



«Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας »
«Μεταπτυχιακή Ειδίκευση Καθηγητών Φυσικών
Επιστημών»

Διπλωματική Εργασία

«Ανάπτυξη θεωρητικής προσέγγισης της θεωρίας της σχετικότητας
για καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.»

«Μαντζόλης Ευάγγελος »

Επιβλέπων καθηγητής: Κεχαγιάς Αλέξανδρος

Πάτρα, Μάιος, 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



«Ανάπτυξη θεωρητικής προσέγγισης της θεωρίας της σχετικότητας
για καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.»

Μαντζόλης Ευάγγελος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Κεχαγιάς Αλέξανδρος

Καθηγητής Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε Ε.Μ.Π

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Λείσος Αντώνιος

Επικ. Καθηγητής Ε.Α.Π

Πάτρα, Μάιος 2022

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου, καθηγητή Κύριο Κεχαγιά Αλέξανδρο για την βοήθεια και τη συμπαράστασή του.

Αφιερώνω την εργασία μου στην σύζυγό μου και στην κόρη μου.

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο, διατάσσονται σε μία χρονολογική κλίμακα τα σημαντικότερα εμπειρικά δεδομένα και θεωρητικές προσεγγίσεις των φυσικών πριν τη διατύπωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Καταγράφονται οι προσπάθειες του Lorentz και Poincare σχετικά με τον ηλεκτρομαγνητισμό και την απόλυτη κίνηση. Μέσα από το άρθρο του Einstein «Για ηλεκτροδυναμική των κινούμενων σωμάτων παρατίθενται τα αξιώματα της σχετικότητας και η παραγωγική μέθοδος που επέλεξε ο Αϊνστάιν για να καταλήξει στο κινηματικό υπόβαθρο της θεωρίας του. Εν συνεχεία, διατυπώνεται η Νευτώνεια άποψη για τον χώρο και τον χρόνο και δίνεται το πλαίσιο της κλασσικής φυσικής για τον μετασχηματισμό της θέσης και της επιτάχυνσης καθώς και ο νόμος της πρόσθεσης των ταχυτήτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται η ασυμβατότητα των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου με τις εξισώσεις του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό. Περιγράφεται και αναλύεται το «κρίσιμο» πείραμα Michelson - Morley καθώς και οι προσπάθειες των φυσικών του 19ου αιώνα να ερμηνεύσουν το αρνητικό αποτέλεσμα του κρίσιμου πειράματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο τρία νοητικά πειράματα που σχετίζονται με το πρόβλημα της ταυτοχρονίας , της διαστολής του χρόνου και της συστολής του μήκους εισάγουν το πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Αποδεικνύονται οι μετασχηματισμοί Lorentz και δίνεται έμφαση στη γεωμετρία του χωροχρόνου. Το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου εξετάζεται διεξοδικά, με την αναφορά στο πείραμα J.C. Hafene and R.F Keating και τον εντοπισμό των μιονίων στη γη. Το κινηματικό υπόβαθρο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας περιορίζεται στο μετασχηματισμό της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Ολοκληρώνεται το τρίτο κεφάλαιο με την ανάλυση του σχετικού φαινομένου Doppler και το φαινόμενο του παράδοξου των διδύμων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο αποδεικνύεται η σωστή έκφραση της σχετικιστικής μάζας και ορμής από την οποία προκύπτει η σχετικιστική ενέργεια. Γίνεται αναφορά στο πείραμα Bertozzi και παρουσιάζεται η περίπτωση σωμάτων χωρίς μάζα. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τους μετασχηματισμούς ενέργειας και ορμής καθώς και με το φαινόμενο Compton

Λέξεις – Κλειδιά

Νευτώνεια μηχανική, μετασχηματισμοί Lorentz, γεωμετρία Minkowski , σχετικιστική ορμή.

«Theoretical Approach of Theory of Relativity for High School Teachers»

Evangelos Mantzolis

Abstract

In the first chapter, the most important empirical data and theoretical approaches of physicists before the formulation of the special theory of relativity are arranged on a chronological scale. Through Einstein's article, "Electrodynamics of moving bodies" are listed principles of relativity and the productive method that Einstein chosen to end up in the kinematic background of his theory .

The approaches of Lorentz and Poincaré on electromagnetism and absolute movement are recorded. After that, the Newtonian view of space and time is formulated. The framework of classical physics for the transformation of position and acceleration and the law of addition of velocities are given.

In the second chapter, the incompatibility of Galileo's transformations with Maxwell's equations for electromagnetism is demonstrated. The "critical" Michelson-Morley experiment is described and analyzed as well as the attempts of 19th century physicists to interpret the negative result of the experiment.

In the third chapter, three mental experiments related to the problem of simultaneity, time dilation and length contraction introduce the framework of the special theory of relativity. Lorentz' transformations are proved and the geometry of space-time is emphasized. The phenomenon of time dilation is thoroughly examined, with reference to the experiment J.C Hafene and R.F Keating and the detection of muons on earth. The kinematic background of special relativity is limited to the transformation of velocity and acceleration. The third chapter is completed with the analysis of the relativistic Doppler effect and the twin paradox phenomenon.

In the last chapter the correct expression of the relativistic mass and momentum from which the relativistic energy is derived is proven. Reference is made to the Bertozzi experiment and the case of particles without mass is presented. Chapter concludes with energy and momentum transformations as well as with Compton phenomenon.

Keywords

Newtonian mechanics, Lorentz transformations, Minkowski geometry, relativistic momentum..

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract	vii
Περιεχόμενα	ix
Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων	xi
Κατάλογος Πινάκων	xv
Συνομογραφίες & Ακρωνύμια.....	xvi
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Η ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ	1
1.1 Σύντομη ιστορική ανασκόπηση.....	1
1.2 Ο χώρος και ο χρόνος στην Νευτώνεια αντίληψη.	4
1.3 Η συμμετρία στον φυσικό κόσμο.	6
1.3.1 Χωρική μετατόπιση.....	6
1.3.2 Περιστροφές.	8
1.4 Αδρανειακά συστήματα αναφοράς.....	10
1.5 Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.....	11
1.5.1 Μετασχηματισμός θέσης –χρόνου.....	12
1.5.2 Μετασχηματισμός ταχύτητας –επιτάχυνσης.....	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ηλεκτρομαγνητισμός και νευτώνεια μηχανική.	14
2.1. Το πρόβλημα του H/M	14
2.1.1 Πρόσθεση ταχυτήτων και φώς	14
2.1.2 Η κυματική εξίσωση και οι μετασχηματισμός Γαλιλαίου	15
2.2 Το πείραμα των Michelson – Morley.....	17
2.2.1 Περιγραφή- αποτελέσματα του πειράματος	18
2.2.2 Κλασσικές ερμηνείες του πειράματος.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μετασχηματισμοί Lorentz-Γεωμετρία του χωροχρόνου.....	25
3.1 Τα αξιώματα της Ε.Θ.Σ και οι πρώτες συνέπειες αυτών μέσα από τρία νοητικά πειράματα.....	25
3.1.1 Η σχετικότητα του ταυτόχρονου	25
3.1.2. Η διαστολή του χρόνου	27
3.1.3 Η συστολή του μήκους	30

3.2 Μετασχηματισμός Lorentz	33
3.2.1 Απόδειξη του μετασχηματισμού	33
3.3 Η γεωμετρία του επίπεδου χωροχρόνου	39
3.3.1 Χωροχρονικά διαγράμματα.....	39
3.3.2 Γεωμετρική σημασία του μετασχηματισμού Lorentz	46
3.3.3 Κώνοι φωτός – Αιτιότητα.....	51
3.4 Πειραματική απόδειξη διαστολής του χρόνου.	55
3.4.1 Τα μόνια.....	55
3.4.2 Το πείραμα των Hafele και Keating	57
3.5 Σχετικιστική μηχανική.....	62
3.5.1 Μετασχηματισμοί ταχύτητας- επιτάχυνσης.....	62
3.5.2 Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler	67
3.5.3 Το πείραμα των Ives και Stilwell.....	69
3.5.4 Ο ιδιοχρόνος.	73
3.5.5 Το παράδοξο των διδύμων.....	74
Κεφ 4 Ορμή ενέργεια	77
4.1 Σχετικιστική μάζα και ορμή	77
4.2 Σχετικιστική ενέργεια	84
4.2.1 Ενέργεια ηρεμίας – κινητική ενέργεια	84
4.2.2 Το όριο της ταχύτητας – Το πείραμα Bertozzi.....	88
4.3 .Ενέργεια και ορμή σώματος μηδενικής μάζας.....	90
4.4 Μετασχηματισμοί ενέργειας και ορμής.....	92
4.5 Το αναλλοίωτο μέγεθος ορμής – ενέργειας.....	94
4.5.1 Το αναλλοίωτο για ένα σώμα.....	94
4.5.2 Αναλλοίωτη μάζα συστήματος σωμάτων.....	95
4.6 Διαθέσιμη Ενέργεια.....	98
4.7 Φαινόμενο Compton.	101
Συμπεράσματα	105
Βιβλιογραφία.....	108

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Σχήμα 1. 1 Το σύστημα Σ' κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα v προς το σύστημα Σ και με παράλληλους τους άξονές τους.....	7
Σχήμα 1.2 Δυο συστήματα συντεταγμένων με διαφορετικούς γωνιακούς προσανατολισμούς.	9
Σχήμα 1. 3. Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς το $Oxyz$ ακίνητο και το $O'x'y'z'$ να κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική φορά των κοινών αξόνων xx	12
Σχήμα 2. 1 Σχηματική αναπαράσταση του συμβολόμετρου Michelson – Morley.	18
Σχήμα 2.2 Η εικόνα των κροσσών συμβολής στην οθόνη του τηλεσκοπίου.	19
Σχήμα 3.1 Ένα τρένο κινείται με σχετική ταχύτητα V ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή O στην αποβάθρα. Στις άκρες του τρένου υπάρχουν δυο πηγές φωτός A και B . Όταν η θέση του παρατηρητή O' , που βρίσκεται στο μέσο του τρένου συμπίπτει με τη θέση του O , δυο παλμοί φωτός φθάνουν στο ίδιο σημείο, έχοντας εκπεμπει από τις πηγές A και B αντίστοιχα.	25
Σχήμα 3.2 Ο παρατηρητής του τρένου βλέπει την ταυτόχρονη λήψη των σημάτων ως αποτέλεσμα της ταυτόχρονης εκπομπής τους.	26
Σχήμα 3.3 Ο παρατηρητής της αποβάθρας βλέπει τα σήματα ταυτόχρονα . Όταν εκπέμπεται ο παλμός από την πηγή A ο παρατηρητής O' του τρένου δεν έχει φθάσει ακόμη στη θέση που βρίσκεται ο O	26
Σχήμα 3.4 Δύο παρατηρητές μετράνε τη διάρκεια του ίδιου ταξιδιού ενός φωτεινού παλμού. Ο παρατηρητής O' βρίσκεται ακίνητος σε ένα όχημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον ακίνητο παρατηρητή O του εδάφους.	27
Σχήμα 3.5 Η συστολή του μήκους σε κινούμενη ράβδο.....	30
Σχήμα 3. 6 Δυο συστήματα αναφοράς Σ και Σ' σε σχετική κίνηση μεταξύ τους .Η ταχύτητα του Σ' είναι $\vec{v} = v\vec{x}$. Τη χρονική στιγμή $t=t'=0$ συμπίπτουν οι άξονες των συστημάτων.....	33

Σχήμα 3.7 Αδρανειακά συστήματα Σ κα Σ' με παράλληλους τους άξονές τους, και με το Σ' να κινείται με γενική διανυσματική ταχύτητα u ως προς το Σ	38
Σχήμα 3. 8 Σχηματική παράσταση υπερβολειδούς σε τρεις διαστάσεις.....	40
Σχήμα 3. 9. Χωροχρονικό διάγραμμα με κοσμικές γραμμές σωμάτων σε διαφορετικές κινητικές καταστάσεις.....	41
Σχήμα 3.10 Στο χωροχρονικό διάγραμμα φαίνεται η κοσμική ιστορία ενός σωματιδίου και του φωτός.....	42
Σχήμα 3.11 Διάγραμμα Minkowski με τους άξονες(ct , x) για το σύστημα Σ και $(ct'$, x') για το σύστημα Σ' που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα u	43
Σχήμα 3.12 Βαθμονόμηση των αξόνων του διαγράμματος $(ct'$, $x')$ με τις υπερβολές $(ct)^2 - x^2 = 1$ και $x^2 - (ct)^2 = 1$	43
Σχήμα 3. 13 Διάγραμμα Minkowski για τη συστολή του μήκους κινούμενης ράβδου	45
Σχήμα 3. 14 Υπερβολική στροφή των αξόνων του «κινούμενου» συστήματος αναφοράς $(ct'$, $x')$	47
Σχήμα 3.15 Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου $(ct$, x) που απέχουν σταθερή χωροχρονική απόσταση R από την αρχή των αξόνων.	48
Σχήμα 3.16 Χωροχρονικό διάγραμμα για την στροφή των αξόνων ενός συστήματος αναφοράς Σ' το οποίο κινείται με αρνητική ταχύτητα ως προς το σύστημα Σ	49
Σχήμα 3.17 Γεωμετρική δυναμική παρουσίαση του μετασχηματισμού Lorentz. Καθώς η σχετική ταχύτητα μεταξύ των πλαισίων μεταβάλλεται ο μετασχηματισμός μετακινεί τα σημεία πάνω στην ίδια υπερβολή.	51
Σχήμα 3.18 Ο κώνος φωτός ενός χωροχρονικού σημείου P σε τρεις διαστάσεις.....	53
Σχήμα 3.19. Δισδιάστατη τομή $(ct$, x) του τρισδιάστατου χωροχρόνου	53
Σχήμα 3. 20 Η κοσμική γραμμή ενός σώματος εμπεριέχεται στον κώνο φωτός του κάθε σημείου της.	54
Σχήμα 3. 21 Η χρονική ακολουθία των σημείων A κα P εξαρτάται από την επιλογή του $A.S.A$	55

Σχήμα 3. 22 Το ρολόι P ₀ βρίσκεται ακίνητο σε ένα σημείο της Γης. Ένα δεύτερο πανομοιότυπο ρολόι P περιστρέφεται γύρω από τη Γη σε μικρό ύψος.....	59
Σχήμα 3.23. Οι Σ και Σ' παρατηρούν σώμα που κινείται στο χώρο με ταχύτητα υ κινούμενο στο χώρο.	62
Σχήμα 3. 24 Γενικό φαινόμενο Doppler. Φωτεινή πηγή κινείται με ταχύτητα V ,σχηματίζοντας γωνία θ, ι από ακίνητο παρατηρητή Ο.	67
Σχήμα 3. 25 Φασματογράμματα μιας γραμμής Balmer H _b που εκπέμπονται από τα προς τα εμπρός ή από τα προς τα πίσω άτομα υδρογόνου για τρεις διαφορετικές τάσεις που εφαρμόστηκαν για την επιτάχυνση των ιόντων H ₂ ⁺ και H ₃ ⁺ . Πηγή : Journal of the opticalSociety of America, vol 28, Jule 1938.	72
Σχήμα 3. 26 Γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων από το πείραμα Ives and Stillwell. Πηγή : Journal of the opticalSociety of America, vol 28, Jule 1938.	72
Σχήμα 3. 27 Ο ιδιοχρόνος. Ένα ρολόι μετράει τον ιδιοχρόνο , όταν κινείται κατά μήκος της χρονοειδούς κοσμική του γραμμή	73
Σχήμα 3. 28 Χωροχρονικό διάγραμμα του παράδοξου των διδύμων.....	75
Σχήμα 4. 1 Μεταβολή της μάζας συναρτήσει της ανηγμένης ταχύτητας u/c , για μάζα ηρεμίας m ₀ του σώματος.....	82
Σχήμα 4. 2 Μεταβολή της ορμής στη σχετικότητα και στην κλασσική φυσική συναρτήσει της ανηγμένης ταχύτητας u/c , για μάζα ηρεμίας m ₀ του σώματος.	83
Σχήμα 4.3 Καμπύλες κινητικής ενέργειας σα συνάρτηση της ταχύτητας . Η σχετικιστική καμπύλη είναι υπερβολή για χαμηλές ταχύτητες και προσεγγίζει το άπειρο στο όριο της ταχύτητας του φωτός.....	87
Σχήμα 4.4 Γεωμετρικός μνημονικός κανόνας για την σχέση E ² =m ₀ ² c ⁴ +c ² p ²	88
Σχήμα 4.5 Η πειραματική διάταξη του W. Bertozzi για την διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ταχύτητας και της κινητικής ενέργειας ηλεκτρονίων. πηγή:W. Bertozzi, "Speed and kinetic energy of relativistic electrons" Am. J. of Phys., 32, 551 (1964).....	88
Σχήμα 4.6 Γραφική παράσταση κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με το τετράγωνο της ανηγμένης ταχύτητας.	90

Σχήμα 4. 7 Καμπύλες ορμής σωμάτων με διαφορετικές μάζες σε συνάρτηση με την ταχύτητα του κάθε σώματος.	91
Σχήμα 4. 8 Το πρίν και το μετά μιας σύγκρουσης δυο σωματιδίων σε δυο συστήματα αναφοράς. Οι ποσότητες που διατηρούνται είναι οι ίδιες από πάνω προς τα κάτω για το ίδιο σύστημα. Οι αναλλοίωτες ποσότητες είναι ίδιες από αριστερά προς δεξιά (δηλ στα διαφορετικά συστήματα αναφοράς).....	96
Σχήμα 4. 9 Σύγκρουση σωμάτων στο εργαστήριο για την παραγωγή νέας μάζας.....	98
Σχήμα 4. 10 Η ίδια σύγκρουση με το σχήμα 4.9 στο σύστημα κέντρο της ορμής.	100
Σχήμα 4. 11 Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποίησε ο Compton.....	102
Σχήμα 4.12 Φάσματα των ακτίνων X που καταγράφηκαν στα πειράματα του Compton	102
Σχήμα 4. 13 Σχηματική παράσταση σκέδασης Compton.	103

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1 J.C Hafele; Richard E. Kreating	58
---	----

Συνομογραφίες & Ακρωνύμια

Ακολουθούν κάποια παραδείγματα:

ΔΕ	Διπλωματική Εργασία
ΕΑΠ	Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Ε.Θ.Σ	Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.
Η/Μ	Ηλεκτρομαγνητισμός.
Α.Σ.Α	Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Η ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

1.1 Σύντομη ιστορική ανασκόπηση.

Στις απαρχές του εικοστού αιώνα δύο νέες θεωρίες, η θεωρία της σχετικότητας και κβαντική φυσική, συνέβαλαν ριζοσπαστικά στον τρόπο πού επιστήμονες και φιλόσοφοι άρχισαν να αντιλαμβάνονται την φύση. Για πρώτη φορά εισάγονται στο χώρο της επιστήμης νέες ιδέες - αρχές που αντιβαίνουν στις αισθήσεις μας και στην κοινή λογική. Η Ειδική θεωρία της σχετικότητας στηρίχτηκε στην ορθολογιστική κριτική της ανθρώπινης αντίληψης του χώρου και του χρόνου και των μετρήσεών τους . Γεννήθηκε από την αδυναμία της φυσικής του 19ου αιώνα να ερμηνεύσει κομβικά θεωρητικά σημεία της φυσικής (παραδείγματος χάριν το αναλλοίωτο των ηλεκτρομαγνητικών νόμων κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου). Ακόμη, στο πλαίσιο προβληματισμού της σχετικότητας, αν και δεν προοριζόταν εξαρχής για την επίλυσή τους, ερμηνεύονται εμπειρικές αντιφάσεις (πειραματικά και παρατηρησιακά δεδομένα) στις οποίες ενεπλάκησαν οι παλιές θεωρίες, Για την ιστορική προσέγγιση της γέννησης της ειδικής θεωρίας προεξέχοντα ρόλο έχει η γνώση του Einstein για τα επιτεύγματα προηγούμενων επιστημόνων στα ίδια προβλήματα. Επίκαιρο είναι επίσης το ερώτημα αν ειδική θεωρία της σχετικότητας αποτελεί απλώς μία σύννοψη και ολοκλήρωση των προσπαθειών και επιτευγμάτων των προγενέστερων του Αϊνστάιν φυσικών. Για την κατανόηση της παραπάνω προβληματικής θα παραθέσουμε με χρονολογική σειρά τα σημαντικότερα γεγονότα που προϋπήρχαν της σχετικότητας και αποτελούσαν σημεία τριβής με την κλασική φυσική.

Το 1632 διατυπώνεται από τον Γαλιλαίο ο νόμος της αδράνειας και η αρχή της σχετικότητας στο σύγγραμμά του « διάλογος σχετικά με δυο κοσμικά συστήματα - το Πτολεμαϊκό και το Κοπερνίκειο».

Το 1644 ο Καρτέσιος εισάγει μηχανικές ιδιότητες στον αιθέρα και τον θεωρεί ως τον φορέα μεταφοράς των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ σωμάτων. Επεκτείνεται διαδοχικά η αναβάθμιση των ιδιοτήτων του αιθέρα, αρχικά από τον Hooke ως το μέσο στο οποίο διαδίδονται το φως, στη συνέχεια από τον Faraday ως το μέσο μεταφορά των μαγνητικών δυνάμεων και τέλος από τον Gauss του προστίθεται η ικανότητα του να μεταφέρει ηλεκτρικές δυνάμεις.

Το 1676 γίνεται, από αστυνομικές παρατηρήσεις, η πρώτη προσέγγιση της ταχύτητα του φωτός από τον Romer .

Το 1687 αποτελεί το έτος δημοσίευσης του σημαντικού βιβλίου "Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας" από τον Νεύτωνα. Στο σύγγραμμα παρατίθενται οι τρεις νόμοι της κίνησης και εδραιώνεται η ιδέα του απόλυτου συστήματος αναφοράς και κατά επέκταση ο απόλυτος χώρος και χρόνος.

Το 1725, ο Bradley, μέσα από αστρονομικές παρατηρήσεις του σχετικά με το φαινόμενο της παράλλαξης των αστερών, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η φαινομενική μετατόπιση των αστερών οφείλεται στο συνδυασμό της περασμένης ταχύτητας του φωτός και στην περιφορά της Γης γύρω από τον ήλιο. Από την θεωρητική ερμηνεία των παρατηρησιακών του δεδομένων προκύπτει μία ακριβής τιμή της ταχύτητας του φωτός.

Το 1810 ο Arago διαπιστώνει ότι το προερχόμενο από τα άστρα ταχύτητα φως έχει την ίδια ταχύτητα ακόμη και όταν υπάρχει σχετική κίνηση της Γης ως προς αυτά. Για την ερμηνεία του αποτελέσματος ο Fresnel υπολογίζει έναν συντελεστή παράσυρσης του ρεύματος του αιθέρα από τη Γη.

Το 1842 μέσω του φαινομένου Doppler επιτυγχάνεται η μέτρηση της ταχύτητας φωτεινών πηγών .

Το 1849 πραγματοποιείται εργαστηριακή μέτρηση της ταχύτητας του φωτός από τους Fizeau και Foucault.

Το 1851 διαπιστώνεται εργαστηριακά, η διαφορετική ταχύτητα του φωτός στο νερό όταν αυτό κινείται και όταν παραμένει ακίνητο. Η διαφορετική ταχύτητα ερμηνεύεται με την θεωρία του Fresnel περί της εφέλκυσης του αιθέρα από το μέσο.

Το 1861 διατυπώνονται οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού από τον Maxwell κάμπτοντας οποιαδήποτε αμφισβήτηση για την ύπαρξη του αιθέρα. Κάθε άλλο παρά ποτέ φαινόταν αναγκαία η ύπαρξη του για την ερμηνεία των φαινομένων του ηλεκτρομαγνητισμού.

1887 Βελτιωμένο πείραμα από τους Michelson – Morley. Το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος δεν δείχνει καμία κίνηση της Γης ως προς τον αιθέρα.

Το 1892 το αποτέλεσμα του πειράματος Michelson – Morley ερμηνεύεται, από τον Lorentz, με την υπόθεση της συστολής των σωμάτων στην κατεύθυνση της κίνησής τους.

Στην περίοδο 1894 – 1896 , η ανακάλυψη του ηλεκτρονίου από τον Thomson και της ραδιενέργειας από τον Becquerel δίνουν την δυνατότητα σχεδιασμού πειραμάτων με σωματίδια σε μεγάλες ταχύτητες. Το 1902 ο Kaufmann πραγματοποιεί ένα τέτοιο πείραμα στο οποίο παρατηρείται μεταβολή της μάζας ταχέως κινούμενων ηλεκτρονίων με ταχύτητα που κυμαίνονταν στο 0,8 – 0,9 της ταχύτητας του φωτός.

Ήδη από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα οι επεξεργασίες των Lorentz και Poincare σχετικά με τα ζητήματα του H/M αντιμετωπίζονται με θετικό πρόσημο από την επιστημονική κοινότητα της εποχής. Αρκετά στοιχεία των παρεμβάσεων τους περιέχονται στην Ε.Θ.Σ. Χαρακτηριστικά, το 1904 ο Lorentz απέδειξε τους ομώνυμους, μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις του H/M στο κενό. Από τους μετασχηματισμούς του συνεπάγει την διαστολή του χρόνου, την οποία θεωρεί « μαθηματικό αποτέλεσμα χωρίς φυσική υπόσταση» και τη συστολή του μήκους . που τη θεωρεί ως πραγματική . (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006).

Ταυτόχρονα την ίδια χρονική περίοδο ο Γάλλος Poincare ασχολείται με την αποσαφήνιση της έννοιας της ταυτοχρονίας και της αντικειμενικότητας στην μέτρηση του χρόνου. Το 1904 σε μια ομιλία του σε ένα Διεθνές συνέδριο διατυπώνει « ενδεχομένως πρέπει να διατυπώσουμε μια νέα μηχανική... όπου η ταχύτητα του φωτός θα γίνει ένα όριο που δεν θα μπορεί να ξεπεραστεί» (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006).

Για τον Lorentz και Poincare η ύπαρξη του αιθέρα καθορίζει το πλαίσιο προβληματισμού τους. Αντιθέτως, ο Einstein θεωρεί αναπόφευκτη την ανατροπή του πλαισίου της κλασικής φυσικής. Αποδέχεται αρχές -αξιώματα που θα οδηγούσαν στην ανατροπή των παραδοσιακών κλασικών αντιλήψεων και συμβάσεων σχετικά με τη φύση και τη μέτρηση του χρόνου και του χώρου.

Από την έναρξη του τέταρτου άρθρου του " Για την ηλεκτροδυναμική των κινούμενων σωμάτων" αμφισβητεί την απόλυτη κίνηση (ως προς τον αιθέρα) και αποδέχεται τη σημασία της σχετικής κινήσεως. Παραθέτει ως παράδειγμα την ηλεκτροδυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ μαγνήτη και αγωγού. Σε αντίθεση με την κλασική άποψη που ερμηνεύει την εμφάνιση ηλεκτρικού ρεύματος στον αγωγό με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με το ποιο από τα δύο κινείται, ο Einstein ερμηνεύει την εμφάνιση ηλεκτρογενετικής δύναμης ως αποτέλεσμα και μόνο της σχετικής κίνησης μεταξύ αγωγού και μαγνήτη. Στη συνέχεια της εισαγωγής του άρθρου αυτού διατυπώνει τα αξιώματα της σχετικότητας:

Οι ίδιοι ηλεκτροδυναμικοί και οπτικοί νόμοι ισχύουν για όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τους νομούς της μηχανικής.

Το φως έχει την ίδια ταχύτητα στο κενό ανεξάρτητα από την κατάσταση κινήσεως των σωμάτων που το εκπέμπουν.

Ολοκληρώνοντας την εισαγωγή του επισημαίνει « αυτά τα δύο προαπαιτούμενα αρκούν στο να αναχθούν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα των κινούμενων σωμάτων σε προβλήματα των σωμάτων σε ηρεμία» (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006)

Ο ίδιος επισημαίνει στο άρθρο του ότι δεν είναι απαραίτητη η εισαγωγή ενός αιθέρα καθώς η προσέγγιση που θα ακολουθούσε στηρίζονταν μόνο στα δύο αξιώματα και δεν χρειαζόταν να εισαχθεί ένας απόλυτος ακίνητος χώρος εξοπλισμένος με ειδικές ιδιότητες. Στο «κινηματικό» μέρος του άρθρου του εξετάζονται πρωταρχικά ο ορισμός του ταυτόχρονου από τον οποίο προκύπτουν, κατά την αντίληψη του Einstein, η σχετικότητα των μηκών και του χρόνου.

Από τα δύο αξιώματα γίνεται η εξαγωγή των εξισώσεων Lorentz, ακολουθεί ο νόμος πρόσθεσης των ταχυτήτων, η μετατροπή των πεδίων στις εξισώσεις Maxwell-Hertz από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο, αναλύεται το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler, η αποπλάνηση του φωτός και η πίεση ακτινοβολίας.

Συμπερασματικά, ανεξάρτητα από τη γνώση του Einstein για τις θεωρίες του προηγούμενων φυσικών, για τα εμπειρικά δεδομένα που αποτελούσαν τα αδιέξοδα της φυσικής στις αρχές του 20ου αιώνα, η γέννηση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι αποτέλεσμα της ριζοσπαστικής θεώρησης του Einstein για την έννοια του χώρου και του χρόνου. Ο ίδιος αμφισβητεί το πλαίσιο της κλασικής φυσικής και επεκτείνει την αρχή της σχετικότητας στον ηλεκτρομαγνητισμό αποκηρύσσοντας την ύπαρξη του προνομιακού συστήματος αναφοράς, του αιθέρα. Ταυτόχρονα δέχεται αξιωματικά την καθολική ταχύτητα της τιμής του φωτός.

1.2 Ο χώρος και ο χρόνος στην Νευτώνεια αντίληψη.

Ο χώρος και ο χρόνος αποτελούν βασικές έννοιες τόσο για τη καθημερινή μας ζωή όσο και για την περιγραφή των φαινομένων στο χώρο της φυσικής επιστήμης. Κάθε φαινόμενο απαιτεί την ύπαρξη κάποιου χώρου εντός του οποίου λαμβάνει χώρα, αλλά και κάποιο χρόνο για την εξέλιξή του. Από ιστορική και ψυχολογική άποψη ο χώρος ως αντικείμενο της συνείδησης πιθανότατα προηγήθηκε του χρόνου. Ακόμη η σύγχρονη ψυχολογία αποδέχεται

ότι η έννοια του χώρου είναι πιο συγκεκριμένη από την έννοια του χρόνου. Εξάλλου ο χρόνος ως θεμελιώδης παράμετρος στις φυσικές διεργασίες κατανοήθηκε μόνο κατά τον ύστερο μεσαίωνα.

Η έννοια του χώρου διαμορφώθηκε και οριοθετήθηκε στην ιστορική της εξέλιξη κατά δύο τρόπους: Πρωταρχικά ορίζεται ο χώρος σαν ένα είδος διάταξης των υλικών αντικειμένων. «Μία πρώτη σχεσιοκρατική θεώρηση του χώρου και του χρόνου υποστηρίχθηκε από τον Leibniz», ο οποίος υποστήριζε ότι ο χώρος γίνεται αντιληπτός μέσω των σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ των υλικών σωμάτων. Για τον ίδιο, ο χρόνος αποτελεί «το σύνολο το χρονικών σχέσεων μεταξύ διαφορετικών γεγονότων» (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006). Αν η έννοια του χρόνου οριοθετηθεί κατά αυτόν τον τρόπο τότε η έννοια του κενού στερείται νοήματος.

Στον αντίποδα της σχεσιοκρατικής αντίληψης περί χώρου και χρόνου βρίσκεται η νευτώνεια άποψη. «Ο Νεύτωνας υποστήριζε την απολυτοκρατική αντίληψη του χώρου και του χρόνου. Θεωρούσε ότι ο απόλυτος χώρος και απόλυτος χρόνος είναι αυτοτελείς και ανεξάρτητες οντότητες, οι οποίες προηγούνται οντολογικά από τις ουσίες και τις σχέσεις αλληλοεπίδρασης μεταξύ τους. Ο χώρος εκλαμβάνεται ως ένα «κενό» δοχείο μέσα στο οποίο εμπεριέχονται όλα τα υλικά αντικείμενα. Ο απόλυτος χώρος από τη φύση του ανεξάρτητα από το κάθε τι το εξωτερικό παραμένει πάντοτε όμοιος και αμετακίνητος. Ενώ σχετικά με τον απόλυτο χρόνο, ο Νεύτων υποστήριζε ότι ρέει ομοιόμορφα ανεξάρτητα από καθετί το εξωτερικό». (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006)

Κάθε κίνηση μπορεί να επιταχυνθεί ή να επιβραδυνθεί αλλά η ροή του χρόνου δεν υπόκειται σε οποιαδήποτε μεταβολή. Επομένως σύμφωνα με την νευτώνεια αντίληψη η ροή του χρόνου είναι η ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Συνέπεια αυτού είναι: ότι η ταυτοχρονία δύο συμβάντων κατά την κρίση ενός παρατηρητή είναι ανεξάρτητη από την κινητική του κατάσταση.

«Η απολυτοκρατική αντίληψη του χρόνου κλονίστηκε με την διατύπωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.» Η συνειδητοποίηση της σχετικότητας της ταυτοχρονίας συνέβαλε ριζικά στην συγκρότηση μιας νέας ριζοσπαστικής θεώρησης του χώρου και του χρόνου. Ο χρόνος δεν θεωρείται πλέον απόλυτος και η μέτρηση του εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Η ύπαρξη αυτής της αντίληψης για τον χρόνο είναι συνέπεια της καθολικότητας της ταχύτητας του φωτός: Η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή με πολύ μεγάλη τιμή αλλά πεπερασμένη σε όλους τους παρατηρητές. Το πεπερασμένο όριο

στην ταχύτητα του φωτός αντικαθιστά την «ακαριαία» μετάδοση της νευτώνειας αντίληψης και καταλύει τον απόλυτο χαρακτήρα του νευτώνειου χρόνου. Στη σχετικότητα ο χώρος και ο χρόνος παύουν να διατηρούν τον αυτόνομο και απόλυτο χαρακτήρα τους όπως στη νευτώνεια φυσική και αποτελούν «σκιές» μιας ενιαίας οντότητας του χωροχρόνου.

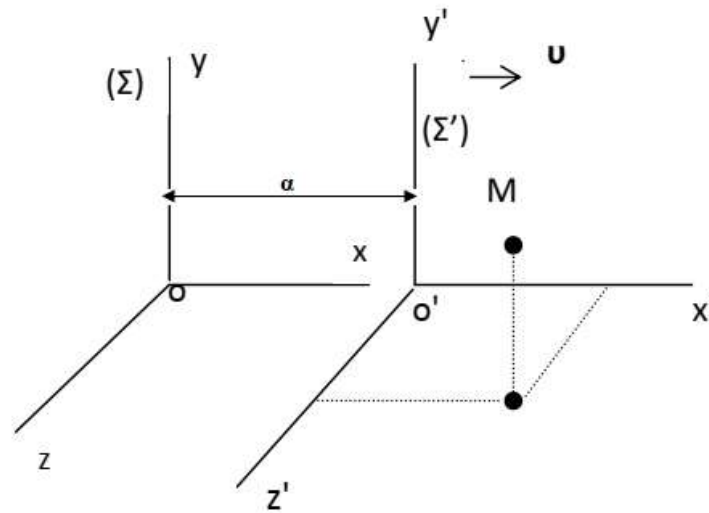
(Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006)

1.3 Η συμμετρία στον φυσικό κόσμο.

Ο όρος συμμετρία στον φυσικό νόμο αποτελεί μία εξειδικευμένη έννοια, η οποία διαφοροποιείται από την καθημερινή σημασία της συμμετρίας. Όταν παραδείγματος χάριν αναφερόμαστε στον άνθρωπο που εμφανίζει αμφίπλευρη συμμετρία, τότε η δεξιά πλευρά του και η αριστερή πλευρά του είναι συμμετρικές. Ο καθηγητής μαθηματικών Weyl έδωσε έναν θαυμάσιο ορισμό της έννοιας της συμμετρίας: Ένα αντικείμενο είναι συμμετρικό όταν το υποβάλουμε σε έναν ορισμένο μετασχηματισμό και παραμένει αναλλοίωτη η μορφή του μετά το πέρας του μετασχηματισμού αυτού. Κάτω από το πρίσμα του παραπάνω ορισμού της συμμετρίας θα λέγαμε ότι φυσικοί νόμοι είναι συμμετρικοί δηλαδή να μπορούμε να κάνουμε αλλαγές στα μεγέθη που υπεισέρχονται στους φυσικούς νόμους ή στη διατύπωση τους και οι αλλαγές αυτές να μην προκαλούν ουδεμία τροποποίηση στη μορφή των ίδιων νόμων. Στα πλαίσια της ενότητας αυτής θα εστιάσουμε στη συμμετρία των φυσικών νόμων ως προς τις χωρικές μετατοπίσεις, της χωρικές περιστροφές και την κίνηση με σταθερή ταχύτητα πάνω σε ευθεία γραμμή.

1.3.1 Χωρική μετατόπιση.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο παρατηρητές ο Γιάννης και ο Νίκος (σχήμα 1.1). Ο Νίκος διαθέτει ένα σύστημα συντεταγμένων Σ' παράλληλο με το σύστημα Σ του Γιάννη αλλά μετατοπισμένο κατά a μονάδες από την αρχή της μέτρησης του συστήματος του Γιάννη.:



Σχήμα 1.1 Το σύστημα Σ' κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα u προς το σύστημα Σ και με παράλληλους τους άξονές τους.

Οι συντεταγμένες (x', y', z') του συστήματος του Νίκου συνδέονται με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του συστήματος του Γιάννη (x, y, z) μέσω της αριθμητικής παράστασης:

$$\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.1)$$

Στο σύστημα του Γιάννη η εκφράσεις του νόμου του Νεύτωνα έχουν τη μορφή:

$$F_x = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad F_y = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad F_z = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα στο σύστημα του Γιάννη, τότε ο Νίκος κατασκευάζοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις:

$$F_{x'} = m \frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2}, \quad F_{y'} = m \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2}, \quad F_{z'} = m \frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2} \quad (1.3)$$

θα είναι αληθείς;

Αν υποθέσουμε ότι μία δύναμη δρα κατά μήκος μιας ευθείας, η οποία σχηματίζει την ίδια γωνία θ ως προς τους κοινούς άξονες x και x' , τότε οι προβολές της δύναμης στους άξονες του συστήματος του Νίκου ταυτίζονται αριθμητικά με τις αντίστοιχες προβολές της δύναμης στο σύστημα του Γιάννη δηλαδή:

$$F_{x'} = F_x, \quad F_{y'} = F_y, \quad F_{z'} = F_z \quad (1.4)$$

Πράγματι παραγωγίζοντας δύο φορές την σχέση (1.1) που συνδέουν τα x και x' έχουμε:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial}{\partial t'} (x - a) \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial t'^2} \quad (1.5)$$

$$F_{x'} = m \frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 x}{\partial t'^2} = F_x$$

Ομοίως

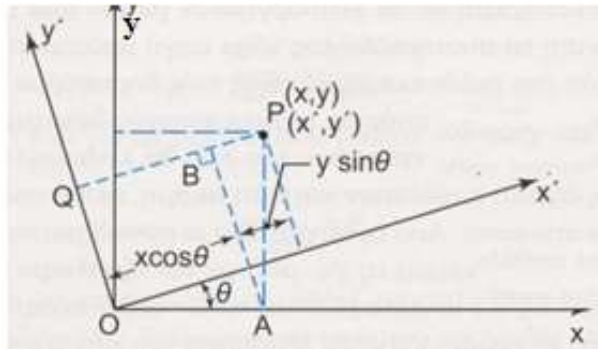
$$F_{y'} = m \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t'^2} = F_y$$

$$F_{z'} = m \frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t'^2} = F_z$$

Επομένως και στο Νίκο επαληθεύονται οι νόμοι του Νεύτωνα αρκεί να τους γράψει χρησιμοποιώντας τις δικές του συντεταγμένες, που στη γενικότητα, είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες συντεταγμένες του Γιάννη. Η ισχύς των νόμων του Νεύτωνα στα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων φανερώνει ότι δεν υπάρχει ένα ιδιαίτερο προνομιούχο σύστημα για την γραφή των νόμων. Λέμε λοιπόν ότι οι νόμοι της φυσικής είναι συμμετρικοί ως προς τις χωρικές μετατοπίσεις και έτσι παραμένουν αναλλοίωτοι όταν πραγματοποιούμε μία μετατόπιση του συστήματος αναφοράς,

1.3.2 Περιστροφές.

Θα εξετάσουμε τη συμμετρία των νόμων της φυσικής ως προς την κατευθυντικότητα των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων. Ας υποθέσουμε δυο συστήματα συντεταγμένων που έχουν κοινή αρχή συντεταγμένων αλλά οι άξονες του ενός συστήματος έχουν περιστραφεί κατά μία γωνιά θ σχετικά με τις άξονες του άλλου συστήματος (σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2 Δυο συστήματα συντεταγμένων με διαφορετικούς γωνιακούς προσανατολισμούς.

Για ένα σημείο P οι συντεταγμένες (x, y) συνδέονται με τις αντίστοιχες συντεταγμένες (x', y') μέσω των σχέσεων:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Οι προβολές μιας δύναμης F στους άξονες x' και y' συνδέονται με τις αντίστοιχες προβολές της στους x και y ως:

$$\left. \begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cos \theta + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \sin \theta \\ F_{y'} &= F_y \cos \theta - F_x \sin \theta = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cos \theta - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \sin \theta \\ F_{z'} &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Αν υποθέσουμε ότι οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν στο σύστημα (x, y) τότε θα περιγράφονται οι ίδιοι νόμοι με την ίδια μορφή και στο σύστημα (x', y') ; Είναι δηλαδή αληθείς ή όχι οι παρακάτω σχέσεις :

$$F_{x'} = m \frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2}, \quad F_{y'} = m \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2}, \quad F_{z'} = m \frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2} \quad (1.8)$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς το χρόνο τις σχέσεις (1.6) και καταλήγουμε:

$$\left. \begin{aligned} F_{x'} &= m \frac{\partial^2 x'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cos \theta + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \sin \theta \\ F_{y'} &= m \frac{\partial^2 y'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cos \theta - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \sin \theta \\ F_{z'} &= m \frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F_z \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (1.9) και (1.6) συμπεραίνουμε ότι οι νόμοι του Νεύτωνα παραμένουν αναλλοίωτοι σε περιστροφές στον χώρο

1.4 Αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Ο Νεύτωνας, το 1887, διατύπωσε τους τρεις νόμους της κίνησης που καθορίζουν το πώς κινούνται τα σώματα στον απόλυτο χώρο και στον απόλυτο χρόνο. Ο ίδιος διέκρινε τις κινήσεις στις «αληθείς κινήσεις» των σωμάτων που πραγματοποιούνται στον απόλυτο χώρο και χρόνο και στις «αισθητήριες» κινήσεις οι οποίες σχετίζονται με κάποιο ειδικό τρόπο με τις αληθινές κινήσεις. Για να κατανοήσουμε το αισθητό μέτρο της κίνησης, απαιτείται ο προσδιορισμός τόσο των απόλυτων χρονικών διαστημάτων όσο και των συντεταγμένων στον απόλυτο χώρο. Όμως, ακόμη και αν ο Νεύτωνας είχε δίκιο για την ύπαρξη μιας απόλυτης κίνησης αυτό δεν ήταν αρκετό για να προσδιορίσει ένα απόλυτο σύστημα συντεταγμένων για τη μέτρηση της θέσης των σωμάτων στον απόλυτο χώρο. Ακόμη παραπέρα, ο ίδιος παραδέχτηκε ότι δεν μπορεί να υπάρχει ένα σώμα που να είναι σε ηρεμία ως προς τον απόλυτο χώρο και το οποίο να αποτελέσει το σημείο αναφοράς για τη μέτρηση των αποστάσεων σε αυτό το χώρο. Ο πρώτος νόμος εισάγεται ακριβώς γιατί εκφράζει τη δυνατότητα ύπαρξης συστημάτων αναφοράς στα οποία ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό η συνθήκη της συνολικής μηδενικής δύναμης. Ο δεύτερος νόμος της κίνησης έχει υπόσταση μόνο μέσα σε ένα αδρανειακό σύστημα που περιγράφει ο νόμος της αδράνειας.

Πιο συγκεκριμένα, στη μηχανική του Νεύτωνα για την περιγραφή του χώρου γίνεται επίκληση της ευκλείδειας γεωμετρίας. Για την περιγραφή των κινήσεων ο παρατηρητής μπορεί να επιλέξει ένα οποιοδήποτε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του οποίου οι συντεταγμένες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των θέσεων του σώματος στο χώρο. Τότε λέμε ότι έχουμε δημιουργήσει ένα σύστημα αναφοράς. Από τα άπειρα πιθανά συστήματα αναφοράς που μπορούν να κατασκευαστούν μόνο μερικά είναι χρήσιμα για τη διατύπωση του νόμου της μηχανικής. Ποια είναι όμως αυτά;

Ας φανταστούμε ένα ελεύθερο σωματίδιο δηλαδή ένα σωματίδιο στο οποίο ασκείται μία μηδενική συνολική εξωτερική δύναμη. Αν υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το ελεύθερο αυτό σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

τότε το σύστημα αναφοράς που προκύπτει ονομάζεται αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Κατά επέκταση και κάθε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να καθοριστεί ως αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

1.5 Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.

Ένα άλλο ενδιαφέρον παράδειγμα αρχής συμμετρίας είναι η κίνηση με σταθερή ταχύτητα πάνω σε ευθεία γραμμή. Με απλά μηχανικά πειράματα μπορούμε να δείξουμε ότι οι νόμοι της μηχανικής παραμένουν αναλλοίωτοι, δηλαδή διατηρούν την ίδια συναρτησιακή μορφή σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα μεταξύ τους. Αυτή η διατύπωση είναι γνωστή σαν σχετικότητα του Γαλιλαίου.

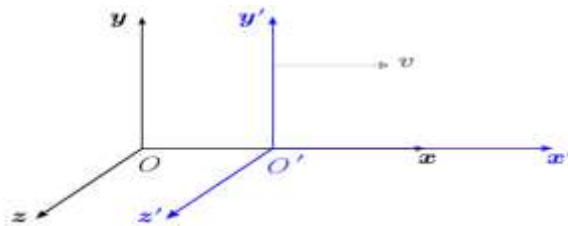
«Βέβαια σχετικότητα σημαίνει σχετικότητα στην παρατήρηση» (Ford,1980). Με διαφορετικό τρόπο θα παρατηρήσουν το ίδιο φαινόμενο δύο παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς. «Το αναλλοίωτο αναφέρεται σε περιοχές της συμφωνίας που είναι ίδιες για τους διάφορους παρατηρητές. Θα μπορούσαν να αντικατασταθούν οι έννοιες σχετικότητα με την υποκειμενικότητα και το αναλλοίωτο με την αντικειμενικότητα. Η αντικειμενικότητα της σχετικότητας δεν είναι η «αντικειμενική αλήθεια» των φιλοσόφων, παρά μια περιγραφή της συμφωνίας μεταξύ των παρατηρητών να δεχτούν σαν αληθινές τις κοινές όψεις των μετρήσεων τους. Και η υποκειμενικότητα δεν αναφέρεται απλώς στις διαφορές της ανθρώπινης αντίληψης. Η θεωρία της σχετικότητας πρόσθεσε περισσότερη υποκειμενικότητα και περισσότερο αναλλοίωτο στην επιστήμη. Ποσότητες που στην μηχανική θεωρούνταν αναλλοίωτες όπως ο χρόνος μετατρέπονται σε σχετικές. Από την αυξημένη υποκειμενικότητα της παρατήρησης που εισάγει η σχετικότητα, προκύπτουν η αντικειμενικότητα των φυσικών νόμων». (Ford,1980,σ5,6).

Είναι χρήσιμο να διευκρινίσουμε τα παραπάνω με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε έναν ακίνητο παρατηρητή μέσα σε ένα τρένο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το έδαφος. Ο παρατηρητής αφήνει ένα αντικείμενο να πέσει κατακόρυφα από ένα τυχαίο ύψος. Κατά

αυτόν το αντικείμενο θα κινηθεί κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση, όπως ακριβώς υπαγορεύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα. Για έναν δεύτερο παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος η ίδια κίνηση του αντικειμένου θα εμφανίζεται ως παραβολική. Ωστόσο υπάρχουν περιοχές συμφωνίας αλλά και διαφωνίας μεταξύ των δύο παρατηρητών. Υπάρχει διαφωνία για τη θέση του αντικειμένου μιας και δεν συμφωνούν για το σχήμα της τροχιάς. Οι παρατηρητές διαφωνούν για την ταχύτητα, μιας και ο παρατηρητής στο έδαφος θεωρεί ότι το αντικείμενο έχει μη μηδενική οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας, σε αντίθεση με τον παρατηρητή του τρένου ο οποίος θεωρεί ότι το αντικείμενο έχει μόνο κατακόρυφη ταχύτητα. Υπάρχει διαφωνία για τις συντεταγμένες θέσης όπως ο κάθε παρατηρητής τις μετράει στο δικό του σύστημα συντεταγμένων. Συμφωνούν όμως ότι η μάζα του αντικειμένου καθώς και ο χρόνος που ρέει κατά τη διάρκεια του φαινομένου είναι οι ίδιες ποσότητες στα δύο συστήματα αναφοράς. Συμφωνούν ότι θα μετρήσουν την ίδια δύναμη της βαρύτητας, άρα και την ίδια την επιτάχυνση. Συμφωνούν τελικά ότι οι νόμοι του Νεύτωνα που ισχύουν στο ένα πλαίσιο (του εδάφους) θα ισχύουν ακριβώς και στο άλλο αδρανειακό πλαίσιο, (του τρένου). (Ford,1980).

1.5.1 Μετασχηματισμός θέσης –χρόνου.

Δεν είναι δύσκολο να εκφράσουμε και ποσοτικά τις διαφωνίες των δύο παρατηρητών στη θέση και την ταχύτητα. Για το λόγο αυτό θα χρειαστούμε ένα σύνολο μαθηματικών παραστάσεων, το οποίο ονομάζουμε μετασχηματισμό, οι οποίες θα συνδέουν τις μετρήσεις του ενός παρατηρητή με τις μετρήσεις του άλλου παρατηρητή. Στην κλασική μηχανική οι σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων και του χρόνου ανάμεσα σε δύο αδρανειακούς παρατηρητές που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα ονομάζεται μετασχηματισμός του Γαλιλαίου. Για να ανακαλύψουμε τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου θα θεωρήσουμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς το $Oxyz$ ακίνητο και το $O'x'y'z'$ να κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική φορά των κοινών αξόνων xx' . (Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1. 3. Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς το $Oxyz$ ακίνητο και το $O'x'y'z'$ να κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική φορά των κοινών αξόνων xx'

Θεωρούμε επίσης ότι η χρονική στιγμή $t=t'=0$ οι αρχές των αξόνων O και O' συμπίπτουν. Αμφότεροι οι παρατηρητές θα μετρήσουν τις ίδιες συντεταγμένες y και y' καθώς και z και z' για τα ανύσματα θέσης r και r' κάποιου τυχαίου σημείου P του χώρου. Δεδομένου ότι στο νευτώνειο πλαίσιο ο χρόνος αποτελεί αναλλοίωτο μέγεθος, κατά την τυχαία χρονική στιγμή $t = t'$ η συντεταγμένη x' του σημείου P όπως την μετρά ο κινούμενος παρατηρητής θα υπολείπεται κατά $v t$ της αντίστοιχης συντεταγμένης x που μετρά ο ακίνητος παρατηρητής στο O . Άρα ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου μπορεί να εκφραστεί από το σύνολο των εξισώσεων

$$\begin{aligned}x' &= x - v \cdot t \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{1.11}$$

1.5.2 Μετασχηματισμός ταχύτητας – επιτάχυνσης.

Για να βρούμε το μετασχηματισμό των ταχυτήτων σύμφωνα με τον Γαλιλαίο θα πάρουμε τα διαφορικά των σχέσεων (1.11)

$$dx' = dx - v dt, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \text{ και} \quad dt = dt'$$

Τότε

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = v_x - v, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z\tag{1.12}$$

Όπου v η σχετική ταχύτητα των δυο συστημάτων, v_x, v_y, v_z οι συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα $OXYZ$ και v'_x, v'_y, v'_z οι συνιστώσες της ταχύτητας στο σύστημα $O'X'Y'Z'$

Μια επιπλέον διαφόριση των εξισώσεων (1.12) δίνει τον μετασχηματισμό των επιταχύνσεων κατά τους άξονες:

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z \text{ ή} \quad \vec{a}' = \vec{a}\tag{1.13}$$

Καθώς η μάζα m είναι αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα η έκφραση της δύναμης \vec{F}' στο τονούμενο σύστημα είναι ίδια έκφραση της δύναμης στο σύστημα $OXYZ$

$$\vec{F}' = m \vec{a}' = m \vec{a} = \vec{F}\tag{1.14}$$

Η σχέση (1.14) αποτελεί το αναλλοίωτο στη μορφή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα .κατά τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Ηλεκτρομαγνητισμός και νευτώνεια μηχανική.

2.1. Το πρόβλημα του Η/Μ

Σε ένα κενό χώρο απαλλαγμένο από ηλεκτρικά φορτία και ηλεκτρικά ρεύματα οι εξισώσεις του Maxwell για την ένταση του μαγνητικού πεδίου \vec{B} και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Εφαρμόζοντας στην (2.3) την διανυσματική ταυτότητα $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$ σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (2.1) και (2.4) θα αναπαραχθεί το αποτέλεσμα :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

Για $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ όπου $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ και $\varepsilon_0 = 8,854 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ (2.5) διατυπώνεται ως :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

Η αντίστοιχη σχέση για την ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

Από τις εξισώσεις (2.6) και (2.7) προκύπτει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κυμάτων στο κενό χώρο διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα c που διαδίδεται και το φώς

2.1.1 Πρόσθεση ταχυτήτων και φώς

Η ασυμβατότητα μεταξύ της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και της αρχής της σχετικότητας αναδεικνύεται φανερά από τον ρόλο της ταχύτητας του φωτός στην θεωρία αυτή. Αν δεχτούμε ότι η αρχή της σχετικότητας έχει μια καθολική ισχύ τότε σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.6) και (2.7) η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα

αναφοράς. Η παραδοχή αυτή έρχεται σε αντίφαση με τον γαλλικό μετασχηματισμό της ταχύτητας. Σύμφωνα με αυτόν η ταχύτητα οποιουδήποτε σώματος, συμπεριλαμβανομένου και του φωτός, δεν είναι ανεξάρτητη από την κινητική κατάσταση κάποιου παρατηρητή. Παραδείγματος χάριν ας υποθέσουμε ότι κάποιος ταξιδεύει σε ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα v ως προς το έδαφος και εκπέμπει έναν φωτεινό παλμό στην κατεύθυνση της κίνησης του αυτοκινήτου. Ο παλμός κινείται με ταχύτητα c ως προς τον παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο αυτοκίνητο. Σύμφωνα με τον νόμο του Γαλιλαίου περί της πρόσθεσης των ταχυτήτων ένας παρατηρητής ακίνητος στο έδαφος θα δηλώσει ότι η ταχύτητα του φωτός ως προς αυτόν θα είναι : $c + v$.

2.1.2 Η κυματική εξίσωση και οι μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell στο κενό μετά από μια σειρά μετασχηματισμών μπορούν να αντικατασταθούν από δύο πιο απλές αλλά ισοδύναμες μορφές εξισώσεων.:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

Όπου \vec{A} ένα διανυσματικό δυναμικό και Φ ένα βαθμωτό δυναμικό. Και τα δύο είναι συναρτήσεις των πεδίων \vec{E} και \vec{B} . Η εξίσωση (2.9) είναι η κυματική εξίσωση του ηλεκτρομαγνητισμού στις τρεις διαστάσεις.

Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου δεν διατηρεί τη μορφή της εξίσωσης (2.9) σε δυο αδρανειακά πλαίσια Σ και Σ' που κινούνται σχετικά μεταξύ τους με κάποια ταχύτητα $\vec{v} = v \vec{x}$. Ο μετασχηματισμός που συνδέει τα Σ και Σ' είναι : $t = t'$, $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$. Για να μετατρέψουμε τις παραγώγους της βαθμωτής συνάρτησης Φ ως προς x , y , z , t σε παραγώγους ως προς x' , y' , z' , t' θα κάνουμε χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) = 1 \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad (2.10)$$

Ομοίως:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1 \\ \frac{\partial x'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(x - vt) = -v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \quad (2.11)$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και προκύπτει :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.12)$$

Από $y' = y$, $z' = z$ προκύπτουν

$$z = z' \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad \text{και} \quad y = y' \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad (2.13)$$

Η κυματική εξίσωση (2.9) γράφεται σε μια πιο αναλυτική μορφή ως

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.14)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.14) τις (2.10), (2.11), (2.12) και (2.13) θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \quad (2.15)$$

$$\text{ή} \quad \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} + 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = 0 \quad (2.16)$$

Για να παρέμεινε αναλλοίωτη η κυματική εξίσωση θα έπρεπε να είχε αναπαραχθεί μια εξίσωση της μορφής :

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} = 0 \quad (2.17)$$

Δεν υπάρχει μετασχηματισμός μεταξύ του Φ και Φ' που να ανάγει την (2.16) στη μορφή της (2.17). Επομένως, ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου αλλάζει τη μορφή της κυματικής εξίσωσης και προφανώς αλλάζει και τις αρχικές ισοδύναμες εξισώσεις του Maxwell (2.1 – 2.4) .

Συμπερασματικά, οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού δεν έχουν την ίδια συναρτησιακή μορφή σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς και οι νόμοι του Maxwell φαίνεται να

μην ικανοποιούν τη γαλλιακή αρχή της σχετικότητας. Την διαφορά αυτή μπορεί να την άρει κάποιος συμπεραίνοντας ότι

1. είτε η αρχή της σχετικότητας δεν είναι μία γενική αρχή και μπορεί να έχει ισχύ μόνο στη μηχανική,
2. είτε ότι οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού είναι λανθασμένες οπότε πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να είναι συμβατές με το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου και να ικανοποιείται επομένως η αρχή της σχετικότητας,
3. είτε η αρχή της σχετικότητας είναι ορθή και επομένως ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου θα πρέπει να απορριφθεί και να αντικατασταθεί από έναν μετασχηματισμό που θα αφήνει τις εξισώσεις του Maxwell αναλλοίωτες.

Οι φυσικοί του 19ου αιώνα, με πρωταγωνιστή τον Lorentz υιοθέτησαν την πρώτη άποψη. Για αυτούς υπήρχε ένα προνομιακό σύστημα αναφοράς ο ακίνητος αιθέρας που γέμιζε το σύμπαν. Σε μία πίστη στον αιθέρα δεν υπήρχε η ανάγκη να πιστεύουν στην αρχή της σχετικότητας. Αντ' αυτού η ύπαρξη του αιθέρα όριζε ένα προνομιακό σύστημα αναφοράς στο οποίο οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού έπαιρναν την πιο " απλούστερη" μορφή τους, και ίσως να είχαν διαφορετική μορφή σε άλλα συστήματα αναφοράς. Ο Einstein όπως θα δούμε και στη συνέχεια, υποστήριζε την τρίτη άποψη μία πιστή στην καθολική αρχή της σχετικότητας. Το ερώτημα που προκύπτει προφανώς ήταν η πειραματική ανίχνευση του αιθέρα.

2.2 Το πείραμα των Michelson – Morley

Στις αρχές του 19ου αιώνα ο Augustin Fresnel είχε διατυπώσει τη θεωρία ότι ο αιθέρας μπορούσε να παρασύρεται από ένα οπτικό μέσο (π.χ το νερό) όταν αυτό κινείται σε σχέση με αυτόν. Αν η κίνηση του μέσου ως προς τον αιθέρα γινόταν με ταχύτητα v , τότε ο Fresnel υπόθεσε ότι ο αιθέρας παρασύρεται με μία ταχύτητα που είναι ένα μέρος f της ταχύτητας αυτής. Ο παράγοντας $f = 1 - \frac{1}{n^2}$ (όπου n ο συντελεστής διάθλασης του μέσου) ονομάζεται

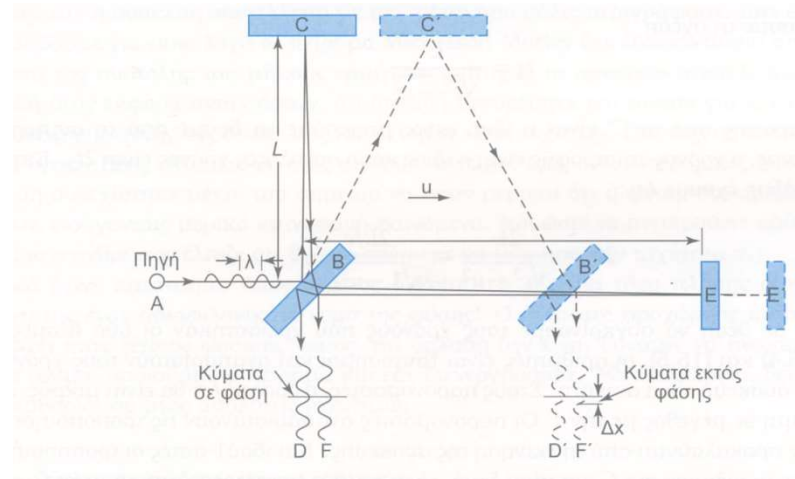
συντελεστής παράσυρσης του αιθέρα. Η υπόθεση αυτή του Fresnel ελέγχθηκε πειραματικά και από τον Armand Fizeau μελετώντας την επίδραση που είχε το κινούμενο νερό στη διάδοση μιας ακτίνας φωτός σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Ας σημειώσουμε ότι για συντελεστής διάθλασης ενός μέσου ίσο με την μονάδα (για $n=1$ όπως

στον αέρα) ο συντελεστής παράσυρσης f γίνεται μηδενικός. Επομένως ένα τέτοιο οπτικό μέσο δεν θα παρέσυρε τον αιθέρα.

Η υπόθεση σύμφωνα με την οποία η Γη κινείται μέσα σε έναν ακίνητο αιθέρα απαιτούσε πειραματική επαλήθευση. Το πειραματικό εγχείρημα φαινόταν δύσκολο, γιατί όπως ήταν γενικά αποδεκτό, αξιόπιστα πειράματα για την υπόθεση του αιθέρα, απαιτούσαν να ανιχνευτούν δεύτερης τάξης αποτελέσματα της κίνησης της γης ως προς τον αιθέρα. Εξαιτίας της σχετικής κίνησης της γης ως προς τον αιθέρα, θα έπρεπε να καταγραφεί μία μεταβολή στην ταχύτητα του φωτός που να περιέχει το τετράγωνο του λόγου της ταχύτητας της γης u , ως προς την ταχύτητα του φωτός σε c , δηλ της τάξης (u^2/c^2) . Η μεταβολή αυτή θα έπρεπε να ήταν της τάξης 10^{-8} . Τη λύση στο πρόβλημα έδωσε ο Michelson με το συμβολόμετρο του, αρχικά το 1881 και σε πιο βελτιωμένη έκδοση το 1887 όταν συνεργάστηκε με τον Morley.

2.2.1 Περιγραφή- αποτελέσματα του πειράματος

Η πειραματική διάταξη του 1887 ήταν ένα οπτικό συμβολόμετρο που απεικονίζεται διαγραμματικά στο παρακάτω σχήμα 2.1



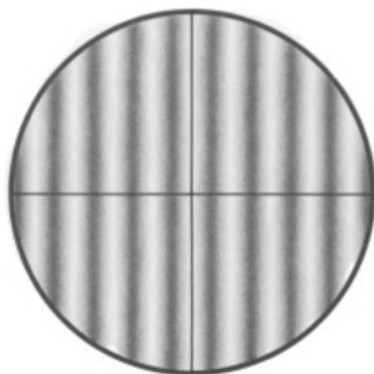
Σχήμα 2. 1 Σχηματική αναπαράσταση του συμβολόμετρου Michelson – Morley.

Η συσκευή αποτελούνταν από μία πηγή φωτός μονοχρωματικής δέσμης, έναν ημιδιαφανή καθρέφτη B και δύο καθρέφτες ολικής ανάκλασης C και E. Όλη η διάταξη είχε συναρμολογηθεί πάνω σε μία μεγάλη πλάκα από γρανίτη, η οποία καθώς επέπλεε σε ένα δοχείο γεμάτο με υδράργυρο έδινε τη δυνατότητα περιστροφής της γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα. Οι καθρέφτες C και E τοποθετήθηκαν σε ίσες αποστάσεις L από το επαργυρωμένο κάτοπτρο B.

Μία δέσμη διαχωρίζονταν από το κάτοπτρο Β σε δύο κύματα ίσων εντάσεων. Η δράση αυτή του διαχωρισμού της δέσμης εξασφάλιζε ότι οι δύο προκύπτουσες δέσμες ήταν σύμφωνες και αρχικά σε φάση. Οι δέσμες που προέκυπταν από το διαχωρισμό συνέχιζαν σε αμοιβαία ορθογώνιες διευθύνσεις, μία προς τον καθρέφτη Ε και η άλλη προς τον καθρέφτη C.

Μετά την ανάκλαση τους από τους αντίστοιχους καθρέφτες οι δέσμες επέστρεφαν πίσω στο κάτοπτρο Β, όπου επανασυνδέονταν και συνέβαλλαν σαν δύο επάλληλες δέσμες D και F.

Ενισχυτική συμβολή θα παρατηρηθεί μόνο στην περίπτωση που οι δύο δέσμες διένυαν τις διαδρομές τους στον ίδιο χρόνο γιατί τότε οι επάλληλες δέσμες D και F θα ήταν και πάλι σε φάση. Για την οπτικοποίηση της συμβολής των δύο δεσμών γινόταν η χρήση ενός τηλεσκοπίου στη θέση της συμβολής. Στο σχήμα 2.2 απεικονίζεται μια ενδεχόμενη εικόνα στην οθόνη του τηλεσκοπίου. Στην περίπτωση της ενισχυτικής συμβολής στο κέντρο του οπτικού πεδίου του φακού θα εμφανίζεται ένας φωτεινός κροσσός συμβολής, ο οποίος θα πλησιάζονταν εκατέρωθεν από σκοτεινούς κροσσούς. Οι σκοτεινοί κροσσοί αντιστοιχούσαν σε συμβολή δεσμών που έφταναν με διάφορα χρόνου μισής περιόδου.



Σχήμα 2.2 Η εικόνα των κροσσών συμβολής στην οθόνη του τηλεσκοπίου. Πηγή: Resnick,1968

Αν η συσκευή βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση με τον αιθέρα, καθότι υποθέσαμε ότι οι καθρέφτες C και E βρίσκονται σε ίση απόσταση L από το κάτοπτρο Β, τα δύο κύματα που φτάνουν στο τηλεσκόπιο είναι και πάλι σε φάση με αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός λαμπρού κρούσου συμβολής. Αν όμως η συσκευή (που είναι ακίνητη ως προς τη Γη) κινείται με μία ταχύτητα v ως προς τον αιθέρα και με κατεύθυνση προς τα δεξιά στην κατεύθυνση του βραχίονα BE τότε θα έπρεπε να παρατηρηθεί κάποια διαφορά ανάμεσα στους χρόνους ταξιδιού των δεσμών. Αν v η ταχύτητα της γης (άρα και συσκευής) ως προς τον αιθέρα και c η ταχύτητα του φωτός ως προς τον αιθέρα τότε η ταχύτητα του φωτός προς την συσκευή (δηλ τη γη) θα ήταν σύμφωνα με τη νευτώνεια Μηχανική $c-v$ για κίνηση της γης και του

φωτός προς την ίδια κατεύθυνση (διαδρομή BE) και $c+v$ όταν η Γη κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση με την ακτίνα φωτός (διαδρομή EB).

Θα υπολογίσουμε πρώτα το χρόνο που απαιτείται για να μεταβεί το φως από το B στο E και προς τα πίσω από το E στο B . Ας ονομάσουμε T_1 τον χρόνο που χρειάζεται το φως για να μεταβεί από το B στο E και T_2 το χρόνο μετάβασης από το E στο B. Στο χρόνο T_1 η συσκευή κινείται ταυτόχρονα κατά μία απόσταση ίση με vT_1 , οπότε το φως θα διανύσει μία συνολική απόσταση $L+ vT_1$.Αν η ταχύτητα του φωτός ως προς τον αιθέρα είναι c θα έχουμε:

$$L + vT_1 = cT_1 \text{ άρα}$$

$$T_1 = \frac{L}{c-v} \quad (2.18)$$

Κατά την επιστροφή του φωτός από το E στο B η συσκευή και το κάτοπτρο B μετατοπίζεται κατά μία απόσταση $v T_2$ οπότε η συνολική απόσταση επιστροφής του φωτός ισούται με :

$$L - vT_2 = cT_2 \text{ Οπότε}$$

$$T_2 = \frac{L}{c+v} \quad (2.19)$$

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το φως για να ταξιδέψει από το B στο E και πίσω είναι:

$$T_{ολ} = T_1 + T_2 = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} \quad (2.20)$$

Ας ονομάσουμε T_3 τον χρόνο που χρειάζεται το φως για να μεταβεί από το B στο C. Για κάθε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt το φως ταξιδεύει μια απόσταση $c dt$ και το κάτοπτρο C ταυτοχρόνως μια απόσταση $v dt$. Άρα το φως θα συναντήσει το κάτοπτρο σε μια νέα θέση C' που απέχει απόσταση vT_3 από τη θέση C, κινούμενο όμως κατά μήκος της υποτεινουσας BC' του τριγώνου που έχει για πλευρές της L και vT_3 . Με βάση αυτά θα έχουμε :

$$(cT_3)^2 = L^2 + v^2 T_3^2 \quad \text{ή}$$

$$T_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (2.21)$$

Η διαδρομή της επιστροφής από το C' στο κάτοπτρο B είναι ίδια με την διαδρομή BC.' Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το φως για να ταξιδέψει από το κάτοπτρο B στο C και πίσω υπολογίζεται:

$$T'_{ολ} = 2T_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2.22)$$

Θα παρατηρήσουμε ότι τόσο ο χρόνος $T_{ολ}$ όσο και ο χρόνος $T'_{ολ}$ είναι σε συνάρτηση με τον συντελεστή v^2/c^2 δηλαδή δεύτερης τάξης φαινόμενα. Όταν η συσκευή ηρεμεί ως προς τον αέρα οι τιμές των παραπάνω χρόνων δεν διαφέρουν μεταξύ τους.

Η διαφορά χρόνου μεταξύ των δεσμών είναι:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (2.23)$$

Αν υποθέσουμε ότι $v^2/c^2 \ll 1$, αναπτύσσοντας την σχέση (2.23) σε διωνυμική σειρά και διατηρώντας δυνάμεις του λόγου v/c μέχρι και τη δεύτερη τάξη θα έχουμε

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (2.24)$$

Η διαφορά χρόνων Δt αντιστοιχεί σε μία διαφορά δρόμων ΔL που καθορίζει την θέση των κροσσών συμβολής στο τηλεσκόπιο

$$\Delta L = c \Delta t \Rightarrow \Delta L = c \frac{L}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (2.25)$$

$$\Delta L = L \frac{v^2}{c^2} \quad (2.26)$$

Περιστρέφοντας το συμβολόμετρο κατά 90 μοίρες, ώστε η πλευρά BC να γίνει παράλληλη προς την κατεύθυνση της κίνησης εξαλείφεται η οποιαδήποτε διαφορά δρόμων που οφείλεται σε κατασκευαστική αδυναμία ίσων βραχιόνων και επιπλέον η διαφορά δρόμων θα αλλάξει πρόσημο. Η ολική διαφορά δρόμων θα υπολογίζεται σε διπλάσια τιμή από την ΔL . Ταυτόχρονα, κατά την περιστροφή θα πρέπει να ανιχνεύσουμε και μία μέγιστη δυνατή μετατόπιση των κροσσών συμβολής. Όταν η διαφορά μεταβάλλεται κατά ένα μήκος κύματος λ του φωτός η αναμενόμενη μετατόπιση των κροσσών είναι " ένας κροσσός" , που σημαίνει ότι τη θέση του φωτεινού κροσσού που εστιάζουμε στο τηλεσκόπιο παίρνει ο επόμενος διαδοχικός φωτεινός κροσσός. Σε μία διαφορά δρόμων $2\Delta L$ η μετατόπιση των κροσσών θα είναι μετρούμενη σε αριθμό «κροσσούς» ίση με :

$$\Delta N = \frac{2 \Delta L}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad (2.27)$$

Στα πειράματα των Michelson – Morley, η δέσμη του φωτός υφίστατο πολλαπλές ανακλάσεις ώστε να αυξηθεί το μήκος L σε 11 μέτρα. Το μήκος κύματος της δέσμης που χρησιμοποιήθηκε ήταν $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-11}$ m. Για ταχύτητα περιφοράς της γης $v = 3 \cdot 10^4$ m/s και με ταχύτητα του φωτός $c = 3 \cdot 10^8$ m/s η μέγιστη μετατόπιση κροσσών θα έπρεπε να ήταν :

$$\Delta N = \frac{2 \cdot 11 \cdot 10^{-8}}{5,5 \cdot 10^{-7}} \quad \text{ή} \quad \Delta N = 0,4 \quad (2.28)$$

Δηλαδή όταν το συμβολόμετρο περιστρεφόταν κατά 90 μοίρες η εικόνα συμβολής θα έπρεπε να μετατοπιστεί κατά $\Delta n = 0,4$ του κροσσού. Αν και το συμβολόμετρο των Michelson και Morley είχε αυξημένη ευαισθησία (μπορούσε να ανιχνεύει μετατοπίσεις όσο το 0,01 του κροσσού) καμία μετατόπιση των κροσσών συμβολής δεν παρατηρήθηκε κατά το πείραμα.

Το πείραμα επαναλήφθηκε κάτω από διαφορετικές συνθήκες: σε άλλη ώρα της ημέρας, σε άλλη εποχή του χρόνου και σε διαφορετικά υψόμετρα ωστόσο το αποτέλεσμα ήταν πάντα αρνητικό. Το αρνητικό αποτέλεσμα του «κρίσιμου» πειράματος απέρριπτε την σχετική κίνηση της Γης ως προς τον αιθέρα και έθετε υπό αμφισβήτηση την ύπαρξη του αιθέρα.

2.2.2 Κλασσικές ερμηνείες του πειράματος

Για τους φυσικούς του δέκατου ένατου αιώνα δεν ήταν εύκολη υπόθεση η εγκατάλειψη του αιθέρα. Ο ίδιος ο Michelson κατέληξε να αποκαλεί το πείραμά του « αποτυχία » και ποτέ δεν σκέφτηκε να εγκαταλείψει την ιδέα του αιθέρα. Το 1927, ο ίδιος στο τελευταίο κείμενο του, που δημοσιεύτηκε πριν το θάνατο του, αναφερόταν νοσταλγικά στον αιθέρα « μιλώντας με όρους του πολυαγαπημένου αιθέρα, (που είχε εγκαταλειφτεί πια) αν και προσωπικά εξακολουθώ να διατηρώ μια κάποια συναισθηματική προσκόλληση σε αυτόν». (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006) .

Ο ίδιος, ο Michelson, πρότεινε μία εναλλακτική υπόθεση σύμφωνα με την οποία ο αιθέρας παρασυρόταν από την κίνηση της γης και έτσι το πείραμα του δεν έδειχνε κανένα φαινόμενο αφού κοντά στην επιφάνεια της Γης ο αιθέρας είναι ακίνητος σε σχέση με τη γη. Για να διαπιστώσει την πιθανότητα διαφορικής εφέλκωσης του αιθέρα πραγματοποίησε τις πειραματικές του μετρήσεις - δοκιμές σε μεγάλα και διαφορετικά υψόμετρα. Αλλά το συμβολόμετρο του συνέχισε να δείχνουν πάλι αρνητικό αποτέλεσμα. Μια άλλη υπόθεση για την ερμηνεία του πειράματος ήταν ότι το φως ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με

την πηγή του φωτός και όχι σε σχέση με τον αιθέρα. Η πρόταση αυτή απορρίφθηκε λόγω αστρονομικών παρατηρήσεων. Φως το οποίο προέρχεται από ζεύγη αστεριών που περιστρέφονται μεταξύ τους έχει την ίδια ταχύτητα προς τη γη παρότι που το ένα μέλος του ζεύγους απομακρύνεται από τη Γη και το άλλο μέλος πλησιάζει προς τη Γη.

Μια πιο ριζοσπαστική εικασία προέρχεται από τους George Fitzgerald το 1889 και από τον Λόρενς το 1892. Αυτοί διατύπωσαν την αυθαίρετη υπόθεση περί συστολής του μήκους των

κινουμένων σωμάτων στην κατεύθυνση της κίνησής τους, κατά έναν παράγοντα $\sqrt{1-v^2/c^2}$

Κατά την άποψη του Lorentz ο μηχανισμός που οδηγούσε στην συστολή ήταν η «δράση του αιθέρα επί των μοριακών δυνάμεων των υλικών σημείων». Επομένως ο βραχίονας του συμβολόμετρου που ήταν προσανατολισμένο στην κατεύθυνση της ταχύτητας v της γης ως

προς τον αιθέρα συστέλλεται και γίνεται $L' = L\sqrt{1-v^2/c^2}$. (Resnick, 1968).

Κατά συνέπεια ο συνολικός χρόνος κατά την διαδρομή BE – EB, (σχήμα 2.1), υπολογίζεται πλέον από τη σχέση:

$$T'_{ολ} = 2 \frac{L}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Λαμβανομένου του νέου συνολικού χρόνου η διαφορά χρόνου μεταξύ της οριζόντιας δέσμης φωτός και της δέσμης στην κάθετη θα είναι:

$$\Delta t' = \frac{2L}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] = 0$$

Η μηδενική διαφορά χρόνου που προέκυπτε, σύμφωνα με την υπόθεση Lorentz, για το ταξίδι των αμοιβαία κάθετων δεσμών δικαιολογούσε την μη μετατόπιση των κροσσών κατά την περιστροφή του συμβολόμετρου, δηλαδή το αποτέλεσμα του πειράματος σωστά ήταν μηδενικό, όπως και ήταν.

Η βοηθητική υπόθεση της συστολής του μήκους των σωμάτων θεωρήθηκε ως μία υπόθεση ad-hoc και προορίστηκε για να «σώσει τα φαινόμενα» διότι ο μαθηματικός φορμαλισμός μιας έννοιας για την περιγραφή της φύσης είναι άνευ σημασίας αν δεν υπάρχει ερμηνεία και ορισμός των συμβόλων που χρησιμοποιήθηκαν.

Ωστόσο, η υπόθεση της συστολής δεν θα ερμήνευε από μόνη της πειράματα με συμβολόμετρα όπου οι δύο βραχίονες θα ήταν άνισοι σε μήκος μεταξύ τους. Σε αυτήν την περίπτωση ακόμη και αν λάβουμε υπόψη την υπόθεση Λόρενς περί συστολής του μήκους, θα

πρέπει να ανιχνεύσουμε μετατόπιση των κροσσών συμβολής (λόγω διαφοράς δρόμου) όταν η σχετική ταχύτητα του συμβολόμετρου ως προς τον αιθέρα μεταβάλλεται από μια τιμή v σε μία άλλη v' . Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση των κροσσών υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\Delta N = \frac{L_1 - L_2}{\lambda} \left(\frac{v^2 - v'^2}{c^2} \right)$$

Όπου $L_1 - L_2$ η διαφορά των μηκών των βραχιόνων. (Resnick,1968).

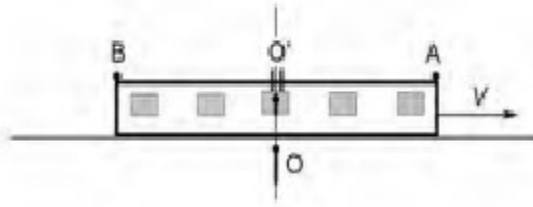
Στο πείραμα Kennedy-Thorndike (1932), που έμμεσος σκοπός του ήταν η επιβεβαίωση της διαστολής του χρόνου, χρησιμοποιήθηκε ένα συμβολόμετρο με βραχίονες που δεν ήταν κάθετοι μεταξύ τους και είχαν μια διαφορά μήκους έξι μέτρων. Το συμβολόμετρο ήταν ακίνητο στο εργαστήριο και άλλαζε προσανατολισμό ακολουθώντας την κίνηση της γης. Η εικόνα των κροσσών συμβολής φωτογραφιζόταν συνεχώς. Καμία μετατόπιση κροσσών δεν πήρε μέρος όπως και στο περίφημο συμβολόμετρο των Michelson- Morley. Επομένως το μηδενικό αποτέλεσμα, που έδειχνε και το πείραμα των Kennedy-Thorndike, δεν μπορεί να εξηγηθεί μόνο με τη συστολή του μήκους. (Resnick,1968).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μετασχηματισμοί Lorentz-Γεωμετρία του χωροχρόνου

3.1 Τα αξιώματα της Ε.Θ.Σ και οι πρώτες συνέπειες αυτών μέσα από τρία νοητικά πειράματα..

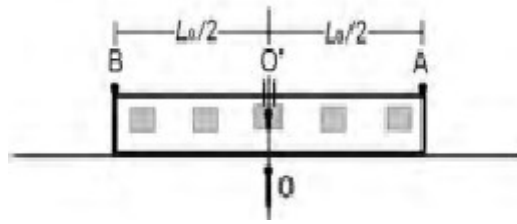
3.1.1 Η σχετικότητα του ταυτόχρονου

Ας υποθέσουμε το νοητικό πείραμα του σχήματος 3.1 : ένα τρένο μήκους L_0 , ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα V ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή O ακίνητο στην αποβάθρα. Στις άκρες του τρένου υπάρχουν δύο πηγές φωτός A και B που εκπέμπουν παλμούς φωτός προς το εσωτερικό του τρένου. Ένας δεύτερος παρατηρητής O' βρίσκεται ακίνητος στο τρένο και στο μεσοδιάστημα μεταξύ των πηγών A και B . Όταν οι θέσεις των παρατηρητών συμπίπτουν, δηλαδή ο ένας περνάει μπροστά από τον άλλον, αυτοί λαμβάνουν ταυτόχρονα τους παλμούς φωτός που εκπέμπονταν από τις πηγές σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Το ερώτημα που τίθεται είναι : αν τα σήματα εκπέμπονταν ταυτόχρονα ή όχι;

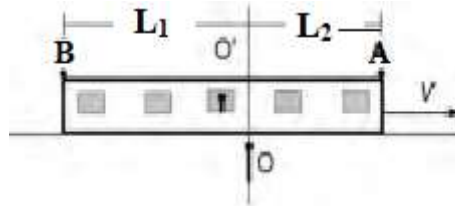


Σχήμα 3.1 Ένα τρένο κινείται με σχετική ταχύτητα V ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή O στην αποβάθρα. Στις άκρες του τρένου υπάρχουν δυο πηγές φωτός A και B . Όταν η θέση του παρατηρητή O' , που βρίσκεται στο μέσο του τρένου συμπίπτει με τη θέση του O , δυο παλμοί φωτός φθάνουν στο ίδιο σημείο, έχοντας εκπεμφεί από τις πηγές A και B αντίστοιχα.

Καθότι η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια προς κάθε κατεύθυνση η απάντηση εξαρτάται από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που επιλέγεται κάθε φορά. Από την πλευρά του ο παρατηρητής O' θα διατυπώσει τον ακόλουθο συλλογισμό: " η απόστασή μου από τα σημεία A και B της εκπομπής των σημάτων φωτός είναι ίση με $L_0/2$. Καθώς η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια προς κάθε κατεύθυνση, τα χρονικά διαστήματα που απαιτούνται για να ταξιδέψει το φως από τις πηγές προς εμένα είναι ίσα. Επομένως αφού οι παλμοί φθάνουν ταυτόχρονα σε μένα, θα είχαν εκπεμφτεί και ταυτόχρονα από τις πηγές." (σχήμα 3.2)



Σχήμα 3.2 Ο παρατηρητής του τρένου βλέπει την ταυτόχρονη λήψη των σημάτων ως αποτέλεσμα της ταυτόχρονης εκπομπής τους.



Σχήμα 3.3 Ο παρατηρητής της αποβάθρας βλέπει τα σήματα ταυτόχρονα . Όταν εκπέμπεται ο παλμός από την πηγή A ο παρατηρητής O' του τρένου δεν έχει φθάσει ακόμη στη θέση που βρίσκεται ο O.

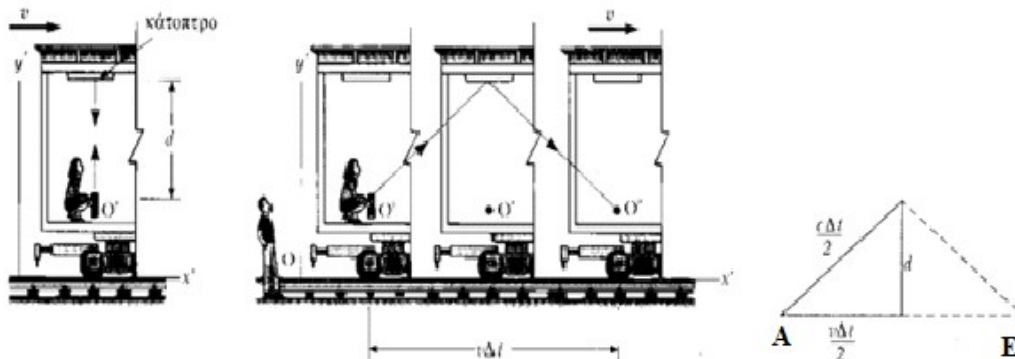
Από την πλευρά του ακινήτου παρατηρητή O (σχήμα 3.3) της αποβάθρας θα αναπτυχθεί ο ακόλουθος συλλογισμός: «Για να γίνει ταυτόχρονη λήψη των φωτεινών σημάτων από εμένα κατά την χρονική στιγμή που ο παρατηρητής O' πέρα ακριβώς από μπροστά μου θα πρέπει αμφότερες οι πηγές να εκπέμπουν πριν ακόμα ο παρατηρητής O' φθάσει σε μένα, διότι το φως από τα σημεία A και B χρειάζεται κάποιο χρονικό διάστημα για να μου γίνει αντιληπτό. Καθώς το τρένο οδηγείται προς τα δεξιά, τη στιγμή της εκπομπής των σημάτων η θέση μου θα προηγείται της θέσης του παρατηρητή O'. Αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή της εκπομπής των φωτεινών σημάτων η απόσταση L_1 της πηγής B από εμένα είναι μεγαλύτερη από ότι η απόσταση L_2 της πηγής A ως προς εμένα. Κατά συνέπεια για να φτάσουν τα σήματα ταυτόχρονα θα πρέπει η πηγή B να είχε εκπέμψει νωρίτερα από την πηγή A δηλαδή οι πηγές δεν εκπέμπουν ταυτόχρονα» .

Συμπερασματικά ,αν η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια προς κάθε κατεύθυνση και ανεξάρτητη της ταχύτητας της πηγής, δύο γεγονότα (εκπομπή φωτός από τις πηγές A και B) που είναι ταυτόχρονα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (αδρανειακό του τρένου) δεν είναι απαραίτητα ταυτόχρονα και σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται σε σχέση με το πρώτο.

3.1.2. Η διαστολή του χρόνου

Μία άλλη συνέπεια της σταθερής ταχύτητας του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι οι διαφορετικοί ρυθμοί λειτουργίας δύο ρολογιών που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Για να διαπιστώσουμε το παραπάνω επινοούμε το νοητικό πείραμα που ακολουθεί.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο παρατηρητές τον O και O' όπου ο δεύτερος βρίσκεται σε ένα κινούμενο όχημα σταθερής ταχύτητας, ενώ ο πρώτος στέκεται ακίνητος στο πλάι του δρόμου. Συνθέτουμε μία ιδιαίτερη κατασκευή: επενδύουμε το εσωτερικό της οροφής του οχήματος με έναν καθρέφτη και στερεώνουμε στο πάτωμα του οχήματος μια πηγή φωτεινών παλμών κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κάθετη στο επίπεδο της οροφής (σχήμα 3.4). Εξοπλίζουμε εκάστοτε των παρατηρητών O και O' με ρολόγια και φροντίζουμε αρχικά να είναι συγχρονισμένα μεταξύ τους. Αμφότεροι οι παρατηρητές συμφωνούν να μετρήσουν με τα δικά τους ρολόγια τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού ενός φωτεινού παλμού ο οποίος ξεκινά από το πάτωμα του οχήματος, ταξιδεύει κάθετα προς τον καθρέφτη, ανακλάται και επιστρέφει στο ίδιο σημείο από όπου ξεκίνησε.



Σχήμα 3.4 Δύο παρατηρητές μετράνε τη διάρκεια του ίδιου ταξιδιού ενός φωτεινού παλμού. Ο παρατηρητής O' βρίσκεται ακίνητος σε ένα όχημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς τον ακίνητο παρατηρητή O του εδάφους.

Ο παρατηρητής O' που βρίσκεται στο όχημα (σύστημα Σ') μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα μόνο ρολόι για τη μέτρηση της χρονικής διάρκειας του ταξιδιού. Για αυτόν τα γεγονότα της εκπομπής και της επιστροφής συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του συστήματος αναφοράς (είναι ταυτόχωρα). Δεδομένου ότι το φως ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα c , αν η απόσταση μεταξύ των σημείων εκπομπής και επιστροφής είναι $2d$, τότε ο χρόνος του μετά επιστροφής ταξιδιού που μετράει ο παρατηρητής O' είναι:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c} \Rightarrow d = \frac{c\Delta t'}{2} \quad (3.1)$$

Για τον παρατηρητή Ο που στέκεται ακίνητος στο έδαφος τα ίδια γεγονότα (εκπομπή και λήψη φωτός) εξελίσσονται με διαφορετικό τρόπο. Για κάθε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt ο παλμός θα κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις: μία στον κατακόρυφο άξονα όπου θα διανύει απόσταση cdt και μία κατά μήκος του οριζόντιου άξονα όπου θα διανύει απόσταση vdt . Το φως θα κινηθεί σε μία κατεύθυνση που είναι ο συνδυασμός των παραπάνω κινήσεων. Με άλλα λόγια ο παρατηρητής Ο θα αναγνωρίσει ότι η δέσμη του φωτός θα διανύσει μία τεθλασμένη διαδρομή καθώς το φως ταξιδεύει από το σημείο της εκκίνησης και πίσω στο σημείο της λήψης. Όταν το φως θα έχει ολοκληρώσει το μετά επιστροφής του ταξίδι σε χρόνο Δt (όπως τον μετράει ο παρατηρητής Ο) το όχημα θα έχει μετακινηθεί κατά μία οριζόντια απόσταση $v\Delta t$. Για τη μέτρηση του χρονικού διαστήματος Δt ο παρατηρητής Ο πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο συγχρονισμένα μεταξύ τους ρολόγια. Το ένα θα τοποθετηθεί στο σημείο της εκπομπής του φωτός (σημείο Α) και το δεύτερο στο σημείο λήψης φωτός (σημείο Ε). Για αυτόν τα γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα.

Όπως φαίνεται και από το σχήμα η απόσταση που διανύει το φως είναι:

$$2\sqrt{d^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4}} \quad (3.2)$$

και ο χρόνος που χρειάζεται για να διανυθεί αυτή είναι:

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + (v^2\Delta t^2 / 4)}}{c} \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας όπου $d = \frac{c\Delta t'}{2}$ στην παραπάνω σχέση θα έχουμε :

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4}}}{c} \quad (3.4)$$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων θα καταλήξουμε :

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.5)$$

Αν συμβολίσουμε με γ την παράσταση $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ θα έχουμε την τελική σχέση :

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (3.6)$$

Γενικεύοντας, αν ένα ρολόι ηρεμεί ως προς ένα σύστημα αναφοράς S' , το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά τον άξονα x μέσα στο χωροχρονοειδές συνεχές ενός άλλου συστήματος αναφοράς S , τότε κάθε μονάδα χρόνου που καταγράφεται από ένα συγχρονισμένο ρολόι του συστήματος S θα είναι μεγαλύτερη κατά τον παράγοντα $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ από την αντίστοιχη μονάδα χρόνου που καταγράφεται στο ρολόι του συστήματος S' .

Βέβαια θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν έχουμε να κάνουμε με διαδικασίες μέτρησης του χρόνου. Για παράδειγμα, στο νοητικό πείραμα που υποδείξαμε προηγουμένως, μια βιαστική σκέψη θα ήταν να διατυπώσουμε ότι αφού τα ρολόγια του παρατηρητή O' φαίνονται στον παρατηρητή O ότι προχωρούν αργά τότε τα ρολόγια του O θα φαίνονται στον παρατηρητή O' ότι προχωρούν γρήγορα.

Η ιδέα όμως της αμοιβαιότητας επιβάλλει ότι η διαστολή του χρόνου πρέπει να ισχύει και προς τις δύο κατευθύνσεις γιατί αλλιώς θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα προνομιακό (προτιμητέο) σύστημα αναφοράς. Στο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε η αρχή της αβεβαιότητας δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα διότι τα γεγονότα (εκπομπή και λήψη φωτός) είναι μεν ταυτόχρονα στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή O' (δηλαδή $\Delta x' = 0$) ενώ δεν είναι ταυτόχρονα στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή O . Για να εφαρμόσουμε την αρχή της αμοιβαιότητας θα πρέπει να διεξάγουμε το ίδιο νοητικό πείραμα αλλά στην προκειμένη περίπτωση θα πρέπει τα γεγονότα εκπομπής και λήψης να λαμβάνουν χώρο στο ίδιο σημείο του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή O . Πιο απλά ο παρατηρητής O που βρίσκεται ακίνητος στο έδαφος θα πρέπει να χρησιμοποιεί το ρολόι στο οποίο το φώς κινείται κατακόρυφα πάνω κάτω και παρατηρητής O' που ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα v ως προς αυτόν θα βλέπει την πριονωτή τροχιά του φωτός. (Ford, 1980).

Στην περίπτωση αυτή ο παρατηρητής O' θα μετρά τον χρόνο του O διεσταλμένο δηλαδή:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t.$$

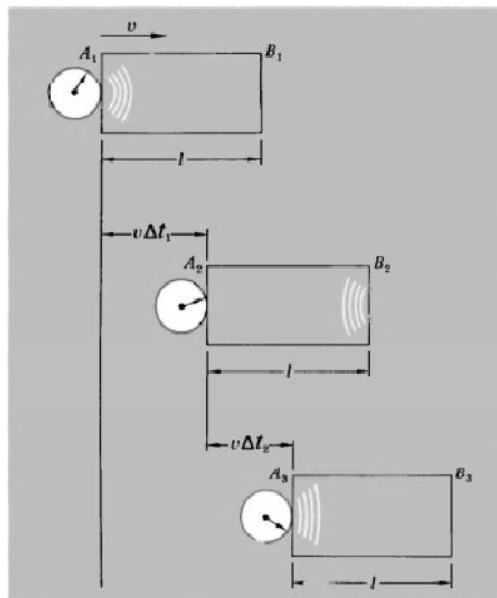
Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε ότι αν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δυο ταυτόχρονα γεγονότα απέχουν χρονικά ΔT_0 , τότε, σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς

κινούμενο ως προς αυτό με σταθερή ταχύτητα v , τα αντίστοιχα ίδια γεγονότα θα απέχουν χρονικά $\Delta T = \gamma \Delta T_0$.

3.1.3 Η συστολή του μήκους

Όπως έχει ήδη αναφερθεί αρχικά ο Fitzgerald και μετέπειτα ο Λόρενς προκειμένου να εξηγήσουν τον μηδενικό αποτέλεσμα στο πείραμα του Michelson διατύπωσαν μια βοηθητική υπόθεση για τη συστολή του μήκους των κινουμένων σωμάτων στην κατεύθυνση της κίνησής τους. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή (που για πολλούς θεωρήθηκε ως ad-hoc) ο βραχίονας του συμβολόμετρου που ήταν τοποθετημένος προς την κατεύθυνση της κίνησης γίνεται βραδύτερος από τον κάθετο βραχίονα. Βέβαια η πρόταση αυτή διατυπώθηκε για να διασωθεί η θεωρία του αιθέρα.

Στο νοητικό πείραμα που ακολουθεί θα εξετάσουμε την υπόθεση της συστολής του μήκους υπό το πρίσμα των αξιωμάτων της θεωρίας της σχετικότητας. Διαθέτουμε μία ράβδο το μήκος της οποίας θέλουμε να μετρήσουμε σε δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς σε σχετική κίνηση μεταξύ τους και με σταθερή ταχύτητα. Προκειμένου να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ των άκρων της ράβδου στερεώνουμε στο ένα άκρο της μια πηγή φωτεινών σημάτων και στο άλλο άκρο της έναν καθρέφτη. (σχήμα 3.5)



Σχήμα 3.5 Η συστολή του μήκους σε κινούμενη ράβδο. Πηγή: French,1968.

Το μήκος της ράβδου θα μετρηθεί έμμεσα από τον χρόνο που απαιτείται για την επιστροφή στη πηγή ενός σύντομου παλμού φωτός ο οποίος θα έχει ανακλαστεί στον καθρέφτη.

Ένας παρατηρητής θα μετρήσει το μήκος της ράβδου σε δύο διαφορετικές καταστάσεις : αρχικά όταν η ράβδος είναι ακίνητη προς αυτόν και στη συνέχεια όταν αυτή κινείται με ταχύτητα v ως προς αυτόν σε μία διεύθυνση που είναι παράλληλη προς το μήκος της ράβδου. Έστω ότι η απόσταση που μετριέται σε κάθε περίπτωση είναι l_0 για την ακίνητη ράβδο και l για την κινούμενη ράβδο. Για τη ράβδο που είναι ακίνητη μετράει ένα χρόνο

$$\Delta t_0 = 2l_0 / c \quad (3.7)$$

για το μετά επιστροφής ταξίδι του φωτεινού παλμού από την πηγή στον καθρέφτη και πίσω στην πηγή. Αν Δt είναι ο χρόνος για την αντίστοιχη κίνηση του παλμού στην κινούμενη ράβδο τότε, εξαιτίας της διαστολής του χρόνου, για τα χρονικά διαστήματα Δt και Δt_0 θα έχουμε:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.8)$$

Για τον ακίνητο παρατηρητή του εδάφους όταν το φως ταξιδεύει προς τα δεξιά (κατά την κατεύθυνση της κίνησης της ράβδου) θα συναντήσει τον καθρέφτη B_2 σε χρονικό διάστημα Δt_1 . Η συνολική απόσταση Δx_1 που διένυσε το φως είναι το άθροισμα του μήκους της ράβδου l και η επιπλέον απόσταση $v \Delta t_1$ που κινήθηκε αυτή ως προς τα εμπρός. (Σχήμα 3.5)

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= l + v \Delta t_1 \quad \text{ή} \\ c \Delta t_1 &= l + v \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{c - v} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Αντιστοίχως όταν το φως επιστρέφει από τον καθρέφτη B_2 προς την πηγή (θέση A_3 στο σχήμα 3.5) διανύει μια απόσταση Δx_2 που είναι ισοδύναμη με το μήκος της ράβδου μείον την απόσταση που κινήθηκε η ράβδος προς τα δεξιά .

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= l - v \Delta t_2 \quad \text{ή} \\ c \Delta t_2 &= l - v \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{c + v} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Όπου Δt_2 ο χρόνος ταξιδιού του φωτός για την επιστροφή του από τον καθρέφτη στην πηγή. Ο συνολικός χρόνος που απαιτεί το φως για να κινηθεί από τη πηγή στον καθρέφτη και πίσω στην πηγή είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} = \frac{2l/c}{1-v^2/c^2} \quad (3.11)$$

Με αντικατάσταση των (3.10) και (3.7) στην σχέση (3.8) και εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{ή}$$
$$l = l_0 \frac{1}{\gamma} \quad (3.12)$$

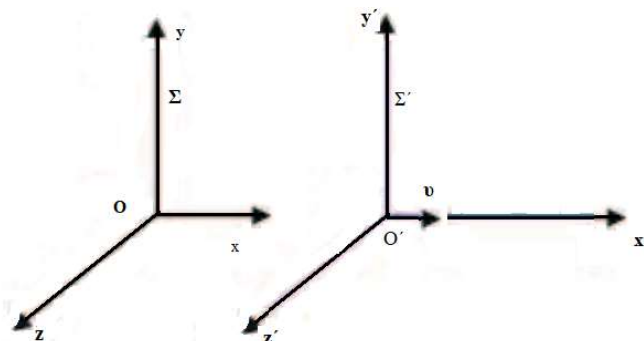
$$\text{Όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

3.2 Μετασχηματισμός Lorentz

3.2.1 Απόδειξη του μετασχηματισμού

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με νοητικά πειράματα (διαστολή του χρόνου, σχετικότητα του ταυτοχρονισμού, συστολή μήκους) τα οποία μας αποκάλυψαν ένα μέρος της ολικής σχέσεως ανάμεσα στις μετρήσεις του χώρου και του χρόνου δυο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους.

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε μια πιο γενική σχέση. Θα θεωρήσουμε αδρανειακά συστήματα αναφοράς Σ και Σ' με σχετική ταχύτητα v μεταξύ τους. (σχήμα 3.6)



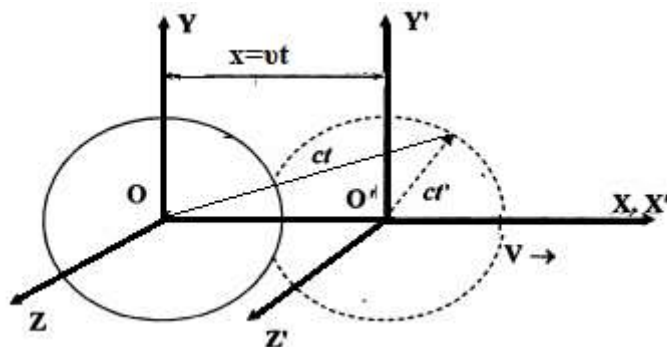
Σχήμα 3. 6 Δυο συστήματα αναφοράς Σ και Σ' σε σχετική κίνηση μεταξύ τους .Η ταχύτητα του Σ' είναι $\vec{v} = v \vec{x}$.Τη χρονική στιγμή $t=t'=0$ συμπίπτουν οι άξονες των συστημάτων.

Κάθε γεγονός θα περιγράφεται στο σύστημα Σ με την τετράδα των χωροχρονικών συντεταγμένων (x, y, z, t) και στο σύστημα Σ' με (x', y', z', t') . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα ορίσουμε κάποιες χωρικές και χρονικές διευθετήσεις μεταξύ των συστημάτων Σ και Σ' :

1. Όταν οι αρχές των αξόνων O και O' συμπίπτουν οι παρατηρητές των συστημάτων Σ και Σ' ρυθμίζουν τα συγχρονισμένα μεταξύ τους ρολόγια για να έχουν την ίδια ένδειξη μηδέν δηλαδή $(t=t'=0)$
2. Οι άξονες των συστημάτων x και x' διατάσσονται παράλληλα μεταξύ τους και τέλος
3. Ορίζουμε μια προώθηση κατά τους άξονες x, x' . (δηλαδή η κατεύθυνση της κίνησης γίνεται παράλληλα με τους άξονες x, x')

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ μία πηγή φωτός εκπέμπει έναν παλμό. Το φωτεινό σήμα διαδίδεται στο χώρο σαν σφαιρικό κύμα, που έχει το κέντρο του στο σημείο O . Μετά από χρόνο t ένα μέτωπο κύματος του παλμού βρίσκεται σε μία απόσταση $r = c t$ από την

αρχή του O , και σε μία απόσταση $r' = c t'$ από το O' . Ταυτόχρονα στον ίδιο χρόνο t η αρχή του συστήματος Σ' έχει ταξιδέψει σε μία απόσταση $x = v t$.



Προκειμένου να ικανοποιείται το δεύτερο αξίωμα του Αϊνστάιν δηλαδή ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς θα πρέπει

$$r = ct \quad (3.14)$$

$$r' = ct' \quad (3.15)$$

Γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι η ακτίνα μιας σφαίρας υπολογίζεται από τη σχέση: $(\text{ακτίνα})^2 = (x\text{-συντεταγμένη})^2 + (y\text{-συντεταγμένη})^2 + (z\text{-συντεταγμένη})^2$

Για τον παρατηρητή Σ θα έχουμε:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.16)$$

Ομοίως για τον παρατηρητή Σ' η απόσταση r' θα υπολογίζεται ως :

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \quad (3.17)$$

Οι σχέσεις (3.16) και (3.17) μέσω των (3.14) και (3.15) γράφονται αντιστοίχως :

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.18)$$

$$(ct')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \quad (3.19)$$

Σύμφωνα με την αρχή της αμοιβαιότητας οι κάθετες αποστάσεις στη διεύθυνση της κίνησης δεν επηρεάζονται άρα $y = y'$ και $z = z'$.

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (3.18) και (3.19) έχουμε τη βασική σχέση ότι

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2 \quad (3.20)$$

Το επόμενο βήμα είναι να υποθέσουμε μια γενική σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x , t και των αντίστοιχων x' και t' . Ο μετασχηματισμός που θα επιλέξουμε πρέπει να είναι γραμμικός καθότι:

- i. σε κάθε άλλη περίπτωση θα εμφανιζόταν η αντίφαση : στο ένα σύστημα μια κίνηση σταθερής ταχύτητας θα καταγραφόταν με όρους επιτάχυνσης στο άλλο σύστημα.
- ii. Η ομοιομογένεια και ισοτροπία του χώρου και του χρόνου συσχετίζονται με την γραμμικότητα των εξισώσεων του μετασχηματισμού. Ας υποθέσουμε, ότι ένα ρολόι P_1 είναι ακίνητο στην αρχή των συντεταγμένων ενός συστήματος αναφοράς Σ και ένα δεύτερο ρολόι P_2 είναι ακίνητο στην αρχή των συντεταγμένων ενός σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται σε σχέση με το Σ . Όταν το ρολόι P_2 καταγράφει ένα χρονικό διάστημα $\Delta t'$, το ίδιο χρονικό διάστημα καταγράφεται ως $\Delta t = \gamma \Delta t'$ από το ρολόι P_1 . Αν οι ιδιότητες του χρόνου είναι οι ίδιες σε όλους τους χρόνους και ανεξάρτητες από το χρονικό σημείο μέτρησης του χρόνου τότε θα πρέπει κάθε νέα μεταβολή του $\Delta t'$ να καταγράφεται στο Σ ως μεταβολή του Δt με την ίδια σταθερά αναλογίας γ . Παραδείγματος χάριν αν για αρχικό $\Delta t' = 2$ sec και $\gamma = 3/2$ έχει καταγραφεί $\Delta t = 3$ sec τότε για μια νέα μεταβολή $\Delta t' = 6$ sec θα έχουμε $\Delta t = 9$ sec. Η άμεση αυτή αναλογία μεταξύ των Δt και $\Delta t'$ είναι δυνατή μόνο όταν οι ποσότητες αυτές συνδέονται με μία γραμμική σχέση. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για τις μετρήσεις του χώρου. Αν οι συντεταγμένες x και x' δεν συνδέονται μεταξύ τους με γραμμική σχέση τότε το μήκος μιας κινούμενης ράβδου δεν θα ήταν ανεξάρτητη από τη θέση της στο χώρο, γεγονός που είναι έρχεται σε αντίθεση με την ομοιογένεια του χώρου. (Ford,1980).

Επομένως

$$x' = \alpha x + \theta t \quad (3.21)$$

$$t' = \varepsilon x + \delta t \quad (3.22)$$

Όπου οι σταθερές α , θ , ε , δ πρέπει να προσδιοριστούν ώστε η εξίσωση (3.20) να είναι αληθείς για όλα τα x και t .

Το σημείο O' κινείται ως προς το O με ταχύτητα v . Μετά από χρόνο t η αρχή O' θα έχει ταξιδέψει μια απόσταση από το O που προσδιορίζεται από τη σχέση

$$x = vt \quad (3.23)$$

Για $x' = 0$ έχουμε από τη σχέση (3.21) και (3.23):

$$0 = \alpha v t + \theta t \Rightarrow \theta = -\alpha v \quad (3.24)$$

Το σημείο O κινείται με ταχύτητα $-v$ ως προς το O' και μετά από χρόνο t' είναι:

$$x' = -v t' \quad (3.25)$$

Από (3.21) και (3.25) για $x = 0$ έχουμε: $-v t' = \theta t \Rightarrow t = \frac{-v t'}{\theta}$ (3.26)

Από (3.22) για $x=0$ είναι: $t' = \delta t \Rightarrow t = \frac{t'}{\delta}$ (3.27)

Από (3.26), (3.24) και (3.27) $\delta = \alpha$ (3.28)

Τελικά:
$$\left. \begin{array}{l} x' = \alpha x + \theta t \\ t' = \varepsilon x + \delta t \\ \delta = \alpha \\ \theta = -\alpha v \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x - \alpha v t \\ t' = \varepsilon x + \alpha t \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Άρα η παράσταση: $x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2$ μέσω της (3.29) γίνεται

$$x^2 - (ct)^2 = \alpha^2 (x - vt)^2 - c^2 (\varepsilon x + \alpha t)^2$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων

$$x^2 - (ct)^2 = (\alpha^2 - \varepsilon^2 c^2) x^2 - \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 t^2 - 2\alpha(\alpha v + \varepsilon c^2) x t$$

Για να έχουμε ταυτότητα για κάθε x, t θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 - \varepsilon^2 c^2 = 1 \\ \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 = c^2 \\ 2\alpha(\alpha v + \varepsilon c^2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \varepsilon = \frac{-\alpha v}{c^2} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Από (3.30), η (3.28) και (3.24) δίνουν:
$$\theta = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.31)$$

$$\delta = \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.32)$$

Συνολικά θα έχουμε για τις αρχικές εξισώσεις (3.21) και (3.22)

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \quad (3.33)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (3.34)$$

Αν θέσουμε όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ θα αναπαραγάγουμε τις (3.33) και (3.34) αντίστοιχα ως:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3.25)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (3.26)$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε μορφή πινάκων είναι :

$$X' = \Lambda(v) X$$

Όπου $X = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $X' = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ και $\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

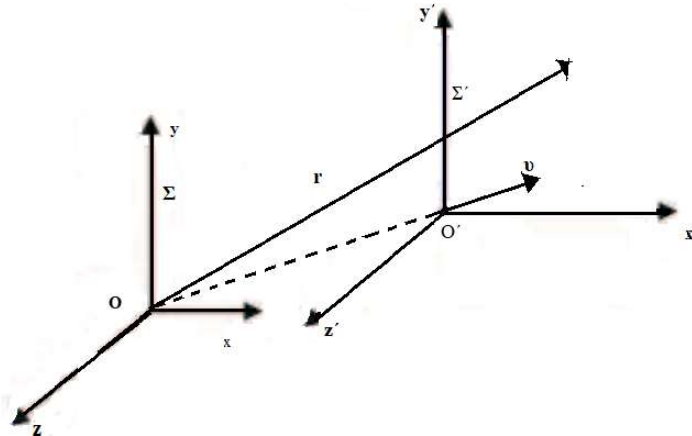
Οι εξισώσεις του μετασχηματισμού Lorentz μας αποκαλύπτουν ότι ο χώρος και ο χρόνος μπορούν να αναμειχθούν. Οι χωρικές και χρονικές συντεταγμένες ενός συμβάντος σε ένα σύστημα αναφοράς είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των χωρικών και χρονικών συντεταγμένων του συμβάντος σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η συσχέτιση αυτή οδηγεί στην ιδέα του χωροχρόνου ως μια τετραδιάστατη οντότητα. «Επίσης η παρουσία του παράγοντα γ στις εξισώσεις μας «υποχρεώνει» να δεχτούμε την ταχύτητα του φωτός c ως ένα ανώτατο όριο της ταχύτητας στη φύση. Αν η ταχύτητα v γινόταν μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, η ποσότητα $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ θα ήταν φανταστικός αριθμός και θα αδυνατούσαμε να αποδώσουμε φυσική ερμηνεία στις εξισώσεις». (Ford,1980).

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz μας εκφράζει τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός σημείου του κινούμενου συστήματος Σ' σε συντεταγμένες του «ακίνητου» συστήματος Σ . Οι εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού προκύπτουν είτε από τη επίλυση των εξισώσεων (3.35) και (3.36) ως προς x και t , είτε ανταλλάσσοντας τη θέση των τονούμενων συντεταγμένων με τις αντίστοιχες άτονες και ταυτόχρονα αντί για v θέτουμε το $-v$.

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (3.37)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (3.38)$$

Από τη αποκάλυψη του αντίστροφου μετασχηματισμού γίνεται φανερά έκδηλη η συμμετρία των μετασχηματισμών Lorentz. Επί της ουσίας τα δυο σύνολα των εξισώσεων είναι ταυτόσημα. Στην ταυτοποίηση της μορφής των εξισώσεων του μετασχηματισμού και του αντίστροφου του αναγνωρίζουμε για μια άλλη φορά την εκδήλωση της αμοιβαιότητας των παρατηρήσεων. Για τους παρατηρητές του «ακίνητου» συστήματος αναφοράς Σ , το αδρανειακό πλαίσιο Σ' κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα $+v$. Οι παρατηρητές του συστήματος Σ' , οι οποίοι δικαιωματικά μπορούν να θεωρήσουν τον εαυτό τους ακίνητο, αντιλαμβάνονται το σύστημα Σ να κινείται με τη x -συνιστώσα της ταχύτητας ίση με $-v$.



Σχήμα 3.7 Αδρανειακά συστήματα Σ και Σ' με παράλληλους τους άξονές τους, και με το Σ' να κινείται με γενική διανυσματική ταχύτητα v ως προς το Σ

Γενικεύοντας, για δυο συστήματα Σ και Σ' με παράλληλους τους άξονές τους, και με το σύστημα Σ' να προωθείται με μια διανυσματική ταχύτητα \vec{v} προς το Σ (σχήμα 3.7) ο γενικός μετασχηματισμός Lorentz θα παίρνει την διανυσματική έκφραση:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v^2} - \gamma \vec{v} t \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2} \right)$$

Όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ και $\vec{r}' = (x', y', z')$

3.3 Η γεωμετρία του επίπεδου χωροχρόνου

3.3.1 Χωροχρονικά διαγράμματα.

Η γεωμετρία του χωροχρόνου δεν είναι η συνήθης Ευκλείδεια γεωμετρία παρόλου που παρουσιάζει ορισμένες ομοιότητες με αυτήν. Κάθε γεωμετρία καθορίζεται από το στοιχειώδες μήκος της ds , που δίνει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Στον Ευκλείδειο χώρο η απόσταση μεταξύ δύο σημείων με χωρικές συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) δίνεται από τη σχέση : $s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Για πολύ μικρές διαφορές στις συντεταγμένες η παραπάνω σχέση διατυπώνεται ως: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ και αποτελεί το στοιχειώδες μήκος του χώρου. Το ds^2 παραμένει αναλλοίωτο στην μορφή του όταν οι συντεταγμένες ενός συστήματος μετασχηματίζονται στις συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε διαφορετικού συστήματος, αρκεί οι μετασχηματισμοί αυτοί να σχετίζονται με μετατοπίσεις και περιστροφές των αξόνων.

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας κάθε σημείο του χωροχρόνου ορίζει ένα συμβάν το οποίο καθορίζεται ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς από τρεις χωρικές και μια χρονική συντεταγμένη (x, y, z, t) . Κατά αναλογία με τον ευκλείδειο χώρο θα μπορούσαμε να ορίσουμε στο χωροχρονικό συνεχές το τετράγωνο της απόστασης ανάμεσα σε δύο γεγονότα ως $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2$ και το αντίστοιχο στοιχειώδες μήκος ως $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (c dt)^2$. Επιπλέον η αρχή της σχετικότητας απαιτεί τη διατήρηση της μορφής του στοιχειώδους μήκους σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Όμως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η ποσότητα ds^2 , όπως αναφέρεται παραπάνω, δεν παραμένει αμετάβλητη στη μορφή της, κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz. Αντιθέτως αν το στοιχειώδες μήκος του χωροχρόνου οριστεί ως:

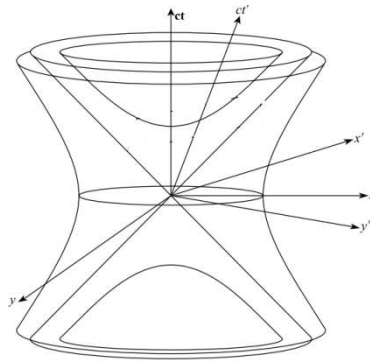
$$ds^2 = (c dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (3.39)$$

τότε αποδεικνύεται ότι αυτό παραμένει αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς συντεταγμένων κατά Lorentz μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς που κινούνται με σχετική ταχύτητα v και με παράλληλους τους άξονες $Ox, O'x'$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= \gamma^2 c^2 \left[(dt') + (v/c^2)(dx') \right]^2 - \gamma^2 \left[(dx') + v(dt') \right]^2 + (dy')^2 + (dz')^2 \\ &= (cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \end{aligned}$$

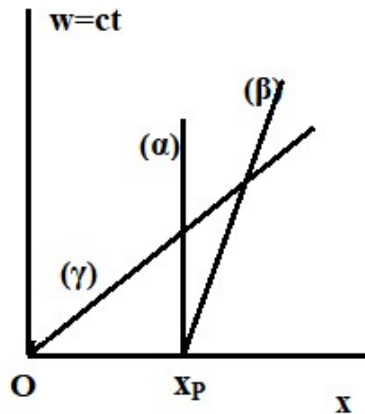
Η συμμετοχή των απειροστών μεταβολών των χωρικών συντεταγμένων στο στοιχειώδες μήκος με αρνητικό πρόσημο διαφοροποιεί την γεωμετρία του χωροχρόνου από την ευκλείδεια γεωμετρία του συνήθους τρισδιάστατου χωρικού συνεχές. Η κυκλική ευκλείδεια γεωμετρία μετατρέπεται σε μια υπερβολική γεωμετρία. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση R από την αρχή των αξόνων δεν είναι πλέον η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (και αντίστοιχα ο κύκλος $x^2 + y^2 = R^2$ στο επίπεδο $x-y$) παρά ένα υπερβολοειδές με $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2$ (και αντίστοιχα στο επίπεδο $x-ct$ η υπερβολή : $(ct)^2 - x^2 = R^2$) (σχήμα 3.8).



Σχήμα 3. 8 Σχηματική παράσταση υπερβολοειδούς σε τρεις διαστάσεις. Πηγή .Rindler, 2006.

Η μετρική της επίπεδης γεωμετρίας του χωροχρόνου δεν είναι πλέον ο μοναδιαίος κύκλος αλλά μια «μοναδιαία» υπερβολή στην οποία η χωροχρονική απόσταση των χωροχρονικών σημείων από την αρχή των αξόνων είναι η μονάδα.

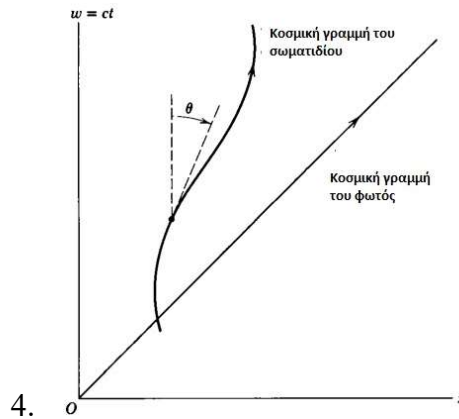
Καθετί που συμβαίνει στο χώρο σε μία συγκεκριμένη θέση και σε μια ορισμένη χρονική στιγμή αποτελεί ένα γεγονός του χωροχρόνου. Ο εντοπισμός ενός γεγονότος στο χωροχρόνο γίνεται μέσω μιας τετράδας συντεταγμένων ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Η εξέλιξη ενός γεγονότος, χωρικά και χρονικά, περιγράφεται από μια καμπύλη που ονομάζεται κοσμική γραμμή, δηλαδή μια κοσμική γραμμή αναπαριστά την ιστορία ενός φαινομένου. Σε μια δισδιάστατη σελίδα είναι βεβαίως αδύνατη η παρουσίαση και των τεσσάρων διαστάσεων του χωροχρόνου. Για το λόγο αυτό περιοριζόμαστε στο να σχεδιάζουμε σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα μονάχα δύο ή το πολύ τρεις διαστάσεις του χωροχρόνου. Τα χωροχρονικά διαγράμματα, επομένως, είναι «φέτες» του χωροχρόνου. Για να διατηρηθεί η ομοιομορφία στις μονάδες μέτρησης των αξόνων μετατρέπουμε τις χρονικές μονάδες σε μονάδες μήκους πολλαπλασιάζουμε τον χρόνο με την ταχύτητα του φωτός c και συμβολίζουμε το γινόμενο αυτό με $w = ct$.



Σχήμα 3. 9. Χωροχρονικό διάγραμμα με κοσμικές γραμμές σωμάτων σε διαφορετικές κινητικές καταστάσεις

Στο χωροχρονικό διάγραμμα του σχήματος 3.9 παρουσιάζονται οι κοσμικές γραμμές σωματιδίων σε διαφορετικές κινητικές καταστάσεις καθώς και η κοσμική γραμμή ενός φωτονίου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (x, ct).

Στο σχήμα 3.9, η κοσμική γραμμή (α) αποδίδει την ακολουθούμενη τροχιά στον χωροχρόνο ενός σημείου που είναι ακίνητο στο σημείο x_p του άξονα x . Στο ίδιο σχήμα η ευθεία (β) παρουσιάζει την κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου που κινείται με ταχύτητα $V = dx/dt$ και διέρχεται από την θέση x_p του άξονα x την χρονική στιγμή $t=0$. Η κλίση της κοσμικής του γραμμής ως προς τον άξονα w είναι $dx/d(ct) = (1/c) dx/dt = V/c (= \beta)$. Για φωτεινές ακτίνες η κλίση της κοσμικής τους γραμμής είναι μονάδα και επομένως αυτές κινούνται κατά μήκος της διχοτόμου της γωνίας των αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9 (γ). Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για πραγματικά σωματίδια, που ως δεδομένου μπορούν να κινούνται μόνο με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, η κλίση της κοσμικής τους τροχιάς (ως προς τον άξονα του χρόνου) θα πρέπει να είναι πάντα μικρότερη της μονάδας. Η ύπαρξη υποθετικών οντοτήτων, των ονομαζόμενων ταχυόνια, που κινούνται με ταχύτητα όχι μικρότερης της ταχύτητας του φωτός έχουν κοσμικές γραμμές με κλίση μεγαλύτερη της μονάδας. Στο παρακάτω σχήμα 3.10, όπου δίνεται η κοσμική ενός σωματιδίου, η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη σε κάθε σημείο της ισούται με τον λόγο V/c , όπου V η ταχύτητα του σώματος στο δεδομένο σημείο της καμπύλης. Στην επόμενη υποενότητα θα αποδειχτεί η ακριβής συσχέτιση της ταχύτητας του σώματος και της εφαπτομένης της γωνίας που σχηματίζει η κοσμική γραμμή του με τον άξονα w .



Σχήμα 3. 10 Στο χωροχρονικό διάγραμμα φαίνεται η κοσμική ιστορία ενός σωματιδίου και του φωτός

Ας εξετάσουμε πως θα σχεδιάζεται στο επίπεδο (ct, x) ενός αδρανειακού πλαισίου Σ , ένα πλαίσιο Σ' που κινείται με σχετική ταχύτητα v ως προς το Σ και κατά μήκος των κοινών αξόνων $x-x'$. Οι αρχικές εξισώσεις Lorentz για $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ γράφονται στην μορφή :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (3.40)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (3.41)$$

Από την πρώτη για $x' = 0$ προκύπτει η κοσμική γραμμή του άξονα ct' στο επίπεδο (ct, x) :

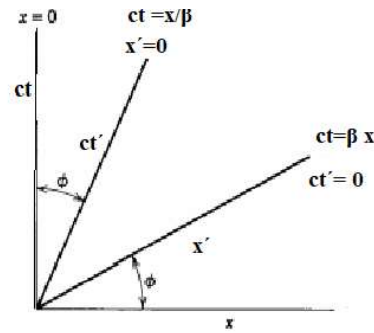
$$ct = x / \beta$$

που αναπαριστά μια ευθεία κοσμική γραμμή που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα ct και με $\tan\varphi = dx/d(ct) = v/c = \beta$.

Κατά παρόμοιο τρόπο θέτοντας στην δεύτερη εξίσωση $ct' = 0$ θα προκύψει η κοσμική γραμμή του άξονα x' στο επίπεδο (ct, x)

$$ct = \beta x$$

που σχηματίζει την ίδια γωνία φ με τον άξονα x . (σχήμα 3.11).



Σχήμα 3. 11 Διάγραμμα Minkowski με τους άξονες(ct , x) για το σύστημα Σ και (ct' , x') για το σύστημα Σ' που κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα v

Για την βαθμονόμηση των αξόνων του συστήματος Σ' θα χρησιμοποιηθεί το αναλλοίωτο της απόστασης και η υπερβολή:

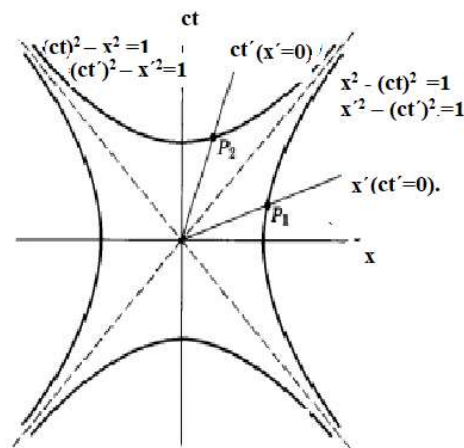
$$(ct)^2 - x^2 = 1 = (ct')^2 - x'^2$$

για τα σημεία του επιπέδου που η χρονική συνιστώσα $w=ct$ υπερτερεί της χωρικής συνιστώσας x , καθώς και η υπερβολή :

$$x^2 - (ct)^2 = 1 = x'^2 - (ct')^2.$$

για τα σημεία του επιπέδου που η χρονική συνιστώσα είναι μικρότερη της χωρικής συνιστώσας x .

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 3.12 , η υπερβολή $(ct')^2 - x'^2 = 1$ τέμνει τον άξονα ct' στο σημείο P_2 με συντεταγμένες $x' = 0$ και $ct' = 1$.



Σχήμα 3. 12 Βαθμονόμηση των αξόνων του διαγράμματος (ct' , x') με τις υπερβολές $(ct')^2 - x'^2 = 1$ και $x^2 - (ct)^2 = 1$

Οι συντεταγμένες του σημείου P_2 στο επίπεδο (ct , x) θα εξαχθούν από την κοινή λύση του συστήματος :

$$(ct)^2 - x^2 = 1$$

και

$$ct = x/\beta .$$

Επιλύοντας προκύπτει $P_2 (x = \beta\gamma , ct = \gamma)$.

Το ευκλείδειο μήκος του σημείου P_2 από την αρχή O των αξόνων είναι :

$$\alpha = \sqrt{(\beta\gamma)^2 + \gamma^2}$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \beta^2 / 1 - \beta^2}$$

και αποτελεί την ευκλείδεια απόσταση της μονάδας του άξονα ct' από την κοινή αρχή O των αξόνων .Με ανάλογο τρόπο οι συντεταγμένες του σημείου P_1 στο επίπεδο (ct , x) θα εξαχθούν από την κοινή λύση του συστήματος :

$$x^2 - (ct)^2 = 1$$

και

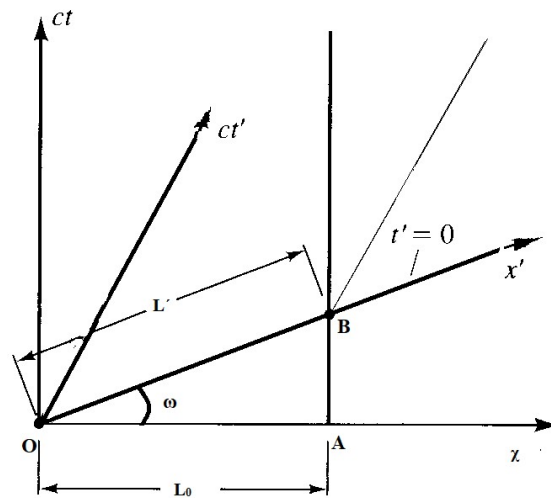
$$ct = x\beta$$

Θα προκύψει η λύση $P_1 (x = \gamma , ct = \beta\gamma)$.

Η ευκλείδεια απόσταση της μονάδας του άξονα x' από την κοινή αρχή O των αξόνων θα είναι πάλι η ίδια α . Η ευκλείδεια απόστασης α που αναφέρεται παραπάνω χρησιμοποιείται υπό την εξής έννοια :Σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα του επιπέδου (x, ct) , μεγέθη του επιπέδου (x' , ct') που υπολογίζονται με γεωμετρικό τρόπο (π.χ $K'_{\text{γεωμ}}$) θα έχουν πραγματική τιμή ($K'_{\text{πραγ}}$) στο επίπεδο (x' , ct') αν διαιρούνται με τον συντελεστή α .

$$K'_{\text{πραγ}} = K'_{\text{γεωμ}} \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}$$

Προς εμπέδωση θα εφαρμόσουμε την γεωμετρική μέθοδο για τη συστολή του μήκους. Στο παρακάτω χωροχρονικό διάγραμμα του σχήματος 3.13, απεικονίζεται μια ακίνητη ράβδος τοποθετημένη πάνω στον άξονα x ενός συστήματος Σ .



Σχήμα 3. 13 Διάγραμμα Minkowski για τη συστολή του μήκους κινούμενης ράβδου .

Αν στο σύστημα ηρεμίας της Σ η ράβδος έχει μήκος L_0 ποιο είναι το μήκος της όταν μετριέται από ένα σύστημα Σ' το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\vec{x}$ ως προς το Σ ; Η απόσταση μεταξύ των κοσμικών γραμμών των άκρων της ράβδου σε μια δεδομένη χρονική στιγμή εκφράζει το μήκος της ράβδου. Την χρονική στιγμή $t' = 0$ τα σημεία O και B αποτελούν την τομή των κοσμικών γραμμών των άκρων της ράβδου . Η απόσταση OB αντιστοιχεί στο γεωμετρικό μήκος της ράβδου L' . Είναι δεδομένο ότι η γωνία ω έχει εφαπτομένη $\tan \omega = v/c = \beta$.

Από το σχήμα έχουμε:

$$\begin{aligned} L'_{\text{γεωμ}} &= \frac{L_0}{\cos \omega} \\ &= L_0 \sqrt{1 + \tan^2 \omega} \\ &= L_0 \sqrt{1 + \beta^2} \end{aligned}$$

Αν λάβουμε υπόψη τη κλίμακα των αξόνων θα είναι

$$L'_{\text{πραγ}} = L'_{\text{γεωμ}} \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}$$

$$L'_{\text{πραγ}} = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

3.3.2 Γεωμετρική σημασία του μετασχηματισμού Lorentz

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των μετασχηματισμών στη γεωμετρία του χωροχρόνου;

Ας θεωρήσουμε δυο συστήματα αναφοράς Σ και Σ' τα οποία ταυτίζονται όταν $t = t' = 0$.

Το δεύτερο σύστημα Σ' κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς το πρώτο και προς τη θετική κατεύθυνση των αξόνων x, x' . Οι άξονες y και y', z και z' διατηρούνται καθόλη την κίνηση παράλληλοι μεταξύ τους. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα περιορίσουμε την ανάλυση σε δύο διαστάσεις, θεωρώντας ένα μετασχηματισμό Lorentz που αφήνει αμετάβλητες τις συντεταγμένες y και z και εμπλέκει μόνο τις συντεταγμένες x και ct .

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις:

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (3.42)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3.43)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με c έχουμε: $ct' = \gamma(ct - vx/c)$ (3.44)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις εξισώσεις (3.43) και (3.44) κατά μέλη προκύπτουν:

$$ct' + x' = e^{-\varphi}(ct + x) \quad (3.45)$$

$$ct' - x' = e^{\varphi}(ct - x) \quad (3.46)$$

Όπου :

$$e^{\varphi} = \gamma(1 + v/c) = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2} \quad (3.47)$$

Και

$$e^{-\varphi} = \gamma(1 - v/c) = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)^{1/2} \quad (3.47)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση των (3.45) και (3.46) μεταξύ τους προκύπτουν αντίστοιχα :

$$ct' = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2}(ct) - \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}x \quad (3.48)$$

$$x' = -\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}(ct) + \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2}x \quad (3.49)$$

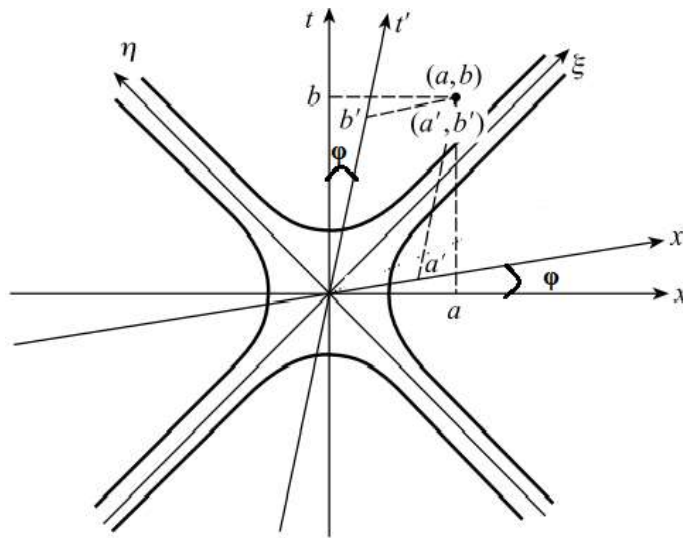
Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μοναδική υπερβολική γωνία φ όπου $\sinh \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ και

$\cosh \varphi = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2}$ οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:

$$ct' = \cosh \varphi(ct) - (\sinh \varphi)x \quad (3.50)$$

$$x' = -\sinh \varphi(ct) + (\cosh \varphi)x \quad (3.51)$$

Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν τη γεωμετρική ερμηνεία του μετασχηματισμού Lorentz στην δισδιάστατη γεωμετρία του χωροχρόνου. Ως μετασχηματισμοί παίζουν το ρόλο μιας υπερβολικής στροφής. Οι νέοι άξονες (ct') και x' του «κινούμενου» συστήματος αναφοράς οφείλουν να στραφούν κατά μια υπερβολική γωνία φ σε σχέση με τους αντίστοιχους άξονες ct και x του «ακίνητου» πλαισίου. (Σχήμα 3.14)



Σχήμα 3. 14 Υπερβολική στροφή των αξόνων του «κινούμενου» συστήματος αναφοράς (ct' , x').

Όμως ποια είναι η σημασία της γωνίας φ και πως συσχετίζεται με τις παραμέτρους που εμφανίζονται σε έναν μετασχηματισμό Lorentz;

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο σημείων του επιπέδου (ct, x) που απέχουν σταθερή χωροχρονική απόσταση R την αρχή O ενός συστήματος αναφοράς Σ . Όπως δείχνεται στο σχήμα 3.15, αν για τα σημεία αυτά η χρονική τους συνιστώσα τους υπερέρχει της χωρικής τους συνιστώσας, τότε ο γεωμετρικός τους τόπος είναι μια υπερβολή της μορφής $(ct)^2 - x^2 = R^2$ με $R^2 > 0$.

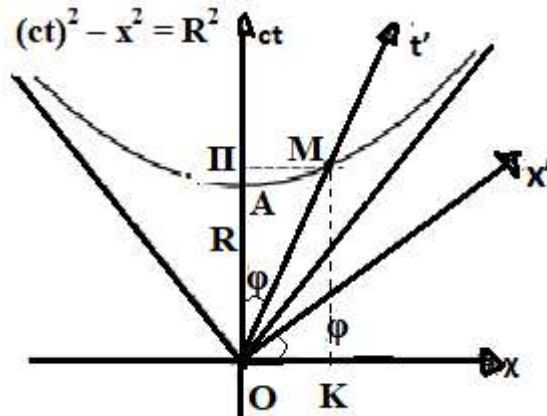
Η υπερβολική γωνία φ , ορίζεται ως ο λόγος της απόστασης κατά μήκος της υπερβολής από τον άξονα ct προς τη χωροχρονική απόσταση R της κορυφής A της υπερβολής από την αρχή των αξόνων O . Το υπερβολικό συνημίτονο της γωνίας φ ορίζεται ως

$$\cosh \varphi = OP/OA = ct / R$$

και αντίστοιχα το υπερβολικό ημίτονο ως

$$\sinh \varphi = x/R .$$

Ο λόγος $\tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi}$ καλείται υπερβολική εφαπτομένη της γωνίας φ .



Σχήμα 3. 15 Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου (ct, x) που απέχουν σταθερή χωροχρονική απόσταση R από την αρχή των αξόνων.

Ο άξονας ct' στο επίπεδο (ct', x') συμπίπτει με τη κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου που ηρεμεί στην αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς Σ' .

Από τη εξίσωση

$$x' = -\sinh \varphi(ct) + (\cosh \varphi)x$$

για

$$x' = 0$$

προκύπτει η κοσμική γραμμή του άξονα ct' στο επίπεδο (ct, x)

$$x = (\tanh \varphi)(ct)$$

η οποία αναπαριστά μια ευθεία γραμμή με κλίση ως προς τον άξονα ct ίση με $\tanh \varphi$.

Ομοίως για $ct' = 0$ από την

$$ct' = \cosh \varphi(ct) - (\sinh \varphi)x$$

προκύπτει η κοσμική γραμμή του άξονα x' στις συντεταγμένες (ct, x) :

$$ct = (\tanh \varphi)(x)$$

που αναπαριστά μια ευθεία γραμμή με κλίση ως προς τον άξονα x ίση με $\tanh \varphi$.

Η συσχέτιση της υπερβολικής γωνίας φ με τον μετασχηματισμό Lorentz προκύπτει από την αντικατάσταση της παραμέτρου $e^{\varphi} = \gamma(1+v/c)$ και $e^{-\varphi} = \gamma(1-v/c)$ στην έκφραση του $\sinh \varphi$ και $\cosh \varphi$:

$$\sinh \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma(1+v/c) - \gamma(1-v/c)}{2} = \gamma \frac{v}{c}$$

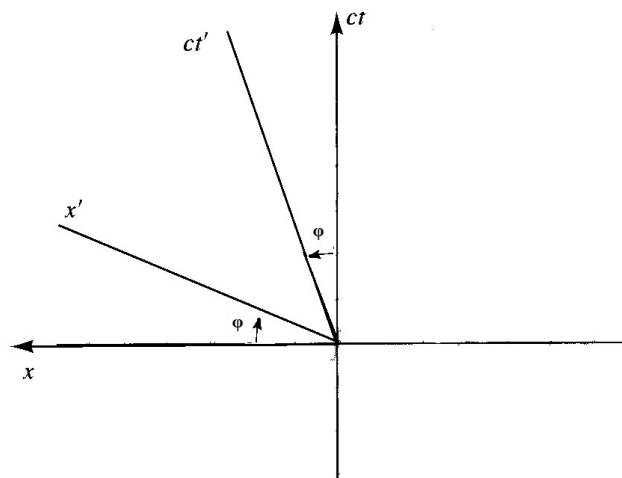
$$\cosh \varphi = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2} = \frac{\gamma(1-v/c) + \gamma(1+v/c)}{2} = \gamma$$

Η υπερβολική εφαπτομένη της γωνίας φ υπολογίζεται

$$\tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{\gamma v}{\gamma c}$$

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c}$$

Το μέτρο της υπερβολικής εφαπτομένης της γωνίας φ αντιστοιχεί στην σταθερή ταχύτητα v/c που κινείται το σύστημα αναφοράς Σ' ως προς το Σ . Το τόξο της υπερβολικής εφαπτομένης του λόγου (v/c) εκφράζει το μέγεθος της περιστροφής των αξόνων ct' και x' ως προς τους αντίστοιχους άξονες ct και x , δηλαδή $\varphi = \operatorname{arctanh}(v/c)$. Για θετικές τιμές της ταχύτητας v , καθώς αυξάνεται η ταχύτητα v η γωνία φ γίνεται μεγαλύτερη και επομένως η γωνία μεταξύ των αξόνων x' και ct' γίνεται πιο οξεία. Για αρνητικές ταχύτητες v , δηλαδή για κίνηση του συστήματος προς τα αριστερά κατά τον αρνητικό ημιάξονα Ox , οι υπερβολικές γωνίες φ είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση (σχήμα 3.16).



Σχήμα 3. 16 Χωροχρονικό διάγραμμα για την στροφή των αξόνων ενός συστήματος αναφοράς Σ' το οποίο κινείται με αρνητική ταχύτητα ως προς το σύστημα Σ

Γενικεύοντας καθώς το πλαίσιο Σ' «μπορεί να κινηθεί με ταχύτητα v σε οποιοδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών από $-c$ έως και c , οι άξονες ct' και x' στο χωροχρονικό διάγραμμα (ct, x) θα μοιάζουν σαν «ψαλίδι» το οποίο είναι πλήρως ανοιχτό όταν η ταχύτητα v τείνει στο $-c$ και πλήρως κλειστό όταν η ταχύτητα v τείνει να γίνει c ». (Rindler,2006, σ.50).

Αποδεικνύεται επίσης, ότι ο νέος μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτη τη μορφή του στοιχείου μήκους $(ds)^2 = (c dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \\ &= [\cosh \phi (cdt) - (\sinh \phi) dx]^2 - [-\sinh \phi (cdt) + (\cosh \phi) dx]^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \end{aligned}$$

Μια εναλλακτική πρόταση παρουσίασης των μετασχηματισμών Lorentz στη γεωμετρία του χωροχρόνου μπορεί να στηριχθεί στο αναλλοίωτο της μορφής της απόστασης. Οι εξισώσεις Lorentz μετασχηματίζουν τις συντεταγμένες (ct, x) ενός γεγονότος σε συντεταγμένες (ct', x') του ίδιου γεγονότος σε ένα άλλο αδρανειακό πλαίσιο το οποίο κινείται ως προς το πρώτο. Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη (ct, x) και (ct', x') ανήκουν πάνω στην ίδια υπερβολή διότι $(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2 = \text{σταθερά}$. Οι μετασχηματισμοί Lorentz επομένως, μπορούν να μετακινούν τα σημεία πάνω στην υπερβολή που ανήκουν, αλλά το συνεχές σύνολο των σημείων, δηλ η υπερβολή ως όλον, παραμένει αμετάβλητο.

Στο επίπεδο (ct, x) για ένα τυχαίο σημείο P (ct, x) υπολογίζουμε αντίστοιχα τις αποστάσεις του ξ , και n από την ευθεία $ct+x=0$ και $ct-x=0$: (Rindler,2006).

$$\xi = (ct + x) / \sqrt{2}$$

$$n = (ct - x) / \sqrt{2}$$

Μετασχηματίζοντας κατά Lorentz το σημείο P μεταφέρεται σε μια άλλη θέση (ct', x') της ίδιας υπερβολής όπου ανήκει το σημείο P. Κατά αντιστοιχία με τα προηγούμενα ορίζουμε τις αποστάσεις ξ' και n' ως :

$$\xi' = (ct' + x') / \sqrt{2}$$

$$n' = (ct' - x') / \sqrt{2}$$

Οι ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Lorentz :

$$ct' + x' = e^{-\varphi}(ct + x)$$

$$ct' - x' = e^{\varphi}(ct - x)$$

διαβάζονται τώρα ως : $\xi' = e^{-\varphi}\xi$, $\eta' = e^{\varphi}\eta$

και το αναλλοίωτο της απόστασης : $\xi' \eta' = \xi \eta$. (Rindler,2006).

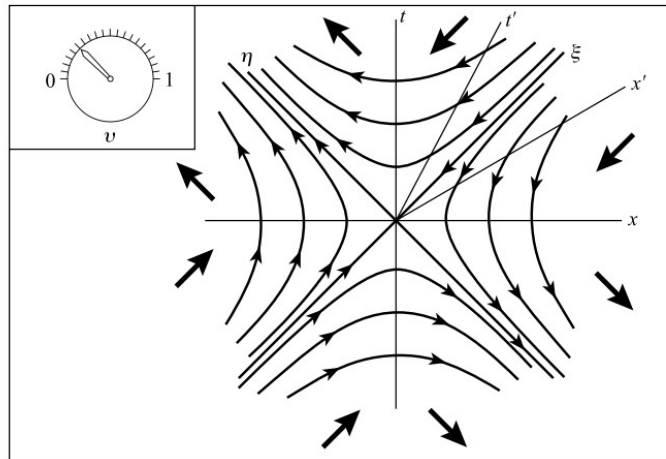
Οι νέες εξισώσεις $\xi' = e^{-\varphi}\xi$, $\eta' = e^{\varphi}\eta$ παριστούν ένα μετασχηματισμό που υποδηλώνει μια

«συστολή» στον άξονα ξ κατά τον παράγοντα $e^{-\varphi} = \left(\frac{1-v/c}{1+v/c}\right)^{1/2}$ και μια «διαστολή» στον

άξονα η κατά τον παράγοντα $e^{\varphi} = \left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{1/2}$.

Η παράμετρος φ χρησιμοποιείτε εναλλακτικά αντί της ταχύτητας v . Όταν η ταχύτητα είναι θετική και αυξάνεται τότε η παράσταση e^{φ} αυξάνεται και η $e^{-\varphi}$ μειώνεται με αποτέλεσμα « όλες οι ξ συντεταγμένες να μειώνονται κατά απόλυτη τιμή και όλες οι η συντεταγμένες να αυξάνονται. Τα ακριβώς αντίθετα συμβαίνουν όταν η ταχύτητα v αυξάνεται αρνητικά». (W.Rindler,2006,σ.53).

Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο σχήμα 3.17 που ακολουθεί.



Σχήμα 3. 17 Γεωμετρική δυναμική παρουσίαση του μετασχηματισμού Lorentz. Καθώς η σχετική ταχύτητα μεταξύ των πλαισίων μεταβάλλεται ο μετασχηματισμός μετακινεί τα σημεία πάνω στην ίδια υπερβολή. Πηγή : W.Rindler,2006,σ.52.

3.3.3 Κώνοι φωτός – Αιτιότητα

Για δυο κοσμικά σημεία που οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους διαφέρουν κατά Δx , Δy , Δz , Δt το τετράγωνο της μεταξύ τους χωροχρονικής απόστασης ορίζεται ως :

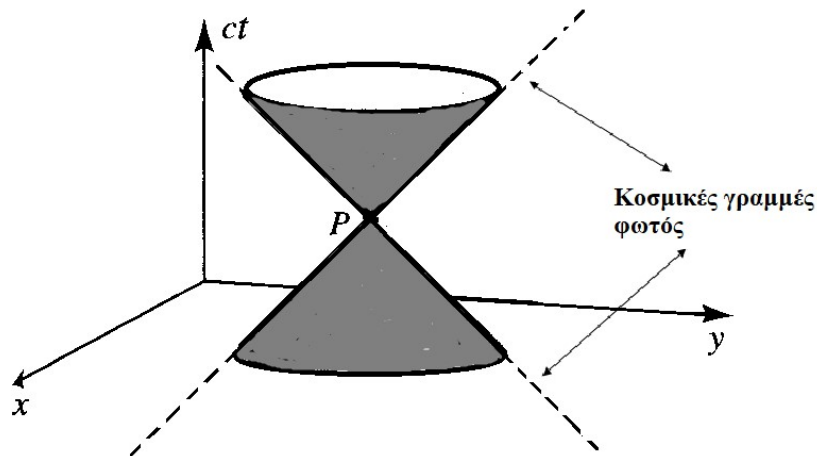
$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 .$$

Αν $(\Delta s)^2 > 0$ τότε λέμε ότι τα σημεία είναι χρονοειδώς χωρισμένα. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να περιγράψουμε δυο γεγονότα που συμβαίνουν στο ίδιο σημείο αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές .

Αν $(\Delta s)^2 < 0$ τότε τα σημεία είναι χωροειδώς χωρισμένα. Τα γεγονότα μπορούν να συμβαίνουν ταυτόχρονα αλλά σε διαφορετικές θέσεις .

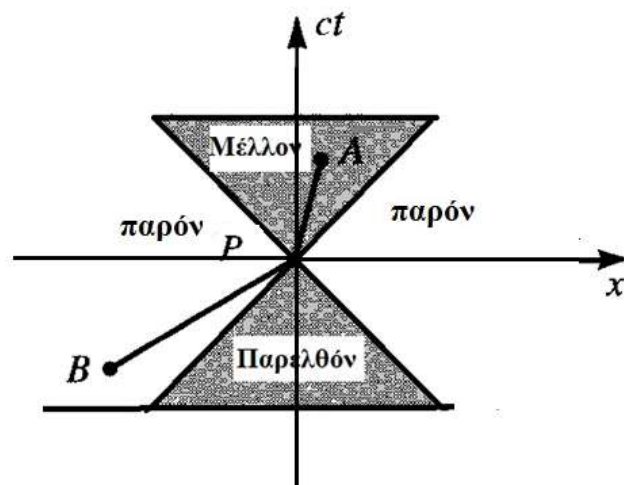
Τέλος για $(\Delta s)^2 = 0$ λέμε ότι τα γεγονότα είναι φωτοειδώς χωρισμένα.

Το σύνολο των γεγονότων που είναι φωτοειδώς διαχωρισμένα από κάποιο σημείο P του χωροχρόνου ονομάζεται κώνος φωτός του σημείου P. Μελλοντικός κώνος φωτός του σημείου P, αποτελεί η τρισδιάστατη επιφάνεια που παράγεται από το σύνολο των φωτοειδώς διαχωρισμένων γεγονότων με το σημείο P και τα οποία επικοινωνούν με το σημείο P με φωτεινές ακτίνες που εξέρχονται από αυτό. Αντίστοιχα παρελθοντικός κώνος φωτός του σημείου P είναι ο γεωμετρικός τόπος των φωτοειδώς διαχωρισμένων από το σημείο P γεγονότων, τα οποία επικοινωνούν με το σημείο αυτό με φωτεινά σήματα που συγκλίνουν σε αυτό. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 3.18. Κατά μια άλλη έννοια ο μελλοντικός κώνος φωτός είναι η επιφάνεια που διαγράφει ένας παλμός φωτός καθώς ταξιδεύει στο χωροχρόνο, ο οποίος έχει εκκινήσει από το σημείο P τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στη θέση του P στον χωροχρόνο. Κατά αναλογία ο παρελθοντικός κώνος φωτός του σημείου P είναι η επιφάνεια που διαγράφεται από τα μέτωπα κύματος του φωτός όταν αυτός συγκλίνει στο P.



Σχήμα 3. 18 Ο κώνος φωτός ενός χωροχρονικού σημείου P σε τρεις διαστάσεις.

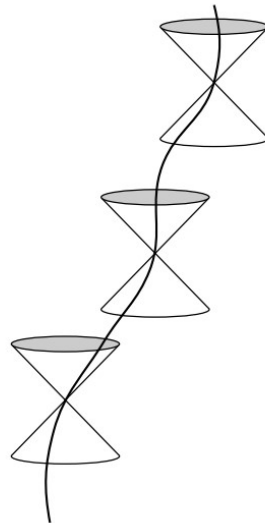
Σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα του σχηματος 3.19 , που απεικονίζει μια δισδιάστατη τομή του χωροχρόνου, μας παρέχεται η δυνατότητα να αντιληφθούμε καλύτερα και ευκολότερα τους σχηματισμούς των κώνων φωτός. Για ένα χωροχρονικό σημείο P του επιπέδου (ct, x) οι κοσμικές γραμμές δυο φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από αυτό, διαχωρίζουν το χωροχρονικό συνεχές σε τρεις περιοχές:



Σχήμα 3. 19. Δισδιάστατη τομή (ct, x) του τρισδιάστατου χωροχρόνου .

Η πρώτη περιοχή είναι η πάνω τριγωνική σφήνα που οριοθετείται από τις ευθείες που σχηματίζουν γωνία 45 μοιρών με τον θετικό ημιάξονα του χρόνου και αποτελεί το εσωτερικό του μελλοντικού κώνου φωτός του σημείου P. Η δεύτερη περιοχή είναι η κάτω τριγωνική σφήνα που εμπεριέχει τον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου αποτελεί το εσωτερικό του παρελθοντικού κώνου φωτός του σημείου P. Κάθε γεγονός που βρίσκεται εντός των

γραμμοσκιασμένων περιοχών ένα και δυο είναι χρονοειδώς διαχωρισμένο με το σημείο P. Ένα αντικείμενο με μη μηδενική μάζα είναι δυνατόν να μεταβεί από το σημείο P σε οποιοδήποτε σημείο του εσωτερικού του μελλοντικού κώνου φωτός του , ακολουθώντας την κοσμική γραμμή του που συμπεριέχει τα δυο αυτά σημεία. Όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του παρελθοντικού κώνου μπορούν κατά οποιοδήποτε κοσμική γραμμή να μεταβούν σημείο P. Σε κάθε περίπτωση όμως, πρέπει η κοσμική γραμμή που κινούνται τα σώματα με μη μηδενική μάζα να βρίσκεται διαρκώς εντός του κώνου φωτός του κάθε σημείου της, γιατί μόνον τότε διασφαλίζεται να είναι η κλίση (ως προς τον άξονα των χρόνων) κάθε σημείου της κοσμικής γραμμής μικρότερη από τη μονάδα. Μια τέτοια περίπτωση απεικονίζεται στο σχήμα 3.20 .



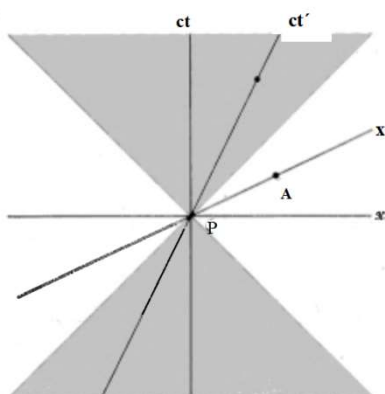
**Σχήμα 3. 20 Η κοσμική γραμμή ενός σώματος εμπεριέχεται στον κώνο φωτός του κάθε σημείου της.
Πηγή : W.Rindler,2006.**

Οι κοσμικές γραμμές των φωτεινών σημάτων που διέρχονται από το P είναι εφαπτομενικές του κώνου φωτός του P. Κάθε σημείο του χωροχρόνου που βρίσκεται πάνω στις κοσμικές γραμμές των φωτεινών σημάτων που διέρχονται από το P συνδέεται φωτοειδώς με το σημείο. Σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό του κώνου φωτός του σημείου P (περιοχή με την ονομασία «παρόν» στο σχήμα 3.19) είναι χωροειδώς συνδεδεμένα με το P π.χ όπως το σημείο B.

Ας σημειώσουμε ότι λόγω της σταθερής τιμής της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς οι κώνοι φωτός είναι καθολικοί. Συνδέονται μόνο με τα σημεία του χωροχρόνου και είναι οι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Καθώς τίποτα δεν μπορεί να κινηθεί ή να διαδοθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός, οι επιπτώσεις ενός γεγονότος στο εσωτερικό ή το πολύ πάνω στην επιφάνεια ενός κώνου φωτός δεν μπορούν να διαδοθούν σε σημεία που βρίσκονται εκτός του κώνου. Επομένως οι κώνοι φωτός οριοθετούν τις σχέσεις αιτίου – αποτελέσματος που αναπτύσσονται μεταξύ των γεγονότων στο χωροχρόνο. Σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ή το πολύ πάνω στον μελλοντικό κώνο φωτός ενός σημείου P μπορούν, σε κάποια μελλοντική στιγμή, να επηρεαστούν από το σημείο P. Και αντίστροφα το σημείο P μπορεί να επηρεαστεί από σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ή το πολύ πάνω στον παρελθοντικό κώνο φωτός του P.

Χωροειδώς συνδεδεμένα σημεία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για τέτοια σημεία είναι δυνατό να αλλάξει η χρονική τους ακολουθία ανάλογα με την επιλογή του συστήματος αναφοράς που κάποιος τα παρακολουθεί. Για παράδειγμα στην περίπτωση του σχήματος 3.21, για κάθε παρατηρητή του συστήματος Σ (ct, x) το γεγονός A είναι μεταγενέστερο του γεγονότος P. Για έναν παρατηρητή όμως που διευθετεί τους άξονες ενός συστήματος Σ' (ct', x') με τέτοιο τρόπο ώστε τα σημεία A και P να βρίσκονται πάνω στον άξονα x' , τα σημεία αυτά (A και P) είναι ταυτόχρονα. Συνεπώς η έννοια «γεγονός μεταγενέστερου ή προγενέστερου ενός άλλου γεγονότος» δεν νοηματοδοτείται σε χωρικά διαχωρισμένα γεγονότα.



Σχήμα 3. 21 Η χρονική ακολουθία των σημείων A και P εξαρτάται από την επιλογή του Α.Σ.Α.

3.4 Πειραματική απόδειξη διαστολής του χρόνου.

3.4.1 Τα μίονια

Η διαστολή του χρόνου επιβεβαιώθηκε μέσα από πολλές πειραματικές διαδικασίες. Μία περίπτωση είναι τα μίονια και η ανίχνευση τους στη Γη. Τα σωματίδια αυτά προκύπτουν από

τη διάσπαση των πιονίων που δημιουργούνται σε ύψη έξι έως δέκα χιλιομέτρων στην ατμόσφαιρα. Τα πιόνια δημιουργούνται όταν τα υψηλής ενέργειας πρωτόνια της κοσμικής ακτινοβολίας αλληλεπιδρούν με το νουκλεόνια των πυρήνων του αζώτου και του οξυγόνου της ατμόσφαιρας.

Τον μόνια είναι ασταθή και διασπώνται με ένα μέσο χρόνο ζωής $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s μετρούμενο στο σύστημα ηρεμίας τους. Σύμφωνα με την κλασσική φυσική ακόμη και με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός τα μόνια δίνετε να ταξιδέψουν μία απόσταση εξακοσίων εξήντα μέτρων περίπου πριν διασπαστούν και κατά συνέπεια δεν μπορούν να ανιχνευτούν στην επιφάνεια της γης. Ωστόσο από διάφορες πειραματικές διαδικασίες ανιχνεύονται απρόσμενα μεγάλος αριθμός μιονίων της κοσμικής ακτινοβολίας στην επιφάνεια της γης. Το παράδοξο αυτό έγινε γνωστό ως μεσονικό παράδοξο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε κάποιες αρχικές συνθήκες για να εξηγήσουμε το παράδοξο των μιονίων με πιο απλό τρόπο. Αρχικά υποθέτουμε ότι δημιουργούνται N_0 μόνια σε απόσταση h από την επιφάνεια της θάλασσας και ότι όλα κινούνται μόνο κατακόρυφα προς τα κάτω με την ίδια ταχύτητα v . Μετά από την πάροδο κάποιου χρόνου t τα αδιάσπαστα μόνια (N) που βρίσκονται απομακρυσμένα από την επιφάνεια της θάλασσας κατά μια απόσταση $y = h - vt$ είναι: $N = N_0 e^{-t/\tau}$ ή $N = N_0 e^{-(h-y)/v\tau}$.

Για μια ταχύτητα μιονίων $v = 0,98 c$ με μέσο χρόνο ζωής $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s μετρημένο στο σύστημα ηρεμίας των μιονίων και σε ύψος δημιουργίας μιονίων $h=10000$ m έχουμε σύμφωνα με:

i. Κλασσική ανάλυση

Στην επιφάνεια της θάλασσας ($y=0$) ο αριθμός των αδιάσπαστων μιονίων υπολογίζεται:

$$\left. \begin{array}{l} N(t) = N_0 e^{-\frac{h-y}{v\tau}} \\ h = 10000 \text{ m} \\ \tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ v = 0,98 c \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow N(t) = 1,94 \cdot 10^{-7} N_0 = \frac{N_0}{5,2 \cdot 10^6}$$

Δηλαδή από τα $5,2 \cdot 10^6$ μόνια μόνο ένα δεν θα διασπαστεί και θα ανιχνευτεί στην επιφάνεια της θάλασσας.

Η απόσταση που θα διανύσουν τα μόνια στην διάρκεια του χρόνου ζωής τους υπολογίζεται από $v\tau = 0,98 c \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 638 \text{ m}$.

ii Σχετικιστική ανάλυση:

Στο σύστημα αναφοράς ενός παρατηρητή στην Γή ο μέσος χρόνος ζωής των μιονίων μετράται λόγω διαστολής του χρόνου σε $\tau' = \gamma \tau$ όπου $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Για μια ταχύτητα μιονίων $v = 0,98 c$ υπολογίζεται:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,98c)^2}{c^2}}} = 7,1$$

Στην επιφάνεια της θάλασσας ($y=0$) ο αριθμός των αδιάσπαστων μιονίων υπολογίζεται πλέον:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{h-y}{\tau'v}}$$

$$N = N_0 e^{-2,17} = 0,114 N_0 = \frac{N_0}{9}$$

Από τα 9 μίονια το ένα θα φτάσει αδιάσπαστο στην θάλασσα

Η απόσταση που θα διανύσουν τα μίονια στην διάρκεια του χρόνου ζωής τους τ' υπολογίζεται σε $v \tau' = 0,98 c 2,2 \cdot 10^{-6} s 7,1 = 4543 m$.

Συμπερασματικά το ποσοστό των μιονίων που θα επιζήσουν αν λάβουμε υπόψιν την διαστολή του χρόνου είναι $5,2 \cdot 10^{-6} / 9 = 577777$ φορές μεγαλύτερο από το ποσοστό των μιονίων που θα μείνουν αδιάσπαστα σύμφωνα με την κλασική προσέγγιση.

Ένας ακριβής έλεγχος για τη διαστολή του χρόνου διεξήχθη στο CERN το 1977 (Balley). Σε έναν ειδικό συσσωρευτικό δακτύλιο με μήκος κυκλικής τροχιάς 14 m επιταχύνθηκαν μίονια ώστε η τιμή του γ να φθάσει στα 29,3 (η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε $v/c = 0,9994$). Απαριθμητές τοποθετημένοι στο δακτύλιο ανίχνευαν τα ηλεκτρόνια ή τα ποζιτρόνια που προέκυπταν από τη διάσπαση των αρνητικά ή θετικά φορτισμένων μιονίων. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων ή ποζιτρονίων που παρατηρήθηκαν συνάρτηση του χρόνου σε συνδυασμό με άλλους παραμέτρους (με σημαντικότερη την μαγνητική ροπή των μιονίων) που επηρεάζουν τη διάσπαση, προσαρμόστηκαν σε ένα νόμο διάσπασης με παράμετρο τον χρόνο ζωής των μιονίων. Τα πειραματικά αποτελέσματα έδωσαν τιμές για τη διάρκεια ζωής των κινούμενων μιονίων : $\tau_{\mu}^+ = 64,419 \pm 0,58 \mu s$ και $\tau_{\mu}^- = 64,4368 \pm 0,29 \mu s$, τα οποία συμφωνούν εξαιρετικά με τις προβλέψεις της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

3.4.2 Το πείραμα των Hafele και Keating

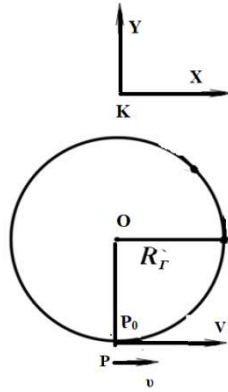
Το πείραμα Hafele και Keating είναι μια άλλη πειραματική δοκιμασία που σχετίζεται με τον έλεγχο των προβλέψεων της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας για τη διαστολή του χρόνου. Οι δύο επιστήμονες το 1971 χρησιμοποίησαν ατομικά ρολόγια καισίου με μεγάλη ακρίβεια στη μέτρηση του χρόνου. Ταξίδεψαν μαζί με κάποια ρολόγια καισίου σε ένα εμπορικό αεριοθούμενο κάνοντας το γύρο της γης αρχικά σε 41 ώρες με κατεύθυνση ανατολικά και στη συνέχεια σε 49 ώρες με κατεύθυνση πτήσης προς δυσμάς. Ο χρόνος που κατέγραψαν τα ατομικά τους ρολόγια εν πτήση συγκρίθηκε με την καταγραφή του χρόνου αντίστοιχων ατομικών ρολογιών που παρέμειναν ακίνητα στο Αστεροσκοπείο του Αμερικανικού ναυτικού που ήταν και το αρχικό σημείο εκκίνησης και των κινούμενων ρολογιών. Αν παραβλέψει κανείς τι διαφορά χρόνου πού οφείλεται στη διαφορά βαρυτικού δυναμικού λόγω διαφορετικού ύψους που πετούσε το αεροπλάνο (όπως προβλέπεται από τη Γενική θεωρία της σχετικότητας) οι διαφορές χρόνου που παρατηρήθηκαν στα ρολόγια ήταν μέσα στα όρια του σφάλματος που προβλέπονται από τις θεωρητικές προβλέψεις της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Οι θεωρητικές προβλέψεις και τα αποτελέσματα του πειράματος συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα. 1

Effect	Direction	
	East	West
Gravitational	144 ± 14	179 ± 18
Kinematic	−184 ± 18	96 ± 10
Net	−40 ± 23	275 ± 21

Πίνακας 1 J.C Hafele; Richard E. Keating.
Πηγή Science, New Seriew, Vol. 177, No. 4044 (Jul. 14, 1972), 166-168

Ας εξετάσουμε την περίπτωση, όπου ένα ρολόι P περιστρέφεται σε πολύ μικρό ύψος, πάνω από τον ισημερινό μέσα σε ένα αεροπλάνο, με μικρή σταθερή ταχύτητα v ως προς την επιφάνεια της γης και προς ανατολάς. Ένα πανομοιότυπο ρολόι P_0 μένει ακίνητο στη Γη στον ισημερινό και στον τόπο που ξεκίνησε το κινούμενο ρολόι. Το ρολόι P στο αεριοθούμενο θα διαγράψει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τη γη μέχρι να επιστρέψει στο ίδιο σημείο άποψη που εκκίνησε και βρίσκεται το ρολόι P_0 . Επειδή η Γη περιστρέφεται καμιά από τις τοποθεσίες : ρολόι σε ηρεμία στη γη και ρολόι στο αεριοθούμενο δεν είναι αδρανειακό πλαίσιο. Επιλέγεται ως αδρανειακό σύστημα αναφοράς ένας αδρανειακός παρατηρητής K που κοιτάζει προς τα κάτω τον βόρειο πόλο από μεγάλη απόσταση έξω από

τη γη και είναι ακίνητος ως προς το κέντρο της γης. Η κατάσταση αποδίδεται στο σχήμα 3.22.



Σχήμα 3. 22 Το ρολόι P_0 βρίσκεται ακίνητο σε ένα σημείο της Γης. Ένα δεύτερο πανομοιότυπο ρολόι P περιστρέφεται γύρω από τη Γη σε μικρό ύψος.

Στο σύστημα αυτό το ρολόι P_0 κινείται με την ίδια ταχύτητα V που έχουν τα σημεία του ισημερινού. Ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς το ρολόι P κινείται με σχετική ταχύτητα v . Η ταχύτητα του P ως προς το σύστημα K είναι:

$$v_K = \frac{v + V}{1 + \frac{vV}{c^2}} \quad (3.52)$$

Καθότι $v, V \ll c^2$ έχουμε $\left(1 + \frac{vV}{c^2}\right)^{-1} \approx 1$ και η παραπάνω ταχύτητα γίνεται: $v_K = v + V$

Αν λάβουμε υπόψη τη διαστολή του χρόνου τότε κάθε χρονικό διάστημα $d\tau$ του αδρανειακού παρατηρητή του κέντρου K τα ρολόγια P_0 και P θα το καταγράψουν αντίστοιχα ως:

$$dt_0 = d\tau \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (3.53)$$

και το ρολόι P ως:

$$dt = d\tau \sqrt{1 - \left(\frac{v + V}{c}\right)^2} \quad (3.54)$$

από όπου :

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v+V}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.55)$$

Αν το κινούμενο ρολόι P καταγράφει χρόνο T για μία πλήρη περιστροφή του γύρω από τη γη, και το ακίνητο ρολόι P₀ μετράει την ίδια περιστροφή του P ως T₀ τότε:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v+V}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.56)$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση (3.56) διωνυμικά (αν $x \ll 1$ τότε $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$) και παραλείποντας τους όρους με δυνάμεις τρίτης τάξης και μεγαλύτερης θα προκύψει :

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v+V}{c} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} \right)$$

Μετά από την εκτέλεση των πράξεων και διατηρώντας τους όρους με δυνάμεις μέχρι και δεύτερης τάξης (δηλ V^2/c^2 , v^2/c^2 και Vv/c^2) έχουμε :

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{vV}{c^2}$$

Και
$$T - T_0 = -T_0 \frac{vV}{c^2} \left(1 + \frac{v}{2V} \right) \quad (3.57)$$

Αν η κίνηση των μεταφερόμενων ρολογιών είναι προς την ανατολή (δηλ σε πορεία σύμφωνη με την φορά που η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της) η ταχύτητα v είναι θετική. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά χρόνου ανάμεσα στα ρολόγια του αεροπλάνου και στα ακίνητα ρολόγια πάνω στη γη είναι:

$$\Delta T = -T_0 \frac{vV}{c^2} \left(1 + \frac{v}{2V} \right) \quad (3.58)$$

Εάν ο περίπλους είναι αδιάκοπος, σε μια πρώτη προσέγγιση ο χρόνος ταξιδιού $v T_0 = 2\pi R_\Gamma$

Για $V = \frac{2\pi R_\Gamma}{T_\Gamma}$ όπου $R_\Gamma = 6378 \text{ Km}$ η ισημερινή ακτίνα της Γης, $T_\Gamma = 24 \text{ h}$

Για κίνηση προς ανατολάς προκύπτει:

$$\Delta T = -\frac{(2\pi R_\Gamma)^2}{T_\Gamma c^2} \left(1 + \frac{v}{2V}\right) \quad (3.59)$$

Για κίνηση προς δυσμάς το κινούμενο ρολόι προηγείται του ρολογιού που είναι τοποθετημένο σε ηρεμία στη γη. Ομοίως θα προκύψει μια παρόμοια σχέση :

$$\Delta T = \frac{(2\pi R_\Gamma)^2}{c^2 T_\Gamma} \left(1 - \frac{v}{2V}\right) \quad (3.60)$$

Για $R_\Gamma = 6378 \text{ Km}$, $T_\Gamma = 24 \text{ h}$ η παράσταση $\frac{(2\pi R_\Gamma)^2}{c^2 T_\Gamma} = 207$

Για μια τυπική ταχύτητα αεροπλάνου $v = 270 \text{ m/s}$ και με ταχύτητα των σημείων του ισημερινού $V = 464 \text{ m/s}$ η διαφορά χρόνου ανάμεσα στα ρολόγια υπολογίζεται από (3.59) και (3.60) αντίστοιχα:

Για κίνηση προς τα ανατολικά $\Delta T = - 207 \cdot 1,291 = - 267 \text{ ns}$

Για κίνηση προς τα δυτικά $\Delta T = + 207 \cdot 0,709 = + 146 \text{ ns}$

Αν η δοκιμασία πραγματοποιηθεί σε διαφορετικό παράλληλο από τον ισημερινό η παραπάνω σχέση για κίνηση προς ανατολάς τροποποιείται σε:

$$d(\Delta T) = \frac{dt_0}{2c^2} \left[V^2 (\cos^2 \lambda_0 - \cos^2 \lambda) - 2v_\phi V \cos \lambda - v^2 \right]$$

Όπου V ισημερινή ταχύτητα της γης, λ_0 το γεωγραφικό πλάτος του ακίνητου στη γη ρολογιού, και λ , v , v_ϕ αντίστοιχα το γεωγραφικό πλάτος, η συνολική ταχύτητα, και η συνιστώσα της ταχύτητας προς τα ανατολάς του κινούμενου ρολογιού. Επιπλέον, σύμφωνα με τις προβλέψεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας ένα ρολόι σε ύψος h_0 θα υστερεί χρονικά ενός ρολογιού που βρίσκεται σε ύψος h κατά :

$$d(\Delta T)_g = g dt_0 / c^2 (h - h_0)$$

Όπου dt_0 η διάρκεια χρόνου που μετράει το ρολόι το ευρισκόμενο στο χαμηλότερο δυναμικό.

Καθώς η ταχύτητα πτήσης v , το γεωγραφικό πλάτος, όπως και το ύψος πτήσης h είναι πιθανό να μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της πτήσης είναι απαραίτητο να λάβουμε το ολοκλήρωμα των παραπάνω σχέσεων για να υπολογιστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η ολική διαφορά χρόνου ανάμεσα στα ρολόγια :

$$\Delta T = \int_0^{T_{ολ}} g dt_0 / c^2 (h - h_0) + \frac{dt_0}{2c^2} \left[V^2 (\cos^2 \lambda_0 - \cos^2 \lambda) - 2v_\varphi V \cos \lambda - v^2 \right]$$

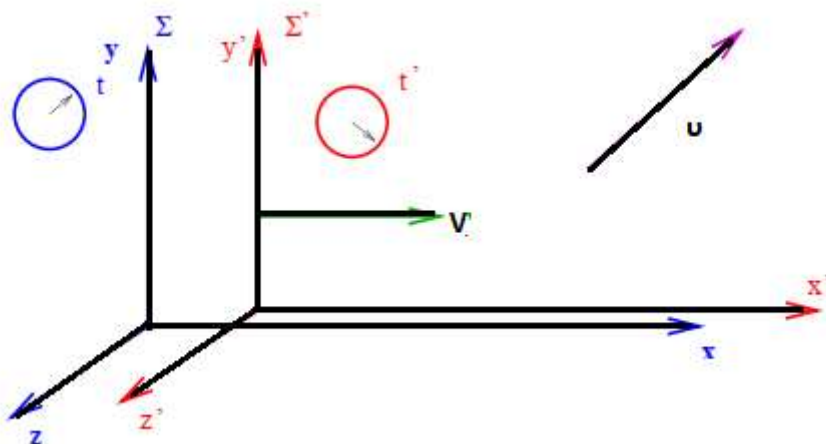
με $T_{ολ}$ ο συνολικός χρόνος πτήσης του πειράματος.

3.5 Σχετικιστική μηχανική

3.5.1 Μετασχηματισμοί ταχύτητας- επιτάχυνσης

Μετασχηματισμοί ταχυτήτων

Ας θεωρήσουμε δυο συστήματα αναφοράς Σ και Σ' όπου το Σ' κινείται με σχετική ταχύτητα V ως προς το ακίνητο πλαίσιο Σ και με φορά προς τα θετικά του άξονα x όπως φανερώνει το παρακάτω σχήμα 3.23.



Σχήμα 3.23. Οι Σ και Σ' παρατηρούν κάποιο σώμα που κινείται στο χώρο με ταχύτητα v ως προς το ακίνητο πλαίσιο Σ .

Η ταχύτητα κάποιου σώματος ορίζεται από τις συντεταγμένες (u_x, u_y, u_z) στο πλαίσιο Σ και αντιστοίχως από τις συντεταγμένες (u'_x, u'_y, u'_z) στο σύστημα αναφοράς Σ' . Διαφορίζοντας τις σχέσεις που δίνουν τους μετασχηματισμούς Lorentz θα έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - V dt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned} \quad (3.61)$$

Όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ και $\beta = \frac{V}{c}$

Για την ταχύτητα u'_x προκύπτει:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - V dt)}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} u_x} \quad (3.62)$$

Ομοίως :

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} u_x\right)} \quad (3.63)$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} u_x\right)} \quad (3.64)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός βρίσκεται αν αντικαταστήσουμε τα τονούμενα με άτονα και θέσουμε αντί για V το $-V$:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} u'_x} \quad (3.65)$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} u'_x\right)} \quad (3.66)$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} u'_x\right)} \quad (3.67)$$

Στην γενική περίπτωση όπου το Σ' κινείται με ταχύτητα \vec{v} ως προς το Σ ο μετασχηματισμός της διανυσματικής ταχύτητας του σώματος στο Σ' είναι:

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - \gamma \vec{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)} \quad (3.68)$$

Ο μετασχηματισμός του μέτρου της ταχύτητας θα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} v'^2 &= v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \\ v'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^2} \left[(v_x - V)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (v_y^2 + v_z^2) \right] \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση : $v^2 - v_x^2 = v_y^2 + v_z^2$ θα προκύψει

$$v'^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^2} \left[\frac{V^2 v_x^2}{c^2} - 2v_x V + V^2 + v^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right]$$

Πολλαπλασιάζοντας με c^2 και προσθαφαιρώντας τη μονάδα έχουμε:

$$\begin{aligned} v'^2 &= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^2} \left[\frac{V^2 v_x^2}{c^4} - \frac{2v_x V + V^2 + v^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{c^2} + 1 - 1 \right] \\ v'^2 &= \frac{c^2}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^2} \left[\left(\frac{V v_x}{c^2} - 1\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right] \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε την παράσταση :

$$v'^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^2} \right] \quad (3.69)$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \quad (3.70)$$

Η οποία μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή για δύο συστήματα με τους άξονές τους σε παράλληλη τοποθέτηση και όταν το Σ' κινείται με ταχύτητα \vec{V} προς το Σ :

$$\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\vec{V}\vec{v}}{c^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \quad (3.71)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός βρίσκεται αν αντικαταστήσουμε τα τονούμενα με άτονα και θέσουμε αντί για V το $-V$:

$$v^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^2} \right] \quad (3.72)$$

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας των παραπάνω τύπων ας θεωρήσουμε την απλοποιημένη περίπτωση που ένα φωτόνιο κινείται με ταχύτητα $v'_x = c$ ως προς το σύστημα Σ' κατά μήκος του άξονα x' . Θεωρούμε επίσης ότι το σύστημα Σ' κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ και στην ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου. Ο νόμος πρόσθεσης των ταχυτήτων του Γαλιλαίου προβλέπει για την ταχύτητα $v_{κλ}$ του φωτονίου ως προς το Σ :

$$v_{κλ} = V + c$$

Αντίθετα η σχετικιστική ταχύτητα του υπολογίζεται από την σχέση:

$$v_{σζ} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2} c} = c$$

επιβεβαιώνοντας ότι η ταχύτητα του φωτός έχει την ίδια τιμή για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές.

Ο μετασχηματισμός της επιτάχυνσης

Θεωρούμε ξανά δυο συστήματα αναφοράς Σ και Σ' όπου το Σ' κινείται με σχετική ταχύτητα V ως προς το ακίνητο πλαίσιο Σ και με φορά προς τα θετικά του άξονα x . Στο σύστημα Σ κάποιο σώμα έχει επιτάχυνση $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ και αντίστοιχες συνιστώσες της επιτάχυνσης

$\vec{a}'(a'_x, a'_y, a'_z)$ στο σύστημα Σ' . Για την συνιστώσα a'_x έχουμε :

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dv_x} \frac{dv_x}{dt} \frac{dt}{dt'}$$

Από $dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2} dx) \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \left[\gamma(1 - \frac{V}{c^2} v_x) \right]^{-1}$ η παραπάνω παίρνει την έκφραση:

$$\alpha'_x = \frac{d}{dv_x} \left[\frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \right] \alpha_x \left[\gamma(1 - \frac{V}{c^2} v_x) \right]^{-1} \quad (3.73)$$

Υπολογίζοντας $\frac{d}{dv_x} \left[\frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \right] = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{(1 - \frac{V}{c^2} v_x)^2}$ (3.74)

Από τις σχέσεις (3.73) και (3.74) και μετά από πράξεις θα καταλήξουμε:

$$\alpha'_x = \frac{\gamma^{-3} \alpha_x}{(1 - \frac{V}{c^2} v_x)^3} \quad (3.75)$$

Με παρόμοιο τρόπο θα έχουμε για την συνιστώσα α'_y της επιτάχυνσης:

$$\alpha'_y = \frac{dv'_y}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (3.76)$$

Όμως $\frac{d}{dt} \left[\gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \right] = \gamma^{-1} \left[(1 - \frac{V}{c^2} v_x)^{-1} \frac{dv_y}{dt} + v_y \frac{d}{dt} \left((1 - \frac{V}{c^2} v_x)^{-1} \right) \right]$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην (3.76) και εκτελώντας τις πράξεις θα αναπαράγουμε την τελική έκφραση :

$$\alpha'_y = \frac{\alpha_y}{\gamma^2 (1 - \frac{V}{c^2} v_x)^2} + \frac{v_y \frac{V}{c^2}}{\gamma^2 (1 - \frac{V}{c^2} v_x)^3} \alpha_x$$

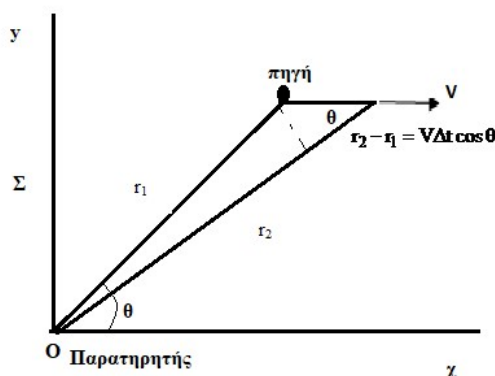
Μια παρόμοια έκφραση θα αναπαραχθεί και για την α'_z συνιστώσα της επιτάχυνσης

$$\alpha'_z = \frac{\alpha_z}{\gamma^2 (1 - \frac{V}{c^2} v_x)^2} + \frac{v_z \frac{V}{c^2}}{\gamma^2 (1 - \frac{V}{c^2} v_x)^3} \alpha_x$$

Παρατηρούμε ότι, οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στο σύστημα Σ' δεν εξαρτώνται μόνο από την επιτάχυνση του σώματος στο σύστημα Σ αλλά και από τις συνιστώσες της ταχύτητάς του στο σύστημα Σ . Αποτέλεσμα του παραπάνω είναι ότι αν ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση σε ένα αδρανειακό σύστημα δεν θα ορίζεται και σταθερή επιτάχυνση σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα.

3.5.2 Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler

Θεωρούμε πηγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εκπέμπει παλμούς με συχνότητα f_0 , μήκους κύματος λ_0 και με περίοδο T_0 , όπως μετρώνται στο δικό της σύστημα αναφοράς Σ' , όπου η πηγή είναι ακίνητη. Σε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς Σ η πηγή κινείται με ταχύτητα V παράλληλα προς τον άξονα Ox και προς τα δεξιά, όπως δείχνεται στο σχήμα 3.24. Ποια συχνότητα f και μήκος κύματος λ θα αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής O στο σύστημα Σ και στην αρχή των αξόνων;



Σχήμα 3. 24 Γενικό φαινόμενο Doppler. Φωτεινή πηγή κινείται με ταχύτητα V ,σηματίζοντας γωνία θ , ι από ακίνητο παρατηρητή O .

Σε τυχαία χρονική στιγμή t_1 , καθώς η πηγή βρίσκεται σε μια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα Ox , εκπέμπεται ένας παλμός. Μετά την πάροδο χρόνου T_0 ,όπως μετριέται στο σύστημα της πηγής, εκπέμπεται ο επόμενος διαδοχικός παλμός. Τότε για τον παρατηρητή στο σύστημα Σ εξαιτίας της διαστολής του χρόνου έχει παρέλθει χρόνος $\Delta t = \gamma T_0$ όπου $\gamma = (1 - \beta^2)^{1/2}$ και $\beta = V/c$. Στο μεσοδιάστημα της εκπομπής των δυο παλμών η πηγή έχει μετατοπιστεί κατά μια απόσταση $\Delta x = V \cdot \Delta t$ ενώ ταυτόχρονα ο πρώτος παλμός έχει ταξιδέψει μια απόσταση $\Delta r = c \Delta t$ κατά μήκος της ακτινικής απόστασης r_1 . Επομένως η απόσταση που υπολείπεται ώστε να φθάσει ο πρώτος παλμός στον παρατηρητή O είναι:

$$r_{\text{οπ}} = r_1 - c \Delta t$$

Ο δεύτερος παλμός πρέπει να διανύσει μια απόσταση r_2 για να φθάσει στον παρατηρητή Ο. Αυτό που θα αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος λ ο ακίνητος παρατηρητής είναι η χωρική διαφορά άφιξης των δυο παλμών:

$$\lambda = r_2 - r_{\text{οπ}}$$

ή

$$\lambda = r_2 - r_1 + c \Delta t \quad (3.77)$$

Αν κατά την διάρκεια της μεταξύ των παλμών εκπομπή η διανυόμενη απόσταση της πηγής είναι συγκριτικά μικρότερη των ακτινικών αποστάσεων r_1 και r_2 τότε δυνάμεθα να προσεγγίσουμε την διαφορά $r_2 - r_1$ με :

$$r_2 - r_1 = V \Delta t \cos \theta \quad (3.78)$$

Για τη σχέση

$$\lambda = r_2 - r_1 + c \Delta t \text{ μέσω της (3.78) έχουμε :}$$

$$\lambda = V \Delta t \cos \theta + c \Delta t$$

$$\lambda = \gamma T_0 V \cos \theta + c \gamma T_0$$

Μετά από μερικές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\lambda = \gamma T_0 c (1 + \beta \cos \theta)$$

Καθώς $T_0 c = \lambda_0$ προκύπτει:

$$\lambda = \gamma \lambda_0 (1 + \beta \cos \theta) \quad (3.79)$$

Στην παραπάνω σχέση το $\beta = V/c$ είναι θετικό για ταχύτητα της πηγής προς τα δεξιά καθώς και θ θετική όταν ανήκει στο $[0, \pi/2)$.

Εφόσον για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται καθολικά με ταχύτητα c ισχύει $\lambda f = \lambda_0 f_0 = c$, η σχέση των μηκών κύματος μετατρέπεται σε σχέση συχνοτήτων ως:

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta} \quad (3.80)$$

Διερεύνηση της σχέσης συχνοτήτων

- Για μικρές ταχύτητες $V \ll c$, το β τείνει στη μονάδα και προσεγγιστικά ο παράγοντας $(1 + \beta \cos \theta)^{-1} = 1 - \beta \cos \theta$

Δηλαδή
$$f = f_0 (1 - \beta \cos \theta) \text{ (κλασική προσέγγιση)}$$

- Αν $\theta = 0$ η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται . Στην περίπτωση αυτή η σχέση συχνοτήτων έχει την έκφραση:

$$f = f_0 \left[\frac{1-\beta}{1+\beta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Είναι $f < f_0$ και έχουμε μετατόπιση προς το ερυθρό ίση με $\Delta f = f - f_0$.

- Για $\theta = 90^\circ$ έχουμε το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler με :

$$f = f_0 (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

Το εγκάρσιο φαινόμενο είναι καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο και περιγράφει τη διαστολή του χρόνου. Αντικαθιστώντας όπου $f = 1/T$ και $f_0 = 1/T_0$ θα αναπαράγουμε τη σχέση των περιόδων T και T_0 που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής O στο σύστημα Σ και εκπέμπει η πηγή στο δικό της σύστημα αναφοράς Σ' .

$$T = T_0 (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- Για $\theta = 180^\circ$ η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή . Στην περίπτωση αυτή η σχέση συχνοτήτων έχει την έκφραση:

$$f = f_0 \left[\frac{1+\beta}{1-\beta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Είναι $f > f_0$ και έχουμε μετατόπιση προς το κυανό.

3.5.3 Το πείραμα των Ives και Stilwell

Η εξίσωση για το γενικό φαινόμενο Doppler εκφρασμένη με τα μήκη κύματος είναι:

$$\lambda = \gamma \lambda_0 (1 + \beta \cos \theta)$$

όπου λ_0 το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπει η πηγή , λ το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής ο οποίος παρακολουθεί την κίνηση της πηγής υπό γωνία θ , όπως δείχνει το σχήμα 3.24.

Επιπλέον $\beta = v/c$ και $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Για γωνία $\theta = \pi/2$ εμφανίζεται το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler και η μεταβολή $\Delta\lambda_{\text{εγκ}}$ του μήκους κύματος είναι:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\text{εγκ}} &= \lambda - \lambda_0 \\ &= \lambda_0(\gamma - 1) \end{aligned}$$

Στην πράξη, η απευθείας μέτρηση της εγκάρσιας μετατόπισης Ντομπλερ εμφανίζει δυσκολίες. Ο παράγοντας $\gamma-1$, που αντιπροσωπεύει το κλάσμα της εγκάρσιας εμφανιζόμενης

μετατόπισης του μήκους κύματος για ένα μετρούμενο μήκος κύματος λ_0 που εκπέμπεται από ένα κινούμενο άτομο στην διαμήκη διεύθυνση, είναι εξαιρετικά μικρός .

«Για παράδειγμα, αν ένα πρωτόνιο, επιταχυνόμενο σε τάση περίπου 5 KV, «πέσει» σε ένα ηλεκτρόνιο, σχηματίζεται ένα άτομο υδρογόνου που κινείται με ταχύτητα περίπου 10^6 m/s και εκπέμπει ορατή ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda_0 \approx 5000 \text{ \AA}$. Για την ταχύτητα αυτήν, έχουμε $\beta \approx 1/300$ και $\gamma - 1 \approx 5 \cdot 10^{-6}$. Η εγκάρσια μετατόπιση μήκους κύματος $\Delta\lambda_{\text{εγκ}}$ υπολογίζεται από $\lambda_0(\gamma - 1)$ σε $0,025 \text{ \AA}$, μια εξαιρετικά μικρή ποσότητα για να μετρηθεί με ακρίβεια». (French,1968,σ.144). Η δεύτερη δυσκολία εντοπίζεται στον πλήρη καθορισμό της γωνίας θ παρακολούθησης του εκπεμπόμενου φωτός από την κινούμενη πηγή. Αν επιδιώκεται η διαπίστωση του εγκάρσιου φαινομένου πρέπει η γωνία θ να είναι ακριβώς 90 μοίρες, διότι ακόμα και για μια μικρή απόκλιση από τη γωνία των 90 μοιρών η εμφανιζόμενη διαμήκης μετατόπιση Doppler είναι τουλάχιστον του ίδιου μεγέθους με την εγκάρσια μετατόπιση και επικαλύπτει το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. (French,1968).

Οι παραπάνω δυσκολίες υπερκεράζονται αν αντί να μετρηθεί η μετατόπιση του φως που εκπέμπεται εγκάρσια προς την κατεύθυνση κίνησης αποδιεγειρόμενων ατόμων να μετρηθεί η μέση τιμή της μετατόπισης από αποδιεγειρόμενα άτομα στην κατεύθυνση κίνησης τους και στην αντίθετη κατεύθυνση.

Μετά την ανάπτυξη του παρονομαστή και τη διατήρηση των όρων μέχρι και το τετράγωνο του β , η $\lambda = \gamma \lambda_0 (1 + \beta \cos \theta)$ προσεγγίζεται στην :

$$\lambda \approx \lambda_0 \left(1 + \beta \cos \theta + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \quad (3.81)$$

Η μετατόπιση $\Delta\lambda$, του μήκους κύματος είναι:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda - \lambda_0 \\ &= \lambda_0 \left(\beta \cos \theta + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \\ &= \lambda_0 \beta \cos \theta + \frac{\lambda_0}{2} \beta^2 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Η πρώτη τάξης φαινόμενα Doppler περιγράφονται από τον πρώτο όρο $\Delta\lambda_1 = \lambda_0 \beta \cos \theta$ και αποτελούν την κλασική προσέγγιση. Το εγκάρσιο φαινόμενο εμφανίζεται για γωνία $\theta = 90$ μοίρες, και αποτελεί τον καθαρά σχετικιστικό όρο που είναι σε προσέγγιση:

$$\Delta\lambda_{\text{εγκ}} = \Delta\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{2} \beta^2 \quad (3.83)$$

Για φως που εκπέμπεται από αποδιεγειρόμενα άτομα στην κατεύθυνση κίνησης τους (για $\theta=0$) και στην αντίθετη κατεύθυνση (για $\theta=180^\circ$) ισχύει, από την (3.82), αντίστοιχα:

$$\Delta\lambda_{\theta=0} = \lambda_0 \beta + \frac{\lambda_0}{2} \beta^2 \quad ,$$

$$\Delta\lambda_{\theta=180} = -\lambda_0 \beta + \frac{\lambda_0}{2} \beta^2$$

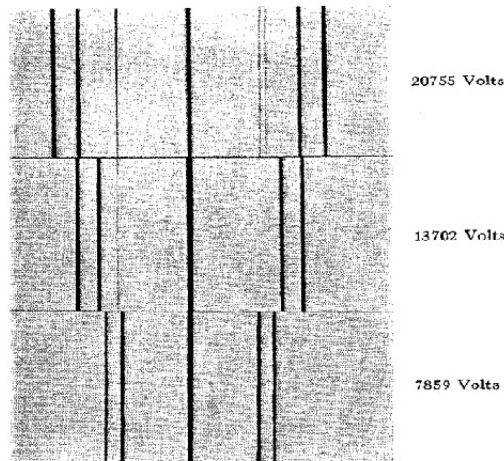
Η μέση τιμή των παραπάνω μετατοπίσεων είναι :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\text{μέση}} &= \frac{\Delta\lambda_{\theta=0} + \Delta\lambda_{\theta=180}}{2} \\ \Delta\lambda_{\text{μέση}} &= \frac{\lambda_0}{2} \beta^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Δηλ εξαφανίζονται τα πρώτης τάξης φαινόμενα Doppler και μένει μετρήσιμος μόνο ο σχετικιστικός όρος του εγκάρσιου φαινομένου.

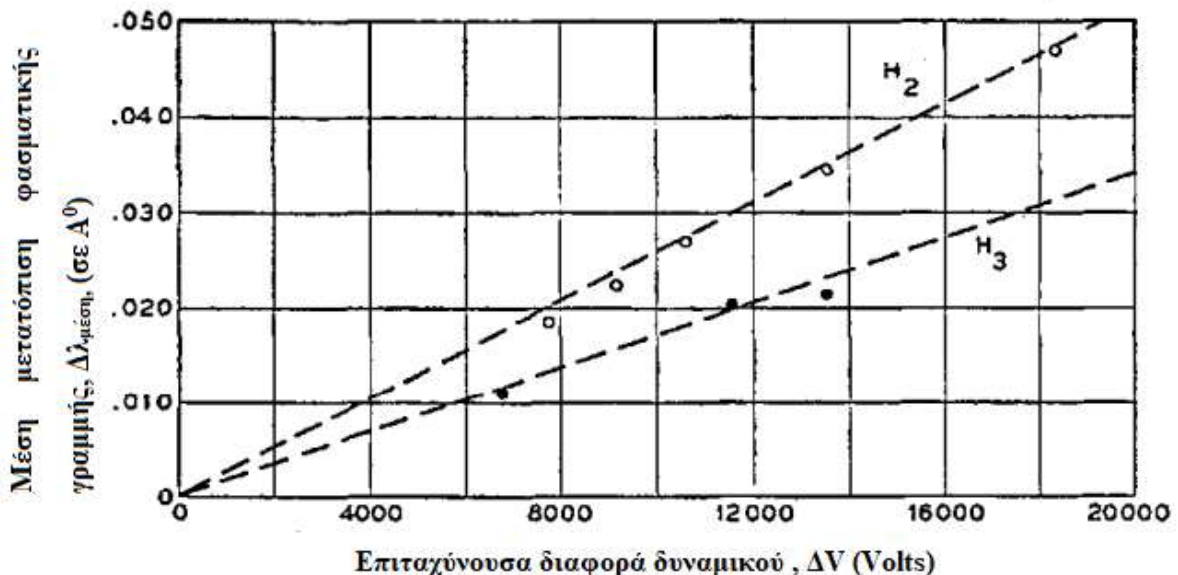
Στο πείραμα των Ives και Stilwell ένας σωλήνας εκκένωσης υδρογόνου ήταν η πηγή παραγωγής ιόντων H_2^+ και H_3^+ . Τα ιόντα αυτά ,μετά την επιτάχυνσή τους από μια γεννήτρια Van de Graaf σε καθορισμένη τιμή τάσης, συγκρούονταν με άτομα αερίου νέου σε περιβάλλον χαμηλής πίεσης. Από τη σύγκρουση παραγόταν ουδέτερα αλλά και διεγερμένα άτομα υδρογόνου. Αυτά τα άτομα στη συνέχεια καθώς κινούνταν προς τα εμπρός (γωνία $\theta =0$) ή προς τα πίσω (γωνία $\theta =90$) αποδιεγείρονταν και εξέπεμψαν τις χαρακτηριστικές γραμμές Balmer του ατομικού υδρογόνου. Πιο συγκεκριμένα έγινε η καταγραφή του φάσματος μιας συγκεκριμένης γραμμής - της δεύτερης γραμμής της σειράς Balmer, που ονομάζεται H_β (έχει μήκος κύματος περίπου 4861 \AA). (French,1968).

Στο σχήμα 3.25 εμφανίζονται τα φασματογράμματα, για τρεις διαφορετικές τάσεις, μιας γραμμής Balmer H_β που εκπέμπουν τα προς τα εμπρός ή τα προς τα πίσω άτομα υδρογόνου που ταξιδεύουν με διαφορετική ταχύτητα. Η μη τροποποιημένη γραμμή βρίσκεται στο κέντρο και οι μετατοπισμένες γραμμές Doppler στις δύο πλευρές της.



Σχήμα 3. 25 Φασματογράμματα μιας γραμμής Balmer H_{β} που εκπέμπονται από τα προς τα εμπρός ή από τα προς τα πίσω άτομα υδρογόνου για τρεις διαφορετικές τάσεις που εφαρμόστηκαν για την επιτάχυνση των ιόντων H_2^+ και H_3^+ . Πηγή : Journal of the optical Society of America, vol 28, June 1938.

Στο σχήμα 3.25 οι μετατοπίσεις Doppler είναι συμμετρικές ως προς την κεντρική γραμμή. Όμως μια λεπτομερής παρατήρηση των αρχικών φωτογραφιών του πειράματος αποκάλυψε, σε σχέση με την ταχύτητα, την απόκλιση του ημιαθροίσματος των μετατοπίσεων των μικρών κύματος των αποδιεγερμένων ατόμων υδρογόνου στην κατεύθυνση της κίνησή τους και στην αντίθετη κατεύθυνση.

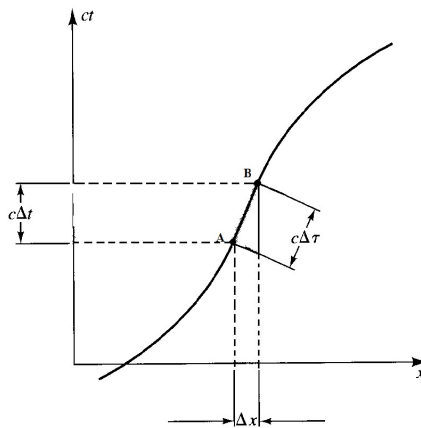


Σχήμα 3. 26 Γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων από το πείραμα Ives and Stillwell. Οι διακεκομμένες γραμμές δίνουν τη θεωρητική πρόβλεψη για την μέση μετατόπιση της φασματικής γραμμής, όπως υπολογίζεται από την σχέση $\Delta\lambda_{\text{μέση}} = (\beta^2) \lambda_0 / 2$, σε συνάρτηση της επιταχύνουσας τάσης (δεύτερης τάξης φαινόμενα Doppler) . Οι κύκλοι αναπαριστούν τα αποτελέσματα της μέτρησης της μέσης μετατόπισης $\Delta\lambda_{\text{μέση}}$, όπως προέκυψαν από το πείραμα. Πηγή : Journal of the optical Society of America, vol 28, June 1938.

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα του σχήματος 3.26 υπάρχει συμφωνία μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών δεδομένων, γεγονός που επιβεβαιώνει το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler.

3.5.4 Ο ιδιοχρόνος.

Σε ένα αδρανειακό σύστημα Σ ένα ρολόι κινείται με ταχύτητα $\vec{v}(t)$ κατά μήκος μιας τυχαίας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής και μεταξύ δυο γεγονότων A και B αυτής, όπως δείχνεται στο σχήμα 3.27.



Σχήμα 3. 27 Ο ιδιοχρόνος. Ένα ρολόι μετράει τον ιδιοχρόνο , όταν κινείται κατά μήκος της χρονοειδούς κοσμική του γραμμή . Πηγή: Hartle , 2016.

Οι χωρικές συντεταγμένες (x, y, z) του ρολογιού δίνονται σε συνάρτηση με τον χρόνο t ,όπως μετριέται στο σύστημα Σ . Για ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ταχύτητά του παραμένει σταθερή. Στο ίδιο διάστημα dt σε ένα άλλο υποτιθέμενο αδρανειακό σύστημα Σ' που κινείται με ταχύτητα $\vec{V}(t)=\vec{v}(t)$ ως προς το Σ , το ρολόι είναι ακίνητο δηλαδή $dx'=dy'=dz'=0$.

Από το αναλλοίωτο του διαστήματος προκύπτει :

$$ds^2=(cdt)^2-dx^2-dy^2-dz^2=(cdt')^2$$

$$dt = dt' = \sqrt{(dt)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\}}$$

Ο χρόνος dt' , που ονομάζουμε ιδιοχρόνο και τον συμβολίζουμε με dt , είναι εκείνος ο χρόνος που μετριέται σ' ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (στην περίπτωση μας το Σ') που κινείται με την ίδια ταχύτητα με το αντικείμενο (ρολόι για την περίπτωση που μελετάμε)

κατά μήκος μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής. Για ολόκληρη τη διαδρομή μεταξύ των σημείων A και B ο ιδιοχρόνος υπολογίζεται από

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} (dt) \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}$$

Ή σε μια πιο συμπαγή μορφή:

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \left[1 - \frac{\bar{V}^2(t)}{c^2} \right]^{1/2}$$

ή

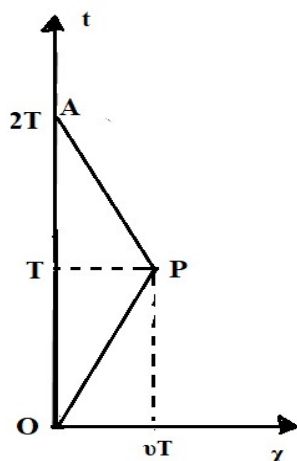
$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \left[1 - \frac{\bar{v}^2(t)}{c^2} \right]^{1/2}$$

Καθότι το ds^2 είναι αναλλοίωτο στον χωροχρόνο συμπεραίνουμε ότι όλοι οι αδρανειακοί παρατηρητές θα υπολογίζουν την ίδια ποσότητα ιδιοχρόνου για το ρολόι παρατηρητή που κινείται ανάμεσα στα γεγονότα A και B.

3.5.5 Το παράδοξο των διδύμων.

Οι ιδέες της σχετικότητας είναι τόσο ασυνήθιστες στον καθιερωμένο τρόπο σκέψης ώστε να έχουν προταθεί πολλοί γρίφοι και παράδοξα. Το πιο διάσημο ίσως είναι το παράδοξο των δίδυμων αδελφών. Δύο δίδυμοι ο Γιάννης και ο Κώστας βρίσκονται σε ηρεμία σε ένα σημείο του χωροχρόνου(σημείο O). Ο Γιάννης μένει σε ηρεμία στο σπίτι τους στη γη, ενώ ο Κώστας μεταβιβάζεται σε ένα γρήγορο διαστημόπλοιο .Από την κατάσταση ηρεμίας που βρίσκεται επιταχύνεται σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα ώστε να αποκτήσει μία σταθερή ταχύτητα v με την οποία απομακρύνεται για χρόνο T (όπως τον μετράει ο Γιάννης) σε ευθεία πορεία μέχρι έναν μακρινό αστέρα P. Στη συνέχεια ακαριαία αλλάζει την κατεύθυνση του διαστημοπλοίου του και με την ίδια ταχύτητα v που απομακρύνθηκε επιστρέφει στη γη για να συναντήσει το δίδυμο αδελφό του στο σπίτι τους στο χρόνο $2T$ (όπως τον μετράει ο Γιάννης). Ποιος είναι ο χρόνος που καταγράφει ο κάθε δίδυμος στο δικό του ρολόι;

Στο σχήμα 3.28 φαίνεται το χωροχρονικό διάγραμμα που αναπαριστά την κοσμική ιστορία των δίδυμων.



Σχήμα 3. 28 Χωροχρονικό διάγραμμα του παράδοξου των διδύμων.

Η κοσμική γραμμή του Γιάννη είναι η κατακόρυφη γραμμή ΟΑ. Ο ιδιοχρόνος που καταγράφει το ρολόι του Γιάννη μεταξύ των γεγονότων Ο και Α είναι :

$$\Delta\tau_{\Gamma} = 2T$$

Για τον Κώστα η κοσμική του γραμμή στο χωροχρόνο είναι ΟΡΑ. Ο ιδιοχρόνος του ταξιδιού του για την διαδρομή ΟΡ θα υπολογιστεί από :

$$\Delta\tau_{OP} = \int_0^T dt \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

και αντίστοιχα ο ιδιοχρόνος του ταξιδιού του για την διαδρομή ΡΑ θα υπολογιστεί :

$$\Delta\tau_{PA} = \int_T^{2T} dt \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

Ο συνολικός ιδιοχρόνος $\Delta\tau_K$ του Κώστα για την διαδρομή ΟΡΑ θα είναι μετά από την εκτέλεση των πράξεων :

$$\Delta\tau_K = 2T \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος των χρόνων είναι:

$$\frac{\Delta\tau_K}{\Delta\tau_{\Gamma}} = \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

Ο Κώστας είναι νεότερος από τον Γιάννη όταν ξανασυναντηθούν επειδή το $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ είναι πάντοτε μικρότερο από την μονάδα.

Που βρίσκεται το παράδοξο;

Το παράδοξο αναδεικνύεται όταν περιγράψουμε την ίδια κατάσταση από την οπτική του Κώστα. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας, η οποία υπαγορεύει την απουσία προτιμητέων συστημάτων αναφοράς, ο Κώστας δικαιούται να διατυπώσει την εξής άποψη : " ο Γιάννης είναι που απομακρύνεται απ' αυτόν με σταθερή ταχύτητα, ταξιδεύει ,αλλάζει κατεύθυνση και επιστρέφει πάλι με σταθερή ταχύτητα για να τον συναντήσει ». Επομένως ο Κώστας μπορεί να υποθέσει ότι ο Γιάννης είναι ο νεότερος. Ή ακόμη αν λάβουμε υπόψη την αρχή της αμοιβαιότητας της παρατήρησης θα βρεθεί ότι αμφότεροι οι δίδυμοι να έχουν την ίδια ηλικία μου όταν συναντηθούν και πάλι. Η φαινομενική συμμετρία των καταστάσεων κίνησης των διδύμων είναι που δημιουργεί το παράδοξο. Στην πραγματικότητα οι καταστάσεις αυτές δεν είναι συμμετρικές. Ο Κώστας είναι αυτός που έχει εγκαταλείπει το αδρανειακό σύστημα της γης, κινείται σε σχέση με αυτήν και επιστρέφει ξανά σε αυτή, ενώ ο Γιάννης δεν αλλάζει το σύστημα αναφοράς του. Κατά συνέπεια οι δίδυμοι αδελφοί διαγράφουν διαφορετικές κοσμικές γραμμές στον χωροχρόνο. Οι διαφορετικές χωροχρονικές αποστάσεις που διανύουν μέχρι να ξανασυνδεθούν καταγράφονται ως διαφορετικοί ιδιοχρόνοι στα δικά τους ρολόγια.

Μερικοί υποστηρίζουν ότι οι διαφορετικές μετρήσεις του χρόνου οφείλονται στην ακαριαία επιτάχυνση και δεν αποτελούν αποτέλεσμα φαινομένου οφειλόμενου στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Ας υποθέσουμε ότι το διαστημόπλοιο του Κώστα επιταχύνεται ομαλά για ένα απειροστό χρονικό διάστημα. Μπορούμε να προσεγγίσουμε την κίνηση του διαστημοπλοίου για αυτό το διάστημα σαν τμήματα κινήσεων με σταθερές ταχύτητες διαφορετικών τιμών.

Χρησιμοποιώντας το $\int_a^b dt \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ (όπου v είναι η ταχύτητα για κάθε επιμέρους τμήμα

της κίνησης με τα όρια a , b του ολοκληρώματος να διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους) υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη διαφορά χρόνου που προστίθεται από κάθε τμήμα της κίνησης . Αποδεικνύεται ότι είναι αμελητέα η συνεισφορά αυτών των διαφορών χρόνων στον ολικό ιδιοχρόνο του Κώστα. Το αυτό ισχύει για όλες τις επιταχύνσεις του διαστημοπλοίου του Κώστα.

Κεφ 4 Ορμή ενέργεια

4.1 Σχετικιστική μάζα και ορμή

Χωρίς αμφισβήτηση, η παραδοχή της ομοιογένειας του χώρου και του χρόνου συνεπάγεται, αντίστοιχα, την καθολική ισχύ της αρχής διατήρησης της ορμής και της ενέργειας. Αυτές πρέπει να ισχύουν στο Νευτώνειο πλαίσιο αλλά και στη σχετικότητα. Στη Νευτώνεια μηχανική, οι αρχές έχουν επανειλημμένα επαληθευτεί για ένα ελεύθερο σώμα και για ένα σύστημα σωμάτων. Η προβληματική γύρω από την διατήρηση της ορμής και της ενέργειας αναπτύσσεται όταν εφαρμόσουμε τους κλασσικούς ορισμούς της ορμής $\vec{P}=m\vec{v}$ (ή $\vec{P}=\sum_i m_i \vec{v}_i$ για σύστημα) στο σχετικιστικό πλαίσιο. Η προβληματική της ισχύος των αρχών αυτών, είναι ιδιαίτερα εμφανής σε πειράματα της σύγχρονης φυσικής. Ωστόσο, ακόμη και σε ένα απλό πείραμα σύγκρουσης (ή σκέδασης) δυο μαζών θα διαπιστώσουμε ότι αν η ορμή διατηρείται σ' έναν αδρανειακό παρατηρητή, δεν θα συμβεί το ίδιο και σε έναν άλλο αδρανειακό παρατηρητή, κινούμενο ως προς το πρώτο, αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων των σωμάτων κατά Lorentz.

Όμως, η ομοιογένεια του χώρου και του χρόνου αλλά και η υπόθεση της Αρχής της σχετικότητας επιτάσσουν την ισχύ του νόμου της διατήρησης της ορμής και της ενέργειας σε όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Κατά συνέπεια, οι τύποι της κλασσικής φυσικής για την ορμή και την ενέργεια δεν είναι οι σωστοί και πρέπει να τροποποιηθούν.

Για αυτόν το σκοπό θα αποδεχθούμε τον κλασσικό ορισμό της ορμής για ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα \vec{u} σε ένα αδρανειακό σύστημα Σ

$$\vec{P}=m\vec{u} \quad (4.1)$$

Όπου στη σχέση (4.1) ο συντελεστής αναλογίας m ονομάζεται μάζα του σωματιδίου. Για να γενικεύσουμε τον ορισμό της ορμής, ώστε να ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η μάζα m δεν είναι μια σταθερά, αλλά εξαρτάται εν γένει από το μέτρο, $u=|\vec{u}|$, της διανυσματικής ταχύτητας, \vec{u} , του σώματος στο αδρανειακό σύστημα που βρίσκεται, δηλαδή ότι είναι μια συνάρτηση της μορφής (Moller,1952).

$$m=m(u)=f(u) \quad (4.2)$$

Αν η ταχύτητα του ίδιου σώματος σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ' είναι \vec{u}' , η ορμή και η μάζα του σώματος στο Σ' θα πρέπει να δίνεται από :

$$\vec{p}' = m' \vec{u}' \quad (4.3)$$

όπου
$$m' = m'(u') = f(u') \quad (4.4)$$

είναι η ίδια συναρτησιακή σχέση που συνδέει την μάζα m και την ταχύτητα u . «Αυτό προκύπτει από την ιδέα της αρχής της σχετικότητας ,κατά την οποία η συναρτησιακή σχέση που συνδέει φυσικά μεγέθη μεταξύ τους θα πρέπει να μένει αναλλοίωτη στη μορφή της, για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς». (Moller,1952)

Για να καθορίσουμε την συνάρτηση f , θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας απλής σύγκρουσης μεταξύ δυο πανομοιότυπων σωμάτων. Έστω δυο συστήματα αναφοράς Σ και Σ' , που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο με ταχύτητα \vec{V} . Οι μάζες των σωμάτων είναι ίδιες όταν είναι ακίνητες. «Πριν την σύγκρουση τα σώματα 1 και 2 έχουν ταχύτητες \vec{u}_1 και \vec{u}_2 στο σύστημα Σ και στο σύστημα Σ' αντίστοιχες ταχύτητες \vec{u}'_1 και \vec{u}'_2 . Οι ταχύτητες \vec{u}'_1 και \vec{u}'_2 προσδιορίζονται από τη γενική σχέση μετασχηματισμού των ταχυτήτων.» (Moller,1952).

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + (\gamma - 1) \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{V^2} \vec{V} - \gamma \vec{V}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{c^2} \right)} \quad (4.5)$$

Διευθετούμε το σύστημα των μαζών ώστε οι ταχύτητες τους πριν τη σύγκρουση να συνδέονται με τη σχέση : (Moller,1952).

$$\vec{u}'_2 = -\vec{u}'_1 \quad (4.6)$$

Εφαρμόζοντας την (4.5) για τη ταχύτητα \vec{u}'_1 έχουμε:

$$\vec{u}'_1 = \frac{\vec{u}_1 + (\gamma - 1) \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{V}}{V^2} \vec{V} - \gamma \vec{V}}{\gamma \left(1 - \vec{u}_1 \cdot \vec{V} / c^2 \right)} \quad (4.7)$$

και από (4.6) έχουμε τελικά:
$$\vec{u}'_1 = -\vec{u}'_2 \quad (4.8)$$

«Μετά την σύγκρουση τα σώματα έχουν ταχύτητες \vec{v}_1 και \vec{v}_2 στο σύστημα Σ , και \vec{v}'_1 και \vec{v}'_2 στο σύστημα Σ' . Θα εξετάσουμε μια σύγκρουση στην οποία, στο σύστημα Σ η τελική και η αρχική ταχύτητα του σώματος 1 έχουν αντίθετη κατεύθυνση :» (Moller,1952)

$$\vec{v}_1 = -\alpha \vec{u}_1 \quad (4.9)$$

όπου α ένας θετικός αριθμός. Για λόγους συμμετρίας θα πρέπει επίσης να ισχύει:

$$\vec{v}'_2 = -\alpha \vec{u}'_2 \quad (4.10).$$

Ο συντελεστής α είναι ο ίδιος στις εξισώσεις (4.9) και (4.10). Ο συνδυασμός των (4.8) , (4.9) και (4.10) θα δώσει:

$$\vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 \quad (4.11)$$

Αν εφαρμόσουμε την (4.11) στον μετασχηματισμό (4.7) θα εξαχθεί η παρακάτω :

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \quad (4.12)$$

«Αν υποθέσουμε ότι η συναρτησιακή σχέση που αποδίδεται από την (4.2) , είναι η ίδια πριν και μετά την σύγκρουση τότε η αρχή διατήρησης της ορμής στο πλαίσιο Σ παίρνει την έκφραση:» (Moller,1952).

$$f(u_1)\vec{u}_1 + f(u_2)\vec{u}_2 = f(v_1)\vec{v}_1 + f(v_2)\vec{v}_2 \quad (4.13)$$

«Επιπλέον, αν θεωρήσουμε την περίπτωση που η ταχύτητα \vec{u}_1 του σώματος 1 είναι κάθετη στην σχετική ταχύτητα \vec{V} των συστημάτων Σ και Σ' τότε το εσωτερικό γινόμενο.» (Moller,1952).

$$(\vec{u}_1 \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.14)$$

Σύμφωνα με (4.6) , (4.9) , (4.11) και (4.14) είναι επίσης :

$$(\vec{u}'_2 \cdot \vec{V}) = 0 , (\vec{v}_1 \cdot \vec{V}) = 0 \text{ και } (\vec{v}'_2 \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.15)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός της (4.7) έχει την έκφραση:

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}'_2 + (\gamma - 1) \frac{\vec{u}'_2 \cdot \vec{V}}{V^2} \vec{V} + \gamma \vec{V}}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{u}'_2 \cdot \vec{V}}{c^2} \right)} \quad (4.16)$$

Για $(\vec{u}'_2 \cdot \vec{V}) = 0$ η (4.16) καταλήγει

$$\vec{u}_2 = (\vec{u}'_2 + \gamma \vec{V}) / \gamma \quad (4.17)$$

Από (4.6) έχουμε

$$\vec{u}'_2 = -\vec{u}_1 \quad \text{άρα}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{V} - \vec{u}_1 / \gamma \quad (4.18)$$

$$\text{Το μέτρο της ταχύτητας } \overline{u}_2 \text{ θα υπολογιστεί από } u_2^2 = (\overline{u}_2 \cdot \overline{u}_2) = V^2 + u_1^2 / \gamma^2 \quad (4.19)$$

Με παρόμοιο τρόπο, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό ταχυτήτων (4.16) για την ταχύτητα \overline{v}_2 , σε συνδυασμό με την (4.11) θα έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \overline{v}_2 &= \overline{v}_2' / \gamma + \overline{V} \\ \overline{v}_2' &= -v_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{v}_2 = \overline{V} - \overline{v}_1 / \gamma \quad (4.20)$$

$$\text{και μετά από σχετικές πράξεις } v_2^2 = (\overline{v}_2 \cdot \overline{v}_2) = V^2 + v_1^2 / \gamma^2 \quad (4.21)$$

Ενσωματώνοντας τις (4.18), (4.19), (4.20) και (4.21) στην (4.13) θα αναπαραχθεί η

$$f(u_1) \overline{u}_1 + f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) (\overline{V} - \overline{u}_1 / \gamma) = f(v_1) \overline{v}_1 + f(\sqrt{V^2 + v_1^2 / \gamma^2}) (\overline{V} - \overline{v}_1 / \gamma) \quad (4.22)$$

Μετά από πράξεις και διευθέτηση των όρων έχουμε :

$$\begin{aligned} & \left[f(u_1) - (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \right] \overline{u}_1 + \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \overline{V} \\ & = \left\{ f(v_1) - (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \left[f(\sqrt{V^2 + v_1^2 / \gamma^2}) \right] \right\} \overline{v}_1 + \left\{ f(\sqrt{V^2 + v_1^2 / \gamma^2}) \right\} \overline{V} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.23) με την ταχύτητα \overline{V} και σε συμφωνία με $(\overline{u}_1 \cdot \overline{V}) = 0$, $(\overline{v}_1 \cdot \overline{V}) = 0$ θα είναι τελικά :

$$\left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} V^2 = \left\{ f(\sqrt{V^2 + v_1^2 / \gamma^2}) \right\} V^2$$

Υποθέτοντας, ότι η f είναι μια μονότονη συνάρτηση θα προκύψει

$$v_1 = u_1 \quad (4.24)$$

$$\text{Επίσης από } \left. \begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ \overline{v}_1 &= -\alpha \overline{u}_1 \\ \alpha &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ και } \overline{v}_1 = -\overline{u}_1 \quad (4.25)$$

Από την αντικατάσταση της (4.25) στην (4.23) θα προκύψει η ισότητα

$$\begin{aligned} & \left[f(u_1) - (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \right] \overline{u}_1 + \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \overline{V} \\ & = \left\{ f(u_1) - (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \left[f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right] \right\} (-\overline{u}_1) + \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \overline{V} \\ \text{ή} & \left[f(u_1) - (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \right] (2\overline{u}_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Καθώς $\overline{u_1} \neq 0$ θα είναι από (4.26)

$$\left[f(u_1) - \left\{ f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2}) \right\} \right] (1 - V^2 / c^2)^{1/2} = 0 \quad (4.27)$$

$$f(u_1) = (1 - V^2 / c^2)^{1/2} f(\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2})$$

Συμπερασματικά, για το είδος της σύγκρουσης που μελετήθηκε , «αν θέλουμε να διατηρείται η ορμή για τυχαίες συγκρούσεις σωμάτων , θα πρέπει η συνάρτηση f να επαληθεύει την εξίσωση (4.27) για κάθε τιμή των ανεξάρτητων μεταβλητών u_1 και V .» (Moller,1952).

Επομένως, αν στην εξίσωση (4.27) η μεταβλητή u_1 τείνει στο μηδέν θα αναπαραχθεί η ακόλουθη ισότητα:

$$f(V) = \frac{f(0)}{(1 - V^2 / c^2)^{1/2}} \quad (4.28)$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της (4.28) στην (4.27), η τελευταία επαληθεύεται για κάθε τιμή των ταχυτήτων u_1 και V . (Moller,1952).

Πράγματι

$$\frac{f(0)}{(1 - u_1^2 / c^2)^{1/2}} = (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \frac{f(0)}{[1 - (\sqrt{V^2 + u_1^2 / \gamma^2})^2 / c^2]^{1/2}} \quad \eta$$

μετά από μερικές πράξεις

$$\frac{f(0)}{(1 - u_1^2 / c^2)^{1/2}} = (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \frac{f(0)}{\left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{u_1^2}{\gamma^2 c^2} \right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{f(0)}{(1 - u_1^2 / c^2)^{1/2}} = (1 - V^2 / c^2)^{1/2} \frac{f(0)}{\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{f(0)}{(1 - u_1^2 / c^2)^{1/2}} = \frac{f(0)}{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Τελικά από τις σχέσεις

$$m = m(u) = f(u)$$

και

$$f(V) = \frac{f(0)}{(1 - V^2 / c^2)^{1/2}}$$

συμπεραίνουμε ότι, στη σχετικότητα η μάζα ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα \vec{u}

δίνεται από

$$m(u) = \frac{m_0}{(1 - u^2 / c^2)^{1/2}} \quad (4.29)$$

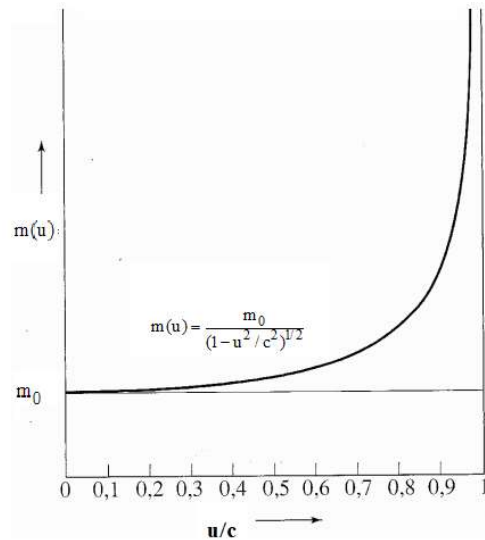
με $|\vec{u}| = u$ και $f(0) = m_0$. Η σταθερή m_0 είναι η μάζα του σώματος όταν δεν έχει ταχύτητα και καλείται μάζα ηρεμίας του σώματος. Η ορμή \vec{p} ενός σώματος που κινείται με ταχύτητα \vec{u} θα υπολογίζεται από :

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} m_0}{(1 - u^2 / c^2)^{1/2}} \quad (4.30)$$

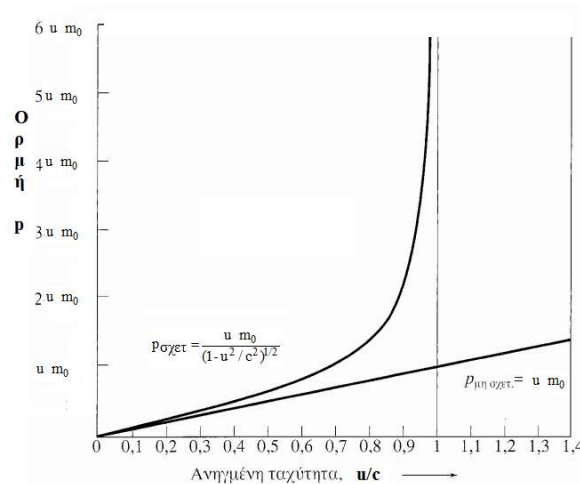
ισοδύναμα
$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{u} \quad (4.31)$$

όπου $\gamma = (1 - u^2 / c^2)^{-1/2}$

Στο σχήμα 4.1 απεικονίζεται η μεταβολή της σχετικιστικής μάζας σε συνάρτηση της ανοιγμένης ταχύτητας u/c ενός σώματος με μάζα ηρεμίας m_0 , και στο σχήμα 4.2 η μεταβολή της ορμής ενός σώματος με μάζα ηρεμίας m_0 σε σχέση με την ανηγμένη ταχύτητα .



Σχήμα 4. 1 Μεταβολή της μάζας συναρτήσει της ανηγμένης ταχύτητας u/c , για μάζα ηρεμίας m_0 του σώματος.



Σχήμα 4. 2 Μεταβολή της ορμής στη σχετικότητα και στην κλασσική φυσική συναρτήσει της ανηγμένης ταχύτητας u/c , για μάζα ηρεμίας m_0 του σώματος.

Στην περιοχή των μικρών ταχυτήτων, ο παράγοντας $\gamma = (1 - u^2 / c^2)^{-1/2}$ προσεγγίζει την μονάδα και η έκφραση της σχετικιστικής ορμής (4.30) ταυτίζεται με την κλασσική : $\vec{p} = m_0 \vec{u}$. Όταν το μέτρο της ταχύτητας u του σώματος είναι συγκρίσιμο της ταχύτητας του φωτός c , η σχετικιστική ορμή αυξάνεται σύμφωνα με τη σχέση (4.30). Στο σχήμα 4.2 απεικονίζεται αυτή η συμπεριφορά της σχετικιστικής ορμής . Στο όριο, που η ανηγμένη ταχύτητα τείνει στη μονάδα , περαιτέρω αύξηση της ορμής αυξάνει ασήμαντα την ταχύτητα u του σώματος , θέτοντας και πάλι το «φράγμα» της ταχύτητας του φωτός.

Αυτή η συμπεριφορά ερμηνεύεται ως εξής : Στην Νευτώνεια μηχανική, η δράση μιας σταθερής δύναμης για μεγάλο χρονικό διάστημα επιταχύνει συνεχώς το σώμα αυξάνοντας την ταχύτητά του ακόμη και σε τιμές μεγαλύτερες από την ταχύτητα του φωτός. Στην σχετικότητα η συνεχής δράση μιας δύναμης οδηγεί αρχικά, για μικρές ταχύτητες, σε αύξηση της ταχύτητας του σώματος . Πέραν ταχυτήτων συγκρίσιμων της ταχύτητας του φωτός, η αυξανόμενη ορμή του σώματος είναι συνέπεια της σημαντικής αύξησης της σχετικιστικής μάζας και δεν υφίσταται πλέον σημαντική αύξηση στην ταχύτητα. Ως αύξηση της σχετικιστικής μάζας πρέπει να νοηθεί η εμφάνιση εντονότερων αδρανειακών ιδιοτήτων του σώματος και καμία μεταβολή στην μάζα του σώματος. Εν τέλει, η μάζα ηρεμίας m_0 αποτελεί τη χαρακτηριστική μάζα του σώματος .

4.2 Σχετικιστική ενέργεια

4.2.1 Ενέργεια ηρεμίας – κινητική ενέργεια

Όταν η ταχύτητα v ενός σώματος καθώς επίσης και η ορμή του είναι σταθερές στο χρόνο τότε έχουμε την περίπτωση ενός ελεύθερου σωματιδίου. Εάν η ορμή του σώματος μεταβάλλεται τότε αυτό βρίσκεται υπό την επίδραση μιας δύναμης \vec{F} ίση με τη μεταβολή της ορμής.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (4.32)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτόσημη με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στη μηχανική, τον οποίο επιθυμούμε να διατηρήσουμε στη σχετικότητα αλλά προσδιορίζοντας την ορμή με τον σχετικιστικό ορισμό της.

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.33)$$

Τα μεγέθη $\vec{F}, \vec{P}, \vec{v}, t$ αναφέρονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Όπως και στη νευτώνεια μηχανική ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας K είναι ίσος με το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης επί της ταχύτητας.

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.34)$$

Από τις σχέσεις (4.32) , (4.33) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{m_0 v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Όμως είναι

$$\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = v \frac{dv}{dt} \quad (4.36)$$

Η σχέση (4.34) σε συνδυασμό με (4.35) και (4.36):

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\vec{v} \frac{m_0 v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{m_0 v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{m_0 v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Τελικά:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \quad (4.37)$$

Ολοκληρώνοντας την (4.37) προκύπτει:

$$K = \frac{m_0 c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} + B \quad (4.38)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης B θα υπολογιστεί από την συνθήκη : όταν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο η κινητική του ενέργεια είναι μηδενική.

$$\left. \begin{array}{l} K = 0 \\ v = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m_0 c^2 + B = 0 \Rightarrow B = -m_0 c^2$$

Τελικά

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (4.39)$$

όπου $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$

Η ποσότητα $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = K + m_0 c^2$ έχει διαστάσεις ενέργειας και την ονομάζουμε

συνολική σχετικιστική ενέργεια του σώματος. Αποτελείται από δύο όρους: τον $m_0 c^2$ που καλείται ενέργεια ηρεμίας όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μηδενική και την κινητική ενέργεια K του σώματος. Επιπλέον φανερώνει ότι στη σχετικότητα κάθε αντικείμενο που είναι ακίνητο έχει μια εσωτερική ενέργεια, μια ενέργεια «όπαρξης». Ο όρος $m_0 c^2$ δεν

προβλέπεται από την κλασική φυσική. Ωστόσο είναι αποδεκτός καθώς στο πλαίσιο της επιτρέπεται η πρόσθεση μιας οποιασδήποτε σταθεράς στην ενέργεια. Το νέο που κομίζει η σχέση $E = K + m_0 c^2$ είναι η πρόσθεση, στον ήδη υπάρχοντα κατάλογο μορφών ενέργειας, της μάζας ως θεμελιακή μορφή ενέργειας. Η βασική ιδέα της $E = m_0 c^2$ είναι η αναλογία της μάζας προς την ενέργεια με τον παράγοντα c^2 να λειτουργεί απλώς σαν παράγοντας μετατροπής για την ισοστάθμιση των διαφορετικών μονάδων μέτρησης.

Μέχρι τις αρχές του εικοστού αιώνα δεν μπορούσε να παρατηρηθεί η ισοδυναμία μάζας και ενέργειας διότι υπό συνήθεις μεταβολές της ενέργειας παράγονται αμελητέες αλλαγές της μάζας, εξαιτίας της μεγάλης τιμής του c^2 . Ωστόσο η ισοδυναμία μάζας –Ενέργειας επέφερε μεγάλη επανάσταση στον τομέα της πυρηνικής φυσικής, στον τομέα των μεγάλων ταχυτήτων. Η κλασική προσέγγιση της κινητικής ενέργειας αναπαράγεται από τη σχετικιστική έκφρασή της όταν η ταχύτητα του σώματος v είναι πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός c

Η διωνυμική ανάπτυξη της σχέσης (4.39) αναπαράγει την έκφραση :

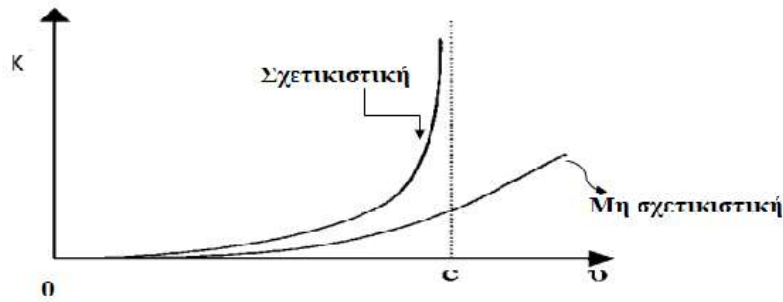
$$\begin{aligned} K &= m_0 c^2 \left[\left(1 - v^2 / c^2 \right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &= m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

για $v/c \ll 1$ διατηρούμε μόνο τους δυο πρώτους όρους της ανάπτυξης της τετραγωνικής ρίζας, μιας και οι υπόλοιποι είναι ασήμαντοι. Άρα:

$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

που αποτελεί την εξίσωση της κινητικής ενέργειας στο πεδίο της κλασικής μηχανικής.

Είναι ενδιαφέρον επίσης να σημειώσουμε ότι στην οριακή περίπτωση που η ταχύτητα του σώματος γίνεται πολύ μεγάλη προσεγγίζοντας την ταχύτητα του φωτός η κινητική ενέργεια τείνει στο άπειρο. Καμία ποσότητα - δόση ενέργειας, οσοδήποτε μεγάλη και αν είναι, δεν μπορεί να προσδώσει τιμή στην ταχύτητα ενός σώματος μη μηδενικής μάζας μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Στο σχήμα 4.3 δείχνεται η απόκλιση της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας από την κινητική ενέργεια της κλασικής μηχανικής.



Σχήμα 4.3 Καμπύλες κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση της ταχύτητας . Η σχετικιστική καμπύλη είναι υπερβολή για χαμηλές ταχύτητες και προσεγγίζει το άπειρο στο όριο της ταχύτητας του φωτός

Αποδεικνύεται ότι η σχέση που συνδέει την ορμή P και την ενέργεια E ενός σώματος είναι

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (4.40)$$

Ξαναγράφουμε την (4.33) θέτοντας όπου $\beta = v/c$ και επιλύουμε ως β .

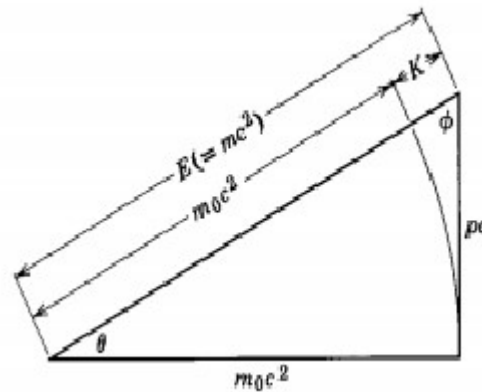
$$p = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + (m_0 c)^2}}$$

στη συνέχεια

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1-\beta^2} &= \frac{m_0 c}{\sqrt{p^2 + (m_0 c)^2}} \\ E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = c \sqrt{p^2 + (m_0 c)^2} \Rightarrow E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

Γεωμετρικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4, η (4.40) μπορεί να αναπαρασταθεί με ορθογώνιο τρίγωνο που έχει για κάθετες πλευρές τα μεγέθη $m_0 c^2$, pc και υποτείνουσα την ενέργεια E.

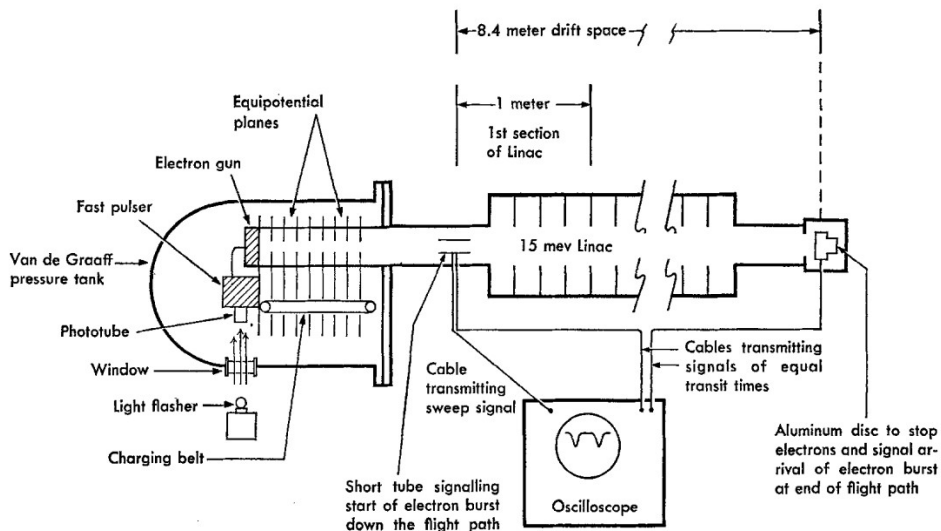
Το $\sin\theta = \beta$ και το $\sin\varphi = (1-\beta^2)^{1/2}$



Σχήμα 4.4 Γεωμετρικός μνημονικός κανόνας για την σχέση $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$. Πηγή : Resnick, 1968.

4.2.2 Το όριο της ταχύτητας – Το πείραμα Bertozzi

Το 1964 ο Bertozzi επιβεβαίωσε τη σχέση ταχύτητας-κινητικής ενέργειας όπως προβλέπεται από τη σχετικότητα. Η διάταξη που χρησιμοποίησε φαίνεται στο σχήμα 4.5



Σχήμα 4.5 Η πειραματική διάταξη του W. Bertozzi για την διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ταχύτητας και της κινητικής ενέργειας ηλεκτρονίων.

πηγή: W. Bertozzi, "Speed and kinetic energy of relativistic electrons" Am. J. of Phys., 32, 551 (1964)

Παλμοί ηλεκτρονίων επιταχύνονταν από μια ηλεκτροστατική γεννήτρια Van de Graaff στις κινητικές ενέργειες 0,5, 1, 1,5 και 4,5 MeV, και στη συνέχεια ταξίδευαν για 8,4 m μέσα σε έναν σωλήνα κενού (linac) απαλλαγμένο από ηλεκτρικό πεδίο. Για κάθε τιμή ενέργειας μετρίονταν ο χρόνος πτήσης των ηλεκτρονίων για την απόσταση των 8,4 μέτρων, και έμμεσα υπολογίζονταν η ταχύτητα των ηλεκτρονίων.

Η μέτρηση του χρόνου γινόταν ως εξής: στην αρχή της απόστασης των 8,4 m ένας μονωμένος μεταλλικός αγωγός συγκέντρωνε μέρος του φορτίου των ηλεκτρονίων και το

μετατρέπεται σε ηλεκτρικό ρεύμα. Το σήμα αυτό κατέληγε σε έναν παλμογράφο σηματοδοτώντας την έναρξη της χρήσης των ηλεκτρονίων. Το ίδιο συνέβαινε και στο τέλος της διαδρομής. Από την εμφάνιση των δυο σημάτων στον παλμογράφο υπολογίζονταν η διαφορά χρόνου για τη διανυόμενη διαδρομή των ηλεκτρονίων. Η κινητική ενέργεια K λογιζόταν τόσο από το δυναμικό επιτάχυνσης , ($K=q\Delta V$), όσο και με θερμοδυναμικό τρόπο στο τέρμα της πτήσης των ηλεκτρονίων. Στο τέλος της διαδρομής τα ηλεκτρόνια προσέκρουαν σε έναν αλουμινιένο δίσκο και απορροφούνταν. Από την αύξηση της θερμοκρασίας του δίσκου προσδιοριζόταν η ολική κινητική ενέργεια για ορισμένο χρονικό διάστημα. Ταυτόχρονα, για το ίδιο διάστημα, υπολογίζονταν ο αριθμός των ηλεκτρονίων από το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που εμφανιζόταν στο δίσκο. Η κινητική ενέργεια κάθε ηλεκτρονίου προέκυπτε από τη διαίρεση της ολικής κινητικής ενέργειας με τον αριθμό των ηλεκτρονίων.

Σύμφωνα με την κλασική μηχανική η κινητική ενέργεια προσδιορίζεται ως

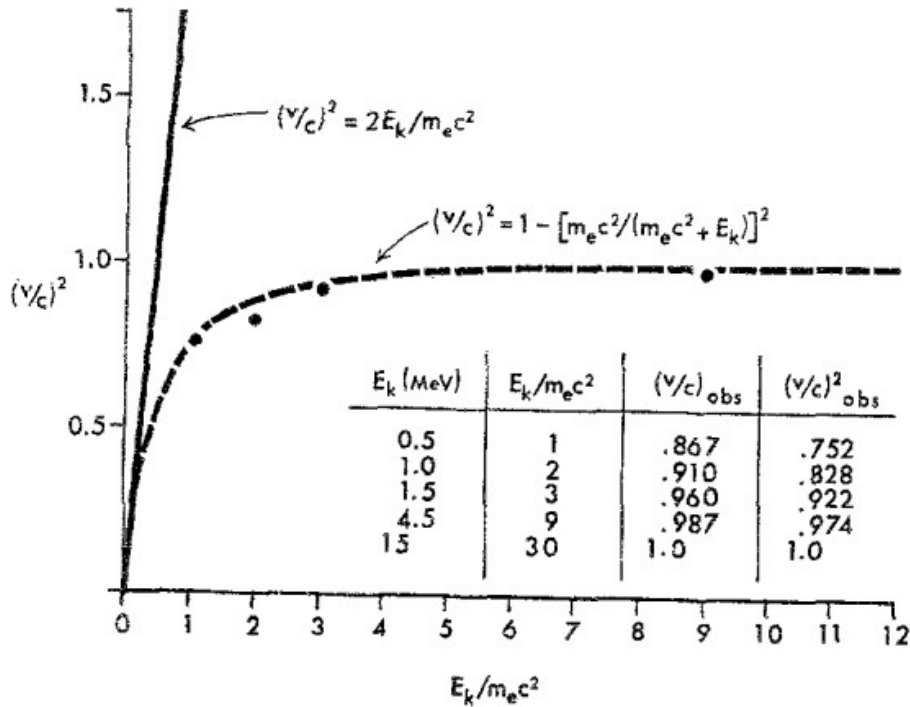
$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2 \Rightarrow \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{K}{2m_0 c^2}$$

Αντίστοιχα στη σχετικότητα

$$K = m_0 c^2 (1 - v^2 / c^2)^{-1/2} - m_0 c^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{v}{c} \right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + K} \right)$$

Στο σχήμα 4.6 που ακολουθεί, απεικονίζονται οι καμπύλες του τετραγώνου της ανηγμένης ταχύτητα $\beta^2=(v/c)^2$ καθώς και τα πειραματικά αποτελέσματα της δοκιμής Bertozzi. Γίνεται άμεσα φανερό ότι οι μετρήσεις του πειράματος συμφωνούν με την θεώρηση της ειδικής σχετικότητας.



Σχήμα 4.6 Γραφική παράσταση κινητικής ενέργειας σε συνάρτηση με το τετράγωνο της ανηγμένης ταχύτητας. Η διακεκομμένη γραμμή εμφανίζει την πρόβλεψη της σχετικιστικής μηχανικής για την μεταβολή του τετραγώνου της ανηγμένης ταχύτητας $(v/c)^2$, με την κινητική ενέργεια. Αντίστοιχα η συνεχής γραμμή είναι η πρόβλεψη της Κλασσικής μηχανικής . Οι συμπαγής κύκλοι (σημεία) είναι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πείραμα. Ο εσωματωμένος πίνακας παρουσιάζει τις παρατηρούμενες τιμές του λόγου v/c .

Πηγή: W. Bertozzi, "Speed and kinetic energy of relativistic electrons" Am. J. of Phys., 32, 551 (1964)

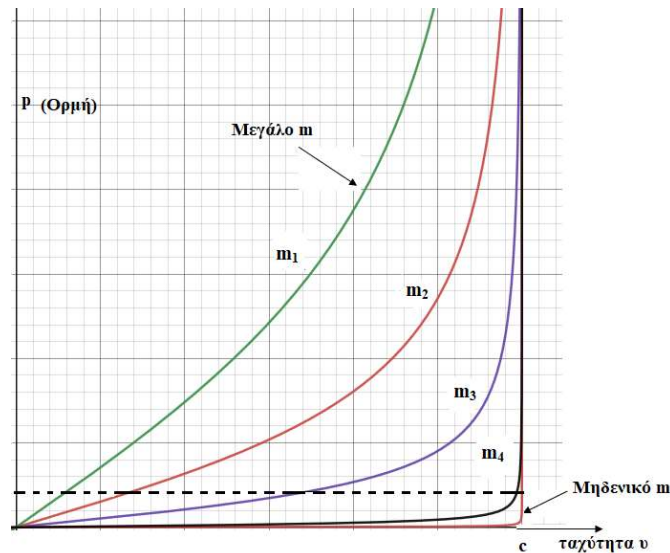
4.3 .Ενέργεια και ορμή σώματος μηδενικής μάζας.

Στην κλασική φυσική σωματίδια χωρίς μάζα είναι ανύπαρκτες οντότητες, δεν έχουν ενέργεια και ορμή αλλά και κανένα άλλο μετρήσιμο χαρακτηριστικό. Σε αντίθεση με την κλασική φυσική στο πεδίο της σχετικότητας δικαιολογείται η ύπαρξη τέτοιων σωματιδίων. Η πειραματική έρευνα έδειξε ότι το φωτόνιο, το βαρυτόνιο, και ενδεχομένως το νετρίνο του ηλεκτρονίου έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας.

Στις σχέσεις $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, $\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ καθώς η μάζα προσεγγίζει το μηδέν, ο αριθμητής

τείνει στο μηδέν. Για ταχύτητα του σώματος να τείνει στην ταχύτητα του φωτός, ο

παρονομαστής μπορεί να προσεγγίσει επίσης το μηδέν κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ορμή και η ενέργεια να παραμένουν σταθερές. Αυτή η οριακή κατάσταση γίνεται καλύτερα διαφωτιστική από το σχήμα 4.7 όπου απεικονίζονται καμπύλες της ορμής συναρτήσει της ταχύτητας για διαφορετικές μάζες ηρεμίας των σωματιδίων. (Ford,1980).



Σχήμα 4. 7 Καμπύλες ορμής σωμάτων με διαφορετικές μάζες σε συνάρτηση με την ταχύτητα του κάθε σώματος.

Για καθορισμένη τιμή της ορμής (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα) και για σώματα με διαφορετικές μάζες ηρεμίας (διαδοχικά $m_1 > m_2 > m_3 > m_4 \dots > m \rightarrow 0$), μικρότερη διαδοχικά μάζα σημαίνει μεγαλύτερη τιμή της ταχύτητας. Όταν η μάζα γίνεται πολύ μικρή απαιτείται μικρή ορμή για να πλησιάσει η ταχύτητα v την ταχύτητα του φωτός. Για ένα σώμα μηδενικής μάζας η καμπύλη της ορμής στην τιμή της ταχύτητας $v = c$ γίνεται κάθετη στον άξονα των ταχυτήτων. Δεν είναι, επομένως, ασυμβίβαστη η ύπαρξη σωμάτων μηδενικής μάζας, με πεπερασμένη ορμή και ενέργεια, αρκεί να κινούνται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός. (Ford,1980).

Όμως, ποια σχέση συνδέει την ενέργεια E και την ορμή \vec{P} ενός σώματος μηδενικής μάζας ηρεμίας;

Αν θέσουμε $m_0 = 0$ στην εξίσωση $E^2 - (\vec{P}c)^2 = m_0 c^4$ καταλήγουμε για το μέτρο των μεγεθών E και P

$$E = Pc$$

και σε συνδυασμό με
$$\frac{P}{E} = \frac{v}{c^2}$$
 έχουμε

$$v=c$$

Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι τα σωματίδια με μηδενική μάζα ηρεμίας κινούνται υποχρεωτικά με την ταχύτητα του φωτός. Και αντιστρόφως, σε σωματίδια που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός τους προσδίδουμε ενέργεια και ορμή που συνδέονται ως $E= P c$ και μηδενική μάζα ηρεμίας. Η $E= P c$ είναι η μοναδική εξίσωση που ορίζει συνδυαστικά την ορμή και την ενέργεια ενός σωματιδίου μηδενικής μάζας ηρεμίας .Οι γενικές εξισώσεις που ορίζουν την ενέργεια και την ορμή ενός σώματος με μη μηδενική μάζα ηρεμίας δεν ισχύουν για σωματίδια μηδενικής μάζας διότι η ορμή ενός τέτοιου σωματιδίων μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή για καθορισμένη τιμή της ταχύτητάς του. (Ford,1980). Στην πράξη, η μέτρηση της ορμής ενός σωματιδίου χωρίς μάζα δεν γίνεται από τη μέτρηση της ταχύτητάς του αλλά από την μεταβολή της ορμής του όταν αυτό αλληλοεπιδρά με άλλα σωματίδια.

4.4 Μετασχηματισμοί ενέργειας και ορμής

Ένα σύστημα αναφοράς Σ' κινείται ομοιόμορφα με ταχύτητα $\vec{V} = V \vec{x}$ ως προς ένα άλλο ακίνητο σύστημα αναφοράς Σ κατά την διεύθυνση των κοινών αξόνων xx' . Η ταχύτητα κάποιου σώματος με μάζα ηρεμίας m_0 είναι \vec{v} ως προς το σύστημα Σ και \vec{v}' ως προς το Σ' . Ορίζουμε τους συντελεστές Lorentz

$$\gamma_V = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_{v'} = \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.41)$$

Η σχέση μετασχηματισμού της x- συνιστώσας της ταχύτητας :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (4.42)$$

Η σχέση μετασχηματισμού του μέτρου της ταχύτητας που αποδείχτηκε στην ενότητα 3.5.1

$$v^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)^2} \right]$$

γράφεται μέσω των (4.41) και ως :

$$\gamma_v = \gamma_{v'} \gamma_V \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right) \quad (4.43)$$

Για την x-συνιστώσα της ορμής του σώματος στο σύστημα Σ μέσω των (4.42) και (4.43) έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned}
 P_x &= \gamma_v m_0 v_x \\
 &= \gamma_{v'} \gamma_V \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) m_0 \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \\
 &= \gamma_V \left(\underbrace{m_0 v'_x \gamma_{v'}}_{P'_x} + \overbrace{m_0 c^2 \gamma_{v'}}^{E'} \frac{V}{c^2} \right) \\
 &= \gamma_V \left(P'_x + \frac{V}{c^2} E' \right)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Για το μετασχηματισμό της ενέργειας E είναι διαδοχικά :

$$\begin{aligned}
 E &= \gamma_v m_0 c^2 \\
 &= \left(m_0 c^2 \gamma_{v'} + c^2 \frac{V}{c^2} \overbrace{m_0 v'_x \gamma_{v'}}^{P'_x} \right) \\
 &= \gamma_V (E' + V P'_x)
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι : $P'_y = P_y$ και $P'_z = P_z$.

Οι σχέσεις μετασχηματισμού των μεγεθών P_x , P_y , P_z και E/c^2 είναι τελείως ανάλογες με τους μετασχηματισμούς των x , y , z , t .

Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί από το Σ' στο Σ προκύπτουν αν εναλλαχθούν οι τόνοι και αντικαταστήσουμε το V με -V

$$\begin{aligned}
 P'_x &= \gamma_V \left(P_x - \frac{V}{c^2} E \right) \\
 E' &= \gamma_V (E - V P'_x) \\
 P'_y &= P_y \\
 P'_z &= P_z
 \end{aligned}$$

Για ένα αποτελούμενο από n σωματίδια σύστημα οι συνιστώσες της ολικής ορμής και ολικής ενέργειας, σε ένα αδρανειακό πλαίσιο Σ, είναι:

$$P_x = \sum_{i=1}^n p_{xi} \qquad P_y = \sum_{i=1}^n p_{yi} \qquad P_z = \sum_{i=1}^n p_{zi} \qquad E = \sum_{i=1}^n E_i$$

Οι παραπάνω εκφράσεις με τα μεγέθη τονούμενα αποτελούν τα αντίστοιχα μεγέθη στο σύστημα Σ'. Για κάθε i-στο σωματίδιο ισχύουν οι μετασχηματισμοί (4.44) από το Σ σε ένα άλλο σύστημα Σ' που προωθείται κατά τον άξονα x με ταχύτητα V. Επιπλέον καθώς οι μετασχηματισμοί ορμής και ενέργειας είναι γραμμικοί συμπεραίνουμε ότι οι ίδιοι μετασχηματισμοί, από το Σ στο Σ', θα πρέπει να ισχύουν για την ολική ενέργεια και για τις συνιστώσες της ολικής ορμής του συστήματος των σωματιδίων .

$$\begin{aligned} P'_x &= \sum_{i=1}^n p'_{xi} \\ &= \gamma \left(\sum_{i=1}^n p_{xi} - \frac{V}{c^2} \sum_{i=1}^n E_i \right) \\ &= \gamma \left(P_x - \frac{V}{c^2} E \right) \end{aligned}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} E' &= \sum_{i=1}^n E'_i \\ &= \gamma \left(\sum_{i=1}^n E_i - V \sum_{i=1}^n p_{xi} \right) \\ &= \gamma (E - VP_x) \end{aligned}$$

Και

$$P'_y = \sum_{i=1}^n p'_{yi} = P_y$$

$$P'_z = \sum_{i=1}^n p'_{zi} = P_z$$

4.5 Το αναλλοίωτο μέγεθος ορμής – ενέργειας

4.5.1 Το αναλλοίωτο για ένα σώμα.

Την ενότητα 4.2.1 τα μεγέθη μάζα ηρεμίας , ορμή και ενέργεια ενός σώματος συνδέονται ως:

$$E^2 - c^2 P^2 = m_0^2 c^4$$

Η μάζα ηρεμίας m_0 του σώματος και η ταχύτητα του φωτός c είναι αναλλοίωτα μεγέθη. Θα εξετάσουμε αν και η διαφορά $E^2 - P^2 c^2$ είναι επίσης αναλλοίωτο μέγεθος. Αντικαθιστώντας τους μετασχηματισμούς της ορμής και της ενέργειας έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} E^2 - P^2 c^2 &= [\gamma_V (E' + V P'_x)]^2 - P_x^2 c^2 - P_y^2 c^2 - P_z^2 c^2 \\ &= [\gamma_V (E' + V P'_x)]^2 - \left[\gamma_V \left(P'_x + \frac{V}{c^2} E' \right) \right]^2 c^2 - P_y^2 c^2 - P_z^2 c^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Όπου V η σχετική ταχύτητα που κινείται ένα αδρανειακό σύστημα Σ' ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ με παράλληλους τους άξονες τους. xx' και γ_v ο παράγοντας Lorentz για τον μετασχηματισμό από το ένα σύστημα στο άλλο.

Εκτελώντας τις πράξεις στο δεξιό σκέλος της (38) θα προκύψει

$$\begin{aligned} E^2 - P^2 c^2 &= E'^2 - P'_x{}^2 c^2 - P'_y{}^2 c^2 - P'_z{}^2 c^2 \\ &= E'^2 - P'^2 c^2 \end{aligned} \quad (4.47).$$

Η τελική ισότητα φανερώνει ότι η ποσότητα $E^2 - (Pc)^2$ για ένα σωματίο παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz.

4.5.2 Αναλλοίωτη μάζα συστήματος σωμάτων.

Μια ανάλογη σχέση ορίζουμε για ένα σύστημα σωματιδίων :

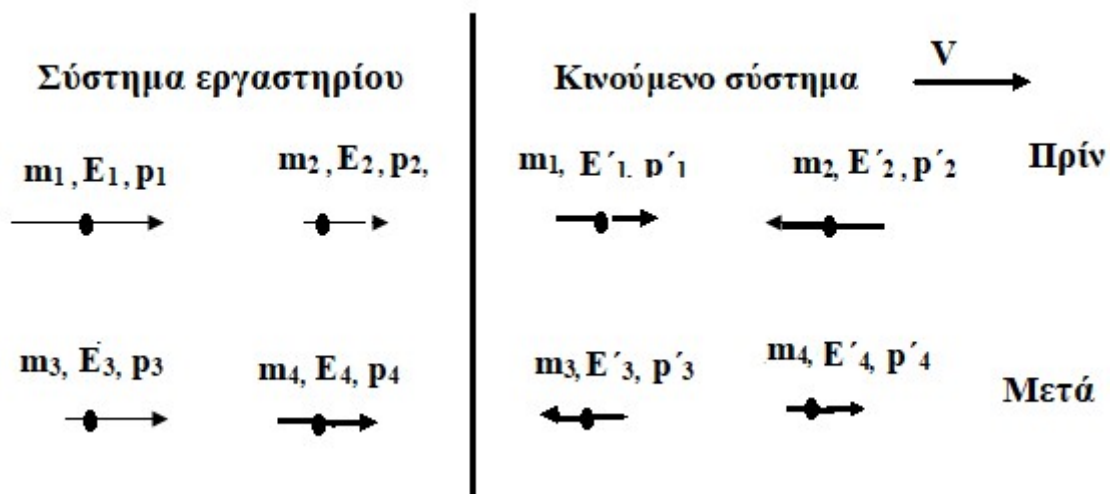
$$M_0^2 c^4 + P^2 c^2 = E^2 \quad (4.48)$$

Όπου P το μέτρο της ολικής ορμής και E η ολική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων όπως μετρώνται στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Η ποσότητα M_0 ορίζεται από την σχέση (4.48) και θεωρούμε ότι είναι η μάζα ηρεμίας του συστήματος των σωματιδίων. Η μάζα M_0 δεν αποτελεί το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των σωματιδίων του συστήματος . Μπορεί να διαφέρει από το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των σωματιδίων του συστήματος είτε λόγω ενέργειας αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων είτε (ή και) λόγω κινητικής ενέργειας των σωμάτων του συστήματος. Για παράδειγμα , στο δευτέριο αν προσθέσουμε τις μάζες ηρεμίας του πρωτονίου και νετρονίου προκύπτει ένα σύνολο 2,01594 amu , ενώ η μάζα του δευτέρου είναι 2,01355 amu. Η διαφορά μάζας μεταξύ της μάζας ηρεμίας του συστήματος (δευτέριο) και του αθροίσματος των μαζών ηρεμίας των συστατικών του (πρωτόνιο και νετρόνιο) ισοδυναμεί στην ενέργεια σύνδεσης του δευτέρου (2,23 MeV). (Ford,1980).

Ένα δεύτερο παράδειγμα αποτελεί ένα σύστημα, από δυο αντίθετα κατευθυνόμενα φωτόνια με ενέργειες 0,5 MeV και 2 MeV αντίστοιχα. Η μάζα ηρεμίας M_0 του συστήματος υπολογίζεται από την $M_0^2 c^4 + P^2 c^2 = E^2$ για $E= 2,5$ MeV και $Pc = 1,5$ MeV ,και ισούται αριθμητικά με 2 MeV που αντιστοιχούν περίπου σε $3,6 \cdot 10^{-10}$ Kg. (Ford,1980). Διαπιστώνεται ότι μάζα ηρεμίας του συστήματος των φωτονίων διαφέρει από το άθροισμα των μαζών ηρεμίας τους λόγω της κινητικής ενέργειας.

Η μάζα του συστήματος όπως ορίζεται από την σχέση $M_0 c^2 = (E/c)^2 - P^2$ είναι αναλλοίωτη και διατηρούμενη ποσότητα. Αναλλοίωτη διότι παραμένει η ίδια σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και διατηρούμενη στο σύστημα αναφοράς που υπολογίζεται γιατί δεν μεταβάλλεται ως προς το χρόνο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, για την απόδειξη του αναλλοίωτου της μάζας του συστήματος θα υποθέσουμε ένα ζεύγος σωματιδίων που κινούνται στη μια διάσταση και παρατηρούνται από δυο διαφορετικά συστήματα αναφοράς όπως δείχνει το σχήμα 4.8



Σχήμα 4. 8 Το πριν και το μετά μιας σύγκρουσης δυο σωματιδίων σε δυο συστήματα αναφοράς. Οι ποσότητες που διατηρούνται είναι οι ίδιες από πάνω προς τα κάτω για το ίδιο σύστημα. Οι αναλλοίωτες ποσότητες είναι ίδιες από αριστερά προς δεξιά (δηλ στα διαφορετικά συστήματα αναφοράς)

Στο σύστημα του εργαστηρίου τα σώματα αρχικά έχουν μάζες ηρεμίας m_1, m_2 , ορμές p_1, p_2 και ενέργειες E_1 και E_2 . Στο κινούμενο σύστημα αναφοράς τα σώματα διατηρούν αναλλοίωτες τις μάζες ηρεμίας τους αλλά έχουν διαφορετικές ορμές p'_1, p'_2 και ενέργειες E'_1 και E'_2 . Γενικεύοντας, αργότερα, μετά την σύγκρουση ή την αλληλοεπίδραση ή τη διάσπαση είναι πιθανόν να είναι διαφορετικός ο αριθμός των παραγόμενων σωματιδίων και ενδεχομένως κανένα να μην είναι ίδιο με τα αρχικά σώματα. Στο παράδειγμα που απεικονίζεται στο σχήμα 4.8 τα σωματίδια έχουν αργότερα (στο σχήμα αναφέρεται σαν κατάσταση «μετά») στο σύστημα του εργαστηρίου μάζες ηρεμίας m_3, m_4 , ορμές p_3, p_4 και ενέργειες E_3 και E_4 . Στο κινούμενο σύστημα αναφοράς τα σώματα διατηρούν αναλλοίωτες τις μάζες ηρεμίας τους m_3, m_4 αλλά έχουν διαφορετικές ορμές p'_3, p'_4 και ενέργειες E'_3 και E'_4 . Η ολική ενέργεια E και ορμή P σε καθένα από τα δυο συστήματα αναφοράς διατηρείται. Για την ενέργεια έχουμε :

$$E = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

$$E' = E'_1 + E'_2 = E'_3 + E'_4$$

όμως γενικά δεν παραμένει αναλλοίωτη διότι $E \neq E'$. (Ford, 1980).

Το αναλλοίωτο της μάζας του συστήματος αποδεικνύεται από το μετασχηματισμό Lorentz των ορμών και ενεργειών στα διαφορετικά συστήματα αναφοράς ορμές. Έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= \left[\gamma_V (E'_1 + V p'_1) + \gamma_V (E'_2 + V p'_2) \right] \\ &= \gamma_V \left[(E'_1 + E'_2) + (V p'_1 + V p'_2) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 \\ &= \gamma_V \left[\frac{V}{c^2} (E'_1 + E'_2) + (p'_1 + p'_2) \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Όπου V η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το σύστημα του εργαστηρίου και γ_V ο παράγοντας Lorentz για την ταχύτητα αυτή.

Η παράσταση $E^2 - c^2 P^2 = (E_1 + E_2)^2 - c^2 (p_1 + p_2)^2$ με αντικατάσταση των μεγεθών από τις (4.49), (4.50) και μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις θα ισούται :

$$E^2 - c^2 P^2 = E'^2 - c^2 P'^2 \quad (4.51)$$

Όπου $P' = p'_1 + p'_2$ η ολική ορμή των σωματιδίων 1 και 2 στο κινούμενο σύστημα και πριν την σύγκρουση.

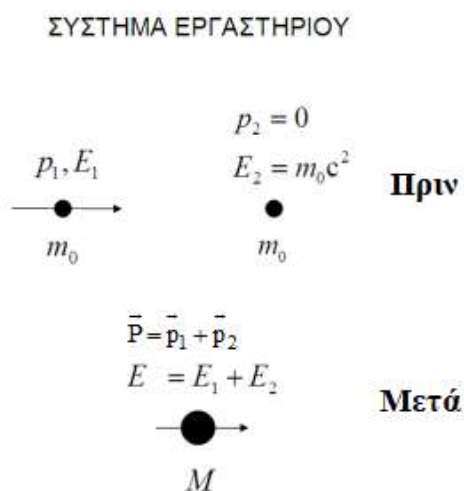
Εξ ορισμού $M_0^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2$ και λόγω της (4.51)

$$M_0^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - P'^2 \quad (4.52)$$

Που αναδεικνύει το αναλλοίωτο του M_0 .

4.6 Διαθέσιμη Ενέργεια

Μια σημαντική ερώτηση , που αφορά κυρίως την μεγαλύτερη απόδοση της χρήσης των επιταχυντών, είναι η εξής: «Κατά την σύγκρουση κάποιου σωματιδίου με ένα άλλο , ποιο μέρος της ολικής ενέργειας διατίθεται για την παραγωγή καινούργιας μάζας;» (Ford,1980). Στο σύστημα αναφοράς Σ του εργαστηρίου, (σχήμα 4.9), προς διευκόλυνση επιλέγουμε δυο σωματίδια ίσης μάζας ηρεμίας m_0 , εκ των οποίων το ένα είναι ακίνητο και το άλλο κινείται ώστε να συγκρουστεί με το πρώτο.



Σχήμα 4. 9 Σύγκρουση σωμάτων στο εργαστήριο για την παραγωγή νέας μάζας. Πηγή: Ford, 1980.

Έστω, ότι το κινούμενο σωματίδιο 1 έχει ορμή \vec{p}_1 και ενέργεια E_1 Το ακίνητο σωματίδιο – στόχος έχει αντίστοιχα μεγέθη $\vec{p}_2 = 0$ και $E_2 = m_0 c^2$

$$(453)$$

Η ολική ενέργεια E και η ολική ορμή \vec{P} του συστήματος των δύο σωματιδίων είναι :

$$\begin{aligned}
 E &= E_1 + E_2 \\
 &= E_1 + m_0 c^2
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\
 &= \vec{p}_1
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

Το σωματίδιο που προήλθε από την σύγκρουση έχει μάζα ηρεμίας M και για να διατηρείται η ολική ορμή πρέπει οπωσδήποτε να έχει κινητική ενέργεια.

Στο σύστημα του εργαστηρίου :

$$\begin{aligned} M^2 c^2 &= (E/c)^2 - \vec{P}^2 \\ &= \frac{(E_1 + m_0 c^2)^2}{c^2} - \vec{p}_1^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Για το σωματίδιο 1 έχουμε :

$$m_0^2 c^2 = (E_1/c)^2 - \vec{p}_1^2 \quad (4.59)$$

Αν αντικαταστήσουμε στη (4.58) το \vec{p}_1^2 όπως προκύπτει από την (4.59) και μετά από κάποιους αλγεβρικούς υπολογισμούς μετατρέπεται η εξίσωση (4.58) στην

$$M^2 c^2 = 2m_0(m_0 c^2 + E_1) \quad (4.60)$$

Αν αφαιρέσουμε από την μέγιστη ενέργεια ηρεμίας ($= M c^2$) που συγκεντρώνεται μετά την σύγκρουση την ενέργεια ηρεμίας ($= 2m_0 c^2$) προ της σύγκρουσης , η διαφορά αυτή μας ορίζει την διαθέσιμη ενέργεια .

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = M c^2 - 2m_0 c^2 \quad (4.61)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.60) έχουμε τελικά,

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = \sqrt{2m_0 c^2 (m_0 c^2 + E_1)} - 2m_0 c^2 \quad (4.62)$$

Επειδή η ολική ενέργεια E στο σύστημα του εργαστηρίου ισούται με $E_1 + m_0 c^2$ η (4.62)

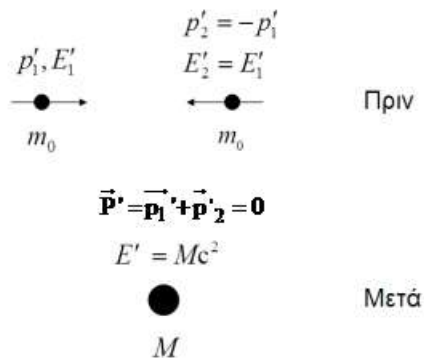
γράφεται και ως

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = \sqrt{2m_0 E} - 2m_0 c^2 \quad (4.63)$$

και η σχέση (50) μετασχηματίζεται στην $M^2 c^2 = 2m_0 E$ (4.64)

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου της ορμής των σωματιδίων (που κινείται με ταχύτητα V ως προς το σύστημα του εργαστηρίου και στην κατεύθυνση της κίνησης του σωματιδίου 1) από την ίδια σύγκρουση μπορεί να προκύψει ένα σωματίδιο ή ένα σύνολο σωματιδίων με ολική μάζα ηρεμίας M . Αν θεωρήσουμε ότι προκύπτει ένα μόνο σωματίδιο αυτό πρέπει να μένει ακίνητο, διότι η ολική ορμή $\vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ του συστήματος είναι μηδενική. Στη περίπτωση αυτή, όλη η διαθέσιμη ενέργεια έγινε μάζα, καθώς κανένα μέρος της δεν μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΕΝΤΡΟΥ ΟΡΜΗΣ



Σχήμα 4. 10 Η ίδια σύγκρουση με το σχήμα 4.9 στο σύστημα κέντρο της ορμής. Πηγή: Ford, 1980.

Για το σύστημα μηδενικής ορμής των σωματιδίων ισχύουν:

Ολική ενέργεια $E' = E'_1 + E'_2$.

ολική ορμή $\vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$.

Και $M^2 c^2 = (E'/c)^2 - 0$ (4.65)

Για την παραγωγή νέας μάζας, στο σύστημα της μηδενικής ορμής των σωματιδίων η αντίστοιχη διαθέσιμη ενέργεια είναι :

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = Mc^2 - 2m_0 c^2 \quad (4.66)$$

Από την (4.64) προκύπτει $Mc^2 = E'$ και τελικά

$$E_{\text{διαθέσιμη}} = E' - 2m_0 c^2 = E'_1 + E'_2 - 2m_0 c^2 \quad (4.67)$$

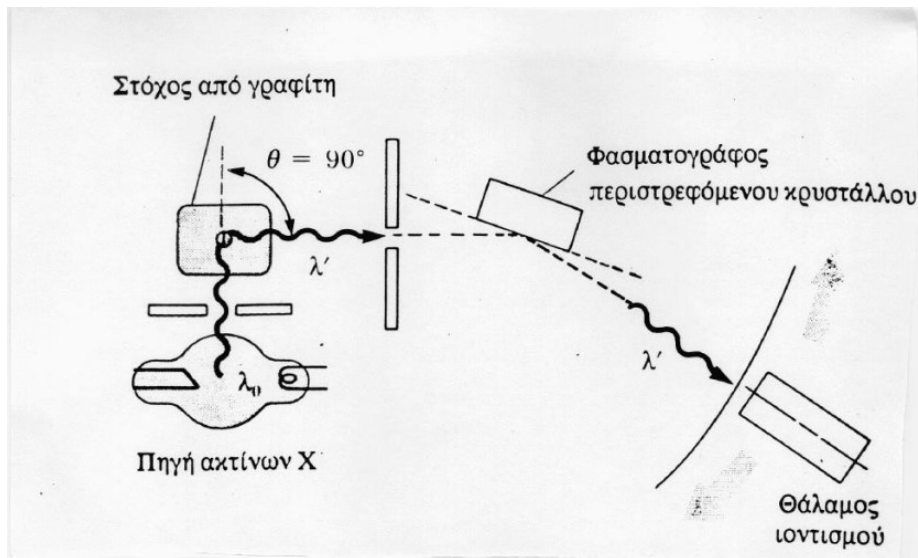
Από την σύγκριση των (4.63) και (4.67) συμπεραίνουμε ότι στο κέντρο ορμής η διαθέσιμη ενέργεια δυο αντίθετα συγκρούμενων σωματιδίων είναι πολύ πιο μεγάλη από την διαθέσιμη ενέργεια της περίπτωσης που το ένα σωματίδιο κινείται και συγκρούεται με ένα ακίνητο σωματίδιο στόχο , υπό την προϋπόθεση ότι τα κινούμενα σωματίδια, σε κάθε περίπτωση, έχουν την ίδια ενέργεια . Για παράδειγμα όταν ένα πρωτόνιο (που έχει $m_0 c^2 = 1 \text{ GeV}$) επιταχύνεται σε ενέργεια $E_1 = 300 \text{ GeV}$ και συγκρούεται σε ακίνητο στόχο-πρωτόνιο η διαθέσιμη ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση $E_{\text{διαθέσιμη}} = \sqrt{2m_0(m_0 c^2 + E_1)} - 2m_0 c^2$ και είναι περίπου 23 GeV.

Όταν δυο πρωτόνια επιταχύνονται με ενέργεια 300 GeV, σε αντίθετη κατεύθυνση ώστε να συγκρουστούν, η διαθέσιμη ενέργεια υπολογίζεται από την $E_{\text{διαθεσιμη}} = E_1' + E_2' - 2m_0 c^2$ και είναι περίπου 598 GeV. Εξ' αυτού του λόγου σήμερα οι επιταχυντές είναι αποδοτικότεροι στη χρήση τους γιατί είναι επιταχυντές συγκρουόμενων σωματιδίων .

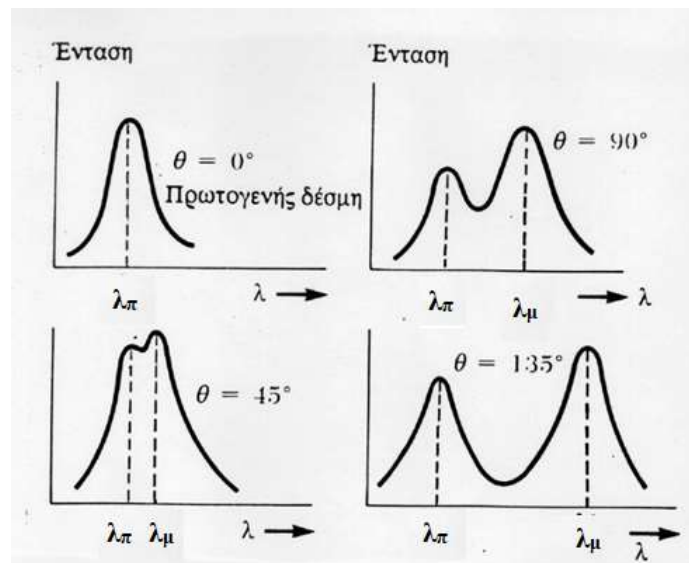
4.7 Φαινόμενο Compton.

Το 1923, ο Arthur Compton παρατήρησε ότι, όταν ακτίνες X προσπίπτουν πάνω σε ένα στόχο άνθρακα, στο φάσμα των σκεδαζόμενων ακτίνων περιέχονται τόσο ακτίνες που έχουν το ίδιο μήκος με τις προσπίπτουσες αλλά και ακτίνες X που έχουν μεγαλύτερο μήκος κύματος από το μήκος κύματος των προσπιπτουσών. Η παρουσία ακτίνων στο σκεδαζόμενο φάσμα με μεγαλύτερο μήκος κύματος δεν ήταν αδύνατο να ερμηνευτεί σύμφωνα με την κυματική φύση του φωτός. Η θεωρία Thomson, που στηρίζεται κυρίως στην ηλεκτροδυναμική, δέχεται ότι το φώς ορισμένης συχνότητας ν είναι ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα ν . Όταν το ηλεκτρικό πεδίο αλληλοεπιδράσει με ένα φορτίο λειτουργεί ως διεγέρτης και το οδηγεί σε εξαναγκασμένη ταλάντωση ίδιας συχνότητας ν . Το φορτίο με τη σειρά του εκπέμπει ακτινοβολία ίδιας συχνότητας ν . Επομένως όταν οι προσπίπτουσες ακτίνες- X στο φαινόμενο Compton έχουν ένα ορισμένο μήκος κύματος θα πρέπει να εκπέμπεται μόνο ακτινοβολία με το ίδιο μήκος κύματος μετά την σκέδαση. Τα αποτελέσματα του φαινομένου μπορούν να ερμηνευτούν αν δώσουμε στα φωτόνια ενέργεια και ορμή και θεωρήσουμε τη σκέδαση σαν το αποτέλεσμα μιας ελαστικής σύγκρουσης δύο σωμάτων ενός ηλεκτρονίου και ενός φωτονίου. Αναμφισβήτητα το φαινόμενο Compton αποτέλεσε μία εξαιρετική επικύρωση της σωματιδιακής υπόστασης του φωτός.

Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποίησε ο Compton φαίνεται στο σχήμα 4.11



Σχήμα 4. 11 Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποίησε ο Compton. Πηγή: https://ph202.edu.physics.uoc.gr/files/relativity_2011.pdf



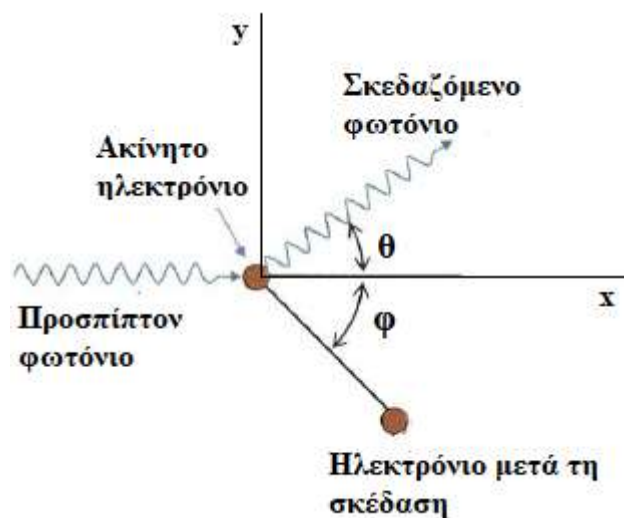
Σχήμα 4.12 Φάσματα των ακτίνων X που καταγράφηκαν στα πειράματα του Compton. Πηγή: https://ph202.edu.physics.uoc.gr/files/relativity_2011.pdf

Μονοχρωματική δέσμη ακτίνων X με μήκος κύματος λ_{π} προσπίπτουν σε ένα στόχο από άνθρακα. Οι ακτίνες-X σκεδάζονται Ένας φασματογράφος περιστρεφόμενου κρυστάλλου (Bragg) καταγράφει την ένταση των σχεδιαζόμενων ακτίνων X κατά μία ορισμένη γωνία σκέδασης θ ως συνάρτηση του μήκους κύματος. Στο σχήμα 4.12 παρουσιάζονται κάποια από τα φάσματα των ακτίνων X που καταγράφηκαν στα πειράματα του Compton.

Σε κάθε φάσμα, στο μήκος κύματος λ_{π} παρατηρούμε ένα μέγιστο της έντασης που οφείλεται στις σκεδαζόμενες ακτίνες X με μήκος κύματος ίσο με το μήκος κύματος λ_{π} της προσπίπτουσας μονοχρωματικής δέσμης ακτίνων X. Ένα δεύτερο μέγιστο μετατοπισμένο προς τα δεξιά σε μεγαλύτερο μήκος κύματος λ_{μ} από το μήκος κύματος λ_{π} της προσπίπτουσας δέσμης. Το σχήμα 4.13 απεικονίζει το πριν και το μετά της σκέδασης. Ένα φωτόνιο συχνότητας f_{π} και υψηλής ενέργειας πλησιάζει τον ακίνητο στόχο –ηλεκτρόνιο και αφού σκεδαστεί κατά γωνία θ απομακρύνεται με συχνότητα f_{μ} . Η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου είναι πριν την σύγκρουση $E_{\phi\pi} = h f_{\pi}$, $p_{\mu} = \frac{h f_{\pi}}{c}$ και μετά τη σκέδαση $E_{\phi\mu} = h f_{\mu}$,

$$p_{\mu} = \frac{h f_{\mu}}{c} .$$

Το ακίνητο φορτίο πριν τη σύγκρουση έχει μηδενική ορμή και ενέργεια ηρεμίας $E_0 = m_0 c^2$ όπου m_0 η μάζα ηρεμίας του. Μετά τη σκέδαση κινείται κατά μια διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ με την αρχική κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου και αποκτά ενέργεια E_e και ορμή p_e .



Σχήμα 4. 13 Σχηματική παράσταση σκέδασης Compton.

Η διατήρηση της ορμής και της ενέργειας εκφράζεται κατά άξονα μέσω των ισοτήτων:

Διατήρηση της ορμής:

Άξονας x:
$$\frac{h f_{\pi}}{c} = \frac{h f_{\mu}}{c} - p_e \cos \varphi \quad (4.67)$$

Άξονας y:
$$0 = \frac{h f_{\mu}}{c} \sin \vartheta - p_e \sin \varphi \quad (4.68)$$

$$\text{Διατήρηση της ενέργειας :} \quad h f_{\pi} + m_0 c^2 = h f_{\mu} + E_e \quad (4.69)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τετραγώνων των εξισώσεων (4.67) και (4.68) και λαμβάνοντας υπόψη την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ θα προκύψει η :

$$c^2 p_e^2 = h^2 (f_{\pi}^2 + f_{\mu}^2 - 2 f_{\pi} f_{\mu} \cos \vartheta) \quad (4.70)$$

Για το ηλεκτρόνιο, από το αναλλοίωτο της ενέργειας- ορμής μπορούμε να γράψουμε :

$$m_0^2 c^4 = E_e^2 - p_e^2 c^2 \quad (4.71)$$

Από (4.71) η (4.70) δίνει:

$$E_e^2 - m_0^2 c^4 = h^2 (f_{\pi}^2 + f_{\mu}^2 - 2 f_{\pi} f_{\mu} \cos \vartheta) \quad (4.72)$$

Επιλύοντας την (4.69) ως προς E_e και αντικαθιστώντας την ευρισκομένη έκφρασή της στην (4.72)

$$\left[h(f_{\pi} - f_{\mu}) + m_0 c^2 \right]^2 = h^2 (f_{\pi}^2 + f_{\mu}^2 - 2 f_{\pi} f_{\mu} \cos \vartheta) \quad (4.73)$$

Μετά από πράξεις παράγεται από την (4.73)

$$\frac{f_{\pi} - f_{\mu}}{f_{\pi} f_{\mu}} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \vartheta) \quad (4.74)$$

Αντικαθιστώντας τις συχνότητες με τα μήκη κύματος θα είναι

$$\frac{\frac{c}{\lambda_{\pi}} - \frac{c}{\lambda_{\mu}}}{\frac{c^2}{\lambda_{\pi} \lambda_{\mu}}} = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \vartheta) \quad \text{και τελικά}$$

$$\lambda_{\mu} - \lambda_{\pi} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta) \quad (4.75)$$

Ο συνδυασμός $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ ονομάζεται μήκος κύματος Compton του σωματιδίου με μάζα m_0 ,

και τον συμβολίζουμε με λ_c . Για το ηλεκτρόνιο $\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$.

Για $\theta = 0$ στην (4.54) είναι $\lambda_{\mu} = \lambda_{\pi}$, το ηλεκτρόνιο δεν σκεδάζεται και το φωτόνιο διατηρεί την αρχική του ενέργεια και ορμή.

Για $\theta = 180^{\circ}$, έχουμε $\lambda_{\mu} = 2\lambda_c + \lambda_{\pi}$, το φωτόνιο σκεδάζεται στην αντίθετη από την προσπίπτουσα κατεύθυνση και χάνει το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειάς του.

Για $\theta \neq 0$, η θετική τιμή του $(1 - \cos\theta)$ προσδίδει θετικό πρόσημο στην διαφορά των μηκών κύματος $\Delta\lambda = \lambda_{\mu} - \lambda_{\pi}$. Το φωτόνιο συμπεριφέρεται σαν σωματιδιακό, χάνει τμήμα της ενέργειάς του κατά την σύγκρουση με το ακίνητο φορτίο και κατά συνέπεια έχει λιγότερη ενέργεια, μικρότερη συχνότητα και μεγαλύτερο μήκος κύματος.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.12, όλες οι καμπύλες της έντασης σκέδασης παρουσιάζουν ένα μέγιστο στη θέση $\lambda = \lambda_{\pi}$, που οφείλεται στη σκέδαση των ακτίνων X από ολόκληρο το άτομο. Συγκεκριμένα, τα δέσμια ηλεκτρόνια και οι πυρήνες των ατόμων που συμμετέχουν στην σκέδαση των ακτίνων X έχουν πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη μάζα των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Για κάθε γωνία θ το μήκος κύματος Compton λ_c των ελεύθερων ηλεκτρονίων έχει συγκριτικά πολύ μικρότερη τιμή από το μήκος κύματος Compton του υπόλοιπου ατόμου. Το δεύτερο μέγιστο των καμπυλών οφείλεται καθαρά στην σκέδαση των ακτίνων X από τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του στόχου.

Συμπεράσματα

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας βασίστηκε στην ορθολογιστική κριτική της μέτρησης του χρόνου και του χώρου. Ο δημιουργός της , αμφισβητώντας το πλαίσιο προβληματισμού της μέχρι τότε επικρατούσας φυσικής, και ξεκινώντας από δυο αξιώματα, το ένα αφορά την επέκταση της αρχής της σχετικότητας στον ηλεκτρομαγνητισμό και το άλλο την ταχύτητα του φωτός, αποδεικνύει, μέσω μιας παραγωγικής μεθόδου, τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Η αξίωση της καθολικής τιμής της ταχύτητας του φωτός σε όλα τα Α.Σ.Α, οδηγεί υποχρεωτικά στην απόρριψη του νευτώνειου νόμου της πρόσθεσης των ταχυτήτων. Η υιοθέτηση της σχετικότητας του ταυτόχρονου επιβάλλει τη σχετικότητα στη μέτρηση του μήκους.

Η θεωρία της σχετικότητας περιέχει όλα τα βασικά στοιχεία μιας καλής θεωρίας. Εξηγεί ένα σύνολο από εμπειρικά δεδομένα που δεν ήταν δυνατόν να εξηγήσουν οι προηγούμενες της θεωρίες. Όμως δεν αποτελεί απλώς ένα μαθηματικό φορμαλισμό, που δεν εδράζεται στο πραγματικό, καθώς η πειραματική επαλήθευση των ιδεών της στα φαινόμενα που εξετάζει ελέγχθηκε πολλαπλώς και επιτυχώς.

Εισήγαγε καινούργιες ιδέες που μπορούν να οδηγήσουν στην πρόβλεψη και στον έλεγχο της εγκυρότητας πλήθους νέων φαινομένων. Μια τέτοια ιδέα , που προέρχεται από το χώρο της σχετικότητας, είναι το αναλλοίωτο των νόμων. Η απαίτηση του αναλλοίωτου περιορίζει την ελεύθερη εφευρετικότητα των φυσικών, καθώς αποτελεί ένα από τα βασικά κριτήρια επιλογής και κατάταξης των νόμων σε νόμους ικανούς να παράγουν νέες γνώσεις ή σε εμπειρικούς δηλ σε νόμους που αποτελούν απλώς μια μαθηματική περιγραφή κάποιου πειραματικού αποτελέσματος και των συσχετίσεων που αυτό συνεπάγεται χωρίς τη δυνατότητα παραγωγής νέας γνώσης. Η ισχύς της αρχής της σχετικότητας είναι μια από τις απαιτήσεις του αναλλοίωτου. Είναι ένας από τους «υπερ- νόμους» στην οποία πρέπει να υπακούουν οι νόμοι της φυσικής. Παραδείγματος χάριν, οι θεωρητικοί φυσικοί γνωρίζουν ότι , όλοι οι νόμοι που σχετίζονται με τις αλληλοεπιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων αν δεν υπακούουν στη αρχή της σχετικότητας έχουν μεγάλη πιθανότητα να απορριφθούν.

Εκτός από την προσθήκη νέων ιδεών, η θεωρία της σχετικότητας κατάφερε να συνενώσει ιδέες και έννοιες , που στα πλαίσια της κλασσικής φυσικής φαίνονται να μην έχουν σχέση μεταξύ τους. Η έννοια του χωροχρόνου προκύπτει από την συνένωση του χώρου και του χρόνου. Η ορμή και η ενέργεια συνενώθηκαν στο τετραδιάνυσμα ορμής- ενέργειας. Η μάζα και η ενέργεια αποτελούν τις δυο όψεις του ίδιου νομίσματος.

Αν και η σχετικότητα αρχικά ερμήνευε φαινόμενα και εμπειρικά δεδομένα της ανθρώπινης κλίμακας πολύ γρήγορα αποδείχθηκε αποτελεσματική τόσο στον κόσμο των μικρών διαστάσεων όσο και στην περιοχή του απείρου μεγάλου. Πολλά φαινόμενα στο πεδίο της αστροφυσικής ερμηνεύονται με αυτήν την θεωρία.

Προφανώς η σχετικότητα και οι ιδέες της έρχονται σε αντιπαράθεση με την κοινή ανθρώπινη λογική. Η σχετικότητα του ταυτόχρονου , το πεπερασμένο όριο της ταχύτητας του φωτός, η έννοια του χωροχρόνου παραμένουν ιδέες πέραν του ορίου που ο κοινός άνθρωπος νους μπορεί να αντιληφθεί. Το δίδαγμα που μας κομίζει η σχετικότητα είναι ότι οι ανθρώπινες αντιλήψεις δεν είναι επαρκούν για την περιγραφή του κόσμου.

Τέλος, η θεωρία της σχετικότητας επηρέασε καθοριστικά την πορεία της φιλοσοφίας των επιστημών. Με την διατύπωση της θεωρίας της σχετικότητας κλονίζεται η καθιερωμένη πεποίθηση για την πρόοδο της επιστήμης που σύμφωνα μ' αυτήν οι νέες θεωρίες προκύπτουν από την αδυναμία των παλαιότερων θεωριών να ερμηνεύσουν πειραματικά δεδομένα. «Πλέον οι ιστορικοί της επιστήμης συνειδητοποιούν ότι τα κίνητρα των επιστημόνων για τη

διατύπωση μιας νέας θεωρίας μπορεί να επηρεάζονται από τις φιλοσοφικές τους αναζητήσεις και τους ιδεολογικούς τους προσανατολισμούς» (Θ. Αραμπατζής, Κ. Γαβρόγλου, 2006).

Βιβλιογραφία

- Bertozzi, W. (1964). Speed and Kinetic Energy of Relativistic electrons . Am. J. Phys. 32,551 (1964).
- Einstein, A. (1905). On the Electrodynamics of Moving bodies, *Annalen der Physik*, 17, 891-921.
- Feynman, R. (2009). *Οι διαλέξεις φυσικής του Feynman- Μηχανική –Ακτινοβολία-θερμότητα.* (Επι. μτφ. Ν. Βλάχος , Ν. Ηργκές , Α. Κεχαγιάς, Ν. Μάργαρης, Α. Πέτκου, μτφ. Ε. Κότσιαλος). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα.
- Ford, K.W. (1980). Κλασσική και σύγχρονη φυσική Τόμος Τρίτος.(μτφ Α .Θεωδόρου & Γ.Θεοδώρου). Αθήνα: Γ. Πνευματικού.
- French, A.P.(1968). *Special Relativity.* New York : W.W.Norton and Co.
- Hafele, J.C and Keating, R. E . *Science. New Series.* 117, 166-168 (1972).
- Hartle, J. B. (2016). ΒΑΡΥΤΗΤΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ EINSTEIN, (μτφ. Α. Κεχαγιάς, Γ. Κουτσούμπας ,Γ.Μπόντζιος). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.
- Ives, E. H. & Stilwell, R.G.(1938). An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock, *Optical Society of America.*28,7(1938).
- Moiller, C.(1952). *The Theory of relativity.*OXFORD: Clarendon press.
- Resnick, R.(1968). *Introduction to special Relativity.* John Wiley and Sons Ltd.
- Rindler, W. (2006). *Relativity SPECIAL,GENERAL,AND COSMOLOGICAL* (second edition). New York : Oxford University Press.
- Serway, A.R. & Moses, J.C. & Moyer, A.C.(2011). *Σύγχρονη Φυσική* (μτφ. Γ. Ζουπάνος, Ε. Λιαροκάκης, Σ. Παπαδόπουλος, Κ. Ράπτης). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (έτος έκδοσης πρωτότυπου 1989).
- Αραμπατζής, Θ. & Γαβρόγλου, Κ. (2006). *Ο Αϊνστάιν και η σχετικότητα. Ιστορικές μελέτες.* Ηράκλειο : Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Ρίζος, Α.Ι. (2018), Εισαγωγή των μαθητών στη δισδιάστατη Γεωμετρία Minkowski μέσω διδακτικών σεναρίων & νοητικών πειραμάτων , Διδακτορική διατριβή, Σχολή θετικών επιστημών τμήμα μαθηματικών. Πάτρα : 2018.

Χριστοδουλίδης, Κ. (2014). Η ειδική Θεωρία της σχετικότητας και οι εφαρμογές της. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.

ΔΙΑΔΥΚΤΙΟ

Τομαράς, Ν. Θ. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ. Αναρτήθηκε από :

https://ph202.edu.physics.uoc.gr/files/relativity_2011.pdf

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.