



Σχολή Θετικών Επιστημών
Μεταπτυχιακές Σπουδές Στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

**Αναπτύγματα Χαμηλών Συχνοτήτων Στη Σκέδαση Ακουστικών
Κυμάτων Από Ομαλό Σκεδαστή**

Low -Frequency Expansions In Acoustic Waves Scattering By A Smooth Scatterer

Χριστίνα Τσιγδινού

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Α. Τσίτσας

Πάτρα , Σεπτέμβριος 2024



Αναπτύγματα Χαμηλών Συχνοτήτων Στη Σκέδαση Ακουστικών
Κυμάτων Από Ομαλό Σκεδαστή

Χριστίνα Τσιγδινού

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής :

Νικόλαος Λ. Τσίτσας
Καθηγητής ΑΠΘ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Καραχάλιος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2024

Σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 και τα άρθρα 2, 4, 6 παράγραφος 3 του Ν. 1256/1982, δηλώνω ρητά πως η παρούσα διπλωματική εργασία έχει διεκπεραιωθεί με δική μου προσπάθεια και αποτελεί προϊόν προσωπικής μου ιδιοκτησίας, μη προσβάλλοντας πνευματικά δικαιώματα τρίτων. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης εκχωρώ στο ΕΑΠ την άδεια χρήσης αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημοσίου δανεισμού σε ηλεκτρονική μορφή για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας.

Ευχαριστίες

- Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Νικόλαο Τσίτσα για την καθοδήγηση, τη στήριξη και την υπομονή που επέδειξε εις το πρόσωπο μου.
Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ για τις εκπαιδευτικές γνώσεις που μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας .
- Θέλω επίσης να ευχαριστήσω και τον συνεπιβλέποντα καθηγητή κ. Νικόλαο Καραχάλιο για το σημαντικό ρόλο που είχε για τη διεκπεραίωση της εργασίας μου και ακόμα ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους καθηγητές του προγράμματος σπουδών ΜΣΜ του ΕΑΠ για την άριστη συνεργασία και επικοινωνία που είχαμε οι οποίοι με βοήθησαν να εμπλουτίσω τις γνώσεις μου και να βελτιώσω την σχέση μου με τα Μαθηματικά.
- Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους φίλους μου για τη απέραντη στήριξη ,συμπαράσταση και ενθάρρυνση που μου παρείχαν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο και όλους όσους με βοήθησαν καθ' όλη την περίοδο των σπουδών μου.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια έχει παρουσιαστεί μεγάλη ανάπτυξη και εξέλιξη όσον αφορά στη μελέτη των προβλημάτων κυματικής διάδοσης και σκέδασης το οποίο είναι ως αποτέλεσμα σημαντικών εφαρμογών στην καθημερινή ζωή του ανθρώπου.

Στη φυσική και τα μαθηματικά, η θεωρία σκέδασης αποτελεί ένα θεωρητικό εργαλείο διερεύνησης του τρόπου με τον οποίο σκεδάζονται σωματίδια και κύματα. Η θεωρία σκέδασης έχει ευρύ φάσμα εφαρμογών, από τον τρόπο με τον οποίο αλληλοεπιδρούν μακροσκοπικά αντικείμενα όπως μπάλες του μπιλιάρδου μέχρι την σκέδαση ηλιακού φωτός από τα μόρια της ατμόσφαιρας (σκέδαση Rayleigh). Αυστηρότερα, η θεωρία σκέδασης ασχολείται με τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα διάφορα φαινόμενα σκέδασης.

Υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να αντιμετωπίσει κανείς ένα πρόβλημα σκέδασης ο ευθύς και ο αντίστροφος. Ο πρώτος τρόπος ασχολείται με τη μελέτη του τρόπου διανομής της ροής των σκεδαζόμενων κυμάτων στο χώρο γνωρίζοντας τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή. Ο δεύτερος τρόπος ασχολείται με τον καθορισμό των φυσικών χαρακτηριστικών του σκεδαστή π.χ. μέγεθος, εσωτερική δομή κτλ. βάσει του τρόπου με τον οποίο διανέμεται η ροή σκεδαζόμενων κυμάτων στο χώρο. Στην παρούσα διπλωματική θα δώσουμε βάρος συγκεκριμένα στο ευθύ πρόβλημα.

Σε γενικές γραμμές, το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ένα θεμελιώδες πρόβλημα στη φυσική και τα μαθηματικά, ειδικά στους τομείς της κβαντικής μηχανικής, της ηλεκτροδυναμικής, της γεωφυσικής και της οπτικής. το ευθύ πρόβλημα σκέδασης αφορά τον υπολογισμό του τρόπου με τον οποίο ένα κύμα όπως ένα ηχητικό, ηλεκτρομαγνητικό, ή σωματιδιακό κύμα διασπείρεται ή αλληλοεπιδρά όταν συναντά ένα εμπόδιο ή μια ανωμαλία στο μέσο διάδοσής του.

Κύμα και Διαταραχή: Το κύμα μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητικό, ακουστικό ή οποιασδήποτε άλλης μορφής. Η διαταραχή ή η ανωμαλία είναι το αντικείμενο ή η περιοχή που διαταράσσει την ομαλή διάδοση του κύματος.

Σκέδαση: Η σκέδαση αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο το κύμα αλλάζει κατεύθυνση, ενέργεια, φάση ή άλλες ιδιότητες εξαιτίας της αλληλεπίδρασής του με τη διαταραχή.

Ευθύ Πρόβλημα: Στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης, οι συνθήκες αρχικής κατάστασης του κύματος και η φύση της διαταραχής είναι γνωστές, και ο στόχος είναι να καθοριστεί η κατανομή του σκεδασμένου κύματος μετά την αλληλεπίδραση.

Εφαρμογές όπως:

- **Ιατρική Απεικόνιση:** Στην υπολογιστική τομογραφία, η σκέδαση των ακτινών Χ χρησιμοποιείται για τη δημιουργία εικόνων του εσωτερικού του σώματος.
- **Ραντάρ και Σόναρ :**σόναρ ,SONAR, είναι μια τεχνολογία που χρησιμοποιεί ηχητικά κύματα για την ανίχνευση και τον εντοπισμό αντικειμένων κάτω από την επιφάνεια του νερού, καθώς και για τη χαρτογράφηση του βυθού.
- **Κβαντική Μηχανική:** Στη σκέδαση σωματιδίων, όπως στην περίφημη διάσπαση των ηλεκτρονίων, η ανάλυση της σκέδασης παρέχει πληροφορίες για τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις.

Μαθηματική Περιγραφή:

Η μαθηματική ανάλυση του ευθέως προβλήματος σκέδασης συνήθως περιλαμβάνει τη λύση των εξισώσεων του Helmholtz ή των εξισώσεων Schrödinger, ανάλογα με το είδος του κύματος που εξετάζεται. Το πρόβλημα απαιτεί την εύρεση της λύσης αυτών των εξισώσεων υπό οριακές συνθήκες που καθορίζουν τη φύση της διαταραχής.

Ως αποτέλεσμα όλων των παραπάνω, το **ευθύ πρόβλημα σκέδασης** είναι κρίσιμης σημασίας για την κατανόηση της διάδοσης των κυμάτων σε διάφορα μέσα και έχει ευρύ φάσμα εφαρμογών στην τεχνολογία και την επιστήμη. Επιπλέον σημαντικό ρόλο θα παίξει και η **θεωρία χαμηλών συχνοτήτων** όπου είναι μια προσέγγιση στη μελέτη των κυμάτων, ειδικά στον τομέα της ακουστικής, της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και της σκέδασης κυμάτων. Η θεωρία αυτή εξετάζει τη συμπεριφορά των κυμάτων όταν οι συχνότητες τους είναι αρκετά χαμηλές σε σχέση με τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος ή του μέσου μέσα στο οποίο διαδίδονται. Στις χαμηλές συχνότητες, τα μήκη κύματος είναι πολύ μεγαλύτερα σε σύγκριση με τα χαρακτηριστικά μεγέθη (όπως το μέγεθος των εμποδίων ή το μέγεθος των πόρων σε ένα υλικό). Αυτό σημαίνει ότι τα κύματα «βλέπουν» τα εμπόδια σαν μικρές διαταραχές και συχνά τα διαπερνούν χωρίς σημαντική σκέδαση. Επιπλέον, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη διάδοση κυμάτων, όπως η εξίσωση Helmholtz, απλοποιούνται στις χαμηλές συχνότητες, καθώς οι χωρικές μεταβολές είναι μικρότερες. Αυτό επιτρέπει πιο απλές αναλυτικές λύσεις ή προσεγγιστικές μεθόδους. Στη θεωρία χαμηλών συχνοτήτων, το μέσο διάδοσης (π.χ., ένα υλικό ή ένα ρευστό) θεωρείται συνήθως ομοιογενές και συνεκτικό σε σχέση με το μήκος κύματος. Αυτό σημαίνει ότι οι λεπτομέρειες της δομής του μέσου έχουν μικρότερη επίδραση στη διάδοση του κύματος.

Συνεπώς η **θεωρία ακουστικής σκέδασης** εστιάζει στις μεταβολές που επιφέρει σε ένα κυματικό πεδίο, η ύπαρξη ενός εμποδίου (σκεδαστής), στο χώρο διάδοσής του. Στην περίπτωση που γνωρίζουμε το προσπίπτον κυματικό πεδίο και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή και αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο, λέμε ότι έχουμε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Επομένως, στη διπλωματική αυτή θα κάνουμε μία εισαγωγή στη **διάδοση ακουστικών κυμάτων** και θα μελετήσουμε κάποια βασικά **προβλήματα σκέδασης**. Τα προβλήματα σκέδασης προκύπτουν όταν ένα κύμα στέλνεται προς ένα εμπόδιο , τον σκεδαστή.

Στο 1^ο κεφάλαιο θα αναφερθούμε για τον σκοπό και τα προσδοκόμενα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής.

Στο 2^ο κεφάλαιο θα αναφέρουμε και θα κατασκευάσουμε την εξίσωση Helmholtz όπως και κάποιες βασικές λύσεις της.

Στο 3^ο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με προβλήματα σκέδασης .Αρχικά θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή καθώς θα μιλήσουμε και για τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, η οποία αποτελεί μία συνθήκη στο άπειρο ,δηλαδή εξασφαλίζει την εξασθένηση του κύματος καθώς αυτό απομακρύνεται από τον σκεδαστή. Επίσης, διατυπώνονται τα θεωρήματα ολοκληρωτικής αναπαράστασης για τις εσωτερικές και εξωτερικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz.

Στο 4^ο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη θεωρία χαμηλών συχνοτήτων ,η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης και αφορά προβλήματα μεγάλου μήκους κύματος. Με βάση αυτή τη θεωρία μετασχηματίζουμε τα προβλήματα σε αναπτύγματα δυναμοσειρών. Επομένως με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα πρόβλημα θεωρίας δυναμικού ,όπου μπορούν να λυθούν σε σφαιρικά ή ελλειψοειδή συστήματα αξόνων.

Τέλος στο 5^ο κεφάλαιο θα μιλήσουμε και θα αναλύσουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης για σφαιρικούς σκεδαστές.

Λέξεις-κλειδιά:

Ακουστικά κύματα, Σκέδαση, Ακουστική, Ομαλοί Σκεδαστές ,Ευθύ πρόβλημα Σκέδασης , Χαμηλές Συχνότητες , Ομαλός Σκεδαστής ,Συνθήκες ακτινοβολίας , Εξίσωση Helmholtz, Ολοκληρωτικές Αναπαραστάσεις ,Θεωρία Δυναμικού .

Abstract

In recent years, there has been significant growth and advancement in the study of wave propagation and scattering problems, driven by important applications in everyday human life. In physics and mathematics, scattering theory serves as a theoretical tool for investigating how particles and waves are scattered. Scattering theory has a wide range of applications, from the interaction of macroscopic objects like billiard balls to the scattering of sunlight by atmospheric molecules (Rayleigh scattering). More rigorously, scattering theory deals with the study of differential equations that govern various scattering phenomena.

There are two different approaches to addressing a scattering problem: the direct and the inverse problems. The first approach involves studying the distribution of the flow of scattered waves in space, given the physical characteristics of the scatterer. The second approach focuses on determining the physical characteristics of the scatterer, such as its size or internal structure, based on the distribution of the scattered wave flow in space. In this thesis, we will specifically focus on the direct problem.

Generally, the direct scattering problem is a fundamental issue in physics and mathematics, particularly in the fields of quantum mechanics, electrodynamics, geophysics, and optics. The direct scattering problem involves calculating how a wave, such as an acoustic, electromagnetic, or particle wave, disperses or interacts when it encounters an obstacle or an irregularity in its propagation medium.

Wave and disturbance: The wave can be electromagnetic, acoustic, or any other form. The disturbance or irregularity is the object or region that disrupts the smooth propagation of the wave.

Scattering: Scattering refers to how the wave changes direction, energy, phase, or other properties due to its interaction with the disturbance.

Direct Problem: In the direct scattering problem, the initial conditions of the wave and the nature of the disturbance are known, and the goal is to determine the distribution of the scattered wave after the interaction.

Applications:

Medical Imaging: In computed tomography (CT), X-ray scattering is used to create images of the body's interior.

Radar and Sonar: SONAR is a technology that uses sound waves to detect and locate objects underwater and map the seafloor.

Quantum Mechanics: In particle scattering, such as the famous electron scattering experiments, scattering analysis provides insights into fundamental interactions.

Mathematical Description: The mathematical analysis of the direct scattering problem typically involves solving Helmholtz or Schrödinger equations, depending on the type of wave under consideration. The problem requires finding the solution to these equations under boundary conditions that define the nature of the disturbance.

As a result of all the above, the direct scattering problem is of critical importance for understanding wave propagation in various media and has a wide range of applications in technology and science. Additionally, the low-frequency theory plays a significant role. This theory is an approach to studying waves, particularly in acoustics, electromagnetic theory, and wave scattering. It examines wave behavior when their frequencies are relatively low compared to the characteristic sizes of the system or medium through which they propagate. At low frequencies, wavelengths are much larger compared to characteristic sizes (such as the size of obstacles or pores in a material). This means that waves "see" obstacles as small perturbations and often pass through them without significant scattering. Moreover, the equations describing wave propagation, such as the Helmholtz equation, are simplified at low frequencies since spatial variations are smaller. This allows for simpler analytical solutions or approximate methods. In low-frequency theory, the propagation medium (e.g., a material or fluid) is generally considered homogeneous and coherent relative to the

wavelength. This means that the details of the medium's structure have less impact on wave propagation.

Thus, acoustic scattering theory focuses on the changes that the presence of an obstacle (scatterer) in the propagation space causes in a wave field. When the incident wave field and the physical properties of the scatterer are known, and the scattered field is sought, we have a direct scattering problem. Therefore, in this thesis, we will introduce acoustic wave propagation and study some basic scattering problems.

Scattering problems arise when a wave is directed toward an obstacle, the scatterer.

Chapter 1 will address the purpose and expected outcomes of this thesis.

Chapter 2 will discuss and derive the Helmholtz equation. We will also mention some of its basic solutions.

Chapter 3 will focus on scattering problems. Initially, we will present boundary conditions in detail, which depend on the physical properties of the scatterer, as well as the Sommerfeld radiation condition, which is a condition at infinity that ensures the wave's attenuation as it moves away from the scatterer. Additionally, the integral representation theorems for the interior and exterior solutions of the Helmholtz equation will be formulated.

Chapter 4 will present low-frequency theory, which aids in solving scattering problems and concerns problems of large wavelengths. Based on this theory, we transform problems into power series expansions. This approach results in a potential theory problem, which can be solved in spherical or ellipsoidal coordinate systems.

Finally, in Chapter 5, we will discuss and analyze the direct scattering problem for spherical scatterers.

Keywords:

Acoustic waves, Scattering, Acoustics, Smooth Scatterers, Direct Scattering Problem, Low Frequencies, Smooth Scatterer, Radiation Conditions, Helmholtz Equation, Integral Representations, Potential Theory.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	4
Περίληψη.....	5
Abstract.....	9
Περιεχόμενα.....	11
Κατάλογος Εικόνων/Σχημάτων.....	15
1.Εισαγωγή.....	16
1.1 Σκοπός.....	16
1.2 Προσδοκώμενα αποτελέσματα.....	18
2. Η εξίσωση Helmholtz.....	19
2.1Κυματικά πεδία.....	20
2.2 Αρμονική χρονική εξάρτηση.....	26
2.3 Βασικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz.....	28
3. Προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.....	31
3.1 Συνοριακές συνθήκες.....	32
3.2 Συνθήκες ακτινοβολίας.....	36
3.3 Βασικά Προβλήματα Σκέδασης.....	37
3.4 Ολοκληρωτικές Αναπαραστάσεις.....	40
4. Θεωρία χαμηλών συχνοτήτων.....	46
4.1 Ανάπτυγμα σε χαμηλές συχνότητες.....	46
4.2 Προβλήματα θεωρίας Δυναμικού.....	51
5. Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης για σφαιρικούς σκεδαστές	55
5.1 Το πεδίο σκέδασης ως λύση ενός εξωτερικού προβλήματος οριακών τιμών.....	58
5.2 Το θεώρημα επέκτασης στο μακρινό πεδίο.....	60
5.3 Χαμηλές συχνότητες επεκτάσεων.....	61

5.4 Από τους συντελεστές (AW) στους συντελεστές (LF).....	62
5.4.1 Γενική μορφή των συντελεστών $F_m(\hat{r})$ της ανάπτυξης (AW).....	63
5.4.2 Εισαγωγή των συντελεστών $F_m(\hat{r})$	64
5.4.3 Συντελεστές χαμηλής συχνότητας (LF).....	66
5.5 Υλοποίηση:Οι συντελεστές σκέδασης χαμηλής συχνότητας (LF) για μη διαπερατούς σφαιρικούς σκεδαστές	67
5.5.1 Η περίπτωση της μαλακής σφαίρας	67
5.5.2 Η περίπτωση της σκληρής σφαίρας.....	70
5.5.3 Η περίπτωση της αντιστατικής σφαίρας.....	72
5.6 Οι πρώτοι έξι συντελεστές σκέδασης (LF) u_n^+	77
6.Σύνοψη -Συμπεράσματα.....	82
Βιβλιογραφία.....	84

Κατάλογος εικόνων /Σχημάτων:

Εικόνα 1:Επίπεδο κύμα που κινείται κατά μήκος της διεύθυνσης του \hat{d}	29
Εικόνα 2:Διάδοση σφαιρικού κύματος.....	30
Εικόνα 3:Ακουστικά μαλακός σκεδαστής -Συνθήκη Dirichlet.....	33
Εικόνα 4:Ακουστικά σκληρός σκεδαστής -Συνθήκη Neumann.....	34
Εικόνα 5:Ανθεκτικός Σκεδαστής -Συνθήκη Robin.....	34
Εικόνα 6:Διαπερατός Σκεδαστής.....	35
Εικόνα 7:Εσωτερικό Πρόβλημα.....	41
Εικόνα 8:Εξωτερικό Πρόβλημα.....	43

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σκοπός

Σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι η αναλυτική περιγραφή των βασικών εννοιών που εμφανίζονται στα προβλήματα σκέδασης και διάδοσης ακουστικών κυμάτων , καθώς επίσης και η διατύπωση και η μελέτη των μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν τα προβλήματα αυτά.

Τα σκεδασμένα κύματα είναι κύματα που έχουν υποστεί μια αλλαγή στη διεύθυνση διάδοσής τους εξαιτίας της αλληλεπίδρασης με κάποιο εμπόδιο ή σωματίδιο. Ο σκοπός της μελέτης και της κατανόησης των σκεδασμένων κυμάτων έχει εφαρμογές σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Ας αναλύσουμε μερικούς από τους βασικούς σκοπούς:

1. Διερεύνηση της δομής της ύλης

- Φυσική και Χημεία: Η σκέδαση κυμάτων, όπως οι ακτίνες X, τα νετρόνια ή τα ηλεκτρόνια, χρησιμοποιείται για την ανάλυση της κρυσταλλικής δομής των υλικών. Η τεχνική της κρυσταλλογραφίας ακτινών X, για παράδειγμα, βασίζεται στην ανάλυση των σκεδασμένων ακτινών για να αποκαλύψει την ατομική διάταξη ενός κρυστάλλου.
- Βιολογία: Στη μελέτη των βιομορίων, η σκέδαση ακτινών X βοηθάει στην κατανόηση της τρισδιάστατης δομής των πρωτεϊνών και των νουκλεϊκών οξέων.

2. Τηλεπικοινωνίες και ανίχνευση αντικειμένων

- Ραντάρ: Συστήματα ραντάρ χρησιμοποιούν σκεδασμένα ραδιοκύματα για την ανίχνευση και τον προσδιορισμό της απόστασης, της ταχύτητας και άλλων χαρακτηριστικών αντικειμένων, όπως αεροσκάφη και πλοία.
- Σόναρ: Παρόμοια, το σόναρ χρησιμοποιεί σκεδασμένα ηχητικά κύματα για την ανίχνευση αντικειμένων κάτω από την επιφάνεια του νερού.

3. Ιατρική και Βιοϊατρική

- Ιατρική Απεικόνιση: Συσκευές όπως το υπερηχογράφημα βασίζονται στη σκέδαση των υπερηχητικών κυμάτων από τους ιστούς του σώματος για τη δημιουργία εικόνων.
- Θεραπεία και Διάγνωση: Τα σκεδασμένα κύματα χρησιμοποιούνται επίσης στην τεχνολογία ακτινοθεραπείας για τον εντοπισμό και τη θεραπεία όγκων.

4. Διάδοση και Σκεδασμός στο Περιβάλλον

- Μετεωρολογία: Η ανάλυση των σκεδασμένων ραδιοκυμάτων από σταγονίδια νερού στην ατμόσφαιρα χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη του καιρού και την ανίχνευση καταιγίδων.
- Αστρονομία: Οι αστρονόμοι μελετούν τη σκέδαση του φωτός από σωματίδια στην κοσμική σκόνη για να κατανοήσουν τη δομή του Σύμπαντος.

5. Μελέτη των Ηχητικών Κυμάτων

- Ακουστική: Η σκέδαση ηχητικών κυμάτων χρησιμοποιείται για τον σχεδιασμό και την κατασκευή ακουστικών συστημάτων, καθώς και για τη μελέτη της συμπεριφοράς του ήχου σε διάφορους χώρους (π.χ. σε αίθουσες συναυλιών).

Συνολικά, η σκέδαση κυμάτων παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για την αλληλεπίδραση των κυμάτων με την ύλη, και η μελέτη της είναι κρίσιμη σε πολλές επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές.

1.2 Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Κατά την ολοκλήρωση της παρούσης διπλωματικής εργασίας θα είμαστε σε θέση αρχικά να μπορούμε να κατασκευάζουμε την εξίσωση Helmholtz από τις εξισώσεις συνέχειας και Euler του ρευστού. Έπειτα να καταφέρνουμε να αντιμετωπίζουμε τα βασικά προβλήματα ακουστικής σκέδασης σε όλη την έκταση τους, από την καλή τοποθέτηση μέχρι την προσεγγιστική επίλυση τους.

Τέλος, θα είμαστε ικανοί να κατασκευάζουμε μαθηματικά μοντέλα όπου θα αντιστοιχούν σε σύνθετα προβλήματα ακουστικής σκέδασης και θα αποδεικνύουμε τα βασικά θεωρήματα σκέδασης.

Η μαθηματική ανάλυση των σκεδασμένων κυμάτων επικεντρώνεται στη μοντελοποίηση, την επίλυση και την ερμηνεία των εξισώσεων που περιγράφουν τη διάδοση και τη σκέδαση κυμάτων σε διάφορα μέσα. Τα προσδοκώμενα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης περιλαμβάνουν:

Διαφορικές Εξισώσεις: Η βασική μαθηματική πρόκληση στη σκέδαση κυμάτων είναι η λύση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την κυματική διάδοση, όπως η εξίσωση Helmholtz (για αρμονικά κύματα) ή η εξίσωση Schrödinger (για κβαντικά κύματα). Τα προσδοκώμενα αποτελέσματα είναι οι ακριβείς ή προσεγγιστικές λύσεις αυτών των εξισώσεων.

Αριθμητικές Μέθοδοι: Σε πολλές περιπτώσεις, οι εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά και απαιτείται η χρήση αριθμητικών μεθόδων, όπως η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) ή η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (FDM). Τα προσδοκώμενα αποτελέσματα εδώ είναι η ανάπτυξη σταθερών και ακριβών αριθμητικών μεθόδων.

2.Η ΕΞΙΣΩΣΗ HELMHOLTZ

Η εξίσωση Helmholtz είναι μια θεμελιώδης μερική διαφορική εξίσωση που προκύπτει σε πολλά πεδία της φυσικής και της μηχανικής, όπως η ακουστική, η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η σκέδαση κυμάτων, και η κβαντική μηχανική.

Η γενική μορφή της εξίσωσης Helmholtz είναι:

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

όπου:

∇^2 είναι ο Λαπλασιανός τελεστής.

ψ είναι η συνάρτηση πεδίου, η οποία μπορεί να αντιπροσωπεύει ένα ακουστικό, ηλεκτρομαγνητικό ή άλλο είδος κύματος.

k είναι ο αριθμός κύματος, που σχετίζεται με το μήκος κύματος και τη συχνότητα του κύματος και δίνεται από τη σχέση $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, όπου λ είναι το μήκος κύματος.

Σημασία και Εφαρμογές

Ακουστική: Στην ακουστική, η εξίσωση Helmholtz χρησιμοποιείται για να περιγράψει την κατανομή της πίεσης ή της έντασης του ήχου σε ένα χώρο, όπως σε μια αίθουσα συναυλιών ή ένα δωμάτιο.

Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία: Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η εξίσωση Helmholtz προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell όταν μελετάμε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε ελεύθερο χώρο ή μέσα από υλικά.

Κβαντική Μηχανική: Στην κβαντική μηχανική, η εξίσωση Helmholtz μπορεί να προκύψει ως προσεγγιστική μορφή της εξίσωσης Schrödinger σε ειδικές περιπτώσεις, όπως στη μελέτη των κυματικών συναρτήσεων.

Σκέδαση Κυμάτων: Στη θεωρία σκέδασης, η εξίσωση Helmholtz χρησιμοποιείται για την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο τα κύματα (π.χ., ακουστικά ή ηλεκτρομαγνητικά) σκεδάζονται από εμπόδια ή ανωμαλίες στο μέσο διάδοσης.

Λύσεις της Εξίσωσης

Οι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz εξαρτώνται από τα όρια και τις συνθήκες του προβλήματος. Κάποιες τυπικές μορφές λύσεων περιλαμβάνουν τα επίπεδα κύματα δηλαδή όταν η λύση έχει τη μορφή $\psi(x)=Ae^{i(kx-wt)}$ όπου A είναι το πλάτος και ω η συχνότητα και τα σφαιρικά κύματα όπου η λύση μπορεί να εκφραστεί μέσω σφαιρικών αρμονικών όπου και θα δούμε παρακάτω στην παρούσα διπλωματική.

Οριακές Συνθήκες

Η επίλυση της εξίσωσης Helmholtz συχνά απαιτεί την επιβολή συγκεκριμένων οριακών συνθηκών, όπως είναι οι **συνθήκες Sommerfeld** οι οποίες χρησιμοποιούνται για να διασφαλίσουν την ορθή συμπεριφορά των λύσεων στο άπειρο, ειδικά στα προβλήματα σκέδασης. Επομένως, η εξίσωση Helmholtz αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στην ανάλυση κυματικών φαινομένων και είναι σημαντική σε πολλές τεχνολογικές και επιστημονικές εφαρμογές την οποία και θα αναλύσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

2.1 Κυματικά πεδία

Η θεωρία των κυματικών πεδίων ασχολείται με την περιγραφή και την ανάλυση των κυμάτων που διαδίδονται σε διάφορα μέσα, όπως υγρά, στερεά, αέρια ή ακόμα και το κενό. Τα κυματικά πεδία μπορούν να αφορούν διάφορες φυσικές ποσότητες, όπως πίεση, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, θερμοκρασία ή ακόμη και κυματικές συναρτήσεις στην κβαντική μηχανική.

Η εξίσωση συνέχειας και η εξίσωση Euler είναι δύο θεμελιώδεις εξισώσεις στη ρευστοδυναμική που συνδέονται άμεσα με την περιγραφή των κυματικών πεδίων, ειδικά στα ρευστά όπως τα αέρια και τα υγρά. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τη συμπεριφορά των ρευστών και την κίνηση των σωματιδίων του ρευστού, και αποτελούν βασικά εργαλεία για την ανάλυση των κυμάτων σε αυτά τα μέσα.

Εξίσωση Συνέχειας

Η εξίσωση συνέχειας διασφαλίζει ότι η μάζα σε ένα ρευστό δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται, δηλαδή διατηρείται. Αν έχουμε ένα μικρό στοιχείο όγκου V μέσα σε

ένα ρευστό, η μάζα που περιέχεται σε αυτό το στοιχείο όγκου είναι $m = \rho V$ όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού.

Η εξίσωση συνέχειας εκφράζει τη διατήρηση της μάζας σε ένα ρευστό και μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

όπου:

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού.

\mathbf{v} είναι το διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού.

∇ είναι η απόκλιση της ροής της πυκνότητας μάζας.

Σύνδεση με το Κυματικό Πεδίο:

Η εξίσωση συνέχειας χρησιμοποιείται για την περιγραφή της χρονικής και χωρικής μεταβολής της πυκνότητας σε ένα ρευστό, καθώς διαδίδεται ένα κύμα. Όταν ένα ακουστικό κύμα περνά μέσα από ένα ρευστό, προκαλεί μικρές διακυμάνσεις στην πίεση και την πυκνότητα του ρευστού. Η εξίσωση συνέχειας είναι απαραίτητη για την περιγραφή αυτών των διακυμάνσεων, οι οποίες στη συνέχεια επηρεάζουν την ταχύτητα και τη διάδοση του κύματος στο ρευστό.

Επομένως πάμε να αναζητήσουμε την αντίστοιχη εξίσωση για ένα μέσο στον \mathbb{R}^3 .

Έστω μία θέση $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ τη χρονική στιγμή t , όπου η ταχύτητα του ρευστού σε αυτό το σημείο είναι $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ και η πυκνότητα του $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$.

Τότε η ολική μάζα του ρευστού δίνεται από τη σχέση:

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

Όπου Ω είναι ένα συνεκτικό χωρίο και S η επιφάνεια γύρω του ώστε $S = \partial\Omega$.

Έστω ότι η μάζα μεταβάλλεται καθώς κινείται το ρευστό κατά μήκος της επιφάνειας S , καθώς το Ω παραμένει σταθερό.

Να σημειώσουμε ότι για την ολική μεταφορά της μάζας διαμέσου της στοιχειώδους επιφάνειας ds σε χρόνο dt όπου περιέχεται σε έναν κύλινδρο όγκου ισχύει ότι:

$$(\mathbf{v} dt) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

Όπου \hat{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S διάνυσμα με φορά προς τον εξωτερικό χώρο του Ω και ds η στοιχειώδης επιφάνεια μέσω της οποίας μεταφέρεται η μάζα. Επομένως, η ολική μάζα που θα μεταφερθεί είναι:

$$-\partial t \int_S \rho v \cdot \hat{n} ds$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του \hat{n} .

Από την αρχή διατήρησης της μάζας προκύπτει:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho v \cdot \hat{n} ds$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το θεώρημα απόκλισης Gauss στο επιφανειακό ολοκλήρωμα τότε προκύπτει:

$$\int_{\Omega} \nabla f dx = \int_{\partial \Omega} f \cdot \hat{n} dt$$

Και έτσι έχουμε :

$$- \int_S \rho v \cdot \hat{n} ds = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho v) dV$$

Όπου έπεται ότι:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho v) dV$$

Και επειδή ισχύει για ένα αυθαίρετο χωρίο τότε έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

η οποία σχέση εκφράζει την **εξίσωση συνέχειας** για την ροή των ρευστών στον \mathbb{R}^3 .

Εξίσωση Euler

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την εξίσωση Euler η οποία είναι μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της δυναμικής των ρευστών και περιγράφει τη διατήρηση της ορμής για ένα ιδανικό ρευστό (χωρίς ιξώδες).

Έστω $p = p(\mathbf{r}, t)$ η πίεση του ρευστού και

$\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ όπου είναι η θέση του την χρονική στιγμή t . Οι δυνάμεις που υπάρχουν σε αυτό μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες :

- Στις δυνάμεις πεδίου f , όπως η βαρύτητα, οι οποίες ασκούνται κατά μήκος του Ω σε όλα τα σωματίδια και είναι ίσες με:

$$F_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho f dV$$

- Στις επιφανειακές δυνάμεις οι οποίες προκαλούνται από την αλληλεπίδραση του ρευστού με την επιφάνεια S . Έτσι η ολική δύναμη που δρά στο Ω είναι:

$$F_S = \int_S -\rho \hat{n} ds$$

Όπου \hat{n} το κάθετο διάνυσμα που έχει φορά προς το εξωτερικό του Ω .

Συνεπώς, η συνολική δύναμη F που ασκείται στο ρευστό είναι:

$$F = F_{\Omega} + F_S = \int_{\Omega} \rho f dV - \int_S \rho \hat{n} ds.$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας εξηγεί ότι η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα ρευστό ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του. Άρα αφού η επιτάχυνση των σωματιδίων του ρευστού στο Ω είναι $\frac{dv}{dt}$ τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{dv}{dt} dV = \int_{\Omega} \rho f dV - \int_S \rho \hat{n} ds$$

Έπειτα εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{dv}{dt} dV = \int_{\Omega} \rho f dV - \int_S \nabla p dV$$

ή
$$\int_{\Omega} \rho \frac{dv}{dt} dV = \int_{\Omega} (\rho f - \nabla p) dV$$

Όμως ξέρουμε ότι το χωρίο είναι αυθαίρετο, άρα

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho f - \nabla p \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = f$$

Επίσης ισχύει για την επιτάχυνση με περιγραφή Euler στις τρεις διαστάσεις το εξής:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$$

Επομένως, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f$$

η οποία αποτελεί την **εξίσωση Euler**

Όπου:

v είναι το διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού.

P είναι η πίεση στο ρευστό.

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού.

F είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων (π.χ., βαρυτική δύναμη).

Σύνδεση με το Κυματικό Πεδίο:

Η εξίσωση Euler περιγράφει την κίνηση του ρευστού υπό την επίδραση των δυνάμεων πίεσης και άλλων εξωτερικών δυνάμεων. Όταν ένα κύμα διαδίδεται σε ένα ρευστό, προκαλεί τοπικές αλλαγές στην πίεση και, κατά συνέπεια, στην ταχύτητα του ρευστού. Η εξίσωση Euler περιγράφει πώς αυτές οι αλλαγές στην πίεση οδηγούν σε επιταχύνσεις και μεταβολές στην ταχύτητα του ρευστού, οι οποίες επηρεάζουν την διάδοση του κύματος.

Συμπέρασμα

Η εξίσωση συνέχειας και η εξίσωση Euler παίζουν κρίσιμο ρόλο στη θεμελιώδη κατανόηση των κυματικών πεδίων σε ρευστά, ιδιαίτερα στην περιγραφή των ακουστικών κυμάτων. Συνδυάζοντας αυτές τις εξισώσεις, οι φυσικοί και μηχανικοί μπορούν να περιγράψουν πώς διαδίδονται τα κύματα σε ένα μέσο, πώς επηρεάζονται από τις τοπικές μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας, και πώς αυτές οι αλλαγές σχετίζονται με την κίνηση του ρευστού.

Κυματική Εξίσωση:

Στην ακουστική, οι εξισώσεις συνέχειας και Euler συνδυάζονται για να παράγουν την εξίσωση κυμάτων για το ακουστικό πεδίο. Ο συνδυασμός αυτών των δύο εξισώσεων, υπό τις συνθήκες της ιδανικής ρευστοδυναμικής, μπορεί να οδηγήσει στην ακουστική εξίσωση κυμάτων, η οποία περιγράφει την πίεση ως συνάρτηση του χώρου και του χρόνου σε ένα μέσο. Αρχικά θα θεωρήσουμε την καταστατική εξίσωση:

$$p = f(\rho, S)$$

Όπου η f είναι συνάρτηση της ειδικής εντροπίας S και της πυκνότητας ρ της μάζας του υλικού. Η εντροπία είναι ένα θεμελιώδες μέγεθος στη φυσική και τη θερμοδυναμική, που σχετίζεται με τη διαταραχή ή την αταξία ενός συστήματος. Είναι η δυνατότητα ενός συστήματος να μην παράγει μηχανικό έργο. Η ειδική εντροπία δίνεται από την εντροπία διαιρούμενη από τη μάζα:

$$S = \frac{s}{m}$$

Επομένως γραμμικοποιώντας την καταστατική εξίσωση και τις εξισώσεις συνέχειας και Euler που είδαμε προηγουμένως τότε έχουμε:

$$P_t + \frac{1}{\gamma} \nabla \cdot V = 0 \quad (1)$$

Και
$$\rho V_t + \nabla P - \delta \nabla (\nabla \cdot V) = 0 \quad (2)$$

Όπου:

$P(\mathbf{r}, t)$ είναι η υπερπίεση δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στην στιγμιαία πίεση και στην πίεση ηρεμίας,

$V(\mathbf{r}, t)$ είναι η ταχύτητα,

γ εκφράζει τη μέση συμπίεστικότητα ,δηλαδή τη μείωση του όγκου ανά μονάδα αύξησης της επιφανειακής πίεσης,

δ ο συντελεστής απόσβεσης ,δηλαδή ο βαθμός μεταβολής της μάζας ανά μονάδα μήκους.

Ο συντελεστής απόσβεσης εκφράζει την απώλεια ενέργειας ενός ταλαντευόμενου συστήματος ή ενός κύματος λόγω διάφορων φαινομένων, όπως τριβή, αντίσταση, ή εξασθένηση κατά τη διάδοση. Αν αυτός είναι μηδέν τότε στο μέσο δεν υπάρχει εσωτερική τριβή και ονομάζεται μη απορροφούν υλικό.

Εάν τώρα λύσουμε τη σχέση (1) ως προς $\nabla \cdot V$,θα έχουμε $\nabla \cdot V = -\gamma P_t$

Και με αντικατάσταση στην (2) προκύπτει ότι :

$$V_t = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\delta \gamma}{\rho} \nabla P_t \quad (3)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζοντας την (1) και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$P_{tt} = \frac{1}{\gamma \rho} \Delta P + \frac{\delta}{\rho} \Delta P_t \quad (4)$$

Όπου η παραπάνω σχέση αποτελεί την εξίσωση της διάδοσης ενός ακουστικού κύματος στον χρόνο. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η κίνηση του ρευστού είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\nabla \times V = 0$ τότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$V_t = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\delta}{\rho} \Delta V$$

Την οποία παραγωγίζοντας την και αντικαθιστώντας το P_t έχουμε:

$$V_{tt} = \frac{1}{\gamma \rho} \Delta V - \frac{\delta}{\rho} \Delta V_t \quad (5)$$

Από τη σχέση $\nabla \times V = 0$ προκύπτει επίσης ότι υπάρχει ένα βαθμωτό δυναμικό $F(\mathbf{r}, t)$ της ταχύτητας με

$$V = \nabla F \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) έχουμε:

$$\nabla F_{tt} = \nabla \left(\frac{1}{\gamma \rho} \Delta F + \frac{\delta}{\rho} F \right)$$

Από την οποία προκύπτει η παρακάτω: $F_{tt} = \left(\frac{1}{\gamma \rho} \Delta F + \frac{\delta}{\rho} F \right)$ (7)

Αν το μέσο διάδοσης είναι απορροφούν , δηλαδή $\delta=0$,τότε οι εξισώσεις , (4),(5), και (7) ανάγονται στις παρακάτω:

$$P_{tt} = \frac{1}{\gamma \rho} \Delta P$$

$$V_{tt} = \frac{1}{\gamma\rho} \Delta V$$

$$F_{tt} = \frac{1}{\gamma\rho} \Delta F$$

Άρα η υπερπίεση, η ταχύτητα και το δυναμικό ταχύτητας είναι λύσεις της **κυματικής εξίσωσης**:

$$w_{tt} = \frac{1}{c^2} \Delta w$$

με φασική ταχύτητα $c = \frac{1}{\sqrt{\gamma\rho}}$

Συμπερασματικά οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης ονομάζονται **κύματα**. Επομένως, από φυσική άποψη κατά τη διάδοση ενός κύματος μεταφέρεται ενέργεια χωρίς μεταφορά μάζας.

2.2 Αρμονική χρονική εξάρτηση

Η εξίσωση Helmholtz είναι μια μερική διαφορική εξίσωση που χρησιμοποιείται ευρέως στη φυσική και τη μηχανική, ιδιαίτερα στα πεδία της ακουστικής, της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και της θεωρίας κυμάτων. Είναι μία από τις θεμελιώδεις μερικές διαφορικές εξισώσεις στην μελέτη των ακουστικών κυμάτων με αρμονική χρονική εξάρτηση. Χρησιμοποιείται σε προβλήματα σκέδασης τα οποία θα δούμε παρακάτω.

Για να καταλήξουμε στην εξίσωση Helmholtz θα πρέπει να απαλείψουμε τον χρόνο t από την κυματική εξίσωση. Θεωρούμε ακουστικά κύματα στα οποία η υπερπίεση $P(r,t)$ έχει αρμονική χρονική εξάρτηση, δηλαδή είναι της μορφής:

$$P(r, t) = \text{Re}\{u(r)e^{-i\omega t}\}$$

ή

$$P(r, t) = u(r)e^{-i\omega t}$$

Να σημειώσουμε ότι χρησιμοποιείται είτε η μία σχέση είτε η άλλη.

Όπου $\omega > 0$ είναι η κυκλική συχνότητα, i η φανταστική μονάδα και $u(r)$ το χωρικό μέρος της υπερπίεσης το οποίο είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο. Έχοντας πάντα υπόψη ότι το φυσικό μέγεθος της υπερπίεσης προκύπτει από το πραγματικό μέρος της, δηλαδή $\text{Re}\{P(r, t)\}$. Παραγωγίζοντας 2 φορές ως προς t την παραπάνω σχέση τότε έχουμε

$$P_t = -i\omega u e^{-i\omega t}$$

$$P_{tt} = -\omega^2 u(r) e^{-i\omega t}$$

Έπειτα αντικαθιστώντας την στην εξίσωση της διάδοσης ενός ακουστικού κύματος στον χρόνο ,η οποία είναι η εξής :

$$P_{tt} = \frac{1}{\gamma\delta} \Delta P + \frac{\delta}{\rho} \Delta P_t$$

όπου

γ : η μέση συμπίεστικότητα (σχετική μείωση του όγκου ανά μονάδα αύξησης της επιφανειακής πίεσης)

δ : ο συντελεστής απόσβεσης (ο βαθμός μεταβολής της μάζας ανά μονάδα μήκους)

Να συμπληρώσουμε ότι ο συντελεστής απόσβεσης μετράει την ενέργεια που χάνεται από το κύμα καθώς μετατρέπεται η μηχανική ενέργεια σε θερμότητα. Αν αυτός είναι μηδέν τότε στο μέσο δεν υπάρχει εσωτερική τριβή και ονομάζεται μη απορροφούν υλικό.

Επομένως έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} u(r) = \frac{1}{\gamma\rho} e^{-i\omega t} \Delta u + \frac{\delta}{\rho} (-i\omega) e^{-i\omega t} \Delta u$$

$$\text{Άρα } (1 - i\omega\gamma\delta)\Delta u + \omega^2\gamma\rho u = 0$$

$$\text{ή } \Delta u + \frac{\omega^2\gamma\rho}{1-i\omega\gamma\delta} u = 0$$

$$\text{Επομένως } \Delta u + k^2 u = 0 \quad (8)$$

Όπου $k = \omega \left(\frac{\gamma\rho}{1-i\omega\gamma\delta} \right)^{\frac{1}{2}}$ ο κυματάριθμος με $\text{Im}k \geq 0$. Η σχέση (8) αποτελεί την εξίσωση **Helmholtz** και περιγράφει ένα ακουστικό κύμα το οποίο εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

$$c: \text{φασική ταχύτητα με } c = \left(\frac{2(1+\gamma^2\delta^2\omega^2)}{\gamma\rho(1+\sqrt{1+\gamma^2\delta^2\omega^2})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

λ : μήκος κύματος με $\lambda = cT$

T : χρονική περίοδος με $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Αν $\delta=0$ ο κυματάριθμος τότε γίνεται $k = \omega\sqrt{\gamma\rho}$. Εάν στην συνέχεια επαναλάβουμε την διαδικασία για την ταχύτητα και το δυναμικό ταχύτητας με

$$V(r, t) = \text{Re}\{v(r)e^{-i\omega t}\}$$

Και $F(r, t) = \text{Re}\{\varphi(r)e^{-i\omega t}\}$

αντίστοιχα, τα χωρικά μέρη ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz ως εξής:

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

2.3 Βασικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz

Οι βασικές λύσεις της εξίσωσης **Helmholtz** εξαρτώνται από τη γεωμετρία του προβλήματος και τα όρια που τίθενται. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε κάποιες λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, όπως τα επίπεδα και σφαιρικά ακουστικά κύματα, έννοιες οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε προβλήματα σκέδασης. Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz δίνεται από την συνάρτηση:

$$\Phi(r, r_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\Delta_r + k^2) \Phi(r, r_0) = -\delta(r - r_0)$$

όπου Δ_r είναι ο τελεστής Laplace όπου έχει παραγωγιστεί ως προς r και $\delta(r - r_0)$ το συναρτησοειδές του Dirac.

Επίπεδο κύμα

Το επίπεδο κύμα είναι ένας τύπος κύματος όπου οι επιφάνειες με σταθερή φάση είναι επίπεδες και παράλληλες μεταξύ τους καθώς έχουν σταθερό πλάτος και είναι κάθετα στην διεύθυνση της διάδοσης. Γενικά το επίπεδο κύμα είναι ένα κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος μίας συγκεκριμένης διεύθυνσης. Τέτοιου είδους κύματα αποτελούν ομαλή λύση της εξίσωσης Helmholtz και δίνονται από την σχέση

$$u(r; \hat{d}) = e^{ik\hat{d}\cdot r}$$

όπου \hat{d} το μοναδιαίο διάνυσμα της διεύθυνσης διάδοσης και r η θέση ενός παρατηρητή.

Σφαιρικό Κύμα

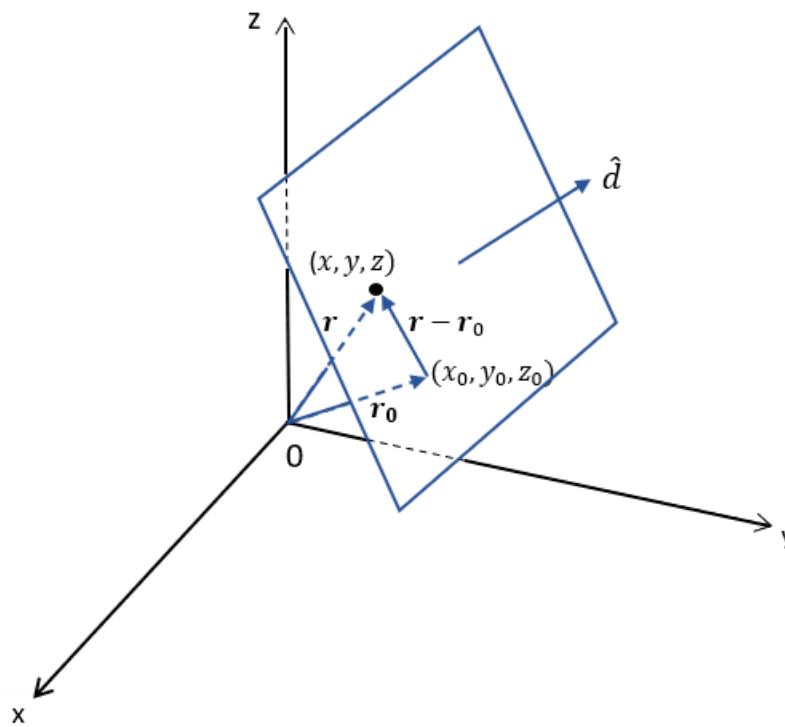
Το σφαιρικό κύμα είναι ένας τύπος κύματος στο οποίο οι επιφάνειες ίσης φάσης έχουν σφαιρικό σχήμα και διαδίδονται ακτινικά προς όλες τις κατευθύνσεις από μια σημειακή πηγή. Σε αντίθεση με το επίπεδο κύμα, όπου οι επιφάνειες ίσης φάσης είναι

επίπεδες όπως είπαμε παραπάνω, στο σφαιρικό κύμα οι επιφάνειες αυτές είναι ομόκεντρες σφαίρες με την πηγή στο κέντρο. Ένα παράδειγμα σφαιρικού κύματος είναι τα κύματα που δημιουργούνται στην επιφάνεια του νερού. Αν η πηγή είναι μία γραμμή, τότε το κύμα που προκύπτει είναι κυλινδρικό. Ο τύπος που δίνει ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα είναι

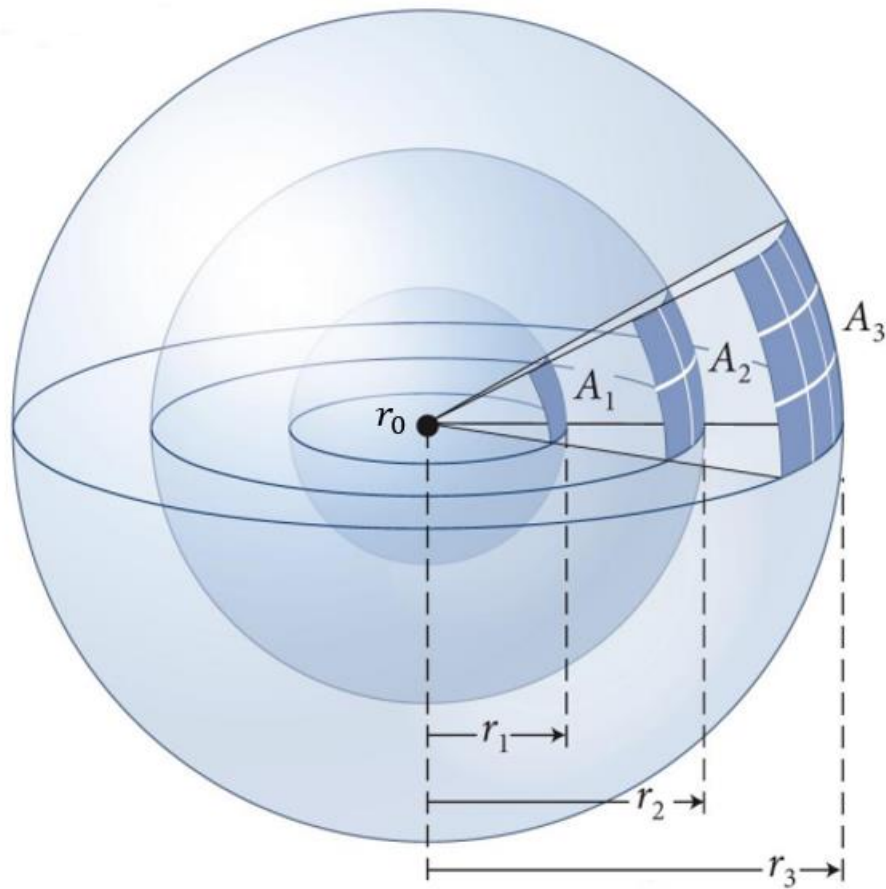
$$u_{r_0}(\mathbf{r}) = A \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|} \text{ με } r \neq r_0 \text{ και } A \in \mathbb{C} \text{ όπου } A \text{ είναι σταθερά.}$$

Όταν η απόσταση της πηγής μεγαλώνει και τείνει στο άπειρο, το σφαιρικό κύμα γίνεται επίπεδο. Πραγματικά παρατηρούμε ότι αν $A = r_0 e^{-ik\hat{r}_0 \cdot \mathbf{r}}$ και $r_0 = |r_0|$ τότε αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} u_{r_0}(\mathbf{r}) = e^{-ik\hat{r}_0 \cdot \mathbf{r}} = u(\mathbf{r}; -\hat{r}_0)$$



Εικόνα 1. Επίπεδο κύμα που κινείται κατά μήκος της διεύθυνσης του \hat{d} [11].



Εικόνα 2. Διάδοση σφαιρικού κύματος [11].

3.ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Η σκέδαση ακουστικών κυμάτων αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία ένα ακουστικό κύμα διασκορπίζεται ή αλλάζει κατεύθυνση λόγω της αλληλεπίδρασής του με ένα αντικείμενο ή μια ανωμαλία στο μέσο διάδοσης. Αυτή η διαδικασία συμβαίνει όταν το κύμα συναντά ένα εμπόδιο, όπως μια στερεά επιφάνεια, ένα σωματίδιο ή μια μεταβολή στην πυκνότητα του μέσου.

Βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στη Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων θα είναι οι εξής:

Προσπίπτον Κύμα (Incident Wave): Το αρχικό ηχητικό κύμα που ταξιδεύει στο μέσο πριν συναντήσει το εμπόδιο.

Σκεδαζόμενο Κύμα (Scattered Wave): Το κύμα που προκύπτει από τη σκέδαση, το οποίο διασκορπίζεται σε διάφορες κατευθύνσεις λόγω της αλληλεπίδρασης με το εμπόδιο.

Σκεδαστής (Scatterer): Το αντικείμενο ή η ανωμαλία στο μέσο που προκαλεί τη σκέδαση του ακουστικού κύματος. Αυτό μπορεί να είναι ένα φυσικό αντικείμενο, όπως μια σταγόνα νερού ή μια φυσαλίδα, ή μια αλλαγή στις ιδιότητες του μέσου, όπως μια μεταβολή στην πυκνότητα.

Επομένως, ας φανταστούμε τώρα ότι στέλνουμε ένα κύμα πάνω σε ένα αντικείμενο, τον σκεδαστή. Το κύμα αυτό ονομάζεται προσπίπτον κύμα, το οποίο αλληλοεπιδρά με τον σκεδαστή και δημιουργεί ένα καινούργιο κύμα, το σκεδασμένο. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να γνωρίζουμε τις ιδιότητες του προσπίπτοντος κύματος και του σκεδαστή και να αναζητάμε το σκεδασμένο. Τέτοιου είδους ζητήματα ονομάζονται ευθέως προβλήματα σκέδασης με τα οποία θα ασχοληθούμε και αποτελούν προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κατανομής των σκεδαζόμενων κυμάτων. Η εξίσωση αυτή λύνεται με την εφαρμογή συνόρων και συνθηκών ακτινοβολίας, όπως η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, για να καθοριστεί η συμπεριφορά του κύματος μακριά από τον σκεδαστή. Στην περίπτωση που θέλουμε να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες του σκεδαστή έχουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης με το οποίο στην παρούσα διπλωματική δεν θα ασχοληθούμε.

Γενικά στις εφαρμογές θα θεωρούμε ένα συνεχές ρευστό μέσο στον \mathbb{R}^3 , στο οποίο διαδίδεται ένα ακουστικό κύμα. Επιπλέον, έναν σκεδαστή D ως ένα φραγμένο χωρίο και ∂D το σύνορό του. Οι συνοριακές συνθήκες στα προβλήματα σκέδασης οφείλονται στις μεταβολές της πίεσης και της ταχύτητας καθώς το ρευστό προσπίπτει στην επιφάνεια του σκεδαστή. Συνοπτικά, η σκέδαση ακουστικών κυμάτων είναι ένα θεμελιώδες φαινόμενο στην ακουστική και έχει πολλές εφαρμογές στην επιστήμη και την τεχνολογία.

3.1 Συνοριακές συνθήκες

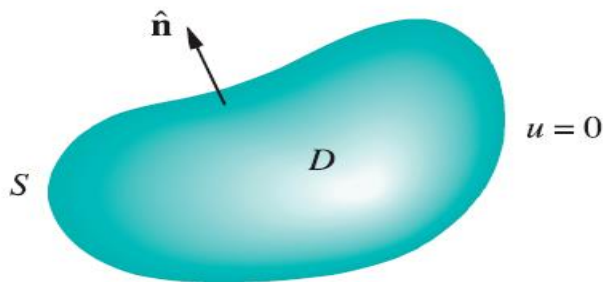
Οι συνοριακές συνθήκες είναι μαθηματικές συνθήκες που εφαρμόζονται στα όρια του πεδίου στο οποίο επιλύουμε ένα πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων. Αυτές οι συνθήκες είναι απαραίτητες για τον καθορισμό μιας μοναδικής λύσης για την εξίσωση που περιγράφει τη σκέδαση, όπως η εξίσωση Helmholtz. Περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο το ακουστικό κύμα αλληλοεπιδρά με τα όρια του μέσου ή με τα αντικείμενα που προκαλούν τη σκέδαση.

Οι συνοριακές συνθήκες είναι απαραίτητες για τον καθορισμό μιας μοναδικής λύσης για τις εξισώσεις που περιγράφουν τη διάδοση και τη σκέδαση του κύματος. Αυτές οι συνθήκες περιγράφουν τις φυσικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ του ακουστικού κύματος και του περιβάλλοντος ή των αντικειμένων μέσα σε αυτό. Για παράδειγμα, οι συνθήκες Dirichlet μπορεί να αναπαριστούν μια τέλεια απορροφητική επιφάνεια, ενώ οι συνθήκες Neumann μπορεί να αναπαριστούν μια τέλεια ανακλαστική επιφάνεια.

Σε μία επιφάνεια $S=\partial D$ όπως είναι η επιφάνεια ενός σκεδαστή, η ταχύτητα του κύματος μπορεί να αλλάξει αιφνιδίως με αποτέλεσμα το πεδίο να μην παραμείνει συνεχές. Επίσης, η πίεση του ρευστού μπορεί να μηδενιστεί πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια. Επομένως, οι συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν η υπερπίεση και το δυναμικό ταχύτητας ονομάζονται συνοριακές συνθήκες.

Αναλόγως τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή έχουμε και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Να αναφέρουμε ότι υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται οι σκεδαστές, στους **διαπερατούς**, οι οποίοι επιτρέπουν το κύμα να εισέρχεται στο εσωτερικό του, και στους **μη διαπερατούς**, στους οποίους το κύμα δεν μπορεί να εισαχθεί. Στους μη διαπερατούς έχουμε τις εξής περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών:

i. Συνθήκη Dirichlet



Εικόνα 3. Ακουστικά μαλακός σκεδαστής - Συνθήκη Dirichlet [11]

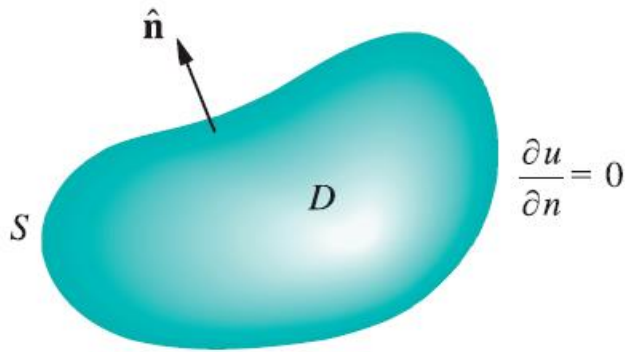
Αυτή είναι η περίπτωση όπου ο σκεδαστής ονομάζεται ακουστικά μαλακός και στην επιφάνειά του η υπερπίεση του ρευστού μηδενίζεται, δηλαδή $P = 0$. Επομένως, για το ολικό εξωτερικό πεδίο της $u(\mathbf{r})$ ισχύει ότι

$$u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S.$$

ii. Συνθήκη Neumann

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε έναν ακουστικά σκληρό σκεδαστή. Όταν στην επιφάνειά του δεν υπάρχουν μετακινήσεις, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδέν. Επομένως για $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$ έχουμε:

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S$$

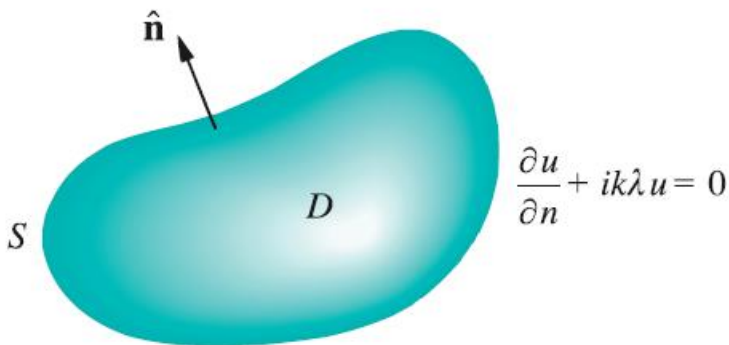


Εικόνα 4. Ακουστικά σκληρός σκεδαστής - Συνθήκη Neumann [11]

iii. Συνθήκη Robin

Σε περίπτωση που στην επιφάνεια του σκεδαστή υπάρχει τριβή του ιξώδους, δηλαδή ο σκεδαστής παρουσιάσει αντίσταση κατά την είσοδο του κύματος στο εσωτερικό του, τότε έχουμε έναν ανθεκτικό σκεδαστή. Η συνοριακή συνθήκη τότε γίνεται:

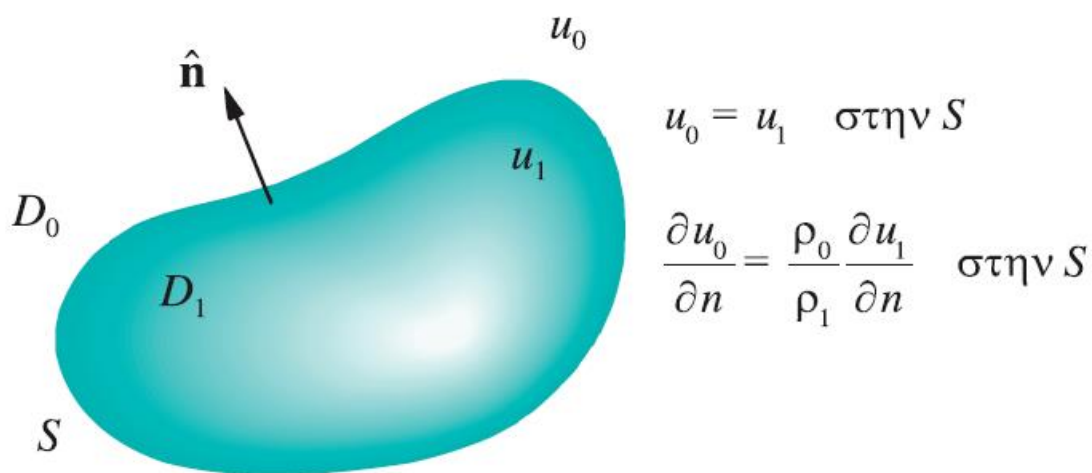
$$\frac{\partial u}{\partial n} + i\kappa u = 0, \quad r \in S,$$



Εικόνα 5. Ανθεκτικός σκεδαστής - Συνθήκη Robin[11]

όπου λ η παράμετρος που μας δίνει τις ιδιότητες του σκεδαστή. Σε περίπτωση που ο σκεδαστής είναι διαπερατός υπάρχει μόνο μία συνθήκη. Όπου, το ακουστικό κύμα

εισέρχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή και δημιουργεί συνθήκες διαπερατότητας, επομένως οι πιέσεις στο εσωτερικό και το εξωτερικό της επιφάνειας του σκεδαστή είναι ίσες. Το ίδιο ισχύει και για τις κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας. Επομένως $p_0 = p_1$ και $\hat{n} \cdot v_0 = \hat{n} \cdot v_1$, όπου p_0 η πίεση στο εξωτερικό του σκεδαστή και p_1 στο εσωτερικό του και αντίστοιχα για την ταχύτητα. Για τις παραπάνω σχέσεις, λοιπόν, έχουμε:



Εικόνα 6. Διαπερατός σκεδαστής[11].

ισχύουν οι εξής συνθήκες:

$$u_0 = u_1, \quad r \in S$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{p_0}{p_1} \frac{\partial u_1}{\partial n}, \quad r \in S$$

Όπου θεωρούμε ότι $\delta_0 = 0$ και $\delta_1 = 0$, δηλαδή δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας στο εξωτερικό και στο εσωτερικό του σκεδαστή.

3.2. Συνθήκη ακτινοβολίας

Για να υπάρχει κάποιο αποτέλεσμα στα προβλήματα σκέδασης θα πρέπει να ορίσουμε και μία συνθήκη στο άπειρο. Ο λόγος για τον οποίο είναι απαραίτητη μία τέτοια συνθήκη είναι ότι ο σκεδαστής δεν παράγει δική του ενέργεια, αλλά δρα σαν πηγή ακτινοβολώντας την ενέργεια του προσπίπτοντος κύματος. Η συνθήκη στο άπειρο μας εξασφαλίζει ότι το κύμα θα εξασθενεί καθώς απομακρύνεται από τον σκεδαστή και αναφέρεται στο σκεδασμένο πεδίο u_s . Μία τέτοια συνθήκη ονομάζεται συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και δίνεται από την σχέση

$$\hat{r} \cdot \nabla u^s(\mathbf{r}) - iku^s(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

όπου διαδίδεται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Επίσης, η συνθήκη ακτινοβολίας μπορεί να γραφεί με την μορφή ορίου ως:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(r)}{\partial r} - iku^s(r) \right)$$

Όπου συγκλίνει ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις \hat{r} .

3.3 Βασικά προβλήματα σκέδασης

Έστω u^i το προσπίπτον κύμα με αρμονική χρονική εξάρτηση και u^s το σκεδασμένο κύμα. Αυτά τα κύματα αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz. Παράλληλα θεωρούμε ως u^t το ολικό ακουστικό πεδίο που βρίσκεται στο εξωτερικό του σκεδαστή για το οποίο ισχύει

$$u^t = u^i + u^s$$

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια βασικά ευθέως προβλήματα σκέδασης με βάση τις συνθήκες που είδαμε στις παραγράφους 3.1 και 3.2.

ί. Μαλακός Σκεδαστής (Το Πρόβλημα Dirichlet)

Έστω η συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Dirichlet, για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial D$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\hat{r} \cdot \nabla u^s - iku^s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις \hat{r}

Έχοντας υπόψιν ότι το u^i είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz, το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να γραφεί και ως το σκεδασμένο πεδίο δηλαδή αναζητούμε συνάρτηση u^s που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$u^s = -u^i \text{ στο } \partial D$$

όπου η συνάρτηση που ψάχνουμε είναι η u^s και ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί ένα εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet και ονομάζεται έτσι καθώς το πεδίο που αναζητούμε είναι το u^s , δηλαδή το εξωτερικό του σκεδαστή.

ii. Σκληρός Σκεδαστής (Πρόβλημα Neumann)

Όπως και στην περίπτωση του μαλακού σκεδαστή, διατυπώνουμε και πάλι την συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ χρησιμοποιώντας, τώρα, την συνθήκη Neumann. Έχουμε δηλαδή:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ στο } \partial D$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\hat{r} \cdot \nabla u^s - iku^s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις \hat{r} .

Αντίστοιχα αν διατυπώσουμε το πρόβλημα ως προς την συνάρτηση u^s έχουμε

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} = -\frac{\partial u^i}{\partial n} \text{ στο } \partial D$$

όπου η u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και αποτελεί ένα εξωτερικό πρόβλημα Neumann.

iii. Ανθεκτικός Σκεδαστής (Το Πρόβλημα Robin)

Για τον ανθεκτικό σκεδαστή έχουμε την συνθήκη Robin και το πρόβλημα σκέδασης για την συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ γίνεται:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{du}{dn} + i\kappa u = 0 \quad \text{στο } \partial D$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\hat{r} \cdot \nabla u^s - i\kappa u^s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις \hat{r} .

Διατυπώνοντας το πρόβλημα για τη συνάρτηση u^s , δηλαδή ως ένα εξωτερικό πρόβλημα Robin, και ικανοποιώντας την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld έχουμε

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} + i\kappa u^s = -\frac{\partial u^i}{\partial n} - i\kappa u^i \text{ στο } \partial D$$

iv. Διαπερατός Σκεδαστής (Transmission conditions)

Θεωρούμε u_0 το εξωτερικό πεδίο του σκεδαστή και u_1 το εσωτερικό πεδίο, με πυκνότητες ρ_0 και ρ_1 αντίστοιχα. Υποθέτουμε, επίσης, ότι δεν υπάρχουν απώλειες εντός και εκτός του σκεδαστή. Θέλουμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για τις οποίες ισχύουν ότι :

$$\Delta u_0 + K_0^2 u_0 = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0 \text{ στο } D$$

$$u_0 = u_1 \quad \text{στο } \partial D$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D$$

$$u_0 = u^i + u^s \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$\hat{r} \cdot \nabla u^s - iku^s = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις \hat{r} .

v. Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης

Μεικτό πρόβλημα σκέδασης είναι ένας συνδυασμός των συνοριακών συνθηκών που αναφέραμε προηγουμένως. Τέτοιου είδους προβλήματα τα συναντάμε σε πραγματικές συνθήκες και για αυτό αποτελούν αντικείμενα μελέτης.

3.4 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις

Με την βοήθεια των δύο θεωρημάτων του Green, θα διατυπώσουμε ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις εσωτερικών και εξωτερικών προβλημάτων.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ένας τόπος, δηλαδή ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^2 . Θεωρούμε D έναν σκεδαστή, δηλαδή ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με σύνορο ∂D όπου είναι μία επιφάνεια C^2 .

Πρώτο βαθμωτό Θεώρημα Green:

Για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε:

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds = \int_D (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dV$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂D με φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή D .

Δεύτερο βαθμωτό Θεώρημα Green :

Για $u, v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε:

$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_D (u \Delta v - v \Delta u) dV$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂D με φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή.

Να σημειώσουμε ότι για τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις θα χρειαστούμε επίσης τη θεμελιώδη λύση:

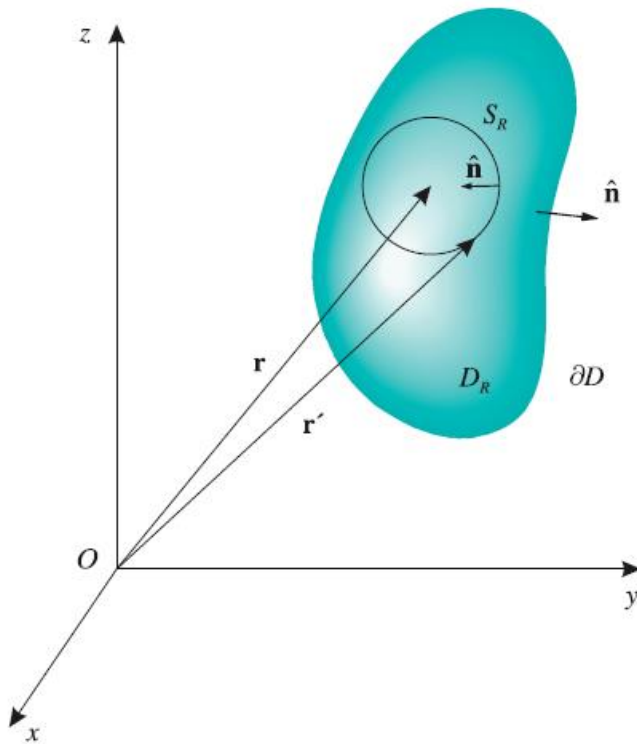
$$\Phi(r, r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad , \quad r \neq r'$$

της εξίσωσης Helmholtz:

$$\Delta v + \kappa^2 v = 0$$

Εσωτερικό Πρόβλημα

Θεωρώ ένα σημείο $r \in D$ εντός ενός σκεδαστή D και μία σφαίρα με κέντρο το r και ακτίνα R , τέτοια ώστε $B(r; R) = \{r' \in \mathbb{R}^3 : |r-r'| \leq R\}$. Η ακτίνα R πρέπει να είναι πολύ μικρή ώστε ολόκληρη η σφαίρα να βρίσκεται εντός του σκεδαστή όπως φαίνεται στην εικόνα 7.



Εικόνα 7. Εσωτερικό Πρόβλημα[11]

Επίσης, θεωρούμε ως S_R το σύνορο της σφαίρας και D_R τον χώρο που περιλαμβάνει τον σκεδαστή D χωρίς την σφαίρα $B(r; R)$. Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} είναι κάθετο στο σύνορο S_R με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σφαίρας. Έστω $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ μιγαδικές συναρτήσεις, για τις οποίες η κάθετη παράγωγος στο ∂D ορίζεται από το όριο

$$\frac{\partial u(r)}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \hat{n}(r) \cdot \nabla u(r - h\hat{n}(r)) \quad , \quad r \in \partial D$$

Το οποίο υπάρχει ομοιόμορφα στο ∂D . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

Λήμμα 1^ο :

Έστω $u, v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο D .

Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = - \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

Θεώρημα (Εσωτερική αναπαράσταση της συνάρτησης u)

Έστω $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ μία λύση της εξίσωσης Helmholtz. Τότε:

$$\int_{\partial D} \left[u(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial n'} - \Phi(r, r') \frac{\partial u(r')}{\partial n'} \right] ds(r') = \begin{cases} -u(r), & r \in D \\ 0, & r \in \mathbb{R}^3 \setminus D \end{cases}$$

όπου $\Phi(r, r')$ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Εξωτερικό Πρόβλημα

Σε αντίθεση με το εσωτερικό πρόβλημα, τώρα θεωρούμε μία σφαίρα

$B(0, R) = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| \leq R\}$, με ακτίνα αρκετά μεγάλη ώστε να περιλαμβάνει ολόκληρο τον σκεδαστή και κέντρο την αρχή των αξόνων. Ισχύουν τα ίδια όπως προηγουμένως για τα S_R και D_R , με το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} που είναι κάθετο στο ∂D να έχει φορά προς το εσωτερικό του D_R , άρα και το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο S_R και έχει φορά προς το εξωτερικό της σφαίρας (Εικόνα 8).

Λήμμα 2^ο :

Έστω $u, v \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{S_R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

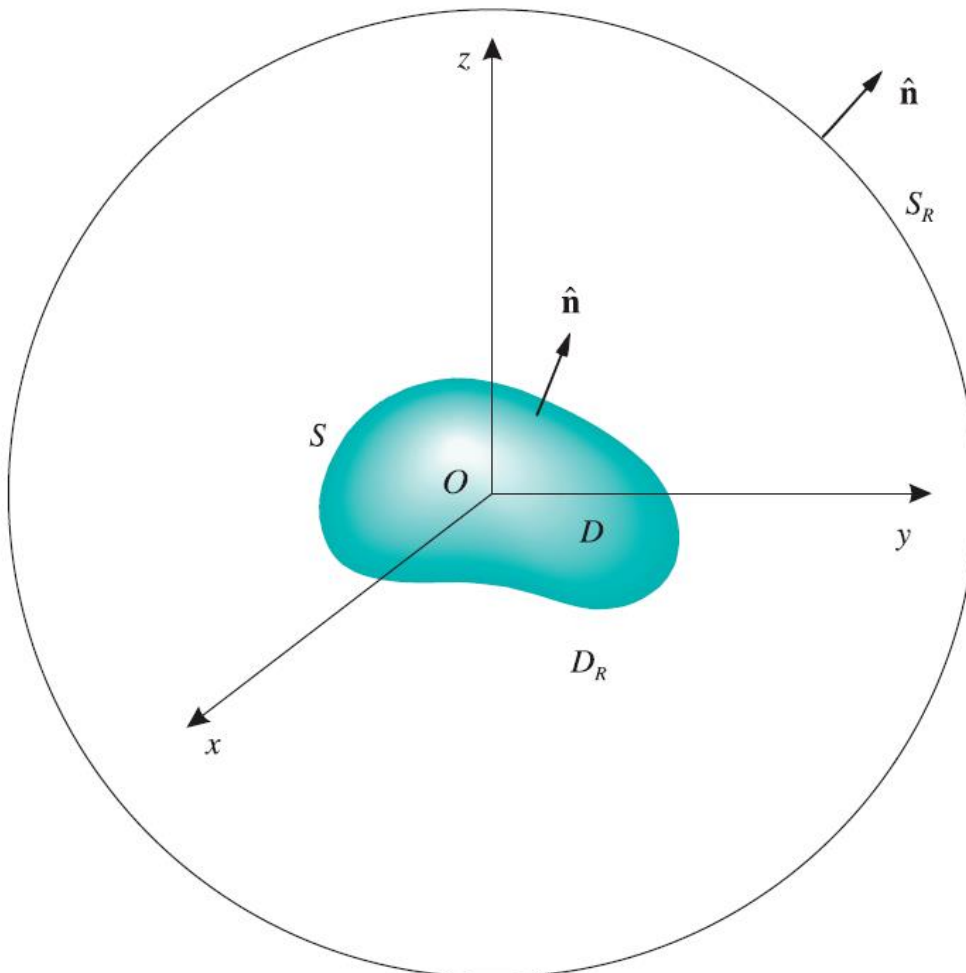
Θεώρημα (Εξωτερική αναπαράσταση):

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ μία λύση της εξίσωσης Helmholtz στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας

Sommerfield. Τότε:

$$\int_{\partial D} [u(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial n'} - \Phi(r, r') \frac{\partial u(r')}{\partial n'}] ds(r') = \begin{cases} u(r), & r \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \\ 0, & r \in D \end{cases}$$

Το θεώρημα αυτό αποτελεί την εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση της u . Στην συνέχεια θα δούμε το θεώρημα Aktinson-Wilcox, το οποίο αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος εξωτερικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης.



Εικόνα 8. Εξωτερικό Πρόβλημα[11].

Θεώρημα (Atkinson-Wilcox):

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ μία λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και R η ακτίνα της μικρότερης σφαίρας που περιέχει το D . Τότε η u έχει ένα ανάπτυγμα της μορφής:

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\theta, \varphi)}{r^n}, \quad r > R$$

και η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα. Ειδικότερα ισχύει:

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{ikr} A_0(\theta, \varphi) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Η συνάρτηση $A_0 : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται πλάτος σκέδασης ή μακρινό πεδίο και οι συντελεστές A_n μπορούν να βρεθούν από τον επαναληπτικό τύπο:

$$2iknA_n = n(n-1)A_{n-1} + BA_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου B είναι ο τελεστής Beltrami για τη σφαίρα με

$$B = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad n=1, 2, \dots$$

συναρτήσεως του A_0 . Η μεγάλη σημασία του θεωρήματος είναι ότι με αυτό τον τρόπο η λύση u μπορεί να προσεγγιστεί με αρκετή ακρίβεια από τον συντελεστή A_0 , ο οποίος μάλιστα ονομάζεται μακρινό πεδίο.

Ολοκληρωτική αναπαράσταση ολικού εξωτερικού πεδίου:

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz, μπορούμε να διατυπώσουμε το εξωτερικό πρόβλημα ως προς το σκεδασμένο πεδίο u^s , το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Επομένως, η εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση θα γίνει:

$$u^s(r) = \int_{\partial D} \left[u^s(r') \frac{\partial \varphi(r, r')}{\partial n'} - \varphi(r, r') \frac{\partial u^s(r')}{\partial n'} \right] ds(r')$$

Θεωρώντας ότι u^t είναι το ολικό εξωτερικό πεδίο και u^i το προσπίπτον κύμα, ισχύει ότι:

$$u^t(r) = u^i(r) + u^s(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

Αντικαθιστώντας το u^s έχουμε:

$$u^t(r) - u^i(r) = \int_{\partial D} [u^t(r') \frac{\partial \phi(r, r')}{\partial n'} - \Phi(r, r') \frac{\partial u^t(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

$$- \int_{\partial D} [u^i(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial n'} - \Phi(r, r') \frac{\partial u^i(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

Στη συνέχεια ,για τις συναρτήσεις $u^i(r')$ και $\Phi(\cdot, r')$ θα εφαρμόσουμε το δεύτερο θεώρημα Green στο D και το δεύτερο ολοκλήρωμα θα μηδενιστεί καθώς οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν ομαλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz. Συνεπώς η εξωτερική ολική ολοκληρωτική αναπαράσταση είναι:

$$u^t(r) = u^i(r) + \int_{\partial D} [u^t(r') \frac{\partial \phi(r, r')}{\partial n'} - \Phi(r, r') \frac{\partial u^t(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

Από την ολοκληρωτική αναπαράσταση και τις συνοριακές συνθήκες αποδεικνύεται το παρακάτω **θεώρημα**:

Έστω u^i ένα ακουστικό κύμα προσπίπτον σε ένα σκεδαστή D. Τότε για τα ολικά εξωτερικά πεδία u^t έχουμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις:

- (i) Μαλακός σκεδαστής

$$u^t(r) = u^i(r) - \int_{\partial D} \Phi(r, r') \frac{\partial u^t(r')}{\partial n'} ds(r')$$

- (ii) Σκληρός σκεδαστής

$$u^t(r) = u^i(r) + \int_{\partial D} u^t(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial n'} ds(r')$$

- (iii) Ανθεκτικός σκεδαστής

$$u^t(r) = u^i(r) + \int_{\partial D} u^t(r') \left(\frac{\partial}{\partial n'} + ik\lambda \right) \Phi(r, r') ds(r')$$

- (iv) Διαπερατός σκεδαστής

$$u^t(r) = u^i(r) + \int_{\partial D} [u_1(r') \frac{\partial \Phi(r, r')}{\partial n'} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \Phi(r, r') \frac{\partial u_1(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

4. ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΜΗΛΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Καθώς δείξαμε αν ένα πρόβλημα σκέδασης είναι καλά τοποθετημένο, το μόνο που μας μένει είναι να βρούμε τη λύση του. Αυτό όμως είναι ένα δύσκολο έργο και για αυτό το λόγο αναζητάμε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης. Τέτοιες μέθοδοι είναι είτε αριθμητικές είτε αναλυτικές. Στις αριθμητικές μεθόδους κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της λύσης για διάφορα σημεία του πεδίου ορισμού της, χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους με κατάλληλες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του προβλήματος. Στις αναλυτικές μεθόδους περιλαμβάνονται δύο προσεγγιστικές θεωρίες, η θεωρία υψηλών συχνοτήτων και η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων, με την οποία και θα ασχοληθούμε εμείς.

Η θεωρία υψηλών συχνοτήτων χρησιμοποιείται σε προβλήματα με μικρό μήκος κύματος, ενώ αντίθετα η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων σε προβλήματα με μεγάλο μήκος κύματος. Συνεπώς, η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων, γνωστή επίσης ως "Low Frequency Theory" (LFT), είναι μια προσέγγιση στη φυσική, ειδικά στη φυσική σωματιδίων και την κοσμολογία, που μελετά φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν σε χαμηλές συχνότητες ή χαμηλές ενέργειες σε σχέση με μια δεδομένη κλίμακα. Η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων χρησιμοποιείται σε προβλήματα με μεγάλο μήκος κύματος. Στην συνέχεια, το πρόβλημα σκέδασης ανάγεται σε μία ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού, τα οποία για να λυθούν χρησιμοποιούμε ένα σφαιρικό ή ελλειψοειδές σύστημα αξόνων με σφαιρικές ή ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις αντίστοιχα.

4.1 Αναπτύγματα σε χαμηλές συχνότητες

Θεωρούμε α την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας η οποία περιλαμβάνει τον σκεδαστή και ονομάζεται χαρακτηριστική διάσταση του σκεδαστή. Αν k ο κυματάριθος του ακουστικού κύματος, τότε με το γινόμενο ka διακρίνουμε την θεωρία σε χαμηλές και υψηλές συχνότητες. Πρέπει, δηλαδή:

$$|ka| \ll 1$$

Όταν βρισκόμαστε στις χαμηλές συχνότητες χρησιμοποιούμε την θεωρία διαταραχών κατά την οποία αναπτύσσουμε τη λύση του προβλήματος σκέδασης σε σειρά Taylor ως προς το κυματικό αριθμό k . Αυτό συμβαίνει γιατί οι λύσεις τις εξίσωσης Helmholtz είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $k = 0$. Έπειτα το πρόβλημα αποτελεί μία ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού. Οι συντελεστές της σειράς ονομάζονται συντελεστές χαμηλής συχνότητας και είναι ανεξάρτητοι του k , ενώ οι πρώτοι μη μηδενικοί όροι ονομάζονται όροι ή προσεγγίσεις Rayleigh. Η ακτίνα σύγκλισης είναι συνάρτηση του ka και μέσα στο διάστημα σύγκλισης η σειρά συγκλίνει απόλυτα και

ομοιόμορφα. Στη συνέχεια θα δούμε τα αναπτύγματα των κυματικών πεδίων, των εξισώσεων, των συνοριακών συνθηκών και των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων που ικανοποιούν συντελεστές χαμηλής συχνότητας.

Κυματικά πεδία

- i. Το προσπίπτον επίπεδο κύμα $u^i(r) = e^{ik\hat{d}\cdot r}$ έχει το ανάπτυγμα:

$$u^i(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (\hat{d}\cdot r)^m$$

- ii. Το προσπίπτον σφαιρικό κύμα $u_{r_0}^i(r) = r_0 e^{-ikr_0} \frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}$ έχει το ανάπτυγμα:

$$u_{r_0}^i(r) = \frac{r_0}{|r-r_0|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (|r-r_0| - r_0)^m$$

- iii. Το σκεδασμένο πεδίο $u^s(r)$ έχει το ανάπτυγμα :

$$u^s(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^s(r)$$

- iv. Το ολικό πεδίο $u^t(r)$ για μη διαπερατό σκεδαστή D έχει το ανάπτυγμα :

$$u^t(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^t(r) , r \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}.$$

Για ένα διαπερατό σκεδαστή το ολικό εξωτερικό πεδίο θα το συμβολίζουμε ως u^+ με $D^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και είναι

$$u^+(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^+(r) , r \in D^+$$

ενώ αντίστοιχα το ολικό εσωτερικό πεδίο θα το συμβολίζουμε ως u^-

με $D^- = D$ και είναι

$$u^-(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^-(r) , r \in D^-$$

όπου k ο κυματικός αριθμός για το εξωτερικό πεδίο.

Εξίσωση Helmholtz

Στην εξίσωση Helmholtz για το εξωτερικό του σκεδαστή

$$\Delta u^+(r) + k^2 u^+(r) = 0 , r \in D^+$$

αντικαθιστώντας τη συνάρτηση u^+ έχουμε:

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) + k^2 u^+(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \Delta_m^+(r) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^{m+2}}{m!} u_m^+(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \Delta_m^+(r) -$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{(m-2)!} u_{m-2}^+(r) = 0$$

Επομένως για $m=0, 1$ ισχύει ότι

$$\Delta u_0^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta u_1^+(\mathbf{r}) = 0$$

και για $m \geq 2$ ότι

$$\Delta u_m^+ = m(m-1) u_{m-2}^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D^+$$

Δηλαδή οι συντελεστές χαμηλής συχνότητας u_0^+ και u_1^+ είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace. Αντίστοιχα για $m \geq 0$ είναι λύσεις της εξίσωσης Poisson. Με παρόμοιο τρόπο γίνεται και για το εσωτερικό του σκεδαστή D^- όπου η εξίσωση Helmholtz είναι :

$$\Delta u^-(r) + \eta^2 \kappa^2 u^-(r) = 0, \quad \mathbf{r} \in D^-$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την θεωρία χαμηλών συχνοτήτων ως προς k .

Συνοριακές συνθήκες

i. Η συνοριακή συνθήκη Dirichlet, δηλαδή η περίπτωση του μαλακού σκεδαστή για τον οποίο ισχύει ότι $u=0$, σε χαμηλές συχνότητες είναι:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{άρα } u_m(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in S, \quad m=1,2,\dots$$

ii. Η συνοριακή συνθήκη Neumann, δηλαδή η περίπτωση του σκληρού σκεδαστή για τον οποίο ισχύει ότι $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ σε χαμηλές συχνότητες είναι:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m(\mathbf{r}) \right) = 0$$

$$\text{άρα } \frac{\partial u_m}{\partial n} = 0 \quad \mathbf{r} \in S, \quad m=1,2,\dots$$

iii. Η συνοριακή συνθήκη Robin, δηλαδή η περίπτωση του ανθεκτικού σκεδαστή, για τον οποίο ισχύει ότι $\frac{\partial u}{\partial n} + ik\lambda u = 0$, σε χαμηλές συχνότητες είναι:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m(\mathbf{r}) \right) + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^{m+1}}{m!} u_m(\mathbf{r}) = 0$$

$$\text{άρα } \quad , \mathbf{r} \in S \quad , m=1,2,\dots$$

iv. Για έναν διαπερατό σκεδαστή ,συμβολίζουμε με u^+ το ολικό εξωτερικό πεδίο και με u^- το ολικό εσωτερικό πεδίο , επομένως για σκεδαστή χωρίς απώλειες τα αναπτύγματα είναι:

$$u_m^+ = u_m^- \quad , \quad \mathbf{r} \in S$$

$$\frac{\partial u_m^+(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\rho^+}{\rho^-} \frac{\partial u_m^-(\mathbf{r})}{\partial n} \quad , \mathbf{r} \in S$$

Όπου ρ^\pm είναι η πυκνότητα στο εσωτερικό και το εξωτερικό του σκεδαστή.

Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις

Για να βρούμε το ανάπτυγμα της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του ολικού εξωτερικού πεδίου ,στην σχέση

$$u^t(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \int_{\partial D} \left[u^t(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u^t(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}')$$

που είχαμε δει στο κεφάλαιο 3.4 αντικαθιστούμε το ανάπτυγμα χαμηλών συχνοτήτων για το u^+ και το ανάπτυγμα για το προσπίπτον επίπεδο κύμα .Επιπλέον για τη θεμελιώδη λύση

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

της εξίσωσης Helmholtz, το ανάπτυγμα είναι:

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{m-1}$$

άρα ,στον εξωτερικό χώρο D^+ και εφαρμόζοντας τον τύπο Cauchy για το γινόμενο σειρών θα γίνει:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^+(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} .$$

$$\int_S [u_{m-l}^+(r') \frac{\partial |r-r'|^{l-1}}{\partial n'} - |r-r'|^{l-1} (\frac{\partial u_{m-l}^+(r')}{\partial n'})]$$

Επομένως έχουμε:

$$u_m^+(r) = u_m^+(r) + w_m^+(r), \quad r \in D^+$$

όπου

$$u_m^+(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S [u_{m-l}^+(r') \frac{\partial |r-r'|^{l-1}}{\partial n'} - |r-r'|^{l-1} \frac{\partial u_{m-l}^+(r')}{\partial n'}]$$

Και

$$w_0^+ = u_0^+(r)$$

$$w_m^+(r) = u_m^+(r) + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \int_S [u_{m-l}^+(r') \frac{\partial |r-r'|^{l-1}}{\partial n'} - |r-r'|^{l-1} \frac{\partial u_{m-l}^+(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

για $m \geq 1$. Η συνάρτηση u_m^+ είναι συνδυασμός απλού και διπλού στρώματος για την εξίσωση Laplace, καθώς η θεμελιώδης λύση της είναι $|r-r'|^{-1}$ και άρα αποτελεί και αυτή λύση της εξίσωσης Laplace. Επιπλέον, η w_m^+ είναι μερική λύση της εξίσωσης Poisson, εφόσον η u_m^+ είναι λύση της εξίσωσης Poisson και u_m^+ είναι λύση της εξίσωσης Laplace. Με αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε το ανάπτυγμα για την ολοκληρωτική αναπαράσταση του ολικού εσωτερικού πεδίου u^- στο D^- , έχουμε δηλαδή:

$$u_m^-(r) = -u_m^-(r) - w_m^-(r), \quad r \in D^-$$

όπου :

$$u_m^-(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S [u_m^-(r') \frac{\partial |r-r'|^{-1}}{\partial n'} - |r-r'|^{-1} \frac{\partial u_m^-(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

Και

$$w_m^- = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} \int_S [u_{m-l}^-(r') \frac{\partial |r-r'|^{l-1}}{\partial n'} - |r-r'|^{l-1} \frac{\partial u_{m-l}^-(r')}{\partial n'}] ds(r')$$

Για $m \geq 1$.

Μακρινό πεδίο

Στον τύπο που είχαμε δώσει για το μακρινό πεδίο

$$u^\infty(\hat{r}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_{\partial D} \left[\frac{\partial u^t(r')}{\partial n'} + ik(\hat{r} \cdot \hat{n}') u^t(r') \right] e^{-ik\hat{r} \cdot r'} ds(r')$$

κάνουμε αντικατάσταση το ανάπτυγμα

$$e^{-k\hat{r}\cdot r'} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (-\hat{r}\cdot r')^m$$

επομένως με χρήση του τύπου Cauchy για το γινόμενο σειρών για το μακρινό πεδίο έχουμε το ανάπτυγμα:

$$u^{\infty}(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-1)^{l+1}.$$

$$\int_S \left[\frac{\partial u_{m-1}^+(r')}{\partial n'} + ik(\hat{r}\cdot \hat{n}') u_{m-1}^+(r') \right] (\hat{r}\cdot r') ds(r')$$

4.2. Προβλήματα θεωρίας δυναμικού

Στην συνέχεια θα δούμε πως επιλύουμε ένα πρόβλημα σκέδασης χρησιμοποιώντας την θεωρία χαμηλών συχνοτήτων. Εδώ θα μελετήσουμε προβλήματα από έναν μαλακό και έναν ανθεκτικό σκεδαστή, ωστόσο με παρόμοιο τρόπο λύνονται και προβλήματα για διαφορετικά είδη σκεδαστών.

Μαλακός σκεδαστής

Στον μαλακό σκεδαστή οι συντελεστές χαμηλής συχνότητας ικανοποιούν το πρόβλημα

$$\Delta u_m = m(m-1)u_{m-2}(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \hat{D}$$

$$U_m(r) = 0, \quad r \in \partial D$$

$$U_m(r) = U_m(r) + W_m(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \hat{D}$$

Όπου

$$U_m(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|r-r'|} \frac{\partial u_m(r')}{\partial n'} ds(r'), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \hat{D}$$

Και

$$W_0(r) = u_0^i(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \hat{D}$$

$$W_m(r) = u_m^i(r) - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \int_S |r-r'|^{l-1} \frac{\partial u_{m-l}}{\partial n'} ds(r'), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \hat{D} \quad \text{με } m \gg 1.$$

Η συνάρτηση u_m είναι αρμονική και είναι λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_m = 0 \quad , \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$U_m = -W_m \quad \text{στο } \partial D$$

$$U_m = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad r \rightarrow \infty$$

Το ανάπτυγμα σε χαμηλές συχνότητες του μακρινού πεδίου για έναν μαλακό σκεδαστή προκύπτει ο τύπος:

$$u^\infty(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-1)^{l+1} \int_S (\hat{r}, r)^m \frac{\partial u_{m-1}^+(r')}{\partial n'} ds(r')$$

Αν έχουμε ένα επίπεδο κύμα $u^i = e^{ik\hat{d}\cdot r}$ για τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος χαμηλών συχνοτήτων ισχύει ότι:

$$W_0(r) = u_0^i(r)$$

$$W_1(r) = u_1^i(r) - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_0(r')}{\partial n'} ds(r')$$

$$W_2(r) = u_2^i(r) - \frac{1}{4\pi} \int_S |r - r'| \frac{\partial u_0(r')}{\partial n'} ds(r') - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u_1(r')}{\partial n'} ds(r')$$

και

$$u_0^i(r) = 1 \quad , \quad u_1^i(r) = \hat{d} \cdot r(r) \quad , \quad u_2^i = (\hat{d} \cdot r)^2$$

Έπειτα, διατυπώνουμε τα προβλήματα θεωρίας δυναμικού, τα οποία λύνοντας τα δίνουν τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις, για $m = 0, 1, 2$ δηλαδή έχουμε:

(i) Για $m=0$

$$u_0 = u_0 + W_0$$

όπου βρίσκουμε ότι το w_0 και το u_0 αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_0 = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$U_0 = -1 \text{ στο } \partial D$$

$$U_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty$$

(ii) Για $m=1$

βρίσκουμε το w_1 και το u_1 όπου αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_1 = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$U_1 = -\hat{d} \cdot r + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_0(r')}{\partial n'} ds(r'), \text{ στο } \partial D$$

$$U_1 = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty$$

(iii) Για $m=2$

$$U_2 = u_2 + w_2$$

όπου βρίσκουμε ότι το w_2 το u_2 αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_2 = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$u_2 = -(\hat{d} \cdot r)^2 + \frac{1}{4\pi} \int_S |r - r'| \frac{\partial u_0(r')}{\partial n'} ds(r') + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u_1(r')}{\partial n'} ds(r') \text{ στο } \partial D$$

$$u_2 = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty$$

Ανθεκτικός σκεδαστής

Όμοια, για τον ανθεκτικό σκεδαστή έχουμε το πρόβλημα σε χαμηλές συχνότητες:

$$\Delta u_m = m(m-1)u_{m-2}(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u_m(r)}{\partial n} + m\lambda u_{m-1}(r) = 0, \quad r \in \partial D$$

$$U_m(r) = u_m(r) + W_m(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

Όπου

$$W_0(\mathbf{r}) = u_0^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$W_m(\mathbf{r}) = u_m^i(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \int_S u_{m-l}(r') \left[\frac{\partial |r-r'|^{l-1}}{\partial n'} + \lambda |r-r'|^{l-2} \right] ds(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad m \geq 2$$

Η συνάρτηση u_m είναι αρμονική και είναι λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_m = 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u_m(\mathbf{r})}{\partial n} = -m \lambda u_{m-1} - \frac{\partial w_m}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D$$

$$U_m = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Στον ανθεκτικό σκεδαστή, οι δύο πρώτες προσεγγίσεις είναι:

(i) Για $m=0$:

$$U_0 = u_0 + w_0$$

όπου το u_0 αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_0 = 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = -\frac{\partial u_0^i}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D$$

$$U_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

(ii) Για $m=1$

$$U_1 = u_1 + w_1$$

όπου το u_1 αποτελεί λύση του προβλήματος:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$U_1 = -\lambda u_0 - \frac{\partial u_1^i}{\partial n} \quad \text{στο } \partial D$$

$$U_1 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

5.ΤΟ ΕΥΘΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΓΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥΣ ΣΚΕΔΑΣΤΕΣ

Η θεωρία της σκέδασης χαμηλών συχνοτήτων είναι γνωστή, χρησιμοποιείται ευρέως και διδάσκεται στα περισσότερα μεταπτυχιακά προγράμματα σπουδών εφαρμοσμένων μαθηματικών. Προκειμένου να επιτευχθεί η επέκταση χαμηλών συχνοτήτων της λύσης ενός συγκεκριμένου προβλήματος σκέδασης, χρειάζεται να λυθεί μια ακολουθία προβλημάτων ελλειπτικών οριακών τιμών, καθώς κάθε τάξη προσέγγισης απαιτεί τη γνώση όλων των προηγούμενων .

Η αναλυτική αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων προσφέρει ακριβή αποτελέσματα, αλλά περιορίζεται σε συγκεκριμένες γεωμετρίες και σε χαμηλές τάξεις προσέγγισης. Ειδικότερα, η επιφάνεια του σκεδαστή πρέπει να είναι μια επίπεδη επιφάνεια ενός συστήματος συντεταγμένων που επιδέχεται τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών, ώστε να υπάρχουν αναλυτικές λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων οριακής τιμής. Ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση, ο υπολογισμός μπορεί να γίνει απρόσιτος με αναλυτικά μέσα, όταν λαμβάνονται υπόψη υψηλές τάξεις προσέγγισης. Επομένως, η χρήση προσεγγιστικών μεθόδων καθίσταται αναπόφευκτη, φέρνοντας μαζί αριθμητικά σφάλματα που διαδίδονται στους διαδοχικούς υπολογισμούς.

Η διαδικασία που περιγράφετε στην παρούσα διπλωματική είναι καθαρά αναλυτική και παρέχει με ακρίβεια όλες τις προσεγγίσεις χαμηλών συχνοτήτων οποιασδήποτε τάξης. Η προτεινόμενη μέθοδος παρεμβαίνει στη θεωρία χαμηλών συχνοτήτων στο βήμα του υπολογισμού των συντελεστών χαμηλής συχνότητας της συνολικής επέκτασης του πεδίου. Στοχεύει στην αντικατάσταση της αντιστροφής του διαφορικού τελεστή που εμπλέκεται στην επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων οριακής τιμής με απλό αλγεβρικό πολλαπλασιασμό, μειώνοντας έτσι το κόστος υπολογισμού, τόσο σε αναλυτική όσο και σε αριθμητική επεξεργασία, καθώς και να προσφέρει μια έκφραση κλειστής μορφής για κάθε συντελεστή χαμηλής συχνότητας. .

Το αποτέλεσμα προέρχεται από τη χρήση της φασματικής ιδιότητας του διαφορικού τελεστή Beltrami, μαζί με την ασυμπτωτική ανάλυση στη σφαίρα των χαμηλών συχνοτήτων. Η βασική ιδέα εισήχθη από τον Sommerfeld και έχει διατυπωθεί ως θεώρημα επέκτασης πρώτα σε μια περιοριστική περίπτωση από τον Atkinson , επεκτάθηκε από τους Barrar και Kay και συμπληρώθηκε στην πιο γενική του μορφή από τον Wilcox .

Η εργασία τους πρόσφερε ένα θεώρημα επέκτασης που παρέχει την επέκταση του μακρινού πεδίου μιας λύσης της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, ως προς τις αντίστροφες δυνάμεις της απόστασης. Απέδειξαν ότι μια τέτοια διαστολή συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο εξωτερικό μιας σφαίρας που περιβάλλει τον σκεδαστή. Έδειξαν επίσης ότι οι συντελεστές μιας

τέτοιας επέκτασης μπορούν όλοι να συναχθούν από το πλάτος σκέδασης ή το μοτίβο του μακρινού πεδίου, μέσω μιας μάλλον απλής σχέσης επανάληψης που περιλαμβάνει τον τελεστή Beltrami. Η επέκταση που θα προκύψει θα αναφέρεται σε αυτή την εργασία ως επέκταση (AW), τιμώντας τους κύριους συντελεστές για την τελική της μορφή.

Όπως έχει ήδη προτείνει ο Kleinman από το 1965 , η επέκταση (AW) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή των συντελεστών σκέδασης χαμηλής συχνότητας του αντίστοιχου προβλήματος. Ειδικότερα, αναπτύσσεται μια μέθοδος κατασκευής, με την οποία η λύση ενός γενικού προβλήματος σκέδασης εκφράζεται ρητά ως προς το αντίστοιχο δυνητικό πρόβλημα. Η επέκταση (AW) εισέρχεται στη μέθοδο κατασκευής προσφέροντας μια βολική έκφραση για το διάσπαρτο πεδίο, τροποποιημένη κατάλληλα ώστε να πληροί τις ιδιότητες κανονικότητας που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου. Αυτή η μέθοδος οδηγεί σε μια ολοκληρωτική-διαφορική εξίσωση, η οποία λύνεται επαναληπτικά για αρκετά μικρές τιμές του κυματάρθρου . Από όσο γνωρίζουμε, καμία άλλη χρήση της επέκτασης (AW) δεν γίνεται για τη λήψη των συντελεστών σκέδασης χαμηλής συχνότητας.

Ωστόσο, άλλες μέθοδοι υπολογισμού για την πλήρη ασυμπτωτική επέκταση του σκεδαζόμενου πεδίου στις χαμηλές συχνότητες εμφανίζονται στη βιβλιογραφία όπου έχουν χρησιμοποιηθεί τεχνικές μεταβλητότητας σε σχέση με το πρόβλημα της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης και στο κλιμακωτό όριο του αντίστοιχα, αλλά οι υπολογισμοί δεν εξαλείφουν την ανάγκη της αντιστροφής ενός διαφορικού τελεστή ή της λύσης μιας μεταβλητής εξίσωσης. Επιπλέον έχει αποδειχτεί ότι οι συντελεστές σκέδασης για την εξίσωση μειωμένου κύματος παρουσία ενός διαπερατού σκεδαστή σε δύο διαστάσεις συνδέονται άμεσα με τους συντελεστές Fourier του πλάτους σκέδασης του προβλήματος, χαρακτηριστικό επίσης κυρίαρχο στην αλγεβρική μέθοδο που προτείνουμε σε αυτή την διπλωματική εργασία.

Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία ξεκινάμε αναπτύσσοντας περαιτέρω την (AW) ανάπτυξη της λύσης του προβλήματος σκέδασης βαθμωτού πεδίου, με στόχο την απευθείας απόκτηση των συντελεστών χαμηλών συχνοτήτων. Η ανάλυση βασίζεται στην ανάπτυξη του πλάτους σκέδασης με όρους των ιδιοσυναρτήσεων Beltrami και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση επαναφοράς, αποκτάται η πλήρης (AW) ανάπτυξη της λύσης του προβλήματος. Έπειτα, αναδιατάσσοντας τους όρους της σειράς και χρησιμοποιώντας κατάλληλη ασυμπτωτική ανάλυση στο πλαίσιο των χαμηλών συχνοτήτων, αποκτάται η αντίστοιχη ανάπτυξη, η οποία θα αναφέρεται στο εξής ως η (LF) ανάπτυξη στην παρούσα εργασία. Το αποτέλεσμα είναι μια αλγεβρική αναλυτική διαδικασία, που παρέχει τους συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων του ολικού πεδίου στο εξωτερικό της μικρότερης σφαίρας που περιβάλλει τον σκεδαστή.

Η διαδικασία αυτή απεικονίζεται με μια εφαρμογή στο πρόβλημα ακουστικής σκέδασης με επίπεδο κύμα που προσπίπτει σε σφαιρικό σκεδαστή, ο οποίος φυσικά χαρακτηρίζεται ως μαλακός, σκληρός ή αντιστατικός. Η προτεινόμενη διαδικασία επιβεβαιώνεται ότι παράγει τους πρώτους έξι συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων σε κάθε περίπτωση, ενώ παρέχει ένα ακριβές εύρος τιμών αριθμού κύματος για το οποίο αυτή η διαδικασία είναι έγκυρη. Η κωδικοποίηση της διαδικασίας σε έναν αριθμητικό αλγόριθμο για την παροχή του συντελεστή χαμηλών συχνοτήτων οποιασδήποτε τάξης είναι μια απλή διαδικασία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρόλο που η επίδειξη βασίζεται σε ένα καλά μελετημένο πρόβλημα σκέδασης, εντούτοις παρουσιάζει δύο νέα χαρακτηριστικά. Πρώτον, παρέχει αναλυτικά και με ακρίβεια όλους τους συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων του ολικού πεδίου, όσο υψηλοί και αν είναι αυτοί, μέσω απλών αλγεβρικών τελεστών, αντί για τους διαφορικούς ή ολοκληρωτικούς τελεστές που συνήθως χρησιμοποιούνται για τον ίδιο σκοπό. Έτσι, επιτυγχάνεται χωρίς σφάλματα πρόσβαση σε όρους υψηλής τάξης της ανάπτυξης χαμηλών συχνοτήτων, που μπορεί να έχει αξιοσημείωτη επίδραση στην ανακατασκευή ενός στόχου με βελτιωμένη ανάλυση. Δεύτερον, η απλότητα της γεωμετρίας και της φυσικής του σκεδαστή που χρησιμοποιείται στο παρουσιαζόμενο παράδειγμα αποκαλύπτει τις δυνητικές δυνατότητες της προτεινόμενης μεθόδου, καθώς και τις επιπτώσεις που εμπλέκονται στη διαδικασία, χωρίς να προστίθενται περαιτέρω επιπλοκές λόγω πιο περίπλοκων προβλημάτων σκέδασης. Έτσι, το ενδιαφέρον της επίδειξης επικεντρώνεται στη βελτίωση της μεθόδου υπολογισμού που προσφέρει η χρήση του θεωρήματος Atkinson-Wilcox, το οποίο αποτελεί το κλειδί της προτεινόμενης μεθόδου.

Η εφαρμογή της διαδικασίας έξω από μια διαπερατή σφαίρα ή, πιο σημαντικά, στο εξωτερικό της σφαίρας που περιβάλλει οποιονδήποτε σκεδαστή βρίσκεται υπό την τρέχουσα έρευνά μας.

Συγκεκριμένα, οι παράγραφοι 5.1 , 5.2 , 5.3 περιλαμβάνουν τη διατύπωση του προβλήματος σκέδασης σε σχέση με τις συνθήκες ορίου Dirichlet, Neumann και Robin, καθώς και τη διατύπωση του θεωρήματος (AW) ανάπτυξης. Επιπλέον, παρέχονται οι βασικές ιδέες της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων. Στην παράγραφο 5.4 παρουσιάζεται η προτεινόμενη διαδικασία σε τρεις υποπαραγράφους καταλήγοντας έτσι στον τελικό τύπο στην Ενότητα 5.4.3 , ο οποίος παρέχει την τελική μορφή του συντελεστή σκέδασης (LF) της τάξης n και προσφέρει το βασικό αποτέλεσμα της παρούσας εργασίας. Στην Ενότητα 5.5 η διαδικασία εφαρμόζεται για την περίπτωση ενός μαλακού, σκληρού και αντιστατικού σφαιρικού σκεδαστή. Συγκεκριμένα, οι συντελεστές της σφαιρικής ανάπτυξης του πλάτους σκέδασης για κάθε περίπτωση υπολογίζονται ως σειρά αυξανόμενων δυνάμεων του αριθμού κύματος. Το εύρος των

τιμών του αριθμού κύματος για το οποίο η μέθοδος εφαρμόζεται αποκαλύπτεται εδώ. Στην Ενότητα 5.6 εφαρμόζεται ο βασικός τύπος και υπολογίζονται οι πρώτοι έξι συντελεστές σκέδασης (LF) για κάθε πρόβλημα, ανακτώντας τα υπάρχοντα αποτελέσματα, γνωστά έως την τρίτη τάξη. Παρέχονται επίσης δύο ακόμη τάξεις προσέγγισης, αποδίδοντας την εύκολη και ακριβή μέθοδο παραγωγής νέων αποτελεσμάτων που προσφέρει η προτεινόμενη μέθοδος.

5.1 Το πεδίο σκέδασης ως λύση ενός εξωτερικού προβλήματος οριακών τιμών

Έστω $V^- = B(0, \alpha) = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r < \alpha, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\}$ να δηλώνει το εσωτερικό μιας μη διαπερατής σφαίρας με οριακή επιφάνεια $S = \partial B(0, \alpha)$. Εξετάζουμε ένα ακουστικό αρμονικό επίπεδο κύμα $U^i(r, t) = e^{ik\hat{k}\cdot r - i\omega t}$ που διαδίδεται στην πολική κατεύθυνση $\hat{k} = -z$ στο $V^+ = \mathbb{R}^3 - \{B(0, \alpha) \cup S\}$ με κυματάριθμο $k > 0$ και γωνιακή συχνότητα ω . Η διάδοση διαταράσσεται από τη σφαίρα $\bar{V} = V^- \cup S$ παράγοντας ένα σκεδασμένο πεδίο $U(r, t) = u(r)e^{-i\omega t}$ και ένα συνολικό πεδίο κύματος $U^+(r, t) = U(r, t) + U^i(r, t)$ που διαδίδεται στο μέσο που καταλαμβάνει το V^+ . Υποθέτοντας ότι όλα τα πεδία έχουν αρμονική χρονική εξάρτηση ορίζουμε τα αντίστοιχα πεδία κυμάτων με μειωμένο χρόνο ως $u^i(r), u(r), u^+(r)$. Το μειωμένο σκεδασμένο πεδίο ικανοποιεί το ακόλουθο εξωτερικό πρόβλημα οριακών τιμών:

$$(\Delta + \kappa^2)u(r) = 0, \quad r \in V^+ \quad (1)$$

$$r \left[\frac{\partial}{\partial r} u(r) - iku(r) \right] = 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (2)$$

όπου η συνθήκη ακτινοβολίας ισχύει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Μια κατάλληλη οριακή συνθήκη για το συνολικό πεδίο στο S αντανακλά τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή, δηλαδή

$$au^+(r) + b \frac{\partial}{\partial r} u^+(r) = 0, \quad r \in S \quad (3)$$

όπου οι παράμετροι a, b καθορίζουν τις οριακές συνθήκες σε σχέση με τον σκεδαστή. Συγκεκριμένα, μια μαλακή οριακή επιφάνεια αντιστοιχεί στη συνθήκη Dirichlet με $(a, b) = (1, 0)$, ο σκληρός σκεδαστής αντιπροσωπεύεται από $(a, b) = (0, 1)$, και ένας σκεδαστής με αντίσταση αποδίδεται από $(a, b) = (ik\nu, 1)$ με $\nu > 0$ μία θετική σταθερά, σε σχέση με τις συνθήκες Neumann και Robin αντίστοιχα. Η λύση δίνεται για κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα οριακών τιμών :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(kr) P_n(\cos\theta)$$

όπου το h_n είναι η σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους, τα P_n είναι τα πολυώνυμα του Legendre, και το j_n είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, όπου όλες οι συναρτήσεις θεωρούνται στον νιοστό βαθμό. Για το πρόβλημα Dirichlet, οι συντελεστές a_n δίνονται από:

$$a_n = -\frac{(2n+1)i^n j_n(ka)}{h_n(ka)}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Ενώ για το πρόβλημα Neumann οι συντελεστές είναι

$$a_n = \frac{-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka)]}{\frac{\partial}{\partial a} h_n(ka)}$$

και για το πρόβλημα Robin οι συντελεστές είναι

$$a_n = \frac{-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka) + v(2n+1)i^n j_n(ka)]}{\frac{\partial}{\partial a} h_n(ka) + ikv h_n(ka)}$$

για $n=0,1,2,\dots$ όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σημείωση $\frac{\partial}{\partial a} h_n(ka) = \frac{\partial}{\partial a} h_n(kr)|_{r=a}$. Επιπλέον, όταν εξετάζουμε το πρόβλημα (1)-(3) με μια επιφάνεια σκέδασης αρκετά ομαλή αλλά πιο γενική από τη σφαίρα S , η ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση του σκεδασμένου πεδίου $u(r)$ είναι χρήσιμη :

$$a(r)u(r) = \frac{ik}{4\pi} \int_S [u^+(r') \partial_{n'} G(r, r') - G(r, r') \partial_{n'} u^+(r')] ds(r') \quad (4)$$

όπου

$$\alpha(r) = \begin{cases} 1, & r \in V^+ \\ \frac{1}{2}, & r \in S \\ 0, & r \in V^- \end{cases}$$

$\partial_{n'}$ υποδηλώνει την κανονική παραγωγή στο σημείο $r' \in S$ και η $G(r, r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{ik|r-r'|}$ είναι η θεμελιώδης λύση του τελεστή Helmholtz. Λαμβάνοντας το σημείο παρατήρησης r μακριά από τον σκεδαστή και εφαρμόζοντας σωστά την ασυμπτωτική έκφραση της $G(r, r')$, η ολοκληρωτική αναπαράσταση υποδηλώνει ότι το σκεδασμένο πεδίο λαμβάνει την ασυμπτωτική μορφή

$$u(r) = g(\hat{r}) \frac{e^{ikr}}{ikr} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

για $r \rightarrow \infty$ όπου

$$g(\hat{r}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S [\partial_{n'} u^+(r') + ik(\hat{r} \cdot \hat{n}') u^+(r')] e^{-ik\hat{r} \cdot r'} ds(r')$$

είναι το μοτίβο του πεδίου σε μακρινό σημείο, ή το πλάτος σκέδασης, του πεδίου $u(r)$. Η φυσική του σκεδαστή, όπως εκφράζεται μέσω της οριακής συνθήκης του αντίστοιχου προβλήματος σκέδασης, αντανακλάται στο μοτίβο του πεδίου σε μακρινό σημείο μέσω του επιφανειακού ολοκληρώματος στην επιφάνεια S

5.2. Το θεώρημα επέκτασης στο μακρινό πεδίο

Στην πιο γενική της διατύπωση και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σημειογραφία, το θεώρημα επέκτασης στο μακρινό πεδίο διατυπώνεται ως εξής. Έστω ότι $u(r)$ είναι μια λύση κλάσης C^2 με μιγαδική τιμή της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό V^+ της κλειστής πεπερασμένης επιφάνειας S , η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στη ασθενή της μορφή, δηλαδή:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r=R} \left| \frac{\partial u(r)}{\partial r} - iku(r) \right|^2 ds = 0$$

όπου το $k \neq 0$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί $\text{Im}k \geq 0$. Τότε το $u(r)$ λαμβάνει την αναπαράσταση των παρακάτω σειρών:

$$u(r) = h(kr) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m(\hat{r})}{r^m}, \quad r > a$$

όπου $h(kr) = \frac{e^{ikr}}{ikr}$ είναι η σφαιρική συνάρτηση Hankel μηδενικού βαθμού. Οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V^+ , δηλαδή για $r \geq a + \epsilon$ για κάθε πραγματικό αριθμό $\epsilon > 0$, όπου a είναι η ακτίνα της σφαίρας που περιγράφει την επιφάνεια S . Οι σειρές μπορούν να παραχθούν όρο προς όρο σε σχέση με τις σφαιρικές συντεταγμένες r , θ και ϕ και οι προκύπτουσες σειρές όλες συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα.

Οι συντελεστές F_m εξαρτώνται από την κατεύθυνση παρατήρησης αλλά όχι από την απόσταση r . Αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν τη σχέση επανάληψης

$$2ikmF_m(\hat{r}) = [B + m(m-1)]F_{m-1}(\hat{r}), \quad m=1,2,3,\dots \quad (5)$$

όπου το B είναι ο τελεστής Beltrami και προφανώς, όλοι καθορίζονται μέσω της προηγούμενης σχέσης, σε σχέση με τον συντελεστή μηδενικού βαθμού. Εάν η συνάρτηση u περιγράφει ένα πεδίο κύματος που ικανοποιεί ένα συγκεκριμένο

πρόβλημα σκέδασης, τότε ο συντελεστής μηδενικού βαθμού συμπίπτει με το πλάτος σκέδασης, δηλαδή

$$F_0(\hat{r})=g(\hat{r}) \quad (6)$$

Η φυσική του αντίστοιχου προβλήματος σκέδασης αποτυπώνεται στους συντελεστές F_m , οι οποίοι εξαρτώνται από τον αριθμό κύματος k , από την κατεύθυνση πρόσπτωσης \hat{k} , από την κατεύθυνση παρατήρησης \hat{r} και επίσης από τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή, μέσω της εξάρτησής τους από το πλάτος σκέδασης. Σε αυτό το πλαίσιο, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αναφερόμαστε στην αναπαράσταση των προηγούμενων αναφερόμενων σειρών ως την ανάπτυξη (AW) του σκεδασμένου πεδίου και στους συντελεστές F_m ως τους συντελεστές επέκτασης (AW) του u .

5.3 Χαμηλές συχνότητες επεκτάσεων

Η βασική ιδέα της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων είναι να αξιοποιηθεί το γεγονός ότι η λύση του προβλήματος σκέδασης (1)–(3) είναι αναλυτική συνάρτηση στο $k=0$. Επομένως, το σκεδασμένο πεδίο δέχεται μια συγκλίνουσα ανάπτυξη σειρών ισχύος της μορφής

$$u(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n(r), \quad r \in V^+ \cup S$$

ενώ το προσπίπτον πεδίο είναι επίσης αναλυτικό στο $k=0$ και δέχεται μια ανάπτυξη σειρών ισχύος

$$u^i(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik \hat{k} \cdot r)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n(r)$$

όπου $u_n^i(r) = (\hat{k} \cdot r)^n$

Συνεπώς, το συνολικό πεδίο στο V^+ είναι αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής k και μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$u^+(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n^+(r), \quad r \in V^+ \cup S$$

Οι συντελεστές $u_n(r), u_n^i(r), u_n^+(r)$ είναι οι προσεγγίσεις χαμηλών συχνοτήτων κάθε πεδίου και σε αυτό το πλαίσιο θα αναφέρονται ως οι αντίστοιχοι συντελεστές (LF). Η σύγκλιση όλων των παραπάνω σειρών ορίζει την περιοχή Rayleigh. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω επεκτάσεις στο πρόβλημα (1)–(3) καθώς και στην ολοκληρωτική αναπαράσταση (4) και εξισώνοντας τις δυνάμεις του k , οι συντελεστές (LF) αποδεικνύονται ότι ικανοποιούν την ακόλουθη ακολουθία ελλειπτικών προβλημάτων οριακής τιμής, για $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Delta u_n^+(r) = n(n+1)u_{n-2}^+(r), \quad r \in V^+ \quad (7)$$

$$a u_n^+(r) + b \frac{\partial}{\partial r} u_n^+(r) = 0, \quad r \in S \quad (8)$$

όπου οι παράμετροι a, b έχουν ήδη οριστεί.

Για υψηλές τάξεις προσέγγισης, η επίλυση του προβλήματος οριακής τιμής (7)-(8) μπορεί να γίνει αρκετά περίπλοκη, κυρίως λόγω της ανάγκης να έχουν αποκτηθεί όλες οι χαμηλότερες τάξεις προσεγγίσεων και επίσης ώστε να βρεθεί μια ιδιαίτερη λύση της εξίσωσης Poisson, η οποία έχει την τελευταία προσέγγιση ως μη ομοιογενές μέρος της. Αυτή η δυσκολία έχει ξεπεραστεί εν μέρει στη θεωρία χαμηλών συχνοτήτων, αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση

$$f_n^+(r) = (\hat{k} \cdot r)^n + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} \int_S \left[u_{n-m}^+(r') \partial n'^{|r-r'|^{m-1}} - |r-r'|^{m-1} \partial n'^{u_{n-m}^+} \right] ds(r')$$

είναι μια ιδιαίτερη λύση του (5). Τότε η λύση του προβλήματος (7)-(8) γράφεται ως

$$u_n^+(r) = u_n(r) + f_n^+(r)$$

όπου η συνάρτηση u_n ικανοποιεί το πρόβλημα:

$$\Delta u_n^+ = 0, \quad r \in V^+ \quad (9)$$

$$a u_n(r) + b \frac{\partial}{\partial r} u_n(r) = -a f_n^+(r) - b \frac{\partial}{\partial r} f_n^+(r), \quad r \in S \quad (10)$$

Το πρόβλημα (7)-(8) είναι πιο κοντά στην εύρεση μιας αρμονικής συνάρτησης που ικανοποιεί την εξίσωση (10), αλλά η εξακολουθητική υπολογιστική του f_n^+ μέσω της παραπάνω συνάρτησης, που περιλαμβάνει τη λύση όλων των προβλημάτων οριακής τιμής (9)-(10) για τάξεις μικρότερες ή ίσες του n , είναι αναπόφευκτη απαίτηση. Καθώς η τάξη n αυξάνεται, τέτοιοι υπολογισμοί γίνονται διαχειρίσιμοι μόνο με αριθμητικές μεθόδους, προκαλώντας έτσι αριθμητικά σφάλματα που διαδίδονται στη σειρά των λύσεων που απαιτούνται σε κάθε συγκεκριμένο υπολογισμό του u_n^+ .

Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε μια αλγεβρική διαδικασία που αποσκοπεί στον ακριβή υπολογισμό των συντελεστών (LF) u_n^+ παρακάμπτοντας οποιαδήποτε παρέμβαση διαφορικού τελεστή. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε τα κύρια βήματα της προτεινόμενης αλγοριθμικής διαδικασίας.

5.4. Από τους συντελεστές (AW) στους συντελεστές (LF)

Η διαδικασία που προτείνουμε βασίζεται στην εφαρμογή του θεωρήματος ανάπτυξης μακράς απόστασης στο σκεδαζόμενο πεδίο, που ικανοποιεί το πρόβλημα (1)-(3). Επομένως, παραδέχεται την ανάπτυξη (AW), όπου είδαμε στην παράγραφο 5.2, στην οποία αναδιατάσσουμε τους όρους ώστε να παραχθεί, για αρκετά χαμηλούς αριθμούς κυμάτων, η αντίστοιχη ανάπτυξη (LF), η οποία με τη σειρά της παρέχει άμεσα τους συντελεστές $u_n^+(r)$. Το πρώτο βήμα είναι να εκφραστούν οι συντελεστές $F_m(\hat{r})$ της ανάπτυξης (AW) σε κλειστή μορφή, σε σχέση με τις ιδιοσυναρτήσεις Beltrami οι οποίες, όταν η ακτινική συμμετρία χαρακτηρίζει το πρόβλημα, είναι οι πολωνομικές του Legendre, διαφορετικά είναι οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις επιφάνειας. Αυτό το βήμα επιτυγχάνεται για την περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας, την οποία

χρησιμοποιούμε για να παρουσιάσουμε τη μέθοδο σε αυτό το έργο. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, χρειάζεται να γίνει ανάλογη τροποποίηση.

5.4.1. Γενική μορφή των συντελεστών $F_m(\hat{r})$ της ανάπτυξης (AW)

Η αναδρομική σχέση (5) παρέχει τα μέσα για να εκφραστούν όλοι οι συντελεστές (AW) σε σχέση με τον F_0 και μέσω της (6) να εξειδικευτούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Ωστόσο, η (5) ισχύει για $m=1,2,3\dots$, οπότε σε όλα τα επόμενα βήματα, χειριζόμαστε τους υπολογισμούς μηδενικής τάξης ξεχωριστά από εκείνους των υψηλότερων τάξεων.

Ο συντελεστής μηδενικής τάξης (AW):

Όπως αποδείξαμε προηγουμένως ο συντελεστής μηδενικής τάξης $F_0(\hat{r})$ συμπίπτει με το πλάτος σκέδασης $g(\hat{r})$. Σε αυτό το σημείο, το πλάτος σκέδασης πρέπει να αναπτυχθεί στις ιδιοσυναρτήσεις Beltrami. Για το σφαιρικό πρόβλημα (1)-(3), λόγω της ασυμπτωτικής μορφής της ολοκληρωτικής αναπαράστασης και χρησιμοποιώντας την $h_n^{(1)}(kr) \sim h(kr)i^{-n}$, το σκεδαζόμενο πεδίο για $r \rightarrow \infty$ γράφεται ως:

$$u(r) = h(kr) \quad (11)$$

που συνεπάγεται ότι

$$F_0(\hat{r}) = g(\hat{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n i^{-n} P_n(\cos\theta) \quad (12)$$

Οι συντελεστές (AW) F_m για $m=1,2,\dots$:

Στην περίπτωση της ανεξαρτησίας ως προς την αζιμουθιακή γωνία, ο τελεστής Beltrami δίνεται από τη σχέση

$B = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta})$ και τα πολυώνυμα Legendre P_n είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του, αντιστοιχίζοντας στην ιδιοτιμή $-n(n+1)$, για $n=1,2,\dots$, δηλαδή:

$$BP_n(\cos\theta) = -n(n+1)P_n(\cos\theta) \quad (13)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (13) στην αναδρομική σχέση (5), προκύπτει:

$$F_m(r) = \frac{1}{2ikm} [B + m(m-1)][B + (m-1)(m-2)]F_{m-2}(\hat{r}) = \dots = \frac{1}{(2ik)^m m!} \left\{ \prod_{j=1}^m [B + (m-j+1)(m-j)] \right\} F_0(\hat{r}) \quad (14)$$

Δυνάμει των (13) και (6), η εξίσωση (14) οδηγεί σε:

$$F_m(r) = \frac{1}{m!} \frac{1}{(2ik)^m} \left\{ \prod_{j=1}^m [-n(n+1) + (m-j+1)(m-j)] \right\} a_n i^{-n} P_n(\cos\theta)$$

Και για την περίπτωση του σφαιρικού σκεδαστή, μέσω της (12): $F_m(\hat{r}) =$

$$\frac{1}{m!} \frac{1}{(2ik)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^m [-n(n+1) + (m-j+1)(m-j)] \right\} a_n i^{-n} P_n(\cos\theta) \quad (15)$$

Σε αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι οι πρώτοι m όροι της σειράς στην (15) ακυρώνονται, καθώς γράφονται ως:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{m-1} \left\{ \prod_{j=1}^m [-n(n+1) + (m-j+1)(m-j)] \right\} \\ &= \prod_{j=1}^m [0 + (m-j+1)(m-j)] + \dots \\ &+ \prod_{j=1}^m [-n(n-1) + (m-j+1)(m-j)] + \dots \\ &+ \prod_{j=1}^m [-m(m-1) + (m-j+1)(m-j)] = 0 \end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $0 \leq n \leq m-1$ υπάρχει $j=m-n \in \{1,2,\dots,m\}$ τέτοιο ώστε $n(n+1)=(m-j+1)$, και επομένως η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ακύρωσης κάθε όρου του αθροίσματος. Συνεπώς, οι συντελεστές (AW) για την περίπτωση του σφαιρικού σκεδαστή για $m \geq 1$ γράφονται σε όρους των πολυωνύμων Legendre στη μορφή:

$$F_m(\hat{r}) = \frac{1}{m!} \frac{1}{(2ik)^m} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^m [-n(n+1) + (m-j+1)(m-j)] \right\} a_n i^{-n} P_n(\cos\theta) \quad (16)$$

5.4.2 Εισαγωγή των συντελεστών $\tilde{F}_m(\mathbf{r})$

Ορισμός: Έστω ότι $F_m(\hat{r})$ είναι ο συντελεστής (AW) τάξης $m = 0$, όπως δίνεται στην (12), ή τάξης $m \geq 1$, όπως δίνεται στην (16). Ορίζουμε ως $F_{m-j}(\hat{r})|k^{m+1}$ τον όρο της σειράς που αντιστοιχεί στον συντελεστή (AW) $F_{m-j}(\hat{r})$, ο οποίος έχει ως παράγοντα τον όρο k^{m+1} . Τότε, ο συντελεστής $\tilde{F}_m(r)$ ορίζεται ως εξής:

$$F_m(\hat{r}) = F_m(\hat{r})|k^{m+1} + r F_{m-1}(\hat{r})|k^{m+1} + \dots + r^m F_0(\hat{r})|k^{m+1} = \sum_{j=0}^m r^j F_{m-j}(\hat{r})|k^{m+1} \quad (17)$$

Πρόταση .

Η ακόλουθη ισότητα ισχύει:

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m(\hat{r})r^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{F}_m(r)r^{-m} \quad (18)$$

Απόδειξη. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (17), δηλαδή:

$$\widetilde{F}_0(r) = F_0(\hat{r})|k$$

$$\widetilde{F}_1(r) = rF_0(\hat{r})|k^2 + F_1(\hat{r})|k^2$$

$$\widetilde{F}_2(r) = r^2F_0(\hat{r})|k^3 + rF_1(\hat{r})|k^3 + F_2(\hat{r})|k^3$$

και ούτω καθεξής, και αναδιατάσσοντας τους όρους στη δεξιά πλευρά της (18) σύμφωνα με τις αντίστροφες δυνάμεις του r , έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{F}_m(r)r^{-m} &= \widetilde{F}_0(r) + \widetilde{F}_1(r)r^{-1} + \dots + \widetilde{F}_m(r)r^{-m} + \dots = F_0(\hat{r})|k + F_0(\hat{r})|k^2 + F_0(\hat{r})|k^3 + \\ &\dots + F_1(\hat{r})|k^2r^{-1} + F_1(\hat{r})|k^3r^{-1} + F_1(\hat{r})|k^4r^{-1} + \dots + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} F_0(\hat{r})|k^{j+1} + \\ \sum_{j=1}^{\infty} F_1(\hat{r})|k^{j+1}r^{-m} + \dots &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} F_m(\hat{r})|k^{j+1}r^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\hat{r})r^{-m} \end{aligned} \quad (19)$$

Τώρα, η (19) είναι προφανής, εφόσον αποδείξουμε ότι $\sum_{j=m}^{\infty} F_m(\hat{r})|k^{j+1} = F_m(\hat{r})$ ή με άλλα λόγια ότι ο F_m είναι το σύνολο όλων των όρων που έχουν τον k^{j+1} ως παράγοντα, για $j \geq m$.

Επομένως, η εξάρτηση του F_m από το k παρέχεται μέσω των συντελεστών, για $n \geq m$ $\frac{a_n}{(2ik)^m}$. Όπως θα δειχθεί στην επόμενη ενότητα, είτε για το πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet, Neumann ή Robin, κάθε συντελεστής a_n περιλαμβάνει δυνάμεις του k μεγαλύτερες ή ίσες με k^{2n+1} , για $n \geq 0$. Επομένως, η εξάρτηση του F_m από το k περιλαμβάνει δυνάμεις του k μεγαλύτερες ή ίσες με k^{m+1} και η απόδειξη της Πρότασης (11) ολοκληρώνεται.

Παρατήρηση. Για να διευκρινίσουμε τον παραπάνω ορισμό, χρησιμοποιούμε προκαταβολικά την παραπάνω παρατήρηση από την επόμενη ενότητα και γράφουμε τον a_n στη μορφή $a_n = \sum_{l=2n+1}^{\infty} A_{n,l}(\hat{r})k^l$, ώστε η (16) να μπορεί να γραφτεί ως

$$F_m(\hat{r}) = \sum_{n=m}^{\infty} f_{n,m}(\hat{r}) \sum_{l=2n+1}^{\infty} A_{n,l}(\hat{r})k^{l-m} \quad (20)$$

Όπου

$$f_{n,m}(\hat{r}) = \frac{1}{m!} \frac{1}{(2i)^m} \left\{ \prod_{j=1}^m [-n(n+1) + (m-j+1)(m-j)] \right\} i^{-n} P_n(\cos\theta)$$

Η δύναμη $m+1$ προκύπτει για $l=2m+1$ και $n=m$. Ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $f_{m,m}A_{m,2m+1}$. Παρομοίως, είναι εύκολο να δει κανείς, σύμφωνα με την εξίσωση (20), ότι για $\lambda=0,1,2,\dots,m$

$$F_{m-\lambda}(\hat{r})|k^{m+1} = f_{m-\lambda,m-\lambda}(\hat{r})A_{m-\lambda,2m+1-\lambda}(\hat{r})k^{m+1}$$

Συνεπώς,

$$\tilde{F}_m(r) = \sum_{j=0}^m r^j f_{m-j,m-j}(\hat{r}) A_{m-j,2m+1-l}(\hat{r}) k^{m+1} \quad (21)$$

Παρατήρηση : Σύμφωνα με τον Ορισμό και την έκφραση (21), ο συντελεστής \tilde{F}_m μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} &= k^{m+1} A, \text{ όπου το άθροισμα } A = \sum_{j=0}^m \frac{r^j f_{m-j,m-j} k^{m+1}}{k^{m+1}} = \\ &\frac{\tilde{F}_m}{k^{m+1}} \text{ είναι ανεξάρτητο από τον κυματάριθμο } k. \end{aligned}$$

5.4.3. Απόκτηση των συντελεστών χαμηλών συχνοτήτων (LF) $u_n^+(r)$:

Εφαρμόζοντας τις επεκτάσεις χαμηλής συχνότητας (LF) στο $u^+(r) = u^i(r) + u(r)$ και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (18), φτάνουμε στην εξίσωση:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n^+(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} (r \cos \theta)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \frac{r^{n-1}}{ik} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{F}_m(\hat{r}) r^{-m} \quad (22)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του γινομένου Cauchy στον τελευταίο όρο της (16) και εξισώνοντας τις αντίστοιχες δυνάμεις του ik καταλήγουμε:

$$u_n^+(r) = (r \cos \theta)^n + \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{r^{n-2m-1} m! \tilde{F}_m(r)}{(ik)^{m+1}} \quad (23)$$

Η έκφραση (23) είναι το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της παρούσας διπλωματικής, καθώς προτείνει τον αλγόριθμο για την αλγεβρική υπολογιστική των συντελεστών χαμηλής συχνότητας u_n^+ οποιασδήποτε τάξης $n \geq 0$. Η διαδικασία συνοψίζεται ως εξής: Το πρώτο βήμα είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές F_{m-j} , $j=0,1,\dots,m$ και $0 \leq m \leq n$, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις με τρόπο που αποκαλύπτει σαφώς την εξάρτηση από το k . Για να το επιτύχουμε αυτό, πρέπει πρώτα να εκφραστεί ο συντελεστής a_n , που εμπλέκεται σε κάθε F_{m-j} και φέρει τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, σε όρους δυνάμεων του k . Σε αυτό το σημείο, το k περιορίζεται στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση της προκύπτουσας σειράς. Στη συνέχεια, εξάγουμε τον όρο με παράγοντα k^{m+1} και κατασκευάζουμε κατάλληλα τον συντελεστή $\tilde{F}_m(r)$ από την εξίσωση (17). Τέλος, υποκαθιστούμε τον $\tilde{F}_m(r)$ στην εξίσωση (23) για να υπολογιστούν οι συντελεστές u_n^+ .

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου 5, παρουσιάζουμε αναλυτικά την προτεινόμενη διαδικασία, υπολογίζοντας ρητά τους πρώτους έξι συντελεστές χαμηλής συχνότητας (LF) του συνολικού πεδίου, για την περίπτωση του μαλακού, του σκληρού και του αντιστατικού σφαιρικού σκεδαστή. Αυτή η υλοποίηση πραγματοποιείται στην επόμενη ενότητα.

5.5 Υλοποίηση: Οι συντελεστές σκέδασης χαμηλών συχνοτήτων (LF) για μη διαπερατούς σφαιρικούς σκεδαστές:

Η επέκταση χαμηλών συχνοτήτων των συντελεστών a_n

Σε αυτή την ενότητα, θα εξάγουμε μια επέκταση χαμηλών συχνοτήτων του συντελεστή a_n για την περίπτωση ενός μαλακού, σκληρού και αντιστατικού σφαιρικού σκεδαστή, όπου αναπτύσσοντας περαιτέρω τις αντίστοιχες εκφράσεις που αφορούσαν τον συντελεστή a_n που αναφέραμε στην παράγραφο 5.1. Λόγω των αντίστοιχων ειδικών συναρτήσεων που εμπλέκονται, θα εργαστούμε ξεχωριστά για $n=0$ και για $n=1,2,\dots$

5.5.1. Η περίπτωση της μαλακής σφαίρας

Οι αντίστοιχοι συντελεστές a_n δίνονται μέσω της εξίσωσης

$$a_n = -\frac{(2n+1)i_n j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \quad (24)$$

η οποία για $n=0$ περιλαμβάνει τη σφαιρική συνάρτηση Bessel και τη σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτης τάξης και μηδενικής τάξης. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες μορφές αυτών των συναρτήσεων προκύπτει:

$$a_0 = -\frac{1}{h_0^{(1)}(ka)} j_0(ka) = -ika e^{-ika} \frac{\sin(ka)}{ka} = -i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ika)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ka)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

όπου και οι δύο σειρές συγκλίνουν απολύτως για κάθε τιμή του ka .

Για $n=1,2,\dots$ η εξίσωση (24) είναι πιο πολύπλοκη. Πρώτα υπολογίζουμε τον όρο $\frac{1}{h_n^{(1)}(ka)}$ χρησιμοποιώντας μια βολική έκφραση για το $h_n^{(1)}(ka)$ [1]:

$$\frac{1}{h_n^{(1)}(ka)} = \frac{1}{(-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^n \frac{i^m (n+m)!}{m! (2ka)^m (n-m)!}}$$

και αναπτύσσοντας κατάλληλα το άθροισμα στον παρονομαστή, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{1}{h_n^{(1)}(ka)} = \frac{(ka)^{n+1} e^{ika} n! 2^n}{(-1)^{n+1} i^{2n+1} (2n)!} \frac{1}{1-z}$$

όπου:

$$z = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m-n+1} n! 2^n (ika)^{n-m} (n+m)!}{m! 2^m (2n)! (n-m)!} \quad (25)$$

Λήμμα: Εάν $ka < \frac{1}{e-1}$, τότε η ακόλουθη ανισότητα ισχύει σε σχέση με την εξίσωση (25):

$$|z| < 1$$

Απόδειξη: Από την εξίσωση (25) είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$|z| \leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \frac{(-1)^{m-n+1} n! 2^n (ika)^{n-m} (n+m)!}{m! 2^m (2n)! (n-m)!} \right| = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n! 2^n (ka)^{n-m} (n+m)!}{m! 2^m (2n)! (n-m)!} \quad (26)$$

Ας θέσουμε:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{n! 2^n (ka)^{n-m} (n+m)!}{m! 2^m (2n)! (n-m)!} = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 \quad (27)$$

όπου το b_n είναι ο πρώτος (με $m=0$) όρος στην παραπάνω σειρά, το b_{n-1} είναι ο δεύτερος κ.ο.κ. Για $n=1$, η απόδειξη του παραπάνω λήμματος είναι άμεση, δεδομένου ότι $|z|=ka < 1$, το οποίο ισχύει στο καθεστώς χαμηλής συχνότητας. Για $n > 1$, αποδεικνύουμε το εξής:

Ισχυρισμός . Για κάθε ακέραιο d , με $0 \leq d < n-1$ και $ka < 1$, ισχύει ότι:

$$b_{n-d} < \frac{1}{n-d} b_{n-d-1}$$

Πράγματι,

$$b_{n-d} < \frac{1}{n-d} b_{n-d-1} \Leftrightarrow \frac{n! 2^n (ka)^{n-d} (n+d)!}{d! 2^d (2n)! (n-d)!} < \frac{1}{n-d} \frac{n! 2^n (ka)^{n-d-1} (n+d+1)!}{(d+1)! 2^{d+1} (2n)! (n-d-1)!} \Leftrightarrow ka < \frac{n+d+1}{2(d+1)}$$

Όπου αληθεύει για $n > 1$, $\frac{n+d+1}{2(d+1)} > 1$, ενώ $ka < 1$

Σύμφωνα με τον παραπάνω Ισχυρισμό και δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε $ka < \frac{1}{e-1} < 1$, καταλήγουμε ότι:

$$b_n < \frac{1}{n} b_{n-1} < \dots < \frac{1}{n!} b_1, \quad b_{n-1} < \frac{1}{(n-1)!} b_1, \quad \dots, \quad b_2 < \frac{1}{2} b_1 \quad (28)$$

Έτσι από (26), (27), (28)

$$|z| < b_1 \left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} \right] = ka \left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + 1 \right] < ka(e-1) < 1$$

Για $ka < \frac{1}{e-1}$ και η απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος ολοκληρώνεται.

Εφόσον αποδείξαμε ότι $|z| < 1$, μπορούμε να γράψουμε $\frac{1}{1-z} = \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{\mu}$
και εισάγοντας στην εξίσωση

$$\frac{1}{h_n^{(1)}(ka)} = \frac{1}{(-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^n \frac{i^m}{m! (2ka)^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}$$

προκύπτει:

$$\frac{1}{h_n^{(1)}(ka)} = \frac{(ka)^{n+1} e^{-ika} n! 2^n}{(-i)^{n+1} i^{2n+1} (2n)!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m-n+1} n! 2^n (kai)^{n-m} (n+m)!}{m! 2^m (2n)!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{\mu}$$

Για να αποκτήσουμε έναν γενικό τύπο για a_n , $n \geq 1$, προχωρούμε τώρα στον υπολογισμό της επέκτασης χαμηλών συχνοτήτων για τη σφαιρική συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, $j_n(ka)$. Αναφερόμενοι στη συνάρτηση Bessel J_n για $n \geq 1$ και στη υπεργεωμετρική συνάρτηση Γ , έχουμε:

$$j_n(ka) = \sqrt{\frac{\pi}{2k\alpha}} J_{n+\frac{1}{2}}(ka) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{k\alpha}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-k^2\alpha^2)^\lambda}{\lambda! 4^\lambda \Gamma(\lambda + n + \frac{3}{2})}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\Gamma\left(\lambda + n + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi} \prod_{t=0}^{n+\lambda} \left(t + \frac{1}{2}\right)$$

η σφαιρική συνάρτηση Bessel για $n=1,2,\dots$ δίνεται:

$$j_n(ka) = \frac{1}{2} \left(\frac{k\alpha}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-k^2\alpha^2)^\lambda}{\lambda! 4^\lambda \prod_{t=0}^{n+\lambda} \left(t + \frac{1}{2}\right)}$$

Και ο γενικός τύπος χαμηλής συχνότητας για τους συντελεστές a_n για $n \geq 1$, ο οποίος ισχύει για $ka < \frac{1}{e-1}$, λαμβάνει τη μορφή:

$$a_n = - \frac{(2n+1)(-i)^{-n-1} (ka)^{2n+1} n!}{2(2n)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-ika)^p}{p!} * \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m-n+1} n! 2^n (ika)^{n-m} (n+m)!}{(2n)! m! 2^m (n-m)!} \right]^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-k^2\alpha^2)^\lambda}{\lambda! 4^\lambda \prod_{t=0}^{n+\lambda} \left(t + \frac{1}{2}\right)} \quad (29)$$

Παρατήρηση : Η εξίσωση (29) είναι αρκετά περίπλοκη. Επιλέγουμε να μην αναλύσουμε περαιτέρω το γινόμενο των σειρών, διότι, σε αυτή την εργασία, τόσο η a_0 που είδαμε στην αρχή όσο και η (29) θα χρησιμοποιηθούν μόνο για την εξαγωγή ορισμένων μερικών αθροισμάτων, που περιλαμβάνουν τις δυνάμεις του k που μας ενδιαφέρουν. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το a_0 μέχρι τον όρο με παράγοντα $(ka)^l$, εξάγουμε τους όρους που αντιστοιχούν σε $n \leq l$ από τις σειρές που εμφανίζονται στην a_0 , παραλείποντας το υπόλοιπο της σειράς, το οποίο δεν μας ενδιαφέρει για τον σκοπό μας, και εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς στα μερικά αθροίσματα. Ομοίως,

εργαζόμενοι πάνω στους συντελεστές a_n για $n \geq 1$, εξάγουμε τον όρο με παράγοντα $(ka)^l$ δουλεύοντας με τα μερικά αθροίσματα των σειρών που εμπλέκονται στη σχέση (29) μέχρι τον όρο με παράγοντα $(ka)^{l-2n-1}$ όπου $l \geq 2n+1$

5.5.2. Η περίπτωση της σκληρής σφαίρας

Ακολουθώντας παρόμοια επιχειρήματα, προχωρούμε στην ανάλυση των συντελεστών a_n για την περίπτωση ενός σκληρού σφαιρικού σκεδαστή, προκειμένου να εμφανίσουμε την εξάρτησή τους από το k υπό τη μορφή σειράς δυνάμεων του k . Έτσι, ξεκινάμε με την αντίστοιχη έκφραση $a_n = -\frac{(2n+1)i^n j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}$ η οποία για $n=0$ δίνει:

$$a_0 = \frac{-ik j_1(ka)i}{\frac{\partial}{\partial a} h_0^{(1)}(ka)} = \frac{k j_1(ka)}{\frac{\partial}{\partial a} e^{ika}} = -ik^2 a^2 j_1(ka) \frac{e^{-ika}}{1-ika} = -ik^2 a^2 j_1(ka) \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-ika)^\nu}{\nu!} \sum_{\mu=0}^{\infty} (ika)^\mu \right] \quad (30)$$

όπου υπενθυμίζουμε τη σημειογραφία $\frac{\partial}{\partial a} h^{(1)}(ka) = \frac{\partial}{\partial r} h^{(1)}(kr)|_{r=a}$ για να προκύψει η (30), χρησιμοποιήσαμε την επέκταση $\frac{1}{1-ika} = \sum_{n=0}^{\infty} (ika)^n$, η οποία ισχύει για $|ika|=ka < 1$, περιορίζοντας έτσι την (30) να ισχύει μόνο στον χαμηλών συχνοτήτων περιοχή. Επιπλέον, το $j_1(ka)$ δίνεται από την $j_n(ka)$ που είδαμε προηγουμένως στην 5.5.1 παράγραφο σε σχέση με τις δυνάμεις του k . Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή του j_1 , δηλαδή:

$$j_1(ka) = \frac{1}{ka} \left[-\cos(ka) + \frac{\sin(ka)}{ka} \right]$$

μαζί με τις επεκτάσεις $\cos(ka) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ka)^{2n}}{(2n)!}$ και

$\sin(ka) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ka)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ Τότε η έκφραση (30) γίνεται:

$$a_0 = -ik^2 a^2 \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda+1} 2\lambda (ka)^{2\lambda-1}}{(2\lambda+1)!} \right] \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-ika)^\nu}{\nu!} \right] \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-ika)^\mu}{\mu!} \right] \left[\sum_{\mu=0}^{\infty} (ika)^\mu \right] \quad (31)$$

Στρέφοντας στο a_n για $n=1, 2, \dots$ ξεκινάμε με την μερική παράγωγο της σφαιρικής συνάρτησης Hankel $\frac{\partial}{\partial a} h^{(1)}(ka)$ που δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial a} h_n^{(1)}(ka) = \frac{\partial}{\partial a} \left[(-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^n \frac{i^m (n+m)! a^{-m}}{m! (2k)^m (n-m)!} \right] = (-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^n \frac{i^{m+1} k (n+m)! a^{-m} - (1+m) i^m (n+m)! a^{-m-1}}{m! (2k)^m (n-m)!} \quad (32)$$

και μετά από κάποια τεχνική επεξεργασία του πεπερασμένου αθροίσματος της (32) λαμβάνουμε

$$\frac{\partial}{\partial a} h^{(1)}(ka) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{i^{m+1} k (n+m+1)! [n(n+1+m(m+1))]}{m! 2^m (n-m+1)! (ka)^m} \quad (33)$$

Συνεπώς, καθώς η (33) χρειάζεται στον παρονομαστή του a_n , εργαζόμαστε στην έκφραση

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha} h^{(1)}(ka)} = \frac{a}{(-i)^{n+1} e^{ika} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{i^{m+1} k (n+m+1)! [n(n+1+m(m+1))]}{m! (2ka)^m (n-m+1)!}}$$

προκειμένου να εξάγουμε από το πεπερασμένο άθροισμα τον μεγαλύτερο όρο και να το φέρουμε στη μορφή

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha} h^{(1)}(ka)} = - \frac{(-i)^{n+1} (-1)^{n+1} a e^{-ika} (ka)^{n+1} n! 2^n}{i^n (2n)! (n+1)} \frac{1}{1-w}$$

όπου

$$w = \sum_{m=0}^n \frac{-i^{m-1} (n+m-1)! [n(n+1)+m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! i^n (2n)! (n+1)} \quad (34)$$

Λήμμα : Αν $ka < \frac{1}{e-1}$ τότε ο μιγαδικός αριθμός w , όπως ορίζεται στην (34), βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή $|w| < 1$.

Απόδειξη: Από την (34) έχουμε:

$$|w| \leq \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! [n(n+1)+m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n! 2^{n-m}}{m! (n-m+1)! (2n)! (n+1)} = \sum_{m=1}^{n+1} c_m \quad (35)$$

όπου, με το c_l , $l=1,2,\dots,n+1$ δηλώνουμε τον όρο του αθροίσματος που έχει ως παράγοντα το k^l . Είναι εύκολο να δούμε ότι το c_l αντιστοιχεί στον όρο που λαμβάνεται για $m=n+1-l$ του αθροίσματος.

Ισχυρισμός: Σε σχέση με τη σημειογραφία που υπονοείται στην (35), η ακόλουθη ανισότητα ισχύει για $ka < 1$ και για κάθε ακέραιο d , $0 \leq d < n$:

$$c_{n-d+1} < \frac{1}{n-d+1} c_{n-d} \quad (36)$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα τους όρους c_{n-d+1} και c_{n-d} με τους αντίστοιχους όρους του αθροίσματος στην (35), προκύπτει αμέσως ότι η ανισότητα είναι αληθής αν

$$ka < \frac{(n+d)[n(n+1)+(d+1)(d+2)]}{2(d+1)[n(n+1)+d(d+1)]} \quad (37)$$

Αλλά, προφανώς, $\frac{(n+d)[n(n+1)+(d+1)(d+2)]}{2(d+1)[n(n+1)+d(d+1)]} \geq 1$ για $0 \leq d < n$. Επομένως, η (37) ισχύει για $ka < 1$ και ο ισχυρισμός δικαιολογείται.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις (35) και (36), λαμβάνουμε

$$|w| \leq c_{n+1} + c_n + \dots + c_2 + c_1 < \left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} \right] c_1 < (e-1)ka < 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γεγονός που αποδεικνύει το παραπάνω Λήμμα.

Τώρα, δεδομένου ότι $|w| < 1$, η ανάπτυξη $\frac{1}{1-w} = \sum_{\mu=0}^{\infty} w^\mu$ είναι συγκλίνουσα και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να λάβουμε

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha} h^{(1)}(ka)} = - \frac{(-i)^{n+1} (-1)^{n+1} \alpha e^{-ika} (ka)^{n+1} n! 2^n}{i^n (2n)! (n+1)} * \quad (38)$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{-i^{m-1} (n+m-1)! [n(n+1)+m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! i^n (2n)! (n+1)} \right]^{\mu}$$

Περνώντας στον αριθμητή της εξίσωσης που είχαμε δει στην παράγραφο 5.1

$$-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka)] \quad \text{μπορούμε να τον γράψουμε ως}$$

$$-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka)] = -ki^n [nj_{n-1}(ka) - (n+1)j_{n+1}(ka)] =$$

$$-ki^n (2n+1) \frac{d}{d(ka)} j_n(ka) \quad (39)$$

όπου

$$\frac{d}{d(ka)} j_n(ka) = \frac{(ka)^{n-1}}{2^{n+1}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} (ka)^{2\lambda} (n+2\lambda)}{\lambda! 4^{\lambda} \prod_{t=0}^{n+\lambda} (t+\frac{1}{2})} \quad (40)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (38), (39) και (40) στην εξίσωση:

$$a_n = \frac{-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka)]}{\frac{\partial}{\partial \alpha} h^{(1)}(ka)}$$

λαμβάνουμε τους συντελεστές a_n , για $n \geq 1$ στη μορφή

$$a_n = \frac{(2n+1)i^{n+1} (ka)^{n+2} n! 2^n}{(2n)! (n+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ika)^n}{n!} * \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{-i^{m-1} (n+m-1)! [n(n+1)+m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! i^n (2n)! (n+1)} \right]^{\mu} *$$

$$\frac{(ka)^{n-1}}{2^{n+1}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} (ka)^{2\lambda} (n+2\lambda)}{\lambda! 4^{\lambda} \prod_{t=0}^{n+\lambda} (t+\frac{1}{2})} \quad (41)$$

Επισημαίνουμε εδώ ότι η εξίσωση (41) είναι έγκυρη για $ka < \frac{1}{e-1}$.

Παρατήρηση : Για άλλη μια φορά, επιλέγουμε να αφήσουμε τους συντελεστές a_n στη μορφή που δίνεται στις εξισώσεις (31) και (41), για $n=0$ και $n \geq 1$ αντίστοιχα, και να μην επεξεργαστούμε περαιτέρω τα γινόμενα των σειρών που εμπλέκονται. Αυτό οφείλεται στην πρόθεσή μας να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (31) και (41) για την εξαγωγή μόνο όρων που περιλαμβάνουν συγκεκριμένες δυνάμεις του κυματάριθμου και συνεπώς οι υπολογισμοί μας θα περιλαμβάνουν μόνο πεπερασμένα μερικά αθροίσματα των σειρών που εμφανίζονται σε αυτές τις εκφράσεις.

5.5.3. Η περίπτωση της αντιστατικής σφαίρας:

Τα κύρια επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν για να φέρουν τους συντελεστές a_n σε μια μορφή που να εμφανίζει την εξάρτησή τους από τον κυματάριθμο με όρους δυνάμεων του k , έχουν ήδη παρουσιαστεί στις προηγούμενες υποενότητες. Η περίπτωση του αντιστατικού σκέδασης είναι πιο περίπλοκη, αλλά εισάγει μόνο πιο περίπλοκους υπολογισμούς και όχι νέες ιδέες. Έτσι, ξεκινάμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$a_n = \frac{-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka) + v(2n+1)i^n j_n(ka)]}{\frac{\partial}{\partial \alpha} h_n(ka) + ikv h_n(ka)}$$

για $n=0$, στην οποία εισάγουμε την εξίσωση $h_0^{(1)}(ka) = \frac{e^{ika}}{ika}$ για να λάβουμε

$$a_0 = \frac{-ik[j_1(ka)i + vj_0(ka)]}{\frac{\partial}{\partial a} h_0^{(1)}(ka) + ikv h_0^{(1)}(ka)} = \frac{-ik[j_1(ka)i + vj_0(ka)]}{\frac{\partial e^{ika}}{\partial a} + ikv \frac{e^{ika}}{ika}} = -k^2 a^2 [j_1(ka)i + vj_0(ka)] [\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-ika)^\mu}{\mu!}] [\sum_{s=0}^{\infty} [ika(1+v)]^s] \quad (42)$$

Στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε την ανάπτυξη

$$\frac{1}{1 - ika(1+v)} = \sum_{s=0}^{\infty} [ika(1+v)]^s$$

η οποία συγκλίνει για $|ika(1+v)| = ka(1+v) < 1$ επομένως η εξίσωση (42) είναι έγκυρη για $ka < \frac{1}{1+v}$

Επιπλέον, αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις j_0 και j_1 σε σειρές δυνάμεων, λαμβάνουμε

$$j_1(ka)i + vj_0(ka) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda (vka - i2\lambda)(ka)^{2\lambda-1}}{(2\lambda+1)!} \quad (43)$$

που, εισάγοντας στην εξίσωση (42), δίνει το a_0 στη μορφή

$$a_0 = -ka [\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda (vka - i2\lambda)(ka)^{2\lambda-1}}{(2\lambda+1)!}] [\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-ika)^\mu}{\mu!}] [\sum_{s=0}^{\infty} ika(1+v)]^s \quad (44)$$

Στρέφοντας την προσοχή μας στο a_n για $n \geq 1$, πρώτα υπολογίζουμε τον παρονομαστή της εξίσωσης

$$\alpha_n = \frac{-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka) + v(2n+1)i^n j_n(ka)]}{\frac{\partial}{\partial a} h_n(ka) + ikv h_n(ka)}$$

ο οποίος, εισάγοντας την εξίσωση

$$h_n^{(1)}(ka) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^n \frac{i^m (n+m)! a^{-m}}{m! 2^m k^m (n-m)!}$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} h_n^{(1)}(ka) + ikv h_n^{(1)}(ka) \\ &= (-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \left[\sum_{m=0}^{n+1} \frac{-i^{m-1} (n+m-1)! a^{-m} [n(n+1) + m(m+1)]}{m! 2^m k^{m-1} (n-m+1)!} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^n \frac{-vi^{m-1} (n+m)! a^{-m}}{m! 2^m k^{m-1} (n-m)!} \right] \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι περαιτέρω στις σειρές εντός των αγκυλών, μπορούμε να δείξουμε ότι ο παρονομαστής παίρνει τη μορφή

$$(-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{-a^{-m} i^{m-1} (n+m-1)! [(n^2+n+m)(v+1) - m^2(v-1)]}{m! 2^m k^{m-1} (n-m+1)!} + \sum_{m=0}^n \frac{-v i^{m-1} (n+m)! a^{-m}}{m! 2^m k^{m-1} (n-m)!}$$

έτσι ώστε

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial a} h_n^{(1)}(ka) + ikv h_n^{(1)}(ka)} = [(-i)^{n+1} \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{-a^{-m} i^{m-1} (n+m-1)! [(n^2+n+m)(v+1) - m^2(v-1)]}{m! 2^m k^{m-1} (n-m+1)!}]^{-1} \quad (45)$$

Τώρα εξάγουμε τον μεγαλύτερο όρο του αθροίσματος, ο οποίος αντιστοιχεί στο $m=n+1$ και φέρνουμε την εξίσωση (45) στη μορφή

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial a} h_n^{(1)}(ka) + ikv h_n^{(1)}(ka)} = \frac{-in! 2^n a e^{-ika} (ka)^{n+1}}{(2n)! (n+1)} \frac{1}{1-q}$$

όπου...

$$q = \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! n!}{i^{m-n-1} m! 2^{m-n} (n-m+1)! (2n)! (n+1)} \times [v(n^2 - m^2 + n + m) + n(n+1) + m(m+1)] (ka)^{n-m+1} \quad (46)$$

Λήμμα: Για το πεπερασμένο άθροισμα q , όπως δίνεται στην εξίσωση (46), και για $ka < \min\{\frac{1}{2(e-1)}, \frac{1}{v(e-1)}\}$ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$|q| < 1$$

Απόδειξη: Λαμβάνοντας τις απόλυτες τιμές και στις δύο πλευρές της εξίσωσης (46) και εφαρμόζοντας την ανισότητα του τριγώνου στη δεξιά πλευρά, και τελικά ορίζοντας ως:

$$B = \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! [v(n^2 - m^2 + n + m)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! (2n)! (n+1)}$$

Και

$$C = \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! [n(n+1) + m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! (2n)! (n+1)}$$

μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$|q| \leq B + C \quad (47)$$

Έχουμε ήδη αποδείξει στην ενότητα 5.5.2 ότι:

$$C = \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! [n(n+1) + m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! (2n)! (n+1)} < (e-1)ka < \frac{1}{2}$$

εφόσον σε αυτήν την περίπτωση απαιτούμε $ka < \frac{1}{2(e-1)}$. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι:

$$B = \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! [v(n^2 - m^2 + n + m)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! (2n)! (n+1)} < \frac{1}{2}$$

Ας ορίσουμε:

$$\sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)! [v(n^2 - m^2 + n + m)] (ka)^{n-m+1} n! 2^n}{m! 2^m (n-m+1)! (2n)! (n+1)} = s_{n+1} + s_n + \dots + s_2 + s_1$$

όπου με το s_l δηλώνουμε τον όρο του αθροίσματος που έχει ως παράγοντα το k^l .

Αξίωση: Αναφορικά με την παραπάνω σημειολογία και για $ka < 1$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα για κάθε ακέραιο $0 \leq d < n$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{n-d+1} < \frac{1}{n-d+1} s_{n-d}$$

Πράγματι, εισάγοντας τους αντίστοιχους όρους του αθροίσματος στην παραπάνω ανισότητα, προκύπτει ότι η ανισότητα είναι αληθής εάν

$$ka < \frac{(n+d)(n^2 - d^2 - d + n)}{(d+1)(n^2 - d^2 + n + d)}$$

Αλλά

$$\frac{(n+d)(n^2 - d^2 - d + n)}{(d+1)(n^2 - d^2 + n + d)} \geq 1 \Leftrightarrow n-1 \geq d$$

κάτι που ισχύει για κάθε $n \geq 1$. Επομένως, η (48) είναι αληθής, καθώς το λήμμα ισχύει για $ka < \frac{1}{v(e-1)} < 1$. Τώρα, αφού

$$s_{n+1} < \frac{1}{n+1} s_n, \quad s_n < \frac{1}{n} s_{n-1}, \quad \dots, \quad s_2 < \frac{1}{2} s_1$$

έχουμε

$$B = s_{n+1} + s_n + \dots + s_1 < \left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{1!} \right] s_1 < \frac{v}{n+1} (e-1) ka < \frac{1}{2}$$

για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 1$ και $ka < \frac{1}{v(e-1)}$.

Έχοντας αποδείξει το προηγούμενο Λήμμα, μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την ανάπτυξη $\frac{1}{1-q} = \sum_{\mu=0}^{\infty} q^\mu$ η οποία συγκλίνει καθώς $|q| < 1$. Εισάγοντας την ανάπτυξη στην εξίσωση

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial a} h_n^{(1)}(ka) + ikv h_n^{(1)}(ka)} = \frac{-in! 2^n a e^{-ika} (ka)^{n+1}}{(2n)! (n+1)} \frac{1}{1-q}$$

ο παρονομαστής του α_n γίνεται:

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial a} h_n^{(1)}(ka) + ikv h_n^{(1)}(ka)} = \frac{-in! 2^n a e^{-ika} (ka)^{n+1}}{(2n)!(n+1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m+1)!} \times \right. \\ \left. \frac{[v(n^2 - m^2 + n + m) + n(n+1) + m(m+1)] i^{m-n+1} (ka)^{n-m+1} n!}{2^{n+1}(n+1)(2n)!} \right] \quad (49)$$

Προχωρώντας στον αριθμητή του a_n , λαμβάνουμε μέσω της εξίσωσης :

$$a_n = \frac{-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka) + v(2n+1)i^n j_n(ka)]}{\frac{\partial}{\partial a} h_n(ka) + ikv h_n(ka)} \quad (50)$$

Το εξής:

$$-ik[(n+1)i^{n+1}j_{n+1}(ka) + ni^{n-1}j_{n-1}(ka) + v(2n+1)i^n j_n(ka)] = \\ -\frac{i^n k(2n+1)(ka)^{n-1}}{2^{n+1}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda (ka)^{2\lambda} (v+2\lambda+vik a)}{\lambda! 4^\lambda \prod_{t=0}^{n+\lambda} \left(t + \frac{1}{2}\right)} \quad (51)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (49) και (51) στην εξίσωση (50), λαμβάνουμε τον a_n για $n \geq 1$ στη μορφή:

$$a_n = \frac{i^{n+1} n! (2n+1) (ka)^{2n+1}}{2(2n)!(n+1)} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{(ika)^\rho}{\rho!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{-i^{m-n-1} (n+m-1)!}{m!(n-m+1)!(2n)!} \times \frac{[v(n^2 - m^2 + n + m) + n(n+1) + m(m+1)] (ka)^{n-m+1} n!}{2^{m-n} (n+1)(2n)!} \right]^\mu \times \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda (ka)^{2\lambda} (n+2\lambda+vik a)}{\lambda! 4^\lambda \prod_{t=0}^{n+\lambda} \left(t + \frac{1}{2}\right)} \quad (52)$$

όπου αυτή η έκφραση ισχύει για $ka < \min\left\{\frac{1}{2(e-1)}, \frac{1}{v(e-1)}\right\}$

Παρατήρηση : Στην εξίσωση (52), είναι προφανές ότι η χαμηλότερη δύναμη του k που περιλαμβάνεται στο a_n παρέχεται για $\rho=0, \mu=0, \lambda=0$ και αυτή η δύναμη είναι k^{2n+1} για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το ίδιο ισχύει για $n \geq 1$, για την περίπτωση της σκληρής σφαίρας σύμφωνα με την εξίσωση (41), και επίσης για την περίπτωση της μαλακής σφαίρας, όπως υποδεικνύεται στην εξίσωση (29).

Από την άλλη πλευρά, για $n=0$, η χαμηλότερη δύναμη του k που περιλαμβάνεται στο a_0 είναι k_1 για τη μαλακή σφαίρα, k^3 για τη σκληρή σφαίρα, και k^2 για τη σφαίρα με αντίσταση, όπως φαίνεται στις εξισώσεις (24), (31) και (44) αντίστοιχα.

Σε όλες τις περιπτώσεις, η σειρά Taylor για το a_n περιλαμβάνει δυνάμεις του k μεγαλύτερες ή ίσες με k^{2n+1} για όλους τους ακέραιους $n \geq 0$.

Με αυτή την προσέγγιση, έχουμε αποκτήσει βολικές μορφές του a_n ώστε να εξάγουμε τους όρους που αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη δύναμη του k , για καθένα από τα τρία διαφορετικά προβλήματα σκέδασης που εξετάστηκαν. Συνεχίζουμε να απεικονίζουμε τη μέθοδο που προτείναμε στο 5.4, κατασκευάζοντας σωστά τους συντελεστές $\check{F}m(r)$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (16) και (17) και στη συνέχεια εισάγοντάς τους στην εξίσωση (23) για να λάβουμε τους αντίστοιχους συντελεστές σκέδασης (LF). Στην επόμενη ενότητα ολοκληρώνουμε αυτούς τους υπολογισμούς, για τις προσεγγίσεις (LF) μέχρι και την πέμπτη τάξη, για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση.

5.6. Οι πρώτοι έξι συντελεστές σκέδασης (LF) u_n^+ :

Η Εξίσωση (23) υποδηλώνει ότι για να υπολογιστούν οι συντελεστές u_n^+ για $n = 0, 1, 2, \dots, 5$, χρειάζεται να υπολογιστούν οι συντελεστές $\tilde{F}_m(r)$, για $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Ο Ορισμός (17) απαιτεί ότι για κάθε $\tilde{F}_m(r)$ πρέπει να υπολογιστεί το άθροισμα των όρων της σειράς F_0, F_1, \dots, F_m που έχουν ως παράγοντα το k^{m+1} . Κάθε F_{m-j} , $j = 0, 1, 2, \dots, m$, όντας μία δυναμοσειρά σε k , ξεκινά με k^{m-j+1} , το οποίο προκύπτει από τον πρώτο όρο που αναφέρεται στο a_{m-j} . Συνεπώς, η δύναμη k^{m+1} εμφανίζεται στον $(j+1)$ -οστό όρο κάθε a_{m-j} , και για να υπολογίσουμε το $F_{m-j}k^{m+1}$, χρειαζόμαστε τους πρώτους $(j+1)$ -όρους της σειράς που δίνονται, για $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$, στην (16) και για $j = m$ (12). Για κάθε j , ο συντελεστής a_n είναι επίσης μία σειρά, αλλά μόνο οι πρώτοι $j+1$ όροι χρειάζονται να ληφθούν υπόψη στο άθροισμα.

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του u_0^+ , η Εξίσωση (23) υποδηλώνει ότι χρειαζόμαστε το \tilde{F}_0 , το οποίο, όπως υποδεικνύεται στην (17), απαιτεί μόνο το $F_0|k^1$ και αυτό παρέχεται, σύμφωνα με την (12), από τον πρώτο όρο του a_0 . Ομοίως, για τον υπολογισμό του u_1^+ , χρειαζόμαστε το \tilde{F}_1 , το οποίο, από την (17), απαιτεί τον υπολογισμό του $F_{1-j}k^2$, για $j = 0, 1$. Αυτό επιτυγχάνεται, για $j = 0$, με τον υπολογισμό του πρώτου όρου του a_1 από την (16), και για $j = 1$, με τον υπολογισμό του δεύτερου όρου του a_0 , από την (12).

Στις επόμενες παραγράφους ακολουθούμε αυτήν την πορεία υπολογισμών για να αποκτήσουμε τα $u_0^+, u_1^+, \dots, u_5^+$ για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση ενός μαλακού, σκληρού και ανθεκτικού σφαιρικού σκεδαστή.

Η περίπτωση ενός μαλακού σφαιρικού σκεδαστή. Χρησιμοποιώντας την

$$a_0 = -\frac{1}{h_0^{(1)}(ka)} j_0(ka) = -ika e^{-ika} \frac{\sin(ka)}{ka} = -i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ika)^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ka)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

και (29) υπολογίζουμε τον μέγιστο αριθμό όρων που χρειαζόμαστε για τους πρώτους έξι συντελεστές σκέδασης. Συγκεκριμένα βρίσκουμε:

$$a_0 = k(-ia) + k^2(-a^2) + k^3 \left(\frac{1}{3} ia^3 \right) + k^4 \left(\frac{1}{3} a^4 \right) + k^5 \left(\frac{-2}{15} ia^5 \right) + k^6 \left(\frac{-2}{45} a^6 \right) + O(k^7)$$

$$a_1 = k^3 a^3 - \frac{3}{5} k^5 a^5 - i \frac{1}{3} k^6 a^6 + \frac{3}{7} k^7 a^7 + O(k^8)$$

$$a_2 = k^5 \left(\frac{ia^5}{9} \right) + k^7 \left(-\frac{i5a^7}{189} \right) + O(k^9)$$

$$a_3 = k^7 \left(\frac{-a^7}{225} \right) + k^9 \left(-\frac{7a^9}{10125} \right) + O(k^{10})$$

$$a_4 = k^9 \left(\frac{-ia^9}{11025} \right) + O(k^{11})$$

$$a_5 = k^{11} \left(\frac{a^{11}}{893025} \right) + O(k^{12})$$

Τώρα, η εξίσωση (23) μέσω των (20) και (21) μας δίνει τους ακόλουθους συντελεστές χαμηλής συχνότητας:

$$u_0^+(r) = 1 + \frac{r^{-1}\tilde{F}_0}{(ik)^1} = 1 + \frac{r^{-1}\tilde{F}_0|k^1}{(ik)^1} = 1 - \frac{a}{r}$$

Ενώ

$$\begin{aligned} u_1^+(r) &= r\cos\theta + \sum_{m=0}^1 \binom{1}{m} \frac{r^{1-2m}m! \tilde{F}_m(r)}{(ik)^{m+1}} \\ &= r\cos\theta + \binom{1}{0} \frac{r^{-1}}{(ik)^1} + \binom{1}{1} \frac{r^{-2}\tilde{F}_1(r)}{(ik)^2} \\ &= r\cos\theta + \frac{F_0(r)}{(ik)^1} + \frac{r^{-2}(r\tilde{F}_1(r)|k^2 + \tilde{F}_0(r)|k^2)}{(ik)^2} \\ &= r(\cos\theta) + r^0(-a) + r^{-1}(a^2) + r^{-2}(-a^3\cos\theta) \end{aligned}$$

Παρομοίως, έχουμε:

$$\begin{aligned} u_2^+(r) &= (r\cos\theta)^2 + \sum_{m=0}^2 \binom{2}{m} \frac{r^{1-2m}m! \tilde{F}_m(r)}{(ik)^{m+1}} \\ &= (r\cos\theta)^2 + \frac{r\tilde{F}_0(r)}{ik} + 2 \frac{r^{-1}\tilde{F}_1(r)}{(ik)^2} + \frac{r^{-3}2\tilde{F}_2(r)}{(ik)^3} \\ &= (r\cos\theta)^2 + \frac{rF_0(r)|k}{ik} + 2 \frac{r^{-1}(r\tilde{F}_1(r)|k^2 + \tilde{F}_0(r)|k^2)}{(ik)^2} \\ &= -2[r^2\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right) + r\frac{a}{2} + r^0(-a^2) + r^{-1}\frac{2}{3}(a^3) + r^{-3}\left(-\frac{1}{6}a^5 + \frac{1}{2}a^5\cos^2\theta\right)] \end{aligned}$$

Παραλείποντας τους λεπτομερείς υπολογισμούς αλλά συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε:

$$\begin{aligned} u_3^+(r) &= -6[r^{-4}\left(-\frac{1}{10}a^7\cos\theta + \frac{1}{6}a^7\cos^3\theta\right) + r^{-2}\left(\frac{3}{5}a^5\cos\theta\right) + r^{-1}\left(-\frac{1}{3}a^4\right) \\ &\quad + r^0\left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3\cos\theta\right) + r\left(-\frac{1}{2}a^2\right) + r^2\frac{1}{6}a + r^3\left(-\frac{1}{6}\cos^3\theta\right)] \\ u_4^+(r) &= 24[r^{-5}\left(-\frac{1}{280}a^9 + \frac{1}{28}a^9\cos^2\theta - \frac{1}{24}a^9\cos^4\theta\right) + r^{-3}\left(\frac{5}{126}a^7 - \frac{5}{42}a^7\cos^2\theta\right) \\ &\quad + r^{-2}\left(-\frac{1}{3}a^6\cos\theta\right) + r^{-1}\left(-\frac{29}{180}a^5 + \frac{1}{12}a^5\cos^2\theta\right) + r^0\left(\frac{1}{3}a^4\right) \\ &\quad + r\left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3\cos^3\theta\right) + r^2\left(\frac{1}{6}a^2\right) + r^3\left(-\frac{1}{24}a\right) + r^4\frac{1}{24}\cos^4\theta] \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} u_5^+(r) &= 120[r^{-6}\left(-\frac{1}{504}a^{11}\cos\theta + \frac{1}{108}a^{11}\cos^3\theta - \frac{1}{120}a^{11}\cos^5\theta\right) + r^{-4}\left(\frac{7}{450}a^9\cos\theta - \frac{7}{270}a^9\cos^3\theta\right) \\ &\quad + r^{-2}\left(-\frac{307}{700}a^7\cos\theta + \frac{1}{60}a^7\cos^3\theta\right) + r^{-1}\frac{2}{45}a^6 + r^0\left(-\frac{2}{15}a^5 + \frac{3}{10}a^5\cos\theta\right) + \\ &\quad + r\frac{1}{6}a^4 + r^2\left(\frac{1}{8}a^3\cos\theta - \frac{1}{9}a^3\right) + r^3\frac{1}{24}a^2 + r^4\left(-\frac{1}{120}a\right) + r^5\frac{1}{120}\cos^5\theta] \end{aligned}$$

Η περίπτωση ενός σκληρού σφαιρικού σκεδαστή. Ακολουθώντας την ίδια πορεία υπολογισμών, αλλά αναφερόμενοι στους συντελεστές a_n για αυτήν την περίπτωση, όπως δίνονται στις (31) και (41), έχουμε:

$$\begin{aligned} a_0 &= (ka)^3 \left(-\frac{i}{3}\right) + (ka)^5 \left(\frac{i}{5}\right) + (ka)^6 \left(-\frac{1}{9}\right) + O(k^7) \\ a_1 &= (ka)^3 \left(-\frac{1}{2}\right) + (ka)^5 \frac{3}{20} + (ka)^6 \left(-\frac{i}{12}\right) + (ka)^7 \frac{3}{56} + O(k^8) \\ a_2 &= (ka)^5 \left(-\frac{2i}{27}\right) + (ka)^7 \left(-\frac{25i}{1701}\right) + O(k^9) \\ a_3 &= \frac{1}{300} (ka)^7 - \frac{77}{162000} (ka)^9 + O(k^{10}) \\ a_4 &= (ka)^9 \frac{8i}{110250} + O(k^{11}) \\ a_5 &= -(ka)^{11} \frac{11}{11787930} + O(k^{12}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας σωστά τις (12), (16) και (23), οι αντίστοιχοι συντελεστές (LF) για τη σκληρή σφαίρα δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} u_0^+(r) &= 1 \\ u_1^+(r) &= r^{-2} \frac{1}{2} a^3 \cos^2 \theta + r \cos \theta \\ u_2^+(r) &= r^{-3} \frac{2}{9} a^5 (3 \cos^2 \theta - 1) + r^{-1} \frac{2}{3} a^3 + r^2 \cos^2 \theta \\ u_3^+(r) &= r^{-4} \left(\frac{3}{4} a^7 \cos^3 \theta - \frac{9}{20} a^7 \cos \theta \right) + r^{-2} \frac{18}{20} a^5 \cos \theta - \frac{3}{2} a^3 \cos \theta + 2a^3 \cos \theta + 2a^3 \\ &\quad + r^3 \cos^3 \theta \\ u_4^+(r) &= r^{-5} \left(\frac{4}{5} a^9 \cos^4 \theta + \frac{236}{45} a^9 \cos^2 \theta + \frac{12}{175} a^9 \right) + r^{-3} \left(\frac{100}{63} a^7 \cos^2 \theta - \frac{100}{189} a^7 \right) \\ &\quad + r^{-2} (-2a^6 \cos \theta) + r^{-1} \left(-\frac{4}{3} a^5 \cos^2 \theta + \frac{236}{45} a^5 \right) \\ &\quad + r(-4a^3 \cos \theta + 4a^3) + r^4 \cos^4 \theta \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} u_5^+(r) &= r^{-6} \left(\frac{5}{6} a^{11} \cos^5 \theta - \frac{25}{27} a^{11} \cos^3 \theta + \frac{25}{126} a^{11} \cos \theta \right) + r^{-4} \left(\frac{77}{36} a^9 \cos^3 \theta - \frac{77}{60} a^9 \cos \theta \right) \\ &\quad + r^{-2} \left(-\frac{3}{2} a^7 \cos^3 \theta - \frac{387}{70} a^7 \cos \theta \right) + r^{-1} \frac{40}{3} a^6 + 24a^5 - 9a^5 \cos \theta \\ &\quad + r^2 \left(-\frac{15}{2} a^3 \cos \theta + \frac{20}{3} a^3 \right) + r^5 \cos^5 \theta \end{aligned}$$

Η περίπτωση της αντιστατικής σφαίρας. Τέλος, οι απαραίτητοι όροι για το a_n στην αντιστατική περίπτωση δίνονται μέσω των (44) και (52) και έτσι έχουμε:

$$a_0 = -v(ka)^2 + i\left(-\frac{1}{3} - v^2\right)(ka)^3 + (v^3 + v^2 + v)(ka)^4 \\ + i\left(v^4 + 2v^3 + 2v^2 + \frac{2}{3}v + \frac{1}{5}\right)(ka)^5 + \left(-v^5 - 3v^4 - 4v^3 - \frac{3}{8}v^2 - v - \frac{1}{9}\right)(ka)^6 \\ + O(k^7)$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}(ka)^3 + i\left(-\frac{3}{4}v\right)(ka)^4 + \left(\frac{3}{8}v^2 + \frac{3}{20}\right)(ka)^5 + i\left(\frac{3}{16}v^3 - \frac{1}{12}\right)(ka)^6 \\ + \left(-\frac{3}{32}v^4 + \frac{3}{16}v^2 + \frac{1}{4}v + \frac{3}{56}\right)(ka)^7 + O(k^8)$$

$$a_2 = -\frac{2}{27}i(ka)^5 + \frac{5}{81}v(ka)^6 + i\left(\frac{5}{243}v^2 + \frac{25}{1701}\right)(ka)^7 + \left(-\frac{5}{729}v^3 - \frac{5}{729}v\right)(ka)^8 + O(k^9)$$

$$a_3 = \frac{1}{300}(ka)^7 + \frac{7}{3600}iv(ka)^8 + \left(-\frac{7}{14400}v^2 - \frac{77}{162000}\right)(ka)^9 + O(k^{10})$$

$$a^4 = \frac{4}{55125}i(ka)^9 - \frac{1}{30625}v(ka)^{10} + O(k^{11})$$

$$a_5 = -\frac{1}{1071630}(ka)^{11} + O(k^{12})$$

και οι έξι πρώτοι συντελεστές σκέδασης χαμηλής συχνότητας (LF) για αυτήν την περίπτωση προκύπτουν στη μορφή

$$u_0^+(r) = 1$$

$$u_1^+(r) = vr^{-1}a^2 + r\left(1 + \frac{1}{2}a^3r^{-3}\right)P_1(\cos\theta)$$

$$u_2^+(r) = \frac{1}{3}r^2 + 2va^2 + 2r^{-1}a^3\left(\frac{1}{3} + v^2\right) + \left(\frac{2}{3}r^2 + \frac{4}{9}r^{-3}a^5\right)P_2(\cos\theta) + \frac{3}{2}r^{-2}va^4P_1(\cos\theta)$$

$$u_3^+(r) = \left(\frac{2}{5}r^3 + \frac{3}{10}r^{-4}a^7\right)P_3(\cos\theta) + \frac{10}{9}r^{-3}va^6P_2(\cos\theta) \\ + \left(\frac{3}{5}r^3 + \frac{3}{2}a^3 - 3a^3 + \frac{9}{4}r^{-2}v^2a^5 + \frac{9}{10}r^{-2}a^5\right)P_1(\cos\theta) + a^2[3rv + 2a + 6v^2a \\ + 6r^{-1}a^2(v^3 + v^2 + v)]$$

$$u_4^+(r) = \left(\frac{8}{35}r^4 + \frac{32}{175}r^{-5}a^9\right)P_4(\cos\theta) + \frac{7}{10}r^{-4}va^8P_3(\cos\theta) \\ + \left(\frac{4}{7}r^4 - \frac{8}{9}r^{-1}a^5 + \frac{40}{27}v^2r^{-3}a^7 + \frac{200}{189}r^{-3}a^7\right)P_2(\cos\theta) \\ + \left(-4ra^3 - 9va^4 + \frac{9}{2}r^{-2}v^3a^6 - 2r^{-2}a^6\right)P_1(\cos\theta) + \frac{7}{35}r^4 + 4r^2va^2 + 4ra^3 \\ + 12ra^3v^2 + 24a^4(v^3 + v^2 + v) + 24r^{-1}a^5\left(v^4 + 2v^3 + 2v^2 + \frac{2}{3}v + \frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
 u_5^+(r) = & \left(\frac{8}{63} r^5 + \frac{20}{189} r^{-6} a^{11} \right) P_5(\cos\theta) + \frac{72}{175} r^{-5} a^{10} v P_4(\cos\theta) \\
 & + \left(\frac{4}{9} r^5 - \frac{3}{5} r^{-2} a^7 + \frac{7}{8} r^{-4} a^9 v^2 + \frac{77}{90} r^{-4} a^9 \right) P_3(\cos\theta) \\
 & + \left(-\frac{100}{27} r^{-1} a^6 v + \frac{200}{81} r^{-3} a^8 v^3 + \frac{200}{81} r^{-3} a^8 v \right) P_2(\cos\theta) \\
 & + \left[\frac{3}{7} r^5 - \frac{15}{2} r^2 a^3 + 120 r^{-2} a^7 \left(\frac{3}{32} v^4 - \frac{3}{16} v^2 - \frac{1}{4} v - \frac{3}{56} \right) - 30 r a^4 v + \frac{45}{2} a^5 v^2 \right. \\
 & \left. - 9 a^5 - 45 v^2 a^5 \right] P_1(\cos\theta) + 5 r^3 v a^2 + \frac{20}{3} r^2 a^3 + 20 r^2 v^2 a^3 \\
 & + 60 r a^4 (v^3 + v^2 + v) + 120 a^5 \left(v^4 + 2 v^3 + 2 v^2 + \frac{2}{3} v + \frac{1}{5} \right) + 120 r^{-1} a^6 (v^5 \\
 & + 3 v^4 + 4 v^3 + \frac{8}{3} v^2 + v + \frac{1}{9})
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση : Οι συντελεστές χαμηλής συχνότητας (LF) που προκύπτουν σε αυτή την ενότητα ελέγχονται για να ανακτήσουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα που βρίσκονται στη βιβλιογραφία, όπως για παράδειγμα στο Κεφάλαιο 7Α (σελ. 224–227) της εκτενούς ανασκόπησης [15], όσον αφορά τους $u_0^+, u_1^+, u_2^+, u_3^+$. Οι συντελεστές ku_4^+, u_5^+ που δεν τους έχουμε βρει άμεσα διαθέσιμους πουθενά, ελέγχονται για να ικανοποιούν τα αντίστοιχα προβλήματα συνοριακών τιμών, δηλαδή τη διαφορική εξίσωση $\nabla^2 u_n^+ = n(n-1)u_{n-2}^+$ για $n = 4, 5$ καθώς και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για κάθε περίπτωση μαλακού, σκληρού και αντιστατικού σκεδαστή.

6. ΣΥΝΟΨΗ -ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική ασχοληθήκαμε με την σκέδαση ακουστικών κυμάτων. Διατυπώσαμε τις συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν ανάλογα με το είδος του σκεδαστή και σε συνδυασμό με τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld δώσαμε κάποια βασικά προβλήματα σκέδασης. Είδαμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz και θεωρήματα που αποδεικνύουν την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων. Ακόμη, αναφερθήκαμε σε κάποια θεωρήματα σκέδασης που έχουν σημαντικές εφαρμογές στη μελέτη προβλημάτων ακουστικής σκέδασης.

Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων, προσπαθήσαμε να επιλύσουμε προβλήματα σκέδασης, των οποίων η θεωρία εφαρμόζεται σε προβλήματα μεγάλου μήκους κύματος. Για να το καταφέρουμε αυτό μετασχηματίσαμε τα προβλήματα σε δυναμοσειρές, τα οποία λύνονται χρησιμοποιώντας σφαιρικές ή ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις.

Έπειτα, προτείναμε μια αναλυτική μέθοδο για τον αλγεβρικό υπολογισμό της ανάπτυξης χαμηλών συχνοτήτων της λύσης ενός προβλήματος σκέδασης βαθμωτού πεδίου πάνω σε έναν λείο, σφαιρικό σκεδαστή. Η μέθοδος βασίζεται στο θεώρημα ανάπτυξης του μακρινού πεδίου, το οποίο εισήγαγαν οι Atkinson και Wilcox στα μέσα του περασμένου αιώνα, εφαρμοσμένο στο πεδίο των χαμηλών συχνοτήτων. Υπό αυτή την οπτική, η ανάγκη επίλυσης ελλειπτικών προβλημάτων συνοριακής τιμής για την

απόκτηση των προσεγγίσεων χαμηλών συχνοτήτων αντικαθίσταται από μια αναλυτική διαδικασία, που κωδικοποιείται εύκολα σε έναν αλγόριθμο που περιλαμβάνει μόνο αλγεβρικούς τελεστές. Ως παράδειγμα επίδειξης, η μέθοδος εφαρμόζεται στο πρόβλημα ακουστικής σκέδασης με διέγερση επίπεδου κύματος πάνω σε τρεις διαφορετικούς μη διαπερατούς σφαιρικούς σκεδαστές. Οι πρώτες προσεγγίσεις χαμηλών συχνοτήτων εξάγονται, αποδεικνύοντας την εγκυρότητα της προτεινόμενης μεθόδου τόσο με την ανάκτηση ήδη γνωστών αποτελεσμάτων όσο και με την ακριβή εξαγωγή υψηλότερων τάξεων προσέγγισης.

Συνεπώς, περιγράφεται μια αλγεβρική μέθοδο για τον ακριβή υπολογισμό των συντελεστών σκέδασης χαμηλής συχνότητας (LF) σε οποιοδήποτε πρόβλημα σκέδασης βαθμωτού πεδίου. Οι συντελεστές της ανάπτυξης (AW) δίνονται σε σχέση με το πλάτος σκέδασης του προβλήματος, φέροντας έτσι τα φυσικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου προβλήματος. Με την κατάλληλη ανάπτυξη των συντελεστών (AW) σε σειρές δυνάμεων στον αριθμό κύματος, περιορίζοντας έτσι τη μέθοδο στην περιοχή Rayleigh όπου οι σειρές συγκλίνουν, λαμβάνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές σκέδασης χαμηλής συχνότητας (LF), σύμφωνα με τον βασικό τύπο (23).

Συνοψίζοντας, αναλύεται η προτεινόμενη μέθοδο στις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις ενός αδιαπέρατου σφαιρικού σκεδαστή, δηλαδή στην περίπτωση μαλακού, σκληρού και αντιστατικού σκεδαστή, για να καταδείξουμε τη προτεινόμενη διαδικασία. Ωστόσο, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα σκέδασης βαθμωτού πεδίου, ακριβώς όπως προτείνεται σε αυτή την εργασία, υπό την προϋπόθεση ότι το πλάτος σκέδασης λαμβάνει μια γνωστή ανάπτυξη στις ιδιοσυναρτήσεις του Beltrami, έτσι ώστε η μέθοδος να μπορεί να ξεκινήσει.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] G. Dassios, G. Kamvyssas, Point source excitation in direct and inverse scattering: the soft and the hard small sphere. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1995
- [2] Χ. Αθανασιάδης, Ειδικά θέματα Μαθηματικών - Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές, (τόμος Α'), ΕΑΠ (2021).
- [3] An algebraic formula for the accelerated computation of the low frequency scattering coefficients: The case of the acoustically soft sphere Foteini Kariotou, Michael Doschoris b , Dimitris E. Sinikis , Hellenic Open University, 2015
- [4] An algebraic calculation method for the acoustic low frequency F.Kariotou, D.E.Sinikis, School of science and Technology, Hellenic Open University 2014
- [5] G. Dassios, R.E. Kleinman, *Low Frequency Scattering*, Oxford University Press, Oxford, 2000
- [6] R.E. Kleinman, The Dirichlet problem for the equation Helmholtz, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 18 (1965) 205–229.
- [7] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, United States of America , 1964.

- [8] H. Ammari, H. Kang, Boundary layer techniques for solving the Helmholtz equation in the presence of small heterogeneities, *J. Math. Anal. Appl.* 296(1) (2004) 190–208.
- [9] H. Ammari, H. Kang, Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements, *Lecture Notes in Math.*, Volume 1846, Springer-Verlag, Berlin 2004.
- [10] H. Ammari, H. Kang, H. Lee, M. Lim, Near-covering reinforcement. Part II: the equation Helmholtz, *Comm. Math. Phys.* 317(2) (2013) 485–502.
- [11] Αικατερίνη Μπόνη, Διάδοση Ακουστικών Κυμάτων και Εφαρμογές ,εισηγητής Νικολόπουλος Χρήστος , Σεπτεμβριος 2022.
- [12] Kariotou, F Sinikis, D.E.Hadjinicolaou M. On a Novel Algorithmic Determination of Acoustic Low Frequency Coefficients for Arbitrary Impenetrable Scatterers. *Mathematics* 2022,, Hellenic Open University.
- [13] An accelerated derivation of the acoustic low-frequency expansion: the penetrable sphere Foteini Kariotou*† and Dimitrios E. Sinikis ,2016 in Wiley Online Library.