ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
Μετασχηματισμοί - παράδοξα

Όνομα φοιτητή
Κωνσταντίνος Π. Μπρακόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: Αλέξανδρος Κεχαγιάς

ΠΑΤΡΑ
ΜΑΙΟΣ 2023

…στη σύζυγο μου Κωνσταντίνα

για την ανεξάντλητη στήριξη

και στα παιδιά μου Δήμητρα και Παναγιώτη

για τις επίμονες καθυστερήσεις…

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά και κ. Αντώνιο Λέισο για τις προτάσεις τους σε συγκεκριμένα ζητήματα που αφορούν την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας καθώς επίσης και για τη στήριξή τους κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η εργασία αυτή αφορά την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (Ε.Θ.Σ), έργο που αποδίδεται κατά γενική ομολογία στον Albert Einstein (1879-1955). Θα γίνει μια προσπάθεια να αναδειχθούν όλες εκείνες οι εντυπωσιακές με επαναστατικό τρόπο ιδέες της, να παρουσιαστούν βασικές αρχές και αξιώματα και να θεμελιωθούν μαθηματικά οι αλλαγές που έρχονται στην επιφάνεια ως ανάγκη για τη διατύπωση μιας πιο γενικής φυσικής στην οποία η φυσική του Νεύτωνα (1643-1727) είναι απλώς μια ειδική περίπτωση[1]. Θα δούμε επίσης ότι οι μετασχηματισμοί στους επιμέρους κλάδους της Φυσικής (μηχανική, ηλεκτρομαγνητισμός, κυματική, θερμοδυναμική κ.ά.) οδηγήσαν ακόμα και σε αντιφατικές έννοιες οι οποίες με την σειρά τους διατηρήθηκαν τα επόμενα χρόνια δημιουργώντας διαμάχες που κλόνισαν την επιστημονική κοινότητα στις αρχές του 20ου αιώνα συντηρώντας μέχρι και σήμερα κάποιες από αυτές.

Λέξεις – κλειδιά

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, Μετασχηματισμοί Lorentz, Σχετικιστική Θερμοδυναμική, Μετασχηματισμός Θερμοκρασίας, Επιστημονικές Διαμάχες, Παράδοξα, χωροχρόνος Minkowski.

[1] Σας βεβαιώνω ότι δεν είναι στις προθέσεις μου να υποβαθμίσω ή και να απαξιώσω το έργο του μεγάλου επιστήμονα του 17ου αιώνα μιας προσωπικότητας πολυτάλαντης και χαρισματικής που έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης φυσικής.

Abstract

This thesis concerns the Special Theory of Relativity (STH), a work generally attributed to Albert Einstein (1879-1955). An attempt will be made to highlight all those impressive and revolutionary ideas, to present basic principles and axioms and to mathematically establish the changes that come to the surface as a necessity for the formulation of a more general physics in which Newton's physics (1643- 1727) is just a special case. We will also see that the transformations in the individual branches of Physics (mechanics, electromagnetism, waves, thermodynamics, etc.) even led to contradictory concepts which in turn were maintained in the following years, creating controversies that shook the scientific community at the beginning of 20th century maintaining some of them to this day.

Keywords

Special Theory of Relativity, Lorentz Transformations, Relativistic Thermodynamics, Transformation of Temperature, Scientific Controversies, Paradoxes, Minkowski spacetime.

Εισαγωγή

Η Ε.Θ.Σ με ηλικία πέραν των εκατό ετών είναι μια θεωρία που έχει απασχολήσει αμέτρητο πλήθος ανθρώπων σε όλο τον κόσμο, από τον πιο απλό ερασιτέχνη φίλο των φυσικών επιστημών μέχρι και τον πιο αφοσιωμένο άρτια καταρτισμένο ερευνητή που έχει αφιερώσει τη ζωή του στο να την αναλύει, να την προβάλλει και να την συσχετίζει με άλλες θεωρίες των φυσικών επιστημών. Μέσα από τις σελίδες αυτής της εργασίας φιλοδοξώ να κάνω ένα ταξίδι στο παρελθόν, περίπου στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και σαν απλός παρατηρητής να αναζητήσω τις συνθήκες που αφορούν το θεωρητικό και λιγότερο το πειραματικό υπόβαθρο[2] που είχαν στη διάθεσή τους οι Φυσικοί της εποχής και που μέσα από αυτό συνέβαλλαν όλοι λίγο ή πολύ στο να καλλιεργηθούν οι ιδέες που έμελλαν να αλλάξουν τελικά την αντίληψή μας για το χρόνο, το χώρο και την ενέργεια. Θα γίνουν γνωστές όλες εκείνες οι θεμελιωμένα μαθηματικά προτάσεις, θα διερευνηθούν και θα σχολιαστούν ως προς την αρτιότητά τους.

Κατά το μεγαλύτερο μέρος της, αυτή η εργασία θα αφορά μετασχηματισμούς· από τους μετασχηματισμούς όμως προκύπτουν και αναλλοίωτες ποσότητες και μεγέθη· θα τα αναζητήσουμε. Επιπλέον η Ε.Θ.Σ αναδεικνύει παράδοξα που οδηγούν σε άβολες καταστάσεις, συγχωνεύει το χρόνο με το χώρο σε μια ιδέα που απαιτεί καλύτερη αναπαράσταση με το γνωστό χωροχρόνο Minkowski και τελικά αλλάζει -με την έννοια διορθώνει- ολόκληρη τη φυσική στη περιοχή των υψηλών ταχυτήτων και ενεργειών. Θα γίνουν λοιπόν αναφορές και σε αυτά.

Στο ***κεφάλαιο 1*** διατυπώνονται τα αξιώματα της Ε.Θ.Σ, παρουσιάζονται τα πειράματα των Mickelson-Morley και παράλληλα γίνεται μια σύντομη ιστορική ανασκόπιση στις συνθήκες που επικρατούσαν τότε και που φανέρωναν τις ενδείξεις για την ιδέα της Ε.Θ.Σ.

Το ***κεφάλαιο 2*** είναι αφιερωμένο στους μετασχηματισμούς Lorentz. Παρουσιάζεται αναλυτικά όλο το παρασκήνιο της αναζήτησης αρχικά εκείνων των εξισώσεων που διατηρούν αναλλοίωτη την κυματική εξίσωση ξεκινώντας από τον Voight και καταλήγοντας στο Lorentz. Οι εργασίες του Lorentz μελετώνται διεξοδικά.

Στο ***κεφάλαιο 3*** γίνεται αναφορά στην εργασία του Einstein (1905) κυρίως όσον αφορά τους συλλογισμούς που τον οδήγησαν στην εξαγωγή των μετασχηματισμών Lorentz.

Στο ***κεφάλαιο 4*** αποδεικνύονται εκ νέου οι μετασχηματισμοί Lorentz βασιζόμενοι στην ιδιότητα της γραμμικότητας με την οποία πρέπει να είναι εφοδιασμένοι. Εισάγονται εξισώσεις με παραμέτρους οι οποίες προσδιορίζονται.

---

[2] Δεν θα γίνουν αναλυτικές περιγραφές των πειραματικών διατάξεων, θα γίνουν όμως αναφορές σε πειράματα που επιβεβαίωσαν ή διέψευσαν κάποιες θεωρητικές θέσεις.

Στα ***κεφάλαια 5, 6*** και ***7*** αναπτύσσεται η έννοια της αναλλοιώτητας. Αποδεικνύεται το αναλλοίωτο στις εξισώσεις Maxwell, στην κυματική εξίσωση, καθώς και σε άλλες ποσότητες που συναντούμε στη σχετικιστική Φυσική.

Το ***κεφάλαιο 8*** πραγματεύεται το γνωστό κλασικό φαινόμενο Doppler και στη συνέχεια το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler.

Το ***κεφάλαιο 9*** αφορά τη σχετικιστική θερμοδυναμική. Αποτελείται από αρκετές υποενότητες καθώς γίνεται μια αναλυτική έκθεση των σημαντικότερων ερευνητών που ασχολήθηκαν με το αν και πως μετασχηματίζονται οι νόμοι και τα μεγέθη της θερμοδυναμικής. Κατά τη διάρκεια αυτής της αναδρομής θα διαπιστωθούν διαφωνίες και αμφισβητήσεις με κύριο άξονα τη θερμοκρασία που τελικά θα οδηγήσουν σε διαμάχες που διατηρούνται μέχρι και σήμερα.

Στο ***κεφάλαιο 10*** γίνεται μια επιπλέον αναφορά στην έννοια της θερμοκρασίας και στο πως αυτή είναι θεμελιωμένη ως μέγεθος.

Στο ***κεφάλαιο 11*** θα γίνει μια γνωριμία με το χωροχρόνο Minkowski. Παρουσιάζονται τα γνωστά διαγράμματα Minkowski σε ακίνητα και κινούμενα συστήματα αναφοράς και εξετάζονται μερικές περιπτώσεις κίνησης.

Στο ***κεφάλαιο 12*** σχολιάζονται τα παράδοξα που αναδύονται από την Ε.Θ.Σ ως συνέπεια των μετασχηματισμών Lorentz. Προβάλλονται παραδείγματα για τη διαστολή του χρόνου και τη συστολή του μήκους.

Τέλος στο ***κεφάλαιο 13*** εκθέτονται κάποια φιλοσοφικά ζητήματα γενικού ενδιαφέροντος που αναπόφευκτα η Ε.Θ.Σ θέτει υπό συζήτηση ως μια θεωρία έντονα επαναστατικού χαρακτήρα.

Όλη η εργασία περιλαμβάνει πληθώρα αναφορών και παραπομπών είτε μέσα στο κείμενο, είτε σε παραρτήματα στο τέλος.

Καλή ανάγνωση

Πρόλογος

Την γνωριμία μου με τον κόσμο των φυσικών επιστημών την οφείλω στον αείμνηστο πατέρα μου. Ήταν ένας άνθρωπος χωρίς πανεπιστημιακή μόρφωση, αλλά με τεράστιο πλούτο εγκυκλοπαιδικών γνώσεων και ιδιαίτερη προτίμηση τις φυσικές επιστήμες.

Η πρώτη μου επαφή με την Ε.Θ.Σ ήταν στα μαθητικά-γυμνασιακά μου χρόνια όταν συνειδητοποίησα την ταύτιση της λέξης «ευφυΐα» με το όνομα «Αϊνστάιν». Τότε ήταν που άρχισα να επεξεργάζομαι τις απλές εξισώσεις για την συστολή του μήκους και την διαστολή του χρόνου και να ονειρεύομαι ταξίδια στο μέλλον. Έχω την πεποίθηση ότι για να κατανοήσει κάποιος την Ε.Θ.Σ σε ικανοποιητικό βαθμό, είτε είναι φοιτητής είτε ένας απλός αναγνώστης, θα πρέπει να έχει αρχικά διάθεση να δει τον κόσμο λίγο διαφορετικά από ότι τον βιώνει. Η μεγάλη αντίδραση στο παρελθόν για την αποδοχή της οφειλόταν κυρίως στην άρνηση των αισθήσεων μας να δούμε και να εμπιστευτούμε κάτι άλλο πέρα από αυτό που μας επιβάλλουν αυτές. Αν και στην καθημερινότητά μας δεν είναι απαραίτητο να σκεφτόμαστε και να λειτουργούμε –αυτό που λέμε «σχετικιστικά»-, εντούτοις όταν η Ε.Θ.Σ εδραιώθηκε, αυτό κλόνισε τον κόσμο μας, οδήγησε δηλαδή στη σύγκρουση δύο διαφορετικών κόσμων.

Μια επιπόλαιη επαφή με την Ε.Θ.Σ οδηγεί στο γρήγορο συμπέρασμα μιας μάλλον παράλογης θεωρίας που αγγίζει τα όρια της επιστημονικής φαντασίας. Όλοι γνωρίζουμε Χολιγουντιανές και μη παραγωγές οι οποίες εκμεταλλεύονται συγκεκριμένα κομμάτια της Ε.Θ.Σ, τα παρερμηνεύουν, δημιουργούν συγχύσεις με αποτέλεσμα πολλές φορές να αιωρούνται μικρές ασάφειες και υπόνοιες για την ισχύ της θεωρίας ή για το τι υπόσχεται η θεωρία. Στατιστικά, υπάρχει ακόμα και σήμερα ένα μικρό ποσοστό ανθρώπων διαφόρων επιπέδων εκπαίδευσης που πιστεύουν ότι η Ε.Θ.Σ δεν είναι σωστή, επομένως δεν θα πρέπει να γίνεται αποδεκτή και να διδάσκεται στα πανεπιστήμια.

Τέλος θα ήθελα να σημειώσω ότι, κατά τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας, λαμβάνοντας υπόψιν ότι γνωρίζουμε πλέον τι είναι η Ε.Θ.Σ, πολλές φορές θα δίνεται η εντύπωση ότι κάποιες έννοιες ή ιδέες που φαίνονται ελκυστικές είναι εκ των υστέρων δημιουργημένες, δηλαδή ότι ως δια μαγείας φύτρωσαν[3] στο κεφάλι του Einstein. Προφανώς όμως αυτό δεν είναι σωστό, γι' αυτό και θα προσπαθήσω να αναφέρω κάποια ιστορικά γεγονότα, τα κυριότερα και πιο σημαντικά, αυτά που δημιούργησαν το σπόρο για την γέννηση της Ε.Θ.Σ. Θα αποπειραθώ να προσεγγίσω συνδυαστικά και τις συνθήκες εκείνης της εποχής και το προσωπικό έργο όσων

[3] Θέλω να πω ότι θα εξηγηθεί όσο είναι δυνατό αναλυτικά πως και γιατί προέκυψαν οι συλλογισμοί του Einstein και των υπολοίπων θεωρητικών φυσικών.

ασχολήθηκαν και τις πιθανές συνεργασίες τους. Θα δούμε τελικά ότι η Ε.Θ.Σ ήταν εκεί και περίμενε κάποιος να την βγάλει στην επιφάνεια.

1. Η δημιουργία της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

1.1 Αξιώματα

Στα θεμέλια της Ε.Θ.Σ συναντούμε δύο βασικές αρχές:[4]

1η αρχή (αρχή της σχετικότητας)[5]

***Όλοι οι νόμοι της Φυσικής πρέπει να είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα[6] αναφοράς* (Α.Σ.Α).**

Δηλαδή δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, που το ένα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το άλλο, θα πρέπει με κατάλληλους μετασχηματισμούς να βρίσκουν τους ίδιους νόμους. Πειράματα που πραγματοποιούνται σε ένα ακίνητο εργαστήριο και σε ένα εργαστήριο που κινείται ισοταχώς ως προς το πρώτο θα πρέπει να συμφωνούν ως προς τους θεμελιώδεις νόμους. *Η Φυσική δηλαδή πρέπει να είναι ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές*. Η αρχή αυτή καθιστά αδύνατη τη φυσική προτίμηση συστήματος αναφοράς, καθώς απαγορεύει την ύπαρξη «προνομιακού» συστήματος αναφοράς. Οι μετασχηματισμοί λοιπόν που είναι απαραίτητοι για να επικοινωνούν αυτά τα δύο συστήματα αναφοράς είναι οι γνωστοί μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου (1564-1642).

Θεωρώντας ότι το κινούμενο σύστημα κινείται με ταχύτητα υ ως προς το ακίνητο και παράλληλα στον άξονα x[7] οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου έχουν τη μορφή:

$$\left.\begin{cases} x' = x - \upsilon t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}\right\} \textbf{Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου}$$

[4] Η θεώρηση αυτών των αρχών έγινε από τον Einstein το 1905.

[5] Ας σημειωθεί ότι η αρχή της σχετικότητας, αυτή που εννοεί στα αξιώματά του ο Einstein, αφορά τους νόμους όλης της φυσικής. Πριν χρησιμοποιηθεί από τον Einstein, είχε μια άλλη διατύπωση: αρχή της νευτώνειας σχετικότητας και αφορούσε τους νόμους της μηχανικής. Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου εξυπηρετούσαν μια χαρά την νευτώνεια μηχανική. Τα προβλήματα άρχισαν όταν δεν μπορούσαν να εφαρμοστούν σε πειράματα ηλεκτρισμού, μαγνητισμού, οπτικής και άλλων κλάδων της φυσικής ή να εξηγήσουν άλλα παράδοξα φαινόμενα.

[6] Είναι το σύστημα που ουσιαστικά ισχύει ο 1ος νόμος του Νεύτωνα.

[7] Για όλους τους μετέπειτα μετασχηματισμούς θα ισχύει αυτή η θεώρηση.

Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί τροποποιούνται και δίνουν τη θέση τους στους γνωστούς μετασχηματισμούς Lorentz (1853-1928).[8]

2η αρχή (αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός)

Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Στο κενό έχει τιμή $c = 299792458\dfrac{m}{\sec}$ και είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του παρατηρητή ή της πηγής. Όλοι οι παρατηρητές συμφωνούν ότι μετράνε c την ταχύτητα του φωτός στο σύστημά τους.

Η αδυναμία των μετασχηματισμών Γαλιλαίου να υποστηρίξουν το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός φαίνεται αμέσως από τον κανόνα πρόσθεσης ταχυτήτων του Γαλιλαίου. Πιο συγκεκριμένα, για δύο συμβάντα που λαμβάνουν χώρα σε δύο σημεία που απέχουν Δx με χρονική διαφορά Δt ως προς ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς O προκύπτει από την 1η και 4η εξίσωση των μετασχηματισμών Γαλιλαίου ότι ως προς ένα σύστημα αναφοράς O' κινούμενο με ταχύτητα υ ως προς το O κατά τον άξονα x θα είναι

$$\Delta x' = \Delta x - \upsilon \Delta t \ \text{ και } \ \Delta t' = \Delta t$$

επομένως

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\upsilon \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\upsilon_x' = \upsilon_x - \upsilon$$

η οποία μας λέει ότι εάν ένας φωτεινός παλμός έχει ταχύτητα c ως προς το σύστημα O' τότε ένας παρατηρητής ως προς το σύστημα O θα μετράει αυτήν την ταχύτητα ως $\upsilon_x = c + \upsilon > 0$! Επιπλέον, σύμφωνα με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του James Clerk Maxwell (1831-1879) η ταχύτητα του φωτός έχει την καθορισμένη τιμή

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{\sec}.$$

Η άβολη αυτή κατάσταση μάς οδηγεί σε ένα δίλλημα: Ή οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου δεν είναι σωστοί, ή πρέπει να υπάρχει ένα προνομιακό σύστημα αναφοράς στο οποίο η ταχύτητα του φωτός να είναι c και σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα η ταχύτητα να υπακούει στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Στο σημείο αυτό, για να ξεπεραστεί η κρίση, επινοήθηκε η έννοια του αιθέρα, ενός μέσου με

---

[8] Επεξεργαζόταν από το 1890 και έπειτα εξισώσεις που θα άφηναν αναλλοίωτες τις εξισώσεις Maxwell και τη κυματική εξίσωση και τελικά δημοσιεύει τρεις εργασίες το 1892, 1895 και 1904 που παρουσιάζει αυτές εξισώσεις (μετασχηματισμοί) όπως θα δούμε παρακάτω με λεπτομέρεια.

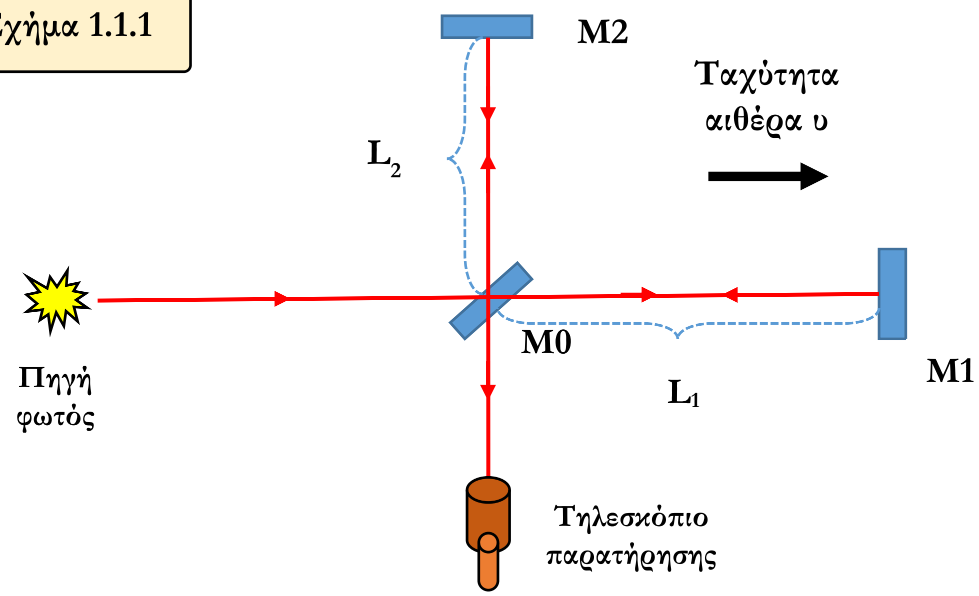
περίεργες ιδιότητες, ενός «εξωτικού» μέσου, αφού έπρεπε να είναι εξαιρετικά λεπτό, αραιό, αραιότερο και από το κενό τόσο που ενώ ένα ηχητικό κύμα για παράδειγμα να σταματάει να διαδίδεται, το φως να συνεχίζει και εξαιρετικά σκληρό με άκαμπτους δεσμούς ανάμεσα στα σωματίδια που τον αποτελούν, τόσο κοντά μεταξύ τους ώστε να επιτρέπουν στο φως να διαδίδεται μέσα του με τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα την c. Το προνομιακό αυτό σύστημα αναφοράς ονομάστηκε απόλυτο σύστημα αναφοράς και προβλημάτισε την επιστημονική κοινότητα της εποχής αναδεικνύοντας γρήγορα ως μείζον θέμα την πειραματική απόδειξη της ύπαρξης του. Αυτό συνέβη πρώτη φορά το 1881 από τον Albert Mickelson (1852-1931)[9] και το αποτέλεσμα με καλή ακρίβεια ήταν αρνητικό. Το πείραμα επαναλήφθηκε το 1887 από τους Mickelson και Edward Morley (1838-1923) με καλύτερη διάταξη και καλύτερη ακρίβεια και το αποτέλεσμα ήταν και πάλι αρνητικό. Ο αιθέρας δεν υπήρχε και αυτό ήταν πάλι πρόβλημα, αφού το αποτέλεσμα δεν ήταν συμβατό με την αρχική υπόθεση για την ύπαρξη του αιθέρα.

1.2 Πειράματα Mickelson-Morley

Σκοπός του πειράματος ήταν να προσδιοριστεί η ταχύτητα της Γης σε σχέση με τον υποτιθέμενο αιθέρα και γι' αυτό έγινε προσπάθεια να μετρηθούν διαφορές στην ταχύτητα του φωτός που οφείλονται στην κίνηση της Γης. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε είναι γνωστή ως συμβολόμετρο του Mickelson και η ιδέα στηρίζεται στη σύγκριση της ταχύτητας του φωτός σε δύο κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους· μία που είναι παράλληλη στην κίνηση της Γης και μία κάθετη σ' αυτήν. Οι δύο αυτές ακτίνες συμβάλλουν δίνοντας κροσσούς συμβολής. Αν λοιπόν το συμβολόμετρο στραφεί κατά 90^o οι κροσσοί θα πρέπει να μετατοπιστούν λόγω διαφοράς φάσης, οπότε θα παρατηρηθεί διαφορά στην τιμή της ταχύτητας του φωτός. Ένα απλοποιημένο διάγραμμα του συμβολόμετρου φαίνεται στο **σχήμα 1.1.1**.

[9] Βραβείο Νόμπελ 1907 (1ος Αμερικανός επιστήμονας) για τα οπτικά όργανα ακριβείας του και τις φασματοσκοπικές και μετρολογικές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθειά τους.

Σχήμα 1.1.1



Το φως ξεκινάει από μια πηγή φωτός, συναντάει ένα επαργυρωμένο κάτοπτρο M0 (beam splitter), διαχωρίζεται σε δύο ακτίνες ίσης περίπου έντασης οι οποίες καταλήγουν σε δύο κάτοπτρα M1 και M2, ταξιδεύοντας τις αποστάσεις δύο βραχιόνων μήκους L_1 και L_2 αντίστοιχα. Εκεί ανακλώνται και τελικά στο γυρισμό επανενώνονται σχηματίζοντας μια εικόνα συμβολής στο τηλεσκόπιο παρατήρησης. Ο χρόνος για να διανυθεί η απόσταση L_1 μέχρι το κάτοπτρο M1 και να γυρίσει πίσω είναι:

$$t_1 = \frac{L_1}{c-\upsilon} + \frac{L_1}{c+\upsilon} = \frac{2L_1 c}{c^2-\upsilon^2} = \frac{2L_1 c}{c^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)} = \frac{2L_1}{c\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{2L_1}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-1} \quad \textbf{(1.1.1)}$$[10].

Για το χρόνο να πάει το φως μέχρι το κάτοπτρο M2 και να γυρίσει πίσω σκεφτόμαστε ως εξής: Η διαδρομή τώρα δεν είναι L_2 αλλά μια υποτείνουσα ορθογωνίου με τη μία κάθετη L_2 και την άλλη ίση με το μισό του διαστήματος που διανύεται σε χρόνο t_2 με ταχύτητα υ. Ή διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η ταχύτητα της δέσμης του φωτός ως προς τη Γη είναι τώρα $\left(c^2-\upsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Άρα

$$t_2 = \frac{2L_2}{\left(c^2-\upsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2L_2}{c\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

[10] $\beta = \frac{\upsilon}{c}$

$$t_2 = \frac{2L_2}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \textbf{(1.1.2)}.$$

Η διαφορά χρόνου διάδοσης του φωτός που προκύπτει από τις σχέσεις **(1.1.1)** και **(1.1.2)** είναι αυτή που καθορίζει τη διαφορά φάσης συμβολής των κυμάτων και κατά συνέπεια τους παρατηρήσιμους κροσσούς συμβολής. Θα είναι

$$\Delta t = \frac{2L_1}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-1} - \frac{2L_2}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \textbf{(1.1.3)}.$$

Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Taylor

$$\left(1-\beta^2\right)^{-1} \approx 1+\beta^2 + \mathrm{O}\left(\beta^4\right) \text{ και } \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\beta^2 + \mathrm{O}\left(\beta^4\right)$$

η σχέση **(1.1.3)** γίνεται

$$\Delta t = \frac{2L_1}{c}\left(1+\beta^2\right) - \frac{2L_2}{c}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{2L_1}{c} + \frac{2L_1}{c}\beta^2 - \frac{2L_2}{c} - \frac{2L_2}{c}\frac{1}{2}\beta^2 \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{2}{c}\left(L_1 - L_2\right) + \frac{1}{c}\left(2L_1 - L_2\right)\beta^2 \quad \textbf{(1.1.4)}.$$

Ο Michelson το 1881 χρησιμοποίησε βραχίονες μήκους $L = 1,2m$, οπότε η **(1.1.4)** γίνεται

$$\Delta t = \frac{L}{c}\beta^2$$

και θέτοντας $c = 3 \cdot 10^8 \dfrac{m}{\sec}$ και με καλή προσέγγιση ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο ίση με $\upsilon = 3 \cdot 10^4 \dfrac{m}{\sec}$ (η ακριβής είναι $2,976 \cdot 10^4 \dfrac{m}{\sec}$), προκύπτει ότι

$$\Delta t = \frac{1,2}{3 \cdot 10^8}10^{-8} = 0,4 \cdot 10^{-16}\sec!$$

Αυτός είναι ένας πολύ μικρός χρόνος όπως αναμενόταν άλλωστε. Επειδή όμως μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε το πως αυτή η διαφορά στο χρόνο δημιουργεί μια διαφορά στα μήκη κύματος των δύο ακτίνων για να πάρουμε τελικά την εικόνα της συμβολής, θα πρέπει να την αντιστοιχίσουμε σε μήκος κύματος. Έτσι, χρόνος μιας περιόδου T αντιστοιχεί σε μήκος κύματος λ που συνδέονται με τη σχέση $T = \dfrac{\lambda}{c}$, επομένως το μέρος κλάσματος μηκών κύματος που αντιστοιχεί στον παραπάνω χρόνο Δt θα είναι

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{Lc}{\lambda c}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 = \frac{L}{\lambda}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 \quad \textbf{(1.1.5)}.$$

Αυτό το $\frac{\Delta t}{T} = \Delta N$ είναι ουσιαστικά <u>η μεταβολή στον</u> <u>αριθμό των παρατηρούμενων κροσσών συμβολής</u> λόγω της χρονικής διαφοράς. Το κίτρινο φως που χρησιμοποιήθηκε από τον Michelson έχει μήκος κύματος περίπου $575nm$, οπότε

$$\Delta N = \frac{1,2}{575 \cdot 10^{-9}} 10^{-8} \approx 0,021 \text{ ή } 2,1\%.$$

Συνεπώς λόγω της διαφοράς της διαδρομής που διανύει το φως στις δύο κινήσεις στο συμβολόμετρο δημιουργείται μια χρονική διαφορά που μεταφράζεται ως αλλαγή κατά περίπου $2,1\%$ στο μήκος κύματος που ο Michelson περίμενε να ανιχνεύσει ως μετατόπιση στους κροσσούς συμβολής, πράγμα το οποίο δεν έγινε ποτέ.

Αν τώρα γίνει μια περιστροφή των βραχιόνων κατά 90^o, ο βραχίονας μήκους L_1 θα είναι τώρα κάθετος στη κίνηση της Γης και ο χρόνος θα είναι

$$t_1' = \frac{2L_1}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

και ο βραχίονας μήκους L_2 θα είναι παράλληλος στη κίνηση της Γης οπότε ο χρόνος θα είναι

$$t_2' = \frac{2L_2}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-1}$$

και η χρονική διαφορά θα είναι

$$\Delta t' = \frac{2L_2}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-1} - \frac{2L_1}{c}\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

από την οποία προκύπτει πάλι ότι

$$\Delta t' = \frac{L}{c}\beta^2 \text{ ή } \Delta N' = \frac{L}{\lambda}\beta^2.$$

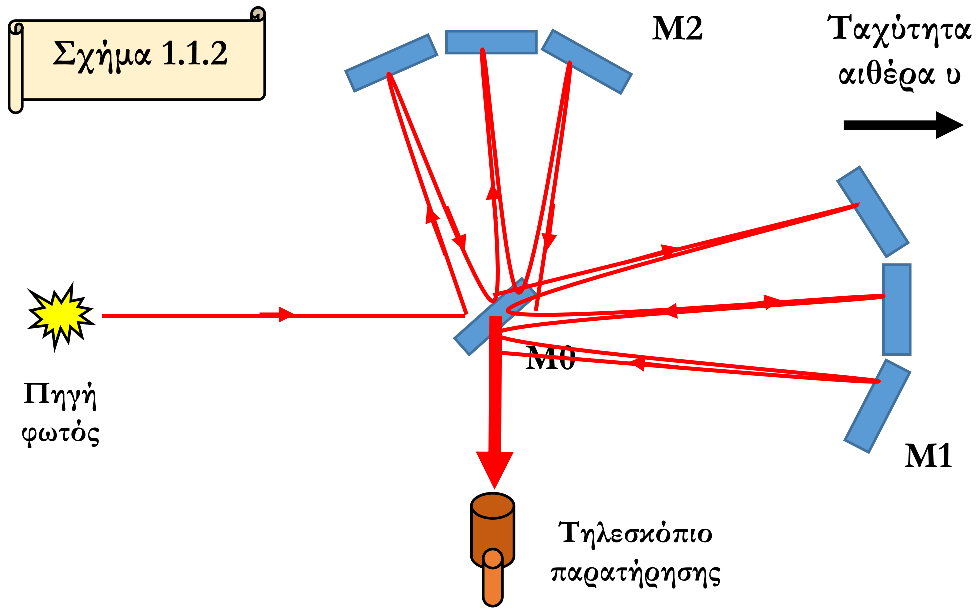
Συνολικά λοιπόν η μεταβολή της φάσης λόγω αυτής της περιστροφής που αντιστοιχίζεται σε μεταβολή στον αριθμό των παρατηρούμενων κροσσών συμβολής θα είναι

$$\Delta N_{total} = \frac{2L}{\lambda}\beta^2 \quad \textbf{(1.1.6)}.$$

Το 1887 που επαναλήφθηκε το πείραμα από τους Michelson-Morley, προκειμένου να βελτιώσουν την ακρίβειά του, χρησιμοποίησαν βραχίονες (διαδρομές) $11m$[11] πάνω σε μια πλάκα από γρανίτη που επέπλεε πάνω σε μια δεξαμενή με υδράργυρο ώστε να μπορεί να περιστραφεί η διάταξη χωρίς τριβές ή τραντάγματα που θα μπορούσαν να αλλοιώσουν την εικόνα της συμβολής. Επιπλέον αξίζει να σημειωθεί ότι για να επιτευχθεί αυτή η διαδρομή των $11m$ χρησιμοποιήθηκαν πολλά κάτοπτρα

[11] Λέμε βραχίονες αλλά ουσιαστικά εννοούμε τα μήκη των διαδρομών που διανύει το φως.

ώστε το φως να κάνει αρκετές διαδοχικές ανακλάσεις και να ταξιδέψει συνολικά $11m$ παράλληλα στη κίνηση της Γης και $11m$ κάθετα όπως φάινεται στο **σχήμα 1.1.2**.



Η σχέση **(1.1.6)** για $L = 11m$ θα δώσει

$$\Delta N = \frac{22}{575 \cdot 10^{-9}} 10^{-8} \approx 0,382 \text{ ή } 38,2\%.$$

Η διάταξη είχε δυνατότητα ανίχνευσης μετατόπισης στην εικόνα συμβολής περίπου 10%, οπότε καταλαβαίνουμε ότι με ποσοστό γύρω στο 40% οι μετατοπίσεις των κροσσών πάνω στην εικόνα της συμβολής θα ήταν εμφανείς. Αυτό όμως δεν έγινε ποτέ. Τα πειράματα επαναλήφθηκαν και αργότερα από τους Michelson-Morley και άλλους πειραματιστές το 1904, 1924, 1926, 1927, 1929, 1930 και το αποτέλεσμα ήταν πάντα το ίδιο: Η ταχύτητα του φωτός είναι πάντα c.

1.3 Οδεύοντας προς τη σχετικότητα

Μετά το 2^o πείραμα των Mickelson-Morley υπήρξε μια περίοδος σύγχυσης και διατυπώνονταν διάφορες προτάσεις προκειμένου να εξηγηθεί το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος. Μία από αυτές πρότειναν ότι οι εξισώσεις του Maxwell (1831-1879) δεν είναι σωστές αφού θα έπρεπε να μένουν αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Μία άλλη ισχυριζόταν ότι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου ισχύουν για μηχανικά φαινόμενα ενώ τα ηλεκτρομαγνητικά απαιτούσαν την ύπαρξη του απόλυτου συστήματος αναφοράς, του αιθέρα. Μία τρίτη υποστήριζε την ύπαρξη μιας θεωρίας της σχετικότητας για όλα τα φυσικά φαινόμενα μιας σχετικότητας διαφορετικής από αυτήν του Γαλιλαίου, με άλλα λόγια οι εξισώσεις του μετασχηματισμού του απαιτούν κατάλληλη τροποποίηση.

Προς αυτήν την κατεύθυνση εργαζόταν ο Lorentz ο οποίος κατάφερε τελικά το 1904 να δημοσιεύει τους μετασχηματισμούς που φέρουν το όνομά του και οι οποίοι άφηναν αναλλοίωτους τους νόμους της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας του Maxwell όπως αυτοί διατυπώθηκαν στις εξισώσεις του καθώς επίσης και την κυματική εξίσωση στο κενό δηλαδή χωρίς φορτία ($\rho = 0$) και χωρίς ρεύματα ($\vec{J} = 0$).

Παράλληλα με τον Lorentz δούλευε τους μετασχηματισμούς και ο Henri Poincare[12] (1854-1912) ο οποίος στην πραγματικότητα δεν εγκατέλειψε ποτέ την ιδέα του αιθέρα. Κατά την άποψη του, τον θεωρούσε ως μια βολική σύμβαση για τη διάδοση του φωτός κατ' αναλογία με τη διάδοση του ήχου. Πάντως αρνήθηκε να τον θεωρήσει ως ένα συνηθισμένο είδος ύλης του οποίου η κίνηση θα μπορούσε να επηρεάσει τα παρατηρούμενα φαινόμενα. Στις διαλέξεις[13] του έλεγε χαρακτηριστικά: «*θεωρώ πολύ πιθανό τα οπτικά φαινόμενα να εξαρτώνται μόνο από τη σχετική κίνηση των υλικών σωμάτων που είναι παρόντα*».

Συνοψίζοντας λοιπόν, έχουμε δύο σημαντικά δεδομένα: το πείραμα στα 1881 που υποδεικνύει το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός και μερικές καλές εξισώσεις στα 1904 που υποδεικνύουν το αναλλοίωτο της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Αυτά ήταν αρκετά για να διατυπωθεί μια θεωρία σχετικότητας, αρκεί να μπορούσε κάποιος να τους δώσει ένα φυσικό νόημα. Και ο Lorentz και ο Poincare προσπάθησαν να ερμηνεύσουν αυτά τα δεδομένα όμως δεν τα κατάφεραν. Τη λύση έδωσε ο Einstein ο οποίος απέρριψε την έννοια του αιθέρα συμπεραίνοντας ότι η σχετική κίνηση δεν έχει καμία σχέση για το μέτρο της ταχύτητας του φωτός το οποίο θα είναι πάντα c και το πείραμα ορθώς έβγαλε αρνητικό αποτέλεσμα[14] δηλαδή καμία μεταβολή στην ταχύτητα του φωτός. Επιπλέον, από τις εξισώσεις του Lorentz εξάγεται η ιδέα της κατάργησης του απόλυτου χώρου και χρόνου. Οι κοινές συμβατικές πεποιθήσεις για το χώρο και το χρόνο οφείλουν να δώσουν τη σειρά τους σε μάλλον πιο παράξενες συνέπειες και αυτή να είναι η αρχή για την είσοδο σε ένα κόσμο παραδόξων. Ενδεχομένως αυτή να ήταν και η αδυναμία των Lorentz και Poincare, η άρνηση δηλαδή να γκρεμίσουν στερεότυπα για το πως βιώνουμε το κόσμο.

Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο αν ο Einstein ήταν ενήμερος[15] για τα πειράματα των Mickelson-Morley (1881, 1887) και για την εξέλιξη

[12] Γάλλος μαθηματικός και θεωρητικός φυσικός πολυμαθής και πανεπιστήμων. Ασχολήθηκε με πολλά ζητήματα που αφορούσαν τα μαθηματικά, τη φυσική και τη φιλοσοφία και σε όλα διέπρεψε αφήνοντας πλούσιο συγγραφικό έργο. Ήταν από τους πρώτους που ανέδειξε ρωγμές στην Νευτώνια μηχανική ιδιαίτερα για την κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Γνωστή η ρήση του: «Αν η φύση δεν ήταν όμορφη, δεν θα άξιζε τον κόπο να τη γνωρίσουμε, και αν δεν άξιζε τον κόπο να τη γνωρίσουμε, δεν θα άξιζε να ζούμε».

[13] Sorbonne lectures of 1888,1890 and 1899.

[14] Πιθανότατα να μην το ήξερε αυτό ο Einstein. Παρακάτω γίνεται μια χρονολογική αναφορά.

[15] Στο τελευταίο έτος των σπουδών του (1899) ο Einstein έπρεπε να παραδώσει μια εργασία για να πάρει πτυχίο. Είχε προτείνει στον καθηγητή του Heinrich Weber (1842-1913) (μαθηματικός, αδερφός του Wilhelm Weber (1804-1891) φυσικός, γνωστός για την ομώνυμη μονάδα μέτρησης, 1Wb για την μαγνητική ροή) να κάνει μια εργασία που αφορά τη κατασκευή διάταξης για τη μέτρηση της ταχύτητας του φωτός μέσα στον αιθέρα. Θα χρησιμοποιούσε κάτοπτρα υπό γωνία ώστε να έχουμε ανάκλαση του φωτός από δύο διαφορετικές κατευθύνσεις και θα μετρούσε τη διαφορά στην ενέργεια μέσω

των εργασιών Lorentz-Poinacare από τα 1890 και αργότερα[16], δηλαδή αν βάσισε τις ιδέες του σε αυτά, αφενός γιατί ήταν μικρός[17] και αφετέρου γιατί τον Ιούλιο του 1902[18] προσελήφθη στο Γραφείο Ευρεσιτεχνιών στη Βέρνη μετά από κόπο και πολλές καθυστερήσεις. Ο Einstein ήταν φιλόδοξος, είχε περιέργεια και γενικά αμφισβητούσε τη Φυσική όπως ήταν γραμμένη μέχρι τότε, γεγονός που τον χαρακτήριζε ως αυθάδη κατά τη διάρκεια των σπουδών του με αποτέλεσμα να δημιουργεί αντιπάθειες με τους καθηγητές του. Με τον Weber που ήταν ο κυριότερος καθηγητής του στη φυσική αρχικά ήταν ενθουσιασμένος και παρακολουθούσε με ζήλο τις περισσότερες διαλέξεις του συμμετέχοντας σε όλα τα πειράματα. Σύντομα όμως απογοητεύτηκε γιατί ο Weber εστίαζε πολύ σε ιστορικά θεμέλια της φυσικής αγνοώντας τις πιο σύγχρονες έρευνες. Απουσίαζε για παράδειγμα από τις διαλέξεις του η σχετικά πρόσφατη (1855) ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell. Τελικά η αυθάδης στάση του Einstein δημιούργησε τέτοιον εκνευρισμό που τελικά δεν μιλούσαν για το υπόλοιπο της φοίτησης του. Ο Ζαν Περνέ ήταν ένας άλλος καθηγητής φυσικής υπεύθυνος για τις εργαστηριακές ασκήσεις. Ο Einstein εμφανιζόταν σπάνια στο μάθημά του και όποτε εμφανιζόταν δεν ακολουθούσε τις οδηγίες αλλά εκτελούσε τα πειράματα με το δικό του τρόπο. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να πάρει τη χειρότερη βαθμολογία και επιπλέον να προκαλέσει και ένα ατύχημα που του τραυμάτισε το δεξί του χέρι και τον δυσκόλευε τόσο να γράφει όσο και να παίζει το αγαπημένο του βιολί. Ο Minkowski, ο μαθηματικός που θα ασκούσε τη πιο θετική επίδραση πάνω του, χαρακτήριζε τον Einstein τεμπελόσκυλο γιατί αν και ο τελευταίος εκτιμούσε πολύ το τρόπο που έδενε τη φυσική με τα μαθηματικά, τα πιο δύσκολα μαθήματα τα απέφευγε. Η ικανότητα όμως του Einstein να αδιαφορεί για αυτό που λέμε συμβατική φυσική της εποχής με τις ξεπερασμένες διαλέξεις του πολυτεχνείου ήταν αυτή που τον οδήγησε τελικά στο να κάνει πολύ συχνά σκασιαρχείο και να μελετάει με πάθος τους μεγάλους θεωρητικούς της εποχής Kirchhoff για την ακτινοβολία, Helmholtz για τη θερμοδυναμική, Hertz για τον ηλεκτρομαγνητισμό, Boltzmann για τη στατιστική μηχανική και άλλους.

της διαφοράς της θερμότητας που συλλέγουν δύο θερμοηλεκτρικές στήλες, ανάλογα με τη παράλληλη ή όχι κατεύθυνση προς τη κίνηση της Γης μέσα στον αιθέρα. Ο Weber την απέρριψε λέγοντας του έχουν γίνει ήδη παρόμοια πειράματα με αρνητικά αποτελέσματα, συμπεριλαμβανομένου και του πειράματος των Mickelson-Morley. Ο Einstein μετά από συζητήσεις του με το Weber για το θέμα αυτό διάβασε μια εργασία που δημοσιεύτηκε την προηγούμενη χρονιά (1898) από τον Wilhelm Wien (1864-1928) που περιέγραφε σχετικά πειράματα για την ύπαρξη του αιθέρα μαζί και αυτό των Mickelson-Morley.

[16] Ο Poincare ήξερε για τους μετασχηματισμούς Lorentz από τότε που δημοσιεύτηκαν. Αυτός τις ολοκλήρωσε και για $\rho \neq 0$ και $\vec{J} \neq 0$ το 1905. H. Poincare, "Sur la dynamique de l'electron", C.R. Acad. Sci., Paris 140, 1504 (1905). (Για την ακρίβεια η εργασία υπεβλήθη τον Ιούλιο του 1905 και δημοσιεύτηκε τον Ιανουάριο του 1906).

[17] Γεννήθηκε το 1879, άρχισε σπουδές 17 ετών τον Οκτώβρη του 1896 στο πολυτεχνείο της Ζυρίχης και αποφοίτησε τον Ιούλιο του 1900. Στον ελεύθερο χρόνο του διάβαζε Poincare (ο Poincare είχε ήδη ασχοληθεί με τους μετασχηματισμούς Lorentz και μάλιστα ο Einstein προσπάθησε χωρίς επιτυχία να παρακολουθήσει διάλεξη του σε ένα μαθηματικό συνέδριο στη Ζυρίχη την άνοιξη του 1897). Πάντως υπάρχουν αναφορές που λένε ότι υπήρχαν επαφές μεταξύ τους και μάλιστα οι παρατηρήσεις του Poincare προμήνυαν την Ε.Θ.Σ.

[18] Λόγω του ότι η δουλειά στο Γραφείο Ευρεσιτεχνιών δεν ήταν ακαδημαϊκή θέση, ενδεχομένως να μην είχε πρόσβαση σε επιστημονικά νέα. Δηλαδή είχε καθυστερημένη ή και ελλιπή ενημέρωση.

Συνοψίζοντας κάπως όλα αυτά τα δεδομένα μπορεί κανείς να εκτιμήσει ότι αρχικά, έχοντας προφανώς μελετήσει την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell, ο Einstein κάποια στιγμή συλλαμβάνει τα δύο αξιώματα στο μυαλό του. Δηλαδή τα αξιώματα ως πρωτότυπη ιδέα άρχιζαν να ωριμάζουν στο μυαλό του. Στη συνέχεια, ταυτόχρονα και σχεδόν συγκυριακά καθώς πέφτουν στην αντίληψή του τα αποτελέσματα των πειραμάτων Mickelson-Morley και οι μετασχηματισμοί του Lorentz[19], θα πρέπει να ενθουσιάστηκε[20], υπό την έννοια ότι θα σκέφτηκε ότι βρίσκεται στο σωστό δρόμο για να το πούμε πιο απλά. Είναι πιθανό να τονώθηκε κατά κάποιο τρόπο τόσο πολύ η αυτοπεποίθησή του έπειτα από όλη αυτή τη προσπάθεια και την αντιδραστική στάση που διατηρούσε όλα τα χρόνια των σπουδών του, που τότε ήταν που εμφάνισε αυτό το απαραίτητο διανοητικό θάρρος ώστε η πρωτότυπη ιδέα να καταλήξει επαναστατικά εκεί που κατέληξε. Όπως θα δούμε και παρακάτω αναλυτικά, στην εργασία που δημοσίευσε το 1905 αποδεικνύει στους μετασχηματισμούς Lorentz με δικές του θεωρήσεις χρησιμοποιώντας τα γνωστά του νοητικά πειράματα, και με την ευφυΐα του εξήγησε το φυσικό νόημα αυτών. Η αρχική συνειδητοποίηση που πυροδότησε όλη αυτήν την ιδέα ήταν ότι δεν υπάρχει απόλυτος χρόνος. Δηλαδή δύο γεγονότα που φαίνονται να είναι ταυτόχρονα σε έναν παρατηρητή δεν φαίνονται να είναι ταυτόχρονα σε έναν άλλο που κινείται πολύ γρήγορα. Επιπλέον δεν υπάρχει τρόπος να εξακριβώσουμε ποιος από τους δύο παρατηρητές έχει δίκιο, δηλαδή πότε δύο γεγονότα είναι πραγματικά ταυτόχρονα. Οι περιγραφές που χρησιμοποιεί ο Einstein είναι πραγματικά απολαυστικές, εκφράζονται με απλά λόγια που γίνονται κατανοητές από έναν μέσο αναγνώστη.

[19] Κατά τον Pauli, η εργασία του Einstein του 1905 υποβλήθηκε περίπου την ίδια περίοδο με το άρθρο του Poincare και γράφτηκε χωρίς την επίγνωση της εργασίας του Lorentz του 1904.

[20] Υπάρχουν μαρτυρίες-φήμες που λένε ότι ήταν ανήσυχος την περίοδο που είχε συλλάβει το φυσικό νόημα των μετασχηματισμών και προσπαθούσε ο ίδιος πρώτα να το χωνέψει. Ο καλός του φίλος Michele Besso (1873-1955) φαίνεται ότι τον βοήθησε να βγει από τα αδιέξοδά του ώντας απλώς ένας καλός ακροατής. Σε έναν από τους πολλούς περιπάτους τους στη Βέρνη πηγαίνοντας μαζί στη δουλειά, ο Einstein ήταν τόσο αναστατωμένος που σκεφτόταν ακόμα και να τα παρατήσει, όταν ξαφνικά έλυσε το πρόβλημα της ταυτοχρονικότητας. «*Ευχαριστώ! Έλυσα τελείως το πρόβλημα*» φαίνεται να είπε στο Besso και μετά από πέντε εβδομάδες περίπου έστειλε τη μνημειώδη εργασία του προς δημοσίευση. Αυτή η σχέση του με τον Besso εξηγεί και το γεγονός ότι στην εργασία του δεν αναφέρει καμία βιβλιογραφική αναφορά παρά μόνο ευχαριστίες στο Besso για τις χρήσιμες υποδείξεις του.

2. Η αναζήτηση των μετασχηματισμών Lorentz

2.1 Voight 1887

Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα οι εξισώσεις του Maxwell είχαν για τα καλά εδραιωθεί με την έννοια ότι ήταν εξισώσεις αναφοράς[21] δηλαδή ότι θα έπρεπε να είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς αδρανειακών συστημάτων καθώς επίσης και ότι η ταχύτητα του φωτός δεν αλλάζει. Επιπλέον στα 1887 ο Woldemar Voigt (1850-1919) δημοσιεύει μια εργασία[22] αναφέροντας ότι θα ήταν από την σκοπιά των μαθηματικών πολύ βολικό να εισαχθεί ένας χρόνος t'[23] στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Αυτός ο χρόνος[24] θα πρέπει να είναι μια γραμμική συνάρτηση των συντεταγμένων του συστήματος, ενώ η χρονική κλίμακα θα πρέπει να παραμένει αμετάβλητη. Η εργασία αυτή είχε κυρίως ως στόχο η κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$ να παραμένει σε ισχύ ακόμα και σε κινούμενα συστήματα αναφοράς. Πράγματι η πρόταση του στη σύγχρονη σημειογραφία είναι η εξής:

$$\left\{\begin{matrix} x' = x - \upsilon t \\ y' = \dfrac{y}{\gamma} \\ z' = \dfrac{z}{\gamma} \\ t' = t - \dfrac{\upsilon x}{c^2} \end{matrix}\right\} \quad \textbf{Μετασχηματισμοί Voigt}.$$

Το γ είναι ο γνωστός παράγοντας Lorentz. Δεν είναι στα πλαίσια του ενδιαφέροντος αυτής της εργασίας να γίνει περαιτέρω ανάλυση των μετασχηματισμών αυτών, εν συντομία όμως αναφέρω ότι προκειμένου να φτάσει σε αυτούς τους μετασχηματισμούς ο Voigt κατασκεύασε ένα σύστημα 9 εξισώσεων με 15 άγνωστες σταθερές που θέλουν προσδιορισμό. Με τρόπο όχι πάντα σαφή κάνει διάφορες θεωρήσεις και μειώνει τις σταθερές σε 12. Από εκεί και έπειτα ορίζει ξανά τις μεταβλητές του, σχετίζοντας τις με τις παλιές, κάνει και άλλες υποθέσεις με αποτέλεσμα οι εξισώσεις του να αποκτούν

---

21 Υπήρχε ένα ερωτηματικό μέχρι τότε: ποια είναι η σωστή βάση, οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου ή οι εξισώσεις του Maxwell; Οι φυσικοί επέλεξαν το δεύτερο, όχι τυχαία βέβαια. Πειραματικά ο Maxwell επιβεβαιώθηκε από τον Heinrich Hertz (1857-1894) με πειράματα που διεξήγαγε την περίοδο 1886-1889.

22 W. Voigt, Ueber das Dopplersche Princip Nachr. Ger. Wiss. Göttingen (1887) 41. Η αγγλική μετάφραση έχει τίτλο On the Principle of Doppler και μπορεί να βρεθεί εδώ: https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Principle_of_Doppler.

23 Αυτός είναι ο μη-απόλυτος χρόνος, αυτός που ο Lorentz ονομάζει «local time» χωρίς να δίνει κάποια φυσική ερμηνεία.

24 Είναι ενδιαφέρον ότι για πρώτη φορά αμφισβητείται η έννοια του απόλυτου χρόνου και προκύπτει η πρόταση ότι ένα ρολόι θα πρέπει να αλλάζει το ρυθμό του στην κίνηση, όπως φαίνεται και από την εξίσωση που παρήγαγε.

εξαιρετικά μεγάλη πολυπλοκότητα και έπειτα από ένα σημείο αρχίζει να γίνεται δύσκολο να παρακολουθήσει κάποιος τους συλλογισμούς του. Τελικά καταλήγει στις εξισώσεις:

$$t' = t - k_2 x, \quad x' = k_1 x - \upsilon t, \quad y' = k_3 y, \quad z' = k_4 z$$

Όπου υ η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων και k_1, k_2, k_3, k_4 σταθερές που τις υπολογίζει ως

$$k_1 = 1,$$

$$k_2 = \frac{\upsilon}{c^2},$$

$$k_3 = \frac{1}{\gamma} \text{ και}$$

$$k_4 = \frac{1}{\gamma}$$

για να οδηγηθεί στους μετασχηματισμούς του.

Αυτό που ουσιαστικά ήθελε να δείξει[25] ο Voigt είναι η συμμεταβλητότητα (covariance) της κυματικής εξίσωσης κάτω από τους μετασχηματισμούς του και όχι η αναλλοιώτητα (invariance) που προσφέρουν οι μετασχηματισμοί του Lorentz: Δηλαδή για ένα εν γένει βαθμωτό πεδίο $\Phi(x, y, z, t)$ που ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση $\Box^2 \Phi = 0$[26], από την αναλλοιώτητα του Lorentz προκύπτει ότι

$\Box^{2\prime} \Phi = \Box^2 \Phi$, ενώ από τη συμμεταβλητότητα του Voigt προκύπτει ότι

$\Box^{2\prime} \Phi = \gamma^2 \Box^2 \Phi$.

- Ας μου επιτραπεί στο σημείο αυτό να κάνω μια παρένθεση. Τυπικά θυμίζω για όσους το ξεχνούν ή δεν το έχουν αντιληφθεί καθόλου ότι είναι φρόνιμο να συνειδητοποιήσουμε ότι οι περισσότερες δημοσιεύσεις για τις οποίες γίνονται οι αναφορές σε αυτήν την εργασία είναι δημοσιεύσεις πολλών ετών: κυρίως τέλη 19$^{\text{ου}}$ αιώνα και αρχές του 20$^{\text{ου}}$. Πρόκειται για δημοσιεύσεις που διατυπώθηκαν σε διαφορετικές γλώσσες, σε διάφορα μέρη του κόσμου και από συγγραφείς που

25 Ο Voigt δεν είχε αρχικό στόχο να βρει τους μετασχηματισμούς Lorentz, δεν έψαχνε αυτό άλλωστε, απλώς πρότεινε την απαίτηση της συμμεταβλητότητας της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς όπου εφαρμόζοντας τα αξιώματα της Ε.Θ.Σ και μάλιστα χωρίς να το αναφέρει αυτό ρητά, εξήγαγε τελικά τις εξισώσεις του οι οποίες με τη σειρά τους σχετίζονται με αυτές του Lorentz.

26 $\Box^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ο Νταλαμπερτιανός τελεστής.

χρησιμοποιούσαν διαφορετικό συμβολισμό για τα ίδια μεγέθη ή για παρόμοια μεγέθη αλλάζοντας λίγο τα ονόματά τους, προσθέτοντας όπου ήταν απαραίτητο διορθωτικούς συντελεστές κ.τ.λ. Μπορεί να φανταστεί κανείς τη δυσκολία συντονισμού κάτω από μια κοινή γλώσσα για την περιγραφή όλων αυτών των φυσικών φαινομένων. Είναι προσπάθειες που έγιναν για την επίλυση προβλημάτων, θεμάτων που αποσκοπούν στην ερμηνεία της λειτουργίας της ίδιας της φύσης![27] Πολλές λοιπόν δημοσιεύσεις ενδεχομένως να περιέχουν ασάφειες, αυθαιρεσίες και πολλές απ' αυτές δεν είναι καν σωστές. Το πείραμα τότε δεν είχε την τεχνολογική συγκρότηση που έχει σήμερα και η επικοινωνία τότε δεν είχε τον χαρακτήρα που γνωρίζουμε σήμερα. Προς τα μέσα του 20ου αιώνα έγινε προσπάθεια από πολλούς θεωρητικούς Φυσικούς[28] να επεξεργαστούν αυτά τα δεδομένα, να μεταφραστούν να δοθεί πιο σύγχρονη σημειογραφία και τέλος πάντων από την επιπλέον μεταγενέστερη ενασχόληση με αυτά να έχουμε στα χέρια μας σήμερα, αυτό που λέμε, όλη την ουσία της πληροφορίας. Είναι η προσωπική μου περιέργεια αυτή που τροφοδοτεί μια έρευνα που περιγράφεται από αυτές τις γραμμές μέσω των ιστορικών αναδρομών ώστε να γνωρίσουμε τους πρωταγωνιστές.

2.2 Lorentz 1892

Έπειτα από μερικά χρόνια και ενώ δεν υπήρξε κάποια ουσιαστική πρόταση για καινούργιους μετασχηματισμούς, ο Lorentz δημοσιεύει δύο εργασίες το 1892[29] και το 1895[30]. Σε γενικές γραμμές ο Lorentz και στις δύο εργασίες του δουλεύει με την κυματική εξίσωση και την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell. Θα περιγράψω όσο πιο συνοπτικά[31] είναι δυνατό την δομή[32] αυτών των δύο εργασιών γιατί θέλω να καταλήξω σε κάποια συμπεράσματα.

Όσον αφορά την εργασία του 1892, ένα άρθρο 190 σελίδων, ο Lorentz αρχικά χρησιμοποιεί την αρχή του D'Alembert, εισάγει πολλές μεταβλητές που αφορούν

---

[27] Ουσιαστικά οι άνθρωποι ξαναέγραφαν τη Φυσική τότε.

[28] Η εργασία του Einstein το 1905 έφερε επανάσταση στην επιστημονική κοινότητα της εποχής υπό την έννοια ότι όλοι ήθελαν να ασχοληθούν με αυτήν λίγο, πολύ: από απλοί φοιτητές μέχρι καθηγητές ήδη νομπελίστες. Παράλληλα άρχιζε να αναπτύσσεται ένας νέος κλάδος, η κβαντική φυσική, οπότε καταλαβαίνουμε ότι οι πρώτες τρεις ή τέσσερις δεκαετίες του 20ου αιώνα ήταν οι πιο συναρπαστικές για αυτούς που πρόλαβαν να τις ζήσουν όντας ενεργοί. Οπτική, θερμοδυναμική, πυρηνική φυσική και άλλοι κλάδοι μελετήθηκαν εξονυχιστικά και σχεδόν σε όλους προστέθηκε ο όρος: σχετικιστικός.

[29] H.A. Lorentz, La theorie electromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Arch.neerl. Sci, 25 (1892) 363. Η μετάφραση στα αγγλικά είναι «Maxwell's electromagnetic theory and its application to moving bodies».

[30] H.A. Lorentz, Versuch einer Theorie der lektrischen und optischen Erscheinungen in dewegten Körpern (LEIDEIN 1895). Η μετάφραση στα αγγλικά είναι «Attempt of a Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Bodies».

[31] Ας με συγχωρέσει ο αναγνώστης αν βρίσκει κουραστική αυτήν την αναδρομή, όμως κάνω μια προσπάθεια να ανακαλύψω τις συνθήκες, προϋποθέσεις και θεωρήσεις που οδήγησαν τον Lorentz να γράψει τους ομώνυμους μετασχηματισμούς.

[32] Η δομή του άρθρου του 1892 βρίσκεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Αναφέρονται τα κεφάλαια με τις υποενότητές τους.

μάζες, θέσεις, συστήματα συντεταγμένων και άλλα, παίρνει τις μεταβολές τους, περνάει σε ταχύτητες και επιταχύνσεις, χρησιμοποιεί διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό για να καταλήξει σε συστήματα πολλών μεταβλητών με κύριες μεταβλητές τις X,Y,Z. Άλλες βασικές μεταβλητές που συχνά συναντάμε στις εξισώσεις του είναι οι τριάδες f,g,h, α,β,γ και η,ξ,ζ, καθώς και πληθώρα άλλων στη συνέχεια. Με εναρκτήρια ιδέα την αρχή του D'Alembert, συχνές αναφορές[33] στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell, υποθέσεις, θεωρήσεις, αλλαγές μεταβλητών και αρκετή μαθηματική επεξεργασία καταλήγει σε μια ομάδα πολύπλοκων εξισώσεων[34] εκφρασμένες ως προς τις κύριες μεταβλητές του X,Y και Z. Η ευφυΐα του Lorentz σε αυτό το σημείο έγκειται στο γεγονός ότι για τις μεταβλητές αυτές δεν δίνει ένα ξεκάθαρο φυσικό νόημα, έτσι καταφέρνει τροποποιώντας τις κατάλληλα να βρίσκει τιμές γι' αυτές που αφορούν τα διηλεκτρικά, αγωγούς, τύπους για την ηλεκτροστατική και άλλα. Η συνέχεια του άρθρου εξελίσσεται σε αυτό το ύφος εμπλέκοντας επιπλέον και τη διάδοση του φωτός σε διηλεκτρικά σε ηρεμία και σε κίνηση.

Τελικά φτάνουμε στο κεφάλαιο 7 όπου αναζητώντας μια λύση της εξίσωσης $\Box\psi = 0$ **(2.2.1)**, με το σύμβολο $\Box$ να δείχνει τη λειτουργία (τελεστή) $V^2\Delta - \left(\frac{\partial}{\partial t} - p\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$ και με τη σειρά του το σύμβολο $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ο Lorentz γράφει την εξίσωση στη μορφή

$$\left(V^2 - p^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2p\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$V^2\left[\frac{V^2 - p^2}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + 2p\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad \textbf{(2.2.2)}$$ [35]

Για να γραφεί πιο κομψά η **(2.2.2)** επιδιώκουμε συντελεστή 1 μπροστά από τις παραγώγους $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ το οποίο μπορεί να γίνει αν θέσουμε μια νέα μεταβλητή για το x, ένα καλλιγραφικό $\mathscr{X}$ [36]. Ας βρούμε πόσο πρέπει να είναι αυτό:

Θα έχουμε διαδοχικά:

---

[33] «Μαζί με το Maxwell θα υποθέσω ότι η χωρική πυκνότητα του ρεύματος είναι πάντα ηλεκτροστατική. Πρέπει λοιπόν να έχουμε: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ». Lorentz, (1892) σελ.11

[34] Βρίσκονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.

[35] Είναι η εξίσωση (136α) στο πρωτότυπο.

[36] Τα V, p είναι σταθερά, δεν εξαρτιόνται από το x.

$$\frac{V^2-p^2}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\sqrt{\frac{V^2-p^2}{V^2}}\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\sqrt{\frac{V^2-p^2}{V^2}}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}}\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{1}{\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}}\frac{\partial\psi}{\partial x}=$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\left(\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x\right)}\frac{\partial\psi}{\partial\left(\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x\right)}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\left(\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x\right)^2}$$

δηλαδή θα πρέπει να θέσουμε $\mathscr{X}=\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x$. Πράγματι ο Lorentz γράφει χαρακτηριστικά: « *A cet effet, j'introduirai d'abord au lieu de* x *une nouvelle variable* $\mathscr{X}=\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x$ *et je poserai* $\frac{p}{\sqrt{V^2-p^2}}=\varepsilon$ »[37], δηλαδή « *για το σκοπό αυτό θα εισάγω πρώτα αντί* x *μια νέα μεταβλητή* $\mathscr{X}=\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x$[38] *και θα θέσω* $\frac{p}{\sqrt{V^2-p^2}}=\varepsilon$ ».

Το $2p\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$ της **(2.2.2)** μετασχηματίζεται λοιπόν ως εξής:

$$\mathscr{X}=\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}x\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\mathscr{X}}=\frac{\sqrt{V^2-p^2}}{V}\frac{\partial}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{X}\partial t}=\frac{\sqrt{V^2-p^2}}{V}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}=\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{X}\partial t}.$$

Άρα $2p\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}=2p\frac{V}{\sqrt{V^2-p^2}}\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{X}\partial t}=2\varepsilon V\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{X}\partial t}$

Η εξίσωση **(2.2.2)** τελικά γίνεται

$$V^2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathscr{X}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]+2\varepsilon p\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathscr{X}\partial t}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,$$

---

37 Lorentz, (1892) σελ.141.

38 Εδώ για 1η φορά στο άρθρο του ο Lorentz εμφανίζει την ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}}\equiv\gamma$.

όπου V είναι η ταχύτητα του φωτός και p η μεταφορική ταχύτητα, παράλληλη στον άξονα x με την οποία κινούνται όλα τα μόρια του διηλεκτρικού.

Στη συνέχεια ο Lorentz προκειμένου να απλουστεύσει περαιτέρω την τελευταία εξίσωση (για να τη λύσει) εισάγει νέες μεταβλητές για τη συνάρτηση ψ θεωρώντας ότι αφού εξαρτάται από τις μεταβλητές $\mathscr{X}, y, z, t$, μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτάται από τις μεταβλητές $\mathscr{X}, y, z, t'$ με $t' = t - \frac{\varepsilon}{V}\mathscr{X}$ [39]. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι για το μετασχηματισμό αυτό δεν υπάρχει καμία αιτιολόγηση ή ένδειξη ούτε καν υπόνοια για το πως ο Lorentz οδηγήθηκε σε αυτόν. Επιπλέον ακόμα κι αν γίνει χρήση των σχέσεων $\mathscr{X} = \frac{V}{\sqrt{V^2 - p^2}} x$ και $\frac{p}{\sqrt{V^2 - p^2}} = \varepsilon$, ο χρόνος αυτός δεν οδηγεί στο γνωστό μετασχηματισμό $t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2} x\right)$. Ενδεχομένως να είναι ένας μετασχηματισμός που εξυπηρετεί μόνο το πρόβλημα που αντιμετωπίζει σε εκείνες τις σελίδες.

2.3 Lorentz 1895

Μεταφερόμαστε τώρα στα 1895 όπου δημοσιεύτηκε το 2^{ο} άρθρο του και στην ενότητα 2 που εξετάζει τα ηλεκτρικά φαινόμενα ιδεατών σωμάτων (ponderable bodies) που κινούνται με σταθερή ταχύτητα μέσα στο σταθερό αιθέρα. Κάνοντας εφαρμογή στην ηλεκτροστατική[40] αναφέρει για τον άξονα x που γίνεται η μεταφορά, μία αύξηση κατά έναν παράγοντα $\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}$ του ακίνητου άξονα ως προς τον κινούμενο και μας δίνει τις εξισώσεις:

$$x = x'\sqrt{1 - \frac{p^2}{V^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \text{ [41]}.$$

Με τις εξισώσεις αυτές βρίσκει νέους όγκους, πυκνότητες, και ηλεκτρικές δυνάμεις.

---

[39] Πράγματι μετά από αυτήν τη νέα θεώρηση και κάνοντας τις απαραίτητες διορθώσεις στις μερικές παραγώγους, καταλήγει στη κομψότερη μορφή $\left(V^2 - p^2\right)\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathscr{X}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} = 0$.

[40] Lorentz (1895) ενότητα 2, παράγραφος 23.

[41] Τα τονούμενα εδώ αναφέρονται στο ακίνητο σύστημα.

Στην ενότητα 3 που αφορά την διερεύνηση ταλαντώσεων που διεγείρονται από ταλαντούμενα ιόντα επειδή η ομάδα των εξισώσεών[42] του όταν αναλυθούν οδηγούν σε περίπλοκες εκφράσεις είναι φρόνιμο να ξεκινήσει να υπολογίζει τις συνιστώσες του διανύσματος της μαγνητικής δύναμης στο κινούμενο σύστημα. Πράγματι, έχοντας προηγουμένως θεωρήσει τις μερικές παραγώγους στο νέο σύστημα και αμελώντας τους όρους τάξης $\frac{p^2}{V^2}$ καταλήγει σε μια έκφραση όχι και τόσο απλή[43], ωστόσο «βλέπει» ότι η έκφραση του υπονοεί την εισαγωγή νέας ανεξάρτητης μεταβλητής αντί του χρόνου t την

$$t' = t - \frac{p_x}{V^2}x - \frac{p_y}{V^2}y - \frac{p_z}{V^2}z\,.$$ [44]

Εδώ λοιπόν για 1η φορά καλεί τον χρόνο αυτό «local time», σε αντίθεση με τον t που τον λέει «general time». Σε όλο το υπόλοιπο άρθρο δεν υπάρχει κάτι καινούργιο όσον αφορά τους μετασχηματισμούς για τη θέση και το χρόνο. Απλώς χρησιμοποιεί ότι έχει ήδη παρουσιάσει για να δουλέψει και άλλα ηλεκτρικά και οπτικά φαινόμενα για κινούμενα σώματα. Συνολικά λοιπόν από τις δύο εργασίες διαπιστώνουμε ότι μέχρι και το 1895, τουλάχιστον επίσημα, δεν είχαν δημοσιευτεί οι εξισώσεις των μετασχηματισμών. Η μόνη σχέση που μας δίνει είναι ο παράγοντας γ. Ενδεχομένως ο Lorentz να μην είχε αυτό το στόχο αρχικά. Παρατηρούμε ότι καθώς αναπτύσσει τις σκέψεις του κατά την συγγραφή και των δύο εργασιών του, προσπαθεί να λύσει τις εξισώσεις του με μαθηματικές τεχνικές που απαιτούν αλλαγές μεταβλητών, αλλαγές συστημάτων που αν μη τι άλλο επιβεβαιώνουν τον αγώνα των θεωρητικών της εποχής να επαληθεύσουν την αρχή της σχετικότητας. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι στην εργασία του 1892 χρησιμοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell πριν την επεξεργασία από τους Oliver Heaviside (1850-1925)[45], Josiah. W. Gibbs (1839-1903)[46] και Hertz οι οποίοι ταυτόχρονα με παρόμοιες εργασίες έκαναν χρήση του τελεστή του στροβιλισμού και της απόκλισης για διανυσματικές συναρτήσεις και τις συμπύκνωσαν κατά κάποιο τρόπο στη πιο σύγχρονη γνωστή μορφή. Απεναντίας στις εργασίες του

---

42 Βρίσκονται στο ΠΑΡΆΡΤΗΜΑ Γ. Η σημειογραφία (Fraktur) είναι του Lorentz από την τότε εποχή, την αφήνω ως έχει.

43 Βρίσκεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ.

44 Lorentz (1895), ενότητα 3, παράγραφοι 30 και 31.

45 Αυτοδίδακτος βρετανός μαθηματικός και φυσικός, με μεγάλη προσφορά στην επιστήμη αφού εισήγαγε μιγαδικούς αριθμούς στα ηλεκτρικά κυκλώματα, εφηύρε τεχνικές επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και ανέπτυξε τη διανυσματική ανάλυση ομαδοποιώντας τις αρχικά 20 εξισώσεις του Maxwell με 12 αγνώστους σε 4 εξισώσεις με 2 αγνώστους. Ισχυρός πολέμιος της Ε.Θ.Σ σε τέτοιο βαθμό που πλησίαζε το παράλογο. Ήταν αρκετά εκκεντρικός και παράξενος ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια της ζωής, που μη θέλοντας να βλέπει κόσμο, πολλά από τα χειρόγραφα των μετέπειτα βιβλίων του «electrical papers» και «electromagnetic theory» τα έδινε σε ένα παντοπωλείο και τα έπαιρναν από εκεί οι εκδότες του.

46 Αμερικανός επιστήμονας με συνεισφορές στη φυσική, χημεία και μαθηματικά. Επινόησε ένα σύγχρονο διανυσματικό συμβολισμό για να ομαδοποιήσει τις εξισώσεις του Maxwell που αρχικά ήταν σημειώσεις των διαλέξεών του και οι οποίες αργότερα συμπεριελήφθησαν από τον προστατευόμενό του Έντουιν Μπίντγουελ Ουίλσον σε βιβλίο με τίτλο διανυσματική ανάλυση που εκδόθηκε το 1901.

1895 και 1904 χρησιμοποιεί την πιο σύγχρονη σημειογραφία και αλλάζει τον συμβολισμό των μεγεθών όπως θα δούμε παρακάτω.

2.4 Lorentz 1904

Καταλήγουμε λοιπόν στις 27 Μαΐου του 1904[47] που ο Lorentz δημοσιεύει μια νέα εργασία που μελετάει ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα σε κινούμενα συστήματα. Στην παράγραφο 3 ξεκινάει από τις βασικές εξισώσεις της θεωρίας των ηλεκτρονίων, ουσιαστικά της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας του Maxwell. Χρησιμοποιεί πιο λίγες εξισώσεις[48] και απλούστερη σημειογραφία για την διηλεκτρική μετατόπιση ($\vec{D}$), τη μαγνητική δύναμη ($\vec{H}$) και την υποκινητική δύναμη[49] ($\vec{F}$). Επίσης η ταχύτητα του συστήματος κατά τον άξονα x συμβολίζεται με υ και η ταχύτητα του φωτός με c. Έτσι, όπως χαρακτηριστικά λέει, αν οι βασικές εξισώσεις[50] αναφέρονται ταυτόχρονα και σε άξονες που κινούνται με το σύστημα τότε μπορούν να τροποποιηθούν. Εκεί ξαφνικά, χωρίς καμία προειδοποίηση γράφει χαρακτηριστικά: « *we shall further transform these formulae by a change of variables* »,[51] και θέτει

$$\frac{c^2}{c^2-\upsilon^2}=\beta^2$$

και στη συνέχεια, «*I take as new independent variables*»

$$x'=\beta l x,$$

$$y'=ly,$$

$$z'=lz \text{ και}$$

$$t'=\frac{l}{\beta}t-\beta l\frac{\upsilon}{c^2}x.$$

Με αυτές τις αλλαγές ορίζει τα νέα διανύσματα D' και H'. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το β είναι ουσιαστικά το $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$. Το l είναι μια ποσότητα που εξαρτάται από

[47] H.A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light, Proc. Roy. Acad. Amsterdam 6 (1904).
[48] Βρίσκονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε.
[49] Η δύναμη που υπολογίζεται ανά μονάδα φορτίου, η οποία ασκείται από τον αιθέρα σε έναν όγκο-στοιχείο ενός ηλεκτρονίου.
[50] Βρίσκονται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε.
[51] Lorentz (1904), παράγραφος 4.

την ταχύτητα υ, $\ell(v^2)$[52]. Συγκεκριμένα για $\upsilon=0$ είναι $\beta=1$ και τότε $l=1$. Για μικρές τιμές της υ (σε σχέση με το c), το l διαφέρει από τη μονάδα πολύ λίγο, όχι πολύ περισσότερο από μια ποσότητα δευτέρας τάξης για το λόγο $\frac{\upsilon}{c}$. Επίσης για $\beta=1$ και $l=1$ (και για $\upsilon\neq 0$), προκύπτει για το χρόνο $t'=t-\frac{\upsilon}{c^2}x$, ο γνωστός «local time».

Η σημαντικότερη παρατήρηση όμως εδώ είναι ότι η μεταβλητή x που χρησιμοποιεί ο Lorentz είναι ουσιαστικά η μετασχηματισμένη θέση του Γαλιλαίου δηλαδή είναι $x\to x-\upsilon t$, έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις των μετασχηματισμών όπως τις γνωρίζουμε σήμερα:

$$x'=\gamma x\to \boxed{x'=\gamma\left(x-\upsilon t\right)}.$$

$$t'=\frac{1}{\gamma}t-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}x\to t'=\frac{1}{\gamma}t-\gamma\frac{v}{c^2}\left(x-\upsilon t\right)\Rightarrow t'=\frac{1}{\gamma}t-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}x+\gamma\frac{\upsilon^2}{c^2}t\Rightarrow$$

$$t'=\left(\frac{1}{\gamma}+\gamma\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)t-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}x\underset{\frac{\upsilon^2}{c^2}=\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}}{\Rightarrow} t'=\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma^2-1}{\gamma}\right)t-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}x\Rightarrow$$

$$\boxed{t'=\gamma\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right)}.$$

Συνολικά:

$$\left.\begin{cases} x'=\gamma\left(x-\upsilon t\right) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma\left(t-\frac{\upsilon x}{c^2}\right)\end{cases}\right\}\ \textbf{Μετασχηματισμοί Lorentz}.$$

[52] Ο Lorentz το είπε $\ell(v^2)$ (παράγοντας επανακλιμάκωσης, συνάρτηση του τετραγώνου της ταχύτητας), ο Einstein το έβαλε στις εξισώσεις του ως $\varphi(\upsilon)$ και $\varphi(-\upsilon)$, και απέδειξε ότι κάνει 1. Κάπως έτσι είναι γραμμένο επίσης από τον Pauli αφού το μελέτησε από τον Einstein. Θα τα συναντήσουμε παρακάτω.

3. Einstein 1905

Ο Einstein στην αρχή της εργασίας του[53], εισάγει την έννοια της αρχής της σχετικότητας χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα από την ηλεκτροδυναμική του Maxwell, αυτό της σχετικής κίνησης ενός μαγνήτη και ενός αγωγού. Γενικεύει υποστηρίζοντας ότι τα φαινόμενα της ηλεκτροδυναμικής και οπτικής όπως και αυτά της μηχανικής θα πρέπει να διέπονται από νόμους που να είναι έγκυροι για όλα τα συστήματα αναφοράς. Αυτή αρχικά η εικασία αργότερα θα αναβαθμιστεί σε αξίωμα (postulate) και μαζί με αυτό ένα επιπλέον αξίωμα θα παρουσιαστεί, αυτό της καθορισμένης ταχύτητας του φωτός, ανεξάρτητης από την κατάσταση κίνησης του σώματος που εκπέμπει. Έπειτα απορρίπτει εντελώς την έννοια του αιθέρα ως περιττή διότι όπως λέει χαρακτηριστικά η πρόταση του δεν απαιτεί ένα «απολύτως ακίνητο χώρο» με ειδικές ιδιότητες. Στην συνέχεια ορίζει την έννοια του ταυτόχρονου και του συγχρονισμού. Διαπιστώνει ότι δεν θα πρέπει να δίνεται καμία απόλυτη σημασία στην έννοια του ταυτόχρονου δύο γεγονότων, γιατί αυτά μπορεί να είναι ταυτόχρονα σε ένα σύστημα αλλά όχι σε ένα άλλο που βρίσκεται σε σχετική κίνηση με το πρώτο. Διατηρεί αυστηρό ύφος για το τι ακριβώς μετράει ένα ρολόι[54] που βρίσκεται σε ένα σημείο Α του χώρου και τι ένα άλλο ρολόι σε ένα άλλο σημείο Β του χώρου: το ρολόι στο σημείο Α μετράει τη χρονική στιγμή ενός γεγονότος στην άμεση γειτονιά του Α και το ρολόι στο Β αντίστοιχα στην άμεση γειτονιά του Β. Για να συγχρονιστούν λοιπόν δύο ρολόγια σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω ότι έχουμε δύο ρολόγια στις θέσεις Α και Β, και ότι τη χρονική στιγμή t_A ξεκινάει από το σημείο Α μια φωτεινή ακτίνα που φτάνει στο σημείο Β την χρονική στιγμή t_B. Εκεί ανακλάται και γυρίζει πίσω στο Α τη χρονική στιγμή t'_A. Τότε για να είναι συγχρονισμένα τα ρολόγια θα πρέπει να ισχύει $t_B - t_A = t'_A - t_B$ και θεωρώντας τη ταχύτητα του φωτός ως μια καθολική σταθερά θα ισχύει επίσης $c = \dfrac{2AB}{t'_A - t_A}$. Εφόσον λοιπόν έχει φανεί αυτή η ιδιαιτερότητα στη μέτρηση που εξαρτάται από το σύστημα, ο Einstein μας προετοιμάζει για τη θεωρία του μετασχηματισμού του. Έστω ότι έχουμε μία ράβδο μήκους ΑΒ όπως μετριέται σε ένα ακίνητο σύστημα. Η ράβδος βρίσκεται σε ένα σύστημα με το Α να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του συστήματος και το σύστημα αυτό που αρχικά συμπίπτει με το ακίνητο μπορεί να κινηθεί με σταθερή ταχύτητα υ κατά μήκος της ράβδου. Όπως και προηγουμένως μια ακτίνα φωτός στέλνεται από το Α στο Β και πάλι πίσω στο Β. Θα ισχύουν λοιπόν:

[53] Einstein (1905)

[54] Προφανώς τα ρολόγια του Einstein είναι όμοια από κάθε άποψη χωρίς ελαττώματα.

$t_B - t_A = \dfrac{r_{AB}}{c-\upsilon}$, όπου $c-\upsilon$ η σχετική ταχύτητα φωτός-παρατηρητή Α επειδή οι ταχύτητες τους είναι ομόρροπες και

$t'_A - t_B = \dfrac{r_{AB}}{c+\upsilon}$, όπου $c+\upsilon$ η σχετική ταχύτητα φωτός-παρατηρητή Α επειδή οι ταχύτητες τους είναι αντίρροπες.

Το r_{AB} είναι το μήκος της κινούμενης ράβδου μετρούμενο ως προς το ακίνητο σύστημα.

Στον παραπάνω συλλογισμό βασίζει την αναζήτηση των εξισώσεων εκείνων που συνδέουν τις μεταβλητές x, y, z, t που ορίζουν πλήρως τον τόπο και το χρόνο ενός γεγονότος στο ακίνητο σύστημα (K), με τις μεταβλητές ξ, η, ζ, τ [55] που ορίζουν αντιστοίχως τα ίδια σε κινούμενο σύστημα ως προς το πρώτο. Αποδίδοντας τη γραμμικότητα στις ζητούμενες εξισώσεις λόγω των ιδιοτήτων ομοιογένειας στο χώρο και στο χρόνο, αρχικά η σχέση $x' = x - \upsilon t$ δεν είναι σωστή γιατί ένα σημείο σε ηρεμία στο κινούμενο σύστημα θα ήταν ανεξάρτητο του χρόνου. Ο χρόνος θα ήταν απόλυτος όπως ορίζει η Γαλιλαϊκή σχέση. Έτσι θα οριστεί ο χρόνος τ του κινούμενου συστήματος που θα είναι συνάρτηση των x', y, z, t. Αντιστοίχως όπως είδαμε με την ράβδο ΑΒ προηγουμένως και αλλάζοντας λίγο τις μεταβλητές θα έχουμε:

Η ακτίνα ξεκινάει τη χρονική στιγμή τ_0 από το μηδέν του κινούμενου συστήματος, <u>αλλά</u> την t ως προς το ακίνητο, φτάνει στο x' τη χρονική στιγμή τ_1 ως προς το κινούμενο, <u>αλλά</u> την $t + \dfrac{x'}{c-\upsilon}$ ως προς το ακίνητο, ανακλάται και φτάνει πάλι πίσω στο μηδέν τη χρονική στιγμή τ_2 ως προς το κινούμενο, <u>αλλά</u> την $t + \dfrac{x'}{c-\upsilon} + \dfrac{x'}{c+\upsilon}$ ως προς το ακίνητο. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\tau_1 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1 \Rightarrow \frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-\upsilon} + \frac{x'}{c+\upsilon}\right)\right] = \tau\left(x',0,0,t + \frac{x'}{c-\upsilon}\right) \quad \mathbf{(3.1)}$$

Η συνάρτηση μας είναι η $\tau(0,0,0,t)$ άρα στην συνάρτηση

[55] Διατηρώ τη σημειογραφία του Einstein.

$\tau\left(0,0,0,t+\dfrac{x'}{c-\upsilon}+\dfrac{x'}{c+\upsilon}\right)$, ο όρος $\dfrac{x'}{c-\upsilon}+\dfrac{x'}{c+\upsilon}$ είναι εξαιρετικά μικρός καθώς επίσης και στη συνάρτηση $\tau\left(x',0,0,t+\dfrac{x'}{c-\upsilon}\right)$, οι όροι x' και $\dfrac{x'}{c-\upsilon}$ είναι εξαιρετικά μικροί. Θα χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα Taylor για δύο μεταβλητές:

Όπως γνωρίζουμε είναι $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots$ όπου αν θέσουμε $x-x_0=\varepsilon \Rightarrow x=x_0+\varepsilon$ τότε $f(x_0+\varepsilon)=f(x_0)+f'(x_0)\varepsilon+\ldots$ ή $f(x+\varepsilon)=f(x)+f'(x)\varepsilon+\ldots$ και για δύο μεταβλητές θα είναι $f(x+\varepsilon,y+\rho)=f(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial x}\varepsilon+\dfrac{\partial f}{\partial x}\rho+\ldots$

Επομένως η σχέση **(3.1)** γίνεται:

$$\frac{1}{2}\tau(0,0,0,t)+\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{c-\upsilon}+\frac{x'}{c+\upsilon}\right)\right]=\tau(0,0,0,t)+\frac{\partial\tau}{\partial x'}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{x'}{c-\upsilon}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{c-\upsilon}+\frac{x'}{c+\upsilon}\right)=\frac{\partial\tau}{\partial x'}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{x'}{c-\upsilon}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left[\frac{1}{c-\upsilon}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-\upsilon}+\frac{1}{c+\upsilon}\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{c-\upsilon}-\frac{1}{2}\frac{1}{c+\upsilon}\right]=0\Rightarrow\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left[\frac{c+\upsilon-c+\upsilon}{2(c-\upsilon)(c+\upsilon)}\right]=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0}\quad \textbf{(3.2)}$$

Πρόκειται για μερική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης που θα λυθεί με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών. Έστω η εξίσωση $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=0$, τότε το πεδίο κλίσεων (διεύθυνσης) που αντιστοιχεί σε αυτήν την διαφορική εξίσωση είναι η $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$. Για τη σχέση **(3.2)** θα έχουμε $a(x',t)=1$ και $b(x',t)=\dfrac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}$, οπότε $\dfrac{dt}{dx'}=\dfrac{b(x',t)}{a(x',t)}\Rightarrow dt=\dfrac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}dx'\Rightarrow t=\dfrac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}x'+\xi\Rightarrow\xi=t-\dfrac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}x'$. Μέχρι στιγμής δηλαδή έχουμε βρει ότι

$$\left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}x' + \xi \\ x' = \eta \end{array}\right\}$$ [56]

και θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} = \frac{\partial \tau}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x'} = \tau_\xi\left(-\frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}\right) + \tau_\eta \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} = -\frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}\tau_\xi + \tau_\eta$$

και

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \tau_\xi + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \tau_\xi .$$

Οπότε η **(3.2)** γίνεται:

$$\cancel{-\frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}\tau_\xi} + \tau_\eta + \cancel{\frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}\tau_\xi} = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_\eta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 0$$

που σημαίνει ότι $\tau(\xi,\eta) = f(\xi)$, δηλαδή ανεξάρτητο του η και με μια αλλαγή μεταβλητών προκύπτει τελικά ότι

$$\tau(x',t) = f\left(t - \frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}x'\right).$$

O Einstein καταλήγει στη σχέση $\tau = a\left(t - \frac{\upsilon}{c^2-\upsilon^2}x'\right)$ όπου a είναι μια συνάρτηση της ταχύτητας $\varphi(\upsilon)$ την οποία προσδιορίζει αργότερα. Ουσιαστικά είναι μια αριθμητική σταθερά, αδιάστατη, για να ορίζονται σωστά οι μονάδες του χρόνου και μήκους, ας πούμε καλύτερα $\varphi(\frac{\upsilon}{c})$.

[56] Οι μεταβλητές ξ,η έχουν επιλεγεί τυχαία. Ας μην γίνει σύγχυση με αυτές που επιλέγει ο Einstein στο κινούμενο σύστημά του ξ,η,ζ,τ παρακάτω.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να συνδέσουμε τις συντεταγμένες του ακίνητου συστήματος x', y, z, t, ενθυμούμενοι ότι $x' = x - \upsilon t$ με αυτές του κινούμενου ξ, η, ζ, τ.

→ Για το χρόνο θα έχουμε:

$$\tau = a\left(t - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}x'\right) =$$

$$a\left(t - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}(x - \upsilon t)\right) = a\left(t - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}x + \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}\upsilon t\right) =$$

$$a\left(\frac{c^2 \cancel{-\upsilon^2} \cancel{+\upsilon^2}}{c^2 - \upsilon^2}t - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}x\right) = a\frac{c^2}{c^2 - \upsilon^2}\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau = a\frac{1}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)} \quad \textbf{(3.3)}$$

→ Για μια ακτίνα φωτός που εκπέμπεται τη χρονική στιγμή $\tau = 0$ και ταξιδεύει προς τα αυξανόμενα ξ θα ισχύει

$$\xi = c\tau \Rightarrow \xi = ac\left(t - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}x'\right),$$

ενώ ως προς το ακίνητο σύστημα θα έχει ταχύτητα $c - \upsilon$ και θα ισχύει

$$x' = (c - \upsilon)t.$$

Με απαλοιφή του χρόνου από τις δύο σχέσεις προκύπτει:

$$\xi = ac\left(\frac{x'}{c - \upsilon} - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}x'\right) = ac\left(\frac{c + \upsilon - \upsilon}{c^2 - \upsilon^2}\right)x' = a\frac{c^2}{c^2 - \upsilon^2}(x - \upsilon t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\xi = a\frac{1}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}(x - \upsilon t)} \quad \textbf{(3.4)}$$

→ Για τους δύο άλλους άξονες αντιστοίχως θα ισχύει:

Για μια ακτίνα φωτός που εκπέμπεται τη χρονική στιγμή $\tau = 0$ και ταξιδεύει προς τα αυξανόμενα η θα ισχύει πάλι $\eta = c\tau \Rightarrow \eta = ac\left(t - \frac{\upsilon}{c^2 - \upsilon^2}x'\right)$, μόνο που τώρα ως προς το ακίνητο σύστημα θα έχει ταχύτητα $\sqrt{c^2-\upsilon^2}$ και θα ισχύει $y=\sqrt{c^2-\upsilon^2}t$ και $x'=0$ όπου με απαλοιφή του χρόνου προκύπτει

$$\boxed{\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}y} \quad \mathbf{(3.5)}$$

και ανάλογα

$$\boxed{\zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}}z} \quad \mathbf{(3.6)}.$$

Στις σχέσεις **(3.3)** έως και **(3.6)** θέτουμε[57]

$$\varphi(\upsilon) = a\frac{c}{\sqrt{c^2-\upsilon^2}} = a\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

οπότε

$$\tau = a\frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right) = a\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right) \Rightarrow \tau = \varphi(\upsilon)\beta\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right) \text{ με}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \beta.$$

Έτσι οι εξισώσεις του παίρνουν συνολικά τη μορφή:

$$\left\{\begin{array}{l} \tau = \varphi(\upsilon)\beta\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right) \\ \xi = \varphi(\upsilon)\beta(x-\upsilon t) \\ \eta = \varphi(\upsilon)y \\ \zeta = \varphi(\upsilon)z \end{array}\right\} \quad \mathbf{(3.7)}$$

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης $\varphi(\upsilon)$ ο Einstein εισάγει ένα νέο σύστημα αξόνων (K') με συντεταγμένες x',y',z',t' που κινείται ως προς το σύστημα (k) με συντεταγμένες ξ,η,ζ,τ με ταχύτητα $-\upsilon$ παράλληλα πάντα στον άξονα x.

[57] Κρατάω παραδοσιακά το $\varphi(\upsilon)$ του Einstein.

Τότε αντικαθιστώντας τις μεταβλητές $\tau \to t'$, $\xi \to x'$, $\eta \to y'$, $\zeta \to z'$ και θέτοντας $\upsilon \to -\upsilon$, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$t' = \varphi(-\upsilon)\beta\left(\tau + \frac{\upsilon}{c^2}\xi\right)$$ [58]

$$x' = \varphi(-\upsilon)\beta(\xi + \upsilon\tau)$$

$$y' = \varphi(-\upsilon)\eta$$

$$z' = \varphi(-\upsilon)\zeta$$

Θέλοντας να δούμε ποια σχέση συνδέει το σύστημα (K') με συντεταγμένες x', y', z', t' με το σύστημα (K) με συντεταγμένες x, y, z, t, θα εισάγουμε στις τελευταίες εξισώσεις αυτές που είναι γραμμένες ως προς το σύστημα (k) με συντεταγμένες ξ, η, ζ, τ. Θα έχουμε διαδοχικά:

1. $$t' = \varphi(-\upsilon)\beta\left(\tau + \frac{\upsilon}{c^2}\xi\right) = \varphi(-\upsilon)\beta\left[\varphi(\upsilon)\beta\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right) + \frac{\upsilon}{c^2}\varphi(\upsilon)\beta(x - \upsilon t)\right] =$$

$$\varphi(-\upsilon)\beta\left(\varphi(\upsilon)\beta t \cancel{- \varphi(\upsilon)\beta\frac{\upsilon}{c^2}x} \cancel{+ \frac{\upsilon}{c^2}\varphi(\upsilon)\beta x} - \frac{\upsilon}{c^2}\varphi(\upsilon)\beta\upsilon t\right) =$$

$$\varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)t\left(\beta^2 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\beta^2\right) \Rightarrow \boxed{t' = \varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)t}.$$ [59]

2. $$x' = \varphi(-\upsilon)\beta(\xi + \upsilon\tau) = \varphi(-\upsilon)\beta\left[\varphi(\upsilon)\beta(x - \upsilon t) + \upsilon\varphi(\upsilon)\beta\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)\right] =$$

$$\varphi(-\upsilon)\beta\left(\varphi(\upsilon)\beta x \cancel{- \varphi(\upsilon)\beta\upsilon t} \cancel{+ \upsilon\varphi(\upsilon)\beta t} - \varphi(\upsilon)\beta\frac{\upsilon^2}{c^2}x\right) =$$

$$\varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)x\left(\beta^2 - \beta^2\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)x\left(\beta^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\right) = \varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)x\beta^2\frac{1}{\beta^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x' = \varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)x}.$$

---

[58] Είναι $\beta(\upsilon) = \beta(-\upsilon) = \beta$

[59] Είναι $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2} = \dfrac{1}{\beta^2} \Rightarrow \dfrac{\upsilon^2}{c^2} = 1 - \dfrac{1}{\beta^2}$, οπότε $\beta^2 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\beta^2 = \beta^2 - \left(1 - \dfrac{1}{\beta^2}\right)\beta^2 = \beta^2 - \beta^2 + 1 = 1$

$$3.\quad y' = \varphi(-\upsilon)\eta \Rightarrow \boxed{y' = \varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)y}$$
$$4.\quad z' = \varphi(-\upsilon)\zeta \Rightarrow \boxed{z' = \varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)z}$$

Παρατηρούμε ότι στις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών x',y',z' και x,y,z δεν περιέχεται χρόνος, που σημαίνει ότι τα δύο συστήματα βρίσκονται σε ηρεμία μεταξύ τους. Πράγματι σύμφωνα με την θεώρηση του Einstein το σύστημα (k) κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ ως προς το (K), και το νέο σύστημα (K') κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα υ ως προς το (k), δηλαδή το σύστημα (k) «βλέπει» το (K) να απομακρύνεται προς τα αριστερά με ταχύτητα υ, δηλαδή τελικά τα συστήματα (K) και (K') κινούνται προς τα αριστερά με την ίδια ταχύτητα άρα ουσιαστικά ακίνητα το ένα ως προς το άλλο. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\varphi(-\upsilon)\varphi(\upsilon)=1$.

Για τον προσδιορισμό της $\varphi(\upsilon)$ σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω μια ράβδος που βρίσκεται στον άξονα Y του κινούμενου συστήματος (k), δηλαδή στον άξονα η ουσιαστικά, μήκους l, άρα τα άκρα σε αυτό το σύστημα θα έχουν συντεταγμένες $\eta_1=0$, $\eta_2=l$. Οπότε στο σύστημα (K) από τους μετασχηματισμούς προκύπτει $y_1=0$ και $y_2=\dfrac{l}{\varphi(\upsilon)}$. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και όταν γίνει αλλαγή στη κατεύθυνση του άξονα, πάντα παράλληλα στον άξονα x, και στην ταχύτητα από $\upsilon \to -\upsilon$. Θα είναι δηλαδή $y_2=\dfrac{l}{\varphi(-\upsilon)}$ από την οποία παίρνουμε ότι $\dfrac{l}{\varphi(\upsilon)}=\dfrac{l}{\varphi(-\upsilon)} \Rightarrow \varphi(\upsilon)=\varphi(-\upsilon)$ και τελικά $\varphi(\upsilon)=1$. Έτσι οι εξισώσεις **(3.7)** παίρνουν την τελική τους μορφή που είναι οι μετασχηματισμοί Lorentz

$$\left\{\begin{array}{l} \tau=\beta\left(t-\dfrac{\upsilon}{c^2}x\right) \\ \xi=\beta\left(x-\upsilon t\right) \\ \eta=y \\ \zeta=z \end{array}\right\}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι οι αρχικές υποθέσεις[60] του Einstein για την αρχή της σχετικότητας και την σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός είναι απολύτως ***συμβατές*** μεταξύ τους. Αυτό μπορεί να το διαπιστώσει κανείς αν θεωρήσει

[60] Τα δύο αξιώματα της σχετικότητας, τελικά.

ένα σφαιρικό κύμα φωτός που διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις ικανοποιώντας την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ ως προς ένα ακίνητο σύστημα (K) και χρησιμοποιώντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς, οδηγείται[61] στην εξίσωση $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2$ ως προς ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς που κινείται ως προς το προηγούμενο με ταχύτητα υ παράλληλα στον άξονα x και που τη χρονική στιγμή $t = \tau = 0$ τα δύο συστήματα συμπίπτουν.

[61] Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $x \leftrightarrow \xi,\ y \leftrightarrow \eta,\ z \leftrightarrow \zeta,\ t \leftrightarrow \tau,\ \upsilon \leftrightarrow -\upsilon$

4. Η σημασία της γραμμικότητας στους μετασχηματισμούς

Οι εξισώσεις των μετασχηματισμών είναι πλέον γνωστοί. Μπορούμε όμως τώρα, εκ των υστέρων, να θεωρήσουμε δύο εξισώσεις για τη θέση και το χρόνο τις οποίες να εφοδιάσουμε με την ιδιότητα της γραμμικότητας και να οδηγηθούμε στους μετασχηματισμούς εκ νέου. Ας δούμε το συλλογισμό.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε μία φωτεινή πηγή που κάποια χρονική στιγμή εκπέμπει φως στο χώρο. Η διάδοση του φωτός είναι ισοτροπική στο χώρο και θα περιγράφεται από την εξίσωση μιας σφαίρας που «ανοίγει» με ταχύτητα c: $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ **(4.1)**. Αυτή η εξίσωση θα ισχύει για ένα σύστημα αναφοράς Ο. Ένας άλλος παρατηρητής που παρατηρεί το ίδιο φαινόμενο στο δικό του σύστημα αναφοράς Ο' θα βλέπει την ίδια σφαίρα δηλαδή θα ισχύει $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$ **(4.2)**. Ποιοι είναι εκείνοι οι μετασχηματισμοί που συνδέουν αυτές τις εξισώσεις; Ας θεωρήσουμε δύο συστήματα αναφοράς το $\mathrm{O}(x,y,z)$ και το $\mathrm{O}'(x',y',z')$ με παράλληλους άξονες και με το O' να κινείται στον άξονα x με ταχύτητα υ. Επειδή οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου είναι γραμμικοί θα πρέπει και οι μετασχηματισμοί που ψάχνουμε επίσης να είναι γραμμικοί. Για τους άξονες y και z θα ισχύει $y'=y$ και $z'=z$ αλλά για τον άξονα x και το χρόνο t θα πρέπει να ισχύουν:

$$\left\{\begin{array}{l} x'=ax+bt \\ t'=dx+et \end{array}\right\} \quad \textbf{(4.3)}$$

και ουσιαστικά οφείλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a,b,d,e. Παρατηρούμε ότι πλέον ο χρόνος είναι μια δυναμική μεταβλητή και δεν ισχύει η Γαλιλαϊκή σχέση $t'=t$ του απόλυτου χρόνου.

Οι σχέσεις **(4.1)** και **(4.2)** είναι ίδιες επομένως

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

όπου θέτοντας την **(4.3)** διαδοχικά έχουμε:

$$(ax+bt)^2+y'^2+z'^2-c^2(dx+et)^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2+b^2t^2+2abxt+y'^2+z'^2-c^2\left(d^2x^2+e^2t^2+2dext\right)=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \Rightarrow$$

$$\left(a^2-c^2d^2\right)x^2+\left(b^2-c^2e^2\right)t^2+\left(2ab-2dec^2\right)xt+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

όπου για κάθε x και για κάθε t προκύπτει τελικά το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} a^2 - c^2 d^2 = 1 \\ b^2 - c^2 e^2 = -c^2 \\ 2\left(ab - c^2 de\right) = 0 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\begin{Bmatrix} a^2 = 1 + c^2 d^2 \\ b^2 = c^2\left(e^2 - 1\right) \\ ab = c^2 de \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (4.4) \\ (4.5) \\ (4.6) \end{Bmatrix}.$$

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το σύστημα εκφράζοντας τις μεταβλητές b,d,e συναρτήσει μιας παραμέτρου. Αρχικά όμως μπορούμε να θεωρήσουμε την ασφαλή εικασία $a \neq 0$, γιατί αν $a = 0$ τότε από τη σχέση **(4.3)** θα ήταν $x' = bt$ δηλαδή μόνο χρονικός μετασχηματισμός. Δεν το θέλουμε αυτό. Τετραγωνίζοντας την **(4.6)** και διαιρώντας την με την **(4.5)** έχουμε:

$$\frac{a^2 b^2}{b^2} = \frac{c^4 d^2 e^2}{c^2\left(e^2 - 1\right)} \Rightarrow a^2 = c^2 \frac{d^2 e^2}{\left(e^2 - 1\right)} \Rightarrow c^2 d^2 e^2 = a^2\left(e^2 - 1\right) \Rightarrow$$

$$c^2 d^2 = \frac{a^2}{e^2}\left(e^2 - 1\right) \ \textbf{(4.7)}.$$

Από την **(4.4)** και την **(4.7)** τώρα έχουμε

$$a^2 = 1 + \frac{a^2\left(e^2 - 1\right)}{e^2} \Rightarrow a^2 - \frac{a^2\left(e^2 - 1\right)}{e^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{e^2}\left(e^2 - e^2 + 1\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{e^2} = 1 \Rightarrow e = \pm a.$$

Θα επιλέξουμε τη θετική τιμή για το e δηλαδή $e = a$ **(4.8)** και αυτό εξηγείται ως εξής:

Αν έχουμε δύο συστήματα αξόνων στα οποία το ένα είναι μετατοπισμένο ως προς το άλλο κατά κ, τότε αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $x \to x - \kappa$ όπου αν οι άξονες είναι ομόρροποι τότε $\kappa > 0$, αν οι άξονες είναι αντίρροποι τότε $\kappa < 0$. Ομοίως για τους χρόνους: Αν ο ένας άξονας ξεκινάει τη χρονική στιγμή t, τότε ο άλλος θα έχει μια καθυστέρηση κ οπότε $t \to t - \kappa$.

(4.4)$\Rightarrow c^2 d^2 = a^2 - 1 \Rightarrow d = \pm\frac{1}{c}\sqrt{a^2 - 1}$ και από **(4.5)**$\overset{(8)}{\Rightarrow} b = \pm c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)}$.

Συνολικά λοιπόν:

$$\begin{Bmatrix} e = a \\ b = \pm c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)} \\ d = \pm\dfrac{1}{c}\sqrt{a^2 - 1} \end{Bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}^*{}_+ \quad \textbf{(A)}.$$

Επιπλέον η Jacobian[62] του μετασχηματισμού θα είναι

$$J = \left|\frac{\partial\left(x',t'\right)}{\partial\left(x,t\right)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial x'}{\partial t} \\ \dfrac{\partial t'}{\partial x} & \dfrac{\partial t'}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\left(ax+bt\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(ax+bt\right)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\left(dx+et\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(dx+et\right)}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} =$$

$$ae - bd \neq 0 \Rightarrow ae \neq bd$$

που επιτρέπει ο μετασχηματισμός να αντιστρέφεται.

Επιστρέφοντας πίσω στις σχέσεις $\begin{Bmatrix} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{Bmatrix}$ και έχοντας τον Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό $x' = x - \upsilon t$ ως οδηγό, θα πρέπει για μικρές ταχύτητες $a = 1$ και $b = -\upsilon$ οπότε $b < 0$ δηλαδή $b = -c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)}$ επομένως

$$x' = ax - c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)}t \quad \textbf{(4.9)}.$$

Επίσης επειδή $b < 0$, θα πρέπει να είναι και $d < 0$ από τις σχέσεις **(A)**. Τότε θα ισχύει για το χρόνο $t' = dx + et \Rightarrow$

$$t' = -\frac{1}{c}\sqrt{\left(a^2 - 1\right)}x + at \quad \textbf{(4.10)}.$$

Η αρχή στο O' ως προς το O' είναι $x' = 0$.

Η αρχή στο O' ως προς το O είναι $x = \upsilon t$.

Επομένως η **(4.9)** γίνεται:

$$0 = a\upsilon t - c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)}t \Rightarrow a\upsilon - c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)} = 0 \Rightarrow a\upsilon = c\sqrt{\left(a^2 - 1\right)} \Rightarrow$$

[62] Ουσιαστικά η Jacobian μας δείχνει πως περνάμε από έναν παραμετρικό χώρο ενός συνόλου σημείων του $\mathbb{R}^2$ σε μια επιφάνεια και πάλι πίσω.

$$a^2\upsilon^2 = c^2\left(a^2-1\right) \Rightarrow \frac{a^2\upsilon^2}{c^2} = a^2 - 1 \Rightarrow 1 = a^2 - \frac{a^2\upsilon^2}{c^2} \Rightarrow 1 = a^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$1 = a\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \equiv \gamma\,.$$

Η **(4.9)** λοιπόν γράφεται τώρα:

$$x' = \gamma x - c\sqrt{\left(\gamma^2-1\right)}t \Rightarrow x' = \gamma\left(x - c\frac{\sqrt{\left(\gamma^2-1\right)}}{\gamma}t\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{x' = \gamma\left(x-\upsilon t\right)}$$ [63]

Από την **(4.10)** προκύπτει

$$t' = \gamma t - \frac{1}{c}\sqrt{\left(\gamma^2-1\right)}x \Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{\sqrt{\left(\gamma^2-1\right)}}{\gamma c}x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)}$$

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές - εκ των υστέρων - αποδείξεις και τρόποι παραγωγής του μετασχηματισμού Lorentz που σε όλες επιβάλλεται οι τροποποιήσεις που θα υποστεί ο Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός να είναι γραμμικές. Από τη γραμμικότητα αυτή πηγάζει η σιγουριά ότι δεν θα εμφανιστούν δυνάμεις στο ένα σύστημα αναφοράς που δεν θα υπήρχαν στο άλλο, ή επιταχύνσεις στο ένα όταν στο άλλο η ταχύτητα είναι σταθερή. Επιπλέον ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι και αντιστρέψιμος, όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, επιτρέποντας ανά πάσα στιγμή να γυρίζουμε πίσω στις αρχικές συντεταγμένες. Οι εναρκτήριες σχέσεις σε τέτοιες αποδείξεις είναι πάντα συνδέσεις των μεταβλητών του συστήματος S (ακίνητο) με το S' (κινούμενο), $\left(x,y,z,t\right) \Leftrightarrow \left(x',y',z',t'\right)$ εισάγοντας κάποιες σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

---

[63] Από τη σχέση $a\upsilon = c\sqrt{\left(a^2-1\right)} \Rightarrow \gamma\upsilon = c\sqrt{\left(\gamma^2-1\right)} \Rightarrow \frac{\sqrt{\left(\gamma^2-1\right)}}{\gamma} = \frac{\upsilon}{c}$.

Ας δούμε σύντομα ακόμα μία που ακολουθεί μια άλλη διαδρομή[64].
Αρχικά έχουμε υπόψη μας τους Γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς:

$$x' = x - \upsilon t,\quad y' = y,\quad z' = z,\ t' = t.$$

Θα μετασχηματίσουμε αρχικά τον άξονα y: Θα πρέπει από τη γραμμικότητα να έπεται η σχέση

$$y' = Ax + By + Cz + Dt + E$$

όπου επειδή για $y = 0$ είναι και $y' = 0$, αυτό σημαίνει ότι $A = C = D = E = 0$ και

$$y' = By$$

όπου $B = \pm 1$ αν σκεφτούμε ότι μπορεί να έχουμε ταυτόχρονη αντιστροφή του άξονα x και του άξονα z και στα δύο συστήματα. Όμως επειδή πρέπει να ικανοποιείται ο ταυτοτικός μετασχηματισμός $\boxed{y' = y}$, θα είναι $B = 1$. Παρόμοια ισχύει για τον άξονα z ότι $\boxed{z' = z}$. Για τον άξονα x θα ισχύει ακολούθως ότι

$$x' = \gamma x + Fy + Gz + Ht + I$$ [65].

Επειδή για $x' = 0$ στο σύστημα S', είναι $x = \upsilon t$ στο σύστημα S, τότε

$$0 = \gamma\upsilon t + Fy + Gz + Ht + I \Rightarrow \quad 0 = (\gamma\upsilon + H)t + Fy + Gz + I$$

που δίνει

$$\gamma\upsilon + H = 0 \Rightarrow H = -\gamma\upsilon,$$

$$F = 0,$$

$$G = 0,$$

$$I = 0.$$

Επομένως

$$x' = \gamma x - \gamma\upsilon t \Rightarrow \boxed{x' = \gamma(x - \upsilon t)}\ \textbf{(4.11)}.$$

Αν τώρα κάνουμε μια αντιστροφή στον άξονα x και στα δύο συστήματα θα προκύψει:

$$-x = \gamma(-x' - \upsilon t) \Rightarrow\ x = \gamma(x' + \upsilon t')\ \textbf{(4.12)}.$$

Μένει να βρούμε το μετασχηματισμό για το χρόνο. Η **(4.11)** και **(4.12)** δίνουν:

---

[64] Αναφέρεται στο βιβλίο του Rindler (2001)

[65] Χρησιμοποιείται ο συντελεστής γ για παραδοσιακούς λόγους.

$$x=\gamma\left(\gamma\left(x-\upsilon t\right)+\upsilon t'\right)\Rightarrow x=\gamma\left(\gamma x-\gamma\upsilon t+\upsilon t'\right)\Rightarrow \gamma\upsilon t'=\gamma^2\upsilon t-\gamma^2 x+x\Rightarrow$$

$$t'=\gamma t-\gamma\frac{x}{\upsilon}+\frac{x}{\gamma\upsilon}\Rightarrow t'=\gamma\left(t-\frac{x}{\upsilon}+\frac{x}{\gamma^2\upsilon}\right)\Rightarrow$$

$$t'=\gamma\left(t-\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{x}{\upsilon}\right)\quad\textbf{(4.13)}$$

Για τον υπολογισμό της σταθεράς γ επικαλούμαστε το 2^{o} αξίωμα του Einstein για τη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα συστήματα αναφοράς, δηλαδή $x=ct$ και $x'=ct'$. Εισάγοντας τις σχέσεις αυτές στις **(4.11)** και **(4.12)** προκύπτει

$$ct'=\gamma\left(ct-\upsilon t\right)\Rightarrow ct'=\gamma t\left(c-\upsilon\right)$$

και

$$ct=\gamma\left(ct'+\upsilon t'\right)\Rightarrow ct=\gamma t'\left(c+\upsilon\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$c^2tt'=\gamma^2tt'\left(c-\upsilon\right)\left(c+\upsilon\right)\Rightarrow\gamma^2=\frac{c^2}{c^2-\upsilon^2}\Rightarrow\gamma\left(\upsilon\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\Rightarrow$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Επιλέγουμε τη θετική ρίζα γιατί όταν $\upsilon\to 0$ τότε $\gamma\to 1$ και $x'=x$, όπως πρέπει.

Τελικά είναι $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\Rightarrow 1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}=\dfrac{1}{\gamma^2}\Rightarrow 1-\dfrac{1}{\gamma^2}=\dfrac{\upsilon^2}{c^2}$ και τότε η **(4.13)** γίνεται

$$\boxed{t'=\gamma\left(t-\frac{\upsilon x}{c^2}\right)}.$$

Οδηγούμαστε πάλι στις γνωστές εξισώσεις για τις οποίες η γραμμικότητά τους επιτρέπει τη μεταφορά ουσιαστικά του $1^{ου}$ νόμου του Newton από το σύστημα S στο S' και αντιστρόφως και ότι ο χώρος που ορίζεται από τις συντεταγμένες x',y',z' είναι Ευκλείδειος. Το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ δύο γειτονικών σημείων θα δίνεται από τη σχέση

$$s^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

και από το νόμο του Einstein για τη διάδοση του φωτός, η απόσταση θα δίνεται από τη σχέση

$$s = ct \Rightarrow s^2 = c^2 t^2 ,$$

συνεπώς καταλήγουμε στη θεμελιώδη ταυτότητα

$$c'^2 t'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

5. Η αναλλοιώτητα των εξισώσεων του Maxwell

5.1 Μετασχηματισμοί Lorentz και εξισώσεις Maxwell

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μια επιτυχία των μετασχηματισμών Lorentz είναι ότι διατηρούν αναλλοίωτες τις εξισώσεις του Maxwell όταν περνάμε από ένα ακίνητο σύστημα σε ένα κινούμενο. Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε την αναλλοιώτητα αυτή στο κενό και χωρίς ρεύματα ($\rho = 0, \vec{J} = 0$).

Οι εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική μορφή είναι οι ακόλουθες:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, νόμος του Gauss (1777-1855) για το ηλεκτρικό πεδίο.

2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο.

3. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ νόμος Faraday (1791-1867), Henry (1797-1878).

4. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ νόμος Ampere (1775-1836) – Maxwell.

Ξεκινάμε από την 1^{η} **εξίσωση** για την οποία πρέπει να αποδείξουμε ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = \dfrac{\partial E_x'}{\partial x'} + \dfrac{\partial E_y'}{\partial y'} + \dfrac{\partial E_z'}{\partial z'} = 0$ (από το ακίνητο-άτονο σύστημα S, πάμε στο κινούμενο-τονούμενο σύστημα S'). Το $\vec{E}$ είναι συνάρτηση των x, y, z, t, οπότε οι παραγωγήσεις ως προς x, y, z, t στο σύστημα S θα πρέπει να μετατραπούν σε παραγωγήσεις ως προς x', y', z', t' στο σύστημα S'[66].

Για την κάθε συνιστώσα θα ισχύει:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z}$$

[66] Επειδή έχουμε θεωρήσει κίνηση του συστήματος S' παράλληλα ως προς τον άξονα x, η μεταβλητή x θα είναι συνάρτηση της x' και της t' μόνο, όπως επίσης και η μεταβλητή t θα είναι συνάρτηση της t' και της x'.

Από τους μετασχηματισμούς Lorentz προκύπτει ότι:[67]

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\gamma,\ \frac{\partial t'}{\partial x}=-\gamma\frac{\upsilon}{c^2},\ \frac{\partial y'}{\partial y}=1,\ \frac{\partial t'}{\partial y}=0,\ \frac{\partial z'}{\partial z}=1,\ \frac{\partial t'}{\partial z}=0,$$

και από τους μετασχηματισμούς των συνιστωσών των πεδίων

$$\left\{\begin{array}{l} E_x=E_x{}' \\ E_y=\gamma\left(E_y'+\upsilon B_z'\right) \\ E_z=\gamma\left(E_z'-\upsilon B_y'\right)\end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{l} B_x=B_x' \\ B_y=\gamma\left(B_y'-\dfrac{\upsilon}{c^2}E_z'\right) \\ B_z=\gamma\left(B_z'+\dfrac{\upsilon}{c^2}E_y'\right)\end{array}\right\}$$

Επομένως έχουμε διαδοχικά $\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0\Rightarrow$

$$\underset{(\mathrm{I})}{\frac{\partial E_x'}{\partial x}}+\underbrace{\frac{\partial\gamma\left(E_y'+\upsilon B_z'\right)}{\partial y}}_{(\mathrm{II})}+\underbrace{\frac{\partial\gamma\left(E_z'-\upsilon B_y'\right)}{\partial z}}_{(\mathrm{III})}=0$$

$$(\mathrm{I}):\ \frac{\partial E_x'}{\partial x}=\frac{\partial E_x'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_x'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{\partial E_x'}{\partial x'}\gamma+\frac{\partial E_x'}{\partial t'}\left(-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\right).$$

$$(\mathrm{II}):\ \gamma\frac{\partial E_y'}{\partial y}+\gamma\upsilon\frac{\partial B_z'}{\partial y}=\gamma\left(\frac{\partial E_y'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial E_y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}\right)+\gamma\upsilon\left(\frac{\partial B_z'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial B_z'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}\right)=$$

$$\gamma\left(\frac{\partial E_y'}{\partial y'}\cdot 1+0\right)+\gamma\upsilon\left(\frac{\partial B_z'}{\partial y'}\cdot 1+0\right)=\gamma\frac{\partial E_y'}{\partial y'}+\gamma\upsilon\frac{\partial B_z'}{\partial y'}.$$

$$(\mathrm{III}):\ \gamma\frac{\partial E_z'}{\partial z}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_y'}{\partial z}=\gamma\left(\frac{\partial E_z'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial E_z'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}\right)-\gamma\upsilon\left(\frac{\partial B_y'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial B_y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}\right)=$$

$$=\gamma\left(\frac{\partial E_z'}{\partial z'}\cdot 1+0\right)-\gamma\upsilon\left(\frac{\partial B_y'}{\partial z'}\cdot 1+0\right)==\gamma\frac{\partial E_z'}{\partial z'}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_y'}{\partial z'}.$$

---

[67] Λέγονται και τελεστές παραγώγισης των μετασχηματισμών Lorentz.

Από $(\mathrm{I})+(\mathrm{II})+(\mathrm{III})$ προκύπτει:

$$\underline{\underline{\frac{\partial E_x'}{\partial x'}}}\gamma+\frac{\partial E_x'}{\partial t'}\left(-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\right)+\gamma\underline{\underline{\frac{\partial E_y'}{\partial y'}}}+\gamma\upsilon\frac{\partial B_z'}{\partial y'}+\gamma\underline{\underline{\frac{\partial E_z'}{\partial z'}}}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_y'}{\partial z'}=0\Rightarrow$$

$$\gamma\left(\frac{\partial E_x'}{\partial x'}+\frac{\partial E_y'}{\partial y'}+\frac{\partial E_z'}{\partial z'}\right)-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_x'}{\partial t'}+\gamma\upsilon\frac{\partial B_z'}{\partial y'}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_y'}{\partial z'}=0\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}'=-\upsilon\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x'}{\partial t'}-\frac{\partial B_z'}{\partial y'}+\frac{\partial B_y'}{\partial z'}\right)\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}'=0$$

γιατί $\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x'}{\partial t'}-\frac{\partial B_z'}{\partial y'}+\frac{\partial B_y'}{\partial z'}=0\Rightarrow\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_1=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ νόμος Ampere-Maxwell.

Ομοίως δείχνεται ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}'=0$

Για την 3η **εξίσωση** $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, αναπτύσσοντας την, κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητών μεταξύ των δύο συστημάτων και εισάγοντας τους μετασχηματισμούς Lorentz θα έχουμε διαδοχικά:

Το 1ο μέλος γίνεται:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x}-\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}=$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}-\left(\frac{\partial E_y}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}\right)\right]\hat{x}-$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}-\left(\frac{\partial E_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}\right)\right]\hat{y}+$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}-\left(\frac{\partial E_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial E_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}\right)\hat{z}=$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y'}\underset{1}{\frac{\partial y'}{\partial y}}+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\underset{0}{\frac{\partial t'}{\partial y}}-\left(\frac{\partial E_y}{\partial z'}\underset{1}{\frac{\partial z'}{\partial z}}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\underset{0}{\frac{\partial t'}{\partial z}}\right)\right]\hat{x}-$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial x'}\underset{\gamma}{\frac{\partial x'}{\partial x}}+\frac{\partial E_z}{\partial t'}\underset{-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}}{\frac{\partial t'}{\partial x}}-\left(\frac{\partial E_x}{\partial z'}\underset{1}{\frac{\partial z'}{\partial z}}+\frac{\partial E_x}{\partial t'}\underset{0}{\frac{\partial t'}{\partial z}}\right)\right]\hat{y}+$$

$$\left[\frac{\partial E_y}{\partial x'}\underset{\gamma}{\frac{\partial x'}{\partial x}}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\underset{-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}}{\frac{\partial t'}{\partial x}}-\left(\frac{\partial E_x}{\partial y'}\underset{1}{\frac{\partial y'}{\partial y}}+\frac{\partial E_x}{\partial t'}\underset{0}{\frac{\partial t'}{\partial y}}\right)\right]\hat{z}=$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}\right)\hat{x}-\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial z'}\right)\hat{y}+\left(\gamma\frac{\partial E_y}{\partial x'}-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}\right)\hat{z}\,.$$

Το 2^{o} μέλος γίνεται:

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)=$$

$$-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial B_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial B_z}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)=$$

$$-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}\underset{\gamma}{\frac{\partial t'}{\partial t}}+\frac{\partial B_x}{\partial x'}\underset{-\gamma\upsilon}{\frac{\partial x'}{\partial t}}\right)-\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'}\underset{\gamma}{\frac{\partial t'}{\partial t}}+\frac{\partial B_y}{\partial x'}\underset{-\gamma\upsilon}{\frac{\partial x'}{\partial t}}\right)-\left(\frac{\partial B_z}{\partial t'}\underset{\gamma}{\frac{\partial t'}{\partial t}}+\frac{\partial B_z}{\partial x'}\underset{-\gamma\upsilon}{\frac{\partial x'}{\partial t}}\right)=$$

$$-\left(\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right)-\left(\gamma\frac{\partial B_y}{\partial t'}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right)-\left(\gamma\frac{\partial B_z}{\partial t'}-\gamma\upsilon\frac{\partial B_z}{\partial x'}\right).$$

Από την ισότητα των δύο μελών προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial E_z}{\partial y'}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z'}=-\gamma\dfrac{\partial B_x}{\partial t'}+\gamma\upsilon\dfrac{\partial B_x}{\partial x'}\\ -\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial x'}+\gamma\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t'}+\dfrac{\partial E_x}{\partial z'}=-\gamma\dfrac{\partial B_y}{\partial t'}+\gamma\upsilon\dfrac{\partial B_y}{\partial x'}\\ \gamma\dfrac{\partial E_y}{\partial x'}-\gamma\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{\partial E_y}{\partial t'}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\dfrac{\partial B_z}{\partial t'}+\gamma\upsilon\dfrac{\partial B_z}{\partial x'}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial E_z}{\partial y'}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z'}=\gamma\left(\upsilon\dfrac{\partial B_x}{\partial x'}-\dfrac{\partial B_x}{\partial t'}\right)\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\dfrac{\partial E_z}{\partial x'}-\gamma\upsilon\dfrac{\partial B_y}{\partial x'}=-\gamma\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t'}-\gamma\dfrac{\partial B_y}{\partial t'}\\ \gamma\dfrac{\partial E_y}{\partial x'}-\gamma\upsilon\dfrac{\partial B_z}{\partial x'}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y'}=\gamma\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{\partial E_y}{\partial t'}-\gamma\dfrac{\partial B_z}{\partial t'}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial E_z}{\partial y'}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z'}=\gamma\left(\upsilon\dfrac{\partial B_x}{\partial x'}-\dfrac{\partial B_x}{\partial t'}\right)...(5.1)\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\dfrac{\partial}{\partial x'}\left(E_z+\upsilon B_y\right)=-\gamma\dfrac{\partial}{\partial t'}\left(\dfrac{\upsilon}{c^2}E_z+B_y\right)...(5.2)\\ \gamma\dfrac{\partial}{\partial x'}\left(E_y-\upsilon B_z\right)-\dfrac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\dfrac{\partial}{\partial t'}\left(B_z-\dfrac{\upsilon}{c^2}E_y\right)...(5.3)\end{array}\right\}$$

Από τις εξισώσεις αυτές μπορούν να προκύψουν οι μετασχηματισμοί για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αν δούμε ότι είναι πανομοιότυπες με τις εξισώσεις

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial E_z'}{\partial y'}-\dfrac{\partial E_y'}{\partial z'}=-\dfrac{\partial B_x'}{\partial t'}\\ \dfrac{\partial E_x'}{\partial z'}-\dfrac{\partial E_z'}{\partial x'}=-\dfrac{\partial B_y'}{\partial t'}\\ \dfrac{\partial E_y'}{\partial x'}-\dfrac{\partial E_x'}{\partial y'}=-\dfrac{\partial B_z'}{\partial t'}\end{array}\right\}$$

ως εξής:

Από την **(5.2)** είναι $\boxed{E_x'=E_x}$, $\boxed{E_z'=\gamma\left(E_z+\upsilon B_y\right)}$, $\boxed{B_y'=\gamma\left(B_y+\dfrac{\upsilon}{c^2}E_z\right)}$

Από την **(5.3)** είναι $\boxed{E_y' = \gamma\left(E_y - \upsilon B_z\right)}$, $\boxed{B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right)}$ και μας λείπει ο μετασχηματισμός της B_x. Θα χρησιμοποιήσουμε τη 2η εξίσωση του Maxwell στην οποία θα εισάγουμε τους τελεστές παραγώγισης του μετασχηματισμού Lorentz:

$$\nabla\vec{B} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{\gamma} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0.$$

Στην τελευταία σχέση μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου B_y και B_z από τους μετασχηματισμούς που βρήκαμε προηγουμένως κάνοντας αντιστροφή σε αυτούς ανταλλάσσοντας τα τονούμενα με τα άτονα και θέτοντας όπου $\upsilon \to -\upsilon$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0 \xRightarrow[B_z=\gamma\left(B_z'-\frac{\upsilon}{c^2}E_y'\right)]{B_y=\gamma\left(B_y'-\frac{\upsilon}{c^2}E_z'\right)}$$

$$\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\gamma\left(B_y' - \frac{\upsilon}{c^2}E_z'\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\gamma\left(B_z' - \frac{\upsilon}{c^2}E_y'\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_z'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_y'}{\partial z'} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} = \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_z'}{\partial y'} + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial E_y'}{\partial z'} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} = \frac{\upsilon}{c^2}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial E_z'}{\partial y'} + \frac{\partial E_y'}{\partial z'}\right) \quad \textbf{(5.4)}$$

Τώρα από την 3η εξίσωση του Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ για την x - συνιστώσα έχουμε

$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$ στην οποία θα εισάγουμε τους τελεστές παραγώγισης των μετασχηματισμών Lorentz ως προς χρόνο δηλαδή

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial B_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{\gamma}+\frac{\partial B_x}{\partial x'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{-\gamma\upsilon}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\upsilon\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right)$$

στην οποία θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τους αντίστροφους μετασχηματισμούς για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_y και E_z όπως φαίνεται ακολούθως:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\upsilon\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right)\xRightarrow[E_z=\gamma\left(E_z'-\upsilon B_y'\right)]{E_y=\gamma\left(E_y'+\upsilon B_z'\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\gamma\left(E_z'-\upsilon B_y'\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\gamma\left(E_y'+\upsilon B_z'\right)=-\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\upsilon\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\upsilon\frac{\partial B_y'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}-\upsilon\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\upsilon\frac{\partial B_x}{\partial x'}\Rightarrow$$

$$\upsilon\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\upsilon\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\upsilon\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)\quad\textbf{(5.5)}$$

Επειδή είναι $\upsilon\neq c$ οι σχέσεις **(5.4)** και **(5.5)** είναι ισοδύναμες αν

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=0 \;\; \textbf{(5.6α)}$$

και

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}=0 \;\; \textbf{(5.7α)}$$

που σημαίνει ότι αν οι εξισώσεις του Maxwell είναι ίδιες και στο ακίνητο σύστημα S και στο κινούμενο S', τότε θα ισχύει

$$\nabla \vec{B}'=0 \Rightarrow \frac{\partial B_x'}{\partial x'}+\frac{\partial B_y'}{\partial y'}+\frac{\partial B_z'}{\partial z'}=0 \;\; \textbf{(5.6β)}$$

και

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}'=-\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \Rightarrow^{x-\sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha} \frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x'}{\partial t'} \;\; \textbf{(5.7β)}.$$

Από **(5.6α)**, **(5.6β)** ή από **(5.7α)**, **(5.7β)** προκύπτει ότι $\boxed{B_x'=B_x}$.

Αντιστοίχως μπορούμε να δουλέψουμε και για την **4η εξίσωση** $\vec{\nabla}\times\vec{B}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

5.2 Τανυστές και εξισώσεις Maxwell

Στην ενότητα αυτή θα εξάγουμε τις εξισώσεις του Maxwell με τη χρήση τανυστών. Για ποιο λόγο όμως; Ποιο είναι το όφελος; Ακριβώς επειδή ένας τανυστής είναι μια ποσότητα αναλλοίωτη, εξ ορισμού, αν βρούμε κατάλληλο τανυστή που να περιγράφει τις εξισώσεις του Maxwell τότε αποδεικνύεται για άλλη μια φορά η αναλλοιώτητα τους.

Ορίζουμε τον ηλεκτρομαγνητικό τανυστή έντασης $F_{\mu\nu}=\partial_\mu \mathrm{A}_\nu-\partial_\nu \mathrm{A}_\mu$ για τον οποίον το A_μ είναι ένα τετράνυσμα, ή συμμεταβλητό διάνυσμα ή συναλλοίωτο (Covariant vector) το οποίο παραστάνει το *τετραδυναμικό*, τέτοιο ώστε κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz να συμπεριφέρεται ακριβώς όπως οι χωροχρονικές συντεταγμένες δηλαδή όπως ισχύει $x'_\mu=\Lambda^\nu_\mu x_\nu$ [68] να ισχύει επίσης $\mathrm{A}'_\mu=\Lambda^\nu_\mu \mathrm{A}_\nu$. Επίσης

[68] Λ^ν_μ είναι ο πίνακας Lorentz. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ.

το τετραδυναμικό ορίζεται ως $A_\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right)$ όπου Φ είναι ένα βαθμωτό πεδίο που παριστάνει το βαθμωτό δυναμικό του ηλεκτρισμού και $\vec{A}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που παριστάνει το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητισμού αντίστοιχα. Γιατί επιλέχθηκε αυτός ο τανυστής; Θα δούμε ότι δεν είναι τυχαία αυτή η μορφή. Ας θεωρήσουμε την ποσότητα $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Τότε αν την αναπτύξουμε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \left(\vec{B}\right)_i = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k .$$

$$B_1 = \varepsilon_{1jk}\partial_j A_k = \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0}\partial_1 A_k + \varepsilon_{12k}\partial_2 A_k + \varepsilon_{13k}\partial_3 A_k =$$

$$\cancel{\varepsilon_{121}\partial_2 A_1} + \cancel{\varepsilon_{122}\partial_2 A_2} + \varepsilon_{123}\partial_2 A_3 + \cancel{\varepsilon_{131}\partial_3 A_1} + \varepsilon_{132}\partial_3 A_2 + \cancel{\varepsilon_{133}\partial_3 A_3} \Rightarrow$$

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 .$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει

$$B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3$$

και

$$B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 .$$

Προσοχή! *Οι παραπάνω σχέσεις είναι οι εκφράσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου με δεικτικό συμβολισμό όπως προκύπτουν από την ανάπτυξη της ορίζουσας του* $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Τότε $F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_3}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_3} =^{69} -\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) = -B_1$.

Αντιστοίχως $F_{31} = -B_2$, $F_{12} = -B_3$

Η ποσότητα $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ επίσης δεν επιλέχθηκε τυχαία: Γνωρίζουμε τον νόμο του Gauss για το μαγνητικό πεδίο ότι είναι $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και τη γνωστή ταυτότητα για την απόκλιση της στροφής $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$. (το $\vec{A}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό)

---

[69] Ισχύει $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}$

Με τρόπο αντίστοιχο μπορούμε να θεωρήσουμε την ποσότητα $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t}$ για το ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει από το νόμο Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}}\right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} \right) = 0$$

που σημαίνει ότι υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση Φ τέτοια ώστε $\vec{E} + \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi$, δηλαδή τελικά

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial t}.$$

Ας δούμε τις συνιστώσες του: Ενθυμούμενοι ότι $\mathrm{A}_\mu = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{\mathrm{A}} \right)$

$$F_{01} = \partial_0 \mathrm{A}_1 - \partial_1 \mathrm{A}_0 = \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x_0} - \frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial (ct)} - \left(-\frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\Phi}{c} =$$

$$-\frac{1}{c}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{c}\mathrm{E}_1$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$F_{02} = \partial_0 \mathrm{A}_2 - \partial_2 \mathrm{A}_0 = -\frac{1}{c}\mathrm{E}_2$$

και

$$F_{03} = \partial_0 \mathrm{A}_3 - \partial_3 \mathrm{A}_0 = -\frac{1}{c}\mathrm{E}_3$$

Βρήκαμε μερικές συνιστώσες του τανυστή $F_{\mu\nu}$ και μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή πίνακα.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

Μένουν μόνο ορισμένες ακόμα ιδιότητες:

Ο τανυστής $F_{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός (εκ κατασκευής) ($F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$), επομένως τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του θα είναι μηδέν, $F_{00} = F_{ii} = 0$. Οι δείκτες μ,ν παίρνουν τιμές $0,1,2,3$ όπου όταν τουλάχιστον ένας εκ των δύο είναι $\mu = 0$ ή $\nu = 0$ τότε έχουμε χρονική συνιστώσα (παίρνουμε το ηλεκτρικό πεδίο) ενώ αν $\mu \neq 0$ και $\nu \neq 0$ τότε έχουμε χωρική συνιστώσα (παίρνουμε το μαγνητικό πεδίο).

Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω δεδομένα ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής της έντασης μπορεί να γραφτεί ως

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\mathrm{E}_1 & -\frac{1}{c}\mathrm{E}_2 & -\frac{1}{c}\mathrm{E}_3 \\ \frac{1}{c}\mathrm{E}_1 & 0 & -\mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_2 \\ \frac{1}{c}\mathrm{E}_2 & \mathrm{B}_3 & 0 & -\mathrm{B}_1 \\ \frac{1}{c}\mathrm{E}_3 & -\mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell τώρα μπορούν να συσχετιστούν με τον τανυστή $F_{\mu\nu}$ και να γραφούν σε μορφή (τανυστική) που να εξασφαλίζει την αναλλοιώτητά τους ως εξής.

Οι ***μη ομογενείς εξισώσεις*** του Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ και $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$ μπορούν να πάρουν την μορφή

$$\boxed{\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = \mu_0 J_{\nu}},$$

όπου

$$J_{\nu} = \left(\rho c, \vec{J}\right).$$

$\rightarrow$ Για $\nu = 0$ ας πούμε, παίρνουμε χρονική συνιστώσα, δηλαδή έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\partial^{\mu} F_{\mu 0} = \mu_0 J_0 \Rightarrow$$

$$\partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} = \mu_0 \rho c \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{E_1}{c} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{E_2}{c} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{E_3}{c} = \frac{\rho}{c\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{c\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\rightarrow$ Για $\nu \neq 0$ και $\mu = 0,1,2,3$ παίρνουμε τη χωρική συνιστώσα, δηλαδή την έκφραση για το μαγνητικό πεδίο:

$$\partial^{\mu} F_{\mu 1} + \partial^{\mu} F_{\mu 2} + \partial^{\mu} F_{\mu 3} =$$

$$\partial^0 F_{01} + \partial^1 F_{11} + \partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} +$$

$$\partial^0 F_{02} + \partial^1 F_{12} + \partial^2 F_{22} + \partial^3 F_{32} +$$

$$\partial^0 F_{03} + \partial^1 F_{13} + \partial^2 F_{23} + \partial^3 F_{33} =$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(-\frac{E_1}{c}\right) + 0 + \frac{\partial}{\partial x_2}B_3 + \frac{\partial}{\partial x_3}(-B_2) +$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(-\frac{E_2}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}(-B_3) + 0 + \frac{\partial}{\partial x_3}B_1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(-\frac{E_3}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}B_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}(-B_1) + 0 =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}B_3-\frac{\partial}{\partial x_3}B_2\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}B_3-\frac{\partial}{\partial x_3}B_1\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_1}B_2-\frac{\partial}{\partial x_2}B_1\right)-$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_2}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t}\right)=$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Επίσης $\mu_0 J_1+\mu_0 J_2+\mu_0 J_3=\mu_0\vec{J}$ οπότε συνολικά $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Οι ***ομογενείς εξισώσεις*** του Maxwell, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ και $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}=0}$$

όπου

$$F^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$$

ο αντισυμμεταβλητός τανυστής (contravariant tensor) που αντιστοιχεί στο ίδιο μαγνητικό αλλά αντίθετο ηλεκτρικό πεδίο σε σχέση με τον συμμεταβλητό τανυστή $F_{\mu\nu}$, ο οποίος είναι

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{c}\mathrm{E}_1 & \frac{1}{c}\mathrm{E}_2 & \frac{1}{c}\mathrm{E}_3\\ -\frac{1}{c}\mathrm{E}_1 & 0 & -\mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_2\\ -\frac{1}{c}\mathrm{E}_2 & \mathrm{B}_3 & 0 & -\mathrm{B}_1\\ -\frac{1}{c}\mathrm{E}_3 & -\mathrm{B}_2 & \mathrm{B}_1 & 0\end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον συζυγή τανυστή

$$\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

όπου για το σύμβολο $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ ισχύει η ιδιότητα:

$$-\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}=\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}=\begin{cases}1,\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\theta\varepsilon\sigma\eta\\ -1,\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}\ \mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\theta\varepsilon\sigma\eta\\ 0,\ \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\end{cases},\ \text{με}\ \varepsilon^{0123}=+1.$$

Ας βρούμε τα στοιχεία του πίνακα αυτού:

$$F^{00}=F^{11}=F^{22}=F^{33}=0$$

$$F^{01}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{0123}F_{23}+\varepsilon^{0132}F_{32}\right)=\frac{1}{2}\left(-B_1-B_1\right)=-B_1$$

$$F^{02}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{0213}F_{13}+\varepsilon^{0231}F_{31}\right)=\frac{1}{2}\left(-B_2-B_2\right)=-B_2$$

$$F^{03}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{0312}F_{12}+\varepsilon^{0321}F_{21}\right)=\frac{1}{2}\left(-B_3-B_3\right)=-B_3$$

$$F^{10}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{1023}F_{23}+\varepsilon^{1032}F_{32}\right)=\frac{1}{2}\left(B_1+B_1\right)=B_1$$

$$F^{20}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{2013}F_{13}+\varepsilon^{2031}F_{31}\right)=\frac{1}{2}\left(B_2+B_2\right)=B_2$$

$$F^{30}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{3012}F_{12}+\varepsilon^{3021}F_{21}\right)=\frac{1}{2}\left(B_3+B_3\right)=B_3$$

$$F^{12}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{1203}F_{03}+\varepsilon^{1230}F_{30}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{E_3}{c}-\frac{E_3}{c}\right)=-\frac{E_3}{c}$$

$$F^{13}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{1302}F_{02}+\varepsilon^{1320}F_{20}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{E_2}{c}+\frac{E_2}{c}\right)=\frac{E_2}{c}$$

$$F^{23}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{2301}F_{01}+\varepsilon^{2310}F_{10}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{E_1}{c}-\frac{E_1}{c}\right)=-\frac{E_1}{c}$$

$$F^{21}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{2103}F_{03}+\varepsilon^{2130}F_{30}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{E_3}{c}+\frac{E_3}{c}\right)=\frac{E_3}{c}$$

$$F^{31}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon^{3102}F_{02}+\varepsilon^{3120}F_{20}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{E_2}{c}-\frac{E_2}{c}\right)=-\frac{E_2}{c}$$

$$F^{32} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{3201}F_{01} + \varepsilon^{3210}F_{10}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_1}{c}\right) = \frac{E_1}{c}$$

Τελικά καταλήγουμε

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{B}_1 & -\mathrm{B}_2 & -\mathrm{B}_3 \\ \mathrm{B}_1 & 0 & -\frac{1}{c}\mathrm{E}_3 & \frac{1}{c}\mathrm{E}_2 \\ \mathrm{B}_2 & \frac{1}{c}\mathrm{E}_3 & 0 & -\frac{1}{c}\mathrm{E}_1 \\ \mathrm{B}_3 & -\frac{1}{c}\mathrm{E}_2 & \frac{1}{c}\mathrm{E}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Οπότε αν πάρουμε την εξίσωση $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ για $\nu = 1$ και $\mu = 0,1,2,3$ θα έχουμε:

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \underbrace{\partial_1 F^{11}}_{0} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} =$$

$$\partial x_0 F^{01} + \partial x_2 F^{21} + \partial x_3 F^{31} =$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} =$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial(-B_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{E_3}{c} + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(-\frac{E_2}{c}\right) =$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{E_3}{c} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{E_2}{c} =$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) =$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} - \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_1 = -\frac{\partial B_1}{\partial t}$$

για τη μία συνιστώσα και ομοίως για τις άλλες οπότε συνολικά προκύπτει

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\rightarrow$ Τέλος αν πάρουμε στην εξίσωση $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ για $\nu = 0$ και $\mu = 0,1,2,3$ τότε θα έχουμε:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} =$$

$$\partial_0 F^{00}_{\;\;0} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} B_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} B_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} B_3 =$$

$$-\frac{\partial B_1}{\partial x_1} - \frac{\partial B_2}{\partial x_2} - \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

5.3 Το διάνυσμα Poynting

Για την περιγραφή της ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφανείας, δηλαδή της έντασης ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος χρησιμοποιούμε η διανυσματική ποσότητα που ονομάζεται διάνυσμα Poynting και δίνεται από τη σχέση

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Ας δούμε πως μετασχηματίζεται κάτω από τις συνιστώσες των πεδίων δηλαδή τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$E_x = E'_x,\; E_y = \gamma\left(E'_y + \upsilon B'_z\right),\; E_z = \gamma\left(E'_z - \upsilon B'_y\right)$$

$$B_x = B'_x,\; B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{\upsilon}{c^2} E'_z\right),\; B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{\upsilon}{c^2} E'_y\right)$$

Το $\vec{E} \times \vec{B}$ αναπτύσσεται ως εξής:

$$\vec{E}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ E_x & E_y & E_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\left(E_yB_z-E_zB_y\right)\hat{x}-\left(E_xB_z-E_zB_x\right)\hat{y}+\left(E_xB_y-E_yB_x\right)\hat{z}.$$ Θα σχηματίσουμε κάθε συνιστώσα ξεχωριστά εισάγωντας τις εξισώσεις των παραπάνω μετασχηματισμών.

Συνιστώσα $\hat{x}$:

$$E_yB_z-E_zB_y=\gamma\left(E'_y+\upsilon B'_z\right)\gamma\left(B'_z+\frac{\upsilon}{c^2}E'_y\right)-\gamma\left(E'_z-\upsilon B'_y\right)\gamma\left(B'_y-\frac{\upsilon}{c^2}E'_z\right)=$$

$$\gamma^2\left(E'_yB'_z+\frac{\upsilon}{c^2}E'^2_y+\upsilon B'^2_z+\frac{\upsilon^2}{c^2}E'_yB'_z\right)-\gamma^2\left(E'_zB'_y-\frac{\upsilon}{c^2}E'^2_z-\upsilon B'^2_y+\frac{\upsilon^2}{c^2}E'_zB'_y\right)=$$

$$\gamma^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)E'_yB'_z-\gamma^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)E'_zB'_y+\gamma^2\left(\frac{\upsilon}{c^2}E'^2_y+\upsilon B'^2_z\right)+\gamma^2\left(\frac{\upsilon}{c^2}E'^2_z+\upsilon B'^2_y\right)=$$

$$\gamma^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(E'_yB'_z-E'_zB'_y\right)+\gamma^2\left(\frac{\upsilon}{c^2}E'^2_y+\upsilon B'^2_z\right)+\gamma^2\left(\frac{\upsilon}{c^2}E'^2_z+\upsilon B'^2_y\right)=$$

$$\gamma^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(E'_yB'_z-E'_zB'_y\right)+\gamma^2\upsilon\left(\frac{E'^2_y}{c^2}+B'^2_z\right)+\gamma^2\upsilon\left(\frac{E'^2_z}{c^2}+B'^2_y\right)\Rightarrow$$

$$E_yB_z-E_zB_y=\gamma^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(E'_yB'_z-E'_zB'_y\right)+\gamma^2\upsilon\left(\frac{E'^2_y}{c^2}+B'^2_z+\frac{E'^2_z}{c^2}+B'^2_y\right)$$

Συνιστώσα $\hat{y}$:

$$E_xB_z-E_zB_x=E'_x\gamma\left(B'_z+\frac{\upsilon}{c^2}E'_y\right)-\gamma\left(E'_z-\upsilon B'_y\right)B'_x=$$

$$\gamma E'_xB'_z+\gamma\frac{\upsilon}{c^2}E'_xE'_y-\gamma E'_zB'_x+\gamma\upsilon B'_xB'_y\Rightarrow$$

$$E_xB_z-E_zB_x=\gamma\left(E'_xB'_z-E'_zB'_x\right)+\gamma\upsilon\left(\frac{E'_xE'_y}{c^2}+B'_xB'_y\right)$$

Συνιστώσα $\hat{z}$:

$$E_xB_y - E_yB_x = E'_x\gamma\left(B'_y - \frac{\upsilon}{c^2}E'_z\right) - \gamma\left(E'_y + \upsilon B'_z\right)B'_x =$$

$$\gamma E'_xB'_y - \gamma\frac{\upsilon}{c^2}E'_xE'_z - \gamma E'_yB'_x - \gamma\upsilon B'_zB'_x \Rightarrow$$

$$E_xB_y - E_yB_x = \gamma\left(E'_xB'_y - E'_yB'_x\right) - \gamma\upsilon\left(\frac{E'_xE'_z}{c^2} + B'_xB'_z\right)$$

Δηλαδή συνολικά

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left[\gamma^2\left(1+\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(E'_yB'_z - E'_zB'_y\right) + \gamma^2\upsilon\left(\frac{E'^2_y}{c^2} + B'^2_z + \frac{E'^2_z}{c^2} + B'^2_y\right)\right]\hat{x} -$$

$$\left[\gamma\left(E'_xB'_z - E'_zB'_x\right) + \gamma\upsilon\left(\frac{E'_xE'_y}{c^2} + B'_xB'_y\right)\right]\hat{y} +$$

$$\left[\gamma\left(E'_xB'_y - E'_yB'_x\right) - \gamma\upsilon\left(\frac{E'_xE'_z}{c^2} + B'_xB'_z\right)\right]\hat{z}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι ιδιαίτερα κομψό αφού τα πεδία είναι τυχαία. Αν όμως θέλουμε να δούμε πως μετασχηματίζεται το Η/Μ κύμα τότε για διάδοση στον άξονα z και κίνηση του συστήματος στον άξονα x θα έχουμε:

$$\vec{E} = E\hat{x},\ \vec{B} = B\hat{y},\ \vec{k} = k\hat{z}.$$

Οπότε $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}E_xB_y\vec{z}$.

Εισάγοντας τους μετασχηματισμούς προκύπτει

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}E'_x\begin{pmatrix} -\frac{\upsilon}{c^2}E'_y \\ 0 \end{pmatrix}\vec{z} = \frac{1}{\mu_0}\gamma E'_xB'_y\vec{z}$$

Δηλαδή

$$\vec{S} = \gamma\vec{S}'.$$

6. Κυματική εξίσωση και αναλλοιώτητα

Με διαδικασία αντίστοιχη με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα δείξουμε ότι και η κυματική εξίσωση μένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz αλλά όχι από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου. Ξεκινώντας από την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

θα θέσουμε τους τελεστές παραγώγισης των μετασχηματισμών Lorentz.

Είναι $x'=\gamma(x-\upsilon t)$ επομένως

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\gamma\frac{\partial\psi}{\partial x'}-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\left(\gamma\frac{\partial\psi}{\partial x'}-\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right)^2=\gamma^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}-2\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\gamma^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}-2\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'}\right)}.$$

Ως προς το χρόνο επειδή $t'=\gamma(t-\frac{\upsilon}{c^2}x)$ θα έχουμε αντιστοίχως,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}=\gamma\frac{\partial\psi}{\partial t'}-\gamma\upsilon\frac{\partial\psi}{\partial x'}\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}=$$

$$\gamma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t'}-\upsilon\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)^2=\gamma^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\upsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}-2\upsilon\frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\gamma^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\upsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}-2\upsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x'}\right)}.$$

Προφανώς είναι

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}\ \text{και}\ \boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}}.$$

Η κυματική εξίσωση λοιπόν γίνεται:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Rightarrow \gamma^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}-2\frac{\upsilon}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}=$$

$$\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\upsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}-2\upsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x'}\right)\Rightarrow \gamma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon^2\gamma^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}\cancel{-2\frac{\upsilon\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\frac{\upsilon^2\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}\cancel{-2\frac{\upsilon\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x'}}\Rightarrow$$

$$\gamma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\upsilon^2\gamma^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\frac{\upsilon^2\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}\Rightarrow$$

$$\gamma^2\underbrace{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}_{\frac{1}{\gamma^2}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}\underbrace{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}_{\frac{1}{\gamma^2}}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}}\text{, ο.ε.δ.}$$

Για τους τελεστές παραγώγισης των μετασχηματισμών Γαλιλαίου θα έχουμε αντιστοίχως ότι επειδή $x'=x-\upsilon t$ και $t'=t$ θα είναι για τη θέση

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot 1+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot 0=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}}$$

και για το χρόνο

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot 1+\frac{\partial\psi}{\partial x'}\left(-\upsilon\right)=\frac{\partial\psi}{\partial t'}-\upsilon\frac{\partial\psi}{\partial x'}\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}+\upsilon^2\frac{\partial\psi^2}{\partial x^{2}{}'}-2\upsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x'}}$$

Επίσης πάλι ισχύουν

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}\text{ και }\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial z'^2}}$$

και η κυματική εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2}+\upsilon^2\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2{}'}-2\upsilon\frac{\partial^2 \psi}{\partial t'\partial x'}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2}+\underbrace{\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2{}'}-\frac{2\upsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t'\partial x'}}_{\text{επιπλέον όροι}}}$$

που μας δείχνει ότι δεν μένει αναλλοίωτη αλλά αλλάζει μορφή κάτω από τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

7. Αναλλοιώτητα μεγεθών και ποσοτήτων

Η αναλλοιώτητα των μεγεθών της φυσικής ή των εσωτερικών γινομένων ή άλλων παραστάσεων που εμπλέκουν φυσικά μεγέθη είναι μια σημαντική ιδιότητα όταν κάνουμε μετασχηματισμούς. Οι σχέσεις των μετασχηματισμών μας δίνουν ακριβώς αυτό λένε, δηλαδή μια σχέση, μια διόρθωση, ώστε να συμφωνούν δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε αδρανειακά συστήματα ως προς τις μετρήσεις τους. Με απλά λόγια να ισχύει η ίδια φυσική και για τους δύο.

Υπάρχουν μεγέθη όμως που διατηρούν αυτό το αναλλοίωτο και αυτό εξηγείται τελικά ως επιλογή της ίδιας της φύσης. Οι γνωστές αρχές διατήρησης ενέργειας, ορμής και άλλες δεν είναι ένα τέχνασμα ή μια επινόηση για να λύνουμε ασκήσεις στα λυκειακά μας χρόνια, αλλά απεναντίας ένας κανόνας, ένας όρος που θέτει η φύση για να λειτουργεί. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με την αναλλοιώτητα[70]: Σε όλη τη σχετικότητα συναντούμε μετασχηματισμούς μεταξύ των μεγεθών που μετράμε, αυτό όμως που έχει μεγαλύτερη αξία είναι να βρίσκουμε ποια από αυτά τα μεγέθη παραμένουν αναλλοίωτα.

Το φορτίο για παράδειγμα ως γενικότερη ιδιότητα της ύλης στην οποία οφείλουμε τις ηλεκτρικές δυνάμεις παραμένει αναλλοίωτο κατά την κίνηση. Αυτό αποτελεί πειραματικό δεδομένο. Παρατηρείται δηλαδή ότι τα άτομα στην ελεύθερή τους μορφή παραμένουν ουδέτερα γιατί αν και τα ηλεκτρόνιά τους κινούνται με μεγάλες ταχύτητες είτε είναι στη θεμελιώδη στάθμη είτε αλλού, τελικά δεν υπάρχει μεταβολή φορτίου λόγω της ταχύτητας.

Επιπλέον από τη δεκαετία του 1960 και έπειτα έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες διατάξεις[71] με μόρια H_2 και άτομα He, στις οποίες το αέριο αρχικά είναι ηλεκτρικά απομονωμένο σε ένα δοχείο στο οποίο υπάρχει μικρή οπή από όπου μπορεί να διαφύγει το αέριο μεν αλλά με κάποιο τρόπο εμποδίζεται η διαφυγή ιονισμένων μορίων. Τα ηλεκτρόνια στα άτομα του υδρογόνου κινούνται με ταχύτητες περίπου $0{,}007c$ και στα άτομα του ηλίου με περίπου διπλάσιες. Όλα τα αποτελέσματα ήταν μέσα στα όρια ευαισθησίας των πειραμάτων, όπου τα επόμενα χρόνια και από τον King αλλά και άλλους πειραματικούς ερευνητές αυτά βελτιώθηκαν σημαντικά.

[70] Ας μην γίνει παρανόηση ότι αρχή διατήρησης και αναλλοιώτητα είναι το ίδιο πράγμα.
[71] J.G. King, Phys. Rev. Letters 5, 562 (1962).

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E}\cdot\vec{B}$ είναι επίσης αναλλοίωτο. Ας το δούμε. Θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς των συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

$$E_x = E_x', \; E_y = \gamma\left(E_y' + \upsilon B_z'\right), \; E_z = \gamma\left(E_z' - \upsilon B_y'\right)$$

$$B_x = B_x', \; B_y = \gamma\left(B_y' - \frac{\upsilon}{c^2}E_z'\right), \; B_z = \gamma\left(B_z' + \frac{\upsilon}{c^2}E_y'\right)$$

Ξεκινώντας από το $\vec{E}\cdot\vec{B}$ θα πρέπει να δειχθεί ότι $\vec{E}\cdot\vec{B} = \vec{E}'\cdot\vec{B}'$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z =$$

$$E_x'B_x' + \gamma\left(E_y' + \upsilon B_z'\right)\gamma\left(B_y' - \frac{\upsilon}{c^2}E_z'\right) + \gamma\left(E_z' - \upsilon B_y'\right)\gamma\left(B_z' + \frac{\upsilon}{c^2}E_y'\right) =$$

$$E_x'B_x' + \gamma^2\left(E_y'B_y' - \frac{\upsilon}{c^2}E_y'E_z' + \upsilon B_z'B_y' - \frac{\upsilon^2}{c^2}B_z'E_z'\right) +$$

$$\gamma^2\left(E_z'B_z' + \frac{\upsilon}{c^2}E_z'E_y' - \upsilon B_y'B_z' - \frac{\upsilon^2}{c^2}B_y'E_y'\right) =$$

$$E_x'B_x' + \gamma^2\left(E_y'B_y' - \frac{\upsilon^2}{c^2}B_z'E_z'\right) + \gamma^2\left(E_z'B_z' - \frac{\upsilon^2}{c^2}B_y'E_y'\right) =$$

$$E_x'B_x' + \gamma^2\left(E_y'B_y' - \frac{\upsilon^2}{c^2}B_z'E_z' + E_z'B_z' - \frac{\upsilon^2}{c^2}B_y'E_y'\right) =$$

$$E_x'B_x' + \gamma^2\left(\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)B_y'E_y' + \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)B_z'E_z'\right) =$$

$$E_x'B_x' + \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(B_y'E_y' + B_z'E_z'\right) =$$ [72]

$$E_x'B_x' + B_y'E_y' + B_z'E_z' = \vec{E}'\cdot\vec{B}' \text{ ο.ε.δ.}$$

[72] $\gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = \gamma^2\frac{1}{\gamma^2} = 1$

Δεν είναι όμως όλα τα κλασικά εσωτερικά γινόμενα (απλών διανυσμάτων) αναλλοίωτα!

Απεναντίας είναι αναλλοίωτα όλα τα εσωτερικά γινόμενα τετρανυσμάτων (!) Καθώς και όλα τα τετράγωνα των τετρανυσμάτων !

Ας δούμε μερικά:

Σε αντιστοιχία με τη κλασική φυσική, στη σχετικότητα χρησιμοποιούμε το πρόθεμα τετρα- για τα μεγέθη. Έτσι έχουμε τετραθέση, τετραταχύτητα, τετραεπιτάχυνση, τετραδυναμικό και άλλα. Η ουσιαστικότερη ίσως διαφορά είναι ότι οι παραγωγήσεις δεν γίνονται ως προς το χρόνο, που εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς, αλλά ως προς τον ιδιοχρόνο που είναι ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς.

Ορίζουμε την έννοια του τετρανύσματος $\mathrm{A}^{\mu} = \left(\underset{\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma}{\mathrm{A}^0} \;,\; \underset{\chi\acute{\omega}\rho o\varsigma}{\vec{\mathrm{A}}} \right)$ και την έννοια του εσωτερικού γινομένου τετρανύσματος

$$\mathrm{A}_{\mu}\mathrm{B}^{\mu} = \mathrm{A}_0\mathrm{B}^0 - \vec{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{A}_0\mathrm{B}^0 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 - \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$$

και αν $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ τότε

$$\mathrm{A}_{\mu}\mathrm{A}^{\mu} = \left(\mathrm{A}_{\mu}\right)^2 = \left(\mathrm{A}^{\mu}\right)^2 = \left(\mathrm{A}^0\right)^2 - \mathrm{A}^2$$

Τετραθέση: $x^{\mu} = \left(ct, \vec{r}\right)$, όπου $\mu = 0,1,2,3$ δηλαδή $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(ct, x, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right)$.

Τετραταχύτητα: $\upsilon^{\mu} = \left(\gamma c, \gamma \vec{\upsilon}\right)$

Τετραορμή: $p^{\mu} = \left(\dfrac{\mathrm{E}}{c}, \vec{p}\right)$

Τετρακυματάριθμος: $k^{\mu} = \left(\dfrac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$

Τετραδυναμικό: $V^{\mu} = \left(\underset{\substack{\delta\iota\alpha\nu\upsilon\sigma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{o}}}{\dfrac{\vec{\mathrm{A}}}{c}} \;,\; \underset{\substack{\beta\alpha\theta\mu\omega\tau\acute{o} \\ \delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{o}}}{\mathrm{V}} \right)$ ή $V^{\mu} = \left(\dfrac{\vec{\mathrm{A}}}{c}, \Phi\right)$

Ένα παράδειγμα εσωτερικού γινομένου τετρανυσμάτων είναι ο τετρακυματάριθμος με την τετραθέση που δίνει:

$$k_\mu x^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)\left(ct, \vec{r}\right) = \frac{\omega}{c}ct - \vec{k}\vec{r} = \omega t - \vec{k}\vec{r} = \varphi$$

που είναι η φάση, αναλλοίωτη.

Ένα γνωστό τετράγωνο τετρανύσματος είναι αυτό της ορμής:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \Rightarrow$$

$$\left(p^\mu\right)^2 = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E^2 - c^2 p^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{c^2} \Rightarrow$$

$$\left(p^\mu\right)^2 = m_0^2 c^2$$

που είναι αναλλοίωτο. Πράγματι αρχικά η ποσότητα $E^2 - c^2 p^2$ είναι αναλλοίωτη όπου E, p αντίστοιχα η ολική ενέργεια και ορμή. Θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς ενέργειας και ορμής για τους οποίους παρατηρούμε ότι τα μεγέθη p_x, p_y, p_z και $\frac{E}{c^2}$ μετασχηματίζονται όπως τα μεγέθη x, y, z και t. Αυτοί είναι:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\upsilon}{c^2}E\right),\ p'_y = p_y,\ p'_z = p_z,\ E' = \gamma\left(E - \upsilon p_x\right)$$

Ας δείξουμε ότι $E'^2 - c^2 p'^2 = E^2 - c^2 p^2$. Είναι

$$E'^2 - c^2 p'^2 = \gamma^2\left(E - \upsilon p_x\right)^2 - c^2 p_x'^2 - c^2 p_y'^2 - c^2 p_z'^2 =$$

$$\gamma^2\left(E - \upsilon p_x\right)^2 - c^2\gamma^2\left(p_x - \frac{\upsilon}{c^2}E\right)^2 - c^2 {p_y}^2 - c^2 {p_z}^2 =$$

$$\gamma^2\left(E^2 + \upsilon^2 p_x^2 - 2E\upsilon p_x\right) - c^2\gamma^2\left(p_x^2 + \frac{\upsilon^2}{c^4}E^2 - 2p_x\frac{\upsilon}{c^2}E\right) - c^2 {p_y}^2 - c^2 {p_z}^2 =$$

$$\gamma^2 E^2 + \gamma^2\upsilon^2 p_x^2 \underline{-2\gamma^2 E\upsilon p_x} - c^2\gamma^2 p_x^2 - c^2\gamma^2\frac{\upsilon^2}{c^4}E^2 \underline{+2c^2\gamma^2 p_x\frac{\upsilon}{c^2}E} - c^2 {p_y}^2 - c^2 {p_z}^2 =$$

$$\gamma^2 c^2\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}-1\right)p_x^2+\gamma^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)E^2-c^2 {p_y}^2-c^2 {p_z}^2=$$

$$-c^2 p_x^2+E^2-c^2 {p_y}^2-c^2 {p_z}^2=$$

$$E^2-c^2 p^2.$$

Η ποσότητα αυτή έχει συγκεκριμένη τιμή που υπολογίζεται ως εξής:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Rightarrow \gamma^2-\gamma^2\beta^2=1\Rightarrow^{\cdot m_0^2 c^4}\ \gamma^2 m_0^2 c^4-\gamma^2\beta^2 m_0^2 c^4=m_0^2 c^4.$$

Πράγματι επειδή

$$E=\gamma m_0 c^2 \Rightarrow E^2=\gamma^2 m_0^2 c^4$$

και

$$p=\gamma m_0 \upsilon \Rightarrow p^2=\gamma^2 m_0^2 \upsilon^2=\gamma^2 m_0^2 \frac{\upsilon^2}{c^2} c^2=\gamma^2\beta^2 m_0^2 c^2 \Rightarrow c^2 p^2=\gamma^2\beta^2 m_0^2 c^4$$

βλέπουμε ότι

$$E^2-c^2 p^2=m_0^2 c^4.$$

8. Φαινόμενο Doppler

Πρόκειται για το γνωστό φαινόμενο κατά το οποίο η συχνότητα που εκπέμπει μια πηγή δεν είναι ίδια με την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής όταν πηγή και παρατηρητής βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, που γίνεται κατά το μήκος της ευθείας που τους ενώνει.

Ας δούμε κλασικά τι συμβαίνει και στη συνέχεια θα βάλουμε την διόρθωση που εξάγεται από την Ε.Θ.Σ. Έστω ότι αρχικά έχουμε μια ακίνητη πηγή S (source) που εκπέμπει συχνότητα f_s και έναν παρατηρητή O (observer) που κινείται προς αυτήν με ταχύτητα υ_o. Αν η πηγή εκπέμπει ηχητικά κύματα αυτά θα διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon_{\eta\chi}$ ενώ αν εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά, αυτά θα διαδίδονται με ταχύτητα c. Αυτές οι ταχύτητες ουσιαστικά ορίζονται ως προς το μέσο· για τον μεν ήχο είναι η ατμόσφαιρα και το δε φως ο αιθέρας ή καλύτερα το κενό μετά τις πιο ενημερωμένες θεωρήσεις. Ο παρατηρητής κινούμενος προς την πηγή αντιλαμβάνεται πιο πολλά μέγιστα από αυτά που εκπέμπει η πηγή. Η σχετική ταχύτητά του με το φως είναι θα είναι $c+\upsilon_o$, άρα η συχνότητα που θα αντιλαμβάνεται θα είναι $f_o = \dfrac{c+\upsilon_o}{\lambda}$, όπου $\lambda = \dfrac{c}{f_s}$. Οι τελευταίες δύο σχέσεις δίνουν

$$f_o = \frac{c+\upsilon_o}{c} f_s \text{ αν ο παρατηρητής πλησιάζει}$$

και

$$f_o = \frac{c-\upsilon_o}{c} f_s \text{ αν ο παρατηρητής απομακρύνεται,}$$

δηλαδή συνολικά

$$f_o = \frac{c \pm \upsilon_o}{c} f_s .$$

Στην περίπτωση που η πηγή κινείται προς τον ακίνητο παρατηρητή τότε εκπέμπει ένα μήκος κύματος λ σε χρόνο μιας περιόδου T, αλλά επειδή κινείται με ταχύτητα υ_s, στο χρόνο αυτής περιόδου έχει διανύσει διάστημα $\upsilon_s T$ και έτσι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων είναι $\lambda - \upsilon_s T$. Αυτή η απόσταση είναι ουσιαστικά το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής. Επομένως θα είναι $\lambda_o = \lambda_s - \upsilon_s T \Rightarrow \dfrac{c}{f_o} = \dfrac{c}{f_s} - \dfrac{\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \dfrac{f_o}{c} = \dfrac{f_s}{c-\upsilon_s} \Rightarrow f_o = \dfrac{c}{c-\upsilon_s} f_s$ και αν η πηγή απομακρύνεται τότε $f_o = \frac{c}{c + \upsilon_s} f_s$, δηλαδή $f_o = \frac{c}{c \mp \upsilon_s} f_s$. Όλες οι περιπτώσεις συνοψίζονται στην σχέση

$$\boxed{f_o = \frac{c \pm \upsilon_o}{c \mp \upsilon_s} f_s}$$ [73],

ή αν την θέλουμε σε όρους μήκους κύματος θα είναι

$$\lambda_o = \frac{c \mp \upsilon_s}{c \pm \upsilon_o} \lambda_s .$$

Για να μελετήσουμε το φαινόμενο **σχετικιστικά** θα θεωρήσουμε δύο συστήματα αξόνων S και S' που αρχικά συμπίπτουν, που στην αρχή των αξόνων O του S βρίσκεται ένας παρατηρητής (o) και στην αρχή των αξόνων O' του S' βρίσκεται μία πηγή (s) που εκπέμπει φως με περίοδο T_s και το σύστημα S' κινείται ως προς το S με ταχύτητα υ παράλληλα στον άξονα x. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ που τα συστήματα συμπίπτουν, εκπέμπεται ένας παλμός φωτός, τότε η επόμενη εκπομπή θα γίνει μετά από χρόνο T_s ως προς το σύστημα S', αλλά γT_s ως προς το S λόγω διαστολής του χρόνου. Επίσης σε αυτό το χρόνο το σύστημα S' θα έχει διανύσει διάστημα $\mathrm{OO}' = \upsilon \gamma T_s$ ως προς το S. Αυτή η απόσταση από το φως διανύεται σε χρόνο $t_{\varphi\omega\varsigma} = \frac{\mathrm{OO}'}{c}$. Συνεπώς, το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών εκπομπών δύο παλμών φωτός όπως το μετράει ο παρατηρητής θα είναι

$$T_o = \gamma T_s + t_{\varphi\omega\varsigma} =$$

$$\gamma T_s + \frac{\mathrm{OO}'}{c} =$$

$$\gamma T_s + \frac{\upsilon \gamma T_s}{c} =$$

$$\gamma \left(1 + \frac{\upsilon}{c} \right) T_s =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \beta) T_s \Rightarrow$$

[73] Τα πάνω πρόσημα είναι για «πλησιάσματα» και τα κάτω πρόσημα για «απομακρύνσεις».

$$\boxed{T_o = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T_s}$$

ή

$$\boxed{f_o = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_s}$$

ή

$$\boxed{\lambda_o = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_s}$$ [74],

δηλαδή μετράει μικρότερες συχνότητες ή μεγαλύτερα μήκη κύματος[75].

Ας δούμε τώρα τη σχέση μεταξύ των μηκών κύματος κλασικά και σχετικιστικά: Επειδή υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις για το αν κινείται ή όχι πηγή και παρατηρητής και αν πλησιάζουν ή απομακρύνονται μεταξύ τους, ας εξετάσουμε την απλή περίπτωση ακίνητου παρατηρητή και κινούμενης πηγής που απομακρύνεται.

Κλασικά είναι

$$\lambda_o = \frac{c \mp \upsilon_s}{c \pm \upsilon_o} \lambda_s \xRightarrow[\upsilon_o = 0]{\upsilon_s = \upsilon} \lambda_o = \frac{c \mp \upsilon}{c} \lambda_s \Rightarrow \lambda_o = \frac{c + \upsilon}{c} \lambda_s \Rightarrow$$

$$\boxed{[\lambda_o]_{\kappa\lambda} = \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) \lambda_s}$$

Σχετικιστικά θα είναι:

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_s \Rightarrow \lambda_o = \sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}} \lambda_s \Rightarrow \lambda_o = \left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \lambda_s \Rightarrow$$

$$\lambda_o = \lambda_s \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c} - \frac{1}{2\cdot 4}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\upsilon^3}{c^3} - \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\upsilon^2}{c^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\upsilon^3}{c^3} + \ldots\right) \Rightarrow$$

$$\lambda_o = \lambda_s \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\upsilon^2}{c^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\upsilon^3}{c^3} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c} + \frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c}\frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c} + \frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\upsilon^2}{c^2} - \ldots - \frac{1}{2\cdot 4}\frac{\upsilon^2}{c^2} - \frac{1}{2\cdot 4}\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{1}{2}\frac{\upsilon}{c} - \ldots\right) \Rightarrow$$

---

[74] Σε όλες αυτές τις σχέσεις είναι $\beta > 0$ επειδή είναι $\upsilon > 0$, η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

[75] Η μετατόπιση του φάσματος προς μεγαλύτερα μήκη κύματος επιβεβαιώνει τη διαστολή του σύμπαντος αφού οι γαλαξίες (πηγές) απομακρύνονται από τη Γη (παρατηρητές).

$$\lambda_o = \lambda_s\left(1+\frac{\upsilon}{c}+\frac{3}{8}\frac{\upsilon^2}{c^2}-\frac{5}{16}\frac{\upsilon^3}{c^3}+\ldots+\frac{1}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\frac{3}{16}\frac{\upsilon^3}{c^3}-\ldots-\frac{1}{8}\frac{\upsilon^2}{c^2}-\frac{1}{16}\frac{\upsilon^3}{c^3}-\ldots\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\left[\lambda_o\right]_{\sigma\chi} = \lambda_s\left(1+\frac{\upsilon}{c}+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}-\frac{3}{16}\frac{\upsilon^3}{c^3}+\ldots\right)}$$

Παρατηρούμε ότι για μικρές ταχύτητες $\upsilon \ll c$, αγνοούνται οι όροι δεύτερης τάξης και άνω και $\left[\lambda_o\right]_{\kappa\lambda} = \left[\lambda_o\right]_{\sigma\chi}$. Για ταχύτητες όμως κοντά στην ταχύτητα του φωτός η διόρθωση είναι ένας όρος $\lambda_s \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}$.

9. Σχετικιστική θερμοδυναμική

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναζητήσουμε τους μετασχηματισμούς στο χώρο της θερμοδυναμικής. Θα διερευνήσουμε αν και πως μετασχηματίζονται η πίεση, η θερμότητα, η ενέργεια, η εντροπία, η θερμοκρασία στο όριο των υψηλών ταχυτήτων και θα δούμε αν επηρεάζεται ο 1^{ος} , ο 2^{ος} θερμοδυναμικός νόμος καθώς και η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων. Θα διαπιστώσουμε σύντομα ότι ξεκάθαρος και έγκυρος μετασχηματισμός για τη θερμοκρασία δεν έχει αποφασιστεί ποιος είναι. Οι νόμοι της θερμοδυναμικής και τα άλλα μεγέθη επίσης μετασχηματίζονται με εξισώσεις που δεν είναι σύμφωνες από όλους. Θα δούμε προτάσεις με διαφορετικά σετ εξισώσεων και ως προς τη θερμοκρασία και ως προς άλλα μεγέθη και θα προσπαθήσουμε να τα κατηγοριοποιήσουμε και να τα συνοψίσουμε σε πίνακα.

Η ενασχόληση των ερευνητών με το θέμα έχει δημιουργήσει ποικίλους και ευρηματικούς τρόπους προσέγγισης και σε θεωρητικό και σε πειραματικό επίπεδο. Όλη αυτή η διαδρομή θα καταγραφεί και όπου κριθεί απαραίτητο, κάποια σημεία της θα αναλυθούν με περισσότερη λεπτομέρεια, με τελικό σκοπό να εξαχθούν και να σχολιαστούν κάποια συμπεράσματα.

Επίσης θα σχολιάσουμε μετασχηματισμούς στη θεωρία της ακτινοβολίας μέλανος σώματος γιατί αυτή συνδέεται στενά με τις θερμοδυναμικές μεταβλητές προσπαθώντας να καταλήξουμε σε κάποιο αποτέλεσμα ιδιαίτερα για το πρόβλημα της θερμοκρασίας. Η διχογνωμία αυτή έχει οδηγήσει σε διαμάχη τους ερευνητές, η οποία φαίνεται τελικά ότι έχει κλονίσει τα θεμέλια της θερμοδυναμικής προκαλώντας ερωτηματικά για το πόσο καλά είναι ορισμένα τα θερμοδυναμικά μεγέθη. Η όλη εξέλιξη του θέματος αυτού είναι πραγματικά εντυπωσιακή και παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον!

9.1 Αγώνας για τη μετασχηματισμένη θερμοδυναμική. Η θερμοκρασία πρωταγωνιστεί.

Μετά την έλευση της Ε.Θ.Σ, σχεδόν αμέσως και παρά τα επαναστατικά χαρακτηριστικά τα οποία έφερε, υπήρξε μια βιασύνη για επέκταση όλων των θεμελιωδών θεωριών της φυσικής υπό το πρίσμα των αδρανειακών παρατηρητών. Η θερμοδυναμική δεν ήταν εξαίρεση και αρκετοί φυσικοί της εποχής -σίγουρα όχι πολέμιοι της Ε.Θ.Σ- επιδόθηκαν στην εύρεση εκείνων των εξισώσεων που διορθώνουν τους θερμοδυναμικούς νόμους. Οι πρώτες εργασίες δημοσιεύτηκαν σχετικά γρήγορα, λίγα χρόνια μετά, από τους Einstein, von Mosengeil και Planck οι οποίοι δούλευαν σχεδόν ανεξάρτητα[76]. Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα των εργασιών τους ήταν αυτό που

[76] Φαίνεται ότι υπήρχε επικοινωνία μεταξύ τους, καθώς στα γραπτά τους υπάρχουν πολλά κοινά στοιχεία όπως θα δούμε.

αφορούσε έναν νόμο μετασχηματισμού για τη θερμοκρασία ο οποίος όριζε ότι η θερμοκρασία T ενός κινούμενου σώματος σε σχέση με τη θερμοκρασία T_0 του ίδιου σώματος όταν βρίσκεται σε ηρεμία συνδέονται με τη σχέση $T = \frac{T_0}{\gamma}$ (Θ1). Στα χρόνια που ακολούθησαν είχαμε εργασίες και άλλων επιφανών επιστημόνων, εκτός των Einstein και Planck[77], μεταξύ των οποίων Max. Von Laue (1879-1960)[78], Wolfgang Pauli (1900-1958)[79], Richard. C. Tolman (1881-1948)[80], C. Møller (1904-1980) και W. H. McCrea (1904-1999) οι οποίοι υποστήριξαν αυτήν τη σχέση. Η σχετικιστική θερμοδυναμική στις αρχές του 20^{ου} αιώνα και για τα επόμενα 50 χρόνια που γραφόταν στα εγχειρίδια και θεωρούταν ως έγκυρη ήταν αυτή ακριβώς, παίρνοντας το όνομα σχετικιστικοί θερμοδυναμικοί μετασχηματισμοί Planck-Einstein.

$$Q = Q_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$T = T_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$p = p_0$$

$$S = S_0$$

Αυτό ενδεχομένως να οφειλόταν σε διάφορους λόγους.

i. Καταρχάς στην έλλειψη ή στην αδυναμία πειραματικών αποδείξεων. Δεν ήταν δυνατή η κατασκευή μιας τέτοιας πειραματικής διάταξης, μέχρι και σήμερα (όσο μπορώ να γνωρίζω), που να μπορεί να επιταχύνει μακροσκοπικό σώμα σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός.
ii. Την περίοδο από το 1905 και μέχρι το 1915 ο Einstein εργαζόταν μεν πάνω στη σχετικιστική θερμοδυναμική (ίσως όχι για όλο αυτό το διάστημα) και παράλληλα προετοίμαζε την άλλη μεγαλειώδη εργασία του για τη γενική θεωρία της σχετικότητας που δημοσίευσε το 1915. Από τότε και μέχρι το τέλος της ζωής του, εκτός των άλλων, εργάστηκε ανεπιτυχώς πάνω στην εύρεση μιας ενιαίας θεωρίας πεδίου για την ηλεκτρομαγνητική θεωρία και τη θεωρία της βαρύτητας.

---

[77] Για τις εργασίες τους θα έχουμε συχνές αναφορές και σε άλλα σημεία αυτής της διαδρομής καθώς έχουν δεχθεί τις περισσότερες κριτικές.

[78] Βραβείο Νόμπελ 1914 για την ανακάλυψη της περίθλασης των ακτινών X από κρυστάλλους.

[79] Βραβείο Νόμπελ 1945 για την ανακάλυψη της απαγορευτικής αρχής που φέρει το όνομά του.

[80] Το 1912 συνέλαβε την έννοια της σχετικιστικής μάζας γράφοντας την έκφραση $m_0\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ως καταλληλότερης για τη μάζα κινούμενων σωμάτων. Μπορεί να βρεθεί εδώ: Tolman, R. C. "Non-Newtonian Mechanics, The Mass of a Moving Body". Philosophical Magazine. 23 (135): 375–381. (1912).

iii. Από το 1900 μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1940 περίπου αναπτύσσεται ένας καινούργιος κλάδος της φυσικής, η κβαντική φυσική, η οποία ερμηνεύει ικανοποιητικά, φαινόμενα που αδυνατεί να κάνει η κλασική φυσική. Για τις τέσσερις αυτές δεκαετίες η κβαντομηχανική απλώς σχηματιζόταν χωρίς να σταματήσει εκεί. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι απασχολούσε πολλούς επιστήμονες της εποχής, χωρίς εξαίρεση και τον Einstein, και το ζήτημα της θερμοκρασίας στη σχετικιστική θερμοδυναμική κατά κάποιο τρόπο τέθηκε σε αναμονή και σχεδόν ξεχάστηκε.

Τα πράγματα όμως δεν τελείωσαν εκεί· απεναντίας μόλις άρχιζαν. Στην διεθνή βιβλιογραφία αυτό απαντά ως περιπλοκή Planck-Ott ή αντινομία von Mosengeil-Ott ή συζητήσεις Einstein-von Laue ή και αλλιώς αφού πρόκειται για ένα μακροχρόνια ανοικτό ζήτημα στην επιστημονική κοινότητα, που εμπλέκει πολλούς ερευνητές όπως θα δούμε παρακάτω. Την αρχή έκανε τυπικά ο Heinrich Ott (1894-1962)[81] με τη δημοσίευση μιας εργασίας του το 1963[82] στην οποία υποστήριξε ότι ο κινούμενος παρατηρητής βρίσκει θερμότερο το σώμα που κινείται από τον παρατηρητή που ως προς αυτόν το σώμα ηρεμεί,

$$T = \gamma T_0 \quad (\Theta 2).$$

Για να δικαιολογήσουμε όμως και την φράση «συζητήσεις Einstein-von Laue» που αναφέρθηκε προηγουμένως, αρκεί να σημειωθεί ότι πρόκειται για μια μικρή προσωπικού χαρακτήρα αλληλογραφία μεταξύ των δύο αντρών το 1952 η οποία δεν έγινε γνωστή υπό την ευρεία έννοια του όρου.

Τέλος για να συμπληρωθεί το σετ των συνδυασμών για τη θερμοκρασία, ο υποψιασμένος αναγνώστης ίσως προβλέπει ποια σχέση λείπει. Φτάνουμε στο 1966 με τον P. T. Landsberg (1922-2010) ο οποίος αρχικά πρότεινε το αμετάβλητο της θερμοκρασίας κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz (Lorentz-invariant) δηλαδή τη σχέση

$$T = T_0 \quad (\Theta 3).$$

Στην συνέχεια όμως, χρησιμοποιώντας πιο σύγχρονες τεχνικές και με τη συνεργασία άλλων φυσικών υποστήριξε την ιδέα της ανυπαρξίας ενός σχετικιστικού μετασχηματισμού της θερμοκρασίας.

Τα μετέπειτα χρόνια διατυπώθηκαν πολλές προτάσεις από διάφορους ερευνητές με ποικίλες προσεγγίσεις για το θέμα και αυτό συνεχίζεται μέχρι και σήμερα καθώς παραμένει ανοικτό.

---

[81] Ο Ott δυστυχώς πέθανε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της δημοσίευσης και η εργασία κινδύνευσε να χαθεί για πάντα. Όμως επειδή ήταν σημαντικός στην γερμανική επιστημονική κοινότητα τελικά η εργασία δημοσιεύτηκε και τότε ήταν που ξεκίνησε επίσημα η διαμάχη μεταξύ των επιστημόνων για το εν λόγω ζήτημα.

[82] Transformation der Warme und der Temperatur, 1963.

Όλα τα παραπάνω θα αναλυθούν με λεπτομέρειες στις υποενότητες που ακολουθούν έχοντας ως σημεία αναφοράς τους κυριότερους εκφραστές, όπως τουλάχιστον αυτοί ορίζονται από την οπτική γωνία αυτής της εργασίας. Παράλληλα θα γίνονται και αναφορές από επικριτές, εγκωμιαστές ή και σχολιαστές όσο αυτό είναι δυνατό. Επειδή η εμπλοκή με το θέμα αφορά πολλούς φυσικούς είναι θεωρώ περισσότερο πρακτικό να παρακολουθούμε ταυτόχρονα με την παρουσίαση των σημαντικότερων σημείων των εργασιών τους, εκείνες τις συγκεκριμένες θεωρήσεις στις οποίες ασκείται κριτική.

9.2 Ο «ψυχρός» Einstein και ο ρόλος του Planck

Η αρχή έγινε από τον M. Planck (1858-1947)[83] ο οποίος ήταν από τους πρώτους και πιο ένθερμους υποστηρικτές της Ε.Θ.Σ. Τη χρονιά (Annus Mirabilis[84]) που δημοσίευσε ο Einstein την περίφημη εργασία, ο Planck ήταν ήδη αρχισυντάκτης (από το 1895) στο Annalen der Physik[85] και ασχολιόταν κυρίως με τις θεωρητικές εργασίες και άλλοι με τις πειραματικές[86]. Τότε οι εργασίες δεν αξιολογούνταν από ανεξάρτητους κριτές, απλώς στέλνονταν στους αρχισυντάκτες και αυτοί τις δημοσίευαν, όπως και έκανε ο Einstein στον Planck στέλνοντας του τα χειρόγραφά του. Έτσι ο Planck νιώθοντας την ευθύνη και τον ενθουσιασμό[87] για τα νέα δεδομένα ξεκίνησε αμέσως μετά την δημοσίευση του άρθρου του Einstein να εργάζεται πάνω στο πως επηρεάζονται οι θεωρίες σχετικά με τα θερμικά φαινόμενα. Ανέθεσε παράλληλα στο μαθητή του Kurd von Mosengeil (1884-1906!)[88] την παραγωγή εξισώσεων μετασχηματισμού για θερμοδυναμικά μεγέθη όπως θερμότητα, εντροπία και θερμοκρασία μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων. Τα αποτελέσματα και των τριών για την θερμοκρασία ήταν η (Θ1).

Ο Planck βασικά έψαχνε μια σειρά εξισώσεων για τις μετασχηματισμένες θερμοδυναμικές ποσότητες κάτω από το περιορισμό να μένουν αναλλοίωτοι όλοι οι

[83] Βραβείο Νόμπελ 1918 (δόθηκε το 1919) για τη συμβολή του στην εξέλιξη της φυσικής με τη ανακάλυψη των κβάντων ενέργειας.

[84] Λατινική φράση που σημαίνει «θαυμαστό έτος». Χρησιμοποιήθηκε πρώτη για τα έτη 1665-1666 όταν ο Νεύτωνας έκανε τις επαναστατικές εφευρέσεις και ανακαλύψεις του. Χρησιμοποιείται επίσης και για το 1905 για τις 4 εργασίες του Einstein.

[85] «Χρονικά της Φυσικής». Από τα πιο παλιά επιστημονικά και ερευνητικά περιοδικά με 1η έκδοση το 1799! Μέχρι το 1950 χρησιμοποιούνταν η γερμανική γλώσσα, τα επόμενα χρόνια έγινε δίγλωσσο και σταδιακά επικράτησε η αγγλική.

[86] Εκείνη τη περίοδο αρχισυντάκτης στις πειραματικές εργασίες ήταν ο Wilhelm Wien (1864-1928) (βραβείο Νόμπελ 1911 για εργασίες στη θερμική ακτινοβολία).

[87] Περισσότερο ενθουσιασμό έδειξε για τη σχετικότητα του Einstein παρά για τη δική του ανακάλυψη στην ακτινοβολία μέλανος σώματος για τις οποίες εμφάνιζε δυσπιστία ως προς την εγκυρότητα και τις επιπτώσεις της.

[88] Δυστυχώς ήταν μόλις 22 ετών όταν έχασε τη ζωή του σε ατύχημα κατά τη διάρκεια ορειβασίας, πριν προλάβει να ολοκληρώσει τη διδακτορική του διατριβή. Ο Planck και ο Wien επεξεργάστηκαν τις σημειώσεις του και τις δημοσίευσαν στο Annalen der Physik το 1907.

νόμοι της θερμοδυναμικής στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Πρόκειται δηλαδή για τις εξισώσεις

$$Q = dE + W \text{ (1}^{\text{ος}}\text{ νόμος) και}$$

$$dS \geq \frac{Q}{T} \text{ (2}^{\text{ος}}\text{ νόμος),}$$

όπου dE η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος, Q το ποσό της θερμότητας που ανταλλάσσεται με το περιβάλλον και W το μηχανικό έργο που γίνεται στο σύστημα. Για το έργο όμως υπάρχει μια ενδιαφέρουσα ιδιαιτερότητα· εξαρτάται από το αν το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία ή κινείται. Όταν λοιπόν βρίσκεται σε ηρεμία είναι ο γνωστός συμπιεστικός όρος pdV, όπου p η πίεση και dV η μεταβολή του όγκου. Όταν όμως το σύστημα κινείται ομοιόμορφα, η θερμότητα που ανταλλάσσεται από εκπομπή ή απορρόφηση ακτινοβολίας αλλάζει το ενεργειακό περιεχόμενο του συστήματος. Τότε σύμφωνα με την Ε.Θ.Σ, λόγω της ισοδυναμίας ενέργειας-μάζας η αλλαγή στην ενέργεια προκαλεί αλλαγή στη μάζα που με τη σειρά της προκαλεί αλλαγή στην ορμή του συστήματος. Αυτό σημαίνει επιτάχυνση ή επιβράδυνση. Αν όμως το σύστημα κινείται με σταθερή ταχύτητα, αυτό σημαίνει ότι δεν επιταχύνεται ούτε στο σύστημα ηρεμίας αλλά και ούτε σε κανένα άλλο αδρανειακό σύστημα. Συνεπώς η μεταφερόμενη θερμότητα πρέπει να συνεισφέρει ένα ακόμα ποσό ώστε να εμποδίσει το σύστημα από να επιταχυνθεί ή να επιβραδυνθεί. Αυτό το επιπλέον έργο ονομάζεται μεταφορικό έργο (translational work) $\left(\vec{v}d\vec{G}\right)$ και έτσι ο 1$^{\text{ος}}$ νόμος γίνεται

$$Q = dE + pdV - \vec{v}d\vec{G},$$

όπου $\vec{v}$ η σταθερή ταχύτητα του συστήματος και $d\vec{G}$ η μεταβολή στην ορμή που προκλήθηκε από τη μεταφορά της θερμότητας. Στη συνέχεια για να παράγει τους μετασχηματισμούς χρησιμοποιεί μάλλον περίπλοκες και ιδιότυπες μεθόδους: για το μετασχηματισμό της θερμοκρασίας χρησιμοποιεί την ειδική περίπτωση της ακτινοβολίας μέλανος σώματος και για τη θερμότητα και τα άλλα μεγέθη τη γενική Λαγκρανζιανή ενός μηχανοθερμικού συστήματος.

Ο Einstein στην εργασία του υιοθετεί δύο ιδέες μια του Planck για την εντροπία και μια του von Mosengeil για τη θερμοκρασία. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει: *όσον αφορά την εντροπία συμφωνώ απόλυτα με το εγχείρημα του Planck και ορίζω τη θερμοκρασία κινούμενου σώματος όπως ακριβώς ο von Mosengeil στην εργασία του για την ακτινοβολία κινούμενης κοιλότητας.* Ο Planck χρησιμοποίησε την πιθανοκρατική ερμηνεία της εντροπίας[89] αναφερόμενος στη σχέση του Ludwig Boltzmann (1844-1906)[90], $S = k\log W$, όπου k η ομώνυμη σταθερά του και W η θερμοδυναμική πιθανότητα[91] που εκείνη την εποχή αποκτούσε μεγάλη αποδοχή. Όμως ο Planck ήταν σκεπτικός και επιφυλακτικός για την ορθότητα αυτής της πιθανοκρατικής ερμηνείας της εντροπίας γι΄αυτό και την προσέγγισε και με πιο αμιγώς θερμοδυναμικά κριτήρια. Θεώρησε ένα θερμικό σύστημα που έχει αρχική εντροπία S_1^0 ως προς αδρανειακό σύστημα K^0 που βρίσκεται σε ηρεμία. Έπειτα το επιταχύνει αντιστρεπτά και αδιαβατικά σε μια κατάσταση με εντροπία S_2^0 ως προς αδρανειακό σύστημα K πάλι σε ηρεμία, ενώ το K^0 κινείται σταθερά ως προς το K. Αλλά αν δούμε την ίδια διαδικασία από τη πλευρά του K τότε η εντροπία στην αρχική κατάσταση θα είναι S_1 και στην τελική S_2. Λόγω του ότι η μεταβολή είναι αντιστρεπτή και αδιαβατική θα είναι $S_1^0 = S_2^0$ και $S_1 = S_2$ ανεξάρτητα από ποια πλευρά το βλέπει κανείς. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι $S_1 \neq S_1^0$, με έστω $S_1 > S_1^0$, αυτό σημαίνει ότι η «κινούμενη» εντροπία στην πρώτη κατάσταση είναι μεγαλύτερη από την «ακίνητη» εντροπία στην ίδια κατάσταση, ως προς το ακίνητο σύστημα K^0. Με την ίδια λογική θα είναι $S_2^0 > S_2$ για τη δεύτερη κατάσταση ως προς το ακίνητο σύστημα K. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει ότι επειδή $S_1^0 = S_2^0$, θα είναι $S_1 > S_2$ που έρχεται σε αντίθεση με τη αρχική θεώρηση ότι $S_1 = S_2$. Δεν μένει λοιπόν παρά να ισχύει γενικά $S^0 = S$ που σημαίνει το αναλλοίωτο της εντροπίας. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι δεν είναι ξεκάθαρο γιατί ο Planck επέλεξε να χειριστεί την εντροπία έναντι της θερμοκρασίας. Πάντως χωρίς το αναλλοίωτο της εντροπίας δεν προκύπτουν οι μετασχηματισμοί για τα θερμοδυναμικά μεγέθη εκτός από τη θερμότητα που μπορεί να προκύψει από τον 1^{ο} θερμοδυναμικό νόμο. Ο 2^{ος} νόμος απεναντίας περιλαμβάνει δύο καθαρά μεγέθη, εντροπία και θερμοκρασία και κάποιος πρέπει να ξεκινήσει από κάποιο από τα δύο. Φαίνεται δηλαδή ότι ο Planck επέλεξε την εντροπία ως καλύτερο υποψήφιο μέγεθος για την αναλλοιώτητα.

Ο Mosengeil στην εργασία του ορίζει τη θερμοκρασία από τα ποσά θερμότητας που προσλαμβάνονται ή αποβάλλονται μέσω ενός αντιστρεπτού κύκλου Carnot. Ένας τέτοιος κύκλος, ως γνωστόν, χρησιμοποιεί δύο ισόθερμες μεταβολές (διεργασίες) που γίνονται σε δύο συγκεκριμένες θερμοκρασίες και δύο αδιαβατικές στις οποίες δεν

[89] Η συσχέτιση αυτή μεταξύ εντροπίας και πιθανότητας διατυπώνεται από ένα θεώρημα γνωστό ως Planck's Ansatz όπως θα δούμε λίγο παρακάτω.

[90] Υπήρξε από τους σημαντικότερους θεμελιωτές της στατιστικής φυσικής και θερμοδυναμικής. Η διδακτορική του διατριβή με θέμα την κινητική θεωρία των αερίων ήταν υπό την επίβλεψη του Josef Stefan (1835-1893) και σε συνεργασία μαζί του διατύπωσε το περίφημο νόμο Stefan-Boltzmann για την εκπομπή θερμικής ακτινοβολίας από μέλαν σώμα. Είχε την τύχη να γνωρίσει σπουδαία ονόματα στο χώρο των φυσικών επιστημών είτε με συνεργασίες του ως καθηγητής με τους Gustav Kirchhoff (1824-1887), Hermann von Helmholtz (1821-1894), Ernst Mach (1838-1916) και άλλους είτε ως εμπνευστής για φοιτητές όπως ο Svante Arrhenius (1859-1927), Walther Nernst (1864-1941), Wilhelm Ostwald (1853-1932) και Paul Ehrenfest (1880-1933). Δυστυχώς έπασχε από μανιοκατάθλιψη και σε μια στιγμή κρίσης αυτοκτόνησε.

[91] Ορίζεται ως ο αριθμός των μικροσκοπικών καταστάσεων που αντιστοιχεί σε μια δοσμένη μακροσκοπική κατάσταση του συστήματος.

έχουμε ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος. Η μία από τις δύο δεξαμενές, η ακίνητη θα έχει θερμοκρασία T_0 και η άλλη που μπορεί να κινηθεί με σταθερή ταχύτητα θα έχει θερμοκρασία T. Έτσι η σχέση που προκύπτει για τη θερμοκρασία και τη θερμότητα ορίζεται από έναν κύκλο Carnot ότι είναι

$$\frac{T}{T_0} = \frac{Q}{Q_0}.$$

Από τη σχέση αυτή προφανώς μπορεί να υπολογιστεί η θερμοκρασία T του κινούμενου συστήματος χωρίς να πρέπει να μετρηθεί, κάτι που μπορεί να γίνει με την T_0. Ο von Mosengeil απαίτησε η τελευταία σχέση να είναι έγκυρη ακόμα και όταν η μία δεξαμενή τεθεί σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Αρκεί να μπορεί να διαπιστώσει τη τιμή της «κινούμενης» θερμότητας και τότε προκύπτει η τιμή της «κινούμενης» θερμοκρασίας. Ο Planck από την άλλη δεν κάνει λόγο καθόλου για το πως θα μπορούσε κανείς να ορίσει την έννοια της «κινούμενης» θερμοκρασίας. Απεναντίας η διορατικότητα του Einstein τον οδήγησε στο να ορίσει την «κινούμενη» θερμοκρασία ως ένα παράγωγο μέγεθος που προκύπτει από άλλα μεγέθη. Έτσι αρχικά αφού διευκρινίσει ότι η μεταφερόμενη θερμότητα για ένα κινούμενο σύστημα ορίζεται από τη σχέση

$$Q = dE + \underbrace{pdV - \vec{v}d\vec{G}}_{W},$$

εν συνεχεία μπορεί κανείς να πάρει την απόλυτη θερμοκρασία από τη θεώρηση ενός αντιστρεπτού κύκλου Carnot. Τα υπόλοιπα στην εργασία του Einstein είναι απλές σχέσεις χωρίς περίπλοκους συλλογισμούς που συνοψίζονται στα παρακάτω:

Για την ολική ενέργεια: $$E = \left(m_0 + \frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} + \frac{\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\, p_0 V_0,$$

για τη ορμή (γενικευμένη): $$\vec{G} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(m_0 + \frac{E_0 + p_0 V_0}{c^2}\right),$$

για την πίεση: $p = p_0$,

και για τον όγκο: $V = V_0\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$.

Οι παραπάνω σχέσεις θα πρέπει να αντικατασταθούν στην $Q = dE + pdV - \vec{v}d\vec{G}$. Θα υπολογίσουμε όμως πρώτα τις παραγώγους.

$$E=\left(m_0+\frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}p_0V_0\Rightarrow$$

$$dE=\frac{dE_0}{c^2}\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}p_0dV_0\Rightarrow dE=\frac{dE_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\frac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}p_0dV_0,$$

$$V=V_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\Rightarrow dV=dV_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\ \text{και}\ \vec{G}=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(m_0+\frac{E_0+p_0V_0}{c^2}\right)\Rightarrow$$

$$d\vec{G}=\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{dE_0+p_0dV_0}{c^2}.$$

Άρα $Q=\dfrac{dE_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\dfrac{\frac{\upsilon^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}p_0dV_0+p_0dV_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-\dfrac{\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\dfrac{dE_0+p_0dV_0}{c^2}=$

$$\frac{dE_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+\cancel{\frac{\upsilon^2}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}p_0dV_0}+p_0dV_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-\frac{\vec{v}^2}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}dE_0-\cancel{\frac{\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\frac{p_0dV_0}{c^2}}=$$ [92]

$$\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\frac{dE_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}+p_0dV_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=\cancel{\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)}\frac{dE_0}{\cancel{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\cancel{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}+p_0dV_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=$$

$$\left(dE+p_0dV_0\right)\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\Rightarrow Q=Q_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

---

[92] Τυπικά οι ταχύτητες υ και $\vec{v}$ είναι ίδιες· η πρώτη είναι η σχετική των συστημάτων αναφοράς ως προς τον άξονα x και η δεύτερη η ταχύτητα του συστήματος του αερίου, της δεξαμενής δηλαδή.

Τώρα, για όλες τις αντιστρεπτές μεταβολές η σχέση $Q = TdS$ πρέπει να είναι αναλλοίωτη, δηλαδή $Q_0 = T_0 dS_0$ με επιπλέον $dS = dS_0$, συνεπώς

$$T = T_0 \frac{Q}{Q_0} = T_0 \frac{Q_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{Q_0} \Rightarrow T = T_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} .$$

Μοναδική εξαίρεση μέχρι τη χρονιά του Ott αποτελεί ένα σχετικό κεφάλαιο του βιβλίου του Arthur S. Eddington (1882-1944)[93]. Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 1 (στοιχειώδεις αρχές), ενότητα 14 (πυκνότητα και θερμοκρασία) για τη θερμοκρασία αναφέρει σε γενικές γραμμές: Επειδή αναζητούμε μετασχηματισμούς για ποσότητες στη φυσική μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων, όταν αναφερόμαστε στο χωροχρονικό σύστημα ενός παρατηρητή που κινείται με το σώμα που εξετάζουμε, τότε οι ποσότητες αυτές παίρνουν το πρόθεμα ιδιο-· ιδιοχρόνος, ιδιομήκος, ιδιοθερμοκρασία κτλ. Ο μετασχηματισμός της θερμοκρασίας για έναν κινούμενο παρατηρητή δεν μας απασχολεί συχνά. Δηλαδή γενικά όταν αναφερόμαστε στη θερμοκρασία, ουσιαστικά εννοούμε την ιδιοθερμοκρασία, και η κίνηση του παρατηρητή δεν λαμβάνεται υπόψη. Η θερμοδυναμική θερμοκρασία[94] ορίζεται ως

$$dS = \frac{dM}{T}$$

όπου dS είναι η μεταβολή της εντροπίας για μικρή αλλαγή ενέργειας dM [95].

Η θερμοκρασία T που καθορίζεται από αυτή την εξίσωση θα εξαρτηθεί από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή καθώς η εντροπία προορίζεται σαφώς να είναι αμετάβλητη, αφού εξαρτάται από την πιθανότητα της στατιστικής κατάστασης του συστήματος σε σύγκριση με άλλες καταστάσεις που μπορεί να υπάρχουν σύμφωνα με τη σχέση του Boltzmann, $S = k\ln W$. Άρα αν

$$dS = \frac{dMc^2}{T}$$

στο κινούμενο σύστημα και

---

[93] A. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, University press, 1923.

[94] Εδώ εννοεί τον 2ο θερμοδυναμικό νόμο.

[95] Ουσιαστικά είναι μικρή ανταλλαγή θερμότητας που αντιστοιχεί σε κάποια μάζα, $dM \to dQ$ του συστήματος με το περιβάλλον χωρίς να αλλάξει η θερμοκρασία του. Επίσης έχει τεθεί $c = 1$ καθώς η σωστή σχέση είναι $dS = \frac{dMc^2}{T}$.

$$dS = \frac{dM_0 c^2}{T_0}$$

στο ακίνητο, τότε προκύπτει

$$\frac{dM}{T} = \frac{dM_0}{T_0} \Rightarrow^{dM=\gamma dM_0\ 96} T = \gamma T_0$$

δηλαδή η (Θ2). Από κάποιους ίσως να θεωρήθηκε τυπογραφικό λάθος[97], πάντως δεν δόθηκε ιδιαίτερη σημασία και αγνοήθηκε από την επιστημονική κοινότητα. Στα τελευταία του σχόλια αναφέρει ότι γενικά είναι ασύμφορο να εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Lorentz σε εξισώσεις που έχουν χαρακτηριστικά σύστασης για το μέσο κάποιου μεγέθους ή και συντελεστές όπως διαπερατότητες, ελαστικότητες, ειδικές επαγωγικές ικανότητες και άλλα, γιατί οδηγούν σε επιπλοκές μικρού ενδιαφέροντος χωρίς εμφανή πλεονεκτήματα, γι' αυτό και δεν το ανέπτυξε περαιτέρω.

Στην παραπάνω θεώρηση όπως είδαμε ο Eddington χρησιμοποίησε τη σχέση του Boltzmann για την εντροπία συνδέοντας την με την πιθανότητα, η τιμή της οποίας δεν μπορεί να εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Η πιθανότητα δηλαδή είναι μια ποσότητα αναλλοίωτη. Έπεται λοιπόν προφανώς ότι και η εντροπία ενός σώματος δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Η τελευταία πρόταση αποτελεί το θεώρημα γνωστό ως Planck's Ansatz που αναφέρθηκε πρωτύτερα και έπαιξε σημαντικό ρόλο σε ότι αφορά τους σχετικιστικούς μετασχηματισμούς για τις θερμοδυναμικές μεταβλητές. Όμως είναι αξιόπιστο; Στα συστήματα που κινούνται σε σχέση με άλλα είναι δυνατό να εμφανιστούν δυνάμεις που δεν υπάρχουν στα ακίνητα. Επομένως πως είναι δυνατό να έχουμε τις ίδιες πιθανότητες στα κινούμενα και στα ακίνητα συστήματα ακριβώς όταν οι συνθήκες είναι διαφορετικές; Το γεγονός αυτό εγείρει αμφιβολίες για την εγκυρότητα του θεωρήματος. Επιπλέον ακόμα και ο Planck, όπως είδαμε, απέδειξε το θεώρημα θερμοδυναμικά δηλαδή ανεξάρτητα της πιθανοκρατικής κινητικής θεωρίας κάνοντας την υπόθεση ότι υπάρχουν αδιαβατικές μεταβολές που μπορούν να μεταφέρουν αντιστρεπτά ένα σώμα από το ακίνητο σύστημα στο κινούμενο και αντιστρόφως. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η απόδειξη που προτείνει είναι μάλλον τελολογική[98] και το θεώρημα του μάλλον μοιάζει με αυθαίρετο αξίωμα παρά κάποιο πραγματικό φυσικό θεώρημα και ως εκ τούτου τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη χρήση του δεν θα πρέπει να έχουν ισχύ.

---

[96] Στο βιβλίο του χρησιμοποιεί το β αντί του γ για το γνωστό παράγοντα Lorentz. Επίσης τυπικά να αναφερθεί ότι το dM_0 δεν είναι μεταβολή της μάζας ηρεμίας (!) απλώς η μάζα στην οποία αντιστοιχεί η ενέργεια στο ακίνητο σύστημα.

[97] Το πως θα μπορούσε να θεωρηθεί τυπογραφικό λάθος είναι μάλλον αμφισβητήσιμο εφόσον στο αποτέλεσμα αυτό ο Eddington φτάνει μετά από σαφείς και απλούς συλλογισμούς.

[98] Τελολογία είναι μια φιλοσοφική ιδέα που θεωρεί ότι τα πράγματα έχουν σκοπούς ή αιτίες, και οι εξελίξεις οφείλονται στο σκοπό ο οποίος εξυπηρετείται από αυτές. Δηλαδή ο Planck εδώ δίνει στις υποθετικές αυτές αδιαβατικές μεταβολές ιδιότητες που εξυπηρετούν το σκοπό του· να είναι η εντροπία αναλλοίωτη.

9.3 Οι αμφιβολίες του Einstein και η αλληλογραφία Einstein-von Laue

Είναι πραγματικά ειρωνικό το γεγονός ότι ουσιαστικά οι πρώτες ενστάσεις για τους μετασχηματισμούς της θερμοδυναμικής έγιναν από τον ίδιο τον Einstein! Επιπλέον είναι πολύ τίμιο, ηθικό και αξιοθαύμαστο ότι κοντά στο τέλος της ζωής του επιστρέφει για να αμφισβητήσει το ίδιο του το έργο, αυτό που μαζί με το Planck είχαν καθιερώσει για πάνω από 40 χρόνια! Ο von Laue γνώριζε τον Einstein από το μακρινό 1906[99] όταν ο δεύτερος εργαζόταν ακόμα στο γραφείο ευρεσιτεχνιών στη Βέρνη και τον επισκέφτηκε εκεί για να τον γνωρίσει με αφορμή την πρόσφατη δημοσίευση της Ε.Θ.Σ. Στις αρχές της δεκαετίας του 1950 και ενώ ετοιμαζόταν να δημοσιεύσει μια αναθεωρημένη έκδοση του βιβλίου[100] του στην Ε.Θ.Σ, πρωτύτερα έστειλε ένα αντίγραφο στον Einstein για να το σχολιάσει. Τότε ήταν που εκτός των άλλων σχολίων, από τον Einstein πυροδοτήθηκε μια εναντίωση στους μετασχηματισμούς Planck-Einstein για τη σχετικιστική θερμοδυναμική που ξεκίνησε με μια αλληλογραφία[101] που διήρκεσε σχεδόν ένα χρόνο, το 1952-53. Ισχυριζόμενος ότι έκανε πολύ απλούς συλλογισμούς έφτασε σε ένα συμπέρασμα για τη θερμοκρασία ακριβώς αντίστροφο με το αρχικό, δηλαδή τη (Θ2). Ξεκινάει το γράμμα χαρακτηριστικά: *Αγαπητέ Laue! Δεν μπορώ να συμφωνήσω με τον τύπο σου (21.21) για τον μετασχηματισμό της απορροφούμενης θερμότητας G (και της θερμοκρασίας),* και τελειώνει με τις φράσεις: *Δεν έχω μελετήσει το βιβλίο σου με αρκετή ακρίβεια για να δω από πού προέρχεται η διαφορά. Αυτή η σκέψη είναι τόσο απλή, που δύσκολα μπορώ να φανταστώ ότι περιέχει κάποιο λάθος. Τις καλύτερες ευχές μου. Δικός σου, Α.Α.*

Συγκεκριμένα πρότεινε ένα νοητικό πείραμα στο οποίο σε ένα αντιστρεπτό κύκλο Carnot θέλουμε να μεταφέρουμε ένα ποσό θερμότητας από μια δεξαμενή σε ηρεμία U_0, σε μια δεξαμενή U που κινείται ως προς την πρώτη με ταχύτητα υ. Για τον ειδικό αυτό κύκλο Carnot χρησιμοποιείται και μια βοηθητική δεξαμενή (Wärmeübertrager, εναλλάκτης θερμότητας) χωρίς καθορισμένες ιδιότητες[102] που βοηθάει στη μεταφορά αυτής της θερμότητας ως εξής. Η δεξαμενή U_0 αρχικά έρχεται σε επαφή με την βοηθητική δεξαμενή, ποσό θερμότητας Q_0 μεταφέρεται σε αυτήν και στη συνέχεια επιταχύνεται μέχρι ταχύτητα υ και τελικά έρχεται σε επαφή με τη δεξαμενή U στην οποία μεταφέρεται ένα ποσό θερμότητας Q[103] που αντιπροσωπεύει το αρχικό ποσό Q_0. Στην συνέχεια θεωρώντας τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο

[99] Τότε ήταν ένας από τους βοηθούς του Planck.

[100] Max von Laue, Relativitatstheorie, Braunschweig, 1952. Πριν από αυτό είχαν δημοσιευτεί και άλλες εκδόσεις το 1911, το 1919, (1ος τόμος) και το 1921 (2ος τόμος). Η έκδοση του 1952 ήταν και οι δύο τόμοι που αφορούσαν την Ε.Θ.Σ. και τη Γ.Θ.Σ.

[101] Πρίνστον, 27.1.1952 έγραψε το 1ο γράμμα.

[102] Προφανώς η φύση μιας τέτοιας δεξαμενής γεννά ερωτηματικά που ο Einstein αγνόησε να δώσει στους συλλογισμούς του.

[103] Ουσιαστικά είναι το ποσό θερμότητας στο νέο σύστημα. Στην αλληλογραφία ο Einstein χρησιμοποιεί το G για τη θερμότητα.

αναλλοίωτο, η θερμότητα που αποκτήθηκε σε ένα κύκλο θα ισούται με το έργο της δύναμης που προκάλεσε την επιτάχυνση ώστε να φτάσει η δεξαμενή σε ταχύτητα υ δηλαδή $Q - Q_0 = A$ **(9.3.1)**. Στο σημείο αυτό ο Einstein εισάγει μια ad hoc εξίσωση[104] για το έργο που δαπανήθηκε σε ένα κύκλο με την απόδειξη μιας τέτοιας εξαιρετικά σημαντικής σχέσης να λείπει! Αυτή είναι η

$$A = Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) \quad \textbf{(9.3.2)}.$$

Έπειτα σύμφωνα με το θεώρημα του Planck, ισχύει η σχέση $\dfrac{Q_0}{T_o} = \dfrac{Q}{T}$ **(9.3.3)**. Από τις σχέσεις **(9.3.1)**, **(9.3.2)** έχουμε

$$Q - Q_0 = Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) \Rightarrow Q = Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cancel{-1} \cancel{+1}\right) \Rightarrow^{(9.3.3)}$$

$$\frac{T}{T_0}\cancel{Q_0} = \cancel{Q_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \Rightarrow T = T_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

δηλαδή θερμότερο ως προς τον κινούμενο παρατηρητή(!), η (Θ2). Ένας πάντως ακόμα ευκολότερος τρόπος να φτάσει κανείς στο ίδιο αποτέλεσμα είναι ξεκινώντας από τη σχέση για τη σχετικιστική μάζα, τότε για τη μάζα της επιταχυνόμενης θερμότητας θα ισχύει:

$$m = \gamma m_0 \Rightarrow \frac{Q}{c^2} = \gamma\frac{Q_0}{c^2} \Rightarrow^{\frac{Q}{T}=\frac{Q_0}{T_0}} T = \gamma T_0.$$

Ο von Laue τότε προκειμένου να υποστηρίξει τη θέση του, υπέθεσε ότι ο μετασχηματισμός της θερμοκρασίας πρέπει να εξαρτάται από τη θερμότητα που μεταφέρεται μεταξύ των δύο συστημάτων γι' αυτό και πρότεινε έναν πιο γενικευμένο τύπο για τη θερμότητα,

[104] Εξίσωση επί τούτω, δηλαδή εξίσωση για ειδικό σκοπό κατ' εξαίρεση των συνηθισμένων κανόνων.

$$Q = Q_0\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^N$$ [105]

από τον οποίο μαζί με το θεώρημα του Planck εξάγεται ότι

$$T = T_0\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^N .$$

Το N είναι μια μικρή πραγματική παράμετρος της τάξης της μονάδας που μπορεί να παίρνει τιμές $N \geq 0$ ή $N \leq 0$. Για παράδειγμα, για $N=\frac{1}{2}$ προκύπτει η (Θ1), για $N=-\frac{1}{2}$ προκύπτει η (Θ2). Παρατηρούμε δηλαδή ότι τα πράγματα έγιναν σαφώς χειρότερα καθώς το παραπάνω αποτέλεσμα είναι διφορούμενο και ασαφές και μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τελικά οι θερμοκρασίες που παρατηρούνται από διαφορετικά -κινούμενα σχετικώς- αδρανειακά συστήματα δεν είναι συγκρίσιμες καταρχήν!

Επίσης υποστήριξε ότι το λάθος είναι στο έργο, όπου συγκεκριμένα λείπει μια ποσότητα απαραίτητη ώστε το κινούμενο σώμα να αποβάλλει θερμότητα με σταθερή ταχύτητα. Εξαιτίας αυτής της αποβολής της θερμότητας ως γνωστόν η ορμή θα αλλάξει. Επομένως, προκειμένου να διατηρηθεί η ταχύτητα, είναι απαραίτητη ακόμα μια δύναμη η οποία παράγει επιπλέον έργο και τον παραπέμπει στις αντίστοιχες σελίδες του βιβλίου του, που αναλύει διεξοδικά το θερμοδυναμικό κύκλο.

Ο Einstein τότε χωρίς να είναι ικανοποιημένος του απάντησε ότι όταν γίνεται ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ μιας δεξαμενής και μιας μηχανής (maschine), και τα δύο είναι σε ηρεμία τότε δεν απαιτείται έργο για αυτήν τη διαδικασία. Αυτό ισχύει ανεξαρτήτως εάν και τα δύο βρίσκονται σε ηρεμία σε σχέση με το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων ή σε ομοιόμορφη κίνηση σε σχέση με αυτό.

Σε απάντησή του στις 22.3.1952, ο von Laue δεν έδωσε νέα στοιχεία ή συλλογισμούς παρά μόνο επανέλαβε τις ίδιες θέσεις του για ύπαρξη της νέας δύναμης για να εξασφαλίζει τη σταθερότητα στην ταχύτητα και κατά συνέπεια ένα επιπλέον έργο εξαιτίας αυτής.

Ο Einstein έστειλε ακόμα ένα γράμμα στις 2.3.1953, περίπου ένα χρόνο μετά, το οποίο παρουσίαζε μια άλλη, ενδιαφέρουσα προοπτική που αξίζει να δούμε. Πριν από αυτό όμως και επειδή όπως κανείς μπορεί να παρατηρήσει η διαφωνία των δύο αντρών

[105] Να σημειωθεί ότι αυτός ο τύπος δεν υπάρχει έτσι ακριβώς στο βιβλίο του von Laue (1919), υπονοείται όμως από τις θεωρήσεις που κάνει, ώστε οι διάφορες τιμές του N να προκύπτουν από τον τρόπο που γίνονται οι μεταβολές.

ουσιαστικά έγκειται στο επιπλέον έργο το οποίο ο Einstein αμελεί, μπορούμε να δούμε λίγο σύντομα την προσέγγιση του Tolman[106].

Ο θερμοδυναμικός του κύκλος δεν διαφέρει ιδιαίτερα από τους άλλους. Θεωρεί ένα απλό σύστημα S (the engine, η βοηθητική δεξαμενή ουσιαστικά) που περιέχει ρευστό σε σταθερή πίεση $p = p_0$ καθ' όλη τη διάρκεια του κύκλου και σε επαφή με δύο δεξαμενές, R_1 σε ηρεμία και σε θερμοκρασία T_1 και R_2 που κινείται με ταχύτητα υ και σε θερμοκρασία T_2.

a→b: Στην αρχική κατάσταση a το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, με θερμοκρασία $T_a = T_1$ όπως της δεξαμενής R_1 και έχει ενέργεια και όγκο αντίστοιχα E_a, v_a. Πηγαίνει στη κατάσταση b αντιστρεπτά και απορροφά θερμότητα από τη δεξαμενή R_1. Αυτή η θερμότητα καθώς και το έργο που γίνεται από το σύστημα δίνονται από τις σχέσεις:

$$Q_1 = E_b - E_a + p(v_b - v_a) \quad \textbf{(9.3.4)}$$

$$W_1 = p(v_b - v_a)$$

b→c: με αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή πηγαίνουμε στη κατάσταση c επιταχύνοντας το σύστημα μέχρι ταχύτητας υ, έτσι χωρίς ανταλλαγή θερμότητας το έργο αυτής της διεργασίας θα είναι:

$$W_2 = E_b - E_c$$

c→d: στην κατάσταση c η θερμοκρασία του συστήματος είναι ίδια με της δεξαμενής R_2 και πηγαίνοντας στη κατάσταση d ένα ορισμένο ποσό θερμότητας $-Q_2$ μεταφέρεται στη δεξαμενή, που θα οριστεί αργότερα. Για τη θερμότητα και το έργο αυτής της μεταβολής θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$Q_2 = Q_2$$

$$W_3 = p(v_d - v_c) - \frac{\upsilon^2}{c^2}\{E_d - E_c + p(v_d - v_c)\}$$

d→a: τέλος με αντιστρεπτή αδιαβατική μεταβολή το σύστημα επιβραδύνοντας επιστρέφει στην αρχική κατάσταση a χωρίς ανταλλαγή θερμότητας και το έργο για αυτήν τη διεργασία δίνεται από τη σχέση:

$$W_4 = E_d - E_a$$

---

106 R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmoogy, Oxford University Press, 1934.

Στην συνέχεια από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο, η ολική θερμότητα που απορροφήθηκε από το σύστημα σε ένα κύκλο θα πρέπει να είναι ίση με το ολικό έργο που έγινε δηλαδή

$$Q_1 + Q_2 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

Κάνοντας την αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην τελευταία έχουμε διαδοχικά:

$$Q_2 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 - Q_1 \Rightarrow$$

$$Q_2 = \cancel{p(v_b - v_a)} \cancel{+E_b} - E_c + p(v_d - v_c) - \frac{\upsilon^2}{c^2}\{E_d - E_c + p(v_d - v_c)\} + E_d \cancel{-E_a} \cancel{-E_b} \cancel{+E_a} \cancel{-p(v_b - v_a)} =$$

$$-E_c + p(v_d - v_c) - \frac{\upsilon^2}{c^2}\{E_d - E_c + p(v_d - v_c)\} + E_d =$$

$$\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)(E_d - E_c) + \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) p(v_d - v_c) \Rightarrow$$

$$Q_2 = \{E_d + pv_d - (E_c + pv_c)\}\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \quad \mathbf{(9.3.5)}.$$

Όμως για τις καταστάσεις a (ακίνητη δεξαμενή) και d (κινούμενη δεξαμενή) όπως και για τις καταστάσεις b (ακίνητη δεξαμενή) και c (κινούμενη δεξαμενή) ισχύουν

$$E_d + pv_d = \frac{E_a + pv_a}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

και

$$E_c + pv_c = \frac{E_b + pv_b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

οπότε η **(9.3.5)** γίνεται $Q_2 = \left\{\frac{E_a - E_b + pv_a - pv_b}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right\}\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \Rightarrow$

$$Q_2 = \{E_a - E_b + p(v_a - v_b)\}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

όπου ανακαλώντας την **(9.3.4)** προκύπτει

$$Q_2 = -Q_1\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \quad \textbf{(9.3.6)}$$

και σύμφωνα με τον 2^o θερμοδυναμικό νόμο, εφόσον η ολική μεταβολή της εντροπίας σε ένα κύκλο είναι μηδέν μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0$$

και εισάγοντας την **(9.3.6)** εξάγει τη (Θ1).

Αν τώρα δεχθούμε την πρόταση Einstein για $W_1 = W_3 = 0$ και το θέσουμε στην θεώρηση Tolman θα έχουμε διαδοχικά:

$$Q_2 = W_2 + W_4 - Q_1 = \cancel{E_b} - E_c + E_d \cancel{-E_a} \cancel{-E_b} \cancel{+E_a} \Rightarrow Q_2 = E_d - E_c\,.$$

Όμως

$$E_c = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}E_b \text{ και } E_d = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}E_a$$

άρα

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(E_a - E_b\right) \Rightarrow Q_2 = -Q_1\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

από όπου τελικά παράγεται η (Θ2). Αυτό το πρόσθετο έργο για το οποίο Einstein και von Laue διαφωνούσαν πράγματι κάνει τη διαφορά. Ποιος όμως έχει δίκιο; Οι συζητήσεις τους δεν έβγαλαν κάποιο αποτέλεσμα με τον von Laue, χωρίς να προσθέτει κάτι καινούργιο να επαναλαμβάνει συνεχώς την άποψη του γιατί θα έπρεπε να υπάρχει αυτό το έργο και κακώς ο Einstein δεν το λαμβάνει υπόψη.

Έτσι φτάνουμε στις 2.3.1953, κλείνοντας την αναφορά στην εργασία του Tolman, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, όπου ο Einstein στέλνει ακόμα ένα γράμμα μια εποχή που ο von Laue είχε ήδη δημοσιεύσει το καινούργιο του βιβλίο χωρίς καμία αλλαγή για την σχετικιστική θερμοδυναμική. Ξεκινάει το γράμμα του ως εξής:

Αγαπητέ Laue, ακούω τη φωνή της συνείδησής μου όταν σου υπενθυμίζω τη διαμάχη σχετικά με την απόδοση των θεμελιωδών εννοιών της θερμοδυναμικής στη σχετικιστική μορφή. Όμως δεν επιστρέφει για να συνεχίσει τη διαμάχη. Δεν πιστεύει πλέον ότι η μία από τις δύο απόψεις τους είναι σωστή και η άλλη λάθος. Έρχεται με μια καινούργια ιδέα! Αρχικά θεωρεί ότι κανείς θα πρέπει να μεταχειρίζεται την εντροπία ως αναλλοίωτη υιοθετώντας δηλαδή το νόμο Boltzmann ($S = k\log W$), πράγμα που έχει την αξία του μιας και ο Einstein φαίνεται εδώ ότι κάνει μια στροφή προς πιο πιθανοκρατικές ερμηνείες[107]. Έπειτα διαπιστώνει ότι το πραγματικό πρόβλημα είναι η αντιμετώπιση της έννοιας της θερμοκρασίας και της θερμότητας (για την ακρίβεια της μεταφερόμενης θερμότητας). Η έννοια της θερμοκρασίας δηλαδή είναι ουσιαστικά η ένδειξη του θερμομέτρου γι'αυτό και η θερμοκρασία θα έπρεπε σε κάθε περίπτωση να αντιμετωπίζεται ως αναλλοίωτη. Έτσι με ανάλογο σκεπτικό θα έπρεπε να αντιμετωπίζουμε και τη μεταφερόμενη θερμότητα ως αναλλοίωτη, να είναι δηλαδή μια ιδιο-θερμότητα που να μεταφέρεται από ακίνητο σώμα σε κινούμενο και αντιστρόφως, μέσω μια επιταχυνόμενης/επιβραδυνόμενης βοηθητικής δεξαμενής και να παραμένει πάντα η ιδιο-θερμότητα. Από την παραπάνω καινούργια προοπτική καταλαβαίνει κανείς πόσο προφητικός γίνεται ο Einstein ορίζοντας απλώς την έννοια της θερμοκρασίας ως ιδιο-θερμοκρασίας, όταν την θεωρεί αναλλοίωτη. Προσοχή όμως! Η αναλλοιώτητα της δεν σημαίνει ότι κινούμενος και ακίνητος παρατηρητής την μετράνε το ίδιο αλλά μάλλον ότι όλο αυτό το σενάριο αποκλείεται ως περιττό και η θερμοκρασία ενός συστήματος είναι πάντα η ιδιο-θερμοκρασία του ανεξαρτήτως αλλαγής συστήματος ή σχετικής κίνησης αυτών. Σε απάντησή του ο von Laue υποστηρίζει ότι αν κανείς δεχθεί αυτήν την αλλαγή τότε το τίμημα είναι πολύ υψηλό, γιατί θα πρέπει να εγκαταλείψει αφενός μεν την παραδοσιακή έκφραση για την θερμότητα Joule, μια φυσική έκφραση που ισχύει τόσο στα κινούμενα όσο και στα ακίνητα συστήματα αναφοράς, αφετέρου δε την έκφραση του Planck ($Q = dE + pdv - (\vec{v} \cdot d\vec{G})$) που κράτησε τόσο πολύ. Προτιμάει λοιπόν τα πράγματα ως έχουν.

Αυτό είναι τυπικά και το τέλος της μεταξύ τους αλληλογραφίας αφού αντάλλαξαν ακόμα ένα γράμμα χωρίς να αναφέρουν καν το θέμα, συνειδητοποιώντας ότι τελικά μιλάνε μόνοι τους.

Κλείνοντας αυτήν την υποενότητα και κρίνοντας συνολικά όλη τη συμπεριφορά και τη στάση του Einstein, μπορεί κανείς να αναγνωρίσει το μεγαλείο της αυθεντικότητάς του όσον αφορά την προσέγγισή του σε ζητήματα που αφορούν προβλήματα στη φυσική όπως και αυτό. Πραγματικά αν και στο τέλος της ζωής του, φαίνεται να ανησυχεί για την ορθότητα επιμέρους θεωριών που πηγάζουν ή που συνεπάγονται της Ε.Θ.Σ., της δικιάς του θεωρίας που τόσο υπεύθυνα θέλει να γίνει η παρακαταθήκη για τις επόμενες γενιές. Κάτοχος ενός βραβείου Νόμπελ, ήδη μία διασημότητα της εποχής του και όχι μόνο, δεν διστάζει να αμφισβητεί και να αγωνιά για το μέλλον της σχετικιστικής θερμοδυναμικής. Οι απόψεις του στο τελευταίο γράμμα του δείχνουν ακριβώς ότι ήθελε -για τον εαυτό του τουλάχιστον- να είναι

[107] Είναι γνωστό ότι δεν έβλεπε με «καλό μάτι» την κβαντική θεωρία, ήταν περισσότερο ντετερμινιστής, και όλο αυτό το «τυχαίο» και «πιθανό» δεν του άρεσε καθόλου, όμως τώρα πια στα 1953 η κβαντική θεωρία δεν ήταν πλέον τόσο καινούργια και τόσο αμφισβητήσιμη.

ήσυχος ότι έδωσε λύση στο πρόβλημα. Ήθελε να έχει την τελευταία λέξη και ίσως να είχε συνειδητοποιήσει ότι τίποτα από αυτά δεν θα γίνονταν ποτέ γνωστά, εντούτοις ο von Laue ήξερε, και τελοσπάντων αυτός ήταν ο Einstein που παρά την ταπεινοφροσύνη του γνώριζε ότι οι μελλοντικές γενιές όχι μόνο θα μιλούν γι΄αυτόν, αλλά όλη του η ζωή θα είναι ένα ατελείωτο πεδίο έρευνας. Όντως (!) σήμερα κιόλας μιλάμε για αδημοσίευτα γράμματα με εξαιρετική λεπτομέρεια και ανάλυση και το σημαντικότερο είναι –όπως θα δούμε στην συνέχεια αυτής της ιστορίας- ότι οι σκέψεις του Einstein για τη θερμοκρασία δεν διαφέρουν και πολύ από τις πιο σύγχρονες[108].

9.4 Ο «θερμός» Ott. 1963

Ή περιπλοκή του ζητήματος ήρθε πάλι στην επιφάνεια με μια εργασία δημοσιευμένη το 1963 του Heinrich Ott (1894-1962). Η πρόταση του μοιάζει πολύ με αυτήν του Einstein καθώς περιλαμβάνει επίσης μια βοηθητική δεξαμενή, αυτή όμως με καλύτερα καθορισμένες ιδιότητες. Ο κύκλος περιλαμβάνει τέσσερις επιμέρους μεταβολές ως εξής:

α→β: θερμότητα Q_0 εξάγεται από τη δεξαμενή ηρεμίας μέσω ισόθερμης μεταβολής σε θερμοκρασία T_0 και μεταφέρεται στη βοηθητική δεξαμενή. Η μάζα ηρεμίας της βοηθητικής δεξαμενής αυξάνεται κατά

$$\Delta m_0 = \frac{Q_0}{c^2} \quad \textbf{(9.4.1)}.$$

β→γ: η βοηθητική δεξαμενή επιταχύνεται με αδιαβατική μεταβολή μέχρι ταχύτητας υ κατά τη διάρκεια της οποίας η θερμοκρασία T_0 και η μάζα ηρεμίας $m_0 + \Delta m_0$ παραμένουν σταθερά. Το έργο που απαιτήθηκε για την επιτάχυνση αυτή είναι:

$$A_1 = (m_0 + \Delta m_0)c^2 - \gamma(m_0 + \Delta m_0)c^2 = -(m_0 + \Delta m_0)c^2(\gamma - 1) \Rightarrow$$

$$A_1 = -(m_0 + \Delta m_0)c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \quad \textbf{(9.4.2)}.$$

γ→δ: θερμότητα $-Q_0$ μεταφέρεται με ισόθερμη μεταβολή από τη βοηθητική δεξαμενή στη δεξαμενή που κινείται με ταχύτητα υ, αλλά παρατηρούμενο από το

[108] Όπως εγώ, σήμερα το έτος 2022 που γράφεται αυτή η εργασία, με την κάπως περιορισμένη κατά κάποιο τρόπο πρόσβαση σε επιστημονικά άρθρα, έτσι και μετά το θάνατο του Einstein, διακεκριμένοι επιστήμονες από όλον τον κόσμο που ασχολήθηκαν με το θέμα, είναι πιθανό να είχαν γνώση όλης αυτής της προϊστορίας. Έχουν διαβάσει και μελετήσει όλο αυτό το παρασκήνιο με πολύ περισσότερη λεπτομέρεια από αυτήν που επιχειρεί αυτή η εργασία. Θέλω να πω απλά ότι ο Einstein από τη αγάπη του και την αφοσίωση στους φυσικούς νόμους συνεχίζει να συνεισφέρει και να εμπνέει.

ακίνητο σύστημα αυτή η θερμότητα είναι $-Q$. Επίσης με τη μεταφορά της θερμότητας έχουμε μείωση της μάζας στη βοηθητική δεξαμενή κατά Δm_0.

δ→α: η βοηθητική δεξαμενή που στερείται θερμότητας Q_0 επιβραδύνεται με αδιαβατική μεταβολή στην ηρεμία και δίνει έργο

$$A_2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) \Rightarrow$$

$$A_2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \ \mathbf{(9.4.3)}.$$

Τώρα, για να επιτευχθεί μια συνολική ισορροπία θερμότητας $Q_0 - Q$, πρέπει να εισάγουμε μια ειδική δύναμη[109] στην μεταβολή γ→δ στη βοηθητική δεξαμενή με στόχο όχι να επιταχύνει τη βοηθητική δεξαμενή αλλά να διατηρεί σταθερή την ταχύτητα παρά την αλλαγή της μάζας ηρεμίας. Το έργο αυτής της δύναμης είναι

$$A_3 = -\frac{\Delta m_0 \upsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \ \mathbf{(9.4.4)}.$$

Έτσι από τον 1^o θερμοδυναμικό νόμο για ένα κύκλο θα έχουμε $Q_0 - Q = A_1 + A_2 + A_3$ όπου βάζοντας τις σχέσεις **(9.4.2)**, **(9.4.3)** και **(9.4.4)** έχουμε διαδοχικά:

$$Q_0 - Q = -(m_0 + \Delta m_0) c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) + m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{\Delta m_0 \upsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow^{(9.4.1)}$$

$$Q_0 - Q = -\left(m_0 + \frac{Q_0}{c^2} \right) c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) + m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) - \frac{Q_0 \upsilon^2}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$$

$$Q_0 - Q = -\left(m_0 c^2 + Q_0 \right)(\gamma - 1) + m_0 c^2 (\gamma - 1) - \frac{\gamma Q_0 \upsilon^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$Q_0 - Q = \cancel{m_0 c^2} + Q_0 \cancel{-\gamma m_0 c^2} - \gamma Q_0 \cancel{+\gamma m_0 c^2} \cancel{-m_0 c^2} - \frac{\gamma Q_0 \upsilon^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$Q_0 - Q = Q_0 - \gamma Q_0 - \frac{\gamma Q_0 \upsilon^2}{c^2} \Rightarrow Q = \gamma Q_0 + \frac{\gamma Q_0 \upsilon^2}{c^2} \Rightarrow Q = \gamma Q_0 \left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2} \right) \Rightarrow$$

---

[109] «Führungskraft» κατά Planck-Einstein, ένα είδος καθοδηγητικής δύναμης.

$$Q = Q_0 \frac{1+\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \; !$$

Αυτό προφανώς δεν είναι το αποτέλεσμα του Ott που σύμφωνα με την εργασία[110] πρέπει να προκύψει $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ και σύμφωνα με τη **(9.3.3)** είναι $T = \frac{T_0}{\gamma}$, δηλαδή ο τύπος του von Mosengeil ! Το λάθος της εργασίας οφείλεται σε σύμβαση για τα πρόσημα: Πράγματι το έργο της καθοδηγητικής δύναμης είναι αρνητικό γιατί απαιτείται ώστε να διατηρεί την ταχύτητα της βοηθητικής δεξαμενής σταθερής αλλά αυτό το έργο το παίρνει το αέριο, το οποίο λογίζεται ως θετικό ως προς το αέριο, γιατί η σχέση $Q_0 - Q = A_1 + A_2 + A_3$ αφορά τον κύκλο ως προς το αέριο. Αν λοιπόν αγνοήσουμε το πρόσημο μείον στην σχέση **(9.4.4)** εξάγεται η σχέση $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ που όπως είπαμε δεν οδηγεί στη πρόταση του Ott.

Ενδεχομένως για να το ξεπεράσει αυτό και επειδή εξέτασε μερικά ιδιαίτερα μοντέλα μεταφοράς της θερμότητας σε κρούσεις σωματιδίων, ακτινοβολία και άλλα διαπίστωσε ότι η δύναμη «Führungskraft» δεν παίζει κανένα ρόλο ούτε στο ακίνητο, ούτε στο κινούμενο σύστημα. Οπότε αν παραλειφθεί ο όρος $A_3 = -\frac{\Delta m_0 \upsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, θα έχουμε:

$$Q_0 - Q = -\left(m_0 + \Delta m_0\right)c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \overset{(9.4.1)}{\Rightarrow}$$

$$Q_0 - Q = -\left(m_0 + \frac{Q_0}{c^2}\right)c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$Q_0 - Q = -\left(m_0c^2 + Q_0\right)\left(\gamma - 1\right) + m_0c^2\left(\gamma - 1\right) - \frac{\gamma Q_0 \upsilon^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$Q_0 - Q = \cancel{m_0c^2} + Q_0 \cancel{-\gamma m_0c^2} - \gamma Q_0 \cancel{+\gamma m_0c^2} \cancel{-m_0c^2} \Rightarrow$$

$$Q_0 - Q = Q_0 - \gamma Q_0 \Rightarrow Q = \gamma Q_0,$$

που δίνει ότι $T = \gamma T_0$, δηλαδή την (Θ2).

Αναφορικά με την εργασία του Ott, αξίζει μια προσωπική ανάμνηση του Ingo Müller (1936-)[111] που στο βιβλίο[112] του αναφέρει χαρακτηριστικά ότι αυτή ουσιαστικά

---

110 Mares, Hubik, Spicka, on relativistic transformation of temperature, 2017.

111 Ίσως ο μοναδικός ζωντανός σε αυτήν την εργασία μέχρι την παρούσα ημερομηνία.

112 Ingo Müller, A History Of Thermodynamics, Springer, Berlin, 2007.

πέρασε από τα χέρια του όταν ήταν στη διαδικασία δημοσίευσης. Τα φύλλα της εργασίας ήταν ήδη στολισμένα με πολύχρωμα σημάδια και σύμβολα από τον επιμελητή αντιγραφής εκείνης της προ υπολογιστή εποχής και στάλθηκαν στον Josef Meixner[113] (1908-1994) προς αξιολόγηση. Ο Meixner ως σύμβουλος του Müller τότε, του έδωσε την εργασία ως τον πιο μικρό βοηθό του. Ο Müller ενδεχομένως νομίζοντας ότι ζητείται η γνώμη του και έχοντας ήδη μελετήσει τις εργασίες του Ferencz Jüttner[114] (1878-1958) την ξεφύλλισε. Έπειτα από αυτό τελικά δημοσιεύτηκε.

Η εργασία του Ott ήταν αυτή που κυρίως πυροδότησε τα επόμενα χρόνια τη συζήτηση με τη μορφή διαμάχης για τη σχετικιστική θερμοδυναμική. Προφανώς υπήρξαν υποστηρικτές και πολέμιοι της πρότασης του Ott. Στη συνέχεια της ανάπτυξης του θέματος αυτού θα γίνει μια αναφορά σε μερικές ακόμα προτάσεις, καθώς είναι εύλογο νομίζω το γεγονός ότι δεν μπορεί να καλυφθεί ούτε στο μεγαλύτερο μέρος της μια τέτοια επιστημονική διαμάχη στις σελίδες μιας κάπως περιορισμένης διπλωματικής εργασίας. Άλλωστε καθώς αυτή η έρευνα προχωράει, θα παρατηρήσουμε ότι κάποιες προσεγγίσεις μερικών θεωρητικών φυσικών για το θέμα, χρησιμοποιούν προχωρημένες μεθόδους και θεωρίες που ξεφεύγουν από τα πλαίσια της εργασίας αυτής. Επιπλέον αυτό που έχει μεγαλύτερη αξία είναι να συνοψίσουμε όλη αυτή την ιστορική αναδρομή και να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα.

9.5 Arzelies, Gamba και Kibble υποστηρίζουν Ott. Η πρόταση Rohrlich.

Μετά τον Ott οι δημοσιεύσεις ξεκίνησαν από το 1965 στο Nuovo Cimento και το Nature Journal. Οπαδός του (αν και δεν βασίστηκε στην εργασία του) υπήρξε ο Henri Arzelies (1913-2003)[115] ο οποίος δέχθηκε όπως όλοι οι συγγραφείς, αναφερόμενοι στη στατιστική της ερμηνεία, ότι η εντροπία είναι αναλλοίωτη δηλαδή $S = S_0$. Αν θέλουμε να διατηρήσουμε το αμετάβλητο της αρχής του Carnot, θα πρέπει να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\Theta 2).$$

Εναλλακτικά προτείνει ότι αυτός ο μετασχηματισμός επιτυγχάνεται επίσης απευθείας ξεκινώντας από τον ορισμό της θερμοκρασίας χρησιμοποιώντας τη μέση κινητική

113 Γερμανός θεωρητικός φυσικός που ασχολήθηκε με τη θερμοδυναμική, στατιστική μηχανική και άλλα.

114 Γερμανός μαθηματικός, βοηθός του Planck, στον οποίον ο τελευταίος ανέθεσε την εύρεση σχετικιστικού τύπου για την κατανομή ταχυτήτων των μορίων ως προς το ακίνητο σύστημα. Το αποτέλεσμα είναι η γνωστή κατανομή Maxwell-Jüttner. Θα δούμε για αυτήν τη συνεισφορά παρακάτω.

115 Γάλλος φυσικός με πλούσιο συγγραφικό έργο που ασχολήθηκε πολύ με τη σχετικότητα και κυρίως με το σχετικιστικό μετασχηματισμό της θερμοκρασίας και τη σχετικιστική μηχανική των ρευστών. Η εργασία που μας αφορά είναι η: Arzelies, Henri, Transformation relativiste de la temperature et de quelques auntres grandeurs thermodynamiques, Nuov. Cim., 35 (3), 792, (1965).

ενέργεια. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά στην εργασία του, *δεν είναι εδώ το μέρος για να συζητήσουμε αυτόν τον ορισμό στη γενική περίπτωση, όλοι όμως το παραδέχονται ότι στην περίπτωση των ιδανικών αερίων ισχύουν*

$$T_0 = k\overline{E}_{0c}$$

και

$$T = k\left[\overline{E}_c - m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right]$$

από τις οποίες προκύπτει η (Θ2). Το πως ακριβώς γίνεται αυτό γεννάει ορισμένα ερωτηματικά αφού αν γίνουν οι πράξεις έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{\overline{E}_0}{\overline{E} - m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)} \Rightarrow T\overline{E}_0 = \left\{\overline{E} - m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right\}T_0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{\left\{\overline{E} - m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\right\}}{\overline{E}_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}T_0 \Rightarrow T = \frac{\left\{\overline{E} - m_0 c^2\left(\gamma - 1\right)\right\}}{\overline{E}_0\gamma}\gamma T_0$$

από την οποία προκύπτει η (Θ2) μόνο αν

$$\overline{E} - m_0 c^2\left(\gamma - 1\right) = \overline{E}_0\gamma \Rightarrow m_0 c^2\left(\gamma - 1\right) = 0$$

που υπονοεί ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Στην εργασία του αναφέρει τους μετασχηματισμούς και άλλων συγγραφέων[116] και διαπιστώνει ότι η ασυμφωνία μεταξύ των μετασχηματισμών αυτών και των δικών του έχει ουσιαστικά την πηγή της στον μετασχηματισμό του έργου που παρέχει το σύστημα στο εξωτερικό περιβάλλον dF [117] καθώς δεν λαμβάνουν υπόψη ότι το σημείο εφαρμογής της δύναμης *κινείται*, όπως χαρακτηριστικά λέει. Αφιερώνει το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας του στον υπολογισμό αυτού του έργου, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz και μελετώντας την πίεση που ενεργεί σε μία ράβδο παράλληλα στη ταχύτητα του συστήματος αναφοράς και την πίεση όταν είναι κάθετη στην ταχύτητα του συστήματος αναφοράς. Η ράβδος έχει άκρα Α και Β και μελετάει αρχικά δύο συμβάντα A_1 και B_1 ταυτόχρονα στο ακίνητο σύστημα K_0 και δύο άλλα

[116] Αναφέρεται κυρίως στους von Laue, Pauli, Tolman, Louis de Broglie, Moller και McCrea.
[117] Χρησιμοποιεί το F για το έργο έναντι του W των άλλων συγγραφέων.

μεταγενέστερα συμβάντα A_2 και B_2 επίσης ταυτόχρονα στο σύστημα K_0. Στην συνέχεια μετασχηματίζει αυτά τα συμβάντα στο σύστημα K και βρίσκει το έργο που γίνεται μεταξύ τους. Τελικά καταλήγει στη σχέση

$$dF = \frac{dF_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

σε αντίθεση με τη σχέση

$$dF = dF_0\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}d\left(U_0 + p_0 v_0\right)$$

των άλλων συγγραφέων.

Την ίδια εποχή και λίγους μήνες μετά ο A. Gamba (-) δημοσιεύει μια εργασία[118] παρέχοντας υποστήριξη στα συμπεράσματα των Arzelies και Ott, και παράλληλα κάνει μια προσπάθεια να υποδείξει το λάθος στο οποίο υπέπεσαν οι άλλοι συγγραφείς[119]. Συγκεκριμένα θεωρεί την απλή περίπτωση της ακτινοβολίας μέλανος σώματος μέσα σε κοιλότητα όπου η σχέση μετασχηματισμού για την ενέργεια της ακτινοβολίας σύμφωνα με τους Planck-Einstein είναι η

$$E' = E\frac{1+\beta^2/3}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \textbf{(9.5.1)}$$

που οδηγεί στη σχέση του von Mosengeil (Θ1) και η σχέση του Arzelies

$$E' = E\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \textbf{(9.5.2)}$$

υπονοεί την σχέση του Ott (Θ2). Αυτό που επισημαίνει είναι ότι δεν είναι ανάγκη να εισάγει κανείς την έννοια της θερμοκρασίας ή το ποσό της θερμότητας αλλά μόνο τις ιδιότητες μετασχηματισμού για καθαρά οπτικές και γεωμετρικές ποσότητες όπως συχνότητα, στερεά γωνία κτλ. για να δούμε αν θα προκύψει η **(9.5.1)** ή η **(9.5.2)** και να αποφασίσουμε ποια είναι η σωστή. Για να δείξει ότι η **(9.5.2)** είναι σωστή θεωρεί δύο φωτόνια μέσα στην κοιλότητα με αντίθετες ορμές σε σύστημα ηρεμίας. Αυτά αποτελούν ένα σύστημα και λόγω συμμετρίας όλα τα φωτόνια της κοιλότητας μπορούν να θεωρηθούν ζεύγη με τον ίδιο τρόπο. Τότε μπορεί να οριστεί το κέντρο μάζας για ένα τέτοιο σύστημα φωτονίων με την ολική ορμή στο σύστημα ηρεμίας να είναι $P_0 = 0$. Σχετικιστικά λοιπόν η ενέργεια της κοιλότητας θα είναι ισοδύναμη με τη μάζα ηρεμίας

[118] A. Gamba, Relativistic Transformation of Thermodynamical Quantities, Nuovo Cimento, 37, 1965.
[119] Εννοεί τους Einstein, Planck, Mosengeil και von Laue.

που δίνεται από τη σχέση $M_0 = \frac{E}{c^2}$. Επομένως για να πάει κανείς στο κινούμενο σύστημα θα χρησιμοποιήσει την **(9.5.2)**. Επίσης όσον αφορά τον επιπλέον όρο $\beta^2/3$ της **(9.5.1)**, αυτός προκύπτει από το ολοκλήρωμα στερεάς γωνίας όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\int (1-\beta\cos a)^2\, d\Omega = 4\pi\left(1+\frac{\beta^3}{3}\right)$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι το αποτέλεσμα αρκετών παραγόντων Doppler:

$$D = \frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ας δούμε λίγο αναλυτικά αυτό το ολοκλήρωμα:

$$I = \int (1-\beta\cos a)^2\, d\Omega = \int_{a=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} da\, d\varphi \sin a (1-\beta\cos a)^2 =$$

$$2\pi\int_0^{\pi} da \sin a (1-\beta\cos a)^2 .$$

Θέτω $u = 1-\beta\cos a \Rightarrow du = \beta\sin a da \Rightarrow \sin a da = \frac{du}{\beta}$ οπότε όταν $a = 0 \rightarrow u = 1-\beta$ και όταν $a = \pi \rightarrow u = 1+\beta$. Οπότε

$$I = \frac{2\pi}{\beta}\int_{1-\beta}^{1+\beta} du u^2 = \frac{2\pi}{3\beta} u^3\Big|_{1-\beta}^{1+\beta} = \frac{2\pi}{3\beta}\left[(1+\beta)^3-(1-\beta)^3\right] =$$

$$\frac{2\pi}{3\beta}(1+\beta-1+\beta)\left((1+\beta)^2+(1+\beta)(1-\beta)+(1-\beta)^2\right) =$$

$$\frac{2\pi}{3\beta}2\beta\left(1+\beta^2+2\beta+1-\beta^2+1+\beta^2-2\beta\right) =$$

$$\frac{4\pi}{3}\left(3+\beta^2\right) = 4\pi\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right).$$

Επιπλέον, προκειμένου να επιβεβαιώσει τα αποτελέσματα των Ott και Arzelies υποστήριξε ότι η πηγή του λάθους στη πρόταση Planck-Einstein είναι αρχικά στον μετασχηματισμό του όγκου και η σχέση

$$dV' = \frac{dV}{\gamma} \quad \textbf{(9.5.3)}$$

θα έπρεπε να αντικατασταθεί από την

$$dV' = \frac{dV}{\gamma(1-\beta\cos a)} \quad \textbf{(9.5.4)}$$

όπου a η γωνία μεταξύ της ταχύτητας υ και της γραμμής παρατήρησης, με αξιοπερίεργο το γεγονός ότι η τελευταία σχέση έχει υποδειχθεί από τον ίδιο τον Einstein στην πρωτότυπη εργασία του (1905).

Κριτική στους Arzelies και Gamba άσκησε ο T. Kibble[120] (1932-2016) ο οποίος αν και τα αποτελέσματά του βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με αυτά του Ott, δηλαδή τη (Θ2), ωστόσο υποστήριξε ότι η επεξεργασία των Arzelies και Gamba διακρίνεται από ορισμένες ασυνέπειες τις οποίες συνεχώς αναδείκνυε. Συγκεκριμένα επισημαίνει ότι οι μετασχηματισμοί για την εσωτερική ενέργεια και το έργο είναι λάθος.

Ξεκινάει την εργασία του με μερικές γενικές παρατηρήσεις πάνω στους σχετικιστικούς μετασχηματισμούς των θερμοδυναμικών μεταβλητών. Απαιτεί ότι για οποιουσδήποτε ορισμούς που υιοθετηθούν θα πρέπει πρωτίστως να διατηρείται η εγκυρότητα του 1^{ου} και 2^{ου} θερμοδυναμικού νόμου που στις συνήθεις μορφές τους είναι

$$dQ = dU - dW \;\; \text{και} \;\; dS \geq \frac{dQ}{T}.$$

Επιπλέον επειδή οι περισσότεροι συγγραφείς συμφωνούν με την άποψη της στατιστικής ερμηνείας της εντροπίας, συνεπώς αυτή πρέπει να είναι αναλλοίωτη. Έτσι προκύπτει ότι και η θερμοκρασία θα πρέπει μετασχηματίζεται όπως και η μεταφορά της θερμότητας. Όμως προσοχή, όπως τονίζεται και από τον Ott, για να είναι καλά ορισμένος ένας τέτοιος μετασχηματισμός θα πρέπει να υπάρχει σαφής διάκριση ανάμεσα στη μεταφερόμενη θερμότητα στο σύστημα και στο έργο που γίνεται σ'αυτό. Έχοντας τις σχέσεις του Ott,

$$T = T_0\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \;\; \text{και} \;\; dQ = dQ_0\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

ο Kibble εισάγει νέες μεταβλητές T' και Q' χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση $g(\beta)$ ως εξής:

$$T = T'g(\beta) \;\; \text{και} \;\; dQ = dQ'g(\beta)$$

120 Βρετανός θεωρητικός φυσικός που ασχολήθηκε κυρίως με τη κβαντική θεωρία πεδίου και τη κοσμολογία. Αν και πολυβραβευμένος με μετάλλια (Einstein, Dirac, Newton και άλλα), από τη συλλογή του λείπει το βραβείο Nobel για το οποίο αμφιλεγόμενα δεν προτάθηκε το 2013 για τη πιο ολοκληρωμένη έως τότε εργασία πάνω στη θεωρία του Higgs. Ο ίδιος ο Higgs μετά τη βράβευσή του εξέφρασε την απογοήτευση του που δεν μοιράστηκαν το βραβείο.

και οι νέοι μετασχηματισμοί θα είναι οι

$$T' = \frac{T_0}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} g(\beta)} \quad \text{και} \quad dQ' = \frac{dQ_0}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} g(\beta)}$$

που ικανοποιούν τον 1^o και 2^o Θ.Ν αν το έργο που γίνεται στο σύστημα μετασχηματίζεται ως

$$dW' = dW + dQ'\left[g(\beta)-1\right].$$

Δηλαδή οι συμβατικοί ορισμοί της θερμοκρασίας και της θερμότητας αντιστοιχούν στην επιλογή

$$g(\beta) = \left(1-\beta^2\right)^{-1}.$$

Παρόλα αυτά, όπως επισημαίνεται και στην εργασία του Ott (1963), αυτή η επιλογή δεν είναι ικανοποιητική γιατί υπονοεί ότι το έργο που γίνεται στο σύστημα μπορεί να είναι μη μηδενικό ακόμα και αν δεν έχουμε μεταβολή στον όγκο ή στην πίεση.

Στην συνέχεια ο Kibble αναφέρεται στην εσωτερική ενέργεια dU και το έργο dW όπου υπάρχει διαφωνία με τους Arzelies και Gamba, οι οποίοι θεωρούν ότι μετασχηματίζονται όπως και η dQ. Ανακαλώντας τη σχέση **(9.5.1)** του Gamba, και τη διαφωνία για τον όρο $\beta^2/3$, ο Kibble θεωρεί ότι το όλο εγχείρημα για τα φωτόνια με την αντίθετη ορμή θα ήταν σωστό αν τα φωτόνια ήταν ελεύθερα, απεναντίας δεν λαμβάνεται υπόψη ο εγκλεισμός τους στην κοιλότητα. Δηλαδή αν θεωρήσουμε ένα σύστημα K_0 σε ηρεμία, τότε κάθε φωτόνιο, λόγω της αντίθετης ορμής του με το άλλο, θα αναπηδά προς τα πίσω στα τοιχώματα της κοιλότητας ταυτόχρονα με το άλλο, πράγμα το οποίο δεν γίνεται αν θεωρήσουμε σύστημα K που κινείται ισοταχώς ως προς το πρώτο. Αυτές οι αναπηδήσεις δεν θα είναι ταυτόχρονες στο κινούμενο σύστημα. Η μέση τιμή της ολικής ενέργειας δεν θα είναι

$$\overline{E} = E_0\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

αλλά μάλλον

$$\overline{E} = \frac{1+\beta^2\cos^2\theta_0}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} E_0$$

όπου θ_0 η γωνία στο σύστημα K_0 ανάμεσα στην διεύθυνση της κίνησης των φωτονίων και του άξονα x. Αν αθροίσουμε όλα τα ζεύγη των φωτονίων και πάρουμε τη μέση τιμή στις γωνίες τότε $\cos^2\theta_0 = \frac{1}{3}$ και έτσι προκύπτει η **(9.5.1)**. Ένα ουσιώδες σημείο εδώ είναι ότι αν η κατανομή των φωτονίων είναι ισοτροπική στο σύστημα K_0, δεν συμβαίνει το ίδιο και με έναν παρατηρητή ακίνητο στο σύστημα K. Σύμφωνα με αυτόν τον παρατηρητή ο αριθμός των φωτονίων, σε οποιαδήποτε διεύθυνση και σε οποιαδήποτε εύρη ενεργειών, θα είναι ανάλογος προς την ποσότητα $1+\beta\cos\theta_0$. Αυτή η διαφορά επίσης επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι ο όγκος που καταλαμβάνεται ανά φωτόνιο είναι ανάλογος προς την ποσότητα $\left(1+\beta\cos\theta_0\right)^{-1}$[121], που θυμίζει το νόμο μετασχηματισμού για το στοιχείο όγκου σε ένα ηλεκτρομαγνητικό επίπεδο κύμα δηλαδή την **(9.5.4)**. Και εδώ επίσης υπάρχει μια παρερμηνεία από τον Gamba καθώς η σχέση **(9.5.4)** είναι πλήρως συνεπής με την σχέση **(9.5.3)** που ουσιαστικά αναφέρεται στο μετασχηματισμό του όγκου για όλη την κοιλότητα και όπως είχε διατυπώσει ο Gamba ότι θα έπρεπε να εγκαταλειφτεί η **(9.5.3)** για χάρη της **(9.5.4)**.

Όπως αναφέρθηκε πρωτύτερα, ο Arzelies βρήκε ότι η διαφορά στους μετασχηματισμούς οφείλεται στο μετασχηματισμό του έργου. Ας δούμε και τη θέση του Kibble πάνω σ'αυτό. Ο Kibble μελετώντας την εργασία του Arzelies ασκεί κριτική επί της ουσίας πάνω στο σκεπτικό του Arzelies θεωρώντας ότι το έργο

$$dW = -\frac{p_0 dV_0}{\left(1-\beta\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \textbf{(9.5.5)}$$ [122]

στο οποίο καταλήγει θα ήταν σωστό αν η πίεση ασκούνταν μόνο μεταξύ αυτών των γεγονότων A και B, δηλαδή αφορούσε ένα αρχικώς ελεύθερο σύστημα που έχει συμπιεστεί και έπειτα αφέθηκε ελεύθερο. Στην περίπτωση μας όμως έχουμε ένα σύστημα στο οποίο η πίεση παραμένει και πριν και μετά τη συμπίεση, έτσι ώστε ούτε η αρχική, ούτε η τελική κατάσταση είναι τέτοια ενός απομονωμένου συστήματος. Έτσι στο σύστημα αναφοράς K, οι καταστάσεις A_1 και A_2 γίνονται νωρίτερα από τις καταστάσεις B_1 και B_2. Οπότε αν θεωρήσουμε αρχικές και τελικές στιγμές αυτές των A_1 και B_2 θα πρέπει να προστεθεί ένα επιπλέον έργο στον τύπο του Arzelies, το έργο που γίνεται για το χρονικό διάστημα από την κατάσταση A_1 στην B_1 και αυτό που γίνεται από την κατάσταση A_2 στην B_2 που δίνονται από τις σχέσεις

$$-p_0 S_0 \frac{l_0\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} + p_0 S_0 \frac{\left(l_0+dl_0\right)^2}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\beta^2 p_0 dV_0}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \textbf{(9.5.6)}$$

[121] Για τις γωνίες a και θ_0 ισχύει $a+\theta_0=\pi$. Από αυτό προκύπτει μια διαφορά κατά ένα μείον.

[122] Το μείον το βάζει ο Kibble, αλλά όχι ο Arzelies. Είναι λόγω σύμβασης για το έργο αν είναι θετικό ή αρνητικό.

οπότε προσθέτοντας την **(9.5.6)** στην **(9.5.5)** έχουμε ότι

$$dW = -\frac{p_0 dV_0}{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta^2 p_0 dV_0}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\beta^2 - 1\right) p_0 dV_0}{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} p_0 dV_0 \Rightarrow$$

$$dW = -pdV$$

στο σύστημα αναφοράς K.

Μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση για το πρόβλημα πρότεινε ο Fritz Rohrlich (1921-2018) σύμφωνα με την οποία ξεχωρίζει τους σχετικιστικούς μετασχηματισμούς σε *πραγματικούς* (true) *και φαινομενικούς* (apparent).

- Μία ποσότητα έχει φυσικό νόημα αν έχει τανυστικές ιδιότητες κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz, όπως για παράδειγμα το τετράνυσμα της ενέργειας-ορμής ή ο τανυστής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Με άλλα λόγια οι πραγματικοί διατηρούν τους κανόνες των μετασχηματισμών Lorentz για τα τετρανύσματα.
- Μερικές φορές όμως είναι βολικό να συσχετίζει κανείς τις παρατηρήσεις ενός παρατηρητή με αυτές ενός άλλου ζητώντας και από τους δύο να κάνουν την ίδια μέτρηση πάνω σε ένα δοθέν σύστημα. Τότε προφανώς λόγω της σχετικότητας του ταυτόχρονου, τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους δεν θα συνδέονται με τους μετασχηματισμούς Lorentz. Δηλαδή αυτές οι υποκειμενικές μετρήσεις είναι που δίνουν τους φαινομενικούς μετασχηματισμούς που είναι απλώς μαθηματικές σχέσεις μεταξύ παρατηρήσεων για την ίδια φυσική κατάσταση μεταξύ διαφορετικών παρατηρητών.

Αν θεωρήσουμε έναν κύβο με όγκο $V_{(0)}$ στο σύστημα ηρεμίας, τότε ένας παρατηρητής που περνά δίπλα του με ταχύτητα υ^{μ} θα δει την πλευρά την παράλληλη προς την κίνησή του να συστέλλεται. Θα μετρήσει δηλαδή $V = \frac{V_{(0)}}{\gamma}$ με την προϋπόθεση να κρατάει μια μεζούρα στον κύβο καθώς περνάει. Αυτός είναι ένας φαινομενικός μετασχηματισμός. Ο πραγματικός μετασχηματισμός για τον όγκο θα δοθεί από ένα τετράνυσμα, έναν τετραόγκο

$$V^{\mu} = \upsilon^{\mu} V_{(0)}$$

όπου στο σύστημα ηρεμίας θα είναι $V^{\mu} = (1,0,0,0)$ οπότε $V^0 = \gamma V_{(0)}$. Με αντίστοιχο τρόπο θα ορίζεται η τετραθερμοκρασία ως

$$T^{\mu} = \upsilon^{\mu} T_{(0)}$$

και δείχνεται ότι για τους πραγματικούς μετασχηματισμούς και για την πρώτη συνιστώσα της θερμοκρασίας είναι $T^0 = \gamma T_{(0)}$, δηλαδή θερμότερο για το κινούμενο σώμα, ενώ για τους φαινομενικούς μετασχηματισμούς είναι $T^0 = \dfrac{T_{(0)}}{\gamma}$ [123], δηλαδή ψυχρότερο για το κινούμενο σώμα!

Ο Rohrlich ολοκληρώνοντας την εργασία του επισημαίνει ότι το τετράνυσμα της θερμοκρασίας έτσι όπως ορίστηκε, έχει μία καθαρώς κινηματική φύση και τέτοιες γενικεύσεις με τετρανύσματα σχηματίζουν αντιστοίχως και την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων ως εξής:

$$pV^{\mu} = nkT^{\mu}.$$

Καταλήγει πάντως στο ότι δεν υπάρχει ουσιαστικά τρόπος να επιλέξει κανείς ανάμεσα στο συμβατικό και στο συμμεταβλητό τρόπο σχηματισμού της σχετικιστικής θερμοδυναμικής αφού και οι δύο περιγραφές είναι συνεπείς και με την Ε.Θ.Σ και με την κλασική θερμοδυναμική. Αυτό που χρειάζεται και ίσως έχει μεγαλύτερη αξία είναι μια προσεκτική μελέτη της διαδικασίας μέτρησης και αυτή θα καθορίσει ποια από τις δύο εναλλακτικές περιγραφές είναι η καταλληλότερη.

9.6 Landsberg

9.6.1 Η θερμοκρασία είναι αμετάβλητη

Τα επόμενα χρόνια που ακολούθησαν υπήρξε πληθώρα δημοσιεύσεων[124] για τους μετασχηματισμούς των εξισώσεων της θερμοδυναμικής που συνεχίζεται μέχρι και σήμερα. Μέσα σε αυτές συμπεριλαμβάνονται και οι εργασίες[125] του P. T. Landsberg (1922-2010) στις οποίες προτείνει την ιδέα η θερμοκρασία να μένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή να ισχύει η σχέση $T' = T$ (Θ3). Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μερικές βασικές θέσεις του όπως τις παρουσιάζει στην εργασία του (Landsberg 1966).

Αρχικά σχολιάζει το γεγονός ότι η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των σχέσεων (Θ1) και (Θ2) από τους κυριότερους εκπροσώπους τους έχει δύο

---

[123] Θεωρεί ότι το σύστημα χαρακτηρίζεται από μια πυκνότητα τανυστή ενέργειας $\Theta^{\mu\nu}$ και μια πυκνότητα δύναμης f^{μ} έπειτα υπολογίζει την ενθαλπία για να καταλήξει τελικά ότι η θερμοκρασία μετασχηματίζεται όπως ο όγκος. Η μαθηματική όμως επεξεργασία ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

[124] Από τη δεκαετία του 60 και έπειτα μέχρι και σήμερα, έχουν προταθεί αρκετοί διαφορετικοί συνδυασμοί σε μετασχηματισμούς των θερμοδυναμικών μεταβλητών, νόμων και της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων. Έχουν προταθεί δηλαδή εξισώσεις μετασχηματισμών που άλλοτε διατηρούν αμετάβλητο ένα μέγεθος και άλλοτε είναι πολλαπλασιασμένο, ή διαιρούμενο με το παράγοντα Lorentz. Η εργασία αυτή παρουσιάζει τις πιο σημαντικές.

[125] Αρχικά στην εργασία του P.T. Landsberg, Special relativistic thermodynamics, Proc. Phys. Soc.89 1007 (1966) και στη συνέχεια και σε άλλες το 1968 (Landsberg and Johns) και το 1970.

χαρακτηριστικά γνωρίσματα: έχουν χρησιμοποιηθεί συμβατική σχετικιστική θερμοδυναμική και θερμοδυναμικοί νόμοι όπως $dQ = TdS = dU + pdV$ που θεωρούνται απαραβίαστοι υπό την έννοια ότι ισχύουν ακόμα και όταν περιγράφεται ένα κλειστό κινούμενο σύστημα. Ο ίδιος προτιμάει την στατιστική μηχανική ενισχυμένη με σχετικιστικές απαιτήσεις που εκ των πραγμάτων οδηγούν σε γενικεύσεις των τυπικών θερμοδυναμικών σχέσεων με αποτέλεσμα να καρπώνεται το πλεονέκτημα μεταβλητές όπως S, T, U, p να είναι αμετάβλητες, έτσι προκύπτει και η (Θ3). Στην εργασία του, καθώς αναπτύσσει το σκεπτικό του ασκεί παράλληλα κριτική εντοπισμένα πάνω στις θέσεις των εκπροσώπων των άλλων σχέσεων που έχουν χρησιμοποιήσει παρόμοια διαδρομή.

Με ένα νοητικό πείραμα αμφισβητεί την (Θ1): Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ρευστό ομοιόμορφης θερμοκρασίας, εγκλωβισμένο σε άκαμπτο αδιαβατικό περίβλημα, σε ακίνητο αδρανειακό σύστημα. Επίσης ας υποθέσουμε ότι χωρίζουμε αυτό το σώμα σε δύο μέρη με ένα απείρως λεπτό, άκαμπτο και αδιαβατικό χώρισμα, τότε για τις θερμοκρασίες σε κάθε περιοχή θα ισχύει $T_1 = T_2$. Ετσι αν δώσουμε μια απείρως μικρή επιτάχυνση σε κάθε μέρος ώστε να φτάσουν σε διαφορετική ταχύτητα w_1, w_2, τότε σύμφωνα με την (Θ1) η θερμική ισορροπία θα εκφράζεται από τη σχέση $\beta_{w_1} T_1' = \beta_{w_2} T_2'$, όπου T_1', T_2' οι θερμοκρασίες όπως μετριούνται από το κινούμενο σύστημα. Αυτές είναι διαφορετικές και εδώ είναι το πρόβλημα! Η θερμοκρασία στη θερμική ισορροπία στο ακίνητο σύστημα μπορεί να μετρηθεί από ένα θερμόμετρο.

Ποιο θερμόμετρο όμως μπορεί να μετρήσει τις θερμοκρασίες στο κινούμενο σύστημα; Ο Landsberg εδώ εννοεί ότι η διαστολή του χρόνου και η συστολή του μήκους όπως προκύπτουν από τους μετασχηματισμούς Lorentz επιδέχονται ξεκάθαρη ερμηνεία, δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για ένα θερμόμετρο γιατί διαφορετικά αποτελέσματα στις μετρήσεις έχουν να κάνουν με την ίδια του τη δομή. Επιπλέον αν ληφθούν υπόψη οι έρευνες των φασματικών κατανομών στην σχετικιστική οπτική, ουδέποτε έχει αναφερθεί σχετικά ένα ξεκάθαρο θερμοδυναμικό πείραμα στο οποίο βασίζεται η εξίσωση (Θ1). Έτσι υποστηρίζει ότι αν θέλει κανείς να συζητάει για μια σχετικιστική θερμοδυναμική θεωρία, θα πρέπει οι εξισώσεις της να αναπτυχθούν από την αρχή και όσον αφορά τις μετρήσεις, αυτές να μπορούν να γίνονται στο κέντρο μάζας του συστήματος. Ευγενικά καταλήγει στο ότι αν κάποιος διαλέξει συμβατική σχετικιστική θερμοδυναμική θα καταλήξει στην (Θ1), όπου θα πρέπει επιπλέον με πείραμα να εξηγήσει πειστικά τι σημαίνει «ένα κινούμενο θερμόμετρο μετράει ψυχρότερα», αλλιώς επιλέγει γενίκευση της συμβατικής θερμοδυναμικής που θα οδηγήσει στην (Θ3).

Ας δούμε κάπως περιληπτικά τη διαδρομή που ακολουθεί. Θα μελετήσει τη κατάσταση ενός συστήματος προσδιορίζοντας μεγέθη όπως V, N, E, P και η πιθανότητα εμφάνισης του θα υπόκεινται στο περιορισμό ότι ο όγκος του συστήματος

V και οι μέσες τιμές $\overline{N}, \overline{E}, \overline{P}$ θα είναι σταθερά. Τότε επιλέγει μια μέγιστη κατανομή πιθανότητας εντροπίας για το ακίνητο σύστημα και το σύστημα με σχετική ταχύτητα υ που δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\ln\{\Pi(V,N,E,P)\} = -\ln(Q) - a_1 N - a_2 E - a_3 P \text{ και}$$

$$\ln\{\Pi'(V',N',E',P')\} = -\ln(Q') - a_1' N' - a_2' E' - a_3' P'$$

όπου a_1, a_2, a_3 είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange και Q μια συνάρτηση περιορισμού. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι δύο πιθανότητες είναι ίδιες για όλα τα N, E και P, ότι $N' = N$ και εισάγοντας τους μετασχηματισμούς της Ε.Θ.Σ βρίσκει τους μετασχηματισμούς των πολλαπλασιαστών για τα δύο συστήματα:

$$a_1' = \alpha_1,\ a_2' = \beta\left(a_2 + \frac{\upsilon a_3}{c^2}\right),\ a_3' = \beta\left(a_3 + \upsilon a_2\right) \text{ και συνεπώς } Q' = Q.$$

Στη συνέχεια θεωρεί ότι η εντροπία δεν εξαρτάται από την E' και την P' ξεχωριστά αλλά από ένα συνδυασμό τους και εδώ εισάγει την εσωτερική ενέργεια U. Είναι δηλαδή

$$S = S\left(V, \overline{N}, U\right) \text{ με } U = U\left(V, \overline{N}, \overline{E}, \overline{P}\right).$$

Ως εκ τούτου οι πολλαπλασιαστές συνδέονται με τα θερμοδυναμικά μεγέθη μέσω των μερικών παραγώγων ως εξής:

$$\alpha_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{N}}\right)_{V,U}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{E}}\right)_{V,\overline{N},\overline{P}} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,\overline{N}}\left(\frac{\partial U}{\partial \overline{E}}\right)_{V,\overline{N},\overline{P}}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial \overline{P}}\right)_{V,\overline{N},\overline{E}} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,\overline{N}}\left(\frac{\partial U}{\partial \overline{P}}\right)_{V,\overline{N},\overline{E}}$$

Για τον υπολογισμό τους, τους γράφει ως τετρανύσματα και τελικά καταλήγει στις σχέσεις:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = -\frac{\mu}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial E}\right)_{V,N,P} = \beta_w\text{[126]}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N,P} = \frac{\beta_w}{T}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{V,N,E} = -w\beta_w, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{V,N,E} = -\frac{w\beta_w}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,U} = \beta_w \left(\frac{\partial S}{\partial V_{cm}}\right)_{N,U} = \frac{\beta_w p}{T}$$

Από αυτά τα αποτελέσματα παράγονται πολλές θερμοδυναμικές σχέσεις με μερικές από αυτές να είναι:

Ελεύθερη ενέργεια Helmholtz: $F \equiv U - TS = F_{cm}$, αμετάβλητη.

Τροποποιημένη ενθαλπία: $H \equiv U + \beta_w pV = H_{cm}$, αμετάβλητη.

Τροποποιημένη ελεύθερη ενέργεια Gibbs: $G \equiv U - TS + \beta_w pV = G_{cm}$, αμετάβλητη.

Επίσης για το ακίνητο σύστημα K θα ισχύει η σχέση

$$TdS = \beta_w pdV - \mu dN + dU \quad \textbf{(9.6.1.1)}$$

όπου

$$dU = \beta_w dE - w\beta_w dP \quad \textbf{(9.6.1.2)}$$

με εναλλακτική μορφή των **(9.6.1.1)** και **(9.6.1.2)** αν επαναφέρουμε τον διανυσματικό συμβολισμό να είναι η

$$\frac{dE}{dt} - \vec{w}\cdot\vec{f} = \frac{1}{\beta_w}\frac{dU}{dt} \quad \textbf{(9.6.1.3)}$$

όπου επειδή $\vec{f} \equiv \frac{d\vec{P}}{dt}$ η εξωτερική εφαρμοζόμενη δύναμη τότε επίσης θα είναι

$$TdS = \beta_w\left(dE + d'W\right) - \mu dN \quad \textbf{(9.6.1.4)}$$

όπου

$$d'W \equiv pdV - \vec{w}\cdot d\vec{P} \quad \textbf{(9.6.1.5)}$$

---

[126] Χρησιμοποιεί το υ και το w για τη σχετική ταχύτητα. Εδώ προφανώς $\beta_w = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$

το έργο που γίνεται από το σύστημα στο περιβάλλον του.

Για το ζήτημα της θερμοκρασίας, ο Landsberg αρχικά ορίζει το μέσο κέντρο μάζας του συστήματος ώστε ως προς αυτό να απαλοίφεται η μέση ορμή $\overline{P}$. Έτσι στο μετασχηματισμό της ορμής

$$\overline{P}' = \beta_\upsilon \left(\overline{P} - \frac{\upsilon \overline{E}}{c^2} \right)$$

υπονοείται ότι αφού $\overline{P}' = 0$ θα είναι $\upsilon \to \overline{w} = \dfrac{c^2 \overline{P}}{\overline{E}}$ σε αυτό το σύστημα. Η μέση ενέργεια θα δίνεται από τη σχέση

$$\overline{E}_{cm} \equiv \beta_{\overline{w}} \left(\overline{E} - \overline{w}\overline{P} \right) = \frac{\overline{E}}{\beta_{\overline{w}}}$$

και σαν πιο «ρεαλιστική» επιλογή, όπως χαρακτηριστικά λέει για την εσωτερική ενέργεια, προτείνει τη σχέση

$$U \equiv \overline{E} \left\{ 1 - \left(\frac{c^2 \overline{P}}{\overline{E}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - B = \overline{E}_{cm} - B \quad \textbf{(9.6.1.6)}$$

όπου B είναι μια αμετάβλητη ενέργεια που εξαρτάται από το $\overline{N}$. Μια συνηθισμένη σχέση που προκύπτει από την Ε.Θ.Σ είναι η

$$c^2 \frac{dM}{dt} = \vec{w} \cdot \vec{f} + \frac{c^2}{\beta_w} \frac{dM_{cm}}{dt} \quad \textbf{(9.6.1.7)}$$

για σύστημα σωματιδίων, όπου $\vec{f} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ πάλι η εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη. Από την τελευταία σχέση για σταθερό $\vec{w}$ η ποσότητα $\vec{w} \cdot \vec{f}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας που προκαλείται από τις εξωτερικές δυνάμεις, έτσι ώστε ο τελευταίος όρος της σχέσης **(9.6.1.7)** φαίνεται να είναι ο ρυθμός μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας στο ακίνητο σύστημα K. Οπότε αν αυτός ο ρυθμός μεταβολής οφείλεται εντελώς στη θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα K από τη δεξαμενή που κινείται μαζί, προκύπτει τότε ότι $dQ = \dfrac{c^2}{\beta_w} dM_{cm}$. Ως εκ τούτου $dQ_{cm} = c^2 dM_{cm}$ και έτσι προκύπτει ότι $dQ = \dfrac{dQ_{cm}}{\beta_w}$ και $T = \dfrac{T_{cm}}{\beta_w}$ δηλαδή η (Θ1)! Για να ερμηνεύσει το αποτέλεσμα αυτό, ο Landsberg υποστηρίζει ότι η επιλογή της **(9.6.1.6)** για την εσωτερική ενέργεια σημαίνει ότι η **(9.6.1.7)** είναι στην πραγματικότητα σε πλήρη ισοδυναμία με την **(9.6.1.2)** ή την **(9.6.1.3)**. Αν θέλουμε το αμετάβλητο της dQ και της T, αυτό προκύπτει αν θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση που η εσωτερική ενέργεια αλλάζει εντελώς εξαιτίας της θερμότητας που παρέχεται. Η $d'W$ όπως είναι στην **(9.6.1.4)** δίνεται από τη σχέση

$$d'W = \frac{p_{cm}}{\beta_w} dV_{cm} - \beta_w \frac{w^2}{c^2} d\left(E_{cm} + p_{cm}V_{cm}\right)$$ [127]

όπου

$$E = \beta_w \left(E_{cm} + \frac{w^2}{c^2} p_{cm}V_{cm} \right)$$

και τελικά προκύπτει ότι

$$dE + d'W = \frac{dE_{cm} + p_{cm}dV_{cm}}{\beta_w} = \frac{\left(dE + d'W\right)_{cm}}{\beta_w} \quad \textbf{(9.6.1.8)}.$$

Τώρα αν ο 1[ος] νόμος εκφράζεται ως $d'Q = dE + d'W$ σε όλα τα συστήματα αναφοράς τότε προκύπτει ότι $d'Q = \dfrac{d'Q_{cm}}{\beta_w}$ και κανείς λαμβάνει πάλι την (Θ1). Όμως μέσω της **(9.6.1.4)** και για την περίπτωση $\mu = 0$ λαμβάνουμε

$$d'Q = \beta_w\left(dE + d'W\right) \quad \textbf{(9.6.1.9)}.$$

Οι εξισώσεις **(9.6.1.8)** και **(9.6.1.9)** οδηγούν στην $d'Q = d'Q_{cm}$ και τελικά στο αμετάβλητο της θερμοκρασίας δηλαδή την (Θ3).

Ολοκληρώνοντας το συλλογισμό του, σε αυτό το σημείο ο Landsberg κάνει και μία αναφορά στη σχέση **(9.6.1.8)** την οποία επίσης χρησιμοποιεί ο Pauli[128] για σύστημα που υπόκειται σε βαθμωτή πίεση. Η (Θ1) προκύπτει μόνο αν ο παράγοντας β_w παραληφθεί από την **(9.6.1.9)**.

---

[127] Για τη σχέση αυτή υπάρχει και αναφορά στην εργασία του Tolman (1934).

[128] Pauli (1958) σχέση (366) $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$.

9.6.2 Κριτική Landsberg στους Einstein-Planck

Στην συνέχεια όμως και από την αρχή κιόλας της δεκαετίας του '70, ο Landsberg, εκτός από τις σχέσεις $T'=\frac{T}{\gamma}$ και $T'=\gamma T$, άρχισε να αμφισβητεί[129] και τη δική του, $T'=T$ ως προς την εγκυρότητα ώστε να έχουμε μια σωστή σχετικιστική θερμοδυναμική. Άρχισε λοιπόν να θέτει ένα νέο ζήτημα, την ανάγκη ενδεχομένως ενός καινούργιου αξιώματος που να ορίζει τη θερμοκρασία και αξιόπιστους τρόπους για την επίλυση του προβλήματος της μέτρησής της. Παράλληλα την ίδια δεκαετία άλλοι ερευνητές[130] δημοσιεύουν τις δικές τους εργασίες, υιοθετώντας περίπου την άποψη του. Οι αμφισβητήσεις του συνοψίζονται σε μια εργασία του το 1981[131] κάνοντας αναφορά στις εργασίες των Einstein και Planck πίσω στο 1907[132] και 1910 αντίστοιχα. Αρχικά ας ξεκινήσουμε με την κριτική του κυρίως πάνω στις κάπως «κρίσιμες» θεωρήσεις του Einstein όπως χαρακτηριστικά γράφει και ας περιγράψουμε κάποιες από τις επισημάνσεις του. Ο Einstein ξεκινάει με την εντροπία και θερμοκρασία κινούμενων σωμάτων. Ονομάζει I το αδρανειακό σύστημα που κινείται ομαλά σε σχέση με το σύστημα ηρεμίας I_0 και δείχνει ότι η πίεση, ο όγκος και η εντροπία ικανοποιούν τις σχέσεις: $p=p_0$, $v=\frac{v_0}{\gamma}$, $S=S_0$[133] παραθέτοντας κάποια κομμάτια σχεδόν αυτολεξεί από μια εργασία του Planck[134] λίγους μήνες νωρίτερα (ο Planck στις 13 Ιουνίου, ο Einstein στις 4 Δεκεμβρίου). Στην συνέχεια διαπίστωσε ότι μια αύξηση της θερμότητας μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση $dQ=\frac{dQ_0}{\gamma}$. Αυτό μπορεί καλύτερα να αποδειχθεί με συμβολισμό τετρανυσμάτων και την ιδιότητα ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι αναλλοίωτο στα δύο συστήματα, αν και φυσικά δεν υιοθέτησε αυτή τη μορφή εκείνη την εποχή. Έστω λοιπόν τα τετρανύσματα $\left(\vec{a},b\right)$ και $\left(\vec{c},d\right)$ με τη σύμβαση $\left(\vec{a},b\right)\cdot\left(\vec{c},d\right)=bd-\vec{a}\vec{c}$, τότε αν χρησιμοποιήσουμε τα τετρανύσματα της ταχύτητας $\gamma\left(\vec{w},c\right)$[135] και της ενέργειας-ορμής $\left(\vec{P},\frac{U}{c}\right)$, το εσωτερικό θα δώσει:

---

[129] P.T. Landsberg, in A Critical Review of Thermodynamics ed. (1970).
[130] D. Eimerl, Ann. Phys., NY91 481-98, (1975), R.G. Newburg, Nuovo Cim., B 53 219-28, (1979), P.A., Goodinson and B.L., Luffman, Nuovo Cim., B 60 81-8, (1980).
[131] Πρόκειται για την P.T. Landsberg, Einstein and statistical thermodynamics I: relativistic thermodynamics. Ακολούθησαν και άλλες δημοσιεύσεις αλλά λίγο-πολύ έχουν το ίδιο περιεχόμενο.
[132] A. Einstein, Jahrbuch der Radioaktivität und Electronik, 4, 411-462.
[133] Για τη πίεση: Einstein (1907) παράγραφος 13, σχέση (22), σελ. 449. Για την εντροπία: Einstein (1907) παράγραφος 15, σχέση (25), σελ. 452.
[134] Βρίσκεται μεταφρασμένο στα αγγλικά εδώ:
https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Dynamics_of_Moving_Systems
[135] w είναι η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων κατά τον άξονα x.

$$\gamma\left(\vec{w},c\right)\cdot\left(\vec{p},\frac{U}{c}\right)=\gamma\left(U-\vec{w}\vec{p}\right)=U_0$$

από το οποίο έπεται ότι

$$dU=\frac{dU_0}{\gamma}+\vec{w}d\vec{p}.$$

Από τον 1^ο^ θερμοδυναμικό νόμο τώρα έχουμε

$$dQ=dU-\vec{w}d\vec{P}-pdv=\frac{dU_0}{\gamma}\cancel{+\vec{w}d\vec{p}}\cancel{-\vec{w}d\vec{P}}-p_0\frac{dv_0}{\gamma}=$$

$$\frac{1}{\gamma}\left(dU_0-p_0dv_0\right)\Rightarrow dQ=\frac{dQ_0}{\gamma}.$$

Το τελευταίο βήμα του Einstein είναι να εισάγει (αυτό είναι το αμφιλεγόμενο που οδήγησε στις μετέπειτα διαμάχες) τη θερμοκρασία και την εντροπία ενός κινούμενου συστήματος θεωρώντας αντιστρεπτές κυκλικές μεταβολές και έτσι βρήκε ότι

$$TdS=dQ=\frac{dQ_0}{\gamma}=\frac{T_0dS_0}{\gamma}\Rightarrow^{S=S_0}T=\frac{T_0}{\gamma}.$$

Ο Einstein στην ίδια εργασία χρησιμοποιεί και μια επιπλέον διαδρομή για να εξάγει το μετασχηματισμό για τη θερμοκρασία και εδώ είναι που θα συναντήσουμε ένα σκεπτικό αμφισβητούμενης αξίας. Αρχικά εισάγει το σχετικιστικό τύπο της συχνότητας για το φαινόμενο Doppler,

$$\nu=\frac{\nu_0}{\gamma\left(1-\frac{\vec{c}\cdot\vec{w}}{c^2}\right)}=\frac{\nu_0}{\gamma\left(1-\frac{w}{c}\cos\varphi\right)}$$ [136]

για τον οποίον ισχύει: αν η πηγή κινείται παράλληλα στην ταχύτητα του φωτός τότε $\vec{c}\cdot\vec{w}=\pm cw$, αν η πηγή πλησιάζει (+) ή απομακρύνεται (-) και $\vec{c}\cdot\vec{w}=0$ αν η πηγή κινείται εγκάρσια. Υπάρχει όμως και η περίπτωση του μηδενικού φαινομένου Doppler όταν

$$\gamma\left(1-\frac{\vec{c}\cdot\vec{w}}{c^2}\right)=1\Rightarrow 1-c\cdot w\cdot\frac{\cos\varphi}{c^2}=\frac{1}{\gamma}\Rightarrow$$

[136] Einstein (1907) παράγραφος 6, σχέση (4α), σελ. 425.

$$w \cdot \frac{\cos\varphi}{c} = 1 - \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{c(\gamma - 1)}{\gamma w}.$$

Υποθέτει ένα μέλαν σώμα θερμοκρασίας T_0 που εκπέμπει ακτινοβολία συχνότητας ν_0 και κινείται με ταχύτητα w σε σχέση με έναν παρατηρητή. Η ένταση ακτινοβολίας θα δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{x-1}}$$

όπου

$$x = \frac{\gamma\left(1 - \frac{\vec{c} \cdot \vec{w}}{c^2}\right) h\nu}{kT_0} = \frac{h\nu_0}{kT_0}.$$

Επομένως αν η θερμοκρασία εισάγεται από τη σχέση $x = \frac{h\nu_0}{kT_0}$, τότε προκύπτει

$$\frac{h\nu_0}{kT_0} = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow \frac{T}{\nu} = \frac{T_0}{\nu_0} \Rightarrow \frac{T}{\nu} = \frac{T_0}{\gamma\nu\left(1 - \vec{c} \cdot \vec{w}\right)} \Rightarrow T = \frac{T_0}{\gamma\left(1 - \vec{c} \cdot \vec{w}\right)}$$

από όπου οδηγείται στο συμπέρασμα ότι $T = \frac{T_0}{\gamma}$ μόνο αν έχουμε εγκάρσια κίνηση πηγής, $\vec{c} \cdot \vec{w} = 0$. Αυτό ακριβώς είναι που δίνει στη σχέση $T = \frac{T_0}{\gamma}$ αμφίβολη ισχύ. Επιπλέον ο πειραματικός έλεγχος της θεωρίας αυτής δεν ήταν διαθέσιμος.

Πάντως σε όλη την παραπάνω επιχειρηματολογία έχουν γίνει κάποιες υποθέσεις που αξίζει να τις δούμε λίγο πιο λεπτομερειακά. Έστω ότι θεωρούμε δύο απροσδιόριστες συναρτήσεις $f(\gamma)$, $\theta(\gamma)$, τότε όσον αφορά τη θερμότητα μεταξύ των δύο συστημάτων, αυτές θα συνδέονται με τη σχέση

$$dQ = f(\gamma) dQ_0$$

όπου αν $w \to 0$ τότε $\gamma \to 1$ και $f(1) = 1$, ώστε να είναι $dQ = dQ_0$.

Για το 2^o θερμοδυναμικό νόμο θα ισχύει αντίστοιχα για οιονείστατες[137] διεργασίες ότι

[137] Ημιστατικές διεργασίες που θεωρούμε ότι γίνονται πολύ αργά, ώστε το σύστημα να παραμένει πάντα σε θερμοδυναμική ισορροπία.

$$TdS = \theta(\gamma)dQ$$

όπου εδώ $\theta(1) = 1$.

Λαμβάνοντας τώρα υπόψιν τα αρχικά αποτελέσματα του Einstein, $p = p_0$, $v = \frac{v_0}{\gamma}$, $S = S_0$ και ότι η ενέργεια ενός απεριόριστου συστήματος (αυτού που δεν χρειάζεται να περιέχεται σε δοχείο) μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$dE_0 = \gamma\left(dE - \vec{w} \cdot d\vec{P}\right)$$

έχουμε διαδοχικά:

$$TdS = \theta dQ = \theta f dQ_0 = \theta f \left(dU_0 + p_0 dv_0\right) = \theta f \left(dE_0 + p_0 dv_0\right) =$$

$$\theta f \left(\gamma\left(dU - \vec{w} \cdot d\vec{P}\right) + p_0 dv_0\right) = \theta f \left(\gamma\left(dU - \vec{w} \cdot d\vec{P}\right) + p\gamma dv\right) \Rightarrow$$

$$TdS = \theta f \gamma\left(dU - \vec{w} \cdot d\vec{P} + pdv\right)$$

όπου αν θεωρήσουμε σταθερά τα U, $\vec{P}$ προκύπτει ότι

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_{U,\vec{P}} = \theta f \gamma \frac{p}{T} \quad \textbf{(9.6.2.1)},$$

ενώ για ακίνητο παρατηρητή θα έχουμε

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial v_0}\right)_{U} = \frac{p_0}{T_0} \quad \textbf{(9.6.2.2)}$$

Επίσης είναι

$$TdS = \theta f dQ_0 = \theta f T_0 dS_0,$$

όπου επειδή $S = S_0$ προκύπτει ότι $T = \theta f T_0$ **(9.6.2.3)**.

Για τις συναρτήσεις τώρα $\theta(\gamma)$ και $f(\gamma)$ θα παρατηρήσουμε ότι μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές που εξαρτάται από τι ακριβώς θεωρούμε αρχικά αναλλοίωτο. Επειδή για $w = 0$ δηλαδή $\gamma = 1$, οι σχέσεις **(9.6.2.1)** και **(9.6.2.2)** πρέπει να συμπίπτουν προκύπτει ότι $\theta(\gamma) f(\gamma)\gamma = 1$ **(9.6.2.4)**.

<u>1η περίπτωση</u>: Αν θεωρήσουμε την ενέργεια αμετάβλητη, τότε προκύπτει ότι $\theta(\gamma)=1$ οπότε από την **(9.6.2.4)** είναι $f(\gamma)=\dfrac{1}{\gamma}$ και τότε από την **(9.6.2.3)** εξάγεται ότι $T=\dfrac{T_0}{\gamma}$, η (Θ1).

<u>2η περίπτωση</u>: Αν θεωρήσουμε τον 2ο νόμο αναλλοίωτο τότε παίρνουμε $\theta(\gamma)=1$ και $f(\gamma)=\gamma$ και από την **(9.6.2.3)** προκύπτει ότι $T=\gamma T_0$, δηλαδή η (Θ2). Επίσης η **(9.6.2.1)** γίνεται $\left(\dfrac{\partial S}{\partial v}\right)_{U,\vec{P}}=\gamma^2\dfrac{p}{T}$.

<u>3η περίπτωση</u>: Τέλος αν θεωρήσουμε τη θερμοκρασία αμετάβλητη τότε από την **(9.6.2.3)** είναι $\theta(\gamma)f(\gamma)=1$ και με $f(\gamma)=\dfrac{1}{\gamma}$ [138] παίρνουμε $\theta(\gamma)=\gamma$.

Ουσιαστικά όλα τα παραπάνω επιχειρήματα μπορούν να συνοψιστούν και να δώσουν έναν γενικό μετασχηματισμό για τη θερμοκρασία $T=\gamma^{\alpha}T_0$.

Ας δούμε όμως ποιο πρόβλημα παρουσιάζεται: αν θεωρήσουμε δύο πανομοιότυπα σώματα σε ομοιόμορφη σχετική κίνηση μεταξύ τους, τότε στη περίπτωση που $\alpha>0$ κάθε σώμα βλέπει το άλλο θερμότερο στο δικό του σύστημα αναφοράς και αν $\alpha<0$ αντιστοίχως το βλέπει ψυχρότερο. Αυτό σημαίνει ροή θερμότητας, αν θα μπορούσαν να αλληλεπιδράσουν γιατί το κέρδος στη θερμοκρασία του ενός γίνεται σε βάρος του άλλου. Δεν μπορούν όμως και τα δύο να κερδίζουν θερμότητα αφού αυτό βλέπουν για $\alpha>0$ ή και τα δύο να χάνουν θερμότητα αφού αυτό πάλι βλέπουν αν $\alpha<0$. Η διαφωνία αυτή αίρεται αν $\alpha=0$. Κάθε αδρανειακός παρατηρητής σύμφωνα με την Ε.Θ.Σ μετράει ένα κινούμενο ρολόι ως αργό, και δεν αναμένεται να προκύψει ροή ενέργειας. Αν παρ' όλα αυτά προκύψει τότε τίθεται θέμα ορισμού των σχετικιστικών ροών ενέργειας που δεν είναι της παρούσης.

Επιπλέον όσον αφορά τον ισχυρισμό του Einstein για εγκάρσιο φαινόμενο Doppler ως συνθήκη για την σχέση $T=\dfrac{T_0}{\gamma}$, γιατί να είναι ορθότερος από το θεωρήσουμε για παράδειγμα, μηδενικό φαινόμενο Doppler και από τη σχέση

[138] Διατηρούμε αυτήν την θεώρηση από τον αρχικό συλλογισμό του Einstein (αν είναι ασφαλής) ότι $dQ=\dfrac{dQ_0}{\gamma}$ $\left(dQ=f(\gamma)dQ_0\right)$ και ότι $TdS=dQ$ σε όλα τα αδρανειακά συστήματα

$\cos\varphi = \dfrac{c(\gamma-1)}{\gamma w}$ να πάρουμε ότι $v = v_0$ και κατά συνέπεια να προκύψει $\dfrac{T}{v} = \dfrac{T_0}{v_0} \Rightarrow$ $T = T_0$;

Τέλος, ακόμα μια επιπρόσθετη δυσκολία που προκύπτει είναι η μέτρηση της θερμοκρασίας T και T_0 καθώς ένα από τα δύο σώματα πρέπει να θεωρηθεί το θερμόμετρο και όταν αυτά κινούνται με σχετική ταχύτητα μεταξύ τους και ανταλλάσσουν ενέργεια δεν υπάρχει η έννοια της θερμικής ισορροπίας. Όταν αναφερόμαστε στη μέτρηση της θερμοκρασίας ουσιαστικά εννοούμε την ιδιοθερμοκρασία. Σχετικώς παρόμοια άποψη είδε διατυπώσει και ο Eddington όπως είδαμε πρωτύτερα.

Ο Planck[139] από τη μεριά του φτάνει στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας Λαγκραντζιανή και Χαμιλτονιανή μηχανική. Διαπιστώνει ότι η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz εξυπηρετεί το L της Λαγκραντζιανής αφού οι θερμοδυναμικές εξισώσεις προκύπτουν από αυτήν την επιλογή και τότε απλώς η Χαμιλτονιανή γίνεται η εσωτερική ενέργεια του συστήματος. Οι αναλυτικές πράξεις παραλείπονται γιατί ξεπερνούν τους σκοπούς αυτής της εργασίας, θα σχολιαστούν μόνο δύο σημεία αυτής της προσέγγισης. → Πρώτον, η Λαγκραντζιανή έχει άλλη έκφραση για συστήματα απεριόριστα και άλλη για περιορισμένα (στις αρχικές υποθέσεις τα συστήματα θεωρούνταν απεριόριστα). →Δεύτερον από τη χρήση του νόμου μετατόπισης του Wien

$$\lambda_{0,\max}(cm) \approx \frac{0{,}3}{T_0} \Rightarrow \frac{c}{v_0} \approx \frac{0{,}3}{T_0} \Rightarrow \frac{T_0}{v_0} = a \to \sigma\tau\alpha\theta.$$

Έτσι αν ο λόγος αυτός είναι σταθερός, θα είναι σταθερός και σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς και επειδή για τη συχνότητα ισχύει $v = \dfrac{v_0}{\gamma}$, θα είναι $\dfrac{T_0}{v_0} = \dfrac{T}{v} \Rightarrow \dfrac{T_0}{v_0} = \gamma\dfrac{T}{v_0} \Rightarrow T = \dfrac{T_0}{\gamma}$ δηλαδή η (Θ1). Αλλά και αυτός ο ισχυρισμός δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι βγαίνει τόσο αυτόματα.

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι αναζήτηση κάποιου αξιόπιστου μετασχηματισμού για την θερμοκρασία απαιτεί νέο και ισχυρό αξίωμα για τον ορισμό της θερμοκρασίας ή σχέση της θερμοκρασίας με άλλα καλώς ορισμένα μεγέθη που σε σχέση με αυτά να έχουμε ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Επιπλέον το πρόβλημα μέτρησης της θερμοκρασίας με κάποιο μηχανισμό που να ξεχωρίζει ένα ακίνητο σύστημα από ένα κινούμενο έχει αρχίσει να γίνεται ζήτημα εξαιρετικής σημασίας και έντονου προβληματισμού.

---

[139] M. Planck, Acht Vorlesungen uber Theoretische Physik (Leipzig: Hirzel) σελ.125 (1910).

9.6.3 Ο μετασχηματισμός της θερμοκρασίας δεν υπάρχει

Νομίζω ότι από τη μέχρι τώρα καταγραφή όλων των προτάσεων των εμπλεκομένων με το θέμα της σχετικιστικής θερμοδυναμικής και των αμφιβολιών που σχεδόν αυθόρμητα επακολουθούν, είναι η κατάλληλη στιγμή να ακουστεί και μία ακόμα πρόταση που έχει ας πούμε πιο επαναστατικό χαρακτήρα υπό την έννοια ότι δεν έχει να προτείνει κάποιον άλλο μετασχηματισμό αφού αυτό έχει εξαντληθεί με τη σχέση $T=\gamma^{\alpha}T_0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha=-1,0,1$.

Πρόκειται για τις μετέπειτα εργασίες[140] του Landsberg στις οποίες στηρίζεται στο φαινόμενο Unruh[141] και συγκεκριμένα στους ανιχνευτές Unruh-Witter. Αφορά ένα μοντέλο ανίχνευσης στοιχειωδών σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με το κβαντικό πεδίο. Η ιδέα στηρίζεται στο ότι ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής θα αντιλαμβάνεται την ύπαρξη στοιχειωδών σωματιδίων σε ένα κενό χώρο, ενώ ένας αδρανειακός όχι. Αυτήν την ύπαρξη των στοιχειωδών σωματιδίων θα την αντιλαμβάνεται λόγω της άτακτης και τυχαίας κίνησής τους ως θερμοκρασία που θα αποτυπώνεται ή καλύτερα θα ανιχνεύεται ως θερμικό φάσμα όπως η ακτινοβολία μέλανος σώματος. Η άτακτη ή τυχαία κίνηση έγκειται στο γεγονός ότι επειδή τα σωματίδια είναι κβαντικά συμπλεγμένα, κάθε φορά που ανιχνεύεται ένα, το ζεύγος του μπορεί να είναι μεν μακριά αλλά αλληλεπιδρά με αυτό και χρησιμοποιείται για την περιγραφή της πλήρους κατάστασής του. Αρκεί λοιπόν να ανιχνευτεί το ένα σωματίδιο (η μία κατάσταση δηλαδή) για να πάρει την πληροφορία ο ανιχνευτής. Αυτή η πληροφορία καταγράφεται από τον ανιχνευτή ως θερμοκρασία που είναι ανάλογη προς την επιτάχυνση του σύμφωνα με τη σχέση

$$T=\frac{\hbar\cdot\alpha}{2\pi\cdot c\cdot k_B}.$$

Οι παραπάνω πληροφορίες είναι σε πολύ γενικό πλαίσιο[142], καθώς τα αποτελέσματα που συλλέγονται από το ρυθμό διέγερσης του ανιχνευτή απαιτούν και

[140] P.T. Landsberg, G.E.A. Matsas, Laying the ghost of the relativistic temperature transformation, Phys. Lett. A, 223, 401, (1996) και P.T. Landsberg, G.E.A. Matsas, The impossibility of a universal relativistic temperature transformation, Physica A, 340, 92-94, (2004).

[141] Γνωστό επίσης ως φαινόμενο Fulling–Davies–Unruh από τα ονόματα των δημιουργών του γύρω στα μέσα της δεκαετίας του '70.

[142] Οφείλουμε επίσης να αναφέρουμε ότι όλη η θεωρία πίσω από το φαινόμενο Unruh είναι υπό αμφισβήτηση καθώς δεν είναι απολύτως σαφές αν όντως οι ανιχνεύσεις είναι παρατηρήσιμες.

την συνδρομή της κβαντικής θεωρίας πεδίου που ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

Επιπλέον η αναζήτηση μετασχηματισμών της θερμοδυναμικής στρέφεται στο πλαίσιο αδρανειακών παρατηρητών και όχι μη αδρανειακών που επικαλείται η παραπάνω ιδέα. Ας σταματήσουμε λοιπόν εδώ.

9.7 Pauli

Ας δούμε την προσέγγιση του Pauli[143]. Ο Pauli ξεκινάει την ανάλυσή του κάνοντας μια γενική αναφορά στις εξισώσεις κίνησης στην κλασική μηχανική, εισάγει το τετράνυσμα της δύναμης από τον συμβολισμό του Minkowski για τις εξισώσεις κίνησης και με αναφορές σε εργασίες του Planck καταλήγει για την ορμή στη σχέση

$$\vec{G} = m\vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{u} .$$

Έπειτα χρησιμοποιεί τους μετασχηματισμούς Lorentz και λαμβάνει τους γενικούς μετασχηματισμούς για την ολική ενέργεια και ολική ορμή που είναι οι παρακάτω:

$$G'_x = \frac{G_x - \frac{\upsilon}{c^2}E}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

$$G'_y = G_y ,$$

$$G'_z = G_z ,$$

$$E' = \frac{E - \upsilon G_x}{\sqrt{1-\beta^2}} . \quad \mathbf{(9.7.1)}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης $\mu_0 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = f^i \Rightarrow \mu_0 \frac{du^i}{d\tau} = f^i$, ο Minkowski έδωσε μια επιπλέον ερμηνεία εισάγοντας το τανυστή ενέργειας-ορμής, $\Theta_{ik} = \mu_0 u_i u_k$, όπου μ_0 είναι η αναλλοίωτη πυκνότητα μάζας ηρεμίας. Επειδή ισχύει η συνθήκη συνέχειας

$$\frac{\partial\left(\mu_0 u^k\right)}{\partial x^k} = 0$$

[143] Pauli (1958).

οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\frac{\partial \Theta_i^k}{\partial x^k} = f_i .$$

Οι σχέσεις **(9.7.1)**[144] είναι σε ισχύ όταν η ενέργεια και η ορμή είναι ολικές δηλαδή όταν για παράδειγμα έχουμε ελαστική ενέργεια ή χημικά δυναμικά ή ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, θα πρέπει να προστεθούν και αυτά. Στην περίπτωση μας έχουμε αέριο που υπόκειται σε εξωτερική πίεση γι'αυτό και προστίθεται και ένας όρος pV όπως θα δούμε. Έτσι για την ορμή ανά μονάδα όγκου από τις **(9.7.1)** θα έχουμε:

$$\frac{G_x}{dV} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\upsilon}{c^2}\left[\frac{E'}{dV'} + S'_{xx}\right],$$

$$\frac{G_y}{dV} = \frac{\upsilon}{c^2} S'_{xy} ,$$

$$\frac{G_z}{dV} = \frac{\upsilon}{c^2} S'_{xz} ,$$

όπου S'_{xx} ο τανυστής πυκνότητας ενέργειας που οφείλεται στο έργο που παράγει το αέριο. Με ολοκλήρωση σε όλο τον όγκο προκύπτει τελικά:

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\upsilon}{c^2}\left[E' + \int S'_{xx} dV'\right],$$

$$G_y = \frac{\upsilon}{c^2} \int S'_{xy} dV' ,$$

$$G_z = \frac{\upsilon}{c^2} \int S'_{xz} dV' . \ \mathbf{(9.7.2)}$$

Για την ενέργεια θα έχουμε

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E - \upsilon G_x\right) \Leftrightarrow E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E' + \upsilon G'_x\right)$$

όπου επειδή το τονούμενο σύστημα είναι το ηρεμίας η ολική ορμή θα είναι μηδέν $\left(G' = 0\right)$. Επομένως

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E'$$

144 Είναι οι σχέσεις (228) στο βιβλίο του Pauli.

και η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου θα είναι

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{E'}{dV'} + S'_{xx}\right)$$

όπου ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E' + \frac{\upsilon^2}{c^2}\int S'_{xx}dV'\right) \quad \textbf{(9.7.3)}$$

Οι σχέσεις **(9.7.2)** και **(9.7.3)** καταλήγουν τελικά στις σχέσεις:

$$\vec{G} = \frac{\vec{u}}{c^2}\gamma\left(E_0 + p_0V_0\right) \quad \textbf{(9.7.4)}$$

και

$$E = \gamma\left(E_0 + \frac{u^2}{c^2}p_0V_0\right) \quad \textbf{(9.7.5)}$$

όπου τα τονούμενα σύμβολα έχουν αντικατασταθεί από το δείκτη μηδέν και $\int S'_{xx}dV' = p_0V_0$. Πρόκειται για τανυστή που οι τάσεις είναι ομοιόμορφη βαθμωτή πίεση στην περίπτωση μας.

Επίσης είναι

$$V = \frac{V_0}{\gamma} \quad \textbf{(9.7.6)} \text{ και } p = p_0 \quad \textbf{(9.7.7)}$$

δηλαδή η βαθμωτή πίεση είναι αμετάβλητη. Επομένως

$$pV = \frac{1}{\gamma}p_0V_0 \quad \textbf{(9.7.8)}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη των **(9.7.5)**, **(9.7.8)** προκύπτει:

$$E + pV = \gamma\left(E_0 + \frac{u^2}{c^2}p_0V_0\right) + \frac{1}{\gamma}p_0V_0 \overset{\frac{u^2}{c^2}=1-\frac{1}{\gamma^2}}{\Rightarrow}$$

$$E + pV = \gamma\left(E_0 + \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)P_0V_0\right) + \frac{1}{\gamma}p_0V_0 \Rightarrow$$

$$E + pV = \gamma E_0 + \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)p_0V_0 + \frac{1}{\gamma}p_0V_0 \Rightarrow$$

$$E + pV = \gamma E_0 + \gamma p_0 V_0 - \cancel{\frac{1}{\gamma} p_0 V_0} + \cancel{\frac{1}{\gamma} p_0 V_0} \Rightarrow$$

$$E + pV = \gamma\left(E_0 + p_0 V_0\right) \quad \textbf{(9.7.9)}.$$

Τότε η **(9.7.4)** με την **(9.7.9)** γράφεται και ως

$$\vec{G} = \frac{\vec{u}}{c^2}\left(E + pV\right) \quad \textbf{(9.7.10)}$$

Από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε:

$$dQ = dE - dA \quad \textbf{(9.7.11.α)}$$

όπου

$$dA = -pdV + \vec{u}d\vec{G} \quad \textbf{(9.7.11.β)}$$

οπότε παραγωγίζοντας την **(9.7.4)** έχουμε

$$d\vec{G} = \frac{\vec{u}}{c^2}\gamma d\left(E_0 + P_0 V_0\right) \Rightarrow \vec{u}\ d\vec{G} = \frac{\vec{u}^2}{c^2}\gamma\Big(dE_0 + d\left(P_0 V\right)_0\Big) \quad \textbf{(9.7.4.α)}$$

Αντιστοίχως η **(9.7.5)** γίνεται

$$dE = \gamma\left(dE_0 + \frac{u^2}{c^2} d\left(P_0 V_0\right)\right) \quad \textbf{(9.7.5.α)}$$

και η **(9.7.6)** γίνεται

$$dV = \frac{1}{\gamma} dV_0 \Rightarrow pdV = \frac{1}{\gamma} pdV_0 \stackrel{p=p_0}{=} \frac{1}{\gamma} p_0 dV_0 \Rightarrow$$

$$pdV = \frac{1}{\gamma} d\left(p_0 V_0\right) \quad \textbf{(9.7.6.α)}$$

Συνοψίζοντας λοιπόν και βάζοντας στην **(9.7.11.α)** την **(9.7.5.α)** και την **(9.7.11.β)**, και έπειτα τις σχέσεις **(9.7.6.α)** και **(9.7.4.α)**, προκύπτει διαδοχικά:

$$dQ = \gamma\left(dE_0 + \frac{u^2}{c^2} d\left(P_0 V_0\right)\right) + \frac{1}{\gamma} d\left(p_0 V_0\right) - \frac{\vec{u}^2}{c^2}\gamma\Big(dE_0 + d\left(P_0 V\right)_0\Big) \Rightarrow$$

$$dQ = \gamma dE_0 + \cancel{\gamma\frac{u^2}{c^2} d\left(P_0 V_0\right)} - \gamma\frac{\vec{u}^2}{c^2} dE_0 \cancel{-\gamma\frac{\vec{u}^2}{c^2} d\left(P_0 V\right)_0} + \frac{1}{\gamma} p_0 dV_0 \Rightarrow$$

$$dQ = \gamma\left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}\right)dE_0 + \frac{1}{\gamma}d\left(p_0 V\right)_0 \Rightarrow^{145} dQ = \frac{1}{\gamma}dE_0 + \frac{1}{\gamma}d\left(p_0 V_0\right) \Rightarrow$$

$$dQ = \frac{1}{\gamma}d\left(E_0 + p_0 V_0\right) \Rightarrow$$

$$dQ = \frac{dQ_0}{\gamma} \quad \textbf{(9.7.12)} \ .$$

Ο τελευταίος μετασχηματισμός της θερμότητας έχει παραχθεί ξανά από το Pauli πρωτύτερα, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο ίδιος, σε μια προσπάθεια αναζήτησης του πιο επιθυμητού τανυστή ενέργειας-ορμής μέσω του οποίου η σχέση **(9.7.12)** να ισχύει για την ολική θερμότητα που αναπτύσσεται στις μεταβολές και να είναι και σε συμφωνία με την σχετικιστική θερμοδυναμική.

Τέλος όσον αφορά την εντροπία, αυτή παραμένει σταθερή σε μία αδιαβατική μεταβολή και συνεπώς αμετάβλητη και ως προς κινούμενο και ως προς ακίνητο σύστημα δηλαδή $S = S_0$, οπότε τελικά λαμβάνεται η $T = \frac{T_0}{\gamma}$, δηλαδή η (Θ1).

9.8 Μετασχηματισμοί Lorentz και μελέτη της ακτινοβολίας μέλανος σώματος

Το ζήτημα της θερμοκρασίας, εκτός από τις προσεγγίσεις που είδαμε μέχρι τώρα και που αφορούσαν τους νόμους της θερμοδυναμικής με στοιχεία της Ε.Θ.Σ, δηλαδή αυτό που λέμε συμβατική σχετικιστική θερμοδυναμική, και εκτός από άλλες προσεγγίσεις που έκαναν χρήση της Λαγκαντζιανής μηχανικής, απασχόλησε και επιστήμονες που μελέτησαν την ακτινοβολία μέλανος σώματος μεταξύ αδρανειακών παρατηρητών και την συσχέτισαν με την θερμοκρασία συνδυάζοντας στοιχεία της στατιστικής μηχανικής και οι πιο σύγχρονοι υπό το πρίσμα της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

---

[145] Είναι $\gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \gamma\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma}$

9.8.1 Η πρόταση Ford και O'Connel

Συγκεκριμένα, στην εργασία[146] τους οι Ford και O'Conell υπολογίζουν τον μετασχηματισμό της φασματικής κατανομής της ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοκρασία T. Τονίζουν ότι αυτή η θερμοκρασία είναι T στο ακίνητο σύστημα αναφοράς και επιπλέον αποφεύγουν το συγκεχυμένο ερώτημα για το πως η θερμοκρασία μετασχηματίζεται. Σε απόλυτη θερμοκρασία μηδέν η φασματική κατανομή παραμένει αμετάβλητη. Χάριν απλότητας θα αποφύγουμε να εκθέσουμε αναλυτικά τη μαθηματική επεξεργασία και θα μείνουμε απλώς στα αποτελέσματα. Κάνοντας λοιπόν χρήση γνωστών εκφράσεων της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, υπολογίζουν την πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε θερμική ισορροπία

$$W = \int_0^\infty d\omega \int d\Omega \rho\left(\omega, \vec{\mathrm{k}}\right)$$

όπου το $\rho\left(\omega, \vec{\mathrm{k}}\right) d\omega d\Omega$ είναι η πυκνότητα ενέργειας ακτινοβολίας με συχνότητα στο διάστημα $d\omega$ και διάδοση στη στερεά γωνία $d\Omega$, σε κατεύθυνση $\vec{\mathrm{k}}$. Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς η φασματική κατανομή αποδεικνύεται ότι είναι

$$\rho\left(\omega, \vec{\mathrm{k}}\right) = \frac{\hbar}{(2\pi c)^3} \omega^3 \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} .$$

Στην συνέχεια εισάγοντας τους γνωστούς μετασχηματισμούς Lorentz για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο προκύπτει η σχέση που μας ενδιαφέρει για την φασματική κατανομή στο κινούμενο σύστημα αναφοράς που είναι η

$$\rho'\left(\omega', \vec{\mathrm{k}}'\right) = \hbar \left(\frac{\omega'}{2\pi c} \right)^3 \coth \left(\frac{\hbar \gamma \left(1 + \vec{\mathrm{k}}' \frac{v}{c} \right) \omega'}{2kT} \right)$$

Παρατηρούμε ότι για θερμοκρασία μηδέν προκύπτει ότι $\rho'\left(\omega', \vec{\mathrm{k}}'\right) = \rho\left(\omega, \vec{\mathrm{k}}\right)$ που σημαίνει ότι η φασματική κατανομή παραμένει αμετάβλητη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Επιπλέον σε πεπερασμένη θερμοκρασία τα αποτέλεσμά τους είναι ακριβώς της μορφής που προκύπτει για την κίνηση μέσω της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (Κ.Α.Υ)

---

146 Ford, O'Connell, Lorentz Transformation of Blackbody Radiation, 2013.

(Cosmic Microwave Background, CMB) που αντιστοιχεί σε ακτινοβολία μέλανος σώματος σε θερμοκρασία $2,73^o \mathrm{K}$.

9.8.2 O van Kampen και η αντίστροφη τετραθερμοκρασία

Πριν συζητήσουμε για την εργασία του van Kampen, ας σταθούμε σε μερικά σημεία της εργασίας[147] του Tadas K. Nakamura ο οποίος μελετάει το ζήτημα από την άποψη της σχετικιστικής στατιστικής μηχανικής και αναφέρεται συχνά στον van Kampen.

Ξεκινάει από την γνωστή σχέση της κατανομής του Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος όπου στο φυσικό σύστημα μονάδων[148] είναι

$$n(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{2\pi^2\left(e^{\frac{\omega}{T}}-1\right)}d\omega \quad \textbf{(9.8.2.1)}$$

όπου $n(\omega)$ ο αριθμός πυκνότητας των φωτονίων που έχουν συχνότητα ω και T η θερμοκρασία. Η έκφραση για έναν παρατηρητή που κινείται σε σχέση με την κοιλότητα υπολογίζεται στα πλαίσια της Κ.Α.Υ. Αν το ηλιακό σύστημα κινείται σε σχέση με το ακίνητο σύστημα της Κ.Α.Υ, τότε η κατανομή της Κ.Α.Υ όπως παρατηρείται από τη Γη θα είναι διαφορετική από την **(9.8.2.1)** και η διαφορά θα οφείλεται στην ταχύτητα του ηλιακού συστήματος. Η σχέση που δίνει τον αριθμό της πυκνότητας των φωτονίων που έρχονται από μια στερεά γωνία δίνεται από τη σχέση

$$n(\omega,\Omega)d\omega d\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi^2\left(e^{\frac{\omega}{T_{eff}(\theta)}}-1\right)}d\omega d\Omega \quad \textbf{(9.8.2.2)}$$

όπου T_{eff} η αποτελεσματική θερμοκρασία (effective temperature) που ονομάζεται κατευθυντήρια θερμοκρασία (directional temperature) και ορίζεται ως

$$T_{eff}(\theta) = \frac{T\sqrt{1-V^2}}{1-V\cos\theta} \quad \textbf{(9.8.2.3)}$$ [149]

[147] Tadas K. Nakamura, Lorentz Transform of Black Body Radiation Temperature, 2009

[148] $c = k = h = 1$

[149] Επίσης εδώ $c = 1$

όπου T η θερμοκρασία μέλανος σώματος μετρούμενη στη κοιλότητα στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, αυτή της σχέσης **(9.8.2.1)**, V η ταχύτητα του παρατηρητή και θ η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της κίνησης και της διεύθυνσης παρατήρησης. Όμως το παραπάνω αποτέλεσμα προέκυψε από μία καθαρά μαθηματική χειραγώγηση χωρίς να έχει χρησιμοποιηθεί αρχικά κάποια θερμοδυναμική θεώρηση. Δηλαδή δεν είναι ξεκάθαρο αν η T_{eff} έχει την έννοια της θερμοκρασίας ή όχι. Αυτό που θέλει να δείξει ο Nakamura είναι ότι η σχέση **(9.8.2.2)** μπορεί να προκύψει από την σχετικιστική στατιστική μηχανική και η σχέση **(9.8.2.3)** μπορεί να παραχθεί από υπολογισμούς βασισμένους στο τετράνυσμα της αντίστροφης θερμοκρασίας που προτάθηκε στα πλαίσια της σχετικιστικής θερμοδυναμικής αρχικά από τον van Kampen.[150] Η αντίστροφη θερμοκρασία β, σαν τετράνυσμα, δηλαδή $\beta_i\left(i = x, y, z\right)$ είναι ουσιαστικά οι συντελεστές Lagrange που προκύπτουν από τους περιορισμούς να ισχύουν η αρχή διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων του ιδανικού αερίου, η αρχή διατήρησης της ενέργειας και της ορμής. Ο στόχος τελικά είναι να προκύψει μια σχέση που να συγκριθεί με την **(9.8.2.2)** όπου να φαίνεται αν είναι δυνατό κάποιο φυσικό νόημα για την θερμοκρασία. Πράγματι μετά από μια σειρά πράξεων, εισάγοντας πολικό σύστημα αξόνων και λαμβάνοντας υπόψη κάποιες συμμετρίες τελικά λαμβάνεται η

$$n\left(\omega,\Omega\right)d\omega d\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi^2\left(e^{(\beta_t-\beta_z\cos\theta)\omega}-1\right)}d\omega d\Omega \quad \textbf{(9.8.2.4)}$$

όπου συγκρίνοντάς την με την **(9.8.2.2)** προκύπτει ότι

$$\beta_t = \frac{1}{T\sqrt{1-V^2}} \quad \text{και} \quad \beta_z = \frac{V}{T\sqrt{1-V^2}}$$

δηλαδή με άλλα λόγια μια μορφή που μπορεί να γενικευτεί ως

$$\beta_\mu = \frac{u_\mu}{T}.$$

Αυτό το τετράνυσμα είναι η συναλλοίωτη έκφραση (covariant form) της αντίστροφης θερμοκρασίας στη σχετικιστική στατιστική μηχανική, έχει ξεκάθαρα την έννοια της αντίστροφης θερμοκρασίας και μας δείχνει την κατεύθυνση της θερμικής ανταλλαγής ενέργειας-ορμής όπως έχει συζητηθεί και στην εργασία του van Kampen που θα δούμε αμέσως παρακάτω.

Δεν μπορεί κανείς να πει με βεβαιότητα ότι θα βρει απόλυτη και πειστική λύση στο πρόβλημα της θερμοκρασίας, παρόλα αυτά περιλαμβάνει νέες ενδιαφέρουσες ιδέες που αξίζει να αναφερθούν. Ξεκινάει κάνοντας αναφορά στην θερμοδυναμική του Ott όπου κανείς φτάνει σ'αυτήν αν διατηρήσει το 1^{ο} και 2^{ο} Θ.Ν στην αρχική τους μορφή

[150] van Kampen (1968).

και για θερμοδυναμικό σύστημα θεωρεί το αέριο μαζί με το δοχείο που το περιέχει. Ακολούθως η θερμοδυναμική του Planck λαμβάνεται όπως έχουμε ήδη δει με τη διαφορά ότι ως θερμοδυναμικό σύστημα τώρα λογίζεται το αέριο μόνο του. Ο van Kampen αντικαθιστά τον 1^{o} Θ.Ν με μια συμμεταβλητή εξίσωση που εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας και της ορμής. Αυτό οδηγεί σε σχέσεις στις οποίες όχι μόνο η εντροπία S, αλλά επίσης η θερμοκρασία T και η μεταφορά θερμότητας dQ[151] είναι βαθμωτά[152]. Συγκεκριμένα έχει επεκτείνει τους ορισμούς της θερμοκρασίας και μεταφοράς θερμότητας ως εξής: Η θερμοκρασία T μπορεί να επιλεγεί να είναι μια οποιαδήποτε θετική συνάρτηση των V^0, p, u ή εναλλακτικά των V^0, p^0, u όπου δίνει T^0 για $u=0$. Τότε από τον 2^{o} Θερμοδυναμικό νόμο προκύπτει ότι

$$dQ = dQ^0 \frac{T\left(V^0, T^0, u\right)}{T^0}.$$

Όμως αν η dQ είναι εκτεταμένη ιδιότητα, τότε ο λόγος $\frac{T}{T^0}$ δεν μπορεί να εξαρτάται από το V^0 έτσι τελικά έχουμε

$$T = T^0 g\left(T^0, u\right) \text{ και } dQ = dQ^0 g\left(T^0, u\right) \quad \textbf{(9.8.2.5)}$$

όπου $g\left(T^0, u\right)$ **μια αυθαίρετη θετική συνάρτηση που υπακούει μόνο στη συνθήκη** $g\left(T^0, 0\right) = 1$. Χωρίς περαιτέρω καθυστερήσεις, το τελικό αποτέλεσμα για τον 1^{o} Θ.Ν προκύπτει ότι είναι η συμμεταβλητή εξίσωση

$$dQ^0 = u_\mu dU_\mu + u_\mu dA_{V\mu}.$$

Η θεώρηση που έχει κάνει ο van Kampen στο μεγαλύτερο μέρος της εργασίας του είναι μακροσκοπική. Μόνο στο τέλος εμπλέκει την στατιστική μηχανική με την οποία κάνει μια σύνδεση μεταξύ της γνωστής κατανομής Boltzmann για ένα ιδανικό αέριο σε ισορροπία και της απόλυτης θερμοκρασίας. Τονίζει λοιπόν ότι επειδή η θερμοκρασία είναι ένα θερμοδυναμικό μέγεθος, ορίζεται από τον 2^{o} Θ.Ν και όταν η θερμοδυναμική δεν ορίζει με μοναδικό τρόπο τη σχετικιστική επέκταση της θερμοκρασίας, τότε είναι κανείς ελεύθερος να κάνει εκείνη την επιλογή που είναι η πιο

---

151 Προτιμάει να το λέει παροχή θερμότητας (heat supply) και όχι μεταφορά θερμότητας (heat transfer), γιατί όταν θερμική ενέργεια και ορμή μεταφέρονται, η θερμότητα που χάνεται από το ένα σύστημα δεν είναι απαραίτητα ίδια με την θερμότητα που κερδίζεται από το άλλο σύστημα.

152 Αυτό προκύπτει αν $g=1$ στις σχέσεις 9.8.2.5 . Τις διεργασίες του ο van kampen τις διακρίνει σε ομοταχικές (homotachic) και ετεροταχικές (heterotachic). Οι πρώτες αφορούν ανταλλαγή θερμότητας και έργου μεταξύ συστημάτων που έχουν την ίδια ταχύτητα. Στις δεύτερες η ταχύτητα διαφέρει αδιαβατικώς με σταθερή V^0, p .

βολική στην στατιστική μηχανική. Αυτή η επιλογή είναι να ορισθεί η θερμοκρασία ως βαθμωτό $T = T^0$, μια επιλογή που ευνοείται και από την εξίσωση Boltzmann.

9.9 Ο Juttner και η σχετικιστική κατανομή ταχυτήτων

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο της σχετικιστικής θερμοδυναμικής επιστρέφοντας πάλι για λίγο πίσω στο 1911 όπου στον Jüttner ήταν που του ανατέθηκε από τον Planck η εύρεση ενός τύπου που να δίνει τη σχετικιστική διόρθωση για την κατανομή ταχυτήτων του αερίου ως προς το ακίνητο σύστημα. Ουσιαστικά ο κύριος στόχος ήταν με κάποιο τρόπο να απαλλαχθεί από εκείνο το μέρος της κατανομής όπου τα σωματίδια θα μπορούσαν να υπερβαίνουν την ταχύτητα του φωτός, επιτρεπτό κλασικά αλλά όχι σχετικιστικά όπως υπαγορεύει η Ε.Θ.Σ. Ο Jüttner όμως ασχολήθηκε συνδυαστικά και με το ιδανικό αέριο. 'Οπως είναι φυσικό περιμένουμε μια απόκλιση λόγω των σχετικιστικών επιδράσεων (από τη μεταβλητότητα της μάζας) στη συμπεριφορά του αερίου όταν η μέση ταχύτητα των μορίων γίνεται συγκρίσιμη με αυτήν της ταχύτητας του φωτός. Η ποσότητα $\sigma = \dfrac{m_0 c^2}{kT}$ μπορούμε να πούμε ότι λειτουργεί ως κριτήριο αφού στην κλασική κατανομή η μέση ταχύτητα των μορίων είναι μακρυά από αυτήν του φωτός οπότε για φυσιολογικές θερμοκρασίες είναι εξαιρετικά μεγάλη και μόνο όταν οι θερμοκρασίες είναι της τάξης των $10^{12}\mathrm{K}$ μειώνεται σημαντικά. Ο Jüttner για να ξεπεράσει αυτό το πρόβλημα χρησιμοποίησε το θεώρημα Liouville για τις κανονικές μεταβλητές ως άμεση συνέπεια των εξισώσεων του Hamilton και χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες αυτής της πορείας ας αναφέρουμε συνοπτικά μόνο από που ξεκίνησε για να δούμε που κατέληξε. Υπολόγισε την ελεύθερη ενέργεια

$$F = E - TS$$

που δίνεται από τη σχέση

$$F = -kT \log Z$$

όπου

$$Z = \int e^{-\frac{H}{kT}} dx_1 \ldots dx_{2N}$$

με το H να έχει την έννοια της ενέργειας επιφάνειας (energy surface) ή ενέργειας κελύφους (energy shell). Εφόσον η ενέργεια ενός σωματιδίου είναι της μορφής

$$E = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{m_0^2 c^2} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

όταν εκφραστεί με όρους ορμής προκύπτει τότε ότι

$$F = -kT \log \overline{Z} \,,$$

όπου

$$\overline{Z} = \overline{Z}^{\frac{1}{L}} = V \cdot \iiint \mathrm{e}^{\left\{ -\frac{m_0 c^2}{kT}\left[1+\frac{1}{m_0^2 c^2}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \times dp_x dp_y dp_z \,.$$

Θεωρώντας την ποσότητα του αερίου ίση με ένα γραμμομόριο, L ο αριθμός Avogadro, και V ο όγκος οι υπολογισμοί δίνουν τελικά

$$\overline{Z} = V m_0^3 c^3 \cdot 2\pi^2 \left(-i\right) \frac{H_2^{(1)}(i\sigma)}{\sigma}$$

και

$$F = -RT \left\{ \log V + \log\left(-\frac{iH_2^{(1)}(i\sigma)}{\sigma} \right) + const. \right\}$$

όπου $H_n^{(i)}$ η νιοστής τάξης συνάρτηση Hankel, i είδους με $i = 1,2$. Οι άλλες θερμοδυναμικές ποσότητες προκύπτουν από την ελεύθερη ενέργεια και είναι

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} \quad (5)$$

και

$$F = E - T\frac{\partial F}{\partial T} = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)$$

με ανεξάρτητες μεταβλητές τις V, T. Από την εξίσωση (5) προκύπτει ότι

$$p = \frac{RT}{V}$$

δηλαδή στο συμπέρασμα ότι η **καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων παραμένει αμετάβλητη στην σχετικιστική μηχανική**.

Για την περίπτωση όμως της εξάρτησης της θερμοκρασίας από τη ενέργεια τότε προκύπτει ότι

$$E = RT \left\{ 1 - \frac{iH_2'^{(1)}(i\sigma)}{H_2^{(1)}(i\sigma}\sigma \right\}$$

όπου για μεγάλα σ τότε η συνάρτηση Hankel αντικαθίσταται από την ασυμπτωτική της μορφή

$$-iH_2^{(1)}(i\sigma) \approx \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\sigma}}$$

και με λογαριθμική παραγώγηση προκύπτει ότι

$$-\frac{iH_2'^{(1)}(i\sigma)}{H_2^{(1)}(i\sigma} = 1 + \frac{1}{2\sigma}$$

οπότε η σχέση για την ενέργεια καταλήγει στην

$$E = RT\left(\sigma + \frac{3}{2}\right) = Lmc^2 + \frac{3}{2}RT$$

Η σχέση για την κατανομή των ταχύτητων χρησιμοποιώντας και την αρχή της μέγιστης εντροπίας είναι η ακόλουθη:

$$f(\beta) = \frac{\beta}{\left(1-\beta^2\right)\Theta K_2\left(\frac{1}{\Theta}\right)} e^{-\frac{1}{\Theta\sqrt{1-\beta^2}}}$$ [153]

όπου $\Theta = \dfrac{kT}{mc^2}$ αδιάστατη παράμετρος (σχετικιστική θερμοκρασία) και K_2 η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 2ου είδους. Συγκρίνοντας αυτήν με την κλασική κατανομή Maxwell-Boltzmann μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η ενέργεια δεν είναι πλέον ανάλογη της θερμοκρασίας αλλά υπερβατική εξίσωση της θερμοκρασίας.

Μια αναφορά από μια πιο πρόσφατη εργασία[154] αξίζει να γίνει εδώ που σχετίζεται με την κατανομή του Jüttner. Πρόκειται για πειραματική μέθοδο στην οποία προσομοιώνεται ένα δισδιάστατο σχετικιστικό αέριο εφαρμόζοντας έναν σχετικιστικό ελαστικό αλγόριθμο δυαδικής σύγκρουσης και δείχνεται ότι το σχετικιστικό αέριο υπακούει στην συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων του Jüttner. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αριθμητική προσομοίωση σε συνδυασμό με το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας για σχετικιστικό αέριο συμπεραίνεται επίσης ότι ένα κινούμενο σύστημα φαίνεται πιο ψυχρό.

---

153 Η κλασική έκφραση της κατανομής είναι η $f(\upsilon)d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi\upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon$.

154 Rasinariu, 2008.

Το αέριο περικλείεται σε ένα ορθογώνιο δοχείο με πλήρως ελαστικά τοιχώματα και μελετώνται οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων και μεταξύ σωματιδίων και τοιχωμάτων. Αν είναι σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία $T=\frac{1}{\beta}$ τότε η κατανομή των ταχυτήτων δίνεται από τη σχέση του Jüttner

$$f(\upsilon)=\upsilon\gamma_\upsilon^4 e^{-\frac{\beta\gamma_\upsilon}{Z}}$$ [155]

όπου γ_υ ο παράγοντας Lorentz,

$$Z=e^{-\beta}\frac{1+\beta}{\beta^2}$$

μια σταθερά κανονικοποίησης έτσι ώστε $\int_0^1 f(\upsilon)d\upsilon=1$. Η μέση τιμή της ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\langle E\rangle\equiv\int_0^1 Ef(\upsilon)d\upsilon=\frac{\beta^2+2\beta+2}{\beta^2+\beta}$$

από όπου υπολογίζεται η ποσότητα (αντίστροφη θερμοκρασία)

$$\beta=\frac{2-\langle E\rangle+\sqrt{\langle E\rangle^2+4\langle E\rangle-4}}{2\langle E\rangle-2}.$$

Στην προσομοίωση χρησιμοποιούνται 100000 σωματίδια, τρεις διαφορετικές τιμές για την αντίστροφη θερμοκρασία $\beta=49{,}46$, $\beta=7{,}25$ και $\beta=2{,}00$ και ταχύτητες του κινούμενου συστήματος που αυξάνονται σταδιακά από $u=0{,}2$ σε $u=0{,}4$, $u=0{,}6$ και τελικά $u=0{,}8$ και μετά από αρκετούς ελεγκτικούς μηχανισμούς που να περιορίζουν πιθανά σφάλματα προκύπτουν τα δύο συμπεράσματα που αναφέρθηκαν πρωτύτερα. Το ένα αφορά ένα πειραματικό διάγραμμα κατανομής ταχυτήτων που συμφωνεί πλήρως με τη θεωρία (Jüttner) και το άλλο ότι ο σχετικιστικός μετασχηματισμός για τη θερμοκρασία έρχεται σε αξιοθαύμαστη ταύτιση με την πρόταση των Mosengeil, Planck και Einstein, δηλαδή την (Θ1).

[155] Στην εργασία αυτή (Rasinariu, 2008) έχει χρησιμοποιηθεί το Φ.Σ.Μ.

10. Η έννοια της θερμοκρασίας

Όπως όλες οι θεωρίες, έτσι και η Ε.Θ.Σ έχει ως πρωταρχικό σκοπό να βελτιώσει την περιγραφή των νόμων που διέπουν τη φύση. Θα πρέπει οπωσδήποτε να μπορεί να ερμηνεύει φαινόμενα που ερμηνεύονταν ήδη από προηγούμενες θεωρίες και επιπλέον να κάνει ένα βήμα παραπέρα εξηγώντας νέα πειραματικά δεδομένα αλλά επιπλέον να επιβεβαιώνεται και από αυτά. Είδαμε ότι εισάγει εκ των πραγμάτων κάποιες εξισώσεις μετασχηματισμών που οδηγούν αναπόφευκτα σε διορθώσεις των νόμων σε όλους τους γνωστούς κλάδους της φυσικής οι οποίες θα πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη όταν έχουμε να κάνουμε με τα λεγόμενα σχετικιστικά φαινόμενα.

Ένα μεγάλο μέρος της εργασίας αυτής ασχολήθηκε στο να αποτυπωθεί όλη αυτή η διαδρομή για να βρεθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός για τη θερμοκρασία και παρουσιάστηκαν οι εργασίες αρκετών διακεκριμένων ερευνητών. Είδαμε διαφορετικές προτάσεις, είδαμε συμφωνίες και διαφωνίες σε συγκεκριμένα στάδια των ερευνητικών προσπαθειών, είδαμε και πιο σύγχρονες προσεγγίσεις, και το πιο προφανές συμπέρασμα είναι αυτό: μια ασυμφωνία, μια διαμάχη που έχει ξεκινήσει από παλιά και συνεχίζεται μέχρι και σήμερα.

Γιατί όμως; Ποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά έχει η θερμοκρασία που την κάνει πρωταγωνίστρια του ενδιαφέροντος των επιστημόνων; Είναι αλήθεια ότι αν ψάξουμε για ορισμό δεν θα βρούμε πουθενά μέσα στη βιβλιογραφία. Θα βρούμε μόνο έννοιες που σχετίζονται με τη θερμοκρασία και μας βοηθούν να καταλάβουμε τι είναι ζεστό και τι είναι κρύο. Θα βρούμε για όργανα (θερμόμετρα) που μας μετράνε τη θερμοκρασία. Πρόκειται ουσιαστικά για μακροσκοπικές συσκευές, κατασκευασμένες με αυθαίρετες κλίμακες μέτρησης και ζητούμε με αυτές να μετρήσουμε τη θερμοκρασία σώματος η οποία εξαρτάται σε μικροσκοπική κλίμακα από μια πολύπλοκη στατιστική ανάλυση για τη συμπεριφορά συνόλων στοιχειωδών σωματιδίων από τα οποία αποτελείται το σώμα. Προφανώς λοιπόν παρατηρήσεις σαν τις παραπάνω δεν είναι σημαντικής επιστημονικής αξίας.

Είναι αλήθεια ότι μπορεί κανείς να ξεκινήσει από τους Θ.Ν, την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων, την κατανομή του Boltzmann και από αλλού και να προσπαθήσει να κατασκευάσει έναν ορισμό για τη θερμοκρασία. Η Ε.Θ.Σ όμως επιβάλλει μετασχηματισμούς μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων και αναζητάει τρόπο μέτρησης της θερμοκρασίας των κινούμενων σωμάτων. Πως μπορεί όμως να γίνει μέτρηση της θερμοκρασίας από απόσταση; Πως μπορεί να επιτευχθεί η θερμική ισορροπία μεταξύ του θερμομέτρου και των σωμάτων που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους; Θα ήταν παράλογο εντελώς να πει κανείς ότι το νερό βράζει σε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς και σε ένα άλλο που κινείται ως προς το πρώτο να είναι χλιαρό ή και παγωμένο.

Επιπλέον αν θελήσουμε να θεωρήσουμε το αμετάβλητο της θερμοκρασίας και εισάγουμε τους μετασχηματισμούς που επιβάλει η Ε.Θ.Σ μπορεί να βρεθούμε μπροστά σε άβολες καταστάσεις που αφορούν αλλαγή ακόμα και σε παγκόσμιες σταθερές όπως αυτή των ιδανικών αερίων $\boldsymbol{R}$[156], ή και τη σταθερά του Boltzman k. Το φυσικό νόημα τέτοιων διορθώσεων μπορεί να φτάνει πολύ μακρυά, πάντως συνήθως τέτοιες διορθώσεις παραβιάζουν άλλες πιο καλά εδραιωμένες αρχές.

Έπειτα από όλη αυτή την έρευνα, ασφαλή συμπεράσματα δεν μπορεί κανείς να διαπιστώσει με σιγουριά. Η θερμοδυναμική ως κλάδος της φυσικής μπορεί να ερμηνεύει ικανοποιητικά καλά την έννοια της μετάδοσης και μετατροπής της θερμότητας σε άλλες μορφές ενέργειας και να εξηγεί τη συμπεριφορά των αερίων. Η εξέλιξη της σε στατιστική θερμοδυναμική εισάγοντας κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία και ακόμα πιο πέρα με σύγχρονες πειραματικές διατάξεις ασφαλώς θωρακίζουν την αξιοπιστία της, δεν αμφιβάλλει κανείς γι'αυτό. Φαίνεται όμως ότι έχει κάποια κενά στην ίδια της τη δομή καθώς πολλά θερμοδυναμικά μεγέθη εξαρτώνται από άλλα με περίπλοκους τρόπους. Έτσι η θερμοκρασία αποκτά μία παρεξηγημένη φυσική σημασία γι'αυτό και δίνει τόσο διαφορετικά αποτελέσματα όταν κανείς προσπαθεί να βρει πως μετασχηματίζεται μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων.

Για να τελειώσουμε κάπως με το ζήτημα της θερμοκρασίας και προσπαθώντας να καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα, στις περισσότερες εργασίες που έχουν δημοσιευτεί θα παρατηρήσει κανείς ότι η θερμοκρασία από τη φύση της θέτει κάποιους φραγμούς ως προς αν θέλει η ίδια να μετασχηματιστεί. Από την άλλη, δεν είναι και απόλυτα επιστημονικώς τεκμηριωμένο ότι είναι αμετάβλητη. Όπως έχουμε ήδη δει μέσα από τις σελίδες αυτής της εργασίας, ο Einstein υπήρξε προφητικός ως προς τα προβλήματα που θα δημιουργούσε η θερμοκρασία στη σχετικιστική θερμοδυναμική, ο von Laue σχεδόν εγκατέλειψε αρνούμενος να ασχοληθεί περισσότερο, ο Landsberg στράφηκε σε άλλες πιο σύγχρονες μεθόδους που δεν αφορούσαν πλέον αδρανειακά συστήματα. Όλο αυτό το παιχνίδι της αποκάλυψης των μυστικών της θερμοκρασίας τελικά δεν οδηγεί πουθενά παρά μόνο στην απογοήτευση. Φαίνεται ότι η θερμοκρασία στέλνει η ίδια ένα μήνυμα που θα μπορούσε να συνοψίσει κανείς στα ακόλουθα συνθήματα:

ΑΦΗΣΤΕ ΤΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΗΣΥΧΗ

ή

ΚΑΤΩ ΤΑ ΧΕΡΙΑ ΣΑΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

ή κάτι ανάλογο.

---

[156] Από την καταστατική εξίσωση για $p = p_0$ και $T = T_0$, προκύπτει ότι $R = R_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$!

11. Χωροχρόνος Minkowski

Ας ξεκινήσουμε από τη ρήση του Hermann Minkowski (1864-1909)[157] η οποία πιστεύω ότι προκαλεί ρίγος όταν τη διαβάζει κανείς και η οποία συνοψίζει με ένα φανταστικό τρόπο όλη την ιδέα περί γεωμετρικοποίησης της σχετικότητας:

… space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality… δηλαδή ο χώρος από μόνος του και ο χρόνος από μόνος του είναι καταδικασμένοι να ξεθωριάσουν σε απλές σκιές και μόνο ένα είδος ένωσης των δύο θα διατηρήσει μια ανεξάρτητη πραγματικότητα.

Αυτό σημαίνει ότι δεν έχει νόημα πλέον να ξεχωρίζουμε το χώρο από τον χρόνο αφού στις μεταβάσεις από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο το x' εξαρτάται από το t και το t' από το x, ώστε τελικά όλος ο χωροχρόνος να αποτελεί αυτό που λέμε ένα τετραδιάστατο χωροχρονικό συνεχές και όλα τα γεγονότα να εξελίσσονται μέσα σ'αυτό.

Έστω ότι έχουμε ένα γεγονός $M(x, y, z)$ κάπου στον χώρο των τριών διαστάσεων. Κάθε γεγονός είναι ανεξάρτητο από το σύστημα αξόνων που χρησιμοποιούμε, η περιγραφή του όμως εξαρτάται από αυτό. Επειδή όμως το γεγονός εξελίσσεται στο χρόνο χρειαζόμαστε και μια τέταρτη διάσταση ώστε το γεγονός τώρα να περιγράφεται πλήρως ως $M(x, y, z, t)$ και $M(x', y', z', t')$ σε ένα κινούμενο σύστημα.

Η εποπτεία είναι δύσκολη έχοντας στη διάθεσή μας μόνο τρεις διαστάσεις. Εισάγουμε λοιπόν μια μετρική για να μετράμε. Η ποσότητα

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

εκφράζει την απόσταση δύο σημείων και είναι αμετάβλητη. Όταν είναι στοιχειώδης γράφεται ως

$$ds^2 = c^2 t^2 - (d x^2 + dy^2 + dz^2)$$

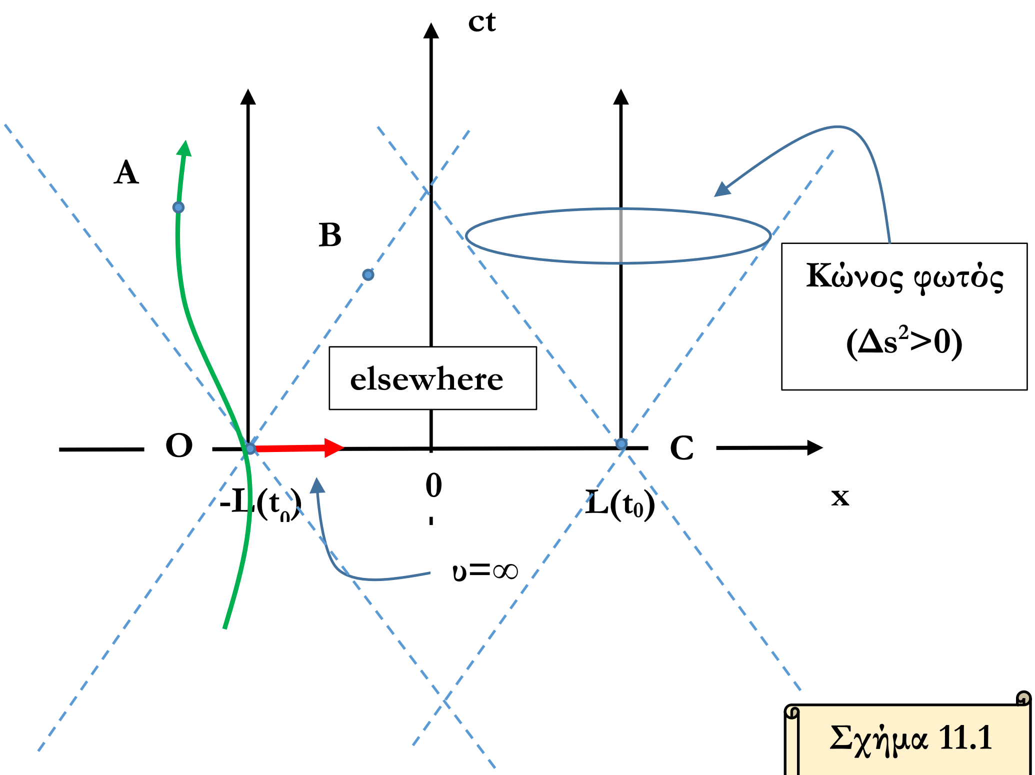
και πιο σύντομα

$$ds^2 = n_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

[157] Γερμανός μαθηματικός, καθηγητής του Einstein που αναδείχτηκε γρήγορα σε ταλέντο σε ηλικία μόλις 19 ετών, ενώ ακόμα σπούδαζε, κερδίζοντας το βραβείο μαθηματικών της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών για την εργασία του σχετικά με τη θεωρία των τετραγωνικών μορφών. Η σχέση του με την Ε.Θ.Σ περιλαμβάνει τρεις εργασίες που ουσιαστικά ήταν διαλέξεις που έδωσε σε τρία συνέδρια: *The Relativity Principle* στο Göttingen στις 5 Νοεμβρίου 1907, *The Fundamental Equations for Electromagnetic Processes in Moving Boddies* στο Göttingen στις 21 Δεκεμβρίου 1907 και *Space and Time* στην Cologne στις 21 Σεπτεμβρίου 1908.

όπου $n_{\mu\nu} = diag[c^2, -1, -1, -1]$ με $\mu, \nu = 0,1,2,3$, ένας πίνακας 4×4, και υπογραφή $g_{\mu\nu}(+,-,-,-)$[158]. Λέγεται και ψευδοευκλείδιος χώρος.

- Αν $\Delta s^2 > 0 \Rightarrow c^2\Delta t^2 > \Delta r^2 \Rightarrow c > \upsilon$ η απόσταση είναι χρονοειδής (timelike). Το σύνολο αυτών των σημείων αποτελεί την κοσμική γραμμή του παρατηρητή για τον οποίο ισχύει η σχέση διαδοχής αιτίου – αιτιατού. Τα υλικά σώματα βρίσκονται και κινούνται μέσα στον κώνο φωτός.
- Αν $\Delta s^2 < 0 \Rightarrow c < \upsilon$ είναι χωροειδής (spacelike) με ταχύτητες υπερφωτεινές, ταχυονικές, και για να επικοινωνήσουν δύο γεγονότα χρειάζονται ταχύτητες μεγαλύτερες του φωτός γι'αυτό και δεν ισχύει η σχέση αιτίου – αιτιατού. Βρίσκονται εκτός του κώνου φωτός. Όλα τα ταυτόχρονα γεγονότα είναι χωροειδή. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς ταυτόχρονα σημαίνει $\Delta t = 0$.



Σχήμα 11.1

[158] Είναι σύμβαση, υπάρχει και η $g_{\mu\nu}(-,-,-,+)$ που χρησιμοποιείται στη Σωματιδιακή Φυσική.

Στο **σχήμα 11.1**[159] βλέπουμε δύο γεγονότα που συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή σε διαφορετικές θέσεις. Επειδή $\Delta t = 0$, $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \infty$ το σήμα θα χρειαζόταν άπειρη ταχύτητα.

- Αν $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow \upsilon = c$ είναι φωτοειδείς (lightlike) καταστάσεις που τρέχουν με c. Εδώ δεν έχει νόημα η έννοια αιτίου – αιτιατού. Τα φωτόνια κινούνται πάνω στις γραμμές που ορίζουν την επιφάνεια του κώνου.

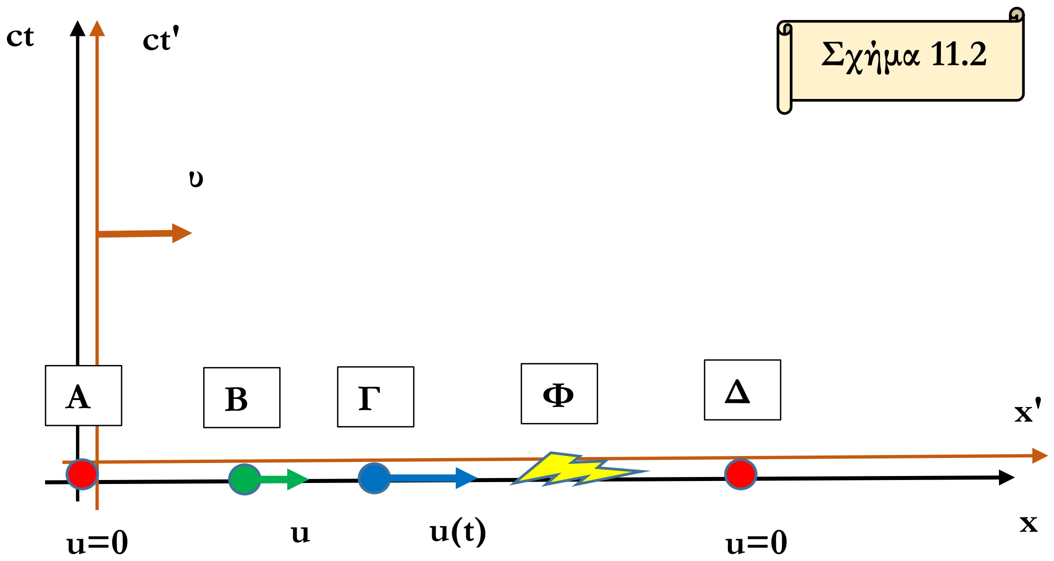
Μια διαδρομή από το O στο A είναι χρονοειδής για την οποία το O είναι το παρόν, το A είναι το μέλλον και οποιοδήποτε σημείο κάτω από το O μέσα στο κώνο αποτελεί το παρελθόν. Από το O στο B είναι φωτοειδής και μόνο φωτόνια μπορούν να την κάνουν. Τέλος από το A στο C ή από το O στο C η απόσταση είναι χωροειδής και δεν πηγαίνει τίποτα. Τα σημεία αυτά δεν επικοινωνούν.

Με ταχύτητα $\upsilon = c$ μπορεί κανείς να απαντήσει στο υποθετικό ερώτημα που έκανε και ο Einstein στον εαυτό του, τι θα έβλεπε αν καβαλούσε μια ακτίνα φωτός. Η απάντηση είναι πως οι αποστάσεις θα γίνονταν μηδέν και ο χρόνος θα σταματούσε! Δηλαδή ένα φωτόνιο ουσιαστικά θα στεκόταν πάνω σε ένα σημείο χωρίς να υπάρχει τίποτα άλλο σε απόσταση από το σημείο αυτό, όλος ο κόσμος θα γινόταν αυτό το σημείο, με το χρόνο σταματημένο! Όλες αυτές οι κάπως περίεργες περιγραφές είναι συνήθη παράγωγα στην Ε.Θ.Σ και θα τα δούμε και στα επομένα κεφάλαια προσπαθώντας να αποφύγουμε παρανοήσεις και συγχύσεις που πολύ εύκολα αναδύονται.

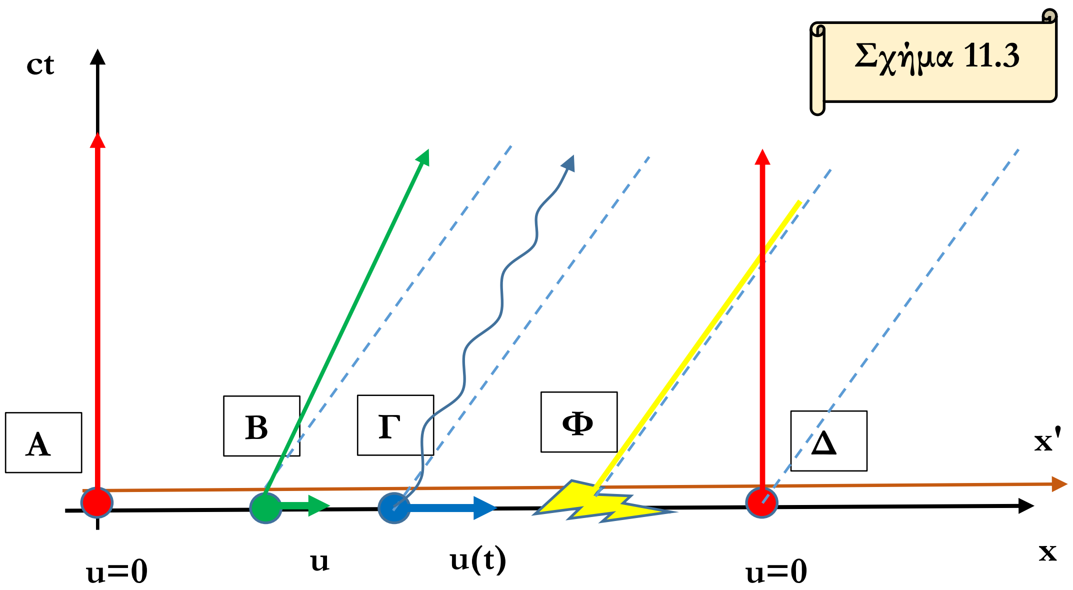
Ας δούμε προς το παρόν ένα παράδειγμα για το πως απεικονίζονται διάφορες κινήσεις σε ένα διάγραμμα Minkowski.

Έχουμε σώματα ακίνητα, σώμα κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, σώμα με μεταβλητή ταχύτητα και μια ακτίνα φωτός σε διάφορες θέσεις όπως φαίνεται στο **σχήμα 11.2**. Σε ένα διάγραμμα Minkowski εξέχοντα ρόλο έχει η ταχύτητα του φωτός που περιγράφεται με μία ευθεία κλίσης 1, γωνίας 45^o. Όλες οι άλλες ταχύτητες με $\upsilon < c$ περιγράφονται με κλίσεις που είναι μεγαλύτερες της μονάδας, με όσο μικρότερη είναι η ταχύτητα τόσο μεγαλύτερη είναι η κλίση (βλ. **σχήμα 11.4**). Αν όμως οι ταχύτητες μεγαλώνουν τότε η κλίση μικραίνει πλησιάζοντας την μονάδα χωρίς όμως να γίνεται ίση με αυτή. Ταχύτητες με κλίσεις μικρότερες της μονάδας παραβιάζουν το 2^o αξίωμα της Ε.Θ.Σ και είναι απαγορευτικές.

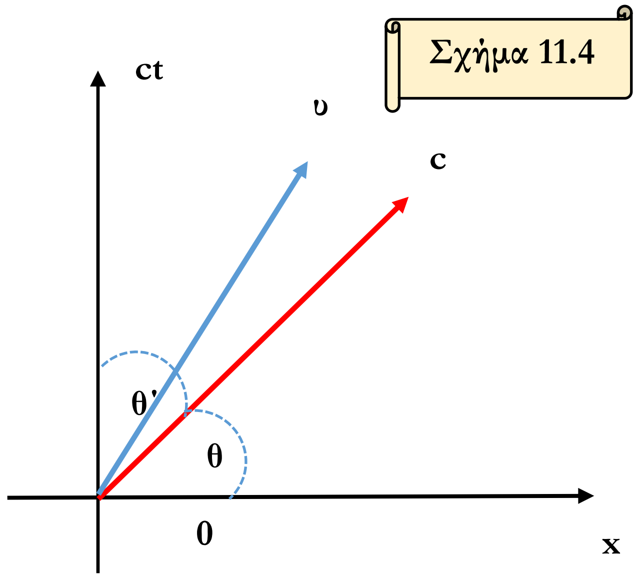
[159] Είναι 2 διαστάσεων αλλά αν το φανταστούμε 3 διαστάσεων σχηματίζεται κώνος.



Έτσι στο **σχήμα 11.3** βλέπουμε: Για το Α και το Δ: ακίνητα σε διαφορετικές θέσεις. Για το Β: $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} > 1 \Rightarrow \sin\theta > \cos\theta \Rightarrow \theta > 45^o$ δηλαδή μια ευθεία με κλίση μεγαλύτερη της μονάδας. Για το Γ: μεταβλητή ταχύτητα μεν αλλά η γωνία όχι μικρότερη από 45^o, δηλαδή η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης να έχει κλίση μικρότερης της μονάδας. Για το Φ: ευθεία πάνω στη γραμμή με κλίση 1.

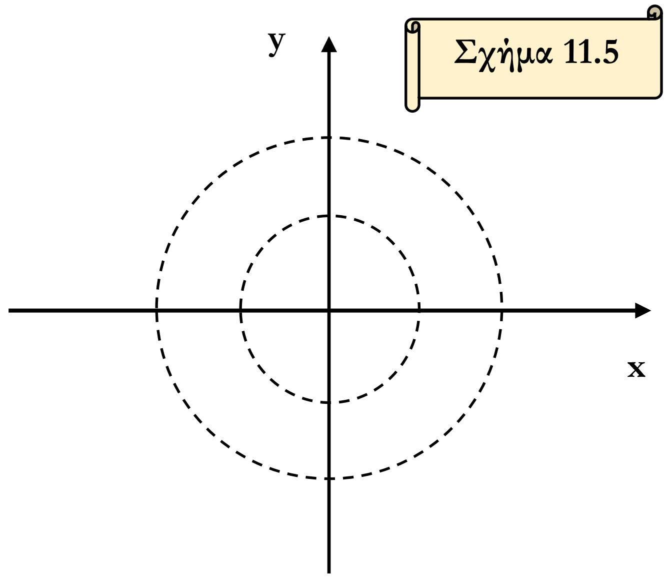


Για το **σχήμα 11.4** είναι $\tan\theta = \dfrac{ct}{x} = \dfrac{c}{\frac{x}{t}} = \dfrac{c}{\upsilon}$ δηλαδή για ταχύτητες μικρότερες της ταχύτητας του φωτός η κλίση μεγαλύτερη του 1, γωνία μεγαλύτερη των 45^o. Για το φως $\tan\theta = \dfrac{c}{c} = 1 \rightarrow \theta = 45^o$.

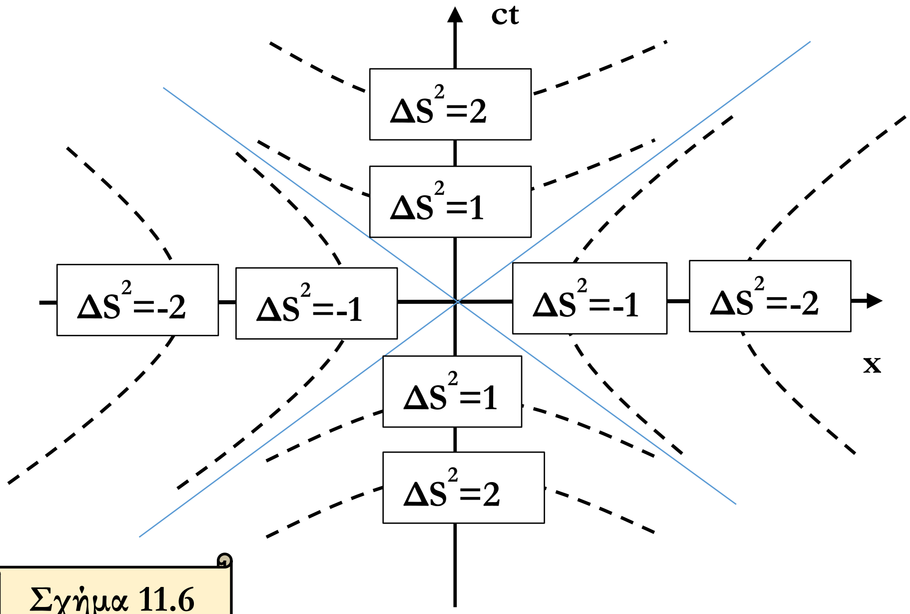


Πως δουλεύουν οι συντεταγμένες;

Για τον ευκλείδιο 2-D χώρο έχουμε το πυθαγόρειο θεώρημα $\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta r^2$ και προκύπτει πλέγμα κύκλων με το οποίο μπορούμε να ορίζουμε οποιοδήποτε σημείο.



Το ct δεν δουλεύει σε κύκλο αλλά σε υπερβολές! (ή υπερβολοειδή). Πλέγμα υπερβολών όπως φαίνεται στο σχήμα **Σχήμα 11.6**.



Σχήμα 11.6

Έχουμε ότι $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$

Για $\Delta t = 0$ είναι $\Delta x^2 = -\Delta s^2$ και για $\Delta s^2 = -1$ θα είναι $\Delta x^2 = 1 \Rightarrow \Delta x = \pm 1$.

Για $\Delta s^2 = -2$ θα είναι $\Delta x^2 = 2 \Rightarrow \Delta x = \pm\sqrt{2}$ κ.ο.κ. (χωροειδείς καταστάσεις)

Αντιστοίχως για $\Delta x = 0$ είναι $\Delta s^2 = c\Delta t^2$ και για $\Delta s^2 = 1$ θα είναι $c^2\Delta t^2 = 1 \Rightarrow \Delta t = \pm\dfrac{1}{c}$. Για $\Delta s^2 = 2$ θα είναι $c^2\Delta t^2 = 2 \Rightarrow \Delta t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{c}$ κ.ο.κ. (χρονοειδείς καταστάσεις)

<u>Εύρεση εξίσωσης τροχιάς αξόνων</u>

Ας δούμε πως ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων για ένα ακίνητο σύστημα S και ένα κινούμενο σύστημα S' φαίνονται σε ένα διάγραμμα Minkowski. Η επικοινωνία των συστημάτων γίνεται μέσω των μετασχηματισμών Lorentz.

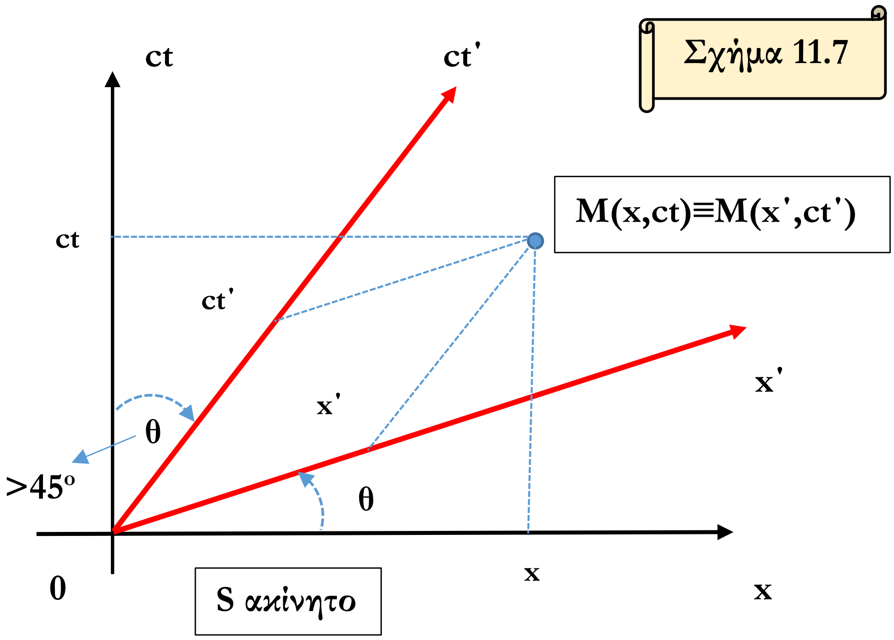
$$x' = \gamma(x - \upsilon t) \text{ και } t' = \gamma(t - \frac{\upsilon}{c^2}x)$$

Με το S ακίνητο θα έχουμε στο S':

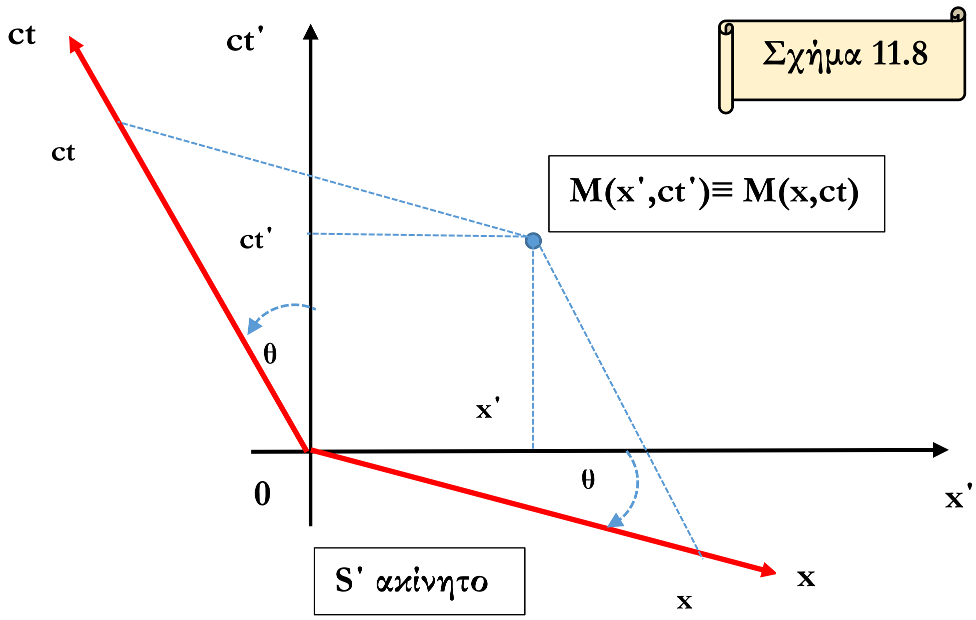
για $x' = 0$, $0 = \gamma(x - \upsilon t) \Rightarrow x = \upsilon t \Rightarrow x = \dfrac{\upsilon}{c}ct \Rightarrow x = \tan\theta(ct)$ με $\tan\theta < 1$, άρα είναι μια ευθεία.

Ή για $t' = 0$, $0 = \gamma(t - \dfrac{\upsilon}{c^2}x) \Rightarrow t = \dfrac{\upsilon}{c^2}x \Rightarrow ct = \dfrac{\upsilon}{c}x$, δηλαδή πάλι ευθεία.

Τελικά ο μετασχηματισμός Lorentz μετατρέπει το σύστημα σε πλαγιογώνιο. Στο **σχήμα 11.7** έχουμε την υπέρθεση των δύο συστημάτων, τι βλέπουν μαζί, με το S να είναι ακίνητο.

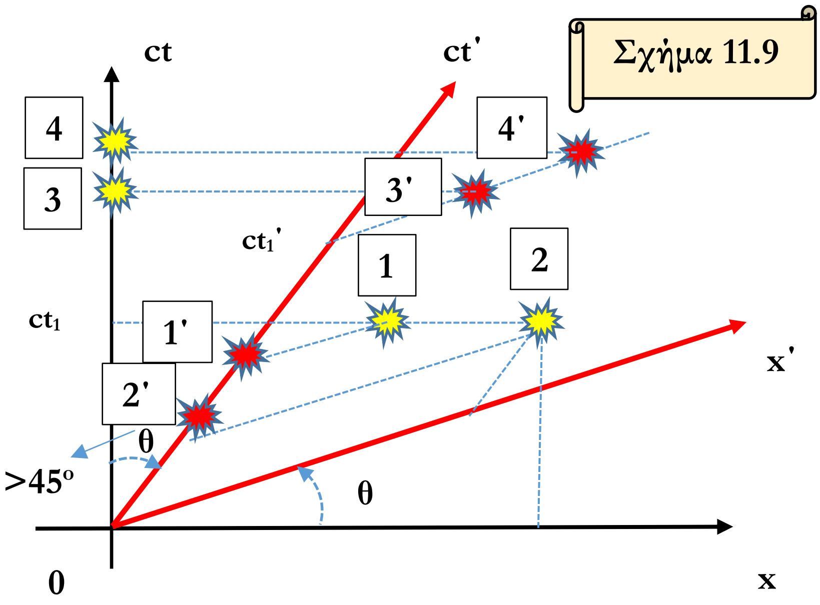


Όταν το S' είναι ακίνητο, βλέπει το S να απομακρύνεται με ταχύτητα $-\upsilon$. Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί $x=\gamma(x'+\upsilon t)$ και $t=\gamma(t'+\frac{\upsilon}{c^2}x')$ θα δώσουν τώρα για $x=0 \Rightarrow x'=-\upsilon t' \Rightarrow x'=-\frac{\upsilon}{c}ct' \Rightarrow x'=-\tan\theta ct'$ πάλι ευθεία αλλά με αρνητική κλίση (βλ. **σχήμα 11.8**).



- Ταυτόχρονα γεγονότα

Η έννοια του ταυτόχρονου που έχει προαναφερθεί μπορεί να επιβεβαιωθεί τώρα και γεωμετρικά. Δύο ταυτόχρονα γεγονότα σε ένα σύστημα, δεν είναι ταυτόχρονα σε ένα άλλο. Έστω η υπέρθεση στην οποία το σύστημα S είναι ακίνητο. Όπως φαίνεται στο **σχήμα 11.9**, δύο γεγονότα 1 και 2 που είναι ταυτόχρονα στο ακίνητο σύστημα, και τα δύο συμβαίνουν σε χρόνους που αντιστοιχούν σε ct_1, στο κινούμενο σύστημα γίνονται τα γεγονότα $1'$ και $2'$ που συμβαίνουν σε διαφορετικά ct'. Αντιστρόφως δύο γεγονότα 3 και 4 που είναι ταυτόχρονα[160] στο S', γίνονται τα γεγονότα $3'$ και $4'$ στο ακίνητο που δεν είναι ταυτόχρονα.



Από τους μετασχηματισμούς Lorentz άλλωστε προκύπτει ότι

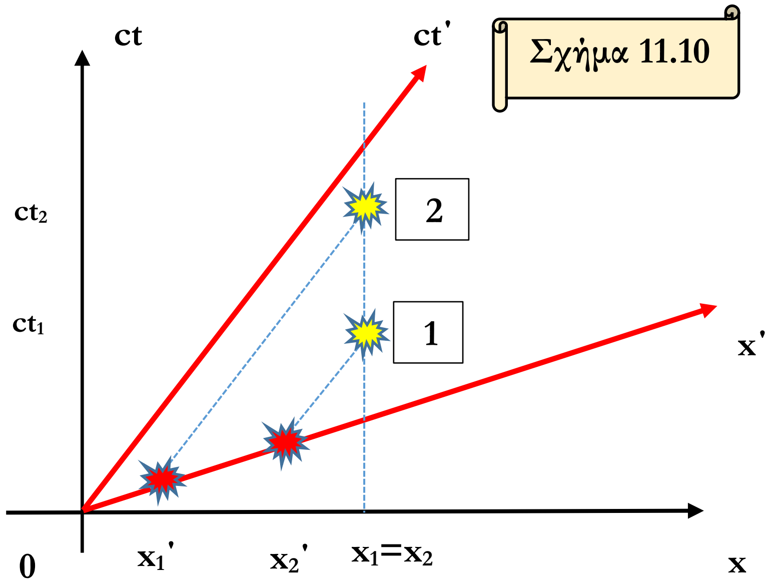
$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x') \overset{\Delta t=0}{\Rightarrow} \Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'$, δηλαδή $\Delta t' \neq 0$, εκτός εάν $\Delta x' = 0$ που σημαίνει ίδιο συμβάν.

---

160 Τα ταυτόχρονα γεγονότα στο κινούμενο σύστημα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στον άξονα x', ή σε ευθεία με σταθερή κλίση. Γενικά, για να βρίσκουμε τους χρόνους και τις θέσεις που αντιστοιχούν στα γεγονότα και στο κινούμενο σύστημα και στο ακίνητο, φέρουμε <u>παράλληλες</u> προς άξονες του αντίστοιχου συστήματος.

➢ Ταυτόχωρα γεγονότα

Τέλος, χωρίς να γίνει περαιτέρω ανάλυση μπορούμε με ένα ακόμη διάγραμμα να δείξουμε με αντίστοιχο τρόπο ότι και η έννοια των ταυτόχωρων γεγονότων αποσαφηνίζεται πλήρως καθώς δύο γεγονότα που συμβαίνουν στον ίδιο τόπο (διαφορετικές στιγμές) σε ένα σύστημα αναφοράς, δεν συμβαίνουν στον ίδιο τόπο σε ένα άλλο. Στο **σχήμα 11.10** βλέπουμε ότι τα γεγονότα 1 και 2 συμβαίνουν στην ίδια θέση $x_1 = x_2$ στο ακίνητο σύστημα (άτονο), όμως στο κινούμενο σύστημα (τονούμενο) συμβαίνουν σε διαφορετική θέση $x_1' \neq x_2'$.



Σχήμα 11.10

Με τα διαγράμματα Minkowski μπορούμε προφανώς να μελετήσουμε όλη τη κινηματική σωμάτων και φωτός σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, να προβλέψουμε χρόνο και χώρο συναντήσεων και να επιβεβαιώσουμε τη διαφορετικότητα των αποτελεσμάτων. Μπορούμε να οργανώσουμε ταξίδια σε πολύ μακρινούς προορισμούς στο διάστημα για να διαπιστώσουμε τελικά ότι μπορούμε να φτάσουμε παντού και πάντα!

Ας δούμε δύο παραδείγματα…

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τρένο (Τ) με ιδιομήκος L (το μήκος στο σύστημά του) και ταχύτητα υ. Ο οδηγός (Ο) βρίσκεται μπροστά εκεί που θεωρούμε ότι $x=0, t=0$ και $x'=0, t'=0$, ακίνητος ως προς το τρένο. Στο πίσω μέρος του τρένου υπάρχει ένα σφαιρίδιο (Σ) που έχει ταχύτητα V με φορά προς τον οδηγό και μια ακτίνα φωτός (Φ) που ξεκινάει επίσης προς τον οδηγό. Τότε οι εξισώσεις θα είναι ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς: $x_T = x_O = \upsilon t$, $x_\Sigma = -\dfrac{L}{\gamma} + Vt$, $x_\Phi = -\dfrac{L}{\gamma} + ct$

Πότε το φως φτάνει στον οδηγό; Όταν $x_\Phi = x_O \Rightarrow -\frac{L}{\gamma} + ct = \upsilon t \Rightarrow (c-\upsilon)t = \frac{L}{\gamma} \Rightarrow$

$$t = \frac{L}{c\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)\gamma} \Rightarrow t = \frac{L\sqrt{1-\beta^2}}{c(1-\beta)} \Rightarrow ct_\Phi = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \textbf{(11.1)}.$$

Που γίνεται η συνάντηση φωτός - οδηγού; Όταν $x_O = x_\Phi \Rightarrow x = \frac{\upsilon L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ **(11.2)**.

Πότε το σφαιρίδιο φτάνει στον οδηγό; Όταν $x_\Sigma = x_O \Rightarrow -\frac{L}{\gamma} + Vt = \upsilon t \Rightarrow$

$$(V-\upsilon)t = \frac{L}{\gamma} \Rightarrow ct_\Sigma = \frac{cL\sqrt{1-\beta^2}}{(V-\upsilon)}.$$

Που γίνεται η συνάντηση σφαιριδίου - οδηγού; Όταν $x_O = x_\Sigma = \frac{\upsilon L\sqrt{1-\beta^2}}{(V-\upsilon)}$.

Όλες οι παραπάνω πληροφορίες συνοψίζονται στο **σχήμα 11.11**, για το οποίο έχουμε:

<u>**Σημείο 1**</u>: $ct_\Phi = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. Είναι η στιγμή της συνάντησης της ακτίνας φωτός και του τρένου. Προκύπτει από την τομή των δύο γραμμών τους. Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή είναι η γραμμή του φωτός που ξεκινάει όμως από το $-\frac{L}{\gamma}$ παράλληλη στη κόκκινη γραμμή.

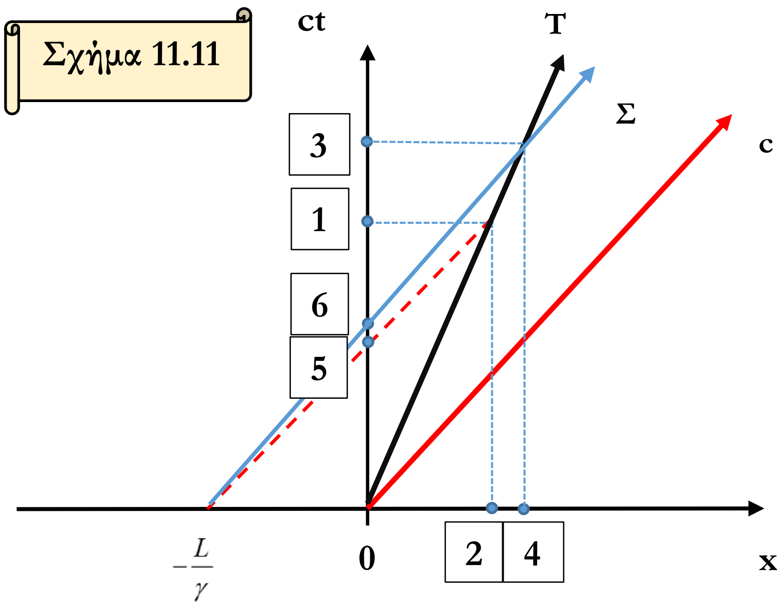
<u>**Σημείο 2**</u>: $\frac{\upsilon L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. Είναι η θέση συνάντησης φωτός – οδηγού.

<u>**Σημείο 3**</u>: $\frac{cL\sqrt{1-\beta^2}}{(V-\upsilon)}$. Είναι η στιγμή συνάντησης σφαιριδίου – οδηγού. Προκύπτει από την τομή των γραμμών τους, της μαύρης του τρένου και της γαλάζιας του σφαιριδίου με κλίση ελαφρώς μικρότερη από αυτής του τρένου, προφανώς είναι $V > \upsilon$ αλλιώς δεν γίνεται να συναντηθούν.

<u>**Σημείο 4**</u>: $\frac{\upsilon L\sqrt{1-\beta^2}}{(V-\upsilon)}$. Είναι η θέση συνάντησης οδηγού - σφαιριδίου

<u>Σημείο 5</u>: $L\sqrt{1-\beta^2}$. Είναι η στιγμή που το φως φτάνει στο $x=0$, εκεί που αρχικά ήταν ο οδηγός.

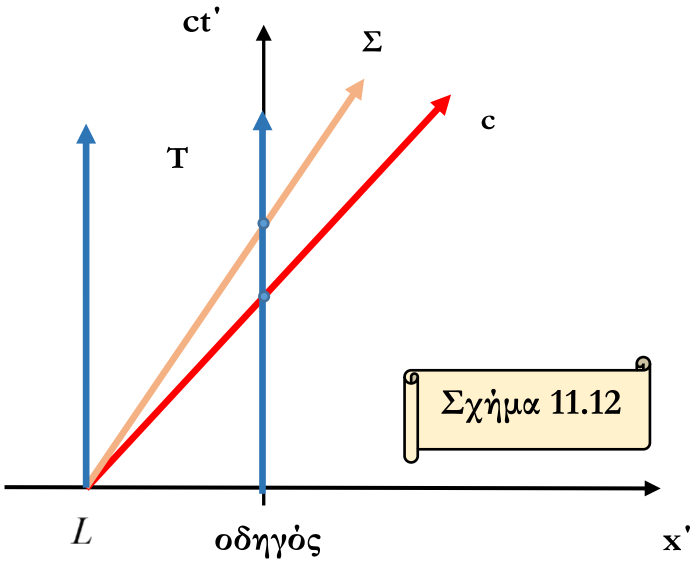
<u>Σημείο 6</u>: $\frac{cL}{V}\sqrt{1-\beta^2}$. Είναι η στιγμή που το σφαιρίδιο φτάνει στο $x=0$, προφανώς αργότερα από το φως.



<u>Αν τα δούμε όλα αυτά από τη σκοπιά του τρένου</u>; Μπορούμε να εργαστούμε αναλόγως ως προς το σύστημα αναφοράς του τρένου και να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο διάγραμμα. Θα πρέπει όμως πρώτα να γραφούν οι καινούργιες εξισώσεις θέσεων. Ο οδηγός, όπως και όλο το τρένο είναι ακίνητα. Άρα $x_o'=0$, $x_{πίσω}'=-L$. Όλες οι θέσεις στο σύστημα του τρένου θα απομακρύνονται από τον οδηγό σύμφωνα με τη σχέση $x'=-\upsilon t$. Το φως ξεκινάει από το $-L$ και κινείται με την ταχύτητά του προς τα δεξιά σύμφωνα με τη σχέση $x_\Phi'=-L+ct'$ και τέλος το σφαιρίδιο ξεκινάει επίσης από το $-L$ και κινείται με τη σχετική του ταχύτητα όπως δίνεται από τη σχέση $x_\Sigma'=-L+V't'$, όπου $V'=V_{\Sigma-O'}=\dfrac{V_\Sigma-V_{O'}}{1+\dfrac{V_\Sigma V_{O'}}{c^2}}=\dfrac{V-\upsilon}{1+\dfrac{V\upsilon}{c^2}}$[161].

Το διάγραμμα στο σύστημα αναφοράς του τρένου φαίνεται στο **σχήμα 11.12** όπου τα ακίνητα σημεία του τρένου, το μπροστινό (οδηγός) και το πίσω περιγράφονται με δύο ευθείες κάθετες στον άξονα του x'.

[161] Για τη σχετική ταχύτητα βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ.



Τώρα, πότε φτάνει το φως στον οδηγό; Όταν $x_{\Phi}'=x_o'=0 \Rightarrow ct_{\Phi}'=L$ **(11.3)** και στη θέση $x'=0$ **(11.4)**, προφανώς. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε οτιδήποτε θελήσουμε. Αυτό που έχει κάποιο ενδιαφέρον είναι να εξακριβώσουμε αν τα αποτελέσματα των δύο συστημάτων συνδέονται με τους μετασχηματισμούς Lorentz. Έχουμε βρει ως προς το ακίνητο σύστημα ότι ο χρόνος και η θέση συνάντησης του φωτός με τον οδηγό είναι οι **(11.1)** και **(11.2)**. Τις θέτουμε στην $t'=\gamma\left(t-\frac{\upsilon}{c^2}x\right)$ μόνο που τώρα είναι $x=\frac{\upsilon L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\left(-\frac{L}{\gamma}\right)$ γιατί το φως ξεκινάει από τη θέση $-\frac{L}{\gamma}$ στο ακίνητο σύστημα, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$t'=\gamma\left(\frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\frac{\upsilon}{c^2}\left(\frac{\upsilon L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}+\frac{L}{\gamma}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\frac{\upsilon}{c^2}L\sqrt{1-\beta^2}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\beta^2\frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\beta\frac{L}{c}\sqrt{1-\beta^2}\right)=$$

$$\left(\frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\beta^2\frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\beta\frac{L}{c}\frac{1}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}\sqrt{1-\beta^2}\right)=$$

$$\left(\frac{L}{c}\frac{1}{1-\beta}-\beta^2\frac{L}{c}\frac{1}{1-\beta}-\beta\frac{L}{c}\right)=$$

$$\frac{L}{c}\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{\beta^2}{1-\beta}-\beta\right)=$$

$$\frac{L}{c}\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{\beta^2}{1-\beta}-\frac{\beta(1-\beta)}{1-\beta}\right)=$$

$$\frac{L}{c}\left(\frac{1-\beta^2-\beta(1-\beta)}{1-\beta}\right)=$$

$$\frac{L}{c}\left(\frac{1-\beta^2-\beta+\beta^2}{1-\beta}\right)\Rightarrow$$

$$t'_{\Phi}=\frac{L}{c}$$

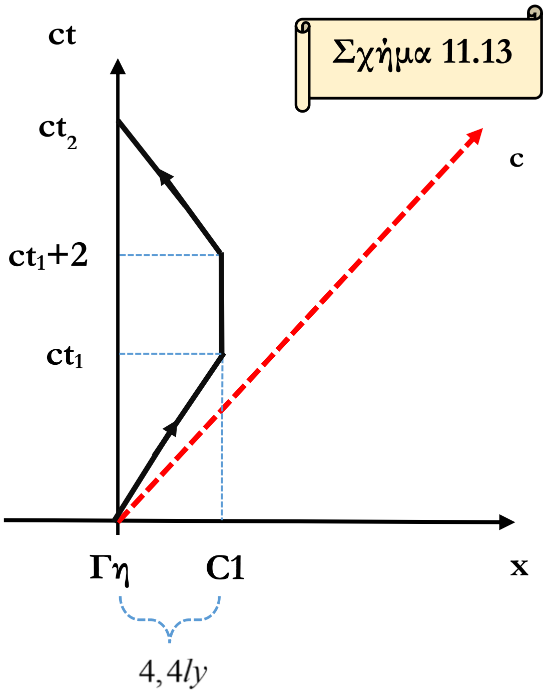
που είναι η **(11.3)**!

Τις θέτουμε επίσης στην $x'=\gamma(x-\upsilon t)$ από όπου προκύπτει

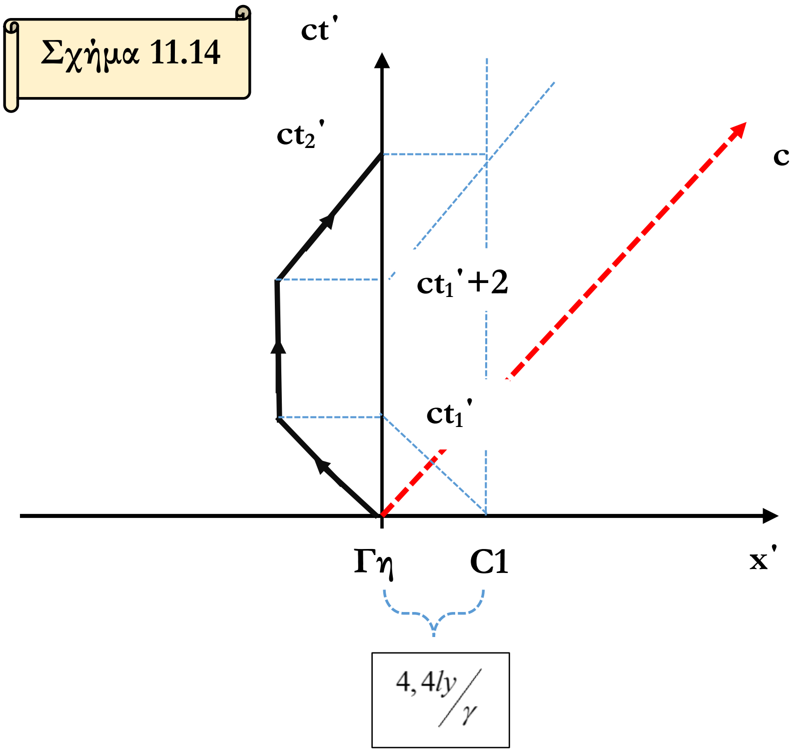
$$x'=\gamma\left(\frac{\upsilon L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}-\frac{\upsilon L}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)=0$$

που είναι η **(11.4)**!

Το δεύτερο παράδειγμα αφορά ένα ταξίδι σε έναν εξωπλανήτη. Πρόκειται για τον C1, με ακτίνα περίπου έξι φορές της ακτίνας της Γης, κατάλληλο να φιλοξενήσει ζωή που βρίσκεται στην γειτονιά του αστερισμού Α' Κενταύρου σε απόσταση $4,4$ έτη φωτός. Ας υποθέσουμε ότι ένας αστροναύτης θέλει να ταξιδέψει μέχρι τον C1, να κάνει έρευνα για 2 χρόνια και έπειτα να γυρίσει πίσω στη Γη . Ας δούμε πως θα είναι το διάγραμμα ως προς τη Γη (ακίνητο σύστημα) και πως θα είναι ως προς το διαστημόπλοιό του (κινούμενο σύστημα). Στο **σχήμα 11.13**, η Γη και ο C1 είναι ακίνητοι στις θέσεις $x=0$ και $x=4,4ly$ και το διαστημόπλοιο ταξιδεύει προς τον C1 με ταχύτητα μικρότερη του φωτός (κλίση μεγαλύτερη της μονάδας). Έπειτα είναι ακίνητο για δύο χρόνια και στη συνέχεια παίρνει το δρόμο του γυρισμού.



Όταν το διαστημόπλοιο είναι ακίνητο, ο αστροναύτης βλέπει τον C1 να τον πλησιάζει ή την Γη να απομακρύνεται από αυτόν. Με μερικές παράλληλες, βοηθητικές ευθείες παίρνουμε το διάγραμμα που φαίνεται στο **σχήμα 11.14**.



Η συνδρομή του Minkowski στη συνέχεια ήταν τεράστια. Η συνειδητοποίση ότι ο τρισδιάστατος κόσμος των αισθήσεών μας είναι ουσιαστικά μόνο κάποιες αναλαμπές μιας τετραδιάστατης πραγματικότητας και ότι παρελθόν, παρόν και μέλλον δεν είναι συνιστώσες αυτής εφόσον ο χώρος και όλες οι στιγμές του χρόνου σχηματίζουν μια αχώριστη οντότητα, ήταν κάτι το εξωπραγματικό. Ο Einstein αρχικά δεν ήταν πολύ φιλικός προς αυτήν την νέα θεώρηση. Είχε πει χαρακτηριστικά: «*Από τότε που οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη Ε.Θ.Σ ούτε ο ίδιος δεν την καταλαβαίνω πια*». Στη συνέχεια όμως, όχι μόνο υιοθέτησε τα μαθηματικά του Minkowski που ήταν καίρια για τη διατύπωση της θεωρίας της βαρύτητας ως καμπύλωσης του χωροχρόνου, αλλά γενικά την υιοθέτησε ως προσωπική κοσμοθεωρία. Αυτό φαίνεται επίσης από μια επιστολή συλλυπητηρίων προς στη χήρα του αγαπημένου του φίλου Besso λέγοντας ότι «έφυγε» νωρίτερα από τον ίδιο αλλά αυτό δεν έχει και πολύ σημασία αφού η διάκριση μεταξύ παρελθόντος, παρόντος και μέλλοντος δεν είναι τίποτα άλλο, παρά μια πεισματικά επίμονη ψευδαίσθηση.

12. Παράδοξα

Παράδοξο (paradox) είναι μια πρόταση, μια έννοια που αρχικά φαίνεται παράλογη ή και αντιφατική, όταν όμως εξεταστεί λίγο πιο προσεκτικά εμφανίζει στοιχεία λογικής και αλήθειας. Γενικά ένα παράδοξο μπορεί να εμπεριέχει ειρωνίες και ασυνέπειες που προσπαθώντας να συμφιλιώσει φαινομενικά αντίθετες ιδέες, αυτές τελικά συγκρούονται και μπερδεύονται με την φύση των ανθρώπινων εμπειριών και αισθήσεων.

12.1 Διαστολή του χρόνου (Time Dilation)

Ανακαλώντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz για τη θέση

$$x' = \gamma\left(x - \upsilon t\right) \quad \textbf{(12.1.1)}$$

και τον χρόνο,

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right) \quad \textbf{(12.1.2)},$$

όπου αν θεωρήσουμε έναν παρατηρητή ακίνητο στο σύστημα S στη θέση x, τότε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές στο σύστημά του, ας πούμε t_1, t_2, σε ένα σύστημα S' θα δίνονται από τις σχέσεις

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{\upsilon}{c^2}x\right) \text{ και}$$

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)$$

όπου αν πάρουμε τη διαφορά τους θα προκύψει εύκολα

$$t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - t_1\right) \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \gamma \Delta t} \quad \textbf{(12.1.3)}.$$

Επειδή $\gamma > 1$ τα χρονικά διαστήματα στο S' είναι μεγαλύτερα από αυτά στο S, ο χρόνος δηλαδή καθυστερεί, διαστέλλεται στα κινούμενα συστήματα ή με άλλα λόγια ο χρόνος τρέχει πιο γρήγορα στα ακίνητα συστήματα. Η σχέση **(12.1.3)** μπορεί να γραφεί ως $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ **(12.1.4)** όπου $\Delta \tau$ ο ιδιοχρόνος (proper time) και είναι το χρονικό διάστημα που μετριέται από τον παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με το ρολόι και βλέπει τα γεγονότα να συμβαίνουν στην ίδια θέση. Γεγονότα που συμπίπτουν σε χώρο και σε χρόνο σε ένα αδρανειακό σύστημα, θα πρέπει να συμπίπτουν και σε οποιοδήποτε άλλο. Αν δηλαδή ισχύει $\Delta x = 0$, $\Delta t = 0$, τότε θα ισχύει $\Delta x' = 0$, $\Delta t' = 0$. Τα δύο αδρανειακά συστήματα λοιπόν μπορεί να διαφέρουν στον πως μετρούν τη θέση και το χρόνο όπως προκύπτει από τους μετασχηματισμούς Lorentz, συμφωνούν όμως στο πως μετρούν τον ιδιοχρόνο όπως μπορούμε να δείξουμε χαρακτηριστικά: Ορίζουμε τον ιδιοχρόνο ως

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{c^2t^2 - x^2}}{c} \Rightarrow \Delta\tau = \frac{\sqrt{c^2t^2 - x^2}}{c} \Rightarrow \ \Delta\tau^2 = t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2$$

στην οποία θα εισάγουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Lorentz δηλαδή τις σχέσεις **(12.1.1)** και **(12.1.2)** αντικαθιστώντας τα «άτονα» με «τονούμενα» και όπου $\upsilon \to -\upsilon$ οπότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\Delta\tau^2 = t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = \gamma^2\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right)^2 - \left(\frac{\gamma\left(x' + \upsilon t'\right)}{c}\right)^2 =$$

$$\gamma^2\left(t'^2 + \frac{\upsilon^2}{c^4}x'^2 + 2t'\frac{\upsilon}{c^2}x'\right) - \frac{\gamma^2\left(x'^2 + \upsilon^2 t'^2 + 2x'\upsilon t'\right)}{c^2} =$$

$$\gamma^2 t'^2 + \gamma^2\frac{\upsilon^2}{c^4}x'^2 + 2\gamma^2 t\frac{\upsilon}{c^2}x' - \frac{\gamma^2}{c^2}x'^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}\upsilon^2 t'^2 - 2\frac{\gamma^2}{c^2}x'\upsilon t' =$$

$$\gamma^2 t'^2 + \gamma^2\frac{\upsilon^2}{c^4}x'^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}x'^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}\upsilon^2 t'^2 = \gamma^2 t'^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{c^2}x'^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) =$$

$$\gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}\right) \Rightarrow \Delta\tau^2 = t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = t'^2 - \left(\frac{x'}{c}\right)^2.$$

Συνεπώς ο ιδιοχρόνος είναι αναλλοίωτος.

12.2 Το παράδοξο των τριδύμων

Η διαστολή του χρόνου οδηγεί σε ένα παράδοξο γνωστό ως παράδοξο των διδύμων ή παράδοξο του Langevin[162]. Ας υποθέσουμε όμως ότι έχουμε τρία τρίδυμα αδέρφια, Α, Β, Γ στην ηλικία των 20 ετών κάτοικοι της Γης, οι οποίοι κάποια στιγμή αποφασίζουν να χωρίσουν για 10 χρόνια. Ο Α μένει στη Γη, ενώ ο Β και ο Γ φεύγουν ο καθένας με το δικό του αστρόπλοιο προς άγνωστη κατεύθυνση με ταχύτητες

[162] Paul Langevin (1872-1946). Γάλλος φυσικός γνωστός για την εξίσωση Langevin που περιγράφει την κίνηση Brown.

$\upsilon_{\mathrm{B}} = 0{,}9c$ και $\upsilon_{\Gamma} = 0{,}95c$. Τότε στη σχέση **(12.1.4)** ο παράγοντας γ για κάθε αδερφό θα είναι:

$$\gamma_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_{\mathrm{A}}^2}{c^2}}} = 1[163],$$

$$\gamma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_{\mathrm{B}}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0{,}9^2 c^2}{c^2}}} \approx 2{,}3$$

και

$$\gamma_{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_{\Gamma}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0{,}95^2 c^2}{c^2}}} \approx 3{,}2$$

και $\Delta\tau$ ο ιδιοχρόνος ως προς το σύστημα του καθενός, δηλαδή ως προς τη Γη για τον Α, ως προς το αστρόπλοιο Β για τον Β και ως προς το αστρόπλοιο Γ για τον Γ αδερφό που είναι $\Delta\tau = 10$ και επομένως

$$\Delta t_{\mathrm{A}} = \gamma_{\mathrm{A}} \Delta\tau = 1 \cdot 10 = 10y,$$

$$\Delta t_{\mathrm{B}} = \gamma_{\mathrm{B}} \Delta\tau = 2{,}3 \cdot 10 = 23y,$$

$$\Delta t_{\Gamma} = \gamma_{\Gamma} \Delta\tau = 3{,}2 \cdot 10 = 32y.$$

Αυτοί είναι οι χρόνοι λόγω διαστολής, λόγω του ότι τα ρολόγια επιβραδύνουν τον ρυθμό τους. Για τον Α όμως είναι 10 χρόνια, καμία διαστολή, για τον Β είναι 23 χρόνια (δηλαδή 23 χρόνια πέρασαν για τη Γη, το ακίνητο σύστημα) και για τον Γ , 32 χρόνια (δηλαδή 32 χρόνια πέρασαν για τη Γη πάλι). Όμως προσοχή! Καθώς περνούν τα χρόνια για τον καθένα ο χρόνος μετράει διαφορετικά αλλά σε σχέση με τους άλλους. Τα αδέρφια Β και Γ έδωσαν υπόσχεση ότι θα ταξιδεύουν για 10 χρόνια (στο δικό τους ρολόι). Ο Α πηγαίνει στην προβλήτα αστροπλοίων ύστερα από 10 χρόνια (στο δικό του ρολόι) και δεν βλέπει να έχει επιστρέψει κανείς. Πράγματι θα πρέπει να περιμένει ακόμα 13 χρόνια, σύνολο 23 χρόνια, ώστε να συναντήσει τον Β. Ο Α θα είναι τότε $20+23=43$ χρονών και ο Β $20+10=30$ χρονών. Και οι δύο κάθονται εκεί και περιμένουν τον Γ. Ο Β μάλιστα αναρωτιέται γιατί δεν επέστρεψε μαζί του ο Γ εφόσον ταξίδευαν και οι δύο για 10 χρόνια. Προφανώς γιατί τα 10 χρόνια είναι ιδιοχρόνος για τον Β και τον Γ, αλλά λόγω της διαφορετικής ταχύτητας και του μεγαλύτερου

---

[163] Θεωρούμε τη Γη ακίνητη και αμελούμε την ταχύτητα των $3 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$ που είναι ουσιαστικά $0{,}0001c$.

παράγοντα γ για τον Γ, ο Β θα βιώσει εκ νέου διαστολή του χρόνου. Έτσι όταν επιστρέψει και ο Γ, τότε για τον Γ θα έχουν περάσει 10 χρόνια και θα είναι $20+10=30$ χρονών. Για τον Α θα έχουν περάσει 32 χρόνια και θα είναι $20+32=52$ χρονών. Τέλος για τον Β θα έχουν περάσει ακριβώς τόσα χρόνια όσα πέρασαν και για τον Α όσο καιρό κάθονταν ακίνητοι στην προβλήτα περιμένοντας τον Γ δηλαδή $52-43=9$ χρόνια. Επομένως ο Β θα είναι $30+9=39$ χρονών.

Πόσο χρονών θα είναι ο Γ που ακόμα ταξιδεύει όταν ο Β είναι στη Γη;

Όταν ο Β είναι στη Γη, θα έχουν περάσει 23 χρόνια ως προς το σύστημα της Γης. Για τον Γ τότε θα ισχύει $\tau_\Gamma = \frac{23}{\gamma_\Gamma} = \frac{23}{3,2} = 7,18$ χρόνια, δηλαδή θα είναι $27,18$ χρονών.

Συνοπτικά οι ηλικίες των τριδύμων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

	Η Λ Ι Κ Ι Ε Σ σε χρόνια		
ΤΡΙΔΥΜΑ	Γη αρχικά	Ταξίδι και επιστροφή του **Β**	Ταξίδι και επιστροφή του **Γ**
Α γ_A=1	20	43	52
Β γ_B=2,3	20	30	39
Γ γ_Γ=3,2	20	27,18	30

Δυστυχώς δεν υπάρχει τρόπος να τα διαπιστώσουμε όλα αυτά με πείραμα σε μακροσκοπική κλίμακα· σε μικροσκοπική όμως έχει αποδειχθεί με την «παράταση ζωής» των μιονίων, περίπτωση γνωστή ως το *μεσονικό παράδοξο*, όπως θα δούμε λίγο παρακάτω. Το παράδοξο όμως με τα τρίδυμα στην πραγματικότητα είναι το εξής: θα μπορούσε ο αδερφός Α να ισχυριστεί ότι αυτός είναι που απομακρύνεται από τον Β με ταχύτητα $0,9c$ ή από τον Γ με ταχύτητα $0,95c$ άρα αυτός θα είναι νεότερος από τα αδέρφια του όταν συναντηθούν ξανά. Όμως ο ισχυρισμός του δεν είναι σωστός και αυτό ακριβώς οδηγεί στη λύση του παραδόξου. Οι ρόλοι δεν μπορούν να αντιστραφούν γιατί η σχέση τους δεν είναι συμμετρική. Ο Α αδερφός πράγματι μένει ακίνητος ενώ ο Β ή ο Γ περνάνε από κάποια διαδοχικά στάδια επιτάχυνσης/επιβράδυνσης. Αρχικά επιτάχυνση μέχρι να αποκτήσουν την ταχύτητα που αποκτούν, έπειτα επιβράδυνση και αλλαγή κατεύθυνσης και τέλος επιτάχυνση παίρνοντας το δρόμο του γυρισμού και επιβράδυνση μέχρι να σταματήσουν στη Γη. Αυτές οι επιταχύνσεις/επιβραδύνσεις διαρκούν κάποια χρονικά διαστήματα που θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιστοιχούν σε διαδοχικά διαφορετικά αδρανειακά συστήματα. Δηλαδή η τελική ηλικιακή διαφορά που προκύπτει μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οφείλεται σε αυτές τις στιγμιαίες επιταχύνσεις/επιβραδύνσεις όσο σύντομες κι αν είναι οι διάρκειές τους. Νεότερος λοιπόν θα είναι πάντα αυτός που επιταχύνεται και επιβραδύνεται. Περισσότερη ποσοτική ανάλυση μπορεί να δοθεί από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας στην οποία οι επιταχύνσεις ισοδυναμούν με βαρυτικά πεδία.

12.3 Το μεσονικό παράδοξο

Από το διάστημα δεχόμαστε καθημερινά και συνεχόμενα ένα βομβαρδισμό φορτισμένων σωματιδίων, φωτόνια ακτίνων **X** και **γ**, αυτό που λέμε συνολικά κοσμική ακτινοβολία. Το κύριο συστατικό αυτής της ακτινοβολίας είναι τα πρωτόνια τα οποία αλληλεπιδρώντας με τα νουκλεόνια πυρήνων οξυγόνου και αζώτου στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας διασπώνται τελικά σε πιόνια[164]. Τα πιόνια είναι πολύ ασταθή και διασπώνται σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής μείωσης,

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

όπου τ χαρακτηριστική σταθερά του σωματιδίου που λέγεται μέσος χρόνος ζωής. Οι διασπάσεις γίνονται με διάφορους τρόπους με βασικότερο αυτόν που δίνει ένα μιόνιο και το νετρίνο του σύμφωνα με τα παρακάτω σχήματα:

$$\text{Αφόρτιστα πιόνια: } \pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

$$\text{Φορτισμένα πιόνια: } \pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu \text{ ή } \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Τα μιόνια στη συνέχεια όντας και αυτά ασταθή διασπώνται σε μικρότερα σωματίδια έχοντας μέσο χρόνο ζωής $2{,}2\mu s$. Να σημειωθεί ότι αυτός ο χρόνος ισχύει για το σύστημα αναφοράς του ίδιου του μιονίου. Πως είναι δυνατόν να ανιχνεύονται στα εργαστήρια στην επιφάνεια της Γης αφού ζουν τόσο λίγο και παρά την μεγάλη ταχύτητα τελικά διανύουν κάποιες δεκάδες μέτρα; Ας υποθέσουμε ότι σχηματίζονται σε ύψος $10Km$ και έχουν ταχύτητα $0{,}99c$. Η ταχύτητα αυτή δίνει στον παράγοντα γ τιμή $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{0{,}99^2 c^2}{c^2}}} = 7{,}08$. Τότε λόγω της διαστολής του χρόνου «παρατείνουν» τη διάρκεια ζωής τους σε $7{,}08 \cdot 2{,}2 = 15{,}6\mu s$. Επιπλέον, λόγω της συστολής του μήκους τα μιόνια δεν έχουν να διανύσουν μια απόσταση $10Km$ αλλά μια απόσταση $\frac{10}{\gamma} = \frac{10}{7{,}08} = 1{,}41Km$ που την διανύουν σε χρόνο $\frac{1410}{0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8} = \frac{1410}{297 \cdot 10^6} = 4{,}74\mu s < 15{,}6\mu s$ που σημαίνει ότι καταφέρνουν να φτάσουν κάτω στην επιφάνεια της θάλασσας και να ανιχνευτούν από τα εργαστήρια.

---

164 Ονομάστηκαν μεσόνια γιατί έχουν μάζες περίπου ανάμεσα στα βαρυόνια και τα λεπτόνια.

Μπορούμε επίσης και να υπολογίσουμε πόσα μιόνια φτάνουν ώστε να δικαιολογίσουμε τα πειραματικά δεδόμενα. Ας υποθέσουμε ότι δημιουργούνται 10^6 μιόνια, σε ύψος $H = 10Km$, με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}99c$. Τότε κλασικά το διάστημα που θα διένυαν κατεβαίνοντας θα ήταν $y = \upsilon\tau = 0{,}99c \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 653m$. Κάθε χρονική στιγμή το ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας θα δίνεται από τη σχέση

$$h = H - y = H - \upsilon t,$$

όπου στην επιφάνεια της θάλασσας με $h = 0$ είναι $t = \dfrac{H}{\upsilon}$, άρα

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 e^{-\frac{H}{\upsilon\tau}} = 10^6 \cdot e^{-\frac{10000}{653}} = 10^6 \cdot 2{,}23 \cdot 10^{-7} \Rightarrow N \approx 0{,}2$$

δηλαδή περίπου 2 στα 10 εκατομμύρια μιόνια καταφέρνουν να φτάσουν στους ανιχνευτές. Αν το μελετήσουμε σχετικιστικά τότε θα ισχύουν

$$h' = H' - \upsilon t'$$

όπου $H' = \dfrac{H}{\gamma}$ και με $h' = 0$ θα είναι $t' = \dfrac{H}{\gamma\upsilon}$ οπότε

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t'}{\tau}} = N_0 e^{-\frac{H}{\gamma\upsilon\tau}} = 10^6 e^{-\frac{10000}{7{,}08 \cdot 0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}}} = 10^6 \cdot 0{,}115 \Rightarrow N \approx 115000$$

μιόνια που πράγματι είναι ένας αριθμός που παρατηρείται, ανιχνεύεται στα εργαστήρια και που δεν συμφωνεί με τις μη σχετικιστικές προβλέψεις.

12.4 Συστολή του μήκους (Length Contraction)

Το ζήτημα της συστολής του μήκους πρωτοαναφέρθηκε την δεκαετία του 1890, όταν G. F. Fitzgerald (1851-1901)[165] και Lorentz ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, προσπαθώντας να εξηγήσουν τα αρνητικά αποτελέσματα των πειραμάτων Michelson-Morley που είχαν προηγηθεί έκαναν την ad hoc υπόθεση ότι το μήκος ενός σώματος που κινείται ως προς τη διεύθυνση του αιθέρα συστέλλεται κατά ένα παράγοντα $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, επομένως σύμφωνα με αυτήν την άποψη το μήκος του ενός από τους δύο βραχίονες είναι μικρότερο και δεν υπάρχει πλέον διαφορά διαδρομής. Όμως

[165] Ιρλανδός φυσικός που εκτός των άλλων ασχολήθηκε πολύ με τη ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell, αναθεωρώντας, επεκτείνοντας και επιβεβαιόνοντάς την προτείνοντας μάλιστα πειράματα κάτι που έγινε αργότερα από τον Hertz.

μεταγενέστερα και πιο σύνθετα πειράματα που έγιναν με άνισους βραχίονες δεν υποστήριξαν αυτήν την υπόθεση.

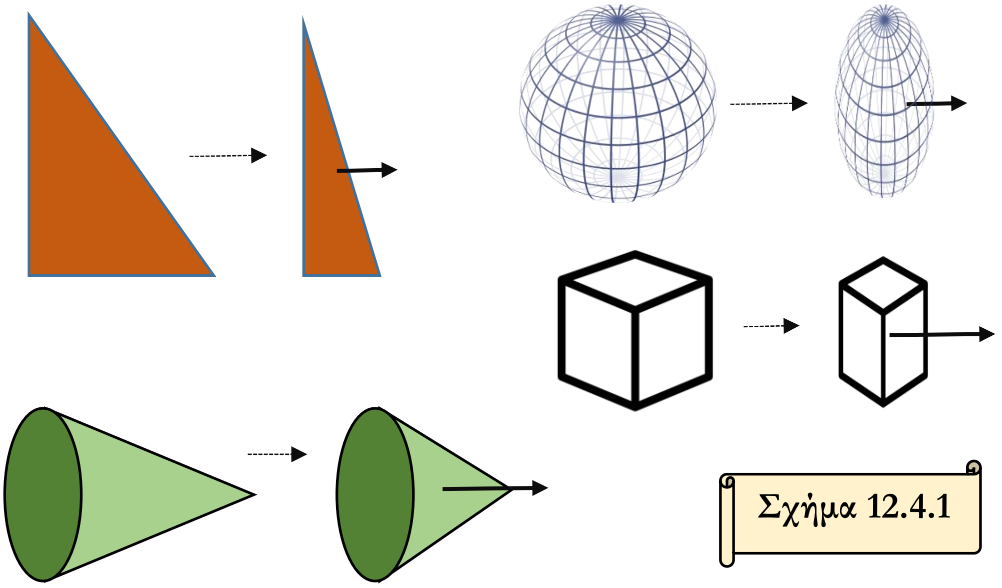
Όπως λοιπόν έχουμε διαπιστώσει ότι τα μετρούμενα χρονικά διαστήματα δεν είναι απόλυτα, έτσι και οι μετρήσεις των αποστάσεων μεταξύ δύο σημείων αντιστοίχως είναι σχετικές και εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς. Ορίζουμε λοιπόν το *ιδιομήκος* (proper length) ως το μήκος που έχει ένα σώμα στο σύστημα στο οποίο ηρεμεί. Για να εξακριβώσουμε την συστολή του μήκους θα χρειαστούμε πάλι τους μετασχηματισμούς Lorentz. Θεωρούμε αρχικά ότι στο ακίνητο σύστημα S το μήκος μιας ράβδου, δηλαδή η απόσταση μεταξύ των άκρων της $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}$ είναι $L = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$. Τότε στο κινούμενο σύστημα S' θα είναι $L' = x_{\mathrm{B}}' - x_{\mathrm{A}}'$ και από τη σχέση **(12.1.1)** παίρνοντας την αντίστροφή της θα έχουμε διαδοχικά:

$$L = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = \gamma\left(x_{\mathrm{B}}' + \upsilon t'\right) - \gamma\left(x_{\mathrm{A}}' + \upsilon t'\right) = \gamma\left(x_{\mathrm{B}}' - x_{\mathrm{A}}'\right) = \gamma L' \Rightarrow \boxed{L' = \frac{L}{\gamma}}.$$

Προφανώς δεν συμβαίνει τίποτα στη δομή της ράβδου και ξαφνικά μικραίνει. Η διαφορά προκύπτει λόγω χρονικής διαφοράς στις δύο μετρήσεις. Είναι αυτό που λέμε ότι η έννοια του ταυτόχρονου δεν είναι πια απόλυτη. Στο σύστημα S' οι μετρήσεις έγιναν και για τα δύο άκρα $x_{\mathrm{A}}', x_{\mathrm{B}}'$ την ίδια χρονική στιγμή t', ενώ οι χρόνοι για το σύστημα S θα είναι σύμφωνα με την αντίστροφη της **(12.1.2)**,

$$t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}} = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x_{\mathrm{B}}'\right) - \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x_{\mathrm{A}}'\right) = \frac{\gamma\upsilon}{c^2}\left(x_{\mathrm{B}}' - x_{\mathrm{A}}'\right) = \frac{\upsilon}{c^2}\gamma L' \Rightarrow t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}} = \frac{\upsilon}{c^2}L,$$

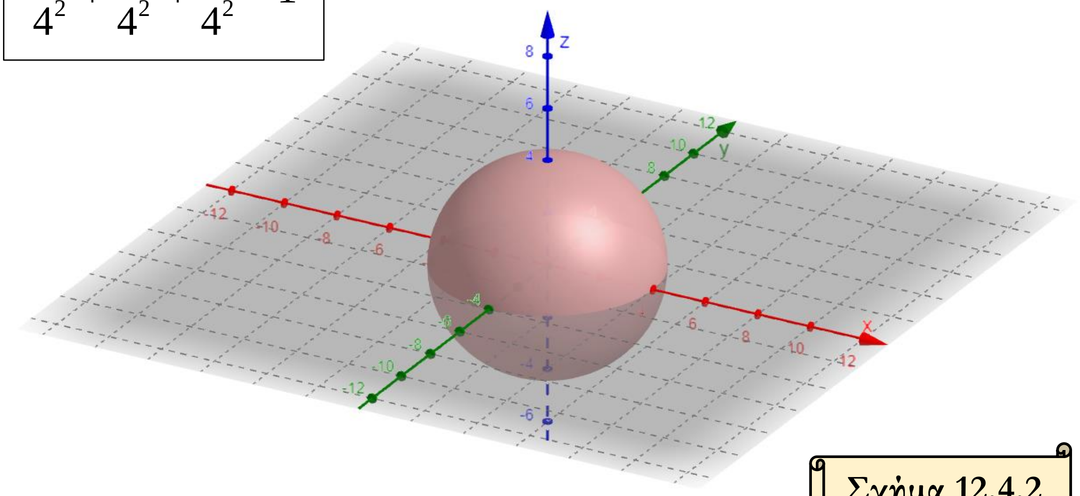
δηλαδή η μέτρηση του άκρου x_{B}' έγινε μεταγενέστερα της μέτρησης του άκρου x_{A}'. Έτσι λοιπόν οποτεδήποτε ένα σώμα κινείται με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός, τότε ανεξαρτήτως του σχήματος που έχει, η διάσταση που είναι παράλληλη στη διεύθυνση κίνησης και μετριέται στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο κινείται, θα είναι πάντα μικρότερη από το ιδιομήκος. Τρίγωνα, σφαίρες, κύβοι, κώνοι μετασχηματίζονται σε άλλα σχήματα στα οποία η διάσταση στη κίνηση θα είναι μικρότερη κατά έναν παράγοντα γ όπως φαίνεται στο **σχήμα 12.4.1**.



Σχήμα 12.4.1

Ας δούμε λίγο την περίπτωση της σφαίρας. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση της σφαίρας είναι $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ με $a=b=c$ και έτσι στο **σχήμα 12.4.2**, χάριν απλότητας, απεικονίζεται μια ακίνητη σφαίρα με εξίσωση $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$.

$$\boxed{\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{4^2}=1}$$

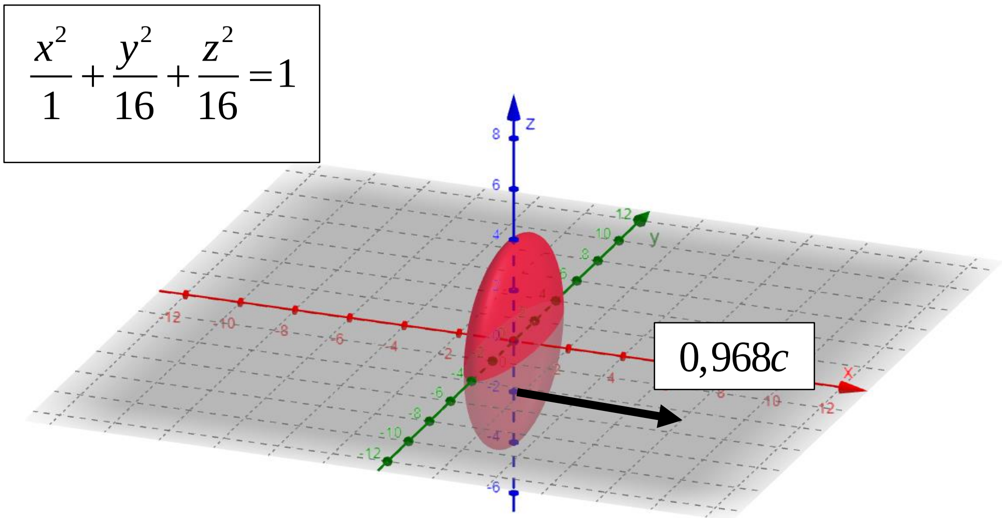


Σχήμα 12.4.2

Τότε αν η σφαίρα κινείται με ταχύτητα $\upsilon=0{,}968c$ στη διεύθυνση του άξονα x, για τον παράγοντα γ θα ισχύει $\gamma\approx 4$ και η νέα εξίσωση της κινούμενης σφαίρας θα είναι τώρα η

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\gamma}\right)^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$$

οπότε θα προκύψει το ελλειψοειδές του **σχήματος 12.4.3**.



Σχήμα 12.4.3

Γύρω από τη συστολή του μήκους υπάρχουν αρκετά παράδοξα με διάφορα ονόματα. Ένα από αυτά είναι το κοντάρι με την αποθήκη. Ένας δρομέας τρέχει κρατώντας ένα κοντάρι μήκους $L'=8m$ (στο σύστημά του, S') από το μέσο του και θέλει να περάσει μέσα από αποθήκη μήκους $4m$ (στο σύστημά της, S) που έχει δύο πόρτες και που μόνο μία μπορεί να είναι ανοικτή. Όταν δηλαδή το κοντάρι πλησιάζει τη μία πόρτα (είσοδος) αυτή ανοίγει και κλείνει η άλλη (έξοδος). Όταν το κοντάρι είναι μέσα στην αποθήκη και πλησιάζει την έξοδο, ανοίγει αυτή, αλλά κλείνει η είσοδος. Πως μπορεί λοιπόν το κοντάρι μεγαλύτερου μήκους από την αποθήκη να περάσει μέσα από την αποθήκη με ασφάλεια οριακά, χωρίς να πιαστεί στην πόρτα; Αν ο δρομέας τρέχει με ταχύτητα $\upsilon=0{,}866c$, τότε για τον παράγοντα γ είναι $\gamma\approx 2$.

Στο σύστημα S λοιπόν το κοντάρι έχει μήκος $L=\frac{L'}{\gamma}=\frac{8}{2}=4m$ που σημαίνει ότι περνάει οριακά αφού όταν φτάνει στην έξοδο η πόρτα ανοίγει και η είσοδος κλείνει χωρίς να κόψει το κοντάρι. Η ταχύτητα των $0{,}866c$ είναι η ελάχιστη που απαιτείται να έχει ο δρομέας ώστε το κοντάρι να χωρέσει ολόκληρο μέσα στην αποθήκη και να περάσει με ασφάλεια. Ταχύτητες ακόμα μεγαλύτερες από $0{,}866c$ μεγαλώνουν τον παράγοντα γ που κάνει εντονότερο το φαινόμενο της συστολής του κονταριού. Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά που οφείλεται η διαφορά στη μέτρηση και ποιες χρονικές στιγμές ανοίγουν οι πόρτες ως προς το σύστημα του κονταριού και ως προς το σύστημα της αποθήκης. Την χρονική στιγμή $t = t' = 0$ ας υποθέσουμε ότι το άκρο Β μόλις φτάνει στην είσοδο. Τότε ως προς την αποθήκη (S) το μήκος του κονταριού θα είναι $\frac{8}{2} = 4m$ και το άκρο Β φτάνει στην έξοδο σε χρόνο $t = \frac{4}{0,866c} = 15,3ns$. Την ίδια χρονική στιγμή το άκρο Α βρίσκεται στην είσοδο.

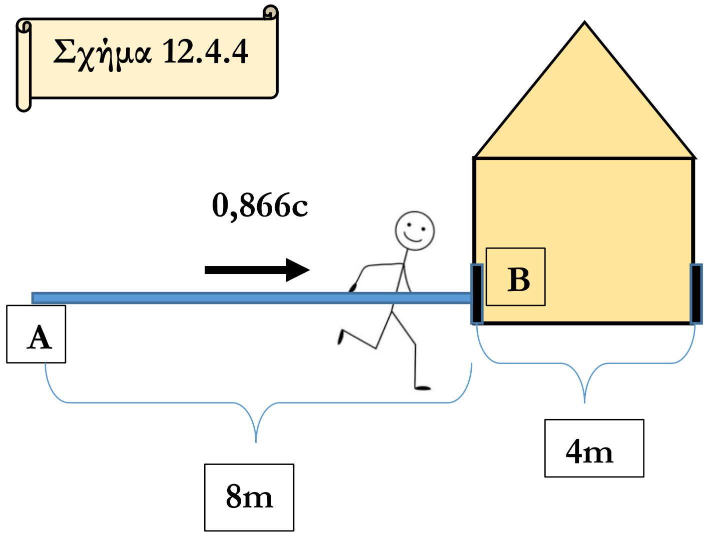
Ποια είναι η χρονική στιγμή που συμβαίνει αυτό για έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο σημείο Β του κονταριού; Από τον μετασχηματισμό Lorentz για τον χρόνο $t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)$ έχουμε

$$t = 2\left(15,6 \cdot 10^{-9} - \frac{0,866c}{c^2}4\right) = 8,2ns$$

και για τη θέση $x' = \gamma\left(\mathrm{x} - \upsilon t\right)$ θα προκύψει προφανώς

$$x = 2\left(4 - 0,866c \cdot 15,3 \cdot 10^{-9}\right) = 0m$$

Σχήμα 12.4.4



Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι γύρω από τη συστολή του μήκους έχουν γίνει και κάποιες πιο τολμηρές δηλώσεις. Ο ίδιος ο Lorentz, γύρω στα 1922, σε διαλέξεις του γενικά στη θεωρητική φυσική είχε πει ότι η συστολή είναι ορατή και θα μπορούσε να φωτογραφηθεί! Φημολογείται ότι και ο Einstein είχε αφήσει να εννοηθεί ότι η συστολή λόγω της σχετικής κίνησης θα έπρεπε να είναι ορατή. Πολλές φορές και ακόμα και σε αυτήν την εργασία έχει αναφερθεί η συνηθισμένη φράση ότι τα κινούμενα σώματα εμφανίζονται συνεσταλμένα. Εμφανίζονται, φαίνονται, παρατηρούνται, είναι εκφράσεις ασαφείς αλλά πολλές φορές χρησιμοποιούνται εν τη ρύμη του λόγου. Προηγουμένως στο κεφάλαιο αυτό σχολιάστηκε αναλυτικά τι είναι η συστολή του μήκους και που οφείλεται. Έργασίες[166] που έχουν ασχοληθεί σχετικά με τη συστολή μάλλον απορρίπτουν την ελπίδα ή πίστη, αυτή να γίνει παρατηρήσιμη ή και να φωτογραφηθεί.

166 Terrell, 1959.

13. Φιλοσοφικές ανησυχίες

Στο κεφάλαιο αυτό θα σχολιάσουμε με πιο χαλαρή διάθεση, μακρυά από αυστηρές μαθηματικές εξισώσεις, μερικές έννοιες όπως την αισθητοποίηση των φυσικών φαινομένων, ή πως προκύπτουν οι ορισμοί φυσικών μεγεθών, ή τι σημαίνει μαθηματική ποσοτικοποίηση της φύσης, ή τι είναι το βέλος του χρόνου και τι περιορισμούς θέτει.

Αν παραβλέψουμε για λίγο το κομμάτι που αφορά τη μαθηματική θεμελίωση της Ε.Θ.Σ και δούμε μόνο επακόλουθα και συνέπειες της, μπορούμε τώρα εύκολα πλέον να επιβεβαιώσουμε τους αρχικούς μας ισχυρισμούς για παρεξηγήσεις, παρερμηνείες και εκμετάλλευση της Ε.Θ.Σ από τρίτους. Όμως τα πράγματα δεν θα έπρεπε να είναι έτσι. Η Ε.Θ.Σ δεν υπόσχεται έναν κόσμο επιστημονικής φαντασίας. Μπορούμε βέβαια έπειτα από όλη την ανάλυση που προηγήθηκε να συζητήσουμε σε γενικότερα πλαίσια όχι πολύ αυστηρά, να κάνουμε υποθέσεις και να φτιάξουμε νοητικά πειράματα που να εντυπωσιάζουν. Το ανώτατο όριο που θέτει για την ταχύτητα η Ε.Θ.Σ είναι κάτι που μπορεί να σχολιαστεί περαιτέρω. Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του φωτός ήταν μόνο $c = 55\frac{m}{s}$, δηλαδή περίπου $200\frac{Km}{h}$ πως θα ήταν ο κόσμος γύρω μας; Ποια θα ήταν η καθημερινότητά μας; Καταρχήν θα πρέπει να δεχθούμε ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί η ταχύτητα αυτή ακριβώς, καθώς θα οδηγούσε σε απειρισμό του παράγοντα γ· μόνο ένα μέρος της θα μπορούσαμε να κατακτήσουμε, όσο κοντά θέλουμε στα $200\frac{Km}{h}$. Ένα ταξίδι από την Αθήνα σε ένα θείο στην Θεσσαλονίκη που απέχει $500Km$ με ταχύτητα $199,999\frac{Km}{h}$ θα έδινε έναν παράγοντα $\gamma \approx 316$, θα διαρκούσε $\dfrac{\frac{500}{316}}{199,999} = 0,008h$ (μισό λεπτό περίπου) για τον ταξιδιώτη, αλλά για τον θείο θα έχουν περάσει $2,5h$! Αν πλησιάζαμε ακόμα περισσότερο την ταχύτητα του φωτός στα $199,9999\frac{Km}{h}$, τότε θα προέκυπτε παράγοντας $\gamma \approx 1000$. Καταλαβαίνουμε δηλαδή ότι θα μπορούσαμε να ταξιδέψουμε παντού στο σύμπαν, μέχρι και εκεί που τελειώνει! Όσο η ταχύτητα πλησιάζει περισσότερο την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή όσο προσθέτουμε το 9 ως δεκαδικό ψηφίο, τόσο ο παράγοντας γ αυξάνεται εκπληκτικά. Με τέτοιες ταχύτητες ο κόσμος θα οδηγούνταν σε μια έντονη διαταραχή καθώς οποιοσδήποτε βρισκόταν σε ηρεμία σε σχέση με τους οικείους του που κινούνταν θα κινδύνευε να μην τους συναντήσει ποτέ. Όποιος κινούνταν με μεγάλες ταχύτητες θα έβλεπε συνεχώς το μέλλον. Επομένως ταξίδια στο παρελθόν δεν προβλέπονται από την Ε.Θ.Σ, παρά μόνο με τη βοήθεια φανταστικών χρονομηχανών.

Στην ακραία περίπτωση που κινούμασταν ακριβώς με την ταχύτητα του φωτός, τι θα βλέπαμε; Ο Einstein είχε αναρωτηθεί τι θα συνέβαινε αν καβαλούσε μία ακτίνα φωτός… και αν κρατούσε έναν καθρέφτη στο τεντωμένο χέρι του… Θα έπρεπε να βλέπει το πρόσωπό του, γιατί με ταχύτητα c ξεκινούν τα σημάδια του προσώπου του προς τον καθρέφτη και με ταχύτητα c ξεκινούν πάλι πίσω προς τα μάτια του. Τα ρολόγια θα χτυπούσαν τόσο αργά που τελικά ο χρόνος θα σταματούσε! Οι αποστάσεις θα εκμηδενιζονταν, ο κόσμος θα γινόταν ένα σημείο! Όλα αυτά τα υποθετικά παραδείγματα, δεν είμαι βέβαιος πόσο έγκυρα είναι ή πόσο σωστά περιγράφουν μια θεωρία. Τα ίδια προβλήματα με την κατανόηση των εννοιών αντιμετωπίζει κανείς όταν μελετάει επίσης και την κβαντική φυσική ή θεωρίες γύρω από την κοσμολογία.

Η ίδια η φύση τις περισσότερες φορές θέτει τα όρια όταν προσπαθούμε να περιγράψουμε την πολυπλοκότητα της λειτουργίας της με μαθηματικές εξισώσεις και ορισμούς όπως προστάζει ο εγκέφαλος μας και οι ασθήσεις μας, θέλοντας ενδεχομένως να την δαμάσουμε και να την ελέγχουμε επειδή την κατανοούμε, αν όντως το καταφέρνουμε αυτό…

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει μια συνοπτική εικόνα των προτάσεων των κυριότερων προσπαθειών.

	Θερμοκρασία	*Πίεση*	*Εντροπία*	*Καταστατική εξίσωση*
Einstein **Planck** **Mosengeil** **Pauli** **Von Laue** **Tolman** **Jüttner**	$T' = \frac{T}{\gamma}$	$P' = P$	$S' = S$	$\frac{p'v'}{T'} = \frac{pv}{T}$
Ott **Arzelies** **Kibble** **Gamba** **Eddington**	$T' = \gamma T$	$P' = P$	$S' = S$	$\frac{p'v'}{T'} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{pv}{T}$
Rohrlich	$T' = \gamma T$ ή $T' = \frac{T}{\gamma}$			$pv^{\mu} = nkT^{\mu}$
Landsberg **Van Kampen**	$T' = T$	$P' = P$	$S' = S$	$\frac{p'v'}{T'} = \frac{1}{\gamma}\frac{pv}{T}$

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Lorentz 1892.

<u>Εισαγωγή.</u>

Α. Βασικές υποθέσεις.
Β. Η αρχή του D'Alembert.
Γ. Ονομασίες και μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη διατριβή.

<u>Κεφάλαιο 1.</u> Ηλεκτρικές κινήσεις σε σώματα που βρίσκονται σε ηρεμία.

Α. Τιμή της κινητικής ενέργειας.
Β. Αλλαγή της κινητικής ενέργειας.
Γ. Ποσότητες που χρησιμεύουν για τον καθορισμό μιας εικονικής μετατόπισης του συστήματος.
Δ. Εφαρμογή της αρχής του D'Alembert.
Ε. Τιμές των X, Y και Z για διηλεκτρικά.
Ζ. Τιμές των X, Y και Z για αγωγούς.
Η. Εξισώσεις κίνησης.
Θ. Τύποι ηλεκτροστατικής.
Ι. Υπόθεση ηλεκτρικού ρευστού.
Κ. Αμετάβλητα ρεύματα.
Λ. Μεταβλητά ρεύματα.
Μ. Ηλεκτρική δύναμη.
Ν. Ηλεκτροκινητικές δυνάμεις.
Ξ. Ταχύτητα του φωτός στον αιθέρα.

<u>Κεφάλαιο 2.</u> Ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα σε σώματα που βρίσκονται σε κίνηση και στα οποία εμπλέκεται ο αιθέρας που περιέχεται στο εσωτερικό τους.

Α. Τιμή της κινητικής ενέργειας.
Β. Ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που διέρχεται από μια επιφάνεια.
Γ. Εφαρμογή της αρχής του D'Alembert.
Δ. Τιμή της ηλεκτρικής δύναμης.
Ε. Σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών του ρεύματος και εκείνων της διηλεκτρικής μετατόπισης

<u>Κεφάλαιο 3.</u> Εξέταση μιας υπόθεσης που έγινε στα προηγούμενα κεφάλαια.(αφορά υπόθεση του Maxwell για τα ηλεκτρικά κυκλώματα)

<u>Κεφάλαιο 4.</u> θεωρία ενός συστήματος φορτισμένων σωματιδίων που κινούνται μέσω του αιθέρα χωρίς να συμπαρασύρουν αυτό το μέσο.

Α. Προκαταρκτικές εκτιμήσεις.
Β. Βασικές υποθέσεις.
Γ. Τιμή της μεταβολής $\delta' T$. (Πρόκειται για τη σχέση $\delta A = \frac{d\delta' T}{dt} - \delta T$, όπου δA είναι το έργο των δυνάμεων που αντιστοιχεί στις εικονικές μετατοπίσεις $\delta x, \delta y, \delta z$, δT η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος. Η παραπάνω σχέση είναι μια κομψή μορφή μιας πιο πολύπλοκης μορφής λόγω των δA και δT που έχουν προκύψει μετά από επεξεργασία της αρχής D'Alembert.
Δ. Εξισώσεις που καθορίζουν την κατάσταση του αιθέρα.
Ε. Δράση του αιθέρα σε ένα φορτισμένο σωματίδιο.
Ζ. Ροπή ροπής που δρα σε ένα φορτισμένο σωματίδιο.
Η. Ταχύτητα περιστροφής ενός σωματιδίου.
Θ. Επίδραση των περιστροφών στις τιμές των δυνάμεων X, Y και Z.
Ι. Περίληψη των πιο σημαντικών τύπων.

<u>Κεφάλαιο 5.</u> Εφαρμογές της προηγούμενης θεωρίας.

Α. Ηλεκτροστατική.
Β. Ηλεκτροδυναμική δύναμη που επενεργεί σε ένα στοιχείο ενός γραμμικού κυκλώματος.
Γ. παρατηρήσεις για τους τύπους (Ι)

$$\left\{\begin{aligned} X &= 4\pi V^2 \int \rho f d\tau + \eta \int \rho \gamma d\tau - \zeta \int \rho \beta d\tau \\ Y &= 4\pi V^2 \int \rho g d\tau + \zeta \int \rho \alpha d\tau - \xi \int \rho \gamma d\tau \\ Z &= 4\pi V^2 \int \rho h d\tau + \xi \int \rho \beta d\tau - \eta \int \rho \alpha d\tau \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Δ. Επαγωγή σε κλειστό κύκλωμα.
Ε. Ειδική επαγωγική ισχύς.

<u>Κεφάλαιο 6.</u> Διάδοση του φωτός σε ένα αξιόλογο διηλεκτρικό που βρίσκεται σε ηρεμία.

Α. Φύση του προβλήματος.
Β. Δονήσεις στον αιθέρα που παράγονται από ένα μόνο μόριο.
Γ. Μαθηματικά θεωρήματα.
Δ. Προσδιορισμός των χ_1, χ_2, χ_3 και των $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$.
Ε. Ένταση της δύναμης που υφίσταται ένα δονούμενο σωματίδιο λόγω της κατάστασης του μορίου του οποίου αποτελεί μέρος.
Ζ. Προσδιορισμός της συνολικής δύναμης που ασκείται σε ένα δονούμενο σωματίδιο.
Η. Εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου.

Θ. Διάδοση του φωτός.

Κεφάλαιο 7. Διάδοση του φωτός σε ένα αξιόλογο διηλεκτρικό που βρίσκεται σε κίνηση.

Α. Βασικές εξισώσεις.
Β. Δονήσεις που παράγονται από ένα μόνο μόριο.
Γ. Μαθηματικά θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των χ_1, χ_2 και χ_3.
Δ. Προσδιορισμός των χ_1, χ_2, χ_3 και των $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$.
Ε. Τιμή της δύναμης που παράγεται από το ίδιο το μόριο, μέρος του οποίου αποτελεί το υπό εξέταση σωματίδιο.
Ζ. Προσδιορισμός της συνολικής δύναμης που ασκείται σε ένα δονούμενο σωματίδιο.
Η. Εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου.
Θ. Διαφορικές εξισώσεις που καθορίζουν τα $\mathrm{M}_x, \mathrm{M}_y, \mathrm{M}_z$.
Ι. Συμπαρασύροντας τα φωτεινά κύματα από στοχαστική ύλη. ???(ponderable.. matter)

Πρόσθετη σημείωση.

Α. Γενικές τιμές των $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$.
Β. Διηλεκτρική μετατόπιση και μαγνητική δύναμη που παράγεται από ένα δονούμενο σωματίδιο σε κάποια απόσταση.
Γ. Προσδιορισμός της δύναμης που υφίσταται ένα δονούμενο σωματίδιο λόγω της κατάστασης του αιθέρα που διεγείρει μόνο του.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Lorentz 1892.

Η σχέση που καταλήγει είναι η:

$-\int\left(Xe_x+Ye_y+Ze_z\right)d\tau=\int\left(\frac{\partial F}{\partial t}e_x+\frac{\partial G}{\partial t}e_y+\frac{\partial H}{\partial t}e_z\right)d\tau$ σχέση (20) σελίδα 21.

Η ομάδα εξισώσεων του είναι η ακόλουθη:

$$\left\{\begin{array}{l} X=4\pi V^2\int\rho f d\tau+\eta\int\rho\gamma d\tau-\zeta\int\rho\beta d\tau \\ Y=4\pi V^2\int\rho g d\tau+\zeta\int\rho\alpha d\tau-\xi\int\rho\gamma d\tau \\ Z=4\pi V^2\int\rho h d\tau+\xi\int\rho\beta d\tau-\eta\int\rho\alpha d\tau \end{array}\right\}(\mathrm{I})$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\rho\right\}(\mathrm{II})$$

$$\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\rho\right\}(\mathrm{III})$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}=4\pi\left(\rho\xi+\frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}=4\pi\left(\rho\eta+\frac{\partial g}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}=4\pi\left(\rho\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right) \end{array}\right\}(\mathrm{IV})$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4\pi V^2\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ 4\pi V^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial\beta}{\partial t} \\ 4\pi V^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\frac{\partial\gamma}{\partial t} \end{array}\right\}(\mathrm{V})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Lorentz 1895

Από τις παρακάτω εξισώσεις[167] ο Lorentz αναπτύσσει την x συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης, σχέση VI_b.

$$Div\,\mathfrak{d} = \rho, \quad \ldots \ldots \quad (I_b)$$
$$Div\,\mathfrak{H} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (II_b)$$
$$Rot\,\mathfrak{H}' = 4\pi\rho\mathfrak{v} + 4\pi\dot{\mathfrak{d}}, \quad \ldots \ldots \quad (III_b)$$
$$Rot\,\mathfrak{F} = -\dot{\mathfrak{H}}, \quad \ldots \ldots \quad (IV_b)$$
$$\mathfrak{F} = 4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}], \quad \ldots \ldots \quad (V_b)$$
$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4\pi[\mathfrak{p}.\mathfrak{d}], \quad \ldots \ldots \quad (VI_b)$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F} + [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] \quad \ldots \ldots \quad (VII_b)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν από μία άλλη ομάδα εξισώσεων, τις I_a-VII_a μετά από κάποια επεξεργασία από τον Lorentz.

$$Div\,\mathfrak{d} = \rho, \quad \ldots \ldots \quad (I_a)$$
$$\mathfrak{S} = \rho(\mathfrak{p} + \mathfrak{v}) + \left(\frac{\partial\,\mathfrak{d}}{\partial\,t}\right)_1, \quad \ldots \ldots \quad (4_a)$$
$$Div\,\mathfrak{H} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (II_a)$$
$$Rot\,\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{S}, \quad \ldots \ldots \quad (III_a)$$
$$-4\pi V^2\,Rot\,\mathfrak{d} = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,t}\right)_1, \quad \ldots \ldots \quad (IV_a)$$
$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] + [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] \quad \ldots \ldots \quad (V_a)$$

[167] Οι αγκύλες στις σχέσεις είναι ο συμβολισμός του εξωτερικού γινομένου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Lorentz 1895

Ξεκινάει από την παρακάτω σχέση που έχει προκύψει ουσιαστικά από ανάλυση της σχέσης (VI_b) για την x συνιστώσα.

$$V^2 \Delta \mathfrak{H}'_x - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}'_x}{\partial t^2}\right)_1 = 4\pi V^2 \left\{\frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial y}\right\} +$$
$$+ 4\pi \mathfrak{p}_z \left\{\frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial x} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial y} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial z}\right\} -$$
$$- 4\pi \mathfrak{p}_y \left\{\frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial x} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial y} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial z}\right\}.$$

Όπου το 2^o μέλος γίνεται

$$4\pi V^2 \left\{\frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial y}\right\} + 4\pi \left\{\mathfrak{p}_z \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_y)}{\partial t} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial(\rho \mathfrak{v}_z)}{\partial t}\right\}.$$

Και το 1^o μέλος γίνεται

$$V^2 \Delta - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \left(V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\mathfrak{p}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\right) +$$
$$+ \left(V^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\mathfrak{p}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}\right) + \left(V^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\mathfrak{p}_z \frac{\partial^2}{\partial z \partial t}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} =$$
$$= V^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + V^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 +$$
$$+ V^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Lorentz 1904

Αυτές είναι οι βασικές εξισώσεις για τις οποίες στη συνέχεια θεωρεί τη κίνηση του συστήματος στη διεύθυνση του x με ταχύτητα υ.

$$\left\{\begin{array}{l} div\vec{D}=\rho,\ div\vec{H}=0 \\ curl\vec{H}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\rho\vec{v}\right) \\ curl\vec{D}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \vec{F}=\vec{D}+\frac{1}{c}\left[\vec{v}.\vec{H}\right] \end{array}\right\}$$

Αναπτύσσοντας τις παραπάνω εξισώσεις και λαμβάνοντας υπόψιν την ταχύτητα του συστήματος στον άξονα x, ο Lorentz φτάνει στις παρακάτω εξισώσεις.

$$\left\{\begin{array}{l} div\vec{D}=\rho,\ div\vec{H}=0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)D_x+\frac{1}{c}\rho\left(\upsilon+u_x\right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)D_y+\frac{1}{c}\rho u_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)D_z+\frac{1}{c}\rho u_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)H_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_z}{\partial y}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial}{\partial x}\right)H_z \\ F_x=D_x+\frac{1}{c}\left(u_yH_z-u_zH_y\right) \\ F_y=D_y-\frac{1}{c}\upsilon H_z+\frac{1}{c}\left(u_zH_x-u_xH_z\right) \\ F_x=D_z-\frac{1}{c}\upsilon H_y+\frac{1}{c}\left(u_xH_y-u_yH_x\right) \end{array}\right\}$$ [168]

[168] Το $\vec{v}$ στις βασικές εξισώσεις είναι ουσιαστικά το $\vec{v}=\upsilon+\vec{u}$ όπου $\vec{u}$ η ταχύτητα που μπορεί να έχει ένα σημείο ενός ηλεκτρονίου, δηλαδή είναι $v_x=\upsilon+u_x$, $v_y=u_y$, $v_z=u_z$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

Σύνθεση ταχυτήτων – σχετική ταχύτητα.

Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το αδρανειακό σύστημα S' κινείται ως προς το ακίνητο σύστημα S με ταχύτητα υ ως προς τον άξονα x, τότε για τη x συνιστώσα της ταχύτητας θα ισχύει $u'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$ και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς $dx' = \dfrac{dx - \upsilon dt}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ και $dt' = \dfrac{dt - \dfrac{\upsilon}{c^2}dx}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ έχουμε διαδοχικά $u'_x = \dfrac{dx - \upsilon dt}{dt - \dfrac{\upsilon}{c^2}dx} = \dfrac{\dfrac{dx}{dt} - \upsilon}{1-\dfrac{\upsilon}{c^2}\dfrac{dx}{dt}} \Rightarrow u'_x = \dfrac{u_x - \upsilon}{1-\dfrac{\upsilon}{c^2}u_x}$ που ουσιαστικά γράφεται και $u_{\sigma\chi_{21}} = \dfrac{u_2 - u_1}{1-\dfrac{u_2 u_1}{c^2}} = -u_{\sigma\chi_{12}}$ [169] **(ΣΤ1)**. Στην τελευταία σχέση μπορούμε να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις:

1. Αν $u_1, u_2 << c$, τότε $u_{\sigma\chi_{21}} = u_2 - u_1 = -u_{\sigma\chi_{12}}$ όπως προβλέπει ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου.
2. Αν $u_1 = u_2 = c$, με ταχύτητες ομόρροπες, τότε $u_{\sigma\chi_{21}} = \dfrac{0}{0}$ απροσδιόριστη μορφή. Αν θέσουμε $u_2 = c$, τότε $\lim\limits_{\upsilon\to c}\upsilon_{\sigma\chi} = \lim\limits_{\upsilon\to c}\dfrac{c-\upsilon}{1-\dfrac{\upsilon}{c}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\upsilon\to c}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{c}} = c$.
3. Αν $u_1 = u_2 = c$, με ταχύτητες αντίρροπες, τότε $u_{\sigma\chi_{21}} = \dfrac{u_2 + u_1}{1+\dfrac{u_2 u_1}{c^2}}$ **(ΣΤ2)** οπότε $u_{\sigma\chi_{21}} = \dfrac{c+c}{1+\dfrac{c\cdot c}{c^2}} = c$ αποτέλεσμα που το περιμέναμε εφόσον η ταχύτητα του φωτός είναι το ανώτατο όριο ταχυτήτων.

---

[169] Για ένα γεγονός είναι $u_x = u_2$ που ουσιαστικά είναι η απόλυτη ταχύτητα που έχει το γεγονός. Έπειτα είναι $\upsilon = u_1$ επίσης μια απόλυτη ταχύτητα γιατί μετριέται ως προς το ακίνητο σύστημα. Τέλος $u'_x = u_{\sigma\chi}$ που ουσιαστικά είναι σχετική ταχύτητα αφού αυτή μετριέται ως προς το κινούμενο σύστημα.

4. Οι ταχύτητες είναι διανύσματα πράγμα που σημαίνει ότι όταν τα συστήματα αλλάζουν φορά κίνησης, θα πρέπει να γίνουν αλλαγές στα πρόσημα. Για τη σχέση **(ΣΤ1)** μπορούμε να θεωρήσουμε μια σύμβαση: θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά και αν τα σώματα 1 και 2 επίσης να κινούνται προς τα δεξιά τότε παίρνουμε την **(ΣΤ1)**. Αν όμως έστω ότι το 1 κινείται προς τα αριστερά τότε παίρνει ένα μείον μπροστά και έχουμε τη σχέση **(ΣΤ2)**.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ

Τετρανύσματα πάνω στους μετασχηματισμούς Lorentz.

Τετραθέση: $x^{\mu}=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ το γράφουμε σαν γραμμή αλλά είναι στήλη οπότε τυπικά είναι $x^{\mu}=(x^0,x^1,x^2,x^3)^{\mathrm{T}}$ όπου

$$\begin{Bmatrix} x^0=ct \\ x^1=x \\ x^2=y \\ x^3=z \end{Bmatrix} \quad \text{ή αλλιώς} \quad x^{\mu}\equiv \underset{ket}{|x\rangle}=\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Θέλουμε να κάνουμε το μετασχηματισμό $x^{\mu}\to x'^{\mu}$ άρα $x'^{\mu}=\Lambda x^{\mu}$ ή $x'=\Lambda x$ όπου το Λ πρέπει να είναι πίνακας.

Θα πρέπει να διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο δηλαδή $\langle x'|x'\rangle=\langle x|x\rangle$ γιατί τα διανύσματα δεν αλλάζουν, μένουν τα ίδια, αυτό που αλλάζει είναι πως γράφονται διαφορετικά λόγω του μετασχηματισμού.

Θα έχουμε λοιπόν ότι $\langle x'|x'\rangle=\langle \Lambda x|\Lambda x\rangle=\left\langle x\middle|\underset{\mathrm{I}}{\Lambda^{\mathrm{T}}\Lambda}\middle|x\right\rangle=\langle x|x\rangle$ δηλαδή ο Λ είναι ορθογώνιος[170].

Με το συμβολισμό της σχετικότητας με πινακοστοιχεία θα έχουμε:

$$x'^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}_{\beta}x^{\beta} \text{ όπου } \Lambda^{\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \text{ γιατί ενθυμούμενοι ισχύει } \mathrm{A}'^{\alpha}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\mathrm{A}^{\beta}.$$

Covariant vector $x_{\mu}=(x_0,x_1,x_2,x_3)=(ct,-x,-y,-z)$

Θέλουμε να βρούμε τα στοιχεία του πίνακα Λ:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 00 & 01 & 02 & 03 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 30 & 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \text{ όπου για το στοιχείο 00 θα ισχύει: } \Lambda^0_0=\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}=\frac{\partial(ct)}{\partial(ct)}=1$$

---

170 Είναι πίνακας μετάβασης από μια ορθογώνια βάση του διανυσματικού χώρου V σε μια άλλη ορθοκανονική βάση του V. Ουσιαστικά έχει γραμμές και στήλες ορθοκανονικά διανύσματα. Η ορίζουσα είναι ίση πάντα με +1 ή -1. Επιπλέον αναγκαστικά είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $\Lambda^{-1}=\Lambda^{\mathrm{T}}$ (αντίστροφος ίσος με ανάστροφο).

Για τα υπόλοιπα θα έχουμε εύκολα ότι:

$\Lambda_1^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} = \frac{\partial(ct)}{\partial(-x)} = 0$ όπως και για όλα στοιχεία για τα οποία οι γραμμές δεν είναι ίδιες με τις στήλες δηλαδή

$\Lambda_1^0 = \Lambda_2^0 = \Lambda_3^0 = \Lambda_0^1 = \Lambda_2^1 = \Lambda_3^1 = \Lambda_0^2 = \Lambda_1^2 = \Lambda_3^2 = \Lambda_0^3 = \Lambda_1^3 = \Lambda_2^3 = 0$.

$\Lambda_1^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$, $\Lambda_2^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1$, $\Lambda_3^3 = \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = \frac{\partial(-z)}{\partial z} = -1$ άρα

τελικά $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g$ μετρικός τανυστής.

- Τι κάνει ο **μετρικός τανυστής** g_ν^μ? <u>ΔΕΝ</u> ανεβοκατεβάζει δείκτες: $g_\nu^\mu x^\nu = x^\mu$, $g_\nu^\mu x_\mu = x_\nu$

Αφήνει τα διανύσματα αναλλοίωτα, λειτουργεί ως $\delta - kronecker$ δηλαδή

$$g_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

Απεναντίας είναι διαφορετικά τα $\delta_{\alpha\beta}$, $\delta^{\alpha\beta}$. Ας τα βάλουμε να δράσουν στα A^β, A_β : $\delta_{\alpha\beta}\mathrm{A}^\beta = \mathrm{A}_\alpha$, $\delta^{\alpha\beta}\mathrm{A}_\beta = \mathrm{A}^\alpha$, άρα $\delta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, $\delta^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$. Αυτά ανεβοκατεβάζουν δείκτες, από contra-variant σε covariant και αντιστρόφως.

Είναι $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu = \mathrm{I}$ γιατί $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Δηλαδή $(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{g_{\mu\nu}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x^{\nu}} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \left(x_{\mu}\right)^{\mathrm{T}}$$

γιατί

$$x_{\mu} = (ct, -x, -y, -z) \Rightarrow \left(x_{\mu}\right)^{\mathrm{T}} = (ct, -x, -y, -z)^{\mathrm{T}}.$$

Τι είναι ο μετασχηματισμός Lorentz?

Είναι $\Lambda\left|x\right\rangle = \left|x'\right\rangle$

Επιστροφή πίσω στο εσωτερικό γινόμενο. Για να κάνουμε εσωτερικό γινόμενο πρέπει να δράσουμε το μετρικό τανυστή.

$\left\langle x'|x'\right\rangle = \left\langle g\Lambda x|\Lambda x\right\rangle = \left\langle x\left|(g\Lambda)^{\mathrm{T}}\Lambda\right|x\right\rangle = \left\langle x\left|\Lambda^{\mathrm{T}} g^{\mathrm{T}}\Lambda\right|x\right\rangle = \left\langle x\left|\Lambda^{-1} g\Lambda\right|x\right\rangle =$
$\left\langle x\left|\Lambda^{\mathrm{T}} g\Lambda\right|x\right\rangle.$

$$\boxed{\begin{aligned} g_{\mu\nu}x^{\nu} &= x_{\mu} \\ g^{\mu\nu}x_{\nu} &= x^{\mu} \end{aligned}}$$

Το εσωτερικό γινόμενο με σύμβαση Einstein γράφεται

$\left\langle x|x\right\rangle = x^{\mu} \otimes x^{\mu}$ ή $\mathrm{A}^{\nu}\mathrm{B}_{\nu}$ ή $\mathrm{A}_{\nu}\mathrm{B}^{\nu}$ δηλαδή

$x^{\mu} \otimes x^{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu}x^{\mu}$. π.χ $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$

$\left\langle x^{\mu}\left|x^{\mu}\right.\right\rangle = \left\langle gx|x\right\rangle = \left\langle x\left|g^{\mathrm{T}}\right|x\right\rangle = \left\langle x\left|g\right|x\right\rangle$

Βρήκαμε δηλαδή ότι $\left\langle x'|x'\right\rangle = \left\langle x\left|\Lambda^{\mathrm{T}} g\Lambda\right|x\right\rangle$ και $\left\langle x|x\right\rangle = x^{\mu} \otimes x^{\mu} = \left\langle x\left|g\right|x\right\rangle$

Και επειδή $\left\langle x'|x'\right\rangle = \left\langle x|x\right\rangle$ άρα

$$\boxed{\Lambda^{\mathrm{T}} g\Lambda = g}$$

Όμως $\left[\Lambda_{ij}\right]^{\mathrm{T}} = \Lambda_{ji}$ οπότε $\Lambda^{\mathrm{T}} g\Lambda = g \Rightarrow \left(\Lambda_{ki}\right)^{\mathrm{T}} g\Lambda_{mj} = g_{ij} \Rightarrow \Lambda_{ik} g_{km}\Lambda_{mj} = g_{ij}$

Πάμε στον Lorentz…

$$\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g \Rightarrow \left(\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda\right)_{00} = g_{00},$$

όμως θα πρέπει $\Lambda^{\mathrm{T}} \equiv \Lambda^{-1}$. Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με Λ και δεξιά με Λ^{T} και έχουμε:

$$\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g \Rightarrow \underbrace{\Lambda\Lambda^{\mathrm{T}}}_{\mathrm{I}} g \underbrace{\Lambda\Lambda^{\mathrm{T}}}_{\mathrm{I}} = \Lambda g \Lambda^{\mathrm{T}} \Rightarrow$$

$$\boxed{g = \Lambda g \Lambda^{\mathrm{T}}}$$

$$\Lambda\Lambda^{\mathrm{T}} = \mathrm{I} \Rightarrow \det\left(\Lambda\Lambda^{\mathrm{T}}\right) = \det \mathrm{I} \xrightarrow[\substack{\textit{συμμετρικοί} \\ \textit{πίνακες}}]{\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda} \left(\det \Lambda\right)\left(\det \Lambda\right) = 1 \Rightarrow$$

$\left(\det \Lambda\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \det \Lambda = +1 \\ \det \Lambda = -1 \end{cases}$ special πίνακες θεωρίας ομάδων, διαλέγουμε αυτούς για τους οποίους ισχύει $\det \Lambda = +1$.

Και τώρα Lorentz για κίνηση στον άξονα x.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{20} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{30} & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & 0 & 0 \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{aligned} g_{\mu\nu} x^{\nu} &= x_{\mu} \\ g^{\mu\nu} x_{\nu} &= x^{\mu} \end{aligned}\right\}}_{\substack{\textit{αλλάζει τη φύση} \\ \textit{του διανύσματος}}}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{aligned} g^{\mu}_{\nu} x^{\nu} &= x^{\mu} \\ g^{\nu}_{\mu} x_{\nu} &= x_{\mu} \end{aligned}\right\}}_{\substack{\textit{εδώ λειτουργεί} \\ \textit{ως διάνυσμα}}}$$

όπου $\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda = \Lambda^{-1}$

Έχουμε ότι $\det\Lambda = 1$ και θα αναπτύξουμε ορίζουσα:

$$\det\Lambda = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & 0 & 0 \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$\Lambda_{00}\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \Lambda_{01}\begin{vmatrix} \Lambda_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$\Lambda_{00}\Lambda_{11} - \Lambda_{01}\Lambda_{10} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Lambda_{00}\Lambda_{11} - \left(\Lambda_{10}\right)^2 = 1}$$

Θέλουμε ακόμα δύο εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση του μετασχηματισμού μας.

$$g = \Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & 0 & 0 \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}}_{\Lambda^{\mathrm{T}}=\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{g} \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & 0 & 0 \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & 0 & 0 \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & 0 & 0 \\ -\Lambda_{10} & -\Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(\Lambda_{00}\right)^2 - \Lambda_{01}\Lambda_{10} & \Lambda_{00}\Lambda_{01} - \Lambda_{01}\Lambda_{11} & 0 & 0 \\ \Lambda_{10}\Lambda_{00} - \Lambda_{11}\Lambda_{10} & \Lambda_{10}\Lambda_{01} - \left(\Lambda_{11}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{cases}(\Lambda_{00})^2 - \Lambda_{01}\Lambda_{10} = g_{00} = 1 \\ \Lambda_{00}\Lambda_{01} - \Lambda_{01}\Lambda_{11} = g_{01} = 0 \\ \Lambda_{10}\Lambda_{00} - \Lambda_{11}\Lambda_{10} = g_{10} = 0 \\ \Lambda_{10}\Lambda_{01} - (\Lambda_{11})^2 = g_{11} = -1\end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases}(\Lambda_{00})^2 - (\Lambda_{01})^2 = g_{00} = 1 \\ (\Lambda_{00} - \Lambda_{11})\Lambda_{01} = g_{01} = 0 \\ \Lambda_{10}\Lambda_{00} - \Lambda_{11}\Lambda_{10} = g_{10} = 0 \\ (\Lambda_{01})^2 - (\Lambda_{11})^2 = g_{11} = -1\end{cases}\right\}$$

Η 1η εξίσωση είναι μια <u>ισοσκελής υπερβολή</u> (βλ. παρακάτω) με

$$\Lambda_{00} = \pm\cosh\xi \text{ και } \Lambda_{01} = \pm\sinh\xi .$$

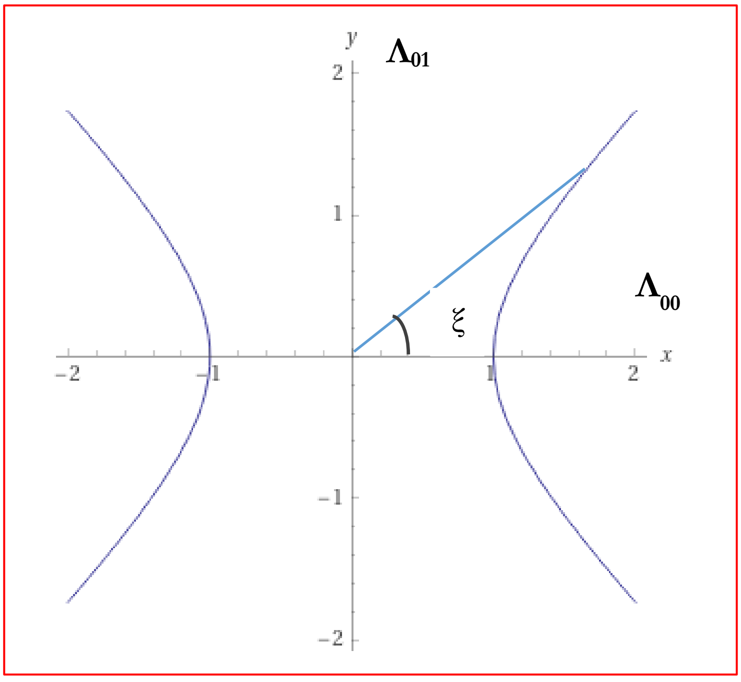
Διαλέγουμε τις θετικές…

$$\boxed{\Lambda_{00} = \cosh\xi}$$

και

$$\boxed{\Lambda_{01} = \sinh\xi = \Lambda_{10}}$$

Από την 2η εξίσωση θα πρέπει $(\cosh\xi - \Lambda_{11})\sinh\xi = 0 \overset{\sinh\xi\neq 0}{\Rightarrow} \boxed{\Lambda_{11} = \cosh\xi}$

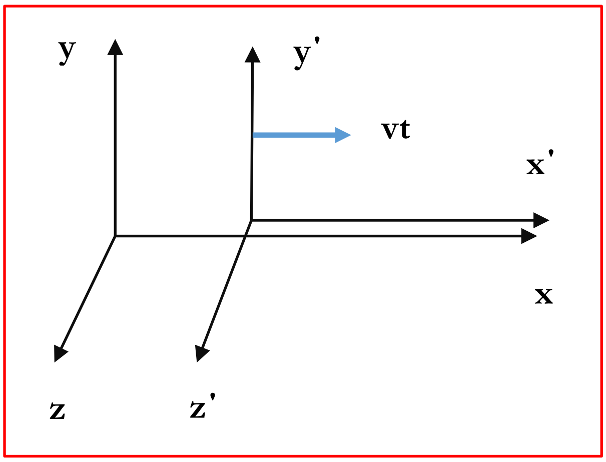


Οι άλλες εξισώσεις απλώς επαληθεύονται.

Προκύπτει δηλαδή ο πίνακας $\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0 \\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε την παράμετρο ξ.

Πρέπει να περιγράψουμε την αλλαγή συστήματος αναφοράς. Θα μελετήσουμε την αρχή των αξόνων.



Για $t = 0$ είναι $x_1' = x_2' = x_3' = 0$. Για $t > 0$ είναι $x_2 = x_3 = 0$ και $x_1 = vt$, δηλαδή $y = z = 0$ και $x = vt$. Θα πρέπει αυτά να βγουν από τον πίνακα Λ.

Έχουμε λοιπόν

$$|x'\rangle = \Lambda |x\rangle \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c't' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0 \\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c't' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct\cosh\xi + x\sinh\xi \\ ct\sinh\xi + x\cosh\xi \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει

$$x' = ct\sinh\xi + x\cosh\xi \underset{x=vt}{\overset{x'=0}{\Rightarrow}}$$

$$0 = ct\sinh\xi + vt\cosh\xi \Rightarrow$$

$$ct\sinh\xi = -vt\cosh\xi \Rightarrow$$

$$\boxed{\tanh\xi = -\frac{v}{c}}$$

Από την ταυτότητα $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1 \Rightarrow$

$$1 - \tanh^2\xi = \frac{1}{\cosh^2\xi} \Rightarrow$$

$$\cosh^2\xi = \frac{1}{1 - \tanh^2\xi} \Rightarrow$$

$$\cosh^2\xi = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cosh\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma}$$

Και από $\sinh^2\xi = \cosh^2\xi - 1 \Rightarrow$

$$\sinh^2\xi = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \Rightarrow$$

$$\sinh^2\xi = \frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\sinh\xi = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$ [171]

Ή πιο κομψά $\sinh\xi = -\beta\gamma$ γιατί $\beta = \frac{v}{c}$. Έτσι τελικά ο πίνακας Λ (πίνακας προώθησης) για κίνηση στον άξονα x είναι

[171] Επιλέγουμε την αρνητική τιμή για το $\sinh\xi$ γιατί $\tanh\xi < 0$.

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και για τον άξονα y και z θα είναι αντίστοιχα:

$$\Lambda_y = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_z = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

1. **Isaacson, Walter.** *Albert Einstein Η βιογραφία μιας ιδιοφυίας.* Αθήνα : ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΨΥΧΟΓΙΟΣ Α.Ε, 2018.

2. **Heras, Ricardo.** *A review of Voigt's transformations in the framework of special relativity.* London : s.n., 2017.

3. **Damour, Thibault.** *Poincare the dynamics of the electron and relativity.* C. R. Physique 18 (2017) 551-562.

4. **Poincare, Henri.** *Sur la dynamique de l' electron.* C. R. T. 140 (1905) 1504-1508.

5. **Ford, G. W. and O'Connell, R. F.** *Lorentz Transformation of Blackbody Radiation.* arXiv:1310.3238v1 : s.n., 2013.

6. **Muller, Ingo.** *A History Of Thermodynamics - the doctrine of energy and entropy.* Berlin : Springer, 2007.

7. **Eddington, A. S.** *The Mathematical Theory Of Relativity.* Cambridge : University press, 1923.

8. **Ridler, Wolfgang.** *Εισαγωγή στην ειδική σχετικότητα.* ΑΘΗΝΑ : Εκδόσεις LEADER BOOKS A.E, 2001.

9. **Raymond A. Serway, Clement J. Moses, Curt A. Moyer.** *Σύγχρονη φυσική.* ΗΡΑΚΛΕΙΟ : ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, 2004.

10. **Landsberg, P T and Matsas, G E.A.** *The impossibility of a universal relativistic temperature transformation, Physica A,340, 92-94.* 2004.

11. **Landsberg, P T.** *Einstein and statistical thermodynamics I: relativistic thermodynamics.* Southampton, England : s.n., 1981.

12. **Landsberg, P T and Matsas, G E.A.** *Laying the ghost of the relativistic temperature transformation, Phys. Lett. A, 223, 401.* 1996.

13. **Planck, M.** *Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Erster Halbband (29): 542-570 (1907). Η μετάφραση μπορεί να βρεθεί εδώ: https://en.wikisource.org/wiki/Translation:On_the_Dynamics_of.*

14. **Arzelies, H.** *Nuovo Cimento., 35 (3), 792, (1965).*

15. **Landsberg, P T.** *Proc. Phys. Soc.89 1007 (1966).*

16. **Planck, M.** *Acht Vorlesungen uber Theoretische Physik (Leipzig: Hirzel) (1910).*

17. **Einstein, A.** *Zur Elektrodynamik bewegter Korper.* Lpz, 17 (1905) 891.

18. **Planck, M.** *Eight Lectures on Theoretical Physics.* [trans.] A P Willis. s.l. : New York Columbia University Press, 1915.

19. **Ott, H.** *Lorentz-Transformation der Warme und der Temperatur, Zeitschrift fur Physik 175, 70-104.* 1963.

20. **Einstein, A.** *Jahrbuch der Radioaktivität und Electronik, 4, 411-462.* 1907.

21. **Liu, Chuang.** *Einstein and relativistic thermodynamics in 1952: a historical and critical study of a strange episode in the history of modern physics.* s.l. : The British Journal for the History of Science, 25, pp 185-206, 1992.

22. **Tolman, R C.** *Relativity, Thermodynamics and Cosmoogy.* s.l. : Oxford University Press, 1934.

23. **Kibble, T. W.B.** *Relativistic transformaton laws for thermodynamics variables.* London : Nuovo Cimento B (1965-1970), 41:72-78, 1966. doi: https://doi.org/10.1007/BF02711119, 1965.

24. **Rohrlich, F.** *True an Apparent Transformations, Classical Electrons, and Relativistic Thermodynamics.* s.l. : Nuovo Cimento B 45, 1966.

25. **Gamba, A.** *Relativistic Transformation of Thermodynamical Quantities.* s.l. : Nuovo Cimento, 37, 1965.

26. **Bodanis, David.** *Η βιογραφία της πιο διάσημης εξίσωσης στον κόσμο.* ΑΘΗΝΑ : Εκδοτικός Οργανισμός Λιβάνη, 2003.

27. **von Laue, Max.** *Die Relativitatstheorie.* Braunschweig : Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, 1919.

28. **Voight, W.** *Ueber das Dopplersche Princip.* [trans.] On the Principle of Doppler. Gottinger (1887) 41 : s.n., Nachr. Ger. Wiss.

29. **Pauli, W.** *Theory of relativity.* LONDON, NEW YORK, PARIS, LOS ANGELES : PERGAMON PRESS, 1958.

30. **Marcello Alonso, Edward J. Finn.** *Θεμελιώδης πανεπιστημιακή φυσική.* [trans.] Λ Κ ΡΕΣΒΑΝΗ and Τ Α ΦΙΛΛΙΠΑ. 2nd. ΑΘΗΝΑ : ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1981. Vol. 1 Μηχανική και Θερμοδυναμική.

31. **Mares, Jiri J, Hubik, Pavel and Spicka, Vaclav.** *On relativistic transformation of temperture.* Frtschr.Phys.65, No. 6-8 (2017).

32. **van Kampen, N. G.** *Relativistic Thermodynamics of Moving Systems.* Washington, D.C : s.n., Physics Department, Howard University, 1968.

33. **Ταμβάκης, Κυριάκος.** *Κλασική ηλεκτροδυναμική.* ΑΘΗΝΑ : Liberal Books, 2013.

34. **Χριστοδουλίδης, Κώστας.** *Η ειδική θεωρία της σχετικότητας και οι εφαρμογές της.* ΑΘΗΝΑ : Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2013.

35. **Rasinariu, Constantin.** *Numeric Experiments in Relativistic Thermodynamics: A Moving System Appears Cooler.* s.l. : arXiv:0804.3836v3, 2008.

36. **Juttner, Ferencz.** *Das Maxwellsche Getetz der Geschwindigkeitsverteilug in der Relativtheorie.* Berlin : Ann. der Physik, Vol. 339, Issue 5, 856 , 1911.

37. **Lorentz, H. A., et al.** *The principle of relativity.* UNITED STATES OF AMERICA : DOVER PUBLICATIONS, INC, 1923.

38. **Lorentz, H.A.** *La theorie electromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants.* Arch. neerl. Sci, 25 (1892) 363.

39. **Lorentz, H.A.** *Electromagnetic phenomena in a s;ystem moving with any velocity less than that of light.* Proc. Roy. Acad. Amsterdam 6 (1904).

40. **Περσίδης, Σωτήριος.** *Σχετικότητα. Εισαγωγή στην Ειδική και Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.* Πάτρα : ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ, 2000.

41. **Χριστοδουλάκης, Θ and Κορφιάτης, Ε.** *Θεωρία της ειδικής σχετικότητας.* Αθήνα : Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2015.

42. **Lorentz, H. A.** *Versuch einer Theorie der lektrischen und optischen Ercheinugen in dewegten Korpern.* [trans.] Attempt of a Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Bodies. Leiden : s.n., 1895.

43. **Nakamura, Tadas K.** *Lorentz Transform of Black Body Radiation Temperature.* s.l. : arXiv:0910.0164v1, 2009.

44. **Joshi, A W.** *Matrices and Tensors in Physics.* 4th edition. London, New Delhi, Nairobi : New Age Publishers, 2017.

45. **Boas, Mary L.** *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* United States of America : Kaye Pace, 2006.

46. **Lebedev, Leonid P, Cloud, Michael J and Eremeyev, Victor A.** *Tensor Analysis with Applications in mechanics.* New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei Chennai : World Scientific, 2010.

47. **Arfken, George B and Weber, Hans J.** *Mathematical Methods for Physicists.* 6th Edition. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo : Elsevier Academic Press, 2005.

48. **Βέργαδος, Ι Δ and Κεχαγιάς, Α.** *Κλασική Ηλεκτροδυναμική.* Αθήνα : Συμεών, 2020.

49. **Darrigol, Olivier.** *The Genesis of the Theory of Relativity.* Paris : Seminaire Poincare, 2005.

50. **Cheng, Ta-Pei.** *Relativity, Gravitation and Cosmology.* U.K : Oxford University Press, 2005.

51. **Terrell, James.** *Invisibility of the Lorentz Contraction.* Los Alamos : Physical review, 1959. Vol. 116. 4.