



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακή Εξειδίκευση στα Πληροφοριακά Συστήματα

Διπλωματική Εργασία

«Μελέτη μηχανισμών ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε Mobile
Hotspots που εξυπηρετούν ψευδοτυχαία κίνηση»

Νικόλαος Κάββουρας

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Μοσχολιός

Πάτρα, Μάιος 2025

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Νικόλαου Κάββουρα που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

«Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Δρ. Μοσχολιό Ιωάννη, για την ανεκτίμητη καθοδήγηση, την υποστήριξη και την εμπιστοσύνη που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον κ. Μαρίνο Βλασάκη, υποψήφιο Διδάκτορα του Τμήματος Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου, για την πολύτιμη βοήθειά του. Τέλος, αφιερώνω αυτή τη διπλωματική εργασία σε όλους εκείνους που, με ατέρμονο κόπο και αφοσίωση, προωθούν την επιστήμη ένα βήμα παραπέρα.»



«Μελέτη μηχανισμών ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε Mobile
Hotspots που εξυπηρετούν ψευδοτυχαία κίνηση»

Νικόλαος Κάββουρας

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Ιωάννης Μοσχολιός

Καθηγητής Πανεπιστημίου
Πελοποννήσου

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Βασίλειος Καρυώτης

Αναπληρωτής Καθηγητής,
Ιονίου Πανεπιστημίου

Πάτρα, Μάιος 2025

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας (ΔΕ) είναι η μελέτη και η ανάλυση μοντέλων εξυπηρέτησης κλήσεων σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα ενός κινούμενου οχήματος (π.χ. λεωφορείο), στο οποίο είναι εγκατεστημένο ένα φορητό σημείο πρόσβασης (Mobile Hotspot).

Ειδικότερα, η μελέτη των μοντέλων ή μηχανισμών ελέγχου κλήσεων αφορά κλήσεις που μπορεί να εξυπηρετηθούν από ένα σημείο πρόσβασης (Access Point) στο εγκατεστημένο Mobile Hotspot του οχήματος. Τα δύο είδη των κλήσεων που μπορεί να κληθεί να εξυπηρετηθούν είναι είτε η εκκίνηση νέων κλήσεων, είτε κλήσεις μεταπομπής, οι οποίες εξυπηρετούνται από κάποιον σταθμό βάσης (Base Station) και μεταφέρεται η εξυπηρέτηση τους στο Mobile Hotspot του οχήματος.

Τα μοντέλα που αναλύθηκαν έχουν ως κύριο στόχο να δίνουν προτεραιότητα στις κλήσεις μεταπομπής έναντι των νέων κλήσεων. Τα διάφορα μοντέλα ενσωματώνουν πολιτικές όπως η δέσμευση εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation), οι ουρές αναμονής (Queues) οι οποίες έχουν ως στόχο την ελαχιστοποίηση της απόρριψης κλήσεων μεταπομπής.

Η ανάλυση των μοντέλων έγινε για περιπτώσεις οι οποίες οι κλήσεις ακολουθούν την κατανομή Poisson (τυχαία κίνηση) και μπορούν να δημιουργηθούν από θεωρητικά άπειρο πλήθος πηγών-χρηστών (Κεφάλαιο 2) αλλά και κλήσεις που μπορεί να δημιουργηθούν από πεπερασμένο πλήθος πηγών-χρηστών (Κεφάλαιο 3) και παράγεται η λεγόμενη Ψευδοτυχαία κίνηση (Quasi-Random).

Για τη μελέτη των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν μαθηματικά μοντέλα και προσομοιώσεις βασισμένες σε Μαρκοβιανές αλυσίδες. Στόχος είναι η επίτευξη των καλύτερων δυνατών αποτελεσμάτων στα μεγέθη που αποτελούν την ποιότητας εξυπηρέτησης (Quality of Services - QoS) του κάθε μοντέλου και η ελαχιστοποίηση της απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής. Η υλοποίηση και ο υπολογισμός των μεγεθών QoS έγινε με τη γλώσσα προγραμματισμού Python, η οποία αναπτύχθηκε για καθένα από τα εν λόγω μοντέλα.

Λέξεις – Κλειδιά

Κινητό σημείο πρόσβασης, ψευδοτυχαία κίνηση, κλήσεις μεταπομπής, απόρριψη κλήσης, δέσμευση εύρους ζώνης, Μαρκοβιανή αλυσίδα, ουρά αναμονής.

«A study on Call Admission Control Mechanisms in Mobile Hotspots Serving quasi-random traffic»

Nikolaos Kavvouras

Abstract

The subject of this diploma thesis is the study and analysis of call service models in a telecommunications system of a moving vehicle (e.g., a bus), in which a portable access point (Mobile Hotspot) is installed.

Specifically, the study of call control models or mechanisms concerns calls that can be served by an access point (Access Point) in the installed Mobile Hotspot of the vehicle. The two types of calls that may need to be serviced are either new calls or handover calls, which are served by a base station (Base Station) and their service is transferred to the vehicle's Mobile Hotspot.

The models that were analyzed will primarily aim to prioritize handover calls over new calls. The various models to be analyzed will incorporate policies such as bandwidth reservation and waiting queues, which will aim at minimizing the rejection of handover calls.

The analysis of the models was conducted for cases where calls follow the Poisson distribution (random traffic) and can be generated by a theoretically infinite number of sources (Chapter 2), as well as calls that can be generated by a finite number of sources (Chapter 3), producing what is known as Quasi-Random Traffic.

For the study of the models, mathematical models and simulations based on Markov Chains were used. The goal is to achieve the best possible results in the metrics that constitute the Quality of Service (QoS) of each model and to minimize the rejection of handover calls. The implementation and calculation of the QoS metrics was done using the Python programming language, which was developed for each of the aforementioned models.

Keywords

Mobile hotspot, quasi-random traffic, handover call, call blocking, bandwidth reservation, Markov chain, queue.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract	vi
Περιεχόμενα	vii
Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων / Κώδικας	x
Κατάλογος Πινάκων / Αποτελέσματα	xvi
Συντομογραφίες & Ακρωνύμια.....	xxii
1. Εισαγωγικά στοιχεία	1
1.1 Τηλεπικοινωνιακό σύστημα	1
1.2 Περιγραφή σύγχρονου τηλεπικοινωνιακού συστήματος	1
1.3 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας	2
1.4 Βασικές παράμετροι-χαρακτηριστικά συστήματος.....	4
1.5 Βασικά μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος (QoS – Quality of Services).....	6
1.6 Διάγραμμα καταστάσεων – Μαρκοβιανές αλυσίδες.....	7
2. Επίλυση μοντέλων NP/CS, CP/BR, CP1/BR, CPQ και CP1Q.....	8
2.1. Γενική περιγραφή μοντέλου NP/CS.....	8
2.1.1. Αναπαράσταση μοντέλου NP/CS – Μαρκοβιανή αλυσίδα	9
2.1.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας (Global Balance Equations) μοντέλου NP/CS.....	11
2.1.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου NP/CS.....	13
2.1.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου NP/CS με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	15
2.1.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο NP/CS με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python.....	19
2.1.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος NP/CS με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	21
2.2. Γενική περιγραφή μοντέλου CP/BR.....	29
2.2.1. Αναπαράσταση μοντέλου CP/BR – Μαρκοβιανή αλυσίδα	30
2.2.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP/BR.....	31
2.2.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP/BR	32
2.2.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP/BR με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	34
2.2.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CP/BR με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python	37
2.2.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP/BR με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	38
2.3. Γενική περιγραφή μοντέλου CP1/BR.....	43
2.3.1. Αναπαράσταση μοντέλου CP1/BR – Μαρκοβιανή αλυσίδα	44
2.3.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP1/BR.....	45
2.3.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP1/BR	47

2.3.4.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP1/BR με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	49
2.3.5.	Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CP1/BR με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python	51
2.3.6.	Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP1/BR με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	53
2.4.	Γενική περιγραφή μοντέλου CPQ	58
2.4.1.	Αναπαράσταση μοντέλου CPQ – Μαρκοβιανή αλυσίδα.....	59
2.4.2.	Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CPQ	60
2.4.3.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CPQ.....	62
2.4.4.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CPQ με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	64
2.4.5.	Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CPQ με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python	67
2.4.6.	Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CPQ με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	71
2.5.	Γενική περιγραφή μοντέλου CP1Q	78
2.5.1.	Αναπαράσταση μοντέλου CP1Q – Μαρκοβιανή αλυσίδα.....	78
2.5.2.	Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP1Q	79
2.5.3.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP1Q.....	81
2.5.4.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP1Q με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	83
2.5.5.	Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CP1Q με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python	86
2.5.6.	Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP1Q με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	89
3.	Επίλυση μοντέλων με ψευδοτυχαία κίνηση.....	97
3.1.	Γενική περιγραφή μοντέλων με ψευδοτυχαία κίνηση (Quasi-Random Traffic).....	97
3.2.	Βασικές παράμετροι – χαρακτηριστικά συστήματος	97
3.3.	Βασικά μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος (QoS).....	99
3.4.	Γενική περιγραφή μοντέλου NP/CS με πεπερασμένο πλήθος πηγών.....	100
3.4.1.	Αναπαράσταση μοντέλου NP/CS με πεπερασμένο πλήθος πηγών – Μαρκοβιανή αλυσίδα.....	101
3.4.2.	Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών.....	105
3.4.3.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου NP/CS.....	112
3.4.4.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	115

3.4.5.	Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python.....	123
3.4.6.	Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	127
3.5.	Γενική περιγραφή μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών.....	133
3.5.1.	Αναπαράσταση μοντέλου CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών – Μαρκοβιανή αλυσίδα.....	134
3.5.2.	Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών.....	137
3.5.3.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP/BR	143
3.5.4.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη γλώσσα προγραμματισμού Python	146
3.5.5.	Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) για το μοντέλο CP/BR, με πεπερασμένο πλήθος πηγών και t δεσμευμένες θέσεις. Επίλυση με μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python	154
3.5.6.	Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων	157
3.6.	Γενική περιγραφή μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών	167
3.6.1.	Αναπαράσταση μοντέλου CPQ με πεπερασμένο πλήθος πηγών – Μαρκοβιανή αλυσίδα.....	168
3.6.2.	Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών.....	172
3.6.3.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CPQ.....	180
3.6.4.	Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη γλώσσα προγραμματισμού Python.....	184
3.6.5.	Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) για το μοντέλο CPQ, με πεπερασμένο πλήθος πηγών, t δεσμευμένες θέσεις και k θέσεις στην ουρά. Επίλυση με μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python.	192
3.6.6.	Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων.....	199
4.	Συμπεράσματα - Σύνοψη	213
4.1.	Γενική περιγραφή μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν	213
4.2.	Προτάσεις για μελλοντικές βελτιώσεις της έρευνας	215
	Βιβλιογραφία.....	218
	Παράρτημα Α: Κώδικας Python	219

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων / Κώδικας

Εικόνα 1 - Τηλεπικοινωνιακό σύστημα μετάδοσης δεδομένων δορυφόρου [1]	1
Εικόνα 2 - Αναπαράσταση των δύο φάσεων του οχήματος [2].....	3
Εικόνα 3 - Αναπαράσταση κλήσης μεταπομπής από τον BS προς το AP του λεωφορείου [3]	3
Εικόνα 4 - Αναπαράσταση αφίξεων κλήσεων με διαδικασία Poisson [4].....	4
Εικόνα 5 - Τυπική Μαρκοβιανή αλυσίδα τριών καταστάσεων [5].....	8
Εικόνα 6 - Αναπαράσταση συστήματος απωλειών NP/CS [6].....	9
Σχήμα 1 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS για $C=5$	10
Σχήμα 2 – Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS με $C=80$	22
Σχήμα 3 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	24
Σχήμα 4 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=2$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	25
Σχήμα 5 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=50$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	25
Σχήμα 6 - Αναπαράσταση μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	27
Σχήμα 7 - Αναπαράσταση μεγεθών των B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$, $\mu_m=\mu_s=0,125$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	28
Σχήμα 8 - Αναπαράσταση μεγεθών των B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$, $\mu_m=\mu_s=0,5$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	29
Σχήμα 9 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$ με δέσμευση χωρητικότητα και στις δύο φάσεις (SP και MP).....	30
Σχήμα 10 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR με $C=80$ και $t=8$ με δέσμευση χωρητικότητα και στις δύο φάσεις (SP και MP).....	39
Σχήμα 11 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) με $C=80$ και $t=8$	40
Σχήμα 12 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) με $C=80$ και $t=8$	41
Σχήμα 13 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό δεσμευμένων θέσεων $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) με $C=80$	42
Σχήμα 14 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$ με δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP.....	44
Σχήμα 15 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1/BR με $C=80$ και $t=8$ με δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP.....	53
Σχήμα 16 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για ρυθμό άφιξης $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) και για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) για $C=80$ και $t=8$	54

Σχήμα 17 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό δεσμευμένων θέσεων $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) με $C=80$.	56
Σχήμα 18 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό δεσμευμένων θέσεων $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 30 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) με $C=80$.	58
Σχήμα 19 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για $C=5$, $k=2$, $t=2$ με δεσμευμένη χωρητικότητα στις δύο φάσεις (SP και MP) και ουρά αναμονής.	59
Σχήμα 20 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ με $C=80$, $k=8$ και $t=8$ με δεσμευμένη χωρητικότητα και στις δύο φάσεις (SP και MP) και ουρά αναμονής.	71
Σχήμα 21 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CPQ για $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (και στις δύο φάσεις).	72
Σχήμα 22 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ για $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (και στις δύο φάσεις).	74
Σχήμα 23 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό των θέσεων στην ουρά αναμονής $k=0-70$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ με $C=80$, $t=8$ & $t=16$ (σε SP και MP).	76
Σχήμα 24 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1Q για $C=5$, $k=2$, $t=2$ με δεσμευμένη χωρητικότητα μόνο στην SP και ουρά αναμονής.	78
Σχήμα 25 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1Q με $C=80$, $k=8$ και $t=8$.	89
Σχήμα 26 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1Q για $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (μόνο στην SP).	90
Σχήμα 27 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ για $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (μόνο στην SP).	92
Σχήμα 28 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_C για μεταβλητό ρυθμό των θέσεων στην ουρά αναμονής $k=0-70$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CP1Q με $C=80$, $t=8$ & $t=16$ (μόνο σε SP).	95
Σχήμα 29 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS στην SP, με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$.	102
Σχήμα 30 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS στην MP, με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$.	102
Σχήμα 31 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS, με συγχώνευση των Σχημάτων 29 (SP) και 30 (MP).	103
Σχήμα 32 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ (αναπαράσταση της SP).	127
Σχήμα 33 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ (αναπαράσταση της MP).	128
Σχήμα 34 - Αναπαράσταση του $B_{new(CBP)}$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο NP/CS με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$.	130
Σχήμα 35 - Αναπαράσταση του $B_h(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h . Μοντέλο NP/CS με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$, $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.	131

Σχήμα 36 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$ και δεσμευμένη χωρητικότητα $t=2$ μόνο στην SP (αναπαράσταση SP).....	135
Σχήμα 37 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$ και δεσμευμένη χωρητικότητα $t=2$ μόνο στην SP (αναπαράσταση MP).....	135
Σχήμα 38 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ και $t=5$ (αναπαράσταση της SP).....	158
Σχήμα 39 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ και $t=5$ (αναπαράσταση της MP).....	159
Σχήμα 40 - Αναπαράσταση του $B_{new}(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$, $p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$	161
Σχήμα 41 - Αναπαράσταση του $B_{new}(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$ και $p_s=0,5$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών, για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$	163
Σχήμα 42 - Αναπαράσταση του $B_h(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h . Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$ και $p_s=0$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$, $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$	164
Σχήμα 43 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) με χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ και $k=1$ (αναπαράσταση της SP).....	169
Σχήμα 44 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) με χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ και $k=1$ (αναπαράσταση της MP).....	170
Σχήμα 45 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) με χωρητικότητα $C=4$ και $k=3$ (αναπαράσταση της M.P.).	171
Σχήμα 46 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$, $t=5$ και $k=2$ (αναπαράσταση της SP).....	200
Σχήμα 47 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$, $t=5$ και $k=2$ (αναπαράσταση της MP).....	201
Σχήμα 48 - Αναπαράσταση του $B_{new}(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CPQ με $C=20$, $t=5$, $k=2$, $p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$	203
Σχήμα 49 - Αναπαράσταση του $B_{new}(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CPQ με $C=20$, $t=5$ και $p_s=0,5$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών, για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$	206
Σχήμα 50 - Αναπαράσταση του $B_h(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής v_h , ανά ελεύθερη πηγή. Μοντέλο CPQ με $C=20$, $t=5$, $k=2$ και $p_s=0$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$, $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$	207
Κώδικας 1 - Υλοποίηση πίνακα A για το μοντέλο NP/CS με Python.	219
Κώδικας 2 - Κλήση της συνάρτησης του Κώδικα 1 και εκτύπωση.....	219
Κώδικας 3 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο NP/CS.	220
Κώδικας 4 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_C) για το μοντέλο NP/CS για $C=5$	221

Κώδικας 5 - Δημιουργία πίνακα και αποθήκευση των B_{new} , B_h , και U_C για διαφορετικές τιμές των νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$ και $\lambda_h=15$ για το μοντέλο NP/CS για $C=80$	221
Κώδικας 6 - Δημιουργία γραφικής παράστασης των B_{new} , B_h και U_C για διαφορετικές τιμές των νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$ και $\lambda_h=15$ για το μοντέλο NP/CS για $C=80$	221
Κώδικας 7 - Κλήση συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για τα B_{new} , B_h , και U_C συναρτήσει του μεταβλητού ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$	222
Κώδικας 8 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$ για το μοντέλο NP/CS με $C=80$	222
Κώδικας 9 - Υλοποίηση Πίνακα Α για το μοντέλο CP/BR με Python.	223
Κώδικας 10 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CP/BR.	224
Κώδικας 11 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_C) για το μοντέλο CP/BR με $C=5$ και $t=2$	225
Κώδικας 12 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) με $C=80$ και $t=8$	225
Κώδικας 13 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) με $C=80$	226
Κώδικας 14 - Υλοποίηση πίνακα Α για το μοντέλο CP1/BR με Python.	227
Κώδικας 15 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CP1/BR.	228
Κώδικας 16 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_C) για το μοντέλο CP1/BR με $C=5$ και $t=2$	228
Κώδικας 17 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικών παραστάσεων για $\lambda_n=1-70$, $t=8$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) και για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) εναλλάξ για $C=80$	229
Κώδικας 18 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικών παραστάσεων για $t=1-70$, $\lambda_n=20$ και 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) και για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) εναλλάξ για $C=80$	230
Κώδικας 19 - Υλοποίηση πίνακα Α για το μοντέλο CPQ για $C=5$, $k=2$ και $t=2$	231
Κώδικας 20 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CPQ για $C=5$ και $k=2$	232
Κώδικας 21 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS B_{new} , B_h , $U(U_1+U_2)$, U_C , N , λ_a και W για το μοντέλο CPQ με $C=5$, $k=2$ και $t=2$	233
Κώδικας 22 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CPQ με $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (και στις δύο φάσεις).	234
Κώδικας 23 - Κλήση των συναρτήσεων για τον υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=20$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ με $C=80$, $k=1-70$, $t=8$ & $t=16$ (και στις δύο φάσεις).	234
Κώδικας 24 - Υλοποίηση πίνακα Α για το μοντέλο CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$	235
Κώδικας 25 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CP1Q για $C=5$ και $k=2$	236

Κώδικας 26 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS B_{new} , B_h , $U(U_1 + U_2)$, U_C , N , λ_a και W για το μοντέλο CP1Q με $C=5$, $k=2$ και $t=2$	237
Κώδικας 27 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1Q με $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (μόνο στην SP).	238
Κώδικας 28 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_C , δημιουργία γραφικής παράστασης για $k=1-70$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1Q με $C=80$, $t=8$ & $t=16$ (μόνο στην SP).	238
Κώδικας 29 - Υλοποίηση πίνακα A και εύρεση πιθανοτήτων για το μοντέλο NP/CS (πεπερασμένο πλήθος πηγών, $N_{new} = N_h = 5$) με Python.	241
Κώδικας 30 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_C) για το μοντέλο NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$).	242
Κώδικας 31 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_{new}(CBP)$, για μεταβλητό $v_{new}=0,1-1,0$. Μοντέλο NP/CS με $C=20$ και $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$	243
Κώδικας 32 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_h(CBP)$, για μεταβλητό $v_h=0,1-1,0$. Μοντέλο NP/CS με $C=20$ και $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$	243
Κώδικας 33 - Υλοποίηση πίνακα A με Python, εύρεση πιθανοτήτων για το μοντέλο CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new} = N_h = 5$, με χωρητικότητα $C=4$ και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις.	246
Κώδικας 34 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_C) για το μοντέλο CP/BR για $C=4$, $t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$).	247
Κώδικας 35 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_{new}(CBP)$, για μεταβλητό $v_{new}=0,1-1,0$. Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$, $p_s=0$, $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$	248
Κώδικας 36 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_h(CBP)$, για μεταβλητό $v_h=0,1-1,0$. Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$ και $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$	249
Κώδικας 37 - Υλοποίηση πίνακα A με Python, εύρεση πιθανοτήτων για το μοντέλο CPQ με πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new} = N_h = 5$, χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση στην ουρά.	251
Κώδικας 38 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS [B_{new} , B_h , $U(U_1, U_2)$, U_C , N , $\lambda_a(\lambda_{a1}-\lambda_{a4})$ και W] για το μοντέλο CPQ για $C=4$, $t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).	253
Κώδικας 39 - Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_{new}(CBP)$, για μεταβλητό $v_{new}=0,1-1,0$. Μοντέλο CPQ με $C=20$, $t=5$, $k=2$, $p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new}=10/30/40/50/100/1000 (-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$	254
Κώδικας 40 - Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_h(CBP)$, για μεταβλητό $v_h=0,1-1,0$. Μοντέλο CPQ με $C=20$, $t=5$, $k=2$, $p_s=0$ για πεπερασμένο.	255

Κατάλογος Πινάκων / Αποτελέσματα

Πίνακας 1 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS για $C=5$	13
Πίνακας 2 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS.	13
Πίνακας 3 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS με αντικατάσταση τελευταίας γραμμής.	14
Πίνακας 4 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.....	14
Πίνακας 5 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS με τις πιθανές καταστάσεις του συστήματος.	16
Πίνακας 6 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS με γενίκευση των όρων του συστήματος.	16
Πίνακας 7 - Μεταβολή U_C συναρτήσει του λ_n	26
Πίνακας 8 - Μεταβολή B_{new} , B_h συναρτήσει του λ_h	27
Πίνακας 9 - Μεταβολή B_{new} , B_h και U_C συναρτήσει των μ_s και μ_m	28
Πίνακας 10 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR για $C=5$	32
Πίνακας 11 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$. 33	
Πίνακας 12 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.....	33
Πίνακας 13 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR με γενίκευση των όρων του συστήματος.	34
Πίνακας 14 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$. 47	
Πίνακας 15 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$	47
Πίνακας 16 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.....	48
Πίνακας 17 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR με γενίκευση των όρων του συστήματος.	49
Πίνακας 18 - Αξιοποίηση χωρητικότητας U_C στα μοντέλα CP/BR και CP1/BR.	57
Πίνακας 19 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CPQ για $C=5$, $t=2$ και $k=2$	62
Πίνακας 20 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 16x16 μοντέλου CPQ για $C=5$ και $k=2$	63
Πίνακας 21 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CPQ, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.....	63
Πίνακας 22 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CPQ με γενίκευση των όρων του συστήματος.	64
Πίνακας 23 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_{new} στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ.....	73
Πίνακας 24 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $\lambda_h=15$	74
Πίνακας 25 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $\lambda_h=30$	75
Πίνακας 26 - Σύγκριση αποτελεσμάτων U_C στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $\lambda_h=15$	76
Πίνακας 27 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$	81

Πίνακας 28 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$.	82
Πίνακας 29 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.	82
Πίνακας 30 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q με γενίκευση των όρων του συστήματος.	83
Πίνακας 31 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_{new} στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q και CPQ.	91
Πίνακας 32 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q & CPQ για $\lambda_h=15$.	92
Πίνακας 33 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q & CPQ για $\lambda_h=30$.	93
Πίνακας 34 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q & CPQ για $\lambda_h=30$.	94
Πίνακας 35 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών.	111
Πίνακας 36 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών.	112
Πίνακας 37 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών (με κανονικοποίηση).	113
Πίνακας 38 - Σύστημα εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών, είσοδος των δεδομένων στο on-line σύστημα.	114
Πίνακας 39 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για $C=4$, πεπερασμένο πλήθος πηγών και γενίκευση των όρων του συστήματος.	117
Πίνακας 40 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ με $B_{new}(CBP)$ στο μοντέλο NP/CS για $C=20$ και $v_{new}=v_h=0,5$.	133
Πίνακας 41 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP.	142
Πίνακας 42 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP.	143
Πίνακας 43 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP (με κανονικοποίηση).	144
Πίνακας 44 - Σύστημα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP. Είσοδος των δεδομένων στο on-line σύστημα.	145
Πίνακας 45 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και γενίκευση των όρων του συστήματος.	148
Πίνακας 46 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$, $p_s=0$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).	162
Πίνακας 47 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$, $p_s=0,5$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).	163
Πίνακας 48 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$ και $v_{new}=v_h=0,5$.	165

Πίνακας 49 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$ και $v_{new}=v_h=0,5$.	166
Πίνακας 50 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ και $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.	167
Πίνακας 51 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ και $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$ και $t=3$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.	167
Πίνακας 52 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 40×40 μοντέλου CPQ για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και ουρά αναμονής $k=1$.	179
Πίνακας 53 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 40×40 μοντέλου CPQ για $C=4$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών, με $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση στην ουρά.	180
Πίνακας 54 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 40×40 (με κανονικοποίηση) μοντέλου CPQ, με $C=4$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και ουρά $k=1$.	181
Πίνακας 55 - Σύστημα εξισώσεων 40×40 μοντέλου CPQ με $C=4$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών, με $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και $k=1$ θέση στην ουρά. Είσοδος των δεδομένων στο on-line σύστημα.	183
Πίνακας 56 - Υλοποίηση πίνακα 40×40 μοντέλου CPQ για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP, $k=1$ ουρά και γενίκευση των όρων του συστήματος.	186
Πίνακας 57- Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $k=2$, $p_s=0$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).	205
Πίνακας 58 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $p_s=0,5$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).	206
Πίνακας 59 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $k=2$ και $v_{new}=v_h=0,5$.	208
Πίνακας 60 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $k=2$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.	209
Πίνακας 61 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $k=2$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.	209
Πίνακας 62 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ και $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$ και $t=3$, $k=2$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.	210
Πίνακας 63 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$ και $t=3$, $k=2$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.	210
Πίνακας 64 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, για μεταβλητό $k=2$ και $k=4$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,8$.	211
Πίνακας 65- Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για τυχαία και ψευδοτυχαία κίνηση. Με $C=20$, $t=5$, $p_s=0$, $v_{new}=v_h=0,5$ μεταβλητό $k=2$ και $k=4$.	212
Αποτελέσματα 1 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 12×12 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου NP/CS για $C=5$.	15
Αποτελέσματα 2 - Δημιουργία πίνακα A μοντέλου NP/CS για $C=5$.	18
Αποτελέσματα 3 - Πίνακας A μοντέλου NP/CS για $C=5$ μετά την αντικατάσταση τελευταίας γραμμής.	18
Αποτελέσματα 4 - Πιθανότητες μοντέλου NP/CS για $C=5$.	18

Αποτελέσματα 5 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για $C=5$	21
Αποτελέσματα 6 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για $C=80$	23
Αποτελέσματα 7 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 12×12 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$	34
Αποτελέσματα 8 - Πίνακας Α μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$	36
Αποτελέσματα 9 - Πίνακας Α μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.....	36
Αποτελέσματα 10 - Πιθανότητες μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$	36
Αποτελέσματα 11 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$	38
Αποτελέσματα 12 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=80$ και $t=8$	39
Αποτελέσματα 13 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 12×12 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$	48
Αποτελέσματα 14 - Πίνακας Α μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$	50
Αποτελέσματα 15 - Πίνακας Α μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.....	50
Αποτελέσματα 16 - Πιθανότητες μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$	51
Αποτελέσματα 17 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$	53
Αποτελέσματα 18 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP1/BR για $C=80$ και $t=8$	54
Αποτελέσματα 19 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 16×16 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CPQ για $C=5$ και $k=2$	64
Αποτελέσματα 20 - Πίνακας Α μοντέλου CPQ για $C=5$ και $k=2$	66
Αποτελέσματα 21 - Πίνακας Α μοντέλου CPQ για $C=5$, $k=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.....	66
Αποτελέσματα 22 - Πιθανότητες μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $k=2$	66
Αποτελέσματα 23 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CPQ για $C=5$, $k=2$ και $t=2$	71
Αποτελέσματα 24 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CPQ για $C=80$, $k=8$ και $t=8$	72
Αποτελέσματα 25 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 16×16 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$	83
Αποτελέσματα 26 - Πίνακας Α μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$	85
Αποτελέσματα 27 - Πίνακας Α μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$, $k=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.....	85
Αποτελέσματα 28 - Πιθανότητες μοντέλου CP1Q για $C=5$ και $k=2$	85
Αποτελέσματα 29 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και ουρά $k=2$	89
Αποτελέσματα 30 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP1Q για $C=80$, $k=8$ και $t=8$	90
Αποτελέσματα 31 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 30×30 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών.....	115
Αποτελέσματα 32 - Δημιουργία πίνακα Α 30×30 μοντέλου NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).....	120
Αποτελέσματα 33 - Δημιουργία πίνακα Α (30×30) μοντέλου NP/CS (για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new} = N_h = 5$) για $C=4$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής (κανονικοποίηση).....	121
Αποτελέσματα 34 - Πιθανότητες μοντέλου NP/CS (30×30) για $C=4$	122
Αποτελέσματα 35 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).....	125

Αποτελέσματα 36 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων B_{new} για το μοντέλου NP/CS με $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=4, N_h=5$).	126
Αποτελέσματα 37 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής B_h για το μοντέλου NP/CS με $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=5, N_h=4$).	126
Αποτελέσματα 38 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για $C=20$ ($N_{new}=N_h=40$).	128
Αποτελέσματα 39 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το μοντέλου NP/CS με $C=20$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=39, N_h=40$).	129
Αποτελέσματα 40 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής $B_h(CBP)$ για το μοντέλου NP/CS με $C=20$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=40, N_h=39$).	129
Αποτελέσματα 41 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 30×30 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις.	146
Αποτελέσματα 42 - Δημιουργία πίνακα A 30×30 μοντέλου CP/BR για $C=4$, πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$) και $t = 2$ δεσμευμένες θέσεις.	151
Αποτελέσματα 43 - Δημιουργία πίνακα A (30×30) μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) για $C=4$, με $t=2$ δεσμευμένες θέσεις, μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.	152
Αποτελέσματα 44 - Πιθανότητες μοντέλου CP/BR (30×30) για $C=4$ και $t=2$	153
Αποτελέσματα 45 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=4, t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).	156
Αποτελέσματα 46 - Υπολογισμός CP/BR των νέων κλήσεων B_{new} για το μοντέλου CP/BR με $C=4, t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = 4, N_h = 5$).	156
Αποτελέσματα 47 - Υπολογισμός CP/BR των κλήσεων μεταπομπής B_h για το μοντέλου CP/BR με $C=4, t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = 5, N_h = 4$).	156
Αποτελέσματα 48 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=20$ και $t=5$ ($N_{new}=N_h=40$).	160
Αποτελέσματα 49 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το μοντέλου CP/BR με $C=20$ και $t=5$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=39, N_h=40$).	160
Αποτελέσματα 50 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής $B_h(CBP)$ για το μοντέλου CP/BR με $C=20$ και $t=5$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=40, N_h=39$).	160
Αποτελέσματα 51 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 40×40 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CPQ για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, με $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση στην ουρά.	184
Αποτελέσματα 52 - Δημιουργία πίνακα A 40×40 μοντέλου CPQ για $C=4$, πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$), με $t = 2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση στην ουρά. ...	190
Αποτελέσματα 53 - Δημιουργία πίνακα A 40×40 μοντέλου CPQ για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$), $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση, μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.	191
Αποτελέσματα 54 - Πιθανότητες μοντέλου CPQ(40×40) για $C=4, t=2$ και $k=1$	192
Αποτελέσματα 55 - Υπολογισμός μεγεθών QoS μοντέλου CPQ για $C=4, t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).	198
Αποτελέσματα 56 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το μοντέλου CPQ με $C=4, t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=4, N_h=5$).	198
Αποτελέσματα 57 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής $B_h(CBP)$ για το μοντέλου CPQ με $C=4, t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=5, N_h=4$).	198

Αποτελέσματα 58 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CPQ με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$), $t=5$ δεσμευμένες θέσεις και $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής.	202
Αποτελέσματα 59 - Υπολογισμός $B_{new(CBP)}$ μοντέλου CPQ με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=39$, $N_h=40$), $t=5$ δεσμευμένες θέσεις και $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής.	202
Αποτελέσματα 60 - Υπολογισμός $B_{h(CBP)}$ μοντέλου CPQ με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=40$, $N_h=39$), $t=5$ δεσμευμένες θέσεις και $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής.	203

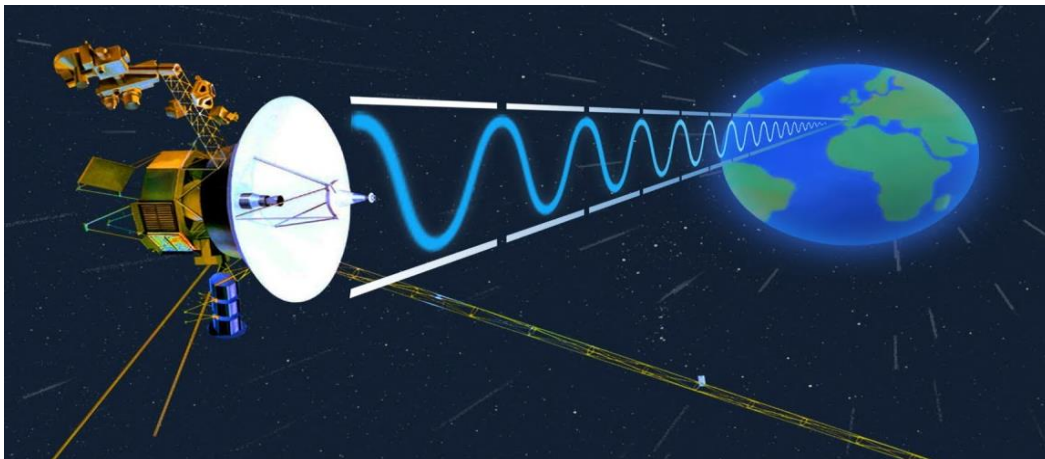
Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

AI	Artificial Intelligence
AP	Access Point
BR	Bandwidth Reservation
BS	Base Station
BU	Bandwidth Unit
CP	Cut-Off Priority
CPQ	Cut-Off Priority with Queue
CS	Complete Sharing
FIFO	First In First Out
GUI	Graphical User Interface
IP	Internet Protocol
LOC	Lines of Code
MH	Mobile Hotspot
MP	Moving Phase
NP	Non Priority
PBR	Probabilistic Bandwidth Reservation
PC	Personal Computer
QoS	Quality of Services
SP	Stop Phase
TCP	Transmission Control Protocol
TCP _r	Time Congestion Probability
VoIP	Voice over IP

1. Εισαγωγικά στοιχεία

1.1 Τηλεπικοινωνιακό σύστημα



Όταν αναφερόμαστε σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα το μυαλό μας πάει αμέσως σε κλασικό τηλεφωνικό κέντρο με ενσύρματες συνδέσεις και σταθερές τηλεφωνικές γραμμές. Αυτό, βέβαια, ανήκει πλέον στο μακρινό παρελθόν. Σήμερα, όταν αναφερόμαστε σε ένα σύγχρονο τηλεπικοινωνιακό σύστημα, εννοούμε την μετάδοση πληροφορίας που μπορεί να περιλαμβάνει ταυτόχρονα φωνή, εικόνες και οποιοδήποτε μορφής δεδομένων που μπορεί να ψηφιοποιηθούν προκειμένου να μεταδοθούν. Τηλεπικοινωνιακό σύστημα είναι ένα σύνολο από τεχνολογικές υποδομές αλλά και λογισμικό, όπως αναμεταδότες, εξυπηρετητές (Servers), κεραιές, ενσύρματες και ασύρματες διασυνδέσεις, δορυφόροι κ.α. με τις οποίες μπορούμε να μεταφέρουμε πληροφορίες από ένα σημείο σε κάποιο άλλο ανεξάρτητα από την απόσταση (Εικόνα 1).



Εικόνα 1 - Τηλεπικοινωνιακό σύστημα μετάδοσης δεδομένων δορυφόρου [1]

1.2 Περιγραφή σύγχρονου τηλεπικοινωνιακού συστήματος

Ένα σύγχρονο τηλεπικοινωνιακό σύστημα χαρακτηρίζεται από βασικά στοιχεία και διαδικασίες όπως:

-  **Ψηφιακή μετάδοση:** Τα σύγχρονα συστήματα επικοινωνίας χαρακτηρίζονται από τη μετάδοση των δεδομένων σε ψηφιακή μορφή η οποία παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερη «ανοχή» στον θόρυβο σε σύγκριση με την παλαιότερη αναλογική μετάδοση.
-  **Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση:** Τα ψηφιακά δεδομένα τα οποία μεταφέρονται κωδικοποιούνται λίγο πριν ξεκινήσει η μεταφορά του και αποκωδικοποιούνται στον παραλήπτη με ένα ενσωματωμένο σύστημα διαδικασιών που αφορούν την ασφάλεια

των μεταφερόμενων δεδομένων και η οποία τα τελευταία χρόνια είναι εξαιρετικά σημαντική.

- Δρομολόγηση και διαχείριση ροής Δεδομένων: Τα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα βασίζονται σε μία δικτυακή-ιεραρχική δομή πάνω στην οποία διασυνδέονται διάφορες συσκευές. Τα προς μεταφορά δεδομένα δρομολογούνται στο δίκτυο με βάση κάποιες παραμέτρους όπως η διεύθυνση προορισμού, η διαθεσιμότητα των διαδρομών κλπ. Η ροή των δεδομένων εξασφαλίζει τη γρήγορη και αποτελεσματική μετάδοση των δεδομένων.
- Λοιπά δομικά στοιχεία ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος: Ενδεικτικά, τέτοια στοιχεία μπορεί να είναι τα πρωτόκολλα επικοινωνίας μεταξύ των συσκευών (λ.χ. TCP/IP), τερματικές συσκευές χρηστών (Smartphones, VoIP, PC, κ.α.) οι οποίες είναι πομποί και δέκτες στο σύστημα, δίκτυα μεταφοράς δεδομένων με διάφορα μέσα (Ethernet, Optical, Wireless) και πολλά άλλα στοιχεία τα οποία δεν είναι δυνατόν να αναλυθούν στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

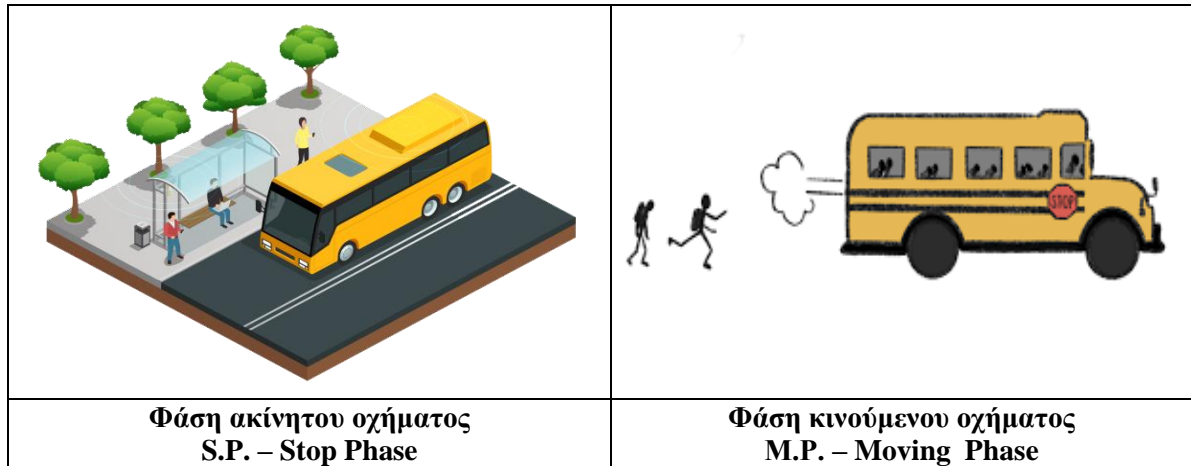
Σημείωση: Σήμερα τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα και συστήματα επικοινωνιών τείνουν να συνενώνονται. Ειδικά σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις στις οποίες είναι πολύ διαδεδομένα τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου, αυτοματισμού αλλά και σύγχρονες εφαρμογές ΑΙ αναφερόμαστε σε ενιαία συστήματα. Τα εν λόγω συστήματα αλληλοεπιδρούν με άλλα συστήματα ή διαδικασίες και σχεδόν πάντα διασυνδέονται με κάποιας μορφής τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

1.3 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα αναλυθεί ο μηχανισμός αποδοχής ή απόρριψης κλήσεων σε ένα κινούμενο όχημα π.χ. λεωφορείο ή θα μπορούσε να είναι ένα τραμ ή κάποιο τρένο ή ακόμα και ένα πλοίο κ.ο.κ. Στο εν λόγω όχημα υπάρχει ενσωματωμένο ένα φορητό σημείο πρόσβασης (Mobile Hotspot) το οποίο θα μπορούσε να υλοποιηθεί με ένα Access Point (AP) στο οποίο υπάρχει πρόσβαση πεπερασμένου πλήθους χρηστών.

Το λεωφορείο μπορεί να βρίσκεται δυνητικά σε δύο καταστάσεις (Εικόνα 2) είτε σταματημένο σε κάποιον τερματικό σταθμό ή σε κάποια ενδιάμεση στάση άρα θα είναι σε κατάσταση «ΣΤΑΜΑΤΗΜΕΝΟ» ή Stop Phase (SP). Η διαφορά να βρίσκεται σε τερματικό σταθμό ή ενδιάμεση στάση είναι προφανώς ο διαφορετικός χρόνος αναμονής σε καθένα

από τα δύο σημεία. Υπάρχει βέβαια και η κατάσταση στην οποία το λεωφορείο είναι «ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ» ή σε Moving Phase (MP) και αυτό συμβαίνει μεταξύ δύο σταθμών.

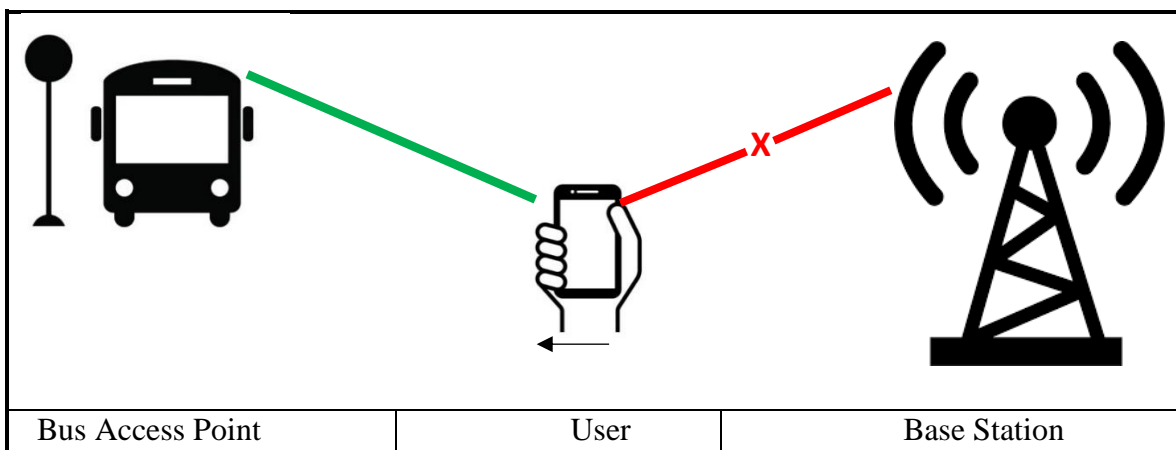


Εικόνα 2 - Αναπαράσταση των δύο φάσεων του οχήματος [2]

Στις δύο παραπάνω φάσεις του οχήματος (κίνηση και στάση) μπορεί να υπάρχουν δύο διαφορετικοί τύποι κλήσεων:

Ο πρώτος τύπος είναι οι ΝΕΕΣ ΚΛΗΣΕΙΣ, δηλαδή κλήσεις οι οποίες μπορεί να ξεκινήσουν ανά πάσα στιγμή από κάποιον χρήστη, είτε κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σε κίνηση, είτε κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο σε κάποια στάση, δηλαδή μπορεί να δημιουργηθούν και στις δύο φάσεις.

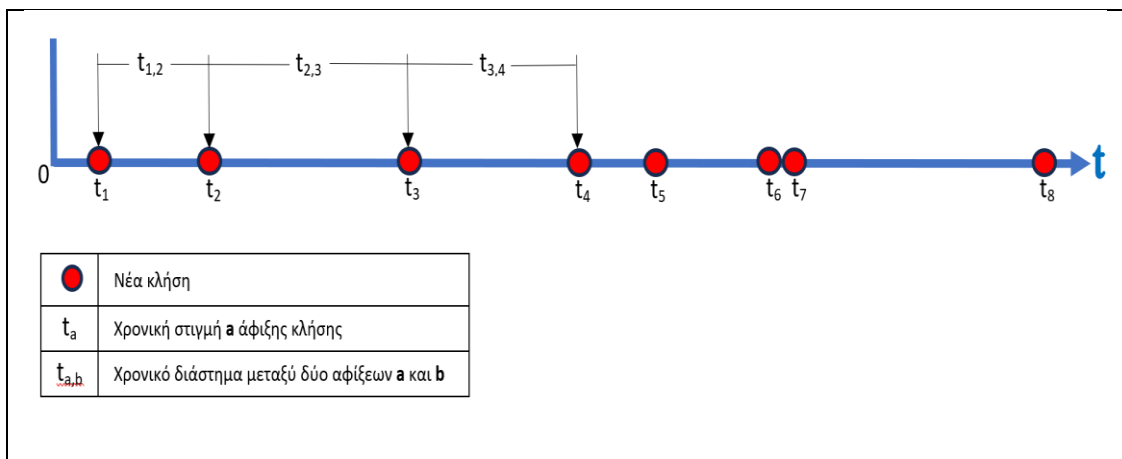
Ο δεύτερος τύπος κλήσης είναι οι ΚΛΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΟΜΠΗΣ δηλαδή οι κλήσεις οι οποίες είναι σε εξέλιξη κατά την είσοδο του χρήστη στο όχημα και θα πρέπει να μεταφερθεί η εξυπηρέτησή τους από κάποιο πιθανό Σταθμό Βάσης-Base Station (BS) που εξυπηρετούνται μέχρι εκείνη τη στιγμή, στο AP του οχήματος προκειμένου να συνεχίσουν να εξυπηρετούνται χωρίς διακοπή. Θεωρείται ότι οι κλήσεις μεταπομπής μπορεί να δημιουργηθούν μόνο στη φάση στάσης του οχήματος.



Εικόνα 3 - Αναπαράσταση κλήσης μεταπομπής από τον BS προς το AP του λεωφορείου [3]

Παραδοχές για την υλοποίηση της εργασίας για το κεφάλαιο 2:

- ❑ Ως κλήση θεωρείται η μεταφορά οποιασδήποτε μορφής δεδομένων (λ.χ. φωνής, SMS, mms, video, e-mail κ.ο.κ.) από την τερματική συσκευή λ.χ. Smartphone.
- ❑ Η άφιξη μίας κλήσης, όπως και η αναχώρηση (περάτωση κλήσης) από το σύστημα γίνεται σε εκθετικά κατανομημένο χρόνο με συγκεκριμένη μέση τιμή.
- ❑ Θα πρέπει όλες οι τυχαίες μεταβλητές να ακολουθούν την εκθετική κατανομή η οποία περιγράφει τον χρόνο μεταξύ δύο γεγονότων με μία διαδικασία Poisson. Δεν μπορούμε να έχουμε άφιξη δύο ή περισσότερων κλήσεων την ίδια χρονική στιγμή (Εικόνα 4). Επίσης θεωρούμε ότι τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και η άφιξη της μίας κλήσης δεν επηρεάζει την άφιξη των επομένων.



Εικόνα 4 - Αναπαράσταση αφίξεων κλήσεων με διαδικασία Poisson [4]

- ❑ Για την εξυπηρέτηση μιας κλήσης απαιτείται η χρήση αποκλειστικά ενός εξυπηρετητή (server) ο οποίος μπορεί να είναι μία μονάδα εύρους ζώνης (Bandwidth Unit - BU). Βέβαια όλοι οι εξυπηρετητές έχουν την ίδια επεξεργαστική ισχύ και τον ίδιο ρυθμό εξυπηρέτησης μ του οποίου η μέση τιμή είναι σταθερή για όλο το σύστημα.

1.4 Βασικές παράμετροι-χαρακτηριστικά συστήματος.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των προς διερεύνηση συστημάτων στο κεφάλαιο 2 αναλύονται πιο κάτω:

C – Χωρητικότητα συστήματος. Δηλαδή το πλήθος των θέσεων BU που μπορεί να εξυπηρετούν μία κλήση. Όπως είπαμε έχει γίνει η παραδοχή ότι κάθε κλήση απαιτεί για να εξυπηρετηθεί ακριβώς μία BU που αντιστοιχεί σε έναν εξυπηρετητή (server) του συστήματος.

λ_n – Ρυθμός άφιξης των νέων κλήσεων στο σύστημα. Δηλαδή ο ρυθμός που καταφθάνουν οι νέες κλήσεις στην «είσοδο» ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος (π.χ. 40κλήσεις/min) και «ζητούν» να εξυπηρετηθούν.

λ_h – Ρυθμός άφιξης των κλήσεων μεταπομπής στο σύστημα. Δηλαδή ο ρυθμός που καταφθάνουν οι κλήσεις μεταπομπής, οι οποίες εξυπηρετούνταν από κάποιο σταθμό βάσης, στην «είσοδο» ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος και «ζητούν» να εξυπηρετηθούν.

λ_a – Ενεργός Ρυθμός άφιξης των κλήσεων του συστήματος. Είναι το άθροισμα των ρυθμών που καταφθάνουν οι κλήσεις (π.χ. λ_n, λ_h) για τις υφιστάμενες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος.

μ_s – Ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων στην SP. Δηλαδή ο ρυθμός που εξυπηρετούνται οι κλήσεις που καταφθάνουν στην «είσοδο» του συστήματος όταν το όχημα είναι σε κατάσταση σταματημένο, δηλαδή στην SP. Οι κλήσεις μπορεί να είναι είτε νέες είτε μεταπομπής.

μ_m – Ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων στην MP. Δηλαδή ο ρυθμός που εξυπηρετούνται οι κλήσεις που καταφθάνουν στην «είσοδο» του συστήματος όταν το όχημα είναι σε κίνηση, δηλαδή στην MP. Οι κλήσεις που δημιουργούνται μπορεί να είναι μόνο νέες και όχι μεταπομπής.

θ_s^{-1} – Χρόνος παραμονής στην κατάσταση SP. Το χρονικό διάστημα που θα παραμείνει το όχημα σε κάποιο σταθμό Τερματικό ή Ενδιάμεσο (λ.χ. 1min), που εκφράζεται με το χρόνο παραμονής στην κατάσταση SP.

θ_m^{-1} – Χρόνος παραμονής στην κατάσταση MP. Το χρονικό διάστημα που παραμένει το όχημα σε κίνηση (από τον ένα σταθμό μέχρι τον επόμενο) και εκφράζεται με το χρόνο παραμονής στην κατάσταση MP.

t – Δεσμευμένη χωρητικότητα συστήματος. Δηλαδή το πλήθος των BU τα οποία δεσμεύονται προκειμένου να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά και μόνο για ένα είδος κλήσεων, εδώ για τις κλήσεις μεταπομπής και μόνο (π.χ. $t = 5BU$), με συνέπεια οι εν λόγω δεσμευμένες θέσεις να μην υφίστανται για τις νέες κλήσεις. Αφορά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται πολιτική με Bandwidth Reservation (BR).

$C - t$ – Διαθέσιμη χωρητικότητα για όλες τις κλήσεις. Σε συνέχεια της προηγούμενης παραμέτρου t , το $C - t$ είναι το πλήθος των BU που απομένουν από το συνολικό C για να χρησιμοποιηθούν από όλες τις κλήσεις δηλαδή νέες και μεταπομπής (π.χ. αν $C=50BU$, $t=5BU$ και $C - t=45BU$). Οι τιμές από το $C - t + 1$ έως C είναι για αποκλειστική

εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής. Αφορά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται η πολιτική BR.

k – Πλήθος θέσεων στην ουρά του συστήματος. Αφορά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται η πολιτική με ύπαρξη ουράς αναμονής. Δηλαδή πέραν των θέσεων BU που εκφράζονται από τη χωρητικότητα του συστήματος C ουσιαστικά υπάρχει μία επαύξηση της χωρητικότητας C κατά k θέσεις. Η νέα χωρητικότητα του συστήματος είναι πλέον $C + k$ θέσεις. Οι κλήσεις οι οποίες βρίσκονται στις k θέσεις της ουράς αναμένουν να εξυπηρετηθούν.

1.5 Βασικά μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος (QoS – Quality of Services).

Τα βασικά μεγέθη τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο κεφάλαιο 2 προκειμένου να χαρακτηριστεί η ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος ή για να συγκριθούν δύο συστήματα μεταξύ τους είναι:

B_{new} – Πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων από το σύστημα. Δηλαδή η πιθανότητα οι νέες κλήσεις που θα αφιχθούν στο σύστημα (λ_n) να μην μπορούν να εξυπηρετηθούν. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν τη στιγμή που θα αφιχθούν οι νέες κλήσεις όλες οι BU να είναι κατειλημμένες και να μην υπάρχει διαθέσιμος server. Αν αναφερόμαστε σε σύστημα με ουρά, δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις ούτε και στην ουρά αναμονής του συστήματος. Τότε οι κλήσεις θα απορριφθούν και θα χαθούν από το σύστημα. Αν λ.χ. φθάνουν συνολικά 50 (-μόνο-) νέες κλήσεις, στη μονάδα του χρόνου και εξυπηρετηθούν από αυτές οι 25 τότε η πιθανότητα απόρριψης $B_{new} = 0,5$ ή 50%.

B_h – Πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής από το σύστημα. Δηλαδή η πιθανότητα που υπάρχει οι κλήσεις μεταπομπής που θα αφιχθούν στο σύστημα (λ_h) να μην μπορούν να εξυπηρετηθούν. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν τη στιγμή που θα αφιχθούν οι νέες κλήσεις όλες οι BU να είναι κατειλημμένες και να μην υπάρχει διαθέσιμος server. Αν αναφερόμαστε σε σύστημα με ουρά, δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις ούτε και στην ουρά αναμονής του συστήματος. Τότε οι κλήσεις θα απορριφθούν και θα χαθούν από το σύστημα.

U – Αναμενόμενο πλήθος (μέση τιμή) κατειλημμένων BU. Είναι το συνολικό άθροισμα των πιθανοτήτων απόρριψης των κλήσεων επί την κατάσταση $n = 1, 2, \dots, C$ στην οποία αναφέρεται η κάθε πιθανότητα. Το άθροισμα αφορά όλες τις πιθανότητες, είτε σε SP, είτε σε MP. Η τιμή U σε συστήματα με ουρές είναι $U = U_1 + U_2$, όπου το U_1 αφορά το τμήμα

εκείνο του συστήματος που είναι εκτός ουράς και το U_2 το τμήμα του συστήματος που είναι εντός της ουράς.

U_C – Αξιοποίηση (ή χρησιμοποίηση) της χωρητικότητας του συστήματος. Είναι το ποσοστό που μας λέει πόσο αξιοποιούμε το σύστημα μας συνάρτηση της χρήσης του U προς τη συνολική χωρητικότητα του C . Δηλαδή πόσες BU (ή Servers) χρησιμοποιούνται ή αξιοποιούνται από τη συνολική διαθέσιμη χωρητικότητα C του συστήματος. Είναι ένας δείκτης ο οποίος θα πρέπει να είναι υψηλός εάν έχουμε καλή χρήση του συστήματός μας, σε συνδυασμό πάντα με τις αντίστοιχες πιθανότητες απόρριψης (B_{new} , B_h).

N – Το πλήθος (μέση τιμή) των κλήσεων μεταπομπής που βρίσκονται στην ουρά. Είναι το άθροισμα των γινομένων της πιθανότητας των θέσεων στην ουρά $P(i, n)$, επί τον αριθμό των θέσεων που καταλαμβάνουν στην ουρά ($n - C$). Οι θέσεις που αναφέρονται στην ουρά είναι για τιμές του n από $C + 1, \dots, C + K$. Το άθροισμα αφορά όλες τις πιθανότητες, είτε σε SP, είτε σε MP.

W – Ο μέσος χρόνος παραμονής μίας κλήσης στην ουρά. Το μέγεθος αυτό αφορά βέβαια συστήματα με ουρά αναμονής. Είναι ο χρόνος που παραμένει μία κλήση, από τη στιγμή που θα αφιχθεί στην ουρά (διότι δεν υπάρχει διαθέσιμος server) μέχρι τη στιγμή που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτηση της από το σύστημα. Υπολογίζεται με τον Νόμο του Little και είναι N/λ_a (Little, J. D. C, 1961).

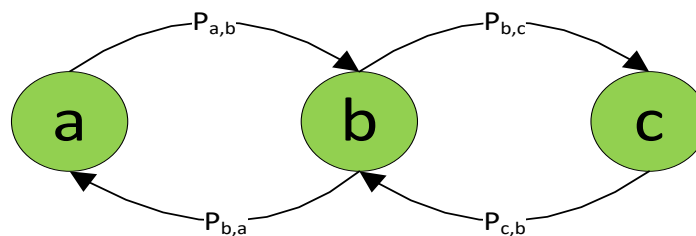
Προκειμένου να υλοποιηθούν σε κώδικα Python οι υπολογισμοί, έχει γίνει αντιστοίχιση των μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν και αναφέρονται αναλυτικά στις §1.4 και §1.5. Ο συμβολισμός του κάθε μεγέθους στον κώδικα είναι ο εξής: $C \rightarrow c$, $\lambda_n \rightarrow ln$, $\lambda_h \rightarrow lh$, $\mu_s \rightarrow ms$, $\mu_m \rightarrow mm$, $\theta_s \rightarrow xs$, $\theta_m \rightarrow xm$, $t \rightarrow t$, $k \rightarrow k$, $B_{new} = Bnew$, $B_h \rightarrow Bh$, $U \rightarrow U$, $U_1 \rightarrow U1$, $U_2 \rightarrow U2$, $U_C \rightarrow Uc$, $N \rightarrow N$, $W \rightarrow W$.

Σημείωση: Όλοι οι ρυθμοί άφιξης, εξυπηρέτησης, χρόνοι αναμονής καθώς και τα πλήθη αφορούν μέσες αναμενόμενες τιμές. Σε στοχαστικά μοντέλα, οι μέσες τιμές των μεγεθών προκύπτουν από την κατανομή πιθανοτήτων των τυχαίων μεταβλητών υπό την προϋπόθεση της μακροπρόθεσμης ισορροπίας (steady-state).

1.6 Διάγραμμα καταστάσεων – Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Όπως αναφέρθηκε στην §1.3 η άφιξη των κλήσεων περιγράφονται από μία διαδικασία Poisson, που αποτελεί περίπτωση στοχαστικής διαδικασίας (Stochastic Process). Αυτές οι

στοχαστικές διαδικασίες χαρακτηρίζονται από την τυχειότητα-αβεβαιότητα και ενσωματώνουν τυχαίες μεταβλητές οι οποίες εισάγουν στα συστήματα κατανομές πιθανότητας. Αυτές οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να περιγράφουν γραφικά με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα (Markov Chain). Οι αλυσίδες Μαρκόφ έχουν αναπτυχθεί από τον Ρώσο Μαθηματικό Αντρέι Αντρέγιεβιτς Μαρκόφ (1856-1922) και περιγράφουν πως ένα σύστημά μεταβαίνει από μία κατάσταση σε μία άλλη, σε ένα πλήθος (πεπερασμένων ή άπειρων) καταστάσεων στις οποίες μπορεί να περιέλθει το σύστημα. Η ιδιότητα που έχουν οι αλυσίδες Μαρκόφ είναι ότι η κάθε μετάβαση εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση και όχι από το προηγούμενο ιστορικό, είναι όπως χαρακτηριστικά λεγόμενα συστήματα που δεν έχουν «μνήμη» (memoryless). Μία απλή τυπική αλυσίδα Μαρκόφ αναπαρίσταται στην Εικόνα 5 και έχει τρεις (3) πιθανές καταστάσεις την **a**, **b** και **c** στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα. Μεταξύ των καταστάσεων υπάρχουν μεταβάσεις οι οποίες μας δείχνουν την πιθανότητα με την οποία μπορούμε να μεταβούμε σε κάποια άλλη κατάσταση. Για παράδειγμα από την κατάσταση **b** στην κατάσταση **c** μπορούμε να μεταβούμε με πιθανότητα $P_{b,c}$. Θα μπορούσε να υπάρχουν και μεταβάσεις από την κατάσταση **a** \rightarrow **c** και αντίστροφα ή να υπάρχει μετάβαση από μία κατάσταση στον εαυτό της **c** \rightarrow **c** ανάλογα το μοντέλο που περιγράφει η εν λόγω Μαρκοβιανή αλυσίδα.

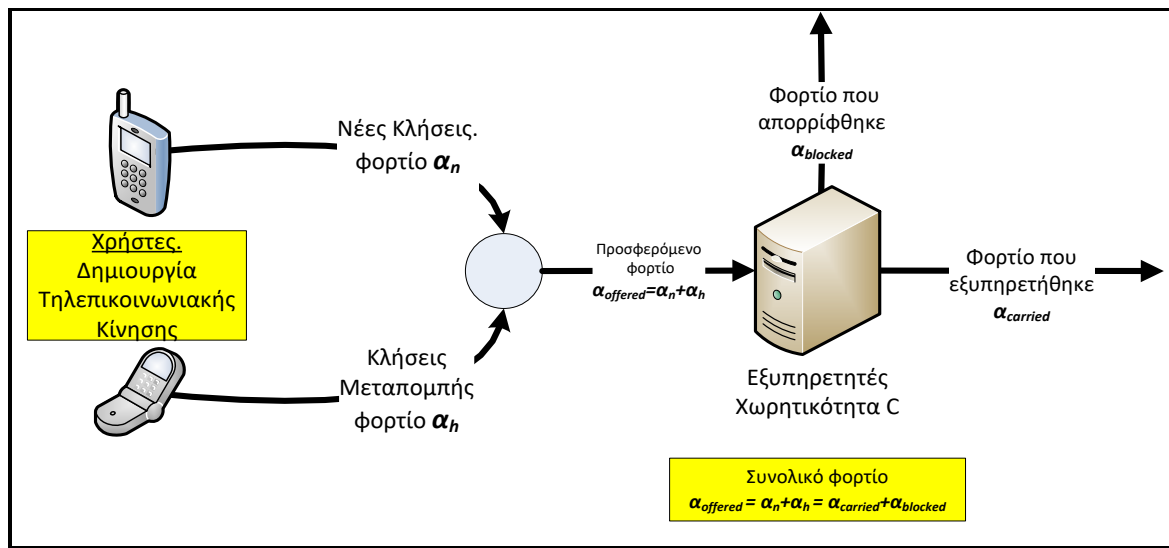


Εικόνα 5 - Τυπική Μαρκοβιανή αλυσίδα τριών καταστάσεων [5]

2. Επίλυση μοντέλων NP/CS, CP/BR, CP1/BR, CPQ και CP1Q

2.1. Γενική περιγραφή μοντέλου NP/CS

Το πρώτο μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο NP/CS ή Non Priority/Complete Sharing το οποίο προτάθηκε από τον Kim et al.,(2013). Είναι η περίπτωση στην οποία δεν υπάρχει καμία προτεραιότητα σε κλήσεις, δηλαδή όποια κλήση έρθει θα παραληφθεί από την ελεύθερη BU (ή τον διαθέσιμο εξυπηρετητή-server) και θα εξυπηρετηθεί. Αν δεν υπάρχει διαθέσιμη BU η κλήση θα απορριφθεί και θα χαθεί, γεγονός που απεικονίζεται διαγραμματικά στην Εικόνα 6.



Εικόνα 6 - Αναπαράσταση συστήματος απωλειών NP/CS [6]

Έχουμε κάνει την παραδοχή ότι κάθε κλήση, για να εξυπηρετηθεί, απαιτεί ακριβώς έναν εξυπηρετητή, ο οποίος εξυπηρετεί για χρόνο μ_s^{-1} αν πρόκειται για την SP ή χρόνο μ_m^{-1} αν πρόκειται για την MP. Σε αυτό το χρονικό διάστημα, ο εν λόγω εξυπηρετητής είναι μη διαθέσιμος για κάποια άλλη κλήση. Αν όλοι οι διαθέσιμοι εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι και αφιχθεί μία νέα κλήση, αυτή θα απορριφθεί (blocked) από το σύστημα και θα χαθεί. Στην Εικόνα 6, το συνολικό προσφερόμενο φορτίο κίνησης $\alpha_{offered}$, που δημιουργείται από τους χρήστες ισοδυναμεί με το άθροισμα των φορτίων κίνησης από τις νέες κλήσεις και τις κλήσεις μεταπομπής δηλαδή:

$$\alpha_{offered} = \alpha_n + \alpha_h.$$

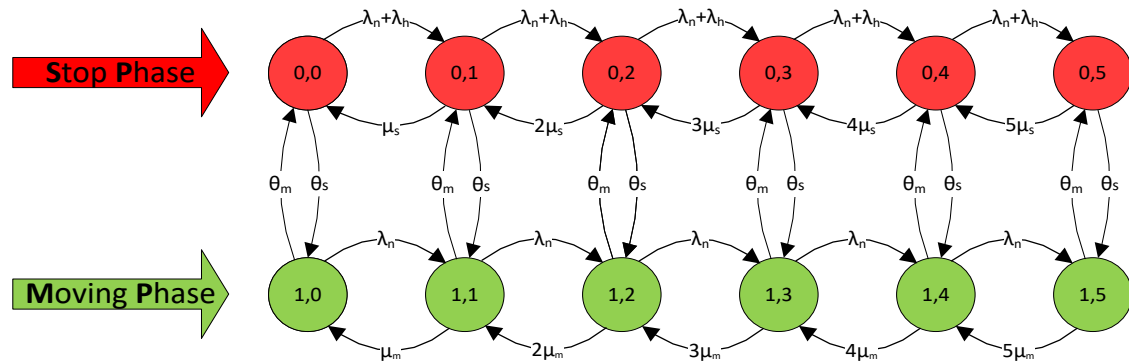
Το φορτίο κίνησης $\alpha_{offered}$ εισέρχεται στο σύστημα προς εξυπηρέτηση. Το μέρος του φορτίου κίνησης που θα βρει ελεύθερο εξυπηρετητή θα εξέλθει (carried) από το σύστημα και αυτό είναι το $\alpha_{carried}$. Υπάρχει επίσης ένα τμήμα του φορτίου κίνησης που δεν θα βρει ελεύθερο εξυπηρετητή και θα απορριφθεί (blocked), το οποίο είναι το $\alpha_{blocked}$. Ισχύει ότι:

$$\alpha_{offered} = \alpha_n + \alpha_h = \alpha_{carried} + \alpha_{blocked}$$

2.1.1. Αναπαράσταση μοντέλου NP/CS – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Η περιγραφή του συνόλου των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί-υλοποιηθεί με ένα διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων το οποίο ονομάζεται Μαρκοβιανή Αλυσίδα και έχει περιγράψει στην §1.6. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση ένα σύστημα το οποίο θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά: $C=5$, $\lambda_n=2$, $\lambda_h=2$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$, το σύστημα αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

Μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας η χωρητικότητα είναι $C=5$ και οι δυνατές καταστάσεις θα είναι $2 \times (C+1) = 2 \times (5+1) = 12$, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 1. Για κάθε κατάσταση (i, n) , ο δείκτης i αναπαριστά την φάση λειτουργίας του συστήματος, με $i = 0$ αντιστοιχεί στην SP και $i = 1$ αντιστοιχεί στην MP. Ο δείκτης n αναπαριστά το πλήθος των κλήσεων που εξυπηρετούνται από το σύστημα και ισχύει ότι $0 \leq n \leq C$.



Σχήμα 1 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS για $C=5$.

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος 1:

- Στη φάση ακίνητου οχήματος (SP), παρατηρούμε ότι μπορεί να υπάρχουν είτε νέες κλήσεις, είτε κλήσεις μεταπομπής. Πάντα λαμβάνουμε υπόψη το άθροισμά των μέσων ρυθμών άφιξης τους, δηλαδή $\lambda_n + \lambda_h$. Αυτό σημαίνει ότι, σε μία τυχαία στιγμή, μπορεί να ισχύει $\lambda_n=0$ ή $\lambda_h=0$, με την προϋπόθεση ότι δεν βρισκόμαστε στην αρχική κατάσταση (0,0). Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε πέντε (5) κλήσεις μεταπομπής σε εξυπηρέτηση και καμία νέα κλήση, οπότε θα βρισκόμαστε στην κατάσταση (0,5) και ούτω καθεξής. Ωστόσο, αυτή η κατάσταση δεν μπορεί να συμβεί στη φάση που το όχημα είναι σε κίνηση (MP), εκεί μπορούν να εκκινήσουν μόνο νέες κλήσεις.
- Για να μεταβούμε από μία κατάσταση της SP σε μία κατάσταση στην MP π.χ. από την (0,3) στην αντίστοιχη κατάσταση (1,3) απαιτείται μέσος χρόνος θ_s^{-1} ο οποίος είναι ο μέσος χρόνος τον οποίο το όχημα είναι σταματημένο. Αντίστοιχα για να μεταβούμε από μία κατάσταση της MP σε μία κατάσταση SP π.χ. από την (1,3) στην αντίστοιχη κατάσταση (0,3) απαιτείται μέσος χρόνος θ_m^{-1} .
- Έχουν υλοποιηθεί όλες οι δυνατές καταστάσεις με τις αντίστοιχες μεταβάσεις τους. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μεταβούμε από την κατάσταση (1,3) στην (1,5) χωρίς προηγουμένως να έχει μεσολαβήσει η κατάσταση (1,4). Έχουμε κάνει την παραδοχή (βασισμένοι στην κατανομή Poisson) ότι σε κάθε χρονική στιγμή δεν μπορεί να εισέλθουν ή να αποχωρήσουν από το σύστημα δύο ή περισσότερες κλήσεις ταυτόχρονα.

- Πάντα το εκάστοτε σύστημα μπορεί να βρίσκεται χωρίς κλήσεις δηλαδή να βρίσκεται στις καταστάσεις (0,0) ή (1,0), είτε το όχημα είναι σταματημένο, είτε είναι σε κίνηση. Αυτές οι καταστάσεις – σίγουρα είναι οι αρχικές καταστάσεις όταν θα εκκινήσει η διαδικασία – αλλά είναι επίσης καταστάσεις στις οποίες το σύστημα μπορεί να βρεθεί ανά πάσα στιγμή με κάποια πιθανότητα η οποία περιγράφεται ως $P(0,0)$ ή $P(1,0)$.
- Να παρατηρήσουμε βέβαια ότι $\mu_s = \mu_m$ αφού πρόκειται για το ίδιο σύστημα με την ίδια επεξεργαστική ισχύ και στις δύο φάσεις. Επομένως, ο συγκεκριμένος συμβολισμός υπάρχει προκειμένου να διαχωρίζεται σε ποια φάση αναφερόμαστε.
- Έστω ότι βρισκόμαστε στην SP και στην κατάσταση (0,3), δηλαδή έχουμε τρεις κλήσεις σε επεξεργασία στο σύστημά μας. Αυτό σημαίνει ότι τη δεδομένη χρονική στιγμή θα λειτουργούν τρεις επεξεργαστές με συνολικό μέσο ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu_s + \mu_s + \mu_s = 3\mu_s$. Για να μεταβούμε από την κατάσταση (0,3) στην (0,2), πρέπει να έχει εξυπηρετηθεί μία από τις τρεις κλήσεις. Έτσι, η μετάβαση στην κατάσταση (0,2) θα πραγματοποιηθεί σε χρόνο μ_s^{-1} . Σε αυτό το σημείο θα έχουμε δύο επεξεργαστές σε λειτουργία, με μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_s + \mu_s = 2\mu_s$.

2.1.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας (Global Balance Equations) μοντέλου NP/CS

Από τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 1 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας (Global Balance Equations) οι οποίες σε αντίθεση με τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας (Local Balance Equations) ισχύουν πάντα και για οποιαδήποτε Μαρκοβιανή αλυσίδα (Λογοθέτης Μ. 2018 σ. 61). Για να υπολογίσουμε τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας για κάθε κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, εξισώνουμε τον ρυθμό εξόδου (rate out) της κατάστασης (πολλαπλασιασμένο με την πιθανότητα της) με το άθροισμα των ρυθμών εισόδου (rate in) από όλες τις γειτονικές καταστάσεις (πολλαπλασιασμένο με τις αντίστοιχες πιθανότητές τους). Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις έξι (6) καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση (0,0):

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) = P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) = P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) = P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) = P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) = P(0,3)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(\theta_s + 5\mu_s) = P(0,4)(\lambda_n + \lambda_h) + P(1,5)\theta_m$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις έξι (6) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0)} \rightarrow P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) = P(0,0)\theta_s + P(1,1)\mu_m$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) = P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) = P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(\lambda_n + \theta_m + 3\mu_m) = P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,4)} \rightarrow P(1,4)(\lambda_n + \theta_m + 4\mu_m) = P(1,3)\lambda_n + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,5)} \rightarrow P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) = P(1,4)\lambda_n + P(0,5)\theta_s$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=5, \lambda_n=2, \lambda_h=2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(2 + 2 + 1) = P(0,1) + P(1,0) \Rightarrow -5P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(2 + 2 + 1 + 1) = P(0,0)(2 + 2) + P(0,2)2 + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-6P(0,1) + 4P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(2 + 2 + 1 + 2) = P(0,1)(2 + 2) + P(0,3)3 + P(1,2) \Rightarrow$$

$$-7P(0,2) + 4P(0,1) + 3P(0,3) + P(1,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(2 + 2 + 1 + 3) = P(0,2)(2 + 2) + P(0,4)4 + P(1,3) \Rightarrow$$

$$-8P(0,3) + 4P(0,2) + 4P(0,4) + P(1,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(2 + 2 + 1 + 4) = P(0,3)(2 + 2) + P(0,5)5 + P(1,4) \Rightarrow$$

$$-9P(0,4) + 4P(0,3) + 5P(0,5) + P(1,4) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(1 + 5) = P(0,4)(2 + 2) + P(1,5) \Rightarrow$$

$$-6P(0,5) + 4P(0,4) + P(1,5) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις έξι (6) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0)} \rightarrow P(1,0)(2 + 1) = P(0,0) + P(1,1) \Rightarrow -3P(1,0) + P(0,0) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(2 + 1 + 1) = P(1,0)2 + P(1,2)2 + P(0,1) \Rightarrow$$

$$-4P(1,1) + 2P(1,0) + 2P(1,2) + P(0,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(2 + 1 + 2) = P(1,1)2 + P(1,3)3 + P(0,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2) + 2P(1,1) + 3P(1,3) + P(0,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(2 + 1 + 3) = P(1,2)2 + P(1,4)4 + P(0,3) \Rightarrow$$

$$-6P(1,3) + 2P(1,2) + 4P(1,4) + P(0,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,4)} \rightarrow P(1,4)(2 + 1 + 4) = P(1,3)2 + P(1,5)5 + P(0,4) \Rightarrow$$

$$-7P(1,4) + 2P(1,3) + 5P(1,5) + P(0,4) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,5)} \rightarrow P(1,5)(1 + 5) = P(1,4)2 + P(0,5) \Rightarrow$$

$$-6P(1,5) + 2P(1,4) + P(0,5) = 0$$

Έχουν προκύψει 12 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 1. Όπου

κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 1 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,5)$.

$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	4	-8	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	4	-9	5	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	4	-6	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6	4	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-7	5
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6

Πίνακας 1 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS για $C=5$.

2.1.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου NP/CS

Από τον Πίνακα 1 προκύπτει ο Πίνακας 2, που περιγράφει ένα γραμμικό σύστημα 12 εξισώσεων με 12 αγνώστους (12x12), όπου αγνωστοί είναι οι ζητούμενες πιθανότητες.

$$\begin{bmatrix}
 -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(0,2) \\ P(0,3) \\ P(0,4) \\ P(0,5) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \\ P(1,2) \\ P(1,3) \\ P(1,4) \\ P(1,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 2 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιπλέον ισχύει η εξίσωση κανονικοποίησης από την οποία προκύπτει ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων είναι πάντα ίσο με τη μονάδα: $P(0,1) + P(0,2) + P(0,3) + P(0,4) + P(0,5) + P(1,0) + P(1,1) + P(1,2) + P(1,3) + P(1,4) + P(1,5) = 1$ ή $\sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^5 p(i, n) = 1$

οπού $i \in \{0,1\}$ οι δύο πιθανές καταστάσεις SP και MP του συστήματος και όπου $n \in \{0,1,2,4,5\}$ οι πέντε πιθανές καταστάσεις-χωρητικότητα του συστήματος που μας δείχνουν πόσες κλήσεις είναι σε εξυπηρέτηση στο σύστημα για κάθε πιθανό i .

Το σύστημα επιλύθηκε με τη μέθοδο του αντίστροφου πίνακα. Έγινε αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με το άθροισμα των πιθανοτήτων που είναι πάντα ένα και έτσι προκύπτει ο Πίνακας 3.

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(0,2) \\ P(0,3) \\ P(0,4) \\ P(0,5) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \\ P(1,2) \\ P(1,3) \\ P(1,4) \\ P(1,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 3 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS με αντικατάσταση τελευταίας γραμμής.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrix.reshish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 4 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου στο on-line σύστημα.

Matrix input

Insert matrix

Restore matrix

☐ Complex numbers (more)

Decimal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	b
1	-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	4	-8	4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	4	-9	5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	4	-6	0	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0
10	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6	4	0	0
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-7	5	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 4 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους δώδεκα άγνωστους x_1, x_2, \dots, x_{12} που είναι η επίλυση του συστήματος 12×12 . Οι δώδεκα αυτές τιμές αντιστοιχούν στις δώδεκα πιθανότητες του συστήματος $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,5)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 1.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.022091273094840767245$ $x_2 = 0.068549424962115852966$ $x_3 = 0.10965095447595443326$ $x_4 = 0.12076051253117238856$ $x_5 = 0.10366363991224855407$ $x_6 = 0.075284195023668003553$ $x_7 = 0.041906940512087983246$ $x_8 = 0.10362954844142318248$ $x_9 = 0.13107744388970045529$ $x_{10} = 0.11282572269656715941$ $x_{11} = 0.07350973396720741433$ $x_{12} = 0.03705061049301380548$	$P(0,0) = 0,0220912731$
	$P(0,1) = 0,0685494250$
	$P(0,2) = 0,1096509545$
	$P(0,3) = 0,1207605125$
	$P(0,4) = 0,1036636399$
	$P(0,5) = 0,0752841950$
	$P(1,0) = 0,0419069405$
	$P(1,1) = 0,1036295484$
	$P(1,2) = 0,1310774439$
	$P(1,3) = 0,1128257227$
	$P(1,4) = 0,0735097340$
	$P(1,5) = 0,0370506105$

Αποτελέσματα 1 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 12×12 , υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου NP/CS για $C=5$.

2.1.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου NP/CS με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Από τον Πίνακα 5 παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ακολουθία στις τιμές, η οποία παραμένει σταθερή. Αν οι γραμμές του πίνακα αποτυπώνουν τις καταστάσεις του συστήματος από (0,0) έως (1,5), ενώ οι στήλες αποτυπώνουν τους συντελεστές κάθε εξίσωσης, π.χ. η πρώτη στήλη αποτυπώνει τις μεταβλητές που υπάρχουν στις εξισώσεις και αφορούν την πιθανότητα $P(0,0)$, αυτές είναι:

$$SP(0,0) \rightarrow -5P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow -6P(0,1) + 4P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) = 0$$

$$MP(1,0) \rightarrow -3P(1,0) + P(0,0) + P(1,1) = 0$$

Μάλιστα παρατηρούμε ότι το άθροισμα σε κάθε στήλη, είναι πάντα μηδέν (π.χ. $P(0,0) \rightarrow -5 + 4 + 1 = 0$). Αυτό μας υποδηλώνει την ισορροπία του συστήματος (rate in = rate out).

i, n	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
(0,0)	-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(0,1)	4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(0,2)	0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0
(0,3)	0	0	4	-8	4	0	0	0	0	1	0	0
(0,4)	0	0	0	4	-9	5	0	0	0	0	1	0
(0,5)	0	0	0	0	4	-6	0	0	0	0	0	1
(1,0)	1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0
(1,1)	0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0
(1,2)	0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0
(1,3)	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6	4	0
(1,4)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-7	5
(1,5)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6

Πίνακας 5 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS με τις πιθανές καταστάσεις του συστήματος.

Αναλύοντας τις δώδεκα (12) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §2.1.2 και με βάση τον Πίνακα 5 μπορεί να συμπληρωθεί ο Πίνακας 6 που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

i, n	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
(0,0)	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
(0,1)	$\lambda_n + \lambda_h$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
(0,2)	0	$\lambda_n + \lambda_h$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
(0,3)	0	0	$\lambda_n + \lambda_h$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0
(0,4)	0	0	0	$\lambda_n + \lambda_h$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0
(0,5)	0	0	0	0	$\lambda_n + \lambda_h$	$\alpha_i(n)$	0	0	0	0	0	θ_m
(1,0)	θ_s	0	0	0	0	0	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0
(1,1)	0	θ_s	0	0	0	0	λ_n	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0
(1,2)	0	0	θ_s	0	0	0	0	λ_n	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0
(1,3)	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	λ_n	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0
(1,4)	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	λ_n	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$
(1,5)	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	λ_n	$\alpha_i(n)$

Πίνακας 6 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου NP/CS με γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §2.1.2 στις οποίες μεταφέρουμε όλους τους όρους και πάλι στο δεύτερο μέρος προκειμένου να προκύψουν οι τελικές εξισώσεις:

$$SP(0,0) \rightarrow -P(0,0)(\lambda n + \lambda h + \theta s) + P(0,1)\mu s + P(1,0)\theta m = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow -P(0,1)(\lambda n + \lambda h + \theta s + \mu s) + P(0,0)(\lambda n + \lambda h) + P(0,2)2\mu s + P(1,1)\theta m = 0$$

$$SP(0,2) \rightarrow -P(0,2)(\lambda n + \lambda h + \theta s + 2\mu s) + P(0,1)(\lambda n + \lambda h) + P(0,3)3\mu s + P(1,2)\theta m = 0$$

$$SP(0,3) \rightarrow -P(0,3)(\lambda n + \lambda h + \theta s + 3\mu s) + P(0,2)(\lambda n + \lambda h) + P(0,4)4\mu s + P(1,3)\theta m = 0$$

$$SP(0,4) \rightarrow -P(0,4)(\lambda n + \lambda h + \theta s + 4\mu s) + P(0,3)(\lambda n + \lambda h) + P(0,5)5\mu s + P(1,4)\theta m = 0$$

$$SP(0,5) \rightarrow -P(0,5)(\theta s + 5\mu s) + P(0,4)(\lambda n + \lambda h) + P(1,5)\theta m = 0$$

$$MP(1,0) \rightarrow -P(1,0)(\lambda n + \theta m) + P(1,1)\mu m + P(0,0)\theta s = 0$$

$$MP(1,1) \rightarrow -P(1,1)(\lambda n + \theta m + \mu m) + P(1,0)\lambda n + P(1,2)2\mu m + P(0,1)\theta s = 0$$

$$MP(1,2) \rightarrow -P(1,2)(\lambda n + \theta m + 2\mu m) + P(1,1)\lambda n + P(1,3)3\mu m + P(0,2)\theta s = 0$$

$$MP(1,3) \rightarrow -P(1,3)(\lambda n + \theta m + 3\mu m) + P(1,2)\lambda n + P(1,4)4\mu m + P(0,3)\theta s = 0$$

$$MP(1,4) \rightarrow -P(1,4)(\lambda n + \theta m + 4\mu m) + P(1,3)\lambda n + P(1,5)5\mu m + P(0,4)\theta s = 0$$

$$MP(1,5) \rightarrow -P(1,5)(\theta m + 5\mu m) + P(1,4)\lambda n + P(0,5)\theta s = 0$$

$$a_i(n) = \begin{cases} -(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq n < C \\ -(\theta_s + n\mu_s), & i = 0 \quad \text{για} \quad n = C \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \quad \text{για} \quad 0 \leq n < C \\ -(\theta_m + n\mu_m), & i = 1 \quad \text{για} \quad n = C \end{cases}$$

$$\beta_i(n) = \begin{cases} (n+1)\mu_s, & i = 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq n < C \\ (n+1)\mu_m, & i = 1 \quad \text{για} \quad 0 \leq n < C \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 6 προκύπτει μια γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από τις παραπάνω έξι (6) συνολικά εξισώσεις και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C . Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε την υλοποίηση του Πίνακα 6 στη γλώσσα προγραμματισμού Python όπως αυτός παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 1 (βλ. Παράρτημα Α).

Η εν λόγω υλοποίηση του πίνακα έγινε με τη συνάρτηση την οποία έχουμε ονομάσει `calculate_array` και παίρνει ως είσοδο όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος c , λ_n , λ_h , μ_s , μ_m , θ_s και θ_m και μας επιστρέφει τον πίνακα για τις τιμές που δόθηκαν στα παραπάνω χαρακτηριστικά. Αν τρέξουμε τον Κώδικα 2 (βλ. Παράρτημα Α), δηλαδή αν κάνουμε κλήση της συνάρτησης για τις τιμές του παραδείγματος μας:

$$C=5, \lambda_n=2, \lambda_h=2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 2) στην έξοδο της συνάρτησης, τον οποίο και εκτυπώνουμε. Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τον Πίνακα 1, τον οποίο έχουμε υλοποιήσει στην §2.1.2.

```
0 πίνακας A είναι:
[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -8, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 4, -9, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 4, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 4, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -7, 5]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -6]
```

Αποτελέσματα 2 - Δημιουργία πίνακα A μοντέλου NP/CS για C=5.

```
0 πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:
-----
[-3, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[2, -4, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 2, -5, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 2, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -5, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -3, 2, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -4, 3, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -5, 4, 0]
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

Αποτελέσματα 3 - Πίνακας A μοντέλου NP/CS για C=5 μετά την αντικατάσταση τελευταίας γραμμής.

Στη συνέχεια, παίρνουμε τη συνάρτηση **def calculate_array(c, ln, lh, ms, mm, xs, xm)** τη χωρίζουμε σε δύο μέρη. Το πρώτο θα αφορά τη δημιουργία του Πίνακα 1 (Κώδικας 1), ενώ το δεύτερο τμήμα του κώδικα θα επιλύει το σύστημα εξισώσεων. Αρχικά, παίρνουμε τον πίνακα A, τον οποίο έχουμε δημιουργήσει στο πρώτο τμήμα του κώδικα (Αποτελέσματα 2), και αντικαθιστούμε την τελευταία γραμμή του, θέτοντας όλα τα στοιχεία του ίσα με ένα. Στην πραγματικότητα, αυτή η ενέργεια αντικαθιστά την τελευταία εξίσωση με την εξίσωση κανονικοποίησης. Τελικά θα προκύψει ο νέος πίνακας στα Αποτελέσματα 3.

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα **b**, προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του συστήματος. Με τη χρήση της συνάρτησης **np.linalg.solve(A, b)**, η οποία παρέχεται από τη βιβλιοθήκη **numpy** της Python, την οποία και έχουμε εισάγει στην αρχή του κώδικά μας (**import numpy as np**), λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 4). Τα αποτελέσματα τα αποθηκεύουμε σε έναν δισδιάστατο πίνακα **R[x,y]**, ώστε να μπορούμε να τα εμφανίσουμε αλλά και να τα χρησιμοποιήσουμε αργότερα σε απαραίτητους υπολογισμούς.

```
Πιθανότητες-Αποτελέσματα:
-----
p(0,0) = 0.0220912731
p(0,1) = 0.0685494250
p(0,2) = 0.1096509545
p(0,3) = 0.1207605125
p(0,4) = 0.1036636399
p(0,5) = 0.0752841950
p(1,0) = 0.0419069405
p(1,1) = 0.1036295484
p(1,2) = 0.1310774439
p(1,3) = 0.1128257227
p(1,4) = 0.0735097340
p(1,5) = 0.0370506105
```

Αποτελέσματα 4 - Πιθανότητες μοντέλου NP/CS για C=5.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 4 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §2.1.3 (Αποτελέσματα 1) με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων. Για να εξαχθούν τα Αποτελέσματα 4 έγινε η χρήση του Κώδικα 3 (βλ. Παράρτημα Α), ο οποίος συμπεριλαμβάνει την κλήση της συνάρτησης και αναγκαίες εκτυπώσεις.

2.1.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο NP/CS με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία μας καθορίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος NP/CS. Αυτά τα μεγέθη είναι (Keramidi et al., 2021):

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} , η οποία ορίζεται ως η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $(0, C)$ ή $(1, C)$. Σε αυτές τις καταστάσεις, εάν αφιχθεί μία νέα κλήση, αυτή θα απορριφθεί, καθώς δεν υπάρχουν διαθέσιμοι servers (ή BU) για να την εξυπηρετήσουν. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new} = P(0, C) + P(1, C) \quad (2.1)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$B_{new} = P(0,5) + P(1,5) = 0,0752842 + 0,0370506 = \mathbf{0,1123348}$$

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h , μπορεί να συμβεί αποκλειστικά κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο SP. Ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα, το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση $(0, C)$, δεδομένου ότι βρίσκεται στη φάση SP (Keramidi et al., 2021):

$$B_h = \frac{P(0, C)}{\sum_{n=0}^C P(0, n)} \quad (2.2)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_h &= \frac{P(0,C)}{\sum_{n=0}^C P(0,n)} = \frac{P(0,5)}{P(0,0)+P(0,1)+P(0,2)+P(0,3)+P(0,4)+P(0,5)} = \\ &= \frac{0,0752842}{0,0220913 + 0,0685494 + 0,109651 + 0,1207605 + 0,1036636 + 0,0752842} = \\ &= \frac{0,0752842}{0,5} = \mathbf{0,1505684} \end{aligned}$$

- Τελευταίο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα είναι η αξιοποίηση (ή χρησιμοποίηση) της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Είναι το μέσο πλήθος των κατειλημμένων BU, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα U , προς τη συνολική χωρητικότητα του συστήματος C (ή ισοδύναμα το σύνολο των server του συστήματος). Δίνεται από τον τύπο:

$$U_c = \frac{U}{C} \quad (2.3)$$

Το U , δηλαδή η μέση τιμή του πλήθους των κατειλημμένων BU στο σύστημα (ή ισοδύναμα το μέσο πλήθος των κατειλημμένων servers), ορίζεται ως το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων του συστήματος $P(i, n)$ πολλαπλασιασμένο επί το n , όπου $n \in \{0, 1, 2, \dots, C-1, C\}$. Το $i \in \{0, 1\}$ και εκφράζει τις δύο φάσεις λειτουργίας του συστήματος (SP και MP). Η ποσότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$U = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^C n \cdot P(i, n) \quad (2.4)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^5 n \cdot P(i, n) = 0P(0,0) + 1P(0,1) + 2P(0,2) + \dots + 4P(1,4) + 5P(1,5) = \\ &= 0 \cdot 0,022091 + 1 \cdot 0,06855 + 2 \cdot 0,109651 + 3 \cdot 0,120761 + 4 \cdot 0,103664 + 5 \cdot 0,075284 + \\ &\quad 0 \cdot 0,041907 + 1 \cdot 0,103629 + 2 \cdot 0,131077 + 3 \cdot 0,112826 + 4 \cdot 0,073509 + 5 \cdot 0,03705 = \\ &= \mathbf{2,624763} \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{2,624763}{5} = \mathbf{0,524952}$$

Σε συνέχεια του Κώδικα 3 παρουσιάζεται η επέκταση της συνάρτησης **calculate_array(c, ln, lh, ms, mm, xs, xm)** στον Κώδικα 4 (βλ. Παράρτημα Α) με την υλοποίηση των υπολογισμών (3^ο μέρος) για τα μεγέθη του QoS δηλαδή τα B_{new} , B_h , U και U_c .

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το τμήμα κάθε κώδικα πιο αναλυτικά το οποίο υπολογίζει και εκτυπώνει το αντίστοιχο μέγεθος του QoS:

$B_{new} = P(0, C) + P(1, C)$	<pre># Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης νέων κλήσεων Bnew=p(0,c)+p(1,c) print(f"Bnew = {R[0][c]+R[1][c]:.15f}")</pre>
$B_h = \frac{P(0, C)}{\sum_{n=0}^C P(0, n)}$	<pre># Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής Bh=p(0,c)/Σ(n=0-c)p(0,n) Bh_arithmitis = x[c] # Άθροισμα των πιθανοτήτων Σ(n=0-c)p(0,c) να βρίσκεστε στην SP (i=0) για όλες τις δυνατές καταστάσεις n Bh_paronomastis = sum(x[:c+1]) Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis print(f"Bh = {Bh:.15f}")</pre>
$U = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^c n \cdot P(i, n)$	<pre># Υπολογισμός του U, πλήθος κατειλημμένων BU U=Σ(i=0-1)Σ(n=0-c)nP(i,n) U = 0 for i in range(2): for n in range(c + 1): U += n * x[i * (c + 1) + n] print(f"U = {U:.15f}")</pre>
$U_c = \frac{U}{C}$	<pre>#Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος Uc = U / c print(f"Uc = {Uc:.15f}")</pre>

Μετά την κλήση του Κώδικα 4 έχουμε στο 1^ο τμήμα του κώδικα Python, τη δημιουργία του πίνακα A (Αποτελέσματα 2), στο 2^ο τμήμα του κώδικα έχουμε την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων και την εξαγωγή των πιθανοτήτων (Αποτελέσματα 4) και τέλος στο 3^ο τμήμα του κώδικα έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 5) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν και με τη χρήση των τύπων (2.1), (2.2), (2.3) και (2.4).

```
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.112334805516682
Bh   = 0.150568390047336
U    = 2.624761998919300
Uc   = 0.524952399783860
```

Αποτελέσματα 5 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για C=5.

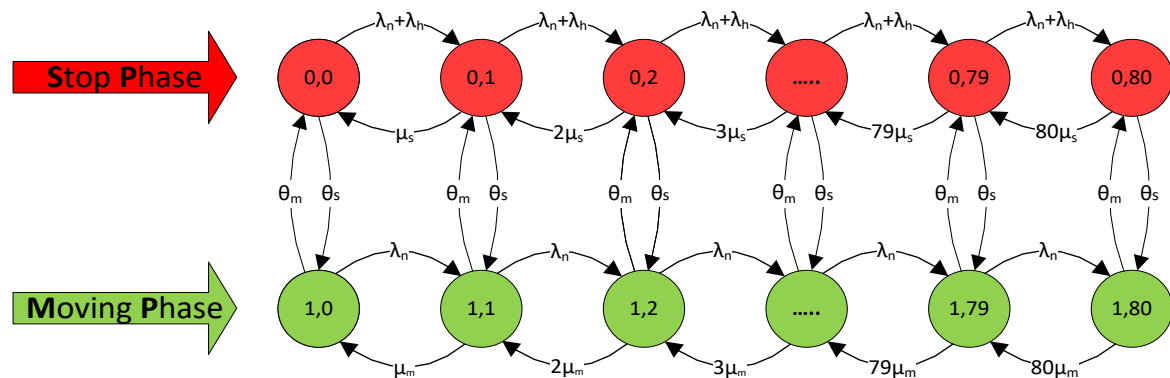
2.1.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος NP/CS με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα NP/CS το οποίο θα έχει χαρακτηριστικά μεγέθη τα οποία είναι πιο κοντά στα πραγματικά μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος, δηλαδή ενός κινούμενου οχήματος π.χ. λεωφορείου στο οποίο λειτουργεί το εξεταζόμενο

σημείο πρόσβασης (Mobile Hotspot) των εξυπηρετούμενων χρηστών. Το εξεταζόμενο σύστημα θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

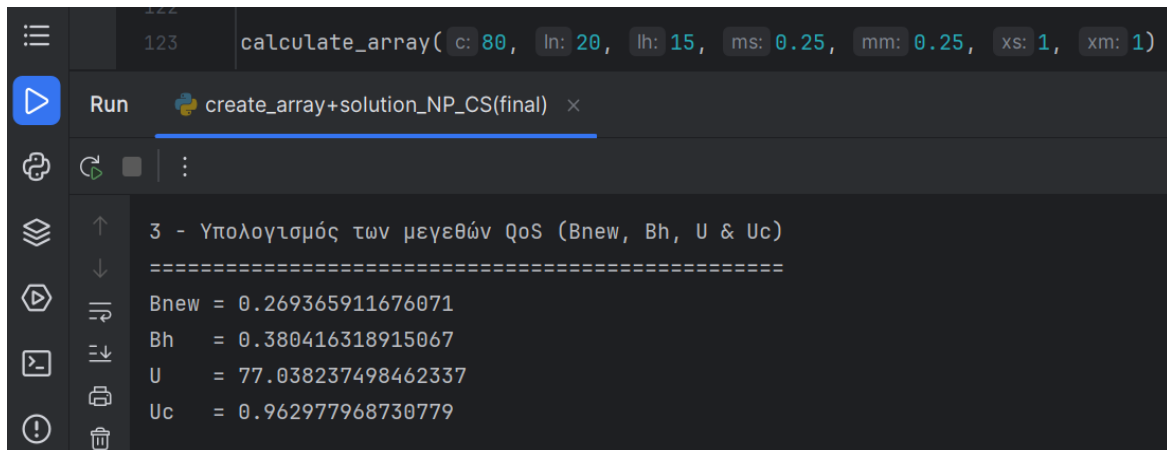
$$C=80, \lambda_n=20, \lambda_h=15, \mu_s=1/4, \mu_m=1/4, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι $2 \times (C+1) = 2 \times (80+1) = 162$ καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 2.



Σχήμα 2 – Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS με $C=80$.

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 1 (βλ. Παράρτημα Α) με τα παραπάνω μεγέθη, θα προκύψει ένας πίνακας-σύστημα 162×162 , το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο να λυθεί χωρίς τη χρήση λογισμικού, αλλά ακόμα και να γίνει αυτό θα είναι εξαιρετικά χρονοβόρο. Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τον υπολογισμό των μεγεθών που προσδιορίζουν το QoS. Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h μέσω της σχέσης (2.2), θα πρέπει να αθροίσουμε ογδόντα μία πιθανότητες προκειμένου να προκύψει ο παρονομαστής του κλάσματος. Ακόμα και με τη χρήση του on-line εργαλείου επίλυσης συστημάτων, το οποίο χρησιμοποιήθηκε στην §2.1.3 για $C=5$ (Πίνακας 4), το μέγιστο μέγεθος πίνακα που υποστηρίζεται είναι 99×99 . Ακόμα και αν υπήρχε η δυνατότητα επίλυσης συστημάτων με 162 αγνώστους, θα έπρεπε να συμπληρωθεί ένας πίνακας on-line με $162 \times 162 = 26.244$ κελιά! Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, πόσο δύσκολη είναι η υλοποίησή του συστήματός μας χωρίς τα απαραίτητα προγραμματιστικά εργαλεία, όπως εδώ ο Κώδικας 4. Στο Αποτέλεσμα 6, εμφανίζεται η κλήση της συνάρτησης για χωρητικότητα $C=80$, μαζί με τα υπόλοιπα μεγέθη του συστήματος, και στην έξοδο έχουμε τα αποτελέσματα για τα μεγέθη του QoS.



```
calculate_array(c: 80, ln: 20, lh: 15, ms: 0.25, mm: 0.25, xs: 1, xm: 1)

Run create_array+solution_NP_CS(final) x

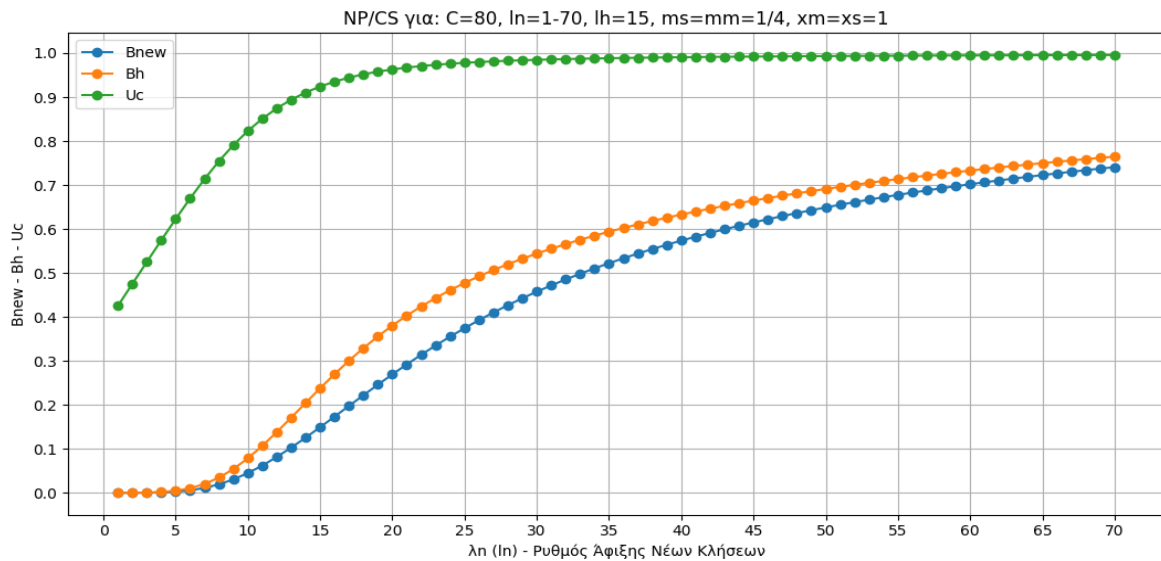
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.269365911676071
Bh   = 0.380416318915067
U     = 77.038237498462337
Uc    = 0.962977968730779
```

Αποτελέσματα 6 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για C=80.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον Κώδικα 4 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `calculate_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $\lambda_n(\ln)$ και ειδικότερα για τιμές του $\lambda_n=1, 2, 3, \dots, 70$. Για κάθε μία από αυτές τις τιμές του λ_n προκύπτει μία σειρά από τις μετρήσεις των μεταβλητών B_{new} , B_h και U_c τις οποίες αποθηκεύουμε στον πίνακα `results_array`. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε μία νέα συνάρτηση την οποία ονομάζουμε `run_for_different_ln()` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 5 (βλ. Παράρτημα Α).

Στη συνέχεια, με την επέκταση του κώδικα (4Α) και το απόσπασμα του Κώδικα 6 (βλ. Παράρτημα Α), δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(ln_values, results_array)` προκειμένου να αναπαραστήσουμε με γραφική παράσταση τις προηγούμενες τιμές που αποθηκεύσαμε στον πίνακα `results_array`. Η δημιουργία των διαγραμμάτων έγινε με την εισαγωγή της βιβλιοθήκης γραφικών `matplotlib` (`import matplotlib.pyplot as plt`) της γλώσσας προγραμματισμού Python.

Στον Κώδικα 7 (βλ. Παράρτημα Α) έχουμε την κλήση της συνάρτησης `run_for_different_ln()`, για τιμές του $\lambda_n=1-70$ και τα αποτελέσματα τα αποθηκεύουμε στον πίνακα `results_array`. Στη συνέχεια, καλούμε τη συνάρτηση `plot_results()` και έχουμε στην έξοδο τη γραφική παράσταση του Σχήματος 3.

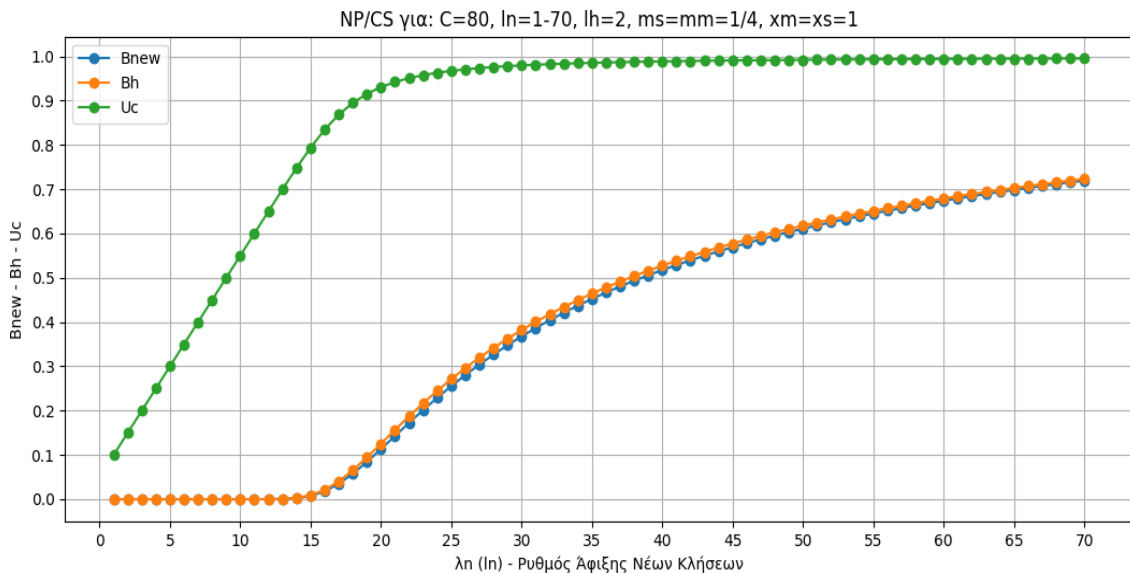


Σχήμα 3 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.

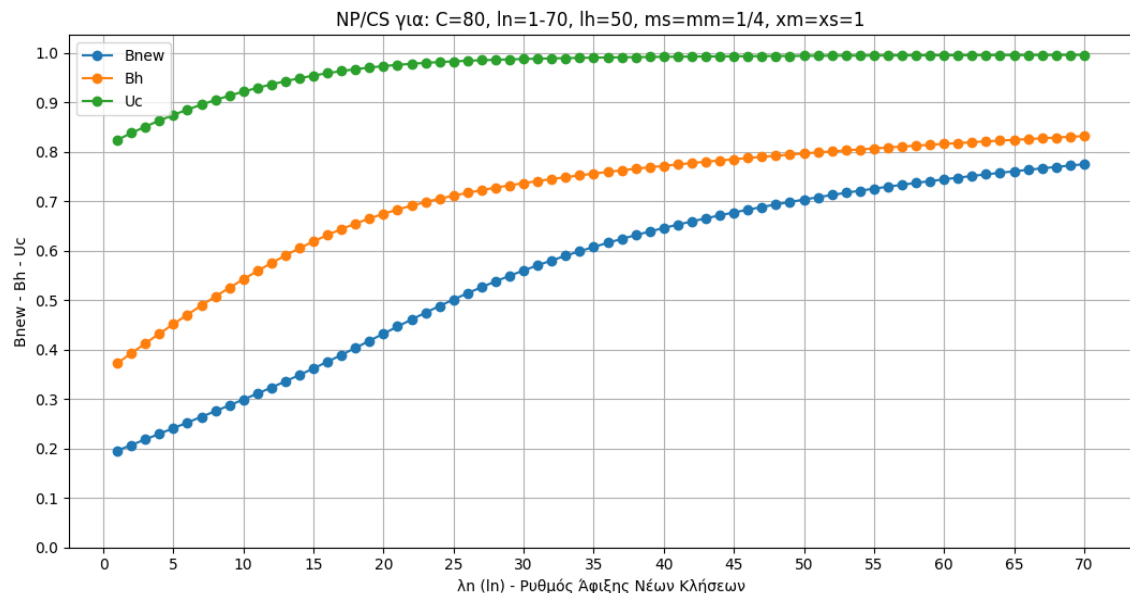
Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 3

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} , καθώς και η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h , αυξάνονται με την αύξηση των νέων κλήσεων στο σύστημα. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς όσο αυξάνονται οι κλήσεις στο σύστημα, μειώνονται οι διαθέσιμοι servers που μπορούν να τις εξυπηρετήσουν. Ως αποτέλεσμα, ο «ανταγωνισμός» μεταξύ των δύο ειδών κλήσεων για την πρόσβαση σε έναν διαθέσιμο server εντείνεται.
- Παρατηρούμε ότι αυτή η αύξηση της πιθανότητας απόρριψης, μέχρι και περίπου 5 κλήσεις στο σύστημα, είναι παρόμοια και για τα δύο είδη κλήσεων. Στη συνέχεια, η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h , εμφανίζει μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης σε σύγκριση με τον αντίστοιχο ρυθμό της B_{new} . Τέλος, καθώς οι κλήσεις τείνουν να αυξηθούν μέχρι την πλήρη κάλυψη της χωρητικότητας C , οι δύο πιθανότητες τείνουν να συγκλίνουν χωρίς όμως να ταυτιστούν, με αισθητά μειωμένη διαφορά ειδικά μετά τις εξήντα (60) κλήσεις στο σύστημα. Ωστόσο, η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h , παραμένει πάντα μεγαλύτερη. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι νέες κλήσεις μπορούν να εκκινήσουν και να εξυπηρετηθούν και στις δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP). Οι κλήσεις μεταπομπής, οι οποίες μπορούν να δημιουργηθούν μόνο στην SP, έχουν μικρότερη πιθανότητα πρόσβασης σε ελεύθερες μονάδες BU.
- Αν αλλάξουμε τα δεδομένα των κλήσεων μεταπομπής με $\lambda_n=2$ και $\lambda_n=50$ τα αποτελέσματα φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις των Σχημάτων 4 και 5, διατηρώντας

όλα τα υπόλοιπα μεγέθη σταθερά όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Παρατηρούμε ότι για $\lambda_n=2$ οι δύο καμπύλες B_{new} και B_h σχεδόν ταυτίζονται. Αν το $\lambda_n=50$ οι καμπύλες έχουν πολύ μεγάλη απόκλιση με την αύξηση της πιθανότητας απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h να είναι αισθητά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των νέων κλήσεων B_{new} (Σχήμα 5).



Σχήμα 4 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=2$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.



Σχήμα 5 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=50$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.

❏ Οι κλήσεις μεταπομπής έχουν πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα απόρριψης B_h και αυτό είναι πολύ βασικό μειονέκτημα του συστήματος NP/CS διότι δεν δίνει καμία προτεραιότητα

(Non Priority) στις κλήσεις μεταπομπής. Οι κλήσεις μεταπομπής είναι κρίσιμες για την εικόνα του συστήματος, διότι είναι σημαντικό να παραμένει ο χρήστης σε εξυπηρέτηση όταν έχει ξεκινήσει ήδη μια κλήση (λ.χ. συνομιλία) σε σύγκριση με το να μην μπορεί να εκκινήσει μία νέα κλήση. Είναι κομβικής σημασίας και βαρύτητας η ξαφνική και απρόσμενη διακοπή μιας εν εξελίξει συνομιλίας για τον χρήστη και γενικότερα για το σύστημά μας, επηρεάζοντας αρνητικά το QoS.

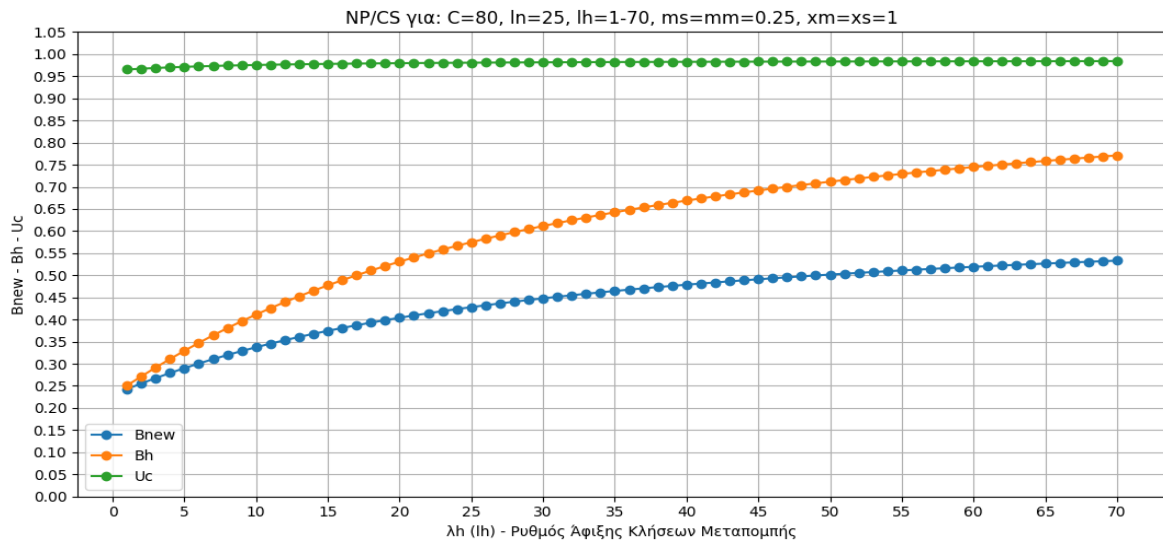
■ Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c αυξάνεται με την αύξηση των κλήσεων στο σύστημα, κάτι που είναι αναμενόμενο. Από το Σχήμα 3 παρατηρούμε ότι η αύξηση είναι περίπου γραμμική μέχρι την τιμή $U_c=82,31\%$ για $\lambda_n=10$. Στη συνέχεια, παρουσιάζει μικρότερη αύξηση μέχρι περίπου την τιμή $U_c=98,47\%$ για $\lambda_n=30$ και από εκεί και πέρα έχουμε τον κορεσμό της χωρητικότητας του συστήματος με πολύ μικρή αύξηση. Ενδεικτικά, παραθέτουμε τον Πίνακα 7, ο οποίος αφορά τη γραφική παράσταση του Σχήματος 3 και το U_c . Παρατηρούμε ότι για $\lambda_n=30$, το $U_c=98,47\%$ ενώ μέχρι και το $\lambda_n=60$ φτάνει την τιμή το $U_c=99,46\%$. Δηλαδή, έχουμε αύξηση μόνο μία ποσοστιαία μονάδα ($\sim 1\%$) ενώ έχουμε διπλασιασμό του λ_n ($30 \rightarrow 60$).

λ_n	U_c [%]
2	47,49
5	62,25
10	82,31
20	96,29
30	98,47
40	99,06
50	99,32
60	99,46
70	99,56

Πίνακας 7 - Μεταβολή U_c συναρτήσει του λ_n .

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 6 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `calculate_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής λ_h (lh) και ειδικότερα για τιμές του $\lambda_h=1, 2, 3, \dots, 70$ αντίστοιχα όπως μεταβλήθηκε το λ_n στον Κώδικα 5 και 6. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον Κώδικα 6 με το 5^ο τμήμα κώδικα και χρησιμοποιούμε αντίστοιχα δύο νέες συναρτήσεις τις οποίες ονομάζουμε `run_for_different_lh(c, lh, calls, ms, mm, xs, xm)` και `plot_results1()`. Η παραπάνω υλοποίηση βρίσκεται στο απόσπασμα του Κώδικα 8 (βλ. Παράρτημα Α).

Μετά την κλήση του Κώδικα 8 με χαρακτηριστικά μεγέθη $C=80$, $ln=25$, $lh=1-70$, $ms=mm=0,25$, $xs=xm=1$, έχουμε την εξαγωγή της γραφικής παράστασης του Σχήματος 6.



Σχήμα 6 - Αναπαράσταση μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 6

- Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} όσο και κλήσεων μεταπομπής B_h αυξάνεται όσο αυξάνονται οι κλήσεις που καταφθάνουν στο σύστημα (εδώ κλήσεις μεταπομπής) διότι μειώνονται οι διαθέσιμοι servers που μπορούν να εξυπηρετήσουν νέες κλήσεις με αποτέλεσμα να μειώνεται η πιθανότητα εξυπηρέτησης και να αυξάνεται η πιθανότητα απόρριψης της κλήσης.
- Η αύξηση της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων ξεκινάει για το B_{new} και το B_h από το ίδιο σημείο για $\lambda_h=1$ το $B_{new} \approx B_h \approx 0,25$. Από εκεί και πέρα οι δύο καμπύλες αποκλίνουν η μία από την άλλη και η αύξηση της απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής είναι πολύ μεγαλύτερη για τους ίδιους λόγους που αναλύθηκαν και στη γραφική παράσταση του Σχήματος 3 και αφορά τη δημιουργία των κλήσεων μεταπομπής μόνον στη διάρκεια της SP. Παραθέτουμε ενδεικτικές τιμές των μεγεθών στον Πίνακα 8.

λ_h	B_{new} [%]	B_h [%]
5	29,01	32,93
30	44,79	61,15
70	53,31	77,10

Πίνακας 8 - Μεταβολή B_{new} , B_h συναρτήσει του λ_h .

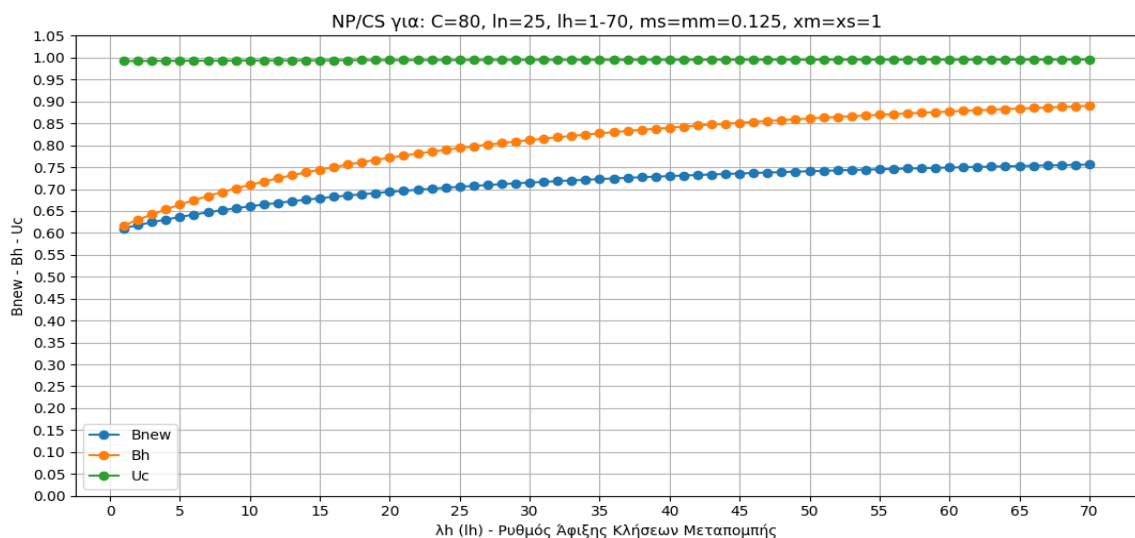
- Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος είναι πολύ ψηλά και ξεκινάει από το $U_c=0,96529$ για $\lambda_h=1$ και καταλήγει σε $U_c=0,98426$ για $\lambda_h=70$. Είναι πολύ μικρή η διακύμανση της τιμής της U_c και βρίσκεται σε πολύ υψηλά επίπεδα διότι ξεκινάμε το σύστημα με $\lambda_n=25$.

■ Αν υποδιπλασιάσουμε τον μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης του συστήματος από $\mu_m=\mu_s=0,25$ σε $\mu_m=\mu_s=0,125$ και στις δύο φάσεις SP και MP θα προκύψει η γραφική παράσταση του Σχήματος 7 σε αντιστοίχιση με αυτή του Σχήματος 6. Αν διπλασιάσουμε τον μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης του συστήματος από $\mu_m=\mu_s=0,25$ σε $\mu_m=\mu_s=0,5$ θα προκύψει η γραφική παράσταση του Σχήματος 8. Τα συγκριτικά αποτελέσματα για τις γραφικές παραστάσεις των Σχημάτων 7 και 8 παρουσιάζονται στον Πίνακα 9.

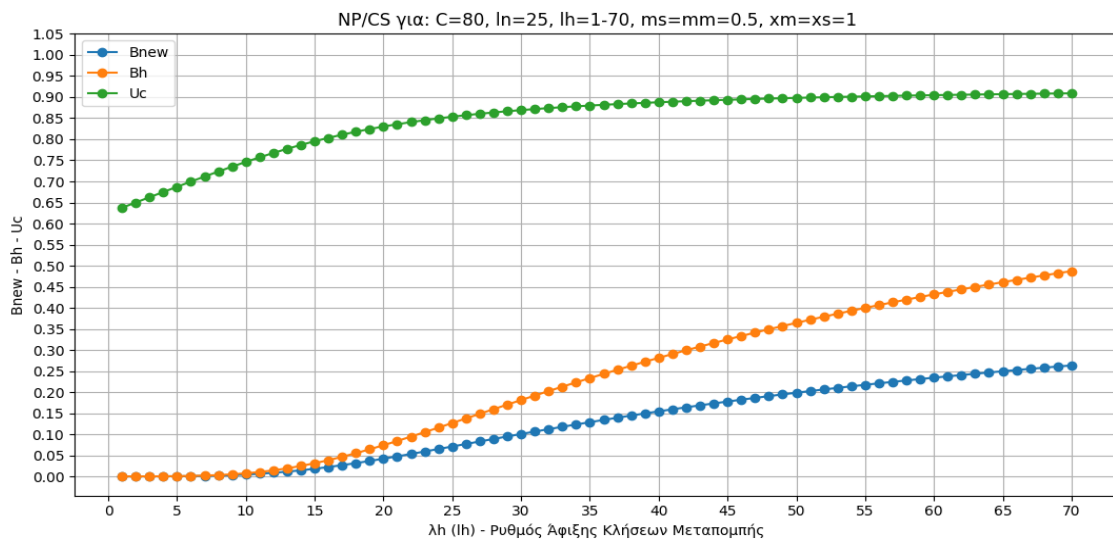
	$\mu_m=\mu_s=0,125$	$\mu_m=\mu_s=0,25$	$\mu_m=\mu_s=0,5$
$B_{new} (\lambda_h=35)$	0,7229	0,4645	0,1287
$B_h (\lambda_h=35)$	0,8272	0,6424	0,2333
$U_c (\lambda_h=35)$	0,9948	0,9821	0,8799

Πίνακας 9 - Μεταβολή B_{new} , B_h και U_c συναρτήσει των μ_s και μ_m .

Από τον Πίνακα 9 για τη συγκεκριμένη τιμή του $\lambda_h=35$ (περίπου στο μέσο των γραφημάτων) παρατηρούμε ότι με $\mu_m=\mu_s=0,125$ οι πιθανότητες απόρριψης κλήσεων $B_{new}=0,7229$ και $B_h=0,8272$ είναι πολύ υψηλές. Αντίθετα όταν το $\mu_s = \mu_m = 0,5$ οι τιμές των πιθανοτήτων απόρριψης κλήσεων $B_{new}=0,1287$ και $B_h=0,2333$ είναι πάρα πολύ χαμηλές. Οι τιμές αποτυπώνονται ξεκάθαρα και στις γραφικές παραστάσεις των Σχημάτων 7 και 8. Να επισημάνουμε ότι ο ρυθμός εξυπηρέτησης έχει να κάνει κατά κύριο λόγο με το hardware του συστήματος και την επεξεργαστική ισχύ και πολλές φορές μπορεί να είναι πιο συμφέρουσα η εν λόγω επαύξηση σε σχέση με άλλες λύσεις προκειμένου να επιτύχουμε τα επιθυμητά μεγέθη QoS στο σύστημά μας.



Σχήμα 7 - Αναπαράσταση μεγεθών των B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$, $\mu_m=\mu_s=0,125$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.



Σχήμα 8 - Αναπαράσταση μεγεθών των B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$, $\mu_m=\mu_s=0,5$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.

2.2. Γενική περιγραφή μοντέλου CP/BR

Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο CP/BR ή Cut-off Priority/Bandwidth Reservation (Kim et al. 2013). Είναι η περίπτωση στην οποία έχουμε δεσμεύσει τμήμα της συνολικής χωρητικότητας C του συστήματος το οποίο συμβολίζουμε με t , προκειμένου να χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Στο δεσμευμένο αυτό τμήμα του bandwidth, δηλαδή στο $(C - t + 1, C)$ δεν έχουν πρόσβαση οι νέες κλήσεις. Στο σύστημα CP/BR ισχύουν όπως και στο NP/CS τα εξής:

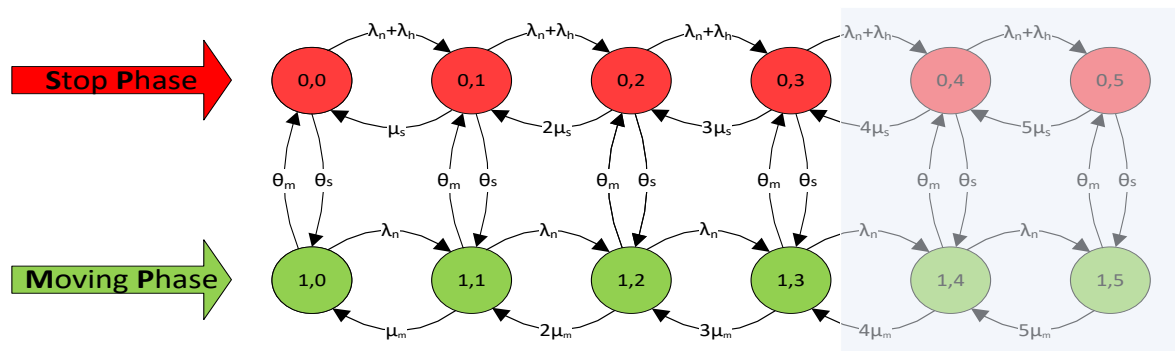
- Υπάρχουν δύο φάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το όχημα. Στην πρώτη, που είναι η SP, μπορούν να δημιουργηθούν νέες κλήσεις καθώς και κλήσεις μεταπομπής ενώ στη δεύτερη, την MP μπορούν να δημιουργηθούν μόνο νέες κλήσεις.
- Οι αφίξεις κλήσεων στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson και οι χρόνοι εξυπηρέτησης των κλήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή.
- Ισχύει και εδώ η παραδοχή ότι για την εξυπηρέτηση μιας κλήσης απαιτείται ακριβώς μία μονάδα εύρους ζώνης BU (ή ένας server) η οποία μένει κατειλημμένη για μέσο αναμενόμενο χρόνο μ_s^{-1} (για την SP) ή μ_m^{-1} (για την MP).

Στο μοντέλο CP/BR έχουμε τη δέσμευση των t BU προκειμένου να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Όπως αναφέρθηκε και στο NP/CP μοντέλο οι κλήσεις μεταπομπής αποτελούν προτεραιότητά μας σε σχέση με τις νέες κλήσεις. Είναι σημαντική η συνέχιση μιας κλήσης η οποία βρίσκεται σε εξέλιξη διότι η διακοπή της επηρεάζει αρνητικά την εικόνα του συστήματος και το QoS, σε σύγκριση με το πρόβλημα

που μπορεί να προκύψει από τη μη εκκίνηση μιας νέας κλήσης. Δεσμεύουμε, επομένως t BU (θέσεις), οι οποίες διατίθενται αποκλειστικά μόνο σε κλήσεις μεταπομπής, με σκοπό τη μείωση της απόρριψης των εν λόγω κλήσεων. Η δέσμευση με t BU, υλοποιείται και στις δύο φάσεις του οχήματος (SP και MP).

2.2.1. Αναπαράσταση μοντέλου CP/BR – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση το ίδιο σύστημα το οποίο είχαμε και στο μοντέλο NP/CS με τα εξής χαρακτηριστικά: $C=5$, $\lambda_n=2$, $\lambda_h=2$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$ και δεσμευμένες θέσεις για τις κλήσεις μεταπομπής $t=2$ σε κάθε μία από τις δύο φάσεις που μπορεί να βρεθεί το όχημα. Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, ως Μαρκοβιανή αλυσίδα, της οποίας η χωρητικότητα είναι $C=5$, $t=2$ και οι δυνατές καταστάσεις θα είναι $2x(C+1)=2x(5+1)=12$, οι οποίες αναπαρίστανται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$ με δέσμευση χωρητικότητας και στις δύο φάσεις (SP και MP).

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 9:

- Υπάρχουν συνολικά $2x(C+1)=2x(5+1)=12$ καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα μας για την εξυπηρέτηση των κλήσεων. Σε αυτό θα πρέπει να συνυπολογιστεί ότι έχουμε κάνει την παραδοχή ότι κλήσεις μεταπομπής μπορούν να εκκινήσουν μόνο στη φάση του σταματημένου οχήματος (SP). Αυτό σημαίνει ότι σε καταστάσεις $\geq C - t$ της MP μπορούμε να μεταβούμε μόνο στην περίπτωση που βρισκόμαστε σε αντίστοιχη κατάσταση ($\geq C - t$) της SP και το όχημα ξεκινήσει (μετάβαση οχήματος από SP→MP).
- Οι τέσσερις καταστάσεις (0,4) – (0,5) – (1,4) – (1,5) οι οποίες έχουν σημειωθεί με το γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 9 δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις νέες κλήσεις. Το τμήμα αυτό του bandwidth, έχει δεσμευτεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από τα δύο είδη κλήσεων με την προϋπόθεση ότι στην MP μπορούν να εκκινήσουν μόνο νέες κλήσεις και όχι μεταπομπής. Ειδικά για την SP μέχρι και την κατάσταση $C - t$ δηλαδή την

κατάσταση (0, 3) του παραδείγματός μας, ο ρυθμός άφιξης είναι ίσος με το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών αφίξεων $\lambda_n + \lambda_h$.

2.2.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP/BR

Από τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 9 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας αντιστοίχως με την §2.1.2, με τον ρυθμό εξόδου=ρυθμό εισόδου (rate out = rate in) σε κάθε κατάσταση. Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις έξι καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση (0,0):

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) = P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) = P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) = P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) = P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) = P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(\theta_s + 5\mu_s) = P(0,4)\lambda_h + P(1,5)\theta_m$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις έξι (6) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0)} \rightarrow P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) = P(0,0)\theta_s + P(1,1)\mu_m$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) = P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) = P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(\theta_m + 3\mu_m) = P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,4)} \rightarrow P(1,4)(\theta_m + 4\mu_m) = P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,5)} \rightarrow P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) = P(0,5)\theta_s$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=5, t=2, \lambda_n=2, \lambda_h=2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(2 + 2 + 1) = P(0,1) + P(1,0) \Rightarrow -5P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(2 + 2 + 1 + 1) = P(0,0)(2 + 2) + P(0,2)2 + P(1,1) \Rightarrow \\ -6P(0,1) + 4P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(2 + 2 + 1 + 2) = P(0,1)(2 + 2) + P(0,3)3 + P(1,2) \Rightarrow \\ -7P(0,2) + 4P(0,1) + 3P(0,3) + P(1,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(2 + 1 + 3) = P(0,2)(2 + 2) + P(0,4)4 + P(1,3) \Rightarrow \\ -6P(0,3) + 4P(0,2) + 4P(0,4) + P(1,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(2 + 1 + 4) = P(0,3)2 + P(0,5)5 + P(1,4) \Rightarrow \\ -7P(0,4) + 2P(0,3) + 5P(0,5) + P(1,4) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(1 + 5) = P(0,4)2 + P(1,5) \Rightarrow$$

$$-6P(0,5) + 2P(0,4) + P(1,5) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις έξι (6) καταστάσεις στην ΜΡ:

$$\text{MP}(1,0) \rightarrow P(1,0)(2 + 1) = P(0,0) + (1,1) \Rightarrow$$

$$-3P(1,0) + P(0,0) + P(1,1) = 0$$

$$\text{MP}(1,1) \rightarrow P(1,1)(2 + 1 + 1) = P(1,0)2 + P(1,2)2 + P(0,1) \Rightarrow$$

$$-4P(1,1) + 2P(1,0) + 2P(1,2) + P(0,1) = 0$$

$$\text{MP}(1,2) \rightarrow P(1,2)(2 + 1 + 2) = P(1,1)2 + P(1,3)3 + P(0,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2) + 2P(1,1) + 3P(1,3) + P(0,2) = 0$$

$$\text{MP}(1,3) \rightarrow P(1,3)(1 + 3) = P(1,2)2 + P(1,4)4 + P(0,3) \Rightarrow$$

$$-4P(1,3) + 2P(1,2) + 4P(1,4) + P(0,3) = 0$$

$$\text{MP}(1,4) \rightarrow P(1,4)(1 + 4) = P(1,5)5 + P(0,4) \Rightarrow$$

$$-5P(1,4) + 5P(1,5) + P(0,4) = 0$$

$$\text{MP}(1,5) \rightarrow P(1,5)(1 + 5) = P(0,5) \Rightarrow$$

$$-6P(1,5) + P(0,5) = 0$$

Έχουν προκύψει 12 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 10. Όπου κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 10 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,5)$.

$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	4	-6	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	2	-4	4	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-5	5
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-6

Πίνακας 10 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR για $C=5$.

2.2.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP/BR

Από τον Πίνακα 10 προκύπτει ο Πίνακας 11, που περιγράφει ένα γραμμικό σύστημα 12

εξισώσεων με 12 αγνώστους (12x12), όπου άγνωστοι είναι οι ζητούμενες πιθανότητες.

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(0,2) \\ P(0,3) \\ P(0,4) \\ P(0,5) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \\ P(1,2) \\ P(1,3) \\ P(1,4) \\ P(1,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 11 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR για $C=5, t=2$.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrixreshish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 12 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

Matrix input

Insert matrix

Restore matrix

☐ Complex numbers (more)

Decimal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	b
1	-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	4	-6	4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0
10	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-4	4	0	0
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-5	5	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 12 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους δώδεκα αγνώστους x_1, x_2, \dots, x_{12} που είναι η επίλυση του συστήματος 12x12. Οι δώδεκα αυτές τιμές αντιστοιχούν στις δώδεκα πιθανότητες του συστήματος $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,5)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 7.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.027865212142117971692$ $x_2 = 0.087077440496723007853$ $x_3 = 0.14106157295619179013$ $x_4 = 0.15904909738990456494$ $x_5 = 0.063258163734621133686$ $x_6 = 0.021688513280441531514$ $x_7 = 0.05224862021386685062$ $x_8 = 0.12888064849948258014$ $x_9 = 0.16197395653673680581$ $x_{10} = 0.13701563757617569287$ $x_{11} = 0.01626638496033114879$ $x_{12} = 0.0036147522134069220528$	$P(0,0) = 0,0278652121$
	$P(0,1) = 0,0870774405$
	$P(0,2) = 0,1410615730$
	$P(0,3) = 0,1590490974$
	$P(0,4) = 0,0632581637$
	$P(0,5) = 0,0216885133$
	$P(1,0) = 0,0522486202$
	$P(1,1) = 0,1288806485$
	$P(1,2) = 0,1619739565$
	$P(1,3) = 0,1370156376$
	$P(1,4) = 0,0162663850$
	$P(1,5) = 0,0036147522$

Αποτελέσματα 7 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 12x12, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP/BR για $C=5, t=2$.

2.2.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP/BR με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 10 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις δώδεκα (12) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §2.2.2 (ομοίως με τη μεθοδολογία που εφαρμόστηκε στην §2.1.2) και με βάση τον Πίνακα 10, προκύπτει ο Πίνακας 13, που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

i, n	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
(0,0)	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
(0,1)	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
(0,2)	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
(0,3)	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0
(0,4)	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0
(0,5)	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	0	0	0	0	0	θ_m
(1,0)	θ_s	0	0	0	0	0	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0
(1,1)	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0
(1,2)	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0
(1,3)	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0
(1,4)	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$
(1,5)	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$

Πίνακας 13 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP/BR με γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §2.2.2:

$$SP(0,0) \rightarrow -P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) + P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow -P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) + P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2) \rightarrow -P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) + P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3) \rightarrow -P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) + P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,4) \rightarrow -P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) + P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m = 0$$

$$SP(0,5) \rightarrow -P(0,5)(\theta_s + 5\mu_s) + P(0,4)\lambda_h + P(1,5)\theta_m = 0$$

$$MP(1,0) \rightarrow -P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) + P(1,1)\mu_m + P(0,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,1) \rightarrow -P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) + P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s = 0$$

$$MP(1,2) \rightarrow -P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) + P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s = 0$$

$$MP(1,3) \rightarrow -P(1,3)(\theta_m + 3\mu_m) + P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s = 0$$

$$MP(1,4) \rightarrow -P(1,4)(\theta_m + 4\mu_m) + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s = 0$$

$$MP(1,5) \rightarrow -P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) + P(0,5)\theta_s = 0$$

$$a_i(n) = \begin{cases} -(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -(\theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } n = C \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -(\theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } n = C \end{cases}$$

$$\beta_i(n) = \begin{cases} (n+1)\mu_s, & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C \\ (n+1)\mu_m, & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \end{cases}$$

$$\sigma_i(n) = \begin{cases} \lambda_n + (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } 0 < n \leq C - t \\ (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } C - t < n \leq C \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 13 προκύπτει η γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από τις παραπάνω δέκα (10) συνολικά εξισώσεις (Keramidi et al., 2013) και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C . Τις εξισώσεις τις υλοποιούμε στη γλώσσα προγραμματισμού Python με το απόσπασμα του Κώδικα 9 (βλ. Παράρτημα Α).

Στη συνέχεια, θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 8). Αντικαθιστώντας την τελευταία γραμμή του πίνακα με την εξίσωση κανονικοποίησης θα προκύψει ο νέος πίνακας ο οποίος εμφανίζεται στα Αποτελέσματα 9.

Ο πίνακας A είναι:

```

[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 4, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 5]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -6]

```

Αποτελέσματα 8 - Πίνακας A μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$.

Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:

```

-----
[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 4, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 5]
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

```

Αποτελέσματα 9 - Πίνακας A μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.

Στη συνέχεια, με τον ίδιο τρόπο όπως και στο μοντέλο NP/CS, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα b . Με τη χρήση της συνάρτησης `np.linalg.solve(A, b)`, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 10).

Πιθανότητες-Αποτελέσματα:

```

-----
p(0,0) = 0.0278652121
p(0,1) = 0.0870774405
p(0,2) = 0.1410615730
p(0,3) = 0.1590490974
p(0,4) = 0.0632581637
p(0,5) = 0.0216885133
p(1,0) = 0.0522486202
p(1,1) = 0.1288806485
p(1,2) = 0.1619739565
p(1,3) = 0.1370156376
p(1,4) = 0.0162663850
p(1,5) = 0.0036147522

```

Αποτελέσματα 10 - Πιθανότητες μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 10 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §2.2.3 (Αποτελέσματα 7), με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων. Για την εξαγωγή των πιθανοτήτων (Αποτελέσματα 10) έγινε η χρήση του Κώδικα 10 (βλ. Παράρτημα Α) ο οποίος είναι παρόμοιος με αυτόν του μοντέλου NP/CS με τη διαφορά ότι στην υλοποιημένη συνάρτηση `calculate_array()` υπάρχει πλέον και η παράμετρος-μεταβλητή t για τη δεσμευμένη χωρητικότητα του συστήματος.

2.2.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CP/BR με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία μας καθορίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος CP/BR. Αυτά τα μεγέθη είναι (Keramidi et al., 2021):

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} , η οποία ορίζεται ως η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση μεγαλύτερη από την $C - t$. Στις καταστάσεις αυτές περιλαμβάνονται οι δεσμευμένες καταστάσεις ($> C - t$), οι οποίες είναι για αποκλειστική χρήση από τις κλήσεις μεταπομπής (και στις δύο φάσεις). Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new} = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C-t}^C P(i, n) \quad (2.5)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$B_{new} = P(0,3) + P(0,4) + P(0,5) + P(1,3) + P(1,4) + P(1,5) = 0,1590491 + 0,0632582 + 0,0216885 + 0,1370156 + 0,0162664 + 0,0036147 = \mathbf{0,4008925}$$

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h , μπορεί να συμβεί αποκλειστικά και μόνο κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο (SP). Ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα, το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση $(0, C)$, δεδομένου ότι βρίσκεται στη φάση SP (Keramidi et al., 2021). Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$B_h = \frac{P(0, C)}{\sum_{n=0}^C P(0, n)} \quad (2.6)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_h &= \frac{P(0, C)}{\sum_{n=0}^C P(0, n)} = \frac{P(0, 5)}{P(0, 0) + P(0, 1) + P(0, 2) + P(0, 3) + P(0, 4) + P(0, 5)} = \\ &= \frac{0,0216885}{0,0278652 + 0,0870774 + 0,1410616 + 0,1590491 + 0,0632582 + 0,0216885} = \\ &= \frac{0,0216885}{0,5} = \mathbf{0,043377} \end{aligned}$$

- Τελευταίο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα, είναι η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Το U_c υπολογίζεται κατά τα γνωστά, από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) της §2.1.5. Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$U = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^5 n \cdot P(i, n) = 0P(0,0) + 1P(0,1) + 2P(0,2) + \dots + 4P(1,4) + 5P(1,5) =$$

$$= 0 \cdot 0,027865 + 1 \cdot 0,087077 + 2 \cdot 0,141062 + 3 \cdot 0,159049 + 4 \cdot 0,063258 + 5 \cdot 0,021688 \\ + 0 \cdot 0,052249 + 1 \cdot 0,128881 + 2 \cdot 0,161974 + 3 \cdot 0,137016 + 4 \cdot 0,016266 + 5 \cdot 0,003615 = \\ = \mathbf{2,154837}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{2,154837}{5} = \mathbf{0,430967}$$

Σε συνέχεια του Κώδικα 10 παρουσιάζεται η επέκταση της συνάρτησης **calculate_array()** στον Κώδικα 11 (βλ. Παράρτημα Α) με την υλοποίηση των υπολογισμών (3^ο μέρος) για τα μεγέθη του QoS δηλαδή τα B_{new} , B_h , U και U_c .

Μετά την κλήση του Κώδικα 11 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 11) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν και με τη χρήση των τύπων(2.3), (2.4), (2.5) και (2.6).

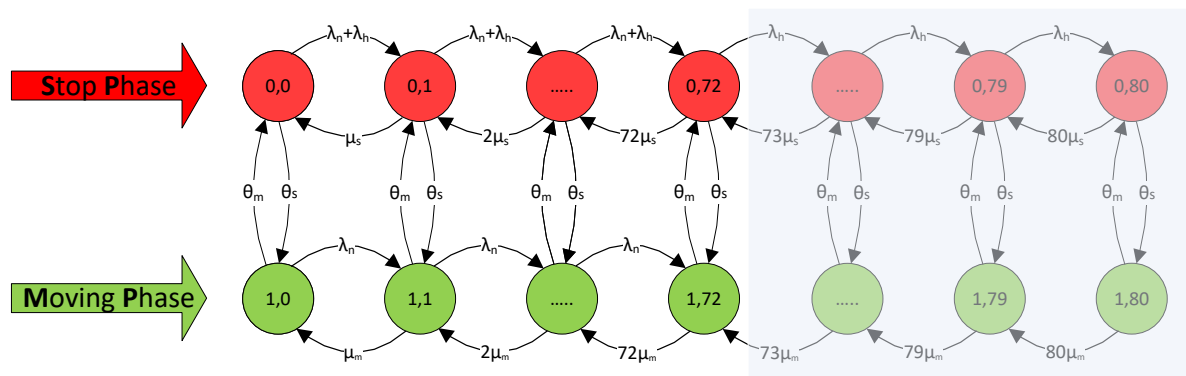
```
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.400892549154881
Bh   = 0.043377026560883
U     = 2.154837875129355
Uc    = 0.430967575025871
```

Αποτελέσματα 11 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=5$, $t=2$.

2.2.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP/BR με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα CP/BR το οποίο θα έχει χαρακτηριστικά μεγέθη τα ίδια μεγέθη του συστήματος το οποίο αναλύθηκε στην §2.1.6 (NP/CS) με την προσθήκη του μεγέθους $t=8$ που αντιστοιχεί στη δεσμευμένη χωρητικότητα του συστήματος (BU) προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής και στις δύο φάσεις του συστήματος (SP και MP). Το εξεταζόμενο σύστημα λοιπόν θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά: $C=80$, $t=8$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=15$, $\mu_s=1/4$, $\mu_m=1/4$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι $2x(C+1)=2x(80+1)=162$ καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 10.



Σχήμα 10 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR με $C=80$ και $t=8$ με δέσμευση χωρητικότητα και στις δύο φάσεις (SP και MP).

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 11 (βλ. Παράρτημα Α) με τα μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος έχουμε στα Αποτελέσματα 12 την κλήση της συνάρτησης για χωρητικότητα $C = 80$ και $t = 8$ μαζί με τα υπόλοιπα μεγέθη του εν λόγω συστήματος, καθώς και την έξοδο για τις τιμές του QoS.

```

135 calculate_array(c: 80, t: 8, ln: 20, lh: 15, ms: 0.25, mm: 0.25, xs: 1, xm: 1)

Run create_array+solutionCP_BR(final)

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.483020131763562
Bh   = 0.012736182289889
U     = 70.976303990218497
Uc    = 0.887203799877731

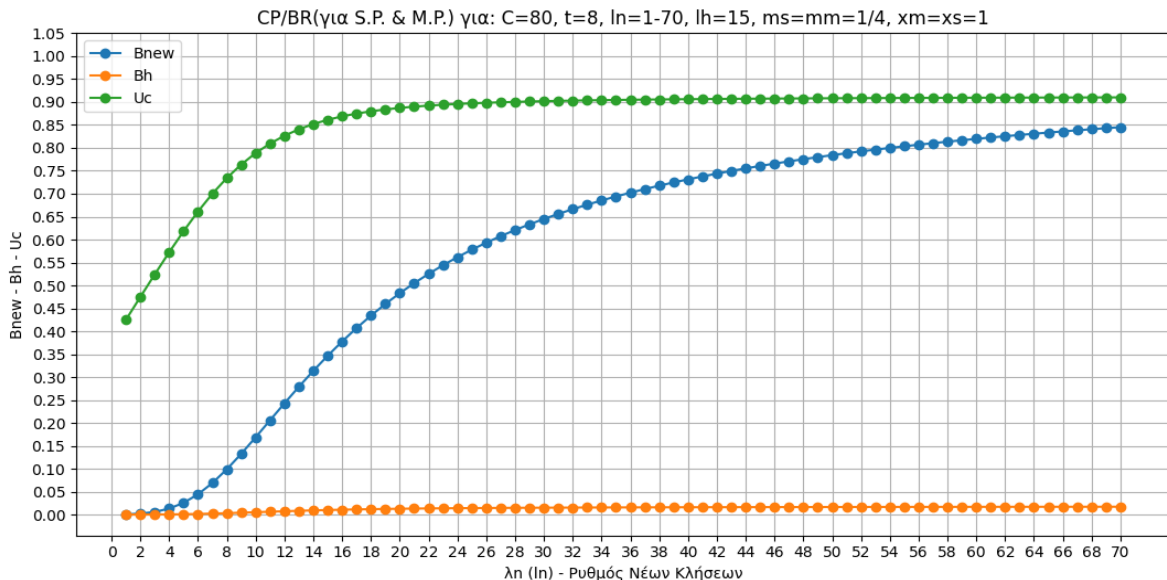
```

Αποτελέσματα 12 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=80$ και $t=8$.

Επεκτείνουμε τον Κώδικα 11 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `calculate_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $\lambda_n(\ln)$ και ειδικότερα για τιμές του $\lambda_n=1, 2, 3, \dots, 70$. Για κάθε μία από αυτές τις τιμές του λ_n προκύπτει μία σειρά από τις μετρήσεις των μεταβλητών B_{new} , B_h και U_c τις οποίες αποθηκεύουμε στον πίνακα `results_array`. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε μία νέα συνάρτηση την οποία ονομάζουμε `run_for_different_ln(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 12 (βλ. Παράρτημα Α).

Στη συνέχεια, με την επέκταση του κώδικα (4Α) και το απόσπασμα του Κώδικα 12 (βλ. Παράρτημα Α), δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(ln_values, results_array)` προκειμένου να αναπαραστήσουμε σε γραφική παράσταση τις προηγούμενες τιμές που αποθηκεύσαμε στον πίνακα `results_array` (Κώδικας 12).

Υλοποιούμε την κλήση της συνάρτησης `run_for_different_ln()` επαναληπτικά (Κώδικας 12) για τιμές του $\lambda_n=1-70$ και αποθηκεύουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα `results_array`. Στη συνέχεια, καλούμε τη συνάρτηση `plot_results()` (Κώδικας 12) και έχουμε στην έξοδο τη γραφική παράσταση του Σχήματος 11.

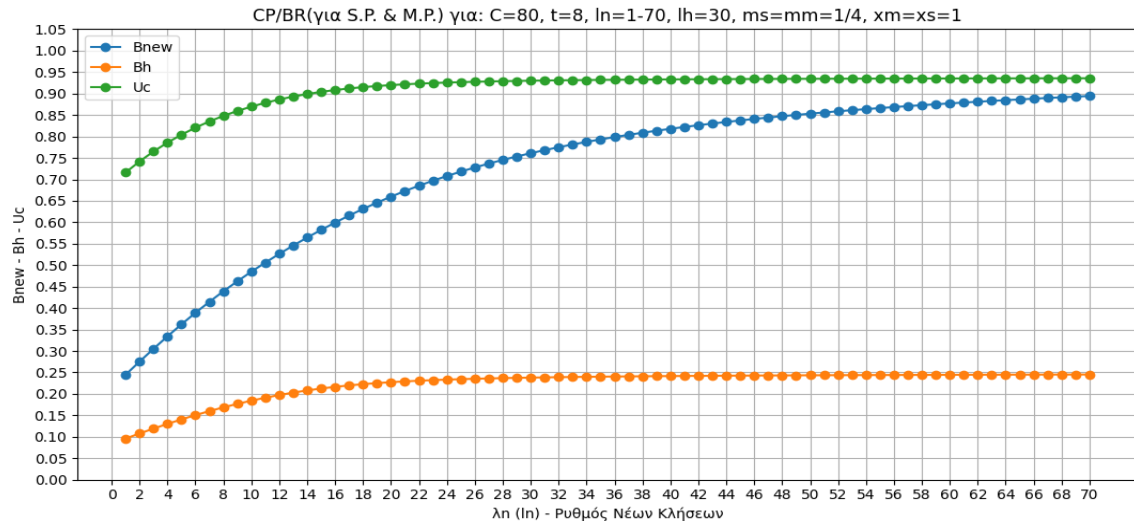


Σχήμα 11 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) με $C=80$ και $t=8$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 11

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} όπως και στο μοντέλο NP/CS αυξάνεται με την αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού νέων κλήσεων (λ_n). Η αύξηση της πιθανότητας απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} εδώ είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με το μοντέλο NP/CS συναρτήσει του λ_n . Ενδεικτικά, στο NP/CS για $\lambda_n=30$ έχουμε $B_{new}=0,4574$, αντίστοιχα για το CP/BR με $\lambda_n=30$ έχουμε $B_{new}=0,6449$, σχεδόν 20% μεγαλύτερη πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων. Ένα ακόμα παράδειγμα είναι στο NP/CS για $\lambda_n=60$ $B_{new}=0,7018$ αντίστοιχα για το CP/BR με $\lambda_n=60$ $B_{new}=0,8189$. Η αύξηση είναι φυσιολογική και οφείλεται στη μείωση των διαθέσιμων BU για τις νέες κλήσεις. Αν και η χωρητικότητα είναι $C=80$ στην πραγματικότητα ισχύει μόνο για τις κλήσεις μεταπομπής οι διαθέσιμες θέσεις για εξυπηρέτηση των νέων κλήσεων είναι $C - t = 72$ και με την αύξηση των κλήσεων στο σύστημα, μειώνονται οι διαθέσιμες BU με αντίστοιχη αύξηση της συμφόρησης στο σύστημα.
- Η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής είναι πάρα πολύ μικρή και σχεδόν σταθερή. Ενδεικτικά, για $\lambda_n=10$ έχουμε $B_{new}=0,0052$ και για $\lambda_n=60$ έχουμε $B_{new}=0,0169$, η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι εξαιρετικά μικρή και θα λέγαμε ότι

ο στόχος της μη απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής, έχει επιτευχθεί με ένα ποσοστό δεσμευμένων BU ($t=8$) ίσο με το 10% της συνολικής χωρητικότητας ($C=80$). Οι πιθανότητες B_h ισχύουν για ρυθμό άφιξης κλήσεων $\lambda_h=15$, αν π.χ. διπλασιαστεί το $\lambda_h=30$ θα οδηγηθούμε στη γραφική παράσταση του Σχήματος 12.



Σχήμα 12 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) με $C=80$ και $t=8$.

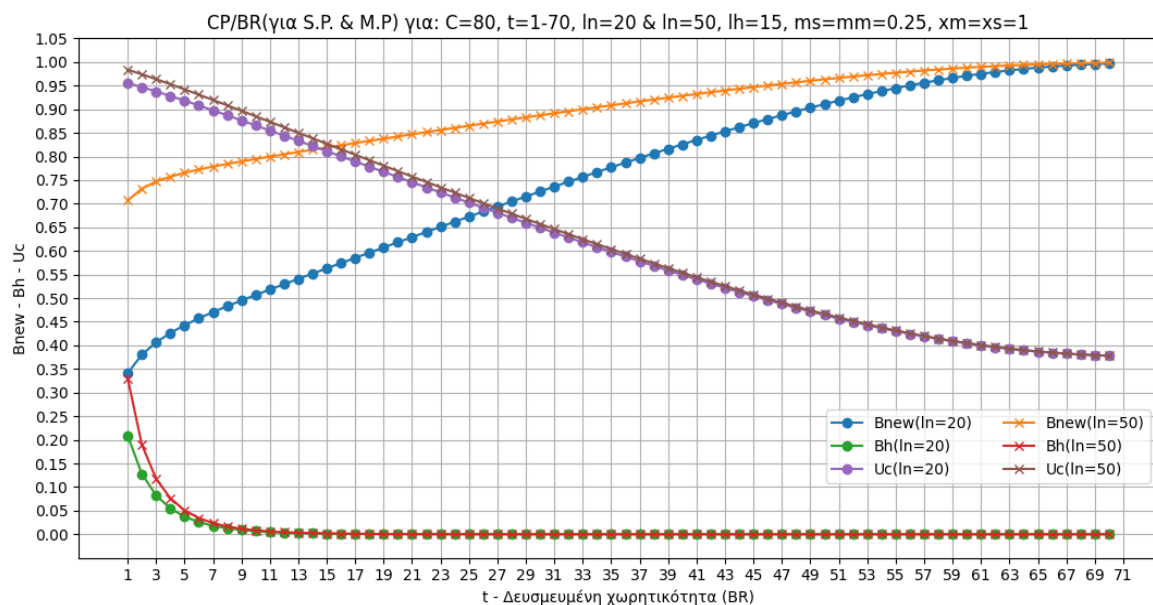
Στο Σχήμα 12 για $\lambda_h=30$ παρατηρούμε μία σημαντική αύξηση στις τιμές οι οποίες τείνουν να σταθεροποιηθούν για $\lambda_n > 20$, μάλιστα για τιμές $\lambda_n=25-70$ το B_h παίρνει αντίστοιχα τιμές από 0,2343 έως και 0,2451. Να επισημάνουμε ότι στο μοντέλο NP/CS για τιμή του $\lambda_n=70$ το $B_h=0,7646$ πάρα πολύ αυξημένο σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πιθανότητες απόρριψης του μοντέλου CP/BR, ακόμα και μετά του διπλασιασμού του ρυθμού άφιξης κλήσεων μεταπομπής ($\lambda_n=30$, $B_h=0,2452$).

Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c για τιμές $\lambda_n > 25$ τείνει να σταθεροποιηθεί στις τιμές 90 – 91%. Στο σύστημα NP/CS η αντίστοιχη αξιοποίηση του συστήματος U_c ήταν $>97\%$ για $\lambda_n > 25$ (Σχήμα 3). Παρατηρούμε μία σημαντική μείωση στην αξιοποίηση του συστήματος στο CP/BR. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε δεσμεύσει ένα μεγάλο τμήμα των BU και στις δύο φάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το όχημα. Στη φάση του κινούμενου οχήματος (MP) δεν μπορούν να δημιουργηθούν κλήσεις μεταπομπής οπότε οι οκτώ αυτές δεσμευμένες θέσεις ($t=8$) στην MP μένουν αναξιοποίητες εφόσον το όχημα είναι σε κίνηση. Η μόνη πιθανή περίπτωση να χρησιμοποιηθούν οι καταστάσεις $C - t$ έως και C στην MP είναι κατά τη διάρκεια της SP, αν έχουμε ήδη σε επεξεργασία κάποιες κλήσεις μεταπομπής (με ρυθμό $\mu_s=1$) σε αυτές τις οκτώ θέσεις (0,72 – 0,80) και να εκκινήσει το όχημα. Αυτές οι οκτώ θέσεις

αντιστοιχούν στο 10% της συνολικής χωρητικότητας ($C=80$) οπότε, περίπου αντίστοιχά και η αξιοποίηση της χωρητικότητας είναι μειωμένη περίπου 10% ($U_C=90-91\%$). Αυτό βέβαια ισχύει διότι το όχημα παραμένει στις δύο φάσεις SP και MP για ίδιους χρόνους $\theta_s^{-1}=\theta_m^{-1}=1$.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 12 προκειμένου να μπορούμε να μεταβάλουμε το αριθμό των BU που θα αποτελούν τη δεσμευμένη χωρητικότητα του συστήματός μας και θα λαμβάνει τιμές $t=1-70$ έτσι ώστε να δούμε πως θα επηρεάσουν οι διάφορες τιμές του t τα μεγέθη του QoS. Η υλοποίηση έγινε με την επέκταση 5 (Κώδικας 13) και τη συνάρτηση `run_for_different_t()`. Επίσης χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή tBR και ο πίνακας `tBR_values` στον οποίο θα αποθηκεύονται οι εν λόγω τιμές. Στη συνέχεια, με τον κώδικα 5A και τη συνάρτηση `plot_combined_results1()` δημιουργούμε τη γραφική παράσταση για δύο διαφορετικές τιμές του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων για $l_n=20$ και $l_n=50$. Η συνολική υλοποίηση καθώς και η κλήση των συναρτήσεων εμφανίζεται στον Κώδικα 13 (βλ. Παράρτημα Α).

Μετά την κλήση του Κώδικα 13 με χαρακτηριστικά μεγέθη $C=80$, $t=1-70$, $l_n=20$ και 50 , $l_h=15$, $ms=mm=0,25$, $xs=xm=1$, έχουμε την γραφική παράσταση του Σχήματος 13.



Σχήμα 13 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό δεσμευμένων θέσεων $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) με $C=80$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 13

Η μεταβολή της τιμής του πλήθους των BU που αποτελούν τη δεσμευμένη χωρητικότητα t για τη χρήση αποκλειστικά από κλήσεις μεταπομπής παρουσιάζεται στο Σχήμα 13 με

τις αντίστοιχη μεταβολή των μεγεθών QoS. Αρχικά, για τις δεσμευμένες θέσεις $t > 10$, η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h τείνει στο μηδέν, γεγονός που σημαίνει ότι η πιθανότητα να αποκλειστεί κάποια κλήση είναι πολύ μικρή, ακόμα και για ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=50$.

■ Όσον αφορά την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_h αυτή αυξάνεται όσο αυξάνονται οι δεσμευμένες θέσεις t για κλήσεις μεταπομπής, το οποίο είναι και απόλυτα λογικό διότι με διαθέσιμες θέσεις πλέον $C - t$ ο «ανταγωνισμός» για έναν ελεύθερο εξυπηρετητή, μια ελεύθερη BU μειώνεται. Μάλιστα η καμπύλη αύξησης είναι πολύ μεγαλύτερη για ρυθμό $\lambda_n=50$ από τον αντίστοιχο $\lambda_n=20$. Οι δύο καμπύλες βέβαια για μεγάλες τιμές του t συμπίπτουν και η πιθανότητα απόρριψης αγγίζει τη μονάδα (λ.χ. $t > 65$) που σημαίνει ότι οι νέες κλήσεις δεν έχουν καμία πιθανότητα να βρουν κάποιο ελεύθερο BU και το σύστημα μας λειτουργεί αποκλειστικά και μόνο για τις κλήσεις μεταπομπής κάτι το οποίο καθιστά το σύστημα μη αποτελεσματικό. Εδώ μπορούμε να εξαγάγουμε το συμπέρασμα ότι μία βέλτιστη τιμή για τις δεσμευμένες θέσεις θα μπορούσε να ανέρχεται στο 10% της συνολικής χωρητικότητας ($t = 0,1 \cdot C$). Ωστόσο, η ακριβής αυτή τιμή εξαρτάται κάθε φορά και από τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματός μας.

■ Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_C , παρατηρούμε ότι ελάχιστα επηρεάζεται από τις δύο διαφορετικές τιμές του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων δηλαδή για $\lambda_n=20$ ή $\lambda_n=50$, ακολουθεί την ίδια καθοδική πορεία η γραφική παράσταση και για τα δύο μεγέθη. Αν θέσουμε το όριο του $t > 8$ παρατηρούμε ότι η αξιοποίηση της χωρητικότητας από εκεί και πέρα έχει μεγάλη πτώση και το σύστημα μας καθίσταται ασύμφορο προς χρήση μιας και μένει πολύ μεγάλη περιοχή του αναξιοποίητη. Για παράδειγμα αν το $t=20$ το $U_C \approx 75\%$ που σημαίνει ότι το 25% μένει αναξιοποίητο και αν το $t=50$ το $U_C \approx 46\%$ που σημαίνει ότι το 54% μένει αναξιοποίητο. Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι σπαταλούμε αναξιοποίητες θέσεις στην MP στην οποία δεν μπορεί να εκκινήσουν κλήσεις μεταπομπής και θα υπάρξει αξιοποίησή τους μόνο στην περίπτωση που έχουμε αλλαγή κατάστασης του οχήματος από SP→MP.

2.3. Γενική περιγραφή μοντέλου CP1/BR

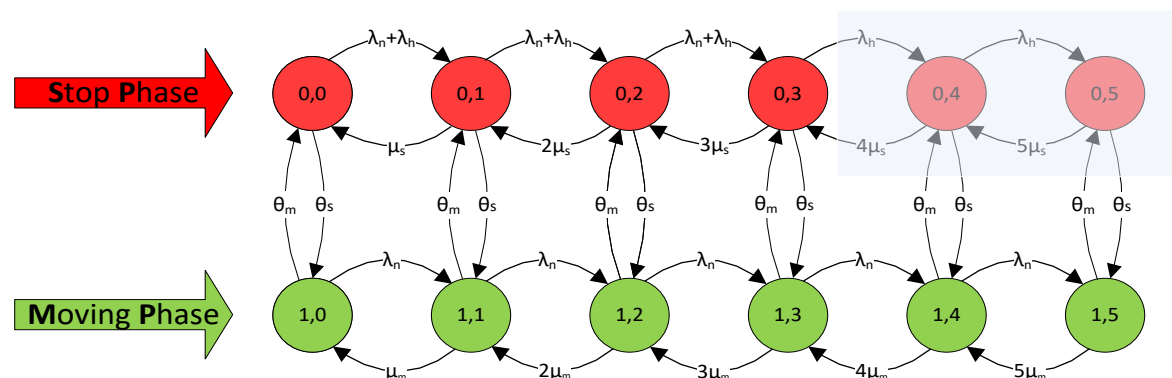
Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο CP1/BR ή Cut-off Priority1/Bandwidth Reservation (αντίστοιχο με το μοντέλο MAC-CAC στο Kim et al.

(2013)). Στην περίπτωση αυτή, έχουμε δεσμεύσει τμήμα της συνολικής χωρητικότητας C του συστήματος, το οποίο συμβολίζουμε με t . Η δέσμευση ισχύει μόνο κατά τη φάση του σταματημένου οχήματος (SP) και έχει ως σκοπό την εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής. Η δέσμευση δεν ισχύει για την περίπτωση που το όχημα είναι σε κίνηση, στην περίπτωση που το όχημα είναι σε κίνηση (MP), ισχύει ότι και στο σύστημα NP/CS. Στόχος του συγκεκριμένου μοντέλου είναι η μείωση του αναξιοποίητου χώρου, που προέκυψε στην §2.2, με άμεση συνέπεια τη μεγαλύτερη αύξηση του U_c . Ενδεικτικά, η μέγιστη αξιοποίηση του συστήματος CP/BR έφτασε σε ποσοστό $U_c=91,02$ (Σχήμα 12). Στο δεσμευμένο αυτό τμήμα του bandwidth δηλαδή στο $(C - t + 1, C)$ δεν έχουν πρόσβαση οι νέες κλήσεις και εφαρμόζεται μόνο στην SP όπου δύναται να δημιουργηθούν κλήσεις μεταπομπής. Στο σύστημα CP1/BR ισχύουν, όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, οι δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP), οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson και κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί τη διάθεση μίας BU.

Δεσμεύουμε, επομένως t BU (θέσεις), οι οποίες διατίθενται αποκλειστικά για κλήσεις μεταπομπής, με σκοπό τη μείωση της απόρριψης των εν λόγω κλήσεων. Αυτό ισχύει μόνο στη φάση του σταματημένου οχήματος (SP).

2.3.1. Αναπαράσταση μοντέλου CP1/BR – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση το ίδιο σύστημα το οποίο είχαμε και στο μοντέλο CP/BR με τα εξής χαρακτηριστικά: $C=5$, $\lambda_n=2$, $\lambda_h=2$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$ και δεσμευμένες θέσεις για τις κλήσεις μεταπομπής $t=2$, αυτή η δέσμευση των θέσεων αφορά μόνο την SP. Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα, της οποίας η χωρητικότητα είναι $C=5$, $t=2$ και οι δυνατές καταστάσεις θα είναι $2 \times (C+1) = 2 \times (5+1) = 12$, οι οποίες αναπαρίστανται στο Σχήμα 14.



Σχήμα 14 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$ με δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP.

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 14:

- Υπάρχουν συνολικά $2 \times (C+1) = 2 \times (5+1) = 12$ καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα μας για την εξυπηρέτηση των κλήσεων. Σε αυτό θα πρέπει να συνυπολογιστεί ότι έχουμε κάνει την παραδοχή ότι κλήσεις μεταπομπής μπορούν να εκκινήσουν μόνο στη φάση του σταματημένου οχήματος (SP). Σε οποιαδήποτε κατάσταση της SP και να βρισκόμαστε, αν το όχημα εκκινήσει, μπορούμε να βρεθούμε σε οποιαδήποτε κατάσταση της MP μεταξύ αυτών και οι καταστάσεις (1,4) και (1,5) και να έχουμε επεξεργασία κλήσεων μεταπομπής.
- Οι δύο καταστάσεις (0,4) και (0,5) οι οποίες έχουν σημειωθεί με το γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 14 δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις νέες κλήσεις. Είναι το τμήμα του bandwidth το οποίο έχει δεσμευτεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Σε αντίθεση με το απλό μοντέλο CP/BR εδώ στο μοντέλο CP1/BR οι δύο καταστάσεις (1,4) και (1,5) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από τις νέες κλήσεις. Ειδικά για την SP μέχρι και την κατάσταση $C - t$ δηλαδή την κατάσταση (0, 3) του παραδείγματός μας, ο ρυθμός άφιξης είναι ίσος με το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών αφίξεων $\lambda_n + \lambda_h$.

2.3.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP1/BR

Από τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 14 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας αντιστοίχως με την §2.2.2, με τον ρυθμό εξόδου=ρυθμό εισόδου (rate out = rate in) σε κάθε κατάσταση. Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις έξι καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση (0,0):

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) = P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) = P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) = P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) = P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) = P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(\theta_s + 5\mu_s) = P(0,4)\lambda_h + P(1,5)\theta_m$$

Οι παραπάνω εξισώσεις, παραμένουν όπως ήταν και στο μοντέλο CP/BR. Συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις έξι (6) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0)} \rightarrow P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) = P(0,0)\theta_s + P(1,1)\mu_m$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) = P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) = P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(\lambda_n + \theta_m + 3\mu_m) = P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,4)} \rightarrow P(1,4)(\lambda_n + \theta_m + 4\mu_m) = P(1,3)\lambda_n + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,5)} \rightarrow P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) = P(1,4)\lambda_n + P(0,5)\theta_s$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=5, t=2, \lambda_n=2, \lambda_h=2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(2 + 2 + 1) = P(0,1) + P(1,0) \Rightarrow -5P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(2 + 2 + 1 + 1) = P(0,0)(2 + 2) + P(0,2)2 + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-6P(0,1) + 4P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(2 + 2 + 1 + 2) = P(0,1)(2 + 2) + P(0,3)3 + P(1,2) \Rightarrow$$

$$-7P(0,2) + 4P(0,1) + 3P(0,3) + P(1,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(2 + 1 + 3) = P(0,2)(2 + 2) + P(0,4)4 + P(1,3) \Rightarrow$$

$$-6P(0,3) + 4P(0,2) + 4P(0,4) + P(1,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(2 + 1 + 4) = P(0,3)2 + P(0,5)5 + P(1,4) \Rightarrow$$

$$-7P(0,4) + 2P(0,3) + 5P(0,5) + P(1,4) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(1 + 5) = P(0,4)2 + P(1,5) \Rightarrow$$

$$-6P(0,5) + 2P(0,4) + P(1,5) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις έξι (6) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0)} \rightarrow P(1,0)(2 + 1) = P(0,0) + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-3P(1,0) + P(0,0) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(2 + 1 + 1) = P(1,0)2 + P(1,2)2 + P(0,1) \Rightarrow$$

$$-4P(1,1) + 2P(1,0) + 2P(1,2) + P(0,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(2 + 1 + 2) = P(1,1)2 + P(1,3)3 + P(0,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2) + 2P(1,1) + 3P(1,3) + P(0,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(2 + 1 + 3) = P(1,2)2 + P(1,4)4 + P(0,3) \Rightarrow$$

$$-6P(1,3) + 2P(1,2) + 4P(1,4) + P(0,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,4)} \rightarrow P(1,4)(2 + 1 + 4) = P(1,3)2 + P(1,5)5 + P(0,4) \Rightarrow$$

$$-7P(1,4) + 2P(1,3) + 5P(1,5) + P(0,4) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,5)} \rightarrow P(1,5)(1 + 5) = P(1,4)2 + P(0,5) \Rightarrow$$

$$-6P(1,5) + 2P(1,4) + P(0,5) = 0$$

Έχουν προκύψει 12 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 14. Όπου κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 14 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,5)$.

$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	4	-6	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6	4	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-7	5
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6

Πίνακας 14 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$.

2.3.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP1/BR

Από τον Πίνακα 14 προκύπτει ο Πίνακας 15, που περιγράφει ένα γραμμικό σύστημα 12 εξισώσεων με 12 αγνώστους (12x12), όπου άγνωστοι είναι οι ζητούμενες πιθανότητες.

$$\begin{bmatrix}
 -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(0,2) \\ P(0,3) \\ P(0,4) \\ P(0,5) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \\ P(1,2) \\ P(1,3) \\ P(1,4) \\ P(1,5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 15 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrix.reshish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 16 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

Matrix input

Insert matrix

Restore matrix

☐ Complex numbers (more)

Decimal ▾

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	b
1	-5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	4	-6	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	4	-7	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	4	-6	4	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	1	0
7	1	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0
10	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-6	4	0	0
11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	-7	5	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 16 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους δώδεκα άγνωστους x_1, x_2, \dots, x_{12} που είναι η επίλυση του συστήματος 12x12. Οι δώδεκα αυτές τιμές αντιστοιχούν στις δώδεκα πιθανότητες του συστήματος $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,5)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 13.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.025277478628438071455$ $x_2 = 0.080199567841305054606$ $x_3 = 0.13340074762993010271$ $x_4 = 0.15757419223913088583$ $x_5 = 0.074506442024089272756$ $x_6 = 0.029041571637106612059$ $x_7 = 0.046187825300885302663$ $x_8 = 0.11328599727421783653$ $x_9 = 0.14028438532689784315$ $x_{10} = 0.11381639481870781333$ $x_{11} = 0.061188851504830076961$ $x_{12} = 0.025236545774461127859$	$P(0,0) = 0,0252774786$
	$P(0,1) = 0,0801995678$
	$P(0,2) = 0,1334007476$
	$P(0,3) = 0,1575741922$
	$P(0,4) = 0,0745064420$
	$P(0,5) = 0,0290415716$
	$P(1,0) = 0,0461878253$
	$P(1,1) = 0,1132859973$
	$P(1,2) = 0,1402843853$
	$P(1,3) = 0,1138163948$
	$P(1,4) = 0,0611888515$
	$P(1,5) = 0,0252365458$

Αποτελέσματα 13 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 12x12, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$.

2.3.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP1/BR με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 14 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις δώδεκα (12) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §2.3.2 (ομοίως με τη μεθοδολογία που εφαρμόστηκε στην §2.2.2) και με βάση τον Πίνακα 14, προκύπτει ο Πίνακας 17, που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

i, n	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$
(0,0)	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
(0,1)	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
(0,2)	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
(0,3)	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0	0
(0,4)	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	θ_m	0
(0,5)	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	0	0	0	0	0	θ_m
(1,0)	θ_s	0	0	0	0	0	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0
(1,1)	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0
(1,2)	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0
(1,3)	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0
(1,4)	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$
(1,5)	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$

Πίνακας 17 - Σύστημα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CP1/BR με γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §2.3.2, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση:

$$SP(0,0) \rightarrow -P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) + P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow -P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) + P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2) \rightarrow -P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) + P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3) \rightarrow -P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) + P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,4) \rightarrow -P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) + P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m = 0$$

$$SP(0,5) \rightarrow -P(0,5)(\theta_s + 5\mu_s) + P(0,4)\lambda_h + P(1,5)\theta_m = 0$$

$$MP(1,0) \rightarrow -P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) + P(1,1)\mu_m + P(0,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,1) \rightarrow -P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) + P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s = 0$$

$$MP(1,2) \rightarrow -P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) + P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s = 0$$

$$MP(1,3) \rightarrow -P(1,3)(\lambda_n + \theta_m + 3\mu_m) + P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s = 0$$

$$MP(1,4) \rightarrow -P(1,4)(\lambda_n + \theta_m + 4\mu_m) + P(1,3)\lambda_n + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s = 0$$

$$MP(1,5) \rightarrow -P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) + P(1,4)\lambda_n + P(0,5)\theta_s = 0$$

$$a_i(n) = \begin{cases} -(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -(\theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } n = C \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -(\theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } n = C \end{cases}$$

$$\beta_i(n) = \begin{cases} (n+1)\mu_s, & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C \\ (n+1)\mu_m, & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \end{cases}$$

$$\sigma_i(n) = \begin{cases} \lambda_n + (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } 0 < n \leq C - t \\ i\lambda_h + (n-1)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } C - t < n \leq C \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 17 προκύπτει η γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από τις παραπάνω δέκα (10) συνολικά εξισώσεις (Keramidi et al., 2021) και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C . Τις εξισώσεις τις υλοποιούμε στη γλώσσα προγραμματισμού Python με το απόσπασμα του Κώδικα 14 (βλ. Παράρτημα Α).

Στη συνέχεια, θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 14). Αντικαθιστώντας την τελευταία γραμμή του πίνακα με την εξίσωση κανονικοποίησης θα προκύψει ο νέος πίνακας ο οποίος εμφανίζεται στα Αποτελέσματα 15.

```
C:\python\venv\Scripts\python.exe "C:\python\venv\Scripts\python.exe"
0 πίνακας A είναι:
[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 4, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -7, 5]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -6]
```

Αποτελέσματα 14 - Πίνακας A μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $t=2$.

```
0 πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:
-----
[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 4, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, -7, 5]
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

Αποτελέσματα 15 - Πίνακας A μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.

Στη συνέχεια, με τον ίδιο τρόπο όπως και στα προηγούμενα μοντέλα NP/CS και CP/BR, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα b. Με τη χρήση της συνάρτησης `np.linalg.solve(A, b)`, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 16).

Πιθανότητες-Αποτελέσματα:

```
-----
p(0,0) = 0.0252774786
p(0,1) = 0.0801995678
p(0,2) = 0.1334007476
p(0,3) = 0.1575741922
p(0,4) = 0.0745064420
p(0,5) = 0.0290415716
p(1,0) = 0.0461878253
p(1,1) = 0.1132859973
p(1,2) = 0.1402843853
p(1,3) = 0.1138163948
p(1,4) = 0.0611888515
p(1,5) = 0.0252365458
```

Αποτελέσματα 16 - Πιθανότητες μοντέλου CP1/BR για $C=5, t=2$.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 16 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §2.3.3 (Αποτελέσματα 13), με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων. Για την εξαγωγή των πιθανοτήτων (Αποτελέσματα 16) έγινε η χρήση του Κώδικα 15 (βλ. Παράρτημα Α).

2.3.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CP1/BR με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία μας καθορίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος CP1/BR. Αυτά τα μεγέθη είναι (Keramidi et al., 2021):

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} . Η απόρριψη νέων κλήσεων μπορεί να συμβεί στην SP όταν έρθει μία νέα κλήση στο σύστημα σε οποιαδήποτε κατάσταση μεγαλύτερη από την $C - t$. Επίσης αν το όχημα βρίσκεται στην κατάσταση $(1, C)$ στην MP και αφιχθεί μία νέα κλήση αυτή θα απορριφθεί και πάλι, η πιθανότητα συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new} = \sum_{n=C-t}^C P(0, C) + P(1, C) \quad (2.7)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$B_{new} = P(0,3) + P(0,4) + P(0,5) + P(1,5) = 0,1575742 + 0,0745064 + 0,0290416 + 0,0252365 = 0,2863587$$

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h , η οποία μπορεί να συμβεί αποκλειστικά και μόνο κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο SP. Ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα, το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση $(0, C)$, δεδομένου ότι βρίσκεται στη φάση SP (Keramidi et al., 2021):

$$B_h = \frac{P(0, C)}{\sum_{n=0}^C P(0, n)} \quad (2.8)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_h &= \frac{P(0, C)}{\sum_{n=0}^C P(0, n)} = \frac{P(0, 5)}{P(0, 0) + P(0, 1) + P(0, 2) + P(0, 3) + P(0, 4) + P(0, 5)} = \\ &= \frac{0,0290416}{0,0252775 + 0,0801996 + 0,1334007 + 0,1575742 + 0,0745064 + 0,0290416} = \\ &= \frac{0,0290416}{0,5} = \mathbf{0,058083} \end{aligned}$$

- Τελευταίο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα, είναι η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Το U_c υπολογίζεται κατά τα γνωστά, από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) της §2.1.5. Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^5 n \cdot P(i, n) = 0P(0, 0) + 1P(0, 1) + 2P(0, 2) + \dots + 4P(1, 4) + 5P(1, 5) = \\ &= 0 \cdot 0,025277 + 1 \cdot 0,080199 + 2 \cdot 0,133401 + 3 \cdot 0,157574 + 4 \cdot 0,074506 + 5 \cdot 0,029042 + \\ &\quad + 0 \cdot 0,046188 + 1 \cdot 0,113286 + 2 \cdot 0,140284 + 3 \cdot 0,113816 + 4 \cdot 0,06119 + 5 \cdot 0,025236 = \\ &= \mathbf{2,369199} \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{2,369199}{5} = \mathbf{0,473839}$$

Σε συνέχεια του Κώδικα 15 παρουσιάζεται η επέκταση της συνάρτησης `calculate_array()` στον Κώδικα 16 (βλ. Παράρτημα Α) με την υλοποίηση των υπολογισμών (3^ο μέρος) για τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το QoS, δηλαδή τα B_{new} , B_h , U και U_c .

Μετά την κλήση του Κώδικα 16 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 17) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν και με τη χρήση των τύπων (2.3), (2.4), (2.7) και (2.8).

```
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.286358751674788
Bh   = 0.058083143274213
U    = 2.369199353376211
Uc   = 0.473839870675242
```

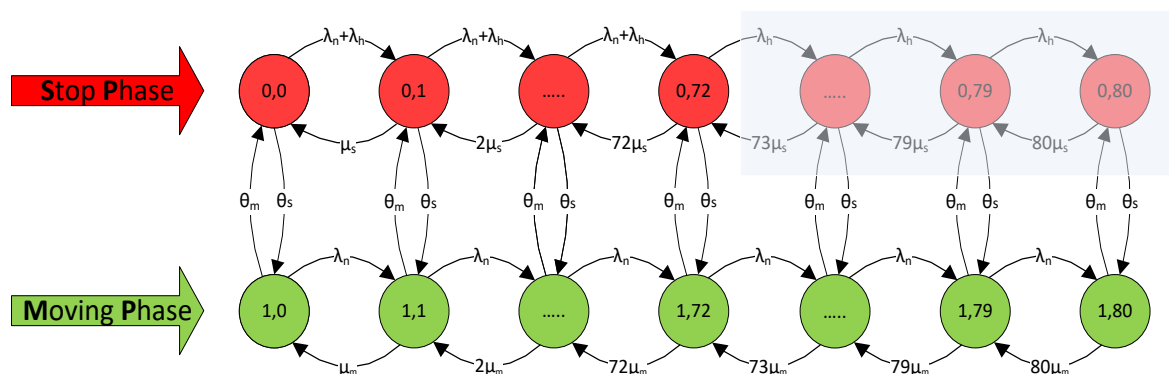
Αποτελέσματα 17 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CP1/BR για $C=5$, $t=2$.

2.3.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP1/BR με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα CP1/BR το οποίο θα έχει χαρακτηριστικά μεγέθη τα ίδια μεγέθη του συστήματος το οποίο αναλύθηκε στην §2.2.6 (CP/BR) με δεσμευμένη χωρητικότητα $t=8$ προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής, αλλά η δεσμευμένη χωρητικότητα ισχύει μόνο στη φάση που το όχημα είναι σταματημένο (SP). Το εξεταζόμενο σύστημα λοιπόν θα έχει συνολικά τα εξής χαρακτηριστικά:

$$C=80, t=8, \lambda_n=20, \lambda_h=15, \mu_s=1/4, \mu_m=1/4, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι $2 \times (C+1) = 2 \times (80+1) = 162$ καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 15.



Σχήμα 15 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1/BR με $C=80$ και $t=8$ με δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP.

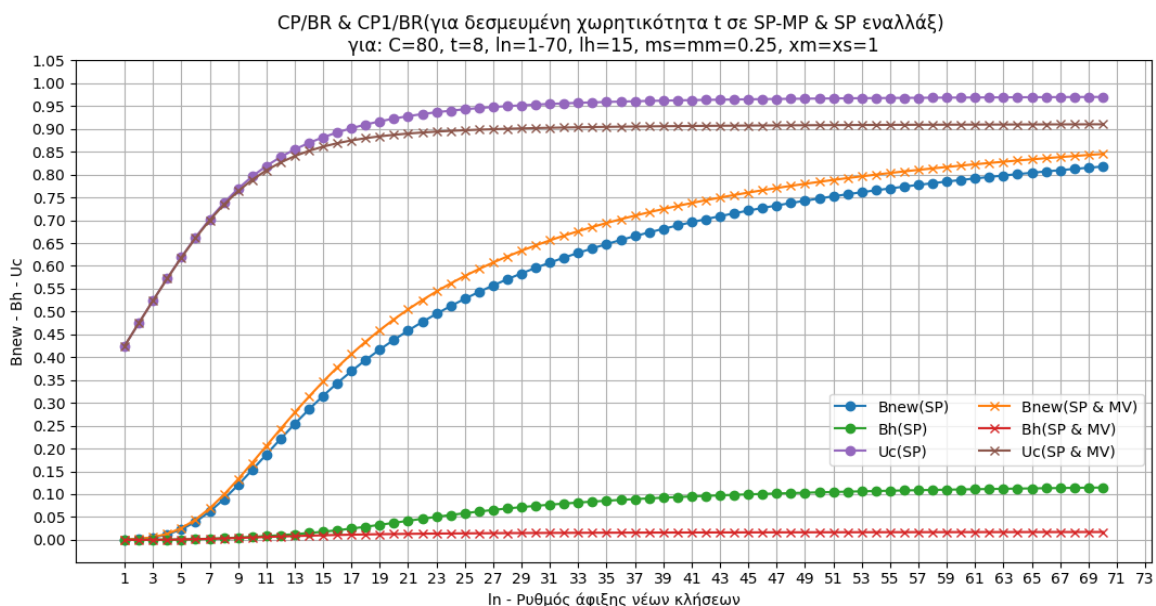
Αν τρέξουμε τον Κώδικα 16 (βλ. Παράρτημα Α) με τα μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος έχουμε στα Αποτελέσματα 18 την κλήση της συνάρτησης για χωρητικότητα $C=80$ και $t=8$ μαζί με τα υπόλοιπα μεγέθη του εν λόγω συστήματος, καθώς και την έξοδο με τις επιστρεφόμενες τιμές του QoS.

```
129 calculate_array( c: 80, t: 8, ln: 20, lh: 15, ms: 0.25, mm: 0.25, xs: 1, xm: 1)
130
Run create_array+solution_CP1_BR(SP-final) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.438237548238074
Bh = 0.037271936090521
U = 73.822838058238446
Uc = 0.922785475727981
```

Αποτελέσματα 18 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP1/BR για $C=80$ και $t=8$.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον Κώδικα 16 προκειμένου να καλέσουμε τη συνάρτηση `calculate_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $\lambda_n(l_n)$ και ειδικότερα για τιμές του $\lambda_n=1, 2, 3, \dots, 70$. Για κάθε μία από αυτές τις τιμές του λ_n προκύπτει μία σειρά από τις μετρήσεις των μεταβλητών B_{new} , B_h και U_c τις οποίες αποθηκεύουμε στον πίνακα `results_array`. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον Κώδικα 16 με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις τις οποίες ονομάζουμε `run_for_different_ln()` και `run_for_different_ln1()` για τα δύο μοντέλα CP/BR και CP1/BR. Στον Κώδικα 17 (βλ. Παράρτημα Α) παρατίθεται ένα απόσπασμά που υλοποιεί την εν λόγω διαδικασία. Ο πλήρης κώδικας είναι εξαιρετικά εκτενής και για τα αποτελέσματα του μοντέλου CP/BR χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην §2.2.6. (Κώδικας 12).

Στη συνέχεια, με τη χρήση της συνάρτησης `plot_combined_results2()`, τα αποτελέσματα τοποθετούνται σε κοινό άξονα συντεταγμένων προκειμένου να οπτικοποιηθούν καλύτερα τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων (Σχήμα 16).



Σχήμα 16 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για ρυθμό άφιξης $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR (και στις δύο φάσεις) και για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) για $C=80$ και $t=8$.

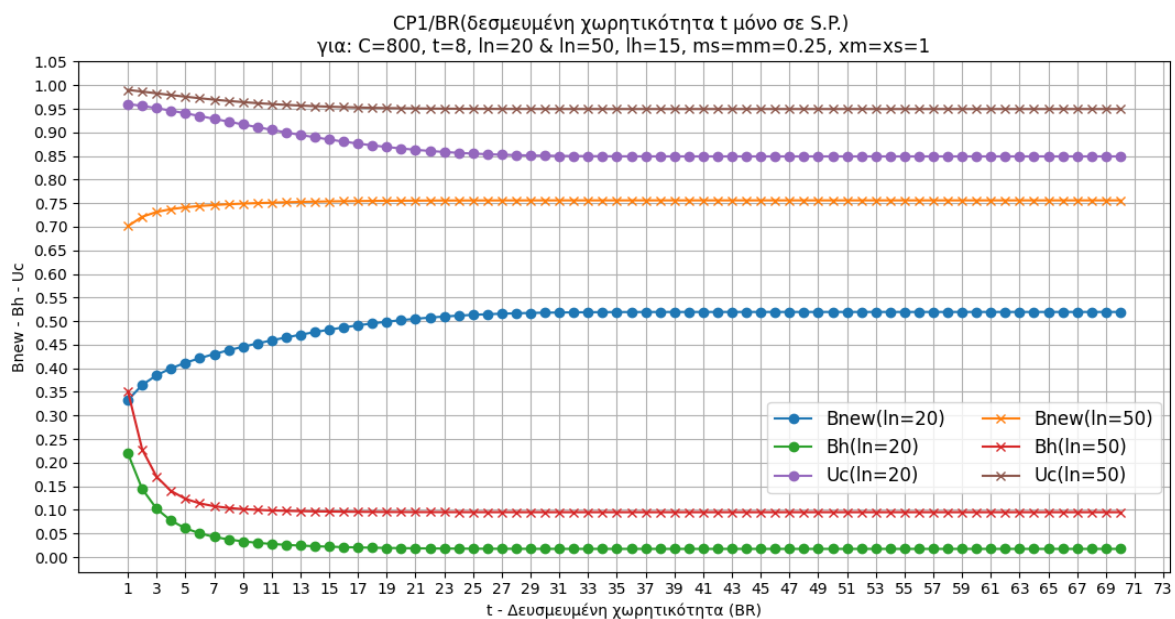
Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 16

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων (λ_n) και αυτό όπως είπαμε και στα υπόλοιπα μοντέλα αποτελεί φυσιολογικό επακόλουθο διότι οι διαθέσιμες θέσεις μειώνονται και αυξάνεται ο «ανταγωνισμός» για τη δέσμευση θέσης από κάθε νέα κλήση που εισέρχεται στο σύστημα. Στο μοντέλο CP/BR στο οποίο εφαρμόζεται η δέσμευση της χωρητικότητας ($t=8$) και στις δύο φάσεις, η πιθανότητα απόρριψης κλήσης είναι πάντα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανότητα του μοντέλου CP1/BR (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP). Αυτό προκύπτει διότι στο μοντέλο CP/BR υπάρχουν επιπλέον δεσμευμένες θέσεις και στην MP οι οποίες δεν μπορούν να αξιοποιηθούν από νέες κλήσεις, κάτι που δεν ισχύει για στο μοντέλο CP1/BR.
- Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος για τιμές $\lambda_n > 30$ σταθεροποιείται στις τιμές $U_C = 90-91\%$ στο σύστημα CP/BR (δέσμευση θέσεων BU και στις δύο φάσεις) και στις τιμές $U_C = 95-97\%$ στο σύστημα CP1/BR (δέσμευση θέσεων BU μόνο στη φάση SP). Αυτό είναι και το κύριο πλεονέκτημα του συστήματος CP1/BR, όπου η δέσμευση θέσεων BU υλοποιείται μόνο στη φάση του ακίνητου οχήματος. Αντίθετα, στο σύστημα CP/BR παραμένει σημαντικό ποσοστό των μη αξιοποιημένων BU (~6%).
- Η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h είναι σχεδόν ίδια για τα δύο μοντέλα για τιμές του $\lambda_n < 10$. Από το σημείο που το $\lambda_n = 10$ πέρα και μέχρι το $\lambda_n = 70$ στο τέλος του γραφήματος υπάρχει μία σταδιακή μεγαλύτερη αύξηση της B_h για το μοντέλο CP1/BR (δεσμευμένες θέσεις BU μόνο στην SP) έναντι του μοντέλου CP/BR (δεσμευμένες θέσεις BU και στις δύο φάσεις). Η ερμηνεία που μπορεί να δοθεί στη συμπεριφορά των συστημάτων είναι ότι η πιθανότητα απόρριψης συνδέεται και με την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος η οποία φτάνει στα μέγιστα όρια της για κάθε ένα από τα δύο συστήματα με επακόλουθη την απόρριψη των κλήσεων μεταπομπής. Να σημειωθεί βέβαια ότι η πιθανότητα απόρριψης κινείται και για τα δύο συστήματα σε πολύ χαμηλά επίπεδα με μέγιστα $B_h = 0,1146$ (για CP1/BR) και $B_h = 0,0171$ (για CP/BR) για τιμή του $\lambda_n = 70$.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 17 προκειμένου να μπορούμε να μεταβάλουμε το αριθμό των BU που θα αποτελούν τη δεσμευμένη χωρητικότητα του συστήματός μας και θα λαμβάνει τιμές $t=1-70$ έτσι ώστε να δούμε πως θα επηρεάσουν οι διάφορες τιμές του t τα μεγέθη του QoS. Η υλοποίηση έγινε με την επέκταση 7 (Κώδικας 18) και τη συνάρτηση

run_for_different_t(). Επίσης χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή tBR και ο πίνακας tBR_values στον οποίο θα αποθηκεύονται οι εν λόγω τιμές. Στη συνέχεια, με τον κώδικα 7A και τη συνάρτηση `plot_combined_results1()` δημιουργούμε τη γραφική παράσταση για δύο διαφορετικές τιμές του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων για $\lambda_n=20$ και $\lambda_n=50$. Η συνολική υλοποίηση καθώς και η κλήση των συναρτήσεων εμφανίζεται στον Κώδικα 18 (βλ. Παράρτημα Α).

Μετά την κλήση του Κώδικα 18 με χαρακτηριστικά μεγέθη $C=80$, $t=1-70$, $\lambda_n=20$ και 50 , $\lambda_h=15$, $ms=mm=0,25$, $xs=xm=1$, έχουμε τη γραφική παράσταση του Σχήματος 17.



Σχήμα 17 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό δεσμευμένων θέσεων $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) με $C=80$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 17

Η μεταβολή της τιμής του πλήθους των BU που αποτελούν τη δεσμευμένη χωρητικότητα t για τη χρήση αποκλειστικά από κλήσεις μεταπομπής, παρουσιάζεται στο Σχήμα 17 με την αντίστοιχη μεταβολή των μεγεθών QoS. Τα μεγέθη έχουν υπολογιστεί για δύο διαφορετικές τιμές του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων για $\lambda_n=20$ και $\lambda_n=50$. Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} για την περίπτωση που το $\lambda_n=20$, παρουσιάζει μία σταδιακή αύξηση μέχρι την τιμή του $t=20$, από εκεί και πέρα έχουμε μία σταθεροποίηση της τιμής $B_{new} \approx 0,51$. Όσον αφορά την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} για την περίπτωση που το $\lambda_n=50$, παρουσιάζει μία σταδιακή αύξηση μέχρι την τιμή που το $t=10$, από εκεί και πέρα έχουμε μία σταθεροποίηση της τιμής $B_{new} \approx 0,75$. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του λ_n αυτή η αύξηση έρχεται πολύ πιο γρήγορα για τις τιμές

του t και βέβαια είναι πολύ μεγαλύτερη. Αυτό απορρέει από το γεγονός ότι λόγω του μεγάλου αριθμού αφίξεων νέων κλήσεων (λ_n) αλλά και των αυξανόμενων δεσμευμένων θέσεων (t) ο αριθμός των ελεύθερων BU μειώνονται συνεχώς με την αύξηση του «ανταγωνισμού» άρα και της συμφόρησης.

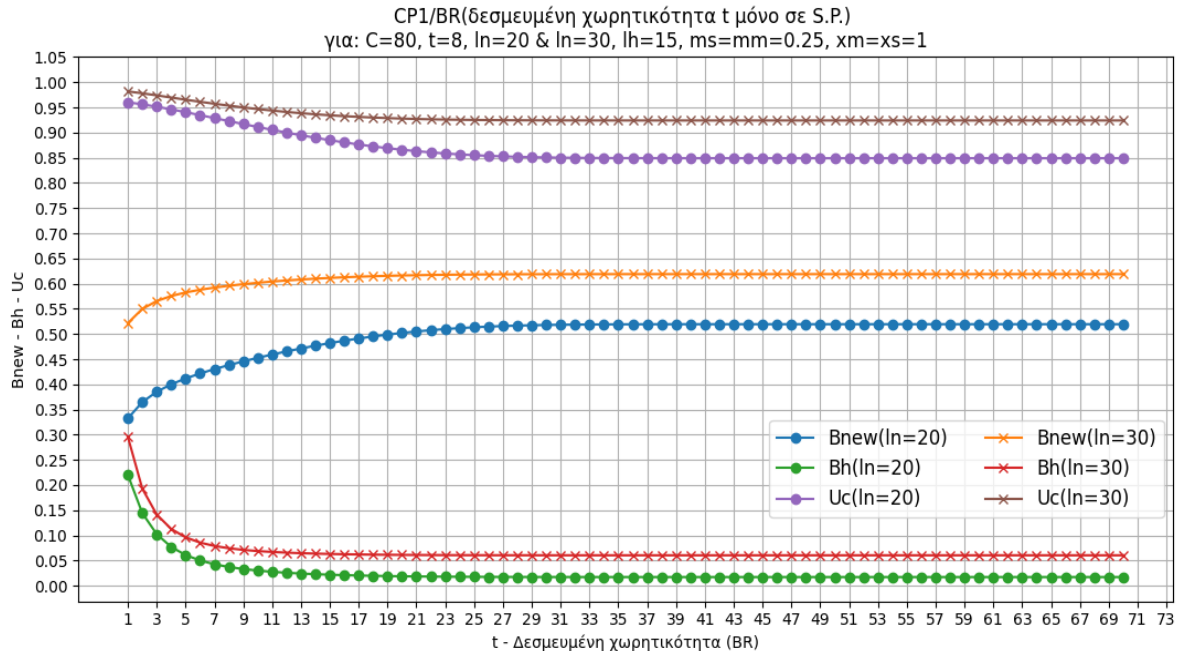
- Όσον αφορά την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_h για τιμές του $t > 20$, σταθεροποιείται για $\lambda_n = 20$ στην τιμή $B_h \approx 0,017$ και για $\lambda_n = 50$ στην τιμή $B_h \approx 0,095$. Πρέπει να επισημάνουμε μέχρι και τη σταθεροποίηση του στις παραπάνω τιμές ακολουθεί μία πτωτική πορεία η B_h η οποία λειτουργεί με τη λογική να ωφεληθούν οι κλήσεις μεταπομπής. Παρατηρούμε ότι οι τιμές στην πιθανότητα απόρριψης κλήσεων και για τους δύο ρυθμούς λ_n είναι πολύ χαμηλές σε αντίθεση με τις τιμές του B_{new} .
- Στην αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_C , παρατηρούμε ότι είναι η ίδια λογική που περιγράψαμε παραπάνω για τις B_h και B_{new} . Για τιμές του $t > 20$, σταθεροποιείται για $\lambda_n = 20$ στην τιμή $U_C \approx 0,85$ και για $\lambda_n = 50$ στην τιμή $U_C \approx 0,95$. Αν θέσουμε το όριο του $t > 8$ παρατηρούμε ότι η αξιοποίηση της χωρητικότητας από εκεί και πέρα έχει πτώση αλλά σταθεροποιείται σε κάποιες τιμές. Στον Πίνακα 18 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές αξιοποίησης της χωρητικότητας για τα συστήματα CP/BR και CP1/BR, για δύο χαρακτηριστικές τιμές της δεσμευμένης χωρητικότητα ($t=20$ και $t=60$). Η σύγκριση των δύο συστημάτων είναι πολύ ξεκάθαρη όσο αφορά την αξιοποίηση της χωρητικότητας στο CP/BR το οποίο μειώνεται σημαντικά για αυξημένες τιμές του t σε αντίθεση με το μοντέλο CP1/BR που παραμένει περίπου σταθερό στην αύξηση του t .

	CP/BR (δέσμευση στην SP και MP)		CP1/BR (δέσμευση μόνο στην SP)	
	$t = 15$	$t = 60$	$t = 15$	$t = 60$
$\lambda_n = 20$	$U_C = 0,811$	$U_C = 0,404$	$U_C = 0,885$	$U_C = 0,849$
$\lambda_n = 50$	$U_C = 0,827$	$U_C = 0,405$	$U_C = 0,954$	$U_C = 0,949$

Πίνακας 18 - Αξιοποίηση χωρητικότητας U_C στα μοντέλα CP/BR και CP1/BR.

- Η απόκλιση που υπάρχει στο διάγραμμά στο οποίο απεικονίζεται η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} για τις δύο τιμές του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n = 20$ και $\lambda_n = 50$ (Σχήμα 17) είναι άμεσα συνδεδεμένη με το εύρος διαφοράς στο λ_n . Αν συγκρίνουμε τις καμπύλες για διαφορετικά $\lambda_n = 20$ και $\lambda_n = 30$ και τρέξουμε τον κώδικα

για όλα τα υπόλοιπα μεγέθη να παραμένουν σταθερά βλέπουμε τα αποτελέσματα στο Σχήμα 18. Παρατηρούμε ότι αντίστοιχη μείωση υπάρχει και στις τιμές της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h οι οποίες αφορούν το $\lambda_n=30$.



Σχήμα 18 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό δεσμευμένων θέσεων $t=1-70, \lambda_n=20$ & $30, \lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) με $C=80$.

2.4. Γενική περιγραφή μοντέλου CPQ

Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο CPQ (Keramidi et al., 2021) στο οποίο υπάρχει δέσμευση εύρους ζώνης, όπως και στο μοντέλο CP/BR. Η δέσμευση των t θέσεων (t BU) γίνεται προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής και στις δύο φάσεις του συστήματος. Η λειτουργία του αντιστοιχεί με αυτή του μοντέλου CP/BR με τη διαφορά ότι εδώ θα υπάρχει και ουρά αναμονής στο σύστημά μας η οποία θα έχει k πεπερασμένες θέσεις.

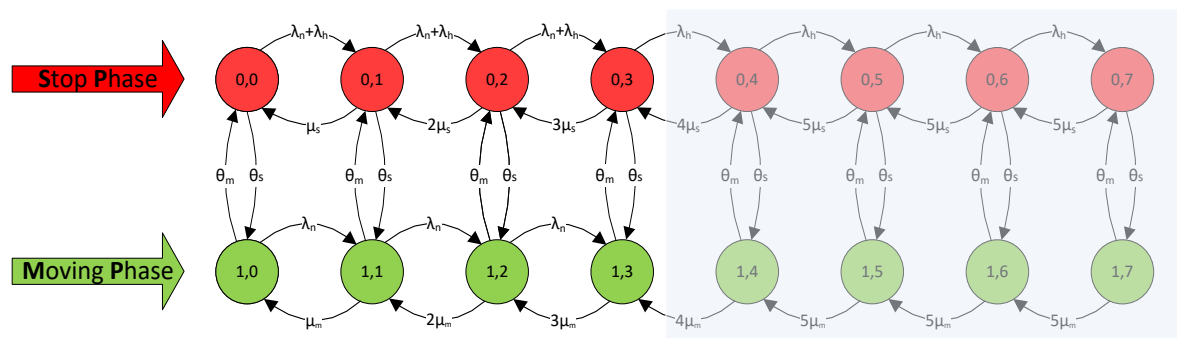
Η ουρά αναμονής είναι ένα σημαντικό στοιχείο στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Γενικά μία ουρά ενεργοποιείται όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι στο σύστημα μας (ελεύθεροι servers) προκειμένου να εξυπηρετήσουν τη ζητούμενη κίνηση. Μια ουρά βοηθάει στη διαχείριση της κίνησης (φορτίου) που δημιουργούν οι χρήστες στο σύστημα. Για τη διαχείριση των εν αναμονή αιτημάτων που υπάρχουν στην ουρά υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι που καθορίζουν την προτεραιότητα. Στο δικό μας σύστημα η ουρά θα υλοποιηθεί με τον αλγόριθμο FIFO (First In First Out) δηλαδή η πρώτη κλήση που θα μπει

στην ουρά προκειμένου να εξυπηρετηθεί αυτή είναι που θα βγει πρώτη από την ουρά και θα εισέλθει στο σύστημα προς εξυπηρέτηση.

Η ουρά αναμονής θα έχει k πεπερασμένες θέσεις αναμονής οι οποίες διατίθενται αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Όπως αναλύθηκε και στα μοντέλα CP/BR και CP1/BR στις κλήσεις μεταπομπής θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τις πιθανότητες απόρριψης διότι η διακοπή τους επηρεάζει αρνητικά το QoS του συστήματος. Στο μοντέλο CPQ για να το πετύχουμε αυτό εκτός από τις δεσμευμένες θέσεις t έχουμε και τις θέσεις k στην ουρά. Το μοντέλο CPQ το οποίο θα αναλυθεί εισάγει την έννοια της δεσμευμένης χωρητικότητας με πιθανότητα (BR-PBR) η οποία έχει προταθεί στο Keramidi et al.(2021). Στο σύστημα CPQ ισχύουν, όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, οι δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP), οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson και κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί τη διάθεση μίας BU.

2.4.1. Αναπαράσταση μοντέλου CPQ – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση το ίδιο σύστημα το οποίο είχαμε και στα προηγούμενα μοντέλα, με τα εξής χαρακτηριστικά: $C=5$, $t=2$, $\lambda_n=2$, $\lambda_h=2$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$ αλλά εδώ υπάρχει και ουρά αναμονής προς εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής με $k=2$ θέσεις. Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα, της οποίας η χωρητικότητα είναι $C=5$, $t=2$, $k=2$ και οι δυνατές καταστάσεις θα είναι $2 \times (C+k+1) = 2 \times (5+2+1) = 16$, οι οποίες αναπαρίστανται στο Σχήμα 19.



Σχήμα 19 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για $C=5$, $k=2$, $t=2$ με δεσμευμένη χωρητικότητα στις δύο φάσεις (SP και MP) και ουρά αναμονής.

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 19:

Υπάρχουν συνολικά $2 \times (C+k+1) = 2 \times (5+2+1) = 16$ καταστάσεις μαζί με τις k -θέσεις που ανήκουν στην ουρά του συστήματος. Οι κλήσεις μεταπομπής μπορεί να δημιουργηθούν μόνο στην SP δηλαδή σε $C + k + 1$ καταστάσεις ($5+2+1=8$) στις οποίες περιλαμβάνονται

και οι θέσεις που υπάρχουν στην ουρά του συστήματος. Στην πραγματικότητα οι κλήσεις μεταπομπής μπορούν να βρεθούν σε οποιαδήποτε κατάσταση από τις υπάρχουσες, όπως αυτές απεικονίζονται στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 19. Αυτό σημαίνει ότι σε καταστάσεις $> C - t$ της MP μπορούμε να μεταβούμε μόνο στην περίπτωση που βρισκόμαστε σε αντίστοιχη κατάσταση της SP ($> C - t$) και το όχημα ξεκινήσει (μετάβαση οχήματος από $SP \rightarrow MP$).

- Οι τέσσερις καταστάσεις $(0,4) - (0,5) - (1,4) - (1,5)$ οι οποίες έχουν σημειωθεί με το γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 19 δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις νέες κλήσεις. Είναι το τμήμα του bandwidth το οποίο έχει δεσμευτεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Επίσης οι k -θέσεις της ουράς αναμονής $(0,6) - (0,7) - (1,6) - (1,7)$ οι οποίες και αυτές έχουν σημειωθεί με το γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 19, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις νέες κλήσεις αλλά έχουν δεσμευτεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από τα δύο είδη κλήσεων με την προϋπόθεση ότι στην MP μπορούν να εκκινήσουν μόνο νέες κλήσεις και όχι μεταπομπής. Ειδικά για την SP μέχρι και την κατάσταση $C - t$ δηλαδή την κατάσταση $(0, 3)$ του παραδείγματός μας, ο ρυθμός άφιξης είναι ίσος με το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών αφίξεων $\lambda_n + \lambda_h$.

2.4.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CPQ

Από τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 19 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας αντιστοίχως με την §2.3.2, με τον ρυθμό εξόδου=ρυθμό εισόδου (rate out = rate in) σε κάθε κατάσταση. Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις οκτώ (8) καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση $(0,0)$:

$$SP(0,0) \rightarrow P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) = P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m$$

$$SP(0,1) \rightarrow P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) = P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m$$

$$SP(0,2) \rightarrow P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) = P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m$$

$$SP(0,3) \rightarrow P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) = P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m$$

$$SP(0,4) \rightarrow P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) = P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m$$

$$SP(0,5) \rightarrow P(0,5)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) = P(0,4)\lambda_h + P(0,6)5\mu_s + P(1,5)\theta_m$$

$$SP(0,6) \rightarrow P(0,6)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) = P(0,5)\lambda_h + P(0,7)5\mu_s + P(1,6)\theta_m$$

$$SP(0,7) \rightarrow P(0,7)(\theta_s + 5\mu_s) = P(0,6)\lambda_h + P(1,7)\theta_m$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις οκτώ (8) καταστάσεις στην MP:

$$MP(1,0) \rightarrow P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) = P(0,0)\theta_s + P(1,1)\mu_m$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) = P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) = P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(\theta_m + 3\mu_m) = P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,4)} \rightarrow P(1,4)(\theta_m + 4\mu_m) = P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,5)} \rightarrow P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) = P(1,6)5\mu_m + P(0,5)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,6)} \rightarrow P(1,6)(\theta_m + 5\mu_m) = P(1,7)5\mu_m + P(0,6)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,7)} \rightarrow P(1,7)(\theta_m + 5\mu_m) = P(0,7)\theta_s$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=5, k=2, t=2, \lambda_n=2, \lambda_h=2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$\mathbf{SP(0,0)} \rightarrow P(0,0)(2 + 2 + 1) = P(0,1) + P(1,0) \Rightarrow$$

$$-5P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1)} \rightarrow P(0,1)(2 + 2 + 1 + 1) = P(0,0)(2 + 2) + P(0,2)2 + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-6P(0,1) + 4P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2)} \rightarrow P(0,2)(2 + 2 + 1 + 2) = P(0,1)(2 + 2) + P(0,3)3 + P(1,2) \Rightarrow$$

$$-7P(0,2) + 4P(0,1) + 3P(0,3) + P(1,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,3)} \rightarrow P(0,3)(2 + 1 + 3) = P(0,2)(2 + 2) + P(0,4)4 + P(1,3) \Rightarrow$$

$$-6P(0,3) + 4P(0,2) + 4P(0,4) + P(1,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,4)} \rightarrow P(0,4)(2 + 1 + 4) = P(0,3)2 + P(0,5)5 + P(1,4) \Rightarrow$$

$$-7P(0,4) + 2P(0,3) + 5P(0,5) + P(1,4) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,5)} \rightarrow P(0,5)(2 + 1 + 5) = P(0,4)2 + P(0,6)5 + P(1,5) \Rightarrow$$

$$-8P(0,5) + 2P(0,4) + 5P(0,6) + P(1,5) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,6)} \rightarrow P(0,6)(2 + 1 + 5) = P(0,5)2 + P(0,7)5 + P(1,6) \Rightarrow$$

$$-8P(0,6) + 2P(0,5) + 5P(0,7) + P(1,6) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,7)} \rightarrow P(0,7)(1 + 5) = P(0,6)2 + P(1,7) \Rightarrow$$

$$-6P(0,7) + 2P(0,6) + P(1,7) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις οκτώ (8) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0)} \rightarrow P(1,0)(2 + 1) = P(0,0) + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-3P(1,0) + P(0,0) + P(1,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1)} \rightarrow P(1,1)(2 + 1 + 1) = P(1,0)2 + P(1,2)2 + P(0,1) \Rightarrow$$

$$-4P(1,1) + 2P(1,0) + 2P(1,2) + P(0,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2)} \rightarrow P(1,2)(2 + 1 + 2) = P(1,1)2 + P(1,3)3 + P(0,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2) + 2P(1,1) + 3P(1,3) + P(0,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3)} \rightarrow P(1,3)(1 + 3) = P(1,2)2 + P(1,4)4 + P(0,3) \Rightarrow$$

$$-4P(1,3) + 2P(1,2) + 4P(1,4) + P(0,3) = 0$$

$$\text{MP}(1,4) \rightarrow P(1,4)(1+4) = P(1,5)5 + P(0,4) \Rightarrow$$

$$-5P(1,4) + 5P(1,5) + P(0,4) = 0$$

$$\text{MP}(1,5) \rightarrow P(1,5)(1+5) = P(1,6)5 + P(0,5) \Rightarrow$$

$$-6P(1,5) + 5P(1,6) + P(0,5) = 0$$

$$\text{MP}(1,6) \rightarrow P(1,6)(1+5) = P(1,7)5 + P(0,6) \Rightarrow$$

$$-6P(1,6) + 5P(1,7) + P(0,6) = 0$$

$$\text{MP}(1,7) \rightarrow P(1,7)(1+5) = P(0,7) \Rightarrow$$

$$-6P(1,7) + P(0,7) = 0$$

Έχουν προκύψει 16 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 19. Όπου κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 19 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,7)$.

$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(0,6)$	$P(0,7)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$	$P(1,6)$	$P(1,7)$
-5	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	-6	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	4	-7	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	4	-6	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	4	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-5	5	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6	5
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6

Πίνακας 19 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 12x12 μοντέλου CPQ για $C=5$, $t=2$ και $k=2$.

2.4.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CPQ

Από τον Πίνακα 19 προκύπτει ο Πίνακας 20, που περιγράφει ένα γραμμικό σύστημα 16 εξισώσεων με 16 αγνώστους (16x16), όπου άγνωστοι είναι οι ζητούμενες πιθανότητες.

$$\begin{bmatrix}
 -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(0,2) \\ P(0,3) \\ P(0,4) \\ P(0,5) \\ P(0,6) \\ P(0,7) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \\ P(1,2) \\ P(1,3) \\ P(1,4) \\ P(1,5) \\ P(1,6) \\ P(1,7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 20 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 16x16 μοντέλου CPQ για C=5 και k=2.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrix.reshish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 21 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

Matrix input

Insert matrix

Restore matrix

☐ Complex numbers (more)

Decimal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	b
1	-5	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	-6	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	4	-7	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	4	-6	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	4	0	0	0	0
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-5	5	0	0	0
14	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 21 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CPQ, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους δεκαέξι άγνωστους x_1, x_2, \dots, x_{16} που είναι η επίλυση του συστήματος 16x16. Οι δεκαέξι αυτές τιμές αντιστοιχούν στις δεκαέξι πιθανότητες του συστήματος $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,7)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 19.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.027589674095647613482$ $x_2 = 0.086134217573149502683$ $x_3 = 0.13929691221834424075$ $x_4 = 0.1565724025627462768$ $x_5 = 0.061468436935751521977$ $x_6 = 0.020063297815829296761$ $x_7 = 0.0066090863393320036216$ $x_8 = 0.002265972459199544017$ $x_9 = 0.051814152905088564732$ $x_{10} = 0.1278527846196180807$ $x_{11} = 0.16082430754757284539$ $x_{12} = 0.13637301876009460825$ $x_{13} = 0.016817764345621616424$ $x_{14} = 0.0045240769584713120294$ $x_{15} = 0.001416232786999715083$ $x_{16} = 0.00037766207653325737531$	$P(0,0) = 0,0275896741$
	$P(0,1) = 0,0861342176$
	$P(0,2) = 0,1392969122$
	$P(0,3) = 0,1565724026$
	$P(0,4) = 0,0614684369$
	$P(0,5) = 0,0200632978$
	$P(0,6) = 0,0066090863$
	$P(0,7) = 0,0022659725$
	$P(1,0) = 0,0518141529$
	$P(1,1) = 0,1278527846$
	$P(1,2) = 0,1608243075$
	$P(1,3) = 0,1363730188$
	$P(1,4) = 0,0168177643$
	$P(1,5) = 0,0045240769$
	$P(1,6) = 0,0014162328$
	$P(1,7) = 0,0003776621$

Αποτελέσματα 19 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 16x16, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CPQ για $C=5$ και $k=2$.

2.4.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CPQ με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 19 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις δεκαέξι (16) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §2.4.2. (ομοίως με τη μεθοδολογία που εφαρμόστηκε στην §2.3.2) και με βάση τον Πίνακα 19, προκύπτει ο Πίνακας 22, που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

i, n	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(0,6)$	$P(0,7)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$	$P(1,6)$	$P(1,7)$
(0,0)	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0
(0,1)	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0
(0,2)	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
(0,3)	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
(0,4)	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
(0,5)	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0
(0,6)	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0
(0,7)	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	0	0	0	0	0	0	0	θ_m
(1,0)	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0
(1,1)	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0
(1,2)	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0
(1,3)	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0
(1,4)	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0
(1,5)	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0
(1,6)	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$
(1,7)	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$

Πίνακας 22 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CPQ με γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §2.4.2:

$$SP(0,0) \rightarrow -P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) + P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow -P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) + P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2) \rightarrow -P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) + P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3) \rightarrow -P(0,3)(\lambda_n + \theta_s + 3\mu_s) + P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,4) \rightarrow -P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) + P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m = 0$$

$$SP(0,5) \rightarrow -P(0,5)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) + P(0,4)\lambda_h + P(0,6)5\mu_s + P(1,5)\theta_m = 0$$

$$SP(0,6) \rightarrow -P(0,6)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) + P(0,5)\lambda_h + P(0,7)5\mu_s + P(1,6)\theta_m = 0$$

$$SP(0,7) \rightarrow -P(0,7)(\theta_s + 5\mu_s) + P(0,6)\lambda_h + P(1,7)\theta_m = 0$$

$$MP(1,0) \rightarrow -P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) + P(1,1)\mu_m + P(0,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,1) \rightarrow -P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) + P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s = 0$$

$$MP(1,2) \rightarrow -P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) + P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s = 0$$

$$MP(1,3) \rightarrow -P(1,3)(\theta_m + 3\mu_m) + P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s = 0$$

$$MP(1,4) \rightarrow -P(1,4)(\theta_m + 4\mu_m) + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s = 0$$

$$MP(1,5) \rightarrow -P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) + P(1,6)5\mu_m + P(0,5)\theta_s = 0$$

$$MP(1,6) \rightarrow -P(1,6)(\theta_m + 5\mu_m) + P(1,7)5\mu_m + P(0,6)\theta_s = 0$$

$$MP(1,7) \rightarrow -P(1,7)(\theta_m + 5\mu_m) + P(0,7)\theta_s = 0$$

$$a_i(n) = \begin{cases} -(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } C - t \leq n \leq C \\ -(\lambda_n + \theta_s + C\mu_s), & i = 0 \text{ για } C < n < C + k \\ -(\theta_s + C\mu_s), & i = 0 \text{ για } n = C + k \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } C - t \leq n \leq C \\ -(\theta_m + C\mu_m), & i = 1 \text{ για } C < n \leq C + k \end{cases}$$

$$\beta_i(n) = \begin{cases} (n+1)\mu_s, & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C \\ C\mu_s, & i = 0 \text{ για } C \leq n < C + k \\ (n+1)\mu_m, & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \\ C\mu_m, & i = 1 \text{ για } C \leq n < C + k \end{cases}$$

$$\sigma_i(n) = \begin{cases} \lambda_n + (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } 1 < n \leq C - t \\ (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } C - t < n \leq C + k \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 22 προκύπτει η γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται με συνολικά δεκατρείς (13) εξισώσεις (Kim et al., 2013) και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C . Τις εξισώσεις τις υλοποιούμε στη γλώσσα προγραμματισμού Python με το απόσπασμα του Κώδικα 19 (βλ. Παράρτημα Α).

Στη συνέχεια, θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 20). Αντικαθιστώντας την τελευταία γραμμή του πίνακα με την εξίσωση κανονικοποίησης θα προκύψει ο νέος πίνακας ο οποίος εμφανίζεται στα Αποτελέσματα 21.

```

0 πίνακας A είναι:
[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 4, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 5, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6, 5]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6]

```

Αποτελέσματα 20 - Πίνακας A μοντέλου CPQ για $C=5$ και $k=2$.

```

0 πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:
-----
[-5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 4, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5, 5, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6, 5]
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6]
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

```

Αποτελέσματα 21 - Πίνακας A μοντέλου CPQ για $C=5$, $k=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.

Στη συνέχεια, με τον ίδιο τρόπο όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, με τη χρήση της `np.linalg.solve(A, b)`, λύνουμε το σύστημα παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 22).

```

Πιθανότητες-Αποτελέσματα:
-----
p(0,0) = 0.0275896741
p(0,1) = 0.0861342176
p(0,2) = 0.1392969122
p(0,3) = 0.1565724026
p(0,4) = 0.0614684369
p(0,5) = 0.0200632978
p(0,6) = 0.0066090863
p(0,7) = 0.0022659725
p(1,0) = 0.0518141529
p(1,1) = 0.1278527846
p(1,2) = 0.1608243075
p(1,3) = 0.1363730188
p(1,4) = 0.0168177643
p(1,5) = 0.0045240770
p(1,6) = 0.0014162328
p(1,7) = 0.0003776621

```

Αποτελέσματα 22 - Πιθανότητες μοντέλου CP1/BR για $C=5$ και $k=2$.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 21 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §2.4.3 (Αποτελέσματα 19), με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης

συστημάτων. Για την εξαγωγή των πιθανοτήτων (Αποτελέσματα 22) έγινε η χρήση του Κώδικα 20 (βλ. Παράρτημα Α).

2.4.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CPQ με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία μας καθορίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος CPQ με δεσμευμένη χωρητικότητα t και ουρά αναμονής με k θέσεις. Αυτά τα μεγέθη είναι (Keramidi et al., 2021):

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} . Η απόρριψη μίας νέας κλήσης μπορεί να συμβεί είτε στην SP είτε στην MP όταν αφίχθαι μία νέα κλήση στο σύστημα σε οποιαδήποτε κατάσταση μεγαλύτερη ή ίση με την $C - t$. Οι καταστάσεις στις οποίες μπορεί βρεθεί το σύστημα μας και να απορριφθεί μία νέα κλήση είναι συνολικά οι: $C - t \leq n \leq C + k$. Η πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new} = \sum_{n=0}^1 \sum_{n=C-t}^{C+k} P(i, n) \quad (2.9)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{new} &= P(0,3) + P(0,4) + P(0,5) + P(0,6) + P(0,7) + P(1,3) + P(1,4) + P(1,5) + \\ &+ P(1,6) + P(1,7) = 0,1565724 + 0,0614684 + 0,0200633 + 0,0066091 + 0,0022659 \\ &+ 0,136373 + 0,0168178 + 0,0045241 + 0,0014162 + 0,0003777 = \mathbf{0,4064879} \end{aligned}$$

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h , η οποία μπορεί να συμβεί αποκλειστικά και μόνο κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο SP. Ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα, το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση $(0, C + k)$, δεδομένου ότι βρίσκεται στη φάση SP (Keramidi et al., 2021):

$$B_h = \frac{P(0, C + k)}{\sum_{n=0}^{C+k} P(0, n)} \quad (2.10)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_h &= \frac{P(0, C+k)}{\sum_{n=0}^{C+k} P(0, n)} = \frac{P(0,7)}{P(0,0)+P(0,1)+P(0,2)+P(0,3)+P(0,4)+P(0,5)+P(0,6)+P(0,7)} = \\ &= \frac{0,002266}{0,02759 + 0,08613 + 0,1393 + 0,15657 + 0,06147 + 0,02006 + 0,00661 + 0,00227} \\ &= \frac{0,002266}{0,5} = \mathbf{0,004532} \end{aligned}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα είναι η αξιοποίηση (ή χρησιμοποίηση) της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Είναι το μέσο πλήθος των κατειλημμένων BU, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα U , προς τη συνολική χωρητικότητα του συστήματος C . Εδώ που υπάρχει η ουρά αναμονής το συνολικό U είναι το άθροισμα των επιμέρους U_1 και U_2 , τα οποία είναι το μέσο πλήθος κατειλημμένων BU για τις καταστάσεις εκτός ουράς (U_1) και εντός ουράς (U_2) αντίστοιχα. Η αξιοποίηση του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{U_1 + U_2}{C} \quad (2.11)$$

Το U_1 δηλαδή η μέση τιμή του πλήθους των κατειλημμένων BU στο σύστημα, προκύπτει από τις καταστάσεις που βρίσκονται εκτός της ουράς αναμονής και αυτές είναι $0 \leq n \leq C$ και για τις δύο φάσεις για $i = \{0,1\}$. Το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων εκτός ουράς $P(i,n)$ πολλαπλασιασμένο επί n όπου $n \in \{0, 1, 2, \dots, C-1, C\}$ (Keramidi et al., 2021) μας δίνει το U_1 και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_1 = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^C n \cdot P(i,n) \quad (2.12)$$

Αντίστοιχα για το U_2 δηλαδή για τη μέση τιμή του πλήθους των κατειλημμένων BU στο σύστημα εντός της ουράς, προκύπτει από τις καταστάσεις που βρίσκονται στην ουρά αναμονής και αυτές είναι $C < n \leq C+k$ και για τις δύο φάσεις για $i = \{0,1\}$. Το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων στην ουρά $P(i,n)$ πολλαπλασιασμένο επί την χωρητικότητα C του συστήματός μας δίνει το U_2 και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_2 = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C+1}^{C+k} C \cdot P(i,n) \quad (2.13)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε τον υπολογισμό της U_1 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^C n \cdot P(i,n) = 0 \cdot 0,02759 + 1 \cdot 0,086134 + 2 \cdot 0,139297 + 3 \cdot 0,156572 + \\ &+ 4 \cdot 0,061469 + 5 \cdot 0,020063 + 0 \cdot 0,051814 + 1 \cdot 0,127853 + 2 \cdot 0,160824 + \\ &+ 3 \cdot 0,136373 + 4 \cdot 0,016818 + 5 \cdot 0,004524 = \mathbf{2,129147} \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της U_2 :

$$U_2 = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C+1}^{C+k} C \cdot P(i, n) = 5 \cdot 0,006609 + 5 \cdot 0,002266 + 5 \cdot 0,001416 +$$

$$+ 5 \cdot 0,000378 = \mathbf{0,053344}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{U_1 + U_2}{C} = \frac{2,129147 + 0,053344}{5} = \frac{2,18249}{5} = \mathbf{0,436498}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε και συναντάμε στα συστήματα με ουρά αναμονής είναι το πλήθος (μέση τιμή) των κλήσεων που βρίσκονται στην ουρά αναμονής και συμβολίζεται με το N . Στο σύστημά μας οι κλήσεις στην ουρά αναμονής είναι κλήσεις μεταπομπής. Το N υπολογίζεται ως το άθροισμα των πιθανοτήτων $P(i, n)$ που βρίσκονται στην ουρά επί το πλήθος των κλήσεων που είναι σε αναμονή $(n - C)$ και δίνεται από τον τύπο:

$$N = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C+1}^{C+k} (n - C) \cdot P(i, n) \quad (2.14)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$N = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C+1}^{C+k} (n - C) \cdot P(i, n) = 1 \cdot P(0,6) + 2 \cdot P(0,7) + 1 \cdot P(1,6) + 2 \cdot P(1,7) =$$

$$= 0,006609 + 2 \cdot 0,002266 + 0,001416 + 2 \cdot 0,000378 = \mathbf{0,013313}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε είναι ο ενεργός ρυθμός άφιξης των κλήσεων στο σύστημά και συμβολίζεται με το λ_a . Το λ_a προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών αφίξεων των κλήσεων. Στο σύστημά μας διακρίνουμε τους εξής ρυθμούς αφίξεων κλήσεων:

- Στην SP για τις καταστάσεις από $(0,0)$ έως και την $(0, C - t - 1)$ έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων $\lambda_n + \lambda_h$
- Στην SP για τις καταστάσεις από $(0, C - t)$ έως και την $(0, C + k - 1)$ έχουμε ρυθμό άφιξης των κλήσεων λ_h
- Στην MP για τις καταστάσεις από $(1,0)$ έως και $(1, C - t - 1)$ έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων λ_h

Ο συνολικός ενεργός ρυθμός άφιξης κλήσεων λ_a για το σύστημά μας δίνεται (Vlasakis M., et al. 2023) από τον τύπο:

$$\lambda_\alpha = \sum_{n=0}^{C-t-1} (\lambda_n + \lambda_h) P(0, n) + \sum_{n=C-t}^{C+k-1} \lambda_h P(0, n) + \sum_{n=0}^{C-t-1} \lambda_n P(1, n) \quad (2.15)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \sum_{n=0}^2 (\lambda_n + \lambda_h) P(0, n) + \sum_{n=3}^6 \lambda_h P(0, n) + \sum_{n=0}^2 \lambda_n P(1, n) = \\ &= (\lambda_n + \lambda_h) \cdot P(0,0) + (\lambda_n + \lambda_h) \cdot P(0,1) + (\lambda_n + \lambda_h) \cdot P(0,2) + \lambda_h \cdot P(0,3) + \\ &+ \lambda_h \cdot P(0,4) + \lambda_h \cdot P(0,5) + \lambda_h \cdot P(0,6) + \lambda_n \cdot P(1,0) + \lambda_n \cdot P(1,1) + \lambda_n \cdot P(1,2) \\ &= 4 \cdot 0,02759 + 4 \cdot 0,086134 + 4 \cdot 0,139297 + 2 \cdot 0,156572 + 2 \cdot 0,061469 + \\ &+ 2 \cdot 0,020063 + 2 \cdot 0,006609 + 2 \cdot 0,051814 + 2 \cdot 0,127853 + 2 \cdot 0,160824 = \\ &= \mathbf{2,182492} \end{aligned}$$

- Το τελευταίο μέγεθος που θα υπολογιστεί αφορά και αυτό τα συστήματα με ουρά και είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά και συμβολίζεται με το W . Είναι ο χρόνος που παραμένει μία κλήση, από τη στιγμή που θα αφιχθεί, στην ουρά μέχρι τη στιγμή που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτησή της. Υπολογίζεται με τον Νόμο του Little (Little, J. D. C, 1961) και είναι ο λόγος του πλήθους των κλήσεων N προς τον ενεργό ρυθμό άφιξης λ_α των κλήσεων και δίνεται από τον τύπο:

$$W = \frac{N}{\lambda_\alpha} \quad (2.16)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$W = \frac{N}{\lambda_\alpha} = \frac{0,013313}{2,182492} = \mathbf{0,006099}$$

Σε συνέχεια του Κώδικα 20 παρουσιάζεται η επέκταση της συνάρτησης `calculate_array()` στον Κώδικα 21 (βλ. Παράρτημα Α) με την υλοποίηση των υπολογισμών (3^ο μέρος) για τα μεγέθη του QoS δηλαδή τα B_{new} , B_h , U ($U_1 + U_2$), U_c , N , λ_α και W .

Μετά την κλήση του Κώδικα 21 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 23) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν και με τη χρήση των τύπων (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) και (2.16).

```

149 calculate_array( c: 5, k: 2, t: 2, ln: 2, lh: 2, ms: 1, mm: 1, xs: 1, xm: 1)
150
Run create_array+solution_CPQ(final) x
3 - CPQ:Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λa & W)
=====
Bnew = 0.406487951040579
Bh = 0.004531944918399
U1 = 2.129147384690120
U2 = 0.053344768310323
U = 2.182492153000442
Uc = 0.436498430600088
N = 0.013312588197797
λa = 2.182492153000442
W = 0.006099718699788

```

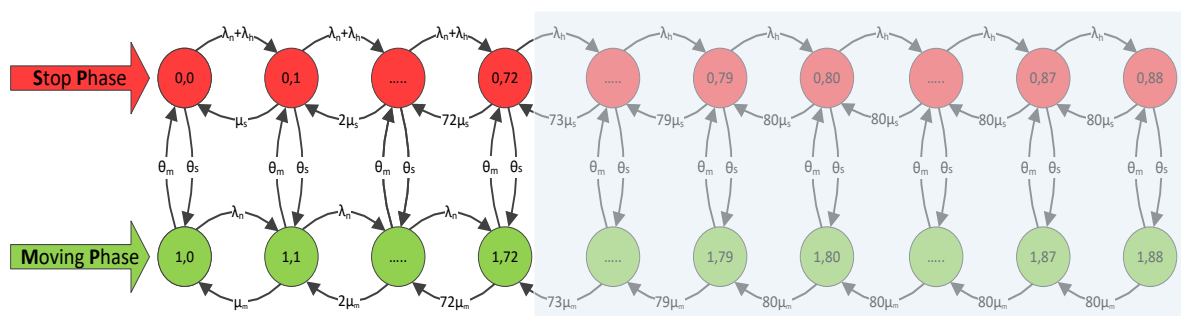
Αποτελέσματα 23 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CPQ για $C=5$, $k=2$ και $t=2$.

2.4.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CPQ με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα CPQ το οποίο έχει τα ίδια χαρακτηριστικά μεγέθη με το σύστημα το οποίο αναλύθηκε στην §2.2.6 (CP/BR) με τη διαφορά ότι εδώ θα υπάρχει και ουρά αναμονής με $k=8$ θέσεις. Εδώ η δεσμευμένη χωρητικότητα $t=8$, προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής, εφαρμόζεται και στις δύο φάσεις του οχήματος (SP και MP). Το εξεταζόμενο σύστημα λοιπόν θα έχει συνολικά τα εξής χαρακτηριστικά:

$$C=80, k=8, t=8, \lambda_n=20, \lambda_h=15, \mu_s=1/4, \mu_m=1/4, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι $2x(C+k+1)=2x(80+8+1)=178$ καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 20.



Σχήμα 20 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ με $C=80$, $k=8$ και $t=8$ με δεσμευμένη χωρητικότητα και στις δύο φάσεις (SP και MP) και ουρά αναμονής.

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 21 (βλ. Παράρτημα Α) με τα μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος έχουμε στα Αποτελέσματα 12 την κλήση της συνάρτησης, για χωρητικότητα $C=80$ και $t=8$ και στην έξοδο έχουμε τις επιστρεφόμενες τιμές που χαρακτηρίζουν το QoS.

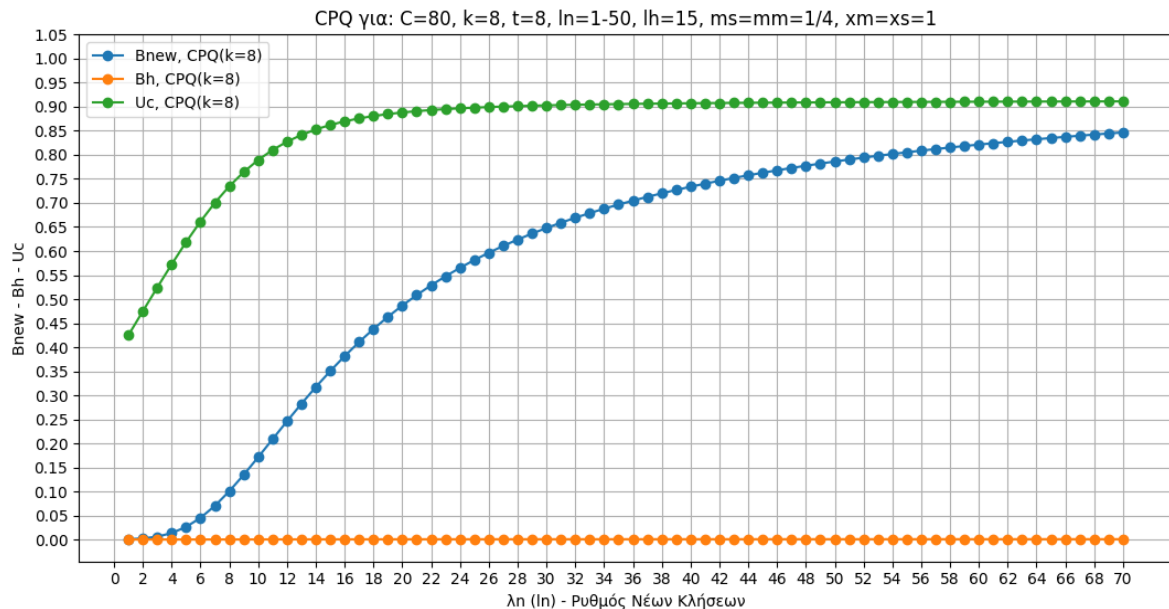

```
149 calculate_array( c: 80, k: 8, t: 8, ln: 20, lh: 15, ms: 0.25, mm: 0.25, xs: 1, xm: 1)

Run create_array+solution_CPQ(final) x

3 - CPQ:Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λa & W)
=====
Bnew = 0.486648432155814
Bh = 0.000474254970682
U1 = 70.143850146623677
U2 = 0.910047631790682
U = 71.053897778414353
Uc = 0.888173722230179
N = 0.030599105386515
λa = 17.763474444603595
W = 0.001722585605758
```

Αποτελέσματα 24 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CPQ για $C=80$, $k=8$ και $t=8$.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 21 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `calculate_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής λ_n ($\ln=1-70$). Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_ln(c, k, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 22 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 4Α (Κώδικα 22) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(ln_values, results_array)` της οποίας η έξοδος είναι η γραφική παράσταση του Σχήματος 21.



Σχήμα 21 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CPQ για $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (και στις δύο φάσεις).

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 21

Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} όπως και στα υπόλοιπα μοντέλα (NP/CS, CP/BR) ακολουθεί μία αυξητική τάση, όσο έχουμε την αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού

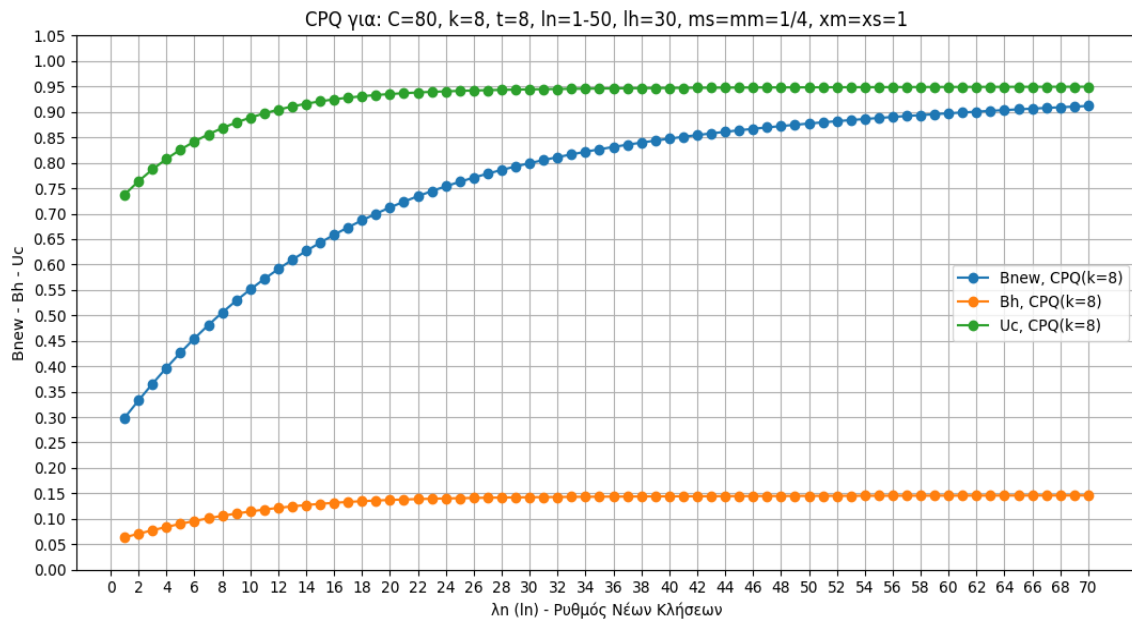
νέων κλήσεων (λ_n). Η αύξηση είναι φυσιολογική και οφείλεται στη μείωση των διαθέσιμων BU και όσο έρχονται στο σύστημα νέες κλήσεις αυτές κάποια στιγμή δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν και απορρίπτονται με μεγαλύτερη πιθανότητα. Εδώ βέβαια να επισημάνουμε ότι η δεσμευμένη χωρητικότητα $t=8$ καθώς και οι θέσεις στην ουρά αναμονής $k=8$ δεν είναι διαθέσιμες για τις νέες κλήσεις και αυτό αντικατοπτρίζεται και στο διάγραμμα του Σχήματος 21. Στον Πίνακα 23 παρατίθενται τα αποτελέσματα των τιμών της απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} για τα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για τιμή άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=20$ και $\lambda_n=50$.

	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP/BR (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	B_{new}	B_{new}	B_{new}
$\lambda_n = 20$	0,2693659	0,4830201	0,4866484
$\lambda_n = 50$	0,6490438	0,7841974	0,7861588

Πίνακας 23 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_{new} στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι στα δύο μοντέλα CP/BR και CPQ οι τιμές είναι περίπου ίσες και βέβαια πολύ υψηλές. Ενδεικτικά, για $\lambda_n=50$ έχουμε $B_{new} \approx 0,78$, η οποία είναι πιθανότητα απόρριψης. Από την άλλη πλευρά στο Non-Priority (NP/CS) μοντέλο, παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες τιμές για B_{new} είναι πολύ χαμηλότερες και ειδικά για μικρότερες τιμές του λ_n η διαφορά διευρύνεται με τα άλλα δύο μοντέλα. Αυτό δεν σημαίνει ότι το μοντέλο NP/CS είναι το καλύτερο διότι όπως θα δούμε πιο κάτω τα υπόλοιπα μεγέθη που διαμορφώνουν το QoS δεν είναι εξίσου αποδεκτά.

Η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h είναι πάρα πολύ μικρή και σχεδόν σταθερή. Για τις τιμές που επιλέξαμε για το σύστημά μας είναι σχεδόν μηδενική η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=15$ και υπάρχουν διαθέσιμες δεσμευμένες θέσεις, αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής, $t=8$ αλλά επίσης υπάρχουν και $k=8$ θέσεις στην ουρά αναμονής. Οπότε με αυτά τα μεγέθη είναι ελάχιστη η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα από το διάγραμμα του Σχήματος 22 όπου έχουμε διπλασιάσει τον ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=30$ και διαπιστώνουμε ότι σταθεροποιείται στην τιμή $B_{new} \approx 0,1457$ ενώ για $\lambda_h=15$ η τιμή κυμαίνεται περίπου στο $B_{new} \approx 0,0006$.



Σχήμα 22 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ για $C=80, k=8$ και $t=8$ (και στις δύο φάσεις).

Στον Πίνακα 24 παρατίθενται τα αποτελέσματα των τιμών για απόρριψη των κλήσεων μεταπομπής B_h για τα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ, για τιμή άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=20$ και $\lambda_n=50$, καθώς και κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=15$.

$\lambda_h = 15$	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP/BR (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	B_h	B_h	B_h
$\lambda_n = 20$	0,3804163	0,0127361	0,0004742
$\lambda_n = 50$	0,6910841	0,0165411	0,0006142

Πίνακας 24 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $\lambda_h=15$.

Στον Πίνακα 24 παρατηρούμε ότι οι τιμές στο σύστημα NP/CS για τις κλήσεις μεταπομπής είναι πάρα πολύ υψηλές και σχεδόν απαγορευτικές για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS). Όπως αναφέρθηκε ξανά οι κλήσεις μεταπομπής έχουν ιδιαίτερη σημασία για την ποιότητα εξυπηρέτησης και η διακοπή τους έχει αρνητικό αντίκτυπο στην εικόνα του συστήματος. Από την άλλη πλευρά παρατηρούμε ότι στα μοντέλα CP/BR και CPQ έχει επιτευχθεί ο στόχος αυτός και οι πιθανότητες απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι πολύ χαμηλές. Ιδιαίτερα στο σύστημα μας με ουρά (CPQ) οι πιθανότητες είναι ελάχιστες. Στο Πίνακα 25 παραθέτουμε αποτελέσματα με τα ίδια μεγέθη, με τη διαφορά ότι θα αυξήσουμε τον ρυθμό

άφιξης κλήσεων μεταπομπής από $\lambda_h=15$ σε $\lambda_h=30$ για να γίνει πιο ευδιάκριτη η διαπίστωση που κάναμε με τα αποτελέσματα του Πίνακα 24.

$\lambda_h = 30$	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP/BR (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	B_h	B_h	B_h
$\lambda_n = 20$	0,5519952	0,2272816	0,1369976
$\lambda_n = 50$	0,7474047	0,2433486	0,1450336

Πίνακας 25 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $\lambda_h=30$.

Στον Πίνακα 25 για το σύστημα NP/CS, παρατηρούμε ακόμα πιο υψηλές τιμές στην πιθανότητα απόρριψης κλήσεων. Το $B_h \approx 0,75$ που σημαίνει ότι 3 στις 4 κλήσεις μεταπομπής απορρίπτονται. Αν συγκρίνουμε τα μοντέλα CP/BR και CPQ παρατηρούμε ότι υπάρχει μία αρκετά μικρότερη πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h στο σύστημα CPQ με ουρά.

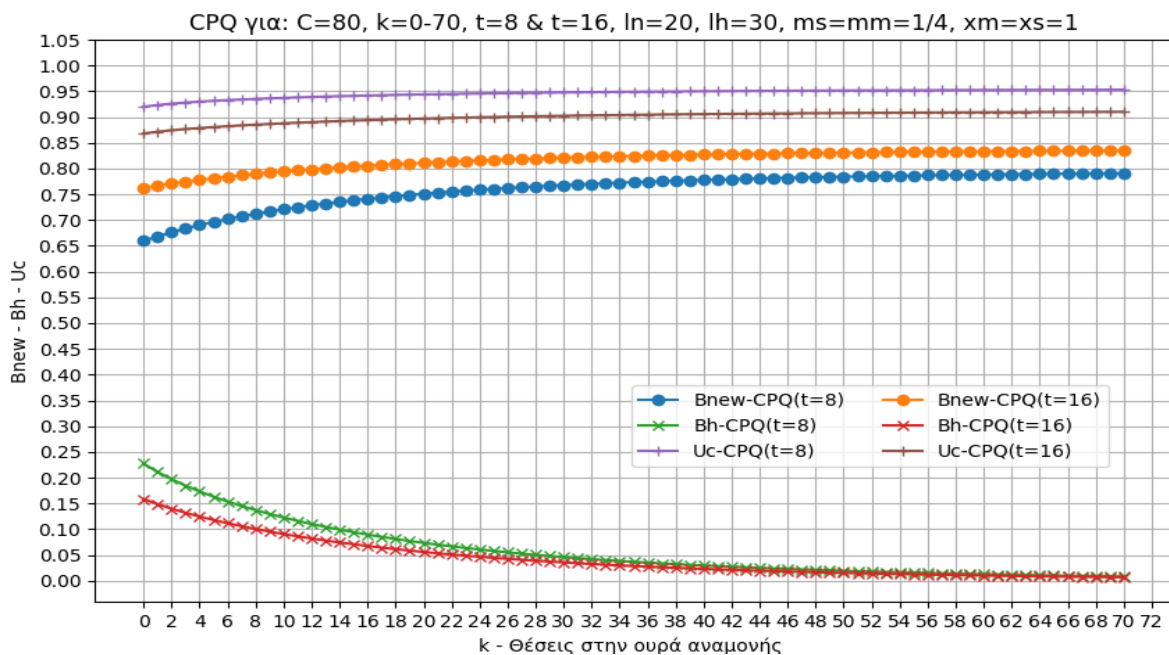
Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_C για τιμές $\lambda_n > 25$ τείνει να σταθεροποιηθεί στις τιμές 90-91% όπως και στο μοντέλο CP/BR. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε δεσμεύσει ένα μεγάλο τμήμα των BU και στις δύο φάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το όχημα. Στη φάση του κινούμενου οχήματος (MP) δεν μπορούν να δημιουργηθούν κλήσεις μεταπομπής οπότε οι οκτώ αυτές δεσμευμένες θέσεις ($t=8$) στην MP μένουν αναξιοποίητες εφόσον το όχημα είναι σε κίνηση. Η μόνη πιθανή περίπτωση να χρησιμοποιηθούν οι καταστάσεις $C - t$ έως και C στην MP είναι κατά τη διάρκεια της SP, αν έχουμε ήδη σε επεξεργασία κάποιες κλήσεις μεταπομπής (με ρυθμό $\mu_s=1$) σε αυτές τις οκτώ (8) θέσεις (0,73 – 0,80) και να εκκινήσει το όχημα άρα θα έχουμε την αξιοποίησή τους. Αυτές οι οκτώ θέσεις αντιστοιχούν στο 10% της συνολικής χωρητικότητας ($C=80$) οπότε περίπου αντίστοιχά και η αξιοποίηση της χωρητικότητας είναι μειωμένη περίπου 10% ($U_C=90-91\%$). Αυτό βέβαια ισχύει διότι το όχημα παραμένει στις δύο φάσεις SP και MP για ίδιους χρόνους $\theta_s^{-1}=\theta_m^{-1}=1$. Στον Πίνακα 26 παρατίθενται τα αποτελέσματα των τιμών αξιοποίησης της χωρητικότητάς U_C για τα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=10$, $\lambda_n=20$, $\lambda_n=50$ και ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=15$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποια σημαντική βελτίωση στο μοντέλο CPQ με την ύπαρξη της ουράς σε σύγκριση με το μοντέλο CP/BR. Σε αντίθεση με το μοντέλο NP/CS τα άλλα δύο μοντέλα δεν ξεπερνούν

το $U_c=0,91$ λόγω της δεσμευμένης χωρητικότητας στην MP.

$\lambda_h = 15$	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP/BR (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	U_c	U_c	U_c
$\lambda_n = 10$	0,8231169	0,7886964	0,7893565
$\lambda_n = 20$	0,9629779	0,8872037	0,8881737
$\lambda_n = 50$	0,9932337	0,9083033	0,9093724

Πίνακας 26 - Σύγκριση αποτελεσμάτων U_c στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $\lambda_h=15$.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 22 προκειμένου να μπορούμε να μεταβάλουμε το αριθμό των k -θέσεων στην ουρά αναμονής ($k=1-70$), έτσι ώστε να δούμε πως θα επηρεάσουν οι διαφορετικές τιμές του k τα μεγέθη του QoS. Η υλοποίηση έγινε με την επέκταση 6 (Κώδικας 23) και τη συνάρτηση `run_for_different_k()`. Επίσης χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή $kDIF$ και ο πίνακας `kDIF_values` στον οποίο θα αποθηκεύονται οι εν λόγω τιμές. Στη συνέχεια, με τον κώδικα 6A και τη συνάρτηση `plot_combined_results1()` δημιουργούμε τη γραφική παράσταση για δύο διαφορετικές τιμές της δεσμευμένης χωρητικότητας, για $t=8$ και $t=16$. Η συνολική υλοποίηση καθώς και η κλήση των συναρτήσεων εμφανίζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 23 (βλ. Παράρτημα Α). Μετά την κλήση του Κώδικα 23 με χαρακτηριστικά μεγέθη $C=80$, $k=0-70$, $t=8$ και $t=16$, $ln=20$, $lh=30$, $ms=mm=0,25$, $xs=xm=1$, έχουμε τη γραφική παράσταση του Σχήματος 23.



Σχήμα 23 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό των θέσεων στην ουρά αναμονής $k=0-70$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ με $C=80$, $t=8$ & $t=16$ (σε SP και MP).

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 23

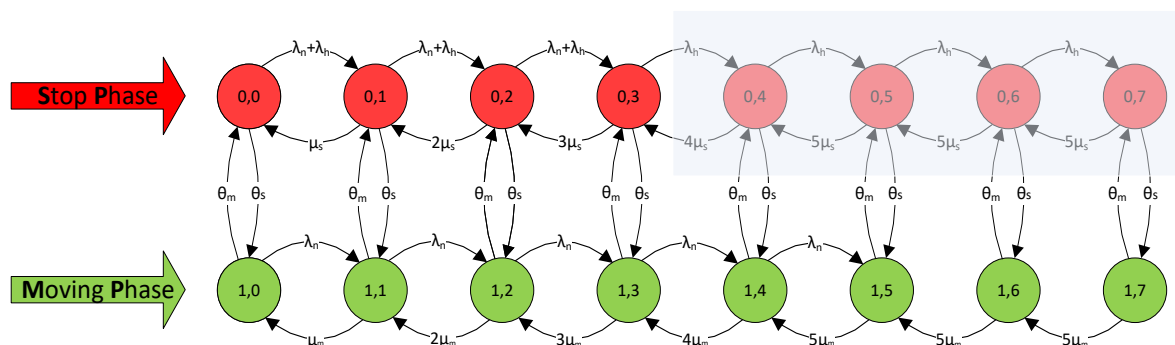
- Η μεταβολή της τιμής του πλήθους των k -θέσεων που αποτελούν την ουρά του συστήματος αυξάνει την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} . Η τιμή για $k=0$ και $t=8$, ξεκινάει από $B_{new}=0,659$ και καταλήγει για $k=70$ σε $B_{new}=0,791$. Αντίστοιχα για τη δεύτερη καμπύλη, που αφορά δεσμευμένη χωρητικότητα $t=16$, η τιμή για $k=0$ ξεκινάει από $B_{new}=0,763$ και καταλήγει για $k=70$ σε $B_{new}=0,835$. Η αύξηση της πιθανότητας απόρριψης νέων κλήσεων επηρεάζεται σε κάποιο βαθμό από την αύξηση των θέσεων στην ουρά οι οποίες εξυπηρετούν αποκλειστικά τις κλήσεις μεταπομπής. Επίσης, με την αύξηση της δεσμευμένης χωρητικότητας από $t=8$ σε $t=16$, παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση της B_{new} . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διαθέσιμη χωρητικότητα για τις νέες κλήσεις, μειώνεται από $C-8$ σε $C-16$, με αποτέλεσμα την αύξηση του βαθμού συμφόρησης.
- Όσον αφορά την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_h , όσο αυξάνονται οι θέσεις στην ουρά αναμονής μειώνεται και το B_h . Ενδεικτικά, η τιμή για $k=0$ και $t=8$, ξεκινάει από $B_h=0,2273$ και καταλήγει για $k=70$ σε $B_h=0,0083$. Παρατηρούμε μια πολύ μεγάλη και σημαντική μείωση στην πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής η οποία προήλθε από μεγάλη αύξηση των θέσεων στην ουρά. Με $k=70$ οι πιθανότητες να χαθεί κάποια κλήση είναι ελάχιστες ($B_h=0,0083$) ενώ χωρίς θέσεις στην ουρά είναι περίπου 1 στις 4 η πιθανότητα απόρριψης ($B_h=0,2273$). Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο ότι οι θέσεις στην ουρά αναμονής διατίθενται αποκλειστικά για κλήσεις μεταπομπής.
- Στην αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_C , παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν μεγάλες μεταβολές στις τιμές όσο αυξάνονται οι θέσεις στην ουρά αναμονής. Για την καμπύλη με $t=8$ και $k=0$, η αξιοποίηση της χωρητικότητας ξεκινάει από $U_C=0,9198$ και καταλήγει για $k=70$ σε $U_C=0,9529$. Αντίστοιχα για την καμπύλη με $t=16$ και $k=0$, η αξιοποίηση της χωρητικότητας ξεκινάει από $U_C=0,868$ και καταλήγει για $k=70$ σε $U_C=0,91$. Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε εδώ είναι η αρκετά μειωμένη αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος που αφορά το t δηλαδή τις δεσμευμένες θέσεις, όταν μειώνεται από $t=16$ σε $t=8$ η μέγιστη αξιοποίηση γίνεται από $U_C=0,91$ σε $U_C=0,9529$. Αυτό οφείλεται στις αναξιοποίητες δεσμευμένες θέσεις που υπάρχουν MP.

2.5. Γενική περιγραφή μοντέλου CP1Q

Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο CP1Q (Keramidi et al., 2021) στο οποίο υπάρχει δεσμευμένη περιοχή όπως και στο μοντέλο CP1/BR. Η δέσμευση των t θέσεων (t BU) γίνεται προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής μόνο στη φάση του ακίνητου οχήματος, εκεί που δημιουργούνται οι κλήσεις μεταπομπής. Η λειτουργία του αντιστοιχεί με αυτή του μοντέλου CP1/BR με τη διαφορά ότι εδώ θα υπάρχει και ουρά αναμονής στο σύστημά μας η οποία θα έχει k πεπερασμένες θέσεις. Οι k θέσεις αναμονής διατίθενται αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Όπως αναλύθηκε και στα προηγούμενα μοντέλα (CP/BR, CP1/BR και CPQ), στις κλήσεις μεταπομπής θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τις πιθανότητες απόρριψης, διότι η διακοπή τους επηρεάζει αρνητικά το QoS του συστήματος. Στο μοντέλο CP1Q για να το πετύχουμε αυτό εκτός από τις δεσμευμένες θέσεις t έχουμε και τις k θέσεις στην ουρά. Το μοντέλο CP1Q το οποίο θα αναλυθεί έχει προταθεί στο Kim et al.(2013) ως «MA-CAC with an HQ». Στο σύστημα CP1Q ισχύουν, όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, οι δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP), οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson και κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί τη διάθεση μίας BU.

2.5.1. Αναπαράσταση μοντέλου CP1Q – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση το ίδιο σύστημα το οποίο είχαμε και στα προηγούμενα μοντέλα με τα εξής χαρακτηριστικά: $C=5$, $t=2$, $\lambda_n=2$, $\lambda_h=2$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$ αλλά υπάρχει και ουρά αναμονής προς εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής με $k=2$ θέσεις. Το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα, της οποίας η χωρητικότητα είναι $C=5$, $t=2$, $k=2$ και οι δυνατές καταστάσεις θα είναι $2 \times (C+k+1) = 2 \times (5+2+1) = 16$, οι οποίες αναπαρίστανται στο Σχήμα 24.



Σχήμα 24 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1Q για $C=5$, $k=2$, $t=2$ με δεσμευμένη χωρητικότητα μόνο στην SP και ουρά αναμονής.

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 24:

- Υπάρχουν συνολικά $2x(C+k+1)=2x(5+2+1)=16$ καταστάσεις μαζί με τις k -θέσεις που ανήκουν στην ουρά του συστήματος. Οι κλήσεις μεταπομπής μπορεί να δημιουργηθούν μόνο στην SP δηλαδή σε $C + k + 1$ καταστάσεις ($5+2+1=8$) στις οποίες περιλαμβάνονται και οι θέσεις που υπάρχουν στην ουρά του συστήματος. Στην πραγματικότητα οι κλήσεις μεταπομπής μπορούν να βρεθούν σε οποιαδήποτε κατάσταση από τις υπάρχουσες, όπως αυτές απεικονίζονται στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 24. Αυτό σημαίνει ότι σε καταστάσεις $> C - t$ της MP μπορούμε να μεταβούμε μόνο στην περίπτωση που βρισκόμαστε σε αντίστοιχη κατάσταση της SP ($> C - t$) και το όχημα ξεκινήσει (μετάβαση οχήματος από $SP \rightarrow MP$).
- Οι δύο καταστάσεις $(0,4) - (0,5)$ οι οποίες έχουν σημειωθεί με το γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 24 δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις νέες κλήσεις. Είναι το τμήμα του bandwidth το οποίο έχει δεσμευτεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής ($t=2$). Επίσης οι δύο θέσεις της ουράς $(0,6) - (0,7)$ οι οποίες και αυτές έχουν σημειωθεί με το γκρι πλαίσιο στο Σχήμα 24, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις νέες κλήσεις αλλά έχουν δεσμευτεί αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής ($k=2$). Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από τα δύο είδη κλήσεων με την προϋπόθεση ότι στην MP μπορούν να εκκινήσουν μόνο νέες κλήσεις. Ειδικά για την SP μέχρι και την κατάσταση $C - t$ δηλαδή την κατάσταση $(0, 3)$ του παραδείγματός μας, ο ρυθμός άφιξης είναι ίσος με το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών αφίξεων $\lambda_n + \lambda_h$.

2.5.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP1Q

Από τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 24 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας αντιστοίχως με την §2.4.2, με τον ρυθμό εξόδου=ρυθμό εισόδου (rate out = rate in) σε κάθε κατάσταση. Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις οκτώ (8) καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση $(0,0)$:

$$SP(0,0) \rightarrow P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) = P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m$$

$$SP(0,1) \rightarrow P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) = P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m$$

$$SP(0,2) \rightarrow P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) = P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m$$

$$SP(0,3) \rightarrow P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) = P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m$$

$$SP(0,4) \rightarrow P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) = P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m$$

$$SP(0,5) \rightarrow P(0,5)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) = P(0,4)\lambda_h + P(0,6)5\mu_s + P(1,5)\theta_m$$

$$SP(0,6) \rightarrow P(0,6)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) = P(0,5)\lambda_h + P(0,7)5\mu_s + P(1,6)\theta_m$$

$$SP(0,7) \rightarrow P(0,7)(\theta_s + 5\mu_s) = P(0,6)\lambda_h + P(1,7)\theta_m$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις οκτώ (8) καταστάσεις στην MP:

$$MP(1,0) \rightarrow P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) = P(0,0)\theta_s + P(1,1)\mu_m$$

$$MP(1,1) \rightarrow P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) = P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s$$

$$MP(1,2) \rightarrow P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) = P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s$$

$$MP(1,3) \rightarrow P(1,3)(\lambda_n + \theta_m + 3\mu_m) = P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s$$

$$MP(1,4) \rightarrow P(1,4)(\lambda_n + \theta_m + 4\mu_m) = P(1,3)\lambda_n + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s$$

$$MP(1,5) \rightarrow P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) = P(1,4)\lambda_n + P(1,6)5\mu_m + P(0,5)\theta_s$$

$$MP(1,6) \rightarrow P(1,6)(\theta_m + 5\mu_m) = P(1,7)5\mu_m + P(0,6)\theta_s$$

$$MP(1,7) \rightarrow P(1,7)(\theta_m + 5\mu_m) = P(0,7)\theta_s$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=5, k=2, t=2, \lambda_n=2, \lambda_h=2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$SP(0,0) \rightarrow P(0,0)(2 + 2 + 1) = P(0,1) + P(1,0) \Rightarrow$$

$$-5P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow P(0,1)(2 + 2 + 1 + 1) = P(0,0)(2 + 2) + P(0,2)2 + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-6P(0,1) + 4P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) = 0$$

$$SP(0,2) \rightarrow P(0,2)(2 + 2 + 1 + 2) = P(0,1)(2 + 2) + P(0,3)3 + P(1,2) \Rightarrow$$

$$-7P(0,2) + 4P(0,1) + 3P(0,3) + P(1,2) = 0$$

$$SP(0,3) \rightarrow P(0,3)(2 + 1 + 3) = P(0,2)(2 + 2) + P(0,4)4 + P(1,3) \Rightarrow$$

$$-6P(0,3) + 4P(0,2) + 4P(0,4) + P(1,3) = 0$$

$$SP(0,4) \rightarrow P(0,4)(2 + 1 + 4) = P(0,3)2 + P(0,5)5 + P(1,4) \Rightarrow$$

$$-7P(0,4) + 2P(0,3) + 5P(0,5) + P(1,4) = 0$$

$$SP(0,5) \rightarrow P(0,5)(2 + 1 + 5) = P(0,4)2 + P(0,6)5 + P(1,5) \Rightarrow$$

$$-8P(0,5) + 2P(0,4) + 5P(0,6) + P(1,5) = 0$$

$$SP(0,6) \rightarrow P(0,6)(2 + 1 + 5) = P(0,5)2 + P(0,7)5 + P(1,6) \Rightarrow$$

$$-8P(0,6) + 2P(0,5) + 5P(0,7) + P(1,6) = 0$$

$$SP(0,7) \rightarrow P(0,7)(1 + 5) = P(0,6)2 + P(1,7) \Rightarrow$$

$$-6P(0,7) + 2P(0,6) + P(1,7) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις οκτώ (8) καταστάσεις στην MP:

$$MP(1,0) \rightarrow P(1,0)(2 + 1) = P(0,0) + P(1,1) \Rightarrow$$

$$-3P(1,0) + P(0,0) + P(1,1) = 0$$

$$MP(1,1) \rightarrow P(1,1)(2 + 1 + 1) = P(1,0)2 + P(1,2)2 + P(0,1) \Rightarrow$$

$$-4P(1,1) + 2P(1,0) + 2P(1,2) + P(0,1) = 0$$

$$MP(1,2) \rightarrow P(1,2)(2 + 1 + 2) = P(1,1)2 + P(1,3)3 + P(0,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2) + 2P(1,1) + 3P(1,3) + P(0,2) = 0$$

$$MP(1,3) \rightarrow P(1,3)(2 + 1 + 3) = P(1,2)2 + P(1,4)4 + P(0,3) \Rightarrow$$

$$-6P(1,3) + 2P(1,2) + 4P(1,4) + P(0,3) = 0$$

$$MP(1,4) \rightarrow P(1,4)(2 + 1 + 4) = P(1,3)2 + P(1,5)5 + P(0,4) \Rightarrow$$

$$-7P(1,4) + 2P(1,3) + 5P(1,5) + P(0,4) = 0$$

$$MP(1,5) \rightarrow P(1,5)(1 + 5) = P(1,4)2 + P(1,6)5 + P(0,5) \Rightarrow$$

$$-6P(1,5) + 2P(1,4) + 5P(1,6) + P(0,5) = 0$$

$$MP(1,6) \rightarrow P(1,6)(1 + 5) = P(1,7)5 + P(0,6) \Rightarrow$$

$$-6P(1,6) + 5P(1,7) + P(0,6) = 0$$

$$MP(1,7) \rightarrow P(1,7)(1 + 5) = P(0,7) \Rightarrow$$

$$-6P(1,7) + P(0,7) = 0$$

Έχουν προκύψει 16 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 27. Όπου κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 27 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,7)$.

$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(0,6)$	$P(0,7)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$	$P(1,6)$	$P(1,7)$
-5	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	-6	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	4	-7	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	4	-6	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-6	4	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-7	5	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-6	5	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6	5
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6

Πίνακας 27 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$.

2.5.3. Επίλυση συστήματος εξισώσεων και εξαγωγή των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης (ή εργοδικές πιθανότητες) του μοντέλου CP1Q

Από τον Πίνακα 27 προκύπτει ο Πίνακας 28, που αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό σύστημα 16 εξισώσεων με 16 αγνώστους (16x16), όπου οι άγνωστοι είναι οι ζητούμενες πιθανότητες.

$$\begin{bmatrix}
 -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 4 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(0,0) \\ P(0,1) \\ P(0,2) \\ P(0,3) \\ P(0,4) \\ P(0,5) \\ P(0,6) \\ P(0,7) \\ P(1,0) \\ P(1,1) \\ P(1,2) \\ P(1,3) \\ P(1,4) \\ P(1,5) \\ P(1,6) \\ P(1,7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 28 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q για C=5, t=2 και k=2.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrixreshish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 29 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

Matrix input

Insert matrix

Restore matrix

☐ Complex numbers (more)

Decimal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	b
1	-5	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	-6	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	4	-7	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	4	-6	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	2	-7	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	2	-8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	2	-6	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	2	0	0	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-5	3	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-6	4	0	0	0	0
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-7	5	0	0	0
14	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	-6	5	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 29 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q, είσοδος δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους δεκαέξι άγνωστους x_1, x_2, \dots, x_{16} που είναι η επίλυση του συστήματος 16x16. Οι δεκαέξι αυτές τιμές αντιστοιχούν στις δεκαέξι πιθανότητες του συστήματος $P(0,0), P(0,1), \dots, P(1,7)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 25.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.024916203136476897878$ $x_2 = 0.078955986855016332977$ $x_3 = 0.13105611261928141754$ $x_4 = 0.15425136549284192366$ $x_5 = 0.072062615380701673071$ $x_6 = 0.026871173766989797356$ $x_7 = 0.0088516807703025213429$ $x_8 = 0.0030348619783894357676$ $x_9 = 0.045625028827368156428$ $x_{10} = 0.1119588833456275714$ $x_{11} = 0.13881474443637881995$ $x_{12} = 0.11303328095711917978$ $x_{13} = 0.061579707844278878792$ $x_{14} = 0.026585755523002423778$ $x_{15} = 0.0018967887364933976$ $x_{16} = 0.00050581032973157285144$	$P(0,0) = 0,0249162031$
	$P(0,1) = 0,0789559869$
	$P(0,2) = 0,1310561126$
	$P(0,3) = 0,1542513655$
	$P(0,4) = 0,0720626154$
	$P(0,5) = 0,0268711738$
	$P(0,6) = 0,0088516808$
	$P(0,7) = 0,0030348620$
	$P(1,0) = 0,0456250288$
	$P(1,1) = 0,1119588833$
	$P(1,2) = 0,1388147444$
	$P(1,3) = 0,1130332810$
	$P(1,4) = 0,0615797078$
	$P(1,5) = 0,0265857555$
	$P(1,6) = 0,0018967887$
	$P(1,7) = 0,0005058103$

Αποτελέσματα 25 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 16x16, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$.

2.5.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP1Q με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 27 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις δεκαέξι (16) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §2.5.2. (ομοίως με τη μεθοδολογία που εφαρμόστηκε στην §2.4.2) και με βάση τον Πίνακα 27, προκύπτει ο Πίνακας 30, που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

i, n	$P(0,0)$	$P(0,1)$	$P(0,2)$	$P(0,3)$	$P(0,4)$	$P(0,5)$	$P(0,6)$	$P(0,7)$	$P(1,0)$	$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(1,4)$	$P(1,5)$	$P(1,6)$	$P(1,7)$
(0,0)	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0
(0,1)	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0
(0,2)	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
(0,3)	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
(0,4)	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
(0,5)	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0
(0,6)	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0	θ_m	0
(0,7)	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	0	0	0	0	0	0	0	θ_m
(1,0)	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0	0
(1,1)	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0	0
(1,2)	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0	0
(1,3)	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0	0
(1,4)	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0	0
(1,5)	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$	0
(1,6)	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$	$\beta_i(n)$
(1,7)	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	$\sigma_i(n)$	$\alpha_i(n)$

Πίνακας 30 - Σύστημα εξισώσεων 16x16 μοντέλου CP1Q με γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §2.5.2:

$$SP(0,0) \rightarrow -P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s) + P(0,1)\mu_s + P(1,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1) \rightarrow -P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + \mu_s) + P(0,0)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,2)2\mu_s + P(1,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2) \rightarrow -P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + 2\mu_s) + P(0,1)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,3)3\mu_s + P(1,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3) \rightarrow -P(0,3)(\lambda_h + \theta_s + 3\mu_s) + P(0,2)(\lambda_n + \lambda_h) + P(0,4)4\mu_s + P(1,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,4) \rightarrow -P(0,4)(\lambda_h + \theta_s + 4\mu_s) + P(0,3)\lambda_h + P(0,5)5\mu_s + P(1,4)\theta_m = 0$$

$$SP(0,5) \rightarrow -P(0,5)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) + P(0,4)\lambda_h + P(0,6)5\mu_s + P(1,5)\theta_m = 0$$

$$SP(0,6) \rightarrow -P(0,6)(\lambda_h + \theta_s + 5\mu_s) + P(0,5)\lambda_h + P(0,7)5\mu_s + P(1,6)\theta_m = 0$$

$$SP(0,7) \rightarrow -P(0,7)(\theta_s + 5\mu_s) + P(0,6)\lambda_h + P(1,7)\theta_m = 0$$

$$MP(1,0) \rightarrow -P(1,0)(\lambda_n + \theta_m) + P(1,1)\mu_m + P(0,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,1) \rightarrow -P(1,1)(\lambda_n + \theta_m + \mu_m) + P(1,0)\lambda_n + P(1,2)2\mu_m + P(0,1)\theta_s = 0$$

$$MP(1,2) \rightarrow -P(1,2)(\lambda_n + \theta_m + 2\mu_m) + P(1,1)\lambda_n + P(1,3)3\mu_m + P(0,2)\theta_s = 0$$

$$MP(1,3) \rightarrow -P(1,3)(\lambda_n + \theta_m + 3\mu_m) + P(1,2)\lambda_n + P(1,4)4\mu_m + P(0,3)\theta_s = 0$$

$$MP(1,4) \rightarrow -P(1,4)(\lambda_n + \theta_m + 4\mu_m) + P(1,3)\lambda_n + P(1,5)5\mu_m + P(0,4)\theta_s = 0$$

$$MP(1,5) \rightarrow -P(1,5)(\theta_m + 5\mu_m) + P(1,4)\lambda_n + P(1,6)5\mu_m + P(0,5)\theta_s = 0$$

$$MP(1,6) \rightarrow -P(1,6)(\theta_m + 5\mu_m) + P(1,7)5\mu_m + P(0,6)\theta_s = 0$$

$$MP(1,7) \rightarrow -P(1,7)(\theta_m + 5\mu_m) + P(0,7)\theta_s = 0$$

$$a_i(n) = \begin{cases} -(\lambda_n + \lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\lambda_h + \theta_s + n\mu_s), & i = 0 \text{ για } C - t \leq n \leq C \\ -(\lambda_n + \theta_s + C\mu_s), & i = 0 \text{ για } C < n < C + k \\ -(\theta_s + C\mu_s), & i = 0 \text{ για } n = C + k \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -(\lambda_n + \theta_m + n\mu_m), & i = 1 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -(\theta_m + C\mu_m), & i = 1 \text{ για } C \leq n \leq C + k \end{cases}$$

$$\beta_i(n) = \begin{cases} (n+1)\mu_s, & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C \\ C\mu_s, & i = 0 \text{ για } C \leq n < C + k \\ (n+1)\mu_m, & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \\ C\mu_m, & i = 1 \text{ για } C \leq n < C + k \end{cases}$$

$$\sigma_i(n) = \begin{cases} \lambda_n + (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } 1 < n \leq C - t \\ i\lambda_n + (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } C - t < n \leq C \\ (1-i)\lambda_h, & i = 0,1 \text{ για } C < n \leq C + k \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 30 προκύπτει η γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από δεκατέσσερις (14) συνολικά εξισώσεις (Kim et al., 2013) και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C . Τις εξισώσεις τις υλοποιούμε στη γλώσσα προγραμματισμού Python με το απόσπασμα του Κώδικα 24 (βλ. Παράρτημα Α).

Στη συνέχεια, έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 26). Αντικαθιστώντας

την τελευταία γραμμή του πίνακα με την εξίσωση κανονικοποίησης θα προκύψει ο νέος πίνακας ο οποίος εμφανίζεται στα Αποτελέσματα 27.

Ο πίνακας A είναι:

```
[ -5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]
[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 4, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 5, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 5 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6 ]
```

Αποτελέσματα 26 - Πίνακας A μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και $k=2$.

Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:

```
-----
[ -5, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 4, -6, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 4, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 4, -6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 2, -8, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]
[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 2, 0, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -5, 3, 0, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 4, 0, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -7, 5, 0, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 5, 0 ]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -6, 5 ]
[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ]
```

Αποτελέσματα 27 - Πίνακας A μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$, $k=2$ μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής.

Στη συνέχεια, με τον ίδιο τρόπο όπως και στα προηγούμενα μοντέλα NP/CS και CP/BR, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα b. Με τη χρήση της συνάρτησης `np.linalg.solve(A, b)`, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 28).

Πιθανότητες-Αποτελέσματα:

```
-----
p(0,0) = 0.0249162031
p(0,1) = 0.0789559869
p(0,2) = 0.1310561126
p(0,3) = 0.1542513655
p(0,4) = 0.0720626154
p(0,5) = 0.0268711738
p(0,6) = 0.0088516808
p(0,7) = 0.0030348620
p(1,0) = 0.0456250288
p(1,1) = 0.1119588833
p(1,2) = 0.1388147444
p(1,3) = 0.1130332810
p(1,4) = 0.0615797078
p(1,5) = 0.0265857555
p(1,6) = 0.0018967887
p(1,7) = 0.0005058103
```

Αποτελέσματα 28 - Πιθανότητες μοντέλου CP1Q για $C=5$ και $k=2$.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 28 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §2.5.3 (Αποτελέσματα 25), με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων. Για την εξαγωγή των πιθανοτήτων (Αποτελέσματα 28) έγινε η χρήση του Κώδικα 25 (βλ. Παράρτημα Α).

2.5.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο CP1Q με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία μας καθορίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος CP1Q με δεσμευμένη χωρητικότητα t και ουρά αναμονής με k θέσεις. Αυτά τα μεγέθη είναι (Keramidi et al., 2021):

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} . Αν παρατηρήσουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του μοντέλου CP1Q στο Σχήμα 24 θα δούμε ότι για να έχουμε απόρριψη μίας νέας κλήσης στην SP θα πρέπει να βρεθούμε σε μία από τις καταστάσεις $(0,3) - (0,4) - (0,5) - (0,6) - (0,7)$ δηλαδή στη γενική μορφή στις καταστάσεις $C - t \leq n \leq C + k$. Αντιστοίχως για να έχουμε απόρριψη μίας νέας κλήσης στην MP θα πρέπει να βρεθούμε σε μία από τις καταστάσεις $(1,5) - (1,6) - (1,7)$ δηλαδή στη γενική μορφή στις καταστάσεις $C \leq n \leq C + k$. Η πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new} = \sum_{n=C-t}^{C+k} P(0, n) + \sum_{n=C}^{C+k} P(1, n) \quad (2.17)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{new} &= P(0,3) + P(0,4) + P(0,5) + P(0,6) + P(0,7) + P(1,5) + P(1,6) + P(1,7) = \\ &= 0,1542514 + 0,0720626 + 0,0268711 + 0,0088516 + 0,0030349 + 0,0265858 + \\ &= 0,0018968 + 0,0005058 = \mathbf{0,29406} \end{aligned}$$

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h , η οποία μπορεί να συμβεί αποκλειστικά και μόνο κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο SP. Ορίζεται ως η δεσμευμένη πιθανότητα, το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση $(0, C + k)$, δεδομένου ότι βρίσκεται στη φάση SP (Keramidi et al., 2021):

$$B_h = \frac{P(0, C + k)}{\sum_{n=0}^{C+k} P(0, n)} \quad (2.18)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 B_h &= \frac{P(0,C+k)}{\sum_{n=0}^{C+k} P(0,n)} = \frac{P(0,7)}{P(0,0)+P(0,1)+P(0,2)+P(0,3)+P(0,4)+P(0,5)+P(0,6)+P(0,7)} = \\
 &= \frac{0,00303486}{0,024916 + 0,078956 + 0,131056 + 0,154251 + 0,072063 + 0,026871 + 0,008852 + 0,003035} \\
 &= \frac{0,00303486}{0,5} = \mathbf{0,0060697}
 \end{aligned}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε, είναι η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Το U_c υπολογίζεται κατά τα γνωστά, από τις σχέσεις (2.11), (2.12) και (2.13) της §2.4.5. Για το σύστημά μας, έχουμε τον υπολογισμό της U_1 :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=0}^C n \cdot P(i,n) = 0 \cdot 0,0249162 + 1 \cdot 0,078956 + 2 \cdot 0,1310561 + \\
 &3 \cdot 0,1542514 + 4 \cdot 0,0720626 + 5 \cdot 0,0268712 + 0 \cdot 0,045625 + 1 \cdot 0,1119589 + \\
 &2 \cdot 0,1388147 + 3 \cdot 0,1130333 + 4 \cdot 0,0615797 + 5 \cdot 0,0265857 = \mathbf{2,334364}
 \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της U_2 :

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C+1}^{C+k} C \cdot P(i,n) U_1 = 5 \cdot 0,0088517 + 5 \cdot 0,0030349 + 5 \cdot 0,0018967 + \\
 &5 \cdot 0,0005058 = \mathbf{0,071445}
 \end{aligned}$$

και τέλος υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{U_1 + U_2}{C} = \frac{2,334364 + 0,071445}{5} = \frac{2,405809}{5} = \mathbf{0,481162}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε, είναι το πλήθος (μέση τιμή) των κλήσεων που βρίσκονται στην ουρά αναμονής N . Το υπολογίζουμε με τη σχέση (2.14) της §2.4.5. Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n=C+1}^{C+k} (n - C) \cdot P(i,n) = 1 \cdot P(0,6) + 2 \cdot P(0,7) + 1 \cdot P(1,6) + 2 \cdot P(1,7) = \\
 &= 0,0088517 + 2 \cdot 0,0030349 + 0,0018967 + 2 \cdot 0,0005058 = \mathbf{0,0178298}
 \end{aligned}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε είναι ο ενεργός ρυθμός άφιξης των κλήσεων στο σύστημά λ_a . Το λ_a προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών αφίξεων των κλήσεων. Στο σύστημά μας διακρίνουμε τους εξής ρυθμούς αφίξεων κλήσεων:
 - Στην SP για τις καταστάσεις από (0,0) έως και την (0, C - t - 1) έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων $\lambda_n + \lambda_h$

- Στην SP για τις καταστάσεις από $(0, C - t)$ έως και την $(0, C + k - 1)$ έχουμε ρυθμό άφιξης των κλήσεων λ_h
- Στην MP για τις καταστάσεις από $(1, 0)$ έως και $(1, C - 1)$ έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων λ_n

Ο συνολικός ενεργός ρυθμός άφιξης κλήσεων λ_α για το σύστημά μας δίνεται (Vlasakis M., et al. 2023) από τον τύπο:

$$\lambda_\alpha = \sum_{n=0}^{C-t-1} (\lambda_n + \lambda_h) P(0, n) + \sum_{n=C-t}^{C+k-1} \lambda_h P(0, n) + \sum_{n=0}^{C-1} \lambda_n P(1, n) \quad (2.19)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \sum_{n=0}^2 (\lambda_n + \lambda_h) P(0, n) + \sum_{n=3}^6 \lambda_h P(0, n) + \sum_{n=0}^4 \lambda_n P(1, n) = \\ &= (\lambda_n + \lambda_h) P(0, 0) + (\lambda_n + \lambda_h) P(0, 1) + (\lambda_n + \lambda_h) P(0, 2) + \lambda_h P(0, 3) + \lambda_h P(0, 4) + \lambda_h P(0, 5) \\ &+ \lambda_h \cdot P(0, 6) + \lambda_n \cdot P(1, 0) + \lambda_n \cdot P(1, 1) + \lambda_n \cdot P(1, 2) + \lambda_n \cdot P(1, 3) + \lambda_n \cdot P(1, 4) = \\ &= 4 \cdot 0,0249162 + 4 \cdot 0,078956 + 4 \cdot 0,1310561 + 2 \cdot 0,1542514 + 2 \cdot 0,0720626 + 2 \cdot 0,0268712 + \\ &+ 2 \cdot 0,0088517 + 2 \cdot 0,045625 + 2 \cdot 0,1119589 + 2 \cdot 0,1388147 + 2 \cdot 0,1130333 + 2 \cdot 0,0615797 = \\ &= \mathbf{2,4058102} \end{aligned}$$

- Το τελευταίο μέγεθος που θα υπολογίσουμε είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά W . Τον μέσο χρόνο αναμονής W , τον υπολογίζουμε με τη σχέση (2.16) της §2.4.5. Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$W = \frac{N}{\lambda_\alpha} = \frac{0,0178298}{2,4058102} = \mathbf{0,0074111}$$

Σε συνέχεια του Κώδικα 25 παρουσιάζεται η επέκταση της συνάρτησης **calculate_array()** στον Κώδικα 26 (βλ. Παράρτημα Α) με την υλοποίηση των υπολογισμών (3^ο μέρος) για τα μεγέθη του QoS δηλαδή τα $B_{new}, B_h, U (U_1 + U_2), U_C, N, \lambda_\alpha$ και W .

Μετά την κλήση του Κώδικα 26 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 29) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν και με τη χρήση των τύπων (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.16), (2.17), (2.18) και (2.19).

```
169 calculate_array( c: 5, k: 2, t: 2, ln: 2, lh: 2, ms: 1, mm: 1, xs: 1, xm: 1)

Run create_array+solution_CP1Q(final) x

3 - CP1Q:Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λα & W)
=====
Bnew = 0.294060051978453
Bh = 0.006069723956779
U1 = 2.334364463011731
U2 = 0.071445709074584
U = 2.405810172086315
Uc = 0.481162034417263
N = 0.017829814123038
λα = 2.405810172086316
W = 0.007411147533546
```

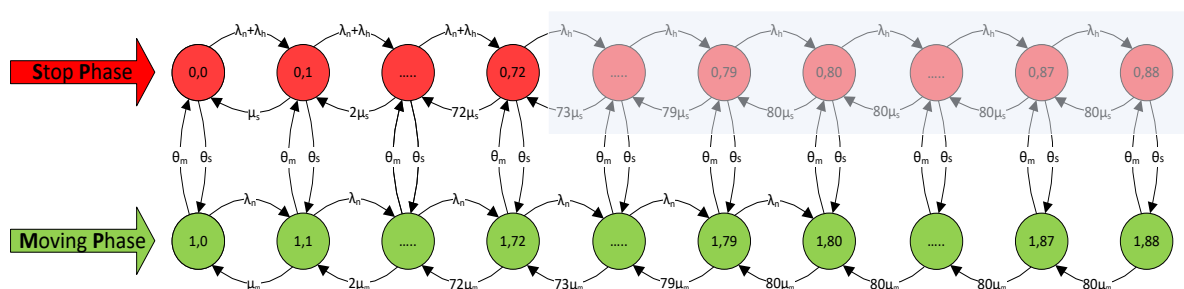
Αποτελέσματα 29 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP1Q για $C=5$, $t=2$ και συνρά $k=2$.

2.5.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP1Q με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα CP1Q το οποίο θα έχει ίδια χαρακτηριστικά μεγέθη με το σύστημα το οποίο αναλύθηκε στην §2.4.6 (CPQ) με τη διαφορά ότι εδώ η δεσμευμένη χωρητικότητα $t=8$, προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής, εφαρμόζεται μόνο στη φάση του σταματημένου οχήματος (SP). Το εξεταζόμενο σύστημα λοιπόν θα έχει συνολικά τα εξής χαρακτηριστικά:

$$C=80, k=8, t=8, \lambda_n=20, \lambda_h=15, \mu_s=1/4, \mu_m=1/4, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι $2 \times (C+k+1) = 2 \times (80+8+1) = 178$ καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 25.



Σχήμα 25 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP1Q με $C=80$, $k=8$ και $t=8$.

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 26 με τα μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος έχουμε στα Αποτελέσματα 30 την κλήση της συνάρτησης για χωρητικότητα $C=80$, $k=8$, $t=8$ μαζί με τα

υπόλοιπα μεγέθη του εν λόγω συστήματος, καθώς και την έξοδο με τις επιστρεφόμενες τιμές του QoS.

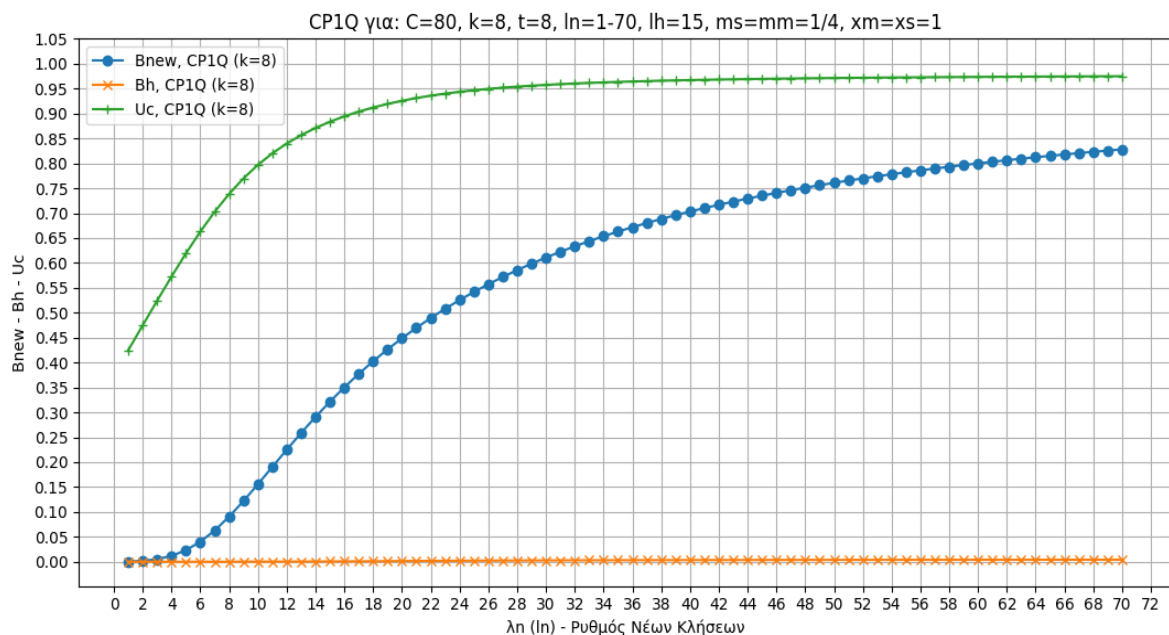
```

168
169 calculate_array(c: 80, k: 8, t: 8, ln: 20, lh: 15, ms: 0.25, mm: 0.25, xs: 1, xm: 1)
Run create_array+solution_CP1Q(final) x
3 - CP1Q:Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λa & W)
=====
Bnew = 0.448810048197348
Bh = 0.001402842506470
U1 = 71.361197067982417
U2 = 2.691913801035672
U = 74.053110869018084
Uc = 0.925663885862726
N = 0.090511915213963
λa = 18.513277717254507
W = 0.004889027032183

```

Αποτελέσματα 30 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP1Q για $C=80$, $k=8$ και $t=8$.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 26 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `calculate_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής λ_n ($\ln=1-70$). Για την υλοποίηση επεκτείνουμε τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_ln(c, k, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 27 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 4Α (Κώδικα 27) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(ln_values, results_array)` της οποίας η έξοδος είναι η γραφική παράσταση του Σχήματος 26.



Σχήμα 26 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1Q για $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (μόνο στην SP).

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 26

■ Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} όπως και στα υπόλοιπα μοντέλα (NP/CS, CP/BR) ακολουθεί μία αυξητική τάση όσο έχουμε αντίστοιχη αύξηση του ρυθμού νέων κλήσεων (λ_n). Η αύξηση είναι φυσιολογική και οφείλεται στη μείωση των διαθέσιμων BU και όσο έρχονται στο σύστημα νέες κλήσεις αυτές κάποια στιγμή δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν και απορρίπτονται με μεγαλύτερη πιθανότητα. Εδώ βέβαια να επισημάνουμε ότι η δεσμευμένη χωρητικότητα $t=8$ καθώς και οι θέσεις στην ουρά αναμονής $k=8$ δεν είναι διαθέσιμες για τις νέες κλήσεις και αυτό αντικατοπτρίζεται και στο διάγραμμα του Σχήματος 26. Στον Πίνακα 31 παρατίθενται τα αποτελέσματα των τιμών για την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} για τα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q και CPQ για τιμή άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=20$ και $\lambda_n=50$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι στα δύο μοντέλα CP1/BR και CP1Q οι τιμές του B_{new} είναι περίπου ίσες και βέβαια πολύ υψηλές. Μάλιστα στο μοντέλο CP1Q, η τιμή του B_{new} παρουσιάζει μεγαλύτερη αύξηση σε σύγκριση με το CP1/BR. Η ανάλυση δείχνει ότι η υλοποίηση ουράς δεν βελτιώνει σημαντικά την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων.

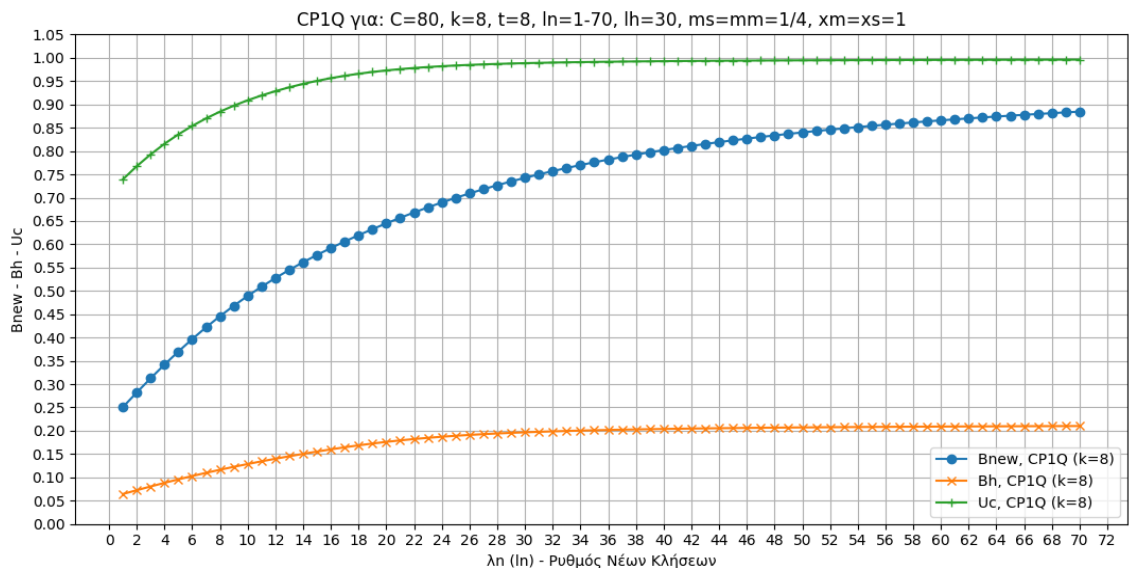
	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP1/BR (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CP1Q (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	B_{new}	B_{new}	B_{new}	B_{new}
$\lambda_n = 20$	0,2693659	0,4382375	0,44881	0,4866484
$\lambda_n = 50$	0,6490438	0,7477362	0,7608942	0,78615887

Πίνακας 31 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_{new} στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q και CPQ.

Από την άλλη πλευρά στο Non-Priority (NP/CS) μοντέλο παρατηρούμε πάλι ότι οι αντίστοιχες τιμές για B_{new} είναι πολύ χαμηλότερες, ειδικά για μικρές τιμές του λ_n η διαφορά διευρύνεται με τα άλλα τρία μοντέλα. Αυτό δεν σημαίνει ότι το μοντέλο NP/CS είναι το καλύτερο, διότι, όπως θα δούμε πιο κάτω τα υπόλοιπα μεγέθη που διαμορφώνουν το QoS δεν είναι εξίσου αποδεκτά.

Άλλη μία σύγκριση είναι στις τιμές του CPQ και CP1Q στο δεύτερο μοντέλο που δεν υπάρχει δεσμευμένη χωρητικότητα στην MP υπάρχει μία μικρή βελτίωση στην πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} . Ενδεικτικά, από το CPQ για $\lambda_n=20$ έχουμε $B_{new} \approx 0,487$, αντίστοιχα στο μοντέλο CP1Q για $\lambda_n=20$ έχουμε $B_{new} \approx 0,449$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία βελτίωση αλλά οι τιμές του B_{new} παραμένουν πολύ υψηλές.

Η πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h είναι πάρα πολύ μικρή και σχεδόν σταθερή. Για τις τιμές που επιλέξαμε για το σύστημά μας είναι σχεδόν μηδενική η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=15$ και υπάρχουν διαθέσιμες δεσμευμένες θέσεις, αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής, $t=8$ αλλά επίσης υπάρχουν και $k=8$ θέσεις στην ουρά αναμονής. Οπότε με αυτά τα μεγέθη είναι ελάχιστη η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα από το διάγραμμα του Σχήματος 27 όπου έχουμε διπλασιάσει τον ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=30$ και διαπιστώνουμε ότι σταθεροποιείται στην τιμή $B_h \approx 0,208$ ενώ για $\lambda_h=15$ η τιμή κυμαίνεται περίπου στο $B_h \approx 0,004$.



Σχήμα 27 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ για $C=80, k=8$ και $t=8$ (μόνο στην SP).

Στον Πίνακα 32 παρατίθενται τα αποτελέσματα των τιμών απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h , για τα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q και CPQ για τιμή άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=20$ και $\lambda_n=50$, καθώς και κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=15$.

$\lambda_h = 15$	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP1/BR (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CP1Q (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	B_h	B_h	B_h	B_h
$\lambda_n = 20$	0,3804163	0,0372719	0,0014028	0,0004742
$\lambda_n = 50$	0,6910841	0,1040604	0,0037911	0,0006142

Πίνακας 32 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q & CPQ για $\lambda_h=15$.

Στον Πίνακα 32 παρατηρούμε ότι οι τιμές στο σύστημα NP/CS για τις κλήσεις μεταπομπής είναι πάρα πολύ υψηλές και σχεδόν απαγορευτικές για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS). Όπως αναφέρθηκε ξανά οι κλήσεις μεταπομπής έχουν ιδιαίτερη σημασία για την ποιότητα εξυπηρέτησης και η διακοπή τους έχει αρνητικό αντίκτυπο στην εικόνα του συστήματος. Από την άλλη πλευρά βλέπουμε ότι στα μοντέλα CP1/BR, CP1Q και CPQ έχει επιτευχθεί ο στόχος αυτός και οι πιθανότητες απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι πολύ χαμηλές. Ιδιαίτερα στα μοντέλα με ουρά (CPQ και CP1Q) οι πιθανότητες έχουν ελαχιστοποιηθεί. Στο Πίνακα 33 παραθέτουμε αποτελέσματα με τα ίδια μεγέθη του προηγούμενου συστήματος, με τη διαφορά ότι θα αυξήσουμε τον ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής από $\lambda_h=15$ σε $\lambda_h=30$ για να γίνει πιο ευδιάκριτη η διαπίστωση που κάναμε με τα αποτελέσματα του Πίνακα 32.

$\lambda_h = 30$	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP1/BR (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CP1Q (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	B_h	B_h	B_h	B_h
$\lambda_n = 20$	0,5519952	0,3042603	0,1760957	0,1369976
$\lambda_n = 50$	0,7474047	0,3757827	0,2071357	0,1450336

Πίνακας 33 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q & CPQ για $\lambda_h=30$.

Στον Πίνακα 33 για το μοντέλο NP/CS, παρατηρούμε ακόμα πιο υψηλές τιμές στην πιθανότητα απόρριψης κλήσεων. Το $B_h \approx 0,75$ που σημαίνει ότι 3 στις 4 κλήσεις μεταπομπής απορρίπτονται.

Αν συγκρίνουμε τα μοντέλα CP1/BR και CP1Q, βλέπουμε ότι υπάρχει μία αρκετά μικρότερη πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h στο σύστημα CP1Q με ουρά. Αρά η ύπαρξη ουράς βελτιώνει σημαντικά την πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής από το μοντέλο CP1/BR στο μοντέλο CP1Q.

Το μοντέλο CPQ σε σύγκριση με το CP1Q έχει μικρότερες τιμές απόρριψης κλήσεων μεταπομπής B_h . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η δεσμευμένη περιοχή στην MP, στο μοντέλο CP1Q, έχει πλέον διατεθεί και στις νέες κλήσεις ενώ είχε δεσμευτεί μόνο για τις κλήσεις μεταπομπής στο CPQ. Αυτή η μείωση εμφανίζεται και στον Πίνακα 31 με την αντίστοιχη μείωση του B_{new} για το μοντέλο CP1Q έναντι του CPQ.

- Η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c στο μοντέλο CP1Q για υψηλές τιμές του λ_n , φτάνει την τιμή το $U_c \approx 97,4\%$. Το αντίστοιχο μοντέλο CP1/BR φτάνει σε

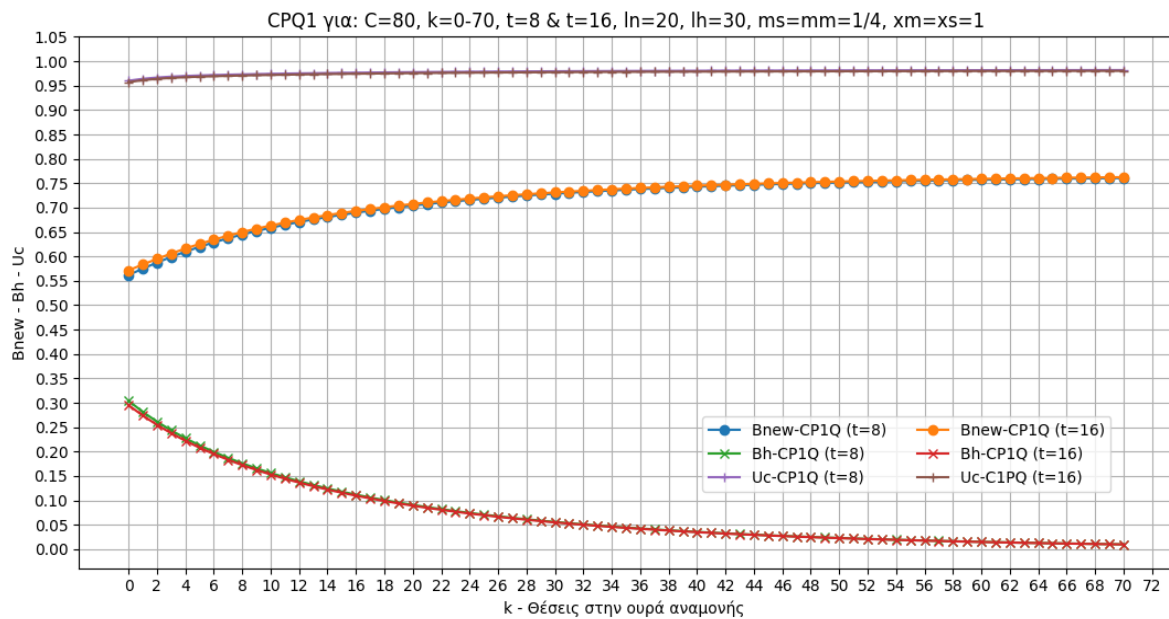
ελάχιστα μικρότερη αξιοποίηση με τιμή $U_c \approx 97,01\%$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι δεν υπάρχει κάποια σημαντική βελτίωση στο μοντέλο CP1Q με την ύπαρξη της ουράς σε σύγκριση με το μοντέλο CP1/BR.

Στο μοντέλο CP1Q έχουμε υψηλές τιμές της χρησιμοποίησης του συστήματος η οποία φτάνει $U_c \approx 97,4\%$ σε αντίθεση με το μοντέλο CPQ στο οποίο η αξιοποίηση να φτάνει σε μέγιστο βαθμό το $U_c \approx 91,13\%$. Αυτό συμβαίνει διότι στη φάση του κινούμενου οχήματος (MP) δεν υπάρχουν πλέον οι δεσμευμένες θέσεις (από την $C - t$ έως και την C) αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής, οι οποίες δέσμευαν τα BU και αφήναν έναν μεγάλο χώρο αναξιοποίητο. Στον Πίνακα 34 παρατίθενται τα αποτελέσματα των τιμών αξιοποίησης της χωρητικότητάς U_c , για τα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q και CPQ για ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=10$, $\lambda_n=20$, $\lambda_n=50$ και ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $\lambda_h=15$. Σε αντίθεση με τα υπόλοιπα μοντέλα, το NP/CS αγγίζει σε χρησιμοποίηση το $U_c \approx 99,56\%$, ωστόσο αυτό δεν συνοδεύεται από αντίστοιχα ικανοποιητικές τιμές στα B_{new} και B_h , όπως έχει αναλυθεί προηγουμένως.

$\lambda_h = 15$	NP/CS (χωρίς δεσμευμένη χωρητικότητα)	CP1/BR (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CP1Q (δέσμευση χωρητικότητας μόνο στην SP)	CPQ (δέσμευση χωρητικότητας στην SP και MP)
	U_c	U_c	U_c	U_c
$\lambda_n = 10$	0,8231169	0,7960451	0,7970052	0,7893565
$\lambda_n = 20$	0,9629779	0,9227854	0,9256638	0,8881737
$\lambda_n = 50$	0,9932337	0,9666366	0,9713426	0,9093724

Πίνακας 34 - Σύγκριση αποτελεσμάτων B_h στα μοντέλα NP/CS, CP1/BR, CP1Q & CPQ για $\lambda_h=30$.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 27 προκειμένου να μπορούμε να μεταβάλουμε το αριθμό των k -θέσεων στην ουρά αναμονής ($k=1-70$), έτσι ώστε να δούμε πως θα επηρεάσουν οι διαφορετικές τιμές του k τα μεγέθη του QoS. Η υλοποίηση έγινε με την επέκταση 6 (Κώδικας 28) και τη συνάρτηση `run_for_different_k()`. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή `kDIF` και ο πίνακας `kDIF_values` στον οποίο θα αποθηκεύονται οι εν λόγω τιμές. Με τον κώδικα 6A και τη συνάρτηση `plot_combined_results1()`, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση για δύο διαφορετικές τιμές της δεσμευμένης χωρητικότητας ($t=8$ και $t=16$). Η συνολική υλοποίηση καθώς και η κλήση των συναρτήσεων εμφανίζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 28 (βλ. Παράρτημα Α). Μετά την κλήση του Κώδικα 28 με χαρακτηριστικά μεγέθη $C=80$, $k=0-70$, $t=8$ και $t=16$, $ln=20$, $lh=30$, $ms=mm=0,25$, $xs=xm=1$, έχουμε τη γραφική παράσταση του Σχήματος 28.



Σχήμα 28 - Αναπαράσταση των μεγεθών B_{new} , B_h , και U_c για μεταβλητό ρυθμό των θέσεων στην ουρά αναμονής $k=0-70$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CP1Q με $C=80, t=8 \text{ \& } t=16$ (μόνο σε SP).

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 28

Η αύξηση της τιμής του πλήθους των k -θέσεων που αποτελούν την ουρά του συστήματος αυξάνει την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_{new} . Η τιμή για $k=0$ και $t=8$, ξεκινάει από $B_{new}=0,562$ και καταλήγει για $k=70$ σε $B_{new}=0,761$. Αντίστοιχα για τη δεύτερη καμπύλη, που αφορά δεσμευμένη χωρητικότητα $t=16$, η τιμή για $k=0$ ξεκινάει από $B_{new}=0,571$ και καταλήγει για $k=70$ σε $B_{new}=0,762$. Η αύξηση της πιθανότητας απόρριψης νέων κλήσεων επηρεάζεται σε κάποιο βαθμό από την αύξηση των θέσεων στην ουρά οι οποίες εξυπηρετούν αποκλειστικά τις κλήσεις μεταπομπής. Επίσης με την αύξηση της δεσμευμένης χωρητικότητας από $t=8$ σε $t=16$ δεν υπάρχει σημαντική διαφορά στην αύξηση της B_{new} , οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται σε αντίθεση με το μοντέλο CPQ στο οποίο οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν διαφορετικό ρυθμό αύξησης (Σχήμα 23). Μάλιστα στην περίπτωση της CPQ οι αντίστοιχες τιμές B_{new} είναι υψηλότερες από το μοντέλο CP1Q. Η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι πλέον έχουν «διατεθεί» επιπλέον θέσεις BU στην MP για τις νέες κλήσεις (από $C - t$ έως C).

Όσον αφορά την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων B_h , όσο αυξάνονται οι θέσεις στην ουρά αναμονής μειώνεται και το B_h . Ενδεικτικά, η τιμή για $k=0$ και $t=8$, ξεκινάει από $B_h=0,4539$ και καταλήγει για $k=70$ σε $B_h=0,1166$. Παρατηρούμε μια πολύ μεγάλη και σημαντική μείωση στην πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής η οποία προήλθε από μεγάλη αύξηση των θέσεων στην ουρά. Με $k=70$ οι πιθανότητες να χαθεί

κάποια κλήση μεταπομπής είναι πολύ μικρή ($B_h=0,1166$) ενώ χωρίς θέσεις στην ουρά είναι περίπου 1 στις 2 η πιθανότητα απόρριψης ($B_h=0,4539$). Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι θέσεις στην ουρά αναμονής διατίθενται αποκλειστικά για κλήσεις μεταπομπής και με την αύξησή τους μειώνονται και οι πιθανότητες απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h .

- Στην αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_C , παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν πολύ μεγάλες μεταβολές στις τιμές όσο αυξάνονται οι θέσεις στην ουρά αναμονής. Για την καμπύλη με $t=8$ και $k=0$, η αξιοποίηση της χωρητικότητας ξεκινάει από $U_C=0,9676$ και καταλήγει για $k=70$ σε $U_C=0,9929$. Αντίστοιχα για την καμπύλη με $t=16$ και $k=0$, η αξιοποίηση της χωρητικότητας ξεκινάει από $U_C=0,9666$ και καταλήγει για $k=70$ σε $U_C=0,9926$. Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε εδώ είναι η αυξημένη αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος που αφορά και το $t=8$ αλλά και το $t=16$ (οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται). Στο μοντέλο CP1Q έχουμε μία σημαντική αύξηση της αξιοποίησης της χωρητικότητας η οποία φθάνει και το $U_C=0,992$ σε αντίθεση με το μοντέλο CPQ στο οποίο η μέγιστή τιμή του είναι $U_C=0,953$ (Σχήμα 23). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πλέον στο μοντέλο CP1Q στη φάση MP δεν έχουμε πλέον δεσμευμένες θέσεις (t) οι οποίες στο CPQ υπήρχαν και έμεναν αναξιοποίητες.

3. Επίλυση μοντέλων με ψευδοτυχαία κίνηση

3.1. Γενική περιγραφή μοντέλων με ψευδοτυχαία κίνηση (Quasi-Random Traffic)

Στο κεφάλαιο 2, τα μοντέλα που μελετήθηκαν αφορούσαν αφίξεις κλήσεων που ακολουθούσαν την κατανομή Poisson η οποία διέπεται από κάποιους κανόνες-παραδοχές. Στην κατανομή Poisson θεωρούμε ότι οι πηγές που παράγουν την τηλεπικοινωνιακή κίνηση είναι άπειρες ως εκ τούτου όσο το σύστημά μας είναι σε λειτουργία θα μπορούμε να έχουμε θεωρητικά και άπειρες κλήσεις, είτε αυτές είναι νέες κλήσεις στο σύστημα, είτε κλήσεις μεταπομπής. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθούν συστήματα τα οποία δεν ακολουθούν οι αφίξεις την κατανομή Poisson και δεν είναι άπειρες. Η τηλεπικοινωνιακή κίνηση δημιουργείται από πεπερασμένο αριθμό πηγών (χρηστών) και χαρακτηρίζεται ως ψευδοτυχαία κίνηση (quasi-random traffic), (Moscholios & Logothetis, 2019). Ένα τέτοιο σύστημα είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα του δικού μας παραδείγματος, δηλαδή ενός κινούμενου οχήματος (π.χ. λεωφορείου) με A.P. το οποίο εξυπηρετεί τους (πεπερασμένου αριθμού) επιβάτες-χρήστες. Το εν λόγω μοντέλο αναπτύχθηκε, για την απλή περίπτωση ενός συστήματος απωλειών χωρητικότητας C BU, από τον Tore Olaus Engset (1865-1943), Νορβηγό μαθηματικό και μηχανικό. Αυτό το τηλεπικοινωνιακό μοντέλο κίνησης βασίζεται στην κατανομή Engset η οποία, σε αντίθεση με την κλασική θεωρία απωλειών, λαμβάνει υπόψη τον πεπερασμένο αριθμό πηγών (χρηστών) και τη δυναμική τους κατάσταση. Συγκεκριμένα, οι ανενεργές πηγές μπορούν να δημιουργήσουν νέα κίνηση, ενώ οι ενεργές πηγές, που βρίσκονται υπό εξυπηρέτηση στο σύστημα, δεν μπορούν να δημιουργήσουν επιπλέον κίνηση.

3.2. Βασικές παράμετροι – χαρακτηριστικά συστήματος

Τα βασικά χαρακτηριστικά των προς διερεύνηση συστημάτων στο κεφάλαιο 3 είναι:

C – Χωρητικότητα συστήματος. Δηλαδή το πλήθος των θέσεων (BU) που μπορεί να εξυπηρετούν μία κλήση. Όπως είπαμε έχει γίνει η παραδοχή ότι κάθε κλήση απαιτεί για να εξυπηρετηθεί ακριβώς μία BU που αντιστοιχεί σε έναν εξυπηρετητή (server) του συστήματος.

n_{new}, n_h – Πλήθος κλήσεων που εξυπηρετούνται στο σύστημα. Με το n_{new} αναφέρονται οι νέες κλήσεις που εξυπηρετούνται στο σύστημα. Με το n_h αναφέρονται οι κλήσεις μεταπομπής που εξυπηρετούνται στο σύστημα. Αν n οι συνολικές κλήσεις που εξυπηρετούνται στο σύστημα μας τότε θα ισχύει ότι $n = n_{new} + n_h \leq C$.

N_{new} – Πλήθος των πηγών που δημιουργούν νέες κλήσεις στο σύστημα. Δηλαδή ο συνολικός αριθμός των χρηστών οι οποίοι μπορεί να παράξουν κάποια νέα κλήση στο τηλεπικοινωνιακό σύστημα η οποία «ζητά» να εξυπηρετηθεί.

N_h – Πλήθος των πηγών που δημιουργούν κλήσεις μεταπομπής στο σύστημα. Δηλαδή ο συνολικός αριθμός των χρηστών οι οποίοι μπορεί να δημιουργήσουν μία κλήση μεταπομπής στο τηλεπικοινωνιακό σύστημα η οποία «ζητά» να εξυπηρετηθεί.

$N - n$ – Πλήθος των πηγών οι οποίες δεν εξυπηρετούνται. Δηλαδή ο αριθμός των πηγών που μπορεί να δημιουργήσουν νέο τηλεπικοινωνιακό φορτίο στο σύστημα. Αν αναφερόμαστε σε πηγές που δημιουργούν νέες κλήσεις θα τοποθετηθεί ο δείκτης new δηλαδή θα γίνει $N_{new} - n_{new}$ και αντίστοιχα αν αναφερόμαστε σε πηγές που δημιουργούν κλήσεις μεταπομπής θα έχουμε $N_h - n_h$. Ο αριθμός των πηγών είναι πεπερασμένος.

ν – Ρυθμός (σταθερός) άφιξης των κλήσεων στο σύστημα. Δηλαδή ο ρυθμός των κλήσεων που μπορεί να δημιουργηθεί από μη εξυπηρετούμενες πηγές ($N - n$). Αν αναφερόμαστε σε ρυθμό νέων κλήσεων θα τοποθετηθεί ο δείκτης new δηλαδή θα γίνει ν_{new} και αντίστοιχα αν αναφερόμαστε σε ρυθμό κλήσεων μεταπομπής θα έχουμε ν_h .

μ_s – Ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων στην SP. Δηλαδή ο ρυθμός που εξυπηρετούνται οι κλήσεις που καταφθάνουν στην «είσοδο» του συστήματος όταν το όχημα είναι σε κατάσταση σταματημένο (SP). Οι κλήσεις μπορεί να είναι είτε νέες είτε μεταπομπής.

μ_m – Ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων στην MP. Δηλαδή ο ρυθμός που εξυπηρετούνται οι κλήσεις που καταφθάνουν στην «είσοδο» του συστήματος όταν το όχημα είναι σε κίνηση, δηλαδή στην MP. Οι κλήσεις που δημιουργούνται μπορεί να είναι μόνο νέες και όχι μεταπομπής.

θ_s^{-1} – Χρόνος παραμονής στην κατάσταση SP. Δηλαδή το χρονικό διάστημα που θα παραμείνει το όχημα σε κάποιο σταθμό τερματικό ή ενδιάμεσο (λ.χ. 1min) το οποίο εκφράζεται με τον χρόνο παραμονής στην κατάσταση SP.

θ_m^{-1} – Χρόνος παραμονής στην κατάσταση MP. Το χρονικό διάστημα που παραμένει το όχημα σε κίνηση, δηλαδή το χρονικό διάστημα από τον ένα σταθμό μέχρι τον επόμενο, το οποίο εκφράζεται με το χρόνο παραμονής στην κατάσταση MP.

t – Δεσμευμένη χωρητικότητα συστήματος. Δηλαδή το πλήθος των BU τα οποία δεσμεύονται προκειμένου να χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής.

Αφορά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται η πολιτική BR.

$C - t$ – Διαθέσιμη χωρητικότητα για όλες τις κλήσεις. Σε συνέχεια της προηγούμενης παραμέτρου t , το $C - t$ είναι το πλήθος των BU που απομένουν από το συνολικό C για να χρησιμοποιηθούν από όλες τις κλήσεις δηλαδή νέες και μεταπομπής (π.χ. αν $C=50BU$, $t=5BU$ και $C - t=45BU$). Οι θέσεις από το $C - t + 1$ έως C είναι για αποκλειστική εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής. Αφορά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται η πολιτική BR.

k – Πλήθος θέσεων στην ουρά του συστήματος. Αφορά συστήματα στα οποία εφαρμόζεται η πολιτική με ύπαρξη ουράς αναμονής. Δηλαδή πέραν των διαθέσιμων θέσεων BU που εκφράζονται από τη χωρητικότητα του συστήματος C ουσιαστικά υπάρχει μία επαύξηση της χωρητικότητας C κατά k θέσεις. Η νέα χωρητικότητα του συστήματος είναι πλέον $C + k$ θέσεις. Οι κλήσεις οι οποίες βρίσκονται στις k θέσεις της ουράς αναμένουν να εξυπηρετηθούν.

3.3. Βασικά μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος (QoS).

Τα βασικά μεγέθη τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο κεφάλαιο 3 προκειμένου να χαρακτηριστεί η ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος ή για να συγκριθούν δύο συστήματα μεταξύ τους είναι:

$B_{new(TCPr)}$ – Πιθανότητα συμφόρησης νέων κλήσεων στο χρόνο (Time Congestion Probability). Είναι η πιθανότητα μία νέα κλήση που θα αφιχθεί στο σύστημα, από κάποια διαθέσιμη πηγή (N_{new}), να προκαλέσει συμφόρηση στο σύστημα. Δηλαδή οι κλήσεις που θα είναι υπό επεξεργασία στο σύστημα θα είναι $n_{new} + n_h = C$. Είναι προφανές ότι δεν μπορεί να συμβεί συμφόρηση εάν ισχύει ότι $N_{new} + N_h < C$.

$B_h(TCPr)$ – Πιθανότητα συμφόρησης κλήσεων μεταπομπής στο χρόνο (Time Congestion Probability). Είναι η πιθανότητα μία κλήση μεταπομπής που θα αφιχθεί στο σύστημα, από κάποια διαθέσιμη πηγή (N_h), να προκαλέσει συμφόρηση στο σύστημα. Δηλαδή οι κλήσεις που θα είναι υπό επεξεργασία στο σύστημα θα είναι $n_{new} + n_h = C$. Είναι προφανές ότι δεν μπορεί να συμβεί συμφόρηση εάν ισχύει ότι $N_{new} + N_h < C$.

$B_{new(CBP)}$ – Πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων από το σύστημα (Call Blocking Probability). Είναι η πιθανότητα μία νέα κλήση που θα αφιχθεί, από κάποια διαθέσιμη πηγή (n_{new}), να μην μπορεί να εξυπηρετηθεί. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν τη στιγμή που θα αφιχθεί κάποια νέα κλήση όλες οι BU να είναι κατειλημμένες και να μην υπάρχει διαθέσιμος server. Στα συστήματα με ουρά αναμονής, εάν δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις ούτε στην ουρά, οι κλήσεις θα απορριφθούν από το σύστημα και θα χαθούν.

$B_h(CBP)$ – Πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής από το σύστημα (Call Blocking Probability). Είναι η πιθανότητα μία κλήση μεταπομπής που θα αφιχθεί στο σύστημα, από κάποια διαθέσιμη πηγή (N_h), να μην μπορεί να εξυπηρετηθεί. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν τη στιγμή που θα αφιχθεί κάποια κλήση μεταπομπής όλες οι BU να είναι κατειλημμένες και να μην υπάρχει διαθέσιμος server. Στα συστήματα με ουρά αναμονής, εάν δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις ούτε στην ουρά, οι κλήσεις θα απορριφθούν από το σύστημα (Blocking) και θα χαθούν.

U – Αναμενόμενο πλήθος (μέση τιμή) κατειλημμένων BU. Είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων απόρριψης σε SP και MP. Η τιμή U σε συστήματα με ουρές είναι $U = U_1 + U_2$, όπου το U_1 αφορά το τμήμα εκείνο του συστήματος που είναι εκτός ουράς και το U_2 το τμήμα του συστήματος που είναι εντός της ουράς.

N – Το πλήθος (μέση τιμή) των κλήσεων μεταπομπής που βρίσκονται στην ουρά. Είναι το άθροισμα των γινομένων της πιθανότητας των θέσεων στην ουρά $P(i, n)$, επί τον αριθμό των θέσεων που καταλαμβάνουν στην ουρά $(n - C)$. Οι θέσεις που αναφέρονται στην ουρά είναι για τιμές του n από $C + 1, \dots, C + k$. Το άθροισμα αφορά όλες τις πιθανότητες, είτε σε SP, είτε σε MP.

p_s – Πιθανότητα πρόσβασης κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή του συστήματος. Η εν λόγω πιθανότητα p_s , αφορά συστήματα στα οποία υπάρχει δέσμευση εύρους ζώνης δηλαδή, $t > 0$. Η πιθανότητα πρόσβασης των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή είναι ίση με p_s . Αν έχουμε $p_s = 0$ (μοντέλο Strict BR), τότε η δεσμευμένη περιοχή t είναι για αποκλειστική χρήση από τις κλήσεις μεταπομπής. Αν $p_s = 1$ τότε θα έχουμε την πλήρη πρόσβαση και των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή (μοντέλο NP/CS).

3.4. Γενική περιγραφή μοντέλου NP/CS με πεπερασμένο πλήθος πηγών

Το πρώτο μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο NP/CS ή Non Priority/Complete Sharing (Vlasakis M., et al. 2023) με πεπερασμένο πλήθος πηγών.

Είναι η περίπτωση στην οποία δεν υπάρχει καμία προτεραιότητα σε κλήσεις, δηλαδή όποια κλήση έρθει θα παραληφθεί από την ελεύθερη BU και θα εξυπηρετηθεί.

Έχουμε κάνει την παραδοχή ότι κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί ακριβώς έναν εξυπηρετητή ο οποίος εξυπηρετεί για χρόνο μ_s^{-1} αν πρόκειται για την SP ή χρόνο μ_m^{-1} αν πρόκειται για την MP. Σε αυτό το χρονικό διάστημα ο εν λόγω εξυπηρετητής είναι μη διαθέσιμος για κάποια άλλη κλήση. Αν όλοι οι διαθέσιμοι εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι και έρθει μία νέα κλήση αυτή θα απορριφθεί (blocked) από το σύστημα.

Στο σύστημα NP/CS με πεπερασμένο πλήθος πηγών, όπως και στα προηγούμενα μοντέλα του Κεφαλαίου 2, ισχύουν οι δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP), ενώ κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί τη διάθεση μίας BU. Η διαφορά είναι ότι οι αφίξεις κλήσεων όπως και οι πηγές του συστήματος είναι πεπερασμένες.

3.4.1. Αναπαράσταση μοντέλου NP/CS με πεπερασμένο πλήθος πηγών – Μαρκοβιανή αλυσίδα

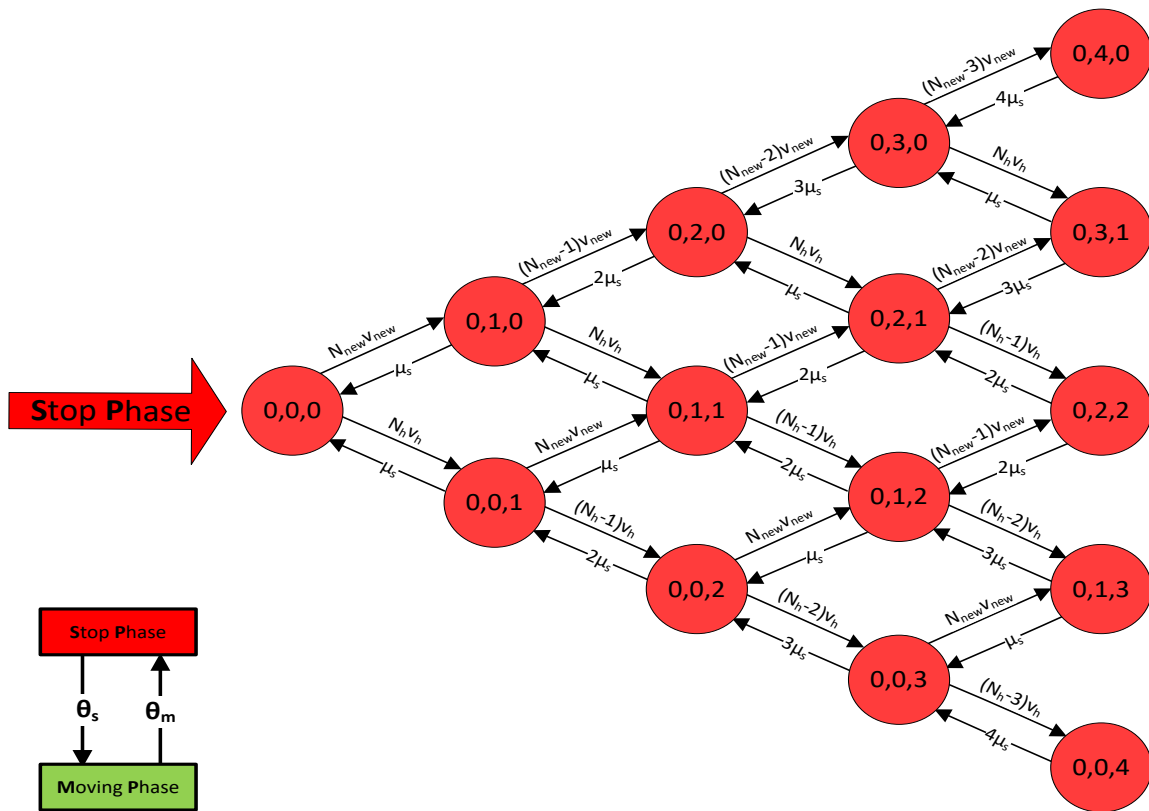
Η περιγραφή του συνόλου των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί-υλοποιηθεί με μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Η κάθε κατάσταση θα χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους (i, n_{new}, n_h) , το $i \in \{0,1\}$ και περιγράφει αν βρισκόμαστε στην SP ($i=0$) ή την MP ($i=1$). Τα n_{new} & n_h μας δίνουν το πλήθος των εξυπηρετούμενων νέων κλήσεων (n_{new}) και κλήσεων μεταπομπής (n_h) αντίστοιχα και παίρνουν τιμές από $0 \leq n_{new} + n_h \leq C$ σε κάθε κατάσταση. Το πλήθος των πιθανών καταστάσεων για οποιοδήποτε σύστημα με χωρητικότητα C προκύπτει από τον τύπο (3.1). Όπου $i=0$ και $i=1$ οι δύο καταστάσεις του συστήματος SP και MP αντίστοιχα και n είναι όλες τις δυνατές τιμές από $0 < n \leq C$:

$$\text{Πλήθος Καταστάσεων} = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{C+1} n \quad (3.1)$$

Έστω ένα σύστημα για ανάλυση, το οποίο θα έχει χωρητικότητα $C=4$. Το σύστημα αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί, με Μαρκοβιανή αλυσίδα, της οποίας οι δυνατές καταστάσεις προσδιορίζονται από τον τύπο (3.1):

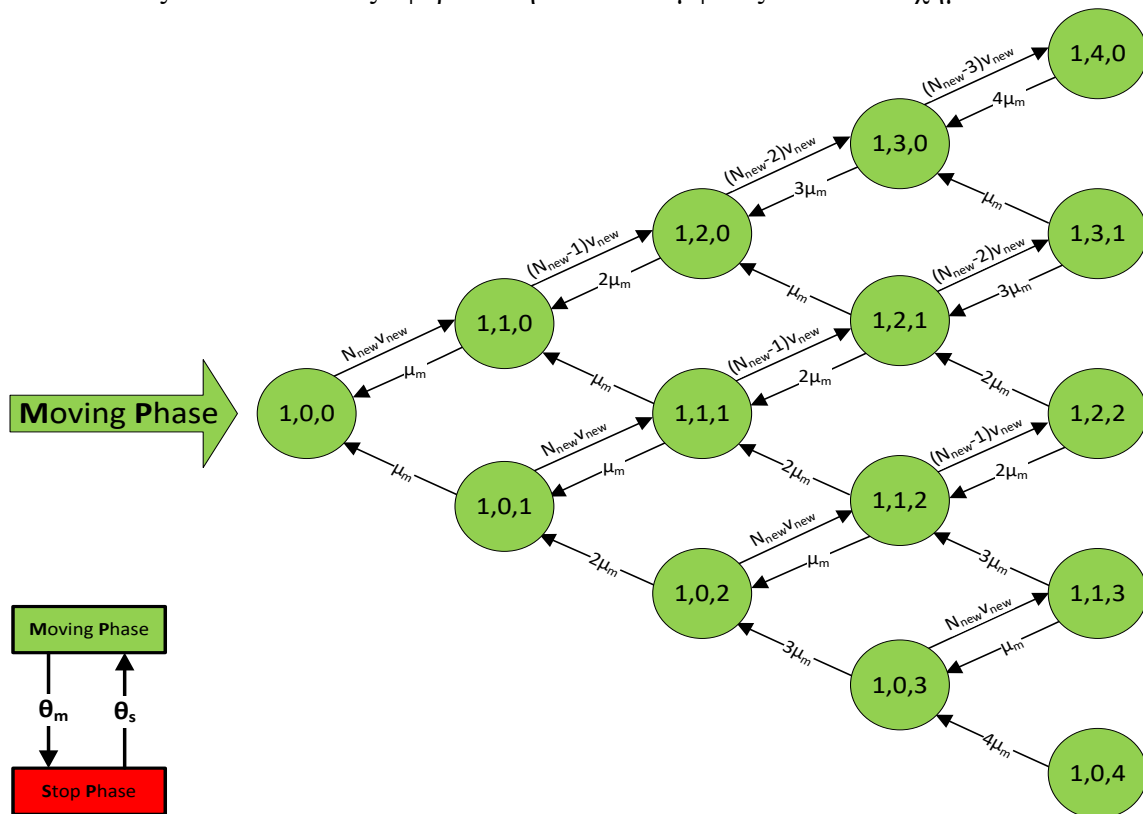
$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{C+1} n = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{4+1} n = \sum_{i=0}^1 (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \sum_{i=0}^1 (15) = 15 + 15 = 30 \text{ καταστάσεις}$$

Οι μισές καταστάσεις (15) αφορούν την SP και εμφανίζονται στο Σχήμα 29.



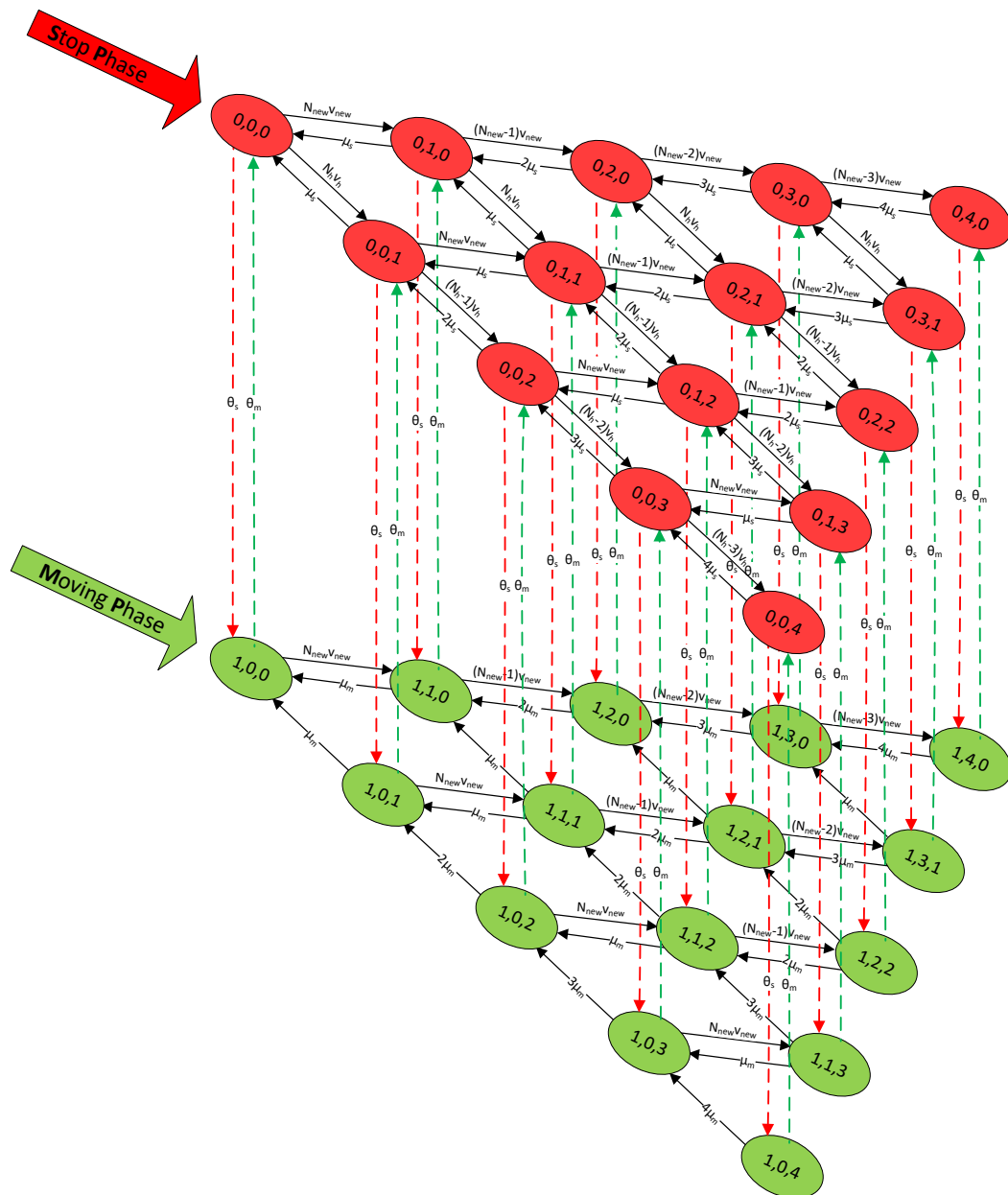
Σχήμα 29 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS στην SP, με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$.

Οι υπόλοιπες 15 καταστάσεις αφορούν την MP και εμφανίζονται στο Σχήμα 30.



Σχήμα 30 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS στην MP, με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$.

Η αναπαράσταση των Μαρκοβιανών αλυσίδων στην ψευδοτυχαία κίνηση είναι σημαντικά πιο πολύπλοκη σε σχέση με την αντίστοιχη των δισδιάστατων Μαρκοβιανών αλυσίδων, όπως αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Λόγω αυτής της πολυπλοκότητας, επιλέχθηκε να γίνει ξεχωριστή αναπαράσταση της SP και MP, ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερη ευκρίνεια στα σχήματα των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Παρόλα αυτά, παραθέτω στο Σχήμα 31 την συγχώνευση των Μαρκοβιανών αλυσίδων που απεικονίζονται στα Σχήματα 29 και 30. Στις επόμενες αναλύσεις, οι SP και MP θα παρουσιάζονται χωριστά με σκοπό να παραμείνουν πιο ευδιάκριτα τα σχήματα και οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων.



Σχήμα 31 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS, με συγχώνευση των Σχημάτων 29 (SP) και 30 (MP).

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα των σχημάτων 29 & 30:

- Στη φάση ακίνητου οχήματος -SP- βλέπουμε ότι μπορεί να υπάρχουν νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής οι οποίες δημιουργούνται αντίστοιχα, είτε από πηγές νέων κλήσεων (N_{new}), είτε από πηγές κλήσεων μεταπομπής (N_h). Στη φάση του κινούμενου οχήματος -MP- βλέπουμε ότι υπάρχουν μόνο νέες κλήσεις δηλαδή κλήσεις οι οποίες δημιουργούνται από πηγές νέων κλήσεων (N_{new}). Αυτό συμβαίνει διότι στη φάση που το όχημα κινείται δεν μπορούν να δημιουργηθούν κλήσεις μεταπομπής.
- Για να μεταβούμε από μία κατάσταση της SP σε μία κατάσταση στην MP π.χ. από την (0,2,2) στην αντίστοιχη κατάσταση (1,2,2) απαιτείται μέσος χρόνος θ_s^{-1} ο οποίος είναι ο μέσος χρόνος τον οποίο το όχημα είναι σταματημένο και είναι εκθετικά κατανομημένος. Αντίστοιχα για να μεταβούμε από μία κατάσταση της MP σε μία κατάσταση SP π.χ. από την (1,2,2) στην αντίστοιχη κατάσταση (0,2,2) απαιτείται μέσος χρόνος θ_m^{-1} .
- Έχουν υλοποιηθεί όλες οι δυνατές καταστάσεις με τις αντίστοιχες μεταβάσεις τους. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μεταβούμε από την κατάσταση (1,1,0) στην (1,3,0) χωρίς προηγουμένως να έχει μεσολαβήσει η κατάσταση (1,2,0). Έχουμε κάνει την παραδοχή ότι κάθε χρονική στιγμή δεν μπορεί να εισέλθουν ή να αποχωρήσουν από το σύστημα δύο ή περισσότερες κλήσεις και οι χρονικές στιγμές είναι απόλυτα διακριτές.
- Έστω ότι βρισκόμαστε στην SP στην κατάσταση (0,2,0) οι δυνατές επιλογές μετάβασης είναι:
 - i. Να έρθει μία νέα κλήση και θα μεταβούμε στην κατάσταση (0,3,0). Η νέα κλήση θα έρθει με ρυθμό $(N_{new} - 2) \cdot v_{new}$. Οι διαθέσιμες πηγές που μπορούν να μας «γεννήσουν» νέες κλήσεις είναι όλες οι διαθέσιμες πηγές μείον αυτές που ήδη έχουν σε εξυπηρέτηση κάποια κλήση ($N_{new} - 2$). Αυτές οι διαθέσιμες πηγές επί τον σταθερό ρυθμό άφιξης των νέων κλήσεων v_{new} , μας δίνουν τη μέση τιμή αφίξεων από όλες τις διαθέσιμες πηγές νέων κλήσεων.
 - ii. Επόμενη περίπτωση είναι να εξυπηρετηθεί μία νέα κλήση και να μεταβούμε στην κατάσταση (0,1,0). Η νέα κλήση θα εξυπηρετηθεί με μέσο ρυθμό $2\mu_s$ διότι εκείνη τη στιγμή βρίσκονται σε εξυπηρέτηση τρεις νέες κλήσεις.
 - iii. Επόμενη περίπτωση είναι να έρθει μία κλήση μεταπομπής και να μεταβούμε στην κατάσταση (0,2,1). Η κλήση μεταπομπής θα έρθει με μέσο ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής $N_h \cdot v_h$. Οι διαθέσιμες πηγές εδώ είναι το σύνολο των

πηγών N_h διότι δεν υπάρχει κάποια κλήση μεταπομπής σε εξυπηρέτηση $(0,2,0)$ άρα όλες οι πηγές είναι διαθέσιμες για την «γέννηση» νέων κλήσεων μεταπομπής. Αυτές οι διαθέσιμες πηγές θα πολλαπλασιαστούν επί τον σταθερό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής ν_h .

- iv. Τελευταία περίπτωση μετάβασης, από τη δεδομένη κατάσταση $(0,2,0)$, είναι η μετάβαση στην $(1,2,0)$ δηλαδή να εκκινήσει το όχημα $(SP \rightarrow MP)$ με μέσο χρόνο παραμονής στην SP ίσο με θ_s^{-1} . Εδώ να θυμίσουμε ότι επειδή στην MP δεν μπορούν να δημιουργηθούν κλήσεις μεταπομπής, ο μόνος τρόπος να βρεθούμε σε κάποιες καταστάσεις της (όπως λ.χ. $(1,0,4)$) είναι να είμαστε στην αντίστοιχη κατάσταση $(0,0,4)$ της SP και το όχημα να ξεκινήσει. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να εξυπηρετηθεί μία κλήση μεταπομπής λ.χ. της κατάστασης $(1,0,5)$ και να μεταβούμε στην $(1,0,4)$.

■ Πάντα το εκάστοτε σύστημα μπορεί να βρίσκεται χωρίς κλήσεις δηλαδή να βρίσκεται στις καταστάσεις $(0,0,0)$ ή $(1,0,0)$, είτε το όχημα είναι σταματημένο, είτε είναι σε κίνηση. Αυτές οι καταστάσεις – σίγουρα είναι οι αρχικές καταστάσεις όταν θα εκκινήσει η διαδικασία – αλλά είναι επίσης καταστάσεις στις οποίες το σύστημα μπορεί να βρεθεί ανά πάσα στιγμή με κάποια πιθανότητα η οποία περιγράφεται ως $P(0,0,0)$ ή $P(1,0,0)$.

■ Να παρατηρήσουμε βέβαια ότι $\mu_s = \mu_m$ αφού πρόκειται για το ίδιο σύστημα με την ίδια επεξεργαστική ισχύ και στις δύο φάσεις. Επομένως, ο συγκεκριμένος συμβολισμός υπάρχει προκειμένου να διαχωρίζεται σε ποια φάση αναφερόμαστε.

■ Έστω ότι βρισκόμαστε στην SP και στην κατάσταση $(0,3,0)$ δηλαδή έχουμε σε επεξεργασία στο σύστημά μας τρεις κλήσεις, άρα τη δεδομένη χρονική στιγμή θα έχουμε σε λειτουργία τρεις επεξεργαστές με μέσο ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu_s + \mu_s + \mu_s = 3\mu_s$. Για να μεταβούμε από την κατάσταση $(0,3,0)$ στην $(0,2,0)$ θα πρέπει να έχει εξυπηρετηθεί η μία από τις τρεις κλήσεις και άρα θα έχουμε μεταβεί στη $(0,2,0)$ σε χρόνο μ_s^{-1} , σε αυτό το σημείο θα έχουμε 2 επεξεργαστές σε λειτουργία άρα $\mu_s + \mu_s = 2\mu_s$.

3.4.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών

Από τις Μαρκοβιανές αλυσίδες στα Σχήματα 29 και 30 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής

ισορροπίας (Λογοθέτης Μ. 2018 σ. 61). Για να υπολογίσουμε τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας για κάθε κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας, εξισώνουμε τον ρυθμό εξόδου (rate out) της κατάστασης (πολλαπλασιασμένο με την πιθανότητα της) με το άθροισμα των ρυθμών εισόδου (rate in) από όλες τις γειτονικές καταστάσεις (πολλαπλασιασμένο με τις αντίστοιχες πιθανότητές τους). Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση (0,0,0):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{SP(0,0,0)} &\rightarrow P(0,0,0)(N_{new}v_{new} + N_h v_h + \theta_s) = P(0,1,0)\mu_s + P(0,0,1)\mu_s + P(1,0,0)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,1,0)} &\rightarrow P(0,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + N_h v_h + \mu_s + \theta_s) = P(0,0,0)N_{new}v_{new} + P(0,2,0)2\mu_s + \\
 &P(0,1,1)\mu_s + P(1,1,0)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,2,0)} &\rightarrow P(0,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + N_h v_h + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
 &P(0,3,0)3\mu_s + P(0,2,1)\mu_s + P(1,2,0)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,3,0)} &\rightarrow P(0,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + N_h v_h + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,2,0)(N_{new} - 2)v_{new} + \\
 &P(0,4,0)4\mu_s + P(0,3,1)\mu_s + P(1,3,0)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,4,0)} &\rightarrow P(0,4,0)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,3,0)(N_{new} - 3)v_{new} + P(1,4,0)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,0,1)} &\rightarrow P(0,0,1)(N_{new}v_{new} + (N_h - 1)v_h + \mu_s + \theta_s) = P(0,0,0)N_h v_h + P(0,0,2)2\mu_s + \\
 &P(0,1,1)\mu_s + P(1,0,1)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,1,1)} &\rightarrow P(0,1,1)((N_{new} - 1)v_{new} + (N_h - 1)v_h + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,0,1)N_{new}v_{new} + \\
 &P(0,1,0)N_h v_h + P(0,2,1)2\mu_s + P(0,1,2)2\mu_s + P(1,1,1)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,2,1)} &\rightarrow P(0,2,1)((N_{new} - 2)v_{new} + (N_h - 1)v_h + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,1,1)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
 &P(0,2,0)N_h v_h + P(0,3,1)3\mu_s + P(0,2,2)2\mu_s + P(1,2,1)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,3,1)} &\rightarrow P(0,3,1)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,2,1)(N_{new} - 2)v_{new} + P(0,3,0)N_h v_h + P(1,3,1)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,0,2)} &\rightarrow P(0,0,2)(N_{new}v_{new} + (N_h - 2)v_h + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,0,1)(N_h - 1)v_h + \\
 &P(0,0,3)3\mu_s + P(0,1,2)\mu_s + P(1,0,2)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,1,2)} &\rightarrow P(0,1,2)((N_{new} - 1)v_{new} + (N_h - 2)v_h + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,0,2)N_{new}v_{new} + \\
 &P(0,1,1)(N_h - 1)v_h + P(0,2,2)2\mu_s + P(0,1,3)3\mu_s + P(1,1,2)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,2,2)} &\rightarrow P(0,2,2)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,1,2)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,2,1)(N_h - 1)v_h + P(1,2,2)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,0,3)} &\rightarrow P(0,0,3)(N_{new}v_{new} + (N_h - 3)v_h + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,0,2)(N_h - 2)v_h + \\
 &P(0,0,4)4\mu_s + P(0,1,3)\mu_s + P(1,0,3)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,1,3)} &\rightarrow P(0,1,3)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,0,3)N_{new}v_{new} + P(0,1,2)(N_h - 2)v_h + P(1,1,3)\theta_m \\
 \mathbf{SP(0,0,4)} &\rightarrow P(0,0,4)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,0,3)(N_h - 3)v_h + P(1,0,4)\theta_m
 \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις στην MP:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{MP(1,0,0)} &\rightarrow P(1,0,0)(N_{new}v_{new} + \theta_m) = P(1,1,0)\mu_m + P(1,0,1)\mu_m + P(0,0,0)\theta_s \\
 \mathbf{MP(1,1,0)} &\rightarrow P(1,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + \mu_m + \theta_m) = P(1,0,0)N_{new}v_{new} + P(1,2,0)2\mu_m + \\
 &P(1,1,1)\mu_m + P(0,1,0)\theta_s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{MP(1,2,0)} &\rightarrow P(1,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,1,0)(N_{new}-1)v_{new} + \\
&P(1,3,0)3\mu_m + P(1,2,1)\mu_m + P(0,2,0)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,3,0)} &\rightarrow P(1,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,2,0)(N_{new}-2)v_{new} + \\
&P(1,4,0)4\mu_m + P(1,3,1)\mu_m + P(0,3,0)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,4,0)} &\rightarrow P(1,4,0)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,3,0)(N_{new}-3)v_{new} + P(0,4,0)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,0,1)} &\rightarrow P(1,0,1)(N_{new}v_{new} + \mu_m + \theta_m) = P(1,1,1)\mu_m + P(1,0,2)2\mu_m + P(0,0,1)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,1,1)} &\rightarrow P(1,1,1)((N_{new} - 1)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,0,1)N_{new}v_{new} + P(1,2,1)2\mu_m + \\
&P(1,1,2)2\mu_m + P(0,1,1)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,2,1)} &\rightarrow P(1,2,1)((N_{new} - 2)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,1,1)(N_{new}-1)v_{new} + \\
&P(1,3,1)3\mu_m + P(1,2,2)2\mu_m + P(0,2,1)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,3,1)} &\rightarrow P(1,3,1)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,2,1)(N_{new} - 2)v_{new} + P(0,3,1)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,0,2)} &\rightarrow P(1,0,2)(N_{new}v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,1,2)\mu_m + P(1,0,3)3\mu_m + P(0,0,2)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,1,2)} &\rightarrow P(1,1,2)((N_{new} - 1)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,0,2)N_{new}v_{new} + P(1,2,2)2\mu_m + \\
&P(1,1,3)3\mu_m + P(0,1,2)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,2,2)} &\rightarrow P(1,2,2)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,1,2)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,2,2)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,0,3)} &\rightarrow P(1,0,3)(N_{new}v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,1,3)\mu_m + P(1,0,4)4\mu_m + P(0,0,3)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,1,3)} &\rightarrow P(1,1,3)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,0,3)N_{new}v_{new} + P(0,1,3)\theta_s \\
\mathbf{MP(1,0,4)} &\rightarrow P(1,0,4)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,0,4)\theta_s
\end{aligned}$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=4, N_{new}=5, N_h=5, v_{new}=v_h=1, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbf{SP(0,0,0)} &\rightarrow P(0,0,0)(5 + 5 + 1) = P(0,1,0) + P(0,0,1) + P(1,0,0) => \\
&-11P(0,0,0) + P(0,1,0) + P(0,0,1) + P(1,0,0) = 0 \\
\mathbf{SP(0,1,0)} &\rightarrow P(0,1,0)(5 - 1) + 5 + 1 + 1) = P(0,0,0)5 + P(0,2,0)2 + P(0,1,1) + P(1,1,0) => \\
&-11P(0,1,0) + 5P(0,0,0) + 2P(0,2,0) + P(0,1,1) + P(1,1,0) = 0 \\
\mathbf{SP(0,2,0)} &\rightarrow P(0,2,0)(5 - 2) + 5 + 2 + 1) = P(0,1,0)(5 - 1) + P(0,3,0)3 + P(0,2,1) + \\
&P(1,2,0) => -11P(0,2,0) + 4P(0,1,0) + 3P(0,3,0) + P(0,2,1) + P(1,2,0) = 0 \\
\mathbf{SP(0,3,0)} &\rightarrow P(0,3,0)(5 - 3) + 5 + 3 + 1) = P(0,2,0)(5 - 2) + P(0,4,0)4 + P(0,3,1) + \\
&P(1,3,0) => -11P(0,3,0) + 3P(0,2,0) + 4P(0,4,0) + P(0,3,1) + P(1,3,0) = 0 \\
\mathbf{SP(0,4,0)} &\rightarrow P(0,4,0)(4 + 1) = P(0,3,0)(5 - 3) + P(1,4,0) => \\
&-5P(0,4,0) + 2P(0,3,0) + P(1,4,0) \\
\mathbf{SP(0,0,1)} &\rightarrow P(0,0,1)(5 + (5 - 1) + 1 + 1) = P(0,0,0)5 + P(0,0,2)2 + P(0,1,1) + P(1,0,1) => \\
&-11P(0,0,1) + 5P(0,0,0) + 2P(0,0,2) + P(0,1,1) + P(1,0,1) = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{SP(0,1,1)} \rightarrow P(0,1,1)(5-1) + (5-1) + 2 + 1 = P(0,0,1)5 + P(0,1,0)5 + P(0,2,1)2 + P(0,1,2)2 + P(1,1,1) = >$$

$$-11P(0,1,1) + 5P(0,0,1) + 5P(0,1,0) + 2P(0,2,1) + 2P(0,1,2) + P(1,1,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2,1)} \rightarrow P(0,2,1)(5-2) + (5-1) + 3 + 1 = P(0,1,1)(5-1) + P(0,2,0)5 + P(0,3,1)3 + P(0,2,2)2 + P(1,2,1) = >$$

$$-11P(0,2,1) + 4P(0,1,1) + 5P(0,2,0) + 3P(0,3,1) + 2P(0,2,2) + P(1,2,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,3,1)} \rightarrow P(0,3,1)(4+1) = P(0,2,1)(5-2) + P(0,3,0)5 + P(1,3,1) = >$$

$$-5P(0,3,1) + 3P(0,2,1) + 5P(0,3,0) + P(1,3,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,2)} \rightarrow P(0,0,2)(5 + (5-2) + 2 + 1) = P(0,0,1)(5-1) + P(0,0,3)3 + P(0,1,2) + P(1,0,2) = >$$

$$-11P(0,0,2) + 4P(0,0,1) + 3P(0,0,3) + P(0,1,2) + P(1,0,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1,2)} \rightarrow P(0,1,2)(5-1) + (5-2) + 3 + 1 = P(0,0,2)5 + P(0,1,1)(5-1) + P(0,2,2)2 + P(0,1,3)3 + P(1,1,2) = >$$

$$-11P(0,1,2) + 5P(0,0,2) + 4P(0,1,1) + 2P(0,2,2) + P(0,1,3)3 + P(1,1,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2,2)} \rightarrow P(0,2,2)(4+1) = P(0,1,2)(5-1) + P(0,2,1)(5-1) + P(1,2,2) = >$$

$$-5P(0,2,2) + 4P(0,1,2) + 4P(0,2,1) + P(1,2,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,3)} \rightarrow P(0,0,3)(5 + (5-3) + 3 + 1) = P(0,0,2)(5-2) + P(0,0,4)4 + P(0,1,3) + P(1,0,3) = >$$

$$-11P(0,0,3) + 3P(0,0,2) + 4P(0,0,4) + P(0,1,3) + P(1,0,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1,3)} \rightarrow P(0,1,3)(4+1) = P(0,0,3)5 + P(0,1,2)(5-2) + P(1,1,3) = >$$

$$-5P(0,1,3) + 5P(0,0,3) + 3P(0,1,2) + P(1,1,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,4)} \rightarrow P(0,0,4)(4+1) = P(0,0,3)(5-3) + P(1,0,4) = >$$

$$-5P(0,0,4) + 2P(0,0,3) + P(1,0,4) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις στην ΜΡ:

$$\mathbf{MP(1,0,0)} \rightarrow P(1,0,0)(5+1) = P(1,1,0) + P(1,0,1) + P(0,0,0) = >$$

$$-6P(1,0,0) + P(1,1,0) + P(1,0,1) + P(0,0,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,0)} \rightarrow P(1,1,0)(5-1) + 1 + 1 = P(1,0,0)5 + P(1,2,0)2 + P(1,1,1) + P(0,1,0) = >$$

$$-6P(1,1,0) + 5P(1,0,0) + 2P(1,2,0) + P(1,1,1) + P(0,1,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,0)} \rightarrow P(1,2,0)(5-2) + 2 + 1 = P(1,1,0)(5-1) + P(1,3,0)3 + P(1,2,1) + P(0,2,0) = >$$

$$-6P(1,2,0) + 4P(1,1,0) + 3P(1,3,0) + P(1,2,1) + P(0,2,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3,0)} \rightarrow P(1,3,0)(5-3) + 3 + 1 = P(1,2,0)(5-2) + P(1,4,0)4 + P(1,3,1) + P(0,3,0) = >$$

$$-6P(1,3,0) + 3P(1,2,0) + 4P(1,4,0) + P(1,3,1) + P(0,3,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,4,0)} \rightarrow P(1,4,0)(4+1) = P(1,3,0)(5-3) + P(0,4,0) = >$$

$$-5P(1,4,0) + 2P(1,3,0) + P(0,4,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,1)} \rightarrow P(1,0,1)(5+1+1) = P(1,1,1) + P(1,0,2)2 + P(0,0,1) = >$$

$$-7P(1,0,1) + P(1,1,1) + 2P(1,0,2) + P(0,0,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,1)} \rightarrow P(1,1,1)(5 - 1) + 2 + 1 = P(1,0,1)5 + P(1,2,1)2 + P(1,1,2)2 + P(0,1,1) \Rightarrow$$

$$-7P(1,1,1) + 5P(1,0,1) + 2P(1,2,1) + 2P(1,1,2) + P(0,1,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,1)} \rightarrow P(1,2,1)(5 - 2) + 3 + 1 = P(1,1,1)(5 - 1) + P(1,3,1)3 + P(1,2,2)2 +$$

$$P(0,2,1) \Rightarrow -7P(1,2,1) + 4P(1,1,1) + 3P(1,3,1) + 2P(1,2,2) + P(0,2,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3,1)} \rightarrow P(1,3,1)(4 + 1) = P(1,2,1)(5 - 2) + P(0,3,1) \Rightarrow$$

$$-5P(1,3,1) + 3P(1,2,1) + P(0,3,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,2)} \rightarrow P(1,0,2)(5 + 2 + 1) = P(1,1,2) + P(1,0,3)3 + P(0,0,2) \Rightarrow$$

$$-8P(1,0,2) + P(1,1,2) + 3P(1,0,3) + P(0,0,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,2)} \rightarrow P(1,1,2)(5 - 1) + 3 + 1 = P(1,0,2)5 + P(1,2,2)2 + P(1,1,3)3 + P(0,1,2) \Rightarrow$$

$$-8P(1,1,2) + 5P(1,0,2) + 2P(1,2,2) + 3P(1,1,3) + P(0,1,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,2)} \rightarrow P(1,2,2)(4 + 1) = P(1,1,2)(5 - 1) + P(0,2,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2,2) + 4P(1,1,2) + P(0,2,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,3)} \rightarrow P(1,0,3)(5 + 3 + 1) = P(1,1,3) + P(1,0,4)4 + P(0,0,3) \Rightarrow$$

$$-9P(1,0,3) + P(1,1,3) + 4P(1,0,4) + P(0,0,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,3)} \rightarrow P(1,1,3)(4 + 1) = P(1,0,3)5 + P(0,1,3) \Rightarrow$$

$$-5P(1,1,3) + 5P(1,0,3) + P(0,1,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,4)} \rightarrow P(1,0,4)(4 + 1) = P(0,0,4) \Rightarrow -5P(1,0,4) + P(0,0,4) = 0$$

Έχουν προκύψει 30 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 35. Από τον Πίνακα 35 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0,0), P(0,0,1), \dots, P(1,4,0)$.

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$SP(0,0,0)$	1	-11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,1)$	2	5	-11	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,0)$	3	5	0	-11	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,2)$	4	0	4	0	-11	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,1)$	5	0	5	5	0	-11	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,0)$	6	0	0	4	0	0	-11	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,3)$	7	0	0	0	3	0	0	-11	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,2)$	8	0	0	0	5	4	0	0	-11	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,1)$	9	0	0	0	0	4	5	0	0	-11	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$SP(0,3,0)$	10	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-11	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$SP(0,0,4)$	11	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$SP(0,1,3)$	12	0	0	0	0	0	0	5	3	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$SP(0,2,2)$	13	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$SP(0,3,1)$	14	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$SP(0,4,0)$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$MP(1,0,0)$	16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,1)$	17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,1,0)$	18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	-6	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,2)$	19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,1,1)$	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,2,0)$	21	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	-6	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,3)$	22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	4	1	0	0	0	0
$MP(1,1,2)$	23	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-8	0	0	0	3	2	0	0	0
$MP(1,2,1)$	24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-7	0	0	0	2	3	0	0
$MP(1,3,0)$	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	1	4	0
$MP(1,0,4)$	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0
$MP(1,1,3)$	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-5	0	0	0	0
$MP(1,2,2)$	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	-5	0	0	0
$MP(1,3,1)$	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	-5	0	0
$MP(1,4,0)$	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	-5

Πίνακας 35 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών.

[illegible]

$$P(0,0,0) + P(0,0,1) + \dots + P(0,4,0) + P(1,0,0) + P(1,0,1) \dots + P(1,4,0) = 1 \quad \text{¶} \quad \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^4 \sum_{n_h=0}^4 P(i, n_{new}, n_h) \cdot \mathbf{1}(n_{new} + n_h \leq 4)$$

[illegible]

Πίνακας 37 - Υλοποίηση συστήματος εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών (με κανονικοποίηση).

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrix.resish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 38 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	b
1	-11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	-11	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	0	-11	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	4	0	-11	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	5	5	0	-11	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	4	0	0	-11	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	3	0	0	-11	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	5	4	0	0	-11	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	4	5	0	0	-11	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-11	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	5	3	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	-6	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	-6	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	4	1	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-8	0	0	0	3	2	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-7	0	0	0	2	3	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	1	4	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-5	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	-5	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	-5	0	0
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 38 - Σύστημα εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών, είσοδος των δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους τριάντα άγνωστους x_1, x_2, \dots, x_{30} που είναι η επίλυση του συστήματος 30x30. Οι τριάντα αυτές τιμές αντιστοιχούν στις τριάντα πιθανότητες του συστήματος $P(0,0,0), P(0,0,1), \dots, P(1,4,0)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 31.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.0026338741877292744472$ $x_2 = 0.0066538470763315945641$ $x_3 = 0.013288484489690204798$ $x_4 = 0.0092009512440546012887$ $x_5 = 0.034263200621069716865$ $x_6 = 0.027275384406213185717$ $x_7 = 0.0072656241340340110714$ $x_8 = 0.048045938857195581304$ $x_9 = 0.072872570030397910604$ $x_{10} = 0.029441990847139345804$ $x_{11} = 0.0030273433891808379465$ $x_{12} = 0.038047513004697200938$ $x_{13} = 0.10448722176855942238$ $x_{14} = 0.084446079650914922085$ $x_{15} = 0.019049976292792190794$ $x_{16} = 0.0090302844990002192562$ $x_{17} = 0.0073578437918222487113$ $x_{18} = 0.044189989014449792437$ $x_{19} = 0.0047522641199766213539$ $x_{20} = 0.035346531226470903702$ $x_{21} = 0.085676747937768274836$ $x_{22} = 0.0021621251807897652022$ $x_{23} = 0.022330786173389073942$ $x_{24} = 0.065855863329168608881$ $x_{25} = 0.081389761277809561575$ $x_{26} = 0.00060546867783616758923$ $x_{27} = 0.0097716277817292053926$ $x_{28} = 0.038762073292423143634$ $x_{29} = 0.056402733927684149776$ $x_{30} = 0.036365899769682262331$	$P(0,0,0) = 0,0026338742$
	$P(0,0,1) = 0,0066538471$
	$P(0,1,0) = 0,0132884845$
	$P(0,0,2) = 0,0092009512$
	$P(0,1,1) = 0,0342632006$
	$P(0,2,0) = 0,0272753844$
	$P(0,0,3) = 0,0072656241$
	$P(0,1,2) = 0,0480459389$
	$P(0,2,1) = 0,0728725700$
	$P(0,3,0) = 0,0294419908$
	$P(0,0,4) = 0,0030273434$
	$P(0,1,3) = 0,0380475130$
	$P(0,2,2) = 0,1044872218$
	$P(0,3,1) = 0,0844460797$
	$P(0,4,0) = 0,0190499763$
	$P(1,0,0) = 0,0090302845$
	$P(1,0,1) = 0,0073578438$
	$P(1,1,0) = 0,0441899890$
	$P(1,0,2) = 0,0047522641$
	$P(1,1,1) = 0,0353465312$
	$P(1,2,0) = 0,0856767479$
	$P(1,0,3) = 0,0021621252$
	$P(1,1,2) = 0,0223307862$
	$P(1,2,1) = 0,0658558633$
	$P(1,3,0) = 0,0813897613$
	$P(1,0,4) = 0,0006054687$
	$P(1,1,3) = 0,0097716278$
	$P(1,2,2) = 0,0387620733$
	$P(1,3,1) = 0,0564027339$
	$P(1,4,0) = 0,0363658998$

Αποτελέσματα 31 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 30x30, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου NP/CS για C=4 και πεπερασμένο πλήθος πηγών.

3.4.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 35 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις τριάντα (30) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §3.4.2 και με βάση τον Πίνακα 35 μπορεί να συμπληρωθεί ο Πίνακας 39 που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$SP(0,0,0)$	1	α	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,1)$	2	ε	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,0)$	3	δ	0	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,2)$	4	0	ε	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,1)$	5	0	δ	ε	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,0)$	6	0	0	δ	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,3)$	7	0	0	0	ε	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,2)$	8	0	0	0	δ	ε	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,1)$	9	0	0	0	0	δ	ε	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0
$SP(0,3,0)$	10	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
$SP(0,0,4)$	11	0	0	0	0	0	0	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
$SP(0,1,3)$	12	0	0	0	0	0	0	δ	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
$SP(0,2,2)$	13	0	0	0	0	0	0	0	δ	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0
$SP(0,3,1)$	14	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0
$SP(0,4,0)$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
MP(1,0,0)	16	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MP(1,0,1)	17	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MP(1,1,0)	18	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MP(1,0,2)	19	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0
MP(1,1,1)	20	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0
MP(1,2,0)	21	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0
MP(1,0,3)	22	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0
MP(1,1,2)	23	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0
MP(1,2,1)	24	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0
MP(1,3,0)	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β
MP(1,0,4)	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	0	0	0
MP(1,1,3)	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0	0	0
MP(1,2,2)	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0	0
MP(1,3,1)	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0
MP(1,4,0)	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α

Πίνακας 39 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου NP/CS για $C=4$, πεπερασμένο πλήθος πηγών και γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §3.4.2:

$$SP(0,0,0) \rightarrow -P(0,0,0)(N_{new}v_{new} + N_h v_h + \theta_s) + P(0,1,0)\mu_s + P(0,0,1)\mu_s + P(1,0,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,0) \rightarrow -P(0,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + N_h v_h + \mu_s + \theta_s) + P(0,0,0)N_{new}v_{new} + P(0,2,0)2\mu_s + P(0,1,1)\mu_s + P(1,1,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2,0) \rightarrow -P(0,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + N_h v_h + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,3,0)3\mu_s + P(0,2,1)\mu_s + P(1,2,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3,0) \rightarrow -P(0,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + N_h v_h + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,2,0)(N_{new} - 2)v_{new} + P(0,4,0)4\mu_s + P(0,3,1)\mu_s + P(1,3,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,4,0) \rightarrow -P(0,4,0)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,3,0)(N_{new} - 3)v_{new} + P(1,4,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,0,1) \rightarrow -P(0,0,1)(N_{new}v_{new} + (N_h - 1)v_h + \mu_s + \theta_s) + P(0,0,0)N_h v_h + P(0,1,1)\mu_s + P(0,0,2)2\mu_s + P(1,0,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,1) \rightarrow -P(0,1,1)((N_{new} - 1)v_{new} + (N_h - 1)v_h + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,0,1)N_{new}v_{new} + P(0,1,0)N_h v_h + P(0,2,1)2\mu_s + P(0,1,2)2\mu_s + P(1,1,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2,1) \rightarrow -P(0,2,1)((N_{new} - 2)v_{new} + (N_h - 1)v_h + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,2,0)N_h v_h + P(0,1,1)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,3,1)3\mu_s + P(0,2,2)2\mu_s + P(1,2,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3,1) \rightarrow -P(0,3,1)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,2,1)(N_{new} - 2)v_{new} + P(0,3,0)N_h v_h + P(1,3,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,0,2) \rightarrow -P(0,0,2)(N_{new}v_{new} + (N_h - 2)v_h + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,0,1)(N_h - 1)v_h + P(0,1,2)\mu_s + P(0,0,3)3\mu_s + P(1,0,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,2) \rightarrow -P(0,1,2)((N_{new} - 1)v_{new} + (N_h - 2)v_h + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,0,2)N_{new}v_{new} + P(0,1,1)(N_h - 1)v_h + P(0,2,2)2\mu_s + P(0,1,3)3\mu_s + P(1,1,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2,2) \rightarrow -P(0,2,2)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,1,2)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,2,1)(N_h - 1)v_h + P(1,2,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,0,3) \rightarrow -P(0,0,3)(N_{new}v_{new} + (N_h - 3)v_h + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,0,2)(N_h - 2)v_h + P(0,1,3)\mu_s + P(0,0,4)4\mu_s + P(1,0,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,3) \rightarrow -P(0,1,3)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,0,3)N_{new}v_{new} + P(0,1,2)(N_h - 2)v_h + P(1,1,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,0,4) \rightarrow -P(0,0,4)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,0,3)(N_h - 3)v_h + P(1,0,4)\theta_m = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις στην MP:

$$MP(1,0,0) \rightarrow -P(1,0,0)(N_{new}v_{new} + \theta_m) + P(1,1,0)\mu_m + P(1,0,1)\mu_m + P(0,0,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,1,0) \rightarrow -P(1,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + \mu_m + \theta_m) + P(1,0,0)N_{new}v_{new} + P(1,2,0)2\mu_m + P(1,1,1)\mu_m + P(0,1,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,2,0) \rightarrow -P(1,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(1,3,0)3\mu_m + P(1,2,1)\mu_m + P(0,2,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,3,0) \rightarrow -P(1,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,2,0)(N_{new} - 2)v_{new} + P(1,4,0)4\mu_m + P(1,3,1)\mu_m + P(0,3,0)\theta_s = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{MP}(1,4,0) &\rightarrow -P(1,4,0)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,3,0)(N_{\text{new}} - 3)v_{\text{new}} + P(0,4,0)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,0,1) &\rightarrow -P(1,0,1)(N_{\text{new}}v_{\text{new}} + \mu_m + \theta_m) + P(1,1,1)\mu_m + P(1,0,2)2\mu_m + P(0,0,1)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,1,1) &\rightarrow -P(1,1,1)((N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,0,1)N_{\text{new}}v_{\text{new}} + P(1,2,1)2\mu_m + \\
 &P(1,1,2)2\mu_m + P(0,1,1)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,2,1) &\rightarrow -P(1,2,1)((N_{\text{new}} - 2)v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,1,1)(N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + \\
 &P(1,3,1)3\mu_m + P(1,2,2)2\mu_m + P(0,2,1)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,3,1) &\rightarrow -P(1,3,1)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,2,1)(N_{\text{new}} - 2)v_{\text{new}} + P(0,3,1)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,0,2) &\rightarrow -P(1,0,2)(N_{\text{new}}v_{\text{new}} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,1,2)\mu_m + P(1,0,3)3\mu_m + P(0,0,2)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,1,2) &\rightarrow -P(1,1,2)((N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,0,2)N_{\text{new}}v_{\text{new}} + P(1,2,2)2\mu_m + \\
 &P(1,1,3)3\mu_m + P(0,1,2)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,2,2) &\rightarrow -P(1,2,2)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,1,2)(N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + P(0,2,2)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,0,3) &\rightarrow -P(1,0,3)(N_{\text{new}}v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,1,3)\mu_m + P(1,0,4)4\mu_m + P(0,0,3)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,1,3) &\rightarrow -P(1,1,3)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,0,3)N_{\text{new}}v_{\text{new}} + P(0,1,3)\theta_s = 0 \\
 \text{MP}(1,0,4) &\rightarrow -P(1,0,4)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,0,4)\theta_s = 0
 \end{aligned}$$

$$a = \begin{cases} -((N_{\text{new}} - n_{\text{new}})v_{\text{new}} + (N_h - n_h)v_h + \mu_s(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C \\ -(\mu_s(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } n = C \\ -((N_{\text{new}} - n_{\text{new}})v_{\text{new}} + \mu_m(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \\ -(\mu_m(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_m), & i = 1 \text{ για } n = C \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \mu_s n_{\text{new}}, & i = 0 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 0 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \\ \mu_m n_{\text{new}}, & i = 1 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 1 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \mu_s n_h, & i = 0 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 0 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \\ \mu_m n_h, & i = 1 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 1 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} (N_{\text{new}} - n_{\text{new}} + 1)v_{\text{new}}, & i = 0, \quad 0 < n_{\text{new}} \leq C \\ (N_{\text{new}} - n_{\text{new}} + 1)v_{\text{new}}, & i = 1, \quad 0 \leq n_{\text{new}} \leq C \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (N_h - n_h + 1)v_h, & i = 0, \quad 0 < n_h \leq C \\ 0, & i = 1, \quad 0 < n_h \leq C \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 39 προκύπτει μια γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από τις παραπάνω δεκαέξι (16) συνολικά εξισώσεις και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C . Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε την υλοποίηση του Πίνακα 39 στη γλώσσα προγραμματισμού Python την οποία παρουσιάζουμε στο απόσπασμα του Κώδικα 29 (βλ. Παράρτημα Α).

Η υλοποίηση του πίνακα έγινε με τη συνάρτηση την οποία έχουμε ονομάσει `create_array()` και παίρνουμε ως είσοδο όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος C , N_{new} , N_h , v_{new} , v_h ,

ms, mm, xs και xm και επιστρέφει τον πίνακα για τις τιμές που δόθηκαν στα παραπάνω χαρακτηριστικά. Αν τρέξουμε τον Κώδικα 29, δηλαδή καλέσουμε τη συνάρτηση για τις τιμές του παραδείγματος, οι οποίες είναι:

$$C=4, N_{new}=5, N_h=5, v_{new}=1, v_h=1, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 32) στην έξοδο της συνάρτησης, τον οποίο και εκτυπώνουμε. Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τον Πίνακα 35, τον οποίο έχουμε υλοποιήσει στην §3.4.2.

Ο πίνακας A:

Αποτελέσματα 32 - Δημιουργία πίνακα A 30x30 μοντέλου NP/CS για C=4 και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).

Στη συνέχεια, παίρνουμε τη συνάρτηση `def create_array(C, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` τη χωρίζουμε σε δύο μέρη. Το πρώτο τμήμα κώδικα θα αφορά τη δημιουργία του Πίνακα A (Αποτελέσματα 32), ενώ το δεύτερο τμήμα του κώδικα θα επιλύει το

σύστημα εξισώσεων. Αρχικά παίρνουμε τον πίνακα A, τον οποίο έχουμε δημιουργήσει στο πρώτο τμήμα του κώδικα και θα αντικατασταθεί η τελευταία γραμμή του, θέτοντας όλα τα στοιχεία της ίσα με ένα (Αποτελέσματα 33). Στην πραγματικότητα, αυτή η ενέργεια αντικαθιστούμε την τελευταία εξίσωση με την εξίσωση κανονικοποίησης.

[illegible]

Αποτελέσματα 33 - Δημιουργία πίνακα A (30x30) μοντέλου NP/CS (για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new} = N_h = 5$) για C=4 μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής (κανονικοποίηση).

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα \mathbf{b} , προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του συστήματος. Με τη χρήση της συνάρτησης `np.linalg.solve(A, b)`, η οποία παρέχεται από τη βιβλιοθήκη `numpy` της Python, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 34). Τα αποτελέσματα τα αποθηκεύουμε σε έναν δισδιάστατο πίνακα $R[x,y]$, ώστε να μπορούμε να

τα εμφανίσουμε αλλά και να τα χρησιμοποιήσουμε αργότερα σε απαραίτητους υπολογισμούς.

Πιθανότητες-Αποτελέσματα:

```
-----
p(0, 0, 0) = 0.0026338742
p(0, 0, 1) = 0.0066538471
p(0, 1, 0) = 0.0132884845
p(0, 0, 2) = 0.0092009512
p(0, 1, 1) = 0.0342632006
p(0, 2, 0) = 0.0272753844
p(0, 0, 3) = 0.0072656241
p(0, 1, 2) = 0.0480459389
p(0, 2, 1) = 0.0728725700
p(0, 3, 0) = 0.0294419908
p(0, 0, 4) = 0.0030273434
p(0, 1, 3) = 0.0380475130
p(0, 2, 2) = 0.1044872218
p(0, 3, 1) = 0.0844460797
p(0, 4, 0) = 0.0190499763
p(1, 0, 0) = 0.0090302845
p(1, 0, 1) = 0.0073578438
p(1, 1, 0) = 0.0441899890
p(1, 0, 2) = 0.0047522641
p(1, 1, 1) = 0.0353465312
p(1, 2, 0) = 0.0856767479
p(1, 0, 3) = 0.0021621252
p(1, 1, 2) = 0.0223307862
p(1, 2, 1) = 0.0658558633
p(1, 3, 0) = 0.0813897613
p(1, 0, 4) = 0.0006054687
p(1, 1, 3) = 0.0097716278
p(1, 2, 2) = 0.0387620733
p(1, 3, 1) = 0.0564027339
p(1, 4, 0) = 0.0363658998
```

Αποτελέσματα 34 - Πιθανότητες μοντέλου NP/CS (30x30) για C=4.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 34 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §3.4.3 (Αποτελέσματα 31) με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων.

3.4.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) στο μοντέλο NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τους μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο παρόν κεφάλαιο θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Να επισημανθεί, ότι στην ψευδοτυχαία κίνηση (Moscholios & Logothetis, 2019), η Πιθανότητας Απόρριψης Κλήσεων διαφέρει από την Πιθανότητα Συμφόρησης στο Χρόνο, καθώς εδώ οι πηγές που δημιουργούν την τηλεπικοινωνιακή κίνηση είναι πεπερασμένες. Αν π.χ. έχουμε ένα σύστημα με χωρητικότητα $C=3$ και πηγές $N=3$, δεν θα έχουμε ποτέ απόρριψη κλήσεων διότι για κάθε πηγή που θα παράξει μία κλήση υπάρχει αντίστοιχα ένα BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτό δεν ισχύει στα συστήματα που ακολουθούν την κατανομή Poisson στην άφιξη των κλήσεων, διότι οι πηγές που παράγουν την κίνηση είναι θεωρητικά άπειρες. Τα μεγέθη που θα υπολογίσουμε είναι (Vlasakis et al., 2023):

- Η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο νέων κλήσεων $B_{new(TCPr)}$ υπολογίζεται ως το διπλό άθροισμα των πιθανοτήτων αρχικά μπορούμε να βρισκόμαστε σε οποιαδήποτε από τις δύο φάσεις (SP και MP) και είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων όταν οι κλήσεις που εξυπηρετούνται από το σύστημα είναι $n_{new} + n_h = C$. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new(TCPr)} = \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^C P(i, n_{new}, C - n_{new}) \quad (3.2)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{new(TCPr)} &= P(0,0,4) + P(0,1,3) + P(0,2,2) + P(0,3,1) + P(0,4,0) + P(1,0,4) + P(1,1,3) \\ &+ P(1,2,2) + P(1,3,1) + P(1,4,0) = 0,0030273 + 0,0380475 + 0,1044872 + 0,0844461 \\ &+ 0,01905 + 0,0006055 + 0,0097716 + 0,0387621 + 0,0564027 + 0,0363659 = \\ &= \mathbf{0,3909659} \end{aligned}$$

- Η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο των κλήσεων μεταπομπής $B_h(TCPr)$ η οποία μπορεί να συμβεί αποκλειστικά κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο (SP). Είναι η δεσμευμένη πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί σε κατάσταση στην οποία το άθροισμα των πιθανοτήτων των κλήσεων που εξυπηρετούνται από το σύστημα να είναι $n_{new} + n_h = C$, με δεδομένο ότι το σύστημα βρίσκεται αποκλειστικά στη φάση SP. Η πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:

$$B_{h(TCPr)} = \frac{\sum_{n_{new}+n_h=C}^C P(0, n_{new}, C)}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^C P(0, n_{new}, C)} = \frac{\sum_{n_{new}=0}^C P(0, n_{new}, C - n_{new})}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^C P(0, n_{new}, n_h)} \quad (3.3)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{h(TCPr)} &= \frac{\sum_{n_{new}=0}^C P(0, n_{new}, C - n_{new})}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^C P(0, n_{new}, n_h)} = \frac{P(0,0,4)+P(0,1,3)+P(0,2,2)+P(0,3,1)+P(0,4,0)}{P(0,0,1)+P(0,0,1)+P(0,1,0)+\dots+P(0,2,2)+P(0,3,1)+P(0,4,0)} = \\ &= \frac{0,0030273 + 0,0380475 + 0,1044872 + 0,0844461 + 0,01905}{0,0026339 + 0,0066539 + 0,0132885 + \dots + 0,1044872 + 0,0844461 + 0,01905} = \\ &= \frac{0,2490581}{0,5} = \mathbf{0,4981162} \end{aligned}$$

- Τελευταίο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα είναι η αξιοποίηση (ή χρησιμοποίηση) της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Είναι το μέσο πλήθος των κατειλημμένων BU, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα U , προς τη συνολική χωρητικότητα του συστήματος C (ή ισοδύναμα το σύνολο των server του συστήματος). Δίνεται από τον τύπο:

$$U_c = \frac{U}{C} \quad (3.4)$$

Το U δηλαδή είναι η μέση τιμή του πλήθους των κατειλημμένων BU στο σύστημα (ή ισοδύναμα το μέσο πλήθος των κατειλημμένων servers). Είναι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων στο σύστημα $P(i, n_{new}, n_h)$ πολλαπλασιασμένο επί $n_{new} + n_h$ όπου $n_{new}, n_h \in \{0, 1, 2, \dots, C - 1, C\}$. Το $i \in \{0, 1\}$ και εκφράζει τις δύο φάσεις λειτουργίας του συστήματος (SP και MP) και δίνεται από τον τύπο:

$$U = \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=0}^C (n_{new} + n_h) \cdot P(i, n_{new}, n_h) \quad (3.5)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=0}^C (n_{new} + n_h) \cdot P(i, n_{new}, n_h) = \\ &= 0 \cdot P(0,0,0) + 1 \cdot P(0,0,1) + 1 \cdot P(0,1,0) + 2 \cdot P(0,0,2) + 2 \cdot P(0,2,0) + \dots + 4 \cdot P(0,4,0) + \\ &+ 0 \cdot P(1,0,0) + 1 \cdot P(1,0,1) + 1 \cdot P(1,1,0) + 2 \cdot P(1,0,2) + 2 \cdot P(1,2,0) + \dots + 4 \cdot P(1,4,0) = \\ &= 0 \cdot 0,0026339 + 1 \cdot 0,0066539 + 1 \cdot 0,0132885 + 2 \cdot 0,009201 + \dots + 4 \cdot 0,01905 + \\ &+ 0 \cdot 0,0090303 + 1 \cdot 0,0073578 + 1 \cdot 0,04419 + 2 \cdot 0,0047523 + \dots + 4 \cdot 0,0363659 = \\ &= \mathbf{3,01647805} \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{3,01647805}{4} = 0,7541195$$

Για τον υπολογισμό της CBP για $B_{new(CBP)}$ θα χρησιμοποιηθεί και πάλι ο τύπος (3.2), αλλά θα πρέπει να υπολογιστούν εκ νέου οι πιθανότητες με τη μείωση του πλήθους των πηγών που παράγουν τις νέες κλήσεις κατά ένα δηλαδή $N_{new} - 1$ (Vlasakis M., et al. 2023). Αντιστοίχως, για τον υπολογισμό της CBP για $B_{h(CBP)}$ θα χρησιμοποιηθεί πάλι ο τύπος (3.3), αλλά θα πρέπει να υπολογιστούν εκ νέου οι πιθανότητες με τη μείωση του πλήθους των πηγών κατά ένα δηλαδή $N_h - 1$. (Vlasakis M., et al. 2023).

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον Κώδικα 30 (βλ. Παράρτημα Α), που είναι η επέκταση της συνάρτησης **def create_array(C, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm)**, αλλά και η επέκταση του Κώδικα 29. Στο νέο τμήμα κώδικα (3^ο μέρος) υλοποιούνται οι υπολογισμοί των μεγεθών του QoS δηλαδή των B_{new} , B_h , U και U_c .

Μετά την κλήση του Κώδικα 30 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 35) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν με τη χρήση των τύπων (3.2), (3.3), (3.4) και (3.5).

```
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.390965937555499
Bh   = 0.498116268212289
U     = 3.016478053195169
Uc    = 0.754119513298792
```

Αποτελέσματα 35 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για C=4 και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$).

Στη συνέχεια, ξανατρέχουμε τον Κώδικα 30 ακόμα δύο φορές με μειωμένες αντιστοίχως τις τιμές των πηγών N_{new} και N_h κατά ένα. Στα Αποτελέσματα 36 και 37 παρουσιάζεται η κλήση της συνάρτησης, καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων (CBP) για νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής.

```

219 # Κλήση της συνάρτησης
220 A = create_array(C=4, Nnew=4, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
221
Run create_array+solutionm_NP_CS(Kef.3) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.318890449828830

```

Αποτελέσματα 36 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων B_{new} για το μοντέλου NP/CS με $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=4, N_h=5$).

```

219 # Κλήση της συνάρτησης
220 A = create_array(C=4, Nnew=5, Nh=4, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
221
Run create_array+solutionm_NP_CS(Kef.3) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bh = 0.448741458174078

```

Αποτελέσματα 37 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής B_h για το μοντέλου NP/CS με $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=5, N_h=4$).

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο για τις νέες κλήσεις είναι $B_{new(TCPr)}=0,39096$ ενώ η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι $B_{new(CBP)}=0,31889$. Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι μικρότερη από την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο, δηλαδή την πιθανότητα να βρεθούν όλοι οι επεξεργαστές κατειλημμένοι. Στην πραγματικότητα η απόρριψη της κλήσης έρχεται μετά τη συμφόρηση και απαιτεί τουλάχιστον μία ακόμη κλήση.

Αντίστοιχα, για την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο των κλήσεων μεταπομπής, προκύπτει τιμή $B_{h(TCPr)}=0,49811$, ενώ για την πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής η τιμή είναι $B_{h(CBP)}=0,44874$. Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής, με το ίδιο σκεπτικό είναι μικρότερη από την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο των κλήσεων μεταπομπής.

Στο μοντέλο NP/CS για να έχουμε απόρριψη νέας κλήσης ή κλήσης μεταπομπής θα πρέπει να ισχύει ότι $n_{new} + n_h \geq C$.

3.4.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

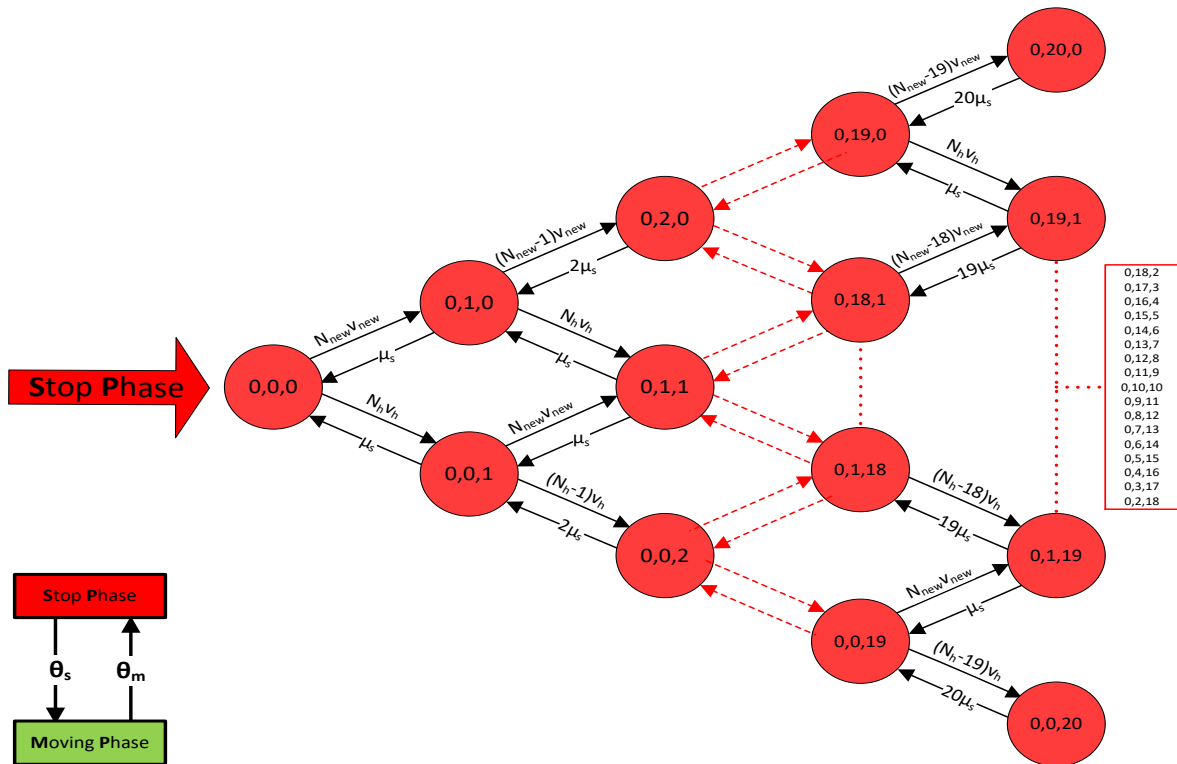
Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα NP/CS το οποίο θα έχει χαρακτηριστικά μεγέθη τα οποία είναι πιο κοντά στα πραγματικά μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος, δηλαδή του κινούμενου οχήματος π.χ. λεωφορείου στο οποίο λειτουργεί το εξεταζόμενο σημείο πρόσβασης (Mobile Hotspot) των εξυπηρετούμενων χρηστών. Το εξεταζόμενο σύστημα θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$C=20, N_{new}=40, N_h=40, v_{new}=1/2, v_h=1/2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι σύμφωνα με τον τύπο (3.1):

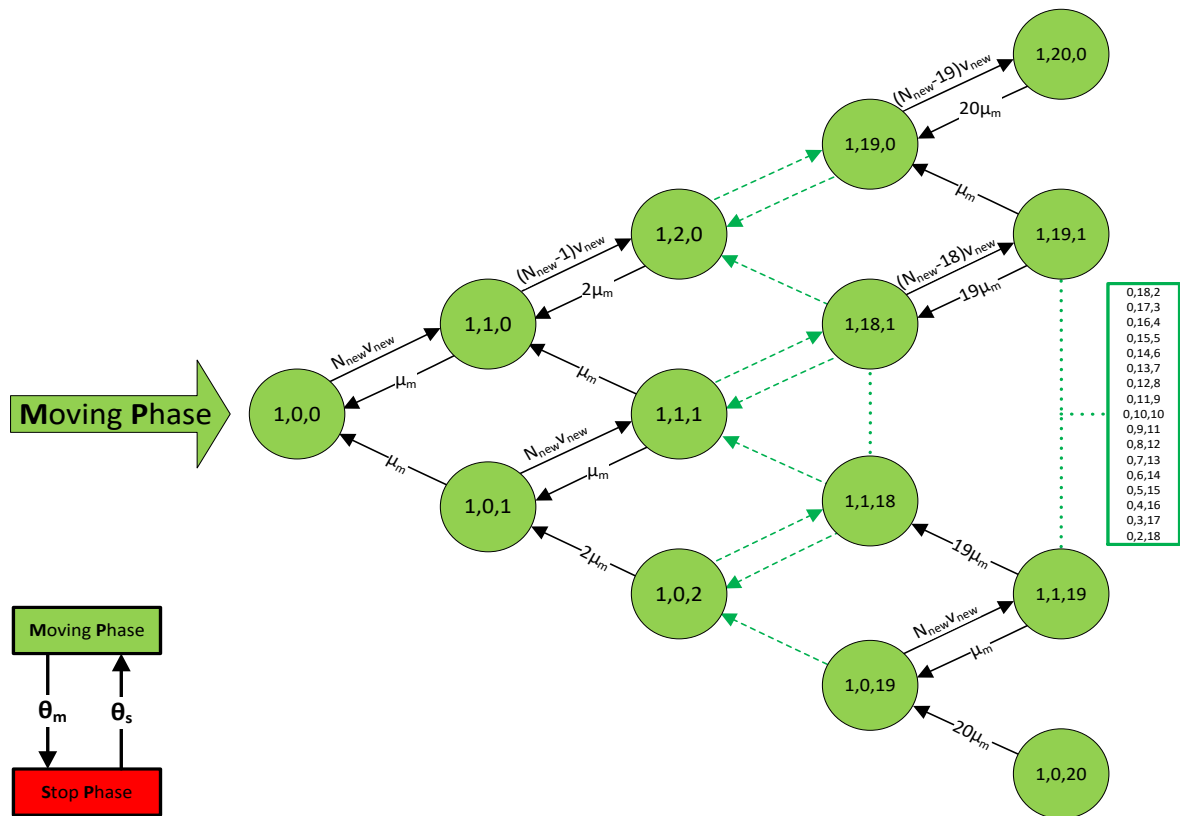
$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{c+1} n = \sum_{i=0}^1 (1 + 2 + \dots + 21) = \sum_{i=0}^1 (231) = 231 + 231 = 462 \text{ καταστάσεις}$$

Άρα θα έχουμε 462 καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 32 (SP).



Σχήμα 32 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ (αναπαράσταση της SP).

Οι υπόλοιπες καταστάσεις αφορούν την MP και εμφανίζονται στο Σχήμα 33.



Σχήμα 33 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ (αναπαράσταση της MP).

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 30 (βλ. Παράρτημα Α), με τα παραπάνω μεγέθη θα προκύψει ο πίνακας-σύστημα 462×462 (213.444 κελιά!) το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο να λυθεί χωρίς τη χρήση λογισμικού. Με τη βοήθεια της Python και του Κώδικα 30 επιλύουμε το εν λόγω σύστημα και στα Αποτελέσματα 38 εμφανίζεται η κλήση της συνάρτησης και στην έξοδο έχουμε τα επιστρεφόμενα αποτελέσματα για τις τιμές που χαρακτηρίζουν την QoS. Οι τιμές $B_{new(TCPr)}$ και $B_h(TCPr)$ προσδιορίζουν τις πιθανότητες συμφόρησης στον χρόνο.

```

219 # Κλήση της συνάρτησης
220 A = create_array(C=20, Nnew=40, Nh=40, vnew=0.5, vh=0.5, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
221
Run create_array+solutionm_NP_CS(Kef.3) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.209610673980548
Bh = 0.337612395438974
U = 16.873729568416326
Uc = 0.843686478420816

```

Αποτελέσματα 38 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου NP/CS για $C=20$ ($N_{new}=N_h=40$).

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα απόρριψης κλήσεων (CBP) για νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής ξανατρέχουμε τον Κώδικα 30, μειώνοντας κατά ένα τις τιμές των πηγών N_{new} και N_h (Vlasakis, M., et al. 2023). Στα Αποτελέσματα 39 και 40 παρουσιάζεται οι υπολογισμοί των πιθανοτήτων απόρριψης για $B_{new(CBP)}$ και $B_h(CBP)$.

```
219 # Κλήση της συνάρτησης
220 A = create_array(C=20, Nnew=39, Nh=40, vnew=0.5, vh=0.5, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
221
```

Run create_array+solutionom_NP_CS(Kef.3)

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)

=====

Bnew = 0.201173330817676

Αποτελέσματα 39 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το μοντέλου NP/CS με $C=20$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=39, N_h=40$).

```
219 # Κλήση της συνάρτησης
220 A = create_array(C=20, Nnew=40, Nh=39, vnew=0.5, vh=0.5, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
221
```

Run create_array+solutionom_NP_CS(Kef.3)

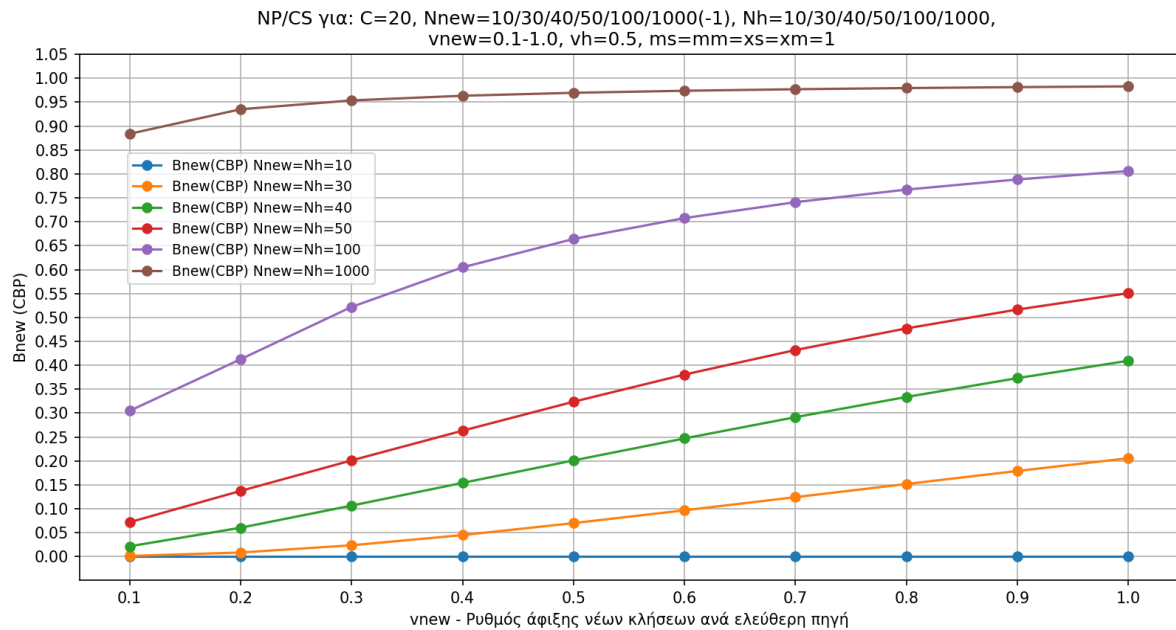
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)

=====

Bh = 0.329487638088521

Αποτελέσματα 40 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής $B_h(CBP)$ για το μοντέλου NP/CS με $C=20$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=40, N_h=39$).

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 30 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `create_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $v_{new}(0,1-1,0)$. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_vnew(C, Nnew, Nh, rate_vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 31 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 4Α (Κώδικας 31) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(vnew_values, results_array1...results_array6)` της οποίας η έξοδος είναι οι έξι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 34. Στον Κώδικα 31 παρουσιάζεται και η κλήση των συναρτήσεων για τη δημιουργία των γραφικών παραστάσεων του Σχήματος 34.



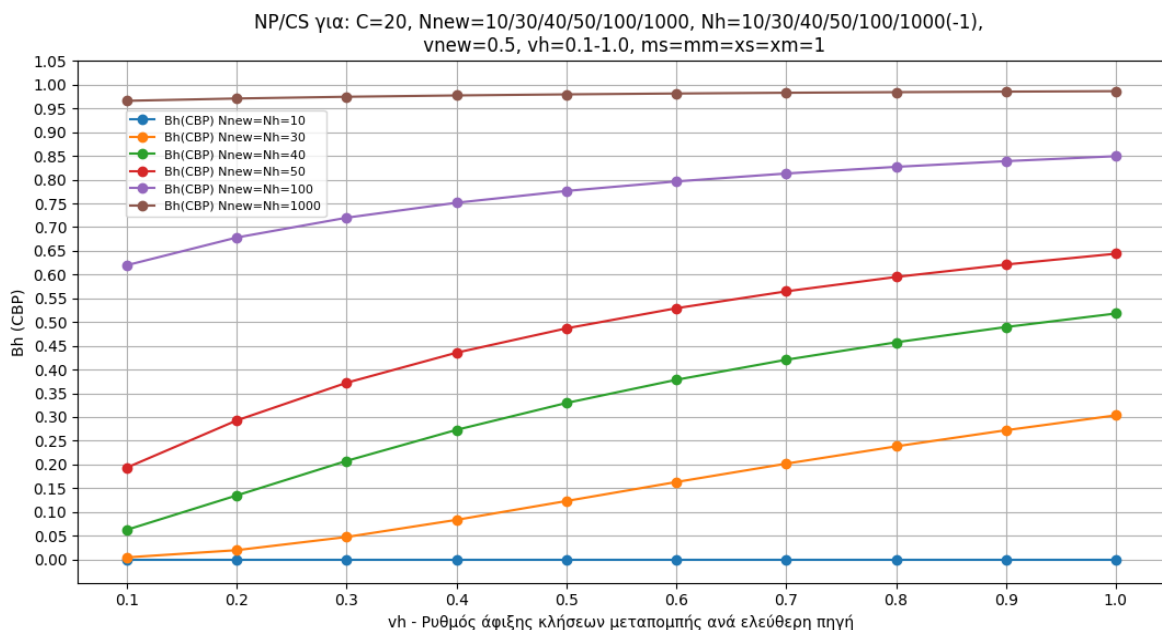
Σχήμα 34 - Αναπαράσταση του $B_{new(CBP)}$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο NP/CS με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 34

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$, παρατηρούμε ότι γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Αρχικά στην περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=10$ όπως είναι αναμενόμενο δεν υπάρχει απόρριψη κλήσεων ούτε συμφόρηση κλήσεων στο δίκτυο διότι υπάρχει για κάθε κλήση που παράγεται από τις διαθέσιμες πηγές, μία BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 34 με τη μπλε καμπύλη και ισχύει για κάθε περίπτωση που η χωρητικότητα του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τις διαθέσιμες πηγές δηλαδή $N_{new} < C$.
- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για την περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=1000$, με δεδομένο ότι η χωρητικότητά $C=20$, όπως είναι αναμενόμενο είναι εξαιρετικά υψηλή. Δεν υπάρχουν διαθέσιμες BU για να εξυπηρετήσουν τις κλήσεις που δημιουργούν οι πολλές διαθέσιμες πηγές. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 34 με την καφέ καμπύλη και βλέπουμε ότι η απόρριψη κλήσεων είναι σχεδόν δεδομένη και σε κάθε περίπτωση $B_{new(CBP)} > 0,8838$ (για $v_{new}=0,1$). Συμπερασματικά θα πούμε ότι όταν οι διαθέσιμες πηγές είναι πάρα πολλές σε σχέση με τη χωρητικότητα του συστήματος, δηλαδή ισχύει ότι $N_{new} \gg C$, το σύστημα είναι πρακτικά μη λειτουργικό.

Στις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις για τις ενδιαμέσες τιμές, δηλαδή για τιμές $N_{new}=N_h=30/40/50/100$ οι γραφικές παραστάσεις είναι σχεδόν γραμμικές. Δηλαδή η αύξηση της απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ είναι περίπου ανάλογη με την αύξηση του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Παρατηρούμε στο Σχήμα 34 με την κόκκινη καμπύλη απεικονίζουμε την απόρριψη νέων κλήσεων για $N_{new}=N_h=50$ και παρατηρούμε ότι για ρυθμό άφιξης κλήσεων $v_{new}=0,1$ η απόρριψη νέων κλήσεων είναι $B_{new}=0,072$, εάν πενταπλασιάσουμε τον ρυθμό άφιξης σε $v_{new}=0,5$ η απόρριψη νέων κλήσεων θα γίνει είναι $B_{new}=0,323$ σχεδόν πενταπλασιάζεται και αυτή.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον Κώδικα 30 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `create_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $v_h(0,1-1,0)$. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 5^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_vh(C, Nnew, Nh, vnew, rate_vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 32 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 5Α (Κώδικα 32) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results1(vh_values, results_array1, results_array2, ..., results_array6)` της οποίας η έξοδος είναι οι έξι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 35. Στον Κώδικα 32 (βλ. Παράρτημα Α) παρουσιάζεται και η κλήση των συναρτήσεων για τη δημιουργία των γραφικών παραστάσεων του Σχήματος 35.



Σχήμα 35 - Αναπαράσταση του $B_h(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h . Μοντέλο NP/CS με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$, $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 35

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$, παρατηρούμε ότι γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h όπως και στο Σχήμα 35. Αρχικά στην περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=10$ όπως είναι αναμενόμενο δεν υπάρχει απόρριψη κλήσεων μεταπομπής ούτε συμφόρηση κλήσεων στο δίκτυο διότι υπάρχει για κάθε κλήση που παράγεται από τις διαθέσιμες πηγές, μία BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 35 με τη μπλε καμπύλη και ισχύει για κάθε περίπτωση που η χωρητικότητα του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τις διαθέσιμες πηγές ($N_h < C$).
- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ για την περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=1000$, με δεδομένο ότι η χωρητικότητά $C=20$, όπως είναι αναμενόμενο είναι εξαιρετικά υψηλή. Δεν υπάρχουν διαθέσιμες BU για να εξυπηρετήσουν τις κλήσεις που δημιουργούν οι πολλές διαθέσιμες πηγές. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 35 με την καφέ καμπύλη και βλέπουμε ότι η απόρριψη κλήσεων είναι σχεδόν δεδομένη. Εδώ επίσης να επισημάνουμε ότι η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής είναι $B_{h(CBP)}=0,9662$ για τιμή $v_h=0,1$ σε αντίθεση με την περίπτωση της απόρριψης νέων κλήσεων που είναι $B_{new(CBP)}=0,8838$ (για $v_{new}=0,1$). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι κλήσεις μεταπομπής περιορίζονται μόνο στην SP σε αντίθεση με τις νέες κλήσεις οι οποίες είναι διαθέσιμες-δημιουργούνται και στις δύο φάσεις του οχήματος (SP και MP).
- Στις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις για τις ενδιαμέσες τιμές, δηλαδή για τιμές $N_{new}=N_h=30/40/50/100$ παρατηρούμε στις γραφικές παραστάσεις η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με την απόρριψη νέων κλήσεων για χαμηλές τιμές των v_h και v_{new} . Για παράδειγμα για $v_{new}=v_h=0,1$ για την καμπύλη με διαθέσιμες πηγές $N_{new}=N_h=50$ έχουμε $B_{new(CBP)}=0,072$ και $B_{h(CBP)}=0,1934$ δηλαδή η τιμή απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι διπλάσια. Για $v_{new}=v_h=0,5$ για την καμπύλη με διαθέσιμες πηγές $N_{new}=N_h=50$ έχουμε $B_{new(CBP)}=0,3238$ και $B_{h(CBP)}=0,4868$ δηλαδή. Για $v_{new}=v_h=1,0$ για την καμπύλη με διαθέσιμες πηγές $N_{new}=N_h=50$ έχουμε $B_{new(CBP)}=0,551$ και $B_{h(CBP)}=0,644$. Με δεδομένο ότι επιλέξαμε τιμές άφιξης κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή από 0,1-1,0 παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές των v_{new}, v_h τα $B_{new} < B_h$.

Συμπερασματικά, παρατηρείται ότι η τιμή, η οποία εκφράζει την πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής B_h , είναι πάντα μεγαλύτερη σε σύγκριση με τη αντίστοιχη τιμή B_{new} που μας δίνει την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την MP δεν μπορούν να δημιουργηθούν κλήσεις μεταπομπής, άρα μόνο οι νέες κλήσεις έχουν πρόσβαση στις διαθέσιμες BU. Η παραπάνω ανάλυση παρουσιάζεται στον Πίνακα 40 για ρυθμό άφιξης $v_{new}=v_h=0,5$ και για πηγές $N_{new}=N_h=30/40/50/100$.

$v_{new} = v_h = 0,5$	$B_{new}(CBP)$	$B_h(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,0701047	0,1228524
$N_{new}=N_h=40$	0,2011733	0,3294876
$N_{new}=N_h=50$	0,3238317	0,4867674
$N_{new}=N_h=100$	0,6641101	0,7762579

Πίνακας 40 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ με $B_{new}(CBP)$ στο μοντέλο NP/CS για $C=20$ και $v_{new}=v_h=0,5$.

3.5. Γενική περιγραφή μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2 οι κλήσεις μεταπομπής αποτελούν προτεραιότητά μας σε σχέση με τις νέες κλήσεις. Είναι σημαντική η συνέχιση μιας κλήσης η οποία βρίσκεται σε εξέλιξη διότι η διακοπή της επηρεάζει αρνητικά την εικόνα του συστήματος και το QoS σε αντιδιαστολή με το πρόβλημα που μπορεί να προκύψει από τη μη εκκίνηση μιας νέας κλήσης. Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο CP/BR ή Cut-off Priority/Bandwidth Reservation (Vlasakis, M., et al. 2023) δηλαδή είναι η περίπτωση στην οποία έχουμε δεσμεύσει τμήμα της συνολικής χωρητικότητας C του συστήματος το οποίο συμβολίζουμε με t , προκειμένου να χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά και μόνο για τις κλήσεις μεταπομπής. Στο δεσμευμένο αυτό τμήμα του bandwidth δηλαδή στο $(C - t + 1, C)$ δεν έχουν πρόσβαση οι νέες κλήσεις. Στο μοντέλο CP/BR εισάγεται η έννοια της δεσμευμένης χωρητικότητας με πιθανότητα (BR-PBR), σύμφωνα με την οποία, μπορεί τμήμα του δεσμευμένου χώρου να διατεθεί και σε νέες κλήσεις με πιθανότητα p_s (Vlasakis, M., et al. 2023). Όταν η πιθανότητα $p_s=0$ αναφερόμαστε σε πλήρη διάθεση του δεσμευμένου χώρου στις κλήσεις μεταπομπής (strict BR), ενώ οι νέες κλήσεις δεν έχουν καθόλου πρόσβαση εκεί. Όταν η πιθανότητα $p_s=1$ αναφερόμαστε σε πλήρη διάθεση του

δεσμευμένου χώρου σε όλες τις κλήσεις άρα στην πολιτική CS η οποία αναλύθηκε στην §3.4. Στο σύστημα CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών, όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, ισχύουν οι δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP), ενώ κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί τη διάθεση μίας BU. Η διαφορά είναι ότι οι αφίξεις κλήσεων όπως και οι πηγές του συστήματος είναι πεπερασμένες.

Στο σύστημα CP/BR ισχύουν όπως και στο NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών, τα εξής: Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί, είναι το αντίστοιχο μοντέλο CP1/BR που αναλύθηκε στην §2.3 της παρούσας ΔΕ. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε δεσμεύσει t τμήμα της συνολικής χωρητικότητας C του συστήματος μόνο στη φάση του σταματημένου οχήματος (SP), προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής. Η δέσμευση δεν ισχύει για την περίπτωση που το όχημα είναι σε κίνηση MP, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι και στο σύστημα NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Δεν θα αναλυθεί το σύστημα που εξετάστηκε στην §2.2 όπου δεσμεύτηκε χωρητικότητα και στις δύο φάσεις διότι όπως είδαμε στο εν λόγω κεφάλαιο δεν υπάρχει καμία πρακτική αξία να δεσμεύσουμε χώρο στην MP διότι δεν μπορούν να «γεννηθούν» κλήσεις μεταπομπής στην εν λόγω φάση την κίνησης του οχήματος και το δεσμευμένο bandwidth μένει αναξιοποίητο.

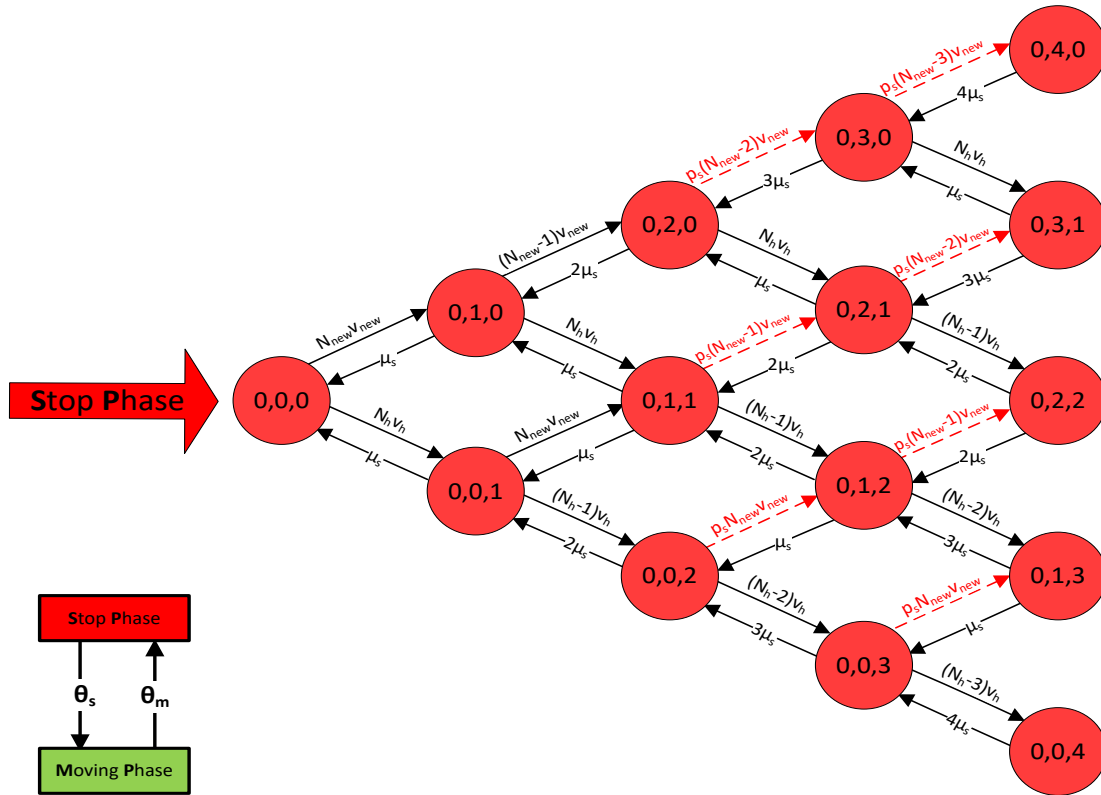
3.5.1. Αναπαράσταση μοντέλου CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση το ίδιο σύστημα, όπως και στο μοντέλο NP/CS με πεπερασμένο πλήθος πηγών, το οποίο θα έχει χωρητικότητα $C=4$ και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP. Το σύστημα αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα, της οποίας οι δυνατές καταστάσεις ορίζονται από τον τύπο (3.1):

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{C+1} n = \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{4+1} n = \sum_{i=0}^1 (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \sum_{i=0}^1 (15) = 15 + 15 = 30 \text{ καταστάσεις}$$

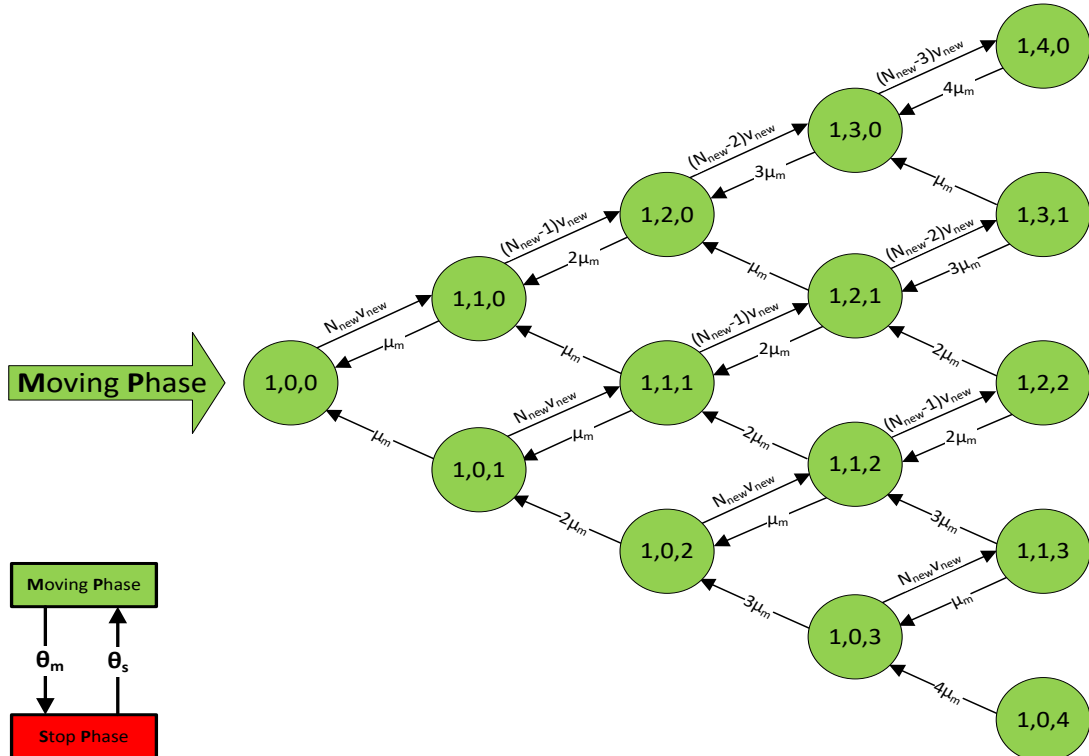
Η κάθε κατάσταση θα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία (i, n_{new}, n_h) , το $i \in \{0, 1\}$ και περιγράφει αν βρισκόμαστε στην SP ($i=0$) ή την MP ($i=1$). Τα n_{new} και n_h μας δίνουν το πλήθος των εξυπηρετούμενων νέων κλήσεων (n_{new}) και κλήσεων μεταπομπής (n_h) αντίστοιχα και παίρνουν τιμές από $0 \leq n_{new} + n_h \leq C$ σε κάθε κατάσταση.

Οι μισές καταστάσεις (15) αφορούν την SP και εμφανίζονται στο Σχήμα 36.



Σχήμα 36 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$ και δεσμευμένη χωρητικότητα $t=2$ μόνο στην SP (αναπαράσταση SP).

Οι υπόλοιπες 15 καταστάσεις αφορούν την MP και εμφανίζονται στο Σχήμα 37.



Σχήμα 37 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών για $C=4$ και δεσμευμένη χωρητικότητα $t=2$ μόνο στην SP (αναπαράσταση MP).

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα των σχημάτων 36 & 37:

- Στη φάση κινούμενου οχήματος -MP- βλέπουμε ότι ισχύουν όλα όσα αναφέρθηκαν και στον προηγούμενο μοντέλο NP/CS και έχουν σημειωθεί στις επεξηγήσεις που δόθηκαν για το Σχήμα 30. Συνοπτικά να πούμε ότι στην MP μπορούν να «γεννηθούν» μόνο νέες κλήσεις οι οποίες δημιουργούνται από τις διαθέσιμες πηγές νέων κλήσεων (N_{new}) και για το λόγο αυτό δεν υπάρχουν δεσμευμένες θέσεις BU προς εξυπηρέτηση κλήσεων μεταπομπής.
- Στη φάση ακίνητου οχήματος -SP- μπορεί να υπάρχουν νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής οι οποίες δημιουργούνται αντίστοιχα, είτε από πηγές νέων κλήσεων (N_{new}) είτε από πηγές κλήσεων μεταπομπής (N_h). Στην SP δεσμεύουμε θέσεις BU οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για την εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής. Έχουμε λοιπόν t δεσμευμένες θέσεις οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο από κλήσεις μεταπομπής, στην πραγματικότητα είναι σαν να μην υπάρχουν οι εν λόγω θέσεις για την εξυπηρέτηση των νέων κλήσεων. Οι νέες κλήσεις έχουν στη διάθεση τους $C - t$ διαθέσιμες θέσεις προκειμένου να εξυπηρετηθούν. Οι υπόλοιπες $C - t + 1$ έως C είναι διαθέσιμες μόνο για κλήσεις μεταπομπής.
- Στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος 36 έχουν σημειωθεί με κόκκινες μεταβάσεις αυτές οι οποίες στην πραγματικότητα δεν μπορεί να υλοποιηθούν λόγω της δεσμευμένης χωρητικότητας $t=2$ στο μοντέλο CP/BR ή θα μπορούσαν να υλοποιηθούν με μία πιθανότητα p_s η οποία θα οριστεί κατά τη σχεδίαση του συστήματος (Vlasakis, M., et al. 2023). Στην παρούσα περίπτωση $p_s=0$, οπότε όταν στο σύστημά μας βρίσκονται σε εξυπηρέτηση πλήθος κλήσεων $n_{new} + n_h \geq 2$ (ή $n_{new} + n_h \geq C - t$) τότε μπορεί να εξυπηρετηθούν μόνο κλήσεις μεταπομπής στην SP.
- Στις καταστάσεις (0,30), (0,4,0), (0,2,1), (0,3,1), (0,2,2), (0,1,2), (0,1,3), (0,0,3) και (0,0,4) δεν μπορούμε να μεταβούμε όταν έρθει μία νέα κλήση, μπορούμε να μεταβούμε μόνο με κάποια κλήση μεταπομπής που θα αφιχθεί στο σύστημα. Από τις δεκαπέντε (15) συνολικά καταστάσεις της SP μόνο οι έξι είναι διαθέσιμες για νέες κλήσεις και βέβαια το σύνολο των δεκαπέντε καταστάσεων στην SP είναι διαθέσιμες και για κλήσεις μεταπομπής. Η δέσμευση θέσεων προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής υλοποιείται προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η απόρριψη των εν λόγω κλήσεων.

3.5.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών

Από τις Μαρκοβιανές αλυσίδες στα Σχήματα 36 και 37 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας (Λογοθέτης Μ. 2018 σ. 61). Στις εξισώσεις έχουν ληφθεί υπόψη οι μεταβάσεις με κόκκινες γραμμές που υπάρχουν στην SP και εμφανίζονται στις εξισώσεις με κίτρινη επισήμανση. Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση (0,0,0):

$$\begin{aligned}
 SP(0,0,0) &\rightarrow P(0,0,0)(N_{new}v_{new} + N_h v_h + \theta_s) = P(0,1,0)\mu_s + P(0,0,1)\mu_s + P(1,0,0)\theta_m \\
 SP(0,1,0) &\rightarrow P(0,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + N_h v_h + \mu_s + \theta_s) = P(0,0,0)N_{new}v_{new} + P(0,2,0)2\mu_s + \\
 &P(0,1,1)\mu_s + P(1,1,0)\theta_m \\
 SP(0,2,0) &\rightarrow P(0,2,0)(N_h v_h + (N_{new} - 2)v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
 &P(0,3,0)3\mu_s + P(0,2,1)\mu_s + P(1,2,0)\theta_m \\
 SP(0,3,0) &\rightarrow P(0,3,0)(N_h v_h + (N_{new} - 3)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,4,0)4\mu_s + P(0,3,1)\mu_s + \\
 &P(1,3,0)\theta_m + P(0,2,0)(N_{new} - 2)v_{new}p_s \\
 SP(0,4,0) &\rightarrow P(0,4,0)(4\mu_s + \theta_s) = P(1,4,0)\theta_m + P(0,3,0)(N_{new} - 3)v_{new}p_s \\
 SP(0,0,1) &\rightarrow P(0,0,1)(N_{new}v_{new} + (N_h - 1)v_h + \mu_s + \theta_s) = P(0,0,0)N_h v_h + P(0,0,2)2\mu_s + \\
 &P(0,1,1)\mu_s + P(1,0,1)\theta_m \\
 SP(0,1,1) &\rightarrow P(0,1,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - 1)v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,0,1)N_{new}v_{new} + \\
 &P(0,1,0)N_h v_h + P(0,2,1)2\mu_s + P(0,1,2)2\mu_s + P(1,1,1)\theta_m \\
 SP(0,2,1) &\rightarrow P(0,2,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - 2)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,2,0)N_h v_h + \\
 &P(0,3,1)3\mu_s + P(0,2,2)2\mu_s + P(1,2,1)\theta_m + P(0,1,1)(N_{new} - 1)v_{new}p_s \\
 SP(0,3,1) &\rightarrow P(0,3,1)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,3,0)N_h v_h + P(1,3,1)\theta_m + P(0,2,1)(N_{new} - 2)v_{new}p_s \\
 SP(0,0,2) &\rightarrow P(0,0,2)((N_h - 2)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,0,1)(N_h - 1)v_h + \\
 &P(0,0,3)3\mu_s + P(0,1,2)\mu_s + P(1,0,2)\theta_m \\
 SP(0,1,2) &\rightarrow P(0,1,2)((N_h - 2)v_h + (N_{new} - 1)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,1,1)(N_h - 1)v_h + \\
 &P(0,2,2)2\mu_s + P(0,1,3)3\mu_s + P(1,1,2)\theta_m + P(0,0,2)(N_{new}v_{new})p_s \\
 SP(0,2,2) &\rightarrow P(0,2,2)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,2,1)(N_h - 1)v_h + P(1,2,2)\theta_m + P(0,1,2)(N_{new} - \\
 &1)v_{new}p_s \\
 SP(0,0,3) &\rightarrow P(0,0,3)((N_h - 3)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,0,2)(N_h - 2)v_h + \\
 &P(0,0,4)4\mu_s + P(0,1,3)\mu_s + P(1,0,3)\theta_m \\
 SP(0,1,3) &\rightarrow P(0,1,3)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,1,2)(N_h - 2)v_h + P(1,1,3)\theta_m + \\
 &P(0,0,3)(N_{new}v_{new})p_s \\
 SP(0,0,4) &\rightarrow P(0,0,4)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,0,3)(N_h - 3)v_h + P(1,0,4)\theta_m
 \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις στην MP:

$$\begin{aligned}
\mathbf{MP}(1,0,0) &\rightarrow P(1,0,0)(N_{new}v_{new} + \theta_m) = P(1,1,0)\mu_m + P(1,0,1)\mu_m + P(0,0,0)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,1,0) &\rightarrow P(1,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + \mu_m + \theta_m) = P(1,0,0)N_{new}v_{new} + P(1,2,0)2\mu_m + \\
&P(1,1,1)\mu_m + P(0,1,0)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,2,0) &\rightarrow P(1,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
&P(1,3,0)3\mu_m + P(1,2,1)\mu_m + P(0,2,0)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,3,0) &\rightarrow P(1,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,2,0)(N_{new} - 2)v_{new} + \\
&P(1,4,0)4\mu_m + P(1,3,1)\mu_m + P(0,3,0)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,4,0) &\rightarrow P(1,4,0)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,3,0)(N_{new} - 3)v_{new} + P(0,4,0)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,0,1) &\rightarrow P(1,0,1)(N_{new}v_{new} + \mu_m + \theta_m) = P(1,1,1)\mu_m + P(1,0,2)2\mu_m + P(0,0,1)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,1,1) &\rightarrow P(1,1,1)((N_{new} - 1)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,0,1)N_{new}v_{new} + P(1,2,1)2\mu_m + \\
&P(1,1,2)2\mu_m + P(0,1,1)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,2,1) &\rightarrow P(1,2,1)((N_{new} - 2)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,1,1)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
&P(1,3,1)3\mu_m + P(1,2,2)2\mu_m + P(0,2,1)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,3,1) &\rightarrow P(1,3,1)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,2,1)(N_{new} - 2)v_{new} + P(0,3,1)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,0,2) &\rightarrow P(1,0,2)(N_{new}v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,1,2)\mu_m + P(1,0,3)3\mu_m + P(0,0,2)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,1,2) &\rightarrow P(1,1,2)((N_{new} - 1)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,0,2)N_{new}v_{new} + P(1,2,2)2\mu_m + \\
&P(1,1,3)3\mu_m + P(0,1,2)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,2,2) &\rightarrow P(1,2,2)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,1,2)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,2,2)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,0,3) &\rightarrow P(1,0,3)(N_{new}v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,1,3)\mu_m + P(1,0,4)4\mu_m + P(0,0,3)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,1,3) &\rightarrow P(1,1,3)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,0,3)N_{new}v_{new} + P(0,1,3)\theta_s \\
\mathbf{MP}(1,0,4) &\rightarrow P(1,0,4)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,0,4)\theta_s
\end{aligned}$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=4, t=2, p_s=0, N_{new}=5, N_h=5, v_{new}=v_h=1, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbf{SP}(0,0,0) &\rightarrow P(0,0,0)(5 + 5 + 1) = P(0,1,0) + P(0,0,1) + P(1,0,0) => \\
&-11P(0,0,0) + P(0,1,0) + P(0,0,1) + P(1,0,0) = 0 \\
\mathbf{SP}(0,1,0) &\rightarrow P(0,1,0)(5 - 1) + 5 + 1 + 1 = P(0,0,0)5 + P(0,2,0)2 + P(0,1,1) + P(1,1,0) => \\
&-11P(0,1,0) + 5P(0,0,0) + 2P(0,2,0) + P(0,1,1) + P(1,1,0) = 0 \\
\mathbf{SP}(0,2,0) &\rightarrow P(0,2,0)(5 + 2 + 1) = P(0,1,0)(5 - 1) + P(0,3,0)3 + P(0,2,1) + P(1,2,0) => \\
&-8P(0,2,0) + 4P(0,1,0) + 3P(0,3,0) + P(0,2,1) + P(1,2,0) = 0 \\
\mathbf{SP}(0,3,0) &\rightarrow P(0,3,0)(5 + 3 + 1) = P(0,4,0)4 + P(0,3,1) + P(1,3,0) => \\
&-9P(0,3,0) + 4P(0,4,0) + P(0,3,1) + P(1,3,0) = 0 \\
\mathbf{SP}(0,4,0) &\rightarrow P(0,4,0)(4 + 1) = P(1,4,0) => \\
&-5P(0,4,0) + P(1,4,0) = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{SP(0,0,1)} \rightarrow P(0,0,1)(5 + (5 - 1) + 1 + 1) = P(0,0,0)5 + P(0,0,2)2 + P(0,1,1) + P(1,0,1) \Rightarrow$$

$$-11P(0,0,1) + 5P(0,0,0) + 2P(0,0,2) + P(0,1,1) + P(1,0,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1,1)} \rightarrow P(0,1,1)(4 + 3) = P(0,0,1)5 + P(0,1,0)5 + P(0,2,1)2 + P(0,1,2)2 + P(1,1,1) \Rightarrow$$

$$-7P(0,1,1) + 5P(0,0,1) + 5P(0,1,0) + 2P(0,2,1) + 2P(0,1,2) + P(1,1,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2,1)} \rightarrow P(0,2,1)((5 - 1) + 3 + 1) = P(0,2,0)5 + P(0,3,1)3 + P(0,2,2)2 + P(1,2,1) \Rightarrow$$

$$-8P(0,2,1) + 5P(0,2,0) + 3P(0,3,1) + 2P(0,2,2) + P(1,2,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,3,1)} \rightarrow P(0,3,1)(4 + 1) = P(0,3,0)5 + P(1,3,1) \Rightarrow$$

$$-5P(0,3,1) + 5P(0,3,0) + P(1,3,1) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,2)} \rightarrow P(0,0,2)(3 + 2 + 1) = P(0,0,1)(5 - 1) + P(0,0,3)3 + P(0,1,2) + P(1,0,2) \Rightarrow$$

$$-6P(0,0,2) + 4P(0,0,1) + 3P(0,0,3) + P(0,1,2) + P(1,0,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1,2)} \rightarrow P(0,1,2)(3 + 3 + 1) = P(0,1,1)(5 - 1) + P(0,2,2)2 + P(0,1,3)3 + P(1,1,2) \Rightarrow$$

$$-7P(0,1,2) + 4P(0,1,1) + 2P(0,2,2) + 3P(0,1,3) + P(1,1,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,2,2)} \rightarrow P(0,2,2)(4 + 1) = P(0,2,1)(5 - 1) + P(1,2,2) \Rightarrow$$

$$-5P(0,2,2) + 4P(0,2,1) + P(1,2,2) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,3)} \rightarrow P(0,0,3)((5 - 3) + 3 + 1) = P(0,0,2)(5 - 2) + P(0,0,4)4 + P(0,1,3) + P(1,0,3) \Rightarrow$$

$$-6P(0,0,3) + 3P(0,0,2) + 4P(0,0,4) + P(0,1,3) + P(1,0,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,1,3)} \rightarrow P(0,1,3)(4 + 1) = P(0,1,2)(5 - 2) + P(1,1,3) \Rightarrow$$

$$-5P(0,1,3) + 3P(0,1,2) + P(1,1,3) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,4)} \rightarrow P(0,0,4)(4 + 1) = P(0,0,3)(5 - 3) + P(1,0,4) \Rightarrow$$

$$-5P(0,0,4) + 2P(0,0,3) + P(1,0,4) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0,0)} \rightarrow P(1,0,0)(5 + 1) = P(1,1,0) + P(1,0,1) + P(0,0,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,0,0) + P(1,1,0) + P(1,0,1) + P(0,0,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,0)} \rightarrow P(1,1,0)(5 - 1) + 1 + 1 = P(1,0,0)5 + P(1,2,0)2 + P(1,1,1) + P(0,1,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,1,0) + 5P(1,0,0) + 2P(1,2,0) + P(1,1,1) + P(0,1,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,0)} \rightarrow P(1,2,0)(5 - 2) + 2 + 1 = P(1,1,0)(5 - 1) + P(1,3,0)3 + P(1,2,1) + P(0,2,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,2,0) + 4P(1,1,0) + 3P(1,3,0) + P(1,2,1) + P(0,2,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3,0)} \rightarrow P(1,3,0)(5 - 3) + 3 + 1 = P(1,2,0)(5 - 2) + P(1,4,0)4 + P(1,3,1) + P(0,3,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,3,0) + 3P(1,2,0) + 4P(1,4,0) + P(1,3,1) + P(0,3,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,4,0)} \rightarrow P(1,4,0)(4 + 1) = P(1,3,0)(5 - 3) + P(0,4,0) \Rightarrow$$

$$-5P(1,4,0) + 2P(1,3,0) + P(0,4,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,1)} \rightarrow P(1,0,1)(5 + 1 + 1) = P(1,1,1) + P(1,0,2)2 + P(0,0,1) \Rightarrow$$

$$-7P(1,0,1) + P(1,1,1) + 2P(1,0,2) + P(0,0,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,1)} \rightarrow P(1,1,1)(5 - 1) + 2 + 1 = P(1,0,1)5 + P(1,2,1)2 + P(1,1,2)2 + P(0,1,1) \Rightarrow$$

$$-7P(1,1,1) + 5P(1,0,1) + 2P(1,2,1) + 2P(1,1,2) + P(0,1,1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{MP(1,2,1)} &\rightarrow P(1,2,1)(5 - 2) + 3 + 1 = P(1,1,1)(5 - 1) + P(1,3,1)3 + P(1,2,2)2 + \\
 &P(0,2,1) \Rightarrow -7P(1,2,1) + 4P(1,1,1) + 3P(1,3,1) + 2P(1,2,2) + P(0,2,1) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,3,1)} &\rightarrow P(1,3,1)(4 + 1) = P(1,2,1)(5 - 2) + P(0,3,1) \Rightarrow \\
 &-5P(1,3,1) + 3P(1,2,1) + P(0,3,1) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,0,2)} &\rightarrow P(1,0,2)(5 + 2 + 1) = P(1,1,2) + P(1,0,3)3 + P(0,0,2) \Rightarrow \\
 &-8P(1,0,2) + P(1,1,2) + 3P(1,0,3) + P(0,0,2) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,1,2)} &\rightarrow P(1,1,2)(5 - 1) + 3 + 1 = P(1,0,2)5 + P(1,2,2)2 + P(1,1,3)3 + P(0,1,2) \Rightarrow \\
 &-8P(1,1,2) + 5P(1,0,2) + 2P(1,2,2) + 3P(1,1,3) + P(0,1,2) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,2,2)} &\rightarrow P(1,2,2)(4 + 1) = P(1,1,2)(5 - 1) + P(0,2,2) \Rightarrow \\
 &-5P(1,2,2) + 4P(1,1,2) + P(0,2,2) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,0,3)} &\rightarrow P(1,0,3)(5 + 3 + 1) = P(1,1,3) + P(1,0,4)4 + P(0,0,3) \Rightarrow \\
 &-9P(1,0,3) + P(1,1,3) + 4P(1,0,4) + P(0,0,3) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,1,3)} &\rightarrow P(1,1,3)(4 + 1) = P(1,0,3)5 + P(0,1,3) \Rightarrow \\
 &-5P(1,1,3) + 5P(1,0,3) + P(0,1,3) = 0 \\
 \mathbf{MP(1,0,4)} &\rightarrow P(1,0,4)(4 + 1) = P(0,0,4) \Rightarrow -5P(1,0,4) + P(0,0,4) = 0
 \end{aligned}$$

Έχουν προκύψει 30 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 41. Όπου κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 41 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0,0), P(0,0,1), \dots, P(1,3,1), P(1,4,0)$. Επίσης, έχουν σημειωθεί με κίτρινο χρώμα τα κελιά του πίνακα στα οποία αλλάζουν οι τιμές (σε σύγκριση με το μοντέλο NP/CS) εφόσον υπάρχει πρόσβαση των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή, δηλαδή η πιθανότητα $p_s > 0$.

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$SP(0,0,0)$	1	-11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,1)$	2	5	-11	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,0)$	3	5	0	-11	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,2)$	4	0	4	0	-6	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,1)$	5	0	5	5	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,0)$	6	0	0	4	0	0	-8	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,3)$	7	0	0	0	3	0	0	-6	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,2)$	8	0	0	0	0	4	0	0	-7	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,1)$	9	0	0	0	0	0	5	0	0	-8	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$SP(0,3,0)$	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$SP(0,0,4)$	11	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$SP(0,1,3)$	12	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$SP(0,2,2)$	13	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$SP(0,3,1)$	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$SP(0,4,0)$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$MP(1,0,0)$	16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,1)$	17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,1,0)$	18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	-6	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,2)$	19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,1,1)$	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0
$MP(1,2,0)$	21	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	-6	0	0	1	3	0	0	0	0	0
$MP(1,0,3)$	22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	4	1	0	0	0
$MP(1,1,2)$	23	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-8	0	0	0	3	2	0	0
$MP(1,2,1)$	24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-7	0	0	0	2	3	0
$MP(1,3,0)$	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	1	4
$MP(1,0,4)$	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0
$MP(1,1,3)$	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-5	0	0	0
$MP(1,2,2)$	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	-5	0	0
$MP(1,3,1)$	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	-5	0
$MP(1,4,0)$	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	-5

Πίνακας 41 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP.

[illegible]

$$P(0,0,0) + P(0,0,1) + \dots + P(0,4,0) + P(1,0,0) + P(1,0,1) + \dots + P(1,4,0) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^4 \sum_{n_h=0}^4 P(i, n_{new}, n_h) \cdot \mathbf{1}(n_{new} + n_h \leq 4)$$

[illegible]

Πίνακας 43 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP (με κανονικοποίηση).

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrix.reshish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 44 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

Matrix input

Insert matrix

Restore matrix

☐ Complex numbers (more)

Decimal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}	x_{30}	b
1	-11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	-11	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	0	-11	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	4	0	-6	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	5	5	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	4	0	0	-8	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	3	0	0	-6	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	4	0	0	-7	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	5	0	0	-8	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	-6	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	-6	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	4	1	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-8	0	0	0	3	2	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-7	0	0	0	2	3	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	1	4	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-5	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	-5	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	-5	0	0
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 44 - Σύστημα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP. Είσοδος των δεδομένων στο on-line σύστημα.

Στην έξοδο του on-line συστήματος εμφανίζονται οι τιμές για τους τριάντα άγνωστους x_1, x_2, \dots, x_{30} που είναι η επίλυση του συστήματος 30x30. Οι τριάντα αυτές τιμές αντιστοιχούν στις τριάντα πιθανότητες του συστήματος $P(0,0,0), P(0,0,1), \dots, P(1,4,0)$ και εμφανίζονται στον πίνακα Αποτελέσματα 31.

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
Solution set: $x_1 = 0.004168734958831140695$ $x_2 = 0.01850923765301837778$ $x_3 = 0.016984263878792099202$ $x_4 = 0.051986731704347489397$ $x_5 = 0.065506683275528898148$ $x_6 = 0.027873787084344901042$ $x_7 = 0.04946516013945121631$ $x_8 = 0.075118813686470717398$ $x_9 = 0.04257231381717147404$ $x_{10} = 0.011847038555437402919$ $x_{11} = 0.020610483391438006797$ $x_{12} = 0.048921598830573268029$ $x_{13} = 0.041237716912164622719$ $x_{14} = 0.019769042053329971343$ $x_{15} = 0.005428394059100415718$ $x_{16} = 0.010362583015332070314$ $x_{17} = 0.01327779270482257474$ $x_{18} = 0.044728970428338706465$ $x_{19} = 0.014369145509187058951$ $x_{20} = 0.045697020262365527498$ $x_{21} = 0.076939811676107130719$ $x_{22} = 0.0094672333273395344188$ $x_{23} = 0.034564732387130378961$ $x_{24} = 0.059427015131328081206$ $x_{25} = 0.065140728709204992073$ $x_{26} = 0.0041220966782876013596$ $x_{27} = 0.019251553093454188025$ $x_{28} = 0.035899329292137227711$ $x_{29} = 0.039610017489462842987$ $x_{30} = 0.02714197029550207859$	$P(0,0,0) = 0.0041687349$
	$P(0,0,1) = 0.0185092376$
	$P(0,1,0) = 0.0169842639$
	$P(0,0,2) = 0.0519867317$
	$P(0,1,1) = 0.0655066833$
	$P(0,2,0) = 0.0278737871$
	$P(0,0,3) = 0.0494651601$
	$P(0,1,2) = 0.0751188137$
	$P(0,2,1) = 0.0425723138$
	$P(0,3,0) = 0.0118470385$
	$P(0,0,4) = 0.0206104834$
	$P(0,1,3) = 0.0489215988$
	$P(0,2,2) = 0.0412377169$
	$P(0,3,1) = 0.0197690421$
	$P(0,4,0) = 0.0054283941$
	$P(1,0,0) = 0.0103625830$
	$P(1,0,1) = 0.0132777927$
	$P(1,1,0) = 0.0447289704$
	$P(1,0,2) = 0.0143691455$
	$P(1,1,1) = 0.0456970203$
	$P(1,2,0) = 0.0769398117$
	$P(1,0,3) = 0.0094672333$
	$P(1,1,2) = 0.0345647324$
	$P(1,2,1) = 0.0594270151$
	$P(1,3,0) = 0.0651407287$
	$P(1,0,4) = 0.0041220967$
	$P(1,1,3) = 0.0192515531$
	$P(1,2,2) = 0.0358993293$
	$P(1,3,1) = 0.0396100175$
	$P(1,4,0) = 0.0271419703$

Αποτελέσματα 41 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 30x30, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CP/BR για C=4 με πεπερασμένο πλήθος πηγών και t=2 δεσμευμένες θέσεις.

3.5.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 41 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις τριάντα (30) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §3.5.2, μπορεί να συμπληρωθεί ο Πίνακας 45 που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$SP(0,0,0)$	1	α	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,1)$	2	ε	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,0)$	3	δ	0	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,2)$	4	0	ε	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,1)$	5	0	δ	ε	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,0)$	6	0	0	δ	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,0,3)$	7	0	0	0	ε	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,1,2)$	8	0	0	0	δ	ε	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0	0
$SP(0,2,1)$	9	0	0	0	0	δ	ε	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0	0
$SP(0,3,0)$	10	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0	0
$SP(0,0,4)$	11	0	0	0	0	0	0	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0	0
$SP(0,1,3)$	12	0	0	0	0	0	0	δ	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0	0
$SP(0,2,2)$	13	0	0	0	0	0	0	0	δ	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0	0
$SP(0,3,1)$	14	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	ε	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m	0
$SP(0,4,0)$	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_m

		$P(0,0,0)$	$P(0,0,1)$	$P(0,1,0)$	$P(0,0,2)$	$P(0,1,1)$	$P(0,2,0)$	$P(0,0,3)$	$P(0,1,2)$	$P(0,2,1)$	$P(0,3,0)$	$P(0,0,4)$	$P(0,1,3)$	$P(0,2,2)$	$P(0,3,1)$	$P(0,4,0)$	$P(1,0,0)$	$P(1,0,1)$	$P(1,1,0)$	$P(1,0,2)$	$P(1,1,1)$	$P(1,2,0)$	$P(1,0,3)$	$P(1,1,2)$	$P(1,2,1)$	$P(1,3,0)$	$P(1,0,4)$	$P(1,1,3)$	$P(1,2,2)$	$P(1,3,1)$	$P(1,4,0)$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$MP(1,0,0)$	16	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,1)$	17	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,1,0)$	18	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	α	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,0,2)$	19	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0
$MP(1,1,1)$	20	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0
$MP(1,2,0)$	21	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	α	0	0	γ	β	0	0	0	0	0
$MP(1,0,3)$	22	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0	0
$MP(1,1,2)$	23	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0	0
$MP(1,2,1)$	24	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β	0
$MP(1,3,0)$	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	α	0	0	0	γ	β
$MP(1,0,4)$	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α	0	0	0	0
$MP(1,1,3)$	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0	0	0
$MP(1,2,2)$	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0	0
$MP(1,3,1)$	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α	0
$MP(1,4,0)$	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	α

Πίνακας 45 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 30x30 μοντέλου CP/BR για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με μία χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση, όπως αυτές έχουν εξαχθεί στην §3.5.2:

$$SP(0,0,0) \rightarrow -P(0,0,0)(N_{new}v_{new} + N_h v_h + \theta_s) + P(0,1,0)\mu_s + P(0,0,1)\mu_s + P(1,0,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,0) \rightarrow -P(0,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + v_h + \mu_s + \theta_s) + P(0,0,0)N_{new}v_{new} + P(0,2,0)2\mu_s + P(0,1,1)\mu_s + P(1,1,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2,0) \rightarrow -P(0,2,0)(N_h v_h + (N_{new} - n_{new})v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,3,0)3\mu_s + P(0,2,1)\mu_s + P(1,2,0)\theta_m = 0$$

$$SP(0,3,0) \rightarrow -P(0,3,0)(N_h v_h + N_{new} - n_{new})v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,4,0)4\mu_s + P(0,3,1)\mu_s + P(1,3,0)\theta_m + P(0,2,0)(N_{new} - n_{new})v_{new}p_s = 0$$

$$P(0,4,0) \rightarrow -P(0,4,0)(4\mu_s + \theta_s) + P(1,4,0)\theta_m + P(0,3,0)(N_{new} - n_{new})v_{new}p_s = 0$$

$$SP(0,0,1) \rightarrow -P(0,0,1)(N_{new}v_{new} + (N_h - 1)v_h + \mu_s + \theta_s) + P(0,0,0)N_h v_h + P(0,1,1)\mu_s + P(0,0,2)2\mu_s + P(1,0,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,1) \rightarrow -P(0,1,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - n_{new})v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,0,1)N_{new}v_{new} + P(0,1,0)N_h v_h + P(0,2,1)2\mu_s + P(0,1,2)2\mu_s + P(1,1,1)\theta_m = 0$$

$$SP(0,2,1) \rightarrow -P(0,2,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - n_{new})v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,2,0)N_h v_h + P(0,3,1)3\mu_s + P(0,2,2)2\mu_s + P(1,2,1)\theta_m + P(0,1,1)(N_{new} - n_{new})v_{new}p_s = 0$$

$$SP(0,3,1) \rightarrow -P(0,3,1)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,3,0)N_h v_h + P(1,3,1)\theta_m + P(0,2,1)(N_{new} - n_{new})v_{new}p_s = 0$$

$$SP(0,0,2) \rightarrow -P(0,0,2)((N_h - 2)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,0,1)(N_h - 1)v_h + P(0,1,2)\mu_s + P(0,0,3)3\mu_s + P(1,0,2)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,2) \rightarrow -P(0,1,2)((N_h - 2)v_h + (N_{new} - n_{new})v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,1,1)(N_h - 1)v_h + P(0,2,2)2\mu_s + P(0,1,3)3\mu_s + P(1,1,2)\theta_m + P(0,0,2)(N_{new}v_{new})p_s = 0$$

$$SP(0,2,2) \rightarrow -P(0,2,2)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,2,1)(N_h - 1)v_h + P(1,2,2)\theta_m + P(0,1,2)(N_{new} - n_{new})v_{new}p_s = 0$$

$$SP(0,0,3) \rightarrow -P(0,0,3)((N_h - 3)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,0,2)(N_h - 2)v_h + P(0,1,3)\mu_s + P(0,0,4)4\mu_s + P(1,0,3)\theta_m = 0$$

$$SP(0,1,3) \rightarrow -P(0,1,3)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,1,2)(N_h - 2)v_h + P(1,1,3)\theta_m + P(0,0,3)(N_{new}v_{new})p_s = 0$$

$$SP(0,0,4) \rightarrow -P(0,0,4)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,0,3)(N_h - 3)v_h + P(1,0,4)\theta_m = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις δεκαπέντε (15) καταστάσεις στην MP:

$$MP(1,0,0) \rightarrow -P(1,0,0)(N_{new}v_{new} + \theta_m) + P(1,1,0)\mu_m + P(1,0,1)\mu_m + P(0,0,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,1,0) \rightarrow -P(1,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + \mu_m + \theta_m) + P(1,0,0)N_{new}v_{new} + P(1,2,0)2\mu_m + P(1,1,1)\mu_m + P(0,1,0)\theta_s = 0$$

$$MP(1,2,0) \rightarrow -P(1,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(1,3,0)3\mu_m + P(1,2,1)\mu_m + P(0,2,0)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,3,0) \rightarrow -P(1,3,0)((N_{\text{new}} - 3)v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,2,0)(N_{\text{new}} - 2)v_{\text{new}} + P(1,4,0)4\mu_m + P(1,3,1)\mu_m + P(0,3,0)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,4,0) \rightarrow -P(1,4,0)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,3,0)(N_{\text{new}} - 3)v_{\text{new}} + P(0,4,0)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,0,1) \rightarrow -P(1,0,1)(N_{\text{new}}v_{\text{new}} + \mu_m + \theta_m) + P(1,1,1)\mu_m + P(1,0,2)2\mu_m + P(0,0,1)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,1,1) \rightarrow -P(1,1,1)((N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,0,1)N_{\text{new}}v_{\text{new}} + P(1,2,1)2\mu_m + P(1,1,2)2\mu_m + P(0,1,1)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,2,1) \rightarrow -P(1,2,1)((N_{\text{new}} - 2)v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,1,1)(N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + P(1,3,1)3\mu_m + P(1,2,2)2\mu_m + P(0,2,1)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,3,1) \rightarrow -P(1,3,1)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,2,1)(N_{\text{new}} - 2)v_{\text{new}} + P(0,3,1)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,0,2) \rightarrow -P(1,0,2)(N_{\text{new}}v_{\text{new}} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,1,2)\mu_m + P(1,0,3)3\mu_m + P(0,0,2)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,1,2) \rightarrow -P(1,1,2)((N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,0,2)N_{\text{new}}v_{\text{new}} + P(1,2,2)2\mu_m + P(1,1,3)3\mu_m + P(0,1,2)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,2,2) \rightarrow -P(1,2,2)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,1,2)(N_{\text{new}} - 1)v_{\text{new}} + P(0,2,2)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,0,3) \rightarrow -P(1,0,3)(N_{\text{new}}v_{\text{new}} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,1,3)\mu_m + P(1,0,4)4\mu_m + P(0,0,3)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,1,3) \rightarrow -P(1,1,3)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,0,3)N_{\text{new}}v_{\text{new}} + P(0,1,3)\theta_s = 0$$

$$\text{MP}(1,0,4) \rightarrow -P(1,0,4)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,0,4)\theta_s = 0$$

$$a = \begin{cases} -((N_{\text{new}} - n_{\text{new}})v_{\text{new}} + (N_h - n_h)v_h + \mu_s(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -((N_h - n_h)v_h + (N_{\text{new}} - n_{\text{new}})v_{\text{new}}p_s + \mu_s(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -(\mu_s(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } n = C \\ -((N_{\text{new}} - n_{\text{new}})v_{\text{new}} + \mu_m(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \\ -(\mu_m(n_{\text{new}} + n_h) + \theta_m), & i = 1 \text{ για } n = C \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \mu_s n_{\text{new}}, & i = 0 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 0 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \\ \mu_m n_{\text{new}}, & i = 1 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 1 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \mu_s n_h, & i = 0 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 0 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \\ \mu_m n_h, & i = 1 \text{ για } 0 \leq (n_{\text{new}} + n_h) < C \\ 0, & i = 1 \text{ για } n_{\text{new}} + n_h = C \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & i = 0, \quad 0 = n_{\text{new}} \\ (N_{\text{new}} - n_{\text{new}} + 1)v_{\text{new}}, & i = 0, \quad 0 < n_{\text{new}} + n_h \leq C - t \\ (N_{\text{new}} - n_{\text{new}} + 1)v_{\text{new}}p_s, & i = 0, \quad C - t < n_{\text{new}} + n_h \leq C \\ (N_{\text{new}} - n_{\text{new}} + 1)v_{\text{new}}, & i = 1, \quad 0 \leq n_{\text{new}} \leq C \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (N_h - n_h + 1)v_h, & i = 0, \quad 0 < n_h \leq C \\ 0, & i = 1, \quad 0 < n_h \leq C \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 45 προκύπτει μια γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από τις παραπάνω δεκαεννέα (19) συνολικά εξισώσεις και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C και δεσμευμένη χωρητικότητα t . Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε την υλοποίηση του Πίνακα 45 στη γλώσσα προγραμματισμού

Η εν λόγω υλοποίηση του πίνακα έγινε με τη συνάρτηση την οποία έχουμε ονομάσει `create_array` και παίρνει ως είσοδο όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος `C`, `t`, `ps`, `Nnew`, `Nh`, `vnew`, `vh`, `ms`, `mm`, `xs` και `xm` και επιστρέφει τον πίνακα για τις τιμές που δόθηκαν στα παραπάνω χαρακτηριστικά. Αν τρέξουμε τον Κώδικα 33, δηλαδή καλέσουμε τη συνάρτηση για τις τιμές του παραδείγματος, οι οποίες είναι:

θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 42) στην έξοδο της συνάρτησης, τον οποίο και εκτυπώνουμε. Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τον Πίνακα 41, τον οποίο έχουμε υλοποιήσει στην §3.5.2.

Διπλωματική Εργασία

[illegible]

Διπλωματική Εργασία

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα \mathbf{b} , προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του συστήματος. Με τη χρήση της συνάρτησης **np.linalg.solve(A, b)**, η οποία παρέχεται από τη βιβλιοθήκη numpy της Python, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 44). Τα αποτελέσματα τα αποθηκεύουμε σε έναν δισδιάστατο πίνακα $R[x,y]$, ώστε να μπορούμε να τα εμφανίσουμε αλλά και να τα χρησιμοποιήσουμε αργότερα σε απαραίτητους υπολογισμούς.

Πιθανότητες-Αποτελέσματα:	

$p(0, 0, 0)$	$= 0.0041687350$
$p(0, 0, 1)$	$= 0.0185092377$
$p(0, 1, 0)$	$= 0.0169842639$
$p(0, 0, 2)$	$= 0.0519867317$
$p(0, 1, 1)$	$= 0.0655066833$
$p(0, 2, 0)$	$= 0.0278737871$
$p(0, 0, 3)$	$= 0.0494651601$
$p(0, 1, 2)$	$= 0.0751188137$
$p(0, 2, 1)$	$= 0.0425723138$
$p(0, 3, 0)$	$= 0.0118470386$
$p(0, 0, 4)$	$= 0.0206104834$
$p(0, 1, 3)$	$= 0.0489215988$
$p(0, 2, 2)$	$= 0.0412377169$
$p(0, 3, 1)$	$= 0.0197690421$
$p(0, 4, 0)$	$= 0.0054283941$
$p(1, 0, 0)$	$= 0.0103625830$
$p(1, 0, 1)$	$= 0.0132777927$
$p(1, 1, 0)$	$= 0.0447289704$
$p(1, 0, 2)$	$= 0.0143691455$
$p(1, 1, 1)$	$= 0.0456970203$
$p(1, 2, 0)$	$= 0.0769398117$
$p(1, 0, 3)$	$= 0.0094672333$
$p(1, 1, 2)$	$= 0.0345647324$
$p(1, 2, 1)$	$= 0.0594270151$
$p(1, 3, 0)$	$= 0.0651407287$
$p(1, 0, 4)$	$= 0.0041220967$
$p(1, 1, 3)$	$= 0.0192515531$
$p(1, 2, 2)$	$= 0.0358993293$
$p(1, 3, 1)$	$= 0.0396100175$
$p(1, 4, 0)$	$= 0.0271419703$

Αποτελέσματα 44 - Πιθανότητες μοντέλου CP/BR (30x30) για $C=4$ και $t=2$.

Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 44 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §3.5.3 (Αποτελέσματα 41) με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων.

3.5.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) για το μοντέλο CP/BR, με πεπερασμένο πλήθος πηγών και t δεσμευμένες θέσεις. Επίλυση με μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python

Στο παρόν κεφάλαιο θα υπολογιστούν τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν την ποιότητα εξυπηρέτησης του συστήματος CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Τα μεγέθη που θα υπολογίσουμε είναι (Vlasakis et al., 2023):

- Η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο νέων κλήσεων $B_{new(TCPr)}$ υπολογίζεται ως το διπλό άθροισμα των πιθανοτήτων αρχικά να βρισκόμαστε σε οποιαδήποτε από τις δύο φάσεις (SP και MP) και το άθροισμα των πιθανοτήτων όταν οι κλήσεις που εξυπηρετούνται από το σύστημα να είναι $n_{new} + n_h = C$. Επίσης, στην περίπτωση που είμαστε στην SP ($i=0$) στην οποία υπάρχουν οι δεσμευμένες θέσεις προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής και έρθει μία νέα κλήση ενώ είμαστε στη δεσμευμένη περιοχή αυτή θα απορριφθεί. Η δεσμευμένη περιοχή ξεκινάει από την κατάσταση $n_{new} + n_h = C - t$ και φθάνει μέχρι την $C - 1$ κατάσταση με πιθανότητα να βρεθεί στην εν λόγω περιοχή $1 - p_s$. Η συνολική πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new(TCPr)} = (1 - p_s) \sum_{n_{new} + n_h = C-t}^{C-1} P(0, n_{new}, n_h) + \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^C P(i, n_{new}, C - n_{new}) \quad (3.6)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{new(TCPr)} &= P(0,0,4) + P(0,1,3) + P(0,2,2) + P(0,3,1) + P(0,4,0) + P(1,0,4) + P(1,1,3) \\ &+ P(1,2,2) + P(1,3,1) + P(1,4,0) + (1 - p_s) * [P(0,2,0) + P(0,1,1) + P(0,0,2) + P(0,3,0) \\ &+ P(0,2,1) + P(0,1,2) + P(0,0,3)] = \\ &+ 0,0206105 + 0,0489216 + 0,0412377 + 0,0197691 + 0,0054284 + 0,0041221 + \\ &+ 0,0192516 + 0,0358993 + 0,03961 + 0,0271419 + [(1 - p_s) * (0,0278738 + 0,0655067 \\ &+ 0,0519867 + 0,011847 + 0,0425723 + 0,0751188 + 0,0494652)] = \\ &0,2619922 + (1 - p_s) * 0,3243705 = \mathbf{0,5863627} \end{aligned}$$

- Η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο των κλήσεων μεταπομπής $B_h(TCPr)$ η οποία μπορεί να συμβεί αποκλειστικά κατά τη διάρκεια που το όχημα είναι σταματημένο (SP). Είναι η δεσμευμένη πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί σε κατάσταση στην οποία το άθροισμα

των πιθανοτήτων των κλήσεων που εξυπηρετούνται από το σύστημα να είναι $n_{new} + n_h = C$, με δεδομένο ότι το σύστημα βρίσκεται αποκλειστικά στη φάση SP. Η πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:

$$B_{h(TCPr)} = \frac{\sum_{n_{new}+n_h=C}^C P(0, n_{new}, C)}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^C P(0, n_{new}, C)} = \frac{\sum_{n_{new}=0}^C P(0, n_{new}, C - n_{new})}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^C P(0, n_{new}, n_h)} \quad (3.7)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{h(TCPr)} &= \frac{\sum_{n_{new}=0}^C P(0, n_{new}, C - n_{new})}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^C P(0, n_{new}, n_h)} = \frac{P(0,0,4)+P(0,1,3)+P(0,2,2)+P(0,3,1)+P(0,4,0)}{P(0,0,0)+P(0,0,1)+P(0,1,0)+\dots+P(0,2,2)+P(0,3,1)+P(0,4,0)} = \\ &= \frac{0,0206105 + 0,0489216 + 0,0412377 + 0,019769 + 0,0054284}{0,0041687 + 0,0185092 + 0,0169842 + \dots + 0,0412377 + 0,019769 + 0,0054283} = \\ &= \frac{0,1359672}{0,5} = \mathbf{0,2719344} \end{aligned}$$

- Τελευταίο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα, είναι η αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Το U_c υπολογίζεται κατά τα γνωστά, από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) της §3.5.5. Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=0}^C (n_{new} + n_h) \cdot P(i, n_{new}, n_h) = \\ &= 0 \cdot P(0,0,0) + 1 \cdot P(0,0,1) + 1 \cdot P(0,1,0) + 2 \cdot P(0,0,2) + 2 \cdot P(0,2,0) + \dots + 4 \cdot P(0,4,0) \\ &+ 0 \cdot P(1,0,0) + 1 \cdot P(1,0,1) + 1 \cdot P(1,1,0) + 2 \cdot P(1,0,2) + 2 \cdot P(1,2,0) + \dots + 4 \cdot P(1,4,0) \\ &= 0 \cdot 0,0041687 + 1 \cdot 0,0185092 + 1 \cdot 0,0169843 + 2 \cdot 0,0519867 + \dots + 4 \cdot 0,0054284 + \\ &+ 0 \cdot 0,0103626 + 1 \cdot 0,01327778 + 1 \cdot 0,044729 + 2 \cdot 0,0143692 + \dots + 4 \cdot 0,027142 = \\ &= \mathbf{2,7490245} \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{2,7490245}{4} = \mathbf{0,6872561}$$

Για τον υπολογισμό της CBP για $B_{new(CBP)}$ θα χρησιμοποιηθεί και πάλι ο τύπος (3.6) αλλά θα πρέπει να υπολογιστούν εκ νέου οι πιθανότητες με τη μείωση του πλήθους των πηγών που παράγουν τις νέες κλήσεις κατά ένα δηλαδή $N_{new} - 1$ (Vlasakis, M., et al. 2023).

Αντιστοίχως, για τον υπολογισμό της CBP για $B_h(CBP)$ θα χρησιμοποιηθεί και πάλι ο τύπος (3.7) αλλά θα πρέπει να υπολογιστούν εκ νέου οι πιθανότητες με τη μείωση του πλήθους των πηγών που παράγουν τις κλήσεις μεταπομπής, δηλαδή $N_h - 1$. (Vlasakis, M., et al. 2023).

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον Κώδικα 34 (βλ. Παράρτημα Α), που είναι η επέκταση της συνάρτησης `def create_array(C, t, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία

παρουσιάστηκε στον Κώδικα 33. Με την επέκταση στο 3^ο μέρος έχουμε την υλοποίηση των υπολογισμών για τα μεγέθη του QoS δηλαδή τα B_{new} , B_h , U και U_c .

Μετά την κλήση του Κώδικα 34 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 45) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν με τη χρήση των τύπων (3.4), (3.5), (3.6) και (3.7).

```

> 236 # Κλήση της συνάρτησης
> 237 A = create_array(C=4, t=2, ps=0, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
> 238

Run create_array+solution_Qos_CP_BR(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.586362730358202
Bh   = 0.271934470493213
U    = 2.749024539331136
Uc   = 0.687256134832784

```

Αποτελέσματα 45 - Υπολογισμοί μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=4$, $t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).

Στη συνέχεια, ξανατρέχουμε τον Κώδικα 34 ακόμα δύο φορές με μειωμένες αντιστοίχως τις τιμές των πηγών N_{new} και N_h κατά ένα. Στα Αποτελέσματα 46 και 47 παρουσιάζεται η κλήση της συνάρτησης, καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων (CBP) για νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής.

```

> 236 # Κλήση της συνάρτησης
> 237 A = create_array(C=4, t=2, ps=0, Nnew=4, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
> 238

Run create_array+solution_Qos_CP_BR(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.538290141903237

```

Αποτελέσματα 46 - Υπολογισμός CP/BR των νέων κλήσεων B_{new} για το μοντέλου CP/BR με $C=4$, $t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = 4$, $N_h = 5$).

```

> 236 # Κλήση της συνάρτησης
> 237 A = create_array(C=4, t=2, ps=0, Nnew=5, Nh=4, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
> 238

Run create_array+solution_Qos_CP_BR(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bh   = 0.201549551665335

```

Αποτελέσματα 47 - Υπολογισμός CP/BR των κλήσεων μεταπομπής B_h για το μοντέλου CP/BR με $C=4$, $t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = 5$, $N_h = 4$).

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο για τις νέες κλήσεις είναι $B_{new(TCPr)}=0,58636$ ενώ η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι $B_{new(CBP)}=0,53829$. Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι μικρότερη από την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο, δηλαδή την πιθανότητα να βρεθούν όλοι οι επεξεργαστές κατειλημμένοι. Στην πραγματικότητα η απόρριψη της κλήσης έρχεται μετά τη συμφόρηση και απαιτεί τουλάχιστον μία ακόμη κλήση.

Αντίστοιχα και για πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο για τις κλήσεις μεταπομπής έχουμε $B_h(TCPr)=0,27193$ ενώ η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι $B_h(CBP)=0,20154$. Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής, με το ίδιο σκεπτικό είναι μικρότερη από την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο και για τις κλήσεις μεταπομπής.

Στο μοντέλο CP/BR για να έχουμε απόρριψη νέας κλήσης θα πρέπει να ισχύει ότι $n_{new} + n_h \geq C - t$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η παράμετρος p_s . Αντιστοίχως για να έχουμε απόρριψη κλήσης μεταπομπής θα πρέπει να ισχύει ότι $n_{new} + n_h = C$.

3.5.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

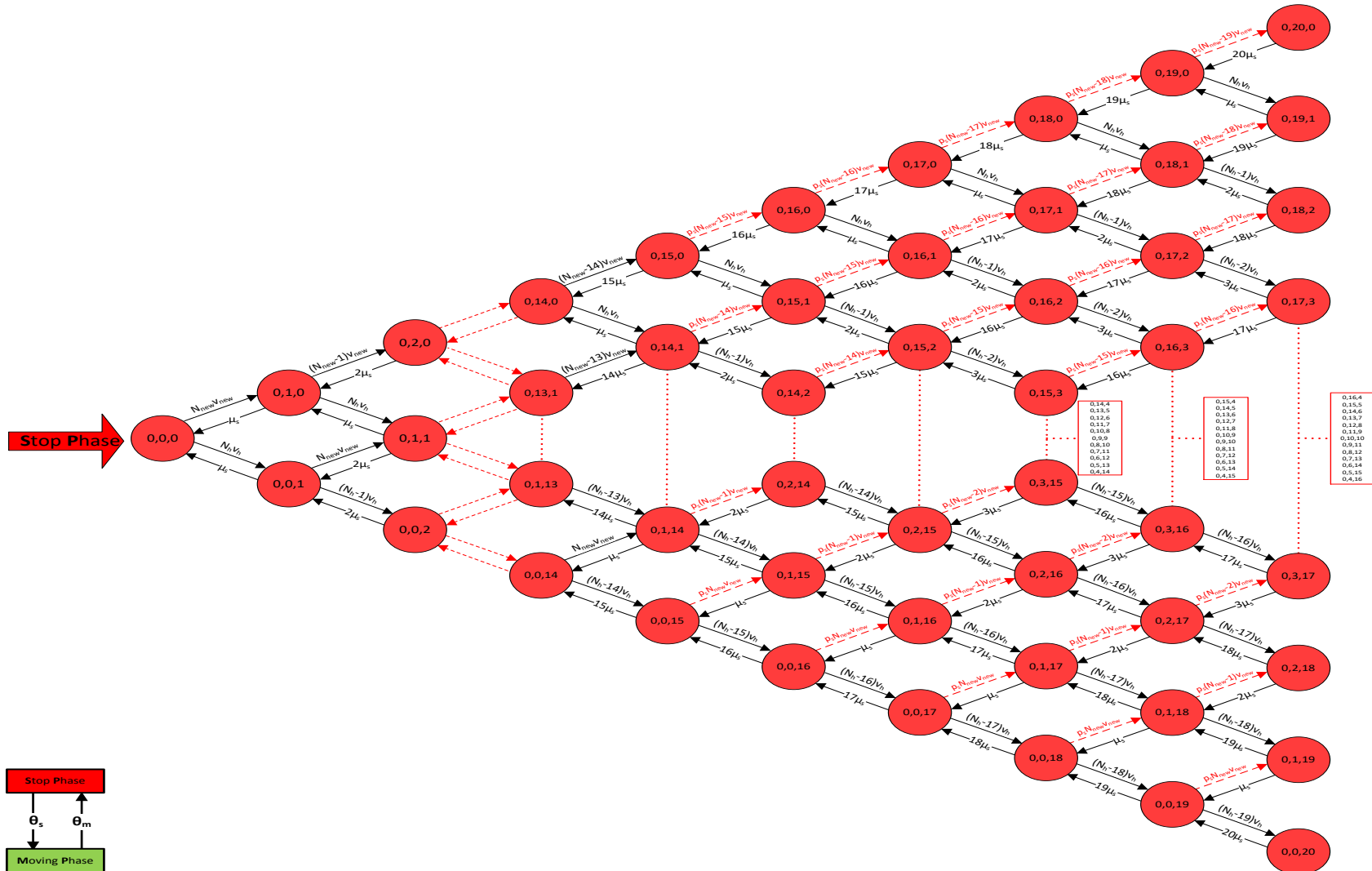
Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα CP/BR το οποίο θα έχει χαρακτηριστικά μεγέθη τα οποία είναι πιο κοντά στα πραγματικά μεγέθη του εξεταζόμενου συστήματος, δηλαδή του κινούμενου οχήματος π.χ. λεωφορείου στο οποίο λειτουργεί το εξεταζόμενο σημείο πρόσβασης (Mobile Hotspot) που εξυπηρετεί τους χρήστες. Το εξεταζόμενο σύστημα θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$C=20, t=5, p_s=0, N_{new}=40, N_h=40, v_{new}=1/2, v_h=1/2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

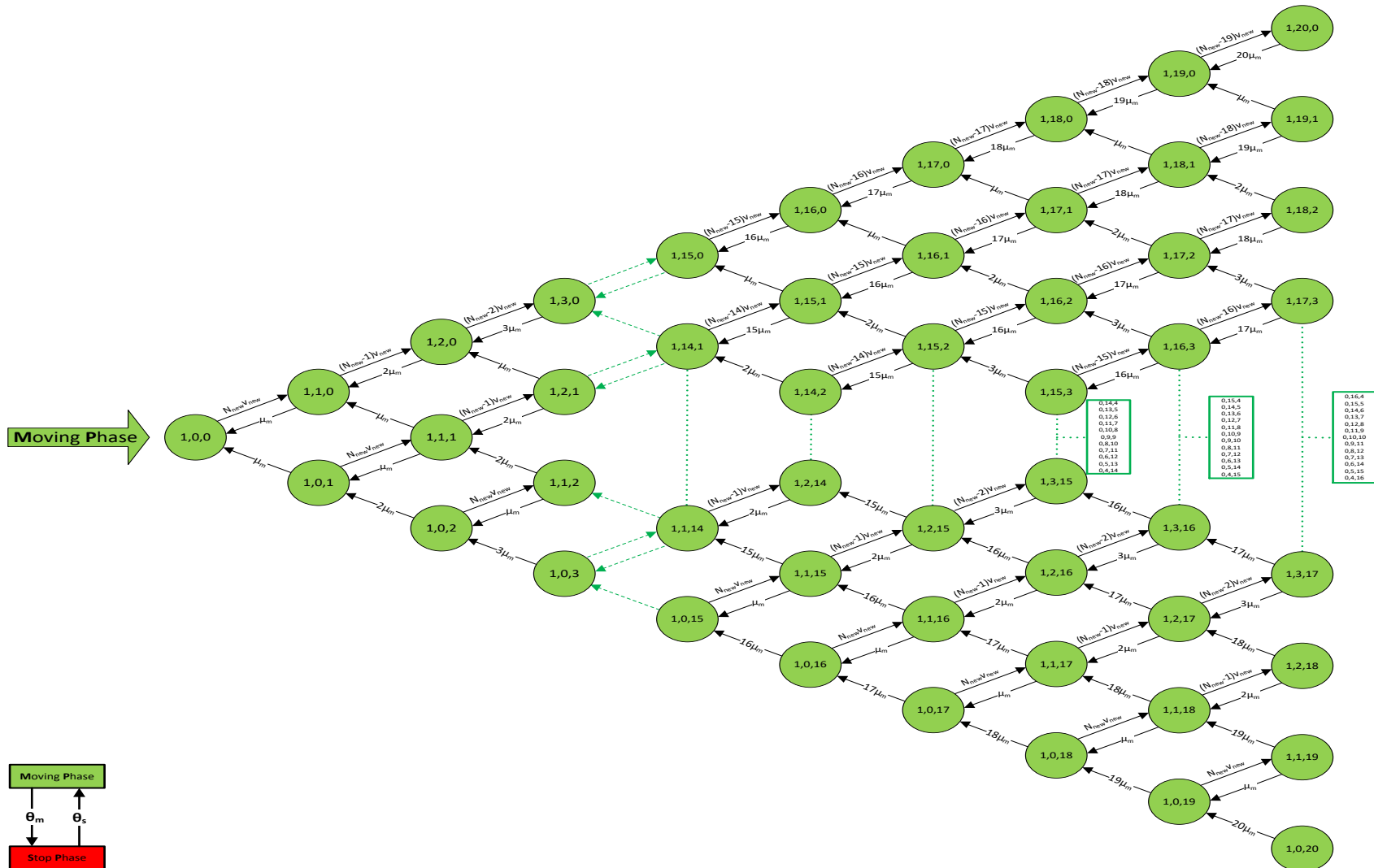
Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι σύμφωνα με τον τύπο (3.1):

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{c+1} n = \sum_{i=0}^1 (1 + 2 + \dots + 21) = \sum_{i=0}^1 (231) = 231 + 231 = 462 \text{ καταστάσεις}$$

Άρα θα έχουμε 462 καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί, με τη Μαρκοβιανή αλυσίδα στα Σχήματα 38(SP) και 39(MP).



Σχήμα 38 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ και $t=5$ (αναπαράσταση της SP).



Σχήμα 39 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$ και $t=5$ (αναπαράσταση της MP).

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 34 (βλ. Παράρτημα Α) με τα παραπάνω μεγέθη θα προκύψει ο πίνακας-σύστημα 462×462 (213.444 κελιά!) το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο να λυθεί χωρίς τη χρήση λογισμικού. Με τη βοήθεια της Python και του Κώδικα 34 επιλύουμε το εν λόγω σύστημα και στο Αποτέλεσμα 48 εμφανίζεται η κλήση της συνάρτησης για χωρητικότητα $C=20$, δεσμευμένη χωρητικότητα προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής $t=5$ και πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=40$ μαζί με τα υπόλοιπα μεγέθη του εν λόγω συστήματος και στην έξοδο έχουμε τα επιστρεφόμενα αποτελέσματα για τις τιμές του QoS. Οι τιμές $B_{new(TCPr)}$ και $B_{h(TCPr)}$ προσδιορίζουν τις πιθανότητες συμφόρησης στον χρόνο.

```

> 236 # Κλήση της συνάρτησης
> 237 A = create_array(C=20, t=5, ps=0, Nnew=40, Nh=40, vnew=1/2, vh=1/2, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
> 238
Run create_array+solution_Qos_CP_BR(Kef.3) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.436651277945535
Bh   = 0.065705355311275
U    = 15.693626307202585
Uc   = 0.784681315360129

```

Αποτελέσματα 48 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CP/BR για $C=20$ και $t=5$ ($N_{new}=N_h=40$).

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα απόρριψης κλήσεων (CBP) για νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής, εκτελούμε ξανά τον Κώδικα 34, μειώνοντας κατά ένα τις τιμές των πηγών N_{new} και N_h (Vlasakis, M., et al. 2023). Στα Αποτελέσματα 49 και 50 παρουσιάζονται οι υπολογισμοί των πιθανοτήτων απόρριψης για $B_{new(CBP)}$ και $B_{h(CBP)}$.

```

> 236 # Κλήση της συνάρτησης
> 237 A = create_array(C=20, t=5, ps=0, Nnew=39, Nh=40, vnew=1/2, vh=1/2, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
> 238
Run create_array+solution_Qos_CP_BR(Kef.3) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bnew = 0.429744067175182

```

Αποτελέσματα 49 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το μοντέλου CP/BR με $C=20$ και $t=5$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=39$, $N_h=40$).

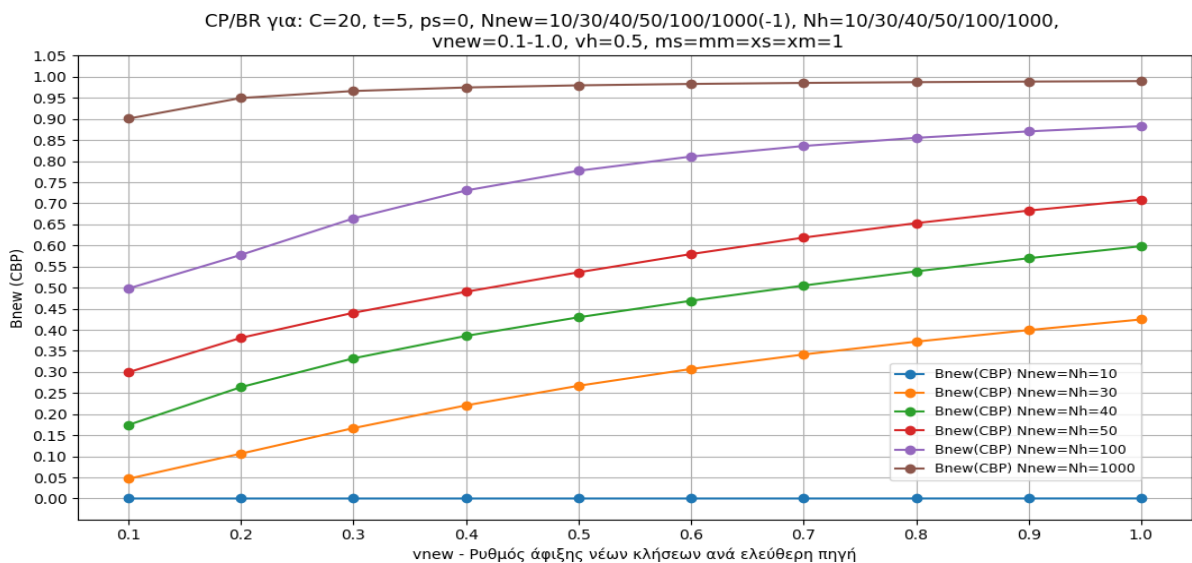
```

> 236 # Κλήση της συνάρτησης
> 237 A = create_array(C=20, t=5, ps=0, Nnew=40, Nh=39, vnew=1/2, vh=1/2, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
> 238
Run create_array+solution_Qos_CP_BR(Kef.3) x
3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)
=====
Bh   = 0.059843342844739

```

Αποτελέσματα 50 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ για το μοντέλου CP/BR με $C=20$ και $t=5$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=40$, $N_h=39$).

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον Κώδικα 34 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `create_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $v_{new}(0,1-1,0)$. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_vnew(C, t, ps, Nnew, Nh, rate_vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 35 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 4Α (Κώδικα 35) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(vnew_values, results_array1...results_array6)` της οποίας η έξοδος είναι οι έξι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 40. Στον Κώδικα 35 παρουσιάζεται και η κλήση των συναρτήσεων για τη δημιουργία των γραφικών παραστάσεων (Σχήμα 40).



Σχήμα 40 - Αναπαράσταση του $B_{new(CBP)}$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$, $p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 40

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$, παρατηρούμε ότι γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Αρχικά στην περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=10$ όπως είναι αναμενόμενο δεν υπάρχει απόρριψη κλήσεων ούτε συμφόρηση κλήσεων στο δίκτυο διότι υπάρχει για κάθε κλήση που παράγεται από τις διαθέσιμες πηγές, μία BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 40 με τη μπλε καμπύλη και ισχύει για κάθε περίπτωση που η χωρητικότητα του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τις διαθέσιμες πηγές δηλαδή $N_{new} < C$.
- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για την περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=1000$, με δεδομένο ότι η χωρητικότητά $C=20$, όπως είναι αναμενόμενο είναι εξαιρετικά υψηλή. Δεν υπάρχουν διαθέσιμες BU για να εξυπηρετήσουν τις κλήσεις

που δημιουργούν οι πολλές διαθέσιμες πηγές. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 40 με την καφέ καμπύλη και βλέπουμε ότι η απόρριψη κλήσεων είναι σχεδόν δεδομένη και σε κάθε περίπτωση $B_{new(CBP)} > 0,9008$ (για $v_{new}=0,1$). Συμπερασματικά θα πούμε ότι όταν ισχύει ότι $N_{new} \gg C$, το σύστημα είναι πρακτικά μη λειτουργικό.

- Στις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις για τις ενδιαμέσες τιμές, δηλαδή για τιμές $N_{new}=N_h=30/40/50/100$ οι γραφικές παραστάσεις είναι σχεδόν γραμμικές. Δηλαδή η αύξηση της απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ είναι περίπου ανάλογη με την αύξηση του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Βλέπουμε στο Σχήμα 40 με την κόκκινη καμπύλη απεικονίζουμε την απόρριψη νέων κλήσεων για $N_{new}=N_h=50$ και παρατηρούμε ότι για ρυθμό άφιξης κλήσεων $v_{new}=0,1$ η απόρριψη νέων κλήσεων είναι $B_{new}=0,299$, εάν πενταπλασιάσουμε τον ρυθμό άφιξης σε $v_{new}=0,5$ η απόρριψη νέων κλήσεων θα γίνει είναι $B_{new}=0,536$ τείνει να διπλασιαστεί. Να υπενθυμίσουμε ότι αντίστοιχα στο μοντέλο NP/CS έχουμε $N_{new}=N_h=50$ για $v_{new}=0,1$ η απόρριψη νέων κλήσεων είναι $B_{new}=0,072$. Όταν πενταπλασιάζουμε τον ρυθμό άφιξης σε $v_{new}=0,5$ η απόρριψη νέων κλήσεων γίνεται $B_{new}=0,323$, δηλαδή η τιμή σχεδόν πενταπλασιάζεται.
- Αν συγκρίνουμε το Σχήμα 40 που αφορά το μοντέλο CB/BR με το αντίστοιχο Σχήμα 34 που αφορά το μοντέλο NP/CS, παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το σύνολο των γραφικών παραστάσεων είναι μεγαλύτερη στο μοντέλο CP/BR, αυτό δείχνει και η σύγκριση στον Πίνακα 46.

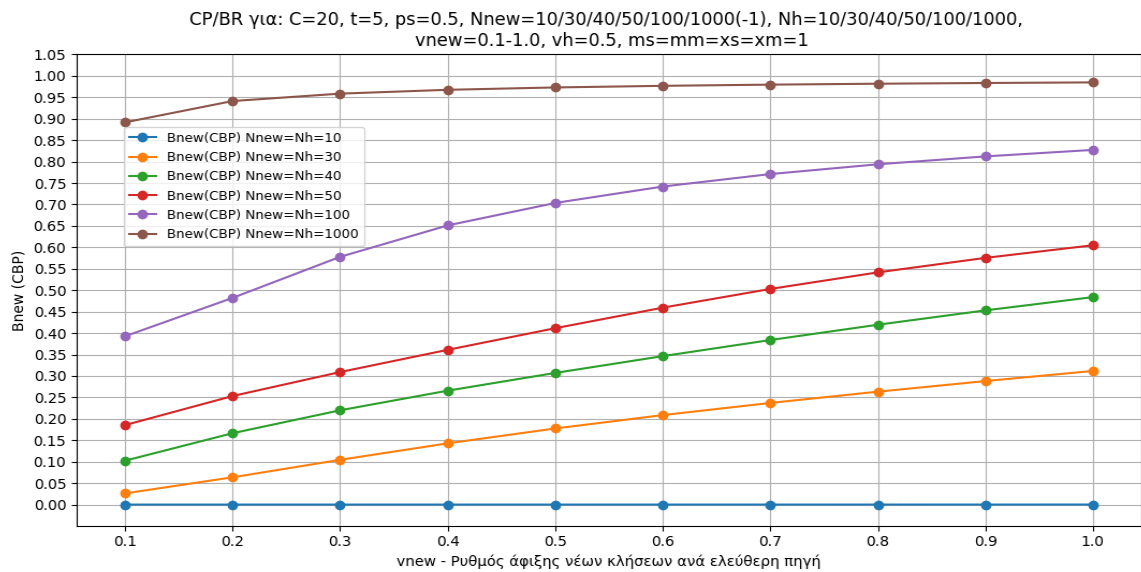
$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $p_s = 0$	$B_{new(CBP)}$				
	$N_{new}=N_h=30$	$N_{new}=N_h=40$	$N_{new}=N_h=50$	$N_{new}=N_h=100$	$N_{new}=N_h=1000$
NP/CS	0,0701047	0,2011733	0,3238317	0,6641101	0,9696218
CP/BR	0,2673641	0,429744	0,5364584	0,7772343	0,9797656

Πίνακας 46 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20, t=5, p_s=0$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).

Στον Πίνακα 46 βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή πλήθους πηγών, πλην της τιμής $N_{new}=N_h=10$, οι πιθανότητες απόρριψης νέων κλήσεων είναι πάντα μεγαλύτερη στο μοντέλο CP/BR. Αυτό είναι επόμενο διότι όπως βλέπουμε και στη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το εν λόγω μοντέλο στο Σχήμα 38 υπάρχει η δεσμευμένη περιοχή ($t=5$) η οποία είναι για αποκλειστική χρήση από τις κλήσεις μεταπομπής και μάλιστα έχουμε ορίσει πιθανότητα $p_s=0$ που σημαίνει ότι δεν θα χρησιμοποιηθεί το εν λόγω τμήμα από νέες κλήσεις, άρα θα υπάρξει κορεσμός του συστήματος και απόρριψη κλήσεων πιο

σύντομα. Αυτός είναι και ο λόγος που η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ είναι πάντα μεγαλύτερη στο μοντέλο CP/BR έναντι του NP/CS.

- Μία ακόμα παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι όσο μικρότερος είναι ο αριθμός πηγών (N_{new} , N_h) τόσο μεγαλύτερη είναι αυτή η διαφορά, για παράδειγμα στη μεγαλύτερη τιμή η οποία είναι $N_{new}=N_h=1000$ η διαφορά υπάρχει, αλλά είναι πολύ μικρή. Στο μοντέλο CP/BR έχουμε $B_{new(CBP)}=0,9797$ έναντι του μοντέλου NP/CS που είναι $B_{new(CBP)}=0,9696$. Αυτό οφείλεται στο ότι συνολικά στο σύστημα έχει επέλθει ο κορεσμός άρα μειώνονται στο ελάχιστο οι διαθέσιμες BU άρα και αυξάνονται συνολικά οι πιθανότητες απόρριψης όλων των κλήσεων στο σύστημα.
- Αν ξανατρέξουμε τον κώδικα μεταβάλλοντας μόνο την πιθανότητα σε $p_s=0,5$, δηλαδή θα δώσουμε τη δυνατότητα τμήμα της δεσμευμένης χωρητικότητας να χρησιμοποιηθεί και από τις νέες κλήσεις, τότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 41.



Σχήμα 41 - Αναπαράσταση του $B_{new(CBP)}$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$ και $p_s=0,5$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών, για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

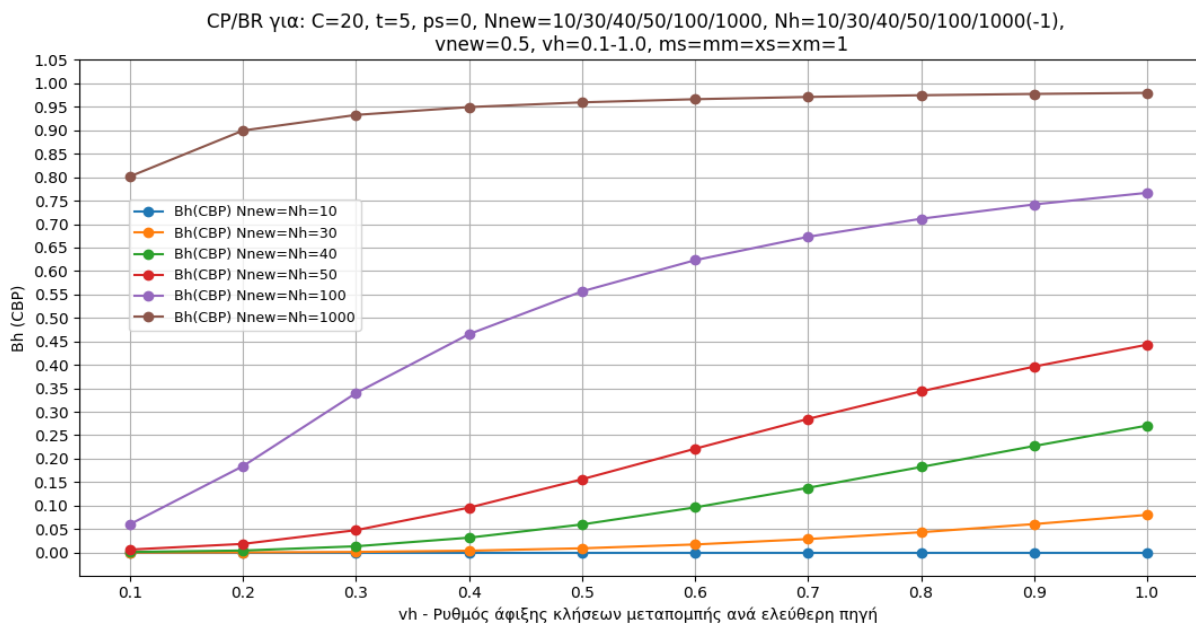
Μετά τη μεταβολή της πιθανότητας $p_s=0 \rightarrow 0,5$ επαναυπολογίζουμε τιμές για την πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$	$B_{new(CBP)}$				
	$N_{new}=N_h=30$	$N_{new}=N_h=40$	$N_{new}=N_h=50$	$N_{new}=N_h=100$	$N_{new}=N_h=1000$
NP/CS ($p_s=0$)	0,0701047	0,2011733	0,3238317	0,6641101	0,9696218
CP/BR ($p_s=0$)	0,2673641	0,429744	0,5364584	0,7772343	0,9797656
CP/BR ($p_s=0,5$)	0,1775273	0,3070886	0,4113833	0,703555	0,9730114

Πίνακας 47 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$, $p_s=0,5$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 47 με την «πρόσβαση» πλέον των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή, με πιθανότητα $p_s=0,5$, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ από το σύστημα, μειώνεται σημαντικά. Η μείωση είναι αναλογικά μεγαλύτερη όταν έχουμε μικρότερο πλήθος πηγών οι οποίες δημιουργούν την τηλεπικοινωνιακή κίνηση (N_{new}, N_h). Η μικρή μείωση της $B_{new(CBP)}$ για τις υψηλές τιμές των πηγών (N_{new}, N_h) οφείλεται στο κορεσμό του συστήματος και τις ελάχιστες διαθέσιμες θέσεις BU τις οποίες «διεκδικούν» πλέον πολλές περισσότερες κλήσεις με μικρότερες πιθανότητες επιτυχίας. Εάν στο μοντέλο CP/BR η πιθανότητα $p_s=1$, τότε έχουμε μεταβεί στο μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου το NP/CS διότι στην πραγματικότητα καταργούμε τη δεσμευμένη περιοχή.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον Κώδικα 34 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `create_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $v_h(0,1-1,0)$. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 5^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_vh(C, t, ps, Nnew, Nh, vnew, rate_vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 36 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 5Α (Κώδικα 36) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results1(vh_values, results_array1, results_array2, ...results_array6)` της οποίας η έξοδος είναι οι έξι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 42. Στον Κώδικα 36 παρουσιάζεται και η κλήση των συναρτήσεων για τη δημιουργία των γραφικών παραστάσεων (Σχήμα 42).



Σχήμα 42 - Αναπαράσταση του $B_{h(CBP)}$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h . Μοντέλο CP/BR με $C=20, t=5$ και $p_s=0$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000, N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 42

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$, παρατηρούμε ότι γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h , όπως και στο Σχήμα 40, αντιστοίχως για το $B_{new(CBP)}$. Αρχικά, στην περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=10$ όπως είναι αναμενόμενο δεν υπάρχει απόρριψη κλήσεων μεταπομπής ούτε συμφόρηση κλήσεων στο δίκτυο διότι υπάρχει για κάθε κλήση που παράγεται από τις διαθέσιμες πηγές, μία BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτή η περίπτωση απεικονίζεται στο Σχήμα 42 (μπλε καμπύλη) και ισχύει όταν η χωρητικότητα C του συστήματος υπερβαίνει τον αριθμό των πηγών ($N_h < C$).
- Για πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=1000$ και $C=20$, η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$, είναι εξαιρετικά υψηλή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν διαθέσιμες BU για να εξυπηρετήσουν τον μεγάλο αριθμό κλήσεων. Αυτή η περίπτωση απεικονίζεται στο Σχήμα 42 (καφέ καμπύλη) και παρατηρούμε ότι η απόρριψη κλήσεων είναι πάρα πολύ υψηλή. Για τιμή $v_h=0,1$ το $B_{h(CBP)}=0,8018$ ενώ στο Σχήμα 35 για το μοντέλο NP/CS έχουμε υψηλότερη τιμή για την απόρριψη κλήσεων μεταπομπής για $v_h=0,1$ έχουμε $B_{h(CBP)}=0,9662$. Αυτό δείχνει ότι ακόμα και στην ακραία περίπτωση του παραδείγματος για πολύ μεγάλο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=1000$) σε αναλογία με τη χωρητικότητα ($C=20$), υπάρχει αισθητή μείωση της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής. Αυτό το αποτέλεσμα προέκυψε από την υλοποίηση της δεσμευμένης περιοχής, στο μοντέλο CP/BR.
- Στις γραφικές παραστάσεις για τις ενδιάμεσες τιμές ($N_{new}=N_h=30/40/50/100$), παρατηρούμε ότι η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ είναι και εδώ αισθητά μικρότερη σε σύγκριση με την απόρριψη κλήσεων μεταπομπής στο μοντέλο NP/CS. Στον Πίνακα 48 για $v_{new} = v_h = 0,5$ έχουμε καταγράψει την πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ για τα δύο μοντέλα NP/CS και CP/BR.

$v_{new} = v_h = 0,5$	NP/CS - $B_{h(CBP)}$	CP/BR - $B_{h(CBP)}$
$N_{new}=N_h=30$	0,1228524	0,008993
$N_{new}=N_h=40$	0,3294876	0,0598433
$N_{new}=N_h=50$	0,4867674	0,156195
$N_{new}=N_h=100$	0,776258	0,556672

Πίνακας 48 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{h(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$ και $v_{new}=v_h=0,5$.

Ενδεικτικά, αν πάρουμε τις τιμές για πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=50$, παρατηρούμε ότι η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής στο NP/CS είναι $B_{h(CBP)}=0,48676$, που σημαίνει ότι έχουμε απόρριψης περίπου μία στις δύο κλήσεις. Αντίστοιχη τιμή έχουμε και στο μοντέλο CP/BR, η οποία είναι $B_{h(CBP)}=0,15619$. Δηλαδή, έχουμε μία πολύ εντυπωσιακή μείωση η οποία έχει επιτευχθεί με δεσμευμένη περιοχή $t=5$. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα του Πίνακα 48 μας δείχνουν ότι έχει επιτευχθεί ο στόχος για περιορισμό της απόρριψης κλήσεων μεταπομπής στο μοντέλο CP/BR με την υλοποίηση της δεσμευμένης περιοχής. Αν εξετάσουμε ταυτόχρονα τις τιμές απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$, στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για τις ενδιάμεσες καμπύλες, δηλαδή για τιμές των πηγών $N_{new}=N_h=30/40/50/100$ καταγράψαμε τα αποτελέσματά τους στον Πίνακα 49 για $v_{new}=v_h=0,5$.

$v_{new} = v_h = 0,5$	NP/CS - $B_{new(CBP)}$	CP/BR - $B_{new(CBP)}$
$N_{new}=N_h=30$	0,0701047	0,2673641
$N_{new}=N_h=40$	0,2011733	0,4297441
$N_{new}=N_h=50$	0,3238317	0,5364584
$N_{new}=N_h=100$	0,6641101	0,7772343

Πίνακας 49 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$ και $v_{new}=v_h=0,5$.

Στον Πίνακα 49 παρατηρούμε ότι στο μοντέλο CP/BR έχουμε αύξηση των τιμών απόρριψης νέων κλήσεων. Το παρατηρούμενο αποτέλεσμα προέρχεται από τη μείωση των διαθέσιμων BU που εξυπηρετούν τις νέες κλήσεις, ως άμεση συνέπεια της εφαρμογής της δεσμευμένης περιοχής στο μοντέλο.

Συμπερασματικά, στο μοντέλο CP/BR, παρατηρείται πολύ μεγάλο κέρδος στην πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$, που αποτελούσε τον κύριο στόχο για το εν λόγω μοντέλο. Από την άλλη όμως για να επιτευχθεί αυτό έχουμε αύξηση της απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$. Να επισημάνουμε, ότι αυτά τα αποτελέσματα έχουν επιτευχθεί με δεσμευμένη χωρητικότητα $t=5$ και πιθανότητα πρόσβασης στη δεσμευμένη περιοχή $p_s=0$. Αυτές οι τιμές μπορούν κάθε φορά να διαμορφώνοντα ανάλογα έτσι ώστε να επιτευχθεί ο βέλτιστος επιθυμητός στόχος σε κάθε περίπτωση. Αν για παράδειγμα αλλάξουμε την πιθανότητα $p_s=0,5$ οι τιμές που υπήρχαν στους Πίνακες 48 και 49 παρουσιάζονται συνολικά στον Πίνακα 50 για τα δύο μοντέλα NP/CS και CP/BR.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $t=5$	$p_s=0$		$p_s=0,5$	$p_s=0$		$p_s=0,5$
	NP/CS - $B_{new}(CBP)$	CP/BR - $B_{new}(CBP)$	CP/BR - $B_{new}(CBP)$	NP/CS - $B_h(CBP)$	CP/BR - $B_h(CBP)$	CP/BR - $B_h(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,07010	0,26736	0,17752	0,12285	0,00899	0,05217
$N_{new}=N_h=40$	0,20117	0,42974	0,30708	0,32948	0,05984	0,20224
$N_{new}=N_h=50$	0,32383	0,53645	0,41138	0,48676	0,15619	0,35819
$N_{new}=N_h=100$	0,66411	0,77723	0,70355	0,77625	0,55667	0,706

Πίνακας 50 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ και $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.

Στο Πίνακα 50 παρατηρούμε στις στήλες που αφορούν το $p_s=0,5$ ότι υπάρχουν τιμές οι οποίες είναι μειωμένες για το $B_{new}(CBP)$ και αυξημένες για το $B_h(CBP)$. Η γενικότερη εικόνα είναι ότι έχουν βελτιωθεί οι αρχικές τιμές για το μοντέλο CP/BR. Αντίστοιχες βελτιώσεις μπορούν να γίνουν και με την αλλαγή του πλήθους των BU της δεσμευμένης περιοχής η οποία εδώ είναι $t=5$. Ένα τέτοιο παράδειγμα αλλαγής των BU από $t=5 \rightarrow t=3$ παρουσιάζεται στον Πίνακα 51.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$	$p_s=0$ $t=5$		$p_s=0$ $t=3$	$p_s=0,5$ $t=5$	$p_s=0$ $t=5$		$p_s=0$ $t=3$	$p_s=0,5$
	NP/CS- $B_{new}(CBP)$	CP/BR- $B_{new}(CBP)$	CP/BR- $B_{new}(CBP)$	CP/BR- $B_{new}(CBP)$	NP/CS- $B_h(CBP)$	CP/BR- $B_h(CBP)$	CP/BR- $B_h(CBP)$	CP/BR- $B_h(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,07010	0,26736	0,18904	0,17752	0,12285	0,00899	0,02299	0,05217
$N_{new}=N_h=40$	0,20117	0,42974	0,36945	0,30708	0,32948	0,05984	0,09843	0,20224
$N_{new}=N_h=50$	0,32383	0,53645	0,49786	0,41138	0,48676	0,15619	0,20113	0,35819
$N_{new}=N_h=100$	0,66411	0,77723	0,77276	0,70355	0,77625	0,55667	0,5658	0,706

Πίνακας 51 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ και $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS και CP/BR για $C=20$, $t=5$ και $t=3$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.

3.6. Γενική περιγραφή μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών

Το μοντέλο που θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο είναι το μοντέλο CPQ, το οποίο περιλαμβάνει μια δέσμευση εύρους ζώνης με t θέσεις. Αυτές οι θέσεις διατίθενται, με παρόμοιο τρόπο όπως και στο μοντέλο CP/BR, που αναλύθηκε στην §3.5. Η δεσμευμένη χωρητικότητα των t BU, προορίζεται αρχικά να εξυπηρετήσει τις κλήσεις μεταπομπής που δημιουργούνται στην SP. Επιπλέον, με την εφαρμογή της πολιτική δεσμευμένης πιθανότητας p_s (Vlasakis, M., et al. 2023), ένα μέρος αυτής της χωρητικότητας μπορεί να διατεθεί υπό προϋποθέσεις και σε νέες κλήσεις. Η λειτουργία του μοντέλου CPQ, είναι αντίστοιχη με αυτή του CP/BR με τη διαφορά ότι εδώ υπάρχει και ουρά αναμονής με k θέσεις.

Η ουρά αναμονής έχει k πεπερασμένες θέσεις αναμονής οι οποίες διατίθενται αποκλειστικά

για τις κλήσεις μεταπομπής. Όπως αναλύθηκε και στο μοντέλο CP/BR στις κλήσεις μεταπομπής θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τις πιθανότητες απόρριψης διότι η διακοπή τους επηρεάζει αρνητικά το QoS του συστήματος. Στο μοντέλο CPQ για να το πετύχουμε αυτό εκτός από τις δεσμευμένες θέσεις t έχουμε και τις θέσεις k στην ουρά. Το μοντέλο CPQ το οποίο θα αναλυθεί εισάγει την έννοια της δεσμευμένης χωρητικότητας (Vlasakis, M., et al. 2023) με πιθανότητα (BR-PBR). Στο σύστημα CPQ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, ισχύουν οι δύο φάσεις λειτουργίας (SP και MP), ενώ κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί απαιτεί τη διάθεση μίας BU. Η διαφορά είναι ότι οι αφίξεις κλήσεων όπως και οι πηγές του συστήματος είναι πεπερασμένες.

Το μοντέλο το οποίο θα αναλυθεί, είναι το αντίστοιχο μοντέλο CP1Q που αναλύθηκε στην §2.5 της παρούσας ΔΕ. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε δεσμεύσει (t) τμήμα της συνολικής χωρητικότητας C του συστήματος μόνο στη φάση του σταματημένου οχήματος (SP), προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής. Η δέσμευση δεν ισχύει για την περίπτωση που το όχημα είναι σε κίνηση MP, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι και στο σύστημα NP/CS για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Δεν θα αναλυθεί το σύστημα που εξετάστηκε στην §2.4 όπου δεσμεύτηκε χωρητικότητα και στις δύο φάσεις διότι όπως είδαμε στο εν λόγω κεφάλαιο δεν υπάρχει καμία πρακτική αξία να δεσμεύσουμε χώρο στην MP διότι δεν μπορούν να «γεννηθούν» κλήσεις μεταπομπής στην εν λόγω φάση την κίνησης του οχήματος και το δεσμευμένο bandwidth μένει αναξιοποίητο. Εδώ βέβαια υπάρχει και η έννοια της δεσμευμένης χωρητικότητας με πιθανότητα (Vlasakis, M., et al. 2023) και σύμφωνα με την οποία, τμήμα του δεσμευμένου χώρου της SP δύναται να διατεθεί και σε νέες κλήσεις με πιθανότητα p_s . Όταν η πιθανότητα $p_s=0$ αναφερόμαστε σε πλήρη διάθεση του δεσμευμένου χώρου στις κλήσεις μεταπομπής (strict BR), ενώ οι νέες κλήσεις δεν έχουν καθόλου πρόσβαση εκεί. Όταν η πιθανότητα $p_s=1$ αναφερόμαστε σε πλήρη διάθεση του δεσμευμένου χώρου σε όλες τις κλήσεις άρα στην πολιτική CS η οποία αναλύθηκε στην §3.4.

3.6.1. Αναπαράσταση μοντέλου CPQ με πεπερασμένο πλήθος πηγών – Μαρκοβιανή αλυσίδα

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε για ανάλυση το ίδιο σύστημα το οποίο είχαμε και στο μοντέλο CP/BR με πεπερασμένο πλήθος πηγών, το οποίο θα έχει χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και $k=1$ θέση στην ουρά. Το σύστημα αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας οι δυνατές καταστάσεις προκύπτουν από τον τύπο (3.8). Ο

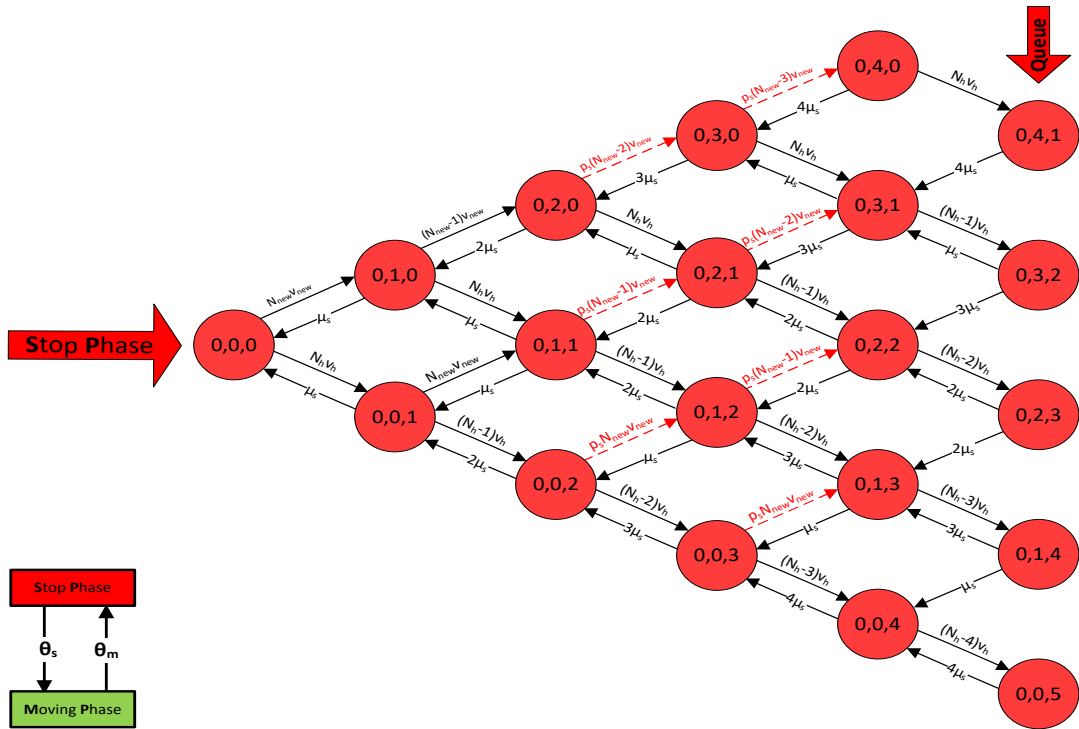
τύπος (3.8) προέκυψε από τον τύπο (3.1) με την προσθήκη των θέσεων k της ουράς αναμονής:

$$\text{Πλήθος Καταστάσεων} = [k * (C + 1)] * 2 + \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{C+1} n \quad (3.8)$$

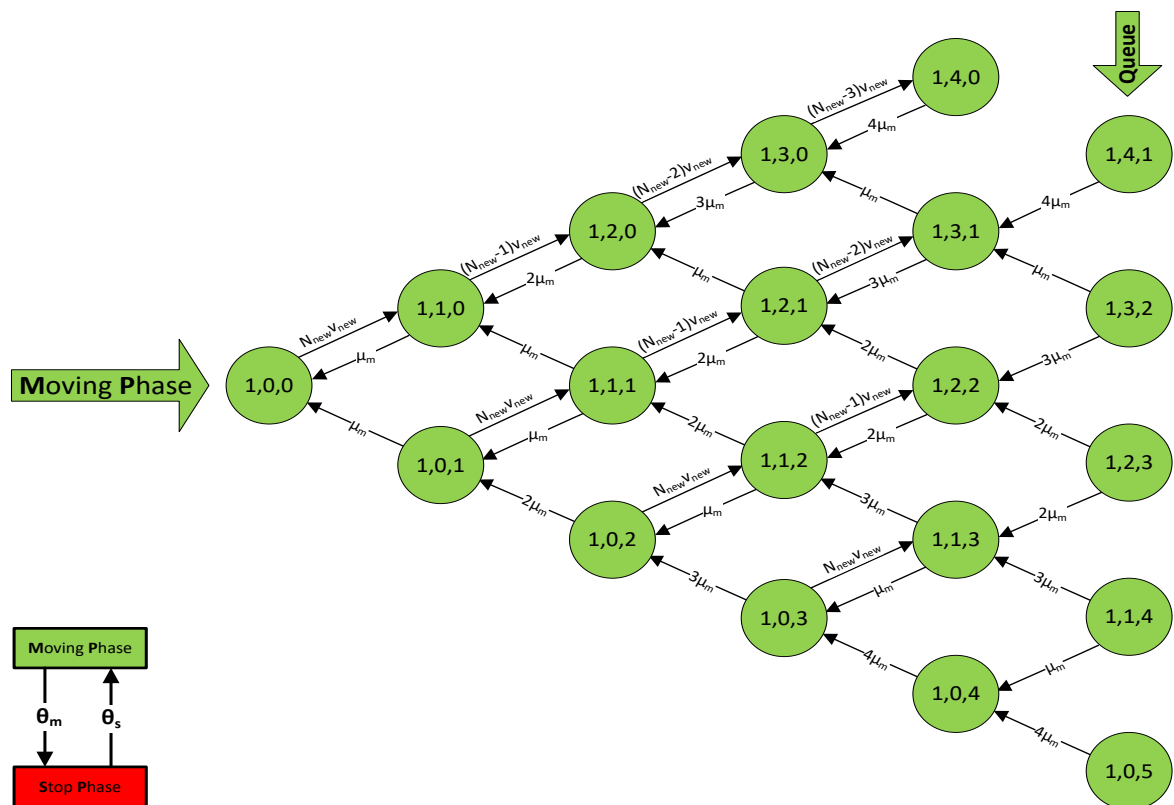
και αντικαθιστώντας τα χαρακτηριστικά μεγέθη του προς εξέταση συστήματος στον τύπο (3.8) θα έχουμε τις συνολικές καταστάσεις:

$$\begin{aligned} [k * (C + 1)] * 2 + \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{C+1} n &= [1 * (4 + 1)] * 2 + \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{4+1} n = [1 * 5] * 2 + \sum_{i=0}^1 \sum_{n=1}^{4+1} n = \\ &= 10 + \sum_{i=0}^1 (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 10 + \sum_{i=0}^1 (15) = 10 + 15 + 15 = 40 \text{ καταστάσεις} \end{aligned}$$

Η κάθε κατάσταση θα χαρακτηρίζεται από τρία στοιχεία (i, n_{new}, n_h) , το $i \in \{0, 1\}$ και περιγράφει αν βρισκόμαστε στην SP ($i=0$) ή την MP ($i=1$). Τα n_{new} και n_h μας δίνουν το πλήθος των εξυπηρετούμενων νέων κλήσεων (n_{new}) και κλήσεων μεταπομπής (n_h) αντίστοιχα και παίρνουν τιμές από $0 \leq n_{new} + n_h \leq C$ σε κάθε κατάσταση. Οι καταστάσεις $[k * (C + 1)] * 2$ είναι οι καταστάσεις που προκύπτουν στην ουρά του συστήματος. Υπολογίζεται σε κάθε επίπεδο-στήλη της ουράς (πλήθος k), της Μαρκοβιανής αλυσίδας, το πλήθος των καταστάσεων το οποίο είναι σταθερό και ίσο με $(C + 1)$ σε κάθε φάση του συστήματος, αυτό θα αναλυθεί περαιτέρω και στη Μαρκοβιανή αλυσίδα που ακολουθεί. Οι καταστάσεις που αφορούν την SP εμφανίζονται στο Σχήμα 43 και της MP στο Σχήμα 44.



Σχήμα 43 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) με χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ και $k=1$ (αναπαράσταση της SP).

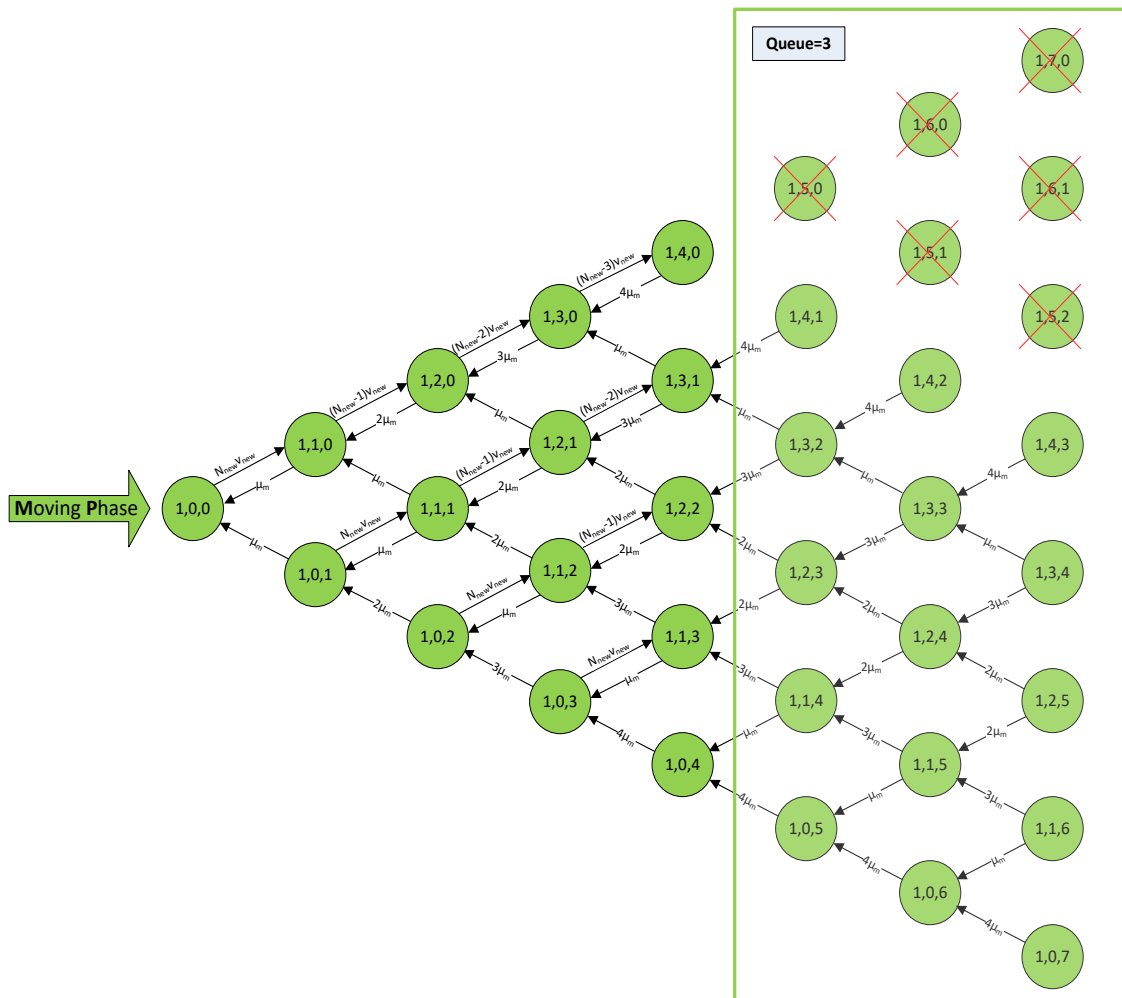


Σχήμα 44 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) με χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ και $k=1$ (αναπαράσταση της MP).

Επεξηγήσεις για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα των σχημάτων 43 & 44:

■ Στη φάση κινούμενου οχήματος -MP- βλέπουμε ότι ισχύουν όλα όσα αναφέρθηκαν και στα δύο προηγούμενα μοντέλα το NP/CS και CP/BR και έχουν σημειωθεί στις επεξηγήσεις που δόθηκαν για το Σχήμα 30 και Σχήμα 37 αντίστοιχα. Συνοπτικά να πούμε ότι στην MP μπορούν να «γεννηθούν» μόνο νέες κλήσεις οι οποίες δημιουργούνται από διαθέσιμες πηγές νέων κλήσεων (N_{new}) και για το λόγο αυτό δεν υπάρχουν δεσμευμένες θέσεις BU προς εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής. Η διαφορά στο μοντέλο CPQ είναι η τελευταία στήλη της Μαρκοβιανής αλυσίδας του Σχήματος 44 η οποία αφορά την ουρά αναμονής. Στις εν λόγω θέσεις της ουράς μπορούν να αποθηκευτούν μόνο κλήσεις μεταπομπής. Επειδή, στην MP δεν μπορούν να «γεννηθούν» κλήσεις μεταπομπής και για αυτό τον λόγο στο Σχήμα 44, δεν υπάρχουν βέλη που να κατευθύνονται προς τις θέσεις της ουράς οι οποίες είναι αναλυτικά $(1,4,1) - (1,3,2) - (1,2,3) - (1,1,4) - (1,0,5)$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κατάσταση με χαρακτηριστικά $(1,5,0)$ δεδομένης της χωρητικότητας $C=4$. Η κατάσταση αυτή θα σήμαινε ότι έχουμε σε επεξεργασία 4 νέες κλήσεις και μία νέα κλήση, την 5^η, στην ουρά αναμονής κάτι που δεν μπορεί να ισχύει διότι οι θέσεις στην ουρά διατίθενται αποκλειστικά σε κλήσεις μεταπομπής. Έτσι προκύπτει ότι πάντα, σε κάθε επίπεδο (στήλη) η ουρά, θα έχει $C + 1$ θέσεις και οι

συνολικές θέσεις σε κάθε φάση θα είναι $[k * (C + 1)]$. Για μεγαλύτερη σαφήνεια, παραθέτουμε το ίδιο σύστημα στο Σχήμα 45, με τη διαφορά ότι οι θέσεις στην ουρά είναι πλέον τρεις. Στη Μαρκοβιανή αλυσίδα (Σχήμα 45) που αναπαριστά τις πιθανές καταστάσεις της MP θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη $0 \leq n_{new} \leq C$, όπου δεν ισχύει οι καταστάσεις εμφανίζονται στο Σχήμα 45 με διακριτική διαγραφή. Έτσι οι διαθέσιμες θέσεις σε κάθε επίπεδο-στήλη της ουράς, ανεξάρτητα από το k , είναι πάντα σταθερός αριθμός και ίσος με $C + 1$ θέσεις. Στο παράδειγμα μας είναι $C + 1 = 5$ θέσεις ανά επίπεδο-στήλη της ουράς και επειδή έχουμε $k=3$ οι συνολικές διαθέσιμες καταστάσεις στην ουρά είναι $[k * (C + 1)] = [3 * (4 + 1)] = 15$ θέσεις μόνο για την MP (αντίστοιχα και για την SP).



Σχήμα 45 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$) με χωρητικότητα $C=4$ και $k=3$ (αναπαράσταση της Μ.Ρ.).

- Στη φάση ακίνητου οχήματος -SP- μπορεί να υπάρχουν νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής οι οποίες δημιουργούνται αντίστοιχα, είτε από πηγές νέων κλήσεων (N_{new}) είτε από πηγές κλήσεων μεταπομπής (N_h). Στην SP δεσμεύουμε θέσεις BU οι οποίες θα

χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για την εξυπηρέτηση των κλήσεων μεταπομπής. Έχουμε λοιπόν t δεσμευμένες θέσεις οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο από κλήσεις μεταπομπής, στην πραγματικότητα είναι σαν να μην υπάρχουν οι εν λόγω θέσεις για την εξυπηρέτηση των νέων κλήσεων. Οι νέες κλήσεις έχουν στη διάθεση τους $C - t$ διαθέσιμες θέσεις προκειμένου να εξυπηρετηθούν. Οι υπόλοιπες $C - t + 1$ έως C είναι διαθέσιμες μόνο για κλήσεις μεταπομπής. Τα παραπάνω ισχύουν στην αρχική περίπτωση που δεν διατίθεται τμήμα του δεσμευμένου χώρου t σε νέες κλήσεις άρα η πιθανότητα $p_s=0$. Επίσης, υπάρχει και η ουρά αναμονής με k θέσεις οι οποίες διατίθενται αποκλειστικά για τις κλήσεις μεταπομπής. Για την ουρά αναμονής στην SP ισχύει ότι αναφέρθηκε και για την MP.

- Στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του Σχήματος 43 έχουν σημειωθεί με κόκκινες μεταβάσεις αυτές οι οποίες στην πραγματικότητα δεν μπορεί να υλοποιηθούν λόγω της δεσμευμένης χωρητικότητας $t=2$ στο μοντέλο CPQ ή θα μπορούσαν να υλοποιηθούν με μία πιθανότητα p_s η οποία θα οριστεί κατά τη σχεδίαση του συστήματος (Vlasakis, M., et al. 2023). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στην παρούσα περίπτωση $p_s=0$, οπότε όταν στο σύστημά μας βρίσκονται σε εξυπηρέτηση πλήθους κλήσεων $n_{new} + n_h \geq 2$ (ή $n_{new} + n_h \geq C - t$) τότε μπορεί να εξυπηρετηθούν μόνο κλήσεις μεταπομπής στην SP.
- Στις καταστάσεις (0,30), (0,4,0), (0,2,1), (0,3,1), (0,2,2), (0,1,2), (0,1,3), (0,0,3) και (0,0,4) καθώς και στις καταστάσεις της ουράς (0,0,5), (0,1,4), (0,2,3), (0,3,2), (0,4,1), δεν μπορούμε να μεταβούμε όταν έρθει μία νέα κλήση, μπορούμε να μεταβούμε μόνο εάν μία κλήση μεταπομπής αφιχθεί στο σύστημα. Από τις είκοσι (20) συνολικά καταστάσεις της SP μόνο οι έξι είναι διαθέσιμες για νέες κλήσεις και βέβαια το σύνολο των είκοσι καταστάσεων στην SP είναι διαθέσιμες και για κλήσεις μεταπομπής. Η δέσμευση θέσεων προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής υλοποιείται προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η απόρριψη των εν λόγω κλήσεων όπως αναφέρθηκε και στο μοντέλο CP/BR.

3.6.2. Εξαγωγή εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών

Από τις Μαρκοβιανές αλυσίδες στα Σχήματα 43 και 44 θα εξαχθούν οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας (Λογοθέτης Μ. 2018 σ. 61). Στις εξισώσεις έχουν ληφθεί υπόψη και οι μεταβάσεις με κόκκινες γραμμές που υπάρχουν στην SP, οι οποίες εμφανίζονται στις εξισώσεις με

κίτρινη επισήμανση. Έχουμε λοιπόν για τη φάση SP και για τις είκοσι (20) καταστάσεις, ξεκινώντας από την κατάσταση (0,0,0):

$$\mathbf{SP(0,0,0)} \rightarrow P(0,0,0)(N_{new}v_{new} + N_h v_h + \theta_s) = P(0,1,0)\mu_s + P(0,0,1)\mu_s + P(1,0,0)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1,0)} \rightarrow P(0,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + N_h v_h + \mu_s + \theta_s) = P(0,0,0)N_{new}v_{new} + P(0,2,0)2\mu_s + P(0,1,1)\mu_s + P(1,1,0)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,2,0)} \rightarrow P(0,2,0)(N_h v_h + (N_{new} - 2)v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(0,3,0)3\mu_s + P(0,2,1)\mu_s + P(1,2,0)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,3,0)} \rightarrow P(0,3,0)(N_h v_h + (N_{new} - 3)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,4,0)4\mu_s + P(0,3,1)\mu_s + P(1,3,0)\theta_m + P(0,2,0)(N_{new} - 2)v_{new}p_s$$

$$\mathbf{SP(0,4,0)} \rightarrow P(0,4,0)(N_h v_h + 4\mu_s + \theta_s) = P(1,4,0)\theta_m + P(0,3,0)(N_{new} - 3)v_{new}p_s$$

$$\mathbf{SP(0,0,1)} \rightarrow P(0,0,1)(N_{new}v_{new} + (N_h - 1)v_h + \mu_s + \theta_s) = P(0,0,0)N_h v_h + P(0,0,2)2\mu_s + P(0,1,1)\mu_s + P(1,0,1)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1,1)} \rightarrow P(0,1,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - 1)v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,0,1)N_{new}v_{new} + P(0,1,0)N_h v_h + P(0,2,1)2\mu_s + P(0,1,2)2\mu_s + P(1,1,1)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,2,1)} \rightarrow P(0,2,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - 2)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,2,0)N_h v_h + P(0,3,1)3\mu_s + P(0,2,2)2\mu_s + P(1,2,1)\theta_m + P(0,1,1)(N_{new} - 1)v_{new}p_s$$

$$\mathbf{SP(0,3,1)} \rightarrow P(0,3,1)((N_h - 1)v_h + 4\mu_s + \theta_s) = P(0,3,0)N_h v_h + P(0,4,1)4\mu_s + P(0,3,2)\mu_s + P(1,3,1)\theta_m + P(0,2,1)(N_{new} - 2)v_{new}p_s$$

$$\mathbf{SP(0,4,1)} \rightarrow P(0,4,1)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,4,0)N_h v_h + P(1,4,1)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,0,2)} \rightarrow P(0,0,2)((N_h - 2)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) = P(0,0,1)(N_h - 1)v_h + P(0,0,3)3\mu_s + P(0,1,2)\mu_s + P(1,0,2)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1,2)} \rightarrow P(0,1,2)((N_h - 2)v_h + (N_{new} - 1)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,1,1)(N_h - 1)v_h + P(0,2,2)2\mu_s + P(0,1,3)3\mu_s + P(1,1,2)\theta_m + P(0,0,2)(N_{new}v_{new})p_s$$

$$\mathbf{SP(0,2,2)} \rightarrow P(0,2,2)((N_h - 2)v_h + 4\mu_s + \theta_s) = P(0,2,1)(N_h - 1)v_h + P(0,3,2)3\mu_s + P(0,2,3)2\mu_s + P(1,2,2)\theta_m + P(0,1,2)(N_{new} - 1)v_{new}p_s$$

$$\mathbf{SP(0,3,2)} \rightarrow P(0,3,2)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,3,1)(N_h - 1)v_h + P(1,3,2)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,0,3)} \rightarrow P(0,0,3)((N_h - 3)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) = P(0,0,2)(N_h - 2)v_h + P(0,0,4)4\mu_s + P(0,1,3)\mu_s + P(1,0,3)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1,3)} \rightarrow P(0,1,3)((N_h - 3)v_h + 4\mu_s + \theta_s) = P(0,1,2)(N_h - 2)v_h + P(0,2,3)2\mu_s + P(0,1,4)3\mu_s + P(1,1,3)\theta_m + P(0,0,3)(N_{new}v_{new})p_s$$

$$\mathbf{SP(0,2,3)} \rightarrow P(0,2,3)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,2,2)(N_h - 2)v_h + P(1,2,3)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,0,4)} \rightarrow P(0,0,4)((N_h - 4)v_h + 4\mu_s + \theta_s) = P(0,0,3)(N_h - 3)v_h + (0,1,4)\mu_s + P(0,0,5)4\mu_s + P(1,0,4)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,1,4)} \rightarrow P(0,1,4)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,1,3)(N_h - 3)v_h + P(1,1,4)\theta_m$$

$$\mathbf{SP(0,0,5)} \rightarrow P(0,0,5)(4\mu_s + \theta_s) = P(0,0,4)(N_h - 4)v_h + P(1,0,5)\theta_m$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις είκοσι (20) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0,0)} \rightarrow P(1,0,0)(N_{new}v_{new} + \theta_m) = P(1,1,0)\mu_m + P(1,0,1)\mu_m + P(0,0,0)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,1,0)} \rightarrow P(1,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + \mu_m + \theta_m) = P(1,0,0)N_{new}v_{new} + P(1,2,0)2\mu_m + P(1,1,1)\mu_m + P(0,1,0)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2,0)} \rightarrow P(1,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(1,3,0)3\mu_m + P(1,2,1)\mu_m + P(0,2,0)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3,0)} \rightarrow P(1,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,2,0)(N_{new} - 2)v_{new} + P(1,4,0)4\mu_m + P(1,3,1)\mu_m + P(0,3,0)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,4,0)} \rightarrow P(1,4,0)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,3,0)(N_{new} - 3)v_{new} + P(0,4,0)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,0,1)} \rightarrow P(1,0,1)(N_{new}v_{new} + \mu_m + \theta_m) = P(1,1,1)\mu_m + P(1,0,2)2\mu_m + P(0,0,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,1,1)} \rightarrow P(1,1,1)((N_{new} - 1)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,0,1)N_{new}v_{new} + P(1,2,1)2\mu_m + P(1,1,2)2\mu_m + P(0,1,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2,1)} \rightarrow P(1,2,1)((N_{new} - 2)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,1,1)(N_{new} - 1)v_{new} + P(1,3,1)3\mu_m + P(1,2,2)2\mu_m + P(0,2,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3,1)} \rightarrow P(1,3,1)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,2,1)(N_{new} - 2)v_{new} + P(1,4,1)4\mu_m + P(1,3,2)\mu_m + P(0,3,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,4,1)} \rightarrow P(1,4,1)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,4,1)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,0,2)} \rightarrow P(1,0,2)(N_{new}v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) = P(1,1,2)\mu_m + P(1,0,3)3\mu_m + P(0,0,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,1,2)} \rightarrow P(1,1,2)((N_{new} - 1)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,0,2)N_{new}v_{new} + P(1,2,2)2\mu_m + P(1,1,3)3\mu_m + P(0,1,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2,2)} \rightarrow P(1,2,2)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,1,2)(N_{new} - 1)v_{ew} + P(1,3,2)3\mu_m + P(1,2,3)2\mu_m + P(0,2,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,3,2)} \rightarrow P(1,3,2)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,3,2)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,0,3)} \rightarrow P(1,0,3)(N_{new}v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) = P(1,1,3)\mu_m + P(1,0,4)4\mu_m + P(0,0,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,1,3)} \rightarrow P(1,1,3)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,0,3)N_{new}v_{new} + P(1,2,3)2\mu_m + P(1,1,4)3\mu_m + P(0,1,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,2,3)} \rightarrow P(1,2,3)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,2,3)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,0,4)} \rightarrow P(1,0,4)(4\mu_m + \theta_m) = P(1,1,4)\mu_m + P(1,0,5)4\mu_m + P(0,0,4)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,1,4)} \rightarrow P(1,1,4)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,1,4)\theta_s$$

$$\mathbf{MP(1,0,5)} \rightarrow P(1,0,5)(4\mu_m + \theta_m) = P(0,0,5)\theta_s$$

Έστω ότι το σύστημα που εξετάζουμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$C=4, t=2, k=1, p_s=0, N_{new}=5, N_h=5, v_{new}=v_h=1, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$\mathbf{SP(0,0,0)} \rightarrow P(0,0,0)(5 + 5 + 1) = P(0,1,0) + P(0,0,1) + P(1,0,0) \Rightarrow -11P(0,0,0) + P(0,1,0) + P(0,0,1) + P(1,0,0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,1,0) &\rightarrow P(0,1,0)((5-1) + 5 + 1 + 1) = P(0,0,0)5 + P(0,2,0)2 + P(0,1,1) + P(1,1,0) => \\ &-11P(0,1,0) + 5P(0,0,0) + 2P(0,2,0) + P(0,1,1) + P(1,1,0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,2,0) &\rightarrow P(0,2,0)(5 + 2 + 1) = P(0,1,0)(5-1)v_{new} + P(0,3,0)3 + P(0,2,1) + P(1,2,0) => \\ &-8P(0,2,0) + 4P(0,1,0) + 3P(0,3,0) + P(0,2,1) + P(1,2,0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,3,0) &\rightarrow P(0,3,0)(5 + 3 + 1) = P(0,4,0)4 + P(0,3,1) + P(1,3,0) => \\ &-9P(0,3,0) + 4P(0,4,0) + P(0,3,1) + P(1,3,0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,4,0) &\rightarrow P(0,4,0)(5 + 4 + 1) = P(1,4,0) => \\ &-10P(0,4,0) + P(1,4,0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,0,1) &\rightarrow P(0,0,1)(5 + (5-1) + 1 + 1) = P(0,0,0)5 + P(0,0,2)2 + P(0,1,1) + P(1,0,1) => \\ &-11P(0,0,1) + 5P(0,0,0) + 2P(0,0,2) + P(0,1,1) + P(1,0,1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,1,1) &\rightarrow P(0,1,1)(4 + 2 + 1) = P(0,0,1)5 + P(0,1,0)5 + P(0,2,1)2 + P(0,1,2)2 + P(1,1,1) => \\ &-7P(0,1,1) + 5P(0,0,1) + 5P(0,1,0) + 2P(0,2,1) + 2P(0,1,2) + P(1,1,1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,2,1) &\rightarrow P(0,2,1)(5-1) + 3 + 1) = P(0,2,0)5 + P(0,3,1)3 + P(0,2,2)2 + P(1,2,1) => \\ &-8P(0,2,1) + 5P(0,2,0) + 3P(0,3,1) + 2P(0,2,2) + P(1,2,1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,3,1) &\rightarrow P(0,3,1)((5-1) + 4 + 1) = P(0,3,0)5 + P(0,4,1)4 + P(0,3,2) + P(1,3,1) => \\ &-9P(0,3,1) + 5P(0,3,0) + 4P(0,4,1) + P(0,3,2) + P(1,3,1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,4,1) &\rightarrow P(0,4,1)(4 + 1) = P(0,4,0)5 + P(1,4,1) => \\ &-5P(0,4,1) + 5P(0,4,0) + P(1,4,1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,0,2) &\rightarrow P(0,0,2)((5-2) + 2 + 1) = P(0,0,1)(5-1) + P(0,0,3)3 + P(0,1,2) + P(1,0,2) => \\ &-6P(0,0,2) + 4P(0,0,1) + 3P(0,0,3) + P(0,1,2) + P(1,0,2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,1,2) &\rightarrow P(0,1,2)((5-2) + 3 + 1) = P(0,1,1)(5-1) + P(0,2,2)2 + P(0,1,3)3 + P(1,1,2) => \\ &-7P(0,1,2) + 4P(0,1,1) + 2P(0,2,2) + 3P(0,1,3) + P(1,1,2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,2,2) &\rightarrow P(0,2,2)((5-2) + 4 + 1) = P(0,2,1)(5-1) + P(0,3,2)3 + P(0,2,3)2 + P(1,2,2) => \\ &-8P(0,2,2) + 4P(0,2,1) + 3P(0,3,2) + 2P(0,2,3) + P(1,2,2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,3,2) &\rightarrow P(0,3,2)(4 + 1) = P(0,3,1)(5-1) + P(1,3,2) => \\ &-5P(0,3,2) + 4P(0,3,1) + P(1,3,2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,0,3) &\rightarrow P(0,0,3)((5-3) + 3 + 1) = P(0,0,2)(5-2) + P(0,0,4)4 + P(0,1,3) + P(1,0,3) => \\ &-6P(0,0,3) + 3P(0,0,2) + 4P(0,0,4) + P(0,1,3) + P(1,0,3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,1,3) &\rightarrow P(0,1,3)(2 + 4 + 1) = P(0,1,2)(5-2) + P(0,2,3)2 + P(0,1,4)3 + P(1,1,3) => \\ &-7P(0,1,3) + 3P(0,1,2) + 2P(0,2,3) + 3P(0,1,4) + P(1,1,3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,2,3) &\rightarrow P(0,2,3)(4 + 1) = P(0,2,2)(5-2) + P(1,2,3) => \\ &-5P(0,2,3) + 3P(0,2,2) + P(1,2,3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SP}(0,0,4) &\rightarrow P(0,0,4)((5-4) + 4 + 1) = P(0,0,3)(5-3) + P(0,1,4) + P(0,0,5)4 + P(1,0,4) => \\ &-6P(0,0,4) + 2P(0,0,3) + P(0,1,4) + 4P(0,0,5) + P(1,0,4) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{SP}(0,1,4) \rightarrow P(0,1,4)(4 + 1) = P(0,1,3)(5-3) + P(1,1,4) =>$$

$$-5P(0,1,4) + 2P(0,1,3) + P(1,1,4) = 0$$

$$\mathbf{SP(0,0,5)} \rightarrow P(0,0,5)(4 + 1) = P(0,0,4)(5 - 4) + P(1,0,5) \Rightarrow$$

$$-5P(0,0,5) + P(0,0,4) + P(1,0,5) = 0$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις είκοσι (20) καταστάσεις στην MP:

$$\mathbf{MP(1,0,0)} \rightarrow P(1,0,0)(5 + 1) = P(1,1,0) + P(1,0,1) + P(0,0,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,0,0) + P(1,1,0) + P(1,0,1) + P(0,0,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,0)} \rightarrow P(1,1,0)(5 - 1) + 1 + 1 = P(1,0,0)5 + P(1,2,0)2 + P(1,1,1) + P(0,1,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,1,0) + 5P(1,0,0) + 2P(1,2,0) + P(1,1,1) + P(0,1,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,0)} \rightarrow P(1,2,0)((5 - 2) + 3) = P(1,1,0)(5 - 1) + P(1,3,0)3 + P(1,2,1) + P(0,2,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,2,0) + 4P(1,1,0) + 3P(1,3,0) + P(1,2,1) + P(0,2,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3,0)} \rightarrow P(1,3,0)((5 - 3) + 4) = P(1,2,0)(5 - 2) + P(1,4,0)4 + P(1,3,1) + P(0,3,0) \Rightarrow$$

$$-6P(1,3,0) + 3P(1,2,0) + 4P(1,4,0) + P(1,3,1) + P(0,3,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,4,0)} \rightarrow P(1,4,0)(4 + 1) = P(1,3,0)(5 - 3) + P(0,4,0) \Rightarrow$$

$$-5P(1,4,0) + 2P(1,3,0) + P(0,4,0) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,1)} \rightarrow P(1,0,1)(5 + 1 + 1) = P(1,1,1) + P(1,0,2)2 + P(0,0,1) \Rightarrow$$

$$-7P(1,0,1) + P(1,1,1) + 2P(1,0,2) + P(0,0,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,1)} \rightarrow P(1,1,1)((5 - 1) + 2 + 1) = P(1,0,1)5 + P(1,2,1)2 + P(1,1,2)2 + P(0,1,1) \Rightarrow$$

$$-7P(1,1,1) + 5P(1,0,1) + 2P(1,2,1) + 2P(1,1,2) + P(0,1,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,1)} \rightarrow P(1,2,1)((5 - 2) + 4) = P(1,1,1)(5 - 1) + P(1,3,1)3 + P(1,2,2)2 + P(0,2,1) \Rightarrow$$

$$-7P(1,2,1) + 4P(1,1,1) + 3P(1,3,1) + 2P(1,2,2) + P(0,2,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3,1)} \rightarrow P(1,3,1)(4 + 1) = P(1,2,1)(5 - 2) + P(1,4,1)4 + P(1,3,2) + P(0,3,1) \Rightarrow$$

$$-5P(1,3,1) + 3P(1,2,1) + 4P(1,4,1) + P(1,3,2) + P(0,3,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,4,1)} \rightarrow P(1,4,1)(4 + 1) = P(0,4,1) \Rightarrow$$

$$-5P(1,4,1) + P(0,4,1) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,2)} \rightarrow P(1,0,2)(5 + 2 + 1) = P(1,1,2) + P(1,0,3)3 + P(0,0,2) \Rightarrow$$

$$-8P(1,0,2) + P(1,1,2) + 3P(1,0,3) + P(0,0,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,2)} \rightarrow P(1,1,2)((5 - 1) + 3 + 1) = P(1,0,2)5 + P(1,2,2)2 + P(1,1,3)3 + P(0,1,2) \Rightarrow$$

$$-8P(1,1,2) + 5P(1,0,2) + 2P(1,2,2) + 3P(1,1,3) + P(0,1,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,2)} \rightarrow P(1,2,2)(4 + 1) = P(1,1,2)(5 - 1) + P(1,3,2)3 + P(1,2,3)2 + P(0,2,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2,2) + 4P(1,1,2) + 3P(1,3,2) + 2P(1,2,3) + P(0,2,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,3,2)} \rightarrow P(1,3,2)(4 + 1) = P(0,3,2) \Rightarrow$$

$$-5P(1,3,2) + P(0,3,2) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,3)} \rightarrow P(1,0,3)(5 + 3 + 1) = P(1,1,3) + P(1,0,4)4 + P(0,0,3) \Rightarrow$$

$$-9P(1,0,3) + P(1,1,3) + 4P(1,0,4) + P(0,0,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,3)} \rightarrow P(1,1,3)(4 + 1) = P(1,0,3)5 + P(1,2,3)2 + P(1,1,4)3 + P(0,1,3) \Rightarrow$$

$$-5P(1,1,3) + 5P(1,0,3) + 2P(1,2,3) + 3P(1,1,4) + P(0,1,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,2,3)} \rightarrow P(1,2,3)(4 + 1) = P(0,2,3) \Rightarrow$$

$$-5P(1,2,3) + P(0,2,3) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,4)} \rightarrow P(1,0,4)(4 + 1) = P(1,1,4) + P(1,0,5)4 + P(0,0,4) \Rightarrow$$

$$-5P(1,0,4) + P(1,1,4) + 4P(1,0,5) + P(0,0,4) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,1,4)} \rightarrow P(1,1,4)(4 + 1) = P(0,1,4) \Rightarrow$$

$$-5P(1,1,4) + P(0,1,4) = 0$$

$$\mathbf{MP(1,0,5)} \rightarrow P(1,0,5)(4 + 1) = P(0,0,5) \Rightarrow$$

$$-5P(1,0,5) + P(0,0,5) = 0$$

Έχουν προκύψει 40 εξισώσεις των οποίων τους όρους τοποθετούμε στον Πίνακα 52. Όπου κάποιος όρος δεν υπάρχει, αυτός θα αναπαρασταθεί στον πίνακα με μηδέν. Από τον Πίνακα 52 θα προκύψει στη συνέχεια το σύστημα εξισώσεων, που θα περιλαμβάνει τις ζητούμενες πιθανότητες $P(0,0,0), P(0,0,1), \dots, P(1,3,2), P(1,4,1)$. Επίσης, έχουν σημειωθεί με κίτρινο χρώμα τα κελιά του πίνακα στα οποία αλλάζουν οι τιμές (σε σύγκριση με το μοντέλο NP/CS) εφόσον υπάρχει πρόσβαση των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή, δηλαδή όταν η πιθανότητα $p_s > 0$.

		<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></</div></div>																																							
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

		<div><div></div><div>$P(0,0,0)$</div><div>$P(0,0,1)$</div><div>$P(0,1,0)$</div><div>$P(0,0,2)$</div><div>$P(0,1,1)$</div><div>$P(0,2,0)$</div><div>$P(0,0,3)$</div><div>$P(0,1,2)$</div><div>$P(0,2,1)$</div><div>$P(0,3,0)$</div><div>$P(0,0,4)$</div><div>$P(0,1,3)$</div><div>$P(0,2,2)$</div><div>$P(0,3,1)$</div><div>$P(0,4,0)$</div><div>$P(0,0,5)$</div><div>$P(0,1,4)$</div><div>$P(0,2,3)$</div><div>$P(0,3,2)$</div><div>$P(0,4,1)$</div><div>$P(1,0,0)$</div><div>$P(1,0,1)$</div><div>$P(1,1,0)$</div><div>$P(1,0,2)$</div><div>$P(1,1,1)$</div><div>$P(1,2,0)$</div><div>$P(1,0,3)$</div><div>$P(1,1,2)$</div><div>$P(1,2,1)$</div><div>$P(1,3,0)$</div><div>$P(1,0,4)$</div><div>$P(1,1,3)$</div><div>$P(1,2,2)$</div><div>$P(1,3,1)$</div><div>$P(1,4,0)$</div><div>$P(1,0,5)$</div><div>$P(1,1,4)$</div><div>$P(1,2,3)$</div><div>$P(1,3,2)$</div><div>$P(1,4,1)$</div></div>																																										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40			
MP(1,0,0)	21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
MP(1,0,1)	22	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,1,0)	23	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	-6	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,0,2)	24	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,1,1)	25	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	-7	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,2,0)	26	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	-6	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,0,3)	27	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,1,2)	28	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	-8	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,2,1)	29	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	-7	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,3,0)	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-6	0	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,0,4)	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	4	1	0	0	0	0			
MP(1,1,3)	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	3	2	0	0	0	0		
MP(1,2,2)	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	2	3	0	0	0		
MP(1,3,1)	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	1	4	0	0		
MP(1,4,0)	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,0,5)	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0		
MP(1,1,4)	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0		
MP(1,2,3)	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	
MP(1,3,2)	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	
MP(1,4,1)	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0

Πίνακας 52 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 40x40 μοντέλου CPQ για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και ουρά αναμονής $k=1$.

Πίνακας 53 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 40x40 μοντέλου CPQ για $C=4$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών, με $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση στην ουρά.

[illegible]

Πίνακας 54 - Υλοποίηση πίνακα εξισώσεων 40x40 (με κανονικοποίηση) μοντέλου CPQ, με $C=4$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και ουρά $k=1$.

Η εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει από το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων και είναι πάντα ίσο με τη μονάδα:

$$P(0,0,0) + P(0,0,1) + \dots + P(0,4,1) + P(1,0,0) + \dots + P(1,3,2) + P(1,4,1) = 1$$

Ο υπολογισμός του αθροίσματος όλων των πιθανοτήτων προκύπτει από τον τύπο:

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^{C+k} \sum_{n_h=0}^{C+k} P(i, n_{new}, n_h) \cdot \mathbf{1}[(n_{new} \leq C) + n_h \leq C + k] \quad (3.9)$$

οπού $i \in \{0,1\}$ οι δύο πιθανές καταστάσεις SP και MP του συστήματος και όπου $n_{new}, n_h \in \{0, \dots, C + k\}$ οι πιθανές καταστάσεις (ή χωρητικότητα του συστήματος μαζί με την ουρά). Στο άθροισμα $C + k$ είναι οι κλήσεις που βρίσκονται σε εξυπηρέτηση στο σύστημα για κάθε πιθανό i συν τις κλήσεις οι οποίες είναι στην ουρά αναμονής και περιμένουν να εξυπηρετηθούν. Στο σύστημά μας έχει τοποθετηθεί η συνθήκη $\mathbf{1}[(n_{new} \leq C) + n_h \leq C + k]$ που μας δείχνει αρχικά ότι οι νέες κλήσεις είναι $n_{new} \leq C$ που σημαίνει ότι δεν μπορεί να εξυπηρετηθούν από την ουρά αναμονής. Επίσης, μας δείχνει ότι το συνολικό άθροισμα των κλήσεων οι οποίες λαμβάνεται υπόψη (δηλαδή αθροίζονται στο σύνολο) μόνο εάν ισχύει η συνθήκη $n_{new} + n_h \leq C + k$. Διαφορετικά, όταν ισχύει $\mathbf{0}[(n_{new} + n_h) > (C + k)]$ δεν λαμβάνονται υπόψιν στο τελικό άθροισμα. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές της χωρητικότητας και της ουράς στον τύπο (3.9) θα έχουμε για το εξεταζόμενο σύστημα ότι:

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^{4+1} \sum_{n_h=0}^{4+1} P(i, n_{new}, n_h) \cdot \mathbf{1}[(n_{new} \leq 4) + n_h \leq 4 + 1]$$

Το σύστημα επιλύθηκε με τη μέθοδο του αντίστροφου πίνακα. Έγινε αντικατάσταση της τελευταία γραμμή με το άθροισμα των πιθανοτήτων που είναι πάντα ένα και έτσι προκύπτει ο Πίνακας 54.

Το σύστημα είναι της μορφής $A \cdot X = B$. Επιλύουμε το σύστημα μέσω του διαδικτυακού λογισμικού <https://matrix.resish.com/matrixMethod.php>. Στον Πίνακα 55 εμφανίζονται τα δεδομένα εισόδου.

Πίνακας 55 - Σύστημα εξισώσεων 40x40 μοντέλου CPQ με $C=4$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών, με $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP και $k=1$ θέση στην ουρά. Είσοδος των δεδομένων στο on-line σύστημα.

Διπλωματική Εργασία

Έξοδος Λογισμικού Επίλυσης	Πιθανότητες Καταστάσεων
$x_1 = 0.0038784177313298737655$	$P(0,0,0) = 0,0038784177$
$x_2 = 0.017591684905152819669$	$P(0,0,1) = 0,0175916849$
$x_3 = 0.015258599232154603491$	$P(0,1,0) = 0,0152585992$
$x_4 = 0.051210233217672364005$	$P(0,0,2) = 0,0512102332$
$x_5 = 0.058496777742489105713$	$P(0,1,1) = 0,0584967777$
$x_6 = 0.024079739282081371982$	$P(0,2,0) = 0,0240797393$
$x_7 = 0.051702605208965344487$	$P(0,0,3) = 0,0517026052$
$x_8 = 0.066588707181355951987$	$P(0,1,2) = 0,0665887072$
$x_9 = 0.033821079976142346796$	$P(0,2,1) = 0,0338210799$
$x_{10} = 0.0089189996876723954297$	$P(0,3,0) = 0,0089189997$
$x_{11} = 0.024950538058153507889$	$P(0,0,4) = 0,0249505381$
$x_{12} = 0.045424870774522961381$	$P(0,1,3) = 0,0454248708$
$x_{13} = 0.029779045478592653584$	$P(0,2,2) = 0,0297790455$
$x_{14} = 0.011245602650483859162$	$P(0,3,1) = 0,0112456026$
$x_{15} = 0.0024219436680199192885$	$P(0,4,0) = 0,0024219437$
$x_{16} = 0.0051980287621153141433$	$P(0,0,5) = 0,0051980288$
$x_{17} = 0.018927029489384567256$	$P(0,1,4) = 0,0189270295$
$x_{18} = 0.018611903424120408492$	$P(0,2,3) = 0,0186119034$
$x_{19} = 0.0093713355420698808869$	$P(0,3,2) = 0,0093713355$
$x_{20} = 0.0025228579875207491475$	$P(0,4,1) = 0,0025228579$
$x_{21} = 0.0098123109073211877664$	$P(1,0,0) = 0,0098123109$
$x_{22} = 0.013199201122197813405$	$P(1,0,1) = 0,0131992011$
$x_{23} = 0.041796246590399439445$	$P(1,1,0) = 0,0417962466$
$x_{24} = 0.015198136877170919876$	$P(1,0,2) = 0,0151981369$
$x_{25} = 0.04440644919589003441$	$P(1,1,1) = 0,0444064492$
$x_{26} = 0.071025438288873030387$	$P(1,2,0) = 0,0710254383$
$x_{27} = 0.011357908593637981954$	$P(1,0,3) = 0,0113579086$
$x_{28} = 0.036301136018781049147$	$P(1,1,2) = 0,0363011360$
$x_{29} = 0.056875044490094984751$	$P(1,2,1) = 0,0568750445$
$x_{30} = 0.059337619866488022591$	$P(1,3,0) = 0,0593376199$
$x_{31} = 0.0065788733931445345307$	$P(1,0,4) = 0,0065788734$
$x_{32} = 0.024203078561198354981$	$P(1,1,3) = 0,0242030786$
$x_{33} = 0.037610230449721388422$	$P(1,2,2) = 0,0376102305$
$x_{34} = 0.037152657923839877359$	$P(1,3,1) = 0,0371526579$
$x_{35} = 0.024219436680199192898$	$P(1,4,0) = 0,0242194367$
$x_{36} = 0.0010396057524230628287$	$P(1,0,5) = 0,0010396058$
$x_{37} = 0.0037854058978769134512$	$P(1,1,4) = 0,0037854059$
$x_{38} = 0.0037223806848240816985$	$P(1,2,3) = 0,0037223807$
$x_{39} = 0.0018742671084139761779$	$P(1,3,2) = 0,0018742671$
$x_{40} = 0.00050457159750414929467$	$P(1,4,1) = 0,0005045716$

Αποτελέσματα 51 - Επίλυση συστήματος εξισώσεων 40x40, υπολογισμός πιθανοτήτων μοντέλου CPQ για C=4 με πεπερασμένο πλήθος πηγών, με t=2 δεσμευμένες θέσεις και k=1 θέση στην ουρά.

3.6.4. Επίλυση συστήματος εξισώσεων μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη γλώσσα προγραμματισμού Python

Ο Πίνακας 52 επιβεβαιώνει την ίδια σταθερή ακολουθία (σε γραμμές και στήλες) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αναλύοντας τις σαράντα (40) αρχικές εξισώσεις σφαιρικής

ισορροπίας που έχουν εξαχθεί στην §3.6.2, μπορεί να συμπληρωθεί ο Πίνακας 56 που αποτελεί τη γενικευμένη μορφή του προς ανάλυση συστήματος.

		<div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>																																							
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

		<div><div></div><div>$P(0,0,0)$</div><div>$P(0,0,1)$</div><div>$P(0,1,0)$</div><div>$P(0,0,2)$</div><div>$P(0,1,1)$</div><div>$P(0,2,0)$</div><div>$P(0,0,3)$</div><div>$P(0,1,2)$</div><div>$P(0,2,1)$</div><div>$P(0,3,0)$</div><div>$P(0,0,4)$</div><div>$P(0,1,3)$</div><div>$P(0,2,2)$</div><div>$P(0,3,1)$</div><div>$P(0,4,0)$</div><div>$P(0,0,5)$</div><div>$P(0,1,4)$</div><div>$P(0,2,3)$</div><div>$P(0,3,2)$</div><div>$P(0,4,1)$</div><div>$P(1,0,0)$</div><div>$P(1,0,1)$</div><div>$P(1,1,0)$</div><div>$P(1,0,2)$</div><div>$P(1,1,1)$</div><div>$P(1,2,0)$</div><div>$P(1,0,3)$</div><div>$P(1,1,2)$</div><div>$P(1,2,1)$</div><div>$P(1,3,0)$</div><div>$P(1,0,4)$</div><div>$P(1,1,3)$</div><div>$P(1,2,2)$</div><div>$P(1,3,1)$</div><div>$P(1,4,0)$</div><div>$P(1,0,5)$</div><div>$P(1,1,4)$</div><div>$P(1,2,3)$</div><div>$P(1,3,2)$</div><div>$P(1,4,1)$</div></div>																																											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40				
MP(1,0,0)	21	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
MP(1,0,1)	22	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,1,0)	23	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	a	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,0,2)	24	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,1,1)	25	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	a	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,2,0)	26	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	a	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
MP(1,0,3)	27	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
MP(1,1,2)	28	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	a	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
MP(1,2,1)	29	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	a	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
MP(1,3,0)	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	a	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	0	0	0	0	
MP(1,0,4)	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	0	0	γ	β	0	0	0	0		
MP(1,1,3)	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	a	0	0	0	0	γ	β	0	0	0	0		
MP(1,2,2)	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	a	0	0	0	0	γ	β	0	0	0	0	
MP(1,3,1)	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	a	0	0	0	0	γ	β	0	0	0
MP(1,4,0)	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	a	0	0	0	0	0	0	0
MP(1,0,5)	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	0	0	0	0	
MP(1,1,4)	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	0	0	
MP(1,2,3)	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0	0
MP(1,3,2)	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	0	0
MP(1,4,1)	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\square

Πίνακας 56 - Υλοποίηση πίνακα 40x40 μοντέλου CPQ για $C=4$ με πεπερασμένο πλήθος πηγών, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις στην SP, $k=1$ ουρά και γενίκευση των όρων του συστήματος.

Παρουσιάζουμε και πάλι τις αρχικές εξισώσεις, με χρωματική επισήμανση-αναπαράσταση:

$$\begin{aligned}
 SP(0,0,0) &\rightarrow P(0,0,0)(N_{new}v_{new} + N_hv_h + \theta_s) + P(0,1,0)\mu_s + P(0,0,1)\mu_s + P(1,0,0)\theta_m = 0 \\
 SP(0,1,0) &\rightarrow P(0,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + N_hv_h + \mu_s + \theta_s) + P(0,0,0)N_{new}v_{new} + P(0,2,0)2\mu_s + \\
 &P(0,1,1)\mu_s + P(1,1,0)\theta_m = 0 \\
 SP(0,2,0) &\rightarrow P(0,2,0)(N_hv_h + (N_{new} - 2)v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
 &P(0,3,0)3\mu_s + P(0,2,1)\mu_s + P(1,2,0)\theta_m = 0 \\
 SP(0,3,0) &\rightarrow P(0,3,0)(N_hv_h + N_{new} - 3)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,4,0)4\mu_s + P(0,3,1)\mu_s + \\
 &P(1,3,0)\theta_m + P(0,2,0)(N_{new} - 2)v_{new}p_s = 0 \\
 SP(0,4,0) &\rightarrow P(0,4,0)(N_hv_h + 4\mu_s + \theta_s) + P(1,4,0)\theta_m + P(0,3,0)(N_{new} - 3)v_{new}p_s = 0 \\
 SP(0,0,1) &\rightarrow P(0,0,1)(N_{new}v_{new} + (N_h - 1)v_h + \mu_s + \theta_s) + P(0,0,0)N_hv_h + P(0,0,2)2\mu_s + \\
 &P(0,1,1)\mu_s + P(1,0,1)\theta_m = 0 \\
 SP(0,1,1) &\rightarrow P(0,1,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - 1)v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,0,1)N_{new}v_{new} + \\
 &P(0,1,0)N_hv_h + P(0,2,1)2\mu_s + P(0,1,2)2\mu_s + P(1,1,1)\theta_m = 0 \\
 SP(0,2,1) &\rightarrow P(0,2,1)((N_h - 1)v_h + (N_{new} - 2)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,2,0)N_hv_h + \\
 &P(0,3,1)3\mu_s + P(0,2,2)2\mu_s + P(1,2,1)\theta_m + P(0,1,1)(N_{new} - 1)v_{new}p_s = 0 \\
 SP(0,3,1) &\rightarrow P(0,3,1)((N_h - 1)v_h + 4\mu_s + \theta_s) + P(0,3,0)N_hv_h + P(0,4,1)4\mu_s + P(0,3,2)\mu_s + \\
 &P(1,3,1)\theta_m + P(0,2,1)(N_{new} - 2)v_{new}p_s = 0 \\
 SP(0,4,1) &\rightarrow P(0,4,1)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,4,0)N_hv_h + P(1,4,1)\theta_m = 0 \\
 SP(0,0,2) &\rightarrow P(0,0,2)((N_h - 2)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 2\mu_s + \theta_s) + P(0,0,1)(N_h - 1)v_h + \\
 &P(0,0,3)3\mu_s + P(0,1,2)\mu_s + P(1,0,2)\theta_m = 0 \\
 SP(0,1,2) &\rightarrow P(0,1,2)((N_h - 2)v_h + (N_{new} - 1)v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,1,1)(N_h - 1)v_h + \\
 &P(0,2,2)2\mu_s + P(0,1,3)3\mu_s + P(1,1,2)\theta_m + P(0,0,2)(N_{new}v_{new})p_s = 0 \\
 SP(0,2,2) &\rightarrow P(0,2,2)((N_h - 2)v_h + 4\mu_s + \theta_s) + P(0,2,1)(N_h - 1)v_h + P(0,3,2)3\mu_s + \\
 &P(0,2,3)2\mu_s + P(1,2,2)\theta_m + P(0,1,2)(N_{new} - 1)v_{new}p_s = 0 \\
 SP(0,3,2) &\rightarrow P(0,3,2)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,3,1)(N_h - 1)v_h + P(1,3,2)\theta_m = 0 \\
 SP(0,0,3) &\rightarrow P(0,0,3)((N_h - 3)v_h + N_{new}v_{new}p_s + 3\mu_s + \theta_s) + P(0,0,2)(N_h - 2)v_h + \\
 &P(0,0,4)4\mu_s + P(0,1,3)\mu_s + P(1,0,3)\theta_m = 0 \\
 SP(0,1,3) &\rightarrow P(0,1,3)((N_h - 3)v_h + 4\mu_s + \theta_s) + P(0,1,2)(N_h - 2)v_h + P(0,2,3)2\mu_s + \\
 &P(0,1,4)3\mu_s + P(1,1,3)\theta_m + P(0,0,3)(N_{new}v_{new})p_s = 0 \\
 SP(0,2,3) &\rightarrow P(0,2,3)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,2,2)(N_h - 2)v_h + P(1,2,3)\theta_m = 0 \\
 SP(0,0,4) &\rightarrow P(0,0,4)((N_h - 4)v_h + 4\mu_s + \theta_s) + P(0,0,3)(N_h - 3)v_h + P(0,1,4)\mu_s + \\
 &P(0,0,5)4\mu_s + P(1,0,4)\theta_m = 0 \\
 SP(0,1,4) &\rightarrow P(0,1,4)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,1,3)(N_h - 3)v_h + P(1,1,4)\theta_m = 0 \\
 SP(0,0,5) &\rightarrow P(0,0,5)(4\mu_s + \theta_s) + P(0,0,4)(N_h - 4)v_h + P(1,0,5)\theta_m = 0
 \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τις εξισώσεις που αφορούν τις είκοσι (20) καταστάσεις στην MP:

$$\begin{aligned}
MP(1,0,0) &\rightarrow P(1,0,0)(N_{new}v_{new} + \theta_m) + P(1,0,1)\mu_m + P(1,1,0)\mu_m + P(0,0,0)\theta_s = 0 \\
MP(1,1,0) &\rightarrow P(1,1,0)((N_{new} - 1)v_{new} + \mu_m + \theta_m) + P(1,0,0)N_{new}v_{new} + P(1,1,1)\mu_m + \\
&P(1,2,0)2\mu_m + P(0,1,0)\theta_s = 0 \\
MP(1,2,0) &\rightarrow P(1,2,0)((N_{new} - 2)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,1,0)(N_{new} - 1)v_{new} + P(1,2,1)\mu_m + \\
&P(1,3,0)3\mu_m + P(0,2,0)\theta_s = 0 \\
MP(1,3,0) &\rightarrow P(1,3,0)((N_{new} - 3)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,2,0)(N_{new} - 2)v_{new} + P(1,3,1)\mu_m + \\
&P(1,4,0)4\mu_m + P(0,3,0)\theta_s = 0 \\
MP(1,4,0) &\rightarrow P(1,4,0)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,3,0)(N_{new} - 3)v_{new} + P(0,4,0)\theta_s = 0 \\
MP(1,0,1) &\rightarrow P(1,0,1)(N_{new}v_{new} + \mu_m + \theta_m) + P(1,0,2)2\mu_m + P(1,1,1)\mu_m + P(0,0,1)\theta_s = 0 \\
MP(1,1,1) &\rightarrow P(1,1,1)((N_{new} - 1)v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,0,1)N_{new}v_{new} + P(1,1,2)2\mu_m + \\
&P(1,2,1)2\mu_m + P(0,1,1)\theta_s = 0 \\
MP(1,2,1) &\rightarrow P(1,2,1)((N_{new} - 2)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,1,1)(N_{new} - 1)v_{new} + \\
&P(1,2,2)2\mu_m + P(1,3,1)3\mu_m + P(0,2,1)\theta_s = 0 \\
MP(1,3,1) &\rightarrow P(1,3,1)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,2,1)(N_{new} - 2)v_{new} + P(1,3,2)\mu_m + P(1,4,1)4\mu_m + \\
&P(0,3,1)\theta_s = 0 \\
MP(1,4,1) &\rightarrow P(1,4,1)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,4,1)\theta_s = 0 \\
MP(1,0,2) &\rightarrow P(1,0,2)(N_{new}v_{new} + 2\mu_m + \theta_m) + P(1,0,3)3\mu_m + P(1,1,2)\mu_m + P(0,0,2)\theta_s = 0 \\
MP(1,1,2) &\rightarrow P(1,1,2)((N_{new} - 1)v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,0,2)N_{new}v_{new} + P(1,1,3)3\mu_m + \\
&P(1,2,2)2\mu_m + P(0,1,2)\theta_s = 0 \\
MP(1,2,2) &\rightarrow P(1,2,2)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,1,2)(N_{new} - 1)v_{new} + P(1,2,3)2\mu_m + P(1,3,2)3\mu_m + \\
&P(0,2,2)\theta_s = 0 \\
MP(1,3,2) &\rightarrow P(1,3,2)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,3,2)\theta_s = 0 \\
MP(1,0,3) &\rightarrow P(1,0,3)(N_{new}v_{new} + 3\mu_m + \theta_m) + P(1,0,4)4\mu_m + P(1,1,3)\mu_m + P(0,0,3)\theta_s = 0 \\
MP(1,1,3) &\rightarrow P(1,1,3)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,0,3)N_{new}v_{new} + P(1,1,4)3\mu_m + P(1,2,3)2\mu_m + \\
&P(0,1,3)\theta_s = 0 \\
MP(1,2,3) &\rightarrow P(1,2,3)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,2,3)\theta_s = 0 \\
MP(1,0,4) &\rightarrow P(1,0,4)(4\mu_m + \theta_m) + P(1,0,5)4\mu_m + P(1,1,4)\mu_m + P(0,0,4)\theta_s = 0 \\
MP(1,1,4) &\rightarrow P(1,1,4)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,1,4)\theta_s = 0 \\
MP(1,0,5) &\rightarrow P(1,0,5)(4\mu_m + \theta_m) + P(0,0,5)\theta_s = 0
\end{aligned}$$

$$a = \begin{cases} -((N_{new} - n_{new})v_{new} + (N_h - n_h)v_h + \mu_s(n_{new} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } 0 \leq n < C - t \\ -((N_h - n_h)v_h + (N_{new} - n_{new})v_{new}p_s + \mu_s(n_{new} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } C - t \leq n < C \\ -((N_h - n_h)v_h + \mu_s(n_{new} + n_h) + \theta_s), & i = 0 \text{ για } n = C \\ ((N_h - n_h)v_h + \mu_s C + \theta_s), & i = 0 \text{ για } C < n < C + k \\ (\mu_s C + \theta_s), & i = 0 \text{ για } n = C + k \\ -((N_{new} - n_{new})v_{new} + \mu_m(n_{new} + n_h) + \theta_m), & i = 1 \text{ για } 0 \leq n < C \\ (\mu_m C + \theta_m), & i = 1 \text{ για } C \leq n \leq C + k \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \mu_s(n_{new} + 1), & i = 0 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } (n_{new} + n_h) \leq C \\ \mu_s(n_{new} + 1), & i = 0 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } C < (n_{new} + n_h) < C + k \\ \mu_m(n_{new} + 1), & i = 1 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } (n_{new} + n_h) \leq C \\ \mu_m(n_{new} + 1), & i = 1 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } C < (n_{new} + n_h) < C + k \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \mu_s(n_h + 1), & i = 0 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } (n_{new} + n_h) < C \\ \mu_s n_h, & i = 0 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } (n_{new} + n_h) = C \\ \mu_s(n_h - 1), & i = 0 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } C < (n_{new} + n_h) = C + k \\ \mu_m(n_h + 1), & i = 1 \text{ για } 0 \leq (n_{new} + n_h) < C \\ \mu_m n_h, & i = 1 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } (n_{new} + n_h) = C \\ \mu_m(n_h - 1), & i = 1 \text{ για } (0 \leq n_{new} < C) \text{ και } C < (n_{new} + n_h) < C + k \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} (N_{new} - n_{new} + 1)v_{new}, & i = 0, \quad 0 < n_{new} + n_h \leq C - t \\ (N_{new} - n_{new} + 1)v_{new}p_s, & i = 0, \quad C - t < n_{new} + n_h \leq C \\ 0, & i = 0, \quad 0 = n_{new} \\ (N_{new} - n_{new} + 1)v_{new}, & i = 1, \quad 0 < n_{new} \text{ και } (n_{new} + n_h) \leq C \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (N_h - n_h + 1)v_h, & i = 0, \quad 0 < n_h \leq C + k \\ 0, & i = 1, \quad 0 < n_h \leq C + k \end{cases}$$

Έτσι με τη συμπλήρωση του Πίνακα 56 προκύπτει μια γενικευμένη μορφή του συστήματος η οποία εκφράζεται από τις παραπάνω είκοσι τρεις (23) συνολικά εξισώσεις και ισχύει για συστήματα οποιασδήποτε χωρητικότητας C , δεσμευμένη χωρητικότητα t και k θέσεις στην ουρά αναμονής. Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε την υλοποίηση του Πίνακα 56 στη γλώσσα προγραμματισμού Python την οποία παρουσιάζουμε στο απόσπασμα του Κώδικα 37 (βλ. Παράρτημα Α).

Η υλοποίηση του πίνακα έγινε με τη συνάρτηση την οποία έχουμε ονομάσει `create_array` και παίρνει ως είσοδο όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος C , t , k , p_s , N_{new} , N_h , v_{new} , v_h , m_s , m_m , x_s και x_m και επιστρέφει τον πίνακα για τις τιμές που δόθηκαν στα παραπάνω χαρακτηριστικά. Αν τρέξουμε τον Κώδικα 37, δηλαδή καλέσουμε τη συνάρτηση για τις τιμές του παραδείγματος, οι οποίες είναι:

$$C=4, \quad t=2, \quad k=1, \quad p_s=0, \quad N_{new}=5, \quad N_h=5, \quad v_{new}=1, \quad v_h=1, \quad \mu_s=1, \quad \mu_m=1, \quad \theta_s^{-1}=1, \quad \theta_m^{-1}=1$$

θα έχουμε την επιστροφή του πίνακα A (Αποτελέσματα 52) στην έξοδο της συνάρτησης, τον οποίο και εκτυπώνουμε. Παρατηρούμε ότι ταυτίζεται με τον Πίνακα 52, τον οποίο έχουμε υλοποιήσει στην §3.6.2.

Στη συνέχεια, παίρνουμε τη συνάρτηση `def create_array(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` τη χωρίζουμε σε δύο μέρη. Το πρώτο τμήμα κώδικα θα αφορά τη δημιουργία του Πίνακα A (Αποτελέσματα 42), ενώ το δεύτερο τμήμα του κώδικα θα επιλύει το σύστημα εξισώσεων. Αρχικά παίρνουμε τον πίνακα A, τον οποίο έχουμε δημιουργήσει στο πρώτο τμήμα του κώδικα και αντικαθιστούμε την τελευταία γραμμή, θέτοντας όλα τα στοιχεία της ίσα με ένα (Αποτελέσματα 53). Στην πραγματικότητα, αυτή η ενέργεια αντικαθιστά την τελευταία εξίσωση με την εξίσωση κανονικοποίησης.

[illegible]

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τον πίνακα-διάνυσμα \mathbf{b} , προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουμε για τη λύση του συστήματος. Με τη χρήση της συνάρτησης **np.linalg.solve(A, b)**, η οποία παρέχεται από τη βιβλιοθήκη numpy της Python, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων και παίρνουμε τις πιθανότητες (Αποτελέσματα 54). Τα αποτελέσματα τα αποθηκεύουμε σε έναν δισδιάστατο πίνακα $R[x,y]$, ώστε να μπορούμε να τα εμφανίσουμε αλλά και να τα χρησιμοποιήσουμε αργότερα σε απαραίτητους υπολογισμούς. Παρατηρούμε ότι τα Αποτελέσματα 54 ταυτίζονται με αυτά που βρήκαμε στην §3.6.3 (Αποτελέσματα 51) με τη χρήση της on-line διαδικτυακής εφαρμογής επίλυσης συστημάτων.

Πιθανότητες - Αποτελέσματα :

```
-----
p(0, 0, 0) = 0.0038784177
p(0, 0, 1) = 0.0175916849
p(0, 1, 0) = 0.0152585992
p(0, 0, 2) = 0.0512102332
p(0, 1, 1) = 0.0584967777
p(0, 2, 0) = 0.0240797393
p(0, 0, 3) = 0.0517026052
p(0, 1, 2) = 0.0665887072
p(0, 2, 1) = 0.0338210800
p(0, 3, 0) = 0.0089189997
p(0, 0, 4) = 0.0249505381
p(0, 1, 3) = 0.0454248708
p(0, 2, 2) = 0.0297790455
p(0, 3, 1) = 0.0112456027
p(0, 4, 0) = 0.0024219437
p(0, 0, 5) = 0.0051980288
p(0, 1, 4) = 0.0189270295
p(0, 2, 3) = 0.0186119034
p(0, 3, 2) = 0.0093713355
p(0, 4, 1) = 0.0025228580
p(1, 0, 0) = 0.0098123109
p(1, 0, 1) = 0.0131992011
p(1, 1, 0) = 0.0417962466
p(1, 0, 2) = 0.0151981369
p(1, 1, 1) = 0.0444064492
p(1, 2, 0) = 0.0710254383
p(1, 0, 3) = 0.0113579086
p(1, 1, 2) = 0.0363011360
p(1, 2, 1) = 0.0568750445
p(1, 3, 0) = 0.0593376199
p(1, 0, 4) = 0.0065788734
p(1, 1, 3) = 0.0242030786
p(1, 2, 2) = 0.0376102304
p(1, 3, 1) = 0.0371526579
p(1, 4, 0) = 0.0242194367
p(1, 0, 5) = 0.0010396058
p(1, 1, 4) = 0.0037854059
p(1, 2, 3) = 0.0037223807
p(1, 3, 2) = 0.0018742671
p(1, 4, 1) = 0.0005045716
```

Αποτελέσματα 54 - Πιθανότητες μοντέλου CPQ (40x40) για C=4, t=2 και k=1.

3.6.5. Υπολογισμός των βασικών μεγεθών για την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) για το μοντέλο CPQ, με πεπερασμένο πλήθος πηγών, t δεσμευμένες θέσεις και k θέσεις στην ουρά. Επίλυση με μαθηματικούς τύπους και γλώσσα Python.

Στο παρόν κεφάλαιο θα υπολογιστούν τα μεγέθη τα οποία χαρακτηρίζουν την ποιότητα

εξυπηρέτησης του συστήματος CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Τα μεγέθη που θα υπολογίσουμε είναι (Vlasakis et al., 2023):

- Η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο νέων κλήσεων $B_{new(TCPr)}$, υπολογίζεται ως το διπλό άθροισμα των πιθανοτήτων αρχικά να βρισκόμαστε σε οποιαδήποτε από τις δύο φάσεις (SP και MP) και το άθροισμα των πιθανοτήτων όταν οι κλήσεις που εξυπηρετούνται από το σύστημα να είναι $C + k \geq n_{new} + n_h \geq C$. Επίσης στην περίπτωση που είμαστε στην SP ($i=0$) στην οποία υπάρχουν οι δεσμευμένες θέσεις προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής και έρθει μία νέα κλήση ενώ είμαστε στη δεσμευμένη περιοχή αυτή θα απορριφθεί. Η δεσμευμένη περιοχή ξεκινάει από την κατάσταση $n_{new} + n_h = C - t$ και φθάνει μέχρι την C κατάσταση. Η πιθανότητα πρόσβασης των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή είναι p_s . Η συνολική πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$B_{new(TCPr)} = (1 - p_s) \sum_{n_{new}+n_h=C-t}^{C-1} P(0, n_{new}, n_h) + \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=C}^{C+k} P(i, n_{new}, n_h) \quad (3.10)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{new(TCPr)} &= P(0,0,4) + P(0,1,3) + P(0,2,2) + P(0,3,1) + P(0,4,0) + P(0,0,5) + P(0,1,4) \\ &+ P(0,2,3) + P(0,3,2) + P(0,4,1) + P(1,0,4) + P(1,1,3) + P(1,2,2) + P(1,3,1) + P(1,2,2) \\ &+ P(1,3,1) + P(1,4,0) + P(1,0,5) + P(1,1,4) + P(1,2,3) + P(1,3,2) + P(1,4,1) + (1 - p_s) \\ &* [P(0,2,0) + P(0,1,1) + P(0,0,2) + P(0,3,0) + P(0,2,1) + P(0,1,2) + P(0,0,3)] = \\ &= 0,0249505 + 0,0454249 + 0,029779 + 0,0112456 + 0,0024219 + 0,005198 + \\ &+ 0,0189271 + 0,0186119 + 0,0093713 + 0,0025229 + 0,0065789 + 0,0242031 + \\ &+ 0,0376102 + 0,0371527 + 0,0242194 + 0,0010396 + 0,0037854 + 0,0037224 + \\ &+ 0,0018743 + 0,0005046 + [(1 - p_s) * (0,0240797 + 0,0584968 + 0,0512102 + \\ &+ 0,008919 + 0,0338211 + 0,0665887 + 0,0517026)] = \\ &= 0,113822 + 0,0546311 + 0,1297642 + 0,0109262 + 0,2948181 = \mathbf{0,6039618} \end{aligned}$$

- Η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο των κλήσεων μεταπομπής $B_h(TCPr)$. Είναι η δεσμευμένη πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί σε κατάσταση στην οποία το άθροισμα των πιθανοτήτων των κλήσεων που εξυπηρετούνται από το σύστημα να είναι $n_{new} + n_h = C + k$, με δεδομένο ότι το σύστημα βρίσκεται αποκλειστικά στη φάση SP. Η πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:

$$B_h(TCPr) = \frac{\sum_{n_{new}+n_h=C+k}^{C+k} P(0, n_{new}, n_h)}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^{C+k} P(0, n_{new}, n_h)} \quad (3.11)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 B_{h(TCPr)} &= \frac{\sum_{n_{new}+n_h=C+k}^{C+k} P(0, n_{new}, n_h)}{\sum_{n_{new}+n_h=0}^{C+k} P(0, n_{new}, n_h)} = \frac{P(0,0,5)+P(0,1,4)+P(0,2,3)+P(0,3,2)+P(0,4,1)}{P(0,0,0)+P(0,0,1)+P(0,1,0)+\dots+P(0,2,3)+P(0,3,2)+P(0,4,1)} = \\
 &= \frac{0,005198 + 0,018927 + 0,0186119 + 0,0093713 + 0,0025229}{0,0038784 + 0,0175917 + 0,0152586 + \dots + 0,0186119 + 0,0093713 + 0,0025229} = \\
 &= \frac{0,0546311}{0,5} = \mathbf{0,109262}
 \end{aligned}$$

- Επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε για το σύστημα είναι η αξιοποίηση (ή χρησιμοποίηση) της χωρητικότητας του συστήματος U_c . Εδώ που υπάρχει η ουρά αναμονής το συνολικό U είναι το άθροισμα των επιμέρους U_1 και U_2 , τα οποία είναι το μέσο πλήθος κατειλημμένων BU για τις καταστάσεις εκτός ουράς (U_1) και εντός ουράς (U_2) αντίστοιχα. Δίνεται από τον τύπο:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{U_1 + U_2}{C} \quad (3.12)$$

Το U_1 είναι η μέση τιμή του πλήθους των κατειλημμένων BU στο σύστημα, προκύπτει από τις καταστάσεις που βρίσκονται εκτός της ουράς αναμονής και αυτές είναι $0 \leq n_{new} + n_h \leq C$ και για τις δύο φάσεις δηλαδή για $i = \{0,1\}$. Το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων εκτός ουράς $P(i, n_{new}, n_h)$ πολλαπλασιασμένο επί $[n_{new} + n_h] \in \{0, 1, 2, \dots, C-1, C\}$ (Vlasakis M., et al. 2023) μας δίνει το U_1 και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_1 = \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=0}^C (n_{new} + n_h) \cdot P(i, n_{new}, n_h) \quad (3.13)$$

Αντίστοιχα για το U_2 δηλαδή για τη μέση τιμή του πλήθους των κατειλημμένων BU στο σύστημα εντός της ουράς, προκύπτει από τις καταστάσεις που βρίσκονται στην ουρά αναμονής και αυτές είναι $C < n_{new} + n_h \leq C + k$ και για τις δύο φάσεις για $i = \{0,1\}$. Το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων στην ουρά $P(i, n_{new}, n_h)$ πολλαπλασιασμένο επί τη χωρητικότητα C του συστήματός μας δίνει το U_2 και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_2 = \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=C+1}^{C+k} C \cdot P(i, n_{new}, n_h) \quad (3.14)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=0}^C (n_{new} + n_h) \cdot P(i, n_{new}, n_h) = \\
 &= 0 \cdot P(0,0,0) + 1 \cdot P(0,0,1) + 1 \cdot P(0,1,0) + 2 \cdot P(0,0,2) + 2 \cdot P(0,2,0) + \dots + 4 \cdot P(0,4,0) + \\
 &+ 0 \cdot P(1,0,0) + 1 \cdot P(1,0,1) + 1 \cdot P(1,1,0) + 2 \cdot P(1,0,2) + 2 \cdot P(1,2,0) + \dots + 4 \cdot P(1,4,0) = \\
 &= \mathbf{2,5657336}
 \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της U_2 :

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=C+1}^{C+k} C \cdot P(i, n_{new}, n_h) = 4 \cdot P(0,0,5) + 4 \cdot P(0,1,4) + 4 \cdot P(0,2,3) + \\
 &4 \cdot P(0,3,2) + 4 \cdot P(0,4,1) + 4 \cdot P(1,0,5) + 4 \cdot P(1,1,4) + 4 \cdot P(1,2,3) + 4 \cdot P(1,3,2) \\
 &+ 4 \cdot P(1,4,1) = 4 \cdot [0,005198 + 0,018927 + 0,0186119 + 0,0093713 + 0,0025229 + \\
 &+ 0,0010396 + 0,0037854 + 0,0037224 + 0,0018743 + 0,0005046] = \mathbf{0,2622296}
 \end{aligned}$$

και υπολογίζουμε την αξιοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος:

$$U_c = \frac{U}{C} = \frac{U_1 + U_2}{C} = \frac{2,5657336 + 0,2622296}{4} = \frac{2,8279632}{4} = \mathbf{0,7069908}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε και συναντάμε στα συστήματα με ουρά αναμονής είναι το πλήθος των κλήσεων (μέση τιμή) που βρίσκονται στην ουρά αναμονής και συμβολίζεται με το L . Στο σύστημά μας οι κλήσεις στην ουρά αναμονής είναι κλήσεις μεταπομπής. Το L υπολογίζεται ως το άθροισμα των πιθανοτήτων $P(i, n_{new}, n_h)$ που βρίσκονται στην ουρά επί το πλήθος των κλήσεων που είναι σε αναμονή $(n_{new} + n_h - C)$ και δίνεται από τον τύπο:

$$L = \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=C+1}^{C+k} (n_{new} + n_h - C) \cdot P(i, n_{new}, n_h) \quad (3.15)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}+n_h=C+1}^{C+k} (n_{new} + n_h - C) \cdot P(i, n_{new}, n_h) = \\
 &= 1 \cdot P(0,0,5) + 1 \cdot P(0,1,4) + 1 \cdot P(0,2,3) + 1 \cdot P(0,3,2) + 1 \cdot P(0,4,1) + \\
 &+ 1 \cdot P(1,0,5) + 1 \cdot P(1,1,4) + 1 \cdot P(1,2,3) + 1 \cdot P(1,3,2) + 1 \cdot P(1,4,1) = \\
 &= 0,005198 + 0,018927 + 0,0186119 + 0,0093713 + 0,0025229 + 0,0010396 + \\
 &+ 0,0037854 + 0,0037224 + 0,0018742 + 0,0005046 = \mathbf{0,0655573}
 \end{aligned}$$

- Το επόμενο μέγεθος που θα υπολογίσουμε είναι ο ενεργός ρυθμός άφιξης των κλήσεων στο σύστημά και συμβολίζεται με λ_α . Το λ_α προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους

ρυθμών αφίξεων των κλήσεων. Στο σύστημά μας διακρίνουμε τους εξής ρυθμούς αφίξεων κλήσεων:

- Στην SP έχουμε το ρυθμό $\lambda_{\alpha 1}$ για τις καταστάσεις από $0 \leq (n_{new} + n_h) < C - t$ έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων $(N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new} + (N_h - n_h) \cdot v_h$. Ο ρυθμός $\lambda_{\alpha 1}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_{\alpha 1} = \sum_{n_{new} + n_h = 0}^{C-t-1} ((N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new} + (N_h - n_h) \cdot v_h) \cdot P(0, n_{new}, n_h) \quad (3.16)$$

- Στην SP έχουμε το ρυθμό $\lambda_{\alpha 2}$ για τις καταστάσεις $C - t \leq (n_{new} + n_h) \leq C - 1$ έχουμε ρυθμό άφιξης των κλήσεων $p_s \cdot (N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new} + (N_h - n_h) \cdot v_h$. Ο ρυθμός $\lambda_{\alpha 2}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_{\alpha 2} = \sum_{n_{new} + n_h = C-t}^{C-1} (p_s \cdot (N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new} + (N_h - n_h) \cdot v_h) \cdot P(0, n_{new}, n_h) \quad (3.17)$$

- Στην SP έχουμε το ρυθμό $\lambda_{\alpha 3}$ για τις καταστάσεις από $C \leq (n_{new} + n_h) \leq C + k$ έχουμε ρυθμό άφιξης των κλήσεων $(N_h - n_h) \cdot v_h$. Ο ρυθμός $\lambda_{\alpha 3}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_{\alpha 3} = \sum_{n_{new} + n_h = C}^{C+k-1} ((N_h - n_h) \cdot v_h) \cdot P(0, n_{new}, n_h) \quad (3.18)$$

- Στην MP έχουμε το ρυθμό $\lambda_{\alpha 4}$ για τις καταστάσεις από $0 \leq (n_{new} + n_h) \leq C - 1$ έχουμε ρυθμό άφιξης κλήσεων $(N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new}$. Ο ρυθμός $\lambda_{\alpha 4}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_{\alpha 4} = \sum_{n_{new} + n_h = 0}^{C-1} ((N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new}) \cdot P(1, n_{new}, n_h) \quad (3.19)$$

Ο συνολικός ενεργός ρυθμός άφιξης κλήσεων λ_{α} για το σύστημά μας προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών και δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha 1} + \lambda_{\alpha 2} + \lambda_{\alpha 3} + \lambda_{\alpha 4} \quad (3.20)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε από τους τύπους (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) και (3.20):

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha 1} &= \sum_{n_{new} + n_h = 0}^{C-t-1} ((N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new} + (N_h - n_h) \cdot v_h) \cdot P(0, n_{new}, n_h) = \dots = \\ &= 0,0387842 + 0,1583252 + 0,1373273 = \mathbf{0,3344367} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha 2} &= \sum_{n_{new}+n_h=C-t}^{C-1} (p_s \cdot (N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new} + (N_h - n_h) \cdot v_h) \cdot P(0, n_{new}, n_h) = \dots = \\ &= 0,1536307 + 0,2339871 + 0,1203987 + 0,1034052 + 0,1997661 + 0,1352843 + \\ &+ 0,044595 = \mathbf{0,9910671}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha 3} &= \sum_{n_{new}+n_h=C}^{C+k-1} ((N_h - n_h) \cdot v_h) \cdot P(0, n_{new}, n_h) = \dots = 0,0249505 + 0,0908498 + \\ &+ 0,0893371 + 0,0449824 + 0,0121097 = \mathbf{0,2622295}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha 4} &= \sum_{n_{new}+n_h=0}^{C-1} ((N_{new} - n_{new}) \cdot v_{new}) \cdot P(1, n_{new}, n_h) = \dots = 0,0490616 + 0,167185 \\ &+ 0,065996 + 0,0759907 + 0,1776258 + 0,2130763 + 0,0567896 + 0,1452045 + \\ &+ 0,1706251 + 0,1186752 = \mathbf{1,2402298}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha} &= \lambda_{\alpha 1} + \lambda_{\alpha 2} + \lambda_{\alpha 3} + \lambda_{\alpha 4} = 0,3344367 + 0,9910672 + 0,2622295 + 1,2402298 = \\ &= \mathbf{2,8279632}\end{aligned}$$

- Το τελευταίο μέγεθος που θα υπολογιστεί αφορά και αυτό τα συστήματα με ουρά και είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά και συμβολίζεται με το W . Είναι ο χρόνος που παραμένει μία κλήση, από τη στιγμή που θα αφιχθεί, στην ουρά μέχρι τη στιγμή που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτησή της. Υπολογίζεται με τον Νόμο του Little (Little, J. D. C, 1961) και είναι ο λόγος του πλήθους των κλήσεων L προς τον ενεργό ρυθμό άφιξης λ_{α} των κλήσεων και δίνεται από τον τύπο:

$$W = \frac{L}{\lambda_{\alpha}} \quad (3.21)$$

Για το σύστημά μας θα έχουμε:

$$W = \frac{L}{\lambda_{\alpha}} = \frac{0,0655573}{2,8279632} = \mathbf{0,0231818}$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον Κώδικα 38 (βλ. Παράρτημα Α) που είναι η επέκταση της συνάρτησης `def create_array(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάστηκε στον Κώδικα 37. Με την επέκταση στο 3^ο μέρος έχουμε την υλοποίηση των υπολογισμών για τα μεγέθη του QoS δηλαδή τα B_{new} , B_h , $U(U_1 + U_2)$, U_c , N , $\lambda_{\alpha}(\lambda_{\alpha 1}, \lambda_{\alpha 2}, \lambda_{\alpha 3}, \lambda_{\alpha 4})$ και W .

Μετά την κλήση του Κώδικα 38 έχουμε τον υπολογισμό των μεγεθών του QoS (Αποτελέσματα 55) τα οποία ταυτίζονται με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν με τη

χρήση των τύπων (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) και (3.21).

```

306 # Κλήση της συνάρτησης
307 create_array(C=4, t=2, k=1, ps=0, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

Run create_array+solution_QOS_CPQ(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, L, λα(λα1-λα4), W]
=====
Bnew = 0.603961806180508
Bh   = 0.109262310410422
U1   = 2.565733694679177
U2   = 0.262229544985012
U    = 2.827963239664189
Uc   = 0.706990809916047
L    = 0.065557386246253
λα1  = 0.334436734549066
λα2  = 0.991067157338310
λα3  = 0.262229544985012
λα4  = 1.240229802791802
λα   = 2.827963239664190
W    = 0.023181838196043

```

Αποτελέσματα 55 - Υπολογισμός μεγεθών QoS μοντέλου CPQ για $C=4$, $t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new} = N_h = 5$).

Στη συνέχεια, ξανατρέχουμε τον Κώδικα 38 ακόμα δύο φορές με μειωμένες αντιστοίχως τις τιμές των πηγών N_{new} και N_h κατά ένα (Vlasakis M., et al. 2023). Στα Αποτελέσματα 56 και 57 παρουσιάζεται η κλήση της συνάρτησης, καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων (CBP) για νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής.

```

305
306 # Κλήση της συνάρτησης
307 create_array(C=4, t=2, k=1, ps=0, Nnew=4, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

Run create_array+solution_QOS_CPQ(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, L, λα(λα1-λα4), W]
=====
Bnew = 0.554932276268116

```

Αποτελέσματα 56 - Υπολογισμός CBP των νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το μοντέλου CPQ με $C=4$, $t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=4$, $N_h=5$).

```

295 # Κλήση της συνάρτησης
296 create_array(C=4, t=2, k=1, ps=0, Nnew=5, Nh=4, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

Run create_array+solution_QOS_CPQ(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, N, λα(λα1-λα4), W]
=====
Bh   = 0.060640666577711

```

Αποτελέσματα 57 - Υπολογισμός CBP των κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ για το μοντέλου CPQ με $C=4$, $t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=5$, $N_h=4$).

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο για τις νέες κλήσεις είναι $B_{new(TCPr)}=0,60396$ ενώ η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι $B_{new(CBP)}=0,55493$. Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι μικρότερη από την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο, δηλαδή την πιθανότητα να βρεθούν όλοι οι επεξεργαστές κατειλημμένοι. Στην πραγματικότητα η απόρριψη της κλήσης έρχεται μετά τη συμφόρηση και απαιτεί τουλάχιστον μία ακόμη κλήση.

Αντίστοιχα και για πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο για τις κλήσεις μεταπομπής έχουμε $B_h(TCPr)=0,10926$ ενώ η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι $B_h(CBP) = 0,06064$. Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής, με το ίδιο σκεπτικό είναι μικρότερη από την πιθανότητα συμφόρησης στο χρόνο και για τις κλήσεις μεταπομπής.

Στο μοντέλο CPQ για να έχουμε απόρριψη νέας κλήσης, στην SP, θα πρέπει να ισχύει ότι $n_{new} + n_h \geq C - t$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν κάποια πιθανότητα $p_s > 0$ η οποία θα έδινε «πρόσβαση» των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή. Αντιστοίχως για να έχουμε απόρριψη κλήσης μεταπομπής θα πρέπει να ισχύει ότι $n_{new} + n_h = C + k$ οπότε θα είναι κατειλημμένοι όλοι οι servers καθώς και όλες οι διαθέσιμες θέσεις στην ουρά αναμονής.

3.6.6. Υπολογισμός ενός μεγαλύτερου συστήματος CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών με τη χρήση του λογισμικού Python και ανάλυση της συμπεριφοράς του με χρήση γραφικών παραστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί ένα σύστημα CPQ το οποίο θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά μεγέθη:

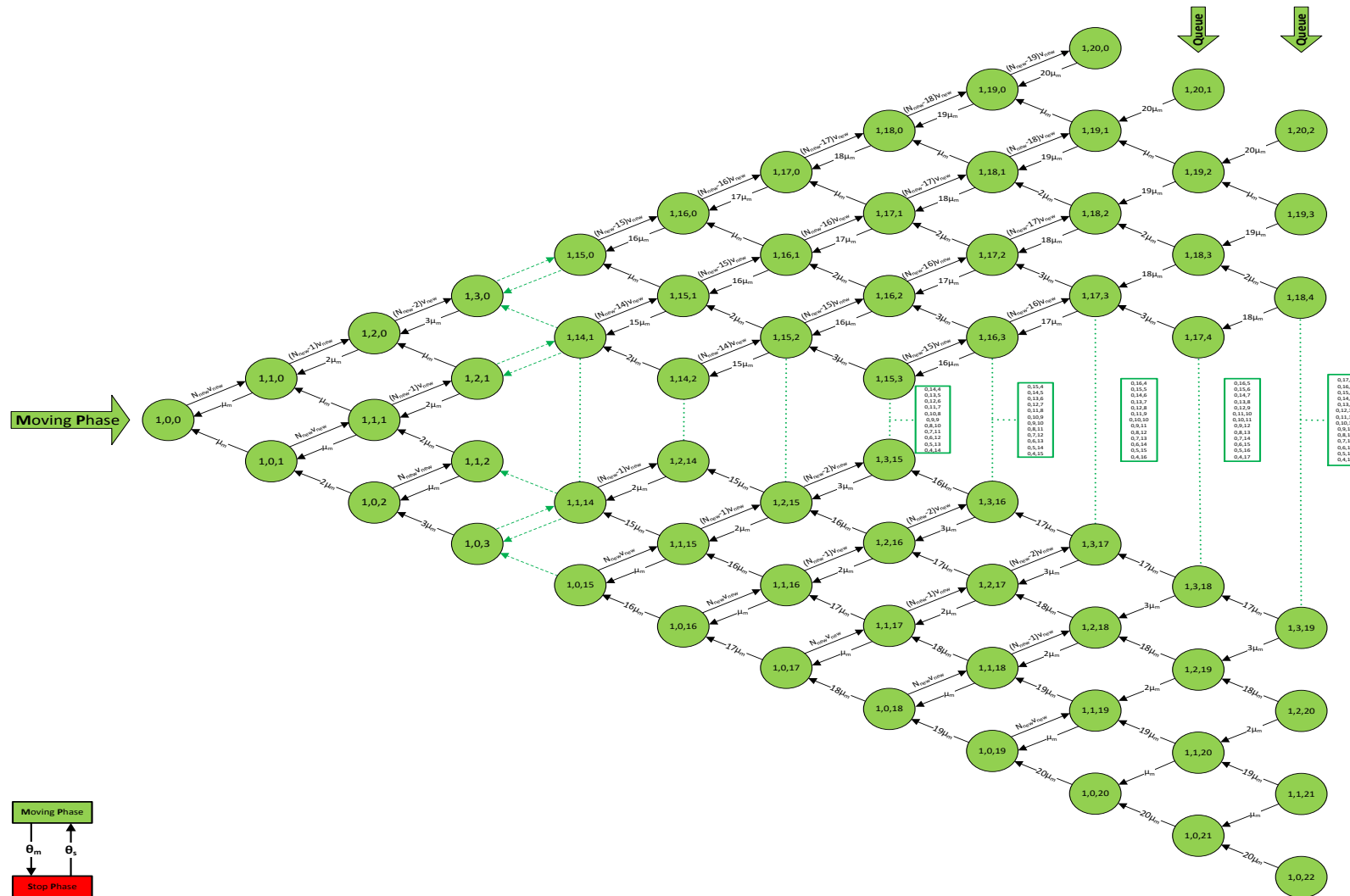
$$C=20, t=5, k=2, p_s=0, N_{new}=40, N_h=40, v_{new}=1/2, v_h=1/2, \mu_s=1, \mu_m=1, \theta_s^{-1}=1, \theta_m^{-1}=1$$

Οι πιθανές δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το εν λόγω σύστημα είναι σύμφωνα με τον τύπο (3.9):

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{n_{new}=0}^{20+2} \sum_{n_h=0}^{20+2} P(i, n_{new}, n_h) \cdot \mathbf{1}[(n_{new} \leq 20) + n_h \leq 20 + 2] = 546 \text{ καταστάσεις}$$

Άρα θα έχουμε 546 καταστάσεις. Το εξεταζόμενο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω της Μαρκοβιανής αλυσίδας στα Σχήματα 46 (SP) και 47 (MP).





Σχήμα 47 - Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντέλου CPQ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$) με χωρητικότητα $C=20$, $t=5$ και $k=2$ (αναπαράσταση της MP).

Αν τρέξουμε τον Κώδικα 38 (βλ. Παράρτημα Α) με τα παραπάνω μεγέθη θα προκύψει ο πίνακας-σύστημα 546×546 (298.116 κελιά!) το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο να λυθεί χωρίς τη χρήση λογισμικού. Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τον υπολογισμό των μεγεθών που προσδιορίζουν το QoS. Με τη βοήθεια της Python και του Κώδικα 38 επιλύουμε το εν λόγω σύστημα και στα Αποτελέσματα 58 εμφανίζεται η κλήση της συνάρτησης για χωρητικότητα $C=20$, δεσμευμένη χωρητικότητα προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής $t=5$, $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής και πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=40$ μαζί με τα υπόλοιπα μεγέθη του εν λόγω συστήματος και στην έξοδο έχουμε τα επιστρεφόμενα αποτελέσματα για τις τιμές του QoS. Οι τιμές $B_{new(TCPr)}$ και $B_h(TCPr)$ προσδιορίζουν τις πιθανότητες συμφόρησης στον χρόνο.

```

307 # Κλήση της συνάρτησης
308 create_array(C=20, t=5, k=2, ps=0, Nnew=40, Nh=40, vnew=0.5, vh=0.5, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
309
Run create_array+solution_QOS_CPQ(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, L, λα(λα1-λα4), W]
=====
Bnew = 0.444141530604377
Bh   = 0.022505832315980
U1   = 15.197084749225779
U2   = 0.620299966140626
U    = 15.817384715366405
Uc   = 0.790869235768320
L    = 0.042803767615402
λα1  = 2.908504078119812
λα2  = 5.306779896438049
λα3  = 0.620299966140627
λα4  = 6.981800774667922
λα   = 15.817384715366408
W    = 0.002706121674705

```

Αποτελέσματα 58 - Αποτελέσματα μεγεθών QoS μοντέλου CPQ με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=40$), $t=5$ δεσμευμένες θέσεις και $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητας απόρριψης κλήσεων (CBP) για νέες κλήσεις και κλήσεις μεταπομπής ξανατρέχουμε τον Κώδικα 38 άλλες δύο φορές με μειωμένες αντίστοιχα τις τιμές των πηγών N_{new} και N_h κατά ένα (Vlasakis M., et al. 2023). Στα Αποτελέσματα 59 και 60 παρουσιάζεται η κλήση της συνάρτησης, καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων για $B_{new(CBP)}$ και $B_h(CBP)$.

```

307 # Κλήση της συνάρτησης
308 create_array(C=20, t=5, k=2, ps=0, Nnew=39, Nh=40, vnew=0.5, vh=0.5, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
309
Run create_array+solution_QOS_CPQ(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, L, λα(λα1-λα4), W]
=====
Bnew = 0.437047378550356

```

Αποτελέσματα 59 - Υπολογισμός $B_{new(CBP)}$ μοντέλου CPQ με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=39$, $N_h=40$), $t=5$ δεσμευμένες θέσεις και $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής.

```

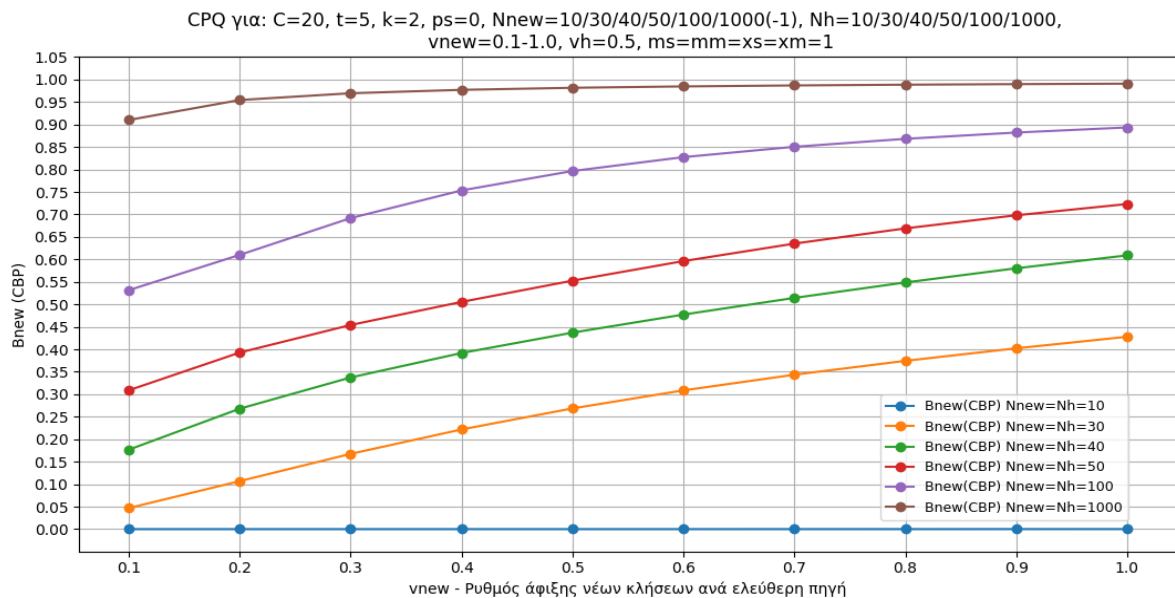
307 # Κλήση της συνάρτησης
308 create_array(C=20, t=5, k=2, ps=0, Nnew=40, Nh=39, vnew=0.5, vh=0.5, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
309
Run create_array+solution_QOS_CPQ(Kef.3) x

3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, L, λα(λα1-λα4), W]
=====
Bh = 0.019529641262667

```

Αποτελέσματα 60 - Υπολογισμός $B_h(CBP)$ μοντέλου CPQ με $C=20$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=40, N_h=39$), $t=5$ δεσμευμένες θέσεις και $k=2$ θέσεις στην ουρά αναμονής.

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε τον Κώδικα 38 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `create_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $v_{new}(0,1-1,0)$. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 4^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_vnew(C, t, k, ps, Nnew, Nh, rate_vnew, vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 39 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 4Α (Κώδικας 39) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results(vnew_values, results_array1,...results_array6)` της οποίας η έξοδος είναι οι έξι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 48. Στον Κώδικα 39 παρουσιάζεται και η κλήση των συναρτήσεων για τη δημιουργία των γραφικών παραστάσεων (Σχήμα 48).



Σχήμα 48 - Αναπαράσταση του $B_{new}(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CPQ με $C=20, t=5, k=2, p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών. Μετρήσεις για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1), N_h=10/30/40/50/100/1000$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 48

Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new}(CBP)$, παρατηρούμε ότι γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Αρχικά, στην περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=10$ όπως είναι αναμενόμενο δεν υπάρχει

απόρριψη κλήσεων ούτε συμφόρηση κλήσεων στο δίκτυο διότι υπάρχει για κάθε κλήση που παράγεται από τις διαθέσιμες πηγές, μία BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 48 με τη μπλε καμπύλη και ισχύει για κάθε περίπτωση που η χωρητικότητα του συστήματος είναι μεγαλύτερη από τις διαθέσιμες πηγές δηλαδή $N_{new} < C$.

- Η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για την περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=1000$, με δεδομένο ότι η χωρητικότητά $C=20$, όπως είναι αναμενόμενο είναι εξαιρετικά υψηλή. Δεν υπάρχουν διαθέσιμες BU για να εξυπηρετήσουν τις κλήσεις που δημιουργούν οι πολλές διαθέσιμες πηγές. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 48 με την καφέ καμπύλη και βλέπουμε ότι η απόρριψη κλήσεων είναι σχεδόν δεδομένη και σε κάθε περίπτωση $B_{new(CBP)} > 0,91011$ (για $v_{new}=0,1$). Συμπερασματικά θα πούμε ότι όταν οι διαθέσιμες πηγές είναι πάρα πολλές σε σχέση με τη χωρητικότητα του συστήματος, δηλαδή ισχύει ότι $N_{new} \gg C$, το σύστημα είναι πρακτικά μη λειτουργικό και σχεδόν πάντα έχουμε απόρριψη των νέων κλήσεων.
- Στις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις για τις ενδιαμέσες τιμές, δηλαδή για τιμές $N_{new}=N_h=30/40/50/100$ οι γραφικές παραστάσεις τείνουν να είναι γραμμικές. Δηλαδή η αύξηση της απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ είναι περίπου ανάλογη με την αύξηση του ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Παρατηρούμε στο Σχήμα 48 με την κόκκινη καμπύλη απεικονίζουμε την απόρριψη νέων κλήσεων για $N_{new}=N_h=50$ και παρατηρούμε ότι για ρυθμό άφιξης κλήσεων $v_{new}=0,1$ η απόρριψη νέων κλήσεων είναι $B_{new}=0,308$, εάν πενταπλασιάσουμε τον ρυθμό άφιξης σε $v_{new}=0,5$ η απόρριψη νέων κλήσεων θα γίνει είναι $B_{new}=0,552$ τείνει να διπλασιαστεί. Αντίστοιχα οι τιμές στο μοντέλο CP/BR για $N_{new}=N_h=50$ και $v_{new}=0,1$, έχουμε απόρριψη νέων κλήσεων $B_{new}=0,299$. Για $v_{new}=0,5$ η απόρριψη νέων κλήσεων θα γίνει είναι $B_{new}=0,536$ η τιμή και εδώ τείνει να διπλασιαστεί όπως και στο CPQ. Να υπενθυμίσουμε ότι στο μοντέλο NP/CS έχουμε $N_{new}=N_h=50$ για $v_{new}=0,1$ η απόρριψη νέων κλήσεων είναι $B_{new}=0,072$, εάν πενταπλασιάσουμε τον ρυθμό άφιξης σε $v_{new}=0,5$ η απόρριψη νέων κλήσεων θα γίνει είναι $B_{new}=0,323$ η τιμή αυτή σχεδόν πενταπλασιάζεται.
- Αν συγκρίνουμε το Σχήμα 48 που αφορά το μοντέλο CBQ, με τα αντίστοιχα Σχήματα 40(CP/BR) και 34(NP/CS) που αφορούν τα άλλα δύο μοντέλα, παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$ για το σύνολο των γραφικών

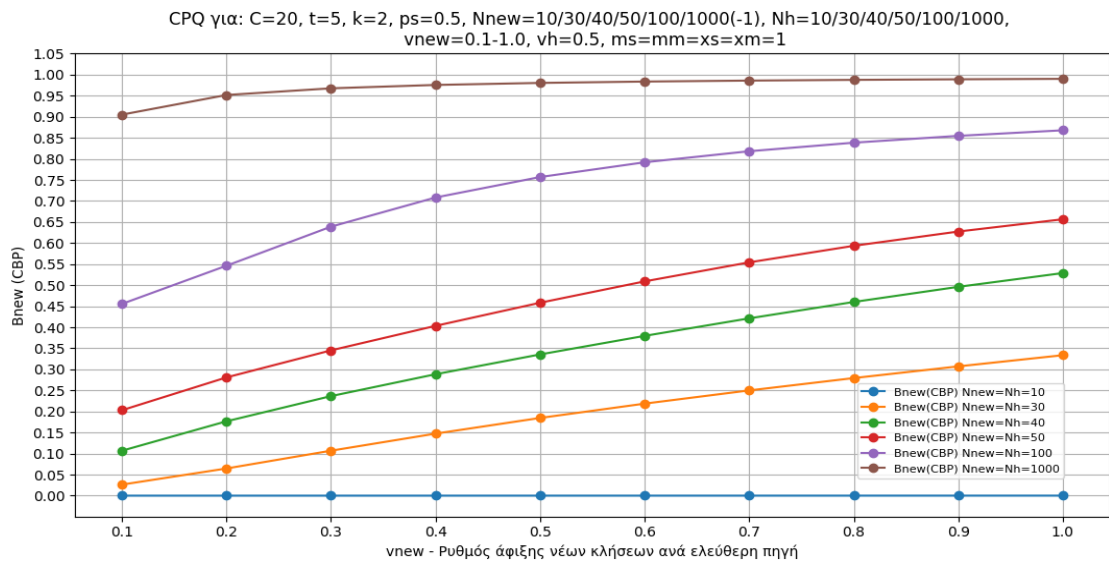
παραστάσεων είναι μεγαλύτερη στα μοντέλα CPQ και CP/BR από τις τιμές στο μοντέλο NP/CS, αυτό δείχνει και η σύγκριση που υπάρχει στον Πίνακα 57.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $p_s = 0$	$B_{new}(CBP)$				
	$N_{new}=N_h=30$	$N_{new}=N_h=40$	$N_{new}=N_h=50$	$N_{new}=N_h=100$	$N_{new}=N_h=1000$
NP/CS	0,0701047	0,2011733	0,3238317	0,6641101	0,9696218
CP/BR	0,2673641	0,4297441	0,5364584	0,7772343	0,97976566
CPQ	0,2685165	0,4370473	0,5526536	0,7965164	0,9816514

Πίνακας 57- Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $k=2$, $p_s=0$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).

Στον Πίνακα 57 παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τιμή πλήθους πηγών, πλην της τιμής $N_{new}=N_h=10$, η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων είναι πάντα μεγαλύτερη στα μοντέλα CP/BR και CPQ. Αυτό είναι επόμενο διότι όπως βλέπουμε και στη Μαρκοβιανές αλυσίδες που περιγράφει τα εν λόγω μοντέλα στο Σχήμα 38 και Σχήμα 46 υπάρχει η δεσμευμένη περιοχή ($t=5$) η οποία είναι για αποκλειστική χρήση από τις κλήσεις μεταπομπής και μάλιστα έχουμε ορίσει $p_s=0$ που σημαίνει ότι πιθανότητα πρόσβασης των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή είναι μηδενική. Άρα επέρχεται ο κορεσμός και η απόρριψη κλήσεων, πολύ πιο γρήγορα. Αυτός είναι και ο λόγος που η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new}(CBP)$ είναι πάντα μεγαλύτερη στα μοντέλα CP/BR και CPQ έναντι του NP/CS.

- Μία ακόμα παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι όσο μικρότερος είναι ο αριθμός πηγών (N_{new} , N_h) τόσο μεγαλύτερη είναι αυτή η διαφορά, για παράδειγμα για τη μεγαλύτερη τιμή η οποία είναι $N_{new}=N_h=1000$ η διαφορά είναι πολύ μικρή στα τρία μοντέλα. Ειδικότερα στο μοντέλο NP/CS το $B_{new}(CBP)=0,96962$ στο CP/BR έχουμε $B_{new}(CBP)=0,97976$ και στο μοντέλο CBQ $B_{new}(CBP)=0,98165$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι στο σύστημα έχει επέλθει ο κορεσμός άρα μειώνονται στο ελάχιστο οι διαθέσιμες BU και αυξάνονται οι πιθανότητες απόρριψης όλων των κλήσεων.
- Αν ξανατρέξουμε το πιο πάνω σύστημα μεταβάλλοντας μόνο την πιθανότητα $p_s=0,5$ που σημαίνει ότι θα δώσουμε τη δυνατότητα μέρος της δεσμευμένης χωρητικότητας ($t=5$) να χρησιμοποιηθεί και από τις νέες κλήσεις, τότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 49.



Σχήμα 49 - Αναπαράσταση του $B_{new}(CBP)$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή v_{new} . Μοντέλο CPQ με $C=20$, $t=5$ και $p_s=0.5$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών, για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$, $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

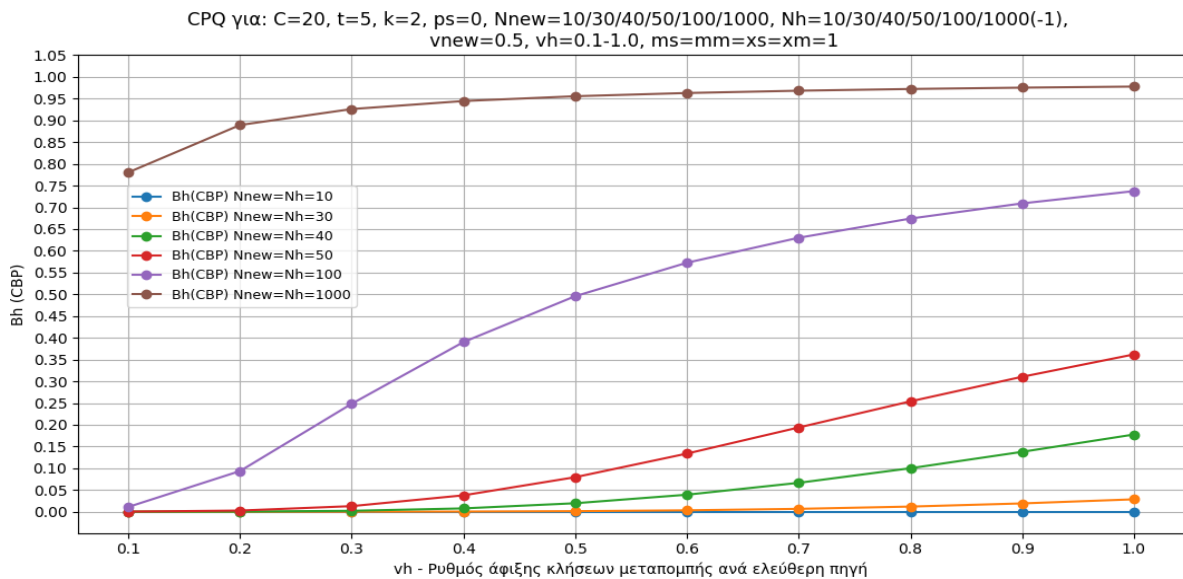
Μετά τη μεταβολή της πιθανότητας $p_s=0 \rightarrow 0.5$ επαναυπολογίζουμε τιμές της πιθανότητας απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new}(CBP)$.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$	$B_{new}(CBP)$				
	$N_{new}=N_h=30$	$N_{new}=N_h=40$	$N_{new}=N_h=50$	$N_{new}=N_h=100$	$N_{new}=N_h=1000$
NP/CS ($p_s=0$)	0,0701047	0,2011733	0,3238317	0,6641101	0,9696218
CP/BR ($p_s=0$)	0,2673641	0,4297441	0,5364584	0,7772343	0,9797656
CPQ ($p_s=0$)	0,2685165	0,4370473	0,5526536	0,7965164	0,9816514
CPQ ($p_s=0,5$)	0,1873744	0,3498309	0,4836716	0,7808941	0,9816143

Πίνακας 58 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$, $p_s=0,5$ και $v_{new}=v_h=0,5$ για διαφορετικές τιμές πηγών ($N_{new}=N_h=30/40/50/100/1000$).

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 58 με την «πρόσβαση» πλέον των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή, με πιθανότητα $p_s=0,5$ παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new}(CBP)$ από το σύστημα, μειώνεται σημαντικά. Η μείωση είναι αναλογικά μεγαλύτερη όταν έχουμε μικρότερο πλήθος πηγών οι οποίες δημιουργούν την τηλεπικοινωνιακή κίνηση (N_{new} , N_h). Η μικρή μείωση της $B_{new}(CBP)$ για τις υψηλές τιμές των πηγών (N_{new} , N_h) οφείλεται στο κορεσμό του συστήματος και τις ελάχιστες διαθέσιμες θέσεις BU τις οποίες «διεκδικούν» πλέον πολλές περισσότερες κλήσεις με μικρότερες πιθανότητες επιτυχίας. Εάν στο μοντέλο CP/BR η πιθανότητα $p_s=1$ τότε έχουμε μεταβεί στο μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου το NP/CS διότι στην πραγματικότητα καταργούμε τη δέσμευση εύρους ζώνης η οποία «λειτουργούσε» προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής.

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον Κώδικα 38 προκειμένου να μπορούμε να καλέσουμε τη συνάρτηση `create_array()` επαναληπτικά για διάφορες τιμές της μεταβλητής $v_h(0,1-1,0)$. Για την υλοποίηση έχουμε επεκτείνει τον κώδικα με το 5^ο τμήμα του και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση `run_for_different_vh(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, rate_vh, ms, mm, xs, xm)` η οποία παρουσιάζεται στο απόσπασμα του Κώδικα 40 (βλ. Παράρτημα Α). Με την επέκταση του κώδικα 5Α (Κώδικα 40) δημιουργούμε τη συνάρτηση `plot_results1(vh_values, results_array1...results_array6)` της οποίας η έξοδος είναι οι έξι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στο Σχήμα 50.



Σχήμα 50 - Αναπαράσταση του $B_{h(CBP)}$ για μεταβλητό ρυθμό άφιξης κλήσεων μεταπομπής v_h ανά ελεύθερη πηγή. Μοντέλο CPQ με $C=20, t=5, k=2$ και $p_s=0$. Μετρήσεις για πεπερασμένο πλήθος πηγών για $N_{new}=10/30/40/50/100/1000, N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.

Παρατηρήσεις-συμπεράσματα για τη γραφική παράσταση του Σχήματος 50

- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$, παρατηρούμε ότι γενικά αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή v_h όπως και αντίστοιχα στο Σχήμα 48 για το v_{new} . Αρχικά, στην περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=10$ όπως είναι αναμενόμενο δεν υπάρχει απόρριψη κλήσεων μεταπομπής ούτε συμφόρηση κλήσεων στο δίκτυο διότι υπάρχει για κάθε κλήση που παράγεται από τις διαθέσιμες πηγές, μία BU για να την εξυπηρετήσει. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 50 με τη μπλε καμπύλη και ισχύει για κάθε περίπτωση που η χωρητικότητα του συστήματος είναι $N_h < C$.
- Η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ για την περίπτωση που το πλήθος των πηγών $N_{new}=N_h=1000$, με δεδομένο ότι η χωρητικότητά $C=20$, όπως είναι αναμενόμενο είναι εξαιρετικά υψηλή. Δεν υπάρχουν διαθέσιμες BU για να

εξυπηρετήσουν τις κλήσεις που δημιουργούν οι πολλές διαθέσιμες πηγές. Αυτή είναι η περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 50 με την καφέ καμπύλη και βλέπουμε ότι η απόρριψη κλήσεων είναι πάρα πολύ υψηλή. Για τιμή $v_h=0,1$ το $B_{h(CBP)}=0,7804$ ενώ στο Σχήμα 35 για το μοντέλο NP/CS έχουμε υψηλότερη τιμή για την απόρριψη κλήσεων μεταπομπής για $v_h=0,1$ έχουμε $B_{h(CBP)}=0,9662$. Αυτό δείχνει ότι, ακόμα και στην ακραία περίπτωση του παραδείγματος για πολύ μεγάλο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=1000$) σε αναλογία με τη χωρητικότητα ($C=20$), υπάρχει αισθητή μείωση της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής. Η μείωση αυτή οφείλεται στην εφαρμογή του μοντέλου CP/BR και στη δέσμευση BU προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής.

■ Στις υπόλοιπες γραφικές παραστάσεις για τις ενδιάμεσες τιμές, δηλαδή για τιμές $N_{new}=N_h=30/40/50/100$, παρατηρούμε ότι η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ είναι και εδώ αισθητά μικρότερη σε σύγκριση με την απόρριψη κλήσεων μεταπομπής στο μοντέλο NP/CS. Στον Πίνακα 59 για $v_{new}=v_h=0,5$ έχουμε καταγράψει την πιθανότητα απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$ για τα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ.

$v_{new} = v_h = 0,5$	NP/CS - $B_{h(CBP)}$	CP/BR - $B_{h(CBP)}$	CPQ - $B_{h(CBP)}$
$N_{new}=N_h=30$	0,1228524	0,0089931	0,0013344
$N_{new}=N_h=40$	0,3294876	0,0598433	0,0195296
$N_{new}=N_h=50$	0,4867674	0,156195	0,0794426
$N_{new}=N_h=100$	0,776258	0,5566721	0,4957595

Πίνακας 59 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{h(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20, t=5, k=2$ και $v_{new}=v_h=0,5$.

Ενδεικτικά, αν πάρουμε τις τιμές για πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=50$ παρατηρούμε ότι η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής στο NP/CS είναι $B_{h(CB)}=0,48676$ που σημαίνει ότι έχουμε απόρριψης μία στις δύο κλήσεις μεταπομπής, η αντίστοιχη τιμή για το μοντέλο CP/BR είναι $B_{h(CBP)}=0,15619$ η οποία είναι μία σημαντικά μειωμένη τιμή απόρριψης, η οποία έχει επιτευχθεί με δεσμευμένη περιοχή $t=5$ και τέλος στο μοντέλο CPQ έχουμε περαιτέρω μείωση με την απόρριψη να είναι $B_{h(CBP)}=0,07944$. Με την προσθήκη της ουράς $k=2$ στο μοντέλο CPQ έχουμε μείωση απόρριψης περίπου σε ποσοστό ~50% σε σύγκριση με το μοντέλο CP/BR. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι τα αποτελέσματα του Πίνακα 59 μας δείχνουν ότι έχει επιτευχθεί ο στόχος για επιπλέον περιορισμό της απόρριψης κλήσεων μεταπομπής στο μοντέλο CPQ σε σύγκριση με τα

δύο προηγούμενα μοντέλα. Ο στόχος έχει επιτευχθεί με την προσθήκη της ουράς αναμονής με $k=2$ θέσεις προς όφελος και πάλι των κλήσεων μεταπομπής.

Συμπερασματικά, στο μοντέλο CPQ παρατηρούμε σημαντικό κέρδος στις τιμές της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$, που αποτελούσε και τον κύριο στόχο του εν λόγω μοντέλου. Από την άλλη όμως για να επιτευχθεί αυτό έχουμε αύξηση της απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new(CBP)}$. Να επισημάνουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα έχουν επιτευχθεί με δεσμευμένη χωρητικότητα $t=5$, χωρητικότητα στην ουρά αναμονής $k=2$ και πιθανότητα πρόσβασης στη δεσμευμένη περιοχή $p_s=0$, αυτές οι τιμές μπορούν κάθε φορά να διαμορφώνονται αναλόγως, έτσι ώστε να επιτευχθεί ο βέλτιστος επιθυμητός στόχος σε κάθε περίπτωση. Αν για παράδειγμα αλλάξουμε την πιθανότητα $p_s=0 \rightarrow 0,5$ οι τιμές για τα $B_{new(CBP)}$ και $B_{h(CBP)}$ παρουσιάζονται συνολικά στους Πίνακες 60 και 61 για τα τρία μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $t=5, k=2$	$p_s=0$			$p_s=0,5$
	NP/CS- $B_{new(CBP)}$	CP/BR- $B_{new(CBP)}$	CPQ- $B_{new(CBP)}$	CPQ- $B_{new(CBP)}$
$N_{new}=N_h=30$	0,0701047	0,2673641	0,2685165	0,1873744
$N_{new}=N_h=40$	0,2011733	0,4297441	0,4370473	0,3498309
$N_{new}=N_h=50$	0,3238317	0,5364584	0,5526536	0,4836716
$N_{new}=N_h=100$	0,6641101	0,7772343	0,7965164	0,7808941

Πίνακας 60 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20, t=5, k=2, v_{new}=v_h=0,5, p_s=0$ και $p_s=0,5$.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $t=5, k=2$	$p_s=0$			$p_s=0,5$
	NP/CS- $B_h(CBP)$	CP/BR- $B_h(CBP)$	CPQ- $B_h(CBP)$	CPQ- $B_h(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,1228524	0,0089931	0,0013344	0,0083555
$N_{new}=N_h=40$	0,3294876	0,0598433	0,0195296	0,0633028
$N_{new}=N_h=50$	0,4867674	0,156195	0,0794426	0,1587344
$N_{new}=N_h=100$	0,7762589	0,5566721	0,4957595	0,530113

Πίνακας 61 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20, t=5, k=2, v_{new}=v_h=0,5, p_s=0$ και $p_s=0,5$.

Στους Πίνακες 60 και 61 παρατηρούμε στις στήλες που αφορούν το $p_s=0,5$ ότι υπάρχουν τιμές οι οποίες είναι μειωμένες για το $B_{new(CBP)}$ και αυξημένες για το $B_h(CBP)$ η γενικότερη εικόνα είναι ότι έχουν βελτιωθεί οι αρχικές τιμές για το μοντέλο CPQ όσο αφορά την

πρόσβαση των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή, αλλά και η αύξηση των τιμών της απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι πολύ μικρές και απολύτως αποδεκτές. Αντίστοιχες βελτιώσεις μπορούν να γίνουν και με την αλλαγή του πλήθους των BU της δεσμευμένης περιοχής η οποία εδώ είναι $t=5$. Ένα τέτοιο παράδειγμα αλλαγής των BU από $t=5 \rightarrow t=3$ παρουσιάζεται στους Πίνακες 62 και 63.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $k=2$	$p_s=0$ $t=5$			$p_s=0$ $t=3$	$p_s=0,5$ $t=5$	$p_s=0,5$ $t=3$
	NP/CS - $B_{new}(CBP)$	CP/BR - $B_{new}(CBP)$	CPQ - $B_{new}(CBP)$	CPQ - $B_{new}(CBP)$	CPQ - $B_{new}(CBP)$	CPQ - $B_{new}(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,0701047	0,2673641	0,2685165	0,1929304	0,1873744	0,1479014
$N_{new}=N_h=40$	0,2011733	0,429744	0,4370473	0,385339	0,3498309	0,3316271
$N_{new}=N_h=50$	0,3238317	0,5364584	0,5526536	0,5246698	0,4836716	0,4767287
$N_{new}=N_h=100$	0,6641101	0,7772343	0,7965164	0,7951713	0,7808941	0,7807050

Πίνακας 62 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{new}(CBP)$ και $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$ και $t=3$, $k=2$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $k=2$	$p_s=0$ $t=5$			$p_s=0$ $t=3$	$p_s=0,5$ $t=5$	$p_s=0,5$ $t=3$
	NP/CS - $B_h(CBP)$	CP/BR - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,1228524	0,008993	0,0013344	0,0035719	0,0083555	0,0111135
$N_{new}=N_h=40$	0,3294876	0,0598433	0,0195296	0,0320878	0,0633028	0,0700671
$N_{new}=N_h=50$	0,4867674	0,156195	0,0794426	0,099747	0,1587344	0,1643623
$N_{new}=N_h=100$	0,7762579	0,556672	0,4957595	0,4984961	0,530113	0,5304543

Πίνακας 63 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20$, $t=5$ και $t=3$, $k=2$, $v_{new}=v_h=0,5$, $p_s=0$ και $p_s=0,5$.

Στον Πίνακα 62 που παρουσιάζονται οι τιμές απόρριψης νέων κλήσεων $B_{new}(CBP)$, βλέπουμε ότι υπάρχουν στήλες που αφορούν τα τρία μοντέλα και επιπλέον μετρήσεις για το μοντέλο CPQ. Αν πάρουμε τη γραμμή που αφορά πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=30$, αρχικά παρατηρούμε ότι για $p_s=0$ και $t=5$ η πιθανότητα απόρριψης $B_{new}(CBP)=0,26851$ η οποία είναι αρκετά υψηλή, σημαίνει ότι περίπου μία στις τέσσερις νέες κλήσεις απορρίπτονται. Στην επόμενη στήλη, για ίδιο πλήθος πηγών, μειώνουμε τις δεσμευμένες θέσεις σε $t=3$ για $p_s=0$ και έχουμε πιθανότητα απόρριψης $B_{new}(CBP)=0,19293$ είναι μία μείωση της απόρριψης νέων κλήσεων ~6%. Αν εισάγουμε επιπλέον την πιθανότητα πρόσβασης των κλήσεων στη

δεσμευμένη περιοχή $p_s=0,5$ για $t=3$ τότε παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόρριψης $B_{new(CBP)}=0,1479$ είναι μία μείωση της απόρριψης νέων κλήσεων $\sim 12\%$ η οποία είναι μία σημαντική μείωση. Ταυτόχρονα, στον Πίνακα 63 παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μικρή αύξηση για τις πιθανότητες απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής μετά τη μείωση των δεσμευμένων θέσεων ($t=3$) ή με τη δυνατότητα πρόσβασης των νέων κλήσεων στη δεσμευμένη περιοχή, αυτό είναι αναμενόμενο διότι «αφαιρούνται» θέσεις BU που είχαν διατεθεί αποκλειστικά για κλήσεις μεταπομπής. Ας δούμε όμως τις αντίστοιχες τιμές, δηλαδή τη γραμμή του Πίνακα 63 που αφορά την απόρριψη κλήσεων μεταπομπής με πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=30$, παρατηρούμε ότι για $p_s=0$ και $t=5$ η πιθανότητα απόρριψης είναι $B_h(CBP)=0,00133$ και γίνεται για $p_s=0,5$ και $t=3$ $B_h(CBP)=0,01111$. Η αύξηση αυτή είναι μεν σημαντική σαν ποσοστό αλλά οι απόλυτες τιμές είναι πάρα πολύ μικρές για το συνολικό ποσοστό απόρριψης το οποίο πρακτικά είναι αμελητέο και δεν επηρεάζει ουσιαστικά τη λειτουργικότητα-απόδοση του συστήματος. Άρα και με αυτές τις παρεμβάσεις μειώθηκε η απόρριψη των νέων κλήσεων $\sim 12\%$ και το πλεονέκτημα των κλήσεων μεταπομπής παραμένει, μια και η πιθανότητα απόρριψης τους είναι πάρα πολύ χαμηλή ($\sim 1\%$).

Στον Πίνακα 64 παρατηρούμε πως επηρεάζεται η απόρριψη κλήσεων μεταπομπής με τη μεταβολή της χωρητικότητας k στην ουρά αναμονής.

$v_{new} = 0,5$ $v_h = 0,5$ $k=2$	$p_s=0$	$p_s=0$ $t=5$	$p_s=0$ $t=5, k=2$	$p_s=0$ $t=5, k=4$	$p_s=0,8$ $t=5, k=2$	$p_s=0,8$ $t=5, k=4$
	NP/CS - $B_h(CBP)$	CP/BR - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$	CPQ - $B_h(CBP)$
$N_{new}=N_h=30$	0,1228524	0,008993	0,0013344	0,0001491	0,0155065	0,0019131
$N_{new}=N_h=40$	0,3294876	0,0598433	0,0195296	0,0051179	0,0868069	0,022635
$N_{new}=N_h=50$	0,4867674	0,156195	0,0794426	0,0354817	0,1867467	0,0782715
$N_{new}=N_h=100$	0,7762579	0,556672	0,4957595	0,4428705	0,5392121	0,4614439

Πίνακας 64 - Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_h(CBP)$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για $C=20, t=5$, για μεταβλητό $k=2$ και $k=4, v_{new}=v_h=0,5, p_s=0$ και $p_s=0,8$.

Στον Πίνακα 64 παρατηρούμε ότι με την αύξηση της χωρητικότητας στην ουρά αναμονής του συστήματος από $k=2$ σε $k=4$ παρατηρούμε μία σημαντική μείωση στην πιθανότητα απόρριψής κλήσεων μεταπομπής. Ενδεικτικά, για πλήθος πηγών $N_{new}=N_h=50$, βλέπουμε ότι για $k=2$ η πιθανότητα απόρριψης είναι $B_h(CBP)=0,07944$ και για $k=4$ η πιθανότητα

απόρριψης γίνεται $B_{h(CBP)}=0,03548$. Αυτό σημαίνει ότι με διπλασιασμό της χωρητικότητας στην ουρά έχουμε υποδιπλασιασμό της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής $B_{h(CBP)}$. Στις τελευταίες δύο στήλες του πίνακα με χαρακτηριστικά $k=2$ και $k=4$, $p_s=0,8$, $t=5$ παρατηρούμε ότι η μείωση της πιθανότητα απόρριψης $B_{h(CBP)}$ είναι $>50\%$ σε κάθε περίπτωση η μείωση (ή αύξηση) εξαρτάται και από τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος.

Τέλος στον Πίνακα 65 παρουσιάζεται η σύγκριση των τριών μοντέλων NP/CS, CP/BR και CPQ σε ψευδοτυχαία* και τυχαία** κίνηση για συστήματα με ίδιο φορτίο κίνησης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων μεταπομπής είναι σταθερά υψηλότερη σε συστήματα με τυχαία κίνηση. Ωστόσο, αυτή η διαφορά τείνει να μηδενιστεί όταν έχουμε πολύ υψηλή αύξηση του φορτίου κίνησης. Για παράδειγμα, στις δύο τελευταίες γραμμές του Πίνακα 65, (όπου $N_{new} = N_h = 1000$), παρατηρούμε ότι οι τιμές απόρριψης κλήσεων σχεδόν ταυτίζονται, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

C=20, $v_{new}=v_h=0,5$, $m_s = m_m = 1$, $x_s = x_m = 1$	$p_s=0$	$p_s=0$ $t=5$	$p_s=0$ $t=5, k=2$	$p_s=0$ $t=5, k=4$
	NP/CS - $B_{h(CBP)}$	CP/BR - $B_{h(CBP)}$	CPQ - $B_{h(CBP)}$	CPQ - $B_{h(CBP)}$
$N_{new}=N_h=30^*$	0,1228524	0,0089931	0,0013344	0,0001491
$\lambda_n=\lambda_h=15^{**}$	0,3231484	0,0692647	0,0294698	0,0128157
$N_{new}=N_h=40^*$	0,3294876	0,0598433	0,0195296	0,0051179
$\lambda_n=\lambda_h=20^{**}$	0,4875958	0,1782909	0,1096724	0,0703959
$N_{new}=N_h=50^*$	0,4867674	0,156195	0,0794426	0,0354817
$\lambda_n=\lambda_h=25^{**}$	0,592399	0,2904166	0,215396	0,1672475
$N_{new}=N_h=100^*$	0,7762579	0,556672	0,4957595	0,4428705
$\lambda_n=\lambda_h=50^{**}$	0,7991136	0,6125652	0,5688787	0,5373384
$N_{new}=N_h=1000^*$	0,9797972	0,9595313	0,9555995	0,9504065
$\lambda_n=\lambda_h=500^{**}$	0,9799993	0,9600829	0,956293	0,9529404

Πίνακας 65- Σύγκριση αποτελεσμάτων $B_{h(CBP)}$ στα μοντέλα NP/CS, CP/BR και CPQ για τυχαία και ψευδοτυχαία κίνηση. Με $C=20$, $t=5$, $p_s=0$, $v_{new}=v_h=0,5$ μεταβλητό $k=2$ και $k=4$.

Παράμετροι συστήματος για τα μοντέλα του Πίνακα 65:

*Ψευδοτυχαία κίνηση $C=20$, $t=5$, $k=2$ & 4 , $p_s=0$, $N_{new}=30/40/50/100/1000$, $N_h=30/40/50/100/1000(-1)$, $v_{new}=0,5$, $v_h=0,5$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$.

**Τυχαία κίνηση $C=20$, $t=5$, $k=2$ & 4 , $\lambda_n=15/20/25/50/500$, $\lambda_h=15/20/25/50/500$, $\mu_s=1$, $\mu_m=1$, $\theta_s^{-1}=1$, $\theta_m^{-1}=1$.

4. Συμπεράσματα - Σύνοψη

4.1. Γενική περιγραφή μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν

Συνοψίζοντας, στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η συμπεριφορά διαφορετικών μοντέλων εξυπηρέτησης κλήσεων σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα (Mobile Hotspot) ενσωματωμένο σε ένα κινούμενο όχημα (π.χ. λεωφορείο). Εξετάστηκαν δύο βασικές κατηγορίες άφιξης τηλεπικοινωνιακής κίνησης:

- **Τυχαία Κίνηση** (Poisson), όπου ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων (φορτίο κίνησης) στο σύστημα ακολουθεί την κατανομή Poisson και προέρχεται από θεωρητικά άπειρο πλήθος χρηστών. Η ανάλυση αυτή της κατηγορίας παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2. Συνοψίζουμε τα μοντέλα διαχείρισης κλήσεων που αναλύθηκαν:

Ονομασία Μοντέλου	Παρατηρήσεις
NP/CS (§2.1)	Χωρίς ειδική πολιτική. Όλες οι κλήσεις εξυπηρετούνται χωρίς προτεραιότητα (Complete Sharing) εφαρμόζοντας τον FIFO.
CP/BR (§2.2)	Εφαρμόζεται πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) και στις δύο φάσεις κίνησης (SP και MP), προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής.
CP1/BR (§2.3)	Εφαρμόζεται πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) μόνο στην SP προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής.
CPQ (§2.4)	Εφαρμόζεται πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) καθώς και χρήση ουράς αναμονής (Queue) και στις δύο φάσεις κίνησης (SP και MP), προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής.
CP1Q (§2.5)	Εφαρμόζεται πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) καθώς και χρήση ουράς αναμονής (Queue) μόνο στην SP, προς όφελος κλήσεων μεταπομπής.

- **Ψευδοτυχαία Κίνηση** (Quasi-Random), όπου οι κλήσεις (φορτίο κίνησης) δημιουργούνται από πεπερασμένο πλήθος χρηστών. Η ανάλυση αυτής της κατηγορίας κίνησης μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 3. Συνοψίζουμε τα μοντέλα διαχείρισης κλήσεων που χρησιμοποιήθηκαν:

Ονομασία Μοντέλου	Παρατηρήσεις
NP/CS (§3.4)	Χωρίς ειδική πολιτική. Όλες οι κλήσεις εξυπηρετούνται χωρίς προτεραιότητα (Complete Sharing), εφαρμόζοντας τον FIFO.
CP/BR (§3.5)	Εφαρμόζεται πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) μόνο στην SP προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής. Εισαγωγή της δεσμευμένης πιθανότητας p_s στο σύστημα (PBR).
CPQ (§3.6)	Εφαρμόζεται πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) καθώς και χρήση ουράς αναμονής (Queue) μόνο στην SP, προς όφελος των κλήσεων μεταπομπής. Εισαγωγή της δεσμευμένης πιθανότητας p_s στο σύστημα (PBR).

Για καθένα από τα προαναφερθέντα μοντέλα, εφαρμόστηκε η ακόλουθη μεθοδολογική διαδικασία:

- Αναπαράσταση του αντίστοιχου μοντέλου με χρήση Μαρκοβιανών Αλυσίδων.
- Εξαγωγή των εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας του μοντέλου και σύνθεση του πίνακα συστήματος.
- Επίλυση γραμμικού συστήματος και υπολογισμός των πιθανοτήτων με τη χρήση εξειδικευμένου online λογισμικού.
- Υλοποίηση και επίλυση συστήματος με τη γλώσσα προγραμματισμού Python.
- Υπολογισμός των βασικών μεγεθών QoS μέσω μαθηματικών τύπων και με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Python.
- Τροποποίηση-επέκταση του υλοποιημένου κώδικα Python για τον υπολογισμό πολύπλοκων συστημάτων.
- Δημιουργία γραφικών παραστάσεων, ανάλυση και ερμηνεία αποτελεσμάτων, σύγκριση με άλλα μοντέλα και σύνθεση συμπερασμάτων για κάθε μοντέλο.

Στην τελική φάση της μεθοδολογίας σε κάθε μοντέλου, πραγματοποιείται ανάλυση, ερμηνεία και σύγκριση των αποτελεσμάτων. Η διαδικασία αυτή υλοποιείται με τη χρήση πινάκων και γραφημάτων που παρουσιάζουν ξεχωριστά τα χαρακτηριστικά μεγέθη κάθε μοντέλου. Η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μέσω των γραφικών παραστάσεων επιτρέπει τη σαφή αναπαράσταση των διαφόρων μεγεθών του QoS, αποκαλύπτοντας τόσο τα πλεονεκτήματα όσο και τα μειονεκτήματα του κάθε μοντέλου αλλά και τις βελτιώσεις που μπορεί να γίνουν σε κάθε μοντέλο. Η αξιολόγηση του μοντέλου βασίζεται στα χαρακτηριστικά μεγέθη που διαμορφώνουν την ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) του κάθε μοντέλου, όπως οι πιθανότητες απόρριψης κλήσεων, η χρήση του συστήματος, ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά κ.ο.κ.

Το τελικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι, σε κάθε τηλεπικοινωνιακό σύστημα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μεγέθη, η βελτιστοποίηση κρίσιμων παραμέτρων, όπως η πιθανότητα απόρριψης κλήσεων που επηρεάζει και τα μεγέθη QoS του συστήματος μας, μπορούν να προσαρμοστούν ώστε να ανταποκρίνεται στις εκάστοτε απαιτήσεις. Η ρύθμιση αυτών των παραμέτρων επιτρέπει τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας του συστήματος, ισορροπώντας ανάμεσα στην απόρριψη νέων κλήσεων και (κυρίως) των κλήσεων μεταπομπής, που αποτελούν τον πρωταρχικό στόχο. Η διαδικασία αυτή θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τους διαθέσιμους πόρους του συστήματος, οι οποίοι μεταφράζονται και σε

οικονομικούς πόρους. Για παράδειγμα, η αύξηση της χωρητικότητας (π.χ. με την προσθήκη επιπλέον servers) ή η επέκταση των θέσεων στην ουρά αναμονής, μπορεί να είναι τεχνοοικονομικά απαραίτητη, ώστε να διασφαλιστεί το QoS τους συστήματος. Ένα άλλο παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι ένα σύστημα υψηλής κρισιμότητας στο οποίο επιβάλλεται η μηδενική απόρριψη κλήσεων, με την απαίτηση εξυπηρέτησης όλων των εισερχομένων κλήσεων. Σε κάθε περίπτωση η ιδιομορφία του συστήματος αλλά και το πεδίο που θα χρησιμοποιηθεί καθορίζουν τα χαρακτηριστικά με τα οποία θα πρέπει να λειτουργεί. Αν ο πρωταρχικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των απορριφθεισών κλήσεων μεταπομπής, μπορούμε είτε να αυξήσουμε τις διαθέσιμες θέσεις t στη δεσμευμένη περιοχή, είτε να μειώσουμε το p_s . Αυτές οι παρεμβάσεις επιτρέπουν την διατήρηση της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής σε βέλτιστα επίπεδα, εξασφαλίζοντας υψηλότερη ποιότητα υπηρεσιών, με βάσει και τις προηγούμενες αναλύσεις αλλά και τα επιτευχθέντα αποτελέσματα. Αντίθετα, σε περιπτώσεις που απαιτείται εξυπηρέτηση μεγάλου όγκου κλήσεων σε περιορισμένο χρονικό διάστημα, μπορεί να υιοθετηθεί εναλλακτική στρατηγική που ευνοεί μεγαλύτερη ροή, έστω και με ελαφρώς αυξημένη πιθανότητα απόρριψης. Εναλλακτικά, η επέκταση της χωρητικότητας στην ουρά αναμονής k μπορεί να αποτελέσει μία ακόμα λύση. Η προσαρμογή αυτών των μεταβλητών μπορεί να είναι δυναμική, επιτρέποντας στο σύστημα να μεταβάλλεται σε πραγματικό χρόνο ανάλογα με τον φορτίο κίνησης ή τις προτεραιότητες της εκάστοτε εφαρμογής.

Συνοπτικά, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η χρήση της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης (Bandwidth Reservation) αλλά και η ουρά αναμονής (Queue) αποτελούν καθοριστικά στοιχεία για την βελτίωση των χαρακτηριστικών όλων των μοντέλων. Η εισαγωγή της δεσμευμένης πιθανότητας p_s στο σύστημα (Probabilistic BR), ενισχύει περαιτέρω αυτή τη λειτουργικότητα. Όπως προκύπτει από τις προηγούμενες αναλύσεις, αυτά τα εργαλεία, είτε μεμονωμένα, είτε συνδυαστικά οδηγούν σε σημαντική αύξηση της συνολικής απόδοσης των συστημάτων.

4.2. Προτάσεις για μελλοντικές βελτιώσεις της έρευνας

Για την μελλοντική βελτίωση και συνέχεια του αντικείμενου που ασχολήθηκε η παρούσα διπλωματική υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά διακριτά αντικείμενα με τα οποία θα μπορούσε να επικεντρωθεί η μελλοντική επέκταση:

- Στην παρούσα εργασία εξετάστηκαν σε μεγάλο εύρος τα συστήματα των οποίων οι αφίξεις κλήσεων ακολουθούν την κατανομή Poisson, σε αντίθεση με τα συστήματα ψευδοτυχαίας κίνησης, όπως αυτά αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν περαιτέρω μετρήσεις και δοκιμές στα μοντέλα ψευδοτυχαίας κίνησης (Quasi-Random). Έτσι θα ήταν δυνατόν να εξαχθούν ακόμα περισσότερα συμπεράσματα και βαθύτερη ανάλυση των μοντέλων. Επίσης, θα μπορούσε να προχωρήσει σε μεγαλύτερο βαθμό η σύγκριση των μοντέλων που υλοποιήθηκαν στα Κεφάλαια 2 και 3. Ωστόσο, αυτή η διερεύνηση δεν ήταν δυνατόν να υλοποιηθεί στο πλαίσιο της παρούσας ΔΕ, λόγω περιορισμών σε όγκο και εμβέλεια.
- Για την υλοποίηση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού Python. Συνολικά αναπτύχθηκαν οκτώ (8) διαφορετικά μοντέλα με κώδικα Python. Παρά τις ομοιότητες στον κώδικα υλοποίησης, κάθε μοντέλο υλοποιήθηκε αυτόνομα και ξεχωριστά από τα υπόλοιπα.
- Ο συνολικός κώδικας της ΔΕ (βλ. Παράρτημα Α), ανέρχεται σε περίπου 5.000 γραμμές κώδικα (LOC). Ως μελλοντική επέκταση αυτής της εργασίας, προτείνεται η ενοποίηση όλων των μοντέλων σε ένα ενιαίο λογισμικό περιβάλλον, με τις κατάλληλες επεκτάσεις. Μία τέτοια υλοποίηση θα μπορούσε να συμπεριλάβει μία Γραφική Διεπαφή Χρήστη (GUI), η οποία θα την έκανε φιλική ακόμα και σε χρήστες χωρίς ιδιαίτερες τεχνικές γνώσεις στον προγραμματισμό. Αυτή η υλοποίηση θα διευκόλυνε σημαντικά τη διαδικασία μοντελοποίησης δικτύων, επιτρέποντας ακόμη και σε μη ειδικούς να πραγματοποιούν πολύπλοκες αναλύσεις, εισάγοντας τα δεδομένα του δικτύου που ζητείται κάθε φορά προς υλοποίηση.
- Άλλες μελλοντικές επεκτάσεις θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν την εφαρμογή των μοντέλων σε πιο πολύπλοκα δίκτυα με πολλαπλά σημεία πρόσβασης (APs). Ένα τέτοιο σενάριο θα μπορούσε να είναι τα βαγόνια ενός τρένου, όπου κάθε βαγόνι έχει ενσωματωμένο ένα AP για την εξυπηρέτηση των επιβατών, οι οποίοι μετακινούνται εντός του τρένου. Επιπλέον, θα μπορούσε να ερευνηθεί η δυνατότητα ενσωμάτωση αλγόριθμων τεχνητής νοημοσύνης (AI) για δυναμική προσαρμογή των παραμέτρων (λ.χ. η διαχείριση εύρους ζώνης). Η έξυπνη ρύθμιση αυτών των παραμέτρων θα καθιστά το σύστημα ευέλικτο, προσαρμόσιμο και ικανό να επιτυγχάνει τα επιθυμητά αποτελέσματα σε κάθε εξειδικευμένη περίπτωση.
- Τα μοντέλα που εξετάστηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μπορούσαν να επεκταθούν ώστε να καλύψουν και την περίπτωση πολυδιάστατης τυχαίας ή

ψευδοτυχαίας κίνησης. Ως πολυδιάστατη κίνηση εννοούμε την κίνηση όπου οι χρήστες χρειάζονται περισσότερους από έναν server για να εξυπηρετηθούν (Λογοθέτης Μ. 2018). Παράλληλα θα μπορούσε να εξεταστεί η περίπτωση των batch Poisson arrivals (τόσο σε μονοδιάστατη όσο και πολυδιάστατη κίνηση). Με τον όρο batch αναφερόμαστε σε κλήσεις που φτάνουν στο σύστημά μας κατά ομάδες. Τέτοιου είδους κίνηση έχει αποδειχθεί ότι οδηγεί σε υψηλότερα ποσοστά απώλειας κλήσεων σε σύγκριση με την περίπτωση της τυχαίας κίνησης και για αυτό κρίνεται απαραίτητη η μελέτη της (Moscholios & Logothetis, 2010; Moscholios, et al. 2018).

Βιβλιογραφία

Little, J. D. C. (1961). *A proof for the queuing formula: $L=\lambda WL=\lambda W$* . Operations Research, 9(3), 383–387.

Λογοθέτης, Μ. Δ. (2012). *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές* (2^η έκδ.). Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Kim, Y., Ko, H., Pack, S., Lee, W., & Shen, X., (2013). *Mobility-aware call admission control algorithm with handoff queue in mobile hotspots*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 62(8), 3903–3912. <https://doi.org/10.1109/TVT.2013.2245928>.

Moscholios, I., & Logothetis, M. (2019). *Efficient multirate teletraffic loss models beyond Erlang*. John Wiley & IEEE Press. <https://doi.org/10.1002/9781119426974>.

Βλασάκης, Μ., (2022). *Μελέτη μηχανισμών ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε mobile hotspots*. Δ.Ε., Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο. Apothesis. <https://apothesis.eap.gr/archive/item/169737>.

Vlasakis, M., Moscholios, I. D., Sarigiannidis P. G., & Logothetis, M. D. (2023). *Performance evaluation of a mobile hotspot supporting quasi-random traffic*. IET Networks, 12(3). 1–10 <https://doi.org/10.1049/ntw2.12093>.

Vlasakis, M., Moscholios, I. D., Sarigiannidis P. G., & Logothetis, M. D. (2023). *Congestion Probabilities in a Mobile Hotspot Supporting Quasi-Random Traffic*. 2023 8th International Conference on Multimedia & Trustworthy Computing (MTTW), (pp. 13–19). IEEE. <https://doi.org/10.1109/MTTW59774.2023.10320018>.

Keramidi, I. P., Moscholios, I. D., & Sarigiannidis, P. G. (2021), *Call Blocking probabilities under a probabilistic bandwidth reservation policy in mobile hotspots*. Telecom, 2(4), 554–573. Multidisciplinary Digital Publishing Institute. <https://doi.org/10.3390/telecom2040031>.

Moscholios, I. D., Vassilakis, V. G., & Sarigiannidis, P. G. (2018). *Performance Modelling of a Multirate Loss System with Batched Poisson Arrivals under a Probabilistic Threshold Policy*, IET Networks, 7(4), 242–247. <https://doi.org/10.1049/iet-net.2017.0216>.

Moscholios, I. D., & Logothetis, M. D (2010). *The Erlang Multirate Loss Model with Batched Poisson Arrival Processes under the Bandwidth Reservation Policy*, Computer Communications, 33(Suppl.1), S167-S179. <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2010.04.039>.

[1] Ανακτήθηκε από <https://rispace.org/spacecraft-communicates/>.

[2] Ανακτήθηκε από https://www.freepik.com/free-vector/city-wireless-communication-isometric-concept-with-people-bus-stop_4006000.htm#fromView=keyword&page=1&position=0&uuid=da0223d2-b4fb-4cca-838f-d5a3f7298a45&query=Isometric+Bus+Stop & <https://themerionite.org/4151/news/bussin/>.

[3] Ανακτήθηκε από <https://www.istockphoto.com/vector/bus-icon-isolated-on-white-background-gm667410146-122139037> & https://www.flaticon.com/free-icon/tv_1051052.

[4], [5], [6] Δημιουργήθηκαν από τον συγγραφέα με το λογισμικό Microsoft Visio.

Παράρτημα Α: Κώδικας Python

```
def calculate_array(c, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A[]
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]

    # Υλοποίηση των έξι (6) εξισώσεων
    # Stop Phase - SP
    for n in range(0, c + 1):
        # Κατάσταση (0,0) n=0
        if n == 0:
            A[0][n] = -1 * (ln + lh + xs)
            A[0][n + 1] = (n + 1) * ms
            A[0][c + n + 1] = xm
        # Κατάσταση (0,n): 0 < n < C
        if n > 0 and n < c:
            A[n][n] = -1 * (ln + lh + n * ms + xs)
            A[n][n - 1] = ln + lh
            A[n][n + 1] = (n + 1) * ms
            A[n][c + n + 1] = xm
        # Κατάσταση (0,C)
        if n == c:
            A[n][n] = -1 * (c * ms + xs)
            A[n][n - 1] = lh + ln
            A[n][c + n + 1] = xm
    # Moving Phase - MP (ξεκινά στη γραμμή c+1=sec)
    sec = c + 1
    for n in range(sec, 2 * sec + 1):
        # State (1,0) n==c+1
        if n == sec:
            A[n][n] = -1 * (ln + xm)
            A[n][n + 1] = (n - sec + 1) * mm
            A[n][n - 1 - c] = xs
        # Κατάσταση (1,n): 0 < n < c
        if n > sec and n < sec + c:
            A[n][n] = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
            A[n][n - 1] = ln
            A[n][n + 1] = ((n - sec) + 1) * mm
            A[n][-c + n - 1] = xs
        # Κατάσταση (1,C)
        if n == sec + c:
            A[n][n] = -1 * (c * mm + xm)
            A[n][n - 1] = ln
            A[n][-c + n - 1] = xs # -c+n-1==c
    return A
```

Κώδικας 1 - Υλοποίηση πίνακα A για το μοντέλο NP/CS με Python.

```
A = calculate_array(c=5, ln=2, lh=2, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

# Εκτύπωση του πίνακα
print("Ο πίνακας A είναι:")
for row in A:
    print(row)
```

Κώδικας 2 - Κλήση της συνάρτησης του Κώδικα 1 και εκτύπωση.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # 1 - Δημιουργία του πίνακα A
    print("1 - Δημιουργία του πίνακα A")
    print("=====")
    .....
    Κώδικας 1
    .....

    # 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
    print("\n")
    print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
```

```
print("=====")
# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])
# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
for row in A:
    print(row)
# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(2 * c + 2)
b[-1] = 1
print("")
print("Ο πίνακας-διάνυσμα b είναι:")
print("-----")
print(b, "\n")
# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)
print("Πιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for index, value in enumerate(x[:len(x) // 2]):
    print(f"p(0,{index}) = {value:.10f}")
for index, value in enumerate(x[len(x) // 2:]):
    print(f"p(1,{index}) = {value:.10f}")
#Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, c + 1))
for i in range(c + 1):
    R[0, i] = x[i]
    R[1, i] = x[c + 1 + i]
calculate_array(5, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 3 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο NP/CS.

```
import numpy as np
def calculate_array(c, ln, lh, ms, mm, ks, km):
# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
print("1 - Δημιουργία του πίνακα A")
print("=====")
A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]
#.....
#.....
Κώδικας 1
#.....
print("Ο αρχικός πίνακας A είναι:")
print("-----")
for row in A:
    print(row)
# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")
#.....
#.....
Κώδικας 3
#.....
# 3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών (Bnew, Bh, U και Uc)
print("\n\n3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U και Uc)")
print("=====")
# Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης νέων κλήσεων Bnew=p(0,c)+p(1,c)
print(f"Bnew = {R[0][c]+R[1][c]:.15f}")
# Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής Bh=p(0,c)/Σ(n=0-c)p(0,n)
Bh_arithmetis = x[c]
# Άθροισμα των πιθανοτήτων Σ(n=0-c)p(0,c) να βρούμε στη SP(i=0) για τις καταστάσεις n
Bh_paronomastis = sum(x[:c+1])
Bh = Bh_arithmetis / Bh_paronomastis
print(f"Bh = {Bh:.15f}")
# Υπολογισμός του U, πλήθος κατειλημμένων BU U=Σ(i=0-1)Σ(n=0-c)nP(i,n)
U = 0
for i in range(2):
```

```

        for n in range(c + 1):
            U += n * x[i * (c + 1) + n]
        print(f"U      = {U:.15f}")

        #Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος
        Uc = U / c
        print(f"Uc     = {Uc:.15f}")

        return A
calculate_array(5, 2, 2, 1, 1, 1, 1)

```

Κώδικας 4 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_c) για το μοντέλο NP/CS για $C=5$.

```

# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh και Uc για διαφορετικές τιμές νέων κλήσεων ln
def run_for_different_ln(c, calls, lh, ms, mm, xs, xm):
    #Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh και Uc
    results_array = np.zeros((calls, 4))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της δεύτερης παραμέτρου από 1 έως calls
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        # Κλήση της συνάρτησης με τις σωστές παραμέτρους (ln = calls)
        results = calculate_array(c, calls, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For ln =", i)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = c-i+1
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        results_array[i - 1, 2] = results[1]
        results_array[i - 1, 3] = results[2]
    return results_array

```

Κώδικας 5 - Δημιουργία πίνακα και αποθήκευση των B_{new} , B_h , και U_c για διαφορετικές τιμές των νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$ και $\lambda_h=15$ για το μοντέλο NP/CS για $C=80$.

```

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με τις παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συνάρτηση του ln
def plot_results(ln_values, results_array):
    Bnew_values = results_array[:, 1]
    Bh_values = results_array[:, 2]
    Uc_values = results_array[:, 3]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(15, 10))

    # Προσθήκη καμπύλης για κάθε μεταβλητή (Bnew, Bh & Uc)
    plt.plot(ln_values, Bnew_values, label='Bnew', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Bh_values, label='Bh', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Uc_values, label='Uc', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('λn (ln) - Ρυθμός Αφίξης Νέων Κλήσεων')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('NP/CS για: C=80, ln=1-70, lh=15, ms=mm=1/4, xm=xs=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.1))
    plt.xticks(np.arange(0, 71, 5))
    plt.legend()

    # Εμφάνιση του διαγράμματος
    plt.show()

```

Κώδικας 6 - Δημιουργία γραφικής παράστασης των B_{new} , B_h και U_c για διαφορετικές τιμές των νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$ και $\lambda_h=15$ για το μοντέλο NP/CS για $C=80$.

```
# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό ln
ln_values = range(1, 71) # Εύρος των τιμών ln
results_array = run_for_different_ln(80, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_results(ln_values, results_array)
```

Κώδικας 7 - Κλήση συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για τα B_{new} , B_h , και U_c συναρτήσεων του μεταβλητού ρυθμού άφιξης νέων κλήσεων $\lambda_n=1-70$ για το μοντέλο NP/CS και $C=80$.

```
# 5 -Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές κλήσεων μεταπομπής lh
def run_for_different_lh(c, ln, calls, ms, mm, xs, xm):
    #Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh & Uc
    results_array1 = np.zeros((calls, 4))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της τρίτης παραμέτρου από 1 έως calls
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        # Κλήση της συνάρτησης με τις σωστές παραμέτρους(lh = calls)
        results1 = calculate_array(c, ln, calls, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For lh =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i - 1, 0] = c-i+1
        results_array1[i - 1, 1] = results1[0]
        results_array1[i - 1, 2] = results1[1]
        results_array1[i - 1, 3] = results1[2]
    return results_array1

# 5A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με τις παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συναρτήσεων του lh
def plot_results1(lh_values, results_array1):
    Bnew_values = results_array1[:, 1]
    Bh_values = results_array1[:, 2]
    Uc_values = results_array1[:, 3]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(15, 10))

    # Προσθήκη καμπύλης για κάθε μεταβλητή (Bnew, Bh & Uc)
    plt.plot(lh_values, Bnew_values, label='Bnew', marker='o')
    plt.plot(lh_values, Bh_values, label='Bh', marker='o')
    plt.plot(lh_values, Uc_values, label='Uc', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('lh (lh) - Ρυθμός Άφιξης Κλήσεων Μεταπομπής')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('NP/CS για: C=80, ln=25, lh=1-70, ms=mm=0.25, xm=xs=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.00, 1.10, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0, 71, 5))
    plt.legend()

    # Εμφάνιση του διαγράμματος
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό ln
ln_values = range(1, 71) # Εύρος των τιμών ln
results_array = run_for_different_ln(80, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_results(ln_values, results_array)
```

Κώδικας 8 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_h=1-70$, $\lambda_n=25$ για το μοντέλο NP/CS με $C=80$.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]
```

```
# Υλοποίηση των εξισώσεων CP/BR
sec = c + 1
for n in range(0, 2 * (c + 1)):
    # ai(n) ή αι(n)
    if n < c - t:
        ai = -1 * (ln + lh + xs + n * ms)
    elif n < c:
        ai = -1 * (lh + xs + n * ms)
    elif n == c:
        ai = -1 * (xs + n * ms)
    elif n >= sec and n < sec + c - t:
        ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
    elif sec + c - t <= n and n <= sec + c:
        ai = -1 * ((n - sec) * mm + xm)
    # bi(n) ή βi(n)
    if 0 <= n and n <= c:
        bi = (n + 1) * ms
    elif n >= sec and n <= sec + c:
        bi = (n - sec + 1) * mm
    # si(n) ή σi(n)
    if n > 0 and n <= c - t:
        si = ln + lh
    elif n > c - t and n <= c:
        si = lh
    elif n > sec and n <= sec + c - t:
        si = ln
    elif n > sec + c - t:
        si = 0
    # διαγώνιος πίνακα αι(n)
    A[n][n] = ai

    # Φάση SP
    if n >= 0 and n <= c:
        A[n][c + n + 1] = xm
    # Κατάσταση 0,0 για n=0
    if n == 0:
        A[n][n + 1] = bi
    # Κατάσταση 0,n για 0<n<=C
    if n > 0 and n < c:
        A[n][n - 1] = si
        A[n][n + 1] = bi
    # Κατάσταση 0,C
    if n == c:
        A[n][n - 1] = si

    # Φάση MP
    # Κατάσταση 1,n για sec<=n<=sec+c
    if n >= sec and n <= sec + c:
        A[n][n - 1 - c] = xs
    if n >= sec and n < sec + c:
        A[n][n + 1] = bi
    if n > sec and n <= sec + c:
        A[n][n - 1] = si
print("Ο πίνακας A είναι:")
for row in A:
    print(row)

calculate_array(5, 2, 2, 2, 1,1, 1, 1)
```

Κώδικας 9 - Υλοποίηση Πίνακα A για το μοντέλο CP/BR με Python.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]

    # Υλοποίηση των εξισώσεων CP/BR

    .....
    Κώδικας 9
    .....
```

```
# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")

# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
for row in A:
    print(row)

# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(2 * c + 2)
b[-1] = 1

print("")
print("Ο πίνακας-διάνυσμα b είναι:")
print("-----")
print(b, "\n")

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("Πιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for index, value in enumerate(x[:len(x) // 2]):
    print(f"p(0,{index}) = {value:.10f}")
for index, value in enumerate(x[len(x) // 2:]):
    print(f"p(1,{index}) = {value:.10f}")

#Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-διασδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, c + 1))
for i in range(c + 1):
    R[0, i] = x[i]
    R[1, i] = x[c + 1 + i]

calculate_array(5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 10 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CP/BR.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]
    .....
    Κώδικας 9
    .....

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
    .....
    Κώδικας 10
    .....

# 3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών (Bnew, Bh, U & Uc)
print("\n\n3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)")
print("=====")

# Υπολογισμός Bnew Πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων, Bnew=Σ(i=0-1)Σ(n=C-t...C)P(i,n)
Bnew = 0
#n = c-t
for i in range(2):
    for c in range(c-t, c+1):
        Bnew += R[i, c]
    print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")

# Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής Bh=p(0,c)/Σ(n=0-c)p(0,n)
Bh_arithmitis = x[c]
# Αθροισμα των πιθανοτήτων Σ(n=0-c)p(0,c) να βρίσκεστε στην κατάσταση 0 για όλα τα n
Bh_paronomastis = sum(x[:c+1])
Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis
```

```
print(f"Bh = {Bh:.15f}")

# Υπολογισμός του U, πλήθος κατειλημμένων BU  $U = \sum_{i=0}^{c-1} \sum_{n=0}^{c-i} nP(i,n)$ 
U = 0
for i in range(2):
    for n in range(c + 1):
        U += n * x[i * (c + 1) + n]
print(f"U = {U:.15f}")

#Υπολογισμός  $U_c$  της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος
Uc = U / c
print(f"Uc = {Uc:.15f}")
return A

calculate_array(5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 11 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_c) για το μοντέλο CP/BR με $C=5$ και $t=2$.

```
# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές κλήσεων ln
def run_for_different_ln(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm):
    #Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh & Uc
    results_array = np.zeros((calls, 4))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της τρίτης παραμέτρου από 1 έως calls
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        results = calculate_array(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For ln =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = c-i+1
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        results_array[i - 1, 2] = results[1]
        results_array[i - 1, 3] = results[2]
    return results_array

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με τις παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συνάρτηση του ln
def plot_results(ln_values, results_array):
    Bnew_values = results_array[:, 1]
    Bh_values = results_array[:, 2]
    Uc_values = results_array[:, 3]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(15, 10))

    # Προσθήκη καμπύλης για κάθε μεταβλητή (Bnew, Bh & Uc)
    plt.plot(ln_values, Bnew_values, label='Bnew', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Bh_values, label='Bh', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Uc_values, label='Uc', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('ln (ln) - Ρυθμός Νέων Κλήσεων')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CP/BR(για S.P. & M.P.) για: C=80, t=8, ln=1-70, lh=15, ms=mm=1/4, xm=xs=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0, 71, 2))
    plt.legend()

    # Εμφάνιση του διαγράμματος
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό ln (Ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων)
ln_values = range(1, 71) # Εύρος των τιμών ln
results_array = run_for_different_ln(80, 8, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_results(ln_values, results_array)
```

Κώδικας 12 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) με $C=80$ και $t=8$.


```
# 5 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές του t (tBR-Δεσμευμένη
χωρητικότητα)
def run_for_different_t(c, tBR, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα t, Bnew, Bh & Uc
    results_array1 = np.zeros((tBR, 4))
    i = 1
    tBR_values = np.arange(1, 71, 2)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της tBR από 1 έως 70 με βήμα 1
    for i in range(1, tBR+1):
        tBR = i
        # Κλήση της συνάρτησης με τις σωστές παραμέτρους (lh = calls)
        results1 = calculate_array(c, tBR, ln, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For t =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i - 1, 0] = i
        results_array1[i - 1, 1] = results1[0]
        results_array1[i - 1, 2] = results1[1]
        results_array1[i - 1, 3] = results1[2]
    return results_array1

# 5A - Δημιουργία γραφικών παραστάσεων με παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συναρτήσει του t
def plot_combined_results1(tBR_values, results_array1, results_array2):
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # Προσθήκη των δύο γραφημάτων στον ίδιο άξονα
    plt.plot(tBR_values, results_array1[:, 1], label='Bnew(ln=20)', marker='o')
    plt.plot(tBR_values, results_array2[:, 1], label='Bnew(ln=50)', marker='x')

    plt.plot(tBR_values, results_array1[:, 2], label='Bh(ln=20)', marker='o')
    plt.plot(tBR_values, results_array2[:, 2], label='Bh(ln=50)', marker='x')

    plt.plot(tBR_values, results_array1[:, 3], label='Uc(ln=20)', marker='o')
    plt.plot(tBR_values, results_array2[:, 3], label='Uc(ln=50)', marker='x')

    # Ετικέτες και τίτλος
    plt.xlabel('t - Δεσμευμένη χωρητικότητα (BR)')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CP/BR(για S.P.&M.P) για: C=80, t=1-70, ln=20&ln=50, lh=15, ms=mm=0.25, xm=xs=1')
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(1, 73, 2))

    handles, labels = plt.gca().get_legend_handles_labels()
    order = [0, 2, 4, 1, 3, 5] # Προσαρμογή της σειράς όπως επιθυμείτε
    plt.legend([handles[idx] for idx in order], [labels[idx] for idx in order],
               bbox_to_anchor=(1, 0.3), fontsize='10', ncol=2)

    plt.grid(True)
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης για
μεταβλητό t(Δεσμευμένη χωρητικότητα)
tBR_values = np.arange(1, 71, 1) # Εύρος των τιμών t
results_array1_ln20 = run_for_different_t(80, 70, 20, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
results_array1_ln50 = run_for_different_t(80, 70, 50, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_combined_results1(tBR_values, results_array1_ln20, results_array1_ln50)
```

Κώδικας 13 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $t=1-70$, $\lambda_n=20$ & 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) με $C=80$.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]

    # Υλοποίηση των εξισώσεων CB1/BR
    sec = c + 1
    for n in range(0, 2 * (c + 1)):
        # ai(n) ή ai(n)
        if n < c - t:
            ai = -1 * (ln + lh + xs + n * ms)
```

```

elif n < c:
    ai = -1 * (lh + xs + n * ms)
elif n == c:
    ai = -1 * (xs + n * ms)
elif n >= sec and n < sec + c - t:
    ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
elif sec + c - t <= n and n < sec + c:
    ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
elif n == sec + c:
    ai = -1 * ((n - sec) * mm + xm)
# bi(n) ή βi(n)
if 0 <= n and n <= c:
    bi = (n + 1) * ms
elif n >= sec and n <= sec + c:
    bi = (n - sec + 1) * mm
# si(n) ή σi(n)
if n > 0 and n <= c - t:
    si = ln + lh
elif n > c - t and n <= c:
    si = lh
elif n > sec and n <= sec + c - t:
    si = ln
elif n > sec + c - t:
    si = ln
# διαγώνιος πίνακα ai(n)
A[n][n] = ai
if n >= 0 and n <= c:
    A[n][c + n + 1] = xm
if n == 0:
    A[n][n + 1] = bi
if 0 < n < c:
    A[n][n - 1] = si
    A[n][n + 1] = bi
if n == c:
    A[n][n - 1] = si
if sec <= n <= sec + c:
    A[n][n - 1 - c] = xs
if sec <= n < sec + c:
    A[n][n + 1] = bi
if sec < n <= sec + c:
    A[n][n - 1] = si
print("Ο πίνακας A είναι:")
for row in A:
    print(row)

```

Κώδικας 14 - Υλοποίηση πίνακα A για το μοντέλο CP1/BR με Python.

```

import numpy as np
def calculate_array(c, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]
    # Υλοποίηση των εξισώσεων CB1/BR
    .....
    Κώδικας 14
    .....
# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")

# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
for row in A:
    print(row)

# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(2 * c + 2)
b[-1] = 1

```

```
print("")
print("Ο πίνακας-διάνυσμα b είναι:")
print("-----")
print(b, "\n")

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("Πιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for index, value in enumerate(x[:len(x) // 2]):
    print(f"p(0,{index}) = {value:.10f}")
for index, value in enumerate(x[len(x) // 2:]):
    print(f"p(1,{index}) = {value:.10f}")

#Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, c + 1))
for i in range(c + 1):
    R[0, i] = x[i]
    R[1, i] = x[c + 1 + i]

calculate_array(5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 15 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CP1/BR.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    A = [[0] * (2 * c + 2) for _ in range(2 * c + 2)]
    # Υλοποίηση των εξισώσεων CB1/BR
    .....
    Κώδικας 14
    .....

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
.....
Κώδικας 15
.....

# 3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών (Bnew, Bh, U & Uc)
print("\n\n3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)")
print("=====")

# Υπολογισμός του Bnew Πιθ. απόρριψης νέων κλήσεων, Bnew=p(1,C)+Σ(n=C-t...C)P(0,n)
sum0=0
Bnew=0
for n in range(c - t, c+1):
    sum0 += R[0][n]
Bnew = sum0 + R[1][c]
print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")
# Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής Bh=p(0,c)/Σ(n=0-c)p(0,n)
Bh_arithmitis = x[c]
# Αθροισμα των πιθανοτήτων Σ(n=0-c)p(0,c) για όλες τις δυνατές καταστάσεις n
Bh_paronomastis = sum(x[:c+1])
Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis
print(f"Bh = {Bh:.15f}")

# Υπολογισμός του U, πλήθος κατειλημμένων BU U=Σ(i=0-1)Σ(n=0-c)nP(i,n)
U = 0
for i in range(2):
    for n in range(c + 1):
        U += n * x[i * (c + 1) + n]
print(f"U = {U:.15f}")

#Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος
Uc = U / c
print(f"Uc = {Uc:.15f}")
return A

calculate_array(5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 16 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_c) για το μοντέλο CP1/BR με $C=5$ και $t=2$.

```
# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές ln για CP1_BR(SP)
def run_for_different_ln(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh & Uc
    results_array = np.zeros((calls, 4))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της δεύτερης παραμέτρου από 1 έως calls
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        results = calculate_array(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For ln =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = c-i+1
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        results_array[i - 1, 2] = results[1]
        results_array[i - 1, 3] = results[2]
    return results_array

# 4.1 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές κλήσεων ln για CP_BR(SP & MV)
def run_for_different_lnl(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh & Uc
    results_array = np.zeros((calls, 4))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της δεύτερης παραμέτρου από 1 έως calls
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        results = calculate_array1(c, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For ln =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = c-i+1
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        results_array[i - 1, 2] = results[1]
        results_array[i - 1, 3] = results[2]
    return results_array

# 8 - Δημιουργία συνδυασμός γραφικών παραστάσεων με παραμέτρους Bnew, Bh, Uc για δεσμευμένη
χωρητικότητα σε CP_BR(SP & MP) & CP1_BR(SP)
def plot_combined_results2(ln_values, results_array1, results_array2):
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # Προσθήκη των δύο γραφημάτων στον ίδιο άξονα
    plt.plot(ln_values, results_array1[:, 1], label='Bnew(SP)', marker='o')
    plt.plot(ln_values, results_array2[:, 1], label='Bnew(SP & MV)', marker='x')

    plt.plot(ln_values, results_array1[:, 2], label='Bh(SP)', marker='o')
    plt.plot(ln_values, results_array2[:, 2], label='Bh(SP & MV)', marker='x')

    plt.plot(ln_values, results_array1[:, 3], label='Uc(SP)', marker='o')
    plt.plot(ln_values, results_array2[:, 3], label='Uc(SP & MV)', marker='x')

    # Ετικέτες και τίτλος
    plt.xlabel('ln - Ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CP/BR & CP1/BR(για δεσμευμένη χωρητικότητα t σε SP-MP & SP εναλλάξ)
    \nγια: C=80, t=8, ln=1-70, lh=15, ms=mm=0.25, xm=xs=1')
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(1, 75, 2))

    handles, labels = plt.gca().get_legend_handles_labels()
    order = [0, 2, 4, 1, 3, 5] # Προσαρμογή της σειράς όπως επιθυμείτε
    plt.legend([handles[idx] for idx in order], [labels[idx] for idx in order],
    bbox_to_anchor=(1, 0.35), fontsize='10', ncol=2)
    plt.grid(True)
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων, δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό ln
ln_values = range(1, 71) # Εύρος των τιμών ln
results_array1 = run_for_different_ln(80, 8, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
results_array2 = run_for_different_lnl(80, 8, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_combined_results2(ln_values, results_array1, results_array2)
```

Κώδικας 17 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικών παραστάσεων για $\lambda_n=1-70$, $t=8$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) και για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) εναλλάξ για $C=80$.

```
# 7 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για τιμές του t=1-70 (tBR)
def run_for_different_t(c, tBR, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα t, Bnew, Bh & Uc
    results_array3 = np.zeros((tBR, 4))
    i = 1
    tBR_values = np.arange(1, 51, 2)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της tBR από 1 έως 70 με βήμα 1
    for i in range(1, tBR+1):
        tBR = i
        # Κλήση της συνάρτησης με τις σωστές παραμέτρους (lh = calls)
        results1 = calculate_array(c, tBR, ln, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For t =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array3[i - 1, 0] = i
        results_array3[i - 1, 1] = results1[0]
        results_array3[i - 1, 2] = results1[1]
        results_array3[i - 1, 3] = results1[2]

    return results_array3
# 7A - Δημιουργία συνδυασμός γραφικών παραστάσεων με παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συναρτήσει του t
def plot_combined_results1(tBR_values, results_array111, results_array222):
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # Προσθήκη των δύο γραφημάτων στον ίδιο άξονα
    plt.plot(tBR_values, results_array111[:, 1], label='Bnew(ln=20)', marker='o')
    plt.plot(tBR_values, results_array222[:, 1], label='Bnew(ln=50)', marker='x')

    plt.plot(tBR_values, results_array111[:, 2], label='Bh(ln=20)', marker='o')
    plt.plot(tBR_values, results_array222[:, 2], label='Bh(ln=50)', marker='x')

    plt.plot(tBR_values, results_array111[:, 3], label='Uc(ln=20)', marker='o')
    plt.plot(tBR_values, results_array222[:, 3], label='Uc(ln=50)', marker='x')

    # Ετικέτες και τίτλος
    plt.xlabel('t - Δεσμευμένη χωρητικότητα (BR)')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CP1/BR(δεσμευμένη χωρητικότητα t μόνο σε S.P.)
    \nγια: C=800, t=8, ln=20 & ln=50, lh=15, ms=mm=0.25, xm=xs=1')
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(1, 75, 2))

    handles, labels = plt.gca().get_legend_handles_labels()
    order = [0, 2, 4, 1, 3, 5] # Προσαρμογή της σειράς
    plt.legend([handles[idx] for idx in order], [labels[idx] for idx in order],
    bbox_to_anchor=(1, 0.35), fontsize='12', ncol=2)

    plt.grid(True)
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης για
# μεταβλητό t(Δεσμευμένη χωρητικότητα)
tBR_values = np.arange(1, 71, 1) # Εύρος των τιμών t
results_array3_ln22 = run_for_different_t(80, 70, 20, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
results_array3_ln38 = run_for_different_t(80, 70, 50, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_combined_results1(tBR_values, results_array3_ln22, results_array3_ln38)
```

Κώδικας 18 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικών παραστάσεων για $t=1-70$, $\lambda_n=20$ και 50 , $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP/BR(και στις δύο φάσεις) και για το μοντέλο CP1/BR (μόνο στην SP) εναλλάξ για $C=80$.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, k, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A[][]
    sec = c + k + 1
    A = [[0] * (2 * (c + 1 + k)) for _ in range(2 * (c + 1 + k))]

    # Υλοποίηση των εξισώσεων CBQ
    for n in range(0, 2 * (c + k + 1)):

        # υπολογισμός των τιμών  $\alpha_i(n)$ ,  $\beta_i(n)$ ,  $\sigma_i(n)$ 
        #  $\alpha_i(n)$  ή  $\alpha_i(n)$ 
```

```

if n < c - t: ai = -1 * (ln + lh + xs + n * ms)
elif n < c: ai = -1 * (lh + xs + n * ms)
elif n >= c and n < c + k: ai = -1 * (lh + c * ms + xs)
elif n == c + k: ai = -1 * (c * ms + xs)
elif n >= sec and n < sec + c - t: ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
elif n == sec + c - t: ai = -1 * ((n - sec) * mm + xm)
elif n > sec + c - t and n < sec + c: ai = -1 * ((n - sec) * mm + xm)
elif n == sec + c: ai = -1 * ((n - sec) * mm + xm)
elif n > sec + c and n < sec + c + k: ai = -1 * (c * mm + xm)
elif n == sec + c + k and k > 0: ai = -1 * (c * mm + xm)

# βi(n) ή bi(n)
if 0 <= n < c: bi = (n + 1) * ms
elif c <= n < c + k: bi = c * ms
elif sec <= n < sec + c: bi = (n - sec + 1) * mm
elif sec + c <= n < sec + c + k: bi = c * mm
# σi(n) ή si(n)
if 0 < n <= c - t: si = ln + lh
elif c - t < n <= c + k: si = lh
elif sec < n <= sec + c - t: si = ln
elif sec + c - t < n: si = 0

# Συμπλήρωση πίνακα A[][]
A[n][n] = ai
if n != c + k and n != 2 * sec - 1: A[n][n + 1] = bi
if n <= c + k: A[n][c + k + n + 1] = xm
elif n <= sec + c + k: A[n][-c - k + n - 1] = xs
if n > 0 and n <= sec + c + k and n != sec: A[n][n - 1] = si
return A

A = calculate_array(5, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
# Εκτύπωση του πίνακα
print("Ο πίνακας A είναι:")
for row in A:
    print(row)

```

Κώδικας 19 - Υλοποίηση πίνακα A για το μοντέλο CPQ για C=5, k=2 και t=2.

```

import numpy as np

def calculate_array(c, k, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A[][]
    sec = c + k + 1
    A = [[0] * (2 * (c + 1 + k)) for _ in range(2 * (c + 1 + k))]
    # Υλοποίηση των εξισώσεων CBQ
    .....
    Κώδικας 19
    .....

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")
# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
for row in A:
    print(row)
# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(2 * (c + k + 1))
b[-1] = 1

print("")
print("Ο πίνακας-διάνυσμα b είναι:")
print("-----")
print(b, "\n")

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("Πιθανότητες-Αποτελέσματα:")

```

```
print("-----")
for index, value in enumerate(x[:len(x) // 2]):
    print(f"p(0,{index}) = {value:.10f}")
for index, value in enumerate(x[len(x) // 2:]):
    print(f"p(1,{index}) = {value:.10f}")

#Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, c + k + 1))
for i in range(c + k + 1):
    R[0, i] = x[i]
    R[1, i] = x[c+k+1+i]

calculate_array(5, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 20 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CPQ για C=5 και k=2.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, k, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A[][]
    sec = c + k + 1
    A = [[0] * (2 * (c + 1 + k)) for _ in range(2 * (c + 1 + k))]

    # Υλοποίηση των εξισώσεων CBQ
    .....
    Κώδικας 19
    .....

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
    .....
    Κώδικας 20
    .....

# 3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λα & W)
    print("\n\n3 - CPQ:Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λα & W)")
    # Υπολογισμός του Bnew Πιθ. Απόρ. νέων κλήσεων, Bnew=Σ(i=0-1)Σ(n=C-t...C+k+1)P(i,n)
    Bnew = 0
    for i in range(2):
        for n in range(c-t, c+k+1):
            Bnew += R[i, n]
            #print("R[" ,i, "][" ,n, " ] =", R[i][n])
    print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")

    # Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής Bh=p(0,c)/Σ(n=0-c)p(0,n)
    Bh_arithmetis = x[c+k]
    # Αθροισμα των πιθανοτήτων Σ(n=0-c)p(0,c) να βρίσκεστε στην κατάσταση 0
    Bh_paronomastis = sum(x[:c+k+1])
    Bh = Bh_arithmetis / Bh_paronomastis
    print(f"Bh = {Bh:.15f}")

    # Υπολογισμός του U1, πλήθος κατειλημμένων BU U1=Σ(i=0-1)Σ(n=0-c)nP(i,n)
    # Καταστάσεις εκτός ουράς (έως την κατάσταση c)
    U1 = 0
    for i in range(2):
        for n in range(1, c + 1):
            U1 += n * R[i,n]
            #print("R[" ,i, "][" ,n, " ] =", R[i][n])
    print(f"U1 = {U1:.15f}")

    # Υπολογισμός του U2, πλήθος κατειλημμένων BU U2=Σ(i=0-1)Σ(n=c+1...c+k)cP(i,n)
    # Καταστάσεις στην ουρά (από την c+1 έως την κατάσταση c+k)
    U2 = 0
    for i in range(2):
        for n in range(c+1, c+k+1):
            U2 += c * R[i, n]
            #print("R[" ,i, "][" ,n, " ] =", R[i][n])
    print(f"U2 = {U2:.15f}")

    #Υπολογισμός U, συνολικό πλήθος κατειλημμένων BU U=U1+U2
    U = U1+U2
    print(f"U = {U:.15f}")

    #Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος Uc=U/c=(U1+U2)/c
    Uc = U / c
    print(f"Uc = {Uc:.15f}")

    #Υπολογισμός N, πλήθος κλήσεων μεταπομπής στην ουρά N=Σ(i=0-1)Σ(n=c+1...c+k) (n-c)P(i,n)
    N = 0
```



```

for i in range(2):
    for n in range(c + 1, c+k+1):
        N += (n-c) * R[i, n]
        #print("R[" + i + "][" + n + "]=", R[i,n])
print(f"N = {N:.15F}")
# Υπολογισμός λα (1a), ο ενεργός ρυθμός άφιξης των συνολικών κλήσεων
# λα = λ1 + λ2 + λ3
λα = λ1 + λ2 + λ3 = 0
#λ1 = Σ(n=0...c-t-1) (λn+λh)*P(0,n)
for n in range(0, c-t):
    λ1 += (ln+lh) * R[0, n]
    #print("R[" + 0 + "][" + n + "]=", R[i,n])

#λ2 = Σ(n=c-t...c+k-1) lh*P(0,n)
for n in range(c-t, c+k-1+1):
    λ2 += lh * R[0, n]
    #print("R[" + 0 + "][" + n + "]=", R[i,n])

# λ3 = Σ(n=0...c-t-1) ln*P(1,n)
for n in range(0, c-t-1+1):
    λ3 += ln * R[1, n]
    #print("R[" + 1 + "][" + n + "]=", R[i, n])

λα = λ1 + λ2 + λ3
print(f"λα = {λα:.15F}")

# Υπολογισμός W, ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά
W = N/λα
print(f"W = {W:.15F}")

return A

calculate_array(5, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)

```

Κώδικας 21 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS B_{new} , B_h , $U(U_1+U_2)$, U_c , N , λ_a και W για το μοντέλο CPQ με $C=5$, $k=2$ και $t=2$.

```

# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές κλήσεων ln
def run_for_different_ln(c, k, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm):
    #Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh, Uc & W
    results_array = np.zeros((calls, 5))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της δεύτερης παραμέτρου από 1 έως calls
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        results = calculate_array(c, k, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For ln =", i)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = calls
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        results_array[i - 1, 2] = results[1]
        results_array[i - 1, 3] = results[2]
        results_array[i - 1, 4] = results[3]
    return results_array

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με τις παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συνάρτηση του ln
def plot_results(ln_values, results_array):
    Bnew_values = results_array[:, 1]
    Bh_values = results_array[:, 2]
    Uc_values = results_array[:, 3]
    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(15, 10))
    # Προσθήκη καμπύλης για κάθε μεταβλητή (Bnew, Bh & Uc)
    plt.plot(ln_values, Bnew_values, label='Bnew, CPQ(k=8)', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Bh_values, label='Bh, CPQ(k=8)', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Uc_values, label='Uc, CPQ(k=8)', marker='o')
    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('ln (ln) - Ρυθμός Νέων Κλήσεων')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CPQ για: C=80, k=8, t=8, ln=1-50, lh=15, ms=mm=1/4, xm=xs=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0, 71, 2))
    plt.legend()

```

```
# Εμφάνιση του διαγράμματος
plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων (Bnew-Bh-Uc) και δημιουργία γραφικής
παράστασης για μεταβλητό ln (Ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων)
ln_values = range(1, 71) # Εύρος των τιμών ln
results_array = run_for_different_ln(80, 8, 8, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_results(ln_values, results_array)
```

Κώδικας 22 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CPQ με $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (και στις δύο φάσεις).

```
# 6 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές του k (kDIF-Θέσεις στην
ουρά)
def run_for_different_k(c, kDIF, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα k, Bnew, Bh & Uc
    results_array1 = np.zeros((kDIF, 4))
    i = 0
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της kDIF από 1 έως 70 με βήμα 1
    for i in range(0, kDIF):
        kDIF = i
        # Κλήση της συνάρτησης με τις σωστές παραμέτρους (k = kDIF)
        results1 = calculate_array(c, kDIF, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του k (Queue)
        print("For k =", i, " & t =", t)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i, 0] = i
        results_array1[i, 1] = results1[0]
        results_array1[i, 2] = results1[1]
        results_array1[i, 3] = results1[2]
    return results_array1

# 6A - Δημιουργία γραφικών παραστάσεων με παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συναρτήσει του k
def plot_combined_results1(kDIF_values, results_array111, results_array222):
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # Προσθήκη των δύο γραφημάτων στον ίδιο άξονα
    plt.plot(kDIF_values, results_array111[:, 1], label='Bnew-CPQ(t=8)', marker='o')
    plt.plot(kDIF_values, results_array222[:, 1], label='Bnew-CPQ(t=16)', marker='o')

    plt.plot(kDIF_values, results_array111[:, 2], label='Bh-CPQ(t=8)', marker='x')
    plt.plot(kDIF_values, results_array222[:, 2], label='Bh-CPQ(t=16)', marker='x')

    plt.plot(kDIF_values, results_array111[:, 3], label='Uc-CPQ(t=8)', marker='+')
    plt.plot(kDIF_values, results_array222[:, 3], label='Uc-CPQ(t=16)', marker='+')

    # Ετικέτες και τίτλος
    plt.xlabel('k - Θέσεις στην ουρά αναμονής')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CPQ για: C=80, k=0-70, t=8 & t=16, ln=20, lh=30, ms=mm=1/4, xm=xs=1')
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0, 73, 2))

    handles, labels = plt.gca().get_legend_handles_labels()
    order = [0, 2, 4, 1, 3, 5] # Προσαρμογή της σειράς
    plt.legend([handles[idx] for idx in order], [labels[idx] for idx in order],
               bbox_to_anchor=(0.95, 0.4), fontsize='10', ncol=2)

    plt.grid(True)
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης
# για μεταβλητό μήκος ουράς αναμονής k (k=0-50) και για t=8 & t=16
kDIF_values = np.arange(0, 71, 1) # Εύρος των τιμών k
results_array2_t8 = run_for_different_k(80, 71, 8, 20, 30, 0.25, 0.25, 1, 1)
results_array2_t16 = run_for_different_k(80, 71, 16, 20, 30, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_combined_results1(kDIF_values, results_array2_t8, results_array2_t16)
```

Κώδικας 23 - Κλήση των συναρτήσεων για τον υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=20$, $\lambda_h=30$ για το μοντέλο CPQ με $C=80$, $k=1-70$, $t=8$ & $t=16$ (και στις δύο φάσεις).

```
import numpy as np
def calculate_array(c, k, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
```

```

sec = c + k + 1
A = [[0] * (2 * (c + 1 + k)) for _ in range(2 * (c + 1 + k))]
# Υλοποίηση των εξισώσεων CBQ1
for n in range(0, 2 * (c + k + 1)):
    # υπολογισμός των τιμών ai(n), bi(n), si(n)
    # ai(n) ή ai(n)
    if n < c - t: ai = -1 * (ln + lh + xs + n * ms)
    elif n < c: ai = -1 * (lh + xs + n * ms)
    elif n >= c and n < c + k: ai = -1 * (lh + c * ms + xs)
    elif n == c + k: ai = -1 * (c * ms + xs)
    elif n >= sec and n < sec + c - t: ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
    elif n == sec + c - t: ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
    elif n > sec + c - t and n < sec + c: ai = -1 * (ln + (n - sec) * mm + xm)
    elif n == sec + c: ai = -1 * ((n - sec) * mm + xm)
    elif n > sec + c and n < sec + c + k: ai = -1 * (c * mm + xm)
    elif n == sec + c + k and k > 0: ai = -1 * (c * mm + xm)
    # bi(n) ή bi(n)
    if 0 <= n and n < c: bi = (n + 1) * ms
    elif n >= c and n < c + k: bi = c * ms
    elif n >= sec and n < sec + c: bi = (n - sec + 1) * mm
    elif n >= sec + c and n < sec + c + k: bi = c * mm
    # si(n) ή si(n)
    if n > 0 and n <= c - t: si = ln + lh
    elif n > c - t and n <= c + k: si = lh
    elif n > sec and n <= sec + c - t: si = ln
    elif n > sec + c - t:
        if n <= sec + c: si = ln
        else: si = 0
    # Συμπλήρωση πίνακα A
    A[n][n] = ai
    if n != c + k and n != 2 * sec - 1: A[n][n + 1] = bi
    if n <= c + k: A[n][c + k + n + 1] = xm
    elif n <= sec + c + k: A[n][-c - k + n - 1] = xs
    if n > 0 and n <= sec + c + k and n != sec: A[n][n - 1] = si
return A

```

Κώδικας 24 - Υλοποίηση πίνακα A για το μοντέλο CP1Q για C=5, t=2 και k=2.

```

import numpy as np

def calculate_array(c, k, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    sec = c + k + 1
    A = [[0] * (2 * (c + 1 + k)) for _ in range(2 * (c + 1 + k))]

    # Υλοποίηση των εξισώσεων CBQ1
    .....
    Κώδικας 24
    .....

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")

# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("Ο πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
for row in A:
    print(row)

# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(2 * (c + k + 1))
b[-1] = 1

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("\n\nΠιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for index, value in enumerate(x[:len(x) // 2]):
    print(f"p(0,{index}) = {value:.10f}")
for index, value in enumerate(x[len(x) // 2:]):

```

```
print(f"p(1,{index}) = {value:.10f}")

#Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, c + k + 1))
for i in range(c + k + 1):
    R[0, i] = x[i]
    R[1, i] = x[c + k + 1 + i]

calculate_array(5, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 25 - Επίλυση συστήματος και υπολογισμός πιθανοτήτων για το μοντέλο CP1Q για $C=5$ και $k=2$.

```
import numpy as np

def calculate_array(c, k, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα A
    sec = c + k + 1
    A = [[0] * (2 * (c + 1 + k)) for _ in range(2 * (c + 1 + k))]

    # Υλοποίηση των εξισώσεων CP1Q
    .....
    Κώδικας 24
    .....

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
.....
Κώδικας 25
.....

# 3 - Υπολογισμός των λοιπών μεγεθών (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λα & W)
print("\nn3 - CP1Q:Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U(U1+U2), Uc, N, λα & W)")
print("=====")

# Υπολογισμός του Bnew Πιθανότητα απόρριψης νέων κλήσεων
# Bnew = Bnew1 + Bnew2
# Bnew1 =  $\sum_{i=c-t \dots c+k} P(0, n)$ 
Bnew = Bnew1 = Bnew2 = 0
for n in range(c-t, c+k+1):
    Bnew1 += R[0, n]

# Bnew2 =  $\sum_{i=c \dots c+k} P(1, n)$ 
for n in range(c, c + k + 1):
    Bnew2 += R[1, n]
Bnew = Bnew1 + Bnew2
print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")

# Υπολογισμός της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων μεταπομπής Bh= $p(0, c) / \sum_{n=0-c} p(0, n)$ 
Bh_arithmitis = x[c+k]
# Άθροισμα των πιθανοτήτων  $\sum_{n=0-c} p(0, c)$ 
Bh_paronomastis = sum(x[:c+k+1])
Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis
print(f"Bh = {Bh:.15f}")

# Υπολογισμός του U1, πλήθος κατειλημμένων BU  $U1 = \sum_{i=0-1} \sum_{n=0-c} nP(i, n)$ 
# Καταστάσεις εκτός ουράς (έως την κατάσταση c)
U1 = 0
for i in range(2):
    for n in range(1, c + 1):
        U1 += n * R[i, n]
        #print("R[" + i + "][" + n + "]=", R[i, n])
print(f"U1 = {U1:.15f}")

# Υπολογισμός του U2, πλήθος κατειλημμένων BU  $U2 = \sum_{i=0-1} \sum_{n=c+1 \dots c+k} cP(i, n)$ 
# Καταστάσεις στην ουρά (από την c+1 έως την κατάσταση c+k)
U2 = 0
for i in range(2):
    for n in range(c+1, c+k+1):
        U2 += c * R[i, n]
        #print("R[" + i + "][" + n + "]=", R[i, n])
print(f"U2 = {U2:.15f}")

#Υπολογισμός U, συνολικό πλήθος κατειλημμένων BU=U1+U2
U = U1+U2
print(f"U = {U:.15f}")

#Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος  $Uc=U/c=(U1+U2)/c$ 
Uc = U / c
```

```
print(f"Uc = {Uc:.15f}")

#Υπολογισμός N, κλήσεις μεταφοράς στην ουρά  $N=U_2=\sum_{i=0}^{c-1} \sum_{n=c+1}^{c+k} (n-c)P(i,n)$ 
N = 0
for i in range(2):
    for n in range(c + 1, c+k+1):
        N += (n-c) * R[i, n]
        #print("R[" ,i, "][",n,"]=", R[i,n])
print(f"N = {N:.15f}")

# Υπολογισμός  $\lambda_a$  ( $\lambda_a$ ), ο ενεργός ρυθμός άφιξης των συνολικών κλήσεων
 $\lambda_a = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 
 $\lambda_1 = \sum_{n=0}^{c-t-1} (\lambda_n + \lambda_h) * P(0,n)$ 
for n in range(0, c-t):
     $\lambda_1 += (ln + lh) * R[0, n]$ 
    #print("R[" ,0, "][",n,"]=", R[i,n])

 $\lambda_2 = \sum_{n=ap; o \text{ ton} \dots c+k-1} lh * P(0,n)$ 
for n in range(c-t, c+k-1+1):
     $\lambda_2 += lh * R[0, n]$ 
    #print("R[" ,0, "][",n,"]=", R[i,n])

 $\lambda_3 = \sum_{n=0}^{c-t-1} ln * P(1,n)$ 
for n in range(0, c-1+1):
     $\lambda_3 += ln * R[1, n]$ 
    #print("R[" , 1, "][", n, "]= ", R[i, n])

 $\lambda_a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 
print(f" $\lambda_a = \{ \lambda_a : .15f \}$ ")

# Υπολογισμός W, ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά
W = N/ $\lambda_a$ 
print(f"W = {W:.15f}")
return A

calculate_array(5, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)
```

Κώδικας 26 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS B_{new} , B_h , $U(U_1 + U_2)$, U_c , N , λ_a και W για το μοντέλο CP1Q με $C=5$, $k=2$ και $t=2$.

```
# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές κλήσεων ln
def run_for_different_ln(c, k, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm):
    #Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα ln, Bnew, Bh, Uc & W
    results_array = np.zeros((calls, 5))

    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της παραμέτρου calls από 1 έως calls+1
    for i in range(1, calls+1):
        calls = i
        results = calculate_array(c, k, t, calls, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του ln (calls)
        print("For ln =", i)

        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = calls
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        results_array[i - 1, 2] = results[1]
        results_array[i - 1, 3] = results[2]
        results_array[i - 1, 4] = results[3]
    return results_array

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με τις παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συνάρτηση του ln
def plot_results(ln_values, results_array):
    Bnew_values = results_array[:, 1]
    Bh_values = results_array[:, 2]
    Uc_values = results_array[:, 3]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(15, 10))

    # Προσθήκη καμπύλης για κάθε μεταβλητή (Bnew, Bh & Uc)
    plt.plot(ln_values, Bnew_values, label='Bnew, CP1Q (k=8)', marker='o')
    plt.plot(ln_values, Bh_values, label='Bh, CP1Q (k=8)', marker='x')
    plt.plot(ln_values, Uc_values, label='Uc, CP1Q (k=8)', marker='+')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('ln (ln) - Ρυθμός Νέων Κλήσεων')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
```

```
plt.title('CP1Q για: C=80, k=8, t=8, ln=1-70, lh=15, ms=mm=1/4, xm=xs=1')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
plt.xticks(np.arange(0, 73, 2))
plt.legend()

# Εμφάνιση του διαγράμματος
plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων (Bnew-Bh-Uc) και δημιουργία γραφικής
# παράστασης για μεταβλητό ln (Πυθμός άφιξης νέων κλήσεων)
ln_values = range(1, 71) # Εύρος των τιμών ln
results_array = run_for_different_ln(80, 8, 8, 70, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_results(ln_values, results_array)
```

Κώδικας 27 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $\lambda_n=1-70$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1Q με $C=80$, $k=8$ και $t=8$ (μόνο στην SP).

```
# 6 - Συνάρτηση που υπολογίζει τα Bnew, Bh & Uc για διαφορετικές τιμές του k (kDIF-Θέσεις)
def run_for_different_k(c, kDIF, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα k, Bnew, Bh & Uc
    results_array1 = np.zeros((kDIF, 4))
    i = 0
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές του kDIF από 1 έως 70 με βήμα 1
    for i in range(0, kDIF):
        kDIF = i
        # Κλήση της συνάρτησης με τις σωστές παραμέτρους (lh = calls)
        results1 = calculate_array(c, kDIF, t, ln, lh, ms, mm, xs, xm)
        # Προσθήκη εκτύπωσης για εμφάνιση του k (Queue)
        print("For k =", i, " & t =", t)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i, 0] = i
        results_array1[i, 1] = results1[0]
        results_array1[i, 2] = results1[1]
        results_array1[i, 3] = results1[2]
    return results_array1

#6A -Δημιουργία συνδυασμός γραφικών παραστάσεων με παραμέτρους Bnew, Bh, Uc συναρτήσει του k
def plot_combined_results1(kDIF_values, results_array111, results_array222):
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    # Προσθήκη των δύο γραφημάτων στον ίδιο άξονα
    plt.plot(kDIF_values, results_array111[:, 1], label='Bnew-CP1Q (t=8)', marker='o')
    plt.plot(kDIF_values, results_array222[:, 1], label='Bnew-CP1Q (t=16)', marker='o')
    plt.plot(kDIF_values, results_array111[:, 2], label='Bh-CP1Q (t=8)', marker='x')
    plt.plot(kDIF_values, results_array222[:, 2], label='Bh-CP1Q (t=16)', marker='x')
    plt.plot(kDIF_values, results_array111[:, 3], label='Uc-CP1Q (t=8)', marker='+')
    plt.plot(kDIF_values, results_array222[:, 3], label='Uc-CP1Q (t=16)', marker='+')

    # Ετικέτες και τίτλος
    plt.xlabel('k - Θέσεις στην ουρά αναμονής ')
    plt.ylabel('Bnew - Bh - Uc')
    plt.title('CP1Q για: C=80, k=0-70, t=8 & t=16, ln=20, lh=15, ms=mm= 1/4, xm=xs=1')
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0, 73, 2))
    handles, labels = plt.gca().get_legend_handles_labels()
    order = [0, 2, 4, 1, 3, 5] # Προσαρμογή της σειράς
    plt.legend([handles[idx] for idx in order], [labels[idx] for idx in order],
               bbox_to_anchor=(0.95, 0.3), fontsize='10', ncol=2)
    plt.grid(True)
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης
# για μεταβλητό μήκος ουράς αναμονής k (k=0-70) και για t=8 & t=16
kDIF_values = np.arange(0, 71, 1) # Εύρος των τιμών k
results_array2_t8 = run_for_different_k(80, 71, 8, 20, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
results_array2_t16 = run_for_different_k(80, 71, 16, 20, 15, 0.25, 0.25, 1, 1)
plot_combined_results1(kDIF_values, results_array2_t8, results_array2_t16)
```

Κώδικας 28 - Κλήση των συναρτήσεων για υπολογισμό των B_{new} , B_h και U_c , δημιουργία γραφικής παράστασης για $k=1-70$, $\lambda_n=20$, $\lambda_h=15$ για το μοντέλο CP1Q με $C=80$, $t=8$ & $t=16$ (μόνο στην SP).

```

from collections import deque
import numpy as np

# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
def create_array(C, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία ετικετών χρησιμοποιώντας BFS
    def create_labels(C):
        labels = []

        # Συνάρτηση για έλεγχο αν ο κόμβος είναι εντός ορίων 0<=nnew+nh<C
        def in_bounds(nnew, nh, C):
            return 0 <= nnew <= C and 0 <= nh <= C and (nnew + nh) <= C

        # Δημιουργία ουράς για BFS για i = 0
        queue = deque([(0, 0, 0)])
        visited = set()

        # Διάσχιση του δέντρου για i = 0
        while queue:
            i, nnew, nh = queue.popleft()
            if (i, nnew, nh) in visited:
                continue
            labels.append((i, nnew, nh))
            visited.add((i, nnew, nh))
            if in_bounds(nnew, nh + 1, C):
                queue.append((i, nnew, nh + 1))
            if in_bounds(nnew + 1, nh, C):
                queue.append((i, nnew + 1, nh))

        # Εκκίνηση νέας ουράς για BFS για i = 1
        queue = deque([(1, 0, 0)])
        visited = set()

        # Διάσχιση του δέντρου για i = 1
        while queue:
            i, nnew, nh = queue.popleft()
            if (i, nnew, nh) in visited:
                continue
            labels.append((i, nnew, nh))
            visited.add((i, nnew, nh))
            if in_bounds(nnew, nh + 1, C):
                queue.append((i, nnew, nh + 1))
            if in_bounds(nnew + 1, nh, C):
                queue.append((i, nnew + 1, nh))
        return labels

    # Δημιουργία ετικετών
    labels = create_labels(C)

    # Δημιουργία λεξικού για την αντιστοίχιση των ετικετών σε δείκτες
    label_to_index = {label: index for index, label in enumerate(labels)}

    # Υπολογισμός του μεγέθους του πίνακα
    n_labels = len(labels)

    # Δημιουργία του πίνακα
    A = np.zeros((n_labels, n_labels), dtype=float)
    half = n_labels // 2

    # Υλοποίηση των εξισώσεων για τη συμπλήρωση του πίνακα A
    for i in range(n_labels):
        label = labels[i]
        i_val, nnew, nh = label

        # Stop Phase - SP
        # Υπολογισμός διαγώνιου α (a)
        if i < half and nnew + nh < C:
            A[i][i] = round((-1 * ((Nnew-nnew)*vnew)+(Nh-nh)*vh)+(ms * (nnew+nh)) + xs), 2)
        if i < half and (nnew + nh) == C:
            A[i][i] = -1 * (ms * (nnew + nh)) + xs)

        # Υπολογισμός β και γ (b & g)
        if i < half and (nnew + nh) < C:
            A[i][i + nh + nnew + 2] = (ms * nnew) + 1
            A[i][i + nh + nnew + 1] = (ms * nh) + 1

```



```
# Υπολογισμός  $\Theta_m$  (xm)
if i + half < n_labels:
    A[i][i + half] = xm
# Υπολογισμός  $\varepsilon$  (e)
if i < half + 1 and nh != 0:
    A[i][i - nh - nnew] = (Nh - nh + 1) * vh
# Υπολογισμός  $\delta$  (d)
if i < half + 1 and nnew != 0:
    A[i][i - nh - nnew - 1] = (Nnew - nnew + 1) * vnew

# Moving Phase - MP
# Υπολογισμός διαγώνιου  $\alpha$  (a)
if i + half < n_labels and nnew + nh < C:
    A[i + half][i + half] = round((-1 * ((Nnew - nnew) * vnew) + (mm * (nnew + nh)) + xm), 2)
if i + half < n_labels and nnew + nh == C:
    A[i + half][i + half] = -1 * (mm * (nnew + nh)) + xm
# Υπολογισμός  $\theta_s$  (xs)
if i + half < n_labels:
    A[i + half][i] = xs
# Υπολογισμός  $\beta$  και  $\gamma$  (b & g)
if i + half < n_labels and (nh + nnew) < C:
    A[i + half][i + half + 2 + nh + nnew] = (mm * nnew) + 1
    A[i + half][i + half + 1 + nh + nnew] = (mm * nh) + 1
# Υπολογισμός  $\delta$  (d)
if i + half < n_labels + 1 and nnew != 0:
    A[i + half][i + half - nh - nnew - 1] = (Nnew - nnew + 1) * vnew

# Εκτύπωση του πίνακα A
print("\nΟ πίνακας A:")
print("-----")
# Εύρεση max πλάτους κάθε στήλης και εκτύπωση με στοίχιση στηλών
col_widths = []
for col in zip(*A):
    max_width = max(
        len(f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')) if isinstance(num, float) else
        len(f"{int(num)}") for num in col
    )
    col_widths.append(max_width)

# Εκτύπωση του πίνακα με στοίχιση στηλών
for row in A:
    formatted_row = []
    for i, num in enumerate(row):
        if isinstance(num, float):
            formatted_num = f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')
            formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
        else:
            formatted_row.append(f"{int(num):>{col_widths[i]}}")
    print(" ".join(formatted_row))

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")

# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("\nΟ πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
# Εύρεση max πλάτους κάθε στήλης και εκτύπωση με στοίχιση στηλών
col_widths = []
for col in zip(*A):
    max_width = max(
        len(f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')) if isinstance(num, float) else
        len(f"{int(num)}") for num in col
    )
    col_widths.append(max_width)

# Εκτύπωση του πίνακα με στοίχιση στηλών
for row in A:
    formatted_row = []
    for i, num in enumerate(row):
        if isinstance(num, float):
            formatted_num = f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')
            formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
```

```

        formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
    else:
        formatted_row.append(f"{int(num):>{col_widths[i]}}")
    print(" ".join(formatted_row))

# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(n_labels)
b[-1] = 1

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("\nΠιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for label, value in zip(labels, x):
    print(f"p{label} = {value:.10f}")

# Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, n_labels//2))
for i in range(half):
    R[0, i] = x[i]
    R[1, i] = x[half-1+i]

return A

print("n_labels: ", n_labels)

# Κλήση της συνάρτησης
A = create_array(C=4, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

```

Κώδικας 29 - Υλοποίηση πίνακα A και εύρεση πιθανοτήτων για το μοντέλο NP/CS (πεπερασμένο πλήθος πηγών, $N_{new} = N_h = 5$) με Python.

```

from collections import deque
import numpy as np

def create_array(C, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm):

# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
.....
Κώδικας 29
.....

# 3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS(Bnew, Bh, U & Uc)
print("\n\n3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)")
print("=====")

# Υπολογισμός της πιθανότητας συμφόρησης στο χρόνο και απόρριψης των νέων κλήσεων
# Bnew=Σ(i=0-1)Σ(nnew=0-c)p(I,nnew,C-nnew)
Bnew = 0
for I in range(2):
    for nnew in range(C + 1):
        Bnew += R[i][nnew][C - nnew]
    print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")

# Υπολογισμός της πιθανότητας συμφόρησης στο χρόνο & απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής
# Bh=Σ(nnew=0-C)p(0,nnew,C-nnew) / Σ(nnew+nh=0-C)p(0,nnew,nh)
Bh_arithmitis = 0
i=0
for nnew in range(C + 1):
    Bh_arithmitis += R[i][nnew][C - nnew]

# Αθροισμα των πιθανοτήτων Σ(nnew+nh=0-C)p(0,nnew,nh) στην SP (i=0) για όλες τις δυνατές καταστάσεις n
Bh_paronomastis = 0
for nnew in range(C + 1):
    for nh in range(C + 1):
        if nnew + nh <= C:
            Bh_paronomastis += R[0][nnew][nh]
Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis
print(f"Bh = {Bh:.15f}")

# Υπολογισμός του U, πλήθος κατειλημμένων BU
# U = Σ(i=0-1)Σ(nnew+nh=0-C)(nnew+nh)p(i,nnew,nh)
U = 0
for I in range(2):

```

```

        for nnew in range(C + 1):
            for nh in range(C + 1):
                if nnew + nh <= C:
                    U += (nnew+nh) * R[i][nnew][nh]
    print(f"U      = {U:.15f}")

    #Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος
    Uc = U / C
    print(f"Uc     = {Uc:.15f}")

# Κλήση της συνάρτησης
A = Create_array(C=4, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

```

Κώδικας 30 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_c) για το μοντέλο NP/CS για $C=4$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$).

```

# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει το Bnew(CBP) για διαφορετικές τιμές του vnew (0.1-1.0)
def run_for_different_vnew(C, Nnew, Nh, rate_vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα vnew & Bnew
    results_array = np.zeros((int(rate_vnew+2), 2))
    i = 1
    vnew_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της rate_vnew από 0.1 έως 1.0 με βήμα 0.1
    for inverse_value in vnew_values:
        results = create_array(C, Nnew, Nh, inverse_value, vh, ms, mm, xs, xm)
        print("For vnew =", inverse_value)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = inverse_value
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        print("i=", i, ", Nnew=", Nnew)
        print("results_array=", results_array)
        i = i + 1
    return results_array

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με παράμετρο Bnew συναρτήσει του vnew
def plot_results(vnew_values, results_array1, results_array2, results_array3,
                results_array4, results_array5, results_array6):
    Bnew_values1 = results_array1[:, 1]
    Bnew_values2 = results_array2[:, 1]
    Bnew_values3 = results_array3[:, 1]
    Bnew_values4 = results_array4[:, 1]
    Bnew_values5 = results_array5[:, 1]
    Bnew_values6 = results_array6[:, 1]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(16, 6))

    # Προσθήκη καμπύλης για την μεταβλητή Bnew
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values1, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=10', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values2, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=30', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values3, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=40', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values4, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=50', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values5, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=100', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values6, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=1000', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('vnew - Ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή')
    plt.ylabel('Bnew (CBP)')
    plt.title('NP/CS για: C=20, Nnew=10/30/40/50/100/1000(-1), Nh=10/30/40/50/100/1000, \n vnew=0.1-1.0, vh=0.5, ms=mm=xs=xm=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0.1, 1.1, 0.1))
    plt.legend(bbox_to_anchor=(0.275, 0.55), prop={'size': 9})

    # Εμφάνιση του διαγράμματος
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό vnew
vnew_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1) # Εύρος των τιμών vnew
results_array_10 = run_for_different_vnew(20, 10-1, 10, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_30 = run_for_different_vnew(20, 30-1, 30, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_40 = run_for_different_vnew(20, 40-1, 40, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_50 = run_for_different_vnew(20, 50-1, 50, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_100 = run_for_different_vnew(20, 100-1, 100, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)

```

```
results_array_1000 = run_for_different_vnew(20, 1000-1, 1000, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
plot_results(vnew_values, results_array_10, results_array_30, results_array_40,
results_array_50, results_array_100, results_array_1000)
```

Κώδικας 31 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_{new(CBP)}$, για μεταβλητό $v_{new}=0,1-1,0$. Μοντέλο NP/CS με $C=20$ και $N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

```
# 5 - Συνάρτηση που υπολογίζει το Bh(CBP) για διαφορετικές τιμές του ρυθμού vh (0.1-1.0)
def run_for_different_vh(C, Nnew, Nh, vnew, rate_vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα vh & Bh
    results_array1 = np.zeros((int(rate_vh+2), 2))
    i = 1
    vh_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της rate_vh από 0.1 έως 1.0 με βήμα 0.1
    for inverse_value in vh_values:
        results = create_array(C, Nnew, Nh, vnew, inverse_value, ms, mm, xs, xm)
        print("For vh =", inverse_value)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i - 1, 0] = inverse_value
        results_array1[i - 1, 1] = results[1]
        print("i=", i, ", Nh=", Nh)
        print("results_array1=", results_array1)
        i = i + 1
    return results_array1

# 5A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με παράμετρο Bh συναρτήσεως του vh
def plot_results1(vh_values, results_array1, results_array2, results_array3,
results_array4, results_array5, results_array6):
    Bh_values1 = results_array1[:, 1]
    Bh_values2 = results_array2[:, 1]
    Bh_values3 = results_array3[:, 1]
    Bh_values4 = results_array4[:, 1]
    Bh_values5 = results_array5[:, 1]
    Bh_values6 = results_array6[:, 1]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(16, 6))

    # Προσθήκη καμπύλης για την μεταβλητή Bnew
    plt.plot(vh_values, Bh_values1, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=10', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values2, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=30', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values3, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=40', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values4, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=50', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values5, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=100', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values6, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=1000', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('vh - Ρυθμός άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή')
    plt.ylabel('Bh (CBP)')
    plt.title('NP/CS για: C=20, Nnew=10/30/40/50/100/1000, Nh=10/30/40/50/100/1000(-1), \n vnew=0.5, vh=0.1-1.0, ms=mm=xs=xm=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0.1, 1.1, 0.1))
    plt.legend(bbox_to_anchor=(0.234, 0.918), prop={'size': 8})

    # Εμφάνιση του διαγράμματος
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων για εκτύπωση αποτελεσμάτων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό vh
vh_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1) # Εύρος των τιμών vh
results_array_10 = run_for_different_vh(20, 10, 10-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_30 = run_for_different_vh(20, 30, 30-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_40 = run_for_different_vh(20, 40, 40-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_50 = run_for_different_vh(20, 50, 50-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_100 = run_for_different_vh(20, 100, 100-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_1000 = run_for_different_vh(20, 1000, 1000-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
plot_results1(vh_values, results_array_10, results_array_30, results_array_40,
results_array_50, results_array_100, results_array_1000)
```

Κώδικας 32 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_h(CBP)$, για μεταβλητό $v_h=0,1-1,0$. Μοντέλο NP/CS με $C=20$ και $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.

```

from collections import deque
import numpy as np

# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
def create_array(C, t, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία ετικετών χρησιμοποιώντας BFS
    def create_labels(C):
        labels = []

        # Συνάρτηση για έλεγχο αν ο κόμβος είναι εντός ορίων 0<=nnew+nh<C
        def in_bounds(nnew, nh, C):
            return 0 <= nnew <= C and 0 <= nh <= C and (nnew + nh) <= C

        # Δημιουργία ουράς για BFS για i = 0
        queue = deque([(0, 0, 0)])
        visited = set()

        # Διάσχιση του δέντρου για i = 0
        while queue:
            i, nnew, nh = queue.popleft()
            if (i, nnew, nh) in visited:
                continue
            labels.append((i, nnew, nh))
            visited.add((i, nnew, nh))
            if in_bounds(nnew, nh + 1, C):
                queue.append((i, nnew, nh + 1))
            if in_bounds(nnew + 1, nh, C):
                queue.append((i, nnew + 1, nh))

        # Εκκίνηση νέας ουράς για BFS για i = 1
        queue = deque([(1, 0, 0)])
        visited = set()

        # Διάσχιση του δέντρου για i = 1
        while queue:
            i, nnew, nh = queue.popleft()
            if (i, nnew, nh) in visited:
                continue
            labels.append((i, nnew, nh))
            visited.add((i, nnew, nh))
            if in_bounds(nnew, nh + 1, C):
                queue.append((i, nnew, nh + 1))
            if in_bounds(nnew + 1, nh, C):
                queue.append((i, nnew + 1, nh))
        return labels

    # Δημιουργία ετικετών
    labels = create_labels(C)

    # Δημιουργία λεξικού για την αντιστοίχιση των ετικετών σε δείκτες
    label_to_index = {label: index for index, label in enumerate(labels)}

    # Υπολογισμός του μεγέθους του πίνακα
    n_labels = len(labels)

    # Δημιουργία του πίνακα
    A = np.zeros((n_labels, n_labels), dtype=float)
    half = n_labels // 2

    # Υλοποίηση των εξισώσεων για τη συμπλήρωση του πίνακα A
    for i in range(n_labels):
        label = labels[i]
        i_val, nnew, nh = label

        # Stop Phase - SP
        # Υπολογισμός διαγώνιου α (a)
        if i < half and nnew + nh <= C-t:
            A[i][i] = round((-1 * ((Nnew - nnew)*vnew) + ((Nh-nh)*vh) + (ms*(nnew+nh)) + xs), 2)
        if i < half and C-t <= nnew + nh < C:
            A[i][i] = round(-1 * ((Nh-nh)*vh) + (Nnew-nnew)*vnew*(1-ps) + (ms*(nnew+nh)) + xs), 2)
        if i < half and (nnew + nh) == C:
            A[i][i] = -1 * ((ms * (nnew + nh)) + xs)

        # Υπολογισμός β και γ (b & g)
        if i < half and (nnew+nh)<C:
            A[i][i+nh+nnew+2] = ms*(nnew+1)

```

```

        A[i][i+nh+nnew+1] = ms*(nh+1)
# Υπολογισμός Θm (xm)
if i + half < n_labels:
    A[i][i + half] = xm
# Υπολογισμός ε (e)
if i < half+1 and nh!=0:
    A[i][i-nh-nnew] = (Nh-nh+1)*vh
# Υπολογισμός δ (d)
if i < half and nnew == 0:
    A[i][i - nh - nnew - 1] = 0
else:
    if i < half + 1 and 0 < nnew+nh <= C-t:
        A[i][i - nh - nnew - 1] = (Nnew-nnew+1)*vnew
    if i < half + 1 and C-t < nnew + nh <= C:
        A[i][i - nh - nnew - 1] = (1-ps)*(Nnew-nnew+1)*vnew

# Moving Phase - MP
# Υπολογισμός Διαγώνιου α (a)
if i + half < n_labels and nnew + nh < C:
    A[i+half][i+half] = round((-1 * ((Nnew-nnew)*vnew) + (mm*(nnew+nh)) + xm), 2)
if i + half < n_labels and nnew + nh == C:
    A[i+half][i+half] = -1 * ((mm * (nnew + nh)) + xm)
# Υπολογισμός θs (xs)
if i + half < n_labels:
    A[i+ half][i] = xs
# Υπολογισμός β και γ (b & g)
if i+half < n_labels and (nh + nnew) < C:
    A[i+half][i+half+2 + nh + nnew] = mm*(nnew+1)
    A[i+half][i+half+1 + nh + nnew] = mm*(nh+1)
# Υπολογισμός δ (d)
if i+half < n_labels + 1 and nnew != 0:
    A[i+half][i+half - nh - nnew - 1] = (Nnew-nnew+1)*vnew

# Εκτύπωση του πίνακα A
print("\nΟ πίνακας A:")
print(
    "-----")
# Εύρεση max πλάτους κάθε στήλης και εκτύπωση με στοίχιση στηλών
col_widths = []
for col in zip(*A):
    max_width = max(
        len(f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')) if isinstance(num, float) else
        len(f"{int(num)}") for num in col)
    col_widths.append(max_width)

# Εκτύπωση του πίνακα με στοίχιση στηλών
for row in A:
    formatted_row = []
    for i, num in enumerate(row):
        if isinstance(num, float):
            formatted_num = f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')
            formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
        else:
            formatted_row.append(f"{int(num):>{col_widths[i]}}")
    print(" ".join(formatted_row))

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")

# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("\nΟ πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
# Εύρεση max πλάτους κάθε στήλης και εκτύπωση με στοίχιση στηλών
col_widths = []
for col in zip(*A):
    max_width = max(
        len(f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')) if isinstance(num, float) else
        len(f"{int(num)}") for num in col)
    col_widths.append(max_width)

```

```
# Εκτύπωση του πίνακα με στοίχιση στηλών
for row in A:
    formatted_row = []
    for i, num in enumerate(row):
        if isinstance(num, float):
            formatted_num = f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')
            formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
        else:
            formatted_row.append(f"{int(num):>{col_widths[i]}}")
    print(" ".join(formatted_row))

# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(n_labels)
b[-1] = 1

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("\nπιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for label, value in zip(labels, x):
    print(f"p{label} = {value:.10f}")

# Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, C + 1, C + 1))

for label, value in zip(labels, x):
    i, nnew, nh = label
    R[i][nnew][nh] = value
    #print(f"p{label} = {value:.10f}")

# Κλήση της συνάρτησης
A = create_array(C=4, t=2, ps=0, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
```

Κώδικας 33 - Υλοποίηση πίνακα A με Python, εύρεση πιθανοτήτων για το μοντέλο CP/BR για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new} = N_h = 5$, με χωρητικότητα $C=4$ και $t=2$ δεσμευμένες θέσεις.

```
from collections import deque
import numpy as np

# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
def create_array(C, t, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    .....
    Κώδικας 33
    .....

# 3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS(Bnew, Bh, U & Uc)
print("\n\n3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS (Bnew, Bh, U & Uc)")
print("-----")

# Υπολογισμός της πιθανότητας συμφόρησης στο χρόνο και απόρριψης των νέων κλήσεων
# Bnew=(1-ps)Σ(i=C-1_nnew+nh=C-t)p(i,nnew,nh)+Σ(i=0-1)Σ(nnew=0-C)p(i,nnew,C-nnew)
Bnew=Bnew1+Bnew2=0
for i in range(2):
    for nnew in range(C + 1):
        Bnew2 += R[i][nnew][C - nnew]
for i in range(1):
    for nnew in range(C+1):
        for nh in range(C+1):
            if nnew + nh < C+1 and C-t <= nnew + nh < C:
                Bnew1 += R[i][nnew][nh]
Bnew1= (1 - ps) * Bnew1
Bnew=Bnew1+Bnew2
print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")

# Υπολογισμός της πιθανότητας συμφόρησης στο χρόνο & απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής
# Bh=Σ(nnew=0-C)p(0,nnew,C-nnew) / Σ(nnew+nh=0-C)p(0,nnew,nh)
Bh_arithmitis = 0
i=0
for nnew in range(C + 1):
    Bh_arithmitis += R[i][nnew][C - nnew]

# Αθροισμα πιθανοτήτων Σ(nnew+nh=0-C)p(0,nnew,nh) στην SP (i=0) για όλες τις καταστάσεις
Bh_paronomastis = 0
```



```

for nnew in range(C + 1):
    for nh in range(C + 1):
        if nnew + nh <= C:
            Bh_paronomastis += R[0][nnew][nh]
Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis
print(f"Bh = {Bh:.15f}")

# Υπολογισμός του U, πλήθος κατειλημμένων BU
# U = Σ(i=0-1)Σ(nnew+nh=0-C) (nnew+nh)p(i,nnew,nh)
U = 0
for i in range(2):
    for nnew in range(C + 1):
        for nh in range(C + 1):
            if nnew + nh <= C:
                U += (nnew+nh) * R[i][nnew][nh]
print(f"U = {U:.15f}")

#Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος
Uc = U / C
print(f"Uc = {Uc:.15f}")

# Επιστροφή των αποτελεσμάτων ως λίστα
return [Bnew, Bh, Uc]

# Κλήση της συνάρτησης
A = create_array(C=4, t=2, ps=0, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

```

Κώδικας 34 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS (B_{new} , B_h , U και U_c) για το μοντέλο CP/BR για $C=4$, $t=2$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$).

```

# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει το Bnew(CBP) για διαφορετικές τιμές του ρυθμού vnew (0.1-1.0)
def run_for_different_vnew(C, t, ps, Nnew, Nh, rate_vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα vnew & Bnew
    results_array = np.zeros((int(rate_vnew+2), 2))
    i = 1
    vnew_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της rate_vnew από 0.1 έως 1.0 με βήμα 0.1
    for inverse_value in vnew_values:
        results = create_array(C, t, ps, Nnew, Nh, inverse_value, vh, ms, mm, xs, xm)
        print("For vnew =", inverse_value)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = inverse_value
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        print("i=", i, ", Nnew=", Nnew)
        print("results_array=", results_array)
        i = i + 1
    return results_array

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με παράμετρο Bnew συναρτήσει του vnew
def plot_results(vnew_values, results_array1, results_array2, results_array3,
                results_array4, results_array5, results_array6):
    Bnew_values1 = results_array1[:, 1]
    Bnew_values2 = results_array2[:, 1]
    Bnew_values3 = results_array3[:, 1]
    Bnew_values4 = results_array4[:, 1]
    Bnew_values5 = results_array5[:, 1]
    Bnew_values6 = results_array6[:, 1]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(16, 6))

    # Προσθήκη καμπύλης για την μεταβλητή Bnew
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values1, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=10', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values2, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=30', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values3, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=40', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values4, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=50', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values5, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=100', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values6, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=1000', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('vnew - Ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή')
    plt.ylabel('Bnew (CBP)')
    plt.title('CP/BR για: C=20, t=5, ps=0, Nnew=10/30/40/50/100/1000 (-1),
    Nh=10/30/40/50/100/1000, \n vnew=0.1-1.0, vh=0.5, ms=mm=xs=xm=1')
    plt.legend()

```

```
plt.grid(True)
plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
plt.xticks(np.arange(0.1, 1.1, 0.1))
plt.legend(bbox_to_anchor=(0.723, 0.35), prop={'size': 9})

# Εμφάνιση του διαγράμματος
plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό vnew (0.1-1.0)
vnew_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1) # Εύρος των τιμών vnew
results_array_10 = run_for_different_vnew(20, 5, 0, 10-1, 10, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_30 = run_for_different_vnew(20, 5, 0, 30-1, 30, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_40 = run_for_different_vnew(20, 5, 0, 40-1, 40, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_50 = run_for_different_vnew(20, 5, 0, 50-1, 50, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_100 = run_for_different_vnew(20, 5, 0, 100-1, 100, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_1000 = run_for_different_vnew(20, 5, 0, 1000-1, 1000, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
plot_results(vnew_values, results_array_10, results_array_30, results_array_40,
results_array_50, results_array_100, results_array_1000)
```

Κώδικας 35 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_{new}(CBP)$, για μεταβλητό $v_{new}=0,1-1,0$. Μοντέλο CP/BR με $C=20, t=5, p_s=0, N_{new}=10/30/40/50/100/1000(-1)$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

```
# 5 - Συνάρτηση που υπολογίζει το Bh(CBP) για διαφορετικές τιμές του ρυθμού vh (0.1-1.0)
def run_for_different_vh(C, t, ps, Nnew, Nh, vnew, rate_vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα vh & Bh
    results_array1 = np.zeros((int(rate_vh + 2), 2))
    i = 1
    vh_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της rate_vh από 0.1 έως 1.0 με βήμα 0.1
    for inverse_value in vh_values:
        results = create_array(C, t, ps, Nnew, Nh, vnew, inverse_value, ms, mm, xs, xm)
        print("For vh =", inverse_value)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i - 1, 0] = inverse_value
        results_array1[i - 1, 1] = results[1]
        print("i=", i, ", Nh=", Nh)
        print("results_array1=", results_array1)
        i = i + 1
    return results_array1

# 5A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με παράμετρο Bh συναρτήσεως του vh
def plot_results1(vh_values, results_array1, results_array2, results_array3,
results_array4, results_array5, results_array6):
    Bh_values1 = results_array1[:, 1]
    Bh_values2 = results_array2[:, 1]
    Bh_values3 = results_array3[:, 1]
    Bh_values4 = results_array4[:, 1]
    Bh_values5 = results_array5[:, 1]
    Bh_values6 = results_array6[:, 1]
    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(16, 6))
    # Προσθήκη καμπύλης για την μεταβλητή Bnew
    plt.plot(vh_values, Bh_values1, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=10', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values2, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=30', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values3, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=40', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values4, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=50', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values5, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=100', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values6, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=1000', marker='o')
    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('vh - Ρυθμός άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή')
    plt.ylabel('Bh (CBP)')
    plt.title('CP/BR για: C=20, t=5, ps=0, Nnew=10/30/40/50/100/1000, Nh=10/30/40/50/100/1000 (-1), \n vnew=0.5, vh=0.1-1.0, ms=mm=xs=xm=1')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
    plt.xticks(np.arange(0.1, 1.1, 0.1))
    plt.legend(bbox_to_anchor=(0.258, 0.46), prop={'size': 9})
    # Εμφάνιση του διαγράμματος
    plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό vh (0.1-1.0)
vh_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1) # Εύρος των τιμών vh
```

```
results_array_10 = run_for_different_vh(20, 5, 0, 10, 10-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_30 = run_for_different_vh(20, 5, 0, 30, 30-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_40 = run_for_different_vh(20, 5, 0, 40, 40-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_50 = run_for_different_vh(20, 5, 0, 50, 50-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_100 = run_for_different_vh(20, 5, 0, 100, 100-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_1000 = run_for_different_vh(20, 5, 0, 1000, 1000-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
plot_results1(vh_values, results_array_10, results_array_30, results_array_40,
results_array_50, results_array_100, results_array_1000)
```

Κώδικας 36 - Δημιουργία και κλήση των συναρτήσεων και γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_h(CBP)$, για μεταβλητό $v_h=0,1-1,0$. Μοντέλο CP/BR με $C=20$, $t=5$ και $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.

```
from collections import deque
import numpy as np

# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
def create_array(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία ετικετών χρησιμοποιώντας BFS
    Ck=C+k

    def create_labels(Ck):
        labels = []

        # Συνάρτηση για έλεγχο αν ο κόμβος είναι εντός ορίων 0<=nnew+nh<C
        def in_bounds(nnew, nh, C):
            return 0 <= nnew <= C and 0 <= nh <= C+k and (nnew + nh) <= C+k

        # Δημιουργία ουράς για BFS για i = 0
        queue = deque([(0, 0, 0)])
        visited = set()

        # Διάσχιση του δέντρου για i = 0
        while queue:
            i, nnew, nh = queue.popleft()
            if (i, nnew, nh) in visited:
                continue
            labels.append((i, nnew, nh))
            visited.add((i, nnew, nh))
            if in_bounds(nnew, nh + 1, C):
                queue.append((i, nnew, nh + 1))
            if in_bounds(nnew + 1, nh, C):
                queue.append((i, nnew + 1, nh))

        # Εκκίνηση νέας ουράς για BFS για i = 1
        queue = deque([(1, 0, 0)])
        visited = set()

        # Διάσχιση του δέντρου για i = 1
        while queue:
            i, nnew, nh = queue.popleft()
            if (i, nnew, nh) in visited:
                continue
            labels.append((i, nnew, nh))
            visited.add((i, nnew, nh))
            if in_bounds(nnew, nh + 1, C):
                queue.append((i, nnew, nh + 1))
            if in_bounds(nnew + 1, nh, C):
                queue.append((i, nnew + 1, nh))

        return labels

    # Δημιουργία ετικετών
    labels = create_labels(C)

    # Δημιουργία λεξικού για την αντιστοίχιση των ετικετών σε δείκτες
    label_to_index = {label: index for index, label in enumerate(labels)}

    # Υπολογισμός του μεγέθους του πίνακα
    n_labels = len(labels)

    # Δημιουργία του πίνακα
    A = np.zeros((n_labels, n_labels), dtype=float)
    half = n_labels // 2

    # Υλοποίηση των εξισώσεων για τη συμπλήρωση του πίνακα A
    for i in range(n_labels):
```

```

label = labels[i]
i_val, nnew, nh = label

# Stop Phase - SP
# Υπολογισμός διαγώνιου α (a)
if i < half and nnew + nh <= C-t:
    A[i][i] = round((-1*((Nnew - nnew) * vnew) + ((Nh - nh) * vh) + (ms * (nnew + nh))
+ xs)),2)
if i < half and C-t <= nnew + nh < C:
    A[i][i] = round(-1*((Nh - nh) * vh) + (Nnew - nnew) * vnew * ps + (ms * (nnew +
nh)) + xs),2)
if i < half and (nnew + nh) == C:
    A[i][i] = -1 * (((Nh - nh) * vh) + (ms * (nnew + nh)) + xs)
if i < half and C < (nnew + nh) <= C+k-1:
    A[i][i] = -1 * (((Nh - nh) * vh) + (ms * C) + xs)
if i < half and (nnew + nh) == C+k:
    A[i][i] = -1 * ((ms * C) + xs)
# Υπολογισμός του β (b)
if i < half and (nnew+nh) <= C and nnew < C:
    A[i][i+nh+nnew+2] = ms*(nnew+1)
if i + half and C+k > (nh + nnew) > C and nnew < C:
    if (i + 2 + nh + nnew) < n_labels+1:
        A[i][i + 1 + nh + nnew] = ms * (nnew + 1)
# Υπολογισμός του γ (g)
if i < half and (nnew + nh) < C and nnew < C:
    A[i][i+nh+nnew+1] = ms*(nh+1)
if i < half and (nnew + nh) == C and nnew < C:
    A[i][i+nh+nnew+1] = ms*nh
if i < half and C+k > (nnew + nh) > C and nnew < C:
    A[i][i+nh+nnew] = (nh-1)*ms
# Υπολογισμός του θm (xm)
if i + half < n_labels:
    A[i][i + half] = xm
# Υπολογισμός του ε (e)
if i < half+1 and nh!=0 and nnew+nh <= C:
    A[i][i-nh-nnew] = (Nh-nh+1)*vh
if i < half + 1 and nh != 0 and C+k >= (nnew+nh) > C:
    A[i][i - C - 1] = (Nh - nh + 1) * vh
# Υπολογισμός του δ (d)
if i < half and nnew == 0:
    A[i][i - nh - nnew - 1] = 0
else:
    if i < half + 1 and 0 < nnew+nh <= C-t:
        A[i][i - nh - nnew - 1] = (Nnew-nnew+1)*vnew
    if i < half + 1 and C-t < nnew + nh <= C:
        A[i][i - nh - nnew - 1] = ps*(Nnew-nnew+1)*vnew

# Moving Phase - MP
# Υπολογισμός διαγώνιου α (a)
if i + half < n_labels and nnew + nh < C:
    A[i+half][i+half] = round((-1 * (((Nnew - nnew) * vnew) + (mm*(nnew+nh)) + xm)),2)
if i + half < n_labels and C <= (nnew + nh) <= C+k:
    A[i+half][i+half] = -1 * ((mm * C) + xm)
# Υπολογισμός του θs (xs)
if i + half < n_labels:
    A[i+half][i] = xs
# Υπολογισμός του β (b)
if i+half < n_labels-1 and (nh + nnew) <= C and nnew < C:
    A[i+half][i+half+2 + nh + nnew] = mm*(nnew+1)
if i + half < n_labels and (nh + nnew) > C and nnew < C:
    if (i + half + 2 + nh + nnew) < n_labels+1:
        A[i + half][i + half + 1 + nh + nnew] = mm * (nnew + 1)
# Υπολογισμός του γ (g)
if i + half < n_labels and (nh + nnew) < C and nnew < C:
    A[i+half][i+half+1 + nh + nnew] = mm*(nh+1)
if i + half < n_labels and (nh + nnew) == C and nnew < C:
    A[i + half][i + half + 1 + nh + nnew] = mm * nh
if i + half < n_labels and (nnew + nh) > C and nnew < C:
    if (i + half + 2 + nh + nnew) < n_labels + 1:
        A[i+half][i+half+nh+nnew] = (nh-1)*mm
# Υπολογισμός του δ (d)
if i+half < n_labels + 1 and nnew > 0 and (nnew+nh) <= C:
    A[i+half][i+half - nh - nnew - 1] = (Nnew-nnew+1)*vnew

#Εκτύπωση του πίνακα A

```

```

print("\nΟ πίνακας A:")
print("-----")
#Εύρεση max πλάτους κάθε στήλης και εκτύπωση με στοίχιση στηλών
col_widths = []
for col in zip(*A):
    max_width = max(
        len(f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')) if isinstance(num, float) else
len(f"{int(num)}") for num in col)
    col_widths.append(max_width)
for row in A:
    formatted_row = []
    for i, num in enumerate(row):
        if isinstance(num, float):
            formatted_num = f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')
            formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
        else:
            formatted_row.append(f"{int(num):>{col_widths[i]}}")
    print(" ".join(formatted_row))

# 2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις
print("\n")
print("2 - Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων και Εκτυπώσεις")
print("=====")

# Αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής με [1] σε όλα τα στοιχεία
A[-1] = [1] * len(A[-1])

# Εκτύπωση του πίνακα μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής
print("\nΟ πίνακας A μετά την αντικατάσταση της τελευταίας γραμμής:")
print("-----")
# Εύρεση max πλάτους κάθε στήλης και εκτύπωση με στοίχιση στηλών
col_widths = []
for col in zip(*A):
    max_width = max(
        len(f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')) if isinstance(num, float) else
len(f"{int(num)}") for num in col)
    col_widths.append(max_width)

# Εκτύπωση του πίνακα με στοίχιση στηλών
for row in A:
    formatted_row = []
    for i, num in enumerate(row):
        if isinstance(num, float):
            formatted_num = f"{num:.2f}".rstrip('0').rstrip('.')
            formatted_row.append(f"{formatted_num:>{col_widths[i]}}")
        else:
            formatted_row.append(f"{int(num):>{col_widths[i]}}")
    print(" ".join(formatted_row))

# Δημιουργία του πίνακα-διάνυσμα b
b = np.zeros(n_labels)
b[-1] = 1

# Υπολογισμός των λύσεων
x = np.linalg.solve(A, b)

print("\nΠιθανότητες-Αποτελέσματα:")
print("-----")
for label, value in zip(labels, x):
    print(f"p({label}) = {value:.10f}")

# Αποθήκευση των πιθανοτήτων σε έναν 2-δισδιάστατο πίνακα
R = np.zeros((2, C + k + 1, C + k + 1))

for label, value in zip(labels, x):
    i, nnew, nh = label
    R[i][nnew][nh] = value
return A

# Κλήση της συνάρτησης
create_array(C=4, t=2, k=1, ps=0, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)

```

Κώδικας 37 - Υλοποίηση πίνακα A με Python, εύρεση πιθανοτήτων για το μοντέλο CPQ με πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new} = N_h = 5$, χωρητικότητα $C=4$, $t=2$ δεσμευμένες θέσεις και $k=1$ θέση στην ουρά.

```

from collections import deque
import numpy as np

# 1 - Δημιουργία του πίνακα A
def create_array(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    -----
    Κώδικας 37
    -----

# 3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew, Bh, U(U1 & U2), Uc, L, λα(λα1-λα4), W]
print("\n\n3 - Υπολογισμός των μεγεθών QoS [Bnew,Bh,U(U1 & U2),Uc,L,λα(λα1-λα4), W]")
print("=====")
# Υπολογισμός της πιθανότητας συμφόρησης στο χρόνο και απόρριψης των νέων κλήσεων
# Bnew=(1-ps)Σ(i=C-1_nnew+nh=C-t)p(i,nnew,nh)+Σ(i=0-1)Σ(nnew+nh=C-C+k)p(i,nnew,nh)
Bnew=Bnew1=Bnew2=0
for i in range(1):
    for nnew in range(C+1):
        for nh in range(C + k + 1):
            if C - t <= (nnew + nh) <= C-1:
                Bnew1 += R[i][nnew][nh]
for i in range(2):
    for nnew in range(C+1):
        for nh in range(C+k+1):
            if nnew + nh >= C:
                Bnew2 += R[i][nnew][nh]
Bnew1= (1-ps)*Bnew1
Bnew=Bnew1+Bnew2
print(f"Bnew = {Bnew:.15f}")

# Υπολογισμός της πιθανότητας συμφόρησης στο χρόνο & απόρριψης των κλήσεων μεταπομπής
# Bh=Σ(nnew+nh=C+k)p(0,nnew,nh) / Σ(nnew+nh=0-C+k)p(0,nnew,nh)
Bh_arithmitis = 0
i=0
for nnew in range(C + 1):
    for nh in range(C + k + 1):
        if (nnew + nh) == (C + k):
            Bh_arithmitis += R[i][nnew][nh]
# Αθροισμα των πιθανοτήτων Σ(nnew+nh=0-C+k)p(0,nnew,nh) στην SP (i=0)
Bh_paronomastis = 0
for nnew in range(C + 1):
    for nh in range(C + k + 1):
        if nnew + nh <= C + k:
            Bh_paronomastis += R[0][nnew][nh]
Bh = Bh_arithmitis / Bh_paronomastis
print(f"Bh = {Bh:.15f}")

# Υπολογισμός του U (U=U1+U2), πλήθος κατειλημμένων BU
U = U1 = U2 = 0
# U1 = Σ(i=0-1)Σ(nnew+nh=0-C) (nnew+nh)p(i,nnew,nh)
for i in range(2):
    for nnew in range(C + 1):
        for nh in range(C + k + 1):
            if nnew + nh <= C:
                U1 += (nnew+nh) * R[i][nnew][nh]
# U2 = Σ(i=0-1)Σ C*p(i,nnew,nh)
for i in range(2):
    for nnew in range(C + 1):
        for nh in range(C + k + 1):
            if nnew + nh > C:
                U2 += C * R[i][nnew][nh]
U = U1 + U2
print(f"U1 = {U1:.15f}")
print(f"U2 = {U2:.15f}")
print(f"U = {U:.15f}")

#Υπολογισμός Uc της αξιοποίησης της χωρητικότητας του συστήματος
Uc = U / C
print(f"Uc = {Uc:.15f}")

# Υπολογισμός L, το αναμενόμενο πλήθος κλήσεων μεταπομπής που βρίσκεται στην ουρά
# L=Σ(i=0-1)Σ(nnew+nh=C+1...C+k) (nnew+nh-C)P(i,nnew,nh)
L = 0
for i in range(2):
    for nnew in range(C + k + 1):
        for nh in range(C + k + 1):
            if nnew + nh > C and nnew + nh < C + k + 1:
                L += (nnew + nh - C) * R[i, nnew, nh]
print(f"L = {L:.15f}")

```

```
# Υπολογισμός λα (la), ο ενεργός ρυθμός άφιξης των συνολικών κλήσεων
# λα = λα1 + λα2 + λα3 + λα4
la = la1 = la2 = la3 = la4 = 0
for nnew in range(C + k + 1):
    for nh in range(C + k + 1):
        # λα1 = Σ(n=0...C-t) ((Nnew-nnew)*vnew+(Nh-nh)*vh)*P(0,nnew,nh)
        if 0 <= nnew + nh < C-t:
            la1 += ((Nnew-nnew)*vnew + (Nh-nh)*vh)*R[0, nnew, nh]
        # λα2 = Σ(n=C-t...C-1) (ps*(Nnew-nnew)*vnew+(Nh-nh)*vh)*P(0,nnew,nh)
        if C-t <= nnew + nh < C:
            la2 += (ps*(Nnew-nnew)*vnew + (Nh-nh)*vh)*R[0, nnew, nh]
        # λα3 = Σ(n=C...C+k) ((Nh-nh)*vh)*P(0,nnew,nh)
        if C <= nnew + nh <= C+k-1:
            la3 += ((Nh-nh)*vh)*R[0, nnew, nh]
        # λα4 = Σ(n=0...c-1) (Nnew-nnew)*vnew)*P(1,nnew,nh)
        if 0 <= nnew + nh < C:
            la4 += ((Nnew-nnew)*vnew)*R[1, nnew, nh]
    la = la1 + la2 + la3 + la4
    print(f"λα1 = {la1:.15F}")
    print(f"λα2 = {la2:.15F}")
    print(f"λα3 = {la3:.15F}")
    print(f"λα4 = {la4:.15F}")
    print(f"λα = {la:.15F}")

# Υπολογισμός W, ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην ουρά
W = L / la
print(f"W = {W:.15F}")

# Κλήση της συνάρτησης
create_array(C=4, t=2, k=1, ps=0, Nnew=5, Nh=5, vnew=1, vh=1, ms=1, mm=1, xs=1, xm=1)
```

Κώδικας 38 - Επίλυση συστήματος, υπολογισμός πιθανοτήτων και υπολογισμός των μεγεθών του QoS [B_{new} , B_h , $U(U_1, U_2)$, U_C , N , $\lambda_a(\lambda_{a1}-\lambda_{a4})$ και W] για το μοντέλο CPQ για $C=4$, $t=2$, ουρά αναμονής $k=1$ και πεπερασμένο πλήθος πηγών ($N_{new}=N_h=5$).

```
# 4 - Συνάρτηση που υπολογίζει το Bnew(CBP) για διαφορετικές τιμές του ρυθμού vnew (0.1-1.0)
def run_for_different_vnew(C, t, k, ps, Nnew, Nh, rate_vnew, vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα vnew & Bnew
    results_array = np.zeros((int(rate_vnew*2), 2))
    i = 1
    vnew_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της rate_vnew από 0.1 έως 1.0 με βήμα 0.1
    for inverse_value in vnew_values:
        results = create_array(C, t, k, ps, Nnew, Nh, inverse_value, vh, ms, mm, xs, xm)
        print("For vnew =", inverse_value)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array[i - 1, 0] = inverse_value
        results_array[i - 1, 1] = results[0]
        print("i=", i, ", Nnew=", Nnew)
        print("results_array=", results_array)
        i = i + 1
    return results_array

# 4A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με παράμετρο Bnew συναρτήσει του vnew
def plot_results(vnew_values, results_array1, results_array2, results_array3,
                results_array4, results_array5, results_array6):
    Bnew_values1 = results_array1[:, 1]
    Bnew_values2 = results_array2[:, 1]
    Bnew_values3 = results_array3[:, 1]
    Bnew_values4 = results_array4[:, 1]
    Bnew_values5 = results_array5[:, 1]
    Bnew_values6 = results_array6[:, 1]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(16, 6))

    # Προσθήκη καμπύλης για την μεταβλητή Bnew
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values1, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=10', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values2, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=30', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values3, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=40', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values4, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=50', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values5, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=100', marker='o')
    plt.plot(vnew_values, Bnew_values6, label='Bnew(CBP) Nnew=Nh=1000', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
```



```
plt.xlabel('vnew - Ρυθμός άφιξης νέων κλήσεων ανά ελεύθερη πηγή')
plt.ylabel('Bnew (CBP)')
plt.title('CPQ για: C=20, t=5, k=2, ps=0, Nnew=10/30/40/50/100/1000(-1),
Nh=10/30/40/50/100/1000, \n vnew=0.1-1.0, vh=0.5, ms=mm=xs=xm=1')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
plt.xticks(np.arange(0.1, 1.1, 0.1))
plt.legend(bbox_to_anchor=(0.724, 0.33), prop={'size': 9})

# Εμφάνιση του διαγράμματος
plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό vnew (0.1-1.0)
vnew_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1) # Εύρος των τιμών vnew
results_array_10 = run_for_different_vnew(20, 5, 2, 0, 10-1, 10, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_30 = run_for_different_vnew(20, 5, 2, 0, 30-1, 30, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_40 = run_for_different_vnew(20, 5, 2, 0, 40-1, 40, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_50 = run_for_different_vnew(20, 5, 2, 0, 50-1, 50, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_100 = run_for_different_vnew(20, 5, 2, 0, 100-1, 100, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
results_array_1000 = run_for_different_vnew(20, 5, 2, 0, 1000-1, 1000, 8, 0.5, 1, 1, 1, 1)
plot_results(vnew_values, results_array_10, results_array_30, results_array_40,
results_array_50, results_array_100, results_array_1000)
```

Κώδικας 39 - Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_{new(CBP)}$, για μεταβλητό $v_{new}=0,1-1,0$. Μοντέλο CPQ με $C=20, t=5, k=2, p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$ (-1) και $N_h=10/30/40/50/100/1000$.

```
# 5 - Συνάρτηση που υπολογίζει το Bh(CBP) για διαφορετικές τιμές του ρυθμού vh (0.1-1.0)
def run_for_different_vh(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, rate_vh, ms, mm, xs, xm):
    # Δημιουργία του πίνακα που θα αποθηκευτούν τα vh & Bh
    results_array1 = np.zeros((int(rate_vh + 2), 2))
    i = 1
    vh_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1)
    # Επαναληπτική κλήση της συνάρτησης για τιμές της rate_vh από 0.1 έως 1.0 με βήμα 0.1
    for inverse_value in vh_values:
        results = create_array(C, t, k, ps, Nnew, Nh, vnew, inverse_value, ms, mm, xs, xm)
        print("For vh =", inverse_value)
        # Αποθήκευση των αποτελεσμάτων στον πίνακα
        results_array1[i - 1, 0] = inverse_value
        results_array1[i - 1, 1] = results[1]
        print("i=", i, ", Nh=", Nh)
        print("results_array1=", results_array1)
        i = i + 1
    return results_array1

# 5A - Δημιουργία γραφικής παράστασης με παράμετρο Bh συναρτήσει του vh
def plot_results1(vh_values, results_array1, results_array2, results_array3,
results_array4, results_array5, results_array6):
    Bh_values1 = results_array1[:, 1]
    Bh_values2 = results_array2[:, 1]
    Bh_values3 = results_array3[:, 1]
    Bh_values4 = results_array4[:, 1]
    Bh_values5 = results_array5[:, 1]
    Bh_values6 = results_array6[:, 1]

    # Δημιουργία διαγράμματος
    plt.figure(figsize=(16, 6))

    # Προσθήκη καμπύλης για την μεταβλητή Bnew
    plt.plot(vh_values, Bh_values1, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=10', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values2, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=30', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values3, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=40', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values4, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=50', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values5, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=100', marker='o')
    plt.plot(vh_values, Bh_values6, label='Bh(CBP) Nnew=Nh=1000', marker='o')

    # Ορισμός ετικετών και τίτλου
    plt.xlabel('vh - Ρυθμός άφιξης κλήσεων μεταπομπής ανά ελεύθερη πηγή')
    plt.ylabel('Bh (CBP)')
    plt.title('CPQ για: C=20, t=5, k=2, ps=0, Nnew=10/30/40/50/100/1000,
Nh=10/30/40/50/100/1000(-1), \n vnew=0.5, vh=0.1-1.0, ms=mm=xs=xm=1')
```

```
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.yticks(np.arange(0.0, 1.1, 0.05))
plt.xticks(np.arange(0.1, 1.1, 0.1))
plt.legend(bbox_to_anchor=(0.258, 0.46), prop={'size': 9})

# Εμφάνιση του διαγράμματος
plt.show()

# Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για μεταβλητό  $v_h(0.1-1.0)$ 
vh_values = np.arange(0.1, 1.1, 0.1) # Εύρος των τιμών  $v_h$ 
results_array_10 = run_for_different_vh(20, 5, 2, 0, 10, 10-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_30 = run_for_different_vh(20, 5, 2, 0, 30, 30-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_40 = run_for_different_vh(20, 5, 2, 0, 40, 40-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_50 = run_for_different_vh(20, 5, 2, 0, 50, 50-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_100 = run_for_different_vh(20, 5, 2, 0, 100, 100-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
results_array_1000 = run_for_different_vh(20, 5, 2, 0, 1000, 1000-1, 0.5, 8, 1, 1, 1, 1)
plot_results1(vh_values, results_array_10, results_array_30, results_array_40,
results_array_50, results_array_100, results_array_1000)
```

Κώδικας 40 - Κλήση των συναρτήσεων και δημιουργία γραφικής παράστασης για υπολογισμό του $B_h(CBP)$, για μεταβλητό $v_h=0,1-1,0$. Μοντέλο CPQ με $C=20, t=5, k=2, p_s=0$ για πεπερασμένο πλήθος πηγών $N_{new}=10/30/40/50/100/1000$ και $N_h=10/30/40/50/100/1000(-1)$.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.