπάνω έκφραση έχουμε:

$$-E\big[exp\{-\beta\big(w + x_j\big)\}\big] > -E[exp\{-\beta(w + x_i)\}]$$

Πολλαπλασιάζοντας με -1 και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εκθετικών έχουμε:

$$E\left[exp\{-\beta w\} \cdot exp\{-\beta x_j\}\right] < E[exp\{-\beta w\} \cdot exp\{-\beta x_i\}]$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μέσης τιμής

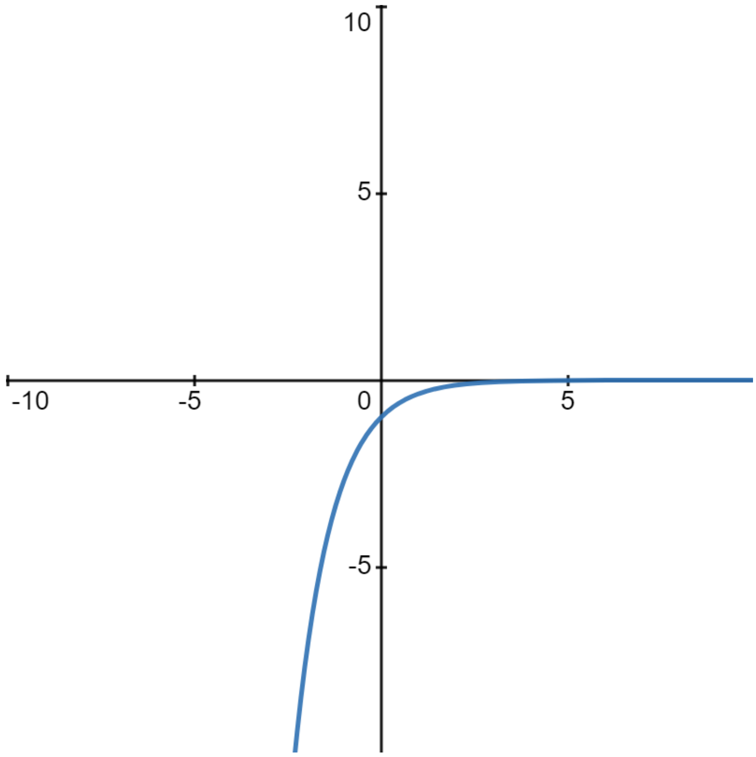
$(E(\alpha x + \beta) = aE(x) + \beta)$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$E\left[exp\{-\beta x_j\}\right] < E[exp\{-\beta x_i\}]$$

που είναι ανεξάρτητο του πλούτου w. (Dickson, 2016)

Η μορφή μιας εκθετικής συνάρτησης δίνεται στο παρακάτω γράφημα όπου παρουσιάζεται η εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας για $\beta = 1$.

Γράφημα 3.1: Εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας



3.3.2 Τετραγωνική συνάρτηση

Μια συνάρτηση της μορφής $u(x) = x - \beta x^2$ για $x < 1/2\beta$ και $\beta > 0$ ονομάζεται τετραγωνική συνάρτηση ωφελιμότητας (quadratic utility function). Η πρώτη παράγωγος μιας τέτοιας συνάρτησης είναι της μορφής $u'(x) = 1 - 2\beta x$, ενώ η δεύτερη παραγωγός είναι $u''(x) = -2\beta$. Από τα παραπάνω φαίνεται τόσο η αναγκαιότητα του να είναι η παράμετρος β θετική, ώστε να απευθύνεται σε ένα ορθολογικό άτομο, όσο και η σημασία του περιορισμού $x < 1/2\beta$ ώστε να είναι η $u'(x) > 0$. Ο περιορισμός αυτός στο x δεν μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε τη συνάρτηση σε προβλήματα όπου τα τυχαία αποτελέσματα κατανέμονται στο $\mathbb{R}$. Η τετραγωνική συνάρτηση είναι συνάρτηση αποστροφής κινδύνου αφού η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική. Ένα χαρακτηριστικό των τετραγωνικών συναρτήσεων ωφελιμότητας είναι ότι η αναμενόμενη ωφελιμότητα τέτοιων συναρτήσεων μπορεί να περιγραφεί με συνδυασμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης της τυχαίας μεταβλητής x. Αναλυτικότερα η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής x είναι ίση με:

$$\sigma_x^2 = E[x - E(x)]^2 = E[x^2 - 2xE(x) + [E(x)]^2] = E(x^2) - 2E(x)E(x) + [E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad (1)$$

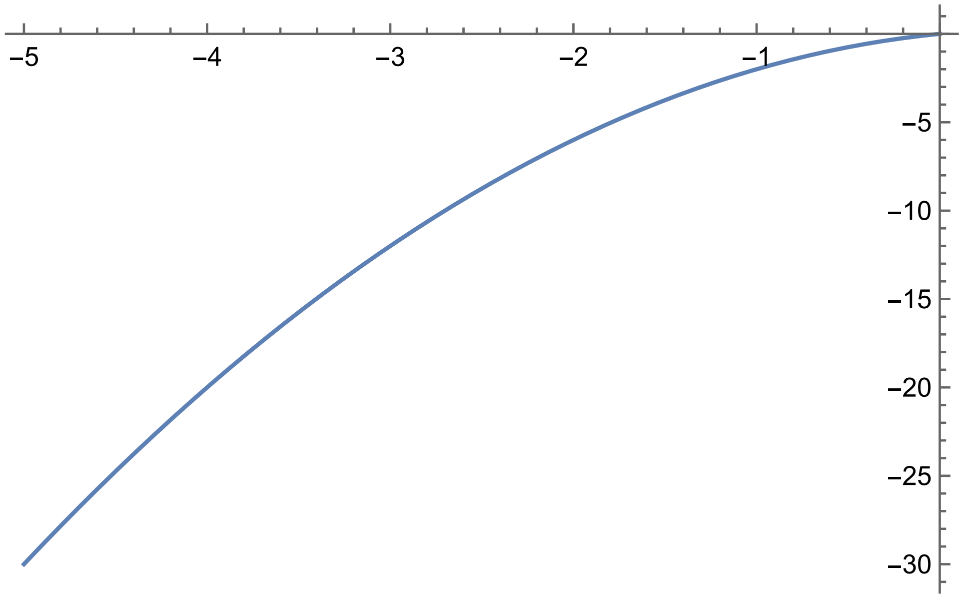
(Dickson, 2016)

Η αναμενόμενη τιμή της τετραγωνικής συνάρτησης ωφελιμότητας ορίζεται ως:

$$E[u(x)] = E(x) - \beta E(x^2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$E[u(x)] = E(x) - \beta(\sigma_x^2 + [E(x)]^2)$$

Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής συνάρτησης ωφελιμότητας για $\beta = 1$



Γράφημα 3.2: Τετραγωνική συνάρτηση ωφελιμότητας

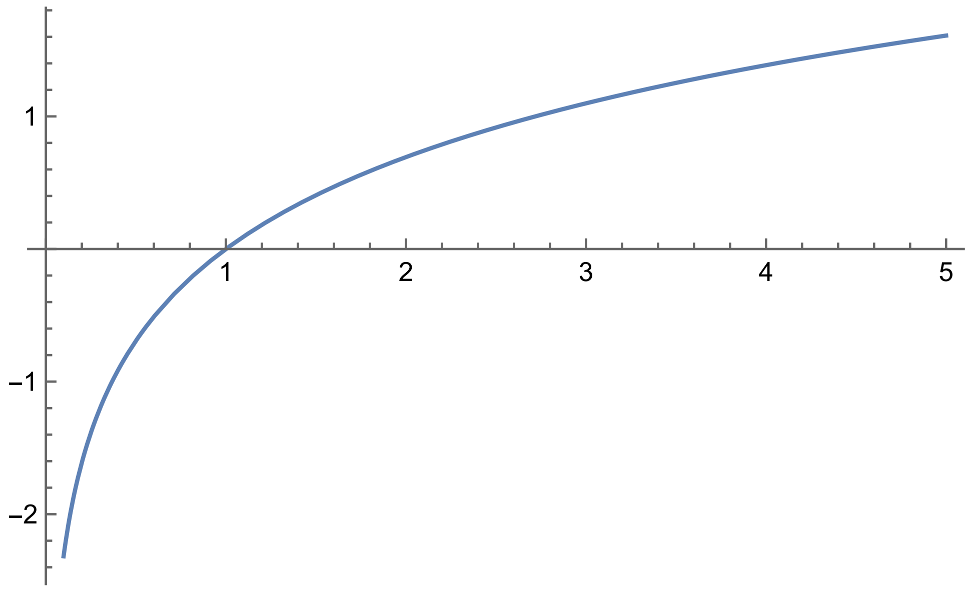
3.3.3 Λογαριθμική συνάρτηση

Μια συνάρτηση της μορφής $u(x) = \beta \log x$ για $x > 0, \beta > 0$ ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας (Logarithmic utility function). Η συνάρτηση αυτή όπως έχουμε ήδη δει προτάθηκε από τον D. Bernoulli ως συνάρτηση ο ωφελιμότητας για την επίλυση του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης. Όπως και στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ωφελιμότητας οι περιορισμοί στο x όσο και στο β είναι απαραίτητοι ώστε η συνάρτηση να ορίζεται σωστά. Μόνο για $\beta > 0$ και $x > 0$ έχουμε

$$u'(x) = \frac{\beta}{x} > 0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad u''(x) = -\frac{\beta}{x^2} < 0$$

Επομένως η λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας είναι μια συνάντηση αποστροφής κινδύνου όταν β θετικό. (Dickson, 2016)

Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας λογαριθμικής συνάρτησης ωφελιμότητας για $\beta = 1$

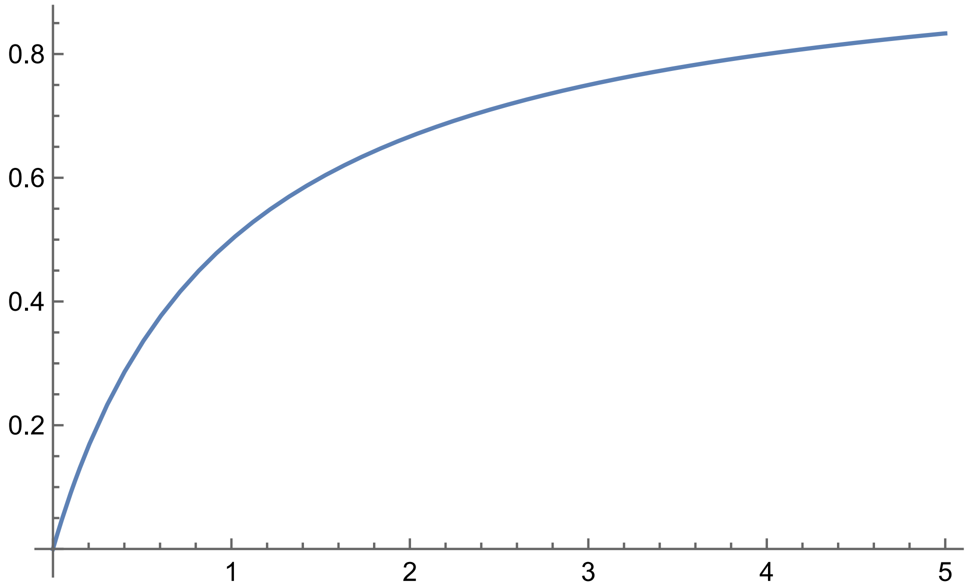


Γράφημα 3.3: Λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας

3.3.4 Η συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \frac{x}{x+\beta}$

Οι συναρτήσεις της μορφής $u(x) = \frac{x}{x+\beta}$ όπου $\beta > 0$ αποτελούν συναρτήσεις ωφελιμότητας με το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι περιορίζονται στο διάστημα $[0,1]$ δηλαδή $0 \leq u(x) \leq 1$. Επομένως μπορούν να αποτελέσουν και συναρτήσεις πιθανότητας.

Για $\beta = 1$ η μορφή της δίνεται στο παρακάτω γράφημα.



Γράφημα 3.4: Συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \frac{x}{x+1}$

3.4 Συναρτήσεις αποστροφής κινδύνου (risk aversion functions)

Για κάθε δεδομένη συνάρτηση ωφελιμότητας η συνάρτηση

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx}\ln u'(x)$$

ονομάζεται συνάρτηση αποστροφής κινδύνου και περιγράφει την προτίμηση των ανθρώπων σε αποτελέσματα χαμηλής αβεβαιότητας έναντι γεγονότων με υψηλή αβεβαιότητα. Δηλαδή εξηγεί την τάση των ανθρώπων να προτιμούν την πραγματοποίηση πιο «προβλέψιμων» ενδεχομένων πιθανώς με χαμηλότερη απόδοση, έναντι εξαιρετικά «απρόβλεπτων» ενδεχόμενων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ανάγκη των ατόμων για ασφάλιση των περιουσιακών τους στοιχείων έναντι κινδύνου που έχουν πολύ μικρή πιθανότητα να συμβούν, όπως για παράδειγμα η ασφάλιση ενός σπιτιού από το ενδεχόμενο πυρκαγιάς. Ο ασφαλιζόμενος προτιμά να πληρώσει ένα μικρό ποσό ετησίως σε ένα ασφάλιστρο από το να καλύψει τη ζημιά από τη φθορά του σπιτιού του σε περίπτωση πυρκαγιάς. Εφόσον πάντα για όλες τις συναρτήσεις ωφελιμότητας ισχύει $u'(x) > 0$ από την ιδιότητα 3 της ενότητας 3.1 προκύπτει ότι για να είναι συντηρητικό ένα άτομο η ποσότητα $r(x)$ είναι θετική εφόσον $u''(x) < 0$, ενώ από την άλλη λόγω της ιδιότητας 4 η ποσότητα $r(x)$ είναι αρνητική εφόσον $u''(x) > 0$ για ριψοκίνδυνα άτομα. (Hans, Gerber, Pafum, 2013)

Οι συναρτήσεις αποστροφής κινδύνου για τις συναρτήσεις ωφελιμότητας της παραγράφου 3.3 είναι οι εξής:

- Η εκθετική συνάρτηση έχει σταθερή συνάρτηση αποστροφής κινδύνου η οποία είναι ίση με:

$$r(x) = \beta$$

Πράγμα που σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά β τόσο περισσότερο το άτομο αποστρέφεται τον κίνδυνο.

- Η τετραγωνική συνάρτηση έχει συνάρτηση αποστροφής κινδύνου που δίνεται από τον τύπο:

$$r(x) = \frac{2\beta}{1 - 2\beta x}$$

- Η λογαριθμική συνάρτηση έχει συνάντηση αποστροφής κινδύνου

$$r(x) = \frac{1}{x}$$

Επομένως η συνάρτηση αποστροφής κινδύνου είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του πλούτου.

- Η συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \frac{x}{x+\beta}$ έχει συνάρτηση αποστροφής κινδύνου

$$r(x) = \frac{2}{x + b}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΤΟΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟ

Η θεωρία ωφελιμότητας και οι συναρτήσεις ωφελιμότητας βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στον σύγχρονο κόσμο. Βοηθούν τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων να κατηγοριοποιήσουν τις επιλογές τους λαμβάνοντας υπόψη κάθε δυνατή παράμετρο που επηρεάζει τις αποφάσεις τους. Η οικονομική και η αναλογιστική επιστήμη στηρίζονται άμεσα στις θεωρίες αυτές, οι οποίες αποτελούν βασικό εργαλείο στη λήψη οικονομικών και ασφαλιστικών αποφάσεων.

4.1 Εφαρμογή της θεωρίας ωφελιμότητας στις επενδύσεις

Όταν άτομα ή επιχειρήσεις προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τον πλούτο ή την αξία της επιχείρησής τους αντίστοιχα έρχονται αντιμέτωποι με επενδυτικές αποφάσεις. Τα άτομα επενδύουν κεφάλαιο σε μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια και επιχειρήσεις προκειμένου να λάβουν κέρδος ενώ οι επιχειρήσεις αντιμετωπίζουν τρία είδη αποφάσεων προκειμένου να αυξήσουν την αξία τους. Τις επενδυτικές αποφάσεις, τις αποφάσεις χρηματοδότησης και τις αποφάσεις μερίσματος. Κυρίαρχο ρόλο στις αποφάσεις αυτές διαδραματίζει η υπόθεση αναμενόμενης ωφελιμότητας. Ένα βασικό κριτήριο που βοηθά τους αποφασίζοντες για το αν και ποια επένδυση είναι προτιμότερο να ακολουθήσουν είναι το κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.2.2, σύμφωνα με το οποίο, όπως έχουμε ήδη πει, υπολογίζεται η αναμενόμενη ωφελιμότητα για κάθε πιθανό ενδεχόμενο και προτιμάται το ενδεχόμενο με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη τιμή. Επομένως αν οριστεί για κάθε αποφασίζοντα η συνάντηση ωφελιμότητας μέσω της οποίας προτιμά να λαμβάνει αποφάσεις, τότε το κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας απαντά στο ερώτημα ποια επένδυση είναι προτιμότερη. Παρακάτω παρουσιάζονται δύο παραδείγματα που εφαρμόζεται το κριτήριο σε επενδυτικές αποφάσεις για διαφορετικές συναρτήσεις ωφελιμότητας.

<u>Παράδειγμα πρώτο</u>

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής λαμβάνει αποφάσεις στηριζόμενος στη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -exp\{-0{,}002x\}$ και έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο επενδύσεις $EП_1$ και $EП_2$, οι αποδόσεις των οποίων ακολουθούν την κανονική κατανομή ως εξής. Οι αποδόσεις X_1 της επένδυσης $EП_1$ ακολουθούν την κανονική κατανομή με παραμέτρους $X_1 \sim N(10^4, 500^2)$, ενώ οι αποδόσεις X_2 της $EП_2$ προσδιορίζονται από τις παραμέτρους $X_2 \sim N(1{,}1 \times 10^4, 2000^2)$. Ποια από τις δύο επενδύσεις θα προτιμήσει ο επενδυτής;

<u>Απάντηση</u>

Για την επένδυση 1 ($EП_1$) η αναμενόμενη ωφελιμότητα είναι ίση με:

$E[u(w + X_1)] = -E[exp\{-0{,}002(w + X_1)\}]$

$= -exp\{-0{,}002w\}E[exp\{-0{,}002X_1\}]$

$= -exp\{-0{,}002w\}exp\left\{-0{,}002 \times 10^4 + \frac{1}{2}0{,}002^2 \times 500^2\right\}$

$= -exp\{-0{,}002w\}exp\{-19{,}5\}$

όπου η τρίτη γραμμή υπολογίζεται βάσει της τιμής της ροπογεννήτριας $M_{X_1}(-0{,}002)$. Υπενθυμίζεται ότι $M_{X_1} = exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$

Ομοίως υπολογίζεται ότι:

$$E[u(w + X_2)] = -exp\{-0{,}002w\}exp\{-14\}$$

Επομένως ο επενδυτής προτιμά την επένδυση 1 αφού ισχύει

$$E[u(w + X_1)] > E[u(w + X_2)]$$

(Dickson, 2016)

<u>Παράδειγμα δεύτερο</u>

Ένας επενδυτής λαμβάνει αποφάσεις σύμφωνα με τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \sqrt{x},\ x > 0$. Ο επενδυτής σκέφτεται να επενδύσει σε μετοχές και υποθέτει ότι μια επένδυση ενός ποσού A στη μετοχή i θα οδηγήσει στο ποσό AX_i μετά το πέρας ενός έτους. Η τυχαία μεταβλητή X_i ακολουθεί τη λογαριθμική κανονική κατανομή (lognormal distribution) με παραμέτρους μ_i και σ_i. Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής έχει να επιλέξει ανάμεσα στη Μετοχή 1 και στη Μετοχή 2.

i. Θα δείξουμε ότι η απόφαση για το αν θα επενδύσει στη Μετοχή 1 ή στη Μετοχή 2 είναι ανεξάρτητη του A.
ii. Αν υποθέσουμε ότι η Μετοχή 1 έχει παραμέτρους $\mu_1 = 0{,}09$ και $\sigma_1 = 0{,}02$ και η Μετοχή 2 έχει παράμετρο $\mu_2 = 0{,}08$. Ποιο είναι το εύρος των τιμών για την παράμετρο σ_2 ώστε επενδυτής να επιλέξει να επενδύσει στη Μετοχή 2;

<u>Απάντηση</u>

i. Σύμφωνα με το κριτήριο αναμενόμενης ωφελιμότητας ο επενδυτής θα προτιμήσει τη Μετοχή 2 από τη Μετοχή 1 αν και μόνο αν ισχύει

$$E[u(AX_2)] > E[u(AX_1)]$$

Όμως

$$E[u(AX_2)] = E\left[\sqrt{AX_2}\right] = \sqrt{A} \cdot E\left[\sqrt{X_2}\right]$$

Ομοίως ισχύει

$$E[u(AX_1)] = E\left[\sqrt{AX_1}\right] = \sqrt{A} \cdot E\left[\sqrt{X_1}\right]$$

Άρα

$$E[u(AX_2)] > E[u(AX_1)]$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{A} \cdot E\left[\sqrt{X_2}\right] > \sqrt{A} \cdot E\left[\sqrt{X_1}\right]$$
$$\Leftrightarrow E\left[\sqrt{X_2}\right] > E\left[\sqrt{X_1}\right]$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η λήψη της απόφασης εξαρτάται μόνο από την κατανομή των X_i και είναι ανεξάρτητη του A.

ii. Για τον προσδιορισμό του εύρους τιμών της παραμέτρου σ_2 είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\sqrt{X_i} = X_i^{1/2}$.

Ας υποθέσουμε ότι Z_i είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή, δηλαδή $Z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Η Z_i συνδέεται με την X_i μέσω της σχέσης $X_i = e^{Z_i}$. Η τυχαία μεταβλητή X_i είναι η δοσμένη μεταβλητή του προβλήματος και ακολουθεί την λογαριθμική κανονική κατανομή. Οι δύο κατανομές έχουν τις ίδιες παραμέτρους εξ ορισμού.

Ας ορίσουμε τώρα μια τυχαία μεταβλητή $Y_i = X_i^{1/2}$. Ποια είναι η κατανομή της Y_i και με τι παραμέτρους;

$$Y_i = X_i^{1/2} \Leftrightarrow \ln Y_i = \tfrac{1}{2}\ln X_i \Leftrightarrow \ln Y_i = \tfrac{1}{2}\ln e^{Z_i} \Leftrightarrow \ln Y_i = \tfrac{1}{2} Z_i$$

Δηλαδή η Y_i ακολουθεί την λογαριθμική κανονική κατανομή με παραμέτρους $\frac{1}{2}\mu_i$ και $\frac{1}{4}\sigma_i^2$.

Δηλαδή $Y_i \sim LN\left(\frac{1}{2}\mu_i, \frac{1}{4}\sigma_i^2\right)$.

Αν $Y_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$τότε η μέση τιμή της Y_i δίνεται από τον τύπο

$$E(Y_i) = exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\},$$

επομένως

$$E(Y_1) = exp\left\{\frac{1}{2} \cdot 0{,}09 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(0{,}02)^2}{2}\right\} = exp\{0{,}045 + 0{,}00005\} = exp\{0{,}04505\} =$$

$$= 1{,}04608$$

Και

$$E(Y_2) = exp\left\{\frac{1}{2} \cdot 0{,}08 + \frac{1}{4}\frac{\sigma_2^2}{2}\right\} = exp\left\{0{,}04 + \frac{\sigma_2^2}{8}\right\}.$$

Όπως αναφέραμε στο πρώτο ερώτημα ο επενδυτής θα προτιμήσει την Μετοχή 2 από την Μετοχή 1 αν και μόνο αν ισχύει:

$$E(Y_2) > E(Y_1) \Leftrightarrow exp\left\{0{,}04 + \frac{\sigma_2^2}{8}\right\} > 1{,}04608 \Leftrightarrow 0{,}04 + \frac{\sigma_2^2}{8} > \ln 1{,}04608$$

$$\Leftrightarrow 0{,}04 + \frac{\sigma_2^2}{8} > 0{,}04505 \Leftrightarrow \frac{\sigma_2^2}{8} > 0{,}00505 \Leftrightarrow \sigma_2^2 > 0{,}0404$$

(Dickson, 2016)

Το κριτήριο που προκύπτει από το ερώτημα i του προηγούμενου παραδείγματος βοηθάει τον επενδυτή να ιεραρχήσει τις επενδυτικές του επιλογές, παρόλα αυτά δεν δίνει καμία πληροφορία για το κατά πόσο επενδυτής είναι πρόθυμος να πάρει ρίσκα στις επενδύσεις του ή όχι. Ένα μέτρο που λαμβάνει υπόψη του την αποστροφή του επενδυτή απέναντι στον κίνδυνο είναι, όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3, η συνάρτηση αποστροφής κινδύνου.

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Οι Pratt (1964) και Arrow (1971) όρισαν τους συντελεστές αποστροφής κινδύνου (risk aversion coefficients) βασισμένοι στις παραπάνω συναρτήσεις και ομαδοποίησαν τους επενδυτές σε τρεις κατηγορίες ως εξής.

Ένα άτομο ονομάζεται:

- Risk Averter (Κινδυνόφοβος, άτομο που αποφεύγει τον κίνδυνο) όταν $r(x) > 0$
- Risk Neutral (Κινδυνοουδέτερος, άτομο ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο) όταν $r(x) = 0$
- Risk Seeker (Κινδυνόφιλος, άτομο που αγαπά τον κίνδυνο) όταν $r(x) < 0$

Ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου δείχνει την προτίμηση που θα έχει ένας επενδυτής ανάμεσα σε δύο επιλογές με την ίδια αναμενόμενη αξία. Για παράδειγμα έστω ότι ένας επενδυτής έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο επενδύσεις, Α και Β. Για την επένδυση Α η αναμενόμενη απόδοση είναι 2.000 € με πιθανότητα 50% να συμβεί και 2.500€ με πιθανότητα 50% να συμβεί. Ενώ στην επένδυση Β η απόδοση είναι σταθερή και ίση με 2250 € με πιθανότητα 100% να συμβεί. Ένα άτομο που αποστρέφεται τον κίνδυνο θα προτιμήσει την επένδυση Β. Θα βασιστεί σε μια συνάρτηση ωφελιμότητας όπως στη λογαριθμική και την τετραγωνική που όπως έχουμε ήδη πει είναι κοίλες. Αν το άτομο είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο δεν θα έχει προτίμηση ως προς τις δύο επενδύσεις ενώ αν είναι άτομο προτιμά τον κίνδυνο να επιλέξει την επένδυση Α.

Τείνουμε να πιστεύουμε ότι ένα άτομο που αποφεύγει τον κίνδυνο είναι πάντα ορθολογικό ενώ ένα άτομο που προτιμά τον κίνδυνο δεν είναι. Παρ όλα αυτά οι Kahneman και Tversky το 1979 απέδειξαν ότι όταν ένας επενδυτής αντιμετωπίζει ζημίες τότε το να προτιμά τον κίνδυνο είναι ορθολογικό. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα. Όταν ένα άτομο αντιμετωπίζει την επιλογή Α να κερδίσει 100 €

ή την επιλογή Β να κερδίσει 1000 € με πιθανότητα 0,1 και τίποτα με πιθανότητα 0,9 τότε φαίνεται λογικό να επιλέξει την επιλογή Α. Όταν όμως αντιμετωπίζει την επιλογή του να χάσει 100 € ή του να χάσει 1000 € με πιθανότητα 0,1 ή του να μην χάσει τίποτα με πιθανότητα 0,9 τότε φαίνεται λογικό να προτιμήσει τη επιλογή Β. (Johnson, 2007)

4.2 Εφαρμογή της θεωρίας ωφελιμότητας στο εταιρικό marketing

Οι δραστηριότητες marketing είναι ο θεμελιώδης τρόπος των επιχειρήσεων να μεγιστοποιούν την αξία (value) που προσθέτουν στην αγορά μέσω της παροχής των προϊόντων και των υπηρεσιών τους. Βοηθούν τις επιχειρήσεις να εκπληρώσουν τους οικονομικούς στόχους που προσδοκούν να αποκομίσουν μέσα από τη δημιουργία νέων προϊόντων. Η αποτελεσματικότητα του marketing επηρεάζει άμεσα την επιβίωση και την ανάπτυξη των σύγχρονων επιχειρήσεων. Οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων για δραστηριότητες εταιρικού marketing συχνά αντιμετωπίζουν προβλήματα αβεβαιότητας καθώς το περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιούνται μεταβάλλεται συνεχώς. Οι μεταβολές στις προτιμήσεις του καταναλωτή, οι διακυμάνσεις της προσφοράς και της ζήτησης στην αγορά, η πολυπλοκότητα της συμπεριφοράς των ανταγωνιστών και άλλοι τέτοιοι παράγοντες δυσχεραίνουν το έργο των υπευθύνων και εμποδίζουν τις δραστηριότητες marketing των επιχειρήσεων. Συνεπώς η κατανόηση και η ποσοτικοποίηση αυτών των κινδύνων είναι ζωτικής σημασίας για τις επιχειρήσεις.

Γύρω στις αρχές της δεκαετίας του 1960 ορισμένοι μελετητές του marketing άρχισαν να μελετούν τους παραπάνω κινδύνους. Ο Mark R. Greene το 1969 χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον όρο «κίνδυνοι marketing» (marketing risks) στο άρθρο του με τίτλο «Πώς να εξορθολογήσετε τη διαχείριση των κινδύνων marketing» (How to rationalize management of marketing risks) επισημαίνοντας τους κινδύνους που μπορεί να έρθουν αντιμέτωποι οι υπεύθυνοι δραστηριοτήτων marketing και πως αυτές μπορούν να οδηγήσουν στη μείωση εταιρικών κερδών ή στην πρόκληση οικονομικών ζημιών. Σύντομα έγινε προτεραιότητα τόσο ακαδημαϊκών ερευνητών όσο και στελεχών της αγοράς ο πλήρης προσδιορισμός των κινδύνων marketing και αποτελεσματικός χειρισμός τους.

Όπως γίνεται φανερό οι παραδοσιακές τεχνικές λήψης αποφάσεων αδυνατούν να περιγράψουν αυτούς τους κινδύνους. Οι αποφάσεις marketing είναι σε μεγάλο βαθμό υποκειμενικές καθώς διαφορετικοί άνθρωποι μπορεί να κάνουν διαφορετικές επιλογές ακόμη και να αντιμετωπίζουν τους ίδιους κινδύνους μέσα σε κοινό περιβάλλον. Λύση στα προβλήματα αυτά δίνουν συναρτήσεις ωφελιμότητας, μέσω των οποίων μπορούν να εκτιμηθούν οι κίνδυνοι αυτοί και να κατηγοριοποιηθούν οι επιλογές ενός των υπευθύνων λήψης αποφάσεων marketing. Οι συναρτήσεις ωφελιμότητας σε πρώτη φάση επιλέγονται με κριτήριο την στάση που κρατά ένας υπεύθυνος λήψης αποφάσεων απέναντι στους εξωτερικούς κινδύνους ανάλογα με την κατηγορία αποστροφής κινδύνου στην οποία ανήκει (Risk Averter, Risk Neutral, Risk Lover). Η στάση αυτή είναι αποτέλεσμα προσωπικών επιλογών και των υλικών προσδοκιών. Στη συνέχεια ο ακριβής προσδιορισμός της συνάρτησης ωφελιμότητας για ένα δεδομένο κίνδυνο είναι αποτέλεσμα ενός συνόλου χαρακτηριστικών του λήπτη αποφάσεων όπως η προσωπικότητα, το ταλέντο, το επίπεδο εκπαίδευσης, η γνώση του στο αντικείμενο που μελετά και η εμπειρία του. Αφού προσδιοριστούν οι συναρτήσεις ωφελιμότητας για κάθε δεδομένο κίνδυνο ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων είναι σε θέση να κατηγοριοποιήσει τις επιλογές του και να λάβει αποφάσεις. (Shi, Wang, 2018)

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα όπου η εφαρμογή της συνάρτησης ωφελιμότητας επηρεάζει μια απόφαση marketing σε σύγκριση με την περίπτωση όπου η λήψη της απόφασης θα ήταν αποτέλεσμα του κριτηρίου της αναμενόμενης τιμής.

Παράδειγμα

Έστω ότι μια εταιρεία σχεδιάζει δύο πλάνα marketing για τα νέα της προϊόντα. Ας τα ονομάσουμε πλάνο 1 (Π_1) και πλάνο 2 (Π_2). Τα κέρδη που εκτιμά ότι θα έχει για κάθε πλάνο παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες:

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.1

Αναμενόμενα κέρδη του πλάνου marketing Π_1

Κέρδος €	5.000	2.500	0	-500
Πιθανότητα	0,15	0,10	0,65	0,10

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.2

Αναμενόμενα κέρδη του πλάνου marketing Π_2

Κέρδος €	10.000	5.000	-500	-800
Πιθανότητα	0,05	0,20	0,35	0,40

Με βάση το κριτήριο της αναμενόμενης τιμής το αναμενόμενο κέρδος από την εφαρμογή του πλάνου 1 είναι:

$$E(\Pi_1) = 5.000 \cdot 0{,}05 + 2.500 \cdot 0{,}10 + 0 \cdot 0{,}65 + (-500) \cdot 0{,}10 = 950€$$

Ενώ το αναμενόμενο κέρδος από την εφαρμογή του πλάνου 2 είναι:

$$E(\Pi_2) = 10.000 \cdot 0{,}05 + 5.000 \cdot 0{,}20 + (-500) \cdot 0{,}35 + (-800) \cdot 0{,}40 = 1.005€$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο της αναμενόμενης τιμής προτιμότερο είναι η εταιρεία να πραγματοποιήσει το πλάνο marketing Π_2.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εταιρεία μελετά τα πλάνα marketing στηριζόμενη σε μια συνάρτηση ωφελιμότητας που αντικατοπτρίζει αποτελεσματικά όλους τους παράγοντες που αναφέρονται παραπάνω. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές της συνάρτησης ωφελιμότητας για κάθε προσδοκώμενο κέρδος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.3

Παρουσίαση τιμών ωφελιμότητας για κάθε σενάριο κερδών

Κέρδος €	10.000	5.000	2.500	0	-500	-800
Τιμή ωφελιμότητας	1	0,75	0,40	0,15	0,10	0
Πιθανότητα Π_1	0	0,15	0,10	0,65	0,10	0
Πιθανότητα Π_2	0,05	0,20	0	0	0,35	0,40

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα για το πλάνο Π_1 είναι ίση με:

$$U(\Pi_1) = u(5.000)\cdot 0{,}15 + u(2.500)\cdot 0{,}10 + u(0)\cdot 0{,}65 + u(-500)\cdot 0{,}1 =$$

$$= 0{,}75\cdot 0{,}15 + 0{,}40\cdot 0{,}10 + 0{,}15\cdot 0{,}65 + 0{,}10\cdot 0{,}10 = 0{,}26$$

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα για το πλάνο Π_2 είναι ίση με:

$$U(\Pi_2) = u(10.000)\cdot 0{,}05 + u(5.000)\cdot 0{,}2 + u(-500)\cdot 0{,}35 + u(-800)\cdot 0{,}40 =$$

$$= 1\cdot 0{,}05 + 0{,}75\cdot 0{,}2 + 0{,}10\cdot 0{,}35 + 0\cdot 0{,}4 = 0{,}235$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο της αναμενόμενης ωφελιμότητας το πλάνο Π_1 είναι προτιμότερο από το πλάνο Π_2. (Shi, Wang,2018)

Το κριτήριο της αναμενόμενης τιμής δείχνει αντικειμενικό. Θεωρητικά θα έπρεπε όλοι οι λήπτες αποφάσεων να συμφωνούν στην πραγματοποίηση του πλάνου Π_2. Πρακτικά η υποκειμενικότητα στη λήψη αποφάσεων marketing είναι αναπόφευκτη με αποτέλεσμα η θεωρία ωφελιμότητας να αποτελεί μονόδρομο στη μοντελοποίηση πρακτικών προβλημάτων.

4.3 Εφαρμογή των συναρτήσεων ωφελιμότητας στον υπολογισμό ασφαλίστρων

Έχουμε ξανά αναφέρει την ανάγκη των ανθρώπων για ασφάλιση. Σε αυτή τη διαδικασία τα άτομα ενώ γνωρίζουν ότι ενδεχόμενα όπως ζητήματα υγείας και γεγονότα καταστροφής της περιουσίας τους έχουν μικρή πιθανότητα να συμβούν, επιλέγουν να προστατευτούν από αυτά μεταφέροντας το ρίσκο στις ασφαλιστικές εταιρείες. Οι εταιρείες αυτές αναλαμβάνουν να καλύψουν μέρος ή το σύνολο των οικονομικών επιβαρύνσεων τέτοιων καταστάσεων όταν αυτές πραγματοποιηθούν. Ο ασφαλιζόμενος αναλαμβάνει να πληρώνει στην ασφαλιστική εταιρεία ένα ποσό συστηματικά για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (συνήθως ανά έτος). Το ποσό αυτό ονομάζεται ασφάλιστρο. Πώς όμως οι ασφαλιστικές εταιρείες υπολογίζουν ποιο θα είναι το ασφάλιστρο για κάθε δεδομένο κίνδυνο; Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πως γίνεται υπολογισμός τους από μαθηματική άποψη και πως οι συναρτήσεις ωφελιμότητας χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό. Στην πράξη οι ασφαλιστικές λαμβάνουν υπόψη όχι μόνο τα χαρακτηριστικά των κινδύνων που ασφαλίζουν, αλλά επίσης ένα σύνολο άλλων παραγόντων όπως τα ασφάλιστρα που χρεώνουν οι ανταγωνιστές τους. Για χάρη απλούστευσης της εφαρμογής δεν θα λάβουμε υπόψη μας τέτοιους παράγοντες.

4.3.1 Ιδιότητες ασφαλίστρων

Το ασφάλιστρο συμβολίζεται συνήθως με Π_X για έναν δεδομένο κίνδυνο X. Όταν αναφερόμαστε σε ένα κίνδυνο X, αυτό που εννοούμε είναι ότι οι αξιώσεις από αυτόν τον κίνδυνο περιγράφονται από μια τυχαία μεταβλητή X. Το ασφάλιστρο προφανώς είναι μια συνάρτηση του X. Το ασφάλιστρο πρέπει να πληροί ορισμένες ιδιότητες ώστε να είναι επιθυμητό για την εταιρεία και προσιτό προς τον ασφαλιζόμενο. Παρακάτω αναφέρονται ενδεικτικά ορισμένες από αυτές χωρίς να είναι οι μοναδικές επιθυμητές ιδιότητες:

1) Μη αρνητική επιβάρυνση (Non negative loading):Η ιδιότητα αυτή απαιτεί το ασφάλιστρο να είναι μεγαλύτερο από τις αναμενόμενες απαιτήσεις. Δηλαδή $\Pi_X \geq E(X)$. Σε αντίθετη περίπτωση η ασφαλιστική εταιρία έρχεται αντιμέτωπη με το ενδεχόμενο να μην έχει κέρδος από την κάλυψη του κινδύνου X και αντιμετωπίζει μεγάλη πιθανότητα χρεοκοπίας.
2) Προσθετικότητα (Additivity): Η ιδιότητα αυτή απαιτεί όταν υπάρχουν X_1, X_2 δύο ανεξάρτητοι κίνδυνοι και υπάρχει ένα ασφάλιστρο που καλύπτει συνδυαστικά και τους δύο κινδύνους $\Pi_{X_1+X_2}$,τότε θα πρέπει το ασφάλιστρο αυτό να είναι ίσο με το ποσό των δύο ασφαλίστρων που θα κάλυπταν τον κάθε κίνδυνο ξεχωριστά Π_{X_1}, Π_{X_2}. Δηλαδή πρέπει να ισχύει $\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει ότι καμία από τις δύο πλευρές (ούτε η ασφαλιστική ούτε ο ασφαλιζόμενος) επωφελούνται από το συνδυασμό ή διαχωρισμό των ασφαλίστρων για διαφορετικούς κινδύνους.
3) Αμετάβλητη κλίμακα (Scale invariance): Η ιδιότητα απαιτεί όταν $Z = aX, \quad a > 0$ τότε και τα ασφάλιστρα να μεταβάλλονται ανάλογα δηλαδή $\Pi_Z = \alpha \Pi_X$. Για παράδειγμα αν στη Μεγάλη Βρετανία αλλάξει το νόμισμα από στερλίνα σε ευρώ και μια στερλίνα αντιστοιχεί σε α ευρώ. Τότε το ασφάλιστρο που υπολογίζεται σε 100 στερλίνες θα μεταβληθεί σε 100α €.
4) Συνέπεια (Consistency): Αν η κατανομή Y ενός κινδύνου είναι ίση με $Y = X + c$ όπου X μια κατανομή ενός κινδύνου και c θετική σταθερά τότε θα πρέπει να ισχύει $\Pi_Y = \Pi_X + c$. Δηλαδή αν η κατανομή μετατοπίστηκε κατά c μονάδες, τότε c μονάδες θα πρέπει να αυξηθεί και το ασφάλιστρο.
5) «Χωρίς κλεψιά» (No rip-off): Αν υπάρχει ένα πεπερασμένο μέγιστο ποσό X_n για έναν κίνδυνο X, δηλαδή δεν μπορεί ο κίνδυνος να προκαλέσει ζημία μεγαλύτερη από αυτό το ποσό, τότε θα πρέπει το ασφάλιστρο να παίρνει μια

τιμή $\Pi_X \leq X_n$. Σε αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει κίνητρο για τον ασφαλιζόμενο να συμφωνήσει στη τιμή του ασφαλίστρου.

(Dickson, 2016)

4.3.2 Υπολογισμός ασφαλίστρων με τη μέθοδο της αρχής της μηδενικής ωφελιμότητας

Ένας τρόπος υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι το να στηριχθεί ο ασφαλιστής στην αρχή μηδενικής ωφελιμότητας (Principle of zero utility). Για την εφαρμογή της αρχής ο ασφαλιστής πρέπει να ορίσει μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w)$ όπου w ο πλούτος του ασφαλιστή. Ας υποθέσουμε ότι αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί τις επιθυμητές ιδιότητες μιας συνάρτησης ωφελιμότητας δηλαδή ισχύουν ότι $u'(w) > 0$ και $u''(w) < 0$. Τότε η αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας ορίζει ότι πρέπει να ισχύει:

$$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)],$$

όπου X η τυχαία μεταβλητή ενός κινδύνου και Π_X το ασφάλιστρο για αυτό τον κίνδυνο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση το ασφάλιστρο εξαρτάται άμεσα από τον πλούτο του ασφαλιστή. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση όπου η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι η εκθετική $u(x) = -exp\{-\beta x\}$, $\beta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση το ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)]$$

$$\Leftrightarrow\ -e^{-\beta w} = E\left[-e^{-\beta w - \beta \Pi_X + \beta X}\right]$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\beta w} = -e^{-\beta w} e^{-\beta \Pi_X} E\left[e^{\beta x}\right]$$

$$\Leftrightarrow e^{\beta \Pi_X} = E\left[e^{\beta x}\right]$$

$$\Leftrightarrow \beta \Pi_X = \ln E\left[e^{\beta x}\right]$$

$$\Leftrightarrow \Pi_X = \beta^{-1} \ln E\left[e^{\beta x}\right].$$

Η αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας υπακούει στην ιδιότητα της μη αρνητικής επιβάρυνσης αφού:

$$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \leq u(w + \Pi_X - X)$$

Η ανισότητα είναι άμεση εφαρμογή της ανισότητας Jensen.

Επιπλέον αφού η u είναι αύξουσα, από την παραπάνω ανίσωση προκύπτει ότι:

$$w \leq w + \Pi_X - E(X)$$

Δηλαδή

$$\Pi_X \geq E(X).$$

Επίσης η παραπάνω αρχή υπακούει και στην ιδιότητα της συνέπειας αφού:

Αν $Y = X + c$, τότε

$$u(w) = E[u(w + \Pi_Y - Y)] = E[u(w + \Pi_Y - X - c)]$$

Άρα

$$\Pi_Y - c = \Pi_X \Leftrightarrow \Pi_Y = \Pi_X + c.$$

Τέλος η αρχή μηδενικής ωφελιμότητας ικανοποιεί την ιδιότητα της «μη κλεψιάς» Δεδομένου ότι

$$w + \Pi_X - X \geq w + \Pi_X - X_n,$$

εφαρμόζοντας την αρχή έχουμε:

$$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \geq E[u(w + \Pi_X - X_n)] = u(w + \Pi_X - X_n)$$

Λόγω πάλι του γεγονότος ότι η u είναι αύξουσα, έχουμε

$$w \geq w + \Pi_X - X_n \Leftrightarrow \Pi_X - X_n \leq 0 \Leftrightarrow \Pi_X \leq X_n$$

Από την άλλη πλευρά η αρχή δεν υπακούει στις ιδιότητες της προσθετικότητας και της αμετάβλητης κλίμακας. (Dickson, 2016)

<u>Πρώτο παράδειγμα υπολογισμού ασφαλίστρου βασισμένο στην αρχή της γενικής ωφελιμότητας</u>

Έστω ότι ένας ασφαλιστής χρησιμοποιεί τη λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = \ln w$ για τον υπολογισμό των ασφαλίστρων και ο πλούτος του υπολογίζεται σε 1.000.000€. Ποιο θα είναι το ασφάλιστρο για την κάλυψη ενός κινδύνου πιθανής ζημίας 10.000€ με πιθανότητα να συμβεί $p = 0{,}1$;

<u>Απάντηση</u>

$$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(1.000.000) = 0{,}9 \ln(1.000.000 + \Pi_X) + 0{,}1 \ln(1.000.000 + \Pi_X - 10.000)$$

Το οποίο δίνει αποτέλεσμα ένα ασφάλιστρο περίπου ίσο με $\Pi_X \cong 1.004{,}52$€.

(Johnson, 2007)

<u>Δεύτερο παράδειγμα υπολογισμού ασφαλίστρου βασισμένο στην αρχή της γενικής ωφελιμότητας</u>

Ζητήθηκε από έναν ασφαλιστή να παράσχει ασφαλιστική κάλυψη έναντι μιας τυχαίας απώλειας X, όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $X \sim N(10^6, 10^8)$. Εάν ο ασφαλιστής λαμβάνει αποφάσεις σύμφωνα με τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -exp\{-0.002x\}$, ποιο είναι το ασφάλιστρο που ασφαλιστής θα δεχόταν να ασφαλίσει τον παραπάνω κίνδυνο;

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει όταν ένας ασφαλιστής λαμβάνει αποφάσεις σύμφωνα με μια εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας της μορφής $u(x) = -exp\{-\beta x\},\ \beta > 0$, τότε το ασφάλιστρο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi_X = \beta^{-1} \ln E\left[e^{\beta x}\right] \quad (1)$$

Το βασικό ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής του παραπάνω τύπου.

Αρχικά παρατηρούμε ότι όταν η $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η τυχαία μεταβλητή βX ακολουθεί επίσης την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\beta\mu$ και $\beta^2\sigma^2$ δηλαδή $\beta X \sim N(\beta\mu, \beta^2\sigma^2)$.

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την άμεση εφαρμογή των βασικών ιδιοτήτων της μέσης τιμής και της διακύμανσης.

$$E(\beta X + c) = \beta E(X) + c,\ Var(\beta X + c) = \beta^2 (VarX)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη τυχαία μεταβλητή $Y = exp\{\beta X\}$. Η Y ακολουθεί τη λογαριθμική κανονική κατανομή (lognormal distribution) με παραμέτρους $\beta\mu$ και $\beta^2\sigma^2$ δηλαδή $Y \sim LN(\beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. (Dickson, 2016)

Η μέση τιμή της Y δίνεται από τον τύπο

$$E(Y) = exp\left\{\beta\mu + \frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\right\},$$

δηλαδή

$$E(Y) = exp\left\{0{,}002 \cdot 10^6 + \frac{1}{2} \cdot (0{,}002)^2 \cdot 10^8\right\} = exp\left\{2.000 + \frac{1}{2} 400\right\} = exp\{2.200\}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω τιμή στον τύπο (1) προκύπτει ότι:

$$\Pi_X = 0{,}002^{-1} \ln(exp\{2.200\}) = 0{,}002^{-1} \cdot 2.200 = 1.100.000,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο ασφάλιστρο.

Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ερμηνεύσει το γεγονός ότι η αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας δεν υπακούει στην ιδιότητα της αμετάβλητης κλίμακας.

Ας θεωρήσουμε ξανά τις τυχαίες μεταβλητές X και Y όπως ορίστηκαν στο παραπάνω παράδειγμα. Τότε το ασφάλιστρο υπολογίστηκε από τον τύπο

$$\Pi_X = \beta^{-1} \ln E\left[e^{\beta x}\right] = \mu + \frac{1}{2}\beta\sigma^2,$$

όπου $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $\beta X \sim N(\beta\mu, \beta^2\sigma^2)$.

Αν θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή

$$Z = \alpha X,$$

θα ακολουθεί επίσης την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\alpha\mu$ και $\alpha^2\sigma^2$, τότε

$$\Pi_Z = \alpha\mu + \alpha^2 \frac{1}{2}\beta\sigma^2 \neq \alpha\Pi_X.$$

Επομένως η ιδιότητα της αμετάβλητης κλίμακας δεν ικανοποιείται.

4.4 Έτος ζωής προσαρμοσμένο στην ποιότητα QALY (quality adjusted life year)

Το QALY (quality adjusted life year) αρχικά αναπτύχθηκε ως ένα μέτρο που χρησιμοποιείται στην οικονομική αξιολόγηση των ιατρικών παρεμβάσεων. Δηλαδή προορίζεται να βοηθήσει τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων, που είναι επιφορτισμένοι με την κατανομή σπάνιων πόρων σε ανταγωνιστικά προγράμματα υγειονομικής περίθαλψης. Χρησιμοποιείται επίσης για την ενημέρωση τον καθορισμών κάλυψης ασφαλιστικής υγείας. Τέλος, αν και δεν αναπτύχθηκε για να βοηθήσει στη λήψη αποφάσεων μεμονωμένων ασθενών, παρόλα αυτά η χρησιμότητά του σήμερα έχει επεκταθεί σε αναλύσεις κλινικών αποφάσεων.

Το QALY είναι ένα μέτρο της αξίας των αποτελεσμάτων υγείας για τους ανθρώπους που τα βιώνουν. Συνδυάζει δύο διαφορετικά οφέλη της θεραπείας. Την αναμενόμενη διάρκεια ζωής καθώς και την ποιότητά της. Επομένως για τον υπολογισμό του χρειάζεται να υπολογιστούν δύο παράμετροι. Ένας που να αφορά την ποιότητα της υγείας ενός ατόμου και ένας που να αφορά το χρόνο επιβίωσης κάτω από μια συγκεκριμένη κατάσταση υγείας. Για τον υπολογισμό της πρώτης παραμέτρου εκχωρείται μια συνάρτηση ωφελιμότητας, ο ορισμός της οποίας προέρχεται από κλινικές δοκιμές και μελέτες που μελετούν το πώς αισθάνονται οι άνθρωποι κάτω από συγκεκριμένες καταστάσεις υγείας. Η δεύτερη παράμετρος προσδιορίζεται από πληροφορίες που προέρχονται συνήθως από κλινικές δοκιμές και μελετά το χρόνο που οι άνθρωποι ζουν κάτω από συγκεκριμένες καταστάσεις υγείας. Ο τελικός υπολογισμός ενός QALY προσδιορίζεται από τον πολλαπλασιασμό των δύο παραπάνω μέτρων.

(Weinstein, Torrance, McGuire, 2009)

Για παράδειγμα όταν ένα άτομο απολαμβάνει ένα έτος τέλειας υγείας (άρα στην παράμετρο της ποιότητας ζωής ισοδυναμεί η τιμή ωφελιμότητας 1), αυτό μεταφράζεται σε ένα QALY. Στον θάνατο εκχωρείται η τιμή μηδέν στην παράμετρο της ποιότητας ζωής οπότε το αποτέλεσμα είναι μηδέν QALY. Γενικά ανάλογα με την ποιότητα της υγείας του ατόμου ο αριθμός των QALY περιορίζεται ανάμεσα στις δύο τιμές (0 και 1). Κάτω από εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να συγκεντρωθούν αρνητικά QALY για ένα άτομο. Οι συγκεκριμένες τιμές αφορούν καταστάσεις υγείας που θεωρούνται «χειρότερες από τον θάνατο». Η άμεση σύνδεση του χρόνου ζωής ενός ατόμου και της ποιότητας ζωής του που είναι το βασικό χαρακτηριστικό των QALYs είναι ταυτόχρονα και το πιο αμφιλεγόμενο. Για παράδειγμα έστω ένα άτομο ζει σε μια κατάσταση όπου η συνάρτηση ωφελιμότητας της υγείας του του αποδίδει χρησιμότητα 0,5 για ένα έτος. Το άτομο αυτό συγκεντρώνει $0{,}5\, utility \times 1\, έτος = 0{,}5\, QALY$. Τον ίδιο αριθμό συγκεντρώνει ένα άτομο που ζει μισό έτος με τέλεια υγεία αφού $0{,}5\, έτη\ \times 1\, utility = 0{,}5\, QALY$. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί κύριο πυλώνα για την αξιολόγηση διαφορετικών τύπων θεραπειών για τους υποστηρικτές του μέτρου αλλά δυσανασχετεί τους επικριτές του.

Ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται η συνάρτηση ωφελιμότητας καθώς και οι τιμές της κατά τον υπολογισμό των QALYs είναι ο εξής. Δίνεται στο άτομο ένα ερωτηματολόγιο που μετρά την προθυμία του να ανταλλάξει χρόνο με διαφορετικές καταστάσεις υγείας. Οι γενικές μέθοδοι που μετρούν αυτή την ποσότητα είναι η παρακάτω:

1) Ανταλλαγή χρόνου (Time trade-off, TTO): Κατά την οποία ζητείται από τους ερωτηθέντες να επιλέξουν μεταξύ της παραμονής τους σε κατάσταση κακής υγείας για ένα χρονικό διάστημα ή της αποκατάστασης σε τέλεια υγεία αλλά με μικρότερο προσδόκιμο ζωής.
2) Οπτική αναλογική κλίμακα (Standard gamble, SG): Ζητείται από τους ερωτηθέντες να επιλέξουν μεταξύ παραμονής σε κατάσταση κακής υγείας για ένα χρονικό διάστημα ή επιλογής ιατρικής παρέμβασης που έχει την πιθανότητα είτε να τους αποκαταστήσει είτε να τους σκοτώσει.
3) Οπτική αναλογική κλίμακα (Visual analogue scale, VAS): Οι ερωτηθέντες καλούνται να βαθμολογήσουν μια κατάσταση κακής υγείας σε μια κλίμακα από το 0 έως το 100 με το μηδέν αντιπροσωπεύει τον θάνατο και το 100 αντιπροσωπεύει την τέλεια υγεία. Αυτή η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πιο εύκολη στην ερώτηση αλλά πιο υποκειμενική.

(Wikipedia: Quality adjusted life year)

Αφού προσδιοριστούν οι τιμές της ωφελιμότητας για το κάθε άτομο άρα και οι τιμές του QALY μπορεί να γίνει ανάλυση από τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων και να εκτιμηθεί το κόστος ανά QALY για κάθε παρέμβαση υγειονομικής περίθαλψης. Στόχος των υπευθύνων είναι η βελτίωση της υγείας (μεγιστοποίηση της υγείας) σε ολόκληρο τον πληθυσμό παρά τη συνθήκη των πεπερασμένων πόρων.

Οι υποστηρικτές του μέτρου θεωρούν ότι παρά τις ελλείψεις του το QALY αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την ποσοτικοποίηση του κόστους θεραπειών σε σχέση με την ποιότητα ζωής του ασθενή και τη δίκαιη κατανομή των πόρων στο σύνολο της κοινωνίας. Εθνικές υπηρεσίες υγείας και ινστιτούτα υγείας πολλών κρατών χρησιμοποιούν το σύστημα αυτό για να συγκρίνουν διαφορετικούς ανθρώπους με διαφορετικούς τύπους θεραπειών και να πάρουν αποφάσεις υγειονομικής περίθαλψης. Οι επικριτές του μέτρου από την άλλη παραθέτουν μια σειρά από ενστάσεις για την αποτελεσματικότητά του καθώς θεωρούν ότι υπεραπλουστεύει τον τρόπο με τον οποίο πραγματικός ασθενής θα αξιολογήσει τους κινδύνους των θεραπειών του. Οι κύριες αντιρρήσεις τους είναι οι εξής:

- Η τέλεια υγεία είναι εξαιρετικά δύσκολο έως αδύνατο να προσδιοριστεί συνεπώς το ίδιο το μέτρο είναι κακώς ορισμένο.
- Ο προσδιορισμός του QALY δίνει δυσανάλογη σημασία στις σωματικές ασθένειες έναντι των ψυχικών ασθενειών.
- Οι ηλικιωμένοι και όσοι άλλοι έχουν χαμηλότερο προσδόκιμο ζωής συμπληρώνουν λιγότερα QALY από τους νέους. Άρα ανάμεσα σε ένα νέο και σε ένα ηλικιωμένο με την ίδια κατάσταση υγείας, ο νέος έχει προτεραιότητα στη θεραπεία.
- Ασθενείς όπως τετραπληγικοί, ασθενείς με σκλήρυνση κατά πλάκας ή άλλες αναπηρίες συγκεντρώνουν λιγότερα QALY επειδή δεν μπορούν να πετύχουν πλήρη υγεία με κανένα είδος θεραπείας.
- Το σύστημα QALY περιορίζει την έρευνα για νέες θεραπείες για σπάνιες διαταραχές καθώς το αρχικό κόστος των ερευνών είναι ασύγκριτα υψηλό.

(Wikipedia: Quality adjusted life year)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΟΞΟΥ ΤΗΣ ΑΓΙΑΣ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ

Τριακόσια χρόνια μετά την αρχική διατύπωση του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης, εξακολουθεί να αποτελεί αντικείμενο μελέτης από τους σύγχρονους μαθηματικούς και οικονομολόγους. Παρότι η ιδέα της αναμενόμενης ωφελιμότητας έχει ευρέως διαδοθεί και έχει τεράστιες εφαρμογές, οι λύσεις του παραδόξου εξακολουθούν να είναι υπό συζήτηση. Παρακάτω θα γίνει μια ανασκόπηση των ιδεών και των λύσεων που προτείνουν σύγχρονοι μελετητές του παραδόξου.

5.1 Κάποιες λύσεις που συζητήθηκαν τον 20ο αιώνα

5.1.1 Η αποστροφή ρίσκου λύνει το παράδοξο

Το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης προσφέρει τη δυνατότητα για τεράστια έπαθλα. Μόλις μετά από 20 ρίψεις, αν εμφανιστεί κεφαλή σε όλες, το κέρδος υπερβαίνει το 1.000.000€. Φυσικά αυτό συμβαίνει σπάνια. Τις μισές φορές το παιχνίδι σταματά στη πρώτη ρίψη, επομένως ο παίκτης κερδίζει μόλις 2€. Επίσης υπάρχει πιθανότητα 75% το παιχνίδι να τελειώσει το πολύ στις πρώτες δύο ρίψεις, δηλαδή ο παίκτης να κερδίσει 4€ ή λιγότερο. Η πιθανότητα να λάβει ένας παίκτης περισσότερα από 25€ είναι μικρότερες από μία στις 25. Οι πολύ μικρές πληρωμές είναι πολύ πιθανές, οι πολύ υψηλές πολύ σπάνιες. Φαίνεται να είναι ανόητο ρίσκο να επενδύσει κανείς πάνω από 5€ για να παίξει το παιχνίδι. Πολλοί από εμάς απέχουμε από το ρίσκο και δεν θέλουμε να στοιχηματίσουμε για μια πολύ μικρή πιθανότητα να αποκτήσουμε ένα πολύ μεγάλο έπαθλο. Ο Weirich το 1984 ισχυρίστηκε ότι αυτό το είδος σκέψης στην πραγματικότητα λύνει το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης. Υποστήριξε ότι μπορούμε να συμπεριλάβουμε έναν παράγοντα αποστροφής κινδύνου στους υπολογισμούς της αναμενόμενης ωφελιμότητας, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένα πεπερασμένο ανώτατο όριο στη λογική τιμή εισόδου για το παιχνίδι. Υπάρχουν όμως αντιρρήσεις σε αυτή την προσέγγιση. Πρώτον ένας παράγοντας αποστροφής κινδύνου δεν είναι γενικά εφαρμόσιμος παράγοντας για τη λήψη ορθολογικών αποφάσεων, επειδή μερικοί άνθρωποι δεν αποστρέφονται τον κίνδυνο. Στην πραγματικότητα μερικοί άνθρωποι μπορεί να απολαμβάνουν τον κίνδυνο. Είναι δυνατόν να απορρίψουμε μια τέτοια συμπεριφορά ως απλά παράλογη, αλλά μερικές φορές αυτοί οι παίκτες προσφέρουν την εξήγηση ότι απολαμβάνουν τον ενθουσιασμό του κινδύνου. Σε κάθε περίπτωση δεν είναι καθόλου σαφές ότι η αποστροφή του κινδύνου μπορεί να εξηγήσει γιατί το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης θα ήταν ευρέως διαισθητικό να έχει ένα αρκετά μικρό μέγιστο ορθολογικό τέλος εισόδου. Αλλά για λόγους επιχειρηματολογίας ας υποθέσουμε ότι η αποστροφή κινδύνου είναι αυτή που ευθύνεται για τη διαίσθηση ότι η κατάλληλη είσοδος για το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης είναι πεπερασμένη και μικρή. Αυτό δεν θα εξαλείψει το παράδοξο γιατί μπορούμε και πάλι να προσαρμόσουμε τα βραβεία για να λάβουμε υπόψη αυτή την αποστροφή κινδύνου. Η ιδέα ότι η αποστροφή κινδύνου μπορεί να αντισταθμιστεί με ένα μεγαλύτερο έπαθλο δεν είναι αμφιλεγόμενη. Το γεγονός ότι πολύ περισσότεροι άνθρωποι συμμετέχουν σε λαχειοφόρους αγορές όταν ανακοινώνονται ασυνήθιστα μεγάλα έπαθλα, διατηρώντας το ρίσκο περισσότερο ή λιγότερο σταθερό, είναι απόδειξη για αυτό. Τι ακριβώς είδους αποστροφή κινδύνου μπορεί να εξηγήσει γιατί οι άνθρωποι δεν θα στοιχηματίσουν περισσότερο από 25 € για να παίξουν το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης; Μερικές φορές υποστηρίζεται η άποψη ότι κάθε άτομο αποφεύγει να στοιχηματίζει τις αποταμιεύσεις του ανεξάρτητα από το πόσο πιθανή ή τεράστια θα ήταν η κερδοφορία. Είναι όμως όντως αυτή μια γενική αρχή ορθολογισμού απέναντι στον κίνδυνο; Αμφιβολίες σχετικά με αυτό εγείρονται από το ακόλουθο παράδειγμα. Ο καθένας που διασχίζει ένα δρόμο στην πραγματικότητα έχει μια μικρή πιθανότητα να σκοτωθεί. Αλλά το να αρνηθεί κανείς να διασχίσει οποιοδήποτε δρόμο για τον λόγο αυτόν είναι παράλογο. Είναι βασικό για τον ορθολογισμό να παίρνει κανείς ρίσκα όταν η πιθανότητα καταστροφής είναι αρκετά μικρή ακόμη και όταν αυτό που θα χαθεί είναι τεράστιο. (Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox)

5.1.2 Εφαρμογή ανώτερου ορίου ωφελιμότητας

Στις περιπτώσεις που αναφέραμε η ωφελιμότητα κάθε αποτελέσματος μπορεί να αυξηθεί χωρίς όριο αλλά ίσως αυτή η υπόθεση να είναι εσφαλμένη και να υπάρχει ένα ανώτατο όριο στη ωφελιμότητα των βραβείων. Ο Menger το 1934 υποστήριξε ότι η υπόθεση ότι υπάρχει ανώτατο όριο στη ωφελιμότητα είναι ο μόνος τρόπος που μπορεί να επιλύσει το παράδοξο. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η ωφελιμότητα (δηλαδή η αξία που αποδίδει ένα άτομο σε ένα ευρώ) περιορίζεται από το ανώτατο όριο των 100€. Στο παρακάτω πίνακα φαίνεται τι θα συνέβαινε σε αυτή τη περίπτωση.

Πίνακας 5.1

<u>Ανώτατο όριο ωφελιμότητας 100€ για το παιχνίδι της αγίας Πετρούπολης</u>

N	P(n)	Κέρδος	Ωφελιμότητα	Αναμενόμενη ωφελιμότητα
1	1/2	2	2	1
2	1/4	4	4	1
3	1/8	8	8	1
4	1/16	16	16	1
5	1/32	32	32	1
6	1/64	64	64	1
7	1/128	128	100	0,78
8	1/256	256	100	0,391
9	1/512	512	100	0,195
10	1/1024	1024	100	0,098

(Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox)

Το άθροισμα της άπειρης σειράς στη δεξιά στήλη φτάνει στο όριο περίπου 7,56 και η λογική τιμή εισόδου είναι οποιαδήποτε κάτω από αυτήν. Η υπόθεση ότι η μέγιστη ωφελιμότητα επιτυγχάνεται με οποιονδήποτε έπαθλο άνω των 100€ είναι απίθανη ρεαλιστικά επειδή σημαίνει ότι η αξία των 100€, 1000€ ακόμα και ενός εκατομμυρίου είναι όλες οι ίδιες. Είναι πιο εύλογο το ποσό αυτό να είναι πολύ υψηλότερο. Ο καθορισμός του στα 16 εκατομμύρια κάνει τη μέγιστη λογική τιμή εισόδου του παιχνιδιού κοντά στα 25€ που είναι και η εικασία του Hacking για το τι θα δεχόταν η διαίσθησή μας. Είναι αυτό το σημείο όπου η ωφελιμότητα μεγιστοποιείται; Μερικοί άνθρωποι πιστεύουν ότι είναι λογικό να τεθεί ένα ανώτατο όριο στην ωφελιμότητα. Ο Hardin το 1982 για παράδειγμα αποκαλεί αυτή την υπόθεση επιτακτική. Ο Gustason το 1994 προτείνει να περιορίσουμε την έννοια της αναμενόμενης αξίας ορίζοντας ότι οι τιμές οποιασδήποτε συνέπειας έχουν έναν ανώτερο όριο και ο Jeffrey το 1983 συμφωνεί. (Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox)

Η πρόταση της εφαρμογής ανώτατου ορίου ωφελιμότητας είναι βάσιμη ως λύση του παράδοξου της Αγίας Πετρούπολης μόνο υπό τη προϋπόθεση οι επιθυμίες των ανθρώπων είναι πεπερασμένες, κάτι που αμφισβητείται από την πλειοψηφία των ανθρώπων, καθώς πολλοί είναι εκείνοι που είναι άπληστοι.

5.1.3 Υπόθεση πεπερασμένων πόρων

Ο Gustason το 1994 προτείνει ότι για να αποφευχθεί το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης, πρέπει κανείς να επιλέξει ανάμεσα σε δύο περιορισμούς όσο αφορά την έννοια της αναμενόμενης αξίας.

1. Κάθε πράξη έχει μόνο πεπερασμένα πολλές συνέπειες, ή
2. Οι τιμές πρέπει να είναι περιορισμένες. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί n και m έτσι ώστε καμία τιμή που πρέπει να εκχωρηθεί ως συνέπεια δεν υπερβαίνει τον n ή είναι μικρότερη από τον m.

Επισημαίνει ότι η επιβολή οποιουδήποτε περιορισμού θα αρκεί για να λύσει το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης. Αν κάποιος αντισταθεί στην επιβολή περιορισμού (2), σε αυτή την περίπτωση θέτοντας ένα ανώτερο όριο στην τιμή των συνεπειών, ίσως ο περιορισμός (1) να θεωρηθεί εύλογος.

Ένας τρόπος για να επιβληθεί ο περιορισμός (1) είναι απλώς να επιμείνουμε ότι το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης αποτυγχάνει να οριστεί ως κατάλληλη εφαρμογή για την τυπική θεωρία αναμενόμενης αξίας η οποία κατά συνέπεια δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της δίκαιης τιμής εισόδου. Ένας άλλος τρόπος είναι να υποθέσουμε ότι ο τρόπος με τον οποίο θα διεξαχθεί το παιχνίδι δεν είναι ακριβώς όπως περιγράφεται και ότι υπάρχουν μερικές πιθανές πολύ μεγάλες ουρές, όπου η κεφαλή θα αργήσει πάρα πολύ να εμφανιστεί, που δεν θα πραγματοποιηθούν ποτέ. Δηλαδή ότι υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός βραβείων που πρέπει να ληφθούν υπόψη όταν υπολογίζουμε την αναμενόμενη αξία του παιχνιδιού. Πιθανώς αυτό να εφαρμοστεί θέτοντας κάποιο ανώτερο όριο L στον αριθμό των ρίψεων που θα ληφθούν υπόψη. Μετά από μια σειρά από κεφαλές στη σειρά το παιχνίδι θα τερματιζόταν και θα γινόταν πληρωμή του παίκτη με κριτήριο την επανάληψη στην οποία τελείωσε το παιχνίδι, παρά το γεγονός ότι η κεφαλή δεν είχε ακόμη εμφανιστεί.

Πολλοί συγγραφείς έχουν επισημάνει, ότι πρακτικά μιλώντας, πρέπει να υπάρχει κάποιο σημείο στο οποίο το παιχνίδι θα σταματάει ανεξαρτήτως αποτελέσματος. Ένας πρώτος λόγος για να συμβεί αυτό είναι ότι κάποτε θα έπρεπε να τελειώνει η υπομονή των συμμετεχόντων στο παιχνίδι. Ένα άλλο γεγονός που θα έθετε ένα όριο στο L είναι το όριο των χρημάτων που είναι διαθέσιμα για τη χρηματοδότηση του παιχνιδιού. Κάθε καζίνο που προσφέρει το παιχνίδι πρέπει να είναι προετοιμασμένο να το σταματήσει όταν τα έπαθλα υπερβούν τα χρηματικά αποθέματά του. Ο Jeffrey πιστεύει ότι η υπόθεση των περασμένων πόρων του καζίνο θέτει όντως ένα όριο στο παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης. Ο Hardin ισχυρίζεται ότι ο παραμικρός ρεαλισμός σε αυτό το παιχνίδι αποτελεί λύση του προβλήματος τονίζοντας πως πρέπει να είμαστε έστω και λίγο ρεαλιστές, συμφωνώντας με τους προηγούμενους στην επιβολή περιορισμών. (Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox)

5.2 Θεωρήματα αναπαράστασης (Representation theorems)

Τα θεωρήματα αναπαράστασης προτάθηκαν από τους υποστηρικτές της λύσης της θεωρίας ωφελιμότητας και μελετούν το κατά πόσο η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι το αντικειμενικό κριτήριο απόφασης κάτω από αβεβαιότητα. Προκειμένου να γίνουν κατανοητά τα παρακάτω θεωρήματα θα γίνει μια μικρή εισαγωγή στη θεωρία αποφάσεων.

5.2.1 Εισαγωγή στη θεωρία αποφάσεων

Κάθε πρόβλημα απόφασης κάτω από ένα περιβάλλον αβεβαιότητας εξαρτάται από 3 οντότητες. Η πρώτη οντότητα είναι τα αποτελέσματα (outcomes) τα οποία πραγματοποιούνται μετά τη λήψη της απόφασης και δεν εξαρτώνται εξ' ολοκλήρου από τον λήπτη αποφάσεων. Η δεύτερη οντότητα είναι υπάρχουσες καταστάσεις (states). Πράγματα έξω από τον έλεγχο του υπευθύνου λήψης αποφάσεων που επηρεάζουν το αποτέλεσμα της απόφασης. Η τρίτη οντότητα είναι οι πράξεις (acts) οι οποίες είναι αντικείμενα των προτιμήσεων του λήπτη αποφάσεων και αποτελούνται από τις ενέργειες που μπορεί να κάνει.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τους παράγοντες που επηρεάζουν ένα πρόβλημα απόφασης ας σκεφτούμε το επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 5.1</u>

Ας υποθέσουμε ότι ένας άνθρωπος σχεδιάζει να πάει στη δουλειά του και πρέπει να αποφασίσει αν θα χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητό του για τη μετακίνησή του ή αν θα χρησιμοποιήσει τα μέσα μαζικής μεταφοράς. Θα προτιμούσε να χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητό του καθώς του προσφέρει άνεση στη μετακίνηση αλλά φοβάται αν θα υπάρχει κίνηση στο δρόμο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα αποτελέσματα της απόφασης του είναι 3: είτε να φτάσει άνετα στον προορισμό του αλλά να αργήσει, είτε να φτάσει γρήγορα και με άνεση, είτε να φτάσει γρήγορα αλλά όχι με άλεση. Οι καταστάσεις τις οποίες δεν επηρεάζει είναι το αν θα έχει κίνηση ή όχι στους δρόμους. Οι πράξεις που μπορεί να κάνει είναι είτε να πάρει το αυτοκίνητο είτε να χρησιμοποιήσει τα μέσα μαζικής μεταφοράς. Η θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας παρέχει έναν τρόπο κατάταξης των πράξεων ανάλογα με το πόσο αξιόλογες είναι οι επιλογές. Όσο υψηλότερη είναι αναμενόμενη ωφελιμότητα τόσο καλύτερο είναι να επιλέξει κάποιος την κάθε πράξη. Ακολουθώντας τη γενική σύμβαση θα κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ πράξεων καταστάσεων και αποτελεσμάτων.

- Οι καταστάσεις οι πράξεις και τα αποτελέσματα είναι προτάσεις δηλαδή σύνολα πιθανοτήτων. Υπάρχει ένα μέγιστο σύνολο πιθανοτήτων Ω του οποίου κάθε κατάσταση, πράξη ή αποτέλεσμα είναι ένα υποσύνολο.
- Κάθε πράξη και κάθε κατάσταση συμβάλει μοναδικά σε ένα αποτέλεσμα
- Οι πράξεις και οι καταστάσεις είναι λογικά ανεξάρτητες έτσι ώστε κάθε κατάσταση δεν αποκλείει την εκτέλεση οποιασδήποτε πράξης.
- Θα υποθέσουμε προς το παρόν ότι, δεδομένης μιας κατάστασης, κάθε πράξη έχει ακριβώς ένα πιθανό αποτέλεσμα.

Έτσι το παράδειγμα που αναφέραμε μπορεί να απεικονιστεί στον ακόλουθο πίνακα, όπου κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μια κατάσταση, κάθε σειρά αντιστοιχεί σε μία πράξη και κάθε κελί στο εσωτερικό αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα που προκύπτει όταν η πράξη εκτελείται κάτω από τη συγκεκριμένη κατάσταση.

Πίνακας 5.2

Πίνακας αποφάσεων

		ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ	
		Κίνηση	Όχι κίνηση
ΠΡΑΞΕΙΣ	Αυτοκίνητο	Άνετα , Αργά	Άνετα, Γρήγορα
	Μέσα Μαζικής Μεταφοράς	Όχι άνετα, Γρήγορα	Όχι άνετα, Γρήγορα

Έχοντας δημιουργήσει το βασικό πλαίσιο μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά την αναμενόμενη ωφελιμότητα. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα μιας πράξης Α για παράδειγμα η λήψη αυτοκινήτου εξαρτάται από δύο χαρακτηριστικά του προβλήματος.

- Τη τιμή του κάθε αποτελέσματος μετρούμενη με έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζεται ωφελιμότητα.
- Τη πιθανότητα κάθε αποτελέσματος δεδομένου της πραγματοποίησης της πράξης Α.

Δεδομένων αυτών των τριών πληροφοριών η αναμενόμενη ωφελιμότητα του Α ορίζεται ως:

$$Eu(A) = \sum_{o \in O} P_A(o)u(o) \qquad (5.1)$$

Όπου O είναι το σύνολο των αποτελεσμάτων, $P_A(o)$ είναι η πιθανότητα του αποτελέσματος o δεδομένου του A και $u(o)$ η ωφελιμότητα του o.

Από τον ορισμό της αναμενόμενης ωφελιμότητας καταλαβαίνουμε πως υπάρχουν δύο παράγοντες που πρέπει να προσδιοριστούν, η πιθανότητα και η ωφελιμότητα. Ο όρος $P_A(o)$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο o δεδομένου του A. Χοντρικά περιγράφει πόσο πιθανό είναι αυτό το αποτέλεσμα να συμβεί με την υπόθεση ότι ο πράκτορας επιλέγει την πράξη A. Για να καταλάβουμε τι σημαίνει αυτό πρέπει να απαντήσουμε σε δύο ερωτήσεις. Πρώτον, ποια ερμηνεία της πιθανότητας είναι κατάλληλη, και δεύτερον τι σημαίνει να εκχωρούμε μια πιθανότητα στην υπόθεση ότι ο λήπτης αποφάσεων επιλέγει την πράξη A;

Οι θεωρητικοί της αναμενόμενης ωφελιμότητας συχνά ερμηνεύουν αυτή τη πιθανότητα ως μέτρηση του ατομικού βαθμού πεποίθησης έτσι ώστε μια πρόταση E είναι πιθανό να πραγματοποιηθεί στο βαθμό που ο παίκτης το πιστεύει σύμφωνα με τη δική του εμπειρία . Αλλά τίποτα στον φορμαλισμό της θεωρίας της αναμενόμενης ωφελιμότητας δεν μας επιβάλλει αυτή την ερμηνεία. Αντίθετα θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε τις πιθανότητες ως αντικειμενικές πιθανότητες ή ως βαθμούς πεποίθησης που δικαιολογούνται από αντικειμενικά δεδομένα με σκοπό μια πιο ορθολογική στάση. Ο Jeffrey είναι υποστηρικτής της δεύτερης πρότασης. Ο ίδιος παρουσίασε μια θεωρία στην οποία ορίζει τη σχετική υποθετική πιθανότητα $P_A(o)$ να είναι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(o \,/\, A)$ που ορίζεται ως ο λόγος των πιθανοτήτων $\frac{P(A \cap o)}{P(A)}$. Ο συγκεκριμένος ορισμός είναι ο πιο ευρέως αποδεκτός αν και δεν είναι μοναδικός.

Από την άλλη πλευρά ο όρος $u(o)$ αντιπροσωπεύει την ωφελιμότητα του αποτελέσματος o. Διαισθητικά πόσο πολύτιμο είναι. Ακριβέστερα η u είναι μια συνάρτηση που εκχωρεί έναν πραγματικό αριθμό σε καθένα από τα αποτελέσματα όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Όσο μεγαλύτερη είναι η ωφελιμότητα τόσο πιο πολύτιμο είναι το αποτέλεσμα. Οι σύγχρονοι θεωρητικοί αποφάσεων συνήθως ερμηνεύουν τη ωφελιμότητα ως μέτρο προτίμησης έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ενδεχόμενο Α έχει μεγαλύτερη ωφελιμότητα από ενδεχόμενο Β, αυτό να σημαίνει απλώς ότι ο παίκτης προτιμά το Α από το Β. Είναι ζωτικής σημασίας για αυτή την προσέγγιση οι προτιμήσεις να ισχύουν όχι μόνο μεταξύ αποτελεσμάτων αλλά και μεταξύ αβέβαιων προοπτικών. Η θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας δεν απαιτεί οι προτιμήσεις να είναι εγωιστικές ή ιδιοτελείς. Κάποιος μπορεί να προτιμήσει να δίνει χρήματα σε φιλανθρωπικά ιδρύματα παρά να ξοδεύει τα χρήματα σε πλούσια δείπνα ή να προτιμήσει να θυσιάσει τη ζωή του από το να επιτρέψει στο παιδί του να πεθάνει. Ο Sen το 1977 θεωρεί ότι η ψυχολογία κάθε ατόμου αναπαρίσταται καλύτερα χρησιμοποιώντας 3 ταξινομήσεις: Η μία αντιπροσωπεύει το στενό συμφέρον του ατόμου, η δεύτερη αντιπροσωπεύει το προσωπικό συμφέρον του ατόμου που ερμηνεύεται ευρύτερα για να εξηγήσει τα συναισθήματα συμπάθειας και μια τρίτη που αντιπροσωπεύει τις δεσμεύσεις του ατόμου οι οποίες μπορεί να απαιτήσουν από αυτό να ενεργήσει ενάντια στο προσωπικό του συμφέρον. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι κάθε άτομο πρέπει να επιλέξει την κατάλληλη συνάρτηση ωφελιμότητας που να αντικατοπτρίζει τα αποτελέσματα της αντικατοπτρίζουν τις προτιμήσεις του επομένως μπορεί το ίδιο άτομο κάτω από διαφορετικές συνθήκες να χρησιμοποιήσει διαφορετική συνάρτηση ωφελιμότητας που οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα. (Stanford encyclopedia of philosophy: Normative theories of rational choice. Expected utility)

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που ακολουθεί.

<u>Παράδειγμα 5.2</u>

Ας χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα (Παράδειγμα 5.1) όπου ένα άτομο πρέπει να αποφασίσει αν θα χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητο για τη μετακίνησή του ή αν θα χρησιμοποιήσει τα μέσα μαζικής μεταφοράς. Θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη ωφελιμότητα για δύο διαφορετικές συναρτήσεις ωφελιμότητας. Αρχικά θα θεωρήσουμε ως συνάρτηση ωφελιμότητας την λογαριθμική συνάρτηση $u(x) = \log x$ και στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = x^2$.

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε ενδεχόμενο (αποτέλεσμα της απόφασής του) το άτομο εκχωρεί στη θέση της μεταβλητής τις τιμές όπως φαίνεται παρακάτω:

- Στο αποτέλεσμα να φτάσει στον προορισμό του άνετα αλλά να καθυστερήσει, εκχωρεί στη θέση της μεταβλητής τη τιμή 2.
- Στο αποτέλεσμα να φτάσει στον προορισμό του όχι άνετα αλλά γρήγορα εκχωρεί, στη θέση της μεταβλητής την τιμή 5, ενώ
- Στο αποτέλεσμα να φτάσει στον προορισμό του άνετα και γρήγορα εκχωρεί, στη θέση της μεταβλητής τη τιμή 10.

Στην πρώτη περίπτωση όπου το άτομο λαμβάνει αποφάσεις σύμφωνα με τη λογαριθμική συνάρτηση $u(x) = \log x$, ο πίνακας που περιγράφει το πρόβλημα είναι ο εξής, υποθέτοντας ότι η πιθανότητα να έχει κίνηση στον δρόμο είναι 0,6:

Πίνακας 5.3

Πίνακας αποφάσεων με τη χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης ως συνάρτησης ωφελιμότητας

	ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ		
		Κίνηση $P(\kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\eta) = 0{,}6$	Όχι κίνηση $P(\acute{o}\chi\iota\ \kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\eta) = 0{,}4$
ΠΡΑΞΕΙΣ	Αυτοκίνητο	Άνετα , Αργά $u(2) = 0{,}301$	Άνετα, Γρήγορα $u(10) = 1$
	Μέσα Μαζικής Μεταφοράς	Όχι άνετα, Γρήγορα $u(5) = 0{,}698$	Όχι άνετα, Γρήγορα $u(5) = 0{,}698$

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα, αν χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητο υπολογίζεται από τη σχέση (5.1) και ισούται με:

$$
\begin{aligned}
Eu(\text{Αυτοκίνητο}) &\\
&= P_{\text{Αυτοκίνητο}}(\text{Άνετα}, \text{Αργά}) \cdot u(2) + P_{\text{Αυτοκίνητο}}(\text{Άνετα}, \text{Γρήγορα})\\
&\cdot u(10) + P_{\text{Αυτοκίνητο}}(\text{Όχι άνετα}, \text{Γρήγορα}) \cdot u(5)\\
&= 0{,}6 \cdot 0{,}301 + 0{,}4 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}698 = 0{,}1806 + 0{,}4 = 0{,}5806
\end{aligned}
$$

Ενώ αναμενόμενη ωφελιμότητα αν χρησιμοποιήσει τα μέσα μαζικής μεταφοράς (Μ.Μ.Μ.)είναι ίση με :

$$
\begin{aligned}
Eu(M.M.M.) &= P_{M.M.M.}(\text{Άνετα}, \text{Αργά}) \cdot u(2) + P_{M.M.M.}(\text{Άνετα}, \text{Γρήγορα}) \cdot u(10)\\
&+ P_{M.M.M.}(\text{Όχι άνετα}, \text{Γρήγορα}) \cdot u(5)\\
&= 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}698 = 0{,}698
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι

$$Eu(\text{Αυτοκίνητο}) < Eu(M.M.M.)$$

Επομένως σύμφωνα με τη λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας το άτομο θα προτιμήσει να χρησιμοποιήσει τα μέσα μαζικής μεταφοράς.

Ας ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για τη συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = x^2$.

Ο πίνακας που αναπαριστά το πρόβλημα είναι ο εξής:

Πίνακας 5.4

Πίνακας αποφάσεων με τη χρήση της συνάρτησης $u(x) = x^2$ ως συνάρτησης ωφελιμότητας

	ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ		
		Κίνηση $P(κίνηση) = 0{,}6$	Όχι κίνηση $P(όχι\ κίνηση) = 0{,}4$
ΠΡΑΞΕΙΣ	Αυτοκίνητο	Άνετα , Αργά $u(2) = 4$	Άνετα, Γρήγορα $u(10) = 100$
	Μέσα Μαζικής Μεταφοράς	Όχι άνετα, Γρήγορα $u(5) = 25$	Όχι άνετα, Γρήγορα $u(5) = 25$

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα, αν χρησιμοποιήσει το αυτοκίνητο είναι ίση με:

$$\begin{aligned} &Eu(Αυτοκίνητο) \\ &\quad = P_{Αυτοκίνητο}(Άνετα, Αργά) \cdot u(2) + P_{Αυτοκίνητο}(Άνετα, Γρήγορα) \\ &\quad \cdot u(10) + P_{Αυτοκίνητο}(Όχι\ άνετα, Γρήγορα) \cdot u(5) \\ &\quad = 0{,}6 \cdot 4 + 0{,}4 \cdot 100 + 0 \cdot 25 = 2{,}4 + 40 = 42{,}4 \end{aligned}$$

Ενώ αναμενόμενη ωφελιμότητα αν χρησιμοποιήσει τα μέσα μαζικής μεταφοράς (Μ.Μ.Μ.) είναι ίση με :

$$\begin{aligned} Eu(M.M.M.) &= P_{M.M.M.}(Άνετα, Αργά) \cdot u(2) + P_{M.M.M.}(Άνετα, Γρήγορα) \cdot u(10) \\ &+ P_{M.M.M.}(Όχι\ άνετα, Γρήγορα) \cdot u(5) = 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0 + 1 \cdot 25 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Σε αντίθεση με τη λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας παρατηρούμε ότι

$$Eu(Αυτοκίνητο) > Eu(M.M.M.)$$

Επομένως σε αυτή τη περίπτωση το άτομο θα προτιμήσει να πάρει το αυτοκίνητο για τη μετακίνησή του.

Η παραπάνω αλλαγή στις προτιμήσεις του ατόμου έχει να κάνει όπως έχουμε πει με τη κυρτότητα των δύο συναρτήσεων.

5.2.2 Θεωρήματα αναπαράστασης για την ωφελιμότητα

Μια σημαντική ερώτηση που βασανίζει το σύνολο των επιστημόνων που ασχολήθηκαν με τη θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι η εξής. Γιατί να επιλέξει κανείς τις αποφάσεις που μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφελιμότητα; Μια πιθανή απάντηση είναι ότι η θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι ένα ορθολογικό κριτήριο και ότι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι αναπόφευκτη ώστε να είναι ένα άτομο ορθολογικό. Προκειμένου να επεξηγηθεί το παραπάνω επιχείρημα αναπτύχθηκαν θεωρήματα αναπαράστασης για τη θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας . Το επιχείρημα των θεωρημάτων αναπαράστασης έχει 3 προϋποθέσεις, οι οποίες όπως τις παρουσίασε ο Zynda το 2000 είναι οι εξής:

- Η συνθήκη ορθολογισμού.

Τα αξιώματα της θεωρίας της αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι τα αξιώματα της ορθολογικής προτίμησης.

- Αντιπροσωπευτικότητα.

Εάν οι προτιμήσεις ενός ατόμου υπακούν στα αξιώματα της θεωρίας της αναμενόμενης ωφελιμότητας, τότε μπορούμε να πούμε ότι το άτομο έχει βαθμούς πεποίθησης που υπακούουν στους νόμους του λογισμού πιθανοτήτων (και μια συνάρτηση ωφελιμότητας τέτοια ώστε να προτιμά πράξεις με υψηλότερη αναμενόμενη ωφελιμότητα).

- Η συνθήκη της πραγματικότητας.

Εάν ένα άτομο λαμβάνει αποφάσεις σύμφωνα με μια συνάρτηση ωφελιμότητας έτσι ώστε να επιλέγει πράξεις που να μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφελιμότητα, τότε πραγματικά επιλέγει πράξεις που μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφελιμότητα.

Οι προϋποθέσεις αυτές συνεπάγονται το ακόλουθο συμπέρασμα. Εάν ένα άτομο αποτύχει να προτιμήσει πράξεις με υψηλότερη αναμενόμενη ωφελιμότητα τότε αυτό το άτομο παραβιάζει τουλάχιστον ένα από τα αξιώματα ορθολογικής προτίμησης.

5.2.2.1 Θεώρημα αναπαράστασης Ramsey

Η ιδέα ενός θεωρήματος αναπαράστασης για την αναμενόμενη ωφελιμότητα χρονολογείται από τον Ramsey το 1926. Ο Ramsey πίστευε ότι επιλέγουμε να λαμβάνουμε αποφάσεις σύμφωνα με το καλύτερο δυνατό αναμενόμενο αποτέλεσμα. Επομένως για κάθε απόφαση που θέλουμε να λάβουμε πρέπει να εξετάσουμε το σύνολο των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από κάθε πράξη και κάθε κατάσταση και να ορίσουμε τις τιμές της ωφελιμότητας του κάθε αποτελέσματος σύμφωνα με τις δικές μας προτιμήσεις. Αυτό σημαίνει, ότι εάν είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε τις προτεραιότητες και τις προσωπικές προτιμήσεις ενός ατόμου, τότε μπορούμε να προβλέψουμε ποιες επιλογές πρόκειται να κάνει. Ο Ramsey αποκαλεί μια πρόταση ως «ηθικά ουδέτερη» (ethically neutral) όταν 2 πιθανά αποτελέσματα έχουν την ίδια ωφελιμότητα. Σε μια ηθικά ουδέτερη πρόταση αποδίδεται η τιμή ½ στην πιθανότητα προτίμησης της κάθε επιλογής.

Επιπλέον ο Ramsey ορίζει την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου με όρους ωφελιμότητας ως εξής:

Έστω ότι κάθε ποντάρισμα g οδηγεί σε μια καλύτερη τιμή b εάν το ενδεχόμενο F πραγματοποιηθεί ή σε μια χειρότερη τιμή w εάν το ενδεχόμενο F δεν πραγματοποιηθεί. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι για την ενδιάμεση τιμή m μεταξύ των b και w ο παίκτης είναι αδιάφορος ως προς τις τιμές m και g. Τότε ισχύει

$$Eu(g) = Eu(m)$$

και

$$Eu(g) = P(F)u(b) + (1 - P(F))u(m)$$

O Ramsey από τις παραπάνω σχέσεις απέδειξε ότι

$$P(F) = \frac{1 - u(m)}{u(b) - u(w)}.$$

(Stanford encyclopedia of philosophy: Normative theories of rational choice. Expected utility)

5.2.2.2 Θεώρημα αναπαράστασης Savage

Το 1954 ο αμερικανός στατιστικός Savage ανέπτυξε τη δική του θεωρία για την κατανόηση της αναμενόμενης χρησιμότητας. Στο βιβλίο του “The foundations of statistics” ο Savage περιλαμβάνει μια απόδειξη για το ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να γίνει η βέλτιστη επιλογή μεταξύ πολλών πράξεων μέσω 7 αξιωμάτων. Η διαφοροποίηση από τα μέχρι τότε θεωρήματα αναπαράστασης είναι ότι ο Savage υποθέτει ότι η πιθανότητα ενός συμβάντος ορίζεται με όρους προτιμήσεων έναντι πράξεων και όχι έναντι αποτελεσμάτων όπως ο Ramsey. Για το σκοπό αυτό ορίζει εκ νέου τον όρο «αποτελέσματα» μιας απόφασης, καθώς για αυτόν είναι σημαντικό να προσδιοριστεί σωστά τι θεωρείται αποτέλεσμα και τι όχι. Γι' αυτόν τα αποτελέσματα πρέπει να έχουν την ίδια τιμή ωφελιμότητας ανεξαρτήτως των καταστάσεων εκ των οποίων προήλθαν. Για παράδειγμα η δήλωση «θα πάω διακοπές» δεν αποτελεί αποτέλεσμα για τον Savage καθώς η τιμή της ωφελιμότητας που προσδίδει ένα άτομο σε αυτό το συμβάν είναι διαφορετική, ανάλογα με το αν το άτομο αποζητά ξεκούραση ή αν έχει ανάγκη να συνεχίσει να δουλεύει. Όσον αφορά τις καταστάσεις, επιβεβαιώνει ότι δεν είναι υπό τον έλεγχο του ατόμου ενώ αντίθετα οι πράξεις είναι εξολοκλήρου στον έλεγχό του. Υποστηρίζει ότι μια πράξη και μια κατάσταση επαρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα αποτέλεσμα.

Πέρα από τον επαναπροσδιορισμό των αποτελεσμάτων, το δεύτερο αξιοσημείωτο στη θεωρία του Savage είναι ο ορισμός της συνεχούς πράξης “constant act”. Μια συνεχής πράξη είναι μια πράξη που για ένα δεδομένο γεγονός δίνει το ίδιο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από τις καταστάσεις. Προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές οι διαφορές μεταξύ των παραμέτρων μιας απόφασης του Savage και των προγενέστερων παρουσιάζεται ο παρακάτω πίνακας αποφάσεων τύπου Savage που μπορεί να συγκριθεί με τον Πίνακα (5.2)

Πίνακας 5.5

Πίνακας αποφάσεων τύπου Savage

		ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ	
		Κίνηση	Όχι κίνηση
ΠΡΑΞΕΙΣ	Αυτοκίνητο	Άνετη μετακίνηση	Πολύ άνετη μετακίνηση
	Όχι αυτοκίνητο	Άνετη μετακίνηση	Όχι άνετη μετακίνηση
	Constant act	Όχι άνετη μετακίνηση	Όχι άνετη μετακίνηση
	Μ.Μ.Μ.	Άνετη μετακίνηση	Όχι άνετη μετακίνηση
	Όχι Μ.Μ.Μ.	Άνετη μετακίνηση	Πολύ άνετη μετακίνηση

Ο Savage χρησιμοποίησε τις καταστάσεις που δεν είναι στον έλεγχο του ατόμου για να υπολογίσει τις πιθανότητες πραγματοποίησης ενός γεγονότος. Για τον σκοπό αυτό υπέθεσε ότι για δύο δεδομένες πράξεις A, B και ένα γεγονός E, υπάρχει μια μικτή πράξη $A_E\&B_{\smile E}$ η οποία οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα A αν πραγματοποιηθεί το E και στο ίδιο αποτέλεσμα B σε κάθε άλλη περίπτωση.

Συγκεκριμένα για να προσδιορίσει αυστηρά την παραπάνω πράξη, ορίζει τη σχέση «τουλάχιστον τόσο πιθανό όσο» όπως δείχνεται παρακάτω:

Ας υποθέσουμε ότι A και B είναι δύο συνεχείς πράξεις όπου η πράξη A προτιμάται από τη πράξη B. Τότε το E είναι «τουλάχιστον τόσο πιθανό όσο» το F στην περίπτωση που είτε προτιμά την πράξη $A_E\&B_{\smile E}$ από την $A_F\&B_{\smile F}$, είτε είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο πράξεων. Η σκέψη πίσω από τον ορισμό είναι ότι ο παίκτης θεωρεί το E τουλάχιστον τόσο πιθανό όσο το F μόνο στην περίπτωση που δεν θα προτιμούσε να στοιχηματίσει το F αντί του E. (Stanford encyclopedia of philosophy: Normative theories of rational choice. Expected utility)

Στη συνέχεια ο Savage δίνει μια σειρά από έξι αξιώματα που περιορίζουν την ορθολογική προτίμηση. Σύμφωνα με τη θεωρία του κάθε φορά που πληρούνται αυτά τα αξιώματα, υπάρχει μία και μόνο συνάρτηση πιθανότητας P τέτοια ώστε για όλα τα ενδεχόμενα E και F να ισχύει $P(E) \geq P(F)$ αν και μόνο αν το E είναι τουλάχιστον τόσο πιθανό όσο το F. Κάθε σχέση προτίμησης που υπακούει στα αξιώματα του Savage αντιπροσωπεύεται από αυτή τη συνάρτηση πιθανότητας P μαζί με μια συνάρτηση χρησιμότητας U που είναι μοναδική. Το θεώρημα αναπαράστασης του Savage είναι αρκετά ισχυρό και παίζει καθοριστικό ρόλο στη λήψη αποφάσεων. Ξεκινώντας μόνο με μια σειρά προτιμήσεων έναντι των πράξεων μπορούμε να βρούμε μια μοναδική συνάρτηση πιθανότητας και μια κατηγορία συναρτήσεων ωφελιμότητας που αντιπροσωπεύουν τη σειρά προτίμησης. Σύμφωνα με αυτή τη προσέγγιση, αν γνωρίζουμε καλά τις προτιμήσεις και τους στόχους ενός ατόμου μπορούμε να προβλέψουμε τις επιλογές του διατάσσοντας το σύνολο των πράξεων που έχει στη διάθεσή του. Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στη προσέγγιση του Ramsey καθώς σειρά προτίμησης, άρα και η ωφελιμότητα, είναι αποτέλεσμα διάταξης των αποτελεσμάτων μιας απόφασης. Κάτι που κάνει την εκ των προτέρων πρόβλεψη των πράξεων αδύνατη.

Στο μοντέλο του Savage η αναμενόμενη ωφελιμότητα για κάθε πράξη ορίζεται ως εξής:

Έστω $f, g,$ κλπ ο συμβολισμός των πράξεων. Επιπλέον ας συμβολίσουμε S το σύνολο των καταστάσεων και O το σύνολο των αποτελεσμάτων. Οι πράξεις θεωρούνται συναρτήσεις από το σύνολο S στο σύνολο O. Ο συμβολισμός $f(s_i)$ δηλώνει το αποτέλεσμα την πράξης f, όταν η κατάσταση $s_i \in S$ πραγματοποιηθεί. Η αναμενόμενη ωφελιμότητα της πράξης f σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζεται ως:

$$U(f) = \sum_i u(f(s_i))P(s_i).$$

(Stanford encyclopedia of philosophy: Decision theory)

5.3 Αντιρρήσεις στα θεωρήματα αναπαράστασης

Υπάρχουν πολλοί που έχουν δώσει παραδείγματα στα οποία η θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας φαίνεται να καταλήγει σε παράδοξα. Στα παραδείγματα αυτά φαίνεται ο ορθολογισμός να επιτρέπει προτιμήσεις που δεν συνάδουν με τη θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας. Δηλαδή υπάρχουν παραδείγματα προτιμήσεων που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν από μια συνάρτηση ωφελιμότητας αλλά που ωστόσο φαίνονται λογικά. Υποδηλώνουν ότι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφελιμότητας δεν είναι απαραίτητη για τον ορθολογισμό. Για παράδειγμα ένα από τα αξιώματα που διέπουν την προσέγγιση του Savage είναι το αξίωμα της ανεξαρτησίας. Ορισμένοι συγγραφείς που θα δούμε παρακάτω ισχυρίζονται ότι τα παραδείγματα αυτά έρχονται ενάντια στο θεώρημα ανεξαρτησίας του Savage. Ας δούμε λοιπόν τι λέει το στο αξίωμα αυτό και ας εξετάσουμε τα παραδείγματα που αντιτίθενται στο αξίωνα αυτό.

Αξίωμα ανεξαρτησίας του Savage.

Ας υποθέσουμε ότι A και A^* είναι δύο πράξεις που παράγουν τα ίδια αποτελέσματα σε περίπτωση πού το ενδεχόμενο E είναι ψευδές. Τότε για οποιαδήποτε πράξη B, ένα από τα παρακάτω πρέπει να ισχύει:

- Η πράξη A προτιμάται από την πράξη A^* αν και μόνο αν η πράξη $A_E \& B_{\smile E}$ προτιμάται από την πράξη $A_E^* \& B_{\smile E}$
- Ο υπεύθυνος λήψης της απόφασης είναι αδιάφορος ως προς τις πράξεις A και A^* αν και μόνο αν είναι αδιάφορος ως προς τις πράξεις $A_E \& B_{\smile E}$ και $A_E^* \& B_{\smile E}$

(Stanford encyclopedia of philosophy: Normative theories of rational choice. Expected utility)

Με άλλα λόγια εάν δύο πράξεις έχουν τις ίδιες συνέπειες όταν το ενδεχόμενο E είναι ψευδές, τότε οι προτιμήσεις του ατόμου μεταξύ αυτών των δύο πράξεων θα πρέπει να εξαρτώνται μόνο από τις συνέπειες όταν το E είναι αληθές. Σύμφωνα με τον ορισμό του Savage για την αναμενόμενη ωφελιμότητα, η θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας συνεπάγεται την ανεξαρτησία.

5.3.1 Το παράδοξο του Allais

Ο Allais το 1953 έδωσε ένα αντιπαράδειγμα, το λεγόμενο «παράδοξο του Allais» όπου φαίνεται να μην ικανοποιείται το αξίωμα της ανεξαρτησίας και να τίθεται υπό αμφισβήτηση το κριτήριο της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης ωφελιμότητας. Το παράδειγμα αυτό περιλαμβάνει δύο ξεχωριστά προβλήματα απόφασης στα οποία μέσα από 100 λαχεία αριθμημένα με αριθμούς μεταξύ του 1 και του 100 επιλέγεται ένα από αυτά τυχαία. Στο πρώτο πρόβλημα ο παίκτης πρέπει να επιλέξει μεταξύ των παρακάτω δύο λαχειοφόρων αγορών:

Λαχείο Α

- Ο παίκτης κερδίζει 100 χιλιάδες ευρώ με βεβαιότητα

Λαχείο Β

- Ο παίκτης κερδίζει 500 χιλιάδες ευρώ αν κληρωθεί ένα λαχείο με αριθμό από 1 έως 10,
- Κερδίζει 100 χιλιάδες ευρώ αν κληρωθεί ένα λαχείο με αριθμό από 12 έως 100
- Δεν κερδίζει τίποτα αν κληρωθεί το λαχείο με τον αριθμό 11

Στο δεύτερο πρόβλημα ο παίκτης έχει να επιλέξει ανάμεσα στις δύο λοταρίες

Λαχείο Γ

- Κερδίζει 100 χιλιάδες ευρώ αν κληρωθεί ένα λαχείο με αριθμό από 1 έως 11
- Δεν κερδίζει τίποτα σε κάθε άλλη περίπτωση

Λαχείο Δ

- Κερδίζει 500 χιλιάδες ευρώ αν κληρωθεί ένα λαχείο με αριθμό από 1 έως 10
- Δεν κερδίζει τίποτα σε κάθε άλλη περίπτωση

Φαίνεται λογικό να προτιμήσει το λαχείο Α που του προσφέρει σίγουρα 100 χιλιάδες ευρώ σε αντίθεση με το λαχείο Β όπου η προστιθέμενη πιθανότητα 10% να κερδίσει 500 χιλιάδες ευρώ, αντισταθμίζεται περισσότερο από τον κίνδυνο να μην πάρει τίποτα. Φαίνεται επίσης λογικό να προτιμήσει το λαχείο Δ με 10% πιθανότητα για έπαθλο 500 χιλιάδων ευρώ έναντι του λαχείου Γ, όπου με λίγο μεγαλύτερη πιθανότητα 11%

κερδίζει πολύ μικρότερο έπαθλο (100 χιλιάδων ευρώ). Αλλά μαζί αυτές οι προτιμήσεις οι οποίες ονομάζονται προτιμήσεις Allais παραβιάζουν την ανεξαρτησία. Τα λαχεία Α και Γ αποδίδουν το ίδιο έπαθλο 100 χιλιάδων ευρώ για τα λαχεία από 12 έως 100. Μπορούν να μετατραπούν στα λαχεία Β και Δ αντικαθιστώντας αυτό το έπαθλο των 100 χιλιάδων με 0. Επειδή παραβιάζουν την ανεξαρτησία οι προτιμήσεις του Allais είναι ασυμβίβαστες με τη θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας. Αυτή η ασυμβατότητα δεν απαιτεί υποθέσεις σχετικά με τις τιμές της ωφελιμότητας για κάθε ποσό. Ας υποθέσουμε ότι στο ποσό των 500 χιλιάδων προσδίδεται η τιμή ωφελιμότητας x, στο ποσό των 100 χιλιάδων η τιμή ωφελιμότητας y και στο ποσό 0 η τιμή ωφελιμότητας z.

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα για κάθε λαχείο είναι:

$Eu(A) = 0{,}11y + 0{,}89y$

$Eu(B) = 0{,}10x + 0{,}01z + 0{,}89y$

$Eu(\Gamma) = 0{,}11y + 0{,}89z$

$Eu(\Delta) = 0{,}10x + 0{,}01z + 0{,}89z$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η συνθήκη ώστε να ισχύει $EU(A) > EU(B)$ είναι ακριβώς η ίδια με τη συνθήκη ώστε να ισχύει $EU(\Gamma) > EU(\Delta)$. Και οι δύο ανισότητες ισχύουν όταν πραγματοποιείται η συνθήκη $0{,}11y > 0{,}10x + 0{,}01z$. (Stanford encyclopedia of philosophy: Normative theories of rational choice. Expected utility)

Επομένως όταν κάποιος επιλέξει τα λαχεία Α και Γ, τότε το αξίωμα της ανεξαρτησίας εφαρμόζεται και το κριτήριο της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης ωφελιμότητας είναι ρεαλιστικό. Όταν κάποιος όμως επιλέξει τα λαχεία Α και Δ όπως ισχυρίζεται ο Allais, τότε το κριτήριο της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης ωφελιμότητας αποτυγχάνει.

<u>Παράδειγμα 5.3</u>

Ας σκεφτούμε το εξής σενάριο. Ένας άνθρωπος είναι άρρωστος και αν δεν προβεί σε κάποια θεραπεία σύντομα θα καταλήξει στον θάνατο. Πηγαίνει λοιπόν στον γιατρό, ο οποίος του προτείνει δύο θεραπείες. Οι θεραπείες που του προτείνει έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

Θεραπεία Α

- Το άτομο θα ζήσει με πιθανότητα 1 για 15 χρόνια.

Θεραπεία Β

- Το άτομο θα ζήσει με πιθανότητα 89% για 15 χρόνια
- Το άτομο θα ζήσει με πιθανότητα 10% για 20 χρόνια
- Το άτομο θα πεθάνει με πιθανότητα 1%

Η λογική απόφαση σε αυτό το σενάριο είναι το άτομο να επιλέξει τη θεραπεία Α από τη θεραπεία Β καθώς του προσφέρει με σιγουριά το αποτέλεσμα του να ζήσει.

Παρόλα αυτά το άτομο ζητά μια δεύτερη γνώμη και από ένα δεύτερο γιατρό, ο οποίος θεωρεί ότι η κατάσταση του ασθενούς είναι χειρότερη απ' όσο πίστευε ο πρώτος γιατρός, προτείνει στον ασθενή τις εξής θεραπείες:

Θεραπεία Γ

- Το άτομο θα ζήσει με πιθανότητα 11% για 15 χρόνια
- Το άτομο θα πεθάνει με πιθανότητα 89%

Θεραπεία Δ

- Τα άτομο θα ζήσει με πιθανότητα 10% για 20 χρόνια
- Το άτομο θα πεθάνει με πιθανότητα 90%

Σε αυτή τη περίπτωση φαίνεται λογικό το άτομο να προτιμήσει τη θεραπεία Δ από τη θεραπεία Γ στοχεύοντας σε μεγαλύτερη διάρκεια ζωής παρά τη μικρότερη πιθανότητα που έχει το ενδεχόμενο αυτό να συμβεί.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τις θεραπείες Α και Δ λίγο διαφορετικά, χωρίς να προκύψει κάποια αλλαγή στα σενάρια.

Θεραπεία A'

- Το άτομο έχει 11% πιθανότητα να ζήσει 15 χρόνια
- Το άτομο έχει 89% πιθανότητα να ζήσει 15 χρόνια

Θεραπεία Δ'

- Το άτομο έχει 10% πιθανότητα να ζήσει 20 χρόνια
- Το άτομο έχει 1% πιθανότητα να πεθάνει
- Το άτομο έχει 89% πιθανότητα να πεθάνει

Παραβλέποντας ανάμεσα στις θεραπείες A' και Β το ενδεχόμενο το άτομο να έχει 89% πιθανότητα να ζήσει 15 χρόνια (που είναι κοινό και στις δύο θεραπείες οπότε δεν συμβάλει στην απόφαση), βλέπουμε ότι το άτομο καλείται να επιλέξει ανάμεσα στα ενδεχόμενα

- Το άτομο έχει 11% πιθανότητα να ζήσει 15 χρόνια

Και

- Το άτομο θα ζήσει με πιθανότητα 10% για 20 χρόνια
- Το άτομο θα πεθάνει με πιθανότητα 1%

Επιλέγοντας όπως είδαμε το πρώτο.

Αντίστοιχα ανάμεσα στις θεραπείες Γ και $Δ'$ παραβλέποντας το ενδεχόμενο το άτομο να έχει 89% πιθανότητα να πεθάνει (που είναι κοινό και στις δύο θεραπείες οπότε δεν συμβάλει στην απόφαση), παρατηρούμε ότι το άτομο καλείται να επιλέξει ανάμεσα στα ίδια ακριβώς ενδεχόμενα με την προηγούμενη περίπτωση, καθώς τα δύο σενάρια είναι πλέον ίδια. Αυτή τη φορά είδαμε ότι το άτομο προτίμησε την δεύτερη επιλογή. Πράγμα που οδηγεί σε παράδοξο καθώς την πρώτη φορά το άτομο επιλέγει μεγαλύτερη πιθανότητα να επιβιώσει ενώ τη δεύτερη φορά επιλέγει να θυσιάσει ένα μικρό ποσοστό επιβίωσης με σκοπό να πετύχει μεγαλύτερη διάρκεια ζωής.

Η παρατήρηση αυτή έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρία αναμενόμενης ωφελιμότητας καθώς δεν είναι ξεκάθαρες οι προτιμήσεις του ατόμου (επιβίωση ή διάρκεια ζωής). Οι ψυχολόγοι υποστηρίζουν ότι γενικά ο άνθρωπος τείνει να αποφεύγει το ρίσκο με κάθε τρόπο ακόμα και αν αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις προτιμήσεις του. Πρώτο του μέλημα είναι να ελαχιστοποιήσει τις απώλειες και ύστερα να κυνηγήσει τα θέλω του. Το παραπάνω φαινόμενο καλείται αποστροφή απώλειας (loss aversion).

5.3.2 Το παράδοξο του Ellsberg

Παρόμοιο συλλογισμό με τον Allais ακολούθησε και ο Ellsberg το 1961, ο οποίος με τη σειρά του παρουσίασε επίσης ένα παράδειγμα, όπου το αξίωμα της ανεξαρτησίας δεν ικανοποιείται. Το παράδειγμά του επίσης περιλαμβάνει δύο προβλήματα απόφασης σε καθένα από τα οποία μια μπάλα επιλέγεται από ένα δοχείο που περιέχει 30 κόκκινες μπάλες και 60 μπάλες που είναι είτε λευκού χρώματος, είτε κίτρινου σε άγνωστες αναλογίες.

Στο πρώτο πρόβλημα απόφασης ο παίκτης πρέπει να επιλέξει μεταξύ των ακόλουθων λαχειοφόρων αγορών:

Λαχείο Κόκκινο.

- Ο παίκτης κερδίζει 100 € εάν κληρωθεί μία κόκκινη μπάλα
- Χάνει 100 € σε κάθε άλλη περίπτωση.

Λαχείο Λευκό

- Κερδίζει 100 € εάν κληρωθεί μία λευκή μπάλα

- Χάνει 100 € σε κάθε άλλη περίπτωση.

Στο δεύτερο πρόβλημα απόφασης ο παίκτης πρέπει να επιλέξει μεταξύ των ακόλουθων λαχειοφόρων αγορών.

Λαχείο Κόκκινο-Κίτρινο.

- Κερδίζει 100 € εάν κληρωθεί μια κόκκινη ή μια κίτρινη μπάλα.
- Χάνει 100 € σε κάθε άλλη περίπτωση.

Λαχείο Λευκό-Κίτρινο.

- Κερδίζει 100 € εάν κληρωθεί μία λευκή ή μία κίτρινη μπάλα.
- Χάνει 100 € σε κάθε άλλη περίπτωση.

Φαίνεται λογικό να προτιμήσει κανείς το λαχείο κόκκινο από το λαχείο λευκό αλλά ταυτόχρονα φαίνεται προτιμότερο το λαχείο λευκό-κίτρινο από το λαχείο κόκκινο-κίτρινο. Τα λαχεία λευκό και κόκκινο αποδίδουν το χάσιμο 100 € εάν κληρωθεί μία κίτρινη μπάλα και μπορούν να μετατραπούν στα λαχεία κόκκινο-κίτρινο και λευκό-κίτρινο απλά αντικαθιστώντας αυτή την απώλεια των 100 € με 1 σίγουρο κέρδος 100 €. Επειδή παραβιάζουν την ανεξαρτησία οι προτιμήσεις του Ellsberg είναι ασυμβίβαστες με τη θεωρία της αναμενόμενης ωφελιμότητας και πάλι αυτή η ασυμβατότητα δεν απαιτεί υποθέσεις σχετικά με τις τιμές της ωφελιμότητας του να κερδίσω 100 € ή του να χάσω 100 €. (Ellsberg, 1961)

5.4 Χρήση των νόμων των μεγάλων αριθμών για τον προσδιορισμό ενός δίκαιου ποσού εισόδου για το παιχνίδι

Σύγχρονοι ακαδημαϊκοί που ασχολήθηκαν με το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι, για να προσδιορίσουμε ένα δίκαιο ποσό εισόδου (entrance fee) για το παιχνίδι, πρέπει να μελετήσουμε μια σειρά από ανεξάρτητες, πανομοιότυπες δοκιμές. Υποστηρικτές αυτής της ιδέας όπως οι Feller, Chow και Robbins μελέτησαν επαναλαμβανόμενες δοκιμές και χρησιμοποίησαν τον ασθενή και τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών με σκοπό να προσδιορίσουν το δίκαιο ποσό εισόδου. Για τον σκοπό αυτό ας υπενθυμίσουμε τα δύο αυτά σημαντικά θεωρήματα του λογισμού πιθανοτήτων.

Θεώρημα 5.1. Ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω ότι η $X_1, X_2, \dots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες έχει πεπερασμένο μέσο $E[X_i] = \mu$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ n \to \infty$$

Θεώρημα 5.2. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω ότι η $X_1, X_2, \dots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες έχει πεπερασμένο μέσο $E[X_i] = \mu$. Τότε, με πιθανότητα 1, ισχύει:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \mu \quad \kappa\alpha\theta\omega\varsigma\ \tau o\ n \to \infty$$

Δηλαδή ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών ορίζει ότι

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right\} = 1$$

(Ross, 2011)

5.4.1 Η προσέγγιση του William Feller

Ο William Feller (1968) περιγράφει πως επειδή η αναμενόμενη τιμή του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης είναι άπειρη, ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών δεν εφαρμόζεται. Παρόλα αυτά καταφέρνει να γενικεύσει τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών για μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με άπειρο μέσο. Ισχυρίζεται πως αν θεωρήσουμε μεταβλητά ποσά εισόδου που εξαρτώνται από τον αριθμό των δοκιμών τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών και να ορίσουμε μια δίκαιη τιμή εισόδου για το παιχνίδι.

Ο ίδιος παρουσιάζει αυτό το επιχείρημα λέγοντας χαρακτηριστικά:

«Αφού το κέρδος δεν έχει πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή, ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν εφαρμόζεται. Η κλασική θεωρία κατέληξε στο συμπέρασμα ότι $\mu = \infty$ είναι μια δίκαιη είσοδος αλλά ο σύγχρονος άνθρωπος δύσκολα θα καταλάβει τις μυστηριώδεις συζητήσεις αυτού του παραδόξου. Είναι απολύτως δυνατό να καθοριστούν τα τέλη εισόδου με τα οποία το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης θα έχει όλες τις ιδιότητες ενός δίκαιου παιχνιδιού με την κλασική έννοια, εκτός από το ότι αυτά τα τέλη εισόδου θα εξαρτώνται από τον αριθμό των δοκιμών αντί να παραμένουν σταθερά. Τα μεταβλητά τέλη εισόδου είναι ανεπιθύμητα στις αίθουσες τυχερών παιχνιδιών, αλλά εκεί το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης είναι ούτως ή άλλως αδύνατο να υλοποιηθεί λόγω των πεπερασμένων πόρων. Στην περίπτωση μιας πεπερασμένης αναμενόμενης προσδοκίας $\mu = E(X_k) > 0$, ένα παιχνίδι ονομάζεται «δίκαιο» (fair), αν για μεγάλο n, ο λόγος των συσσωρευμένων κερδών του παιχνιδιού S_n προς τα συσσωρευμένα ποσά εισόδου e_n είναι με μεγάλη πιθανότητα (κοντά στο 1) να είναι κοντά στη μονάδα. Εάν $E(X_k)$ δεν υπάρχει δεν μπορούμε να διατηρήσουμε τα τέλη εισόδου σταθερά αλλά μπορούμε να τα προσδιορίσουμε με άλλον τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι τα ποσά εισόδου e_n είναι δίκαια αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{e_n} - 1\right| > \varepsilon\right\} \to 0,$$

το οποίο έρχεται σε αναλογία με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών»

(Feller, 1968)

Στη συνέχεια ο Feller αποδεικνύει ότι μια δίκαιη τιμή εισόδου για να παίξει κάποιος n παιχνίδια είναι $e_n = n\log_2 n$. Η προσέγγιση αυτή αγγίζει τα αποτελέσματα που παρουσίασε ο Buffon.

5.4.2 Η προσέγγιση των Y.S. Chow και Herbert Robbins

Το 1961 οι Y.S. Chow και Herbert Robbins προχώρησαν ένα βήμα παρακάτω την συνεισφορά του Feller στο παράδοξο. Απέδειξαν ότι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δεν εφαρμόζεται στο παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης.

Σημειώνοντας το αποτέλεσμα του Feller, ότι δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{e_n} = 1, \qquad \sigma\chi\varepsilon\delta\acute{o}\nu\ \beta\acute{\varepsilon}\beta\alpha\iota\alpha\ (almost\ surely),$$

υπέθεσαν ότι αν εφαρμοζόταν ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών, τότε θα έπρεπε να ισχύει.

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{e_n} = 1\right\} = 1.$$

Απέδειξαν όμως με τη βοήθεια του λήμματος Borel-Cantelli ότι:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{e_n} = 1\right\} = 0$$

(Y.S. Chow, Herbert Robbins, 1961)

5.4.3 Η ακολουθία του Hugo Steinhaus

Το 1949 ο Hugo Steinhaus πρότεινε μια λύση που περιλαμβανόταν σε μια παράγραφο 16 γραμμών. Παρατηρώντας ότι το να κερδίσεις 2 χρηματικές μονάδες στο παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης αναμένεται να συμβεί στο 1/2 των παιχνιδιών, το να κερδίσεις 4 χρηματικές μονάδες αναμένεται να συμβεί στο 1/4 των παιχνιδιών, το να κερδίσεις 8 χρηματικές μονάδες αναμένεται να συμβεί στο 1/8 των παιχνιδιών και γενικά το να κερδίσεις 2^n χρηματικές μονάδες αναμένεται να συμβεί στο $\frac{1}{2^n}$ των παιχνιδιών. Έφτιαξε μια ακολουθία ως εξής:

Ξεκινάμε από μια ακολουθία που αποτελείται από επαναλαμβανόμενα 2.

2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2_2…

Στη συνέχεια σε κάθε δεύτερο κενό χώρο τοποθετούμε τη τιμή 4

242_242_242_242_242_242_242_242_242_2…

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και σε κάθε δεύτερο κενο που έχει απομείνει τοποθετούμε την τιμή 8

2428242_2428242_2428242_2428242_24282…

Τελικά προκύπτει μια ακολουθία της μορφής

2,4,2,8,2,4,2,16,2,4,2,8,2,4,2,32,2,4,2,8,2,4,2,16,2,4,2,8,2,4,2,64,2,4,2,8,2…

Όπου το 2 εμφανίζεται κάθε 2 θέσεις το 4 εμφανίζεται κάθε 4 θέσεις το 8 εμφανίζεται κάθε 8 θέσεις και γενικά το 2^n εμφανίζεται κάθε 2^n θέσεις. Για να παίξει κάποιος το παιχνίδι θα πρέπει να πληρώσει 2 χρηματικές μονάδες στο πρώτο παιχνίδι 4 χρηματικές μονάδες στο δεύτερο παιχνίδι, 2 χρηματικές μονάδες τρίτο παιχνίδι και τα λοιπά η ακολουθία αυτή ονομάστηκε ακολουθία Steinhaus και να συμβολίζεται με $\{a_n\}$. οι ($Gsörgö$, Simons, 1993)

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε τις εξής ποσότητες:

Το μερικό άθροισμα n όρων ορίζεται ως

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_n,$$

Και το μέσο ποντάρισμα που προκύπτει από την επανάληψη n παιχνιδιών, ορίζεται ως:

$$\overline{a_n} := \frac{s_n}{n}$$

Το μέσο ποντάρισμα αυτό είναι άμεσα συγκρίσιμο με του μέσο ποντάρισμα του Feller που ήταν ίσο με $\log_2 n$.

Μάλιστα το 1993 οι $Sántor\ Gsörgö$ και Gordon Simons μελέτησαν σε βάθος τις προσεγγίσεις όλων των προγενέστερων και απέδειξαν ότι τα δύο αυτά πονταρίσματα συγκλίνουν. Δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\overline{a_n}}{\log_2 n} \to 1, \ \ καθώς\ n \to \infty.$$

(Huang, 2013)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Έπειτα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση και παρουσίαση που προηγήθηκε, ακολουθεί μια ποσοτική έρευνα, η οποία στηρίζεται σε ένα σύντομο ερωτηματολόγιο που κατασκευάστηκε με σκοπό να κατηγοριοποιήσει τον πληθυσμό ως προς τη συμπεριφορά του απέναντι στο ρίσκο, να διερευνήσει ποιοι παράγοντες οδηγούν στη συμπεριφορά αυτή και τέλος να διασταυρώσει ορισμένα συμπεράσματα που προέκυψαν από την βιβλιογραφική ανασκόπηση.

6.1 Ερωτηματολόγιο έρευνας

Για τον σκοπό της ποσοτικής έρευνας ερωτήθηκαν 110 άτομα διαφόρων ηλικιών, εκπαιδευτικού υποβάθρου και οικονομικής κατάστασης. Τα άτομα αυτά επιλέχθηκαν τυχαία από το σύνολο του πληθυσμού και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Για την συμμετοχή τους στην έρευνα, τα άτομα δεν χρειαζόταν να πληρούν κάποια προϋπόθεση καθώς το ερωτηματολόγιο απευθυνόταν στο σύνολο του πληθυσμού.

Το ερωτηματολόγιο το οποίο κλήθηκαν να συμπληρώσουν αποτελείται από 13 ερωτήσεις. Οι έξι πρώτες έχουν σκοπό να φτιάξουν το προφίλ του συμμετέχοντα, ενώ οι υπόλοιπες 7 αντιπροσωπεύουν τη στάση τους απέναντι στο ρίσκο και τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνουν αποφάσεις. Το ερωτηματολόγιο αυτό παρουσιάζεται στο παράρτημα Α.

6.2 Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε η περιγραφική μέθοδος. Κατά τη χρήση της μεθόδου αυτής δημιουργήθηκαν διαγράμματα κυρίως με τη μορφή πίττας προκυμμένου να ποσοτικοποιηθούν τα δεδομένα και να γίνει ευκολότερη η εξαγωγή συμπερασμάτων. Για την δημιουργία των πινάκων και των γραφημάτων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό SPSS.

Σε πρώτη φάση ας δούμε τα αποτελέσματα των πρώτων έξι ερωτήσεων που διερευνούσαν το προφίλ των συμμετεχόντων.

- Η πρώτη ερώτηση αφορούσε το φύλο του συμμετέχοντα και τα αποτελέσματα της παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6.1

Αποτελέσματα ερώτησης 1

Φύλο	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Άνδρας	52	47,3
Γυναίκα	58	52,7
Σύνολο	110	100

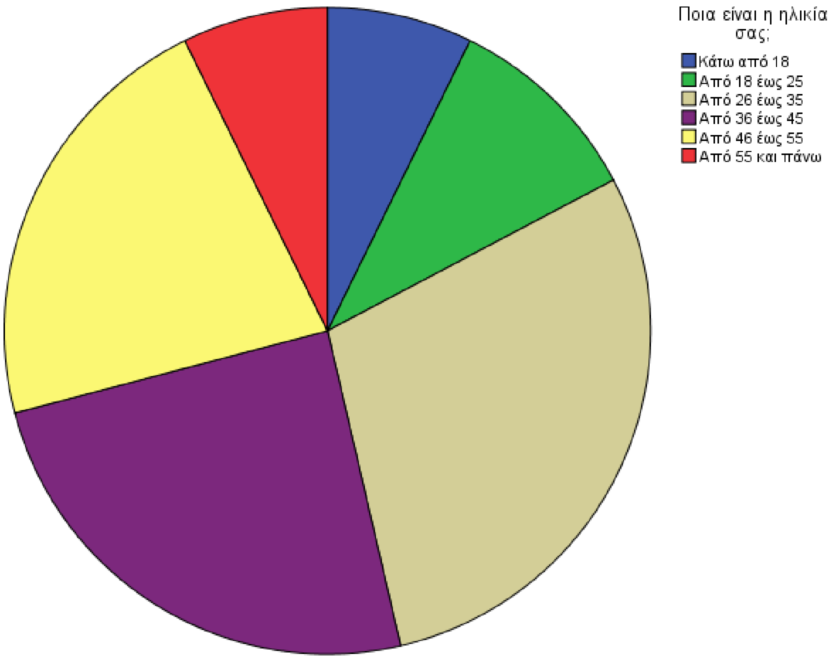
- Η δεύτερη ερώτηση αφορούσε την ηλικία του συμμετέχοντα και τα αποτελέσματά της παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6.2

Αποτελέσματα ερώτησης 2

Ηλικία	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Κάτω από 18	8	7,3
Από 18 έως 25	11	10
Από 26 έως 35	32	29,1
Από 36 έως 45	27	24,5
Από 46 έως 55	24	21,8
Από 55 και πάνω	8	7,3
Σύνολο	110	100

Το κυκλικό διάγραμμα που παρουσιάζει τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το εξής:



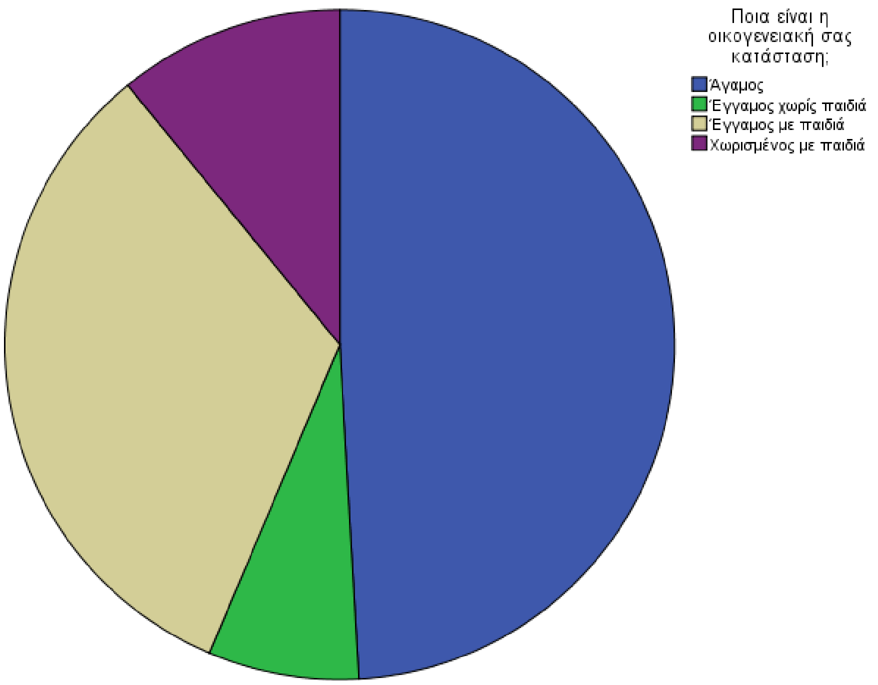
- Η τρίτη ερώτηση αφορούσε την οικογενειακή κατάσταση του συμμετέχοντα και τα αποτελέσματα της παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6.3

Αποτελέσματα ερώτησης 3

Οικογενειακή κατάσταση	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Άγαμος	54	49,1
Έγγαμος χωρίς παιδιά	8	7,3
Έγγαμος με παιδιά	36	32,7
Χωρισμένος με παιδιά	12	10,9
Σύνολο	110	100

Το κυκλικό διάγραμμα που παρουσιάζει τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το εξής:



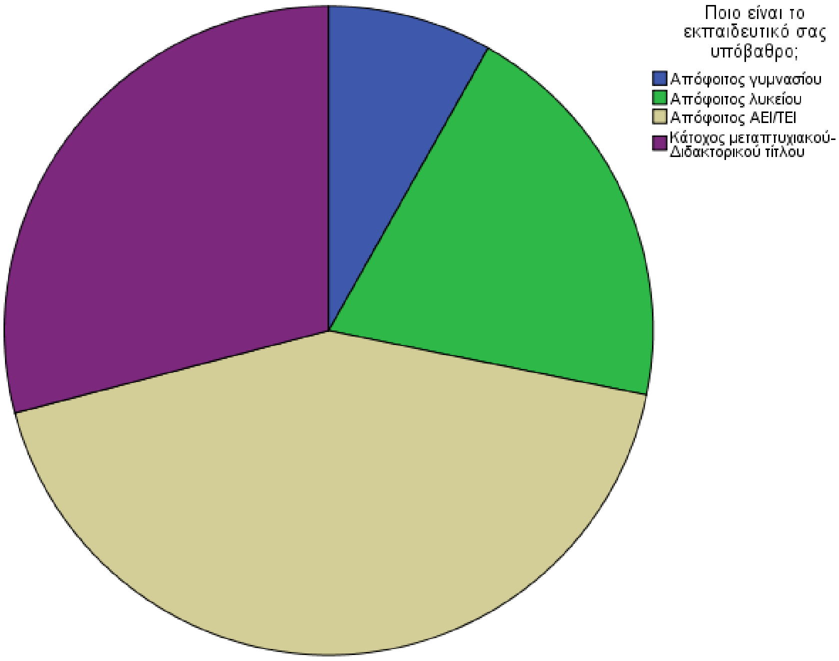
- Η τέταρτη ερώτηση αφορούσε το εκπαιδευτικό υπόβαθρο του συμμετέχοντα και τα αποτελέσματα της παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6.4

Αποτελέσματα ερώτησης 4

Εκπαιδευτικό υπόβαθρο	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Απόφοιτος γυμνασίου	9	8,2
Απόφοιτος λυκείου	22	20
Απόφοιτος ΑΕΙ/ΤΕΙ	47	42,7
Κάτοχος μεταπτυχιακού-Διδακτορικού τίτλου	32	29,1
Σύνολο	110	100

Το κυκλικό διάγραμμα που παρουσιάζει τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το εξής:



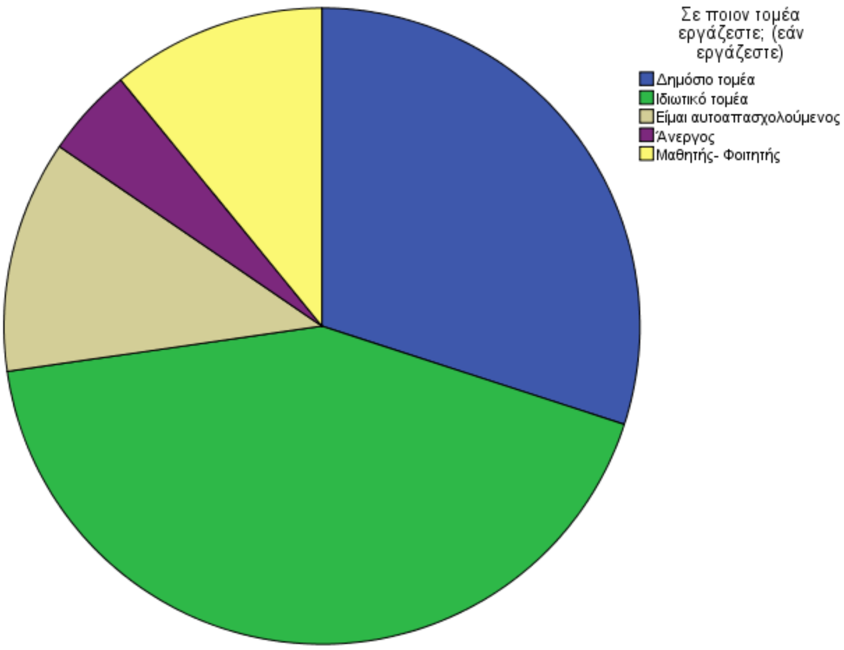
- Η πέμπτη ερώτηση ερευνούσε τον τομέα στον οποίο εργάζεται ο συμμετέχων και τα αποτελέσματά της παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6.5

Αποτελέσματα ερώτησης 5

Τομέας εργασίας	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Δημόσιο τομέα	33	30
Ιδιωτικό τομέα	47	42,7
Είμαι αυτοαπασχολούμενος	13	11,8
Άνεργος	5	4,5
Μαθητής – Φοιτητής	12	10,9
Σύνολο	110	100

Το κυκλικό διάγραμμα που παρουσιάζει τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το εξής:



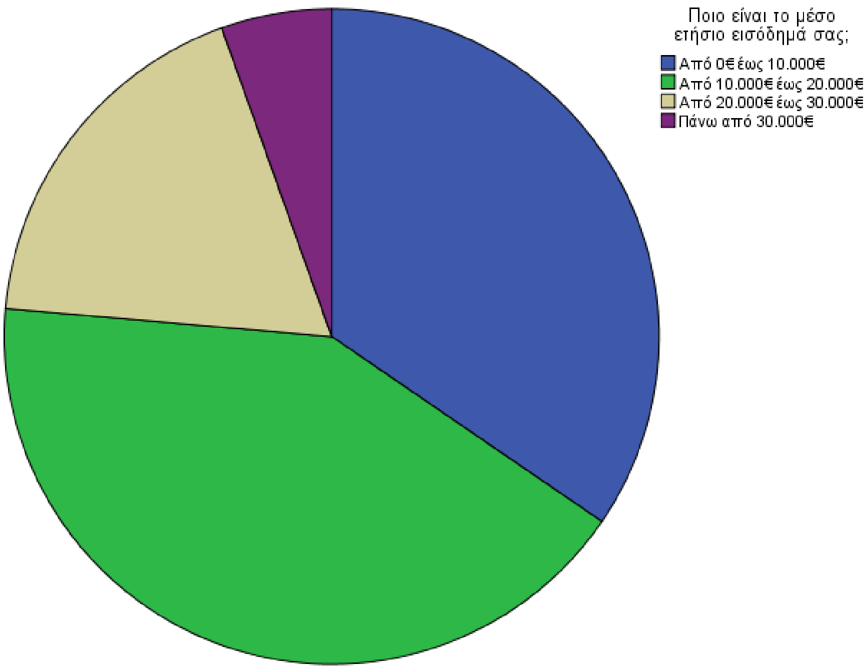
- Η έκτη ερώτηση αφορούσε το μέσο ετήσιο εισόδημα του συμμετέχοντα και τα αποτελέσματα της παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.6

Αποτελέσματα ερώτησης 6

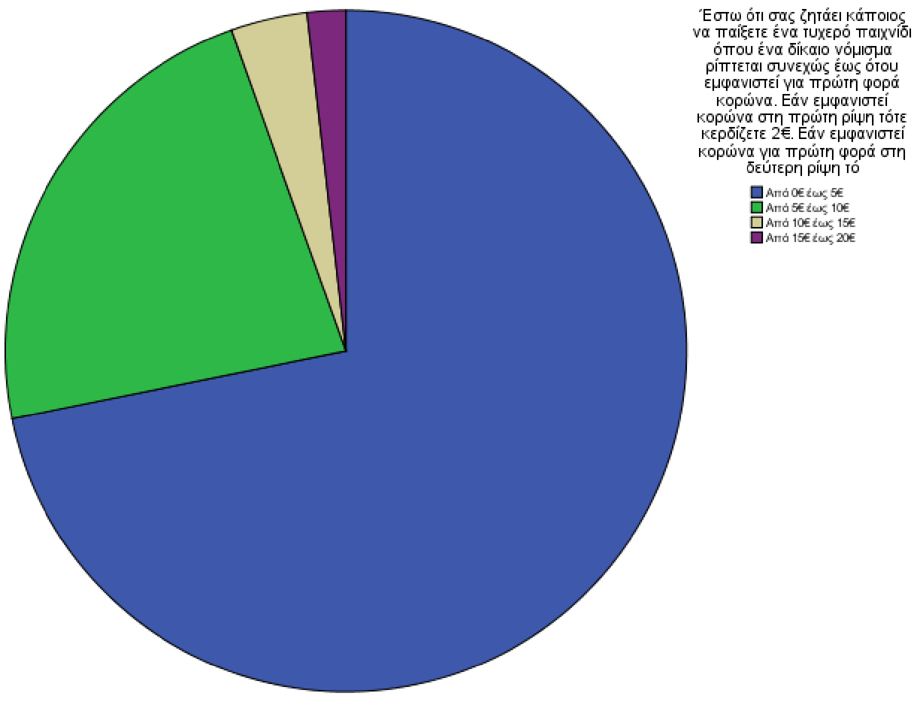
Μέσο ετήσιο εισόδημα	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Από 0€ έως 10.000€	38	34,5
Από 10.000€ έως 20.000€	46	41,8
Από 20.000€ έως 30.000€	20	18,2
Πάνω από 30.000€	6	5,5
Σύνολο	110	100

Το κυκλικό διάγραμμα που παρουσιάζει τα παραπάνω αποτελέσματα είναι το εξής:



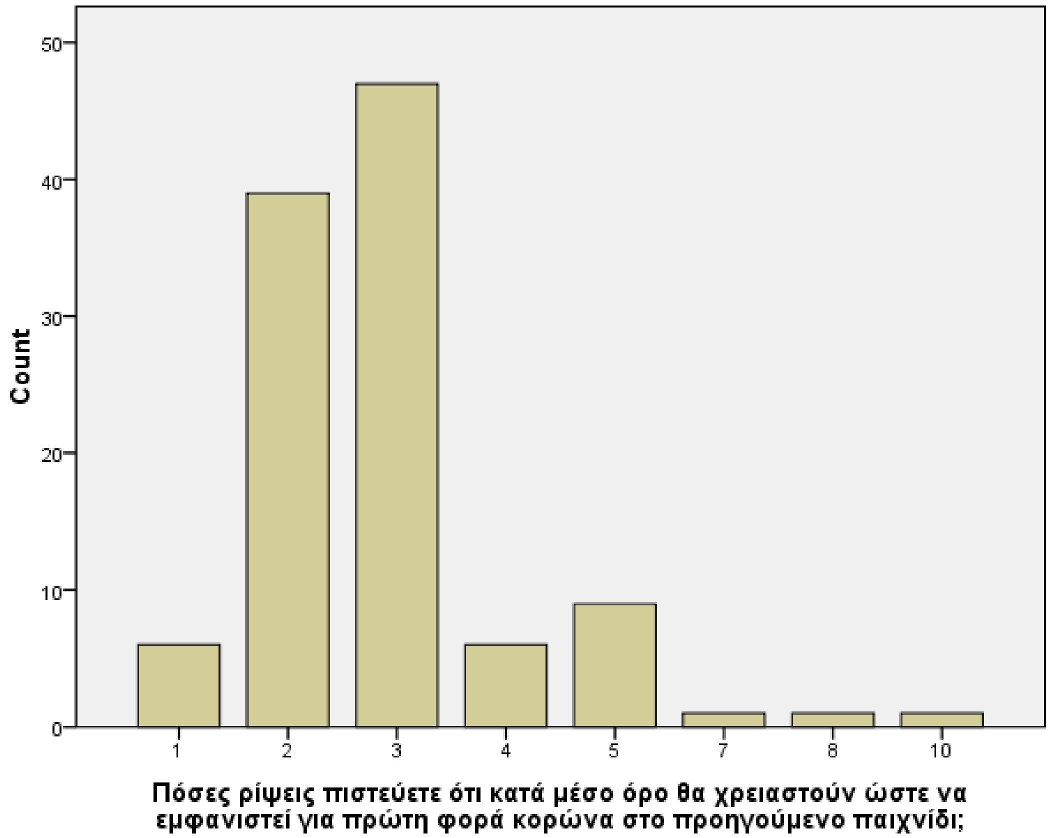
Οι επόμενες 7 ερωτήσεις όπως είδαμε μελετούν τη συμπεριφορά των ατόμων απέναντι στο ρίσκο και περιέχουν αρκετά αξιοσημείωτα συμπεράσματα, τα οποία περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω.

- Στην έβδομη ερώτηση παρουσιάζεται το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης και ζητείται από τους συμμετέχοντες να προσδιορίσουν ποια θα ήταν κατά τη γνώμη τους μια δίκαιη τιμή εισόδου στο παιχνίδι. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα εξής:



Όπως προκύπτει από το παραπάνω γράφημα το 71,8% των ερωτηθέντων είναι διατεθειμένο να δώσει από 0€ έως 5€ για να συμμετάσχει στο παιχνίδι. Παράλληλα το 22,7% των ερωτηθέντων υπολογίζει την τιμή εισόδου από 5€ έως 10€. Βλέπουμε λοιπόν ότι συνολικά το 94,5% του πληθυσμού θα πόνταρε κάτω από 10€ για να παίξει το συγκεκριμένο παιχνίδι, κάτι που είναι απολύτως φυσιολογικό.

- Στην όγδοη ερώτηση ζητάμε από τους συμμετέχοντες να προσδιορίσουν σε πόσες ρίψεις αναμένουν να εμφανιστεί για πρώτη φορά κεφαλή. Οι απαντήσεις τους συνοψίζονται στο παρακάτω γράφημα.



Στη παραπάνω ερώτηση το 35,5% των ερωτηθέντων απάντησε ότι θα χρειαστούν περίπου δύο ρίψεις, ενώ το 42,7% απάντησε περίπου τρεις. Συνολικά το 83,6% πιστεύει ότι θα χρειαστούν το πολύ 3 ρίψεις για να τερματιστεί το παιχνίδι. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το 8,2% απάντησε ότι θα χρειαστούν 5 ρίψεις έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά κεφαλή.

- Η ένατη ερώτηση έχει σκοπό να διερευνήσει εάν το σταμάτημα του παιχνιδιού μετά το πέρας ενός πλήθους ρίψεων, επηρεάζει το αρχικό ποντάρισμα του παίκτη. Κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να συμβαίνει καθώς τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

Συνολικά το 80% των ερωτηθέντων απάντησε ότι δεν επηρεάζεται το αρχικό του ποντάρισμα από το σταμάτημα του παιχνιδιού. Παράλληλα το 13,6% απάντησε ότι θα πόνταρε περισσότερα χρήματα έχοντας υπόψη του αυτή τη πληροφορία, ενώ μόλις το 6,4% απάντησε ότι θα πόνταρε λιγότερα χρήματα.

- Η δέκατη ερώτηση προτρέπει τους συμμετέχοντες να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο επενδύσεις που έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Σκοπός είναι κατηγοριοποιηθεί το άτομο που συμμετέχει ως προς την αποστροφή του απέναντι στον κίνδυνο (κινδυνόφοβος, κινδυνοουδέτερος, κινδυνόφιλος). Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

Πίνακας 6.7

Αποτελέσματα ερώτησης 10

	Συχνότητα	**Ποσοστό %**
Επένδυση Α	24	21,8
Επένδυση Β	74	67,3
Δεν έχω προτίμηση	12	10,9
Σύνολο	110	100

Το 21,8% των ερωτηθέντων συμπεριφέρθηκε ριψοκίνδυνα και κατατάχτηκε στην κατηγορία κινδυνόφιλος. Αντίθετα το 67,3% των ερωτηθέντων συμπεριφέρθηκε συντηρητικά και κατατάχτηκε στη κατηγορία κινδυνόφοβος, ενώ το 10,9% των ερωτηθέντων δεν είχε προτίμηση απέναντι στις δύο επενδύσεις και αποτελεί την κατηγορία των κινδυνοουδέτερων.

- Στην εντέκατη ερώτηση διερευνάται το αν οι άνθρωποι τείνουν να γίνουν ριψοκίνδυνοι σε αποφάσεις μικρής ζημίας αλλά τεράστιου κέρδους. Κάτι τέτοιο φαίνεται να συμβαίνει. Όπως προκύπτει από την έρευνα μόλις το 21,8% των ερωτηθέντων συμπεριφέρθηκε συντηρητικά. Ένα ποσοστό πολύ μικρότερο από το 67,3% της προηγούμενης ερώτησης. Ταυτόχρονα το 78,2% των ερωτηθέντων συμπεριφέρθηκε ριψοκίνδυνα. Υπερτριπλάσιο από το προηγούμενο ποσοστό.
- Οι τελευταίες δύο ερωτήσεις αποτελούν παράδειγμα του παραδόξου του Allais που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5. Έχουν σκοπό να διερευνήσουν πόσοι από τους ερωτηθέντες υποσυνείδητα συμφωνούν με τον Allais και απορρίπτουν το θεώρημα αναπαράστασης του Savage και πόσοι συμφωνούν με το αξίωμα της ανεξαρτησίας του Savage, οπότε εγκρίνουν το θεώρημα ανεξαρτησίας που πρότεινε.

Στην δωδέκατη ερώτηση το 27,3% απάντησε την θεραπεία Α ενώ το 72,7% την θεραπεία Β. Παράλληλα στη τελευταία ερώτηση και οι δύο επιλογές κυμάνθηκαν στο 50%.

Όσον αφορά τον συνδυασμό των παραπάνω δύο ερωτήσεων, όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 5, εάν κάποιος επιλέξει κάποιον από τους συνδυασμούς θεραπειών Α-Γ ή Β-Δ, τότε συμφωνεί με το αξίωμα ανεξαρτησίας του Savage. Σε αντίθετη περίπτωση συμφωνεί με τον Allais. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου είναι ότι δεν ήταν δυνατό να βγει συμπέρασμα προτίμησης ως προς τις δύο θεωρίες καθώς οι απαντήσεις ήταν απόλυτα συμμετρικές, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 6.8

Αποτελέσματα παραδείγματος του παραδόξου του Allais

		Ποια από τις θεραπείες Γ και Δ θα επιλέξετε;		
		Την θεραπεία Γ	Την θεραπεία Δ	Σύνολο
Ποια από τις θεραπείες Α και Β θα επιλέξετε;	Την θεραπεία Α	15	15	30
	Την θεραπεία Β	40	40	80
Σύνολο		55	55	110

Στη συνέχεια της ενότητας θα εξάγουμε συμπεράσματα για το κατά πόσο η στάση απέναντι στο ρίσκο σχετίζεται με το φύλο, την οικογενειακή κατάσταση, τον τομέα εργασίας, το εισόδημα κλπ. Προκειμένου να συμβεί αυτό θα συγκρίνουμε τις απαντήσεις των ερωτηθέντων στην ερώτηση 10 του ερωτηματολογίου με τις πρώτες έξι ερωτήσεις που αφορούσαν το προφίλ των ατόμων του δείγματος. Γενικά όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει από τις απαντήσεις της ερώτησης 10, περίπου το 70% του πληθυσμού φέρεται συντηρητικά, περίπου το 20% ριψοκίνδυνα, ενώ ένα 10% είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο σύγκρισης σε σχέση με τα επιμέρους χαρακτηριστικά που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Όσο αφορά την συσχέτιση του φύλου με την αποστροφή κινδύνου, τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 6.9

Συσχέτιση αποστροφής κινδύνου και φύλου

		Φύλο	
		Άνδρας	Γυναίκα
Επιλογή επένδυσης	Επένδυση Α	10	14
	Επένδυση Β	33	41
	Δεν έχω προτίμηση ανάμεσα στις δύο επενδύσεις	9	3
	Σύνολο	52	58

Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο αφορά τους άνδρες το 19,2% είναι ριψοκίνδυνοι, το 63,5% είναι συντηρητικοί, ενώ το 17,3% είναι ουδέτεροι. Αντίστοιχα στις γυναίκες το 24,1% είναι ριψοκίνδυνες, το 70,7% συντηρητικές, ενώ το 5,2% ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο. Παρατηρούμε ότι όσο αφορά την ουδετερότητα ως προς τον κίνδυνο ότι το ποσοστό αυτό στις γυναίκες έχει μειωθεί αισθητά σε σύγκριση με τους άνδρες. Η διαφορά αυτή μοιράστηκε σχεδόν εξίσου ανάμεσα στις άλλες δύο κατηγορίες. Με μικρή διαφορά φαίνεται το μεγαλύτερο ποσοστό αυτής της διαφοράς στις γυναίκες να έχει μεταφερθεί στους συντηρητικούς, επομένως με κάθε επιφύλαξη μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι γυναίκες τείνουν να είναι περισσότερο συντηρητικές απέναντι στον κίνδυνο σε σχέση με τους άνδρες.

Στη συνέχεια ας δούμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα σε σχέση με την ηλικία. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω πίνακας:

Πίνακας 6.10

Συσχέτιση αποστροφής κινδύνου και ηλικίας

		Ηλικία					
		Κάτω από 18	Από 18 έως 25	Από 26 έως 35	Από 36 έως 45	Από 46 έως 55	Από 55 και πάνω
Επιλογή επένδυσης	Επένδυση Α	2	4	5	5	7	1
	Επένδυση Β	5	6	23	19	15	6
	Δεν έχω προτίμηση	1	1	4	3	2	1
	Σύνολο	8	11	32	27	24	8

Τα αξιοσημείωτα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα είναι τα εξής. Στις ηλικίες μέχρι και 25 ετών φαίνεται τα ποσοστά εκείνων που έδρασαν ριψοκίνδυνα να είναι αρκετά ανεβασμένα σε σχέση με τον μέσο όρο. Για παράδειγμα στις ηλικίες από 18 έως 25 το ποσοστό των ριψοκίνδυνων ατόμων έφτασε το 36,4%. Σαφώς περισσότεροι είναι οι συντηρητικοί ακόμα και σε αυτές τις ηλικίες. Στα άτομα ηλικιών από 26 έως 45 αρχίζει να ανοίγει η ψαλίδα ανάμεσα σε ριψοκίνδυνους και συντηρητικούς. Οι τελευταίοι σε αυτές τις ηλικίες κατέχουν ένα ποσοστό γύρο στο 70%. Στις ηλικίες από 46 έως 55 η διαφορά μικραίνει κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο και ίσως αποδίδεται στην επιλογή του δείγματος. Τέλος τα άτομα πάνω από 55 ετών φαίνεται να γίνονται περισσότερο συντηρητικά καθώς τα ποσοστό τους φτάνει την μεγαλύτερη τιμή του, εκείνο του 75%.

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας θα εξετάσουμε το κατά πόσο η οικογενειακή κατάσταση των συμμετεχόντων και οι ευθύνες που περιλαμβάνουν, αποτυπώνονται στην αποστροφή τους απέναντι στον κίνδυνο. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας.

Πίνακας 6.11

Συσχέτιση αποστροφής κινδύνου και οικογενειακής κατάστασης

		Οικογενειακή κατάσταση			
		Άγαμος	Έγγαμος χωρίς παιδιά	Έγγαμος με παιδιά	Χωρισμένος με παιδιά
Επιλογή επένδυσης	Επένδυση Α	11	2	8	3
	Επένδυση Β	35	4	26	9
	Δεν έχω προτίμηση	8	2	2	0
		54	8	36	12

Παρατηρούμε ότι στις πρώτες δύο κατηγορίες (Άγαμος, Έγγαμος χωρίς παιδιά) το ποσοστό των συντηρητικών ατόμων κυμαίνεται από τον μέσο όρο και κάτω. Αντίστοιχα οι ριψοκίνδυνοι και οι ουδέτεροι κατέχουν ποσοστά από τον μέσο όρο και πάνω. Το κλίμα αλλάζει στις τελευταίες δύο κατηγορίες (έγγαμος με παιδιά, χωρισμένος με παιδιά) καθώς τα ποσοστά των συντηρητικών υπερβαίνουν τον μέσο όρο ενώ τα υπόλοιπα ποσοστά υποχωρούν. Αποκορύφωμα αποτελεί το ποσοστό των συντηρητικών συμμετεχόντων στην κατηγορία «χωρισμένος με παιδία» που φτάνει το 75%. Φαίνεται πως η ευθύνη μιας οικογένειας και οι υποχρεώσεις της ανατροφής παιδιών επηρεάζει σημαντικά την αποστροφή απέναντι στον κίνδυνο.

Ακολουθεί η συσχέτιση του εκπαιδευτικού υπόβαθρου ενός ατόμου με την αποστροφή απέναντι στον κίνδυνο. Ο πίνακας 5.12 συνοψίζει τα αποτελέσματα της έρευνας.

Πίνακας 6.12

Συσχέτιση αποστροφής κινδύνου και εκπαιδευτικού υπόβαθρου

		Εκπαιδευτικό υπόβαθρο			
		Απόφοιτος γυμνασίου	Απόφοιτος λυκείου	Απόφοιτος ΑΕΙ/ΤΕΙ	Κάτοχος μεταπτυχιακού-Διδακτορικού τίτλου
Επιλογή επένδυσης	Επένδυση Α	2	6	12	4
	Επένδυση Β	6	12	33	23
	Δεν έχω προτίμηση	1	4	2	5
	Σύνολο	9	22	47	32

Όσο αφορά τους αποφοίτους γυμνασίου τα ποσοστά της έρευνας είναι πολύ κοντά στον μέσο όρο, δηλαδή στα ποσοστά που δηλώθηκαν στην ερώτηση 10. Μια σημαντική αλλαγή παρατηρείται στους αποφοίτους λυκείου καθώς το 54,5% των συμμετεχόντων δρα συντηρητικά, το 27,2% ριψοκίνδυνα, ενώ το 18,3% είναι ουδέτερο. Στις τελευταίες δύο κατηγορίες τα ποσοστά επανέρχονται κοντά στον μέσο όρο. Επομένως δεν φαίνεται το εκπαιδευτικό υπόβαθρο να επηρεάζει σημαντικά την αποστροφή στον κίνδυνο.

- Ο προτελευταίος παράγοντας που εξετάζουμε τη σχέση του με την αποστροφή κινδύνου είναι ο τομέας στον οποίο εργάζεται το κάθε άτομο. Ας δούμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τι έδειξε η έρευνα.

Πίνακας 6.13

Συσχέτιση αποστροφής κινδύνου και εργασίας

		Τομέας εργασίας				
		Δημόσιος τομέας	Ιδιωτικός τομέας	Αυτοαπασχο-λούμενος	Άνεργος	Μαθητής-Φοιτητής
Επιλογή επένδυσης	Επένδυση Α	10	9	0	1	4
	Επένδυση Β	20	34	11	3	6
	Δεν έχω προτίμηση	3	4	2	1	2
	Σύνολο	33	47	13	5	12

Στον παραπάνω πίνακα διακρίνουμε τρείς ομάδες εργαζομένων όσο αφορά την αποστροφή απέναντι στο ρίσκο. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν οι εργαζόμενοι του ιδιωτικού τομέα και οι άνεργοι. Τα ποσοστά αποστροφής του ρίσκου κυμαίνονται κοντά στον μέσο όρο, οπότε δεν προκύπτει κάποια μετρήσιμη απόκλιση. Ενδεικτικά είναι τα ποσοστά των ιδιωτικών υπαλλήλων όπου το 19,1% συμπεριφέρθηκε ριψοκίνδυνα, το 72,4% συντηρητικά, ενώ το 8,5% ήταν ουδέτερο. Στην δεύτερη ομάδα κατατάσσονται οι δημόσιοι υπάλληλοι και οι μαθητές – φοιτητές, οι οποίοι έδρασαν αρκετά ριψοκίνδυνα. Το 30,3% των δημοσίων υπαλλήλων έδρασαν ριψοκίνδυνα, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό στους μαθητές - φοιτητές έφτασε το 33,3%. Και τα δύο ποσοστά είναι αρκετά μεγαλύτερα από τον μέσο όρο. Το αυξημένο ποσοστό στους μαθητές – φοιτητές ίσως οφείλεται στο νεαρό της ηλικίας όπως είδαμε και στον πίνακα 5.10. Όσο αφορά τους δημοσίους υπαλλήλους φαίνεται πως η σταθερότητα του εργασιακού περιβάλλοντος επιδρά θετικά της προτίμηση του ρίσκου. Από την άλλη πλευρά έχουμε τους αυτοαπασχολούμενους, οι οποίοι συμπεριφέρθηκαν άκρως συντηρητικά. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι κανένας δεν επέλεξε την επένδυση Α, ενώ σχεδόν όλοι επέλεξαν την επένδυση Β. φαίνεται ότι η αβεβαιότητα που συναντάμε σε αυτά τα επαγγέλματα επηρεάζει σημαντικά την στάση τους απέναντι στο ρίσκο.

Ένα σημείο της βιβλιογραφικής επισκόπησης που θέλει το παρόν ερωτηματολόγιο να εξετάσει είναι η θεωρία του Tversky. Δηλαδή η θέση ότι το άτομο τείνει να είναι συντηρητικό σε αποφάσεις μεγάλου κόστους και μικρού κέρδους, ενώ τείνει να είναι ριψοκίνδυνο σε αποφάσεις μικρού κόστους και πολύ μεγάλου κέρδους. Προκυμμένου να προκύψουν ασφαλή συμπεράσματα για την παραπάνω θεωρία θα διασταυρώσουμε τα αποτελέσματα της ερώτησης 10 με εκείνα της ερώτησης 11. Ο πίνακας 5.14 δείχνει αυτή τη διασταύρωση.

Πίνακας 6.14

Διερεύνηση της αξιοπιστίας μας θεωρίας του Tversky

		Θα αγοράζατε ένα λαχείο που κοστίζει 0,50€ και έχει πιθανότητα 1 μας 100.000 να κερδίσετε 10.000€;	
		ΌΧΙ	ΝΑΙ
Έστω ότι έχετε να επιλέξετε ανάμεσα σε δύο επενδύσεις Α και Β. Στην επένδυση Α έχετε 50% πιθανότητα να κερδίσετε 2.000€ και 50% πιθανότητα να κερδίσετε 2.500€. Στην επένδυση Β έχετε 100% πιθανότητα να κερδίσετε 2.250€. Ποια από τις δύο επενδύσεις θα προτιμήσετε;	Επένδυση Α	6	18
	Επένδυση Β	16	58
	Δεν έχω προτίμηση ανάμεσα στις δύο επενδύσεις	2	10
Σύνολο		24	86

Βλέπουμε καθαρά ότι από τα 74 άτομα που συνολικά προτίμησαν την επένδυση Β, απάντησαν ότι θα αγόραζαν το λαχείο, αλλάζοντας στάση απέναντι στο ρίσκο. Σε ποσοστό αυτό μεταφράζεται ότι το 78,4% των συμμετεχόντων συμφωνούν υποσυνείδητα με τη θεωρία του Tversky. Από την άλλη πλευρά 6 από τους 24 που προτίμησαν την επένδυση Α, απάντησαν πως δεν θα αγόραζαν το λαχείο, δηλαδή το 25%.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας δείξαμε ότι η αποστροφή ενός ατόμου απέναντι στο ρίσκο εξαρτάται από την ηλικία, την οικογενειακή κατάσταση και τον τομέα εργασίας του. Λιγότερο εξαρτάται από το φύλο και το εκπαιδευτικό υπόβαθρο του ατόμου. Σε γενικές γραμμές το 70% του πληθυσμού φέρεται συντηρητικά, το 20% ριψοκίνδυνα, ενώ το 10% που απομένει είναι ουδέτερο απέναντι στο κίνδυνο. Τέλος φαίνεται ότι η θεωρία του Tversky βρήκε εφαρμογή στο δείγμα μας, ενώ δεν μπορέσαμε να συμπεράνουμε ποια από τις θεωρίες των Savage και Alais βρίσκει μεγαλύτερη εφαρμογή στο σύνολο του πληθυσμού.

6.3 Προσομοίωση του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης

Σημαντικό κομμάτι της παρούσας εργασίας αποτέλεσε το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης, καθώς το συγκεκριμένο παιχνίδι ήταν η αφετηρία των θεωριών που παρουσιάστηκαν στα παραπάνω κεφάλαια. Προκειμένου να δημιουργηθούν πρωτογενή στατιστικά δεδομένα και συμπεράσματα για το παιχνίδι, έγινε μια προσομοίωση του παιχνιδιού με τη χρήση του excel. Συγκεκριμένα ζητήσαμε από το λογισμικό να παράξει με τυχαίο τρόπο μια ακολουθία από τιμές 0 και 1 που αντιστοιχούν στα γράμματα και την κορώνα ενός δίκαιου νομίσματος. Η δημιουργία των τιμών αυτών κατέστη δυνατή με την χρήση την εντολή « RANDBETWEEN(0;1)». Συνολικά ζητήσαμε 1000 τιμές (0 και 1), με την σειρά που εμφανίστηκαν. Από αυτές τις 1000 τιμές οι 973 πρώτες οδήγησαν σε 500 επαναλήψεις του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης. Συνεπώς κατά τη προσομοίωσή μας λάβαμε υπόψη μόνο τις 973 πρώτες τιμές.

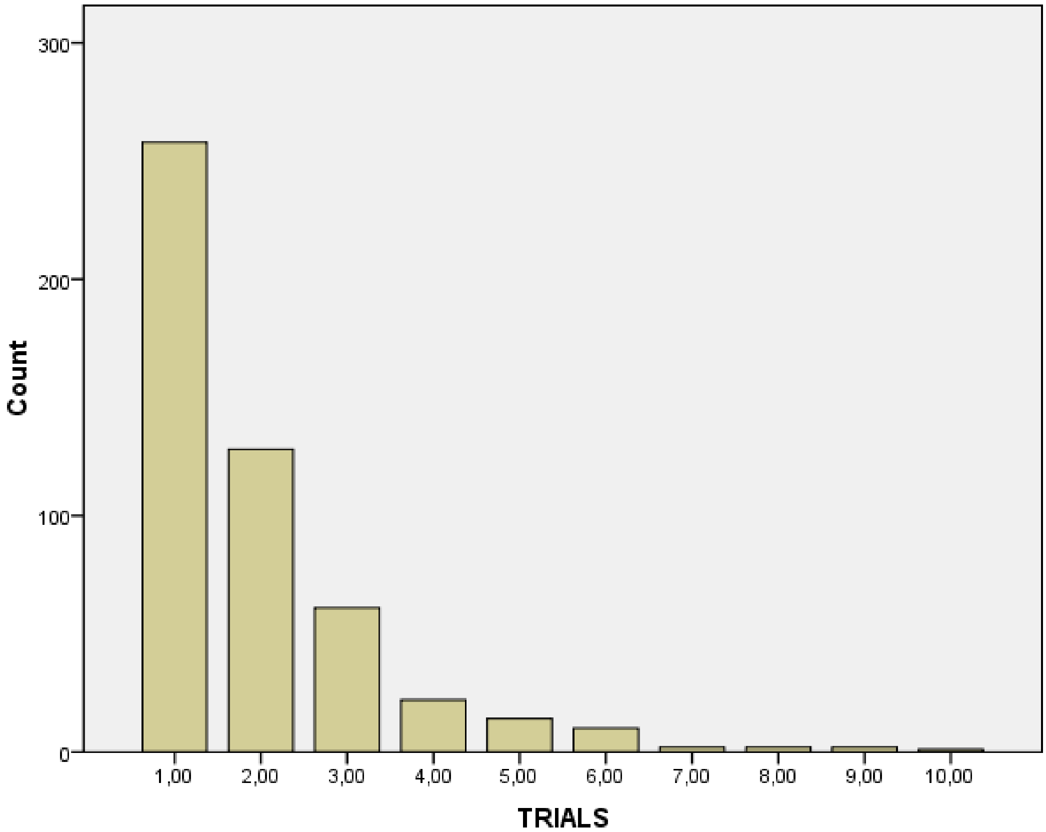
<u>Εφαρμογή</u>

Κάθε θέση στην ακολουθία μας προσομοίωνε την ρίψη ενός δίκαιου νομίσματος. Εάν εμφανιζόταν η τιμή 1, σηματοδοτούσε το τέλος ενός γύρου του παιχνιδιού της Αγίας Πετρούπολης. Εάν εμφανιζόταν η τιμή 0 προχωρούσαμε στην επόμενη τιμή καταμετρώντας πόσες θέσεις χρειάστηκαν ώστε να εμφανιστεί για πρώτη φορά η τιμή ένα. Με αυτόν τον τρόπο μετά από 973 ρίψεις πήραμε μια ακολουθία 500 όρων όπου κάθε της τιμής αντιστοιχούσε στο πλήθος των ρίψεων που χρειάστηκαν ώστε να τερματιστεί ένας γύρος του παιχνιδιού. Η ακολουθία που προέκυψε είναι η εξής:

2,6,7,4,3,2,1,4,1,2,3,2,2,1,2,3,6,3,2,3,2,2,1,1,2,1,1,1,2,1,1,3,1,1,3,3,2,2,1,3,1,2,2,1,1,1,2,2,1,1
,1,1,3,2,1,1,2,1,1,1,1,5,1,2,2,2,1,1,1,4,4,3,1,1,2,1,1,2,1,2,2,1,2,1,1,1,3,1,2,1,2,2,3,2,1,8,1,1,1,
4,2,3,1,3,1,1,1,3,2,8,6,4,4,3,1,1,2,1,1,1,4,2,5,2,1,1,1,2,1,3,6,3,1,2,3,1,1,2,1,3,1,3,2,1,1,1,1,4,2
,1,1,3,1,3,1,1,2,2,1,1,2,1,10,1,1,1,1,1,1,2,1,2,4,1,1,2,1,3,1,1,6,1,1,7,2,1,2,1,1,1,1,1,1,4,1,1,1,1
,1,1,1,1,3,2,1,1,1,5,1,1,1,9,2,3,2,5,2,3,1,1,1,1,3,3,1,1,2,1,1,1,1,5,4,5,1,1,1,1,2,3,1,1,1,2,1,3,1,
1,3,2,3,1,1,1,2,2,2,1,1,1,1,2,1,3,1,3,2,2,1,4,2,2,1,1,1,2,3,2,2,4,1,2,1,3,2,1,6,4,1,2,1,1,1,2,1,1,3
,3,1,1,1,1,1,6,1,3,1,2,2,3,9,1,1,2,2,1,2,1,1,3,1,1,2,3,1,2,1,1,2,1,2,1,2,2,1,1,3,2,1,1,1,1,2,1,1,4,
1,1,1,2,6,1,1,2,1,2,2,4,3,1,1,1,2,1,2,1,1,2,3,1,5,2,3,1,4,1,1,1,2,1,1,1,4,1,1,1,2,2,3,6,1,3,2,1,2,2
,1,5,3,1,1,2,1,2,1,3,6,1,1,5,2,1,2,3,1,3,2,1,1,2,5,2,1,2,4,1,4,1,5,5,3,1,2,1,1,2,2,1,2,1,1,1,2,1,2,
1,1,1,1,2,1,3,1,1,2,1,3,2,1,3,1,2,52,1,1,2,2,1,1,2,1,1,1,1,3,1,2,2,2,2,3,1,1,1,1,1,2,5,1,1,1,3,4,2,
1,1,2,1

Πριν εξάγουμε συμπεράσματα από την παραπάνω ακολουθία ας εξετάσουμε την αξιοπιστία του παραπάνω δείγματος. Για τον σκοπό αυτό θα συγκρίνουμε την πιθανότητα εμφάνισης της κάθε διακεκριμένης τιμής του δείγματός μας με την θεωρητική πιθανότητα εμφάνισης που προκύπτει από την ανάλυση του παραδόξου. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να τερματιστεί το παιχνίδι στην πρώτη ρίψη είναι 50%. Η τιμή 1 στο δείγμα μας έχει όντως πιθανότητα εμφάνισης κοντά στο 50%;

Για να απαντήσουμε στη παραπάνω ερώτηση κάναμε χρήση της εντολής «COUNTIF» στο excel, ώστε να βρούμε τον ακριβή αριθμό εμφάνισης της κάθε τιμής στο δείγμα μας και να υπολογίσουμε την πιθανότητα εμφάνισής του. Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται ο συχνότητες εμφάνισης της κάθε τιμής ενώ στον πίνακα 5.15 συγκρίνονται οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης που βρήκαμε με την πιθανότητα που περιμέναμε εξ ορισμού:



Πίνακας 6.15

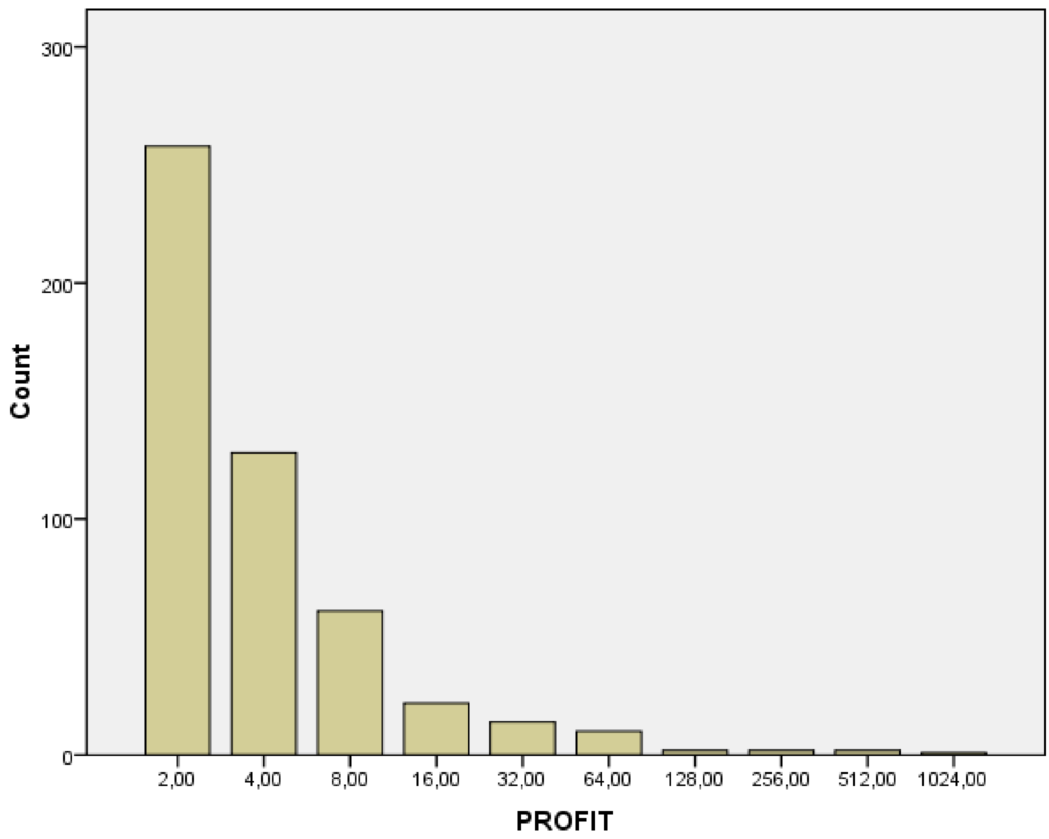
Σύγκριση αναμενόμενης πιθανότητας με σχετική συχνότητα εμφάνισης

Αριθμός ρίψεων παιχνιδιού	Αναμενόμενη πιθανότητα	Παρατηρηθείσα σχετική συχνότητα
1	0,5	0,516
2	0,25	0,256
3	0,125	0,122
4	0,0625	0,044
5	0,03125	0,028
6	0,015625	0,02
7	0,0078125	0,004
8	0,003906	0,004
9	0,001953	0,004
10	0,000976	0,002

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις από την αναμενόμενη πιθανότητα επομένως το δείγμα μας είναι αξιόπιστο.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το κέρδος ενός παίκτη που θα έπαιζε το παιχνίδι αυτό 500 φορές σύμφωνα με τις τιμές του δείγματός μας. Στην περίπτωσή μας ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης σε κάθε γύρο δίνει 5€ προκυμμένου να συμμετάσχει στο παιχνίδι (η τιμή αυτή ήταν η επικρατέστερη στο ερωτηματολόγιο που προηγήθηκε).

Πάλι με τη χρήση του excel υπολογίσαμε το κέρδος του παίκτη από κάθε γύρο χωρίς να λάβουμε υπόψη το ποντάρισμα. Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται οι συχνότητες των κερδών του.



Η πρόσθεση των τιμών αυτών μας έδωσε το σύνολο των **5.772€**. Αν διαιρέσουμε την τιμή αυτή με το πλήθος των παιχνιδιών (500) προκύπτει ένα μέσο έσοδο της τάξης των **11,544€**. Το κέρδος του παίκτη μετά από 500 παιχνίδια ανέρχεται στο ποσό των **3.272€.**

Παρότι το παιχνίδι τερματίστηκε στην πρώτη ρίψη πάνω από τις μισές φορές (συγκεκριμένα 258 φορές), το μέσο κέρδος (χωρίς να λάβουμε υπόψη το ποντάρισμα) είναι αρκετά μεγάλο. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι οι τιμές 8,9 και 10 εμφανίστηκαν στο δείγμα περισσότερες φορές από το αναμενόμενο.

Όσο αφορά το ποντάρισμα, η τιμή που επιλέχθηκε είναι κοντά στις εκτιμήσεις των Daniel Bernoulli, Cramer, Buffon και Feller. Ταυτόχρονα είναι και η επικρατέστερη τιμή στο ερωτηματολόγιο που προηγήθηκε. Ο συνδυασμός του ελαφρώς αυξημένου μέσου κέρδους με του ρεαλιστικού πονταρίσματος, οδήγησαν σε ένα σημαντικό κέρδος της τάξεως των 3.272€.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μέχρι τις αρχές του 18^{ου} αιώνα το σύνολο της επιστημονικής κοινότητας πίστευε πως το κριτήριο της αναμενόμενης αξίας αποτελεί επαρκές κριτήριο απόφασης για τη συμμετοχή ενός ατόμου σε ένα παιχνίδι τύχης. Η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης αξίας ήταν ο μοναδικός στόχος του εκάστοτε παίκτη. Όταν ο Daniel Bernoulli παρουσίασε στην ακαδημία επιστημών της Αγίας Πετρούπολης ένα παιχνίδι όπου η αναμενόμενη αξία ήταν άπειρη αλλά κανένας δεν ήταν πρόθυμος να στοιχηματίσει ένα μεγάλο χρηματικό ποσό για να συμμετάσχει, τότε αποδείχτηκε ότι το κριτήριο της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης αξίας δεν ήταν επαρκές. Το παράδοξο που προκλήθηκε από αυτό το παιχνίδι κέντρισε το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας και αρκετοί έσπευσαν να δώσουν λύση στο πρόβλημα αυτό.

Η σημαντικότερη από τις λύσεις που προέκυψαν ήταν η ανάπτυξη της θεωρίας ωφελιμότητας που πρότειναν για πρώτη φορά οι Daniel Bernoulli και Gabriel Cramer (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο). Η θεωρία αυτή υποστήριξε ότι ανάλογα με τον πλούτο ενός ατόμου υπάρχει μια τιμή ωφελιμότητας για την είσοδό του στο παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης. Όλες οι τιμές αυτές συνοψίζονται σε μια συνάρτηση ωφελιμότητας.

Σύντομα οι παρατηρήσεις αυτές γενικεύτηκαν για οποιαδήποτε απόφαση κάτω από αβεβαιότητα. Προτάθηκαν θεωρίες όπου οι τιμές ωφελιμότητας μπορούν να διατάξουν τα αναμενόμενα αποτελέσματα μιας απόφασης και το κριτήριο της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης ωφελιμότητας να ορίσει την απόφαση ενός ατόμου (όπως υποστήριξε ο Ramsey). Ταυτόχρονα υπήρχαν και θεωρίες όπου οι τιμές της ωφελιμότητας διατάσσουν τις πράξεις ενός ατόμου και με παρόμοιο τρόπο το άτομο μπορεί να λάβει αποφάσεις (όπως υποστήριξε ο Savage). Σε κάθε περίπτωση η θεωρία ωφελιμότητας ήταν κομβικής σημασίας για τη λήψη αποφάσεων κάτω από αβεβαιότητα. Η εφαρμογή της ήταν άμεση σε πολλές επιστήμες και σήμερα αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της οικονομικής επιστήμης και του αναλογισμού.

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης και αναλύθηκαν οι βασικές αρχές της θεωρίας ωφελιμότητας. Αναδείχθηκε η σημασία της θεωρίας μέσα από πληθώρα παραδειγμάτων και παρουσιάστηκαν ορισμένες εφαρμογές της στη σύγχρονη κοινωνία. Επιπλέον έλαβε χώρα μια στατιστική ανάλυση με τη χρήση ενός ερωτηματολογίου, μέσα από την οποία μπορέσαμε να συλλέξουμε δεδομένα που αφορούν το παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης. Ταυτόχρονα κατηγοριοποιήσαμε τα άτομα του δείγματός μας ως προς την στάση τους απέναντι στον κίνδυνο. Συμπεράναμε ότι περίπου το 70% των ατόμων σκέφτεται συντηρητικά, περίπου το 20% ριψοκίνδυνα, ενώ περίπου το 10% είναι ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο. Δείξαμε ότι παράγοντες όπως η ηλικία, η οικογενειακή κατάσταση και ο τομέας εργασίας επηρεάζουν τη στάση αυτή. Τέλος δείξαμε ότι η στάση απέναντι στο ρίσκο μεταβάλλεται για ένα άτομο ανάλογα με το μέγεθος του προβλήματος που αντιμετωπίζει.

ΠΑΡΑΣΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγιο διπλωματικής εργασίας

1) Ποιο είναι το φύλο σας;
    a) Άνδρας
    b) Γυναίκα

2) Ποια είναι η ηλικία σας;
    a) Κάτω από 18
    b) Από 18 έως 25
    c) Από 26 έως 35
    d) Από 36 έως 45
    e) Από 46 έως 55
    f) Από 55 και πάνω

3) Ποια είναι η οικογενειακή σας κατάσταση;
    a) Άγαμος
    b) Έγγαμος χωρίς παιδιά
    c) Έγγαμος με παιδιά
    d) Χωρισμένος με παιδιά

4) Ποιο είναι το εκπαιδευτικό σας υπόβαθρο;
    a) Απόφοιτος γυμνασίου
    b) Απόφοιτος λυκείου
    c) Απόφοιτος ΑΕΙ/ΤΕΙ
    d) Κάτοχος μεταπτυχιακού- Διδακτορικού τίτλου

5) Σε ποιον τομέα εργάζεστε; (εάν εργάζεστε)
    a) Δημόσιο τομέα
    b) Ιδιωτικό τομέα
    c) Είμαι αυτοαπασχολούμενος
    d) Άνεργος
    e) Μαθητής- Φοιτητής

6) Ποιο είναι το μέσο ετήσιο εισόδημά σας;
    a) Από 0€ έως 10.000€
    b) Από 10.000€ έως 20.000€
    c) Από 20.000€ έως 30.000€
    d) Πάνω από 30.000€

7) Έστω ότι σας ζητάει κάποιος να παίξετε ένα τυχερό παιχνίδι όπου ένα δίκαιο νόμισμα ρίπτεται συνεχώς έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά κορώνα. Εάν εμφανιστεί κορώνα στη πρώτη ρίψη τότε κερδίζετε 2€. Εάν εμφανιστεί κορώνα για πρώτη φορά στη δεύτερη ρίψη τότε το ποσό που κερδίζετε διπλασιάζεται. Δηλαδή κερδίζετε 4€. Εάν εμφανιστεί κορώνα για πρώτη φορά στην τρίτη ρίψη τότε κερδίζετε 8€. Γενικά εάν εμφανιστεί κορώνα για πρώτη φορά στη ν-οστή ρίψη τότε κερδίζετε $2^{\nu-1}$€. Προκειμένου να συμμετάσχετε σε αυτό το παιχνίδι πρέπει να πληρώσετε ένα χρηματικό ποσό. Πόσα χρήματα είστε διατεθειμένοι να δώσετε ώστε να παίξετε αυτό το παιχνίδι με σκοπό να κερδίσετε χρήματα;
   a) Από 0€ έως 5€
   b) Από 5€ έως 10€
   c) Από 10€ έως 15€
   d) Από 15€ έως 20€
   e) Πολύ περισσότερα από 20€

8) Πόσες ρίψεις πιστεύετε ότι κατά μέσο όρο θα χρειαστούν ώστε να εμφανιστεί για πρώτη φορά κορώνα στο προηγούμενο παιχνίδι;
(Συμπλήρωση ποσού)

9) Θεωρητικά υπάρχει πιθανότητα να εμφανίζονται συνεχώς γράμματα και το παιχνίδι να συνεχιστεί για μεγάλο αριθμό ρίψεων, οπότε και θα λάβετε μεγάλο κέρδος. Ας υποθέσουμε ότι συμφωνείτε πριν από την αρχή του παιχνιδιού ότι αν δεν εμφανιστεί κορώνα στις πρώτες 15 ρίψεις, το παιχνίδι θα σταματήσει και θα λάβετε το κέρδος που σας αντιστοιχεί. Η συνθήκη αυτή αλλάζει το ποσό που είστε διατεθειμένοι να δώσετε ώστε να παίξετε το παιχνίδι;
   a) Όχι δεν αλλάζει το ποσό
   b) Ναι αλλάζει το ποσό. Θα πόνταρα περισσότερα χρήματα
   c) Ναι αλλάζει το ποσό. Θα πόνταρα λιγότερα χρήματα

10) Έστω ότι έχετε να επιλέξετε ανάμεσα σε δύο επενδύσεις Α και Β. Στην επένδυση Α έχετε 50% πιθανότητα να κερδίσετε 2.000€ και 50% πιθανότητα να κερδίσετε 2.500€. Στην επένδυση Β έχετε 100% πιθανότητα να κερδίσετε 2.250€. Ποια από τις δύο επενδύσεις θα προτιμήσετε;
   a) Επένδυση Α
   b) Επένδυση Β
   c) Δεν έχω προτίμηση ανάμεσα στις δύο επενδύσεις

11) Θα αγοράζατε ένα λαχείο που κοστίζει 0,50€ και έχει πιθανότητα 1 στις 100.000 να κερδίσετε 10.000€;
   a) Ναι
   b) Όχι

12) Ας υποθέσουμε ότι είστε άρρωστος και αν δεν προβείτε σύντομα σε κάποια θεραπεία θα καταλήξετε. Επισκέπτεστε λοιπόν έναν γιατρό, ο οποίος σας προτείνει δύο θεραπείες.

Θεραπεία Α

- Θα ζήσετε με πιθανότητα 1 για 15 χρόνια.

Θεραπεία Β

- Θα ζήσετε με πιθανότητα 89% για 15 χρόνια
- Θα ζήσετε με πιθανότητα 10% για 20 χρόνια
- Θα καταλήξετε με πιθανότητα 1%

Ποια από τις παραπάνω θεραπείες θα επιλέξετε;

a) Την θεραπεία Α
b) Την θεραπεία Β

13) Σε συνέχεια της παραπάνω ερώτησης επιλέγετε να πάρετε μια δεύτερη γνώμη από έναν άλλο γιατρό, ο οποίος με τη σειρά του σας πρότεινε δύο διαφορετικές θεραπείες.

Θεραπεία Γ

- Θα ζήσετε με πιθανότητα 11% για 15 χρόνια
- Θα καταλήξετε με πιθανότητα 89%

Θεραπεία Δ

- Θα ζήσετε με πιθανότητα 10% για 20 χρόνια
- Θα καταλήξετε με πιθανότητα 90%

Ποια από τις παραπάνω θεραπείες θα επιλέξετε;

a) Την θεραπεία Γ
b) Την θεραπεία Δ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bernoulli Daniel, 1954 [1738], “Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk”, *Econometrica* 22: 23-36

Dickson David C.M, 2016. *Insurance risk and ruin.* 2η έκδοση. International series of actuarial science.

Ellsberg Daniel, 1961. Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The quarterly journal of economics.* Τόμος 75, σελίδες 643-669.

Faeq Marwan, 2019. On the analysis of st Petersburg paradox and its solution in terms of uniform treatment, PhD. *University of Nicosia*.

Gerber Hans, Pafumi Gerard, 2013. Utility functions from risk theory to finance. *North American actuarial journal.* Τόμος 2, σελίδες 74-91.

Hey John, Pasca Carmen, 2010. Georges Louis Leclerc de Buffon’s “Essays on moral arithmetic, *LSF research working paper series*.

Huang Keguo, 2013. Three hundred years of the st Petersburg paradox, *Michigan tech*

Peters Ole, 2011. The time resolution of the st Petersburg paradox, *Philosophical transactions of the royal society.*

Sándor Csörgö and Gordon Simons, 1993. On Steinhaus’ resolution of the st. Petersburg paradox. *Probability and Mathematical Statistics*, σελίδες 157-172.

Sheldon Ross, 2012. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Επιστημονική επιμέλεια ελληνικής έκδοσης Ευάγγελος Φελουζής. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Shi Gonglong, Wang Qian, 2018. The application of utility theory in the decision making of marketing risk management. *Atlantis press.*

Shili Babaei, 2013. Financial trading and investing. The St. Petersburg paradox and the expected utility paradigm, Academia

Stanford encyclopedia of philosophy: Decision theory, 2020. Διαθέσιμο στο: https://plato.stanford.edu/entries/decision-theory

Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox, 2019. Διαθέσιμο στο: https://plato.stanford.edu/entries/paradox-stpetersburg

Stanford encyclopedia of philosophy: The st Petersburg paradox, 2008. Διαθέσιμο στο: https://plato.stanford.edu/Archives/Fall2012/entries/paradox-stpetersburg

Stanford encyclopedia of philosophy: Normative theories of rational choice. Expected utility, 2019. Διαθέσιμο στο: https://plato.stanford.edu/entries/rationality-normative-utility

Weinstein Milton C, Torrance George, Mc Guire Alistair, 2009. QALYs: The basics. Value in health. Διαθέσιμο στο: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1524-4733.2009.00515.x

Wikipedia: Quality adjusted life year. Διαθέσιμο στο: https://en.wikipedia.org/wiki/Quality-adjusted_life_year

Willliam Feller,1968. *An introduction to probability theory and its applications*, volume I. John Wiley & Sons, 3rd edition

T.C. Johnson, 2007. Economics utility functions, Academia

Y.S. Chow, Herbert Robbins, 1961. On sums of independent random variables with infinite moments and fair games. National academy of sciences.

Μαγείρου Ευάγγελος, 2012. *Παίγνια και αποφάσεις. Μια εισαγωγική προσέγγιση*. Εκδόσεις κριτική.