ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διπλωματική Εργασία

Ολοκλήρωση Διαφορικών Μορφών στον Ευκλείδειο Χώρο

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Αρβανιτογεώργος Ανδρέας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Ολοκλήρωση Διαφορικών Μορφών στον Ευκλείδειο Χώρο

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Α' Αξιολογητής:

Αρβανιτογεώργος Ανδρέας

Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Πατρών

Β' Αξιολογητής:

Μπραζίτικος Σιλουανός

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν κείμενο αποτελεί τη Διπλωματική Εργασία του συγγραφέα για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Μαθηματικά από το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο. Οι στόχοι της εργασίας αυτής είναι:

1) Η ανάπτυξη της θεωρίας των διαφορικών μορφών στον $\mathbb{R}^n$.
2) Ο αυστηρός ορισμός του επικαμπυλίου και επιφανειακού ολοκληρώματος.

Η εργασία χωρίζεται κατά φυσικό τρόπο σε τρία κεφάλαια. Το 1^{o} κεφάλαιο αφορά την καταγραφή των βασικών έννοιών από τη Γραμμική Άλγεβρα και τον Διαφορικό Λογισμό Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών. Το 2^{o} κεφάλαιο αφορά την ανάπτυξη του Λογισμού των Διαφορικών Μορφών. Το 3^{o} κεφάλαιο πραγματεύεται την ολοκλήρωση των διαφορικών μορφών και τα βασικά ολοκληρωτικά θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης (Green, Gauss, Stokes).

Πιο συγκεκριμένα, στο 1^{o} κεφάλαιο αναλύονται με λεπτομέρεια τόσο οι στοιχειώδεις, όσο και οι πιο προχωρημένες έννοιες που χρειαζόμαστε. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στον δυϊκό χώρο καθώς και τον χώρο των (αντισυμμετρικών) διγραμμικών μορφών, εξετάζονται όμως και οι γενικότερες πολυγραμμικές μορφές. Υπενθυμίζεται επίσης η έννοια της παραγώγου και του διαφορικού μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών στα πλαίσια του κλασικού λογισμού.

Στο 2^{o} κεφάλαιο αναλύονται οι θεμελιώδεις έννοιες του εφαπτόμενου και του συνεφαπτόμενου χώρου. Εισάγονται με λεπτομέρεια και αυστηρότητα οι έννοιες του διανυσματικού πεδίου, της διαφορικής 1-μορφής, της διαφορικής 2-μορφής και της γενικότερης k-μορφής. Μεγάλη έμφαση δίνεται επίσης στον αυστηρό ορισμό του διαφορικού μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Το 3^{o} κεφάλαιο περιέχει τη θεωρία ολοκλήρωσης των διαφορικών 1- και 2-μορφών για το επικαμπύλιο και το επιφανειακό ολοκλήρωμα, αντίστοιχα. Γίνεται λεπτομερής ανάπτυξη της θεωρίας των καμπύλων στον $\mathbb{R}^n$ και των επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$. Ακολουθεί εκτενής συζήτηση για το πρόβλημα του προσανατολισμού στο πλαίσιο των θεωρημάτων Green, Gauss και Stokes, που αποτελούν όλα ειδικές περιπτώσεις του τύπου του Stokes για πολλαπλότητες.

Λέξεις – Κλειδιά

Διαφορικές Μορφές, Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα, Επιφανειακό Ολοκλήρωμα

ABSTRACT

The present work is the thesis of the author for the completion of the master's degree in Mathematics from the Hellenic Open University. The aims of this thesis are:

1) The development of the theory of differential forms in $\mathbb{R}^n$.
2) The rigorous definition of the line and surface integrals.

The thesis consists of three chapters. The 1st chapter contains the basic notions from Linear Algebra and the Multivariable Differential Calculus. The 2nd chapter develops the calculus of differential forms. The 3rd chapter concerns the integration of differential forms and the basic integral theorems of the vector analysis (Green, Gauss, Stokes).

More precisely, in the 1st chapter we analyze in detail the elementary notions, and the more advanced as well, needed in the sequel. Extra attention is paid in the dual space and the space of (antisymmetric) bilinear forms. We also consider the more general multilinear forms. In addition, we remind the notions of the derivative and the differential of a scalar function in the classical context.

In the 2nd chapter we analyze the fundamental notions of the tangent and the cotangent space. We define in a rigorous way the vector field, the differential 1-form, the differential 2-form (and the more general k-form) and the differential.

The 3rd chapter contains the theory of integration for differential 1- and 2-forms for line and surface integrals, respectively. The relevant theory of curves in $\mathbb{R}^n$ and the surfaces in $\mathbb{R}^3$ is developed in detail. We discuss thoroughly the problem of orientation in the context of the Green, Gauss and Stokes Theorems. All these three theorems are special cases of the Stokes formula for manifolds.

Keywords

Differential Forms, Line Integral, Surface Integral

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Επισκόπηση γνωστών όρων και συμβολισμός

Οι παρακάτω έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας θα θεωρούνται γνωστές στο εξής και θα αναφέρονται χωρίς περαιτέρω εξήγηση:

- Ο πραγματικός γραμμικός (διανυσματικός) χώρος.
- Ο υπόχωρος ενός γραμμικού χώρου.
- Ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων.
- Η γραμμική ανεξαρτησία.
- Η γραμμική συνάρτηση και η γραμμική μορφή.
- Οι ισόμορφοι γραμμικοί χώροι.

Έστω, λοιπόν, V ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος. Τα στοιχεία του V, τα διανύσματα, συμβολίζονται με λατινικούς χαρακτήρες, $u, v, w, \ldots$, ενώ τα στοιχεία του $\mathbb{R}$, τα βαθμωτά, συμβολίζονται με ελληνικούς χαρακτήρες, $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Για ένα μη κενό σύνολο διανυσμάτων $A \subseteq V$, το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών από διανύσματα του A συμβολίζεται με $\langle A \rangle$ ή $\mathrm{span}(A)$ και αποτελεί υπόχωρο του V.

Στην ειδική περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^n$, τα διανύσματα θα συμβολίζονται με bold χαρακτήρες, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots$. Ως γνωστόν, ο $\mathbb{R}^n$ αποτελείται από τις διατεταγμένες n-άδες πραγματικών αριθμών και ένα σημείο του συνόλου γίνονται αντιληπτά με δύο τρόπους:

- ως ένα διάνυσμα – στήλη $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$,
- ως ένα σημείο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που εκφράζεται με διάνυσμα – γραμμή.

Με την εισαγωγή ενός συστήματος συντεταγμένων με αρχή το σημείο O, οι δύο αυτές οπτικές συνδέονται ορίζοντας το διάνυσμα θέσης του σημείου U ως $\overrightarrow{OU} = \boldsymbol{u}$. Στην τελευταία ισότητα το αριστερό διάνυσμα ερμηνεύεται ως «εφαρμοστό» με αρχή το O και το δεξιό ως «ελεύθερο». Γενικότερα, με δεδομένα δύο σημεία $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$, το εφαρμοστό διάνυσμα με αρχή το P και πέρας το Q ορίζεται ως

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \dots, q_n - p_n)^T$$

όπου $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ είναι τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ και το μέτρο του $\boldsymbol{u}$ με $\|\boldsymbol{u}\|$. Κατά τα γνωστά, είναι

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Σημειώνουμε ότι η έκφραση $\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$ γίνεται αντιληπτή ως γινόμενο πινάκων

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

που δίνει ως αποτέλεσμα 1×1 πίνακα, δηλαδή αριθμό.

Επίσης, θα θεωρούνται γνωστά και βασικά στοιχεία του Διαφορικού Λογισμού των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $k \in \mathbb{N}$, θα συμβολίζουμε με $C^k(\Omega)$ τον γραμμικό χώρο των (βαθμωτών) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και k τάξης. Η περίπτωση $k = 0$ αντιστοιχεί στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων, $C(\Omega)$, ενώ είναι επιτρεπτή και η τιμή $k = \infty$ που σημαίνει ύπαρξη των παραγώγων όλων των τάξεων. Η κλίση (gradient) μιας συνάρτησης $f \in C^1(\Omega)$ συμβολίζεται με το ανάδελτα και ορίζεται ως το διάνυσμα – γραμμή

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Γενικότερα, θεωρούμε διανυσματικές συναρτήσεις $\boldsymbol{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ με $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ (διάνυσμα – γραμμή), όπου $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις. Με $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$

συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο των συναρτήσεων $\boldsymbol{F}$ για τις οποίες $f_j \in C^k(\Omega)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{F} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ορίζεται ως

$$J_{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ο $J_{\boldsymbol{F}}$ είναι $m \times n$ πίνακας και έχει ως γραμμές του τις κλίσεις των συνιστωσών συναρτήσεων της $\boldsymbol{F}$.

Στην περίπτωση όπου $m = n$, έχουμε αυτό που ονομάζουμε «διανυσματικό πεδίο», όπου για κάθε $\boldsymbol{p} \in \Omega$ το διάνυσμα $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$ λαμβάνεται ως εφαρμοστό στο σημείο με διανυσματική ακτίνα $\boldsymbol{p}$. Η κλίση που αναφέρθηκε προηγουμένως είναι παράδειγμα διανυσματικού πεδίου. Ακόμη, στην περίπτωση αυτή ο Ιακωβιανός πίνακας είναι τετραγωνικός. Στην περίπτωση αυτή, η απόκλιση (divergence) του $\boldsymbol{F}$ ορίζεται ως η βαθμωτή συνάρτηση

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Ειδικότερα, όταν $n = 3$, ο στροβιλισμός του $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)$ ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

1.2 Βάση και διάσταση

Στην παράγραφο αυτή συγκεντρώνουμε ορισμούς και αποτελέσματα που αφορούν τις θεμελιώδεις έννοιες της βάσης και της διάστασης ενός γραμμικού χώρου. Για την ακρίβεια, ο στόχος μας εδώ είναι η υπενθύμιση και η περαιτέρω διερεύνηση δύο εξαιρετικά σημαντικών θεωρημάτων, τα οποία παρατίθενται χωρίς απόδειξη. Έστω, λοιπόν, V ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος και $B \subseteq V$ ένα μη κενό σύνολο διανυσμάτων.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Το B ονομάζεται γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο αν οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος διανύσματων $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Το B ονομάζεται βάση του V αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και $\langle B \rangle = V$.

$*$ Το B είναι βάση του V αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός από διανύσματα του B. Δηλαδή, για οποιοδήποτε $u \in V$, υπάρχουν διανύσματα $e_1, e_2, \dots, e_n \in B$ και βαθμωτά $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ώστε

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \quad (1)$$

3. ΘΕΩΡΗΜΑ Όλες οι βάσεις του V είναι ισοπληθικές (έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων). Δηλαδή, αν B_1, B_2 είναι δύο βάσεις του V, τότε υπάρχει $1-1$ και επί συνάρτηση $\varphi : B_1 \to B_2$.

4. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε διάσταση του V και συμβολίζουμε με $\dim V$ τον πληθικό αριθμό (πλήθος στοιχείων) μίας βάσης (άρα και όλων των βάσεων) του V.

$*$ Στα πλαίσια του παραπάνω ορισμού, υπάρχουν δύο περιπτώσεις ενδιαφέροντος. Αν μία βάση του V (άρα και όλες) είναι πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία, τότε $\dim V = n$ και ο V είναι πεπερασμένης διάστασης. Η αναπαράσταση (1) ισχύει καθολικά, με σταθερά τα e_i και το n. Αν κάποιο b_i «λείπει» από την αναπαράσταση, αυτό σημαίνει ότι ο αντίστοιχος συντελεστής, λ_i, μηδενίζεται. Από την άλλη, αν μια βάση του V (άρα και όλες) είναι άπειρη, τότε δε μας απασχολεί το είδος του απείρου (αριθμήσιμο, υπεραριθμήσιμο κλπ), γράφουμε $\dim V = \infty$ και ο V είναι άπειρης διάστασης. Τα e_i και το n στην αναπαράσταση (1) δεν είναι σταθερά αλλά εξαρτώνται κάθε φορά από το u.

Στη βιβλιογραφία, οι γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Γραμμικής Άλγεβρας, ενώ οι απειροδιάστατοι χώροι μελετώνται στα πλαίσια της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Στη συνέχεια, ασχολούμαστε αποκλειστικά με χώρους πεπερασμένης διάστασης, χωρίς ιδιαίτερη αναφορά σε αυτό. Το γεγονός ότι $\dim V = n$ έχει πλήθος ερμηνειών και συνεπειών, μερικών από τις οποίες αναφέρουμε παρακάτω:

- Ο αριθμός n μας δείχνει το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που μπορεί κάποιος να βρει μέσα στο V. Έπεται ότι $n+1$ διανύσματα του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- Η αναπαράσταση (1) δείχνει ότι ένα διάνυσμα καθορίζεται από n παραμέτρους, έχει δηλαδή n βαθμούς ελευθερίας.
- Η απεικόνιση

$$V \ni u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Έπεται ότι, από αλγεβρικής άποψης, ο V ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}^n$.

Το τελευταίο μας λέει ότι κάθε γραμμικός χώρος διάστασης n ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}^n$ και αυτό που ενδεχομένως διαφοροποιεί έναν γενικό γραμμικό χώρο V από τον $\mathbb{R}^n$ είναι η φύση των στοιχείων του. Μάλιστα, το $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ ερμηνεύεται ως το διάνυσμα συντεταγμένων του $u \in V$ ως προς τη δεδομένη βάση. Η συνήθης βάση στον $\mathbb{R}^n$ είναι η $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, όπου $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα του με όλες τις συντεταγμένες μηδενικές εκτός από τη i-οστή που είναι μονάδα. Ύστερα από αυτά, ένα διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ αναπαρίσταται ως

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = f_1(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_1 + f_2(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_2 + \cdots + f_m(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_m \ , \qquad \boldsymbol{p} \in \Omega \qquad (2)$$

όπου για τις συνιστώσες συναρτήσεις ισχύει $f_j \in C^k(\Omega)$.

1.3 Αναπαράσταση γραμμικής συνάρτησης

Έστω V, W δύο $\mathbb{R}$-γραμμικοί χώροι με $\dim V = n$, $\dim W = m$, $L(V, W)$ ο χώρος των γραμμικών συναρτήσεων από τον V στον W και $T \in L(V, W)$. Είναι γνωστό ότι η T καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της πάνω σε μια διατεταγμένη βάση του V, εκφρασμένες ως γραμμικός συνδυασμός από στοιχεία μιας διατεταγμένης βάσης του W. Πράγματι, θεωρούμε βάσεις $e_1, e_2, \dots, e_n$ και $w_1, w_2, \dots, w_m$ βάσεις των V, W, αντίστοιχα. Έστω ότι

$$T(e_j) = \alpha_{1j} w_1 + \alpha_{2j} w_2 + \cdots + \alpha_{mj} w_m \ , \qquad j = 1,2, \dots, n$$

Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A που έχει ως στήλες τα διανύσματα $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im})^T$, δηλαδή $A = [\alpha_{ij}]$. Ο πίνακας A αναπαριστά τη γραμμική συνάρτηση L με την εξής έννοια: αν είναι

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V$$

και

$$v = T(u) = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_m w_m \in W$$

τότε ισχύει, λόγω της γραμμικότητας,

$$v = T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) \iff \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L(e_j) \iff \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$$

$$\iff \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} w_i \iff \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i\right) w_i$$

Βρίσκουμε, λοιπόν,

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\lambda_i \quad , \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Άρα αν $\boldsymbol{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, $\boldsymbol{v} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ είναι τα διανύσματα – στήλη των συντεταγμένων ορίσματος και εικόνας, αντίστοιχα, τότε αυτά συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}$$

Ακουλουθώντας αντίστροφη διαδικασία, βλέπουμε ότι ένας $m \times n$ πίνακας ορίζει μια γραμμική συνάρτηση $T \in L(V, W)$.

Η παραπάνω ισότητα δείχνει ότι στην περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, με τις συνήθεις βάσεις, η γραμμική συνάρτηση «είναι» ο πίνακας, υπό την έννοια ότι

$$L(\boldsymbol{t}) = A\boldsymbol{t} \quad , \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η παράγωγος μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, στο σημείο $\boldsymbol{p} \in \Omega$. Στα πλαίσια του κλασικού λογισμού πολλών μεταβλητών, αυτή ορίζεται ως η γραμμική συνάρτηση $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ που αναπαρίσταται από την τιμή του Ιακωβιανού πίνακα στο $\boldsymbol{p}$ και συμβολίζεται με $(d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}$. Είναι, δηλαδή,

$$(d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t}) = J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{t} \quad , \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$$

Η γραμμική συνάρτηση $(d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}$ ονομάζεται και διαφορικό της $\boldsymbol{F}$ στο $\boldsymbol{p}$.

Κλείνοντας, είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αυτό που κάναμε ουσιαστικά είναι να ορίσουμε μια 1 – 1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των γραμμικών συναρτήσεων του χώρου $L(V, W)$ και των $m \times n$ πινάκων του χώρου $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Προκύπτει, έτσι, ότι

$$\dim L(V, W) = mn$$

1.4 Δυϊκός χώρος

Έστω V ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος με $\dim V = n$. Ως γνωστόν, μια γραμμική συνάρτηση $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται γραμμική μορφή. Θεωρούμε μια βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$ του V και επειδή ισχύει $\dim \mathbb{R} = 1$, η μονάδα είναι προφανώς μία βάση του $\mathbb{R}$. Από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου έπεται ότι η ℓ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $\ell(e_i) = \alpha_i$ και αναπαρίσταται από το διάνυσμα – γραμμή $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Έτσι αν

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V,$$

δηλαδή αν $\boldsymbol{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ είναι το διάνυσμα – στήλη των συντεταγμένων του u, θα ισχύει

$$\begin{aligned}\ell(u) = \ell(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) &= \lambda_1 \ell(e_1) + \lambda_2 \ell(e_2) + \cdots + \lambda_n \ell(e_n) \\ &= \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n = \boldsymbol{au} = \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

$*$ Η έκφραση $\boldsymbol{au}$ ερμηνεύεται ως το γινόμενο ενός $1 \times n$ πίνακα – γραμμή επί έναν $n \times 1$ πίνακα – στήλη.

Δηλαδή η τιμή $\ell(u)$ προκύπτει ως το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{a}^T$ με το $\boldsymbol{u}$. Μάλιστα, και πάλι αν $V = \mathbb{R}^n$, τότε η γραμμική μορφή «είναι» το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\ell(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\alpha t} = \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{t}\ , \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$$

Το σύνολο των γραμμικών μορφών $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται δυϊκός χώρος του V και συμβολίζεται με V^*. Με τις κατά σημείο πράξεις ο V^* καθίσταται γραμμικός χώρος. Αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα που θα φανεί χρήσιμο στη συνέχεια.

1. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω V, W ισόμορφοι γραμμικοί χώροι. Τότε και οι αντίστοιχοι δυϊκοί χώροι, V^*, W^* είναι ισόμορφοι.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν ισομορφισμό (γραμμική, $1-1$ και επί συνάρτηση) $\varphi : V \to W$. Για $\ell \in V^*$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{\ell} : W \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $\tilde{\ell} = \ell \circ \varphi^{-1}$. Η $\tilde{\ell}$ είναι γραμμική ως σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων, άρα $\tilde{\ell} \in W^*$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi : V^* \ni \ell \longmapsto \tilde{\ell} \in W^*$$

και δείχνουμε ότι η ψ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

1) Η ψ είναι γραμμική: έστω $\ell_1, \ell_2 \in V^*$. Είναι τότε

$$\psi(\ell_1 + \ell_2) = (\ell_1 + \ell_2) \circ \varphi^{-1} = \ell_1 \circ \varphi^{-1} + \ell_2 \circ \varphi^{-1} = \psi(\ell_1) + \psi(\ell_2)$$

2) Η ψ είναι 1 – 1: έστω $\ell_1, \ell_2 \in V^*$ με $\psi(\ell_1) = \psi(\ell_2)$. Τότε

$$\ell_1 \circ \varphi^{-1} = \ell_2 \circ \varphi^{-1} \iff \ell_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \ell_2 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \iff \ell_1 = \ell_2$$

3) Η ψ είναι επί: έστω $m \in W^*$. Για την $\ell = m \circ \varphi \in V^*$ ισχύει

$$\psi(\ell) = \psi(m \circ \varphi) = \ell = m \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = m$$

Σε αντιστοιχία με κάθε βασικό διάνυσμα $e_i \in V$, $i = 1,2, \dots, n$, ορίζουμε την i-οστή προβολή $e_i^* \in V^*$ ως εξής: για

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V$$

θέτουμε

$$e_i^*(u) = \lambda_i$$

Ακριβέστερα, η i-οστή προβολή ορίζεται ως η γραμμική μορφή για την οποία

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Το σύμβολο δ_{ij} ονομάζεται δέλτα του Kronecker. Άρα η e_i^* αναπαρίσταται από το διάνυσμα – γραμμή $\boldsymbol{e}_i^T$ που έχει όλες τις συντεταγμένες μηδενικές εκτός από τη i-οστή που είναι μονάδα.

2. ΠΡΟΤΑΣΗ Οι προβολές $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ αποτελούν βάση του V^*. Συνεπώς,

$$\dim V^* = n = \dim V$$

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι τα $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε ο γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_n e_n^*$ να είναι η μηδενική γραμμική μορφή, οπότε

$$(\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \cdots + \lambda_n e_n^*)(e_j) = 0 \iff$$
$$\lambda_1 e_1^*(e_j) + \lambda_2 e_2^*(e_j) + \cdots + \lambda_n e_n^*(e_n) = 0 \iff \lambda_j = 0$$

Δείχνουμε ότι $[e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*] = V^*$, δηλαδή ότι οι προβολές παράγουν τον δυϊκό χώρο: έστω $\ell \in V^*$ τυχούσα γραμμική μορφή με $\ell(e_i) = \alpha_i$. Τότε για

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in V$$

είναι, όπως είδαμε,

$$\ell(u) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n$$

και ακόμη $e_i^*(u) = \lambda_i$, άρα

$$\ell(u) = \alpha_1 e_1^*(u) + \alpha_2 e_2^*(u) + \cdots + \alpha_n e_n^*(u) = (\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots + \alpha_n e_n^*)(u)$$

Επομένως $\ell = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots + \alpha_n e_n^*$.

∗ Η βάση $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ του V^* ονομάζεται δυϊκή της βάσης $e_1, e_2, \dots, e_n$ του V. Όπως είδαμε μόλις, το διάνυσμα – γραμμή που αναπαριστά την $\ell \in V^*$ είναι ακριβώς το διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη δυϊκή βάση.

∗ Όσον αφορά τον $\mathbb{R}^n$ και τη συνήθη βάση $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, έχουμε προφανώς ότι η $\boldsymbol{e}_i^*$ είναι η γραμμική μορφή που αναπαρίσταται από το διάνυσμα – γραμμή $\boldsymbol{e}_i^T$.

1.5 Διαφορικό πραγματικής συνάρτησης

Σε αντιστοιχία με την παράγραφο 1.3, θα εξετάσουμε την παράγωγο μιας πραγματικής συνάρτησης $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, στο σημείο $\boldsymbol{p} \in \Omega$. Αυτή ορίζεται ως η γραμμική μορφή $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ που αναπαρίσταται από την τιμή της κλίσης στο $\boldsymbol{p}$ και συμβολίζεται με $(df)_{\boldsymbol{p}}$. Είναι, δηλαδή,

$$(df)_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t}) = (\nabla f)(\boldsymbol{p})\boldsymbol{t} \ , \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$$

Στην ειδική περίπτωση της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

παίρνουμε το διαφορικό της μεταβλητής x_i στο $\boldsymbol{p}$, το οποίο και συμβολίζουμε με $(dx_i)_{\boldsymbol{p}}$. Ισχύει μάλιστα

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

όπου η μονάδα εμφανίζεται στην i-οστή συνιστώσα. Ώστε είναι

$$(\nabla f)(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e}_i^T$$

για οποιοδήποτε $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ και άρα $(dx_i)_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{e}_i^*$, δηλαδή το $(dx_i)_{\boldsymbol{p}}$ ταυτίζεται με την i-προβολή στον $\mathbb{R}^n$ ανεξαρτήτως του σημείου $\boldsymbol{p}$. Για τον λόγο αυτόν, συμβολίζουμε απλώς με dx_i, χωρίς ιδιαίτερη αναφορά στο $\boldsymbol{p}$. Ώστε δείξαμε ότι

2. ΠΟΡΙΣΜΑ Τα διαφορικά $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ αποτελούν βάση του δυϊκού χώρου $(\mathbb{R}^n)^*$, δυϊκή της συνήθους βάσης $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ του $\mathbb{R}^n$.

Για τη γενική συνάρτηση $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, λοιπόν, και με δεδομένο ότι το διαφορικό $(df)_{\boldsymbol{p}}$ αναπαρίσταται από την κλίση $(\nabla f)(\boldsymbol{p})$, θα έχουμε την αναπαράσταση

$$(df)_{\boldsymbol{p}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} dx_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} dx_2 + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} dx_n \quad (1)$$

Η παραπάνω αναπαράσταση είναι η αντίστοιχη της 1.2.(2).

1.6 Διγραμμικές μορφές

Έστω V ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος με $\dim V = n$ και $e_1, e_2, \dots, e_n$ μια βάση αυτού. Συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο (σύνολο διατεταγμένων ζευγών) $V \times V$ με V^2, το οποίο καθίσταται $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος με τις κατά συντεταγμένη πράξεις. Εύκολα βλέπουμε ότι τα ζεύγη $(e_i, 0)$, $(0, e_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, αποτελούν βάση του V^2 και άρα $\dim V^2 = 2n$.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $b : V^2 \to \mathbb{R}$. Η b είναι «πραγματική συνάρτηση δύο διανυσματικών μεταβλητών», έστω $u, v \in V$. Κρατώντας σταθερό το v και θεωρώντας ως μεταβλητή μόνο το u παίρνουμε συνάρτηση

$$V \ni u \longmapsto b(u, v) \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται με $b(\cdot, v)$. Ομοίως, κρατώντας σταθερό το u το v ως μεταβλητή, παίρνουμε τη συνάρτηση

$$V \ni v \longmapsto b(u, v) \in \mathbb{R}$$

την οποία συμβολίζουμε με $b(u,\cdot)$.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Η b ονομάζεται διγραμμική μορφή στον V αν οι μερικές συναρτήσεις $b(\cdot, v)$, $b(u,\cdot)$ είναι γραμμικές μορφές, δηλαδή στοιχεία του V^*. Η b ονομάζεται

α) συμμετρική αν $b(v, u) = b(u, v)$,

β) αντισυμμετρική αν $b(v, u) = -b(u, v)$, και

γ) εναλλάσσουσα (alternate) αν $b(u, u) = 0$.

Το σύνολο των διγραμμικών μορφών στον V συμβολίζεται με $L^2(V)$, το σύνολο των συμμετρικών διγραμμικών μορφών με $S^2(V)$ και το σύνολο των αντισυμετρικών διγραμμικών μορφών με $A^2(V)$.

∗ Το $L^2(V)$ με τις κατά σημείο πράξεις καθίσταται $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος. Τα $S^2(V)$, $A^2(V)$ αποτελούν υπόχωρους του $L^2(V)$.

∗ Μια διγραμμική μορφή $b \in L^2(V)$ ονομάζεται και τανυστής (tensor) δεύτερης τάξης ή 2-τανυστής. Υπό αυτήν την οπτική, ορίζουμε $L^0(V) = \mathbb{R}$ και κάθε βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$ ονομάζεται 0-τανυστής. Εν συνεχεία, ορίζουμε $L^1(V) = V^*$ και κάθε γραμμική μορφή $\ell \in V^*$ ονομάζεται 1-τανυστής.

Για $b \in L^2(V)$ θεωρούμε τις διγραμμικές μορφές $Sb, Ab \in L^2(V)$ που ορίζονται από τους τύπους

$$(Sb)(u, v) = b(u, v) + b(v, u)$$
$$(Ab)(u, v) = b(u, v) - b(v, u)$$

Η Sb είναι προφανώς συμμετρική διγραμμική μορφή και η Ab είναι αντισυμμετρική. Βλέπουμε αμέσως ότι ισχύουν τα εξής:

$$b \text{ συμμετρική} \iff Sb = 2b \text{ και } Ab = 0$$
$$b \text{ αντισυμμετρική} \iff Sb = 0 \text{ και } Ab = 2b$$

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Η απεικόνιση $S : L^2(V) \to L^2(V)$ ονομάζεται τελεστής συμμετροποίησης και η $A : L^2(V) \to L^2(V)$ τελεστής αντισυμμετροποίησης.

Ισχύει, μάλιστα, $L^2(V) = S^2(V) \oplus A^2(V)$, καθώς μια διγραμμική μορφή $b \in L^2((V)$ γράφεται

$$b = \frac{1}{2}Sb + \frac{1}{2}Ab$$

Κάθε $b \in L^2(V)$ αναπαρίσταται από έναν $n \times n$ πίνακα με τον εξής τρόπο: έστω

$$\alpha_{ij} = b\big(e_i, e_j\big)$$

και $A = \big[\alpha_{ij}\big]$. Έστω $u, v \in V$ με

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$
$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n$$

Είναι τότε, λόγω της γραμμικότητας,

$$b(u,v) = b\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j b\big(e_i, e_j\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \alpha_{ij} \qquad (1)$$

Θεωρώντας τα διανύσματα – στήλη των συντεταγμένων $\boldsymbol{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, $\boldsymbol{v} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$, βρίσκουμε ότι

$$b(u,v) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot A\boldsymbol{v}$$

Είναι προφανές ότι η b είναι συμμετρική (αντίστοιχα, αντισυμμετρική) αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός (αντίστοιχα, αντισυμμετρικός). Είναι επίσης προφανές ότι με την παραπάνω κατασκευή ορίζεται μια 1 – 1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των διγραμμικών μορφών μορφών του $L^2(V)$ και των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων του χώρου $M_n(\mathbb{R})$. Άρα

$$\dim L^2(V) = n^2$$

Στα πλαίσια της θεωρίας που εξετάζουμε μας ενδιαφέρουν περισσότερο οι αντισυμμετρικές διγραμμικές μορφές. Δείχνουμε αρχικά ότι οι έννοιες «αντισυμμετρική» και «εναλλάσσουσα» ταυτίζονται.

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $b \in L^2(V)$. Τότε $b \in A^2(V)$ αν και μόνο αν είναι εναλλάσσουσα.

Απόδειξη. Έστω ότι $b \in \Lambda^2(V)$. Τότε για κάθε $u \in V$ ισχύει

$$b(u,u) = -b(u,u) \iff 2b(u,u) = 0 \iff b(u,u) = 0$$

Έστω, αντίστροφα, ότι $b(u,u) = 0$. Για $u, v \in V$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} b(u+v,u+v) = 0 &\iff b(u,u) + b(u,v) + b(v,u) + b(v,v) = 0 \\ &\iff b(u,v) + b(v,u) = 0 \iff b(v,u) = -b(u,v) \end{aligned}$$

και άρα $b \in A^2(V)$.

Τα στοιχεία του $A^2(V)$ είναι σε αμφιμονότιμη αντιστοιχία με τους $n \times n$ αντισυμμετρικούς πίνακες. Ένας αντισυμμετρικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} &\alpha_{ji} = -\alpha_{ij} \ , \qquad i < j \\ &\alpha_{ii} = 0 \end{aligned}$$

Έπεται ότι ο A περιγράφεται πλήρως από το άνω τριγωνικό του κομμάτι, δηλαδή από τους αριθμούς α_{ij} για $i < j$. Οι αριθμοί αυτοί έχουν πλήθος

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Ισχύει, συνεπώς,

$$\dim A^2(V) = \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}$$

Όσον αφορά την αναπαράσταση (1) για μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή $b \in A^2(V)$, αυτή γίνεται

$$\begin{aligned} b(u,v) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_i\mu_j\alpha_{ji} + \sum_{j=i+1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_i\mu_j\alpha_{ji} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij} - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_i\mu_j\alpha_{ji} \end{aligned}$$

Στο πρώτο διπλό άθροισμα, αλλάζουμε τη σειρά άθροισης

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_i\mu_j\alpha_{ji}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ji}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\lambda_j\mu_i\alpha_{ij}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε

$$b(u,v)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\lambda_i\mu_j-\lambda_j\mu_i)\alpha_{ij} \qquad (2)$$

Κατ' αντιστοιχία με τον $L^2(V)$, έχουμε ότι $A^0(V)=\mathbb{R}$, $A^1(V)=V^*$. Τα στοιχεία του $A^k(V)$ ονομάζονται εξωτερικοί k-τανυστές.

1.7 Τανυστικό και εξωτερικό γινόμενο

Έστω V ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος με $\dim V=n$, $e_1,e_2,\dots,e_n$ μια βάση αυτού και $e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*$ η δυϊκή της βάση.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\ell_1,\ell_2\in V^*$ δύο γραμμικές μορφές. Ονομάζουμε τανυστικό γινόμενο (tensor product) των ℓ_1,ℓ_2 τη διγραμμική μορφή $\ell_1\otimes\ell_2\in L^2(V)$ που ορίζεται από τον τύπο

$$(\ell_1\otimes\ell_2)(u,v)=\ell_1(u)\ell_2(v)$$

$*$ Το τανυστικό γινόμενο είναι μια πράξη

$$\otimes : V^*\times V^*\to L^2(V)$$

Η πράξη αυτή *δεν* είναι γενικά αντιμεταθετική. Είναι όμως προσεταιριστική και επιμεριστική ως προς την πρόσθεση.

Έστω τώρα $u,v\in V$ με

$$u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n,$$
$$v=\mu_1e_1+\mu_2e_2+\dots+\mu_ne_n$$

Είναι τότε

$$\left(e_i^*\otimes e_j^*\right)(u,v)=e_i^*(u)e_j^*(v)=\lambda_i\mu_j$$

Κατόπιν τούτου, η αναπαράσταση 1.6.(1) μιας διγραμμικής μορφής $b\in L^2(V)$ γίνεται

$$b(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\left(e_i^*\otimes e_j^*\right)(u,v)$$

και άρα

$$b=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,e_i^*\otimes e_j^*$$

Ώστε αποδείξαμε

2. ΠΡΟΤΑΣΗ Οι διγραμμικές μορφές $e_i^*\otimes e_j^*$, $i,j=1,2,\dots,n$, αποτελούν βάση του χώρου των διγραμμικών μορφών, $L^2(V)$.

3. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\ell_1,\ell_2\in V^*$ δύο γραμμικές μορφές. Ονομάζουμε εξωτερικό γινόμενο (exterior product) ή σφήνα (wedge product) των ℓ_1,ℓ_2 την αντισυμμετρική διγραμμική μορφή $\ell_1\wedge\ell_2\in A^2(V)$ που ορίζεται από

$$\ell_1\wedge\ell_2=A(\ell_1\otimes\ell_2)$$

όπου A είναι ο τελεστής αντισυμμετροποίησης.

Από τον ορισμό προκύπτει αμέσως ο τύπος υπολογισμού: είναι

$$(\ell_1\wedge\ell_2)(u,v)=(\ell_1\otimes\ell_2)(u,v)-(\ell_1\otimes\ell_2)(v,u)$$

Άρα

4. ΠΡΟΤΑΣΗ Ισχύει ότι

$$(\ell_1\wedge\ell_2)(u,v)=\ell_1(u)\ell_2(v)-\ell_1(v)\ell_2(u)=\begin{vmatrix}\ell_1(u) & \ell_1(v)\\ \ell_2(u) & \ell_2(v)\end{vmatrix}$$

και, ισοδύναμα,

$$\ell_1\wedge\ell_2=\ell_1\otimes\ell_2-\ell_2\otimes\ell_1$$

Ισχύει, ακόμη, ο τύπος

$$(\ell_1\wedge\ell_2)(u,v)=\begin{vmatrix}\ell_1(u) & \ell_1(v)\\ \ell_2(u) & \ell_2(v)\end{vmatrix}$$

$*$ Ισχύει, προφανώς, $\ell\wedge\ell=0$.

$*$ Το εξωτερικό γινόμενο είναι μια πράξη

$$\wedge : V^* \times V^* \to A^2(V)$$

Η πράξη αυτή και πάλι δεν είναι αντιμεταθετική. Για την ακρίβεια, ισχύει

$$\ell_2 \wedge \ell_1 = -\ell_1 \wedge \ell_2$$

Πρόκειται όμως για προσεταιριστική και επιμεριστική ως προς την πρόσθεση.

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση 1.6.(2) για μια $b \in A^2(V)$,

$$b = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}(e_i^* \otimes e_j^* - e_j^* \otimes e_i^*) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} e_i^* \wedge e_j^*$$

Δείξαμε, έτσι, την ακόλουθη

5. ΠΡΟΤΑΣΗ Οι διγραμμικές μορφές $e_i^* \wedge e_j^*$, $i = 1,2, \dots, n-1$, $j > i$, αποτελούν βάση του υπόχωρου των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών, $A^2(V)$.

1.8 Πολυγραμμικές μορφές

Αν και η μελέτη μας βασίζεται περισσότερο στις γραμμικές και διγραμμικές μορφές, στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στις πολυγραμμικές μορφές, και για λόγους πληρότητας του κειμένου. Έστω, λοιπόν, V ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος με $\dim V = n$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ μια βάση αυτού, $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ η δυϊκή της και $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 3$. Έστω

$$V^k = V \times V \times \dots \times V$$

το καρτεσιανό γινόμενο k αντιγράφων του V. O V^k καθίσταται $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος με τις κατά συντεταγμένη πράξεις. Οι διατεταγμένες n-άδες $(e_i, 0, \dots, 0)$, $(0, e_i, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, e_i)$, $i = 1,2, \dots, n$, αποτελούν βάση του V^k και άρα $\dim V^k = kn$.

Έστω τώρα μια συνάρτηση $m : V^k \to \mathbb{R}$. Η m είναι «πραγματική συνάρτηση k διανυσματικών μεταβλητών», έστω των $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$. Η i-οστή μερική συνάρτηση προκύπτει θεωρώντας σταθερές τις $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k \in V$ και ως μεταβλητή μόνο την u_i

$$V \ni u \longmapsto m(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n) \in \mathbb{R}$$

Η i-οστή μερική συνάρτηση συμβολίζεται με $m(u_1, \dots, u_{i-1}, \cdot, u_{i+1}, \dots, u_n)$.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Η m ονομάζεται k-γραμμική μορφή (ή k-τανυστής) στον V αν όλες οι μερικές συναρτήσεις $m(u_1, \dots, u_{i-1}, \cdot, u_{i+1}, \dots, u_n)$ είναι γραμμικές μορφές. Το σύνολο των k-γραμμικών μορφών θα συμβολίζεται με $L^k(V)$.

$*$ Με τις κατά σημείο πράξεις ο $L^k(V)$ καθίσταται $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος.

Η έννοια του τανυστικού γινομένου γενικεύεται ως εξής: αν $m_1 \in L^{k_1}(V)$, $m_2 \in L^{k_2}(V)$, τότε το $m_1 \otimes m_2$ ορίζεται ως το στοιχείο του $L^{k_1+k_2}(V)$ μέσω της σχέσης

$$(m_1 \otimes m_2)\left(u_1, \dots, u_{k_1}, u_{k_1+1}, \dots, u_{k_1+k_2}\right) = m_1\left(u_1, \dots, u_{k_1}\right) m_2\left(u_{k_1+1}, \dots, u_{k_1+k_2}\right)$$

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε πολυδείκτη μήκους k μια διατεταγμένη k-άδα $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, όπου $i_\nu \in \{1,2, \dots, n\}$. Ο πολυδείκτης ονομάζεται αύξων αν $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Το σύνολο των πολυδεικτών μήκους k θα συμβολίζεται με Π_k και το σύνολο των αυξόντων πολυδεικτών με $A\Pi_k$.

Για κάθε $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \Pi_k$ ορίζουμε την $e_I^* \in L^k(V)$ με την ισότητα

$$e_I^* = e_{i_1}^* \otimes e_{i_2}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*$$

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Οι k-γραμμικές μορφές e_I^*, $I \in \Pi_k$, συνιστούν μια βάση του $L^k(V)$. Έπεται ότι:

α) Κάθε $m \in L^k(V)$ αναπαρίσταται ως

$$m = \sum_{I \in \Pi_k} \alpha_I e_I^*$$

για κατάλληλα $\alpha_I \in \mathbb{R}$.

β) $\dim L^k(V) = n^k$.

Στη συνέχεια, θα θέλαμε να επεκτείνουμε την έννοια της εναλλάσσουσας μορφής. Στη βιβλιογραφία, βλέπε π.χ. (Tu, 2010) ή (Guillemin & Haine, 2019), αυτό γίνεται στην πιο γενική μορφή με χρήση των μεταθέσεων του συνόλου $\{1,2, \dots, n\}$. Με πιο απλά λόγια, π.χ. (DoCarmo, 2010), η $m \in L^k(V)$ ονομάζεται εναλλάσσουσα (ή εξωτερικός k-τανυστής) αν αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αλλάζουν θέση δύο μεταβλητές, δηλαδή

$$m\left(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n\right) = -m\left(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n\right) \quad (1)$$

Το σύνολο των εναλλασσουσών k-γραμμικών μορφών συμβολίζεται με $A^k(V)$ και αποτελεί υπόχωρο του $L^k(V)$. Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι άμεση συνέπεια της (1).

4. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $m \in A^k(V)$. Τότε

α) Αν $u_i = u_j$ για κάποιους δείκτες $1 \leq i < j \leq n$, τότε $m\big(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n\big) = 0$.

β) Αν κάποιο διάνυσμα u_i είναι γραμμικός συνδυασμός ων υπολοίπων διανυσμάτων, τότε $m(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = 0$.

γ) Αν $k > n$, τότε η m είναι ταυτοτικά μηδέν.

$*$ Άρα μια k-γραμμική μορφή έχει νόημα μόνο όταν $k \leq n = \dim V$.

Η γενίκευση της έννοιας του εξωτερικού γινομένου (Eliashberg, 2018) γίνεται επεκτείνοντας τον τελεστή αντισυμμετροποίησης που ορίζεται ως η απεικόνιση

$$A : L^k(V) \to A^k(V)$$

με τον εξής τρόπο: Στην $m \in L^k(V)$ αντιστοιχίζει την $Am \in A^k(V)$ όπου

$$(Am)(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} (-1)^{\mathrm{inv}(i_1, i_2, \dots, i_k)} m\big(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\big)$$

Το άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις του συνόλου των δεικτών $\{1,2, \dots, k\}$. Με $\mathrm{inv}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ συμβολίζουμε το πλήθος των αντιστροφών στη μετάθεση. Μια αντιστροφή προκύπτει για δύο δείκτες i_μ, i_ν όπου $\mu < \nu$ και $i_\mu > i_\nu$.

$*$ Αν $m \in A^k(V)$, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι $Am = k!\, m$. Ο λόγος είναι ότι η m είναι «ήδη» εναλλάσσουσα και ακόμη το $k!$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\{1,2, \dots, k\}$.

Αν $m_1 \in L^{k_1}(V)$, $m_2 \in L^{k_2}(V)$, τότε το εξωτερικό γινόμενο $m_1 \wedge m_2$ ορίζεται ως το στοιχείο του $L^{k_1+k_2}(V)$ μέσω της σχέσης

$$m_1 \wedge m_2 = \frac{1}{k_1!\, k_2!} A(m_1 \otimes m_2)$$

Για το εξωτερικό γινόμενο ισχύει ιδιότητα

$$m_2 \wedge m_1 = (-1)^{k_1 k_2} m_1 \wedge m_2$$

Ακόμη, διατηρεί την προσεταιριστικότητα και την επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση. Δεν ισχύει γενικά όμως ότι $m \wedge m = 0$. Τα παραπάνω γενικεύουν την Πρόταση 1.7.4: αν $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k \in V^*$, τότε ορίζουμε την $\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \dots \wedge\ \ell_k \in A^k(V)$ από τον τύπο

$$(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \dots \wedge \ell_k)(u_1, u_2, \dots, u_k) = \det\left[\ell_i(u_j)\right]_{i,j=1,2,\dots,k}$$

Σε αντιστοιχία με την κατασκευή για τον $L^k(V)$, για κάθε $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in A\Pi_k$ ορίζουμε την $e_I^* \in A^k(V)$ με την ισότητα

$$e_I^* = e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*$$

4. ΠΡΟΤΑΣΗ Οι k-γραμμικές μορφές e_I^*, $I \in A\Pi_k$, συνιστούν μια βάση του $A^k(V)$. Έπεται ότι:

α) Κάθε $m \in A^k(V)$ αναπαρίσταται ως

$$m = \sum_{I \in A\Pi_k} \alpha_I e_I^*$$

για κατάλληλα $\alpha_I \in \mathbb{R}$.

β) $\dim A^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

2.1 Εφαπτόμενος χώρος

Έστω P ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$ με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{p}$.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ (DoCarmo, 2010) Το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων με αρχή το P ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του $\mathbb{R}^n$ στο $\boldsymbol{p}$ και συμβολίζεται με $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} : \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n\}$$

Είναι προφανές ότι με τις ακόλουθες πράξεις, ο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ καθίσταται γραμμικός χώρος

$$(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2) - \boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = \lambda\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$$

Είναι επίσης σαφές ότι η αντιστοιχία $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ ορίζει έναν ισομορφισμό γραμμικών χώρων. Ο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ είναι ουσιαστικά ο $\mathbb{R}^n$ «μετατοπισμένος» κατά τρόπον ώστε η αρχή του συστήματος συντεταγμένων να ταυτίζεται με το P. Ο «συνήθης» $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, είναι ο $T_{\boldsymbol{0}}\mathbb{R}^n$. Υπό το πρίσμα του ισομορφισμού, οι χώροι $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ ταυτίζονται από αλγεβρικής άποψης. Η διαφορά του είναι ότι ο πρώτος χώρος περιέχει εφαρμοστά διανύσματα ενώ ο δεύτερος ελεύθερα.

Ο παραπάνω ορισμός του εφαπτόμενου χώρου ως σύνολο εφαρμοστών διανυσμάτων είναι διαισθητικά ορθός αλλά είναι δύσχρηστος από μαθηματικής άποψης. Στη συνέχεια, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό που μας παρέχει μεγαλύτερες δυνατότητες στην αφηρημένη μαθηματική ανάλυση.

2. ΟΡΙΣΜΟΣ (Guillemin & Haine, 2019) Ονομάζουμε εφαπτόμενο χώρο του $\mathbb{R}^n$ στο $\boldsymbol{p}$ το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ με $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

∗ Στο διατεταγμένο ζεύγος $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ η πρώτη «συνιστώσα» είναι σταθερή, το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{p}$, ενώ η δεύτερη «συνιστώσα» είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, $\boldsymbol{u}$, στον $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα, το ζεύγος $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ έχει ακριβώς την έννοια του εφαρμοστού διανύσματος που έχει ως αρχή το σημείο $\boldsymbol{p}$ και πέρας το σημείο $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$. Δηλαδή, βάσει του Ορισμού 1, πρόκειται για το διάνυσμα $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$, όπου είναι $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$.

∗ Για λόγους ευκολίας στον συμβολισμό, στο εξής θα παριστάνουμε το ζεύγος $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ με $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}}$, οπότε $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}} : \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\}$. Στη βιβλιογραφία, π.χ. (Tu, 2010), το $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}}$ συναντάται ως διάνυσμα εφαπτόμενο στο $\boldsymbol{p}$, απ' όπου προκύπτει και η ορολογία «εφαπτόμενος χώρος».

Οι πράξεις στον γραμμικό χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ ορίζονται ως

$$(\boldsymbol{u}_1)_{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{u}_2)_{\boldsymbol{p}} = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)_{\boldsymbol{p}}$$
$$\lambda(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{p}} = (\lambda\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{p}}$$

Οι χώροι $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ καθίστανται ισόμορφοι μέσω της αντιστοιχίας $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}} \longmapsto \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. Όπως τονίστηκε και παραπάνω, τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{u}$ δε διαφέρουν σε τίποτα άλλο παρά στο ότι το πρώτο θεωρείται εφαρμοστό και το δεύτερο ελεύθερο. Κατά συνέπεια, ότι ισχύει στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει με ελαφρές τροποποιήσεις και στον $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ και η όποια γενίκευση θα γίνεται χωρίς ιδιαίτερη αναφορά. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα, αναφέρουμε το ακόλουθο:

∗ Τα εφαπτόμενα διανύσματα $(\boldsymbol{e}_1)_{\boldsymbol{p}}, (\boldsymbol{e}_2)_{\boldsymbol{p}}, \dots, (\boldsymbol{e}_n)_{\boldsymbol{p}}$ αποτελούν βάση του $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$. Ακριβέστερα,

$$\dim T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n = n$$

Επίσης, είναι προφανές ότι αν $\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}} = \lambda_1(\boldsymbol{e}_1)_{\boldsymbol{p}} + \lambda_2(\boldsymbol{e}_2)_{\boldsymbol{p}} + \cdots + \lambda_n(\boldsymbol{e}_n)_{\boldsymbol{p}} \quad (1)$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τα εφαρμοστά διανύσματα υπό το πρίσμα της παραγώγισης. Έστω, λοιπόν, $f \in C^1(\Omega)$, $\boldsymbol{p} \in \Omega$ και $\boldsymbol{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο $\boldsymbol{p}$ στη διεύθυνση του $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}}$ ορίζεται ως

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}} f)(\boldsymbol{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$$

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Η κατά κατεύθυνση παράγωγος υπολογίζεται από τον τύπο

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}} f)(\boldsymbol{p}) = (\nabla f)(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u}$$

Η $\boldsymbol{\gamma}$ έχει ως εικόνα την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{p}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\boldsymbol{u}$. Επειδή το Ω είναι ανοικτό έχουμε ότι $\boldsymbol{\gamma}(t) \subseteq \Omega$ για t σε κατάλληλα μικρό διάστημα που περιέχει το 0, επομένως ορίζεται καλώς η σύνθεση

$$g(t) = f\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$g'(t) = (\nabla f)\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\boldsymbol{\gamma}'(t) = (\nabla f)\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\boldsymbol{u}$$

Είναι τότε

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}} f)(\boldsymbol{p}) = g'(0) = (\nabla f)\big(\boldsymbol{\gamma}(0)\big)\boldsymbol{u} = (\nabla f)(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}$$

$*$ Όταν $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, τότε η κατά κατεύθυνση παράγωγος προς τη διεύθυνση του $(\boldsymbol{e}_i)_{\boldsymbol{p}}$ είναι η μερική παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x_i υπολογισμένη στο σημείο $\boldsymbol{p}$, δηλαδή

$$\big(\nabla_{\boldsymbol{e}_i} f\big)(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}$$

Για λόγους που θα γίνουν φανεροί αργότερα, ταυτίζουμε το εφαρμοστό διάνυσμα $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}}$ με τον τελεστή της κατά κατεύθυνση παραγώγου

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}}\, \cdot)(\boldsymbol{p}) \;:\; C^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Πιο συγκεκριμένα, το διάνυσμα βάσης $(\boldsymbol{e}_i)_{\boldsymbol{p}}$ ταυτίζεται με τον τελεστή της μερικής παραγώγισης στο $\boldsymbol{p}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}$$

Ύστερα από αυτά, οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}, \frac{\partial}{\partial x_2}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}$$

αποτελούν βάση του χώρου $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$.

2.2 Διανυσματικά πεδία

Ύστερα από αυτά, μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε την έννοια του διανυσματικού πεδίου με την απαιτούμενη αυστηρότητα. Έστω, λοιπόν, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Στην παράγραφο 1.1 είπαμε ουσιαστικά ότι μια διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ορίζει διανυσματικό πεδίο όταν θεωρήσουμε ότι $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n, \boldsymbol{p} \in \Omega$. Ο ακόλουθος ορισμός εκφράζει αυτή την ιδέα με συστηματικό τρόπο.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε διανυσματικό πεδίο στο Ω μια συνάρτηση

$$\boldsymbol{V} : \Omega \to \bigcup_{\boldsymbol{p}\in\Omega} T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$$

για την οποία ισχύει ότι $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n, \boldsymbol{p} \in \Omega$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι για $\boldsymbol{p} \in \Omega$ η τιμή $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p})$ αναπαρίσταται ως

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = f_1(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}_1)_{\boldsymbol{p}} + f_2(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}_2)_{\boldsymbol{p}} + \cdots + f_n(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}_n)_{\boldsymbol{p}} \quad (1)$$

Ορίζονται έτσι οι συνιστώσες συναρτήσεις $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ και η διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{F_V} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $\boldsymbol{F_V} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$. Παρατηρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο, $\boldsymbol{V}$, και η αντίστοιχη διανυσματική συνάρτηση, $\boldsymbol{F_V}$, συνδέονται μέσω της ισότητας

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{p}) = \big(\boldsymbol{F_V}(\boldsymbol{p})\big)_{\boldsymbol{p}}$$

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Το $\boldsymbol{V}$ ονομάζεται C^k διανυσματικό πεδίο αν $\boldsymbol{F_V} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Ένα C^0 διανυσματικό πεδίο ονομάζεται συνεχές, ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο ονομάζεται ομαλό. Ακόμη, θα λέμε ότι ένα C^k διανυσματικό πεδίο είναι αρκετά ομαλό αν το k είναι τέτοιο ώστε να ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες της υπό μελέτη περίπτωσης.

∗ Ένα διανυσματικό πεδίο ονομάζεται $\boldsymbol{V}$ και 0-μορφή στο Ω. Αν είναι και αρκετά ομαλό, τότε ονομάζεται διαφορική 0-μορφή.

3. ΟΡΙΣΜΟΣ Το $\boldsymbol{V}$ ονομάζεται πεδίο κλίσεων αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $v \in C^1(\Omega)$ ώστε να ισχύει $\boldsymbol{F_V} = \nabla v$. Η v ονομάζεται συνάρτηση δυναμικού.

∗ Όταν το $\boldsymbol{V}$ είναι πεδίο κλίσεων, για τις συνιστώσες συναρτήσεις ισχύει

$$f_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Η έννοια του πεδίου κλίσεων είναι εξαιρετικά σημαντική και θα τη μελετήσουμε σε βάθος αργότερα.

Αν ταυτίσουμε τα εφαρμοστά διανύσματα με την παράγωγο κατά κατεύθυνση, όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τότε η αναπαράσταση (1) γράφεται ως τελεστής

$$(\boldsymbol{V}\,\cdot)(\boldsymbol{p}) = f_1(\boldsymbol{p})\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{x=\boldsymbol{p}} + f_2(\boldsymbol{p})\frac{\partial}{\partial x_2}\bigg|_{x=\boldsymbol{p}} + \cdots + f_n(\boldsymbol{p})\frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_{x=\boldsymbol{p}} = (\nabla\,\cdot)(\boldsymbol{p})\boldsymbol{F_V}(\boldsymbol{p}) \qquad (2)$$

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση $g \in C^1(\Omega)$ πάρει τη θέση της δίεσης #, παίρνουμε τη (συνεχή) συνάρτηση $Vg : \Omega \to \mathbb{R}$.

4. ΠΡΟΤΑΣΗ Ο τελεστής $\boldsymbol{V}$ που δίνεται από την έκφραση (2) ικανοποιεί τον διαφορικό κανόνα του γινομένου: αν $g, h \in C^1(\Omega)$, τότε

$$\boldsymbol{V}(gh) = (\boldsymbol{V}g)h + g(\boldsymbol{V}h)$$

Απόδειξη. Προκύπτει αμέσως από την ταυτότητα $\nabla(gh) = (\nabla g)h + g(\nabla h)$.

2.3 Συνεφαπτόμενος χώρος και αντισυμμετρικές k-μορφές

Έστω P ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$ με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{p}$.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ο δυϊκός χώρος του $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ ονομάζεται συνεφαπτόμενος χώρος του $\mathbb{R}^n$ στο $\boldsymbol{p}$ και συμβολίζεται με $T_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$T_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n = \left(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n\right)^*$$

Όπως και στην περίπτωση του εφαπτόμενου χώρου, ο $T_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$ διαφέρει από τον $(\mathbb{R}^n)^*$ μόνο ως προς τον τρόπο ερμηνείας. Μάλιστα, αφού οι χώροι $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ είναι ισόμορφοι, το ίδιο θα ισχύει και για τους δυϊκούς χώρους $T_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n)^*$, σύμφωνα με την πρόταση 1.4.1. Από την απόδειξη της πρότασης αυτής, αφού ο ισομορφισμός των γραμμικών χώρων καθίσταται μέσω της αντιστοιχίας $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{u} \leftrightarrow \boldsymbol{u_p} \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$, η αντιστοιχία στις γραμμικές μορφές $(\mathbb{R}^n)^* \ni \ell \leftrightarrow \tilde{\ell} \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ προκύπτει μέσω της ισότητας

$$\ell(\boldsymbol{u}) = \tilde{\ell}(\boldsymbol{u_p})$$

Ακριβέστερα, λόγω της 2.2.(1), οι $\ell, \tilde{\ell}$ αναπαρίστανται από το ίδιο διάνυσμα – γραμμή.

Ύστερα από τα παραπάνω, η παράγραφος 1.5 μπορεί να μεταφερθεί στον χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$. Πιο συγκεκριμένα, έστω μια βαθμωτή συνάρτηση $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, και $\boldsymbol{p} \in \Omega$. Το διαφορικό της f στο $\boldsymbol{p}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η γραμμική συνάρτηση του $T^*_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ που αναπαρίσταται από την κλίση $(\nabla f)(\boldsymbol{p})$,

$$(df)_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t_p}) = (\nabla f)(\boldsymbol{p})\boldsymbol{t} \ , \qquad \boldsymbol{t_p} \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$$

Το διαφορικό της $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ ονομάζεται διαφορικό της μεταβλητής x_i, αναπαρίσταται από το $\boldsymbol{e}_i^T$ και

$$(dx_i)_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t_p}) = t_i \ , \qquad \boldsymbol{t_p} \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$$

Και πάλι, το $\boldsymbol{p}$ δεν εμπλέκεται άμεσα στον ορισμό του $(dx_i)_{\boldsymbol{p}}$, το κρατάμε όμως ως δείκτη για να τονίσουμε ότι είναι στοιχείο του $T^*_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$.

∗ Αντίστοιχα, το διαφορικό μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ γίνεται τώρα αντιληπτό ως μία γραμμική απεικόνιση $(d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}} : T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n \to T_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})}\mathbb{R}^m$, η οποία αναπαρίσταται από τον Ιακωβιανό πίνακα

$$(d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t_p}) = (J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{t})_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})} \ , \qquad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$$

Ταυτίζοντας τα διανύσματα βάσης με τις μερικές παραγώγους, θα έχουμε

$$(df)_{\boldsymbol{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}\right) = (df)_{\boldsymbol{p}}\big((\boldsymbol{e}_j)_{\boldsymbol{p}}\big) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}$$

Ειδικότερα

$$(dx_i)_{\boldsymbol{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}\right) = \left.\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} = \delta_{ij}$$

έχουμε ότι

$$(dx_i)_{\boldsymbol{p}} = \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} \right)^*$$

και άρα

2. ΠΟΡΙΣΜΑ Τα διαφορικά $(dx_1)_{\boldsymbol{p}}, (dx_2)_{\boldsymbol{p}}, \dots, (dx_n)_{\boldsymbol{p}}$ αποτελούν βάση του συνεφαπτόμενου χώρου $T_{\boldsymbol{p}}^*\mathbb{R}^n$, δυϊκή της βάσης

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}$$

του $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τον χώρο $A^2(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n)$ των αντισυμμετρικών διγραμμικών μορφών στον εφαπτόμενο χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$. Από τον παραπάνω πόρισμα και την Πρόταση 1.7.5, έχουμε

3. ΠΟΡΙΣΜΑ Τα εξωτερικά γινόμενα $(dx_i)_{\boldsymbol{p}} \wedge (dx_j)_{\boldsymbol{p}}$, $i = 1,2, \dots, n-1$, $j > i$, αποτελούν βάση του $A^2(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n)$.

∗ Για ευκολία στον συμβολισμό, θα συμβολίζουμε στο εξής το εξωτερικό γινόμενο $(dx_i)_{\boldsymbol{p}} \wedge (dx_j)_{\boldsymbol{p}}$ με $(dx_i \wedge dx_j)_{\boldsymbol{p}}$.

Γενικεύοντας για οποιοδήποτε $k = 3,4, \dots$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον χώρο $A^k(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n)$ των εναλλασσουσών k-μορφών στον εφαπτόμενο χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$. Με τον συμβολισμό της παραγράφου 1.8, για έναν πολυδείκτη $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ ορίζουμε

$$(dx_I)_{\boldsymbol{p}} = (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_{\boldsymbol{p}} = (dx_{i_1})_{\boldsymbol{p}} \wedge (dx_{i_2})_{\boldsymbol{p}} \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_{\boldsymbol{p}}$$

4. ΠΟΡΙΣΜΑ Τα εξωτερικά γινόμενα $(dx_I)_{\boldsymbol{p}}$, $I \in A\Pi_k$, αποτελούν βάση του $A^k(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n)$.

2.4 Διαφορικές k-μορφές

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε 1-μορφή στο Ω μία συνάρτηση

$$\omega : \Omega \to \bigcup_{\boldsymbol{p}\in\Omega} T_{\boldsymbol{p}}^{*}\mathbb{R}^{n}$$

για την οποία ισχύει ότι $\omega(\boldsymbol{p}) \in T_{\boldsymbol{p}}^{*}\mathbb{R}^{n}$.

Ώστε, για κάθε $\boldsymbol{p} \in \Omega$, η τιμή $\omega(\boldsymbol{p})$ είναι μια γραμμική μορφή στον χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^{n}$. Χάριν ευκολίας, συμβολίζουμε τη μορφή αυτή με $\omega_{\boldsymbol{p}}$. Από το Πόρισμα 2.3.2 έπεται ότι η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ έχει μια αναπαράσταση της μορφής

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = a_1(\boldsymbol{p})(dx_1)_{\boldsymbol{p}} + a_2(\boldsymbol{p})(dx_2)_{\boldsymbol{p}} + \cdots + a_n(\boldsymbol{p})(dx_n)_{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{p})(dx_i)_{\boldsymbol{p}} \qquad (1)$$

όπου οι $a_i : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κατάλληλες συναρτήσεις. Χάριν ευκολίας, πολλές φορές παραλείπουμε τα όρια της άθροισης και γράφουμε απλά

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{i}} a_i(\boldsymbol{p})(dx_i)_{\boldsymbol{p}}$$

$*$ Στην περίπτωση όπου $n = 2$, αντί για τις μεταβλητές x_1, x_2 χρησιμοποιούμε τις x, y. Τότε μια 1-μορφή έχει αναπαράσταση

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = a(\boldsymbol{p})(dx)_{\boldsymbol{p}} + b(\boldsymbol{p})(dy)_{\boldsymbol{p}}$$

Ομοίως, για $n = 3$, χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές τις x, y, z, και μια 1-μορφή έχει αναπαράσταση

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = a(\boldsymbol{p})(dx)_{\boldsymbol{p}} + b(\boldsymbol{p})(dy)_{\boldsymbol{p}} + c(\boldsymbol{p})(dz)_{\boldsymbol{p}}$$

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν στην αναπαράσταση (1) οι συναρτήσεις a_i είναι αρκετά ομαλές, τότε η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ ονομάζεται διαφορική 1-μορφή. Ειδικότερα, αν $a_i \in C^{\kappa}(\Omega)$, τότε λέμε ότι και η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ είναι C^{κ}.

Το πλέον χαρακτηριστικό παράδειγμα 1-μορφής είναι το διαφορικό μιας C^1 βαθμωτής συνάρτησης $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, θεωρούμενο ως απεικόνιση

$$df : \Omega \ni \boldsymbol{p} \longmapsto (df)_{\boldsymbol{p}} \in T_{\boldsymbol{p}}^{*}\mathbb{R}^{n}$$

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Το διαφορικό αναπαρίσταται ως

$$(df)_{\boldsymbol{p}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} (dx_1)_{\boldsymbol{p}} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} (dx_2)_{\boldsymbol{p}} + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} (dx_n)_{\boldsymbol{p}}$$

Απόδειξη. Λόγω της (1), έχουμε ότι έχουμε μια αναπαράσταση

$$(df)_{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{p})(dx_i)_{\boldsymbol{p}}$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες συναρτήσεις, $a_i(\boldsymbol{p})$, υπολογίζουμε τη γραμμική μορφή στα διανύσματα της βάσης

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}} = (df)_{\boldsymbol{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{p})(dx_i)_{\boldsymbol{p}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{p})\delta_{ij} = a_j(\boldsymbol{p})$$

και έχουμε το συμπέρασμα.

4. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε 2-μορφή στο Ω μία συνάρτηση

$$\omega : \Omega \to \bigcup_{\boldsymbol{p}\in\Omega} A^2\left(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n\right)$$

για την οποία ισχύει ότι $\omega(\boldsymbol{p}) \in A^2\left(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n\right)$.

Ώστε, για κάθε $\boldsymbol{p} \in \Omega$, η τιμή $\omega(\boldsymbol{p})$ είναι μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή στον χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$. Χάριν ευκολίας, και πάλι συμβολίζουμε τη μορφή αυτή με $\omega_{\boldsymbol{p}}$. Από το Πόρισμα 2.3.3 έπεται ότι η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ έχει μια αναπαράσταση της μορφής

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{p})\left(dx_i \wedge dx_j\right)_{\boldsymbol{p}} \qquad (2)$$

όπου οι $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι κατάλληλες συναρτήσεις. Η (2) γράφεται απλούστερα ως

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = \sum_{i<j} a_{ij}(\boldsymbol{p})\left(dx_i \wedge dx_j\right)_{\boldsymbol{p}}$$

Και πάλι, αν στην αναπαράσταση (2) οι συναρτήσεις a_i είναι αρκετά ομαλές, τότε η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ ονομάζεται διαφορική 2-μορφή. Ειδικότερα, αν $a_{ij} \in C^\kappa(\Omega)$, τότε λέμε ότι και η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ είναι C^κ.

∗ Στην περίπτωση όπου $n = 2$, μια 2-μορφή έχει αναπαράσταση

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = a(\boldsymbol{p})(dx \wedge dy)_{\boldsymbol{p}}$$

Ομοίως, για $n = 3$, μια 2-μορφή έχει αναπαράσταση

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = a(\boldsymbol{p})(dy \wedge dz)_{\boldsymbol{p}} + b(\boldsymbol{p})(dx \wedge dz)_{\boldsymbol{p}} + c(\boldsymbol{p})(dx \wedge dy)_{\boldsymbol{p}}$$

Γενικεύουμε για $k = 3,4, \ldots$, με τον προφανή τρόπο:

5. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε k-μορφή στο Ω μία συνάρτηση

$$\omega : \Omega \to \bigcup_{\boldsymbol{p}\in\Omega} A^k\left(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n\right)$$

για την οποία ισχύει ότι $\omega(\boldsymbol{p}) \in A^k\left(T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n\right)$.

Όπως παραπάνω, για κάθε $\boldsymbol{p} \in \Omega$, η τιμή $\omega(\boldsymbol{p})$ είναι μια εναλλάσσουσα μορφή στον χώρο $T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n$ και συμβολίζεται με $\omega_{\boldsymbol{p}}$. Με χρήση του συμβολισμού της παραγράφου 1.8 και της πρότασης 2.3.4 έχουμε μια αναπαράσταση της μορφής

$$\omega_{\boldsymbol{p}} = \sum_{I\in A\Pi_k} a_I(\boldsymbol{p})\,(dx_I)_{\boldsymbol{p}} \qquad (3)$$

όπου $A\Pi_k$ είναι το σύνολο των πολυδεικτών, όπως έχει εισαχθεί στον Ορισμό 1.8.2. Αν οι συναρτήσεις a_I είναι αρκετά ομαλές, τότε η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ ονομάζεται διαφορική k-μορφή και αν $a_I \in C^\kappa(\Omega)$, τότε η και η $\omega_{\boldsymbol{p}}$ λέγεται ότι είναι C^κ.

Πολλές φορές, προς ελάφρυνση του συμβολισμού, δε θα κάνουμε καθόλου αναφορά στη σημειακή εξάρτηση $\boldsymbol{p} \in \Omega$ και η (3) θα γράφεται απλά ως

$$\omega = \sum_{I\in A\Pi_k} a_I dx_I$$

2.5 Πράξεις με διαφορικές μορφές

Άθροισμα – βαθμωτό γινόμενο

Έστω δύο διαφορικές k-μορφές

$$\omega = \sum_{I\in A\Pi_k} a_I dx_I \ , \qquad \varphi = \sum_{I\in A\Pi_k} b_I dx_I$$

στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$. Το άθροισμά των ω, φ ορίζεται φυσιολογικά ως η διαφορική k-μορφή

$$\omega + \varphi = \sum_{I\in A\Pi_k} (a_I + b_I) dx_I$$

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με

$$(\omega + \varphi)_{\boldsymbol{p}} = \omega_{\boldsymbol{p}} + \varphi_{\boldsymbol{p}}$$

για $\boldsymbol{p} \in \Omega$. Ακόμη, το βαθμωτό γινόμενο του λ με την ω ορίζεται ως

$$\lambda\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} (\lambda a_I) dx_I$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\lambda\omega)_{\boldsymbol{p}} = \lambda\omega_{\boldsymbol{p}}$$

Κατόπιν αυτών, το σύνολο των διαφορικών k-μορφών αποκτά δομή γραμμικού χώρου.

Γινόμενο συνάρτησης και διαφορικής μορφής

Έστω μια αρκετά ομαλή βαθμωτή συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (διαφορική 0-μορφή). Έστω ακόμη

$$\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} a_I dx_I$$

μια διαφορική k-μορφή στο Ω. Το γινόμενο $f\omega$ ορίζεται ως η διαφορική k-μορφή

$$f\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} (f a_I) dx_I$$

Με τον σημειακό συμβολισμό έχουμε

$$(f\omega)_{\boldsymbol{p}} = f(\boldsymbol{p})\omega_{\boldsymbol{p}}$$

Εξωτερικό γινόμενο

Έστω ότι

$$\omega = \sum_{I \in A\Pi_{k_1}} a_I dx_I$$

είναι μια διαφορική k_1-μορφή στο Ω και

$$\varphi = \sum_{J \in A\Pi_{k_2}} b_J dx_J$$

είναι μια διαφορική k_2-μορφή στο Ω. Το εξωτερικό γινόμενο, $\omega \wedge \varphi$ ορίζεται ως η διαφορική $(k_1 + k_2)$-μορφή

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (a_I b_J)\big(dx_I \wedge dx_J\big)$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$(\omega \wedge \varphi)_{\boldsymbol{p}} = \omega_{\boldsymbol{p}} \wedge \varphi_{\boldsymbol{p}}$$

Το εξωτερικό γινόμενο διατηρεί όλες τις ιδιότητες που περιγράφονται στην παράγραφο 1.8.

Απεικόνιση επιστροφής (pullback)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα, μια αρκετά ομαλή διανυσματική συνάρτηση μια συνάρτηση $\boldsymbol{F} : \Omega \to U$ και ω μια διαφορική k-μορφή στο U. Μέσω της $\boldsymbol{F}$ ορίζουμε μια διαφορική k-μορφή στο Ω, την οποία συμβολίζουμε με $\boldsymbol{F}^*\omega$, με τον τύπο

$$(\boldsymbol{F}^*\omega)\big((\boldsymbol{t}_1)_{\boldsymbol{p}}, (\boldsymbol{t}_2)_{\boldsymbol{p}}, \dots, (\boldsymbol{t}_k)_{\boldsymbol{p}}\big) \\ = \omega_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})}\Big((d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}\big((\boldsymbol{t}_1)_{\boldsymbol{p}}\big), (d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}\big((\boldsymbol{t}_2)_{\boldsymbol{p}}\big), \dots, (d\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{p}}\big((\boldsymbol{t}_k)_{\boldsymbol{p}}\big)\Big) \quad (1)$$

Η $\boldsymbol{F}^*\omega$ αποδίδεται στα Ελληνικά ως επιστροφή της ω και η εφαρμογή του τελεστή $\boldsymbol{F}^*$ πάνω στην ω ενέχει ρόλο αλλαγής μεταβλητών.

$*$ Όταν η f είναι 0-μορφή, δηλαδή μια συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, τότε η $\boldsymbol{F}^*f$ ορίζεται ως η σύνθεση $\boldsymbol{F}^*f = f \circ \boldsymbol{F}$.

Στα τρία πρώτα σκέλη της παρακάτω πρότασης λέει ουσιαστικά ότι η επιστροφή διατηρεί όλες τις παραπάνω πράξεις που έχουμε ορίσει. Οι αποδείξεις των αντίστοιχων ισχυρισμών είναι άμεσες συνέπειες των ορισμών και της γραμμικότητας.

1. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα $\boldsymbol{F} : \Omega \to U$ ομαλή διανυσματική συνάρτηση.

α) Αν ω, φ είναι διαφορικές k-μορφές στο U, τότε

$$\boldsymbol{F}^*(\omega + \varphi) = \boldsymbol{F}^*\omega + \boldsymbol{F}^*\varphi$$

Επίσης, αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\boldsymbol{F}^*(\lambda\omega) = \lambda\boldsymbol{F}^*\omega$$

β) Αν $f : U \to \mathbb{R}$ είναι ομαλή συνάρτηση και ω είναι διαφορική k-μορφή, τότε

$$\boldsymbol{F}^*(f\omega) = (\boldsymbol{F}^*f)(\boldsymbol{F}^*\omega)$$

γ) Αν ω είναι διαφορική k_1-μορφή και φ είναι διαφορική k_2-μορφή, τότε

$$\boldsymbol{F}^*(\omega \wedge \varphi) = \boldsymbol{F}^*\omega \wedge \boldsymbol{F}^*\varphi$$

δ) Αν $V \subseteq \mathbb{R}^p$ είναι ανοικτό σύνολο, $\boldsymbol{G} : V \to \Omega$ είναι ομαλή διανυσματική συνάρτηση και ω είναι διαφορική k-μορφή στο U, τότε

$$(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G})^* \omega = \boldsymbol{G}^*(\boldsymbol{F}^* \omega)$$

2.6 Εξωτερική παράγωγος διαφορικής μορφής

Έστω

$$\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} a_I dx_I$$

μια διαφορική k-μορφή στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε (εξωτερικό) διαφορικό της ω την $(k+1)$-μορφή που ορίζεται από τη σχέση

$$d\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} da_I \wedge dx_I$$

∗ Όταν $k = 0$, η διαφορική 0-μορφή είναι μια αρκετά ομαλή συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$, οπότε το διαφορικό, df, είναι η διαφορική 1-μορφή που συζητήθηκε εκτενώς παραπάνω.

Στην παρακάτω πρόταση συγκεντρώνουμε και αποδεικνύουμε τις ιδιότητες του διαφορικού που θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια.

2. ΠΡΟΤΑΣΗ α) Αν ω, φ είναι διαφορικές k-μορφές στο Ω, τότε

$$d(\omega + \varphi) = d\omega + d\varphi$$

β) Αν ω είναι διαφορική k_1-μορφή και φ είναι διαφορική k_2-μορφή στο Ω, τότε

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^{k_1} \omega \wedge d\varphi$$

γ) Αν ω είναι διαφορική k-μορφή στο Ω, τότε

$$d(d\omega) = d^2\omega = 0$$

δ) Αν $\boldsymbol{F} : \Omega \to U$ είναι αρκετά ομαλή διανυσματική συνάρτηση, με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά σύνολα, και ω είναι διαφορική k-μορφή στο U, τότε

$$d(\boldsymbol{F}^* \omega) = \boldsymbol{F}^*(d\omega)$$

Απόδειξη. α) Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού και της γραμμικότητας.

β) Έστω ότι

$$\omega = \sum_{I \in A\Pi_{k_1}} a_I dx_I \ , \qquad \varphi = \sum_{J \in A\Pi_{k_2}} b_J dx_J$$

Είναι τότε

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (a_I b_J)(dx_I \wedge dx_J)$$

και άρα

$$d(\omega \wedge \varphi) = \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} d(a_I b_J) \wedge (dx_I \wedge dx_J) = \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (b_J da_I + a_I db_J) \wedge (dx_I \wedge dx_J)$$

$$= \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (b_J da_I + a_I db_J) \wedge (dx_I \wedge dx_J)$$

$$= \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (b_J da_I) \wedge (dx_I \wedge dx_J) + \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (a_I db_J) \wedge (dx_I \wedge dx_J)$$

$$= \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (da_I \wedge dx_I) \wedge (b_J dx_J) + \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} a_I (db_J \wedge dx_I) \wedge dx_J$$

Είναι τώρα

$$\sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (da_I \wedge dx_I) \wedge (b_J dx_J) = \left(\sum_{I \in A\Pi_k} da_I \wedge dx_I \right) \wedge \left(\sum_{J \in A\Pi_{k_2}} b_J dx_J \right) = d\omega \wedge \varphi$$

Ισχύει ακόμη

$$db_J \wedge dx_I = (-1)^{k_1} dx_I \wedge db_J$$

και άρα

$$\sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} a_I (db_J \wedge dx_I) \wedge dx_J = (-1)^{k_1} \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} a_I (dx_I \wedge db_J) \wedge dx_J$$

$$= (-1)^{k_1} \sum_{\substack{I \in A\Pi_{k_1} \\ J \in A\Pi_{k_2}}} (a_I dx_I) \wedge (db_J \wedge dx_J) = (-1)^{k_1} \left(\sum_{I \in A\Pi_k} a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_{J \in A\Pi_{k_2}} db_J \wedge dx_J \right)$$
$$= (-1)^{k_1} \omega \wedge d\varphi$$

γ) Έστω ότι

$$\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} a_I dx_I$$

Τότε

$$d\omega = \sum_{I \in A\Pi_k} da_I \wedge dx_I$$

και άρα

$$d(d\omega) = \sum_{I \in A\Pi_k} d(da_I \wedge dx_I) = \sum_{I \in A\Pi_k} \big(d(da_I) \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I) \big)$$

λόγω του (β) και του γεγονότος ότι η da_I είναι 1-μορφή. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $d(da_I) = d(dx_I) = 0$. Ουσιαστικά, και για τις δύο αυτές ισότητες, χρειάζεται να εξασφαλίσουμε ότι $d(df) = 0$ για μια αρκετά ομαλή βαθμωτή συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (και άρα αν το (γ) ισχύει για διαφορικές 0-μορφές, τότε ισχύει και για k-μορφές). Πράγματι,

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \wedge dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \right) \wedge dx_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$, προκύπτει

$$d(df) = \sum_{i>j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Λόγω ομαλότητας ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

και το συμπέρασμα έπεται.

δ) Αρκεί και πάλι να δειχθεί για διαφορικές 0-μορφές $f : \Omega \to \mathbb{R}$, δηλαδή ότι

$$d(\boldsymbol{F}^* f) = \boldsymbol{F}^*(df)$$

και η απόδειξη προχωράει αναλόγως.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή ορίζοντας και συνδέοντας δύο πολύ σημαντικές έννοιες. Έστω ω διαφορική k-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

3. ΟΡΙΣΜΟΣ Η ω ονομάζεται κλειστή αν ισχύει $d\omega = 0$.

4. ΟΡΙΣΜΟΣ Η ω ονομάζεται ακριβής αν είναι το διαφορικό μιας διαφορικής $(k-1)$-μορφής, αν δηλαδή υπάρχει $(k-1)$-μορφή φ στο Ω ώστε να ισχύει $\omega = d\varphi$.

$*$ Αν $U \subseteq \Omega$ είναι ανοικτό σύνολο και υπάρχει διαφορική $k-1$-μορφή στο U ώστε $\omega = d\varphi$, τότε η ω λέγεται ακριβής στο U. Η ω λέγεται τοπικά ακριβής αν για κάθε $\boldsymbol{p} \in \Omega$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του $\boldsymbol{p}$ ώστε η ω να είναι ακριβής στο U.

Λόγω της πρότασης 2.2.6(γ), είναι προφανές ότι μια ακριβής διαφορική είναι κλειστή. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει γενικά, αλλά σε μια πιο ασθενή εκδοχή.

5. ΠΡΟΤΑΣΗ (Λήμμα του Poincaré) Έστω ότι η ω είναι κλειστή. Τότε η ω είναι και τοπικά ακριβής.

Θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη του Λήμματος Poincaré για διαφορικές 1-μορφές και για $n = 3$ παρακάτω, όταν εισάγουμε την έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

2.7 Κάποιοι βασικοί υπολογισμοί

Εξωτερική παράγωγος διαφορικής 1-μορφής για $n = 2$

Έστω

$$\omega = a\,dx + b\,dy$$

στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Είναι τότε

$$\begin{aligned} d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy\right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial y} dy \wedge dy \end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \;, \qquad dy \wedge dx = -dx \wedge dy$$

και τελικά

$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy \quad (1)$$

Εξωτερική παράγωγος διαφορικής 1-μορφής για $n = 3$

Έστω

$$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Τότε

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge dx + db \wedge dy + dc \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x}dx + \frac{\partial b}{\partial y}dy + \frac{\partial b}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\ &\qquad + \left(\frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial y}dy + \frac{\partial c}{\partial z}dz\right) \wedge dz = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial y}dy \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial z}dz \wedge dy \\ &\qquad + \frac{\partial c}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial z}dz \wedge dz \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$d\omega = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις της $d\omega$ είναι οι συνιστώσες του στροβιλισμού του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{V} = (a, b, c)^T$. Ώστε

$$d\omega = (\operatorname{curl} \boldsymbol{V})_1 dy \wedge dz + (\operatorname{curl} \boldsymbol{V})_2 dz \wedge dx + (\operatorname{curl} \boldsymbol{V})_3 dx \wedge dy \quad (2\alpha)$$

Εξωτερική παράγωγος 2-μορφής για $n = 3$

Έστω

$$\omega = a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$$

στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Τότε

$$d\omega = da \wedge dy \wedge dz + db \wedge dz \wedge dx + dc \wedge dx \wedge dy$$

Είναι

$$\begin{aligned} da \wedge dy \wedge dz &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{\partial a}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial a}{\partial y}dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial a}{\partial z}dz \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Ισχύει όμως

$$dy \wedge dy \wedge dz = dz \wedge dy \wedge dz = 0$$

και άρα

$$da \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial a}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz$$

Ομοίως

$$db \wedge dz \wedge dx = \frac{\partial b}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx = (-1)^2 \frac{\partial b}{\partial y}dx \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial b}{\partial y}dx \wedge dy \wedge dz$$

και

$$dc \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial c}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy = (-1)^2 \frac{\partial c}{\partial z}dx \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial c}{\partial z}dx \wedge dy \wedge dz$$

Τελικά, λοιπόν,

$$d\omega = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \quad (3)$$

Η συνάρτηση στην παρένθεση είναι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{V} = (a, b, c)^T$. Ώστε

$$d\omega = \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx \wedge dy \wedge dz \quad (3\alpha)$$

Επιστροφή

Η Πρόταση 2.6.2, σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.5.1, μας επιτρέπει να βρούμε μια βολική αναπαράσταση της επιστροφής, καθώς ο τύπος 2.5.(1) δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος. Αν συμβολίσουμε με $x_1, x_2, \dots, x_n$ τις μεταβλητές στον $\mathbb{R}^n$ και με $y_1, y_2, \dots, y_m$ τις μεταβλητές στον $\mathbb{R}^m$. Από τη σχέση $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, έχουμε ότι

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ , \qquad i = 1,2, \dots, m$$

όπου f_i είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της $\boldsymbol{F}$. Είναι, λοιπόν,

$$\boldsymbol{F}^*(dy_i) = d(\boldsymbol{F}^* y_i) = d(y_i \circ \boldsymbol{F}) = df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

Άρα αν η ω είναι διαφορική k-μορφή στο U με αναπαράσταση

$$\omega = \sum_{I \in A\Pi_{k_1}} a_I dy_I$$

τότε

$$\boldsymbol{F}^*\omega = \sum_{I \in A\Pi_{k_1}} \boldsymbol{F}^*(a_I dy_I) = \sum_{I \in A\Pi_{k_1}} (\boldsymbol{F}^* a_I)(\boldsymbol{F}^*(dy_I))$$

Αν $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, τότε είναι

$$dy_I = dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

και άρα

$$\boldsymbol{F}^*(dy_I) = \boldsymbol{F}^*(dy_{i_1}) \wedge \boldsymbol{F}^*(dy_{i_2}) \wedge \dots \wedge \boldsymbol{F}^*(dy_{i_k}) = df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

Τελικά

$$\boldsymbol{F}^*\omega = \sum_{I \in A\Pi_{k_1}} (a_I \circ \boldsymbol{F})(df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots \wedge df_{i_k}) \quad (3)$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση μιας 1-μορφής

$$\omega = \sum_i a_i dx_i$$

ο τύπος (3) γράφεται

$$\boldsymbol{F}^*\omega = \sum_i (a_i \circ \boldsymbol{F})\, df_i \quad (3\alpha)$$

Ομοίως, για την περίπτωση μιας 2-μορφής

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$$

έχουμε

$$\boldsymbol{F}^*\omega = \sum_{i<j} (a_{ij} \circ \boldsymbol{F})(df_i \wedge df_j) \quad (3\beta)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τη διαδικασία της ολοκλήρωσης για διαφορικές μορφές. Θα ασχοληθούμε κατά βάση με τα επικαμπύλια και τα επιφανειακά ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις διαστάσεις $n = 2$ και $n = 3$. Όπως συνέβη και με το διαφορικό, οι έννοιες αυτές είναι γνωστές από τον Λογισμό και εδώ θα τις ξαναδούμε υπό το πρίσμα των διαφορικών μορφών, που θα προσδώσει και την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα.

Ξεκινάμε με τις διαφορικές n-μορφές στον $\mathbb{R}^n$. Έστω, λοιπόν, ω μια διαφορική n-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε έχουμε την αναπαράσταση

$$\omega = a\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

όπου $a : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι αρκετά ομαλή βαθμωτή συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα της ω επί ενός κατάλληλου συνόλου $A \subseteq \Omega$ ορίζεται ως το πολλαπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης a στο A, δηλαδή

$$\int_A \omega = \int_A a(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

Ειδικότερα, για $n = 1$, η ω παίρνει την απλή μορφή

$$\omega = a\, dx$$

και έχουμε το σύνηθες ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_A \omega = \int_A a(x)\, dx$$

Ομοίως, για $n = 2$, έχουμε ότι

$$\omega = a\,dx \wedge dy$$

και επομένως το ολοκλήρωμα της ω είναι το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_A \omega = \iint_A a(x, y)\,dx\,dy$$

Τέλος, για $n = 3$, είναι

$$\omega = a\,dx \wedge dy \wedge dz$$

και προκύπτει το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_A \omega = \iiint_A a(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Η ανάπτυξη της πιο γενικής θεωρίας απαιτεί την εισαγωγή της έννοιας της διαφορίσιμης πολλαπλότητας, η οποία ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Οι καμπύλες και οι επιφάνειες που θα εξετάσουμε αποτελούν διαφορίσιμες πολλαπλότητες διάστασης 1 και 2, αντίστοιχα, και πάνω σε αυτές ορίζονται τα ολοκληρώματα των διαφορικών 1- και 2-μορφών. Γενικεύοντας ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας k-μορφής πάνω σε μια πολλαπλότητα διάστασης k. Το κεντρικό αποτέλεσμα της θεωρίας αυτής είναι ο τύπος του Stokes, που χωρίς αυστηρότητα αναφέρει το εξής: αν M είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης $k+1$ με θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂M (διάστασης k) και ω είναι μια διαφορική k-μορφή, τότε

$$\oint_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Τρία από τα θεμελιώδη θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του τύπου του Stokes. Αυτά είναι:

- Το θεώρημα του Green, που συνδέει το επικαμπύλιο με το διπλό ολοκλήρωμα.
- Το θεώρημα απόκλισης του Gauss, που συνδέει το επιφανειακό με το τριπλό ολοκλήρωμα.
- Το θεώρημα του Stokes, που συνδέει το επικαμπύλιο με το επιφανειακό ολοκλήρωμα.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε λεπτομερώς τα τρία αυτά θεωρήματα και θα ορίσουμε επακριβώς την λεπτή έννοια του «προσανατολισμένου» συνόρου. Για το θεώρημα Green, ειδικότερα, παρουσιάζουμε μια απόδειξη που μπορεί να γενικευθεί, με κατάλληλες τροποποιήσεις, και για τα άλλα δύο θεωρήματα. Θα πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι τα θεωρήματα δεν διατυπώνονται στη μεγαλύτερη γενικότητά τους (όσον αφορά τα σύνολα που εμπλέκονται) καθώς εδώ ο στόχος είναι η βαθύτερη κατανόηση και όχι η γενίκευση.

3.2 Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε (παραμετρική) καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ μία συνάρτηση

$$\boldsymbol{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^n$$

Όταν $n = 2$ η καμπύλη ονομάζεται επίπεδη, ενώ όταν $n = 3$ έχουμε μια καμπύλη στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο.

∗ Το διάστημα Δ μπορεί να είναι οποιουδήποτε είδους, ανοικτό, κλειστό ή ημιάνοικτο, πεπερασμένο ή άπειρο. Περισσότερο ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση του κλειστού και φραγμένου διαστήματος $\Delta = [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Στη συνέχεια, λοιπόν, θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις

$$\boldsymbol{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$$

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Το σημείο $\boldsymbol{\gamma}(\alpha)$ ονομάζεται αρχή και το $\boldsymbol{\gamma}(\beta)$ πέρας της καμπύλης. Τα $\boldsymbol{\gamma}(\alpha)$, $\boldsymbol{\gamma}(\beta)$ ονομάζονται άκρα. Όταν η αρχή και το πέρας ταυτίζονται, δηλαδή $\boldsymbol{\gamma}(\alpha) = \boldsymbol{\gamma}(\beta)$, η καμπύλη ονομάζεται κλειστή.

Στο σημείο αυτό δημιουργείται σύγχυση, διότι με τον όρο «καμπύλη» συνήθως καταλαβαίνουμε το σύνολο των σημείων που την απαρτίζουν.

3. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε ίχνος της καμπύλης την εικόνα (σύνολο τιμών) της $\boldsymbol{\gamma}$, δηλαδή το σημειοσύνολο $C = \{\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [\alpha, \beta]\}$.

Άρα αυτό που γενικά αντιλαμβανόμαστε ως καμπύλη είναι το ίχνος, δηλαδή την εικόνα της συνάρτησης. Παρ' όλα αυτά, και ανάλογα με τα συμφραζόμενα, ο όρος «καμπύλη» χρησιμοποιείται τόσο για τη συνάρτηση όσο και το ίχνος της. Η ανεξάρτητη μεταβλητή, $t \in [\alpha, \beta]$, ονομάζεται παράμετρος και η διαδικασία αναπαράστασης του σημειοσυνόλου C από τη συνάρτηση $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ ονομάζεται παραμέτριση της καμπύλης. Μάλιστα, αφού $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$, θα είναι

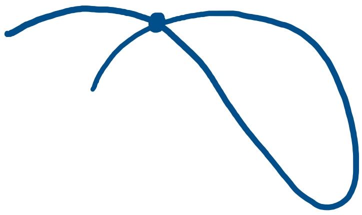
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots \gamma_n(t)\right)^T$$

Οι βαθμωτές συναρτήσεις $\gamma_i : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της συνάρτησης $\boldsymbol{\gamma}$. Λέμε ακόμη ότι αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης. Ως συνήθως, αν η καμπύλη είναι επίπεδη ($n = 2$), χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $\gamma(t) = \left(x(t), y(t)\right)^T$ ενώ, αν $n = 3$, ο $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$.

3. ΟΡΙΣΜΟΣ Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{\gamma}$ είναι $1 - 1$, τότε η καμπύλη ονομάζεται απλή.

Σε μια μη απλή καμπύλη υπάρχουν $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$, με $\boldsymbol{\gamma}(t_1) = \boldsymbol{\gamma}(t_2)$. Δηλαδή υπάρχουν σημεία όπου η καμπύλη τέμνει τον αυτό της και δημιουργούνται έτσι «θηλειές». Μια απλή καμπύλη δεν έχει τέτοιες «θηλειές».

απλή καμπύλη



μη απλή καμπύλη

Οι καμπύλες με τις οποίες ασχολούμαστε είναι «μονοκονδυλιές», δηλαδή πρόκειται για συνεχείς γραμμές. Μια τέτοια καμπύλη αναπαρίσταται από μια συνεχή συνάρτηση $\boldsymbol{\gamma}$, όπου δηλαδή όλες οι συνιστώσες της είναι συνεχείς. Η συνέχεια είναι ένα ελάχιστο προαπαιτούμενο για την ανάπτυξη της θεωρίας, επειδή όμως και πάλι θέλουμε να εφαρμόσουμε μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού, χρειαζόμαστε επιπλέον ομαλότητα, όπως θα δούμε αμέσως.

4. ΟΡΙΣΜΟΣ Η $\boldsymbol{\gamma}$ ονομάζεται ομαλή αν είναι παραγωγίσιμη (αν, δηλαδή, οι συνιστώσες συναρτήσεις της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις).

Στο εξής υποθέτουμε ότι όλες οι καμπύλες με τις οποίες ασχολούμαστε είναι αρκετά ομαλές., δηλαδή υπάρχουν όλες οι απαιτούμενες παράγωγοι που χρειαζόμαστε. Πέραν από τους συνήθεις συμβολισμούς, οι παράγωγοι της $\boldsymbol{\gamma}$ συμβολίζονται ενίοτε και με $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$,….

5. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Το $\boldsymbol{\gamma}(t_0) \in C$ ονομάζεται κανονικό σημείο της καμπύλης αν ισχύει $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) \neq \mathbf{0}$. Η καμπύλη ονομάζεται κανονική, αν όλα τα σημεία της είναι κανονικά.

6. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ κανονικό σημείο. Τότε η καμπύλη είναι τοπικά απλή γύρω από το t_0, δηλαδή υπάρχει περιοχή $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ώστε ο περιορισμός της $\boldsymbol{\gamma}$ σε αυτήν να είναι απλή καμπύλη.

Απόδειξη. Αφού $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) \neq \mathbf{0}$, λόγω συνέχειας της συνάρτησης $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, θα ισχύει $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \neq \mathbf{0}$ για όλα τα t σε κάποια περιοχή $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Τότε για $t_1, t_2 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t_1 \neq t_2$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ των t_1, t_2 ώστε να ισχύει

$$\boldsymbol{\gamma}(t_2) - \boldsymbol{\gamma}(t_1) = (t_2 - t_1)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\xi) \neq \mathbf{0}$$

και άρα $\boldsymbol{\gamma}(t_1) \neq \boldsymbol{\gamma}(t_2)$. $\square$

$*$ Το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα της C στο σημείο αυτής που αντιστοιχεί στο t, οπότε σε ένα κανονικό σημείο αυτό ορίζεται καλώς. Αν η καμπύλη είναι κανονική, τότε είναι απλή.

Γενικά, υπάρχουν πολλές παραμετρήσεις για τη C και για, την ακρίβεια, υπάρχουν άπειρες. Πιο συγκεκριμένα, έστω

$$\varphi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$$

μια $1 - 1$ και επί συνάρτηση, δηλαδή η φ απεικονίζει κατά μοναδικό τρόπο ένα $\tau \in [\gamma, \delta]$ σε ένα μοναδικό $t = \varphi(\tau) \in [\alpha, \beta]$ και αντιστρόφως. Ορίζουμε τότε

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}\big(\varphi(\tau)\big) = \boldsymbol{\gamma}(t)\,, \qquad \tau \in [\gamma, \delta] \quad (1)$$

Τότε το ίχνος της $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι πάλι η C και γι' αυτόν τον λόγο λέμε ότι η $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι μια αναπαραμέτρηση της C με παράμετρο τ. Μάλιστα, με την υπόθεση ότι η φ είναι αρκετά λεία, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}'(\tau) = \varphi'(\tau)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$$

Ώστε οι δύο παραμετρήσεις δίνουν παράλληλα εφαπτόμενα διανύσματα, υπό την προϋπόθεση ότι $\varphi'(\tau) \neq 0$. Ο μη μηδενισμός της παραγώγου της φ παίζει σημαντικό ρόλο, όπως εξηγούμε παρακάτω.

6. ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$ κανονική καμπύλη και $\varphi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ συνεχώς παραγωγίσιμη με $\varphi'(\tau) \neq 0$, $\tau \in J$. Τότε η (1) ορίζει μια (επιτρεπτή) αναπαραμέτρηση της $\boldsymbol{\gamma}$.

Η συνθήκη $\varphi'(\tau) \neq 0$ στον παραπάνω ορισμό εξασφαλίζει ότι ισχύει είτε $\varphi'(\tau) > 0$ είτε $\varphi'(\tau) < 0$ στο $[\gamma, \delta]$ (λόγω συνέχειας). Άρα η φ είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση και συνεπώς είναι 1 – 1. Μάλιστα, έχουμε το εξής:

- Αν $\varphi'(\tau) > 0$, τότε διατηρείται ο προσανατολισμός (φορά διαγραφής) της καμπύλης.
- Αν $\varphi'(\tau) < 0$, τότε αντιστρέφεται ο προσανατολισμός (φορά διαγραφής) της καμπύλης.

Έπεται ότι οι επιτρεπτές αναπαραμετρήσεις χωρίζονται σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας που καθορίζουν τους δύο προσανατολισμούς της καμπύλης. Στη γενική περίπτωση, δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο για τον χαρακτηρισμό του προσανατολισμού. Θα διατυπώσουμε παρακάτω ένα τέτοιο ασφαλές κριτήριο για επίπεδες κλειστές καμπύλες.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια ακόμη σημαντική παρατήρηση. Οι καμπύλες που θεωρούμε δεν είναι απαραίτητο να είναι παντού ομαλές, καθώς τα περισσότερα αποτελέσματα που θα δούμε ισχύουν ακόμη και αν η καμπύλη έχει πεπερασμένου πλήθους γωνιακά (ή αιχμηρά) σημεία, δηλαδή σημεία $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ όπου δεν ορίζεται η παράγωγος $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0)$.

7. ΟΡΙΣΜΟΣ Η καμπύλη $\boldsymbol{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κατά τμήματα ομαλή αν είναι συνεχής και υπάρχει μια διαμέριση του διαστήματος $[\alpha, \beta]$

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_\kappa = \beta$$

ώστε ο περιορισμός $\boldsymbol{\gamma}|[t_i, t_{i+1}]$ να είναι ομαλή συνάρτηση.

∗ Δηλαδή το ίχνος, C, προκύπτει ως διαμέριση από κ το πλήθος ομαλές καμπύλες, $C_1, C_2, \ldots, C_\kappa$. Τυπικά, εκφράζουμε το γεγονός αυτό γράφοντας

$$C = \sum_{i=1}^{\kappa} C_i$$

3.3 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Έστω

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

μια διαφορική 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Έστω ακόμη

$$\boldsymbol{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n , \qquad \boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots \gamma_n(t)\big)^T$$

μια καμπύλη της οποίας το ίχνος, C, περιέχεται στο Ω. Άρα η $\boldsymbol{\gamma}$ μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση $[\alpha, \beta] \to \Omega$ και συνεπώς η επιστροφή $\boldsymbol{\gamma}^*\omega$ ορίζει μια διαφορική 1-μορφή στο $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$, η οποία λαμβάνεται με εφαρμογή του τύπου 2.6.(3α),

$$\boldsymbol{\gamma}^*\omega = \sum_i (a_i \circ \boldsymbol{\gamma})\, d\gamma_i = \sum_i (a_i \circ \boldsymbol{\gamma})\, \gamma_i'\, dt = \left(\sum_i (a_i \circ \boldsymbol{\gamma})\, \gamma_i'\right) dt$$

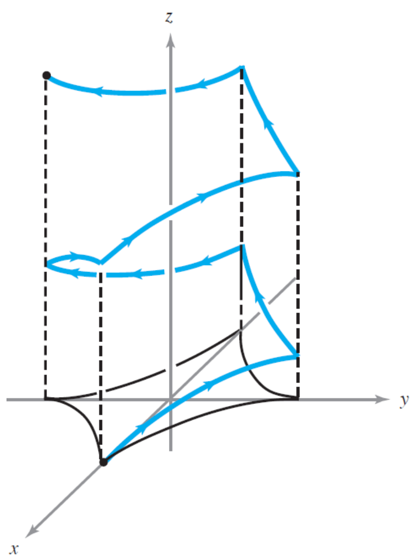
1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ω επί της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ τον αριθμό

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{[\alpha,\beta]} \boldsymbol{\gamma}^*\omega = \int_\alpha^\beta \left(\sum_i a_i\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\gamma_i'(t)\right) dt \qquad (1)$$

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Marsden & Tromba, 2012) Θεωρούμε την καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t\,, \sin^3 t\,, t)^T \ , \qquad 0 \le t \le \frac{7\pi}{2}$$

η οποία απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα



Είναι τότε

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-3\cos^2 t \sin t\,, 3\sin^2 t \cos t\,, 1)^T$$

Θεωρούμε, ακόμη, τη διαφορική μορφή

$$\omega = \sin z\ dx + \cos z\ dy - (xy)^{\frac{1}{3}}\, dz$$

Είναι τότε

$$\boldsymbol{\gamma}^*\omega = \sin t\,(-3\cos^2 t \sin t) + \cos t \cdot 3\sin^2 t \cos t - (\cos^3 t\ \sin^3 t)^{\frac{1}{3}}$$
$$= -3\cos^2 t \sin^2 t + 3\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t = \cos t \sin t$$

Άρα

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \sin z\ dx + \cos z\ dy - (xy)^{\frac{1}{3}}\,dz = -\int_0^{\frac{7\pi}{2}} \cos t \sin t\ dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{7\pi}{2}} \sin 2t\,dt$$
$$= \frac{1}{4}[\cos 2t]_0^{\frac{7\pi}{2}} = \frac{1}{4}(\cos 7\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}$$

Η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, όπως προκύπτει από τον τύπο (1), εξαρτάται από την παραμέτριση της καμπύλης. Στην πραγματικότητα, εξαρτάται μόνο από τον προσανατολισμό της καμπύλης, όπως θα δούμε αμέσως.

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\gamma, \delta]$, μια αναπαραμέτρηση της καμπύλης και

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}\big(\varphi(\tau)\big) = \boldsymbol{\gamma}(t)\,, \qquad \tau \in [\gamma, \delta]$$

α) Αν η αναπαραμέτριση διατηρεί τον προσανατολισμό της καμπύλης, τότε

$$\int_{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}} \omega = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$$

β)) Αν η αναπαραμέτριση αντιστρέφει τον προσανατολισμό της καμπύλης, τότε

$$\int_{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}} \omega = -\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega$$

Απόδειξη. Ισχύει, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_i a_i\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\gamma_i'(t)\right) dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \left(\sum_i a_i\Big(\boldsymbol{\gamma}\big(\varphi(\tau)\big)\Big)\gamma_i'\big(\varphi(\tau)\big)\right) \varphi'(\tau)d\tau$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \left(\sum_i a_i\Big(\boldsymbol{\gamma}\big(\varphi(\tau)\big)\Big)\gamma_i'\big(\varphi(\tau)\big)\,\varphi'(\tau)\right) d\tau$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \left(\sum_i a_i\big(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tau)\big)\widetilde{\gamma}_i'(\tau)\right) d\tau$$

α) Αν η αναπαραμέτριση διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε $\varphi'(\tau) > 0$, άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ίδιο ισχύει και για την αντίστροφη, φ^{-1}. Άρα

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \gamma\ , \qquad \varphi^{-1}(\beta) = \delta$$

και συνεπώς

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\sum_i a_i(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tau))\tilde{\gamma}_i'(\tau)\right)d\tau = \int_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} \omega$$

β) Αν η αναπαραμέτριση αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε η φ^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \delta \ , \qquad \varphi^{-1}(\beta) = \gamma$$

και άρα

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \omega = \int_{\delta}^{\gamma}\left(\sum_i a_i(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tau))\tilde{\gamma}_i'(\tau)\right)d\tau = -\int_{\gamma}^{\delta}\left(\sum_i a_i(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tau))\tilde{\gamma}_i'(\tau)\right)d\tau = -\int_{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} \omega$$

□

Κατόπιν τούτου, όταν αναφερόμαστε στο εξής στο ίχνος, C, της καμπύλης, θα θεωρούμε ότι έχει ενσωματωθεί ο προσανατολισμός, θα γράφουμε

$$\int_C \omega$$

και θα αναφερόμαστε σε αυτό ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ω επί της καμπύλης C. Η καμπύλη με αντίθετο προσανατολισμό συμβολίζεται με $-C$ και άρα ισχύει

$$\int_{-C} \omega = -\int_C \omega$$

Η επόμενη πρόταση εξετάζει μια πολύ ενδιαφέρουσα κατηγορία επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, όπου ο υπολογισμός τους δεν απαιτεί την (πολλές φορές δύσκολη) παραμέτριση της καμπύλης. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται συνεκτικό αν δύο οποιαδήποτε σημεία του A συνδέονται με μια συνεχή καμπύλη που βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο A.

4. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

μια διαφορική 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Η ω είναι ακριβής, με $\omega = df$ για κάποια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

β) Το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{V} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι πεδίο κλίσεων στο U, με $\boldsymbol{V} = \nabla f$.

γ) Η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος της ω επί μιας καμπύλης $C \subseteq \Omega$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της. Για την ακρίβεια, αν η C έχει αρχή το σημείο $\boldsymbol{\alpha}$ και πέρας το σημείο $\boldsymbol{\beta}$, τότε

$$\int_C \omega = f(\boldsymbol{\beta}) - f(\boldsymbol{\alpha})$$

δ) Ισχύει

$$\int_C \omega = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη $C \subseteq \Omega$.

Ισχύουν τότε οι ισοδυναμίες (α) $\Leftrightarrow$ (β), (γ) $\Leftrightarrow$ (δ) και η συνεπαγωγή (α) $\Rightarrow$ (γ). Αν, επιπλέον, το Ω είναι συνεκτικό σύνολο, τότε ισχύει και η (γ) $\Rightarrow$ (α).

Απόδειξη. (α) $\Leftrightarrow$ (β). Προφανής.

(α) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $\boldsymbol{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ μια παραμέτριση της C. Είναι τότε $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}(\alpha)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}(\beta)$ και

$$\int_C \omega = \int_C df = \int_{[\alpha,\beta]} \boldsymbol{\gamma}^*(df) = \int_\alpha^\beta d(\boldsymbol{\gamma}^* f) = (\boldsymbol{\gamma}^* f)(\beta) - (\boldsymbol{\gamma}^* f)(\alpha)$$
$$= f\big(\boldsymbol{\gamma}(\beta)\big) - f\big(\boldsymbol{\gamma}(a)\big) = f(\boldsymbol{\beta}) - f(\boldsymbol{a})$$

(γ) $\Rightarrow$ (δ). Προφανές.

(δ) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ δύο σημεία και $C_1, C_2 \subseteq \Omega$ δύο καμπύλες με αρχή το $\boldsymbol{\alpha}$ και πέρας το $\boldsymbol{\beta}$. Τότε η καμπύλη $C = C_1 - C_2$ είναι κλειστή και άρα

$$\int_C \omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_{C_1} \omega + \int_{-C_2} \omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega$$

(γ) $\Rightarrow$ (α), με την επιπλέον υπόθεση ότι το Ω είναι συνεκτικό. Έστω $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega$ τυχόν αλλά σταθερό σημείο. Ορίζουμε στο Ω τη συνάρτηση

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{C_x} \omega$$

όπου $C_x \subseteq \Omega$ είναι καμπύλη που ενώνει το $\boldsymbol{\alpha}$ με το $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Από υπόθεση, η f είναι καλά ορισμένη συνάρτηση. Για $t \in \mathbb{R}$ με αρκετά μικρό $|t|$ έχουμε ότι $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_i \in \Omega$. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i$, συμβολίζεται με $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i]$ και παραμετροποιείται από την

$$\boldsymbol{\gamma}(s)=\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{e}_i\ , \qquad s\in[0,t]$$

Είναι τότε

$$f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)=\int_{C_x+[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i]}\omega=\int_{C_x}\omega+\int_{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i]}\omega$$

και άρα

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{t}=\frac{1}{t}\int_{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i]}\omega=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\sum_j a_j(\boldsymbol{\gamma}(s))\gamma_j'(s)\right)ds$$

Ισχύει όμως $\boldsymbol{\gamma}'(s)=\boldsymbol{e}_i$, οπότε η $\gamma_j'(s)$ είναι η j-οστή συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{e}_i$, δηλαδή $\gamma_j'(s)=\delta_{ij}$. Επομένως

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t a_i(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{e}_i)\,ds$$

και άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t a_i(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{e}_i)\,ds=a_i(\boldsymbol{x})$$

Δηλαδή $\omega=df$.

Στην παράγραφο 2.6 αναφέραμε το Λήμμα του Poincaré, το οποίο μας παρέχει έναν απλό χαρακτηρισμό της ακριβούς μορφής. Στην επόμενη πρόταση, λαμβάνοντας υπόψη και τον τύπο 2.7.(1), παραθέτουμε μια απόδειξη του λήμματος αυτού για 1-μορφές στον $\mathbb{R}^2$.

5. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω

$$\omega=a\,dx+b\,dy$$

μια διαφορική 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Αν ισχύει

$$\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial y}$$

(οπότε η ω είναι κλειστή), τότε η ω είναι τοπικά ακριβής.

Απόδειξη. Έστω $\boldsymbol{p} = (x_0, \boldsymbol{y_0}) \in \Omega$ τυχόν αλλά σταθερό σημείο. Αφού το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\boldsymbol{p}$, $B(\boldsymbol{p})$, ώστε $B(\boldsymbol{p}) \subseteq \Omega$. Για κάθε $\boldsymbol{q} = (x, y) \in B(\boldsymbol{p})$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα, $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] \subseteq B(\boldsymbol{p})$, που ενώνει τα $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(\boldsymbol{q}) = \int_{[\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}]} \omega$$

Μια παραμέτρηση του $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ δίνεται από την

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = \big(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)\big) \,, \qquad t \in [0,1]$$

οπότε

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} = (x - x_0, y - y_0)$$

και άρα

$$\begin{aligned} f(x,y) = \int_0^1 \Big(& a\big(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)\big)(x - x_0) \\ & + b\big(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)\big)(y - y_0)\Big)\, dt \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας υπό το σύμβολο της ολοκλήρωσης, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial a}{\partial x} t(x - x_0) + a + \frac{\partial b}{\partial x} t(y - y_0)\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial a}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial b}{\partial x}(y - y_0)\right) t + a\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial a}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial a}{\partial y}(y - y_0)\right) t + a\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} a\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) + a\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) \frac{d}{dt} t\right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t a\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\Big) dt \\ &= \Big[t a\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big)\Big]_0^1 = a\big(\boldsymbol{\gamma}(1)\big) = a(\boldsymbol{q}) = a(x,y) \end{aligned}$$

Τελείως όμοια δείχνουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y)$$

και άρα $\omega = df$.

$*$ Ανάλογη πρόταση διατυπώνεται για μια διαφορική 1-μορφή στον $\mathbb{R}^3$

$$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

όπου, λόγω της 2.7.(2), οι αντίστοιχες συνθήκες γίνονται

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial z}\ , \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

Οι παραπάνω αναδιατυπώνονται ισοδύναμα ως εξής: το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{V} = (a, b, c)$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή curl $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει στα πλαίσια της Πρότασης 2 είναι πότε η ω είναι ακριβής, δηλαδή η συνάρτηση f μπορεί να επιλεγεί με «ενιαίο» τρόπο, ώστε να ισχύει $\omega = df$ σε ολόκληρο το Ω. Αποδεικνύεται ότι αν το Ω είναι ένα απλώς συνεκτικό σύνολο, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ω επί κάθε κλειστής καμπύλης $C \subseteq \Omega$ είναι μηδέν και άρα, σύμφωνα με την πρόταση 4, η ω είναι ακριβής. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται απλώς συνεκτικό αν αμφότερα τα A, $A^c = \mathbb{R}^n - A$ είναι συνεκτικά σύνολα. Διαισθητικά, ένα απλώς συνεκτικό σύνολο δεν έχει «τρύπες». Ώστε ισχύει

5. ΠΡΟΤΑΣΗ Με τις υποθέσεις της πρότασης 4 και αν επιπλέον το Ω είναι απλώς συνεκτικό σύνολο, τότε η ω είναι ακριβής.

6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θεωρούμε τη διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^2$

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

δηλαδή, υπό τον συμβολισμό της Πρότασης 5, είναι

$$a(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\ , \qquad b(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Ισχύει τότε

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)(x^2+y^2) - x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(y)(x^2+y^2) - y\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Άρα ισχύει η συνθήκη

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} \quad (2)$$

και συνεπώς η ω είναι κλειστή. Το ευρύτερο σύνολο που ορίζεται η ω είναι το

$$\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

το οποίο είναι συνεκτικό αλλά όχι απλά συνεκτικό. Ο μοναδιαίος κύκλος, C, με κέντρο την αρχή των αξόνων

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t\,, \sin t)^T \ , \qquad t \in [0,2\pi]$$

προφανώς περιέχει το σημείο $(0,0)$ που δημιουργεί το πρόβλημα. Είναι

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-\sin t\,, \cos t)^T$$

και άρα

$$\boldsymbol{\gamma}^*\omega = a(\cos t\,, \sin t)(-\sin t) + b(\cos t\,, \sin t)\cos t = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

Συνεπώς

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\gamma}^*\omega\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

και άρα η ω δεν είναι ακριβής στο Ω. Ο λόγος που αποτυγχάνει η συνθήκη (2) να εξασφαλίσει την ακρίβεια της ω έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι το Ω δεν είναι απλά συνεκτικό.

3.4 Το Θεώρημα του Green

Στην παράγραφο αυτή επικεντρώνουμε τη μελέτη μας στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και ειδικότερα μας απασχολούν οι κλειστές επίπεδες καμπύλες.

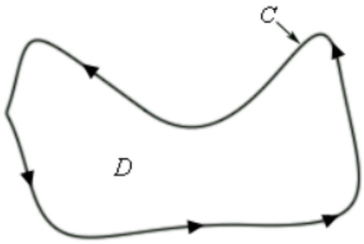
1. ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνεχής καμπύλη $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται καμπύλη Jordan αν είναι κλειστή και απλή.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι διαισθητικά αυτονόητο αλλά η απόδειξή του δεν είναι καθόλου εύκολη ή προφανής.

2. ΠΡΟΤΑΣΗ (Θεώρημα του Jordan) Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη Jordan. Τότε το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^2 - C$ είναι μη συνεκτικό σύνολο και αποτελείται από δύο συνεκτικές συσνιστώσες, μία φραγμένη και μία μη φραγμένη.

∗ Υπενθυμίζουμε ότι ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται τόπος. Άρα η καμπύλη Jordan, C, χωρίζει το επίπεδο σε δύο τόπους, έναν φραγμένο και έναν μη φραγμένο. Ο φραγμένος τόπος ονομάζεται εσωτερικό της C, ενώ ο μη φραγμένος εξωτερικό. Μάλιστα, οι τόποι αυτοί είναι απλά συνεκτικοί.

Για τις καμπύλες Jordan υπάρχει ένας σαφής τρόπος για τον διαχωρισμό των δύο πιθανών προσανατολισμών. Η πιο απλή περιγραφή, χωρίς μεγάλη αυστηρότητα, είναι η εξής: λέμε ότι η καμπύλη Jordan, $C \subseteq \mathbb{R}^2$, είναι θετικά προσανατολισμένη όταν κάποιος ο οποίος περπατάει κατά μήκος της C έχει πάντα το εσωτερικό της, D, στα αριστερά του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αφού συζητάμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, μας ενδιαφέρουν καμπύλες Jordan που είναι και (τμηματικά) ομαλές. Σε μια τέτοια περίπτωση, ορίζεται το ολοκλήρωμα μιας διαφορικής 1-μορφής, ω, και γράφουμε ειδικότερα

$$\oint_C \omega$$

για να τονίσουμε ότι η καμπύλη C είναι θετικά προσαντολισμένη.

3. ΠΡΟΤΑΣΗ (Θεώρημα του Green) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένος απλά συνεκτικός τόπος, όπου το σύνορο, ∂D, είναι μια (τμηματικά) ομαλή καμπύλη Jordan. Έστω ακόμη

$$\omega = a\,dx + b\,dy$$

μια διαφορική 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \supseteq D$. Ισχύει τότε

$$\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \iff \oint_{\partial D} a\,dx + b\,dy = \int_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy \iff$$

$$\oint_{\partial D} a\,dx + b\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω του τύπου 2.7.(1). Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη για το θεώρημα του Green που μπορεί να εφαρμοστεί για μια μεγάλη κατηγορία τόπων (Edwards, 1973).

1ο βήμα: Δείχνουμε ότι το θεώρημα ισχύει όταν ως D πάρουμε το μοναδιαίο τετράγωνο $S = [0,1] \times [0,1]$. Πράγματι, αφενός έχουμε

$$\int_S d\omega = \iint_S \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x} dx\right) dy - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y} dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \big(b(1,y) - b(0,y)\big) dy - \int_0^1 \big(a(x,1) - a(x,0)\big) dx$$
$$= \int_0^1 b(1,y)dy - \int_0^1 b(0,y)dy - \int_0^1 a(x,1)dx + \int_0^1 a(x,0)dx$$

Αφετέρου, η καμπύλη ∂S γράφεται ως ξένη ένωση τεσσάρων ευθυγράμμων τμημάτων που παραμετρίζονται ως εξής:

$$C_1 : \boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, 0) \ \rightarrow \ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (1,0)$$
$$C_2 : \boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (1, t) \ \rightarrow \ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (0,1)$$
$$C_3 : \boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (1-t, 1) \ \rightarrow \ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-1,0)$$
$$C_4 : \boldsymbol{\gamma}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (0,1-t) \ \rightarrow \ \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (0,-1)$$

Σε όλες τις περιπτώσεις είναι $t \in [0,1]$ και με τον τρόπο αυτό η ∂S προσανατολίζεται θετικά. Επομένως

$$\oint_{\partial S} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega + \int_{C_3} \omega + \int_{C_4} \omega$$
$$= \int_0^1 a(t,0)dt + \int_0^1 b(1,t)dt - \int_0^1 a(1-t,1)dt - \int_0^1 b(0,1-t)dt$$

Στα δύο τελευταία ολοκληρώματα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = 1 - t$, οπότε προκύπτει

$$\oint_{\partial S}\omega=\int_0^1 a(t,0)dt+\int_0^1 b(1,t)dt-\int_1^0 a(u,1)d(1-u)-\int_1^0 b(0,u)d(1-u)$$
$$=\int_0^1 a(t,0)dt+\int_0^1 b(1,t)dt-\int_0^1 a(u,1)du-\int_1^0 b(0,u)du=\int_S d\omega$$

2ο βήμα: Θεωρούμε ότι ο τόπος D μπορεί να προκύψει από το S με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{cases} x=\chi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases}$$

δηλαδή μέσω ενός μετασχηματισμού (1 – 1 και επί συνάρτησης) $\boldsymbol{\Phi}: U\to\Omega$ με

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v)=\big(\chi(u,v),\psi(u,v)\big)$$

που είναι αμφιδιαφορίσμος (οι $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}^{-1}$ είναι ομαλές συναρτήσεις) και τέτοιος ώστε

$$S\subseteq U\ ,\qquad D=\boldsymbol{\Phi}(S)\ ,\qquad \partial D=\boldsymbol{\Phi}(\partial S)$$

Στην τελευταία ισότητα θεωρούμε ότι διατηρείται ο θετικός προσανατολισμός. Τότε η ανάσυρση $\boldsymbol{\Phi}^*\omega$ είναι μια διαφορική 1-μορφή που ορίζεται στο μοναδιαίο τετράγωνο.

3ο βήμα: Δείχνουμε ότι to θεώρημα Green ισχύει στο D, χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητών στα ολοκληρώματα και εφαρμόζοντας το συμπέρασμα του 1ου βήματος. Πράγματι, είναι

$$d\omega=g\,dx\wedge dy$$

όπου

$$g=\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}$$

και άρα, από τον τύπο 2.7.(3β), και τις γνωστές ιδιότητες των διαφορικών

$$\boldsymbol{\Phi}^*(d\omega)=(g\circ\boldsymbol{\Phi})d\chi\wedge d\psi=(g\circ\boldsymbol{\Phi})\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}du+\frac{\partial\chi}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)$$
$$=(g\circ\boldsymbol{\Phi})\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du\wedge dv=(g\circ\boldsymbol{\Phi})\frac{D(\chi,\psi)}{D(u,v)}du\wedge dv$$

όπου

$$\frac{D(\chi,\psi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\det J_{\boldsymbol{\Phi}}$$

είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού. Άρα η εφαρμογή της επιστροφής είναι ουσιαστικά η εφαρμογή της αλλαγής μεταβλητών από (x, y) σε (u, v), δηλαδή

$$\int_D d\omega = \int_S \boldsymbol{\Phi}^*(d\omega)$$

Ακόμη, έστω $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t), \in [\alpha, \beta]$, μια παραμέτρηση του τετραγώνου ∂S. Τότε

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{\Phi}^*\omega = \int_{[\alpha,\beta]} \boldsymbol{\gamma}^*(\boldsymbol{\Phi}^*\omega) = \int_{[\alpha,\beta]} (\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{\gamma})^*\omega$$

Όμως η $(\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{\gamma})(t), \in [\alpha, \beta]$, είναι μια παραμέτρηση της καμπύλης ∂D και άρα

$$\int_{[\alpha,\beta]} (\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{\gamma})^*\omega = \oint_{\partial D} \omega$$

Συνοψίζοντας, ισχύει

$$\int_D d\omega = \int_S \boldsymbol{\Phi}^*(d\omega) = \int_S d(\boldsymbol{\Phi}^*\omega) = \oint_{\partial S} \boldsymbol{\Phi}^*\omega = \oint_{\partial D} \omega$$

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green για τη διαφορική μορφή

$$\omega = -y\,dx + x\,dy$$

(δηλαδή για $a(x, y) = -y$, $b(x, y) = x$), παίρνουμε

$$\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy = 2\iint_D dxdy$$

Το διπλό ολοκλήρωμα στα δεξιά αναπαριστά το εμβαδό, $E(D)$, του χωρίου D. Ώστε δείξαμε ότι ισχύει

$$E(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -y\,dx + x\,dy$$

Ως D, τώρα, θεωρούμε το ελλειπτικό χωρίο που βρίσκεται στο εσωτερικό της έλλειψης

$$\partial D \;:\; \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

η οποία και παραμετροποιείται κατά τη θετική φορά μέσω της

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\alpha \cos t\,, \beta \sin t)^T \;, \qquad t \in [0,2\pi]$$

Είναι τότε

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-\alpha \sin t\, , \beta \cos t)^T$$

και άρα

$$\boldsymbol{\gamma}^* \omega = -\beta \sin t\,(-\alpha \sin t) + \alpha \cos t\, \beta \cos t = \alpha\beta(\sin^2 t + \cos^2 t) = \alpha\beta$$

Επομένως

$$E(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\gamma}^* \omega\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \alpha\beta\, dt = \frac{1}{2} 2\pi\alpha\beta = \pi\alpha\beta$$

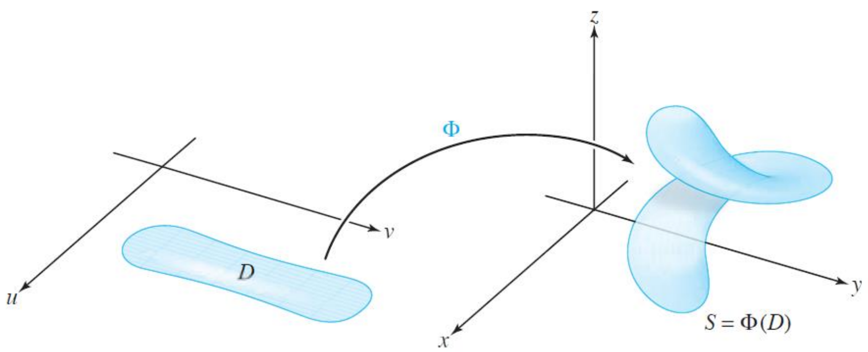
και καταλήγουμε έτσι στο γνωστό αποτέλεσμα.

3.5 Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα σύνολο.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε (παραμετρική) επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ μια συνάρτηση $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$, με

$$\boldsymbol{\Phi}(u, v) = \big(\chi(u, v), \psi(u, v), \zeta(u, v)\big)^T$$



Αυτός ο τρόπος προσέγγισης για την περιγραφή μιας επιφάνειας, π.χ. (Marsden & Tromba, 2012), αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης περιγραφής για καμπύλες. Ο τρόπος αυτός, παρόλο που δεν είναι ο πλέον γενικός, π.χ. (Αρβανιτογεώργος, 2015), είναι εύχρηστος και αποφεύγει την εισαγωγή δύσκολων εννοιών όπως ο τοπικός χάρτης, που συναντάται στη γενικότερη θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων. Στην ίδια λογική με τις καμπύλες, λοιπόν, ως «επιφάνεια» αντιλαμβανόμαστε τόσο τη συνάρτηση $\boldsymbol{\Phi}$, όσο και το σημειοσύνολο $S = \boldsymbol{\Phi}(D)$.

Μας απασχολούν επιφάνειες που είναι (τμηματικά) ομαλές, οπότε θα υποθέσουμε γενικά ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις, χ, ψ, ζ, της $\boldsymbol{\Phi}$ είναι αρκετά ομαλές.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα σημείο $(u_0, v_0) \in D$. Σταθεροποιώντας τη μεταβλητή u στην τιμή $u = u_0$, η συνάρτηση $\boldsymbol{\Phi}(u_0,\cdot)$ ορίζει μια καμπύλη που κείται επί της επιφάνειας S, η οποία ονομάζεται v-καμπύλη. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης αυτής δίνεται από τη μερική παράγωgo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,\cdot) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}(u_0,\cdot), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0,\cdot), \frac{\partial \zeta}{\partial v}(u_0,\cdot)\right)^T$$

Ειδικότερα, όταν $v = v_0$, παίρνουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0)$.

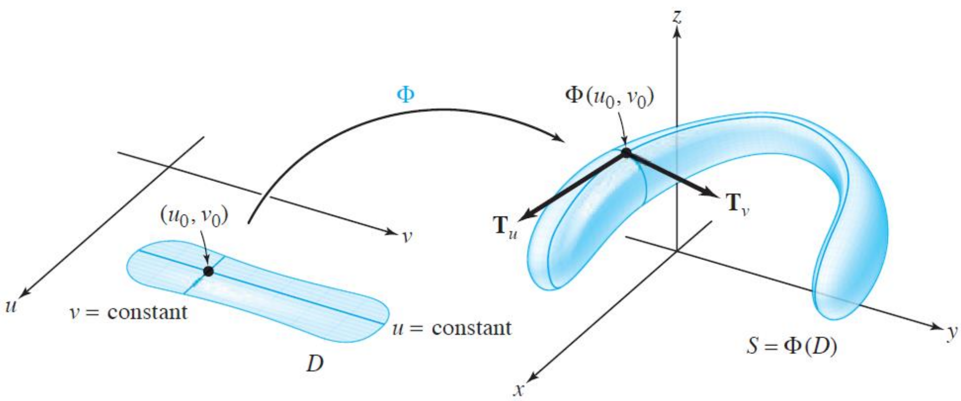
$$\boldsymbol{T}_v = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \zeta}{\partial v}(u_0, v_0)\right)^T$$

Ομοίως, σταθεροποιώντας τη μεταβλητή v στην τιμή v_0, η $\boldsymbol{\Phi}(\cdot, v_0)$ ορίζει την u-καμπύλη επί της επιφάνειας S με εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(\cdot, v_0) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}(\cdot, v_0), \frac{\partial \psi}{\partial u}(\cdot, v_0), \frac{\partial \zeta}{\partial u}(\cdot, v_0)\right)^T$$

και, ειδικότερα, για $u = u_0$,

$$\boldsymbol{T}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \zeta}{\partial u}(u_0, v_0)\right)^T$$



Επιπλέον, οι u- και v-καμπύλες ορίζουν ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων επί της επιφάνειας, η τομή των οποίων ορίζει το σημείο $\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0)$. Σημαντικότατο ρόλο στη θεωρία παίζει το εξωτερικό γινόμενο

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v$$

2. ΟΡΙΣΜΟΣ Το $\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0) \in S$ ονομάζεται κανονικό σημείο αν ισχύει $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$. Η επιφάνεια S ονομάζεται κανονική αν όλα της τα σημεία είναι κανονικά.

$*$ Η συνθήκη $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ εξασφαλίζει ότι τα $\boldsymbol{T}_u, \boldsymbol{T}_v$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αντιστρόφως.

$*$ Σε μια κανονική επιφάνεια, το $\boldsymbol{N}$ ονομάζεται κάθετο διάνυσμα (normal). Το $\boldsymbol{N}$ λαμβάνεται ως εφαρμοστό διάνυσμα στο τυχόν σημείο $\boldsymbol{\Phi}(u, v)$ της επιφάνειας (σωστότερος συμβολισμός: $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\Phi}(u,v)}$) και το προς ποιά κατεύθυνση δείχνει το πέρας του καθορίζει τον προσανατολισμό της καμπύλης. Αντίθετα με ότι συμβαίνει στις καμπύλες, *δεν* είναι όλες οι επιφάνειες προσανατολίσιμες (βλ. λωρίδα Möbius). Θα αναφέρουμε περισσότερα για αυτό αμέσως παρακάτω.

Είναι τώρα

$$\boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{j}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{j}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{j} = \frac{D(\psi, \zeta)}{D(u, v)} \boldsymbol{i} + \frac{D(\zeta, \chi)}{D(u, v)} \boldsymbol{j} + \frac{D(\chi, \psi)}{D(u, v)} \boldsymbol{k}$$

Ώστε δείξαμε ότι

$$\boldsymbol{N} = \left(\frac{D(\psi, \zeta)}{D(u, v)}, \frac{D(\zeta, \chi)}{D(u, v)}, \frac{D(\chi, \psi)}{D(u, v)} \right)^T \qquad (1)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}$$

3. ΟΡΙΣΜΟΣ Η S ονομάζεται προσανατολισμένη επιφάνεια αν η διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{n} : S \to \mathbb{R}^3$$

είναι συνεχής.

∗ Μία επιφάνεια ονομάζεται προσανατολίσιμη όταν δέχεται έναν προσαντολισμό με βάση τον παραπάνω ορισμό. Μια προσανατολίσιμη επιφάνεια έχει δύο «πλευρές». Στην περίπτωση αυτή, το πέρας του $\boldsymbol{n}$ δείχνει τη μία πλευρά, ενώ το $-\boldsymbol{n}$ δείχνει την άλλη πλευρά.

Αποδεικνύεται ότι

4. ΠΡΟΤΑΣΗ Αν η επιφάνεια είναι απλή (δηλαδή η $\boldsymbol{\Phi}$ είναι 1 – 1 συνάρτηση) και κανονική, τότε είναι και προσανατολίσιμη.

Μια (επιτρεπτή) αναπαραμέτρηση της S προκύπτει ως εξής: έστω $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ και ένας αρκετά ομαλός μετασχηματισμός

$$\boldsymbol{\varphi} :\ \Delta \to D\ , \qquad (u,v) = \boldsymbol{\varphi}(t,s)$$

που δίνεται αναλυτικά από τις σχέσεις

$$\begin{cases} u = \varphi_1(t,s) \\ v = \varphi_2(t,s) \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t,s) = \boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{\varphi}(t,s)\big)$, $(t,s) \in \Delta$, έχει πάλι ως εικόνα την S. Λόγω του κανόνα της αλυσίδας, ισχύει

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$

Έστω τώρα $\widetilde{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{N}$ τα κάθετα διανύσματα που αντιστοιχούν στις παραμετρήσεις $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}$ και $\boldsymbol{\Phi}$. Είναι

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial t} \times \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}}{\partial s} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} = \mathbf{0}\ , \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} = -\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}$$

βρίσκουμε

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\right)$$

και άρα

$$\widetilde{\boldsymbol{N}} = \frac{D(u,v)}{D(t,s)}\boldsymbol{N}$$

Ώστε οι δύο παραμετρίσεις δίνουν παράλληλα κάθετα διανύσματα, υπό την προϋπόθεση ότι

$$\frac{D(u,v)}{D(t,s)} \neq 0$$

Αν ισχύει η παραπάνω συνθήκη, λέμε ότι έχουμε μια επιτρεπτή αναπαραμέτριση. Κατά συνέπεια, λόγω της συνέχειας, ισχύει ένα από τα δύο:

- $\frac{D(u,v)}{D(t,s)} > 0$, οπότε για τα αντίστοιχα μοναδιαία κάθετα διανύσματα ισχύει $\widetilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}$ και οι δύο παραμετρίσεις επάγουν τον ίδιο προσανατολισμό.
- $\frac{D(u,v)}{D(t,s)} < 0$, οπότε για τα αντίστοιχα μοναδιαία κάθετα διανύσματα ισχύει $\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}$ και οι δύο παραμετρίσεις επάγουν αντίθετο προσανατολισμό.

3.6 Επιφανειακό ολοκλήρωμα

Έστω

$$\omega = a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy$$

μια διαφορική 2-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Έστω ακόμη $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και

$$\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^n , \qquad \boldsymbol{\Phi}(u,v) = \big(\chi(u,v), \psi(u,v), \zeta(u,v)\big)$$

μια προσανατολίσιμη επιφάνεια $S = \boldsymbol{\Phi}(D) \subseteq \Omega$. Η $\boldsymbol{\Phi}$, λοιπόν, μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση $D \to \Omega$ και συνεπώς η ανάσυρση $\boldsymbol{\Phi}^*\omega$ ορίζει μια διαφορική 2-μορφή στο D, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\Phi}^*\omega = (a \circ \boldsymbol{\Phi}) d\psi \wedge d\zeta + (b \circ \boldsymbol{\Phi}) d\zeta \wedge d\chi + (c \circ \boldsymbol{\Phi}) d\chi \wedge d\psi$$

Επαναλαμβάνοντας ουσιαστικά τους υπολογισμούς στο τέλος της παραγράφου 2.3, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$d\psi \wedge d\zeta = \frac{D(\psi,\zeta)}{D(u,v)} du \wedge dv , \qquad d\zeta \wedge d\chi = \frac{D(\zeta,\chi)}{D(u,v)} du \wedge dv ,$$
$$d\chi \wedge d\psi = \frac{D(\chi,\psi)}{D(u,v)} du \wedge dv$$

1. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε επιφανειακό ολοκλήρωμα της ω επί της επιφάνειας $\boldsymbol{\Phi}$ τον αριθμό

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}} \omega = \int_D \boldsymbol{\Phi}^* \omega = \iint_D \left((a \circ \boldsymbol{\Phi}) \frac{D(\psi,\zeta)}{D(u,v)} + (b \circ \boldsymbol{\Phi}) \frac{D(\zeta,\chi)}{D(u,v)} + (c \circ \boldsymbol{\Phi}) \frac{D(\chi,\psi)}{D(u,v)} \right) du\, dv$$

Θα δείξουμε και πάλι ότι η τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση αλλά μόνο από τον προσανατολισμό. Η ακόλουθη πρόταση είναι ανάλογη της 3.3.2 και προκύπτει από τον τύπο αλλαγής των μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα.

3. ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(u,v) = \boldsymbol{\varphi}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta$, μια αναπαραμέτρηση της επιφάνειας και

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(t,s) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}(t,s)) \ , \qquad (t,s) \in \Delta$$

α) Αν η αναπαραμέτριση διατηρεί τον προσανατολισμό της καμπύλης, τότε

$$\int_{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}} \omega = \int_{\boldsymbol{\Phi}} \omega$$

β)) Αν η αναπαραμέτριση αντιστρέφει τον προσανατολισμό της καμπύλης, τότε

$$\int_{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}} \omega = -\int_{\boldsymbol{\Phi}} \omega$$

Ύστερα από αυτό, θεωρούμε ότι στον ορισμό της επιφάνειας S έχει ενσωματωθεί ο προσανατολισμός και γράφουμε

$$\int_S \omega$$

Αναφερόμαστε στο ολοκλήρωμα αυτό ως το επιφανειακό ολοκλήρωμα της ω επί της επιφάνειας S. Η επιφάνεια με αντίθετο προσανατολισμό συμβολίζεται με $-S$ και άρα ισχύει

$$\int_{-S} \omega = -\int_S \omega$$

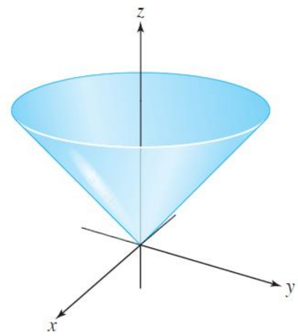
2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θεωρούμε τη 2-διαφορική μορφή

$$\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z^4\, dx \wedge dy$$

δηλαδή $a(x,y,z) = x$, $b(x,y,z) = y$, $c(x,y,z) = z^4$. Θεωρούμε επίσης τον κώνο

$$z^2 = x^2 + y^2 \ , \qquad 0 \leq z \leq 1$$

προσανατολισμένο από την εξωτερική πλευρά, οπότε το κάθετο διάνυσμα «δείχνει» προς τα κάτω.



Μια παραμέτρηση της επιφάνειας αυτής δίνεται τότε από την

$$S\ :\ \boldsymbol{\Phi}(u,v)=(v\cos u\,,v\sin u\,,v)\ ,\qquad 0\le u\le 2\pi\,,0\le v\le 1$$

δηλαδή $\chi(u,v)=v\cos u$, $\psi(u,v)=v\sin u$, $\zeta(u,v)=v$. Οπότε

$$\frac{D(\psi,\zeta)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} v\cos u & \sin u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=v\cos u$$
$$\frac{D(\zeta,\chi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v\sin u & \cos u \end{vmatrix}=v\sin u$$
$$\frac{D(\chi,\psi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix}=-v$$

Δηλαδή το κάθετο διάνυσμα είναι $\boldsymbol{N}=(v\cos u\,,v\sin u\,,-v)^T$ και το μείον στην τρίτη συνιστώσα εξασφαλίζει ότι αυτό πράγματι «δείχνει» προς τα κάτω. Είναι, λοιπόν,

$$\boldsymbol{\Phi}^*\omega=v^2\cos^2 u+v^2\sin^2 u-v^5=v^2-v^5$$

Άρα

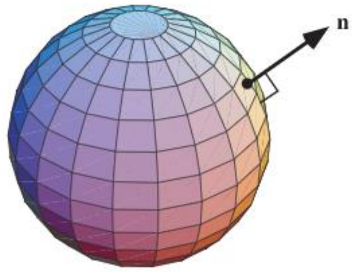
$$\int_S \omega=\int_D \boldsymbol{\Phi}^*\omega=\iint_D (v^2-v^5)\,du\,dv=\int_0^1\int_0^{2\pi}(v^2-v^5)\,du\,dv$$
$$=\left(\int_0^{2\pi}du\right)\left(\int_0^1(v^2-v^5)\,dv\right)=2\pi\left[\frac{v^3}{3}-\frac{v^6}{6}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}$$

Θα κλείσουμε κάνοντας μια αναφορά στα θεωρήματα Gauss και Stokes. Και για τις δύο περιπτώσεις, το βασικό πρόβλημα είναι να ορίσουμε σωστά την έννοια του θετικού προσανατολισμού. Όσον αφορά τις επιφάνειες για το θεώρημα του Gauss, ακολουθούμε, κατά κάποιον τρόπο, αντίστροφη πορεία απ’ ότι με τις καμπύλες για το θεώρημα του Green.

4. ΟΡΙΣΜΟΣ Μια επιφάνεια $S\subseteq\mathbb{R}^3$ ονομάζεται κλειστή αν είναι το σύνορο ενός απλά συνεκτικού τόπου $U\subseteq\mathbb{R}^3$, δηλαδή $S=\partial U$.

Δηλαδή η κλειστή επιφάνεια παίζει τον αντίστοιχο ρόλο της καμπύλης Jordan, αφού χωρίζει τον $\mathbb{R}^3$ σε δύο απλά συνεκτικούς τόπους, έναν φραγμένο (εσωτερικό της S) και έναν μη φραγμένο (εξωτερικό της S). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η κλειστή επιφάνεια S είναι ομαλή και κανονική, επομένως το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, $\boldsymbol{n}$, ορίζεται καλώς. Μια τέτοια επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη αφού το $\boldsymbol{n}$ μπορεί να δείχνει είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό της S.

5. ΟΡΙΣΜΟΣ Η S ονομάζεται θετικά προσανατολισμένη αν το πέρας του $\boldsymbol{n}$ βρίσκεται στο εξωτερικό της S.



Για μια θετικά προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια S ορίζεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας διαφορικής 2-μορφής ω και συμβολίζεται

$$\oiint_S \omega$$

6. ΠΡΟΤΑΣΗ (Θεώρημα Απόκλισης του Gauss) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ φραγμένος απλά συνεκτικός τόπος, όπου το σύνορο, ∂U είναι μια (τμηματικά) ομαλή κανονική επιφάνεια. Έστω ακόμη

$$\omega = a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy$$

μια διαφορική 2-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \supseteq V$. Ισχύει τότε

$$\oiint_{\partial U} \omega = \int_U d\omega \iff$$

$$\oiint_{\partial U} a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy = \int_U \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \iff$$

$$\oiint_{\partial U} a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy = \iiint_U \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz$$

όπου $\boldsymbol{F} = (a, b, c)^T$.

$*$ Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον τύπο 2.7.(3).

Όσον αφορά το θεώρημα Stokes, η κατάσταση είναι λίγο πιο πολύπλοκη. Εδώ χρειάζεται να ορίσουμε με ξεκάθαρο τρόπο τι είναι σύνορο μιας επιφάνειας και πώς αυτό προσανατολίζεται θετικά. Έστω, λοιπόν, $S \subseteq \mathbb{R}^3$ μια ομαλή και κανονική επιφάνεια που έχει παραμετροποίηση

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(u,v) \ , \qquad (u,v) \in D$$

όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο σύνολο) και το σύνορο ∂D είναι μια ομαλή καμπύλη Jordan. Υποθέτουμε ότι η S είναι προσανατολίσιμη και άρα η $\boldsymbol{\Phi}$ επάγει ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, $\boldsymbol{n}$, το οποίο καθορίζει την πλευρά της επιφάνειας. Θεωρούμε επίσης ότι η $\boldsymbol{\Phi}$ είναι 1-1 συνάρτηση και άρα η S είναι απλή.

7. ΟΡΙΣΜΟΣ Ονομάζουμε σύνορο της επιφάνειας S την εικόνα του ∂D μέσω της $\boldsymbol{\Phi}$, δηλαδή $\partial S = \boldsymbol{\Phi}(\partial D)$.

Ο θετικός προσανατολισμός του ∂S προκύπτει ως εξής: αν

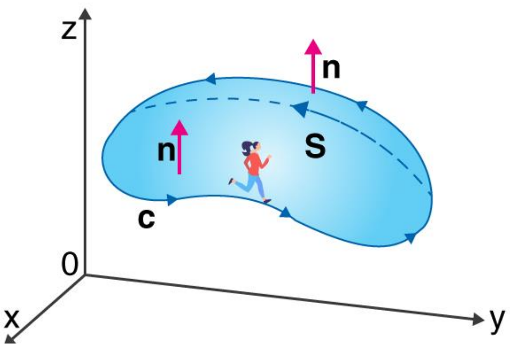
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(u(t), v(t)\big) \ , \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

είναι μια παραμετροποίηση της επίπεδης καμπύλης ∂D που επάγει τον θετικό προσανατολισμό, τότε η παραμετροποίηση

$$\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{\gamma}(t)\big) = \boldsymbol{\Phi}\big(u(t), v(t)\big) \ , \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

προσανατολίζει θετικά την καμπύλη ∂S στον $\mathbb{R}^3$.

Ο θετικός προσανατολισμός της ∂S είναι συμβατός με το διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ υπό την εξής έννοια: αν κάποιος περπατάει επί της ∂S από την πλευρά που ορίζει το $\boldsymbol{n}$, τότε έχει την επιφάνεια στα αριστερά του. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι έχουμε μια άμεση γενίκευση του θετικού προσανατολισμού για επίπεδες καμπύλες Jordan στον χώρο.



8. ΠΡΟΤΑΣΗ (Θεώρημα του Stokes) Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ μια ομαλή, κανονική, απλή και προσανατολίσιμη επιφάνεια με σύνορο ∂S. Έστω ακόμη

$$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

μια διαφορική 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $\Omega \supseteq S$. Ισχύει τότε

$$\oint_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \iff$$

$$\oint_{\partial S} a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

∗ Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον τύπο 2.7.(2).

9. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θεωρούμε την 1-διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^3$

$$\omega = y\,dx + xz\,dy + dz$$

δηλαδή $a(x,y,z) = y$, $b(x,y,z) = xz$, $c(x,y,z) = 1$. Παίρνοντας $\boldsymbol{V} = (a,b,c)^T = (y, xz, 1)^T$, είναι

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & 1 \end{vmatrix} = (0 - x)\boldsymbol{i} - (0 - 0)\boldsymbol{j} + (z - 1)\boldsymbol{k} = (-x, 0, z - 1)^T$$

και άρα

$$d\omega = -x\,dy \wedge dz + 0\,dz \wedge dx + (z - 1)\,dx \wedge dy$$

Έστω ακόμη το άνω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$, που περιγράφεται από την εξίσωση

$$S\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ , \qquad z \geq 0$$

Η επιφάνεια αυτή παραμετροποιείται από την

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = (\sin u \cos v\,, \sin u \sin v\,, \cos u)\ , \qquad D : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\,, 0 \leq v \leq 2\pi$$

δηλαδή $\chi(u,v) = \sin u \cos v$, $\psi(u,v) = \sin u \sin v$, $\zeta(u,v) = \cos u$. Οπότε

$$\frac{D(\psi,\zeta)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v$$

$$\frac{D(\zeta,\chi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \end{vmatrix} = \sin^2 u \sin v$$

$$\frac{D(\chi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = \cos u \sin u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v$$
$$= \cos u \sin u$$

Δηλαδή το κάθετο διάνυσμα είναι $\boldsymbol{N} = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \cos u \sin u)^T$, η τρίτη συνιστώσα είναι θετική και άρα «δείχνει» προς τα πάνω. Αυτό σημαίνει ότι το ημισφαίριο είναι προσανατολισμένο από την εξωτερική πλευρά. Θα είναι, λοιπόν,

$$\boldsymbol{\Phi}^*(d\omega) = -\sin^3 u \cos^2 v + (\cos u - 1)\cos u \sin u$$

Άρα

$$\int_S d\omega = \int_D \boldsymbol{\Phi}^*\omega$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [-\sin^3 u \cos^2 v + (\cos u - 1)\cos u \sin u]\, dv du$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sin^3 u \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v \ dv\right) + (\cos u - 1)\cos u \sin u \left(\int_0^{2\pi} dv\right)\right] du$$

Αλλά είναι

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 v \ dv = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2v}{2} dv = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dv + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2v \ dv$$
$$= \frac{1}{2}[v]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}[\sin 2v]_0^{2\pi} = \pi$$

Άρα

$$\int_S d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\pi \sin^3 u + 2\pi(\cos u - 1)\cos u \sin u] du$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 u + 2\cos^2 u - 2\cos u)\sin u \ du$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 u - 2\cos u - 1)\sin u \ du$$

$$= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 u - 2\cos u - 1)\, d(\cos u)$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $s = \cos u$, οπότε

$$\int_S d\omega = -\pi \int_1^0 (3s^2 - 2s - 1)\, ds = \pi \int_0^1 (3s^2 - 2s - 1)\, ds = \pi[s^3 - s^2 - s]_0^1 = -\pi$$

Το σύνορο της S προκύπτει όταν $z = 0$ και άρα είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο xy-επίπεδο,

$$x^2 + y^2 = 1 \ , \qquad z = 0$$

Θα είναι, λοιπόν, $u = \frac{\pi}{2}$ και $v = t$, άρα το ∂S παραμετροποιείται κατά τη θετική φορά από τη

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = (\cos t, \sin t, 0) \ , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Επομένως

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

και άρα

$$\boldsymbol{\gamma}^*\omega = -\sin^2 t$$

Στη συνέχεια,

$$\oint_{\partial S} \omega = \int_{[0,2\pi]} \boldsymbol{\gamma}^*\omega = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \ dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1 - \cos 2t}{2}\ dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t \ dt = -\frac{1}{2}[t]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}[\sin 2t]_0^{2\pi} = -\pi$$

και το θεώρημα Stokes επαληθεύεται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αρβανιτογεώργος, Α. (2015). *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα (www.kallipos.gr).

DoCarmo, M.P. (2010). *Διαφορικές Μορφές: Θεωρία και Εφαρμογές*. Αθήνα: Εκδόσεις L.B.

Edwards, C.H. Jr (1973), *Calculus of Several Variables*. New York: Academic Press.

Eliashberg, Y. (2018). Multilinear algebra, differential forms and Stokes' theorem, Ανακτήθηκε 21 Μαΐου 2022 από http://math.stanford.edu/~eliash/Public/math177/177-diff-forms.pdf

Guillemnin, V. & Haine, P.J. (2019). *Differential Forms*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

Hitchin, N. (2014). Differentiable manifolds, Ανακτήθηκε 22 Μαΐου 2022 από https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/files/LectureNotes/Differentiable_manifolds/manifolds2014.pdf

Lucht, P. (2016). Tensor Products, Wedge Products and Differential Forms, Ανακτήθηκε 22 Μαΐου 2022 από https://www.researchgate.net/publication/303810058_Tensor_Products_Wedge_Products_and_Differential_Forms

Marsden, J.E. & Tromba, A. (2012), *Vector Calculus (6th Edition)*, New York: W.H. Freeman and Company.

Σταματάκης, Σ. (2008). *Εισαγωγή στην Κλασική Διαφορική Γεωμετρία*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Αϊβάζης.

Tu, L.W. (2010). *An Introduction to Manifolds (2nd Edition)*. New York: Springer.