



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας  
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Συναρτησιακές Ανισότητες και οι Εφαρμογές τους  
στην Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση.

Άγγελος Πετρέλλης

Επιβλέπων καθηγητής: Σιλουανός Μπραζίτικος

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή *Πετρέλλη Άγγελου* που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας  
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Συναρτησιακές Ανισότητες και οι Εφαρμογές τους  
στην Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση.

Άγγελος Πετρέλλης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων :  
Σιλουανός Μπραζιτίκος  
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Κρήτης

Συν-Επιβλέπων :  
Βασίλειος Παπαδόπουλος  
Καθηγητής Δ.Π.Θ

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022



## Περίληψη

Σκοπός της εργασίας είναι σε πρώτο επίπεδο η απόδειξη διάφορων συναρτησιακών ανισοτήτων, όπως η ανισότητα Brunn-Minkowski, η ανισότητα Brascamp-Lieb, η ανισότητα Prekopa-Leindler, η ανισότητα Loomis-Whitney και άλλες. Οι ανισότητες αυτές παρουσιάζουν ενδιαφέρον αυτόνομα, χρησιμοποιούνται δε σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών όπως οι διαφορικές εξισώσεις, οι πιθανότητες σε μεγάλες διαστάσεις, η Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση και η συνδυαστική. Στην εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με τις εφαρμογές των παραπάνω ανισοτήτων στον κλάδο της Κυρτής Γεωμετρικής ανάλυσης.

Εκεί τα προβλήματα που συναντάμε είναι κυρίως γεωμετρικά προβλήματα που αφορούν κυρτά σώματα στον  $n$ -διάστατο Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή τον  $\mathbb{R}^n$ . Μία κατηγορία τέτοιων προβλημάτων αποτελούν οι περιπτώσεις όπου ζητάμε (άνω και κάτω) φράγματα για τον όγκο κυρτών σωμάτων (πχ. Ανισότητα Brunn-Minkowski για τον όγκο του αθροίσματος κυρτών σωμάτων, ανισότητα Rogers-Shephard για τον όγκο της διαφοράς κυρτών σωμάτων) διάφορες ισοπεριμετρικές ανισότητες και αντίστροφες ισοπεριμετρικές ανισότητες, αλλά και προβλήματα που αφορούν συγκεκριμένα σώματα στον  $\mathbb{R}^n$ . Για παράδειγμα, τίθεται το ερώτημα για την μεγαλύτερη και μικρότερη τομή του κύβου με κάποιο υπερπεπίπεδο, καθώς και το ερώτημα για την μεγαλύτερη και μικρότερη προβολή του κύβου σε υπόχωρο διάστασης  $k$ . Παρόμοια ερωτήματα τίθενται και για το simplex στον  $\mathbb{R}^n$ , δηλαδή την κυρτή θήκη  $n + 1$  σημείων (στο επίπεδο το simplex είναι ένα τρίγωνο).

Τέλος, ανισότητες «συγκέντρωσης του μέτρου» στην σφαίρα, οδηγούν στο θεώρημα Dvoretzky του οποίου η γεωμετρική ερμηνεία είναι η ακόλουθη: Κάθε κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα έχει κεντρικές τομές μεγάλης διάστασης που είναι «σχεδόν» ελλειψοειδείς.

## Abstract

The purpose of this paper is to prove at the first level various functional inequalities, such as the Brunn-Minkowski inequality, the Brascamp-Lieb inequality, the Prekopa-Leindler inequality, the Loomis-Whitney inequality and others. These inequalities, although of interest on their own, are used in various branches of mathematics such as differential equations, probability in high dimensions, Convex Geometric Analysis and Combinatorics. In the paper we will deal mainly with the applications of the above inequalities in the field of Convex Geometric analysis.

The problems we encounter there are mainly geometric problems concerning convex bodies in the  $n$ -dimensional Euclidean space, ie  $\mathbb{R}^n$ . A category of such problems are the cases where we ask for (upper and lower) bounds for the volume of convex bodies (eg Brunn-Minkowski inequality for the volume of a convex body, Rogers-Shephard inequality for the volume of the difference of convex bodies) various isoperimetric inequalities and inverse isoperimetric inequalities, but also problems involving specific convex bodies in  $\mathbb{R}^n$ . For example, the question that arises concerning the largest and smallest intersection of the cube with a hyperplane, as well as the question about the largest and smallest projection of the cube in a  $k$ -dimensional space. Similar questions are asked about the simplex in  $\mathbb{R}^n$ , ie the convex hull of  $n + 1$  points (in the level simplex is a triangle).

Finally, "concentration of measure" inequalities in the sphere lead to the Dvoretzky theorem, whose geometric interpretation is as follows: Every centrally symmetric convex body has large central sections that are "almost" ellipsoidal.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Βασικές Έννοιες</b>	<b>1</b>
1.1	Τρία βασικά κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$	1
1.1.1	Ο υπερκύβος	1
1.1.2	Το $n$ -διάστατο κανονικό simplex	1
1.1.3	Το $n$ -διάστατο «οκτάεδρο»	2
1.2	Η Ευκλείδεια μπάλα	3
1.2.1	Ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας	3
1.2.2	Παρατηρήσεις πάνω στα χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας μπάλας	6
<b>2</b>	<b>Το θεώρημα του John</b>	<b>11</b>
2.1	Ελλειψοειδή στον $\mathbb{R}^n$	11
2.2	Το Θεώρημα του John	15
2.3	Η «απλή» εκδοχή του Θεωρήματος του John	19
<b>3</b>	<b>Η ανισότητα Brunn-Minkowski</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Η Ισοπεριμετρική και η Αντίστροφη Ισοπεριμετρική Ανισότητα</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου</b>	<b>41</b>
5.1	$\varepsilon$ -περιοχές και το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου	41
5.2	Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα στον χώρο Gauss	43
5.3	Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα στη σφαίρα $S^{n-1}$	46
5.4	Το φαινόμενο της συγκέντρωσης και οι Ισοπεριμετρικές Ανισότητες	50
<b>6</b>	<b>Το θεώρημα του Dvoretzky</b>	<b>55</b>
6.1	Νόρμες και Κυρτά Σώματα	55
6.2	Συναρτήσεις Lipschitz	56
6.3	Προϋποθέσεις	57
6.4	Απόδειξη του Θεωρήματος Dvoretzky	60





# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Τρία βασικά πολύτοπα: το τετράεδρο (simplex), ο κύβος και το οκτάεδρο στον $\mathbb{R}^3$ .	2
2.1	Το ελλειψοειδές $E$ μεγίστου όγκου ενός κυρτού σώματος $K$ .	18
2.2	Η κυρτή θήκη $Z$ και το ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ .	20
3.1	Το άθροισμα Minkowski ενός τετραγώνου και ενός κύκλου στον $\mathbb{R}^2$ .	23
4.1	Στην περίπτωση που το σχήμα δεν είναι κυρτό, μπορούμε να αυξήσουμε τον όγκο του, αφήνοντας την περίμετρο αναλλοίωτη.	31
5.1	Η $\varepsilon$ -περιοχή του σώματος $A$ .	42
5.2	Η $\varepsilon$ -περιοχή του ημιχώρου $H$ .	45
5.3	Υπολογισμός του όγκου του ορθού κώνου.	47
5.4	Υπολογισμός του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας του ορθού κώνου.	48
5.5	Υπολογισμός του $\sigma(B(x_0, \varepsilon + \frac{\pi}{2}))$ .	48
5.6	Υπολογισμός του $d(\tilde{A}, \tilde{B})$ .	53

# Εισαγωγή

Η γενική κατηγορία στην οποία υπάγεται το θέμα της εργασίας είναι η περιοχή της Συναρτησιακής Ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα ο κλάδος της Κυρτής Γεωμετρίας ή Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης. Ο κλάδος αυτός ασχολείται με (γεωμετρικά) ερωτήματα που αφορούν κυρτά σώματα στον Ευκλείδειο χώρο. Παραδοσιακά, το πεδίο της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης αφορά τη μελέτη απειροδιάστατων χώρων Banach, μέσω χαρακτηριστικών που προκύπτουν σε «χαμηλότερες», πεπερασμένες διαστάσεις. Ο όρος «ασυμπτωτική» προκύπτει λόγω του ότι, συνήθως, στα αποτελέσματα αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εξάρτηση από την διάσταση  $n$  του Ευκλείδειου χώρου, καθώς αυτή τείνει στο άπειρο. Αποσκοπούμε δηλαδή σε αποτελέσματα που αν δεν είναι ακριβή, να είναι οπωσδήποτε ασυμπτωτικά «σωστά». Στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με τη γεωμετρική έκφραση των διάφορων αποτελεσμάτων, παρά το γεγονός ότι στην ανάπτυξή του, ο συγκεκριμένος κλάδος έδωσε σημαντικά εργαλεία σε κλάδους όπως οι πιθανότητες σε μεγάλες διαστάσεις, η συνδιάστικη κτλ.

Παρακάτω, θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή της έκτασης της εργασίας, όπως αυτή αποτυπώνεται μέσω της διάρθρωσης των κεφαλαίων.

- Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική περιγραφή βασικών εννοιών τις οποίες θα μεταχειριστούμε στη συνέχεια. Γίνεται παρουσίαση των τριών βασικών κυρτών σωμάτων του  $\mathbb{R}^n$ : του κύβου, του  $n$ -διάστατου στερεού κανονικού simplex και του  $n$ -διάστατου «οκτάεδρου» ή αλλιώς του σταυρωτού πολύτοπου (cross-polytope). Ταυτόχρονα με το υπολογισμό των όγκων τους, γίνεται συσχέτιση με την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα  $B_2^n$ , της οποίας τα χαρακτηριστικά μελετάμε στη συνέχεια. Αποδεικνύουμε τον τύπο που μας δίνει τον όγκο της και τον τύπο που συνδέει τη επιφάνειά της με τον όγκο της. Η  $B_2^n$  θα παίξει κεντρικό ρόλο στη μετέπειτα μελέτη. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο περνάμε στην παρουσίαση μιας σειράς χαρακτηριστικών που προκύπτουν σε ασυμπτωτικό επίπεδο και αποτελούν την πρώτη επαφή με αυτό που συχνά ονομάζουμε «παράδοξα» φαινόμενα, καταστάσεις που έχουν νόημα μόνο στο επίπεδο του κλάδου της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης. Για παράδειγμα, καθώς η διάσταση τείνει στο άπειρο, ο όγκος του περιγεγραμμένου κύβου  $B_\infty^n$  στην μπάλα  $B_2^n$  μεγαλώνει απεριόριστα ενώ ο όγκος της ίδιας της μπάλας τείνει στο μηδέν. Φαίνεται, δηλαδή, σε ασυμπτωτικό επίπεδο, η Ευκλείδεια μπάλα να «εξαφανίζεται» εντός του κύβου. Ένα ακόμα παράδειγμα είναι το «παράδοξο» της συγκέντρωσης του όγκου της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας στην τομή κεντρικών τομών της και ταυτόχρονα στο περίβλημά της.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο διατυπώνεται και αποδεικνύεται ένα από τα κεντρικά θεωρήματα του κλάδου, το Θεώρημα του John. Εισαγωγικά, δίνεται η περιγραφή της έννοιας του ελλειψοειδούς στον  $\mathbb{R}^n$  ως το σύνολο  $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\}$ , όπου  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$  και  $a_1, a_2, \dots, a_n$  θετικοί αριθμοί. Αποδεικνύεται ότι κάθε ελλειψοειδές αποτελεί «θέση», δηλαδή γραμμικό μετασχηματισμό της Ευκλείδειας μπάλας. Γενικότερα, θέση ενός κυρτού σώματος  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται οποιοδήποτε σύνολο της μορφής  $x_0 + T(K)$ , όπου  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  και  $T \in GL(n)$ , όπου  $GL(n)$  η γενική γραμμική ομάδα των  $n \times n$  πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα. Γίνεται ο υπολογισμός του όγκου του ελλειψοειδούς και δίνεται ο ορισμός του Πολικού Σώματος. Στη συνέχεια, διατυπώνεται το Θεώρημα του John, το οποίο σε γενικές γραμμές μας λέει ότι σε κάθε κυρτό σώμα  $K$  περιέχεται μοναδικό ελλειψοειδές μεγίστου όγκου. Επιπλέον, καθορίζει τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτό το ελλειψοειδές είναι η μοναδιαία μπάλα  $B_2^n$ . Σε αυτή την περίπτωση, δηλαδή όταν το σώμα  $K$  βρίσκεται στη λεγόμενη «Θέση του John», έχουμε άμεση συσχέτιση της

νόρμας που επάγει το  $K$  στον χώρο με την Ευκλείδεια νόρμα. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι  $1/\sqrt{n}\|x\|_K \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_K$ . Θα δούμε και παρακάτω πως η Θέση του John αποτελεί κλειδί στην απάντηση σε Προβλήματα Ισοπεριμετρικής φύσης, αλλά και βασική προϋπόθεση για την απόδειξη του Θεωρήματος του Dvoretzky.

- Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη θεμελιώδη Ανισότητα Brunn-Minkowski, μια σχέση που αποτελεί συνδυαστικό κρίκο μεταξύ του αθροίσματος Minkowski με τον όγκο στον  $\mathbb{R}^n$ : Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  και  $\mu$  είναι το μέτρο Lebesgue στον  $\mathbb{R}^n$ , τότε  $\mu(A+B)^{1/n} \geq \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}$ . Παρουσιάζουμε την πολλαπλασιαστική μορφή της ανισότητας την οποία και αποδεικνύουμε με επαγωγή. Βασικό εργαλείο για την απόδειξη αποτελεί η Ανισότητα Prékora - Leindler, της οποίας η απόδειξη γίνεται αναλυτικά. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως η Ανισότητα Brunn-Minkowski παίζει κυρίαρχο ρόλο στην απάντηση του Ισοπεριμετρικού Προβλήματος στον  $\mathbb{R}^n$ . Τέλος, παρουσιάζουμε - ως εφαρμογή της Brunn-Minkowski - την Αρχή του Brunn, η οποία περιγράφει τη σχέση που έχουν οι όγκοι των τομών ενός κυρτού σώματος με υπερεπίπεδα κάθετα προς συγκεκριμένες διευθύνσεις.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο παρεμβάλουμε στη ροή της εργασίας δύο βασικά ζητήματα στα οποία δίνει απάντηση ο κλάδος της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης, μέσω των αποτελεσμάτων που ήδη έχουμε παρουσιάσει στα προηγούμενα κεφάλαια (Ανισότητα Brunn-Minkowski, Θέση του John), τονίζοντας έτσι την σπουδαιότητά τους. Εδώ διατυπώνεται το Ισοπεριμετρικό και Αντίστροφο Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα στον  $\mathbb{R}^n$ , όπως και οι αντίστοιχες ανισότητες που συνδέονται με αυτά. Ερωτήματα όπως: «Μεταξύ όλων των επίπεδων σχημάτων με δεδομένη περίμετρο, ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;» που τίθενται από την αρχαιότητα και εκφράζονται - σε επίπεδο ανισοτήτων - από σχέσεις όπως  $L^2 \geq 4\pi A$ , όπου  $L$  είναι το μήκος μιας κλειστής καμπύλης και  $A$  το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που αυτή περικλύει, μεταφέρονται στον  $\mathbb{R}^n$  και έχουν ως αντικείμενα τα Κυρτά Σώματα. Εδώ το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: «Ανάμεσα στα κυρτά σώματα δεδομένου όγκου, ποιο έχει την ελάχιστη επιφάνεια;». Η απάντηση θα δοθεί από την Ισοπεριμετρική Ανισότητα στον  $\mathbb{R}^n$ :  $vol(\partial K) \geq vol(\partial B_2^n)$ , σύμφωνα με την οποία, από όλα τα κυρτά σώματα  $K$  με ίδιο όγκο, η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα έχει την ελάχιστη επιφάνεια. Στη συνέχεια παραθέτουμε το πρόβλημα κάπως αντεστραμμένο: «Μεταξύ των κυρτών σωμάτων με σταθερό όγκο, υπάρχει κάποιο με τη μέγιστη επιφάνεια;». Ένα τέτοιο ερώτημα απαντάται αρνητικά ήδη στον  $\mathbb{R}^2$ : το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με πλευρές  $n$  και  $\frac{1}{n}$  έχει εμβαδόν σταθερό και ίσο με 1, ενώ η περίμετρός του  $2(n + \frac{1}{n})$  γίνεται απεριόριστα μεγάλη. Θα δούμε ότι αυτό που θα παίζει κύριο ρόλο στην επίλυση του Αντίστροφου Ισοπεριμετρικού Προβλήματος είναι η «θέση» του κυρτού σώματος στον  $\mathbb{R}^n$  και πιο συγκεκριμένα, θα περιορίσουμε την επίλυσή του στην κλάση των σωμάτων που βρίσκονται στη Θέση του John. Το βασικό εργαλείο στην απάντηση του αντίστροφου ισοπεριμετρικού προβλήματος στον  $\mathbb{R}^n$  αποτελεί η Ανισότητα Brascamp-Lieb και κυρίως η Γεωμετρική της μορφή, την οποία και αποδεικνύουμε, αφού πρώτα κάνουμε μια γενική αναδρομή σε ανισότητες αυτού του τύπου (Ανισότητες Hölder, Cauchy-Schwarz, Loomis-Whitney). Τέλος, αποδεικνύουμε ότι ανάμεσα σε όλα τα κεντρικά συμμετρικά, κυρτά σώματα στον  $\mathbb{R}^n$  που βρίσκονται στη θέση του John, τα οποία έχουν σταθερό όγκο, ο κύβος έχει την μέγιστη επιφάνεια, δηλαδή  $vol(\partial Q_n) \geq vol(\partial K)$ , όπου  $Q_n = [-1, 1]^n$ , ο μοναδιαίος κύβος στον  $\mathbb{R}^n$ .
- Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνεται η περιγραφή του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου σε μετρικούς χώρους πιθανότητας. Στη γενική του μορφή ανακαλύφθηκε τη δεκαετία του '60, συναντάται δε σε πολλές εφαρμογές της γεωμετρίας, της ανάλυσης, των πιθανοτήτων και των διακριτών μαθηματικών. Η περιγραφή του φαινομένου σχηματίζεται μέσα από δύο κλασικά παραδείγματα χώρων πιθανότητας, τη μοναδιαία σφαίρα  $S^{n-1}$  και τον

$n$ -διάστατο χώρο Gauss. Ορίζουμε την  $\varepsilon$ -περιοχή ενός Borel συνόλου  $A$  ως το σύνολο  $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ , δηλαδή το  $A$  «διογκωμένο» κατά  $\varepsilon$ . Από άλλη οπτική πλέον (και σε συνέχεια του προηγούμενου κεφαλαίου), αναδιατυπώνουμε την Ισοπεριμετρική Ανισότητα στον  $\mathbb{R}^n$ , ως εξής: αν  $A$  κυρτό σώμα και  $B$  μια Ευκλείδεια μπάλα στον  $\mathbb{R}^n$ , με  $\text{vol}(A) = \text{vol}(B)$ , τότε  $\text{vol}(A_\varepsilon) \geq \text{vol}(B_\varepsilon)$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Σε αυτό το πλαίσιο, μπορούν να διατυπωθούν αντίστοιχες ισοπεριμετρικές ανισότητες σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο πιθανότητας. Με άλλα λόγια έχει νόημα να αναζητήσουμε το εξής: «Για οποιαδήποτε  $0 < a < 1$  και  $\varepsilon > 0$ , ποια σύνολα  $A$  μέτρου  $a$  έχουν  $\varepsilon$ -περιοχές με ελάχιστο μέτρο;». Θα δούμε ότι η διατύπωση ισοπεριμετρικών ανισοτήτων συνδέεται άμεσα με το ίδιο το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας. Θα λέμε ότι σε έναν χώρο παρουσιάζεται το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου αν για οποιοδήποτε Borel σύνολο  $A$  του  $X$ , με  $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$ , η  $\varepsilon$ -περιοχή  $A_\varepsilon$  του  $A$  (για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ ) έχει ασυμπτωτικά «πλήρες» μέτρο. Μέσα από την παρουσίαση των Ισοπεριμετρικών Ανισοτήτων στη μοναδιαία σφαίρα  $S^{n-1}$  και στον  $n$ -διάστατο χώρο Gauss, αλλά και την εμφάνιση του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου σε αυτούς τους χώρους, δείχνουμε την σύνδεση των δύο καταστάσεων: η εμφάνιση της συγκέντρωσης του μέτρου «δίνει» ισοπεριμετρικές ανισότητες και αντιστρόφως.

- Το έκτο κεφάλαιο αφιερώνεται στη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος του Dvoretzky (1961). Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Milman, η οποία στηρίζεται στη συγκέντρωση του μέτρου στον χώρο Gauss. Η απόδειξη αυτή αποτελεί και την πρώτη εφαρμογή της εμφάνισης της συγκέντρωσης του μέτρου σε έναν μετρικό χώρο πιθανότητας. Το ίδιο το θεώρημα μάς λέει σε γενικές γραμμές ότι για κάθε κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$ , επαρκώς μεγάλης διάστασης, υπάρχουν κεντρικές τομές μικρότερης διάστασης, οι οποίες είναι σχεδόν ελλειψοειδείς. Με αυτόν τον τρόπο, ταυτίζουμε αυτούς τους υπόχωρους με σχεδόν Ευκλείδειους υπόχωρους. Η απόδειξη, πέρα από το τεχνικό κομμάτι, στηρίζεται στο εξής δεδομένο: «κάθε συνάρτηση Lipschitz σε ένα μετρικό χώρο πιθανότητας στον οποίο έχουμε το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου, είναι σχεδόν σταθερή σε σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι, πως κάτι τέτοιο ισχύει και για οποιαδήποτε νόρμα  $\|\cdot\|_K$  που επάγεται από ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$ , αφού κάθε νόρμα είναι 1 – Lipschitz συνάρτηση. Το Θεώρημα του Dvoretzky αποτελεί κύριο αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πεδίου της Συναρτησιακής Ανάλυσης και η συγκεκριμένη απόδειξη θεωρείται ως η απαρχή ανάπτυξης του κλάδου της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης.

# Κεφάλαιο 1

## Βασικές Έννοιες

### 1.1 Τρία βασικά κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$

Αντικείμενο της παρούσας μελέτης είναι η συμπεριφορά των κυρτών σωμάτων του  $\mathbb{R}^n$  και πώς αυτά «μοιάζουν» - σε επίπεδο γεωμετρικής συμπεριφοράς - με τις Ευκλείδειες μπάλες. Μια πρώτη παρουσίαση αφορά σε τρία βασικά σώματα: τον κύβο, το  $n$ -διάστατο στερεό κανονικό simplex και το  $n$ -διάστατο «οκτάεδρο» ή αλλιώς το σταυρωτό πολύτοπο (βλ. [6]).

#### 1.1.1 Ο υπερκύβος

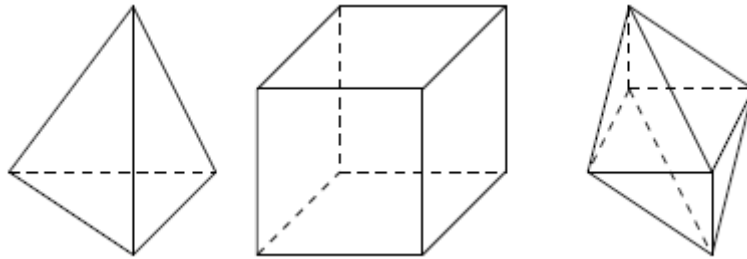
Με τον όρο «υπερκύβος» περιγράφουμε το σύνολο  $[-1, 1]^n$  του  $\mathbb{R}^n$ , ή αλλιώς, την κυρτή θήκη των σημείων με συντεταγμένες  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ . Σημειώνουμε ότι ο  $n$ -διάστατος κύβος αποτελεί την μοναδιαία μπάλα  $B_\infty^n$  του  $\mathbb{R}^n$  εφοδιασμένου με την  $l_\infty^n$ , όπου  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$ . Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των κορυφών του κύβου είναι  $\sqrt{n}$ . Η μεγαλύτερη εγγεγραμμένη μπάλα σε αυτόν έχει ακτίνα 1 ενώ η μικρότερη περιγεγραμμένη μπάλα είναι ακτίνας  $\sqrt{n}$ . Συνεπώς, ο λόγος των ακτινών, που είναι  $\sqrt{n}$ , βλέπουμε ότι μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει η διάσταση και επομένως ο κύβος προσομοιάζει την Ευκλείδεια μπάλα όλο και λιγότερο. Επιπλέον, ο όγκος του κύβου  $[-1, 1]^n$  με πλευρά μήκους 2 ισούται με

$$\prod_{i=1}^n [-1, 1] = 2^n.$$

#### 1.1.2 Το $n$ -διάστατο κανονικό simplex

Το δεύτερο κλασσικό παράδειγμα είναι το  $n$ -διάστατο στερεό κανονικό simplex, με άλλα λόγια η κυρτή θήκη  $n + 1$  σημείων του  $\mathbb{R}^n$  που ισαπέχουν. Για παράδειγμα, στον  $\mathbb{R}^2$  είναι το ισόπλευρο τρίγωνο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Γενικά παρατηρούμε ότι η μικρότερη περιγεγραμμένη μπάλα έχει ακτίνα  $n$  ενώ η μεγαλύτερη εγγεγραμμένη μπάλα έχει ακτίνα 1. Εδώ ο λόγος τους γίνεται  $n$  και άρα η διαφοροποίηση σε σχέση με τις Ευκλείδειες μπάλες γίνεται ακόμα πιο ισχυρή. Γενίκευση των στερεών κανονικών  $n$ -simplices αποτελούν οι  $n$ -διάστατοι κώνοι, δηλαδή οι κυρτές θήκες ενός σημείου πάνω από ένα κυρτό σώμα διάστασης  $(n - 1)$ , το οποίο παίζει το ρόλο της «βάσης». Ο υπολογισμός του όγκου ενός τέτοιου στερεού έχει ως εξής: θεωρούμε ότι το σώμα  $(n - 1)$  διάστασης έχει όγκο  $A$  και έστω η  $(n - 1)$ -διάστατη τομή «πάχους»  $dx$ , παράλληλη στη βάση του κώνου, σε ύψος  $x$  από την κορυφή. Έστω  $V(x)$  ο όγκος της τομής. Κάθε τέτοια τομή είναι όμοια με τη βάση, με λόγο ομοιότητας  $x/h$ , όπου  $h$  το ύψος του κώνου. Συνεπώς, ο λόγος των όγκων της τομής με τη βάση θα είναι  $(x/h)^{n-1}$  και άρα  $V(x) = A \cdot (x/h)^{n-1}$ . Ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  από 0 έως  $h$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h V(x) dx \\
 &= \int_0^h A \cdot (x/h)^{n-1} dx \\
 &= A/h^{n-1} \cdot \int_0^h x^{n-1} dx \\
 &= A/h^{n-1} \cdot [x^n/n]_0^h \\
 &= A \cdot h/n.
 \end{aligned}$$



Σχήμα 1.1: Τρία βασικά πολύτοπα: το τετράεδρο (simplex), ο κύβος και το οκτάεδρο στον  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1.3 Το $n$ -διάστατο «οκτάεδρο»

Το τρίτο παράδειγμα είναι το σταυρωτό πολύτοπο (cross polytope). Αποτελεί την κυρτή θήκη των σημείων  $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, \dots, 0, \pm 1)$ . Το εν λόγω σώμα μπορεί να ειδωθεί και ως η μοναδιαία μπάλα του  $\mathbb{R}^n$  με νόρμα την  $l_1^n$ , δηλαδή  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  και το συμβολίζουμε με  $B_1^n$ . Η μικρότερη περιγεγραμμένη μπάλα έχει ακτίνα 1 ενώ η μεγαλύτερη εγγεγραμμένη μπάλα έχει ακτίνα  $1/\sqrt{n}$ . Εδώ ο λόγος τους είναι  $\sqrt{n}$ . Στις δύο διαστάσεις αναγνωρίζουμε την  $B_1^n$  ως το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία  $(\pm 1, 0)$  και  $(0, \pm 1)$ .

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι ο όγκος του  $n$ -διάστατου οκτάεδρου είναι  $V_n = \frac{2^n}{n!}$ .

Παρατηρούμε ότι για  $n = 1$  έχουμε  $V_1 = \frac{2^1}{1!} = 2$ , το οποίο είναι το μήκος από το  $-1$  ως το  $1$ . Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε ότι ισχύει για τις  $n$  διαστάσεις. Παίρνοντας το κατακόρυφο τμήμα ύψους  $h$  από  $-1$  ως  $1$  στις  $n + 1$  διαστάσεις, «κόβουμε» παράλληλα προς το  $n$ -διάστατο υπερεπίπεδο το σώμα, δημιουργώντας όμοια αντίγραφα του  $n$ -διάστατου πολύτοπου, τα οποία έχουν λόγο ομοιότητας  $1 - |h|$  σε κάθε διάσταση. Συνεπώς, ο λόγος των όγκων είναι  $(1 - |h|)^n$ . Για την ολοκλήρωση, παρατηρούμε ότι το  $(n + 1)$ -διάστατο πολύτοπο είναι συμμετρικό ως προς το

$n$ -διάστατο επίπεδο, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= \int_{-1}^1 V_n \cdot (1-h)^n dh \\
 &= 2 \int_0^1 V_n \cdot (1-h)^n dh \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{2^n}{n!} \cdot (1-h)^n dh \\
 &= 2 \frac{2^n}{n!} \cdot \left[ \frac{-1}{n+1} \cdot (1-h)^{n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αυτό που θέλουμε.

## 1.2 Η Ευκλείδεια μπάλα

Μετά τη μελέτη των παραπάνω σωμάτων, το ενδιαφέρον μας στρέφεται στην ίδια την Ευκλείδεια μπάλα του  $\mathbb{R}^n$ , ακτίνας 1. Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει προσπάθεια να τονιστούν βασικά χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας μπάλας, του όγκου της και της σχέσης του με τον όγκο γενικών σωμάτων.

### 1.2.1 Ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας

Όταν μιλάμε για την Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1 στις  $n$  διαστάσεις, εννοούμε το σύνολο:

$$B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$$

Ο πρώτος βασικός υπολογισμός που χρειαζόμαστε είναι αυτός του όγκου της  $B_2^n$ , τον οποίο τον συμβολίζουμε με  $v_n$ .

Αρχικά παρουσιάζουμε τρεις πολύ χρήσιμους τύπους που συνδέουν τον όγκο και την επιφάνεια μιας Ευκλείδειας μπάλας ακτίνας  $r$ , με τα αντίστοιχα στοιχεία της μοναδιαίας ευκλείδειας μπάλας (βλ. [22]). Συμβολίζουμε με  $V_n(r)$  τον όγκο της Ευκλείδειας μπάλας  $B_2^n(r)$  ακτίνας  $r$ .

Θα δείξουμε ότι:

$$V_n(r) = r^n v_n.$$

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, έχουμε ότι:

$$V_n(r) = \int_{B_2^n(r)} 1 dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$



και κάνοντας την αλλαγή  $y_i = x_i/r$  προκύπτει η Ιακωβιανή:

$$\begin{pmatrix} 1/r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/r & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/r \end{pmatrix},$$

της οποίας η ορίζουσα είναι  $1/r^n$ .

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_{B_2^n} r^n y_1 y_2 \dots y_n = r^n \int_{B_2^n} 1 y_1 y_2 \dots y_n = r^n v_n$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με  $S_2^{n-1}(r)$  την επιφάνεια της  $B_2^n(r)$ , δηλαδή την Ευκλείδεια σφαίρα ακτίνας  $r$ , τότε ισχύει η σχέση:

$$\text{vol}(S_2^{n-1}(r)) = r^{n-1} s_n.$$

όπου  $s_n = \text{vol}(S_2^{n-1})$  η επιφάνεια της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη, ακολουθώντας την ίδια αλλαγή συντεταγμένων.

Τέλος, αποδεικνύουμε τη σχέση που συνδέει την επιφάνεια της σφαίρας με τον όγκο της αντίστοιχης μπάλας ακτίνας  $R$ . Η ιδέα βασίζεται στη διαμέριση της μπάλας σε σφαιρικές επιφάνειες και στην ολοκλήρωση από 0 έως  $R$ . Γ' αυτό το λόγο χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια του κανονικοποιημένου μέτρου πάνω στην σφαίρα  $S^{n-1}$ . Θεωρούμε τον συμπαγή μετρικό χώρο  $(S^{n-1}, \rho_n)$ , όπου  $\rho_n(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$ . Για κάθε  $B$  Borel υποσύνολό του, θέτουμε:

$$C(B) = \bigcup_{0 < \lambda < 1} \{\lambda x : x \in B\},$$

και ορίζουμε ως μέτρο (*Haar*) (το οποίο υπάρχει και είναι μοναδικό), το

$$\sigma_n(B) = \frac{\text{vol}_n(C(B))}{\text{vol}_n(B_2^n)},$$

το οποίο είναι μέτρο πιθανότητας και επιπλέον αφήνει αναλλοίωτους τους ορθωγώνιους μετασχηματισμούς.

Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 V_n(R) &= \int_{B_2^n(R)} 1 dx \\
 &= \int_0^R \left( \int_{S_2^{n-1}(r)} d\sigma(x) \right) dr \\
 &= \int_0^R \text{Vol}(S_2^{n-1}(r)) dr \\
 &= \int_0^R r^{n-1} s_n dr \\
 &= s_n \int_0^R r^{n-1} dr \\
 &= s_n \frac{R^n}{n},
 \end{aligned}$$

όπου  $\sigma = \sigma_{n-1}$  το κανονικοποιημένο μέτρο πάνω στην ευκλείδεια σφαίρα. Δηλαδή,

$$V_n(r) = s_n \frac{R^n}{n}.$$

Πιο συγκεκριμένα, για τη μοναδιαία μπάλα έχουμε:

$$s_n = n v_n.$$

Περνάμε, λοιπόν, στον υπολογισμό του όγκου  $v_n$  της μοναδιαίας μπάλας. Για αυτόν το σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες: για κάθε στοιχείο  $x \in \mathbb{R}^n$  υπάρχει μοναδικό ζεύγος «συντεταγμένων»  $(r, \theta)$ , όπου  $r = |x|$  και  $\theta$  ένα σημείο της αντίστοιχης σφαίρας ακτίνας  $r$ , με  $r \in (0, +\infty)$ , ώστε  $\mathbb{R}^n = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Συνεπώς, κάθε σημείο παίρνει την έκφραση  $x = r\theta$ .

Έστω μια συνάρτηση  $f$  στον  $\mathbb{R}^n$ . Ο τύπος αλλαγής συντεταγμένων σε σφαιρικές δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}(r)} f(r\theta') d\theta' dr \\
 &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1} d\theta dr,
 \end{aligned}$$

όπου τα μεγέθη  $d\theta'$  και  $d\theta$ , τα οποία εκφράζουν το μέτρο επιφάνειας των σφαιρών ακτίνας  $r$  και 1 αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση  $d\theta' = r^{n-1} d\theta$ . Επιπλέον, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε το μέτρο  $d\theta$ , διαιρώντας με τη συνολική επιφάνεια της μοναδιαίας μπάλας, δηλαδή με  $n v_n$ , οπότε παίρνουμε  $d\theta = n v_n d\sigma(\theta)$ . Καταλήγουμε, λοιπόν, στην εξής σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = n v_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1} d\sigma(\theta) dr.$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την γκαουσιανή συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right),$$

με δύο τρόπους.

Από τη μία έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) dx \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) dx_i \\ &= (\sqrt{2\pi})^n. \end{aligned}$$

Από τη άλλη, μέσω του τύπου ολοκλήρωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f &= nv_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1} d\sigma(\theta) dr \\ &= nv_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} d\sigma dr \\ &= nv_n \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr \\ &= v_n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

Από την ισότητα των παραπάνω εκφράσεων έχουμε τον τύπο του όγκου της μοναδιαίας Ευκλείδειας σφαίρας στον  $\mathbb{R}^n$ :

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

### 1.2.2 Παρατηρήσεις πάνω στα χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας μπάλας

Όπως προκύπτει από τον τύπο του Stirling:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{(n+1)/2},$$

ο όγκος της μοναδιαίας ευκλείδειας σφαίρας είναι περίπου ίσος με

$$\left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}}\right)^n.$$

Άμεσο συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι όσο η διάσταση μεγαλώνει ( $n \rightarrow \infty$ ), ο όγκος μικραίνει απεριόριστα. Αν ταυτόχρονα δούμε τη συμπεριφορά του περιγεγραμμένου κύβου  $B_\infty^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$  στην παραπάνω μπάλα, παρατηρούμε ότι ο όγκος του  $|B_\infty^n| = 2^n$  ασυμπτωτικά γίνεται πολύ μεγάλος. Καταλήγουμε, δηλαδή σε μια διαπίστωση που αντιτίθεται στην όποια γεωμετρική εποπτεία μπορεί να έχουμε στους ευκλείδειους χώρους μεγάλης διάστασης: καθώς η διάσταση μεγαλώνει, η εγγεγραμμένη μπάλα οριακά «φαίνεται» εντός του κύβου.

Ένα δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει ως εξής: αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$V_n(r) = r^n v_n,$$

και θέσουμε τον όγκο της  $B_2^n(r)$  ίσο με 1, τότε λύνοντας ως προς  $r^n$  προκύπτει ότι:

$$r^n v_n = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{v_n^{1/n}}.$$

Με άλλα λόγια, η ακτίνα μιας μπάλας όγκου 1 είναι περίπου ίση με

$$\left(\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}\right),$$

δηλαδή τάξης  $\sqrt{n}$ . Αυτό σημαίνει διαισθητικά πως, προκειμένου να «διατηρηθεί» ο όγκος της μπάλας σταθερός καθώς η διάσταση του χώρου μέσα στον οποίο βρίσκεται μεγαλώνει απεριόριστα, η ακτίνα της γίνεται ασυμπτωτικά πολύ μεγάλη.

Πριν μιλήσουμε για τον όγκο γενικών σωμάτων στον  $\mathbb{R}^n$ , θα μελετήσουμε την συμπεριφορά της κατανομής της «μάζας» της μπάλας όγκου ίσου με 1, την οποία θα συμβολίζουμε με  $B^n(r)$ .

Όπως είδαμε, η ακτίνα της δίνεται από τον τύπο:

$$r = \frac{1}{v_n^{1/n}}.$$

Αν θεωρήσουμε την κεντρική τομή της μπάλας (το  $(n-1)$ -διάστατο υπερεπίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της), τότε έχουμε μια μπάλα διάστασης  $(n-1)$  με την ίδια ακτίνα και άρα ο όγκος της θα είναι:

$$|B^{n-1}(r)| = r^{n-1} v_{n-1},$$

δηλαδή,

$$|B^{n-1}(r)| = v_{n-1} \left(\frac{1}{v_n}\right)^{(n-1)/n}.$$

Από την προσέγγιση του όγκου της μοναδιαίας μπάλας έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 |B^{n-1}(r)| &\sim \left(\frac{2\pi e}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \left[\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2}\right]^{-(n-1)/n} \\
 &\sim \left(\frac{2\pi e}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-(n-1)/2} \\
 &\sim \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)/2} \\
 &\sim \sqrt{e},
 \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση του ορίου  $(1 + a/n)^n \rightarrow e^a$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον όγκο των τομών της μπάλας από παράλληλα υπερεπίπεδα (προς το κεντρικό επίπεδο) ως εξής:

Κάθε ένα από αυτά, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από την κεντρική τομή, έχει ακτίνα  $\sqrt{r^2 - x^2}$ , οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του:

$$\begin{aligned}
 |B^{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})| &= v_{n-1} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{n-1} \\
 &= |B^{n-1}(r)| \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}\right)^{n-1} \\
 &= |B^{n-1}(r)| \left(1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right)^{(n-1)/2}.
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις, ο όγκος ασυμπτωτικά γίνεται:

$$|B^{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})| \sim \sqrt{e} \left(1 - \frac{2\pi e x^2}{n}\right)^{(n-1)/2},$$

θέτοντας  $|B^{n-1}(r)| \sim \sqrt{e}$  και  $r \sim \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi e}}\right)$ . Επομένως, καταλήγουμε στο ότι

$$|B^{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})| \sim \sqrt{e} \cdot e^{-\pi e x^2},$$

δηλαδή, ο όγκος της  $(n-1)$ -διάστατης τομής σε απόσταση  $x$  από την κεντρική πλησιάζει ασυμπτωτικά την τιμή  $\sqrt{e} \cdot e^{-\pi e x^2}$  καθώς το  $n \rightarrow \infty$ .

Παρατηρούμε ότι ο όγκος της τυχαίας τομής προσεγγίζεται από μια κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 0$  και διασπορά  $\sigma^2 = 1/2\pi e$ , η οποία δεν εξαρτάται από τη διάσταση  $n$ . Παρά το γεγονός ότι η ακτίνα της μπάλας όγκου 1 αυξάνει όσο η διάσταση μεγαλώνει, σχεδόν όλος ο όγκος

συσσωρεύεται σε ένα τμήμα συγκεκριμένου πάχους. Από τους πίνακες της κανονικής κατανομής, περίπου το 96 τοις εκατό του όγκου βρίσκεται στο διάστημα  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ , δηλαδή στο τμήμα:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \right\},$$

όπου  $\frac{\sqrt{2\pi e}}{2} \approx 2,1$  και  $x_1$  η διεύθυνση ως προς την οποία προβάλλουμε την κατανομή μάζας (δηλαδή η αντίστοιχη τομή). Βάσει αυτής της παρατήρησης, θα έλεγε κανείς πως ο όγκος της μπάλας όγκου 1 συγκεντρώνεται κοντά σε κάθε υπόχωρο διάστασης  $(n - 1)$ , ή ακόμα καλύτερα, στην τομή αυτών των υπόχωρων, που είναι κοντά στο κέντρο της μπάλας.

Από την άλλη, έχει ενδιαφέρον να δούμε το εξής: ας πάρουμε μια μπάλα ακτίνας  $r$  και την αντίστοιχη ομόκεντρη μπάλα ακτίνας  $r - a$ , δηλαδή το σφαιρικό «καπάκι» ακτίνας  $r$  και πάχους  $a$ . Το ερώτημα είναι ποιο ποσοστό του συνολικού όγκου της  $B_2^n(r)$  περιέχεται σ' αυτό το «καπάκι». Ο λόγος αυτός είναι:

$$\frac{Vol(B_2^n(r)) - Vol(B_2^n(r - a))}{Vol(B_2^n(r))} = \frac{v_n(r^n - (r - a)^n)}{v_n r^n} = 1 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^n.$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι όσο η διάσταση μεγαλώνει, ο παραπάνω λόγος τείνει στο 1. Με άλλα λόγια, ο όγκος της μπάλας βρίσκεται ασυμπτωτικά στο «καπάκι», δηλαδή έχει τάση να συγκεντρώνεται κοντά στο περίβλημα της μπάλας.

Προκύπτει έτσι ακόμα μια αντίφαση που αντιτίθεται στην διαίσθησή μας, όταν μιλάμε για αντικείμενα σε μεγάλες διαστάσεις.

## Όγκος γενικών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$

Στο τελευταίο κομμάτι της παραγράφου θα δώσουμε έναν γενικό τύπο του όγκου κυρτών σωμάτων που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους, χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες.

Ορίζουμε ως *ακτινική συνάρτηση* του σώματος  $K$  τη συνάρτηση

$$r(x) = \sup \{ \lambda \geq 0 : \lambda x \in K \}.$$

Για κάθε διάνυσμα  $\theta \in S^{n-1}$ , θεωρούμε την *ακτίνα*  $r(\theta)$  του  $K$  στη διεύθυνση του του  $\theta$ .

Από τη σχέση

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = n v_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) r^{n-1} d\sigma(\theta) dr,$$

ο όγκος ενός κυρτού σώματος  $K$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx \\ &= n v_n \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \chi_K(r\theta) r^{n-1} dr d\sigma(\theta). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\chi_K(r\theta) = 1 \Leftrightarrow r \leq r(\theta),$$

για κάθε  $\theta \in S^{n-1}$ . Συνεπώς, προκύπτει

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= nv_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{r(\theta)} r^{n-1} dr d\sigma(\theta) \\ &= v_n \int_{S^{n-1}} r(\theta)^n d\sigma(\theta). \end{aligned}$$

Αλλά ισχύει κάτι περισσότερο. Έχουμε δει ότι αν το σώμα  $K$  είναι κεντρικά συμμετρικό, δηλαδή οποτεδήποτε  $x \in K$  τότε και  $-x \in K$ , τότε υπάρχει νόρμα  $\|\cdot\|_K$  στον  $\mathbb{R}^n$  έτσι ώστε:

$$K = \{x : \|x\|_K \leq 1\},$$

δηλαδή το  $K$  να αποτελεί τη μοναδιαία μπάλα στον  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ . Η συγκεκριμένη νόρμα, που επάγεται από το  $K$  είναι η

$$\|x\|_K = \inf \{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}.$$

Η ακτινική συνάρτηση του σώματος  $K$  συνδέεται με την παραπάνω νόρμα ως εξής:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \sup \{\lambda \geq 0 : \lambda\theta \in K\} \\ &= \frac{1}{\inf \{\frac{1}{\lambda} : \lambda\theta \in K\}} \\ &= \frac{1}{\inf \{\lambda : \lambda\theta \in K\}} \\ &= \frac{1}{\|\theta\|_K}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, για κάθε  $\theta \in S^{n-1}$  ισχύει  $r(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|_K}$ , οπότε ο όγκος κάθε συμμετρικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Vol}(K) = v_n \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K^{-n} d\sigma(\theta).$$

# Κεφάλαιο 2

## Το θεώρημα του John

### 2.1 Ελλειψοειδή στον $\mathbb{R}^n$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε βασικές ιδιότητες ενός ελλειψοειδούς στον  $\mathbb{R}^n$  καθώς και τη σχέση που έχει κάθε κυρτό σώμα με ένα συγκεκριμένο είδος ελλειψοειδούς. Από την αναλυτική γεωμετρία έχουμε τον εξής ορισμό:

**Ορισμός 2.1.1** Ένα κυρτό υποσύνολο  $\mathcal{E}$  του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων αν υπάρχει ορθοκανονική βάση  $e_1, e_2, \dots, e_n$  του  $\mathbb{R}^n$  και θετικοί αριθμοί  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ώστε

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\}.$$

Οι θετικοί αριθμοί  $a_1, a_2, \dots, a_n$  παίζουν τον ρόλο των μηκών των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς.

Είναι προφανές ότι για  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  το ελλειψοειδές εκφυλίζεται στην μοναδιαία μπάλα του  $\mathbb{R}^n$ . Συνεπώς, αυτή αποτελεί ειδική μορφή ελλειψοειδούς και θα δούμε παρακάτω ότι μας ενδιαφέρει με έναν ιδιαίτερο τρόπο.

Στη συνέχεια δίνουμε έναν ισοδύναμο ορισμό του ελλειψοειδούς με κέντρο την αρχή των αξόνων που το σχετίζει με τους αντιστρέψιμους  $n \times n$  πίνακες με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ . Θυμίζουμε ότι το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων  $M_{n \times n}$  αποτελεί την γενική γραμμική ομάδα, υποομάδα της οποίας είναι η ορθογώνια ομάδα, το σύνολο, δηλαδή, των  $M_{n \times n}$  για τους οποίους ισχύει ότι  $M^t M = I$ . Κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι και αντιστρέψιμος, αφού έχει ορίζουσα  $\pm 1$ .

**Ορισμός 2.1.2** Ένας συμμετρικός  $n \times n$  πίνακας  $T$  λέγεται θετικά ορισμένος αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ισχύει  $\langle Tx, x \rangle > 0$ .

Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^n$  που ορίζεται ως

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

για οποιαδήποτε διανύσματα  $x = (x_1, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\langle x, y \rangle = x^t y,$$

θεωρώντας τα διανύσματα ως πίνακες στήλης. Κατ' επέκταση, για οποιονδήποτε  $n \times n$  πίνακα  $T$  έχουμε:

$$\langle Tx, y \rangle = (Tx)^t y = (x^t T^t) y = x^t (T^t y) = \langle x, T^t y \rangle.$$



Από τη γραμμική άλγεβρα, και συγκεκριμένα από το Φασματικό Θεώρημα για πραγματικούς πίνακες, ισχύει ότι κάθε συμμετρικός (οπότε και κάθε θετικά ορισμένος) πίνακας αναλύεται στη μορφή:

$$T = Q^t \Lambda Q,$$

όπου ο  $Q$  ορθογώνιος πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του  $T$  και  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  οι πραγματικές ιδιοτιμές του. Στην πραγματικότητα, οι στήλες του  $Q$  μπορούν να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελούν ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Στην περίπτωση που έχουμε θετικά ορισμένο πίνακα, ισχύει επιπλέον ότι οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Επίσης, στην περίπτωση πραγματικών, θετικά ορισμένων πινάκων, πετυχαίνουμε την ανάλυσή τους ως

$$T = U^t U,$$

όπου  $U$  αντιστρέψιμος.

Είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την εξής (βλ.[3],[1]):

**Πρόταση 2.1.1** Το σύνολο  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας  $T$ , ώστε  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leq 1\}$ .

**Απόδειξη:** Αν το  $E$  είναι ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων, τότε γράφεται στη μορφή:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

όπου  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$  και  $a_1, a_2, \dots, a_n$  θετικοί αριθμοί. Θεωρούμε τον πίνακα  $T = \text{diag}(a_1^{-2}, a_2^{-2}, \dots, a_n^{-2})$ . Τότε, για οποιοδήποτε σημείο  $x = (x_1, \dots, x_n)$  του  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1 a_1^{-2}, x_2 a_2^{-2}, \dots, x_n a_n^{-2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 a_1^{-2} + x_2^2 a_2^{-2} + \dots + x_n^2 a_n^{-2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\langle Tx, x \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2}.$$

Βλέπουμε ότι ο  $T$  είναι θετικά ορισμένος και προφανώς  $\langle Tx, x \rangle \leq 1$ .

Αντίστροφα, έστω ότι  $T$  είναι ένας θετικά ορισμένος  $n \times n$  πίνακας. Θα δείξουμε ότι το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leq 1\}$  είναι ελλειψοειδές. Υποθέτουμε ότι, αφού ο  $T$  είναι θετικά ορισμένος, υπάρχει ορθοκανονική βάση που δομούν τα ιδιοδιανύσματα του, έστω  $g_1, g_2, \dots, g_n$  και έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι αντίστοιχες θετικές ιδιοτιμές. Συνεπώς, κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  γράφεται στη μορφή:

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, g_j \rangle g_j.$$

Διαδοχικά προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \left\langle T \left( \sum_{j=1}^n \langle x, g_j \rangle g_j \right), \sum_{j=1}^n \langle x, g_j \rangle g_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle x, g_j \rangle T(g_j), \sum_{j=1}^n \langle x, g_j \rangle g_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \left\langle \lambda_j \langle x, g_j \rangle g_j, \sum_{j=1}^n \langle x, g_j \rangle g_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, g_j \rangle^2 g_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, g_j \rangle^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τη σχέση  $\langle Tx, x \rangle \leq 1$ , έχουμε ότι:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\langle x, g_j \rangle^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\right)^2} \leq 1,$$

δηλαδή, για την ορθοκανονική βάση που δομούν τα ιδιοδιανύσματα  $g_1, g_2, \dots, g_n$  υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $a_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ , ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\langle x, g_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1,$$

οπότε το  $A$  είναι ελλειψοειδές. ■

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι αριθμοί  $1/\sqrt{\lambda_j}$ , όπου  $\lambda_j$  οι ιδιοτιμές του θετικά ορισμένου πίνακα  $T$ , είναι τα μήκη των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς.

Στο τελευταίο μέρος κάνουμε μια αναφορά στον υπολογισμό του όγκου του ελλειψοειδούς. Η πρώτη παρατήρηση αφορά στον θετικά ορισμένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-2} \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$U = U^t = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

όπου φανερά  $U$  αντιστρέψιμος,  $U = U^t$  και  $T = U^{-2}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{E} = U(B_2^n),$$

όπου  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Tx, x \rangle \leq 1\}$ . Πράγματι:

$$\begin{aligned} x \in U(B_2^n) &\Leftrightarrow x = Uy, y \in B_2^n \\ &\Leftrightarrow y = U^{-1}x \in B_2^n \\ &\Leftrightarrow (U^{-1}x)^t U^{-1}x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x^t (U^{-1})^t U^{-1}x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x^t U^{-2}x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x^t T x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, κάθε ελλειψοειδές αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό της Ευκλείδειας μπάλας στον  $\mathbb{R}^n$ . Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο μας ενδιαφέρουν τα συγκεκριμένα σύνολα και η σχέση τους με τα κυρτά σώματα.

Είναι εύκολο πλέον να περάσουμε στον υπολογισμό του όγκου του ελλειψοειδούς. Εφ' όσον κάθε τέτοιο σώμα εκφράζεται όπως περιγράψαμε, εύκολα βλέπει κανείς ότι:

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = \det U \cdot \text{Vol}(B_2^n),$$

ή ισοδύναμα

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = v_n \prod_{j=1}^n a_j.$$

Τέλος, δίνουμε τον εξής χρήσιμο ορισμό:

**Ορισμός 2.1.3 (Πολικό Σώμα)** Αν το  $K$  είναι ένα κυρτό σώμα, με το  $0$  να περιέχεται στο εσωτερικό του, τότε το σύνολο:

$$K^\circ = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle x, z \rangle \leq 1, \forall x \in K\},$$

είναι κυρτό σώμα και ονομάζεται πολικό σώμα του  $K$ .

Στην περίπτωση του ελλειψοειδούς

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

το πολικό του είναι το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E}^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle^2 a_j^2 \leq 1 \right\}.$$

## 2.2 Το Θεώρημα του John

Σκοπός της ενότητας είναι να δούμε πώς σχετίζεται κάθε κυρτό σώμα με ένα συγκεκριμένο ελλειψοειδές, το οποίο βρίσκεται εντός του σώματος και κυρίως, πώς περιγράφεται το εν λόγω ελλειψοειδές. Πιο απλά, θα δούμε ότι σε κάθε κυρτό σώμα περιέχεται ένα μοναδικό ελλειψοειδές που έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο και υπό συγκεκριμένες συνθήκες, αυτό το ελλειψοειδές συμπίπτει με την Ευκλείδεια μπάλα.

Για παράδειγμα, στο τετράγωνο πλευράς 2 με κέντρο την αρχή των αξόνων, το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου είναι ο κύκλος ακτίνας 1. Στην περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 1, το μέγιστο ελλειψοειδές είναι πάλι ο κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα  $\sqrt{3}/6$ . Στην περίπτωση του  $n$ -διάστατου παραλληλεπίπεδου, με πλευρές παράλληλες στους άξονες και αντίστοιχα μήκη  $2a_1, \dots, 2a_n$ , το μέγιστο ελλειψοειδές είναι αυτό που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Πριν περάσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του βασικού θεωρήματος της ενότητας, ας σταθούμε σε κάποιες βασικές σχέσεις που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_m$  μοναδιαία διανύσματα στο σύνορο του  $K$  και θετικοί αριθμοί  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$$

και

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2 = \|x\|_2^2,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ . Για οποιαδήποτε σημεία  $u, v \in \mathbb{R}^n$  συμβολίζουμε  $uv^t = u \otimes v$ . Ισχύει ότι  $(u \otimes v)w = \langle v, w \rangle u$ . Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$x = \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle u_i,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Επιπλέον, για κάθε  $x$  έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle u_i \\ &= \sum_{i=1}^m c_i (u_i \otimes u_i) x \\ &= \left( \sum_{i=1}^m c_i (u_i \otimes u_i) \right) x, \end{aligned}$$

οπότε, η δεύτερη σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή πίνακα μετασχηματισμού ως εξής:

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = I_n.$$

Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $u_i$ , η απεικόνιση  $x \rightarrow \langle x, u_i \rangle u_i$  είναι η ορθογώνια προβολή του  $x$  στον υπόχωρο που παράγει το  $u_i$ . Κάθε τέτοιος μετασχηματισμός, με πίνακα τον  $u_i \otimes u_i$ , έχει τάξη 1 και ίχνος 1. Συνεπώς, από την ισότητα των ίχνων των πινάκων της τελευταίας σχέσης, προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^m c_i = n.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε (βλ. [24], [6],[4]) το ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.2.1** (John) Κάθε κυρτό σώμα  $K$  περιέχει μοναδικό ελλειψοειδές μεγίστου όγκου. Αυτό το ελλειψοειδές είναι η μοναδιαία μπάλα  $B_2^n$  αν και μόνο αν  $B_2^n \subseteq K$  και για κάποιο  $m \in \mathbb{N}$ , υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα  $u_1, u_2, \dots, u_m$  στο σύνορο  $\partial K$  του  $K$  και θετικοί αριθμοί  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0 \tag{2.1}$$

και

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2 = \|x\|_2^2, \tag{2.2}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση ενός κεντρικά συμμετρικού σώματος  $K$ .

Δείχνουμε αρχικά ότι αν ισχύουν οι συνθήκες (2.1) και (2.2), τότε η μοναδιαία μπάλα  $B_2^n$  είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μεγίστου όγκου.

Έστω, λοιπόν, το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

με  $\mathcal{E} \subseteq K$ , για κάποια ορθοκανονική βάση  $\{e_j\}_1^n$  και θετικούς αριθμούς  $\{a_j\}_1^n$ . Θα δείξουμε ότι

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) \leq \text{Vol}(B_2^n),$$

ή αλλιώς, ότι

$$\prod_1^n a_j \leq 1$$

και ότι η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει όταν  $a_j = 1$  για κάθε  $j = 1, \dots, n$ .

Θεωρούμε τα υπερεπίπεδα  $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle = 1\}$ , για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $u_i$  στο σύνορο του  $K$ . Τότε, κανένα από αυτά δεν τέμνει το ελλειψοειδές  $\mathcal{E}$ , αφού  $\mathcal{E} \subseteq K$ . Επομένως, κάθε  $u_i$  ανήκει στο πολικό ελλειψοειδές:

$$\mathcal{E}^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle^2 a_j^2 \leq 1 \right\}.$$

Άρα, για κάθε  $i = 1, \dots, m$  έχουμε:

$$\sum_{j=1}^n \langle u_i, e_j \rangle^2 a_j^2 \leq 1.$$

Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\sum_{j=1}^n \langle u_i, e_j \rangle^2 a_j^2 \leq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με  $c_i$  και αθροίζοντας και στα δύο μέλη ως προς  $i$ , έχουμε:

$$\sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \langle u_i, e_j \rangle^2 a_j^2 \leq \sum_{i=1}^m c_i,$$

από την οποία τελικά παίρνουμε:

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \leq n,$$

παίρνοντας υπόψη ότι  $\sum_{i=1}^m c_i = n$ . Επιπλέον από τη σχέση (2.2) ισχύει:

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, e_j \rangle^2 = |e_j|^2 = 1.$$

Τέλος, από την Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου, έχουμε:

$$\left( \prod_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \leq 1,$$

δηλαδή το ζητούμενο. Η δε ισότητα ισχύει όταν  $a_j = 1$  για κάθε  $j = 1, \dots, n$ .

Περνάμε τώρα στο δεύτερο σκέλος της απόδειξης. Θα δείξουμε ότι αν η μοναδιαία μπάλα είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου εντός του κυρτού, κεντρικά συμμετρικού σώματος  $K$ , τότε ισχύουν



Σχήμα 2.1: Το ελλειψοειδές  $E$  μεγίστου όγκου ενός κυρτού σώματος  $K$ .

οι σχέσεις (2.1) και (2.2). Θα πρέπει δηλαδή, να υπάρχουν σημεία επαφής  $u_i$  με  $i = 1, \dots, m$  της μπάλας  $B_2^n$  και του  $\partial K$  και θετικοί αριθμοί  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , έτσι ώστε:

$$I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{n} I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i.$$

Τότε, θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^m c_i = n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{n} = 1.$$

Σκοπός μας, λοιπόν, είναι να δείξουμε ότι ο πίνακας  $I_n/n$  εκφράζεται ως κυρτός συνδυασμός πινάκων της μορφής  $u_i \otimes u_i$ , με τα  $u_i$  να είναι σημεία επαφής. Με άλλα λόγια, να δείξουμε ότι ο  $I_n/n$  ανήκει στην κυρτή θήκη του συνόλου

$$P = \{u \otimes u : u \in B_2^n \cap \partial K\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι  $I_n/n \notin P$ . Αφού ο χώρος των  $n \times n$  πινάκων με πραγματικά στοιχεία είναι πεπερασμένης διάστασης, τα σύνολα  $\{I_n/n\}$  και  $P$  είναι συμπαγή, οπότε από το Θεώρημα Διαχωρισμού, υπάρχει συναρτησοειδές  $\phi$  τέτοιο, ώστε:

$$\phi\left(\frac{I_n}{n}\right) < \phi(u \otimes u),$$

για κάθε σημείο επαφής  $u$ . Υπάρχει, επομένως, τετραγωνικός πίνακας  $H = (h_{jk})$ , ώστε για κάθε πίνακα  $A = (a_{jk})$ , το συναρτησοειδές  $\phi$  να παίρνει τη μορφή:

$$\phi(A) = \sum_{jk} h_{jk} a_{jk}.$$

Παρατηρούμε ότι, από την απόδειξη του Θεωρήματος Διαχωρισμού, ο πίνακας  $H$ , για τον οποίο «πετυχαίνουμε» ελάχιστη νόρμα ανήκει στο  $P - \{I_n/n\}$ . Αφού οι πίνακες  $u \otimes u$  και  $I_n/n$  είναι συμμετρικοί, θα είναι συμμετρικός και ο  $H$ . Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ίχνος του είναι μηδέν, προσθέτοντας κατάλληλες σταθερές στα διαγώνια στοιχεία του. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε λόγω του ότι οι  $u \otimes u$  και  $I_n/n$  έχουν ίχνος 1. Συνεπώς,  $\phi(I_n) = 0$ . Άρα, για τον πίνακα  $H = (h_{jk})$  έχουμε:

$$\sum_{jk} h_{jk} (u \otimes u)_{jk} > 0,$$

για κάθε σημείο επαφής  $u$ . Από την άλλη:

$$\sum_{jk} h_{jk} (u \otimes u)_{jk} = u^t H u.$$

Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : x^t (I_n + \delta H) x \leq 1\},$$

όπου  $\delta > 0$ , το οποίο είναι ελλειψοειδές που τείνει να γίνει η ευκλείδεια μπάλα  $B_2^n$  καθώς  $\delta \rightarrow 0$ . Για κάθε σημείο επαφής  $u \in \partial K$  έχουμε:

$$u^t (I_n + \delta H) u = 1 + \delta u^t H u > 1,$$

δηλαδή  $u \notin \mathcal{E}_\delta$ .

Αν θεωρήσουμε τη συνεχή απεικόνιση  $\partial K \ni x \mapsto x^t H x$ , λόγω του ότι το σύνορο του  $K$  είναι συμπαγές, η εικόνα της θα είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου. Συνεπώς, κάθε σημείο επαφής θα διαχωρίζεται γνησίως από το  $\partial K$ , δηλαδή μπορούμε να «πετύχουμε» απόσταση μεταξύ του  $\mathcal{E}_\delta$  και του  $u$ , εφόσον το  $\delta$  παραμένει αρκετά μικρό. Με άλλα λόγια, όσο μικρό κι αν θεωρήσουμε το  $\delta$ , ως «σημείο επαφής» με το  $\mathcal{E}_\delta$  θα εξακολουθεί να είναι το αρχικό σημείο επαφής. Συνεπώς, για κάθε  $\delta$  έχουμε  $\mathcal{E}_\delta \subset K$ . Επιπλέον, αν  $\lambda_j$  είναι οι ιδιοτιμές του  $I_n + \delta H$ , τότε

$$\text{vol}(\mathcal{E}_\delta) = \frac{v_n}{\prod_{j=1}^n \lambda_j}.$$

Από την Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου προκύπτει ότι

$$\prod_{j=1}^n \lambda_j^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Αλλά, εφόσον το ίχνος του  $H$  είναι μηδέν, έχουμε ότι  $\text{tr}(I_n + \delta H) = \text{tr}(I_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j = n$ . Άρα,

$$\prod_{j=1}^n \lambda_j^{1/n} \leq 1.$$

Αφού,  $\prod_{j=1}^n \lambda_j \leq 1$ , έπεται ότι:

$$\text{vol}(\mathcal{E}_\delta) \geq v_n,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι έχουμε δεχτεί την ευκλείδεια μπάλα ως το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου εντός του  $K$ . ■

## 2.3 Η «απλή» εκδοχή του Θεωρήματος του John

Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, παρουσιάζουμε την «απλή» εκδοχή του Θεωρήματος του John (βλ. [4]), η οποία θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη αργότερα, αφού συνδέει με άμεσο τρόπο την Ευκλείδεια νόρμα με τη νόρμα που επάγει κάθε κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$ :

**Θεώρημα 2.3.1** (John) Έστω  $K$  κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$ , το οποίο βρίσκεται στη θέση του John. Τότε:

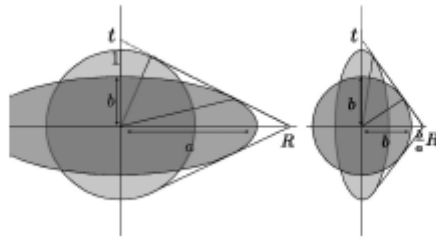
$$B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n} B_2^n.$$



**Απόδειξη:** Έστω ότι  $K \not\subseteq \sqrt{n}B_2^n$ . Τότε, υπάρχει  $x_0 \in K$  με  $\|x_0\|_2 = R > \sqrt{n}$ . Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $x_0 = Re_1$ . Αφού το  $K$  είναι κεντρικά συμμετρικό, θα έχουμε ότι  $\pm x_0 \in K$  και συνεπώς,  $\text{conv}(\pm x_0, B_2^n) \subseteq K$ . Θεωρούμε το ελλειψοειδές:

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a^2} + \sum_{j=2}^n \frac{x_j^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

όπου θέτουμε  $b^2 = 1 - \varepsilon$ , για μικρό  $\varepsilon$  και  $a > 1$  το οποίο μένει να προσδιορίσουμε, ώστε  $\mathcal{E} \subseteq K$ . Έχουμε ότι  $\text{vol}_n(\mathcal{E}) = ab^{n-1}v_n$ . Προκειμένου να πετύχουμε τον εγκλεισμό του ελλειψοειδούς  $\mathcal{E}$  στην κυρτή θήκη  $Z = \text{conv}(\pm x_0, B_2^n)$ , χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα από τις δύο διαστάσεις, αφού το  $Z$  προκύπτει από την περιστροφή του «ρόμβου» ως προς τον άξονα  $e_1$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 2.2: Η κυρτή θήκη  $Z$  και το ελλειψοειδές  $\mathcal{E}$ .

Από το αριστερό σχήμα, λόγω ομοιότητας τριγώνων έχουμε:

$$\frac{1}{R} = \frac{t}{\sqrt{R^2 + t^2}},$$

δηλαδή,

$$t^2 R^2 = R^2 + t^2.$$

Συνεπώς,

$$t^2 = \frac{R^2}{R^2 - 1}.$$

Το σχήμα στα δεξιά αποτελεί «συμπιεσμένη» εικόνα του πρώτου κατά  $b/a$ , κατά μήκος του άξονα  $e_1$ . Πάλι, λόγω ομοιότητας τριγώνων, έχουμε:

$$\frac{a}{R} = \frac{b}{\frac{Rb}{a}} = \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{Rb}{a}\right)^2 + t^2}},$$

δηλαδή,

$$R^2 b^2 + t^2 a^2 = R^2 t^2.$$

Αντικαθιστώντας το  $t^2$  από την σχέση του πρώτου σχήματος, παίρνουμε:

$$a^2 = b^2 + R^2(1 - b^2).$$

Θέτοντας επιπλέον  $b^2 = 1 - \varepsilon$ , προκύπτει ότι:

$$a^2 = 1 + (R^2 - 1)\varepsilon.$$

Συνεπώς, για το τετράγωνο του όγκου του  $\mathcal{E}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n^2(\mathcal{E}) &= (1 + (R^2 - 1)\varepsilon) (1 - \varepsilon)^{n-1} v_n^2 \\ &= (1 + (R^2 - 1)\varepsilon) (1 - (n - 1)\varepsilon + o(\varepsilon)) v_n^2 \\ &= [1 + (R^2 - n)\varepsilon + o(\varepsilon)] v_n^2. \end{aligned}$$

Επομένως, για  $R > \sqrt{n}$  προκύπτει ότι  $\text{vol}_n^2(\mathcal{E}) > v_n^2$ , δηλαδή:

$$\text{vol}_n(\mathcal{E}) > v_n,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι η  $B_2^n$  είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου του  $K$ . Συνεπώς,

$$B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$$

■



# Κεφάλαιο 3

## Η ανισότητα Brunn-Minkowski

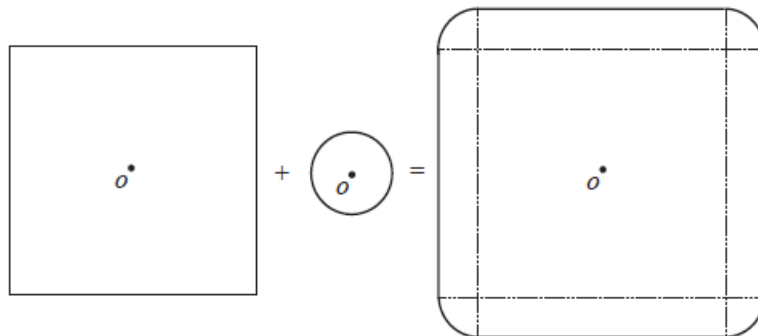
Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ανισότητα Brunn-Minkowski, που αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις ανισότητες στην κυρτή γεωμετρία. Όπως θα δούμε, στην έκφραση της ανισότητας γίνεται χρήση του αθροίσματος κατά Minkowski, το οποίο ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 3.1** Έστω δύο υποσύνολα  $A$  και  $B$  του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε, το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

ονομάζεται *άθροισμα Minkowski των  $A$  και  $B$* .

Με άλλα λόγια, το  $A + B$  αποτελείται από όλα τα αθροίσματα κάθε στοιχείου του  $A$  με κάθε στοιχείο του  $B$ . Για παράδειγμα, στον  $\mathbb{R}$ , αν  $A = [-1, 1]$  και  $B = [0, 3]$ , τότε  $A + B = [-1, 4]$ . Στον  $\mathbb{R}^2$ , αν  $A = [-1, 1]^2$  και  $B = B_2^2$ , τότε το  $A + B$  είναι το τετράγωνο  $[-2, 2]^2$  με λειασμένες κορυφές (σχήμα 3.1, βλ. [18]). Ομοίως, αντίστοιχο αποτέλεσμα έχουμε στον  $\mathbb{R}^n$ . Με την ίδια λογική, αν  $A = [-1, 1]^n$  και  $B = rB_2^n$ , με  $r > 1$ , τότε το  $A + B$  είναι και πάλι ο «κύβος»  $[-1 - r, 1 + r]^n$ .



Σχήμα 3.1: Το άθροισμα Minkowski ενός τετραγώνου και ενός κύκλου στον  $\mathbb{R}^2$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski αφορά συμπαγή υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  (βλ. [13],[14],[31]):

**Θεώρημα 3.1** (Ανισότητα Brunn-Minkowski) Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$ , τότε:

$$\mu(A + B)^{1/n} \geq \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}, \quad (3.1)$$

όπου  $\mu$  συμβολίζει το μέτρο Lebesgue στον  $\mathbb{R}^n$ .

Η συμπάγεια θα μπορούσε να αντικατασταθεί με τη συνθήκη τα σύνολα να είναι ανοικτά και φραγμένα, λόγω της εσωτερικής κανονικότητας του μέτρου Lebesgue (βλ. [18]). Γενικότερα, η ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε μη κενά, μετρήσιμα σύνολα, με την προϋπόθεση ότι κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι μετρήσιμο σύνολο.

Επειδή το ενδιαφέρον μας στρέφεται σε κυρτά σώματα στον  $\mathbb{R}^n$ , το μέτρο Lebesgue μπορεί να αντικατασταθεί με τον όγκο τους, δηλαδή  $vol A$  και  $vol B$ . Θεωρώντας ότι το μέτρο  $\mu$  υποδηλώνει τον «όγκο» των  $A$  και  $B$ , η ανισότητα παίρνει τη μορφή:

$$vol(A+B)^{1/n} \geq vol(A)^{1/n} + vol(B)^{1/n}. \quad (3.2)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ισότητα ισχύει (βλ. [4]) όταν τα  $A$  και  $B$  είναι ομοιότητα (το ένα αποτελεί συστολή ή διαστολή του άλλου). Συγκεκριμένα, αν υπάρχει  $\lambda > 0$  τέτοιο, ώστε:

$$A = \lambda B = \{\lambda b : b \in B\},$$

τότε,

$$A + B = (\lambda + 1) B,$$

οπότε έχουμε:

$$vol(A) = \lambda^n vol(B)$$

και

$$vol(A+B) = (\lambda + 1)^n vol(B).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} vol(A+B)^{1/n} &= ((\lambda + 1)^n vol(B))^{1/n} \\ &= (\lambda + 1) vol(B)^{1/n} \\ &= \lambda vol(B)^{1/n} + vol(B)^{1/n} \\ &= vol(A)^{1/n} + vol(B)^{1/n}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, παίρνοντας υπόψη την συνθήκη  $vol(\lambda A) = \lambda^n vol(A)$ , προκύπτει η γνωστή έκφραση της Ανισότητας Brunn-Minkowski:

$$vol((1-\lambda)A + \lambda B)^{1/n} \geq (1-\lambda) vol(A)^{1/n} + \lambda vol(B)^{1/n}, \quad (3.3)$$

με  $\lambda \in [0, 1]$ . Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} vol((1-\lambda)A + \lambda B)^{1/n} &\geq vol((1-\lambda)A)^{1/n} + vol(\lambda B)^{1/n} \\ &= ((1-\lambda)^n vol(A))^{1/n} + (\lambda^n vol(B))^{1/n} \\ &= (1-\lambda) vol(A)^{1/n} + \lambda vol(B)^{1/n}. \end{aligned}$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski αποτελεί θεμελιώδη σχέση που συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον  $\mathbb{R}^n$ . Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε μια εναλλακτική μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski, η οποία προκύπτει από την Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου:

$$(1-\lambda)x + \lambda y \geq x^{1-\lambda}y^\lambda, \quad (3.4)$$

για κάθε  $x, y \geq 0$  και  $\lambda \in [0, 1]$ . Έτσι, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \text{vol}((1 - \lambda)A + \lambda B) &\geq \left( (1 - \lambda) \text{vol}(A)^{1/n} + \lambda \text{vol}(B)^{1/n} \right)^n \\ &\geq \text{vol}(A)^{1-\lambda} \text{vol}(B)^\lambda, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\text{vol}((1 - \lambda)A + \lambda B) \geq \text{vol}(A)^{1-\lambda} \text{vol}(B)^\lambda, \quad (3.5)$$

ή γενικότερα,

$$\mu((1 - \lambda)A + \lambda B) \geq \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^\lambda.$$

Η μορφή αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι είναι «απαλλαγμένη» από την διάσταση (βλ. [3],[6]). Προκειμένου να αποδείξουμε την Ανισότητα Brunn-Minkowski, θα δείξουμε την «πολλαπλασιαστική» της έκφραση (3.5). Το κύριο εργαλείο που θα αξιοποιήσουμε είναι η Ανισότητα Prékopa - Leindler, της οποίας παρουσίαση και απόδειξη θα γίνει παρακάτω.

Σε αυτό το σημείο, δίνουμε μια απόδειξη της Ανισότητας Brunn-Minkowski για  $n = 1$ , δηλαδή στο  $\mathbb{R}$  (βλ. [18], [40]).

**Λήμμα 3.1** (Ανισότητα Brunn-Minkowski στο  $\mathbb{R}$ ) Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ , τότε:

$$\text{vol}(A + B) \geq \text{vol}(A) + \text{vol}(B). \quad (3.6)$$

**Απόδειξη:** Αφού τα  $A$  και  $B$  είναι συμπαγή, τότε και το  $A + B$  είναι συμπαγές και εφόσον το μέτρο Lebesgue παραμένει αναλλοίωτο στους μετασχηματισμούς, τα μετατοπίζουμε έτσι, ώστε  $A \cap B = \{0\}$ ,  $A \subseteq \{x : x \leq 0\}$  και  $B \subseteq \{x : x \geq 0\}$ . Τότε,  $A + B \supseteq A \cup B$ , οπότε:

$$\text{vol}(A + B) \geq \text{vol}(A \cup B) \geq \text{vol}(A) + \text{vol}(B).$$

■

Προφανώς, αντικαθιστώντας το  $A$  με  $(1 - \lambda)A$  και το  $B$  με  $\lambda B$ , προκύπτει η αντίστοιχη εναλλακτική μορφή:

$$\text{vol}((1 - \lambda)A + \lambda B) \geq (1 - \lambda) \text{vol}(A) + \lambda \text{vol}(B). \quad (3.7)$$

Περνάμε στη συνέχεια στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος (βλ. [26], [32]):

**Θεώρημα 3.2** (Ανισότητα Prékopa - Leindler) Έστω  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω  $\lambda \in (0, 1)$ . Αν οι  $f, g, h$  ικανοποιούν τη σχέση:

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda, \quad (3.8)$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g \right)^\lambda. \quad (3.9)$$

**Απόδειξη:** Δείχνουμε το συμπέρασμα πρώτα στην περίπτωση όπου  $n = 1$ . Θεωρούμε τα σύνολα  $\varphi_h(t) = \{x : h(x) \geq t\}$  και αντίστοιχα  $\varphi_f(t)$  και  $\varphi_g(t)$ . Έστω  $\lambda \in (0, 1)$ . Τότε, για οποιοδήποτε

$z \in (1 - \lambda)\varphi_f(t) + \lambda\varphi_g(t)$ , δηλαδή  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ , με  $f(x) \geq t$  και  $g(y) \geq t$ , λόγω της (3.6), προκύπτει ότι:

$$h(z) = h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \geq t^{1-\lambda}t^\lambda = t,$$

οπότε,  $z \in \varphi_h(t)$ . Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\varphi_h(t) \supseteq (1 - \lambda)\varphi_f(t) + \lambda\varphi_g(t).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1, προκύπτει ότι:

$$\mu(\varphi_h(t)) \geq \mu((1 - \lambda)\varphi_f(t) + \lambda\varphi_g(t)) \geq (1 - \lambda)\mu(\varphi_f(t)) + \lambda\mu(\varphi_g(t)).$$

Από το Θεώρημα Fubini, έχουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = \int_0^\infty \mu(\varphi_h(t)) dt,$$

οπότε διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x)dx &= \int_0^\infty \mu(\varphi_h(t)) dt \\ &\geq (1 - \lambda) \int_0^\infty \mu(\varphi_f(t)) dt + \lambda \int_0^\infty \mu(\varphi_g(t)) dt \\ &= (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \\ &\geq \left( \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \right)^\lambda, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την (3.4). Δείξαμε, λοιπόν ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx \geq \left( \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \right)^\lambda, \quad (3.10)$$

και προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος για  $n > 1$ . Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε ότι οι σχέσεις (3.8) και (3.9) ισχύουν στην  $n - 1$  διάσταση και παίρνουμε  $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Επιλέγουμε τυχαία  $a, b \in \mathbb{R}$  και  $\lambda \in [0, 1]$ . Ορίζουμε τον αριθμό  $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$  και τη συνάρτηση  $h_k : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  με τύπο  $h_k(x) = h(x, k)$  (και με όμοιο τρόπο ορίζουμε αντίστοιχα τις  $f_k$  και  $g_k$ ). Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} h_c((1 - \lambda)x + \lambda y) &= h((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)a + \lambda b) \\ &= h((1 - \lambda)(x, a) + \lambda(y, b)) \\ &\geq f(x, a)^{1-\lambda}g(y, b)^\lambda \\ &= f_a(x)^{1-\lambda}g_b(y)^\lambda. \end{aligned}$$

Ως συμπέρασμα, καταλήγουμε στο ότι οι συναρτήσεις  $h_c$ ,  $f_a$  και  $g_b$  ικανοποιούν την συνθήκη (3.8) στις  $n - 1$  διαστάσεις, οπότε έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c \geq \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b \right)^\lambda. \quad (3.11)$$

Αν ορίσουμε τις  $H(c) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)dz$ ,  $F(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z)dz$  και  $G(b) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z)dz$ , τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$H((1 - \lambda)a + \lambda b) \geq (F(a))^{1-\lambda} (G(b))^\lambda. \quad (3.12)$$

Δηλαδή, οι συναρτήσεις  $H, F, G$  ικανοποιούν την (3.8), αφού τα  $a, b \in \mathbb{R}$  ήταν τυχαία. Συνεπώς, από την ισχύ του θεωρήματος για  $n = 1$ , έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} H(c)dc \geq \left( \int_{\mathbb{R}} F(a)da \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} G(b)db \right)^{\lambda},$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)dz \right) dc \geq \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(z)dz \right) da \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(z)dz \right) db \right)^{\lambda},$$

ή αλλιώς,

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(z, c)dz \right) dc \geq \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(z, a)dz \right) da \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(z, b)dz \right) db \right)^{\lambda},$$

δηλαδή, η ζητούμενη

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g \right)^{\lambda}.$$

■

Εύκολα, τώρα, μπορούμε να περάσουμε στην απόδειξη της (3.5) (βλ. [4],[18],[3],[6]), παρατηρώντας ότι οι δείκτριες συναρτήσεις  $f = 1_A, g = 1_B$  και  $h = 1_{(1-\lambda)A+\lambda B}$  ικανοποιούν την (3.8), συνεπώς, με εφαρμογή του Θεωρήματος Πρέκορα - Leindler, προκύπτει άμεσα ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_{(1-\lambda)A+\lambda B} \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} 1_A \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} 1_B \right)^{\lambda},$$

δηλαδή,

$$\text{vol}((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \text{vol}(A)^{1-\lambda} \text{vol}(B)^{\lambda}.$$

Ως σχόλιο, θα πρέπει να πούμε ότι η σχέση (3.1) όντως προκύπτει από την αντίστοιχη «πολλαπλασιαστική» της (3.5) με κανονικοποίηση. Συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα  $A$  και  $B$  του  $\mathbb{R}$  και έστω ότι  $\text{vol}(A) > 0$  και  $\text{vol}(B) > 0$  διότι διαφορετικά, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Ορίζουμε:

$$A_1 = \frac{A}{\text{vol}(A)^{1/n}}, \quad B_1 = \frac{B}{\text{vol}(B)^{1/n}}, \quad \lambda = \frac{\text{vol}(A)^{1/n}}{\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}}.$$

Παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} \text{vol}(A_1) &= \text{vol} \left( \frac{A}{\text{vol}(A)^{1/n}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\text{vol}(A)^{1/n}} \right)^n \cdot \text{vol}(A) \\ &= \frac{1}{\text{vol}(A)} \text{vol}(A) \\ &= 1 \end{aligned}$$



και ομοίως  $\text{vol}(B_1) = 1$ . Εφαρμόζοντας την (3.5) για τα  $A_1$  και  $B_1$  προκύπτει:

$$\text{vol}((1 - \lambda)A_1 + \lambda B_1) \geq 1.$$

Από την άλλη,

$$(1 - \lambda)A_1 + \lambda B_1 = \frac{A + B}{\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}},$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \text{vol}((1 - \lambda)A_1 + \lambda B_1) \geq 1 &\Leftrightarrow \text{vol}\left(\frac{A + B}{\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}}\right) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}}\right)^n \cdot \text{vol}(A + B) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{vol}(A + B)^{1/n} \geq \text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}, \end{aligned}$$

που είναι η (3.2).

## Η Αρχή του Brunn

Κλείνοντας την παράγραφο, κάνουμε μια αναφορά στην κύρια ιδέα που στην πραγματικότητα οδήγησε στη διατύπωση της Ανισότητας Brunn-Minkowski. Εδώ, θα την παρουσιάσουμε ως εφαρμογή της Brunn-Minkowski (βλ. [3]). Πρόκειται για την Αρχή του Brunn, η οποία περιγράφει ουσιαστικά τη σχέση που έχουν οι όγκοι των τομών ενός κυρτού σώματος με υπερεπίπεδα κάθετα προς συγκεκριμένες διευθύνσεις. Θα χρειαστούμε τον παρακάτω:

**Ορισμός 3.2 (Κοίλη Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $K$  ένα κυρτό σύνολο στον  $\mathbb{R}^n$ , λέγεται κοίλη στο  $K$  αν για κάθε  $\lambda \in [0, 1]$  και  $x, y \in K$  ισχύει:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Η Αρχή του Brunn, λοιπόν, διατυπώνεται ως εξής:

**Θεώρημα 3.3 (Brunn)** Έστω  $K$  ένα κυρτό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$  και έστω  $u \in S^{n-1}$ . Θεωρούμε το σύνολο  $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = 0\}$  και ορίζουμε την απεικόνιση  $f_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου

$$f_u(t) = \text{vol}_{n-1}(K \cap (u^\perp + tu)).$$

Τότε, η συνάρτηση  $f_u^{1/n-1}$  είναι κοίλη στον φορέα της.

**Απόδειξη:** Έστω  $\{e_i\}_{i=1}^n$  η συνήθης ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^n$  και έστω  $x \in \mathbb{R}^n$ , δηλαδή  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι  $u = e_n$ . Τότε, αν  $x \in (u^\perp + tu)$ , έχουμε ότι  $x = y + tu$ , όπου  $y \in u^\perp$ , δηλαδή  $\langle y, u \rangle = 0$ . Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle &= \langle y + tu, u \rangle \\ &= \langle y, u \rangle + t \langle u, u \rangle \\ &= 0 + t \|u\|_2^2 \\ &= t. \end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned}\langle x, u \rangle &= \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_n \rangle \\ &= \langle x_1 e_1, e_n \rangle + \dots + \langle x_n e_n, e_n \rangle \\ &= x_1 \langle e_1, e_n \rangle + \dots + x_n \langle e_n, e_n \rangle \\ &= x_n.\end{aligned}$$

Επομένως, ισοδύναμα έχουμε ότι  $x_n = t$ . Δηλαδή, η συνάρτηση  $f_u$  παίρνει τη μορφή:

$$f_u(t) = \text{vol}_{n-1}(K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}).$$

Θεωρούμε το σύνολο:

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, t) \in K\}$$

και έστω  $t_1, t_2$  δύο σημεία του φορέα της  $f_u$ . Προφανώς,  $f_u(t_1) \neq 0$  και  $f_u(t_2) \neq 0$ . Αν θεωρήσουμε κάποια  $x \in K(t_1)$ ,  $y \in K(t_2)$ , τότε  $(x, t_1) \in K$  και  $(x, t_2) \in K$ . Θα δείξουμε ότι για κάθε  $\lambda \in [0, 1]$ :

$$K((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \supseteq (1-\lambda)K(t_1) + \lambda K(t_2). \quad (3.13)$$

Έστω  $z \in (1-\lambda)K(t_1) + \lambda K(t_2)$ . Τότε  $z = (1-\lambda)x + \lambda y$  με  $x \in K(t_1)$  και  $y \in K(t_2)$ . Αφού  $(x, t_1) \in K$  και  $(x, t_2) \in K$  και λόγω του ότι το  $K$  είναι κυρτό, θα έχουμε ότι  $(1-\lambda)(x, t_1) + \lambda(y, t_2) \in K$ . Ισοδύναμα, λοιπόν, προκύπτει ότι:

$$((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \in K,$$

ή αλλιώς,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in K((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2),$$

δηλαδή  $z \in K((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)$ . Εφαρμόζοντας το μέτρο Lebesgue στην (3.13) (παίρνοντας υπόψη τη μονοτονία του μέτρου) και κάνοντας χρήση της Ανισότητας Brunn-Minkowski στον  $\mathbb{R}^{n-1}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\mu(K((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2))^{1/(n-1)} &\geq \mu((1-\lambda)K(t_1) + \lambda K(t_2))^{1/(n-1)} \\ &\geq (1-\lambda)\mu(K(t_1))^{1/(n-1)} + \lambda\mu(K(t_2))^{1/(n-1)}\end{aligned}$$

και γράφοντας στη θέση του μέτρου  $\mu$  τον όγκο  $\text{vol}_{n-1}$ , έχουμε:

$$\text{vol}_{n-1}(K((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2))^{1/(n-1)} \geq (1-\lambda)\text{vol}_{n-1}(K(t_1))^{1/(n-1)} + \lambda\text{vol}_{n-1}(K(t_2))^{1/(n-1)},$$

δηλαδή,

$$f_u^{1/n-1}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \geq (1-\lambda)f_u^{1/n-1}(t_1) + \lambda f_u^{1/n-1}(t_2).$$

Συνεπώς, η  $f_u^{1/n-1}$  είναι κοίλη στον φορέα της.

■



## Κεφάλαιο 4

# Η Ισοπεριμετρική και η Αντίστροφη Ισοπεριμετρική Ανισότητα

Η ισοπεριμετρική ανισότητα (όπως και η αντίστροφη) αποτελεί την αλγεβρική διατύπωση του εξής γεωμετρικού προβλήματος που απασχόλησε τη μαθηματική σκέψη από την αρχαιότητα:

«ανάμεσα σε όλα τα επίπεδα σχήματα με δεδομένη περίμετρο, ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;»

Ένα εναλλακτικά «ποιο είναι το επίπεδο σχήμα με το μέγιστο εμβαδόν που μπορούμε να εγγράψουμε από μια καμπύλη δεδομένου μήκους;». Η απάντηση στο επίπεδο περιγράφεται μέσω της Ισοπεριμετρικής Ανισότητας στον  $\mathbb{R}^2$ :

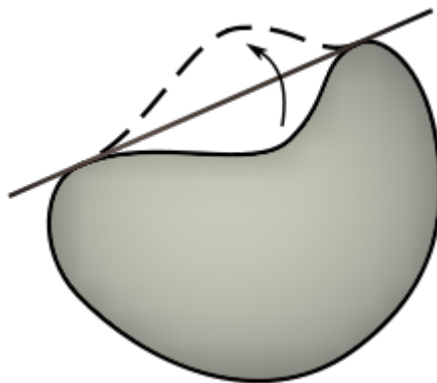
$$L^2 \geq 4\pi A,$$

όπου  $A$  είναι το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής και  $L$  το μήκος της καμπύλης που την περιβάλλει, με την ισότητα στην παραπάνω έκφραση πραγματοποιείται όταν η καμπύλη είναι ο κύκλος.

Με παρόμοια φυσικό τρόπο προκύπτει και το δυϊκό ερώτημα:

«ανάμεσα σε όλα τα επίπεδα σχήματα με δεδομένο εμβαδόν, ποιο έχει την ελάχιστη περίμετρο;»

Η ισοδυναμία του Ισοπεριμετρικού προβλήματος και του δυϊκού του είναι προφανής: έστω ότι ο κύκλος επέλυσε μόνο το δυϊκό πρόβλημα. Τότε, θα υπήρχε κάποιο επίπεδο σχήμα με περίμετρο ίση με αυτή του κύκλου, αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν. Θα μπορούσαμε τότε να το μετασχηματίσουμε, ώστε το εμβαδόν του να γίνει όσο του κύκλου, διατηρώντας την περίμετρό του (ίση με αυτή του



Σχήμα 4.1: Στην περίπτωση που το σχήμα δεν είναι κυρτό, μπορούμε να αυξήσουμε τον όγκο του, αφήνοντας την περίμετρο αναλλοίωτη.

κύκλου), καταλήγοντας σε αντίφαση.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η επίλυση του Ισοπεριμετρικού Προβλήματος για τον  $\mathbb{R}^2$  έγινε μόλις τον 19ο αιώνα από τον F. Edler (1882), πάνω σε εργασία και σε παρατηρήσεις που είχαν προηγηθεί από τον Steiner. Ακολούθησε η αντίστοιχη απόδειξη για τον  $\mathbb{R}^3$  από τον H. Schwarz (1890) και το 1935 από τον L.A. Lyusternik για  $n \geq 2$  (βλ. [17],[21],[27],[38]).

Η έννοια της κυρτότητας φάνηκε να παίζει κυρίαρχο ρόλο, ήδη κιόλας από την πορεία απόδειξης του προβλήματος στον  $\mathbb{R}^2$ , όπου ένα από τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν ήταν το ότι, το σχήμα που λύνει το Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα πρέπει να είναι κυρτό.

Αυτοί οι τύποι προβλημάτων, τα οποία θα γενικεύσουμε για κυρτά σώματα στον  $\mathbb{R}^n$ , περιγράφονται στον κλάδο της Κυρτής Γεωμετρικής Ανάλυσης, από την λεγόμενη Ισοπεριμετρική Ανισότητα.

## Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον  $\mathbb{R}^n$  διατυπώνεται ως εξής (βλ. [2]):

«Ανάμεσα στα κυρτά σώματα δεδομένου όγκου, ποιο έχει την ελάχιστη επιφάνεια;»

Σκοπός μας είναι να συνδέσουμε μέσω μιας ανισοτικής σχέσης τα δύο αυτά μεγέθη.

**Ορισμός 4.1** (Εμβαδόν Επιφάνειας Κυρτού Σώματος) Έστω κυρτό σώμα  $K \in \mathbb{R}^n$ . Τότε, το εμβαδόν επιφάνειάς του ορίζεται ως το όριο

$$vol(\partial K) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{vol(K + tB_2^n) - vol(K)}{t}.$$

Διατυπώνουμε, λοιπόν, το εξής (βλ. [6],[3]):

**Θεώρημα 4.1** (Ισοπεριμετρική Ανισότητα) Έστω κυρτό σώμα  $K \in \mathbb{R}^n$ , για το οποίο ισχύει  $vol(K) = vol(B_2^n)$ . Τότε:

$$vol(\partial K) \geq vol(\partial B_2^n).$$

**Απόδειξη:** Από την Ανισότητα Brunn-Minkowski προκύπτει ότι:

$$vol(K + tB_2^n)^{\frac{1}{n}} \geq vol(K)^{\frac{1}{n}} + t vol(B_2^n)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.1)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} vol(\partial K) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{vol(K + tB_2^n) - vol(K)}{t} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left( vol(K)^{\frac{1}{n}} + t vol(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \right)^n - vol(K)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ n \left( vol(K)^{\frac{1}{n}} + t vol(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-1} vol(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= n vol(K)^{\frac{n-1}{n}} vol(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= n vol(B_2^n)^{\frac{n-1}{n}} vol(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= n vol(B_2^n). \end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\partial B_2^n) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(B_2^n + tB_2^n) - \text{vol}(B_2^n)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}((1+t)B_2^n) - \text{vol}(B_2^n)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^n \text{vol}(B_2^n) - \text{vol}(B_2^n)}{t} \\
 &= n \text{vol}(B_2^n).
 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\text{vol}(\partial K) \geq \text{vol}(\partial B_2^n).$$

■

Κατά τη διαδικασία απόδειξης της Ισοπεριμετρικής Ανισότητας, παίρνουμε και τη γενική έκφραση του Ισοπεριμετρικού Προβλήματος στον  $\mathbb{R}^n$ :

$$\text{vol}(\partial K) \geq n \text{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}} \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}},$$

για κάθε κυρτό σώμα  $K$  (βλ. [6],[1]), απ' όπου εύκολα δίνεται και η αναμενόμενη απάντηση, δηλαδή ότι η ισότητα ισχύει για την Ευκλείδεια, μοναδιαία μπάλα  $B_2^n$ .

Μια εναλλακτική έκφραση του Ισοπεριμετρικού Προβλήματος διατυπώνεται, με δυϊκό τρόπο, ως εξής:

«Ανάμεσα στα κυρτά σώματα με δεδομένο εμβαδόν επιφάνειας, ποιο έχει τον μέγιστο όγκο;»

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε κυρτό σώμα  $K \in \mathbb{R}^n$  και  $r > 0$ , ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\partial(rK)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(rK + tB_2^n) - \text{vol}(rK)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r^n \text{vol}(K + \frac{t}{r}B_2^n) - r^n \text{vol}(K)}{t} \\
 &= r^n \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \frac{t}{r}B_2^n) - \text{vol}(K)}{t} \\
 &= r^{n-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \frac{t}{r}B_2^n) - \text{vol}(K)}{\frac{t}{r}} \\
 &= r^{n-1} \text{vol}(\partial K).
 \end{aligned}$$

Έτσι, μπορούμε να αποδείξουμε το ισοδύναμο (βλ. [3]):

**Θεώρημα 4.2** (Ισοπεριμετρική Ανισότητα) Έστω κυρτό σώμα  $K \in \mathbb{R}^n$ , για το οποίο ισχύει  $\text{vol}(\partial K) = \text{vol}(\partial B_2^n)$ . Τότε:

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(B_2^n).$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε το

$$\frac{\text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}}}{\text{vol}(K)^{\frac{1}{n}}} \cdot K,$$

το οποίο έχει όγκο:

$$\text{vol} \left( \frac{\text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}}}{\text{vol}(K)^{\frac{1}{n}}} \cdot K \right) = \left[ \left( \frac{\text{vol}(B_2^n)}{\text{vol}(K)} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n \cdot \text{vol}(K) = \text{vol}(B_2^n).$$

Επομένως, από Θεώρημα 4.1, έχουμε:

$$\text{vol} \left[ \partial \left( \frac{\text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}}}{\text{vol}(K)^{\frac{1}{n}}} \cdot K \right) \right] \geq \text{vol}(\partial B_2^n).$$

Αξιοποιώντας την παρατήρηση που προηγήθηκε του Θεωρήματος 4.2, προκύπτει ότι:

$$\left( \frac{\text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}}}{\text{vol}(K)^{\frac{1}{n}}} \right)^{n-1} \text{vol}(\partial K) \geq \text{vol}(\partial B_2^n),$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{\text{vol}(B_2^n)}{\text{vol}(K)} \geq 1,$$

αφού  $\text{vol}(\partial K) = \text{vol}(\partial B_2^n)$ . Άρα,

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(B_2^n).$$

■

## Η Αντίστροφη Ισοπεριμετρική Ανισότητα

Όπως είδαμε, η Ισοπεριμετρική Ανισότητα εξασφαλίζει ένα «κάτω φράγμα» για την επιφάνεια κυρτών σωμάτων με δεδομένο όγκο. Συγκεκριμένα, αυτό το κάτω φράγμα δίνεται από την μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα. Θα μπορούσε κανείς να αντιστρέψει κάπως το πρόβλημα, θέτοντας το εξής ερώτημα:

«Μεταξύ των κυρτών σωμάτων με σταθερό όγκο, υπάρχει κάποιο με τη μέγιστη επιφάνεια;»

Η απάντηση είναι αρνητική. Ένα απλό παράδειγμα από τον  $\mathbb{R}^2$  είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με πλευρές  $n$  και  $\frac{1}{n}$ . Εύκολα παρατηρούμε ότι ενώ το εμβαδόν του είναι σταθερό και ίσο με 1, η περίμετρος του  $2(n + \frac{1}{n})$  είναι απεριόριστα μεγάλη. Παρόμοιο παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε στις  $n$  διαστάσεις, παίρνοντας τον υπερκύβο με τις ακμές του πολύ μεγάλες και μια εξ αυτών πολύ μικρή, ώστε να διατηρείται ο όγκος του ίσος με 1 αλλά η επιφάνειά του να μεγαλώνει ανεξέλεγκτα. Συνεπώς, το πρόβλημα θα πρέπει να διατυπωθεί με διαφορετικό τρόπο. Η διαίσθηση οδηγεί στο να θεωρήσουμε κλάσεις σωμάτων, εφαρμόζοντας γραμμικούς μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτο τον όγκο.

Τότε το πρόβλημα μπορεί να τεθεί ως εξής:

«Δεδομένου ενός κυρτού σώματος, πόσο μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την επιφάνειά του μέσω ενός τέτοιου γραμμικού μετασχηματισμού;»

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα μετατοπίζεται στο να προσδιορίσουμε τον μετασχηματισμό  $T$  ή καλύτερα την εικόνα  $\hat{K} = T(K)$  του σώματος  $K$  μέσω αυτού του μετασχηματισμού (βλ. [4]).

Όπως θα φανεί παρακάτω, ο μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι εκείνος που, για παράδειγμα απεικονίζει ένα οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο στον κύβο  $Q_n = [-1, 1]^n$ , ο οποίος έχει όγκο  $2^n$ . Αυτό που θα παίζει κύριο ρόλο στην επίλυση του Αντίστροφου Ισοπεριμετρικού Προβλήματος είναι η λεγόμενη «θέση» του κυρτού σώματος στον  $\mathbb{R}^n$ , όπως διατυπώνεται στον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 4.2** (Θέση Κυρτού Σώματος) Θέση ενός κυρτού σώματος  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται οποιοδήποτε σύνολο της μορφής  $x_0 + T(K)$ , όπου  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  και  $T \in GL(n)$ , όπου  $GL(n)$  η γενική γραμμική ομάδα των  $n \times n$  πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα.

Ταυτίζουμε, μ' αυτόν τον τρόπο, κάθε σώμα με την κλάση των θέσεών του, υπό την έννοια ότι τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά δεν αλλοιώνονται από μεταφορές, στροφές και ανακλάσεις.

Το συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξουμε, είναι πως η θέση που επιλύει την Αντίστροφη Ισοπεριμετρική Ανισότητα είναι η Θέση του John, δηλαδή ο μετασχηματισμός που καθιστά την μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα ως το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου του σώματος  $K$ .

Προς το παρόν, επειδή θα χρειαστούμε ως βασικό εργαλείο την Ανισότητα Brascamp-Lieb, την οποία θα διατυπώσουμε στη συνέχεια, θα δώσουμε λίγο χώρο στην παρουσίαση μιας σειράς γνωστών, βασικών ανισοτήτων, κάθε μια από τις οποίες αποτελεί υπό μια έννοια γενίκευση των προηγούμενων.

Ξεκινάμε από την Ανισότητα Cauchy-Schwarz, που διατυπώνεται ως εξής:

**Η Ανισότητα Cauchy-Schwarz** Έστω δύο διανύσματα  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Τότε, ισχύει:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2,$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^n$  και  $\|\cdot\|$  η αντίστοιχη νόρμα.

Βλέπουμε ότι η Ανισότητα Cauchy-Schwarz δίνει ένα κάτω φράγμα για το γινόμενο των νορμών δύο διανυσμάτων.

Στη συνέχεια, έχουμε την Ανισότητα Hölder:

**Η Ανισότητα Hölder** Έστω  $p, q \in [1, +\infty]$ , με  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Τότε, για δύο οποιαδήποτε στοιχεία  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  του  $\mathbb{R}^n$ , ισχύει ότι:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

όπου  $\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  η  $p$ -νόρμα στον  $\mathbb{R}^n$ . Παρατηρούμε ότι η Ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει από τη Hölder για  $p = q = 2$ .

Η Ανισότητα Hölder γενικεύεται και για ακολουθίες, και παίρνει την μορφή:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

όπου  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  και  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ακολουθίες στο  $\mathbb{R}$  ή το  $\mathbb{C}$ . Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη νόρμα στον  $l^p$ , καταλήγουμε στην ισοδύναμη μορφή:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$



Υπενθυμίζουμε την αντίστοιχη έκφραση της Ανισότητας Hölder για ολοκληρώματα:

$$\int_S |f(x)g(x)|dx \leq \left( \int_S |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_S |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

όπου  $S$  μετρήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , εφοδιασμένου με το μέτρο Lebesgue και  $f, g$  μετρίσιμες συναρτήσεις στο  $S$ . Ομοίως, μέσω της νόρμας  $\|f\|_p = \left( \int_S |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$  προκύπτει:

$$\int_S |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Οι παραπάνω ανισότητες έχουν κάτι κοινό: συνδέουν ανισοτικά το γινόμενο των νορμών στοιχείων από αντίστοιχους χώρους με το «άνθροισμα» των γινομένων των στοιχείων που παίρνουν μέρος. Προχωρώντας, έχουμε μια γενίκευση της Ανισότητας Hölder, την Ανισότητα Loomis-Whitney.

**Η Ανισότητα Loomis-Whitney** Για οποιαδήποτε διάσταση  $n \geq 2$  και για κάθε  $1 \leq j \leq n$  θεωρούμε τις προβολές:

$$p_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$

με

$$p_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \widehat{x}_j$$

και ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$g_j : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, +\infty),$$

όπου  $g_j \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Τότε, ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n g_j(p_j(x)) dx \leq \prod_{j=1}^n \|g_j\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

ή ισοδύναμα, θέτωντας

$$f_j(x) = g_j(x)^{n-1},$$

προκύπτει:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j(p_j(x))^{\frac{1}{n-1}} dx \leq \prod_{j=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j(\widehat{x}_j) d\widehat{x}_j \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Βλέπουμε ότι η παραπάνω ανισότητα συνδέει το ολοκλήρωμα ενός γινομένου συναρτήσεων με το γινόμενο νορμών στον αντίστοιχο χώρο.

Φτάνουμε, λοιπόν στην διατύπωση της Ανισότητας Brascamp-Lieb. Εδώ θα παρουσιάσουμε πρώτα την ανισότητα στη γενική της μορφή (βλ. [12]) και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη «μονοδιάστατη» έκφραση της ανισότητας.

**Η Ανισότητα Brascamp-Lieb** Έστω  $m, n \in \mathbb{N}$ , πραγματικοί αριθμοί  $c_j > 0$  και  $n_j \in \mathbb{N}$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ , με

$$\sum_{j=1}^m c_j n_j = n.$$

Θεωρούμε επιπλέον  $f_j \in L_1(\mathbb{R})$ , με  $f_j > 0$  για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$  και γραμμικές απεικονίσεις  $B_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ , οι οποίες είναι επί. Τότε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(B_j x)^{c_j} dx \leq D^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j(y) dy \right)^{c_j},$$

όπου,

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j B_j^t A_j B_j \right)}{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}} : A_j \text{ θετικά ορισμένοι } n_j \times n_j \text{ πίνακες} \right\}.$$

Όπως διαπιστώνουμε, η Ανισότητα Brascamp-Lieb γενικεύει την Ανισότητα Loomis-Whitney, αντικαθιστώντας τις προβολές  $p_j$  με οποιεσδήποτε γραμμικές απεικονίσεις.

Στην περίπτωση όπου θέσουμε  $n_j = 1$  για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ , τότε οι θετικά ορισμένοι πίνακες  $A_j$  εκφυλίζονται στους πραγματικούς, έστω  $\lambda_j > 0$ . Επιπλέον, οι πίνακες  $B_j^t$  είναι πλέον διανύσματα, έστω  $u_j \in \mathbb{R}^n$ , δηλαδή ως γραμμικές απεικονίσεις είναι οι:

$$B_j^t(a) = au_j, \quad a \in \mathbb{R},$$

ενώ  $B_j = u_j^t$ . Συνεπώς, έχουμε  $B_j^t A_j B_j = \lambda_j u_j u_j^t$ , ή ισοδύναμα,  $B_j^t A_j B_j = \lambda_j u_j \otimes u_j$ . Έτσι προκύπτει η «μονοδιάστατη» Ανισότητα Brascamp-Lieb.

**Η «μονοδιάστατη» Ανισότητα Brascamp-Lieb** Έστω  $m, n \in \mathbb{N}$  και πραγματικοί αριθμοί  $c_j > 0$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ , με

$$\sum_{j=1}^m c_j = n.$$

Θεωρούμε επιπλέον  $f_j \in L_1(\mathbb{R})$ , με  $f_j > 0$  για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ . Αν  $u_j \in \mathbb{R}^n$  για  $j = 1, 2, \dots, m$ , τότε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) \right) dx \leq D^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{c_j},$$

όπου

$$D = \inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\},$$

$u_j \otimes u_j = uu^t$  και  $u_j \otimes u_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , με  $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j \rangle u_j$  η προβολή του  $x \in \mathbb{R}^n$  στη διεύθυνση των  $u_j$ . Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω infimum «επιτυγχάνεται» όταν οι  $f_j$  είναι Γκαουσιανές συναρτήσεις, της μορφής:

$$f_j(t) = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\pi}} e^{-\lambda_j t^2},$$

για τις οποίες ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt = 1.$$

Το κύριο αποτέλεσμα που έχει ενδιαφέρον στην παρούσα παρουσίαση, είναι πως αν τα διανύσματα  $u_j$  «συμπεριφέρονται» όπως τα σημεία επαφής ενός κυρτού σώματος και του ελλειψοειδούς μεγίστου όγκου, ικανοποιούν δηλαδή τις συνθήκες του θεωρήματος του John, τότε η σταθερά  $D$  της ανισότητας Brascamp-Lieb ισούται με 1 (βλ. [7]).

**Πρόταση 4.1** Αν  $u_1, u_2, \dots, u_m \in S^{n-1}$  και  $c_1, c_2, \dots, c_m > 0$ , για τα οποία ισχύει:

$$Id = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j,$$

τότε:

$$\sup \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx}{\prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} g_j(t) dt \right)^{c_j}} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\} = \inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} = 1.$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε  $g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}$ , με  $j = 1, 2, \dots, m$ . Τότε,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( - \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( - \left\langle \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) (x), x \right\rangle \right) dx \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}}. \end{aligned}$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} g_j(t) dt \right)^{c_j} &= \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda_j t^2) dt \right)^{c_j} \\ &= \prod_{j=1}^m \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}} \right)^{c_j} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}, \end{aligned}$$

αφού  $c_1 + c_2 + \dots + c_m = n$ . Συνεπώς,

$$\inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} = \inf \left\{ \left( \frac{\prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} g_j(t) dt \right)^{c_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx} \right)^2 : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι η παραπάνω σταθερά ισούται με 1. Έστω  $\lambda_j > 0$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ . Για κάθε υποσύνολο  $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  με πληθάρημο  $|I| = n$ , ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\lambda_I = \prod_{j \in I} \lambda_j \text{ και } U_I \left( \det \left( \sum_{j \in I} c_j u_j \otimes u_j \right) \right)^2.$$

Από την ταυτότητα Cauchy-Binet προκύπτει ότι:

$$\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) = \det \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j (\sqrt{c_j} u_j) \otimes (\sqrt{c_j} u_j) \right) = \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I.$$

Θέτοντας  $\lambda_j = 1$  στην παραπάνω ισότητα, παίρνουμε:

$$\sum_{|I|=n} U_I = 1.$$

Επιπλέον, μέσω της ανισότητας Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου, έχουμε:

$$\sum_{|I|=n} \lambda_I U_I \geq \prod_{|I|=n} \lambda_I^{U_I} = \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\sum_{\{I:j \in I\}} U_I}.$$

Εφαρμόζοντας για μια ακόμα φορά την ταυτότητα Cauchy-Binet, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{\{I:j \in I\}} U_I &= \sum_{|I|=n} U_I - \sum_{\{I:j \notin I\}} U_I \\ &= 1 - \det \left( Id - (\sqrt{c_j} u_j) \otimes (\sqrt{c_j} u_j) \right) \\ &= 1 - (1 - c_j |u_j|^2) \\ &= c_j. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right) \geq \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j},$$

και άρα:

$$\inf \left\{ \frac{\det \left( \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\} \geq 1.$$

Επιλέγοντας  $\lambda_j = 1$ , προκύπτει η ισότητα. ■

Συνεπώς, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 4.3** (Ball) Έστω  $u_1, u_2, \dots, u_m \in S^{n-1}$  και  $c_1, c_2, \dots, c_m > 0$ , για τα οποία ισχύει:

$$Id = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Αν οι  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  είναι μετρίσιμες συναρτήσεις, τότε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle)^{c_j} dx \leq \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(y) dy \right)^{c_j}.$$

Η παραπάνω ειδική μορφή της μονοδιάστατης Brascamp-Lieb αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως η «γεωμετρική» Brascamp-Lieb (με σταθερά  $D$  της ανισότητας Brascamp-Lieb ίση με 1).

Μετά από αυτή την περιγραφή και με δεδομένο πλέον το συμπέρασμα του Θεωρήματος (4.3), είμαστε σε θέση να δώσουμε απάντηση στο Αντίστροφο Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα.

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα  $K$  στη θέση του John. Δηλαδή, υπάρχουν σημεία επαφής  $u_i$  με  $i = 1, \dots, m$  της μπάλας  $B_2^n$  και του  $\partial K$  και θετικοί αριθμοί  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , έτσι ώστε:

$$Id = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$$

και, όπως έχουμε δει:

$$\sum_{j=1}^m c_j = n.$$

Γι' αυτά τα  $u_j$ , ορίζουμε το

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_j \rangle| \leq 1 \text{ για κάθε } 1 \leq j \leq m\}.$$

Πρόφανώς,  $K \subset C$ . Θα δείξουμε ότι:

$$\text{vol} C \leq 2^n.$$

Θεωρούμε ως  $f_j$  τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις του διαστήματος  $[-1, 1]$ . Τότε, η συνάρτηση:

$$f(x) = \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle)^{c_j}$$

είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $C$ . Συνεπώς, εφαρμόζοντας την «γεωμετρική έκφραση» της ανισότητας Brascamp-Lieb έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{vol} C &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle)^{c_j} dx \\ &\leq \prod_{j=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_j(y) dy \right)^{c_j} \\ &\leq \prod_{j=1}^m 2^{c_j} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Το γενικό ,λοιπόν, συμπέρασμα, στο οποίο καταλήγουμε, είναι το εξής:

«Μεταξύ όλων των κυρτών, κεντρικά συμμετρικών σωμάτων που βρίσκονται στη θέση του John, ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο.»

# Κεφάλαιο 5

## Το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου

Η συγκέντρωση του μέτρου αποτελεί κύριο φαινόμενο στον κλάδο της ασυμπτωτικής γεωμετρικής ανάλυσης και παρά το γεγονός ότι στην γενική του μορφή ανακαλύφθηκε μόλις τη δεκαετία του '60, συναντάται σε πολλές εφαρμογές της γεωμετρίας, της ανάλυσης, των πιθανοτήτων και των διακριτών μαθηματικών.

Θα προσεγγίσουμε τη συγκέντρωση του μέτρου μέσα από κλασικά παραδείγματα ισοπεριμετρικών ανισοτήτων σε μετρικούς χώρους πιθανότητας, και συγκεκριμένα στη σφαίρα και στον χώρο Gauss (βλ. [4],[3],[6],[10],[11]).

### 5.1 $\varepsilon$ -περιοχές και το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου

Θα χρειαστούμε για τα επόμενα έναν γενικό ορισμό που δίνει το γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο παρατηρούμε το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου.

**Ορισμός 5.1** Έστω  $(X, d)$  ένας μετρικός χώρος. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{B}(X)$  την Borel  $\sigma$ -άλγεβρα του  $X$ . Για κάθε μη κενό  $A \in \mathcal{B}(X)$  και κάθε  $\varepsilon > 0$ , ορίζουμε ως

$$A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\},$$

την  $\varepsilon$ -περιοχή του  $A$ .

Ως απόσταση του σημείου  $x$  από το  $A$  ορίζουμε την Ευκλείδεια απόσταση:

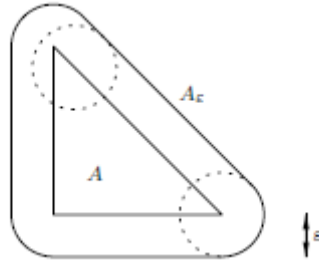
$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\|_2 : a \in A\}.$$

Προφανώς, για κάθε  $\varepsilon > 0$  ισχύει ότι:

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon B_2^n,$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το άθροισμα Minkowski. Η  $\varepsilon$ -περιοχή του  $A$  περιέχει όλα τα σημεία που απέχουν απόσταση το πολύ  $\varepsilon$  από το  $A$ . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση κυρτών σωμάτων στον  $\mathbb{R}^n$ , προκύπτει ότι  $d(x, A) = \min \{\|x - a\| : a \in A\}$ .

Περνάμε τώρα στον εξής ορισμό:



Σχήμα 5.1: Η  $\varepsilon$ -περιοχή του σώματος  $A$ .

**Ορισμός 5.2** Έστω  $(X, d)$  ένας μετρικός χώρος και ένα μέτρο  $\mu$  στην Borel  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{B}(X)$  του  $X$ . Ορίζουμε ως επιφάνεια του Borel υποσυνόλου  $A$  του  $X$  ως προς  $\mu$ , το όριο

$$\mu^+(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(A_\varepsilon \setminus A)}{\varepsilon}.$$

Στην περίπτωση μετρικών χώρων πιθανότητας, έχουμε  $\mu(A) < \infty$  για κάθε  $A$  Borel υποσύνολο του  $X$ , οπότε το παραπάνω όριο γράφεται:

$$\mu^+(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}.$$

Επιπλέον, αν  $A$  κυρτό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$ , τότε το  $\liminf$  είναι όριο και όπως έχουμε ήδη δει (Ορισμός 4.1):

$$\text{vol}(\partial A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(A_\varepsilon) - \text{vol}(A)}{\varepsilon}.$$

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να δώσουμε μια κομψή εναλλακτική περιγραφή της Ισοπεριμετρικής Ανισότητας στον  $\mathbb{R}^n$ , μέσω της οποίας θα περάσουμε στη γενικότερη διατύπωση των ισοπεριμετρικών προβλημάτων στους χώρους με τους οποίους θα ασχοληθούμε. Έστω  $A$  κυρτό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$  και  $A_\varepsilon$  μια  $\varepsilon$ -περιοχή του. Αν θεωρήσουμε ως  $B$  μια Ευκλείδεια μπάλα, με  $\text{vol}(A) = \text{vol}(B)$ , τότε, μέσω της Ανισότητας Brunn-Minkowski, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \text{vol}(A_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} &= \text{vol}(A + \varepsilon B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \text{vol}(A)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{vol}(B)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{vol}(rB_2^n)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= r \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= (r + \varepsilon) \text{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{vol}((r + \varepsilon)B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{vol}(rB_2^n + \varepsilon B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{vol}(B + \varepsilon B_2^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \text{vol}(B_\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\text{vol}(A_\varepsilon) \geq \text{vol}(B_\varepsilon) \text{ για κάθε } \varepsilon > 0.$$

Η παραπάνω ανισότητα ουσιαστικά δείχνει ότι αν διογκώσουμε ένα σύνολο στον  $\mathbb{R}^n$  κατά  $\varepsilon$ , χρησιμοποιώντας τη μετρική, τότε θα αυξήσουμε τον όγκο του τουλάχιστον τόσο, όσο θα αυξάνονταν κατά το ίδιο ποσό μια Ευκλείδεια μπάλα.

Η ισοδύναμη αυτή έκφραση της γνωστής ισοπεριμετρικής ανισότητας στον  $\mathbb{R}^n$ , διευρύνει το πλαίσιο, δίνοντας την γενική ιδέα διατύπωσης αντίστοιχων ισοπεριμετρικών ανισοτήτων σε μια σειρά περιπτώσεων. Γενικότερα, σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο πιθανότητας, έχει νόημα να αναζητήσουμε το εξής:

«Για οποιαδήποτε  $0 < a < 1$  και  $\varepsilon > 0$ , ποια σύνολα  $A$  μέτρου  $a$  έχουν  $\varepsilon$ -περιοχές με ελάχιστο μέτρο;»

Στην τυπική του έκφραση, το ισοπεριμετρικό πρόβλημα παίρνει τη μορφή:

«Για δεδομένα  $0 < a < 1$  και  $\varepsilon > 0$ , ποιο είναι το

$$\inf \{ \mu(A_\varepsilon) : A \in \mathcal{B}(X) \text{ με } \mu(A) \geq a \}$$

και για ποια σύνολα  $A$  επιτυγχάνεται;»

Απάντηση στο παραπάνω γενικό πρόβλημα θα δώσουμε μέσα από τα δύο βασικά παραδείγματα χώρων, όπως ειπώθηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου, για μετρικούς χώρους πιθανότητας:

**Ορισμός 5.3** Έστω  $(X, d)$  ένας μετρικός χώρος και ένα μέτρο πιθανότητας  $\mu$  στην Borel σ-άλγεβρα  $\mathcal{B}(X)$  του  $X$ . Θα λέμε ότι στον χώρο παρουσιάζεται το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου αν για οποιοδήποτε Borel σύνολο  $A$  του  $X$ , με  $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$ , η  $\varepsilon$ -περιοχή  $A_\varepsilon$  του  $A$  (για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ ) έχει ασυμπτωτικά «πλήρες» μέτρο.

## 5.2 Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα στον χώρο Gauss

Θεωρούμε τον  $\mathbb{R}^n$ , εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική  $\| \cdot \|_2$  και το μέτρο πιθανότητας  $\gamma_n$ , για το οποίο έχουμε:

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx,$$

για κάθε Borel σύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^n$ .

Το  $\gamma_n$  είναι το  $n$ -διάστατο μέτρο Gauss και ο χώρος πιθανότητας  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2, \gamma_n)$  είναι ο  $n$ -διάστατος χώρος Gauss.

Σημειώνουμε ότι, το  $n$ -διάστατο μέτρο Gauss είναι μέτρο γινόμενο, λόγω του ότι για κάθε σύνολο Borel  $A$  του  $\mathbb{R}^n$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma_n(A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{A_n} \dots \int_{A_2} \int_{A_1} e^{-(x_n^2 + \dots + x_2^2 + x_1^2)/2} dx_n \dots dx_2 dx_1 \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{A_n} e^{-x_n^2/2} dx_n \dots \int_{A_2} e^{-x_2^2/2} dx_2 \int_{A_1} e^{-x_1^2/2} dx_1 \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_n} e^{-x_n^2/2} dx_n \right) \dots \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_2} e^{-x_2^2/2} dx_2 \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1} e^{-x_1^2/2} dx_1 \right) \\ &= \gamma_1(A_n) \otimes \dots \otimes \gamma_1(A_2) \otimes \gamma_1(A_1), \end{aligned}$$



όπου  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , με  $A_1, A_2, \dots, A_n$  Borel σύνολα στον  $\mathbb{R}$ .

Συνεπώς,  $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_1$ . Επιπλέον, το μέτρο Gauss είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Έστω  $T$  ορθογώνιος μετασχηματισμός και  $A$  Borel σύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε:

$$\begin{aligned} \gamma_n(T(A)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{T(A)} e^{-\|x\|_2^2/2} dx \\ &= \frac{|\det T|}{\sqrt{2\pi}^n} \int_A e^{-\|Ty\|_2^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_A e^{-\|y\|_2^2/2} dy \\ &= \gamma_n(A). \end{aligned}$$

Για τον χώρο Gauss ισχύει το παρακάτω θεώρημα, που ανάγει το Ισοπεριμετρικό πρόβλημα στο αντίστοιχο πρόβλημα για τη σφαίρα (βλ. [39]):

**Θεώρημα 5.2.1 (Borell, Sudakov-Tsirelson)** (Ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο Gauss) Έστω  $0 < a < 1$  και  $\theta \in S^{n-1}$ . Θεωρούμε τον ημιχώρο  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \leq \lambda\}$  του  $\mathbb{R}^n$ , με  $\gamma_n(H) = a$ . Τότε, για κάθε  $\varepsilon > 0$  και για κάθε Borel σύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^n$  με  $\gamma_n(A) = a$ , ισχύει:

$$\gamma_n(A_\varepsilon) \geq \gamma_n(H_\varepsilon).$$

Από το παραπάνω θεώρημα, φαίνεται ότι οι λύσεις του ισοπεριμετρικού προβλήματος στον χώρο Gauss είναι οι ημιχώροι και μέσω αυτού αποδεικνύεται η ακόλουθη ανισότητα, η οποία θα φανεί χρήσιμη στη συνέχεια:

**Θεώρημα 5.2.2** Αν  $\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}$ , τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  ισχύει:

$$1 - \gamma_n(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} e^{-\varepsilon^2/2}.$$

**Απόδειξη:** Από το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε ότι:

$$1 - \gamma_n(A_\varepsilon) \leq 1 - \gamma_n(H_\varepsilon),$$

όπου,  $H$  ημίχωρος με  $\mu(H) = \frac{1}{2}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας και λόγω του αναλλοίωτου ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς του μέτρου  $\gamma_n$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\},$$

οπότε,

$$H_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \varepsilon\},$$

η αντίστοιχη  $\varepsilon$ -περιοχή τού. Μέσω της ιδιότητας του  $\gamma_n$  να είναι μέτρο γινόμενο, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma_n(H_\varepsilon) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$1 - \gamma_n(H_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt,$$

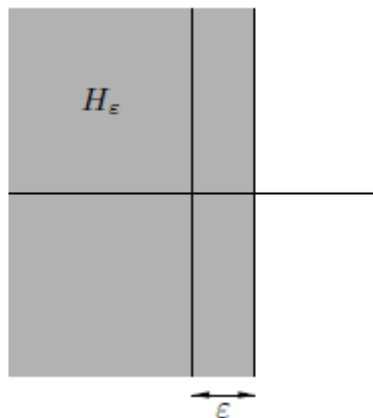
η οποία είναι ορισμένη στο  $[0, +\infty]$  και γνησίως φθίνουσα. Συνεπώς,  $f(\varepsilon) \leq f(0)$  για κάθε  $\varepsilon \geq 0$ . Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) \leq f(0) &\Leftrightarrow e^{\varepsilon^2/2} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\Leftrightarrow \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\Leftrightarrow 1 - \gamma_n(H_\varepsilon) \leq e^{-\varepsilon^2/2}, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$1 - \gamma_n(A_\varepsilon) \leq e^{-\varepsilon^2/2}.$$

■



Σχήμα 5.2: Η  $\varepsilon$ -περιοχή του ημιχώρου  $H$ .

Καταλήγουμε, λοιπόν στην σχέση:

$$\gamma_n(A_\varepsilon) \geq 1 - e^{-\varepsilon^2/2},$$

απόπου φαίνεται ότι η  $\varepsilon$ -περιοχή ενός συνόλου  $A$  με  $\gamma_n(A) = \frac{1}{2}$  έχει «πλήρες μέτρο». Όπως θα δούμε, στην περίπτωση της σφαίρας, στο εκθετικό εμφανίζεται και η διάσταση στην οποία βρισκόμαστε, κάνοντας το αποτέλεσμα πιο ισχυρό.

### 5.3 Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα στη σφαίρα $S^{n-1}$

Στον χώρο  $\mathbb{R}^n$  με την Ευκλείδεια νόρμα, ορίζουμε την μοναδιαία σφαίρα ως το σύνολο:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}.$$

Ορίζουμε σ' αυτό το σύνολο την γεωδαισιακή μετρική  $\rho$ , μέσω της οποίας, η απόσταση δύο σημείων  $x, y \in S^{n-1}$  είναι η κυρτή γωνία  $xOy$  στο επίπεδο που ορίζουν η αρχή των συντεταγμένων και τα σημεία  $x$  και  $y$ . Επιπλέον, αν  $\rho(x, y) = \theta$ , τότε

$$\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2},$$

οπότε, για τη γεωδαισιακή και την Ευκλείδεια απόσταση των  $x, y$  ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\pi} \rho(x, y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x, y).$$

Στο ίδιο σύνολο, ορίζουμε το μέτρο  $\sigma$ : για κάθε  $A$  Borel υποσύνολο του  $S^{n-1}$ , θέτουμε:

$$C(A) = \bigcup_{0 < \lambda < 1} \{\lambda x : x \in A\}$$

και ορίζουμε ως μέτρο (Haar) (το οποίο υπάρχει και είναι μοναδικό), το:

$$\sigma(A) = \frac{|C(A)|}{|B_2^n|},$$

το οποίο είναι μέτρο πιθανότητας και επιπλέον αφήνει αναλλοίωτους τους ορθωγώνιους μετασχηματισμούς. Ως  $|C(A)|$  θεωρούμε το  $n$ -διάστατο μέτρο Lebesgue του  $C(A)$ . Ο χώρος  $(S^{n-1}, \rho, \sigma)$  είναι μετρικός χώρος πιθανότητας.

Η Ισοπεριμετρική Ανισότητα στη σφαίρα διατυπώνεται στο εξής θεώρημα (βλ. [36]):

**Θεώρημα 5.3.1 (Levy, Schmidt)** (Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα) Έστω  $0 < a < 1$  και

$$B(x, r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x, y) \leq r\}$$

για μπάλα στον  $S^{n-1}$  ακτίνας  $r > 0$  με  $\sigma(B(x, r)) = a$ . Τότε, για κάθε  $\varepsilon > 0$  και για κάθε Borel σύνολο  $A$  του  $S^{n-1}$  με  $\sigma(A) = a$ , ισχύει:

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq \sigma(B(x, r)_\varepsilon) = \sigma(B(x, r + \varepsilon)).$$

Με άλλα λόγια, οι γεωδαισιακές μπάλες αποτελούν τις λύσεις του ισοπεριμετρικού προβλήματος στον  $S^{n-1}$ .

Παραλείποντας την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, μπορούμε να σταθούμε σε μια ειδική περίπτωση: αν θεωρήσουμε ένα Borel σύνολο  $A$  του  $S^{n-1}$  με  $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ , τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  έχουμε - χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισοπεριμετρική ανισότητα στην  $S^{n-1}$  - ότι:

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)).$$

Με άλλα λόγια, κάθε  $\varepsilon$ -περιοχή του  $A$  έχει μέτρο που φράσσεται από κάτω από το μέτρο της αντίστοιχης επέκτασης κάποιου ημισφαιρίου.

Προκειμένου να οδηγηθούμε σε μια ακόμα πιο ακριβή έκφραση της παραπάνω διαπίστωσης, χρειαζόμαστε τα παρακάτω λήμματα (βλ. [3]):

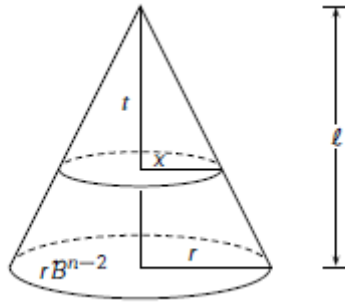
**Λήμμα 5.3.1** Ο όγκος ενός ορθού κώνου  $C$  στον  $\mathbb{R}^{n-1}$ , με βάση  $rB_2^{n-2}$  και ύψος  $l$ , είναι ίσος με:

$$\text{vol}_n(C) = \frac{l}{n-1} \text{vol}_{n-2}(rB_2^{n-2}).$$

**Απόδειξη:** Αρχικά, θεωρούμε τις παράλληλες προς τη βάση τομές υπερεπιπέδων με τον κώνο. Αυτές είναι μπάλες διάστασης  $n-2$  και ακτίνας  $x$ . Από την ομοιότητα τριγώνων, κάθε τέτοια μπάλα, η οποία απέχει απόσταση  $t$  από την κορυφή του κώνου, θα έχει ακτίνα  $x = \frac{rt}{l}$ . Ολοκληρώνοντας τους όγκους των τομών για  $0 \leq t \leq l$  έχουμε για τον όγκο του  $C$  ότι:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(C) &= \int_0^l \text{vol}_{n-2}\left(\frac{rt}{l}B_2^{n-2}\right) dt \\ &= \frac{1}{l^{n-2}} \text{vol}_{n-2}(rB_2^{n-2}) \int_0^l t^{n-2} dt \\ &= \frac{1}{l^{n-2}} \text{vol}_{n-2}(rB_2^{n-2}) \frac{l^{n-1}}{n-1} \\ &= \frac{l}{n-1} \text{vol}_{n-2}(rB_2^{n-2}). \end{aligned}$$

■



Σχήμα 5.3: Υπολογισμός του όγκου του ορθού κώνου.

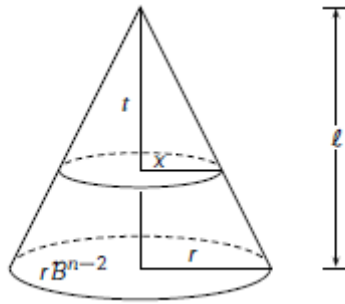
Με βάση το προηγούμενο λήμμα, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού κώνου  $C$  στον  $\mathbb{R}^n$ .

**Λήμμα 5.3.2** Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού κώνου  $C$  στον  $\mathbb{R}^n$ , με βάση  $rB_2^{n-1}$  και μήκος γενέτειρας  $l$ , είναι ίσο με:

$$lr^{n-2} \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}).$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε τους στοιχειώδεις κώνους διάστασης  $n-1$ , ύψους  $l$  και βάσης  $ds$  πάνω στην επιφάνεια του ορθού κώνου. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, κάθε ένας από αυτούς, έχει όγκο  $\frac{l}{n-1} ds$ . Ολοκληρώνοντας τους όγκους των στοιχειωδών κώνων πάνω στην «περιφέρεια» της βάσης του ορθού κώνου, δηλαδή πάνω στη σφαίρα  $rS^{n-2}$ , το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός ορθού κώνου  $C$  είναι:

$$\begin{aligned} \int_{rS^{n-2}} \frac{l}{n-1} ds &= \frac{l}{n-1} \text{vol}_{n-2}(rS^{n-2}) \\ &= \frac{l}{n-1} r^{n-2} (n-1) \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}) \\ &= lr^{n-2} \text{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}). \end{aligned}$$



Σχήμα 5.4: Υπολογισμός του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας του ορθού κώνου.

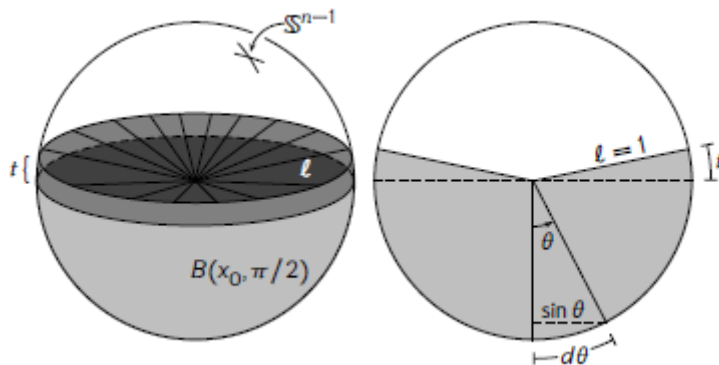
Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το μέτρο γεωδαισιακών μπαλών πάνω στην Ευκλείδεια, μοναδιαία σφαίρα του  $\mathbb{R}^n$ .

**Λήμμα 5.3.3** Για κάθε  $x_0 \in S^{n-1}$  στον  $\mathbb{R}^n$  και κάθε  $\varepsilon \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ισχύει:

$$\sigma(B(x_0, \varepsilon + \frac{\pi}{2})) = \frac{\int_0^{\varepsilon + \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}.$$

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $x_0 = -e_n$ . Βάσει του ορισμού του μέτρου  $\sigma$ , και προκειμένου να υπολογίσουμε τον όγκο του  $C(B(x_0, \varepsilon + \frac{\pi}{2}))$ , αρκεί να ολοκληρώσουμε τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των κώνων που σχηματίζουν γωνία  $\theta$  με το  $-e_n$  (δηλαδή τον αρνητικό ημιάξονα  $n$ ), για  $0 \leq \theta \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2}$ . Στη συνέχεια, θα διαιρέσουμε με το ίδιο ολοκλήρωμα από 0 έως  $\pi$ . Αφού ο κώνος που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το  $-e_n$  έχει μήκος γενέτειρας 1 και ακτίνα βάσης  $\sin \theta$ , σύμφωνα με το Λήμμα 5.3.2, θα έχουμε ότι:

$$\sigma(B(x_0, \varepsilon + \frac{\pi}{2})) = \frac{\int_0^{\varepsilon + \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\theta) d\theta}.$$



Σχήμα 5.5: Υπολογισμός του  $\sigma(B(x_0, \varepsilon + \frac{\pi}{2}))$ .

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε μια βασική ιδιότητα των ολοκληρωμάτων του τύπου:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\theta) d\theta$$

ή

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta) d\theta,$$

γνωστά και ως ολοκληρώματα Wallis. Αποδεικνύεται με παραγοντική ολοκλήρωση ότι για κάθε  $n \geq 2$  ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα, ο τύπος του παραπάνω Λήμματος μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\sigma(B(x_0, \varepsilon + \frac{\pi}{2})) = \frac{\int_0^{\varepsilon + \frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n(\theta) d\theta}.$$

Είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το εξής:

**Θεώρημα 5.3.2** Έστω ένα Borel σύνολο  $A$  του  $S^{n-1}$  με  $\sigma(A) = \frac{1}{2}$  και έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε,

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

**Απόδειξη:** Από την ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα, αρκεί να βρούμε ένα κάτω φράγμα για το  $\sigma(B(x, \varepsilon + \frac{\pi}{2}))$ . Έχουμε ότι:

$$\sigma(B(x, \varepsilon + \frac{\pi}{2})) = \frac{\int_0^{\varepsilon + \frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n(\theta) d\theta}.$$

Θέτουμε  $h(\varepsilon, n) = 1 - \sigma(B(x, \varepsilon + \frac{\pi}{2}))$ , οπότε προκύπτει ότι:

$$h(\varepsilon, n) = \frac{\int_{\varepsilon + \frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n(\theta) d\theta}.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$  έχουμε:

$$h(\varepsilon, n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^n(\varphi) d\varphi}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varphi) d\varphi} = \frac{\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varphi) d\varphi}{2I_n},$$

όπου

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varphi) d\varphi.$$

Θέτοντας  $s = \varphi\sqrt{n}$ , παίρνουμε:

$$h(\varepsilon, n) = \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(s/\sqrt{n}) ds.$$

Μελετώντας τη μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = e^{x^2/2} \cos x - 1$  στο  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα), παρατηρούμε ότι:

$$\cos x \leq e^{-x^2/2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} h(\varepsilon, n) &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-(s/\sqrt{n})^2 n/2} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-s^2/2} ds. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $t = s - \varepsilon\sqrt{n}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon, n) &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\sqrt{n}} e^{-(t+\varepsilon\sqrt{n})^2/2} dt \\ &\leq \frac{e^{-\varepsilon^2 n/2}}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n}I_n} e^{-\varepsilon^2 n/2}. \end{aligned}$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι  $\sqrt{n}I_n \geq 1$  για κάθε  $n \geq 1$ . Από την αναδρομική σχέση  $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$  που ισχύει για τα ολοκληρώματα Wallis, έχουμε ότι  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ , οπότε:

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2} \frac{n+1}{n+2} I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} I_n \geq \sqrt{n}I_n.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi = 1 \geq 1$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) d\varphi = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \geq 1.$$

Συνεπώς, η  $\sqrt{n}I_n \geq 1$  ισχύει για κάθε  $n \geq 1$  και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

## 5.4 Το φαινόμενο της συγκέντρωσης και οι Ισοπεριμετρικές Ανισότητες

Όπως φάνηκε από τη μελέτη των δύο βασικών χώρων, η απάντηση στα Ισοπεριμετρικά Προβλήματα έφερε στο φως την εμφάνιση του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου. Θα κλείσουμε το κεφάλαιο, προχωρώντας προς την αντίθετη κατεύθυνση, αναδεικνύοντας την άρρηκτη σχέση που έχει η συγκέντρωση του μέτρου σε έναν μετρικό χώρο πιθανότητας με τις ισοπεριμετρικές ανισότητες (βλ. [2],[4]). Το σχετικό Θεώρημα είναι το εξής (βλ. [28]):

**Θεώρημα 5.4.1** (Maurey) Έστω  $A$  ένα μη κενό Borel υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n \leq \frac{1}{\gamma_n(A)},$$

όπου  $d(x, A)$  η Ευκλείδεια απόσταση του  $x$  από το  $A$  και  $\gamma_n$  το  $n$ -διάστατο μέτρο Gauss.

**Απόδειξη:** Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{d(x,A)^2/4} f_{\gamma_n}, \quad g(x) = 1_A(x) f_{\gamma_n}, \quad h(x) = f_{\gamma_n},$$

όπου  $f_{\gamma_n}$  η πυκνότητα του μέτρου  $\gamma_n$ . Παίρνουμε  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου και το γεγονός ότι  $d(x, A) \leq \|x - y\|_2$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n f(x)g(x) &= e^{d(x,A)^2/4} e^{-\|x\|_2^2/2} e^{-\|y\|_2^2/2} \\ &\leq \exp\left(\frac{\|x-y\|_2^2}{4} - \frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|y\|_2^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\|x+y\|_2^2}{4}\right) \\ &= \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2\right)\right)^2 \\ &= (2\pi)^n \left(h\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις  $f, g, h$  ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Prékopa-Leindler για  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Επομένως, προκύπτει ότι:

$$1 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} h\right)^2 \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right) = \gamma_n(A) \int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/2} d\gamma_n,$$

δηλαδή το ζητούμενο. ■

Από το παραπάνω θεώρημα, εύκολα καταλήγουμε σε μία ανισότητα όμοια με εκείνη του Θεωρήματος 5.2.2, με διαφοροποιημένες σταθερές:

**Πόρισμα 5.4.1** Έστω  $A$  ένα μη κενό Borel υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , με  $\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}$ . Τότε,

$$1 - \gamma_n(A_\varepsilon) \leq 2e^{-\varepsilon^2/4}.$$

**Απόδειξη:** Με βάση το προηγούμενο Θεώρημα και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov, έχουμε:

$$2 \geq \int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/2} d\gamma_n \geq e^{\varepsilon^2 n/4} \gamma_n(\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \geq \varepsilon\}),$$

ή ισοδύναμα

$$2e^{-\varepsilon^2 n/4} \geq 1 - \gamma_n(A_\varepsilon),$$

δηλαδή αυτό που θέλουμε.





Ακριβώς με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται η σχέση που έχει η εμφάνιση του φαινομένου της συγκέντρωσης στην Ευκλείδεια σφαίρα με την αντίστοιχη Ισοπεριμετρική Ανισότητα. Θα καταλήξουμε, δηλαδή, στην σχέση του Θεωρήματος 5.3.2, χωρίς να «περάσουμε» από την Ισοπεριμετρική Ανισότητα, δίνοντας μια ισοδύναμη σχέση με εξαίρεση μονάχα κάποιες σταθερές. Χρειαζόμαστε το εξής:

**Λήμμα 5.4.1** Έστω  $\mu$  το ομοιόμορφο μέτρο μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια μπάλα  $B_2^n$ : για κάθε Borel σύνολο  $A \subseteq B_2^n$  ισχύει ότι  $\mu(A) = \text{vol}(A)/\text{vol}(B_2^n)$ . Επιπλέον, για οποιαδήποτε Borel σύνολα  $A, C \subseteq B_2^n$  ορίζουμε:

$$d(A, C) = \min \{ \|a - c\|_2 : a \in A, c \in C \} = \rho > 0.$$

Τότε,

$$\min \{ \mu(A), \mu(C) \} \leq e^{-\rho^2 n/8}.$$

**Απόδειξη:** Θεωρούμε το σύνολο  $(A + C)/2$  και εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική μορφή της Ανισότητας Brunn-Minkowski προκύπτει ότι:

$$\text{vol} \left( \frac{A + C}{2} \right) \geq \text{vol}(A)^{1/2} \text{vol}(C)^{1/2}.$$

Συνεπώς, διαιρώντας με τον όγκο  $\text{vol}(B_2^n)$ , προκύπτει:

$$\mu \left( \frac{A + C}{2} \right) \geq \mu(A)^{1/2} \mu(C)^{1/2} \geq \min \{ \mu(A), \mu(C) \}.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έχουμε:

$$\|a + c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a - c\|_2^2 \leq 4 - \rho^2,$$

οπότε,

$$\left\| \frac{a + c}{2} \right\|_2 \leq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}},$$

για κάθε  $a \in A$  και  $c \in C$ . Δηλαδή:

$$\frac{1}{2} (A + C) \subseteq \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} B_2^n.$$

Επομένως, κάνοντας χρήση της ανισότητας Bernoulli, στη μορφή  $\log(1 - \lambda) \leq -\lambda$ , προκύπτει:

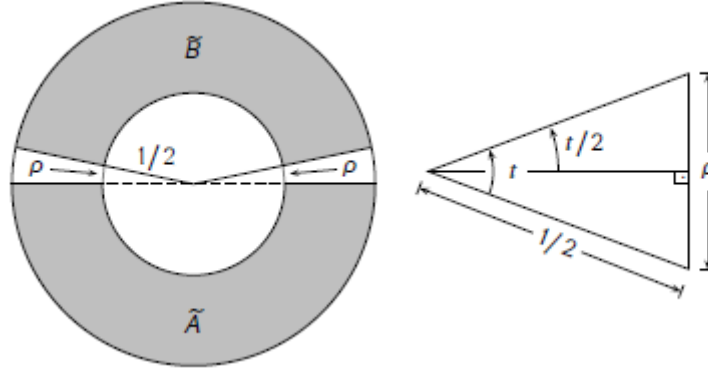
$$\min \{ \mu(A), \mu(C) \} \leq \mu \left( \frac{A + C}{2} \right) \leq \left( \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} \right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} \log \left( 1 - \frac{\rho^2}{4} \right)} \leq e^{-\rho^2 n/8}.$$



Με δεδομένο το προηγούμενο Λήμμα, προκύπτει το εξής:

Έστω  $A \subseteq S^{n-1}$  με  $\sigma(A) = \frac{1}{2}$  και έστω  $\varepsilon > 0$ . Θέτουμε  $B = S^{n-1}/A_\varepsilon$  και θεωρούμε τα υποσύνολα της  $B_2^n$ :

$$\tilde{A} = \{ \lambda a : a \in A \text{ και } 1/2 \leq \lambda \leq 1 \} \quad \text{και} \quad \tilde{B} = \{ \lambda b : b \in B \text{ και } 1/2 \leq \lambda \leq 1 \}.$$


 Σχήμα 5.6: Υπολογισμός του  $d(\tilde{A}, \tilde{B})$ .

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.6, ισχύει ότι:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Έτσι, από το Λήμμα 5.4.1, έχουμε:

$$\mu(\tilde{B}) \leq e^{-\rho^2 n/8} \leq e^{-\varepsilon^2 n/8\pi^2}.$$

Από την άλλη, έχουμε:

$$\mu(\tilde{B}) = \frac{\text{vol}(\tilde{B})}{\text{vol}(B_2^n)},$$

οπότε,

$$\text{vol}(\tilde{B}) \leq e^{-\varepsilon^2 n/8\pi^2} \text{vol}(B_2^n).$$

Επιπλέον, από τον ορισμό του μέτρου  $\sigma$ , έχουμε ότι:

$$\sigma(B) = \frac{\text{vol}(C(B))}{\text{vol}(B_2^n)},$$

με

$$\begin{aligned} \text{vol}(\tilde{B}) &= \text{vol}(C(B)) - \text{vol}\left(\frac{C(B)}{2}\right) \\ &= \text{vol}(C(B)) - \frac{1}{2^n} \text{vol}(C(B)) \\ &= (1 - 2^{-n}) \text{vol}(C(B)). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$(1 - 2^{-n}) \text{vol}(C(B)) \leq e^{-\varepsilon^2 n/8\pi^2} \text{vol}(B_2^n),$$

ή ισοδύναμα,

$$\sigma(B) \leq \frac{1}{1 - 2^{-n}} e^{-\varepsilon^2 n/8\pi^2}.$$

Επομένως,

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{1 - 2^{-n}} e^{-\varepsilon^2 n / 8\pi^2},$$

ή

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - 2e^{-\varepsilon^2 n / 8\pi^2},$$

αφού  $1 - 2^{-n} \geq 2^{-1}$ . Δηλαδή προκύπτει μια σχέση της γενικότερης μορφής:

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n},$$

με  $c_1 = 2$  και  $c_2 = 1/(8\pi)^2$ , η οποία διαφέρει από την αντίστοιχη του Θεωρήματος 5.3.2 μόνο κατά τις σταθερές  $c_1$  και  $c_2$ .

# Κεφάλαιο 6

## Το θεώρημα του Dvoretzky

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το Θεώρημα Dvoretzky, ένα αποτέλεσμα το οποίο θεωρείται κύριο στον κλάδο της κυρτής γεωμετρικής ανάλυσης. Η απόδειξή του έγινε από τον Aryeh Dvoretzky το 1961 και αποτέλεσε καταφατική απάντηση σε ένα ερώτημα που τέθηκε από τον Alexander Grothendieck (βλ.[23]). Σε γενικές γραμμές, αυτό που αποδεικνύεται, είναι πως για οποιοδήποτε  $k \in \mathbb{N}$ , κάθε κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα του  $\mathbb{R}^n$ , αρκετά μεγάλης διάστασης, έχει κεντρικές τομές διάστασης  $k$  που είναι σχεδόν ελλειψοειδή. Για παράδειγμα, ενώ τα τετράγωνα και τα παραλληλόγραμμα στον  $\mathbb{R}^2$  δεν προσομοιάζουν ελλείψεις, η τομή ενός κύβου στον  $\mathbb{R}^3$  με ένα επίπεδο, δηλαδή το εξάγωνο «πλησιάζει» περισσότερο την έλλειψη. Μπορούμε διαισθητικά να ανάγουμε το παραπάνω σε μεγαλύτερες διαστάσεις ώστε να αποκτήσουμε μια εικόνα του τι περιγράφει το θεώρημα.

### 6.1 Νόρμες και Κυρτά Σώματα

Βασικό συμπέρασμα που μας ενδιαφέρει στην παρακάτω παρουσίαση, αποτελεί το εξής: κάθε κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$  επάγει την νόρμα:

$$\|x\|_K = \inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda K \}$$

και με τη σειρά του, το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leq 1\},$$

δηλαδή η μοναδιαία μπάλα του χώρου  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ , ταυτίζεται με το σώμα  $K$ . Με δεδομένο ότι οι νόρμες στον  $\mathbb{R}^n$  είναι ισοδύναμες και ότι οι αντίστοιχοι χώροι είναι πλήρεις ως χώροι πεπερασμένης διάστασης, βλέπουμε ότι υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των κεντρικά συμμετρικών κυρτών σωμάτων του  $\mathbb{R}^n$  και των χώρων Banach που ορίζονται στον  $\mathbb{R}^n$ . Έτσι, μπορούμε να ανάγουμε κάθε συμπέρασμα για ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα  $K$  σε συμπέρασμα για τον αντίστοιχο χώρο Banach, του οποίου μοναδιαία μπάλα αποτελεί το  $K$  (βλ. [4]).

Επιπλέον, επειδή μας ενδιαφέρει το «πόσο κοντά» βρίσκεται ο αντίστοιχος υπόχωρος (τομή) με το ελλειψοειδές, θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια της απόστασης μεταξύ δύο χώρων με νόρμα.

**Ορισμός 6.1** (Απόσταση Banach-Mazur) Έστω  $(X, \|\cdot\|_X)$  και  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  δύο χώροι με νόρμα και έστω ότι οι χώροι είναι ισόμορφοι. Τότε ορίζουμε την απόσταση Banach-Mazur των  $X$  και  $Y$  ως εξής:

$$d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| : T : X \rightarrow Y \text{ ισομορφισμός} \},$$

όπου με  $\|\cdot\|$  συμβολίζουμε την αντίστοιχη νόρμα του τελεστή  $T$ , δηλαδή,

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|_Y : x \in X \text{ με } \|x\|_X = 1\}.$$

Στην περίπτωση όπου οι δύο χώροι δεν είναι ισόμορφοι, ορίζουμε  $d(X, Y) = +\infty$ .

Βασική ιδιότητα της απόστασης Banach-Mazur είναι ότι  $d(X, Y) \geq 1$ , αφού  $1 = \|TT^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|$  και ότι  $d(X, Y) = 1$  αν και μόνο αν οι  $(X, \|\cdot\|_X)$  και  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Στην περίπτωση που  $\dim X = \dim Y = n$  (και άρα οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι), υπάρχει ισομορφισμός  $T : X \rightarrow Y$  έτσι, ώστε  $d(X, Y) = \|T\|\|T^{-1}\|$ .

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$d(X, Y) = \inf \{d > 0 \mid \exists T : X \rightarrow Y : B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y\}.$$

Θα λέμε ότι οι χώροι  $X$  και  $Y$  είναι «κοντά», ή  $(1 + \varepsilon)$ -ισόμορφοι, αν  $d(X, Y) \leq 1 + \varepsilon$  για οσοδήποτε μικρό  $\varepsilon > 0$ .

Στην περίπτωση όπου  $\dim X = \dim Y = n$ , μπορούμε να έχουμε έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό της απόστασης Banach-Mazur:

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και  $y_1, y_2, \dots, y_n$  βάσεις των χώρων  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα και έστω  $T$  ο ισομορφισμός με  $Tx_i = y_i$ , για  $i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε,  $d(X, Y) \leq 1 + \varepsilon$ , αν για κάθε  $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in X$  ισχύει ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\|_Y \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \|x\|_X.$$

## 6.2 Συναρτήσεις Lipschitz

Θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε το Θεώρημα Dvoretzky βάσει της απόδειξης (που έγινε μια δεκαετία περίπου μετά την αρχική του παρουσίαση) από τον Milman, δηλαδή ως εφαρμογή της εμφάνισης του φαινομένου της συγκέντρωσης σε έναν μετρικό χώρο πιθανότητας. Η οπτική αυτή συνδέει το φαινόμενο της συγκέντρωσης με τις συναρτήσεις Lipschitz (βλ. [3],[2]). Έστω ότι ο  $(X, d, \mu)$  ένας μετρικός χώρος πιθανότητας, στον οποίο παρουσιάζεται το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου, δηλαδή αν  $A$  Borel υποσύνολο του  $X$ , με  $\mu(A) \geq 1/2$ , τότε η επέκτασή του κατά  $\varepsilon > 0$  έχει σχεδόν «πλήρες» μέτρο. Θεωρούμε επίσης συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι Lipschitz με σταθερά  $Lip(f)$ .

Ορίζουμε τη διάμεσο Levy της  $f$  να είναι ο αριθμός  $L$  ώστε:

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq L\}) \geq 1/2 \text{ και } \mu(\{x \in X : f(x) \leq L\}) \geq 1/2.$$

Έστω, λοιπόν, το σύνολο  $A = \{x \in X : f(x) \geq L\}$  και έστω η επέκτασή του  $A_\varepsilon$  κατά  $\varepsilon > 0$ . Τότε, για κάθε  $x \in A_\varepsilon$ , υπάρχει  $y \in A$  τέτοιο, ώστε  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . Αφού η  $f$  είναι Lipschitz, έχουμε:

$$|f(x) - f(y)| \leq Lip(f)d(x, y) \leq Lip(f)\varepsilon,$$

οπότε,

$$f(x) \geq f(y) - Lip(f)\varepsilon \geq L - Lip(f)\varepsilon.$$

Άρα,

$$A_\varepsilon \subseteq \{x \in X : f(x) \geq L - Lip(f)\varepsilon\}$$

και συνεπώς,

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \mu(\{x \in X : f(x) \geq L - \text{Lip}(f)\varepsilon\}).$$

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο, για το σύνολο  $B = \{x \in X : f(x) \leq L\}$  ισχύει ότι:

$$\mu(B_\varepsilon) \leq \mu(\{x \in X : f(x) \leq L + \text{Lip}(f)\varepsilon\}).$$

Αν πάρουμε την ένωση των συμπληρωμάτων των  $A_\varepsilon$  και  $B_\varepsilon$  και λόγω της υποπροσθετικότητας του μέτρου, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - L| \leq \text{Lip}(f)\varepsilon\}) \geq \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - 1,$$

πράγμα που σημαίνει ότι αν τα  $A_\varepsilon$  και  $B_\varepsilon$  έχουν «σχεδόν» πλήρες μέτρο, τότε και το σύνολο:

$$\{x \in X : |f(x) - L| \leq \text{Lip}(f)\varepsilon\},$$

έχει σχεδόν «πλήρες» μέτρο. Με άλλα λόγια, η διαπίστωση είναι πως «κάθε συνάρτηση Lipschitz σε ένα μετρικό χώρο πιθανότητας στον οποίο έχουμε το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου, είναι σχεδόν σταθερή σε σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι, πως κάτι τέτοιο ισχύει και για οποιαδήποτε νόρμα  $\|\cdot\|_K$  που επάγεται από ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα  $K$  στον  $\mathbb{R}^n$ , αφού κάθε νόρμα είναι 1-Lipschitz συνάρτηση. Έτσι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $r : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $r(x) = \|x\|_K$ , σύμφωνα με τα παραπάνω και το Θεώρημα 5.3.2, προκύπτει:

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : \|\|x\|_K - L\| \leq \varepsilon\}) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \varepsilon^2 n}. \quad (6.1)$$

## 6.3 Προϋποθέσεις

Με βάση την προηγούμενη συζήτηση και ακολουθώντας το πνεύμα της απόδειξης του Θεωρήματος Dvoretzky, έχει σημασία να τοποθετήσουμε το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει στην περίπτωση κυρτών, κεντρικά συμμετρικών σωμάτων του  $\mathbb{R}^n$  τα οποία βρίσκονται στη θέση του John. Σύμφωνα με το Θεώρημα του John:

Αν  $K$  κυρτό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$  και  $\|\cdot\|_K$  η νόρμα που αυτό επάγει και επιπλέον η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα  $B_2^n$  είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου που περιέχεται στο  $K$ , τότε  $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$ .

Ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_K \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_K.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε  $n$ -διάστατο χώρο με νόρμα  $X$  ισχύει ότι  $d(X, l_2^n) \leq \sqrt{n}$ , οπότε έχουμε ένα άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur.

Επιπλέον, θα χρειαστούμε το (βλ. [16]):

**Θεώρημα 6.3.1** (Dvoretzky-Rogers) Έστω  $K$  κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$ . Αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα  $B_2^n$  είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου που περιέχεται στο  $K$ , τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  του  $\mathbb{R}^n$  ώστε:

$$1 = \|x_i\|_K \geq \frac{1}{4} \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Τέλος, αν θεωρήσουμε την ποσότητα:

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x),$$

παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K e^{-|x|^2/2} dx \\
 &= \frac{nv_n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \|\theta\|_K u^n e^{-u^2/2} du d\sigma(\theta) \\
 &= \frac{n}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_0^\infty u^n e^{-u^2/2} du \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K d\sigma(\theta) \\
 &= \frac{\sqrt{2} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} M
 \end{aligned}$$

όπου το  $c$  είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K \gamma_n(dx) = \lambda_n \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x), \quad (6.2)$$

όπου  $\lambda_n \simeq \sqrt{n}$ .

**Πρόταση 6.3.1** Έστω  $K$  ένα κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα του  $\mathbb{R}^n$ . Αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα  $B_2^n$  είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου που περιέχεται στο  $K$ , τότε

$$\gamma_n(\|u\|_K > t) \geq \gamma_n(\|u\|_\infty > t),$$

για κάθε  $t > 0$ .

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες του Θεωρήματος του John:

$$\sum_{i=1}^m c_i = n \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^m c_i \langle x, x_i \rangle^2 = \|x\|_2^2, \quad (6.3)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $x_1, x_2, \dots, x_m$  μοναδιαία διανύσματα  $c_1, c_2, \dots, c_m$  και θετικοί αριθμοί και επιπλέον θεωρώντας τη συνάρτηση:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},$$

έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|x\|_2^2/2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\sum_{i=1}^m c_i}} \exp\left(-\sum_{i=1}^m c_i \langle x, x_i \rangle^2 / 2\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{c_1}} e^{-c_1 \langle x, x_1 \rangle^2 / 2} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{c_m}} e^{-c_m \langle x, x_m \rangle^2 / 2} \\
 &= g(\langle x, x_1 \rangle)^{c_1} \dots g(\langle x, x_m \rangle)^{c_m} \\
 &= \prod_{j=1}^m g(\langle x, x_j \rangle)^{c_j}.
 \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια της ανισότητας Brascamp-Lieb, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\gamma_n \left( \max_{1 \leq j \leq m} |\langle u, x_j \rangle| \leq t \right) &= \gamma_n \left( \bigcap_{j=1}^m \{|\langle u, x_j \rangle| \leq t\} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{[-t, t]}^{c_j}(\langle x, x_j \rangle) g(\langle x, x_j \rangle)^{c_j} dx \\
&\leq \prod_{j=1}^m \left( \int_{-t}^t g(t) dt \right)^{c_j} \\
&= \left( \int_{-t}^t g(t) dt \right)^n \\
&= \gamma_n (\|u\|_\infty \leq t).
\end{aligned}$$

Με δεδομένο ότι:

$$K \subseteq \bigcap_{j=1}^m \{x : |\langle x, x_j \rangle| \leq 1\},$$

έχουμε:

$$\max_{1 \leq j \leq m} |\langle x, x_j \rangle| \leq \|x\|_K.$$

Συνεπώς,

$$\gamma_n (\|u\|_K \leq t) \leq \gamma_n \left( \max_{1 \leq j \leq m} |\langle u, x_j \rangle| \leq t \right),$$

και άρα,

$$\gamma_n (\|u\|_K > t) \geq \gamma_n (\|u\|_\infty > t).$$

■

Επιπλέον, έχουμε το παρακάτω:

**Λήμμα 6.3.1** Για κάθε  $m = 1, \dots, n$  ισχύει ότι:

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma(x) \geq c \left( \frac{\log m}{n} \right)^{1/2},$$

όπου  $x = (x_1, \dots, x_n)$  και  $c > 0$  μια απόλυτη σταθερά.

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας την σχέση (6.2) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \max_{1 \leq j \leq m} |t_j| d\gamma_m(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq m} |t_j| d\gamma_n(t) \\
&= \lambda_n \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Επιπλέον, από την ανίσωση:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^\infty e^{-t^2/2} dt \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{s^2 + 1} e^{-s^2/2},$$



με  $s > 0$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} \gamma_n \left( \left\{ t : \max_{1 \leq j \leq m} |t_j| \leq s \right\} \right) &= (2\pi)^{-m/2} \int_{-s}^s \cdots \int_{-s}^s \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m t_j^2 \right) dt_1 \cdots dt_m \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^s e^{-t^2/2} dt \right)^m \\ &\leq \left( 1 - \frac{2s}{(s^2 + 1)\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \right)^m. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε  $s = \sqrt{\log m}$  και  $m$  αρκετά μεγάλο, τότε:

$$\gamma_n \left( \left\{ t : \max_{1 \leq j \leq m} |t_j| \geq \sqrt{\log m} \right\} \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| d\sigma(x) &\simeq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}^m} \max_{1 \leq j \leq m} |t_j| d\gamma_m(t) \\ &\geq \frac{\sqrt{\log m}}{\sqrt{n}} \gamma_n \left( \left\{ t : \max_{1 \leq j \leq m} |t_j| \geq \sqrt{\log m} \right\} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{\log m}{n} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

■

Συνοψίζοντας, λοιπόν, στο παρακάτω θεώρημα, έχουμε ένα κάτω φράγμα για την παράμετρο  $M$ :

**Θεώρημα 6.3.2** Έστω  $K$  κυρτό, κεντρικά συμμετρικό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$ . Αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα  $B_2^n$  είναι το ελλειψοειδές μεγίστου όγκου που περιέχεται στο  $K$ , τότε

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x) \geq c_1 \sqrt{\frac{\log n}{n}},$$

όπου  $c_1 > 0$  είναι μια απόλυτη σταθερά.

Έτσι, στην περίπτωση όπου έχουμε τη συνάρτηση  $r : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $r(x) = \|x\|_K$ , σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.2 και τη σχέση 6.1, προκύπτει:

$$\sigma \left( \{x \in S^{n-1} : \left| \|x\|_K - M \right| \geq \eta M\} \right) \leq c_1 e^{-c_2 \eta^2 M^2 n}, \quad (6.4)$$

για κάθε  $\eta \in (0, 1)$ .

## 6.4 Απόδειξη του Θεωρήματος Dvoretzky

Περνάμε στη διατύπωση του Θεωρήματος Dvoretzky, που είναι η εξής:

**Θεώρημα 6.4.1** (Dvoretzky) Έστω  $\varepsilon > 0$  και  $\kappa \in \mathbb{N}$ . Υπάρχει  $N = N(\kappa, \varepsilon)$  με την εξής ιδιότητα: Αν  $X$  είναι χώρος με νόρμα διάστασης  $n \geq N$ , μπορούμε να βρούμε υπόχωρο  $F$  του  $X$  διάστασης  $\kappa$ , για τον οποίον να ισχύει ότι  $d(F, l_2^\kappa) \leq 1 + \varepsilon$ .

Στην πορεία, ο τρόπος με τον οποίο εξαρτάται το  $N(\kappa, \varepsilon)$  από τα  $\varepsilon > 0$  και  $\kappa$  έγινε πιο συγκεκριμένος και το θεώρημα πήρε την παρακάτω ποσοτική μορφή:

**Θεώρημα 6.4.2** Έστω  $X$  χώρος με νόρμα διάστασης  $n$  και  $0 < \varepsilon < 1$ . Τότε, υπάρχουν ακέραιος  $\kappa \geq c\varepsilon^2(\log 1/\varepsilon)^{-1} \log n$  και υπόχωρος  $F$  του  $X$  διάστασης  $\kappa$ , για τον οποίον να ισχύει ότι  $d(F, l_2^\kappa) \leq 1 + \varepsilon$ .

Σημειώνουμε ότι με  $l_2^\kappa$  συμβολίζουμε τον χώρο  $(\mathbb{R}^\kappa, \|\cdot\|_2)$ . Θα χρειαστούμε τα παρακάτω δύο λήμματα (βλ. [2]):

**Λήμμα 6.4.1** Υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , έτσι, ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει το εξής: αν  $m \leq e^{c_3\eta^2 M^2 n}$  και  $y_1, \dots, y_m \in S^{n-1}$ , τότε υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός  $U \in O(n)$  ώστε για κάθε  $i = 1, \dots, m$  να ισχύει ότι

$$(1 - \eta) M \leq \|Uy_i\| \leq (1 + \eta) M.$$

**Απόδειξη:** Υπάρχει φυσιολογικό μέτρο πιθανότητας  $\nu$  στην  $O(n)$  (Haar) με την εξής ιδιότητα: αν  $x_0 \in S^{n-1}$  και  $A \subseteq S^{n-1}$  Borel υποσύνολο, τότε:

$$\sigma(A) = \nu \{U \in O(n) : Ux_0 \in A\}. \quad (6.5)$$

Θεωρούμε το σύνολο:

$$A = \nu \{x \in S^{n-1} : (1 - \eta) M \leq \|x\| \leq (1 + \eta) M\}.$$

Τότε, από την σχέση 6.2, έχουμε:

$$\sigma(A) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \eta^2 M^2 n}. \quad (6.6)$$

Επιπλέον, θέτουμε:

$$B_i = \nu \{x \in S^{n-1} : (1 - \eta) M \leq \|Uy_i\| \leq (1 + \eta) M\},$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$ . Από τις 6.3 και 6.4 προκύπτει ότι:

$$\nu(B_i) > 1 - c_1 e^{-c_2 \eta^2 M^2 n}. \quad (6.7)$$

Για  $n$  αρκετά μεγάλο και με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς  $c_3$ , αν  $m \leq e^{c_3 \eta^2 M^2 n}$ , τότε, για το σύνολο  $B = \bigcap_{i=1}^m B_i$ , έχουμε:

$$\nu(B) \geq 1 - \sum_{i=1}^m \nu(B_i^c) \geq 1 - c_1 m e^{-c_2 \eta^2 M^2 n} > 0. \quad (6.8)$$

Επομένως,  $B \neq \emptyset$  και για οποιοδήποτε  $U \in B$  παίρνουμε:

$$(1 - \eta) M \leq \|Uy_i\| \leq (1 + \eta) M, \quad (6.9)$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$ . ■

**Λήμμα 6.4.2** ( $\delta$ -δίκτυο) Έστω  $\delta \in (0, 1)$ . Τότε, υπάρχει υποσύνολο  $N \subset S^{n-1}$  για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- (i) Για κάθε  $y \in S^{n-1}$  υπάρχει  $x \in N$  ώστε  $\|x - y\|_2 < \delta$ .
- (ii)  $|N| \leq \left(1 + \frac{2}{\delta}\right)^n$ .

**Απόδειξη:** Έστω  $N = \{x_1, \dots, x_m\}$  υποσύνολο της  $S^{n-1}$ , του οποίου τα στοιχεία απέχουν ανά δύο απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του  $\delta$  μεταξύ τους και έστω ότι το  $N$  έχει τον μεγαλύτερο δυνατο πληθάρημο.

Έστω ότι το  $N$  δεν ικανοποιεί το (i). Τότε, υπάρχει  $z \in S^{n-1}$  με  $\|x_i - z\| \geq \delta$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$ . Τότε όμως, το σύνολο  $N' = \{x_1, \dots, x_m, z\}$  έχει την ίδια ιδιότητα με το  $N$  αλλά με μεγαλύτερο πληθάρημο, πράγμα άτοπο.

Για το (ii), θεωρούμε τα σύνολα  $x_i + \frac{\delta}{2}B_2^n$ , με  $i \leq m$ , τα οποία έχουν ξένα εσωτερικά και επιπλέον:

$$x_i + \frac{\delta}{2}B_2^n \subseteq B_2^n + \frac{\delta}{2}B_2^n,$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$ . Τότε:

$$\text{vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^m \left( x_i + \frac{\delta}{2}B_2^n \right) \right) \leq \text{vol}_n \left( \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) B_2^n \right),$$

δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^m \text{vol}_n \left( \frac{\delta}{2}B_2^n \right) \leq \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right)^n \text{vol}_n (B_2^n).$$

Άρα,

$$m \left( \frac{\delta}{2} \right)^n \text{vol}_n (B_2^n) \leq \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right)^n \text{vol}_n (B_2^n),$$

ή ισοδύναμα,

$$m \leq \left( 1 + \frac{2}{\delta} \right)^n.$$

■

Με βάση τα παραπάνω, δείχνουμε την εξής:

**Πρόταση 6.4.1** Έστω  $\delta, \eta \in (0, 1)$ . Αν  $(1 + 2/\delta)^k \leq e^{c_3 \eta^2 M^2 n}$ , τότε υπάρχουν  $k$ -διάστατος υπόχωρος  $F$  του  $\mathbb{R}^n$  και  $\delta$ -δίκτυο  $N$  της μοναδιαίας σφαίρας  $S_F = S^{n-1} \cap F$  του  $F$ , με την ιδιότητα:

$$(1 - \eta) M \leq \|x\| \leq (1 + \eta) M,$$

για κάθε  $x \in N$ .

**Απόδειξη:** Έστω υπόχωρος  $F_0$  του  $\mathbb{R}^n$  με  $\dim(F_0) = k$ . Από το Λήμμα 6.4.2, υπάρχει  $\delta$ -δίκτυο  $\{y_1, \dots, y_m\}$  της μοναδιαίας σφαίρας  $S_{F_0} = S^{n-1} \cap F_0$  του  $F_0$ , με  $m \leq (1 + 2/\delta)^k$ . Απο την άλλη, αφού  $(1 + 2/\delta)^k \leq e^{c_3 \eta^2 M^2 n}$ , από το Λήμμα 6.4.1, υπάρχει  $U \in O(n)$  ώστε για κάθε  $i = 1, \dots, m$  να ισχύει ότι

$$(1 - \eta) M \leq \|Uy_i\| \leq (1 + \eta) M.$$

Αν θεωρήσουμε  $F = U(F_0)$  και θέσουμε  $x_i = Uy_i$ , με  $i = 1, \dots, m$ , τότε, λόγω του ότι ο  $U$  είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, θα έχουμε ότι και το  $\{x_1, \dots, x_m\}$  αποτελεί  $\delta$ -δίκτυο της αντίστοιχης μοναδιαίας σφαίρας  $S_F = S^{n-1} \cap F$  του  $F$ , με:

$$(1 - \eta) M \leq \|x\| \leq (1 + \eta) M,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Τέλος, περνάμε σε μια τελευταία πρόταση μέσω της οποίας περνάμε από το  $\delta$ -δίκτυο της  $S_F$  σε ολόκληρη τη  $S_F$ . ■

**Πρόταση 6.4.2** Έστω  $F$   $k$ -διάστατος υπόχωρος του  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  για τον οποίο υπάρχει  $\delta$ -δίκτυο  $N$  της μοναδιαίας σφαίρας  $S_F$ , με την ιδιότητα:

$$(1 - \eta) M \leq \|x\| \leq (1 + \eta) M,$$

για κάθε  $x \in N$ . Τότε, για κάθε  $y \in S_F$  ισχύει:

$$\frac{1 - \eta - 2\delta}{1 - \delta} M \leq \|y\| \leq \frac{1 + \eta}{1 - \delta} M.$$

**Απόδειξη:** Έστω σημείο  $y \in S_F$  για το οποίο η νόρμα  $\|y\|$  έχει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή. Υπάρχει  $x \in N$  τέτοιο, ώστε  $\|y - x\|_2 \leq \delta$ . Από την τριγωνική ανισότητα και την ισοδυναμία των νορμών στον  $\mathbb{R}^n$  προκύπτει:

$$\|y\| \leq \|x\| + \|y - x\| \leq \|x\| + \|y\| \|y - x\|_2 \leq (1 + \eta) M + \|y\| \delta,$$

από όπου προκύπτει το δεξί μέλος της ζητούμενης ανισότητας, δηλαδή:

$$\|y\| \leq \frac{1 + \eta}{1 - \delta} M.$$

Από την άλλη, αν πάρουμε  $z \in S_F$ , τότε βρίσκουμε  $x \in N$  ώστε  $\|z - x\|_2 \leq \delta$ . Επομένως,

$$\|z\| \geq \|x\| - \|z - x\| \geq (1 - \eta) M - \frac{1 + \eta}{1 - \delta} M \delta = \frac{1 - \eta - 2\delta}{1 - \delta} M,$$

δηλαδή το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας. ■

Είμαστε λοιπόν σε θέση να αποδείξουμε το **Θεώρημα 6.4.2**.

Αν  $\delta, \eta \in (0, 1)$  και για τον  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει  $(1 + 2/\delta)^k \leq e^{c_3 \eta^2 M^2 n}$ , τότε σύμφωνα με την πρόταση 6.4.1, υπάρχει  $k$ -διάστατος υπόχωρος  $F$  του  $\mathbb{R}^n$  ώστε για κάθε  $y \in S_F$  να ισχύει:

$$\frac{1 - \eta - 2\delta}{1 - \delta} M \leq \|y\| \leq \frac{1 + \eta}{1 - \delta} M.$$

Θέτοντας  $\delta = \eta = \varepsilon/10$ , τότε:

$$\frac{1 - \varepsilon/3}{1 - \varepsilon/10} M \leq \|y\| \leq \frac{1 + \varepsilon/10}{1 - \varepsilon/10} M.$$

για κάθε  $y \in S_F$ , από το οποίο παίρνουμε ότι:

$$d(F, l_2^k) \leq \frac{1 + \varepsilon/10}{1 - \varepsilon/10} M \leq 1 + \varepsilon.$$

και άρα το ζητούμενο.



# Βιβλιογραφία

- [1] Απόστολος Γιαννόπουλος. *Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση, Πρόχειρες σημειώσεις*. Αθήνα (2009).
- [2] Απόστολος Γιαννόπουλος. *Συγκέντρωση του Μέτρου, Πρόχειρες σημειώσεις*. Αθήνα (2016).
- [3] Α. Γιαννόπουλος, Α. Τσολομύτης. *Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυση, Σημειώσεις*. Αθήνα (2013-2018).
- [4] Shiri Artstein-Avidan, Apostolos Giannopoulos and Vitali Milman. *Asymptotic Geometric Analysis*. Mathematical Surveys and Monographs vol.22, AMS 2015
- [5] D. Alonso-Gutiérrez, M.A. Hernández Cifre, J. Yepes Nicolás, *Further inequalities for the (generalized) Wills functional*. To appear in Commun. Contemp. Math. arXiv:1912.07993
- [6] K. M. Ball, *An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry*, Flavors of Geometry, Vol. 31, MSRI Publications (1997).
- [7] K. M. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Lecture Notes in Mathematics 1376, Springer, Berlin (1989), 251–260.
- [8] K. M. Ball, *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*. Geom. Dedicata 41 (1992), 241–250.
- [9] F. Barthe, *An extremal property of the mean width of the simplex*. Math. Ann. 310 (1998), 685–693.
- [10] Alexander Barvinok, *A course in convexity*, American Mathematical Society (Graduate Studies in Mathematics 054)(2002)
- [11] Alexander Barvinok, *Measure Concentration*, Lecture Notes (2005)
- [12] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Functional Analysis 22 (1976), no. 4, 366–389
- [13] H. Brunn, *Über Ovale und Eiflächen*, Inaugural Dissertation, München, 1887.
- [14] H. Brunn, *Über Curven ohne Wendepunkte*, Habilitationsschrift, München, 1889.
- [15] H. Dirksen, *Sections of simplices and cylinders-Volume formulas and estimates*. PhD dissertation (2015), Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- [16] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A 36 (1950), 192-197.

- [17] F. Edler, *Vervollständigung der Steinerschen elementargeometrischen Beweise für den Satz, daß der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen (1882) 73–80.
- [18] R.J Gardner, *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society Vol.39, No.3 (2002), 355–405.
- [19] Olivier Guédon, Piotr Nayar, Tomasz Tkocz *Concentration Inequalities and Geometry of Convex Bodies*, Lecture notes (2011).
- [20] H. Hadwiger, Das Wills'sche Funktional, *Monatsh. Math.* 79 (1975), 213–221.
- [21] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer (1957)
- [22] Jake Gipple, *The Volume of  $n$ -balls*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Vol. 15, Iss. 1, Article 14. (2014)
- [23] A. Grothendieck, *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le theoreme de Dvoretzky-Rogers*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1953), 83-110.
- [24] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*. Courant Anniversary Volume, Inter- science, New York (1948), 187–204.
- [25] Jonathan Kelner (Scribe: Jonathan Pines), *An Algorithmist's Toolkit, Lecture 13*, MIT OpenCourseWare (2009).
- [26] L. Leindler, *On a certain converse of Hölder's inequality II*, Acta. Sci. Math. Szeged 33 (1972), 217-223.
- [27] L.A. Lyusternik, *Application of the Brunn–Minkowski inequality to extremal problems*, Uspekhi Mat. Nauk , 2 (1936) pp. 47–54 (In Russian)
- [28] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geom. Funct. Anal. 1 (1991), 188-197.
- [29] P. McMullen, Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 78 (1975), 247-261.
- [30] P. McMullen, Inequalities between intrinsic volumes, *Monatsh. Math.* 111 (1) (1991), 47–53.
- [31] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig, 1910.
- [32] A. Prékopa, *Logarithmic concave measures with applications to stochastic programming*, Acta. Sci. Math. Szeged 32 (1971), 301-316.
- [33] G. Schechtman, M. Schmuckenschläger, *A concentration inequality for harmonic measures on the sphere*. In Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 77 in Oper. Theory Adv. Appl. Basel: Birkhäuser (1995), 255-273.
- [34] M. Schmuckenschläger, *An extremal property of the regular simplex*. Convex Geometric Analysis (Berkeley, CA, 1996), MSRI Publications Cambridge Univ. Press, Cambridge, 34 (1999) 199–202.
- [35] J. R. Sangwine-Yager, Mixed volumes. In: *Handbook of Convex Geometry* (P. M. Gruber and J. M. Wills eds.), North-Holland, Amsterdam, 1993, 43–71.

- 
- [36] E. Schmidt, *Die Brunn-Minkowski Ungleichung*, Math. Nachr. 1 (1948), 81-157.
- [37] R. Schneider, *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*, 2nd expanded ed. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 151, Cambridge, Cambridge University Press, 2014.
- [38] J. Steiner, *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze*, J. Reine Angew. Math. 18 (1838) 281– 296
- [39] V. N. Sudakov and B. S. Tsirelson, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, J. Soviet. Math. 9 (1978), 9-18; translated from Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I. 41 (1974), 14-24.
- [40] T. Tao, *The Brunn-Minkowski inequality for nilpotent groups*, <https://terrytao.wordpress.com/>, (2011).
- [41] Tomasz Tkocz *Asymptotic Convex Geometry*, Lecture notes (2011).
- [42] S. Webb, *Central Slices of the Regular Simplex*. Geom. Dedicata 61 (1996), 19–28.
- [43] J. M. Wills, Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen, *Elem. Math.* 28 (1973), 57–63.
- [44] J. M. Wills, Nullstellenverteilung zweier konvexgeometrischer Polynome, *Beiträge Algebra Geom.* 29 (1989), 51–59.