ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ: ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

ΓΙΑΚΟΥΜΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΠΑΤΡΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2024

ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ:

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Γιακουμάκης Κωνσταντίνος

Μέλη τριμελούς εξεταστικής επιτροπής:

- Επιβλέπων Καθηγητής: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
- Συν-Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Τσίτσας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πληροφορικής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο υπό την επίβλεψη του κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργου. Πρώτον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για την καθοδήγηση που μου προσέφερε και τις γνώσεις που μου μετέδωσε, καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Τσίτσα Νικόλαο για την αξιολόγηση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αναλύει τις βασικές έννοιες και τις ιδιότητες των καμπύλων και των επιφανειών. Αρχικά, θα γίνει εισαγωγή στην έννοια των καμπυλών και θα εξεταστούν κάποιοι βασικοί όροι, όπως η παραμέτρηση ως προς το μήκος τόξου, η καμπυλότητα και το τρίεδρο Frenet. Στη συνέχεια, όσον αφορά τις επιφάνειες θα αναλυθούν οι ορισμοί και οι ιδιότητες των επιφανειών, το εφαπτόμενο επίπεδο, η απεικόνιση Gauss και η μέση καμπυλότητα. Έπειτα, θα αναφερθεί η εξίσωσή του σολιτονίου, ενώ θα εξεταστούν οι ειδικές περιπτώσεις λύσεων αυτής θέτοντας συγκεκριμένες γεωμετρικές συνθήκες, αλλά και θεωρώντας λύση της μορφής χωριζομένων μεταβλητών.

Abstract

The present thesis analyzes the basic concepts and properties of curves and surfaces. Initially, an introduction to the concept of curves will be provided, examining some basic terms such as parameterization with respect to arc length, curvature, and the Frenet frame. Subsequently, concerning surfaces, the definitions and properties of surfaces will be analyzed, including the tangent plane, the Gauss mapping, and the mean curvature. Then, the soliton equation will be addressed, investigating specific cases of its solutions by imposing geometric conditions and considering solutions of the form of separated variables.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή καμπυλών

1.1 Ορισμός καμπύλης

Μία παραμετρικοποιημένη καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ είναι μία απεικόνιση: $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, όπου I: ανοιχτό διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα. Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης $y = x^2$ στον $\mathbb{R}^n$, μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως:

$$\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big), \text{ με: } \gamma_2(t) = \gamma_1^2(t)$$

Άρα, για $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, η οποία είναι μία παραμέτρηση αυτής και δεν είναι μοναδική.

1.2 Παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου

Αρχικά, θα ορίσουμε το μήκος του τόξου. Το μήκος του τόξου μίας καμπύλης γ από ένα σημείο $\gamma(t_0)$ είναι μία συνάρτηση $s(t)$ που δίνεται από τον τύπο:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\|\, du$$

Όπου: $\|v\|$ είναι η στάθμη του διανύσματος v.

Εάν $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, είναι μία παραμετρικοποιημένη καμπύλη, η ταχύτητά της για κάθε t είναι: $\|\dot{\gamma}(t)\|$, θα λέμε ότι η γ θα είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, εάν $\dot{\gamma}(t)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα για κάθε $t \in I$. Για να έχει μία καμπύλη παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου, πρέπει να είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Αν δεν έχει παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου, με τον κανόνα της αλυσίδας αλλάζουμε την παράμετρο κατάλληλα, ώστε να είναι μοναδιαίας ταχύτητας:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

όπου: $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$.

Έχουμε ότι $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$ είναι θετική τιμή ως μέτρο, οπότε η συνάρτηση $s(t)$ είναι αμφιμονότιμη, οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $t = t(s)$ για την οποία $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$. Επομένως, ο μετασχηματισμός είναι επιτρεπτός.

1.3 Καμπυλότητα

Θα ορίσουμε τον ορισμό της καμπυλότητας. Έστω γ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με παράμετρο $t \in I$. Η καμπυλότητά της $k(t)$ στο σημείο $\gamma(t)$ είναι η τιμή: $\|\ddot{\gamma}(t)\|$.

1.4 Τρίεδρο Frenet

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την καμπύλη Frenet. Μία καμπύλη ονομάζεται καμπύλη Frenet, αν και μόνο αν, $k(t) \neq 0$, για κάθε: $\forall\, t \in I$. Έστω: $T(t) = \dot{\gamma}(t)$, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής. Έπειτα, ορίζουμε το κύριο κάθετο διάνυσμα της γ: $n(t) = \frac{\ddot{\gamma}(t)}{k(t)}$, το οποίο είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Τα $n(t)$ και $T(t)$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έπεται ότι το διάνυσμα: $B(t) = T(t) \times n(t)$, είναι επίσης μοναδιαίο και κάθετο στα διανύσματα $T(t)$ και $n(t)$. Επομένως, παράγουν μία ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, η οποία καλείται συνοδεύον τρίεδρο Frenet.

Κεφάλαιο 2: Εισαγωγή επιφανειών

2.1 Ορισμός επιφάνειας

Ένα μη κενό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται κανονική επιφάνεια, εάν για $\forall\ P \in M$ υπάρχουν ανοιχτές περιοχές $P \in V\ \ U \in \mathbb{R}^2$ και 1-1 απεικόνιση κλάσης: $C^\infty,\ X: U \to V \cap M$, η οποία να είναι ομομορφισμός και επιπλέον να ισχύει:

$$X_u(q) \times X_v(q) \neq 0\ \ \forall\ q \in V,$$

ώστε να ορίζεται επίπεδο. Η απεικόνιση X ονομάζεται τοπική παραμέτρηση της M.

2.2 Εφαπτόμενος χώρος

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο. Έστω M είναι μία κανονική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Ο εφαπτόμενος χώρος $T_P\ M$ της M στο σημείο p αποτελείται από όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα $\dot{\gamma}(0)$ σε κάθε λεία καμπύλη $\gamma: I \to M$ με $\gamma(0) = p$ και ορίζεται ως:

$$T_P M = \{z \in \mathbb{R}^3 / \exists\ \gamma : I \to M, \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = z\}$$

Έστω μία ομαλή λεία καμπύλη $\vec{\gamma}(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ της M με παραμέτρηση $X(u, v)$. Η εξίσωση $\vec{X} \circ \vec{\gamma}(t) = \vec{X}(t) = \vec{X}\big(u(t), v(t)\big)$ ορίζει μία ομαλή καμπύλη της επιφάνειας και το εφαπτόμενο διάνυσμα αυτής ορίζεται από τη σχέση $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{X}_u(u, v) \cdot \frac{du}{dt} + \vec{X}_v(u, v) \cdot \frac{dv}{dt}$ από τον κανόνα αλυσίδας.

Άρα, έπεται ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα όλων των καμπυλών της M είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{X}_u$, $\vec{X}_v$. Συνεπώς, αποτελούν βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_P\ M$.

2.3 Πρώτη Θεμελιώδης μορφή

Περιορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_P\ M$ της επιφάνειας M στο σημείο p: $I_P: T_P\ M \times T_P\ M\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ με $I_p(v, w) = \langle v, w \rangle$ για τυχαία διανύσματα $v, w \in T_P M$. Η διγραμμική συμμετρική απεικόνιση I_P ονομάζεται πρώτη θεμελιώδης μορφή της M στο σημείο P.

Τοπική αναπαράσταση της πρώτης θεμελιώδους μορφής με M κανονική επιφάνεια και X τοπική παραμέτρηση αυτής. Ο εφαπτόμενος χώρος παράγεται από τα διανύσματα $X_u(u, v)$, $X_v(u, v)$. Ορίζουμε τις πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες ονομάζονται θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης.

$$E = < X_u, X_u >$$

$$F = < X_u, X_v >$$

$$G = < X_v, X_v >$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις $du(\vec{v}) : T_P\,M\ \rightarrow \mathbb{R}$ και $dv(\vec{v}) : T_P\,M\ \rightarrow \mathbb{R}$ και $\vec{v} = X_u\,du + X_v\,dv$ και έχουμε ότι:

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = du^2(\vec{v}) \cdot < X_u, X_u > + du(\vec{v}) \cdot dv(\vec{v}) \cdot < X_u, X_v > + dv^2(\vec{v}) \cdot < X_v, X_v >$$

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή έχει τοπική έκφραση:

$$E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$$

2.4 Απεικόνιση Gauss

Αν M είναι μία κανονική επιφάνεια, μία απεικόνιση $N: M \rightarrow S^2$, όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα, ονομάζεται απεικόνιση Gauss της M, εάν για κάθε $p \in M$ η εικόνα $N(p)$ είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_P\ M$. Εάν υπάρχει μία τέτοια απεικόνιση η M ονομάζεται προσανατολίσιμη. Η απεικόνιση N είναι μοναδιαίο διάνυσμα και ορίζεται ως:

$$N(p) = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$$

2.5 Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Καθώς οι παράμετροι (u, v) της X καμπύλης μεταβάλλονται κατά du και dv, η επιφάνεια απομακρύνεται από το εφαπτόμενο επίπεδό της, απόσταση ίση με $\big(X(u+du, v+dv) - X(u,v)\big) \cdot N$, όπου N το κάθετο διάνυσμα. Από το ανάπτυγμα Taylor δύο μεταβλητών η ποσότητα $X(u+du, v+dv) - X(u,v)$ ισούται $X_u \cdot du + X_v \cdot dv + \frac{1}{2}(X_{uu} \cdot du^2 + 2 \cdot X_{uv} \cdot du \cdot dv + X_{vv} \cdot dv^2)$ *+ υπόλοιπο*, όπου η ποσότητα $\frac{\upsilon\pi\acute{o}\lambda o\iota\pi o}{dv^2+du^2}$ τείνει στο μηδέν, καθώς το $dv^2 + du^2$ τείνει στο μηδέν. Επίσης, επειδή τα διανύσματα X_u και X_v είναι εφαπτόμενα της επιφάνειας, άρα κάθετα στο N και το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν. Οπότε το ανάπτυγμα παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{2}(< N, X_{uu} > \ du^2 + < N, X_{uv} > \ du \cdot dv + < N, X_{vv} > dv^2) + \text{υπόλοιπο}$$

Ορίζουμε τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης ως:

$$e = - < N_u, X_u > = < N, X_{uu} >$$

$$f = - < N_u, X_v > = < N, X_{uv} >$$

$$g = - < N_v, X_v > = < N, X_{vv} >$$

Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή έχει τοπική έκφραση:

$$e \cdot du^2 + 2 \cdot f \cdot du \cdot dv + g \cdot dv^2$$

2.6 Τελεστής σχήματος και μέση καμπυλότητα

Αν M προσανατολισμένη επιφάνεια με απεικόνιση Gauss $N: M \to S^2$, σημείο $p \in M$. O τελεστής σχήματος της M στο σημείο p ορίζεται ως γραμμική απεικόνιση $S_p: T_P M \to T_P M$ με $S_p(z) = -dN_p(z)$ για κάθε $z \in T_P M$. Η τοπική έκφραση του τελεστή σχήματος $S_P(X_u) = a_{11} \cdot X_u + a_{21} \cdot X_v$, $S_P(X_v) = a_{12} \cdot X_u + a_{22} \cdot X_v$, μας δίνει τον πίνακα, ο οποίος δίνεται ως $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \text{ ή } A = \frac{1}{E \cdot G - F^2} \cdot \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Η μέση καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο:

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Tr}(A) \text{ ή}$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2f \cdot F + g \cdot E}{E \cdot G - F^2}$$

2.7 Τοπική αναπαραμέτρηση λείας επιφάνειας

Έστω η επιφάνεια M, η οποία είναι της μορφής: $z = u(x, y)$. Μία παραμετρικοποίηση αυτής είναι:

$$X(x, y) = (x, y, z) = \big(x, y, u(x, y)\big), \mu\varepsilon\ X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

Για να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα και την μέση καμπυλότητα, χρησιμοποιούμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης. Αρχικά, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$X_x(x, y) = (1,0, u_x)$ και $X_y(x, y) = \big(0,1, u_y\big)$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο αυτών ως:

$$X_x \times X_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix}$$

Έπειτα, υπολογίζουμε την ορίζουσα: $X_x x X_y = \big(-u_x, -u_y, 1\big)$ και το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι: $\|X_x \times X_y\| = \big(u_x^2\ +\ u_y^2\ + 1\big)^{1/2}$. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ορίζεται ως:

$$N(p) = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} = \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \big(-u_x, -u_y, 1\big)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα θα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης:

$$\mathrm{E} = < X_x, X_x > = < (1,0, u_x),\ (1,0, u_x) > = 1 + u_x^2$$

$$F = < X_x, X_y > = < (1,0,u_x), (0,1,u_y) > = u_x \cdot u_y$$

$$G = < X_y, X_y > = < (0,1,u_y), (0,1,u_y) > = 1 + u_y^2$$

Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος:

$$N_x = \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(-u_{xx}, -u_{xy}, 0\right) \text{ και}$$

$$N_y = \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(-u_{xy}, -u_{yy}, 0\right)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα θα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης:

$$e = - < N_x, X_x > = < \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(-u_{xx}, -u_{xy}, 0\right), (1,0,u_x) > = \frac{u_{xx}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f = - < N_x, X_y > = < \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(-u_{xx}, -u_{xy}, 0\right), (0,1,u_y) > = \frac{u_{xy}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g = - < N_y, X_y > = < \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(-u_{xy}, -u_{yy}, 0\right), (0,1,u_y) > = \frac{u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

Η μέση καμπυλότητα υπολογίζεται από τον τύπο: $H(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2f \cdot F + gE}{E \cdot G - F^2}$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{(1+u_y^2) \cdot \frac{u_{xx}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{1/2}} - 2 \frac{u_{xy} \cdot u_x \cdot uy}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{1/2}} + \frac{(1+u_x^2) \cdot u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}}{(1+u_x^2) \cdot (1+u_y^2) - u_x^2 \cdot u_y^2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+u_y^2) \cdot u_{xx} - 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + (1+u_x^2) \cdot u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

2.8 Ευθειογενείς επιφάνειες

Μία επιφάνεια ονομάζεται ευθειογενής εάν σχηματίζεται από την ένωση ευθειών. Αυτές οι ευθείες καλούνται γεννήτορες της επιφάνειας.

Εάν $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ είναι μία καμπύλη που τέμνει κάθε γεννήτορα και $u(t)$: είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα στη διεύθυνση κάθε γεννήτορα, τότε η παραμέτρηση δίνεται ως: $X(t, v) = \gamma(t) + v \cdot u(t)$. Επιπλέον, τα διανύσματα $X_u = \dot{\gamma} + v \cdot \dot{u}$ και $X_v = u$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για να είναι η $X(t, v)$ κανονικό τμήμα επιφάνειας, δηλαδή η καμπύλη δεν πρέπει να εφάπτεται ποτέ στους γεννήτορες.

Μία σημαντική υποπερίπτωση είναι αυτή όπου οι γεννήτορες είναι παράλληλοι μεταξύ τους, δηλαδή το $u(t)$ είναι ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα, έστω α παράλληλο στους γεννήτορες. Τότε, η επιφάνειά μας ονομάζεται γενικευμένος κύλινδρος και η παραμέτρησή είναι η εξής:

$$X(t, v) = \gamma(t) + v \cdot a$$

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, για $t \in (0, 2\pi)$ και $\alpha = (0,0,1)$, παράλληλο στον άξονα z. Μία παραμέτρηση είναι η $X(t, v) = (cos\, t, sin\, t, v)$ και για $v \in (0,1)$ μας δίνει τον άτλα του μοναδιαίου κυλίνδρου.

2.9 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Μία επιφάνεια ονομάζεται επιφάνεια εκ περιστροφής, όταν περιστρέψουμε μία επίπεδη καμπύλη γύρω από έναν άξονα περιστροφής. Συνήθως, θεωρούμε ότι ο άξονας περιστροφής είναι ο άξονας z και η γενική μορφή της καμπύλης είναι:

$$\gamma(u) = \big(f(u), 0, g(u)\big)$$

Η $\gamma(u)$ καλείται γενέτειρα καμπύλη και η παραμέτρηση της επιφάνειας είναι:

$$X(u, v) = \big(f(u) \cdot \cos v, f(u) \cdot \sin v, g(u)\big)$$

Για να ελέγξουμε την κανονικότητα υπολογίζουμε $X_u = \big(\dot{f} \cdot \cos v, \dot{f} \sin v, \dot{g}\big)$ και $X_v = (-f \cdot \sin v, f \cdot \cos v, 0)$ και $X_u \times Xv = (f \cdot \dot{g} \cdot \cos v, -f \cdot \dot{g} \cdot \sin v, f \cdot \dot{f})$. Οπότε για να ορίζεται κάθετο διάνυσμα, πρέπει η $f(u)$ να μη μηδενίζεται ποτέ, δηλαδή η καμπύλη γ να μην τέμνει τον άξονα z και ακόμα όταν οι συναρτήσεις $\dot{f}$ και $\dot{g}$ δεν είναι ποτέ ταυτόχρονα μηδέν. Σε αυτήν την περίπτωση η καμπύλη γ είναι κανονική.

Παράδειγμα: Η αλυσσοειδής επιφάνεια είναι ένα παράδειγμα επιφάνειας εκ περιστροφής. Μία παραμετρηκή μορφή της είναι η:

$$X(u,v) = (\cosh(u) \cdot \cos v \,, \cosh(u) \cdot \sin v \,, u)$$

2.10 Ελαχιστικές επιφάνειες

Μία ελαχιστική επιφάνεια M είναι αυτή της οποίας η μέση καμπυλότητα είναι ίση με το μηδέν σε κάθε σημείο της $p \in M$. Από την παράγραφο 2.7 έχουμε ότι: $H(p) = 0$, δηλαδή:

$$\left(1 + u_y^2\right) \cdot u_{xx} - 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2) \cdot u_{yy} = 0$$

Κάθε λεία επιφάνεια με τοπική παραμέτρηση, όπως αυτής της παραγράφου 2.7, για τυχαία συνάρτηση $u(x,y)$ ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα: Όπως στο παράδειγμα στην 2.9 της αλυσοειδούς επιφάνειας που είναι επιφάνεια εκ περιστροφής, θα δείξουμε ότι είναι και ελαχιστική επιφάνεια. Τα θεμελιώδη ποσά υπολογίζονται:

$$E = G = \cosh^2 u \,, \qquad F = 0, \qquad e = -1, \qquad f = 0, \qquad g = 1$$

και η μέση καμπυλότητα: $H = \frac{-\cosh^2 u + \cosh^2 u}{2 \cdot \cosh^4 u} = 0.$

Κεφάλαιο 3: Μεταφορικό σολιτόνιο και διαφορική εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής

Στη φυσική και στην κυματική τα σολιτόνια είναι εντοπισμένα κύματα που δρουν ως σωματίδια, ταξιδεύουν μέσα στο χώρο διατηρώντας το σχήμα και τη μορφής τους. Μπορεί να εμφανιστεί σε διάφορες μορφές κυμάτων, είτε ως φως, είτε ως ηχητικό κύμα. Στα μαθηματικά το σολιτόνιο είναι μία λύση ορισμένων μη γραμμικών εξισώσεων. Στη διαφορική γεωμετρία το μεταφορικό σολιτόνιο είναι μία ειδική λύση της εξίσωσης μέσης καμπυλότητας ροής με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ κατά μήκος μίας ευθείας χωρίς να αλλάζει το σχήμα της. Η ταχύτητα ροής μίας επιφάνειας M, ορίζεται με ένα διάνυσμα $\vec{v} \epsilon \mathbb{R}^3$, μη μηδενικό στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Για κάθε σημείο *p* της επιφάνειας M, με *N(p)* το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και με *H(p)* τη μέση καμπυλότητα στο σημείο αυτό. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$H(p) = < N(p), \vec{v} > (1)$$

Η μελέτη των μεταφορικών σολιτονίων έχει σημαντικό ενδιαφέρον, διότι αποτελεί μία γεωμετρική μετατόπιση του κύματος κατά τη διάρκεια του χρόνου, όπου μία επιφάνεια κινείται με ταχύτητα ανάλογη της μέσης καμπυλότητάς της, όπως η διάχυση της θερμότητας. Επίσης, λαμβάνονται σημαντικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά της ροής σε γενικές συνθήκες. Έτσι, μπορούμε να παρατηρήσουμε συμπεριφορές και μοτίβα των επιφανειών που βοηθούν στην κατανόηση των σολιτονίων. Παράδειγμα αποτελεί η μοναδικότητα ή οι αυτοτομές των επιφανειών (singularities) ανάλογα με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Η εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής είναι μία γενίκευση των ελαχιστικών επιφανειών με εφαρμογές στη φυσική, όπως στην μελέτη του προβλήματος του J. Plateau των σαπουνόφουσκων, οι οποίες σχηματίζουν επιφάνεια ελάχιστης έκτασης λόγω της επιφανειακής τάσης της ατμόσφαιρας, η οποία αποδεικνύει την ύπαρξη τέτοιων επιφανειών.

Αναλύοντας την εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής (1), υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος με το διάνυσμα της ταχύτητας ροής $\vec{v}$ = (v_1 , v_2 , v_3):

$$< N(p), \vec{v} > = < \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(-u_x, -u_y, 1\right), (v_1 , v_2 , v_3) > \Leftrightarrow$$

$$< N(p), \vec{v} > = \frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-u_x \cdot v_1 - u_y \cdot v_2 + v_3)$$

Εξισώνοντας την παραπάνω σχέση με τη μέση καμπυλότητα, όπως υπολογίστηκε στο υποκεφάλαιο 2.8, προκύπτει:

$$\frac{1}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-u_x \cdot v_1 - u_y \cdot v_2 + v_3) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 + u_y^2\right) \cdot u_{xx} - 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + \left(1 + u_x^2\right) \cdot u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + u_y^2\right) \cdot u_{xx} - 2 \cdot u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2) \cdot u_{yy} = 2 \left(u_x^2 + u_y^2 + 1\right) \cdot$$
$$\left(- u_x \cdot v_1 - u_y \cdot v_2 + v_3\right) \text{ (2)}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, σχεδόν γραμμική, για γνωστό: $\vec{v}$ = (v_1 , v_2 , v_3) και η επιλυσιμότητά της δεν είναι βέβαιη. Μεταφορικό σολιτόνιο είναι η κάθε λύση $u(x, y)$ που ικανοποιεί την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Κεφάλαιο 4: Ειδικές λύσεις συγκεκριμένων γεωμετρικών συνθηκών

Θα θεωρήσουμε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης σολιτονίων έχει κάποιες συγκεκριμένες γεωμετρικές συνθήκες.

4.1 Επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου

Θεωρούμε ότι η επιφάνειά μας είναι γενικευμένος κύλινδρος της μορφής: $X(t,s) = \gamma(s) + t \cdot \vec{a}, t \in \mathbb{R}$, όπου $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, επίπεδη καμπύλη, κάθετη στο σταθερό διάνυσμα $\vec{v}$. Θεωρούμε ότι η γ είναι παραμετρικοποιημένη ως προς το μήκος τόξου, έτσι ώστε: $\gamma'(s) \times \vec{n}(s) = \vec{a}$, όπου $\vec{n}$, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη γ. Υπολογίζουμε το κάθετο διάνυσμα και τη μέση καμπυλότητα της επιφάνειας *M*.

$$X_t = a, X_{tt} = 0, x_{ts} = 0$$

$$X_s = \dot{\gamma}(s), x_{ss} = \ddot{\gamma}(s)$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης:

$E = \langle x_t, x_t \rangle = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 1$, επειδή το a είναι μοναδιαίο διάνυσμα

$F = \langle x_t, x_s \rangle = \dot{\gamma}(s) \cdot a = 0$, επειδή $\dot{\gamma}(s)$ και a είναι κάθετα μεταξύ τους διανύσματα για κάθε s

$G = \langle x_s, x_s \rangle = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = \|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$, επειδή η $\gamma(s)$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας

Επιπλέον, $X_t \ x \ X_s = \vec{a} \times \dot{\gamma}(s) = -n(s)$

$$N(x,t) = \frac{x_t \times x_s}{\|x_t \times xs\|} = -n(s), \text{ επειδή το } N \text{ είναι μοναδιαίο διάνυσμα}$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\dot{\gamma}(s), \vec{n}(s), \vec{a}$ αποτελούν το τρίεδρο Frenet.

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης:

$$e = \langle N, x_{tt} \rangle = n(s) \cdot 0 = 0$$

$$f = \langle N, x_{ts} \rangle = n(s) \cdot 0 = 0$$

$$g = \langle N, x_{ss} \rangle = n(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|} \cdot \ddot{\gamma}(s)$$

Υπολογίζουμε την μέση καμπυλότητα:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2 \cdot f \cdot F + g \cdot E}{E \cdot G - F^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|} \cdot \ddot{\gamma}(s) \quad \Leftrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\ddot{\gamma}(s)\|^2}{\|\ddot{\gamma}(s)\|} \quad \Leftrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \|\ddot{\gamma}(s)\| \quad \Leftrightarrow$$

$2 \cdot H = k(s)$, όπου k: η καμπυλότητα της καμπύλης γ

Για να είναι η επιφάνεια *M* σολιτόνιο μεταφοράς, πρέπει:

$$H = \langle N, \vec{v} \rangle$$

ή $\frac{k(s)}{2} = \langle -n(s), \vec{v} \rangle$

$$k(s) = -2\langle n(s), \vec{v} \rangle$$

<u>1η περίπτωση</u>

Αν η ταχύτητα ροής $\vec{v}$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$, τότε $\langle n(s), \vec{v} \rangle$ = 0, για κάθε s ∈ I, οπότε η γ είναι ευθεία γραμμή και η *M* είναι ένα επίπεδο.

$2^η$ περίπτωση

Αν η ταχύτητα ροής $\vec{v}$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a}$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μετά από περιστροφή των αξόνων θεωρούμε ότι $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{e}_3$, ένα επίπεδο κάθετο στο $\vec{e}_3$ είναι ένα επίπεδο παράλληλο στο x - y επίπεδο. Εκφράζουμε τη γ ως συνάρτηση επιπέδου: $y = u(x)$. Δηλαδή η συνάρτηση u είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής y, οπότε όλες οι μερικές παράγωγοι ως προς y θα μηδενίζονται. Αντικαθιστώ στη διαφορική μου εξίσωση:

$$(1 + u_x^2) \cdot u_{yy} - 2u_x \cdot u_y \cdot u_{xy} + \left(1 + u_y^2\right)u_{xx} = 2 \cdot \left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)\frac{1}{2}$$

$$u_{xx} = 1 + u_x^2$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση με άγνωστο το x.

Θέτουμε $y(x) = u_x(x)$, οπότε έχω: $y_x = 1 + y^2$.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\int \frac{1}{1 + y^2} dy = \int dx$$

$$arc\tan(y) = x + c$$

Άρα, $y = \tan(x + c)$

$$u'(x) = \tan(x + c)$$

$$\int u'(x)\, dx = \int \tan(x + c)\, dx$$

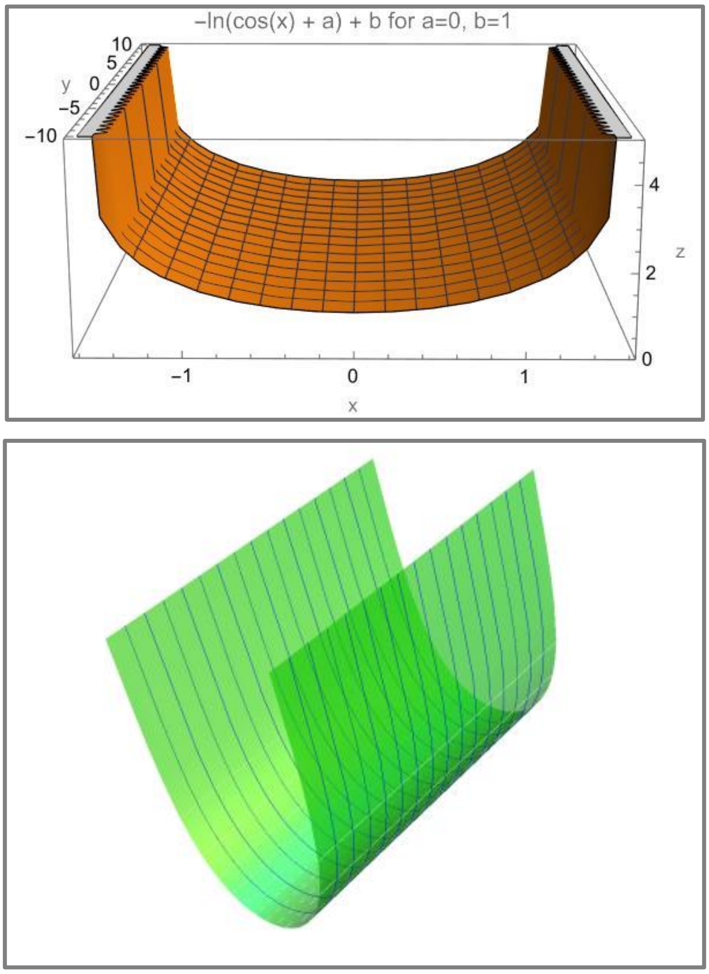
$$u = \int \frac{\sin(x + c)}{\cos(x + c)} dx$$

$$u = \int -\frac{(\cos(x+c))'}{\cos(x+c)} \mathrm{dx}$$

$$u(x) = -\log\cos(x + c) + a$$

Όπου c, a: σταθερές.

Η παραπάνω λύση της κυλινδρικής επιφάνειας καλείται **μονόνιο μεταφοράς**.



Εικόνα 1. Απεικονίζεται η γραφική παράσταση του μονονίου μεταφοράς.

Έστω $\vec{v}$ διάνυσμα όχι κάθετο στους γεννήτορες, το οποίο εκφράζει το $x - z$ επίπεδο.

$$\vec{v} = \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_3, \text{ με } |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

Εάν $\vec{e} = -\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_3$, είναι η παράγωγος του $\vec{v}$, το $\vec{e}$ έχει ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $\vec{e}_2$, μπορούμε να γράψουμε την καμπύλη ως γράφημα στον y άξονα, δηλαδή η παραμετρικοποίηση εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων ίδιας διεύθυνσης του $\vec{e}_2$ και του $\vec{e}$. Η παραμετρικοποίηση της επιφάνειας είναι:

$X(t, s) = s \cdot \vec{e}_2 + g(s) \cdot \vec{e} + t \cdot \vec{v}$, όπου $g(s)$ είναι η παραγόμενη καμπύλη του γενικευμένου κυλίνδρου

$$X(t, s) = s \cdot \vec{e}_2 + g(s) \cdot (-\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2) + t \cdot (\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_3)$$

$$X(t,s) = (-g(s)\cdot\sin\theta + t\cos\theta\,, s, g(s)\cos\theta + t\cdot\sin\theta)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις μερικές πρώτες και δεύτερες παραγώγους:

$$X_t = (\cos\theta\,, 0, \sin\theta)$$

$$X_s = (-\dot{g}(s)\cdot\sin\theta\,, 1, \dot{g}(s)\cdot\cos\theta)$$

$$X_{ss} = (-\ddot{g}(s)\cdot\sin\theta\,, 0, \ddot{g}(s)\cdot\cos\theta)$$

$$X_{tt} = (0{,}0{,}0)$$

$$X_{ts} = (0{,}0{,}0)$$

$$E = \langle X_t, X_t\rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$F = \langle X_t, Xs\rangle = -\dot{g}(s)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta + \dot{g}(s)\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta = 0$$

$$G = \langle X_s, X_s\rangle = \dot{g}^2(s)\cdot\sin^2\theta + 1 + \dot{g}^2(s)\cdot\cos^2\theta = \dot{g}^2(s) + 1$$

$$X_t \times X_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -\dot{g}\cdot\sin\theta & 1 & -\dot{g}\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= (-\sin\theta\,, -\dot{g}(s)\cdot\sin^2\theta + \dot{g}(s)\cdot\cos^2\theta\,, \cos\theta)$$

$$N = \frac{X_t\times X_s}{\|X_t\times X_s\|} = \frac{1}{\|X_t\times X_s\|}(-\sin\theta\,, -\dot{g}(s)\cdot\sin^2\theta + \dot{g}(s)\cdot\cos^2\theta\,, \cos\theta)$$

$$e = \langle N, X_{tt}\rangle = 0$$

$$f = \langle N, X_{ts}\rangle = 0$$

$$g = \langle N, X_{ss}\rangle = (\,\ddot{g}(s)\cdot\sin^2\theta + \ddot{g}(s)\cdot\cos^2\theta\,)\,\frac{1}{\|X_t\times X_s\|} = \ddot{g}(s)\,\frac{1}{\|X_t\times X_s\|}$$

$$H = \frac{1}{2}\cdot\frac{e\cdot G - 2\cdot f\cdot F + g\cdot E}{E\cdot G - F^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ddot{g}(s)}{\dot{g}^2(s)+1}$$

Από την εξίσωση του σολιτονίου έχω: $H = \langle N, \vec{v} \rangle$, για $\vec{v} = (0, 0, \frac{1}{2})$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\ddot{g}(s)}{\dot{g}^2(s)+1} = \frac{1}{2} \cdot \cos\vartheta$$

$$\ddot{g}(s) = \cos\theta \cdot (\dot{g}^2(s) + 1)$$

Λύνουμε τη διαφορική εξίσωση. Θέτουμε: $w = \dot{g}(s)$

$$\dot{w}(s) = \cos\vartheta \cdot (w^2(x) + 1)$$

$$\frac{dw}{ds} = \cos\theta(w^2 + 1)$$

$$\int \frac{dw}{w^2 + 1} = \int \cos\theta \, ds$$

$$\arctan w = \cos\theta \cdot s + c$$

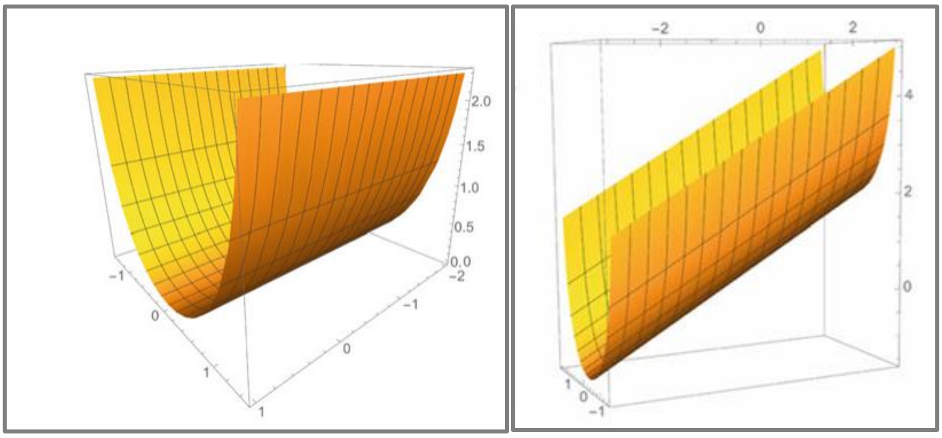
$$w = \tan(\cos\theta \cdot s + c)$$

Άρα, $\dot{g}(s) = \tan(\cos\theta \cdot s + c)$

$$g(s) = \int \tan(\cos\theta \cdot s + c)$$

$$g(s) = \int \frac{\sin(\cos\theta \cdot s + c)}{\cos(\cos\theta \cdot s + c)}$$

$$g(s) = -\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \log(\cos(\cos\theta \cdot s)) + \tan\theta \cdot x + \alpha$$



Εικόνα 2. Απεικονίζεται ένα μονόνιο μεταφοράς. Το αριστερό είναι για γωνία $\theta = 0$ και δεξιά φαίνεται για γωνία $\theta = \frac{\pi}{6}$.

4.2 Επιφάνεια εκ περιστροφής

Θεωρούμε τη γεωμετρική συνθήκη ότι η επιφάνειά μας είναι μία επιφάνεια εκ περιστροφής, δηλαδή της μορφής: $X(x,y) = \big(f(x) \cdot \cos y \,, f(x) \cdot \sin y \,, z(x)\big)$.

Υπολογίζουμε τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους:

$$X_x(x,y) = \left(\dot{f}(x) \cdot \cos y \,, \dot{f}(x) \cdot \sin y \,, \dot{z}(x)\right)$$

$$X_y(x,y) = (-f(x) \cdot \sin y \,, f(x) \cdot \cos y \,, 0)$$

$$X_{xx}(x,y) = \left(\ddot{f}(x) \cdot \cos y \,, \ddot{f}(x) \cdot \sin y \,, \ddot{z}(x)\right)$$

$$X_{xy}(x,y) = \big(-\dot{f}(x) \cdot \sin y \,, \dot{f}(x) \cdot \cos y \,, 0\big)$$

$$x_{yy}(x,y) = (-f(x) \cdot \cos y - f(x) \cdot \sin y \,, 0)$$

Υπολογίζουμε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης:

$$E = \langle X_x, X_x \rangle = \dot{f}^2_{(x)} + \dot{z}^2(x)$$

$$F = \langle X_x, X_y \rangle = -\dot{f}(x) \cdot \cos y \cdot \sin y \cdot f(x) + \dot{f}(x) \cdot cos\, y \cdot sin\, y \cdot f(x) = 0$$

$$G = \langle X_y, X_y \rangle = f^2_{(x)} \cdot \sin^2 y + f^2_{(x)} \cdot \cos^2 y = f^2_{(x)}$$

$$X_x \times X_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{f}(x) \cdot \cos y & \dot{f}(x) \cdot \sin y & \dot{z}(x) \\ -f(x) \cdot \sin g & f(x) \cdot \cos y & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left(-\dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot \cos y, -z(x) \cdot f(x) \cdot \sin y, f(x) \cdot \dot{f}(x)\right)$$

Το κάθετο διάνυσμα είναι: $N(x, y) = \frac{X_x \times X_y}{\|Xx \times X_y\|}$ =

$$\frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \left(-\dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot cos\, y, -z(x) \cdot f(x) \cdot sin\, y, f(x) \cdot \dot{f}(x)\right).$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης:

$$e = \langle N, x_{xx} \rangle = \frac{1}{\|X_x \times X_y\|}$$
$$\cdot \left(-\ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot \sin^2 y - \ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot \sin^2 y + \ddot{z}(x)\right.$$
$$\left.\cdot \dot{f}(x) \cdot f(x)\right)$$
$$= \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \left(-\ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) + \ddot{z}(x) \cdot \dot{f}(x) \cdot f(x)\right)$$

$$f = \langle N, X_{xy} \rangle = -\dot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot \sin y \cdot \cos y - \dot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot sin\, y \cdot cos\, y$$
$$= \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot (-2 \cdot \dot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) \cdot \sin y \cdot \cos y)$$

$$g = \langle N, X_{yy} \rangle = f^2(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot \cos^2 y + f^2(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot \sin^2 y$$
$$= \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot f^2(x) \cdot \dot{z}(x)$$

Έπειτα, υπολογίζουμε την μέση καμπυλότητα:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2 \cdot f \cdot F + g \cdot E}{E \cdot G - F^2} \Leftrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \left(-\ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) + \ddot{z}(x) \cdot \dot{f}(x) \cdot f(x)\right) \cdot f^2_{(x)} + \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot f^2(x) \cdot \dot{z}(x))}{f^2_{(x)}} \Leftrightarrow$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \left(-\ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) + \ddot{z}(x) \cdot \dot{f}(x) \cdot f(x)\right) + \dot{z}(x))$$

Για $\vec{v} = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ παράλληλο στον z άξονα περιστροφής έχω ότι:

$$\langle N, \vec{v} \rangle = \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot \dot{f}(x)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση μέσης καμπυλότητας ροής

$$H = \langle N, \vec{v} \rangle \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \left(-\ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) + \ddot{z}(x) \cdot \dot{f}(x) \cdot f(x)\right) + \dot{z}(x)) = \frac{1}{\|X_x \times X_y\|} \cdot \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot \dot{f}(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(-\ddot{f}(x) \cdot \dot{z}(x) \cdot f(x) + \ddot{z}(x) \cdot \dot{f}(x) \cdot f(x)\right) + \dot{z}(x) = f(x) \cdot \dot{f}(x) \Leftrightarrow$$

$$\dot{z}(x) \cdot \left(1 - \ddot{f}(x) \cdot f(x)\right) = f(x) \cdot \dot{f}(x) \cdot \left(1 - \ddot{z}(x)\right)$$

Στην περίπτωση που έχουμε $f(x) = x$, το πρόβλημά μας γίνεται

$$\ddot{z}(x) + \frac{\dot{z}(x) \cdot \left(1 + \dot{z}^2(x)\right)}{x} = 1 + \dot{z}^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ddot{z}(x) \cdot x}{\left(1 + \dot{z}^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{z}(x)}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x \cdot \dot{z}(x)}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}}$$

Για την παραπάνω εξίσωση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις αρχικές συνθήκες $z(0) = 0$ και $z'(0) = 0$, ώστε να έχουμε αυτοτομή (singularity) στο σημείο

$x = 0$. Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη λύσης της παραπάνω εξίσωσης υπάρχει και επίσης αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει κλειστό σολιτόνιο μεταφοράς. Επίσης, με ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα $(0, x)$:

$$\frac{u'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} = \frac{1}{r} \cdot \int_0^r \frac{t}{\sqrt{1+u'(t)^2}} dt$$

Για $r \to 0$ σύμφωνα με τον κανόνα L' Hospital, έχουμε:

$$\lim_{r \to 0} \frac{u'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+u'(t)^2}}$$

Επομένως, πρέπει: $\lim_{r \to 0} u'(r) = 0$.

Οπότε δείξαμε ότι κάθε λύση της παραπάνω εξίσωσης που τέμνει τον άξονα περιστροφής πρέπει να το κάνει κάθετα.

Θεώρημα: Έστω $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, μία επίπεδη καμπύλη που ανήκει στο x-y επίπεδο, η οποία είναι γεννήτορας καμπύλη της επιφάνειας εκ περιστροφής γύρω από τον z άξονα. Παρακάτω θα αναλυθούν οι δύο πιθανές εκδοχές.

<u>Υποπερίπτωση 1</u>

Η καμπύλη γ τέμνει κάθετα τον άξονα z, τότε η γ είναι μία κοίλη συμμετρική απεικόνιση μίας συνάρτησης f ορισμένη σε ένα φραγμένο διάστημα του x άξονα με μόνο μία μέγιστη τιμή στο σημείο τομής με τον z άξονα. Η καμπύλη γ τέμνει τον x άξονα σε δύο σημεία.

<u>Υποπερίπτωση 2</u>

Η καμπύλη γ δεν τέμνει κάθετα τον άξονα z και απεικονίζεται ως φτερωτό σχήμα. Η καμπύλη γ τέμνει τον x άξονα σε δύο σημεία.

Απόδειξη

Έστω ότι: $\gamma(s) = (\,x(s), 0, z(s))$, με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου, δηλαδή: $\|\gamma'(s)\| = 1$ και η εξίσωση (1) γίνεται

$$\varphi'(s) + \frac{\sin\varphi(s)}{x(s)} = \frac{\cos\varphi(s)}{z(s)} \text{ και } x'(s) = \cos\varphi(s)\,, z'(s) = \sin\varphi(s)$$

Με αρχικές συνθήκες: $x(0) = x_0$ και $z(0) = z_0 > 0$ και $\varphi(0) = 0$

Υποπερίπτωση 1

Στην περίπτωση που $x(0) = x_0$, τότε η γ τέμνει τον z άξονα. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\bar{x}(s) = -x(-s)$, $\bar{z}(s) = z(-s)$ και $\bar{\varphi}(s) = -\varphi(-s)$ ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων με τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Επομένως, υπάρχει μία συμμετρία γύρω από τον z άξονα. Έτσι, θα μελετήσουμε τη λύση για $s > 0$. Θα δείξουμε ότι η γ είναι καμπύλη του x άξονα. Από τον κανόνα του L' Hospital: $\varphi'(0) = \frac{1}{2z_0}$ και επειδή: $\varphi(s) < 0$, η φ φθίνει γύρω από το μηδέν. Επειδή $\varphi'(s_0) = 0$ και $\varphi''(s_0) \geq 0$, το σύστημά μας γίνεται

$$\varphi''(s_0) = \sin\varphi(s_0) \cdot \cos\varphi(s_0) \cdot \left(\frac{1}{x(s_0)^2} - \frac{1}{z(s_0)^2}\right) < 0$$

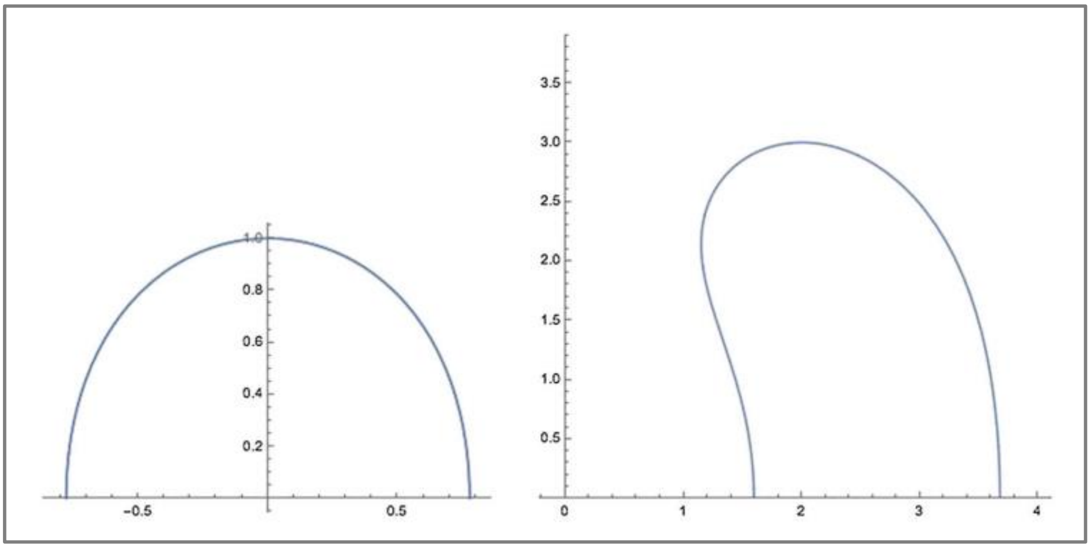
Επειδή $\sin\varphi(s_0) \cdot \cos\varphi(s_0) < 0$.

Εάν η γ δεν είναι καμπύλη συναρτήσει του x, τότε υπάρχει ένα $s_1 > 0$, τέτοιο ώστε $\varphi(s_1) = -\frac{\pi}{2}$. Από το σύστημα εξισώσεων ξέρουμε ότι η x είναι αύξουσα στο $(0, s_1)$ διάστημα και η z είναι φθίνουσα στο ίδιο διάστημα, με $z(s) \to 0$ για $s \to s_1$. Αυτό αποδεικνύει ότι η γ είναι συνάρτηση του x. Εφόσον, $\varphi(s) \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ για $s > 0$. Από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων έχουμε ότι $\varphi'(s) < 0$ που σημαίνει ότι η γ είναι κοίλη καμπύλη.

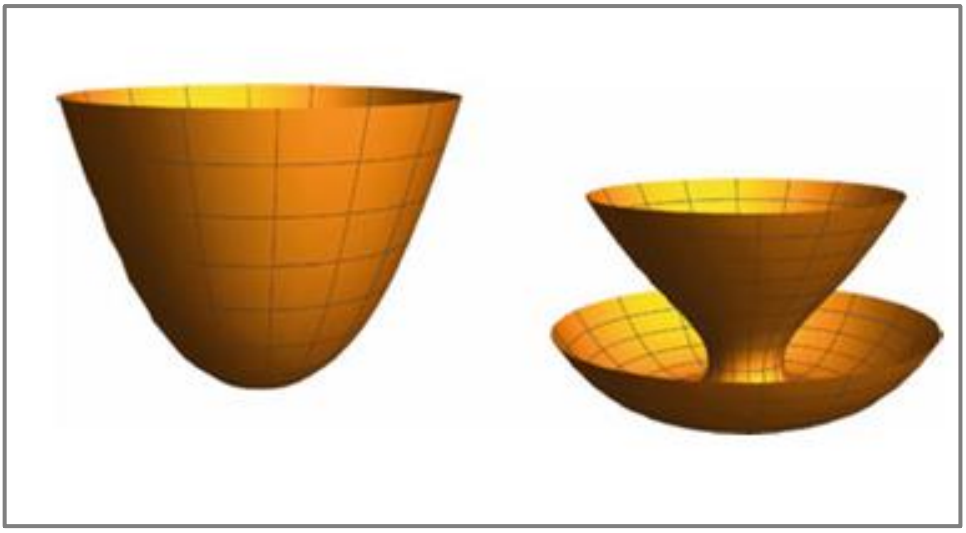
Υποπερίπτωση 2

Στην περίπτωση που $x(0) > 0$, όμοια με την προηγούμενη υποπερίπτωση για $s > 0$, η φ είναι φθίνουσα και υπάρχει ένα: $0 < s_1 < \infty$, τέτοιο ώστε $\lim_{s \to s_1} z(s) = 0$ και η γ είναι κοίλη συνάρτηση για $s > 0$. Εφόσον, $z''(0) < 0$, τότε η z παίρνει μέγιστη τιμή για $s = 0$. Αφού η φ είναι φθίνουσα κοντά στο $s = 0$, η συνάρτηση x θα παίρνει μία ελάχιστη τιμή σε ένα σημείο s_2. Η συνάρτηση φ δεν μπορεί να πάρει την τιμή π. Επίσης, η φ είναι αύξουσα για s < s_2 και $\varphi(s)$ → $\frac{\pi}{2}$, για s → s_3, για κάποια $s_3 < s_2$. Επιπλέον, $z(s) \to 0$, για $s \to s_3$.

Οπότε η απεικόνιση σε κάθε περίπτωση, όπου η γραφική παράσταση τέμνει και δεν τέμνει τον z άξονα.



Εικόνα 3. Απεικονίζεται η δυσδιάστατη καμπύλη του $x - y$ επιπέδου. Αριστερά τέμνει τον άξονα z, δεξιά δεν τέμνει τον άξονα z.



Εικόνα 4. Απεικονίζεται η τρισδιάστατη καμπύλη του $x - y$ επιπέδου.

Κεφάλαιο 5: Σολιτόνια χωριζομένων μεταβλητών

5.1 Σολιτόνια τύπου μεταφοράς

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x,y) = f(x) + g(y),$$

οπότε η εξίσωση (2) θα πάρει τη μορφή:

$$\left(1 + {g'}^2\right) \cdot f'' + \left(1 + {f'}^2\right) g'' = 2 \cdot \left(1 + {f'}^2 + {g'}^2\right) \cdot \left(-v_1 \cdot f' - v_2 \cdot g' + v_3\right)$$

Στην περίπτωση αυτή, η επιφάνειά μας μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο επίπεδων καμπυλών: $a(x) + \beta(y)$, όπου $a(x) = \left(x, 0, f(x)\right)$ και $\beta(y) = \left(0, y, g(y)\right)$. Στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε το πρώτο θεώρημα για τις σολιτονιακές λύσεις τύπου μεταφοράς.

Θεώρημα 1: Τα μόνα σολιτόνια μεταφοράς που είναι άθροισμα δύο επίπεδων καμπυλών είναι είτε επίπεδα, είτε μονόνια μεταφοράς.

<u>Απόδειξη</u>

Στην περίπτωση που οι δύο επίπεδες καμπύλες βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα, τότε το άθροισμά τους θα είναι και αυτό επίπεδο, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν βρίσκονται παράλληλα επίπεδα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα επίπεδα που βρίσκονται οι καμπύλες τέμνονται στον άξονα z και ότι η μία από τις επίπεδες καμπύλες βρίσκεται στο επίπεδο $x = 0$. Τότε, η άλλη θα βρίσκεται στο επίπεδο $c \cdot x + y = 0$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ των δύο επιπέδων είναι $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$, όταν το $c = 0$, τα επίπεδα είναι κάθετα. Η πρώτη καμπύλη έχει παραμέτρηση: $\beta(y) = \left(0, y, g(y)\right)$ και η δεύτερη καμπύλη θα έχει παραμέτρηση: $a(x) = \left(x, -c \cdot x, f(x)\right)$, όπου: $f(x)$ και $g(y)$ είναι δύο ομαλές συναρτήσεις ορισμένες σε δύο ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, I και J, αντίστοιχα. Έτσι, η παραμέτρηση της επιφάνειας γίνεται

$$X(x,y) = a(x) + \beta(y) = \big(x, y - c \cdot x, f(x) + g(y)\big).$$

Στην περίπτωση που η $f(x)$ ή η $g(y)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, η επιφάνεια θα είναι γενικευμένου κυλίνδρου που γνωρίζουμε ότι η σολιτονιακή μας θα είναι είτε επίπεδο, είτε μονόνιο μεταφοράς. Οπότε θα υποθέσουμε ότι η εξίσωσή μας δεν είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και είναι μία τυχαία συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο, οπότε θα αποδειχθεί το ζητούμενο. Θα υπάρχουνε ανοιχτές περιοχές των I και J, αντίστοιχα, όπου: $f''(x) \cdot f'(x),\ g''(y) \cdot g'(y) \neq 0$. Μετά από αντικατάσταση στην (2):

$$\begin{aligned}\left(1 + g'^2\right) \cdot f'' + \left(1 + c^2 + f'^2\right) \cdot g''\\ = 2 \cdot (1 + (f' + c \cdot g')^2 + g'^2) \cdot (-v_1) \cdot (f' + c \cdot g') - v_2 \cdot g' + v_3\end{aligned}$$

Διαιρώντας με την τιμή $\left(1 + g'^2\right) \cdot \left(1 + c^2 + f'^2\right)$, προκύπτει

$$\frac{f''}{1+c^2+f''^2} + \frac{g''}{1+g'^2} = (2 \cdot (1 + (f' + c \cdot g')^2 + g'^2) \cdot (-v_1) \cdot (f' + c \cdot g') - v_2 \cdot g' + v_3) \cdot \frac{1+g''^2+\left(f'+c \cdot g\right)^2}{\left(1+g'^2\right) \cdot \left(1+c^2+f'^2\right)}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι άθροισμα συναρτήσεων x και y, αντίστοιχα. Παραγωγίζοντας ως προς x και μετά ως προς y, έχουμε

$$\left(\sum_{n=0}^{4} P_n(y) \cdot f'^n\right) \cdot \frac{f'' \cdot g''}{\left(1+g'^2\right)^2 \cdot \left(1+c^2+f'^2\right)^2} = 0$$

Όπου $P_n(y)$: συνάρτηση του y.

Το κλάσμα δεν μπορεί να ισούται με το μηδέν, οπότε το άθροισμα των πολυωνύμων της f' κάνει μηδέν και επειδή $f' \neq 0$, οι συντελεστές $P_n(y)$ ισούνται με το μηδέν. Από τους υπολογισμούς των συντελεστών $P_n(y)$, έχουμε ότι

$$P_4(y) = -v_1 \cdot g'$$

Επομένως, $v_1 = 0$, εφόσον $g' \neq 0$.

Επίσης, το $P_2(y) = c \cdot \left(-v_3 \cdot g'^2 - 2v_2 \cdot g' + v_3\right)$.

Χωρίζοντας δύο περιπτώσεις όπου $c = 0$ και $c \neq 0$, καταλήγουμε στο ότι

$v_2 = v_3 = 0$, οπότε $\vec{v} = \vec{0} = (0,0,0)$, το οποίο είναι αντιφατικό.

Σε αυτήν την περίπτωση τον πρόβλημά μας είναι το $H(p) = 0$, όπου μιλάμε για ελαχιστική επιφάνεια. Οι ελαχιστικές επιφάνειες χωριζομένων μεταβλητών τύπου μεταφοράς είναι είτε επίπεδα, είτε η οικογένεια επιφανειών Sherk με τύπο

$$u(x,y) = \frac{1}{c} \cdot ln \left| \frac{\cos(c \cdot y)}{\cos(c \cdot x)} \right|$$

Σαν γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος θα αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο με μία λιγότερη συνθήκη.

Θεώρημα 2: Τα μόνα σολιτόνια μεταφοράς που είναι άθροισμα δύο καμπυλών, όπου η μία καμπύλη είναι επίπεδη, είναι είτε επίπεδα, είτε μονόνια μεταφοράς.

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 1.

Έστω η παραμέτρηση: $X(x,y) = \alpha(x) + \beta(y)$, με $\beta(y)$ επίπεδη καμπύλη χωρίς βλάβη της γενικότητας η β βρίσκεται στο επίπεδο $x = 0$. Τότε $\beta(y) = \big(0, y, g(y)\big)$, όπου $g(y)$ ομαλή συνάρτηση σε ένα διάστημα J. Έστω $\alpha(x)$ μη επίπεδη καμπύλη, οπότε το γράφημά της ως προς τον x άξονα συντεταγμένων είναι $\alpha(x) = \big(x, f(x), h(x)\big)$, όπου $f(x)$ και $h(x)$ ομαλές συναρτήσεις σε ένα σύνολο I. Άρα

$$X(x,y) = \big(x, y + f(x), h(x) + g(x)\big).$$

Το κάθετο διάνυσμα και η μέση καμπυλότητα δίνονται ως εξής

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + {g'}^2 + (f' \cdot g' - h')^2}} \cdot (f' \cdot g' - h', -g', 1)$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{(h'' - f'' \cdot g') \cdot \left(1 + {g'}^2\right) + \left(1 + {f'}^2 + {h'}^2\right) \cdot g''}{\left[1 + {g'}^2 + (f' \cdot g' - h')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Όταν $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, η εξίσωση (2) παίρνει την μορφή

$$(h'' - f'' \cdot g') \cdot \left(1 + g'^2\right) + \left(1 + f'^2 + h'^2\right) \cdot g'' = 2 \cdot (1 + g'^2 + (f' \cdot g' - h')^2) \cdot (v_1 \cdot (f' \cdot g' - h') - v_2 \cdot g' + v_3) \quad (3)$$

Εάν η f ή η h είναι γραμμικές, τότε η α καμπύλη είναι επίπεδη, οπότε υπάρχουν I και J διαστήματα, όπου: $f' \cdot f'' \cdot h' \cdot h'' \neq 0$ και $g' \cdot g'' \neq 0$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο, οπότε θα καταλήξουμε σε άτοπο. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθούν οι δύο παρακάτω ισχυρισμοί.

Ισχυρισμός 1:

Εάν υπάρχουνε $a, b, c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $a + b \cdot f'^2 + c \cdot h'^2 = 0$, για κάθε $x \in I$. Τότε είτε $\alpha \cdot b \cdot c = 0$, είτε $\alpha = b = c = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

- Αν θεωρήσουμε ότι το $b = 0$, τότε $a + c \cdot h'^2 = 0$.
  Αν $c = 0$, τότε $\alpha = 0$.
  Αν $c \neq 0$, τότε $h' \cdot h'' = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

- Αν θεωρήσουμε ότι $b \neq 0$, τότε με την ίδια διαδικασία καταλήγουμε ότι $c \neq 0$.

- Αν θεωρήσουμε ότι $\alpha = 0$, τότε $b \cdot f'^2 + c \cdot h'^2 = 0$ για κάθε $x \in I$. Οπότε οι τιμές b, c θα είναι ετερόσημες, δηλαδή $b \cdot c < 0$. Επομένως, $h' = \pm\sqrt{-\frac{b}{c}} \cdot f'$ ή $h = \pm\sqrt{-\frac{b}{c}} \cdot f + m$, με $m \in \mathbb{R}$. Άρα, έχουμε ότι η $\alpha = \left(x, f, \pm\sqrt{-\frac{b}{c}} \cdot f + m\right)$ που σημαίνει η ότι η f είναι επίπεδη, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $h'^2 = -\frac{a}{c} - \frac{b}{c} \cdot f'^2$.

Άρα, συμπεραίνουμε ότι: $h'(x) = \pm\sqrt{m_0 + m_1 \cdot f'^2}$, για $m_0, m_1 \neq 0$, όπου $m_0 = -\frac{a}{c}$ και $m_1 = -\frac{b}{c}$.

Ισχυρισμός 2:

Εάν υποθέσουμε ότι: $h'(x) = \pm\sqrt{m_0 + m_1 \cdot f'^2}$, για $m_0, m_1 \neq 0$. Τότε οι συναρτήσεις $\left\{1, f'^2, f' \cdot h'\right\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον $f'' \neq 0$ μπορούμε να θέσουμε $s(x) = f'(x)$. Τότε η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $\{1, s^2, \pm\sqrt{m_0 + m_1 \cdot s^2}\}$ είναι $\mp\frac{2m_0^2}{(m_0+m_1\cdot s^2)^{3/2}}$, το οποίο είναι διαφορετικό του μηδενός και αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας, δηλαδή ότι οι συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για την απόδειξη θέτουμε $Q = 1 + f'^2 + g'^2$ και διαιρώντας με Q την (3) και παραγωγίζοντας αρχικά ως προς x και στη συνέχεια ως προς y έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{3} P_n(x) \cdot g'^n,$$

όπου: $P_0 = \left(\frac{h^1-2\cdot(v_3-v_1\cdot h')\cdot\left(1+h'^2\right)}{Q}\right)'$ (a)

$$P_1(x) = \left(\frac{-f''-2\cdot f'\cdot\left(3\cdot v_1\cdot h'^2-2v_3\cdot h'+v_1\right)+2\cdot v_2\cdot h'^2+2v_2}{Q}\right)' \text{(b)}$$

$$P_2(x) = \left(\frac{h''-2\cdot f'^2\cdot(v_3-3v_1\cdot h')-4\cdot v_2\cdot f'\cdot h'+2\cdot v_1\cdot h'-2\cdot v_3}{Q}\right)' \text{(c)}$$

$$P_3(x) = \left(\frac{-f''+2\cdot\left(v_2-v'_{1\cdot f}\right)\cdot\left(1+f'^2\right)}{Q}\right)' \text{(d)}$$

Θέτουμε τους αριθμητές ίσους με:

$$\rho_0 \cdot Q, \rho_1 \cdot Q, \rho_2 \cdot Q,\ \rho_3 \cdot Q \text{ και } C_1 = \rho_0 - \rho_2, C_2 = \rho_1 - \rho_3$$

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

I. **Περίπτωση 1**: $v_3 = 0$

   i. Όταν v_1 = 0.
      Τότε $\vec{v} = (0,1,0)$, θα αντικαταστήσουμε στις παραπάνω εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) την ταχύτητα και θα αφαιρέσουμε από την (a) την (c) και από την (b) την (d). Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό 1 και θα καταλήξουμε ότι
      $c_2 + m_0 \cdot c_2 + (c_2 + c_2 \cdot m_1) \cdot f'^2 \mp 4f' \cdot h' = 0$, το οποίο είναι άτοπο από τον ισχυρισμό (2).

   ii. Όταν $v_1 \neq 0$.
      Τότε $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ ή για λόγους απλοποίησης θεωρούμε ότι: $\vec{v} = (1, v_2, 0)$. Θα αντικαταστήσουμε στις παραπάνω εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) την ταχύτητα και θα αφαιρέσουμε από την (a) την (c) και από την (b) την (d). Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό 1 θα καταλήξουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{9} A_n \cdot f'^2 = 0$$

   $\mathrm{A_n}$: σταθερές και αφού $f' \neq 0$, πρέπει: A_n=0, το οποίο είναι άτοπο διότι: $A_9 = -512$

II. **Περίπτωση 2**: $v_3 \neq 0$

   Έστω για λόγους απλοποίησης ότι: $\vec{v} = (v_1, v_2, 1)$, όπου θα αναλύσουμε σε τέσσερις υποπεριπτώσεις το πρόβλημα.

   i. Όταν $V_1, V_2 = 0, \vec{v} = (0,0,1)$.

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) την ταχύτητα, αφαιρώντας από την (a) την (c) και από την (b) την (d) και χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό 1 καταλήγουμε ότι

$$C_1(1+m_0)+C_2(1+m_1)\cdot {f'}^2 \mp 4f'\cdot h'=0,$$

το οποίο από τον Ισχυρισμό 2 είναι άτοπο.

ii. Όταν $v_1=0, v_2\neq 0, \vec{v}=(0,v_2,1)$.

Όμοια αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) την ταχύτητα, αφαιρώντας από την (a) την (c) και από την (b) την (d) και χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό 1 καταλήγουμε ότι

$4\cdot v_2\cdot f'\cdot g' = C_1\cdot(1+m_0)+2m_0+(C_1\cdot(1+n_1)+2\cdot m,-2)\cdot {f'}^2,$

το οποίο από τον Ισχυρισμό 2 και δεδομένου ότι έχουμε θέσει $v_2\neq 0$ είναι άτοπο.

iii. Όταν $v_1\neq 0, v_2=0, \vec{v}=(v_1,0,1)$.

Όμοια αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) την ταχύτητα, αφαιρώντας από την (a) την (c) και από την (b) την (d) και αντικαθιστώντας: ${f'}^2=\frac{A}{B}$, όπου:

$A=(2\cdot v_1\cdot h'-C_1-2)$ και $B=C_1-2(1-3\cdot v_1\cdot h')$, έχουμε:

$$C_2\cdot\sqrt{B}\cdot\left(A+B\cdot\left(1+{h'}^2\right)\right)=2\sqrt{A}\cdot\left(A\cdot v,+B\cdot h'\cdot(2-3\cdot v_1\cdot h')\right)$$

$$\sum_{n=0}^{9} A_n\cdot {h'}^n=0,$$

με A_n: πραγματικές σταθερές και $A_9=2^{11}\cdot v_1^5$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

iv. Όταν $v_1\neq 0, v_2\neq 0, \vec{v}=(v_1,v_2,1)$.

Όμοια αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις (a), (b), (c) και (d) την ταχύτητα, αφαιρώντας από την (a) την (c) και από την (b) την (d) και αντικαθιστώντας έχουμε από την (a), (c):

$$2(v_1 \cdot h' - 1) \cdot h'^2 + 2f'^2(1 - 3v_1 \cdot h') + 4 \cdot v_2 \cdot f' \cdot g' = 0,$$

το οποίο είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς f' με λύσεις

$$f' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2A}$$

Από την (b) και (d) έχω ότι:

$$C_2 \cdot Q + 2 \cdot \left(f' \cdot \left(3 \cdot v_1 \cdot f'^2 - 2 \cdot h'\right) + f'^2 \cdot (v_2 - v_1 \cdot f') - v_2 \cdot h'^2\right) = 0$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της f', βγάζουμε ένα πολυώνυμο του h' της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{12} A_n \cdot h'^n = 0,$$

με A_n: πραγματικές σταθερές και $h' \neq 0$ από τα δεδομένα. Οπότε: $A_n = 0$, όμως:

$A_{12} = 2^{16} \cdot 3^3 \cdot v1^8 \neq 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι οι συναρτήσεις *f(x), h(x)* και *g(y)* δεν μπορούν να είναι τίποτε άλλο από γραμμικές. Έτσι, η καμπύλη α(x) είναι επίπεδη, οπότε από το θεώρημα 1 οι σολιτονιακές λύσεις τύπου μεταφοράς θα είναι είτε επίπεδα, είτε μονόνια μεταφοράς.

5.2 Σολιτόνια ομοθετικού τύπου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

Για να είναι η $u(x, y)$, σολιτονιακή λύση η εξίσωση (2) γίνεται

$$\left(1 + f^2 g'^2\right) g f'' - 2 f g f'^2 g'^2 + \left(1 + g^2 f'^2\right) f g'' - 2\left(1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2\right)(-v_1 f' g - v_2 f g' + v_3) = 0 \ (3)$$

θα θεωρήσουμε τρεις περιπτώσεις.

I. **Περίπτωση 1**: Η συνάρτηση $f(x)$ ή η συνάρτηση $g(y)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Τότε η επιφάνειά μας είναι ευθειογενής με συμπέρασμα η λύση μας να είναι είτε επίπεδο παράλληλο στην ταχύτητα $\vec{v}$, είτε θα είναι μονόνιο μεταφοράς.

II. **Περίπτωση 2**: Μία από τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Έστω $f(x) = ax + b$, με $a \neq 0$, τότε η εξίσωση (3) θα έχει μία μορφή πολυωνύμου:

$$\sum_{n=0}^{3} A_n(y) x^n$$

οπότε όλοι οι συντελεστές $A_n(y)$ θα πρέπει να μηδενίζονται. Ο υπολογισμός $A_3 = 2a^3 \cdot v_2 \cdot {g'}^3$, μας δίνει ότι $v_2 = 0$. Ο υπολογισμός του $A_2 = 2 \cdot a^3 \cdot (a \cdot v_1 \cdot g) \cdot {g'}^2$. Συμπεραίνουμε ότι

$$v_1 = v_3 = 0$$

III. **Περίπτωση 3**: Υποθέτουμε ότι f και f' (ή g και g') είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις, δηλαδή $f' = a \cdot f$, με $a \neq 0$, πραγματικό αριθμό. Τότε $f'' = a^2 \cdot f'$ και η εξίσωση (3) είναι ένα πολυώνυμο της συνάρτησης f βαθμού 3

$$\sum_{n=0}^{3} A_n(y) \cdot f^n(x) = 0$$

Οπότε όλοι οι συντελεστές A_n πρέπει να μηδενίζονται και από υπολογισμούς προκύπτει ότι: $v_3 = 0$ και

$$-a^3 + (2 \cdot a \cdot v_1 - a^2) \cdot \left(\frac{g'}{g}\right)^2 + 2 \cdot v_2 \cdot \left(\frac{g'}{g}\right)^3 = 0$$

Εφόσον οι συντελεστές δεν είναι μηδενικοί, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν πραγματικό αριθμό b: $\frac{g'}{g} = b$, $\frac{g''}{g} = b^2$, με b ≠ 0. Αν θεωρήσουμε ότι a και b δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν, τότε

$$A_1 = a^2 + (2 \cdot (a \cdot v_1 + b \cdot v_2) + b^2) \cdot g = 0$$

Το οποίο είναι άτοπο, οπότε για την απόδειξη του θεωρήματος μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$f' \cdot f'' \neq 0 \text{ και } g' \cdot g'' \neq 0$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε:

$$p = p(f) = f'$$

$$q = q(g) = g'$$

$$p' = \frac{f''}{f} \text{ και } q' = \frac{g''}{g'}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3) και παίρνει τη μορφή

$$(1 + f^2 \cdot q^2) \cdot q \cdot p \cdot g^2 - 2 \cdot f \cdot g + (1 + g^2 \cdot p^2) \cdot f \cdot q \cdot q' - 2 \cdot (1 + p^2 \cdot q^2 + f^2 \cdot q^2) \cdot (-v_1 \cdot p \cdot g - v_2 \cdot f \cdot q + v_3) = 0 \quad (4)$$

Θεώρημα 3: Τα μόνα σολιτόνια ομοθετικού τύπου όπου η ταχύτητα ροής $\vec{v}$ είναι διάνυσμα ορθοκανονικής βάσης. Λόγω συμμετρίας της διαφορικής εξίσωσης (4) οι περιπτώσεις όπου $\vec{v} = (1,0,0)$ και $\vec{v} = (0,1,0)$ είναι όμοιες. Οπότε για την περίπτωση που $\vec{v} = (0,1,0)$, η (4) γίνεται

$$(1 + f^2 \cdot q^2) \cdot q \cdot p \cdot g^2 - 2 \cdot f \cdot g + (1 + g^2 \cdot p^2) \cdot f \cdot q \cdot q' + 2 \cdot f \cdot q \cdot (1 + p^2 \cdot q^2 + f^2 \cdot q^2) = 0$$

Διαιρώντας με $f \cdot g \cdot p^2 \cdot q^2$ και παραγωγίζοντας ως προς f και στη συνέχεια ως προς g έχουμε

$$\left(\frac{1}{q^2}\right)' \cdot \left(\frac{p'}{f \cdot p}\right)' + \left(\frac{1}{p^2}\right)' \cdot \left(\frac{q'}{g \cdot q}\right)' + 2\left[\left(\frac{1}{p^2}\right)' \cdot \left(\frac{1}{g \cdot q}\right) + \left(\frac{f^2}{p^2}\right)' \cdot \left(\frac{q}{q}\right)\right] = 0$$

Στη συνέχεια, διαιρώντας με $2 \cdot \left(\frac{1}{q^2}\right)' \cdot \left(\frac{1}{p^2}\right)' \neq 0$ και παραγωγίζοντας ως προς f και στη συνέχεια ως προς g έχουμε

$$\left(\frac{\left(\frac{f^2}{p^2}\right)'}{\left(\frac{1}{p^2}\right)'}\right)' \cdot \left(\frac{\left(\frac{q}{g}\right)'}{\left(\frac{1}{q^2}\right)'}\right)' = 0$$

Θα εξετάσουμε σε δύο περιπτώσεις, όπου ο πρώτος παράγοντας θα ισούται με το μηδέν ή ο δεύτερος παράγοντας θα ισούται με το μηδέν.

Περίπτωση 1: Ο πρώτος παράγοντας ισούται με το μηδέν, δηλαδή

$$\left(\frac{f^2}{p^2}\right)' = a \cdot \left(\frac{1}{p^2}\right)', \text{ για } a \neq 0$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε ότι $p^z = k \cdot f^2 - a \cdot k,$ με $k \neq 0$. Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας ως προς f: $p \cdot p' = k \cdot f$ και αντικαθιστώντας στην (4) εξίσωση προκύπτει μία πολυωνυμική εξίσωση ως της f: $B_1(g) \cdot f + B_3(g) \cdot f^3 = 0$. Για να μηδενίζονται οι συντελεστές $B_1(g)$ και $B_3(g)$, μετά από της υπολογισμούς αυτών υπολογίζουμε το $q(g)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Περίπτωση 2: Ο δεύτερος παράγοντας ισούται με το μηδέν, δηλαδή

$$\left(\frac{q}{g}\right)' = a\left(\frac{1}{q^2}\right)', \text{ για } a \neq 0$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε ότι $g = \frac{q^3}{a+k\cdot q^2}$ και παραγωγίζοντας ως της g, έχουμε

$$q' = \frac{q^2 \cdot (3a + k \cdot q^2)}{(a + k \cdot q^2)^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4) και προκύπτει

$$\frac{q}{(a + k \cdot q^2)^4} \cdot \sum_{n=0}^{10} C_n(x) \cdot q^n = 0$$

Όλοι οι συντελεστές $C_n(x)$ πρέπει να μηδενίζονται, ώστε να μηδενιστεί το αριστερό μέλος της εξίσωσης. Αυτό είναι άτοπο, διότι από υπολογισμούς έχω ότι

$$C_0 = 2 \cdot a^4 \cdot f$$

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την κατηγορία, όπου το διάνυσμα της ταχύτητας είναι το $\vec{v} = (0,0,1)$. Όμοια με τις παραπάνω αποδείξεις θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει ανοιχτή περιοχή $I \times J$, τέτοια ώστε οι συναρτήσεις: $f', f'', f''', g', g'', g''' \neq 0$. Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε

$$\left(1 + f^2 \cdot g'^2\right) \cdot f'' \cdot g - 2 \cdot f \cdot g \cdot f'^2 \cdot g'^2 + \left(1 + f'^2 g^2\right) \cdot f \cdot g'' = 1 + f'^2 g^2 + f^2 g'^2$$

Παραγωγίζοντας πρώτα ως προς x και μετά ως προς y και στη συνέχεια διαιρώντας με $f' \cdot g'$, έχουμε

$$\frac{(f^2 \cdot f'')'}{f'} \frac{\left(g \cdot g'^2\right)'}{g'} - 2 \frac{\left(f \cdot f'^2\right)'}{f'} \frac{\left(g \cdot g'^2\right)'}{g'} + \frac{\left(f \cdot f'^2\right)'}{f'} \frac{(g^2 \cdot g'')'}{g'} = 4(f''g + fg'') - \left(\frac{f'''}{f'} + \frac{g'''}{g'}\right)$$

Θέτουμε $F_1 = \frac{\left(f^2 \cdot f''\right)'}{f'}, F_2 = \frac{\left(f \cdot f'^2\right)'}{f'}, G_1 = \frac{\left(g^2 \cdot g''\right)'}{g'}, G_2 = \frac{\left(g \cdot g'^2\right)'}{g'}$

$$F_1 G_2 - 2 \cdot F_2 G_2 + F_2 G_1 = 4(f''g + fg'') - \left(\frac{f'''}{f'} + \frac{g'''}{g'}\right)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x και στη συνέχεια ως προς y, έχουμε

$$F_1' G_2' - 2 F_2' G_2' + F_2' G_1' = 4 \cdot (f''' \cdot g' + f' \cdot g''')$$

Στην περίπτωση που $F_2' = 0$ ή $G_2' = 0$, καταλήγουμε ότι η εξίσωσή μας γίνεται ένα πολυώνυμο της συνάρτησης f με συντελεστές συναρτήσεις του y, το οποίο καταλήγει σε άτοπο, διότι προκύπτει ότι $f'' = 0$. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι: $F_2' \cdot G_2' \neq 0$

Και διαιρώντας με $F_2' \cdot G_2'$ και στη συνέχεια παραγωγίζοντας ως προς x και έπειτα ως προς y, έχουμε $\left(\frac{f'''}{F_2'}\right)' \cdot \left(\frac{g'}{G_2'}\right)' + \left(\frac{f'}{F_2'}\right)' \cdot \left(\frac{g'''}{G_2}\right)' = 0$

Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό ότι και οι τέσσερις παράγοντες δε μπορούν να κάνουν ταυτόχρονα μηδέν. Ξεχωρίζοντας δύο περιπτώσεις, όπου ο παράγοντας του πρώτου όρου μηδενίζεται $\left(\frac{f'''}{F_2'}\right)' = 0$, τότε με αντικαταστάσεις στην αρχική εξίσωση θα πάρουμε ένα ανάπτυγμα πολυωνύμου της $f(x)$ συνάρτησης με συντελεστές συναρτήσεις του $y \epsilon J$, ίσοι με το μηδέν. Οπότε όλοι οι συντελεστές μηδενίζονται για κάθε y, το οποίο καταλήγει σε άτοπο.

Όμοια, στην δεύτερη περίπτωση $\left(\frac{g'}{G_2'}\right)' = 0$, τότε με αντικαταστάσεις στην αρχική εξίσωση θα πάρουμε ένα ανάπτυγμα πολυωνύμου της $g(y)$ συνάρτησης με συντελεστές συναρτήσεις του x, ίσοι με το μηδέν. Οπότε όλοι οι συντελεστές μηδενίζονται για κάθε $x \epsilon I$, το οποίο καταλήγει σε άτοπο.

Οι περιπτώσεις όπου $\left(\frac{f'}{F_2'}\right)' = 0$, $\left(\frac{g'''}{G_2}\right)'$= 0, είναι όμοιες.

Οπότε υπάρχει ένας σταθερός αριθμός λ μη μηδενικός, τέτοιος ώστε

$$\left(\frac{f'''}{F_2'}\right)' / \left(\frac{f'}{F_2'}\right)' = - \left(\frac{g'''}{G_2}\right)' / \left(\frac{g'}{G_2'}\right)' = \lambda$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x για την $f(x)$ συνάρτηση και στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας με f' και έπειτα ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{f'^2}{2} = \frac{\lambda f^2}{2} + a_1 \cdot f \cdot f'^2 + a_2 f,\ \text{όπου } a_1, a_2\text{: πραγματικές σταθερές}$$

$$\text{ή } f'^2 = \frac{\lambda f^2 + 2a_2 f + 2a_3}{1 - 2 \cdot a_1 f} \text{ και } f'' = \frac{-\lambda a^{1 \cdot f^2} + \lambda f + 2a_1 a_3 + a_2}{(1 - 2a1 \cdot f)^2}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωσή μας θα πάρουμε ένα ανάπτυγμα πολυωνύμου της $f(x)$ συνάρτησης με συντελεστές συναρτήσεις του $y \epsilon J$, ίσοι με το μηδέν. Οπότε όλοι οι συντελεστές μηδενίζονται για κάθε y, το οποίο καταλήγει σε άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει, άρα:

$$f', f'', f''', g', g'', g''' = 0, I \times J$$

Χωρίζοντας σε περιπτώσεις, όπου ένας από τους παραπάνω όρους μηδενίζεται, καταλήγουμε σε κάθε περίπτωση σε μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$ag'' = 1 + \alpha^2 \cdot {g'}^2$$

Η λύση της είναι γνωστή και είναι ένα **μονόνιο** μεταφοράς.

Κεφάλαιο 6: Επέκταση αποτελεσμάτων στο χώρο Lorentz – Minkowski

Αν θεωρήσουμε δύο χωρικές διαστάσεις και μία χρονική θα έχουμε τον χώρο Lorentz – Minkowski: $\mathbb{R}_1^3$, μαζί με την κανονική Lorentzian μετρική:

$$dx^2 + dy^2 - dz^2$$

Και επιπλέον ορίζουμε αντίστοιχα το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο ως $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και $\times$. Στον χώρο $\mathbb{R}_1^3$ ορίζουμε τρία είδη διανυσμάτων $\vec{w} \in \mathbb{R}_1^3$ και τρεις κατηγορίες:

- Χωροειδές, εάν $\langle\vec{w},\vec{w}\rangle > 0$,
- Χρονοειδές, εάν $\langle\vec{w},\vec{w}\rangle < 0$ και
- Φωτοειδές, εάν $\langle\vec{w},\vec{w}\rangle = 0$

6.1 Καμπύλη στον χώρο $\mathbb{R}_1^3$

Θεωρούμε μία απεικόνιση $f: I \to M \subseteq \mathbb{R}_1^3$, όπου I είναι ένα ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση αυτή ως διανυσματική σχέση $\vec{x} = \vec{x}(t), t \in I$. Εάν η $x(t)$ είναι κλάσης διαφορισιμότητας μεγαλύτερης ή ίσης του 1, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον η πρώτη παράγωγος και είναι συνεχής και επίσης η πρώτη παράγωγος δεν είναι παντού μηδέν, τότε λέμε ότι η $\vec{x}(t)$ είναι ομαλή καμπύλη. Επίσης, η $\vec{x}(t)$ καλείται:

- Χωροειδές, εάν $\langle\vec{x}'(t),\vec{x}'(t)\rangle > 0$
- Χρονοειδές, εάν $\langle\vec{x}'(t),\vec{x}'(t)\rangle < 0$ και
- Φωτοειδές, εάν $\langle\vec{x}'(t),\vec{x}'(t)\rangle = 0$

6.2 Επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}_1^3$

Μία ομαλή επιφάνεια του χώρου $\mathbb{R}_1^3$, ορίζεται ως μία απεικόνιση $f: U \to Mc\mathbb{R}_1^3$, όπως αντίστοιχα ορίζεται στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^3$, όπου U ανοιχτός τόπος του $\mathbb{R}^2$. Φυσικά υπάρχει αντίστοιχη παραμετρικοποίηση $\vec{X} = X(u, v)$, $(u, v)\epsilon U$.

6.3 Επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου στον χώρο $\mathbb{R}_1^3$

Για μία επιφάνεια γενικευμένου κυλίνδρου στο χώρο Lorentz – Minkowski: $X(t, s) = a(s) + t \cdot \vec{w}, t \in \mathbb{R}\ και\ a: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, όπου $a(s)$ είναι παραμετρικοποιημένη συνάρτηση ως προς το μήκος τόξου και $\vec{w} \in \mathbb{R}_1^3$. Όμοια με τον Ευκλείδειο χώρο το κάθετο διάνυσμα N της επιφάνειας είναι παράλληλο στο διάνυσμα: $a'(s) \times w$ και η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\langle w, w\rangle \cdot \langle \alpha' \times n, \alpha''\rangle = 2 \cdot \langle a'(s) \times w, a'(s) \times w\rangle \cdot \langle a'(s), a'(s)\rangle \cdot \langle w, w\rangle - \langle a'(s), w\rangle^2 \cdot \langle a'(s) \times w, \vec{v}\rangle \quad (5)$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση σολιτονίου στην περίπτωση όπου:

$\langle a'(s) \times w, \vec{v}\rangle = 0$, δηλαδή όταν $\vec{v}$ είναι παράλληλο στο w.

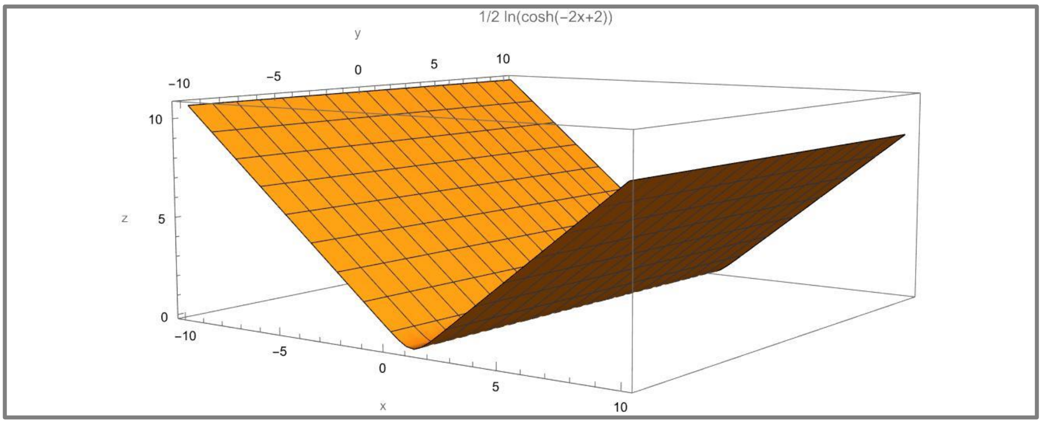
Κατηγορία 1:

Έστω ότι οι γεννήτορες του γενικευμένου κυλίνδρου είναι χωρικές και έστω ότι $\vec{w} = (1, 0, 0)$.

Αν η επιφάνειά μου είναι της μορφής: *X(s, t) = (0, s, u(s)) + t* $\cdot \vec{w}$, τότε η (5) γίνεται

$u'' = \pm 2 \cdot (1 - u'^2) \cdot (v_2 \cdot u' - v_3),\ \pm(1 - u'^2) > 0$

Για την περίπτωση όπου: $\vec{v} = (0,0,1)$, η λύση της διαφορικής εξίσωσης με διπλή ολοκλήρωση είναι $u(s) = \mp \frac{1}{2} ln(cosh(-2 \cdot s + \alpha)) + \beta, \pm(1 - u'^2) > 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



Εικόνα 5. Απεικονίζεται η γραφική παράσταση μονόνιου μεταφοράς στο χώρο Lorentz – Minkowski για σταθερές α = 2, β = 0.

<u>Κατηγορία 2</u>:

Έστω ότι οι γεννήτορες του γενικευμένου κυλίνδρου είναι χρονικές και έστω ότι $\vec{w} = (0, 0, 1)$.

Τότε *X(s, t) = (s, u(s, 0)) + t·* $\vec{w}$ και η εξίσωση (5) γίνεται

$$u'' = 2 \cdot \left(1 + u'^2\right) \cdot (v_1 \cdot u' - v_2)$$

Και για $v = (0,1,0)$, προκύπτει: $u(s) = \frac{1}{2}\ln(\cos(2s + a)) + \beta$

<u>Κατηγορία 3</u>:

Για τις επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου που οι γεννήτορές του παράγονται από διανύσματα $\vec{w}$ που είναι φωτοειδή, δηλαδή ως προς τη μετρική Lorentz – Minkowski, ισχύει ότι $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$.

Στην περίπτωσή μας, παίρνουμε: $H = 0$, δηλαδή μία ελαχιστική επιφάνεια στον Lorentz – Minkowski χώρο.

Σε αυτήν την περίπτωση η μέση καμπυλότητα είναι μηδέν, επομένως: $\langle N, \vec{v} \rangle = 0$ και αν θεωρήσουμε $w = (1, 0, 1)$, τότε η παραμετρικοποίηση της επιφάνειας θα είναι:

$$X(s,t) = \big(u(s), s, -u(s)\big) + t \cdot \vec{w}$$

Θεωρώντας ότι η παράγωγος δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του s, η εξίσωση (5), γίνεται: $v_1 - 2v_2 \cdot u' - v_3 = 0$.

Εάν $v_2 = 0$, τότε $\vec{v}$ παράλληλο στο $\vec{w}$.

Σε κάθε άλλη περίπτωση η u είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και επομένως η $X(s,t)$ θα είναι επίπεδο.

Υπάρχει αντίστοιχη επέκταση των θεωρημάτων του Ευκλείδειου χώρου σε αυτή του Lorentz – Minkowski χώρου για τις σολιτονιακές λύσεις τύπου μεταφοράς και ομοθετικού τύπου.

Θεώρημα 4:

Τα μόνα σολιτόνια στο Lorentz – Minkowski χώρο που είναι άθροισμα δύο καμπυλών, όπου η μία είναι επίπεδη, είναι επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου.

Θεώρημα 5:

Τα μόνα σολιτόνια στο Lorentz – Minkowski χώρο ομοθετικού τύπου, όπου $\vec{v}$ είναι διάνυσμα ορθοκανονικής βάσης είναι επιφάνειες γενικευμένου κυλίνδρου.

Βιβλιογραφία

- Andrew Pressley, (2016), «Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία», Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
- Aydin, M. E., & Lopez, R. (2022). Translating solitons of translation and homothetical types. Turkish Journal of Mathematics, 46(8), 3245-3259.
- Hoffmann, T., Kilian, M., Leschke, K., & Martin, F. (2021). Minimal Surfaces: Integrable Systems and Visualisation. Springer International Publishing.
- López, R. (2016). Separation of variables in equations of mean-curvature type. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 146(5), 1017-1035.
- López, R. (2018). Invariant singular minimal surfaces. Annals of Global Analysis and Geometry, 53(4), 521-541.
- Παπαντωνίου Β., « Διαφορική Γεωμετρία», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών