ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γενικευμένα ολοκληρώματα και εφαρμογές

ΒΟΥΡΛΟΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΑΜ 138039

Επιβλέπων καθηγητής : Μπούκας Ανδρέας

Άρτα, Ιούνιος 2023

Φοιτήτρια : Βουρλόκα Βασιλική
Α.Μ. 138039
Επιβλέπων καθηγητής: Μπούκας Ανδρέας
Β' αξιολογητής: Παπαδόπουλος Βασίλειος

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει το Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο (ΕΑΠ) στο Πρόγραμμα Σπουδών Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ).

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Ανδρέα Μπούκα για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θέλω να του εκφράσω ένα ευχαριστώ για την άριστη συνεργασία που είχαμε, τη συνεχή βοήθειά του κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε για να μου εξηγήσει τα λάθη, τις παραλήψεις μου αλλά και να μου εξηγήσει ότι δεν είχα καταλάβει.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη συνεχή στήριξη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού μου.

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα καθώς και τις εφαρμογές τους. Η εργασία είναι βιβλιογραφική καθώς παρουσιάζονται ορισμοί και αποδεικνύονται προτάσεις αλλά και θεωρήματα. Αναπτύσσονται πολλά παραδείγματα για να γίνει η θεωρία κατανοητή σε βάθος. Κύρια πηγή της εργασίας μας είναι το βιβλίο file:///C:/Users/User/Downloads/Ioannis%20Markos%20Roussos%20-%20Improper%20Riemann%20Integrals-

Στο 1ο κεφάλαιο θα μελετήσουμε αρχικά τα γενικευμένα ολοκληρώματα κατά Reimann καθώς και ορισμένες εφαρμογές τους. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ορισμένα κριτήρια σύγκλισης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων.
Στο 2ο κεφάλαιο θα μελετήσουμε διάφορες υπολογιστικές τεχνικές επίλυσης των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά στην επίλυση ολοκληρωμάτων με την ύπαρξη παραμέτρων. Θα συνεχίσουμε κάνοντας αναφορά στην συνάρτηση Gamma , στον μετασχηματισμό Laplace καθώς και τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΤΑ RIEMANN

1.1 Ορισμοί και παραδείγματα

Πολλά θεωρήματα στα μαθηματικά καθώς και πολλές εφαρμογές στην επιστήμη βασίζονται στα γενικευμένα ολοκληρώματα κατά Reimann. Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα προϋποθέτει μια πραγματική συνάρτηση να είναι φραγμένη και ορισμένη σε ένα φραγμένο διάστημα. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ολοκληρώματα τα οποία δεν ικανοποιούν μια από τις δύο ή και τις δύο αυτές προτάσεις. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα (improper integrals) .Τα γενικευμένα ολοκληρώματα χωρίζονται σε 3 κατηγορίες ανάλογα με τα άκρα ολοκλήρωσης : σε α΄ είδους, β΄ είδους και α΄ και β΄ είδους που ονομάζονται γ΄ είδους. Επίσης θα μελετήσουμε τις εφαρμογές και θα συζητήσουμε τις ιδιότητές τους.

Θεώρημα 1.1.1 (Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού)

Εάν μια πραγματική συνάρτηση f :[a, b]→ R (με a < b και a, b πραγματικοί αριθμοί) είναι συνεχής, τότε διαθέτει αντιπαραγώγους (ή αρχικές συναρτήσεις) F(x), δηλαδή συναρτήσεις που ικανοποιούν την F’(x)=f(x) για κάθε x ∈ [a, b] *[στα άκρα θεωρούμε τις κατάλληλες πλευρικές παραγώγους, F ‘(a)=f(a) και F'(b)=f(b)].* Οποιασδήποτε τέτοια αντιπαράγωγος F΄(x) της f(x) είναι απαραίτητα συνεχής στο (a, b) ,συνεχής στο αριστερό άκρο a[δηλ. F(a)= $\lim_{x\to a^+} F(x)$] ,συνεχής στο δεξί άκρο b [δηλ. F(b)= $\lim_{x\to b^-} F(x)$], και ικανοποιεί

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(\mathrm{a}).$$

Για να ισχύει το παραπάνω θεώρημα θα πρέπει :

I. Το [a ,b] να είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
II. Η f(x) να είναι συνεχής στο [a, b].
III. Στον υπολογισμό F(b) – F(a), η F(x) μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε συνεχής αντιπαράγωγος (αρχική συνάρτηση) .

Γνωρίζουμε ότι σε ένα [a, b] μπορούμε να βρούμε άπειρες συνεχείς αντιπαραγώγους της f(x). Ανά δύο οι συναρτήσεις αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c. Οι συναρτήσεις αυτές αφού είναι διαφορίσιμες (δηλαδή παραγωγίσιμες) είναι και συνεχείς, και επειδή η παράγωγός τους είναι η συνεχής συνάρτηση f(x) είναι συνεχώς διαφορίσιμες.

Κάτω από αυτές τις συνθήκες το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F$(a) καλείται **ολοκλήρωμα Riemann** της f(x) στο διάστημα [a, b]. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο και ισούται με το όριο του **αθροίσματος Riemann** της συνεχούς στο [a, b] συνάρτησης f(x), καθώς το μέγιστο μήκος των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το [a, b] πλησιάζει το μηδέν.

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max (\Delta x_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ = F(b) –F(a)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1.1

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)= $\frac{3}{5-4\cos(x)}$

Η συνάρτηση αυτή είναι ορίζεται για κάθε x$\in R$ και είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων για κάθε x$\in R$ καθώς ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται αφού το cos(x) δεν γίνεται να πάρει την τιμή 5/4. Η συνάρτηση είναι περιοδική με Τ=2π. Θα αποδείξουμε ότι είναι φραγμένη .

Για να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις ημιτόνου και συνημίτονου χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής κατά Weierstrass και θεωρούμε u=tan (x/2) άρα cos(x)= $\frac{1-u^2}{1+u^2}$ και dx=$\frac{2}{1+u^2}$ du

-1$\leq$ cos(x) $\leq$1

4$\geq$ -4 cos(x) $\geq$-4

9$\geq$5-4cos(x) $\geq$1

$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{5-4\cos(x)} \leq 1$

$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 3$

Άρα,

$\int \frac{3}{5-4\cos(x)}dx = \int \frac{3}{5-4\,\frac{1-u^2}{1+u^2}} * \frac{2}{1+u^2}du$=3*2 $\int \frac{1}{\frac{5u^2+5-4+4u^2}{u^2+1}} * \frac{1}{1+u^2}$du =6 $\int \frac{1}{9u^2+1}du$ (1){θέτουμε u= $\frac{1}{3}v$, dv=3du}

(1)->6 $\int \frac{1}{v^2+1}\frac{1}{3}dv = \frac{6}{3}\int \frac{1}{v^2+1}dv$=2 arctan(v) + c=2 arctan(3tan($\frac{x}{2}$))+ c

Για c=0, έχουμε ότι F(x)= 2arctan(3tan($\frac{x}{2}$))

Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για x$\neq$ (2k+1)π, για k ∈ Z καθώς στο x= (2k+1)π για k ∈ Z , η tan (x/2) δεν ορίζεται. Έτσι λοιπόν, το

$\lim_{x\to(2k+1)\pi^-} F(x)$ =2 *$\frac{\pi}{2}$ =π και

$\lim_{x \to (2k+1)\pi^+} F(x)$ =2 *$\frac{-\pi}{2}$ = - π

Έτσι, στο x= (2k+1)π για k ∈ Z, η F(x) έχει ένα άλμα ασυνέχειας με άλμα $|\pi - (-\pi)|$ =2π.

Η F(x) είναι φραγμένη με –π< F(x) < π.

Για να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$\int_a^b \frac{3}{5-4\cos(x)} dx = F(b) - F(a)$ με –π ≤ a , b ≤ π

Επομένως, έχουμε ως αρχική συνάρτηση, τη συνεχή συνάρτηση

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} -\pi & , x = -\pi^+ \\ 2\arctan\left(3\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) & , -\pi < x < \pi \\ \pi & , x = \pi^- \end{cases}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ!

Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την F(x) ή την $\bar{F}$(x) για να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα εάν τα a , b δεν ικανοποιούν τη σχέση –π ≤ a , b ≤ π. Γιατί αν πάρουμε για a= -2π και b=4π θα έχουμε ότι

$\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{3}{5-4\cos(x)} dx = F(4\pi) - F(-2\pi)$=0 – 0 = 0

Το αποτέλεσμα αυτό είναι λάθος καθώς η συνάρτηση f(x) > 0 , επομένως και το ολοκλήρωμα θα πρέπει να είναι θετικό. Το λάθος προέκυψε καθώς διαλέξαμε αρχική η οποία δεν είναι συνεχής στο [-2π, 4π]. Η απάντηση μας θα ήταν σωστή εάν διαλέγαμε την προσαρμοσμένη αρχική συνάρτηση

$$F_c(x) = \begin{cases} 2\arctan[3\tan\left(\frac{x}{2}\right)] + 2\pi[\left[\frac{\chi+\pi}{2\pi}\right]], & x \neq (2k+1)\pi \ , k \in Z \\ (2k+1)\pi & , \ x = (2k+1)\pi, \ k \in Z \end{cases}$$

Όπου το[[$\frac{\chi+\pi}{2\pi}$]] ακέραιο μέρος του $\frac{\chi+\pi}{2\pi}$.

Η νέα συνάρτηση $F_c(x)$ είναι τώρα συνεχής , διαφορίσιμη και $F_c{}'(x)$ =f(x) στο [-2π, 4π] όπως το θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού απαιτεί. Έτσι, θα έχουμε ότι :

$\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{3}{5-4\cos(x)} dx = F(4\pi) - F(-2\pi)$= 4π –(- 2π)=6π >0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.1

Το ολοκλήρωμα μιας τμηματικά συνεχούς πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα ή γενικευμένο ολοκλήρωμα κατά Riemann** (improper ή generalized Riemann integral) εάν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

1. Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι μη-φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης.
2. Το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι κλειστό.
3. Το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2 (Γενικευμένα ολοκληρώματα $1^{ου}$ είδους)

Θεωρούμε y= f(x) μια συνεχή πραγματική συνάρτηση στο [a , b) $\subset$ R→ R και ορίζουμε

- Για b<∞ , $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{p\to b^-} \int_a^p f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
- Για b=∞ , $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$

Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα λέμε ότι **συγκλίνει** όταν τα παραπάνω όρια υπάρχουν. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν λέμε ότι **αποκλίνει**.

Πρόταση 1.1.1

Έστω f:[a,+ ∞) $\to R$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Reimann σε κάθε διάστημα [a,t] , t$\geq$ a , και $a_1 \geq a$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\propto} f(x)dx$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a_1}^{+\propto} f(x)dx$ συγκλίνει .

Απόδειξη

Για κάθε , $t \geq a_1$ έχουμε $\int_a^t f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^t f(x)dx$.

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\propto} f(x)dx$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a_1}^{+\propto} f(x)dx$ συγκλίνει .

Επιπλέον, εάν το $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = A \in R$ και το $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{a_1}^t f(x)dx = A_1 \in R$ τότε $A = \int_a^{a_1} f(x)dx + A_1$.

Δηλαδή, $\int_a^{+\propto} f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.1.2

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{p \to 0^-} \int_{-1}^{p} x^{\frac{-1}{3}}\, dx = \lim\limits_{p \to 0^-} [\frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}]^{\,p} =$

$\lim\limits_{p \to 0^-} [\ \frac{3}{2}\ p^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\ (-1)^{\frac{2}{3}}] = \frac{3}{2} \lim\limits_{p \to 0^-}\ p^{\frac{2}{3}}\ - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

Παράδειγμα 1.1.3

$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{M \to \infty} [\arctan(x)]_1^M = \lim\limits_{M \to \infty} [\arctan(M) - \arctan(1)]$

$= \lim\limits_{M \to \infty} \arctan(M) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Παράδειγμα 1.1.4

$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{M \to \infty} [2\sqrt{x}]_1^M = \lim\limits_{M \to \infty} (2\sqrt{M} - 2\sqrt{1}) = \infty - 2 = \infty$

Παράδειγμα 1.1.5

$\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{\sin}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \lim\limits_{\boldsymbol{M} \to \infty} [-\cos(\mathrm{x})]_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{M}} = \lim\limits_{\boldsymbol{M} \to \infty} [-\cos(\mathrm{M}) + \cos(0)] = -\lim\limits_{\boldsymbol{M} \to \infty} \cos(\mathrm{M}) + 1$

Θα αποδείξουμε ότι το παραπάνω όριο δεν υπάρχει καθώς το $\lim\limits_{M \to \infty}$ **cos (M)** δεν υπάρχει.

Καθώς το M αυξάνεται απεριόριστα, θεωρούμε την ακολουθία $M_N = 2\pi N$, όπου N ακέραιος αριθμός που αυξάνεται απεριόριστα. Για οποιαδήποτε M_N, η ακολουθία **cos (**M_N**)=1.**

Καθώς το M αυξάνεται απεριόριστα, θεωρούμε την ακολουθία $M_N = \frac{\pi}{2} + 2\pi N$, όπου N ακέραιος αριθμός που αυξάνεται απεριόριστα. Για οποιαδήποτε M_N, η ακολουθία **cos (**M_N**)=0.**

Από την 1η ακολουθία έχουμε ότι το **cos (**M_N**)** ισούται με το 1, ενώ από τη 2η ακολουθία το **cos (**M_N**)** ισούται με το 0. Όμως το όριο δεν μπορεί ταυτόχρονα να ισούται με 2 διακριτούς αριθμούς. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.3 (Γενικευμένα ολοκληρώματα 2ου είδους)

Έστω y = f(x) μια πραγματική συνεχής συνάρτηση f: (a,b] ⊂ R→ R και ορίζουμε

- *Για -∞ <α,* $\int_a^b f(x)$ dx = $\lim_{\sigma\to\alpha^+} \int_\sigma^b f(x)dx$= $\lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$
- *Για -∞ =α,* $\int_{-\infty}^b f(x)$ dx = $\lim_{N\to-\infty} \int_N^b f(x)dx$

Παράδειγμα 1.1.6

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\sigma\to 0^+}[2\sqrt{x}]_\sigma^2 = 2\sqrt{2} - \lim_{\sigma\to 0^+} 2\sqrt{\sigma} = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}$

Παράδειγμα 1.1.7

$\int_{-\infty}^1 x^2\ dx = \lim_{N\to-\infty}[\ \frac{x^3}{3}\ ]_N^1 = \lim_{N\to-\infty}[\ \frac{1}{3} - \frac{N^3}{3}\ ] = \frac{1}{3} - \lim_{N\to-\infty} \frac{N^3}{3} = \frac{1}{3} - (-\infty) = \infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.4(Γενικευμένα ολοκληρώματα 3ου είδους)

Έστω y = f(x) μια πραγματική συνεχής συνάρτηση f: (a,b) ⊂ R → R και ορίζουμε

- Για -∞ <a <b <∞, $\int_a^b f(x) = \lim_{\substack{\rho\to b^- \\ \sigma\to a^+}} \int_\sigma^\rho f(x)dx$.
- Για a=- ∞ και b= +∞, $\int_{-\infty}^\infty f(x) = \lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to-\infty}} \int_N^M f(x)dx.$
- Για a=- ∞ και b< ∞, $\int_{-\infty}^b f(x) = \lim_{\substack{\rho\to b^- \\ N\to-\infty}} \int_N^\rho f(x)dx.$
- - ∞ <a και b =∞ , $\int_a^\infty f(x) = \lim_{\substack{M\to\infty \\ \sigma\to a^+}} \int_\sigma^M f(x)dx$.

Παράδειγμα 1.1.8

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \lim_{\substack{\rho\to 1^- \\ \sigma\to -1^+}} \int_\sigma^\rho \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\lim_{\substack{\rho\to 1^- \\ \sigma\to -1^+}} [\ln|x-1| - \ln|x+1|\ ]_\sigma^\rho = \frac{1}{2}\lim_{\substack{\rho\to 1^- \\ \sigma\to -1^+}} [\ln|\rho-1| - \ln|\rho+1| - \ln|\sigma-1| + \ln|\sigma+1|]$

Έχουμε ότι $\lim_{\rho\to 1^-} ln|\rho-1| = -\infty$, $\lim_{\rho\to 1^-} ln|\rho+1| = ln2$, $\lim_{\sigma\to -1^+} ln|\sigma-1| = ln2$

$\lim_{\sigma\to -1^+} ln|\sigma+1| = -\infty$

Παράδειγμα 1.1.9

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$= $\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to-\infty}}$ [arctan (x)]$_N^M$ = $\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to-\infty}}$ [arctan (M) –arctan (N)]= $\lim_{M\to\infty}$arctan (M) - $\lim_{N\to-\infty}$arctan (N) = $\frac{\pi}{2}$ - (- $\frac{\pi}{2}$)=π

Παράδειγμα 1.1.10

$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx$= $\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to-\infty}}$ [$\frac{x^2}{2}$]$_N^M$= $\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to-\infty}}$ [$\frac{M^2}{2}$ - $\frac{N^2}{2}$]= ∞ - ∞ {Το όριο αυτό δεν υπάρχει}

Αν αφήσουμε το M= $\sqrt{N^2+2A}$, όπου Α οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $N^2 + 2A \geq 0$, τότε $\lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to-\infty}}$ [$\frac{M^2}{2}$ - $\frac{N^2}{2}$]= $\lim_{N\to-\infty}$ $\frac{2A}{A}$ =Α.

Αυτή η διπλή διαδικασία εύρεσης ορίου μπορεί να παράγει ως αποτέλεσμα ορίου οποιονδήποτε αριθμό. Επίσης μπορούμε να έχουμε και ως αποτέλεσμα το +∞ ή -∞.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.5

Έστω y = f(x) μια πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο [a,c) ∪ $(c,b]$ ⊂ R , με a, b πεπερασμένα και y=f(x) μη φραγμένη, πλησιάζει το +∞ ή $το -\infty$ καθώς το x πλησιάζει το c. Έτσι, ορίζουμε $\int_a^b f(x)dx$ =$\int_a^c f(x)dx$ + $\int_c^b f(x)dx$, όπου τα επιμέρους ολοκληρώματα ορίζονται σύμφωνα με τον **ορισμό 1.1.2 και 1.1.3.** Αντί για το σύνολο (a,c) ∪ $(c,d]$ μπορούμε να έχουμε το (a,c) ∪ (c,b) ⊂ R με a,b πεπερασμένα ή μη. Τότε, ορίζουμε $\int_a^b f(x)dx$ =$\int_a^c f(x)dx$ + $\int_c^b f(x)dx$, όπου τα επιμέρη ολοκληρώματα ορίζονται σύμφωνα με τον **ορισμό 1.1.2 , 1.1.3 και 1.1.4.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.1.11

$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\rho \to 1^-} \int_{-2}^{\rho} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\sigma \to 1^+} \int_{\sigma}^{3} \frac{dx}{(x-1)^3}$

$= \lim_{\rho \to 1^-} [-\frac{(\chi-1)^{-2}}{2}]_{-2}^{\rho} + \lim_{\sigma \to 1^+} [-\frac{(\chi-1)^{-2}}{2}]_{\sigma}^{3} = \lim_{\rho \to 1^-} [\frac{-1}{2(\rho-1)^2} + \frac{1}{18}] + \lim_{\sigma \to 1^+} [\frac{-1}{8} + \frac{1}{2(\sigma-1)^2}] = \frac{1}{18} - \frac{1}{8} + \lim_{\rho \to 1^-} \frac{-1}{2(\rho-1)^2} + \lim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{2(\sigma-1)^2} = -\infty + (+\infty)$ Το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1.1.12

$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x-1} = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{x-1} + \int_{1}^{3} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\rho \to 1^-} \int_{-2}^{\rho} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\sigma \to 1^+} \int_{\sigma}^{3} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\rho \to 1^-} [\, ln|x-1|]_{-2}^{\rho}$
$+ \lim_{\sigma \to 1^+} [\, ln|x-1|]_{\sigma}^{3} = \lim_{\rho \to 1^-} [\, ln|\rho-1| - ln3\,] + \lim_{\sigma \to 1^+} [ln2 - ln|\sigma-1|] = [\, ln\,(0^+) - \ln(3)\,] + [\, ln(2) - ln\,(0^+)\,] = [\,(-\infty) - \ln(3)\,] + [\, ln(2) - (-\infty)\,] = (-\infty) + (+\infty)$
(απροσδιόριστη μορφή)

Παρόλα αυτά ,το άθροισμα αυτών των δύο ολοκληρωμάτων μπορεί να ισούται με έναν οποιονδήποτε αριθμό, πεπερασμένο ή μη. Έχουμε ότι

$\lim_{\rho \to 1^-} [\, ln|\rho-1| - ln3\,] + \lim_{\sigma \to 1^+} [ln2 - ln|\sigma-1|] = ln\frac{2}{3} + \lim_{\substack{\rho \to 1^- \\ \sigma \to 1^+}} \ln\left(\frac{|\rho-1|}{|\sigma-1|}\right)$ (1)

Το διπλό όριο $\lim_{\substack{\rho \to 1^- \\ \sigma \to 1^+}} \ln\left(\frac{|\rho-1|}{|\sigma-1|}\right)$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή καθώς το $\rho \to 1^-$ και το $\sigma \to 1^+$ ανεξάρτητα. Για ρ=σ θα έχουμε ότι $\lim_{\substack{\rho \to \sigma \\ \sigma \to 1^+}} \ln\left(\frac{|\rho-1|}{|\sigma-1|}\right) = \ln\left(\frac{|\sigma-1|}{|\sigma-1|}\right) = \ln 1 = 0$

Άρα η (1) θα ισούται με $ln\frac{2}{3}$.

Επομένως το $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x-1}$ δεν υπάρχει.

Κανόνες De l ‘ Hopital

Θεώρημα 1.1.2

Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [a , b], παραγωγίσιμες στο (a, b) , και να ισχύει f(x_0) =g(x_0) $=0$, g(x)≠0 σε μια τρυπημένη περιοχή του $x_0 \in$ (a, b) και $g'(x_0) \neq 0$. Τότε το $\lim_{\chi \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και ισχύει $\lim_{\chi \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Θεώρημα 1.1.3

Έστω ότι a < x_0 < b , οι f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [a , b], παραγωγίσιμες στο (a, x_0) ∪(x_0, b) και ισχύει f(x_0)= g(x_0)=0 και $g'(x_0) \neq 0$ για κάθε x ∈ (a, x_0) ∪(x_0, b). Αν το $\lim_{\chi \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ υπάρχει τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{\chi \to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ και ισχύει.

Παράδειγμα 1.1.13

Να υπολογιστεί το $\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Θεωρούμε f(x)= $\frac{\sin(x)}{x}$

Για x=0, η f(x) παίρνει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\ (x)}{1}$= 1.

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την f(x) στο διάστημα [-1,1] κατά συνεχή τρόπο 0 ορίζοντας το f(0)=1.

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια των δυναμοσειρών των πραγματικών αριθμών. Θα χρησιμοποιήσουμε την επέκταση της δυναμοσειράς του sin(x).

f(x)= $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $\forall x \in R$

δηλαδή$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $\forall\ x \in R$ (1)

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας (1) και έχουμε

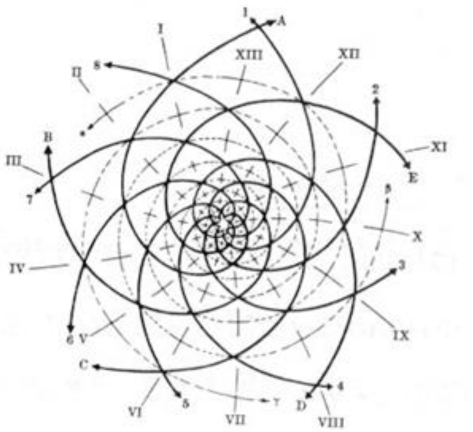
$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_{-1}^{1} [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}]\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} [\ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}] dx =$
$[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}]_{-1}^{1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{(2n+1)(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$

Η σειρά συγκλίνει ως εναλλασσόμενη σειρά σύμφωνα με το κριτήριο του Leibniz.

1.1.1Εφαρμογές

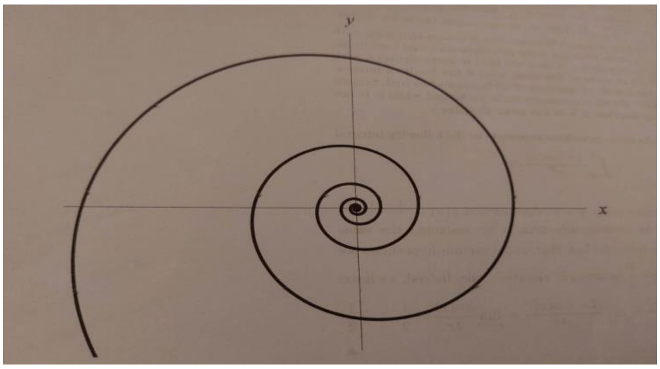
Εφαρμογή 1η

Τη λογαριθμική σπείρα τη συναντάμε στο λογισμό , στη γεωμετρία , στη διαφορική γεωμετρία καθώς και παντού τριγύρω μας όπως τα πέταλα των λουλουδιών αλλά και τις ομόκεντρες σπείρες που σχηματίζονται από τους σπόρους του ηλιοτρόπιου.



Ο Rene Descartes περιέγραψε για πρώτη φορά τη λογαριθμική σπείρα την οποία ερεύνησε στη συνέχεια ο Jacob Bernoulli ο οποίος ενθουσιασμένος με τις ιδιότητές της την αποκάλεσε ως θαυμάσια σπείρα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η επιγραφή που βρίσκεται στο μνήμα του : “Eadem mutata resurgo”, που σε ελεύθερη μετάφραση σημαίνει “αν και έχω αλλάξει θα ξαναπάρω την ίδια μορφή”, εξ αιτίας της ιδιότητας που έχει αν την μεγεθύνουμε, το σχήμα της δεν θα αλλάξει αλλά θα είναι ένα ακριβές αντίγραφο του εαυτού της, αν και ο καλλιτέχνης από λάθος ίσως, σχεδίασε μια σπείρα του Αρχιμήδη και όχι τη λογαριθμική.

Για να ορίσουμε τη λογαριθμική σπείρα χρειαζόμαστε τις παραμετρικές εξισώσεις. Στις πολικές συντεταγμένες (r, θ) δύνονται από τη μορφή r= α $e^{b\theta}$, με α$\neq$ 0 και b$\neq$ 0 ,όπου α , b πραγματικές παράμετροι. Η λογαριθμική σπείρα για r= α $e^{b\theta}$ έχει το παρακάτω σχήμα.



Θεωρούμε καμπύλη r=f(θ) με $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Σύμγωνα με τον απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου δίνεται από τη σχέση $L(\theta_1, \theta_2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}$ dθ.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της σπείρας r= $\alpha\, e^{b\theta}$ βρίσκουμε ότι

$L(\theta_1, \theta_2)=\int_{\theta_1}^{\theta_2} |\alpha| \sqrt{1+b^2}\, e^{b\theta}$ dθ = $|\alpha| \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (e^{b\theta_2} - e^{b\theta_1})$

- Για b>0και για θ ∈ R , το $L(-\infty, \theta)$ είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα με πεπερασμένη τιμή. Έτσι, $L(-\infty, \theta) = |\alpha| \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\ e^{b\theta}$.
- Για b<0και για θ ∈ R , το $L(-\infty, \theta)$ είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα με πεπερασμένη τιμή. . Έτσι, $L(-\infty, \theta) = |\alpha| \frac{\sqrt{1+b^2}}{-b}\ e^{b\theta}$.

Εφαρμογή 2η

Σύμφωνα με τη φυσική, η Γη δημιουργεί γύρω της ένα συντηρητικό βαρυτικό πεδίο . Αν θεωρήσουμε με Μ τη μάζα της Γης , με W τη βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια άλλη μάζα m η οποία βρίσκεται σε απόσταση r από το βαρυτικό κέντρο της Γης και G η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας. Σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα η βαρυτική δύναμη δίνεται από τον τύπο W = -G $\frac{M\,m}{r^2}$. Το μείον μας δείχνει ότι η βαρυτική δύναμη έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μιας μάζας m σε ένα σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση R από το κέντρο της βαρύτητας της Γης Ο ισούται με το έργο που χρειάζεται για να μετακινηθεί η m σε απόσταση από R έως το άπειρο. Επομένως, E=$\int_R^{\propto} W(r)\,dr$.

Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό, για αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε την Ε μετακινώντας σε ευθεία γραμμή το ΟΡ από το R στο άπειρο. Το Ο θεωρούμε ότι είναι η πηγή. Έτσι, E=$\int_R^{\infty} W(r)dr$= $\int_R^{\infty} -$G $\frac{M\,m}{r^2}$ = - G M m $[\frac{-1}{r}]_R^{\infty}$ =$\frac{-GM\,m}{R}$

Το βαρυτικό δυναμικό πεδίο της Γης σε κάθε σημείο P απόστασης R από το σημείο Ο ορίζεται από το πηλίκο της ενέργειας προς τη μάζα.

U= $\frac{E}{m} = -\frac{GM}{R}$

1.2 Πρωτεύουσα τιμή του Cauchy

Στα μαθηματικά, η κύρια τιμή του Cauchy πήρε το όνομά της από τον Augustin Louis Cauchy . Είναι μια μέθοδος για την ανάθεση τιμών σε ορισμένα γενικευμένα ολοκληρώματα τα οποία διαφορετικά θα ήταν απροσδιόριστα. Πολλές φορές τη συναντάμε απλά και ως κύρια τιμή (συντομογραφία του principal value : P.V.) . Είναι ένα συγκεκριμένο συμμετρικό όριο και ορίζεται στις εξής 4 περιπτώσεις:

Ορισμός 1.2.1

Αν το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο καθώς το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το R = (-∞,∞) , τότε ορίζουμε την κύρια τιμή (P.V.)ως

P.V $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$

Ορισμός 1.2.2

Αν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι [α,c)∪(c,b], με a<c<b πραγματικοί πεπερασμένοι αριθμοί και το ολοκλήρωμα γίνεται γενικευμένο στο c , τότε η κύρια τιμή ορίζεται ως

P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\int_{\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx]$

Ορισμός 1.2.3

Εάν και οι δύο παραπάνω ορισμοί εμφανίζονται π.χ. έχουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα στο (-∞,c) ∪ $(c,+\infty)$ με c ∈ R, τότε συνδυάζουμε τους δύο αυτούς ορισμούς και ορίζουμε την κύρια τιμή ως

P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to\infty}} [\int_{-R}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{R} f(x)\, dx]$

Ορισμός 1.2.4

Αν το διαάστημα ολοκλήρωσης είναι ένα πεπερασμένο ανοιχτό σύνολο (α, b), με α<b είναι πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί, και το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο επειδή το διάστημα είναι ανοιχτό και στα δύο άκρα, τότε ορίζουμε την κύρια τιμή ως

P.V. $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\alpha+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.2.1

P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\, dx = \lim_{R\to\infty} [\, \frac{x^2}{2}\,]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} [\, \frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2}] = \lim_{R\to\infty} 0 = 0$

Παράδειγμα 1.2.2

P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x^2\, dx = \lim_{R\to\infty} [\, \frac{x^3}{3}\,]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} [\, \frac{R^3}{3} - \frac{(-R)^3}{3}] = \lim_{R\to\infty} \frac{2\,R^3}{3} = \infty$

Παράδειγμα 1.2.3

Το όριο $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln|x|_{-1}^{0} + \ln|x|_{0}^{1} = -\infty$ επομένως το όριο αυτό δεν υπάρχει , αλλά η

P.V. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\, \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} ([\,\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|]_{\varepsilon}^{1}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln(\varepsilon) - \ln 1 + \ln 1 - \ln(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 0 = 0$

Παράδειγμα 1.2.4

$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x} dx = \ln|x|_{-2}^{0} + \ln|x|_{0}^{3} = -\infty$ επομένως το όριο αυτό δεν υπάρχει , αλλά η

P.V. $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\, \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{3} \frac{1}{x} dx] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} ([\,\ln|x|]_{-2}^{-\varepsilon} + \ln|x|]_{\varepsilon}^{3}) =$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln(\varepsilon) - \ln 2 + \ln 3 - \ln(\varepsilon)) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

Παράδειγμα 1.2.5

Το όριο $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln|x|_{-\infty}^{0} + \ln|x|_{0}^{\infty}$ το όριο αυτό δεν υπάρχει, αλλά η

P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to\infty}} [\, \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{x} dx] = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to\infty}} ([\,\ln|x|]_{-R}^{-\varepsilon} + \ln|x|]_{\varepsilon}^{R}) =$

$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to\infty}} (\ln(\varepsilon) - \ln(R) + \ln(R) - \ln(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 0 = 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει τότε και η κύρια τιμή υπάρχει και ισούται με το γενικευμένο ολοκλήρωμα.
2. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει τότε η κύρια τιμή μπορεί να υπάρχει μπορεί και όχι.

3. Αν η κύρια τιμή δεν υπάρχει τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει εξίσου .
4. Αν μια συνάρτηση είναι περιττή στο R (odd function) ,δηλαδή για κάθε x ϵ R, $f(-x) = -f(x)$ τότε η κύρια τιμή ισούται με 0.

   { P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)$=0}
5. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια στο R (even function) ,δηλαδή για κάθε x ϵ R, $f(-x) = f(x)$ τότε η κύρια τιμή

   P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)$= 2 $\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} f(x)dx$ = 2$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} f(x)dx$

   Γενικά , μια συνάρτηση y = f(x), με f : R → R

   - είναι περιττή γύρω από ένα σημείο c ∈ R (odd about a point), εάν ορίζεται για ∀ u ∈ R, f(c – u) = - f(c+u) ή ∀ x ∈ R, f (2c – x) = - f(x)
   - είναι άρτια γύρω από ένα σημείο c ∈ R (even about a point), εάν ορίζεται για ∀ u ∈ R, f(c – u) = f(c+u) ή ∀ x ∈ R, f (2c – x) = f(x)

Θεωρούμε y=f(x) συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα (-∞,+∞) $\mu\varepsilon$ c ∈ R.

i. Αν μία συνάρτηση είναι περιττή γύρω από ένα σημείο c ∈ R (odd about a point), για f(c)=0 θα έχουμε

   P.V. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{-R}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{c+\varepsilon}^{R} f(x)dx = 0$
ii. Αν μία συνάρτηση είναι άρτια γύρω από ένα σημείο c ∈ R (even about a point),

   P.V. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{-R}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{c+\varepsilon}^{R} f(x)dx$ =

   2 $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{c+\varepsilon}^{R} f(x)dx$ = 2 $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{-R}^{c-\varepsilon} f(x)dx$
iii. Κανόνας μετατόπισης: Θεωρούμε μια συνάρτηση f : [a, a + r] → R, με r > 0. Η μετατόπιση της y = f(x) σε ένα διάστημα [b, b + r] δίνεται από τη σχέση y = f(x – b + a), με b ≤ x ≤ b + r.

1.3 ΜΕΡΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

Προς το παρόν έχουμε ορίσει τα γενικευμένα ολοκληρώματα ως συγκεκριμένα όρια. Τα όρια αυτά μπορεί να υπάρχουν ή και όχι. Αν το όριο υπάρχει τότε λέμε πως και το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή ότι συγκλίνει. Αν το όριο δεν υπάρχει τότε λέμε πως το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει ή ότι αποκλίνει.

Στους ορισμούς που έχουμε ήδη δώσει, έχουμε θεωρήσει τη συνάρτηση y= f(x) τμηματικά συνεχής . Στην ενότητα αυτή θα δούμε ορισμένα κριτήρια ύπαρξης τα οποία είναι αρκετά ισχυρά για να μας δώσουν απαντήσεις σχετικά με την ύπαρξη ή μη , την σύγκλιση ή μη, για σχεδόν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα .

Ορισμός 1.3.1 Μη τυπικός ορισμός

Μια συνάρτηση καλείται nice function, δηλαδή συνάρτηση με πολύ καλή συμπεριφορά, αν είναι τμηματικά συνεχής στο πεδίο ορισμού της με πεπερασμένες ασυνέχειες , οι οποίες ανήκουν σε μια από τις 3 ακόλουθες κατηγορίες:

1) Ασυνέχεια άλματος με άπειρο ή πεπερασμένο άλμα: Έστω ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι ίσο με +∞ ή $-\infty$ είτε τα όρια $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά . Τότε λέμε ότι ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους της f ή ότι η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο ξ.
2) Ουσιώδη ασυνέχεια (essential discontinuity)
   - Αν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ τότε λέμε ότι ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους ή σημείο ουσιώδους ασυνέχειας της f.
   - Αν το όριο της συνάρτησης, καθώς το x πλησιάζει το σημείο ασυνέχειας, δεν υπάρχει και δεν είναι - ∞ ή +∞ (η συνάρτηση ταλαντώνεται). Σε αυτή τη περίπτωση θα πρέπει να υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη σε ένα διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο της ασυνέχειας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι nice function καθώς έχει μηδενικές ασυνέχειες στο πεδίο ορισμού της.
- Όταν μια ασυνέχεια έχει άλμα το άπειρο ή το όριο της συνάρτησης στο σημείο της ασυνέχειας είναι - ∞ ή +∞, τότε η συνάρτηση είναι μη φραγμένη.

- Η ασυνέχεια είναι κρίσιμη όταν το όριο της συνάρτησης στο σημείο της ασυνέχειας δεν υπάρχει.
- Το πεδίο ορισμού μιας τέτοιας συνάρτησης συμβολίζεται με κεφαλαίο γράμμα π.χ. Α , όπου Α $\subseteq R$ ορισμένο σύμφωνα με τους ορισμούς των προηγούμενων 2 ενοτήτων.

Θεώρημα 1.3.1 (θεώρημα σύγκρισης μη αρνητικών συναρτήσεων)

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g nice functions , ορισμένες σε ένα σύνολο Α $\subseteq R$, οι οποίες ικανοποιούν την ανισοτική σχέση 0 ≤ f(x) ≤ g(x). Τότε έχουμε ότι

a) Εάν το ολοκλήρωμα $\int_A \ g(x)\,dx$ υπάρχει τότε και $\int_A \ f(x)\,dx$ υπάρχει. Με τον όρο υπάρχει εννοούμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με ένα πεπερασμένο όχι αρνητικό αριθμό. Έτσι έχουμε ότι 0 ≤$\int_A \ f(x)\,dx$≤$\int_A \ g(x)\,dx < \infty$
b) Εάν το ολοκλήρωμα $\int_A \ f(x)\,dx$ δεν υπάρχει τότε και $\int_A \ g(x)\,dx$ δεν υπάρχει. Με τον όρο δεν υπάρχει εννοούμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με το άπειρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.3.1

Να δείξετε ότι το $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ υπάρχει.

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f(x)= e^{-x^2} με x∈ [0, +∞) και ορίζουμε

g(x)=$\begin{cases} f(x), 0 \le x \le 1 \\ e^{-x}, 1 \le x \le \infty \end{cases}$

Επομένως έχουμε ότι 0 < f(x) ≤ g(x) ,$\forall x \ \in R$ και

$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x}\,dx$=$\int_0^1 e^{-x^2}$ dx +[-e^{-x} $]_1^\infty$ =$(πεπερασμένη\ τιμή)$ + [0 – (- e^{-1})] = (πεπερασμένη τιμή)

Επιπλέον, $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ < $\int_0^\infty g(x)dx$ < ∞

Έτσι και το $\int_0^\infty f(x)dx$ είναι πεπερασμένο.

Σημείωση

1.Ομοίως και $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ υπάρχει καθώς $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ = 2 $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ως άρτια συνάρτηση.

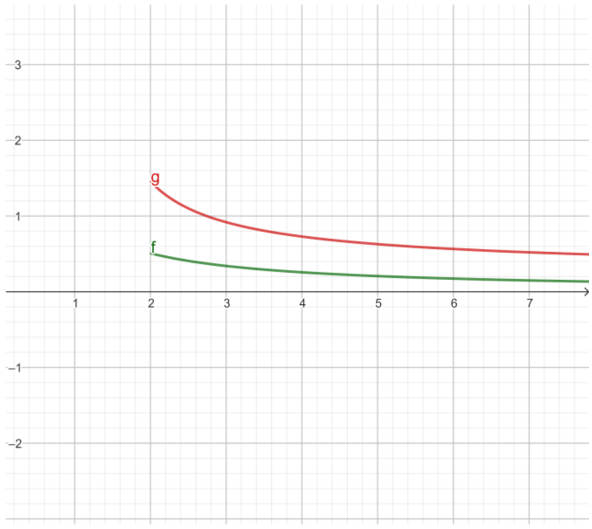
2. Δεν υπάρχει παράγουσα για την συνάρτηση e^{-x^2}.

Παράδειγμα 1.3.2

Να αποδείξετε ότι το $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$ αποκλίνει.

Δε γνωρίζουμε την παράγουσα της συνάρτησης $\frac{1}{\ln(x)}$, επομένως θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία.

Στο διάστημα [2, +∞) έχουμε ότι $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{lnx}$. Θα το αποδείξουμε γραφικά..



Όπου f(x) = $\frac{1}{x}$ και g(x) = $\frac{1}{lnx}$

Έχουμε ότι $\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$= $[\ln x]_2^{\infty}$ =∞

Άρα, $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$= ∞

Θεώρημα 1.3.2

Θεωρούμε μια συνάρτηση f(x), nice function, θετική , αύξουσα στο διάστημα [k,+∞), όπου k ένας ακέραιος αριθμός.[Αυτό σημαίνει ότι $\forall x \in [k,+\infty), f(x) > 0$ *και* εάν k≤ $x_1 \le x_2 < \infty$ τότε f(x_1) ≥ f(x_2)]. Αν θεωρήσουμε a_n=f(n) για n=k,k+1, k+2….. τότε $\int_k^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει (ή αποκλίνει) αν και μόνο αν $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (ή αποκλίνει).

Σημείωση

Στις θετικές συναρτήσεις και στις θετικές σειρές όταν λέμε ότι το $\int_k^\infty f(x)dx$ και η $\sum_{a=k}^\infty a_n$ αποκλίνει εννοούμε ότι ισούται με ∞.

Πρόταση 1.3.1

Έστω μια σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ με $a_n \geq 0$ για n$\geq$ 1.Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει εάν και μόνο εάν η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη. Εάν η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ δεν είναι άνω φραγμένη , τότε $\sum_{n=1}^\infty a_n$ = $+\infty$.

Απόδειξη

Για n$\geq$ 1 έχουμε $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$.

Συνεπώς, η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ είναι αύξουσα. Εάν επιπλέον η $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ είναι άνω φραγμένη , τότε θα συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=1}^\infty a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$=$sup_{n\geq 1} s_n$.

Εάν η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^\infty$δεν είναι άνω φραγμένη , τότε εφόσον είναι αύξουσα $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$

Θεώρημα 1.3.3(θεώρημα συμπύκνωσης θετικών σειρών Cauchy)

Θεωρούμε ότι $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0$ με $a_n > 0$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Τότε $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει (ή αποκλίνει) αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^\infty 2^n a_{2^n}$ = a_1+ $2a_2$ +4 a_4 +…. συγκλίνει (ή αποκλίνει).

Απόδειξη

Έστω $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ και $t_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}$ τα n-οστά μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^\infty a_n$ και $\sum_{n=0}^\infty 2^n a_{2^n}$ αντίστοιχα.

Από την πρόταση 1.3.1 υπάρχει ένα Μ >0 τέτοιο ώστε $s_n \leq M$ για κάθε n$\geq$ 1.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $t_n \leq 2M$ για κάθε n $\geq$ 0 και επομένως , από την πρόταση 1.3.1, η σειρά $\sum_{n=0}^\infty 2^n a_{2^n}$ θα συγκλίνει. Έστω n $\geq$ 0. Εφόσον η $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ είναι φθίνουσα , έχουμε

t_n= a_1+ $2a_2$ +4 a_4+…+$2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n}$

$\leq$ 2 a_1+ $2a_2$ +4 $(a_3 + a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})$

=2(a_1+ a_2 + a_3+a_4+…+a_{2^n})=2 $s_{2^n} \leq 2M$.

Αντιστρόφως , υποθέτουμε ότι σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n}$ συγκλίνει.

Από την πρόταση 1.3.1 υπάρχει M> 0, τέτοιο ώστε $t_n \leq M$ για κάθε n$\geq$ 0.

Θα αποδείξουμε ότι $s_n \leq M$ για κάθε n$\geq$ 1 και επομένως, από την πρόταση 1.3.1 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει.

Έστω n $\geq$ 1.Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$.

Τότε εφόσον η $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, έχουμε

s_n= a_1+ $(a_2$ +$a_3)$ + $(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)$+…+$(a_{2^{k-1}}$+…+$a_{2^k-1})$ + $(a_{2^k} + \cdots + a_n)$

$\leq a_1$+ 2a_2 +4 a_4+…+$2^{k-1}a_{2^{k-1}}$+$2^k a_{2^k}$ = $t_k \leq$ M

Πρόταση 1.3.2

Έστω $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και x $\in R$.

(1) Εάν x < $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε για κάθε n $\geq n_0$ να έχουμε x < α_n. Δηλαδή, εάν x < $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$, τότε το σύνολο {n: $a_n \leq x\}$ είναι πεπερασμένο.

(2) Εάν $\lim\limits_{n\to\infty} sup\, a_n < x$, , τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε για κάθε n $\geq n_0$ να έχουμε α_n< x. Δηλαδή, εάν $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n < x$, τότε το σύνολο {n: $a_n \geq x\}$ είναι πεπερασμένο.

Πρόταση 1.3.3

Έστω $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω ότι υπάρχουν 0$\leq \lambda < 1$ και $n_0 \geq 1$ τέτοια ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \lambda$ για κάθε n $\geq n_0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως για κάθε m$\geq n_0$ ισχύει ότι $|\sum_{n=m}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty}|a_n| \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda}$.

Πρόταση 1.3.4

Έστω $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε A={α $\in R : \alpha$ είναι σημείο συσσώρευσης της $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\}$. Τότε

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$= sup A =max A

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$= inf A =min A

Θεώρημα 1.3.4(απόλυτης ρίζας- Cauchy)

Θεωρούμαι μια σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.Υποθέτουμε ότι το ακόλουθο όριο υπάρχει ή είναι ∞ , 0≤ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$=ρ $\leq \infty$. Τότε

I. Εάν 0≤ $\rho < 1$, η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα .
II. Εάν 1<ρ $\leq \infty$, η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
III. Εάν ρ=1, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

Απόδειξη

I) Έστω 0≤ $\rho < 1$ και λ>0 τέτοιο ώστε ρ < λ < 1. Επειδή $\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|}$< λ, από την πρόταση 1.3.2 , υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε για n $\geq n_0$ να έχουμε $\sqrt[n]{|a_n|}$<λ . Οπότε από την πρόταση 1.3.3 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

II) Έστω 1 < ρ < +∞ . Τότε από την πρόταση 1.3.4 υπάρχει ακολουθία $\{\alpha_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}$ = ρ >1. Συνεπώς, υπάρχει θετικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε n $\geq n_0$ να ισχύει

$$\left|\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} - \rho\right| < \rho - 1 \leftrightarrow 1 - \rho < \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} - \rho < \rho - 1 \rightarrow \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > 1 \rightarrow |\alpha_{k_n}| > 1$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Έστω ρ=+∞. Τότε, η ακολουθία $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$δεν είναι άνω φραγμένη και επομένως υπάρχει υπακολουθία $\{\alpha_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} = +\infty$. Συνεπώς, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε για κάθε n $\geq n_0$ να ισχύει $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > 1$.

Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

III) Έστω ρ=1. Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Για τις σειρές αυτές έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \text{ και } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Όμως, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = +∞ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \in R$, δηλαδή η μια σειρά συγκλίνει και η άλλη αποκλίνει.

Θεώρημα 1.3.5(Κριτήριο λόγου – d' Alembert)

Έστω μια σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Θεωρούμε ότι τα ακόλουθα όρια υπάρχουν ή ισούνται με ∞ δηλαδή 0≤ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ = ρ ≤ ∞. Τότε

(1) Εάν 0≤ $\rho < 1$, η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα επομένως συγκλίνει.
(2) Εάν 1< $\rho \leq \infty$, η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
(3) Εάν ρ=1 , τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.3.3

Τα συμπεράσματα από το παράδειγμα που ακολουθεί είναι εύκολα ως προς την κατανόηση καθώς και πολύ χρήσιμα , για αυτό το λόγο είναι γνωστά και με το όνομα << p- Test>> . Όταν συνδυάζονται με άλλα κριτήρια μπορούν να απαντήσουν στο ερώτημα αν ένα ολοκλήρωμα συγκλίνει ή αποκλίνει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)= $\frac{1}{x^p}$, x ∈ $(0,\infty)$,∀ $p \in R$.

Η παράγουσα της f(x) είναι η F(x)=$\begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + c, \gamma\iota\alpha\ p \neq 1 \\ \ln(|x|) + c, \gamma\iota\alpha\ p = 1 \end{cases}$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερά.

Αν θεωρήσουμε μια σταθερά k ∈ $(0,\infty)$, τότε

1) $\int_k^{\infty} \frac{dx}{x^p}$=$\begin{cases} \infty & ,\alpha\nu\ p \leq 1 \\ \frac{1}{k^{p-1}(p-1)} & ,\alpha\nu\ p > 1 \end{cases}$
2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$=$\begin{cases} \frac{k^{p-1}}{1-p} = \frac{1}{k^{1-p}(1-p)} & ,\alpha\nu\ p < 1 \\ \infty & ,\alpha\nu\ p \geq 1 \end{cases}$

Σύμφωνα με τις 2 παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι για κάθε p ∈ R έχουμε ότι $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$=∞.

Επιπλέον, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

1) Για κάθε a <b και p <1 όπου a, b, p πραγματικές σταθερές $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ =$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^p}$ = $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$= $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$
2) Για κάθε a, b , p πραγματικές σταθερές $\int_a^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^p}$ =$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^p}$ =$\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{(b-x)^p}$ =∞

Παραδείγματα χρήσης του <<p – test>>

$$1. \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$$

Παρατηρούμε ότι η ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι θετική.

Για το $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ παρατηρούμε ότι το $\lim_{\chi\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2}$=1 γεγονός που κάνει το ολοκλήρωμα καλώς ορισμένο.

Για το $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ έχουμε ότι

$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ < $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$=1. Επομένως, το ολοκλήρωμα συγκλίνει σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.1 σύγκρισης με αρνητικών συναρτήσεων και του <<p –Test>> για p=2>1.

2. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^3}dx = \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^3}dx + \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^3}dx$

Για το κομμάτι : $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^3}$ παρατηρούμε ότι κοντά στο x= 0 , $\frac{\sin^2(x)}{x^3}$ = $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ $\cdot \frac{1}{\chi}$= b$\cdot \frac{1}{\chi}$ για b>0. Επομένως, μπορούμε να βρούμε μια σταθερά k, με 0<k $\leq$1, τέτοια ώστε για 0< b = $\frac{1}{2}$ <1 να έχουμε $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ $\cdot \frac{1}{\chi} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\chi}$ για όλα τα 0< x <k.

Άρα, $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^3}$ > $\int_0^k \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\chi}$ dx =$\frac{1}{2}$[ln(k) +∞] =∞

Άρα, το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.3.4 (κριτήριο σύγκρισης ορίου)

Σε αυτό το παράδειγμα θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο ανάλογη εκείνης του κριτηρίου σύγκρισης ορίου θετικών συναρτήσεων. Βρίσκουμε το λόγο των δύο θετικών συναρτήσεων καθώς προσεγγίζουμε σε μια ιδιομορφία ή στο + ∞ ή -∞ και τότε προσεγγίζουμε μια σύγκριση των ολοκληρωμάτων.

- **Αποδείξτε ότι για κάθε q ∈ $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\int_1^\infty x^q\, e^{-x} dx}$ συγκλίνει.**

Στο [1, ∞) θα συγκρίνουμε τη θετική συνάρτηση f(x)= $x^q\ e^{-x}$, με τη θετική συνάρτηση g(x)= $\frac{1}{x^2}$ παίρνοντας το όριο

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{q+2}e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{q+2}}{e^x}$=0 {εφαρμόζουμε τον κανόνα του de l' Hopital q+2 φορές}

Επιπλέον, υπάρχει μια σταθερά k >1 τέτοια ώστε $\frac{f(x)}{g(x)}$ <1 εάν k $\leq x < \infty$ ή 0 < f(x) <g (x) <1 εάν k $\leq x < \infty$. Τότε, $\int_k^{\infty} \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\, dx < \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2} = [\frac{-1}{x}]_k^{\infty} = \frac{1}{k}$

Έτσι λοιπόν,

$$\int_1^{\infty} \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int_1^{k} \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \int_{\mathrm{k}}^{\infty} \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} < \left(\pi\varepsilon\pi\varepsilon\rho\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o + \frac{1}{k}\right) < \infty.$$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

- **Να αποδείξετε ότι για κάθε q> -1, $\int_0^1 x^q\ e^{-x} dx$ συγκλίνει.**

Σημείωση!

Για q $\geq$ 0 το ολοκλήρωμα είναι καλώς ορισμένο και πεπερασμένο.

Όταν -1< q <0, η θετική συνάρτηση f(x)= $\mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ έχει ιδιομορφία στο x=0 {η συνάρτηση τείνει στο άπειρο καθώς το χ τείνει στο 0^+}. Έτσι λοιπόν, για -1< q <0, συγκρίνουμε την f(x) με τη θετική συνάρτηση g(x)= $\frac{1}{x^q}$ παίρνοντας το όριο

$$\lim_{\chi \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$$

Επομένως, θα υπάρχει μια σταθερά 0 < k <1 τέτοιο ώστε $\frac{f(x)}{g(x)}$ <2 εάν 0 < x $\leq$ k , 0 < f(x) <2g(x) εάν 0 < x $\leq$ k. Αλλά, τότε q+1>0 και

$$\int_0^k \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} < \int_0^k 2\ \frac{1}{x^q} dx = 2[\frac{x^{q+1}}{q+1}]_0^k = \frac{2\ k^{q+1}}{q+1}$$

Επομένως, όταν -1< q < 0,

$$\int_0^1 \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int_0^k \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \int_k^1 \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx} < \frac{2\ k^{q+1}}{q+1} + (\text{πεπερασμένο}) < \infty$$

Άρα, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ συγκλίνει για όλα τα q>-1.

- **Να αποδείξετε ότι για κάθε q$\leq$-1, $\int_0^1 \mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ αποκλίνει.**

Στο (0,1] η θετική συνάρτηση f(x)= $\mathrm{x}^{\mathrm{q}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ έχει ιδιομορφία στο x=0 {η συνάρτηση τείνει στο άπειρο καθώς το x τείνει στο 0^+}. Συγκρίνουμε τη θετική συνάρτηση f(x) με την θετική συνάρτηση g(x)=x^q παίρνοντας το όριο

$$\lim_{\chi \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$$

Επομένως, θα υπάρχει μια σταθερά $0 < k < 1$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2}$ εάν $0 < x \leq k$, $f(x) > \frac{1}{2}g(x)$ εάν $0 < x \leq k$. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα

$\int_0^k \mathrm{x^q\ e^{-x}dx} \geq \int_0^k \frac{1}{2} x^q dx = \infty.$

Έτσι λοιπόν, το $\int_0^k \mathrm{x^q\ e^{-x}dx} = \infty$ και επιπλέον,

$\int_0^1 \mathrm{x^q\ e^{-x}dx} = \int_0^k \mathrm{x^q\ e^{-x}dx} + \int_k^1 \mathrm{x^q\ e^{-x}dx} = \infty$ +(πεπερασμένο) $=\infty$.

Άρα, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \mathrm{x^q\ e^{-x}dx}$ αποκλίνει για όλα τα $q \leq -1$.

Ορισμός 1.3.2

Λέμε ότι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας nice function f(x) ,ορισμένο σε ένα σύνολο A υπάρχει και συγκλίνει απόλυτα εάν $\int_A |f(x)|dx$ ισούται με μια πεπερασμένη μη αρνητική τιμή. Αλλιώς, το $\int_A |f(x)|dx=\infty$ και τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει πάνω στο σύνολο A.

Ορισμός 1.3.3

Λέμε ότι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας nice function f(x) ,ορισμένο σε ένα σύνολο A υπάρχει και συγκλίνει υπό όρους εάν $\int_A f(x)dx$ ισούται με μια πεπερασμένη πραγματική τιμή(με αυτόν τον τρόπο το ολοκλήρωμα υπάρχει) αλλά αποκλίνει απόλυτα.

Θεώρημα 1.3.6 (κριτήριο απόλυτης σύγκλισης)

Θεωρούμε μια nice function f(x) ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο A.

a) Εάν $\int_A |f(x)|dx$ υπάρχει τότε και το $\int_A f(x)dx$ υπάρχει.
b) Στην περίπτωση a) έχουμε επίσης και την ανισότητα
   $\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A f(x)dx.$
c) Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Λήμμα 1.3.1

a. Θεωρούμε y=f(x) μια συνάρτηση στο διάστημα [a,c), όπου $-\infty < a < c$ και $c \in R$ ή $c = \infty$. Θεωρούμε οποιαδήποτε (αυστηρά) αύξουσα σειρά α= $a_0 < a_1 < a_2$…. με $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Εάν

α_1) $\int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ή

α_2) f(x) ≥ 0, για κάθε x ∈ [a, c) ή

α_3) f(x) ≤ 0, για κάθε x ∈ [a, c) ,

Τότε $\int_a^c f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n} f(x)\,dx$

b. Θεωρούμε y=f(x) μια συνάρτηση στο διάστημα (c, b], όπου $c < b < \infty$ και $c \in R$ ή $c = -\infty$. Θεωρούμε οποιαδήποτε (αυστηρά) φθίνουσα σειρά b = $b_0 > b_1 > b_2 >$…. με $\lim_{n\to\infty} b_n = c$. Εάν

b_1) $\int_c^b f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ή

b_2) f(x) ≥ 0, για κάθε x ∈ (c, b] , ή

b_3) f(x) ≤ 0, για κάθε x ∈ (c, b],

Τότε $\int_c^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x)\,dx$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.3.5

Το $\int_0^{\infty} \sin(x)\,dx$ όπως δείξαμε στο παράδειγμα 1.1.5 δεν υπάρχει.

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία α_n=2nπ για n=0,1,2… η οποία ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του λήμματος 1.3.1 , τότε έχουμε ότι

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \sin(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$, αν και το γενικευμένο ολοκλήρωμα από μόνο του δεν υπάρχει.

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία α_n=nπ για ν=0,1,2,3… έχουμε ότι

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \sin(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n$ το οποίο δεν υπάρχει. Ένα αποτέλεσμα διαφορετικό από το προηγούμενο.

Παράδειγμα 1.3.6

Το $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\chi^2+1}dx$ συγκλίνει απόλυτα, επομένως συγκλίνει καθώς

$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{\chi^2+1}\right| dx < \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$=[arctan(x)]$_0^\infty$=$\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Άρα, - $\frac{\pi}{2}$< $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\chi^2+1}dx$ < $\frac{\pi}{2}$

Παράδειγμα 1.3.7

Θεωρούμε f(x)= $\frac{\sin(x)}{n+1}$ για nπ$\leq x \leq (n+1)\pi$, n =0,1,2..

Με τη βοήθεια της περίπτωσης (α_2) του λήμματος 1.3.1 για την μη αρνητική συνάρτηση $|f(x)|$ βρίσκουμε

$\int_0^\infty |f(x)|$=$\sum_0^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{n+1}$ dx = 2(1 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ +…) = ∞

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει απόλυτα και δε μπορούμε να πούμε τίποτα για την υπό όρους σύγκλιση. Από τη στιγμή που δε γνωρίζουμε ότι το όριο υπάρχει , δεν μπορούμε να κάνουμε χρήση του λήμματος 1.3.1. Για να μιλήσουμε για υπό όρους σύγκλιση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο ισχυρισμό και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1.3.1 για να μπορέσουμε να ισχυριστούμε ότι

$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{n+1}dx = 2$(1$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$+…..) =2 ln2

Για να αποδείξουμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα συγκλίνει θα πρέπει :

Για κάθε R>0 να υπάρχει μια σταθερά k ≥ 0 τέτοια ώστε kπ$\leq R \leq (k+1)\pi$ άρα k $\leq \frac{R}{\pi} \leq (k+1)$.

Επομένως, για κάθε (R→ ∞)↔ $(k \to \infty)$.

Άρα, από τον ορισμό έχουμε $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx =$
$\lim_{R\to\infty}[\int_0^{(k+1)\pi} f(x)dx - \int_R^{(k+1)\pi} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\{2[1-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$+…..+ $(-1)^k \frac{1}{k+1}$]- $\int_R^{(k+1)\pi} f(x)dx\}$ (I)

Για το 1ο έχουμε $\lim_{R\to\infty} 2[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.. + (-1)^k \frac{1}{k+1}]$= 2ln2

Για το 2ο έχουμε $\lim_{R\to\infty}[\int_R^{(k+1)\pi} f(x)dx] = 0$ γιατί

0 <$\left|\int_R^{(k+1)} f(x)dx\right| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|dx = \frac{2}{k+1} \to 0$ καθώς το κ$\to \infty \leftrightarrow R \to \infty$

Αφού λοιπόν τα όρια αυτά υπάρχουν , τότε για την διαφορά τους (Ι) μπορούμε να πούμε ότι

(Ι)= $2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots)$-0 = $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 2ln2$

Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό όρους στον αριθμό 2ln2

Λήμμα 1.3.2

a) Θεωρούμε y=f(x) μια συνάρτηση στο διάστημα [a,c), όπου -∞ < a < c και c ∈ R ή c = ∞ . Θεωρούμε οποιαδήποτε (αυστηρά) αύξουσα σειρά α= $a_0 < a_1 < a_2$.... με $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Τότε θεωρούμε

$\alpha_1)\lim_{n\to 0} \sum_{k=0}^{n} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = l, \mu\varepsilon - \infty \leq l \leq \infty$

α_2) Για κάθε πραγματικό αριθμό R τέτοιο ώστε α < R < c και τον μοναδικό k ∈ N τέτοιο ώστε $\alpha_k \leq R \leq a_{k+1}$,[Το k εξαρτάται από το R και είναι μοναδικό από τη στιγμή που η σειρά είναι (αυστηρά) αύξουσα]έχουμε ότι :

$\lim_{R\to c^-} \int_R^{a_{k+1}} f(x)dx = 0.$ Τότε, $\int_\alpha^c f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = l$.

b) Θεωρούμε y=f(x) μια συνάρτηση στο διάστημα (c,b], όπου c < b < ∞ και c ∈ R ή c = -∞. Θεωρούμε οποιαδήποτε (αυστηρά) φθίνουσα σειρά b = $b_0 > b_1 > b_2 > \cdots$ με $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.Θεωρούμε

$b_1)\ \lim_{n\to 0} \sum_{k=0}^{n} \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x)dx = l, \mu\varepsilon - \infty \leq l \leq \infty$

b_2) Για κάθε πραγματικό αριθμό R τέτοιο ώστε c < R < b και τον μοναδικό k ∈ N τέτοιο ώστε $b_{k+1} \leq R \leq b_k$,[Το k εξαρτάται από το R και είναι μοναδικό από τη στιγμή που η σειρά είναι (αυστηρά) αύξουσα]έχουμε ότι :

$\lim_{R\to c^+} \int_{b_{k+1}}^R f(x)dx = 0.$ Τότε, $\int_c^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x)dx = l.$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.7 (Κριτήριο Cauchy)

Θεωρούμε y=f(x) μια nice function στο διάστημα [a, c), όπου α ∈ R και c ∈ R με α < c ή c = ∞. Αν

(α) $\tau o\ \int_a^c f(x)dx$ συγκλίνει

(b) ∀ ε > 0 ,∃ $N\ \in R : a \leq N < c$ τέτοιο ώστε ∀p ∈ R και ∀q ∈ R με N ≤ p, q< c , έχουμε$\left|\int_p^q f(x)dx\right|$ < ε.

(c) ∀ r ∈ [α, c) το $\int_\alpha^r f(x)dx$ υπάρχει

τότε έχουμε ότι,

(I) από το (α) προκύπτει το (b)

(II) εάν το (c) ισχύει , τότε το αντίστροφο του (I) αληθεύει.

Απόδειξη

(I)Θεωρούμε $\int_\alpha^c f(x)dx = \lim_{M\to c^-} \int_\alpha^M f(x)dx$= L

Το ολοκλήρωμα υπάρχει καθώς ισούται με μια πεπερασμένη πραγματική τιμή L.

Θεωρούμε F(M)=$\int_\alpha^M f(x)dx$, ∀ M ∈ [α, c). Η συνάρτηση F(M) είναι καλά ορισμένη στο [α,c) και είναι συνεχής ως προς τη μεταβλητή M.

Επίσης, $\lim_{M\to c^-} f(M)$=L . Τώρα, ∀ ε > 0, θεωρούμε ∀ $\frac{\varepsilon}{2}$ > 0 και χρησιμοποιώντας τον αναλυτικό ορισμό της ύπαρξης ενός ορίου για να ισχυριστούμε ότι

$\exists\ N : \alpha \leq N < c\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \forall\ M\!:\!N \leq M < c$ η ανισότητα $|F(M) - L|$ < $\frac{\varepsilon}{2}$ αληθεύει.

Επομένως, για κάθε p και q : N ≤ $p, q < c$ θα έχουμε

$$|F(q) - F(p)| = |F(q) - F(p) + L - L| \leq |F(q) - L| + |F(p) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Όμως, $|F(q) - F(p)|$=$\left|\int_\alpha^q f(x)dx - \int_a^p f(x)dx\right| = \left|\int_p^q f(x)dx\right|$.

Καταλήγουμε στον ισχυρισμό

∀ ε > 0 ,∃ $N, a \leq N < c$ τέτοιο ώστε ∀p ∈ R και ∀q ∈ R με N ≤ p, q< c → $\left|\int_p^q f(x)dx\right|$ < ε.

(II)Σύμφωνα με τη δήλωση (c), η συνάρτηση F(r) , όντας ορισμένη σύμφωνα με την απόδειξη (I), είναι καλά ορισμένη στο [α, c).

Τότε, η υπόθεση της αντίστροφης εφαρμογής μεταφράζεται ως εξής:

∀ ε > 0 ,∃ $N, a \leq N < c$ τέτοιο ώστε ∀p ∈ R και ∀q ∈ R με N ≤ p, q< c , →$\left|\int_p^q f(x)dx\right|$ < ε.

Κριτήριο Cauchy για σύγκλιση στους πραγματικούς αριθμούς Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n)συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό x αν και μόνο αν είναι μια ακολουθία Cauchy. Αυτή η ισοδυναμία, από το ορισμό, γράφεται ως εξής: $[\exists\, x \in R\colon \forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in N\colon \forall n \geq N \rightarrow \lvert x_n - x\rvert \leq \varepsilon] \leftrightarrow$ $[\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in N\colon \forall m \in N, \forall n \in N : (m \geq N, n \geq N) \rightarrow \lvert x_n - x\rvert \leq \varepsilon \rightarrow$ $\lvert x_n - x\rvert \leq \varepsilon]$ *Άρα*, $[\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in R] \leftrightarrow [\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \lvert x_n - x\rvert = 0]$

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\lim_{M\to\infty} F(M)$ υπάρχει ως μια πεπερασμένη πραγματική τιμή.

Παράδειγμα 1.3.8

Το ολοκλήρωμα του Fresnel $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ συγκλίνει υπό όρους.

$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \lim_{0<R\to\infty} \int_0^R \sin(x^2)\,dx$

Θα δείξουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Θέτουμε u=x^2 ,x=$\sqrt{u}$
du=2xdx άρα dx= $\frac{du}{2\sqrt{u}}$

Άρα, $\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} = \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{u}\sin(u)}{u} = 0 \times 1 = 0$

Έτσι, δεν εμφανίζεται καμία ιδιομορφία στο x=0

Τότε, *για κάθε q > p >0* , παίρνουμε $\int_p^q \sin(x^2)\,dx = \int_{p^2}^{q^2} \sin(u)\frac{du}{2\sqrt{u}} =$
$\frac{1}{2}\int_{p^2}^{q^2} \frac{1}{\sqrt{u}}\, d[-\cos(u)] = \frac{-1}{2}[\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}]_{p^2}^{q^2} + \frac{1}{2}\int_{p^2}^{q^2} \cos(u)\, d\left(u^{\frac{-1}{2}}\right) = \frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(q^2)}{\sqrt{q^2}} - \frac{\cos(p^2)}{\sqrt{p^2}}\right] -$
$\frac{1}{4}\ \int_{p^2}^{q^2} \frac{\cos(u)}{u^{\frac{3}{2}}} d(u)$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής σε συνδυασμό με τις ανισότητες και το ολοκλήρωμα, καθώς και τη σχέση $|\cos(u)| \le 1$, $\forall u \in R$, έχουμε

$$\left|\int_p^q \sin(x^2)\,dx\right| \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right] + \frac{1}{4}\int_{p^2}^{q^2} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_{p^2}^{q^2} = \frac{1}{p}$$

Έπειτα, $\forall \varepsilon > 0$, διαλέγουμε p > $\frac{1}{\varepsilon}$ τέτοιο ώστε$\forall\ q > p > \frac{1}{\varepsilon}$ ώστε να ισχύει $\left|\int_p^q \sin(x^2)\,dx\right|$<ε

Αφού για κάθε τιμή του r>0, το ολοκλήρωμα $\int_0^r \sin(x^2)\,dx$ υπάρχει, σύμφωνα με το Κριτήριο του Cauchy $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ συγκλίνει σε έναν πεπερασμένο πραγματικό αριθμό.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει απόλυτα.

Θεωρούμε u= x^2 και έχουμε ότι

$\int_0^\infty |\sin(x^2)|dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left|\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\right| du > \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{|\sin(u)|}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{|\sin(u)|}{u} du$=∞

Επομένως, το ολοκλήρωμα του Fresnel $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ συγκλίνει αλλά αποκλίνει απόλυτα. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό όρους.

2.Τεχνικές πραγματικής ανάλυσης

Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει μερικές από τις τεχνικές της πραγματικής ανάλυσης για τον υπολογισμό ορισμένων σημαντικών γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

2.1 Υπολογιστικές Τεχνικές

Το ολοκλήρωμα είναι πάρα πολύ χρήσιμο με πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά, στη φυσική, στις πιθανότητες και στη στατιστική καθώς και στο πεδίο της επιστήμης των μηχανικών.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ η συνάρτηση f(x)= e^{-x^2} είναι άρτια όπως έχουμε δείξει στο παράδειγμα 1.3.1 άρα το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$=2$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$=2$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$ =$\sqrt{\pi}$

a) Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος $\iint_{\overline{D(0,a)}} e^{-(x^2+y^2)}$ dxdy , όπου $\overline{D(0,a)}$ ={ (x,y)/ $x^2+y^2 \leq a^2$} είναι ένας κλειστός κυκλικός δίσκος με κέντρο (0,0) και ακτίνα α>0 .
Συνήθως, μετατρέπουμε τις συντεταγμένες σε πολικές συντεταγμένες όταν δουλεύουμε σε κυκλικό δίσκο. Δηλαδή, x = r cos(θ), y = r sin(θ), x^2 + y^2 = r^2, dxdy= r drdθ και
$\overline{D(0,a)}$ ={(r,θ)/0$\leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$}.Επομένως το ολοκλήρωμα τώρα μετατρέπεται
$\iint_{\overline{D(0,a)}} e^{-(x^2+y^2)}$ dxdy =$\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} e^{-r^2}\, r dr d\theta$ =2π $[\frac{-e^{-r^2}}{2}]_0^{\alpha}$= π(1- $e^{-\alpha^2}$)

b) Καθώς α→ ∞
$\iint_{\overline{D(0,a)}} e^{-(x^2+y^2)}$ dxdy= $\lim_{\alpha\to\infty}$ [π$\left(1- e^{-\alpha^2}\right)$]= π (1-0) =π

c) Το $\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}$ dxdy γίνεται καθώς το όριο ολοκληρώνεται πάνω στο ορθογώνιο $R_a = [-a,a] \times [-a,a], \mu\varepsilon\ 0 < a \to \infty$
$\lim_{\alpha\to\infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}$ dxdy =π
Ή $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2}\ e^{-y^2} dxdy$ =π , άρα $\lim_{\alpha\to\infty}$ ($\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2}\ dx\ \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-y^2}\,dy$)=π (1)

d) Στο παράδειγμα 1.3.1 δείξαμε ότι $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$ = $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ υπάρχει
Άρα η ισότητα (1) γίνεται ($\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2}\,dx$) × ($\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-y^2}\,dy$)=π (2)
Τα δυο αυτά όρια είναι ίδια , άρα η σχέση (2) γίνεται
($\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x^2} dx)^2$=($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx)^2$=π (3)
Άρα, αφού το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx > 0$, ως το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης, μπορούμε να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα και στα δύο μέρη και έτσι η σχέση (3) να γίνει

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Σημείωση!

1)Επειδή η συνάρτηση f(x)= $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}$ είναι άρτια στο R, τότε έχουμε $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) Εάν μια συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι μη αρνητική ή μη θετική (δηλαδή, δεν αλλάζει πρόσημο), τότε το διπλό της ολοκλήρωμα πάνω σε έναν τομέα μπορεί να χειριστεί με οποιονδήποτε τρόπο και να επαναληφθεί χωρίς να επηρεάσει το τελικό αποτέλεσμα. Στο παραπάνω παράδειγμα, η συνάρτηση $e^{-(x^2+y^2)}$ είναι θετική στο R^2 είναι θετική. Επιπλέον, οι ισχυρισμοί μας και οι μετασχηματισμοί μας δεν άλλαξαν την ύπαρξη και την μοναδικότητα της τελικής μας απάντησης.

2.2 Ολοκληρώματα και παράμετροι

Για την επίλυση δύσκολων ολοκληρωμάτων που εξαρτώνται από παραμέτρους, χρησιμοποιούμε τις τεχνικές της συνέχειας και της διαφορισιμότητας.

Θεωρούμε μια συνεχή ή τμηματικά συνεχή συνάρτηση f(x,t) με x ∈ $A \subseteq$ R και t εσωτερικό σημείο του I ⊆ R. Ολοκλήρωμα με παράμετρο t, καλείται το ολοκλήρωμα (γενικευμένο ή ορισμένο) της μορφής $\int_A f(x,t)dx$, ∀ t ∈ I.

Ορίζουμε, το σύνολο J={t/ t ∈ I: $\int_A f(x,t)dx\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$} ⊆ I.

Εάν το σύνολο J δεν είναι κενό, το ολοκλήρωμα ορίζει μια συνάρτηση F(t) σύνολο J , όπου το θεωρείται μεταβλητή. Συγκεκριμένα, F(t)= $\int_A f(x,t)dx$, με t ∈ J.Ανάλογα με τον ορισμό της $f(x,t)$ και το σύνολο A, έχουμε $\emptyset \subseteq$ J $\subseteq$ I .Στην περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος , ακόμα κι αν η f(x, t) είναι συνεχής ή διαφορίσιμη, δεν συνεπάγεται ότι η F(t) είναι συνεχής ή διαφορίσιμη σε ένα δεδομένο σημείο t_0 ∈ I. Για να εγγυηθούμε αυτά τα αποτελέσματα, χρειαζόμαστε κάποιες επιπλέον προϋποθέσεις.

Θεώρημα 2.2.1

Θεωρούμε f(x ,t) μια πραγματική συνάρτηση ,αρκετά << nice function>>, με x ∈ A $\subseteq$ R και συνεχής στο t ∈ I ⊆ R, όπου I ένα διάστημα της μορφής (α,b) ή (α,b] ή [α,b] ή [α,b) με -∞ ≤ α < b ≤ ∞.

(I) Συνέχεια: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση g(x) ≥ 0, <<nice>> στο A, τέτοια ώστε $|f(x,t)| \leq g(x), \forall x \in A\ \kappa\alpha\iota\ t \in I\ \kappa\alpha\iota \int_A g(x,t)dx < \infty$.

Τότε η συνάρτηση F(t)= $\int_A f(x,t)dx$ με $t \in I$, είναι μια συνεχής συνάρτηση με πραγματική τιμή στο I. (Σε ένα τελικό σημείο του I, η συνέχεια νοείται ως το κατάλληλο αριστερό ή δεξί άκρο συνέχειας).

Έτσι, η F(t), ικανοποιεί ∀ t_0 ∈ I, $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0) = F(\lim_{t\to t_0} t)$

Ή $\lim_{t\to t_0}\int_A f(x,t)dx$=$\int_A f(x,t_0)dx$=$\int_A \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx$.
Υπό αυτές τις συνθήκες το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει (προφανώς) για την πραγματική Συνάρτηση G(t):= $\int_A |f(x,t)|dx$, $t \in I$.
(II) Διαφορισιμότητα : Υποθέτουμε ότι $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ για κάθε $t \in I$ και x ∈ Aκαι υποθέτουμε ότι υπάρχει μια πραγματική συνάρτηση g(x) ≥ 0, καλή συνάρτηση στο Α τέτοια ώστε $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\leq$ g(x), ∀ x ∈ A και ∀ t ∈ I και $\int_A g(x,t)dx < \infty$.
Τότε $F(t)=\int_A f(x,t)dx$ είναι $\frac{dF}{\partial t}(t) = F'(t)=\int_A \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$.

Σημειώσεις σχετικές με το παραπάνω θεώρημα.

1. Από τη συνθήκη $\int_A g(x,t)dx < \infty$ συνεπάγεται η απόλυτη σύγκλιση του $\int_A f(x,t)dx$, ∀ t ∈ I.
2. Η ισχύς αυτού του Θεωρήματος και η χρήση παραμέτρων στα ολοκληρώματα απεικονίζονται στα παραδείγματα που ακολουθούν.
3. Για να ελέγξουμε τη συνέχεια και τη διαφορισιμότητα της F(t), πρέπει να ελέγξουμε είτε κατά σημείο, όπου α<t<β. (Η συνέχεια και η διαφορισιμότητα είναι τοπικές ιδιότητες ή σημειακές ιδιότητες.) Επομένως, αντί να μπούμε σε αυτή τη διαδικασία , μπορούμε να επιλέξουμε ένα τυχαίο t ∈ (α, β) και έπειτα ένα μικρό διάστημα [c, d] ή (α, d] ή [c, β) που περιέχει το t σε ένα υποσύνολο του (α, β).Είναι ευκολότερο και πιο βολικό λοιπόν, να εργαστούμε πάνω σε αυτό το νέο μικρότερο υποδιάστημα των (α, β) για να βρούμε μια κατάλληλη συνάρτηση g(x) σε αυτό το υποδιάστημα.
4. Μερικές φορές βρίσκουμε μια συνάρτηση ag(x) για την f(x,t), όπου a ο συντελεστής απόσβεσης.
5. Το πρώτο μέρος του Θεωρήματος οφείλεται ουσιαστικά στον Weierstrass. Και τα δύο μέρη αυτού του Θεωρήματος έχουν γενικευτεί με διάφορους τρόπους από τη θεωρία της ολοκλήρωσης Lebesgue. Αυτό το αποτέλεσμα είναι ισχυρότερο από αυτά που απαιτούν την ομοιόμορφη σύγκλιση ενός ολοκληρώματος που εξαρτάται από μια παράμετρο όπως συναντάμε σε άλλες περιπτώσεις.
6. Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος αποδεικνύει τον κανόνα Leibniz για διαφορισιμότητα των ολοκληρωμάτων κατά Riemann σε φραγμένα κλειστά διαστήματα. Αυτό αναφέρει:

Αν η f(x, t) είναι συνεχής στο (x, t) και συνεχώς διαφορίσιμη στο t, όπου x ∈ [a, b] ⊂ R και t ∈ (α, β) ⊆ R, τότε

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{b} f(x,t)dx = \int_{a}^{b}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx, \forall t \in (\alpha,\beta)$$

Συνδυάζοντας αυτόν τον κανόνα αυτόν , με τον κανόνα της αλυσίδας καταλήγουμε στον γενικό κανόνα του Leibniz, ο οποίος λέει ότι :
Αν u(t) και v(t) δύο διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις και η f(x,t) ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις σε κάθε διάστημα [u(t), v(t)] του x, τότε

$$\frac{d}{dt}[\int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)dx] = \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial \mathrm{f(x,t)}}{\partial \mathrm{t}} dx + \mathrm{f}\,[\mathrm{v(t),t}] \cdot \mathrm{v'(t)} - \mathrm{f}\,[\mathrm{u(t),t}] \cdot \mathrm{u'(t)}$$

7. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα Leibniz για να υπολογίσουμε νέα ολοκληρώματα από γνωστά που εξαρτώνται από παραμέτρους.

Παραδείγματα με τη χρήση του κανόνα του Leibniz

Παράδειγμα 2.2.1

Από το γνωστό ολοκλήρωμα $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\,[\ln(1+ax)]_0^b = \frac{1}{a}\ln\,(1+ab)$, όπου α: παράμετρος με α>0, και b>0 σταθερό, θα έχουμε

$$\frac{d}{da}\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{d}{da}[\frac{1}{a}\ln(1+ab)]$$

$$\int_a^b \frac{\partial(1+\alpha x)^{-1}}{\partial \mathrm{t}} dx = \frac{d}{da}[\frac{1}{a}\ln(1+ab)]$$

$$\int_\alpha^b \frac{-\alpha}{(1+\alpha x)^2}\,dx = [\frac{-1}{a^2}\ln(1+ab) + \frac{1}{a}\,\frac{b}{1+ab}]$$

$$\int_\alpha^b \frac{\alpha}{(1+\alpha x)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\ln(1+ab) - \frac{1}{a}\,\frac{b}{1+ab}$$

Παράδειγμα 2.2.2

Από το γνωστό ολοκλήρωμα$\int_0^b \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\,(\frac{b}{a})$,όπου α: παράμετρος με α>0, και b>0 σταθερό, θα έχουμε

$$\frac{d}{da}\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{d}{da}[\frac{1}{a}\arctan\,(\frac{b}{a})\,]$$

$$\int_0^b \frac{\partial(\alpha^2+x^2)^{-1}}{\partial \mathrm{t}}\,dx = \frac{d}{da}[\frac{1}{a}\arctan\,(\frac{b}{a})\,]$$

$$\int_0^b [-1(\alpha^2+x^2)^{-2}\,2\alpha]dx = \frac{-1}{a^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a}\,\frac{-b}{b^2+a^2}$$

$$\int_0^b \frac{-2a}{(\alpha^2+x^2)^2}\,dx = \frac{-1}{a^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a}\,\frac{-b}{b^2+a^2}$$

$$\int_0^b \frac{2a}{(\alpha^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a}\,\frac{b}{b^2+a^2}$$

$$\int_0^b \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2a^2}\,\frac{b}{b^2+a^2}$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για την τελευταία σχέση και έχουμε

$$\frac{d}{da}\int_0^b \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^2}dx = \frac{d}{da}[\frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2a^2}\ \frac{b}{b^2+a^2}]$$

$$\int_0^b \frac{\partial[(\alpha^2+x^2)^{-2}]}{\partial a}dx = \frac{d}{da}[\frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{b}{a}\right)]+\frac{d}{da}[\frac{b}{2a^2(b^2+a^2)}]$$

$$\int_0^b -4a(\alpha^2+x^2)^{-3}\mathrm{dx} = -\frac{3}{2\alpha^4}\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2a^3}\frac{-b}{b^2+a^2} + \frac{b}{2}[\frac{-[2a(b^2+a^2)+a^2 2a]}{[a^2(b^2+a^2)]^2}$$

$$\int_0^b \frac{-4a}{(\alpha^2+x^2)^3}dx = -\frac{3\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{2\alpha^4}+\frac{-b}{2a^3(b^2+a^2)}-\frac{b2a(b^2+2a^2)}{2a^4(b^2+a^2)^2}$$

$$\int_0^b \frac{-4a}{(\alpha^2+x^2)^3}dx = -\frac{3\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{2\alpha^4}-\ \frac{b}{2a^3(b^2+a^2)}-\frac{b(b^2+2a^2)}{a^3(b^2+a^2)^2}$$

$$\int_0^b \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^3}dx = \frac{1}{4a}[\frac{3\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{2\alpha^4}+\frac{b(b^2+a^2)}{2a^3(b^2+a^2)^2}+\frac{b(b^2+2a^2)}{a(b^2+a^2)^2}]$$

$$\int_0^b \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^3}dx = \frac{b}{4a^4}[\frac{3\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{2ab}+\frac{(b^2+a^2)}{2(b^2+a^2)^2}+\frac{2(b^2+2a^2)}{2(b^2+a^2)^2}]$$

$$\int_0^b \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^3}dx = \frac{1}{8a^4}[\frac{3\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}{ab}+\frac{3b^2+5a^2}{(b^2+a^2)^2}]$$

Παράδειγμα 2.2.3

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\,(x)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{\mathrm{x}^2}dx \ \overline{\overline{x=2u}}\ \int_0^\infty \frac{sin^2 u}{u^2}du = \frac{\pi}{2}$$

2.3 Πραγματική συνάρτηση Gamma .

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε τη πραγματική συνάρτηση Gamma καθώς και τις θεμελιώδεις ιδιότητές της. Σπουδαίοι μαθηματικοί, εκτός του Euler, όπως Weierstrass, Legendre, Hermite, Gauss , Liouville, Guderman κ.α. μελέτησαν τη συνάρτηση αυτή. Η συνάρτηση Gamma συμβολίζεται με Γ(z). Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στον Legendre .Αποτελεί σημαντικό εργαλείο στα Μαθηματικά, τη Στατιστική, τη Μηχανική και τις Επιστήμες.

2.3.1 Η συνάρτηση Gamma

Η θεωρία της συνάρτησης Gamma αναπτύχθηκε σε μια προσπάθεια γενίκευσης του παραγοντικού των φυσικών αριθμών.
Η συνάρτηση Gamma ορίζεται ως ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα με πραγματική παράμετρο p, Γ(p)= $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.
Το ολοκλήρωμα αυτό επίσης καλείται ολοκλήρωμα Euler 2ου τύπου. Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι πάντα μη αρνητικό, και αυτό το ολοκλήρωμα είναι προφανώς γενικευμένο αφού το διάστημα ολοκλήρωσης, [0, ∞), είναι μη φραγμένο. Όταν 0 <p< 1, το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο για έναν ακόμη λόγο: Το ολοκλήρωμα γίνεται +∞ στο x = 0^+. (Σε μιγαδική ανάλυση, το πραγματικό p αντικαθίσταται με τη μιγαδική μεταβλητή z = x + iy, και έτσι πρέπει να μετονομάσουμε την άγνωστη μεταβλητή με γράμμα διαφορετικό από το x).

Προκαταρκτικές εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Gamma

Είναι πιο βολικό να γράψουμε

Γ(p)= $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$=$\int_0^1 x^p\frac{1}{xe^x}dx + \int_1^\infty x^p\frac{1}{xe^x}dx$. (1)

Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης, θα εξαγάγουμε κάποιες προκαταρκτικές εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Gamma. Αυτές οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες για να αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα καθώς και επιλύσουμε κάποια προβλήματα.

(I) Υπολογίζουμε το πρώτο μέρος του ολοκληρώματος της σχέσης (1)

$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^p\frac{1}{xe^x}dx$ για οποιοδήποτε p>0. Αυτό το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο για 0<p <1 και ορισμένο για p≥ 1. θα έχουμε ότι :
∀ 0 <p< ∞ και ∀ 0 ≤ x ≤ 1, $x^{p-1}e^{-1} \le x^{p-1}\, e^{-x} \le\ x^{p-1}$.
Επομένως, $\frac{1}{e}\int_0^1 x^{p-1}dx < \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx < \int_0^1 x^{p-1}dx$,
Έτσι ∀ 0 <p< ∞,$\frac{1}{ep} < \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx < \frac{1}{p}$

(II) Θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του 2ου μέρους του ολοκληρώματος της σχέσης (1)

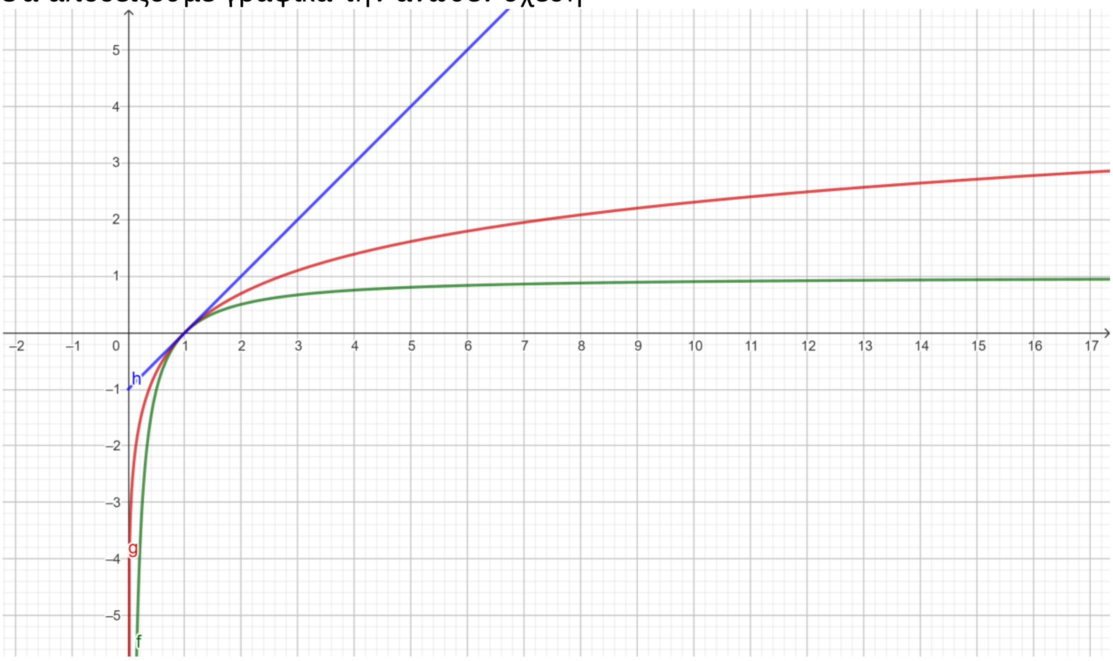
$$\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_1^{\infty} x^p \frac{1}{xe^x}dx$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο λόγω του άπειρου διαστήματος ολοκλήρωσης. Διακρίνουμε τώρα 2 περιπτώσεις:

1η περίπτωση: 0 < p < 1

Σύμφωνα με την ακόλουθη ανισότητα: ∀ x > 0, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$

Θα αποδείξουμε γραφικά την άνωθεν σχέση



Με μπλε χρώμα είναι η συνάρτηση h(χ)= x-1, x>0

Με κόκκινο χρώμα η συνάρτηση g(x)= ln(x), x>0

Με πράσινο χρώμα η συνάρτηση $f(x)= 1 - \frac{1}{x}$, χ>0

Για x ≥ 1 έχουμε ότι 0 ≤ ln(x) ≤ x – 1. Επομένως, παρατηρούμε ότι ∀ x ≥ 1 και ∀ 0 <p< 1

$e^{-2x+1} \leq e^{-x-\ln(x)} = x^{-1}e^{-x} \leq x^{p-1}e^{-x} \leq e^{-x}$.

Δηλαδή, ∀ 0 <p< 1, $\int_1^{\infty} e^{-2x+1}dx < \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx < \int_1^{\infty} e^{-x}dx$

Άρα , ∀ 0 <p< 1, $\frac{1}{2e} < \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx < \frac{1}{e}$

2η περίπτωση: $1 \leq p < \infty$

Έστω n = [[p − 1]], το ακέραιο μέρος του p − 1. Αφού p ≥ 1, έχουμε ότι n ≥ 0 ακέραιος και n ≤ p − 1 < n + 1.Έτσι έχουμε την ανισότητα

$$\int_1^{\infty} x^n e^{-x}dx < \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx < \int_1^{\infty} x^{n+1}e^{-x}dx$$

Εφαρμόζοντας n ολοκληρώσεις, τμηματικά στο πρώτο μέρος του ολοκληρώματος και n+1 ολοκληρώσεις τμηματικά στο τρίτο μέρος του ολοκληρώματος, θα έχουμε

$$\frac{1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n! + n!}{e} \leq \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx < \frac{1 + (n+1) + (n+1)n + (n+1)n(n-1) + \ldots + (n+1)! + (n+1)!}{e}$$

Εν τέλει καταλήγουμε στις ακόλουθες προκαταρτικές εκτιμήσεις για τη συνάρτηση Gamma:

(1) ∀ 0 <p< 1, $\frac{p+2}{2ep} = \frac{1}{2e} + \frac{1}{ep} < \Gamma(p) < \frac{1}{p} + \frac{1}{e}$ που προκύπτει από τις περιπτώσεις (I),(II)και την 1η περίπτωση. Σύμφωνα με αυτές τις εκτιμήσεις παρατηρούμε ότι $\lim_{p\to\infty} \Gamma(p) = \infty$.

(2) ∀ 1 ≤ p < ∞, $\frac{1}{ep} + \frac{1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n! + n!}{e} < \Gamma(p) < \frac{1}{p} + \frac{1 + (n+1) + (n+1)n + (n+1)n(n-1) + \ldots + (n+1)! + (n+1)!}{e}$, όπου n=[[p-1]] και προκύπτει από τις περιπτώσεις (I),(II)και την 2η περίπτωση.

Εάν p → ∞, τότε [[p−1]] = n → ∞ και σύμφωνα με αυτούς τους υπολογισμούς προκύπτει ότι $\lim_{p\to\infty} \Gamma(p) = \infty$.

Μερικές βασικές ιδιότητες και τιμές της συνάρτησης Gamma

(Γ,1) Για 0< p < ∞, η Γ(p) είναι μια συνεχής συνάρτηση στο p.

(Γ,2) Για 0< p < ∞, η Γ(p) είναι απείρως διαφορίσιμη με τη ν-στη παράγωγο να είναι $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}[\ln(x)]^n dx$, ∀ n = 0, 1, 2, 3, ….

(Γ,3) Η συνάρτηση Gamma είναι αναλυτική. Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως μια δυναμοσειρά τοπικά.

(Γ,4) Για 0 < p < ∞, η Γ(p) είναι αυστηρά κυρτή. Αυτό προκύπτει από το (Γ2) αφού Γ΄΄(p)=$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}[\ln(x)]^2 dx > 0$. Ως εκ τούτου, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης Gamma είναι αυστηρά θετική, και επομένως η συνάρτηση Gamma είναι αυστηρά κυρτή (ή κυρτή, όπως λέμε στον λογισμό).

(Γ,5) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Απόδειξη

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \;\; \overline{\overline{x = u^2}} \;\; 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

(Γ,6) Γ(1) = 1 και Γ(2) = 1.

Απόδειξη

Γ(1)=$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$

Γ(2)=$\int_0^{\infty} x\, e^{-x} dx$ = $[\, x\, e^{-x}\,]_0^{\infty}$ + $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ = 0 +1 =1

(Γ,7) Από το **(Γ,4)** και το **(Γ,6)** έχουμε ότι η συνάρτηση Gamma έχει ένα τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι και συνολικό ελάχιστο στο (0, ∞), σε έναν αριθμό r μεταξύ του 1 και του 2. Μια εκτίμηση αυτού του αριθμού είναι
r = 1.461632144968362341262659542325721328468196...και το συνολικό ελάχιστο της συνάρτησης Gamma στο (0, ∞) είναι περίπου
Γ(r)=0.88560319441088870027881590058258873320795....
Έπειτα συμπεραίνουμε ότι Γ΄(r)=0, η Γ(p) είναι αυστηρά φθίνουσα για 0 < p< r , με Γ΄(p) < 0 και αυστηρά αύξουσα για r < p < ∞ με Γ΄(p) > 0 .

(Γ,8) Γ(p + 1) = p Γ(p) για p > 0

Απόδειξη

Γ(p + 1) =$\int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx$ = [- $x^p e^{-x}$ $]_0^{\infty}$ + $\int_0^{\infty} p\, x^{p-1} e^{-x} dx$ = 0 + p $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ =p Γ(p)

Σημείωση! Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Γ(p)= $\frac{1}{p}\Gamma(p + 1)$ *για να επεκτείνουμε στους αρνητικούς μη ακέραιους αριθμούς.*

(Γ,9) Για p = 0, 1, 2, 3, ..., Γ(p + 1) = p !.

(Γ,10) Γ(p +$\frac{1}{2}$) = Γ(p - $\frac{1}{2}$ + 1) = (p - $\frac{1}{2}$) Γ(p - $\frac{1}{2}$) = ($\frac{2p-1}{2}$) Γ(p - $\frac{1}{2}$)=.....
(Γ,11) Για x > 0 και p > 0, κάνοντας αντικατάσταση v = xu, θα έχουμε

$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-ux} du$ ή $\int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-ux} du$ = $\frac{\Gamma(p)}{x^p}$ εάν p=1,2,3… ακέραιοι τότε $\int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-ux} du$ = $\frac{(p-1)!}{x^p}$

Σημείωση! *Με τη βοήθεια της συνάρτησης Gamma, μπορούμε να αποδείξουμε το φημισμένο τύπο του Stirling που είναι χρήσιμος για τον υπολογισμό των* *παραγοντικών μεγάλων φυσικών αριθμών. Αυτός λέει ότι αν το n είναι ένας μεγάλος φυσικό αριθμός, τότε θα έχουμε την ακόλουθη κατά προσέγγιση ισότητα n!≅* $\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 2.3.1

$\int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$= Γ(8) = 7! = 5040

Παράδειγμα 2.3.2

$\int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx \;\; \overline{\overline{u=2x}} \int_0^\infty \frac{u^4}{16}\, e^{-u} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{32} \int_0^\infty u^4\, e^{-u} du = \frac{1}{32}\, \Gamma(5) = \frac{1}{32} \times 4! = \frac{1}{32} \times 24 = \frac{3}{4}$

Το ερώτημα αυτό μπορεί να λυθεί και με την ιδιότητα (Γ,11)

$\int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx = \int_0^\infty x^{5-1} e^{-2x} dx = \frac{\Gamma(5)}{2^5} = \frac{4!}{32} = \frac{3}{4}$

Παράδειγμα 2.3.3

Γ(4.01) = Γ(3.01 + 1) = 3.01 · Γ(3.01) = 3.01 · 2.01 · 1.01 · 0.01 · Γ(0.01) = 0.06110601 · Γ(0.01).

2.4 Περίληψη πάνω στο μετασχηματισμό Laplace

Η ταλάντωση ενός ελατηρίου, η ροή της θερμότητας σε ένα μονωμένο υλικό, το ρεύμα που βρίσκεται σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι παραδείγματα μερικών και συνήθεις διαφορικών εξισώσεων που μπορούν να περιγράψουν νόμους με τους οποίους κάποιες ποσότητες μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο. Υπάρχουν πολλά βιβλία που αναπτύσσουν πλήρως ή σχεδόν πλήρως τον μετασχηματισμό Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την επίλυση εφαρμοζόμενων προβλήματα, προβλήματα αρχικής τιμής και συνοριακής τιμής των μερικών διαφορικών εξισώσεων κ.λπ. Επιλύει προβλήματα αρχικών συνθηκών σε μη ομογενείς γραμμικές δ.ε με σταθερούς συντελεστές όπου ο σταθερός όρος μπορεί να μην είναι συνεχής αλλά μια γενικευμένη συνάρτηση, όπως π.χ. η συνάρτηση Dirac.

2.4.1 Ο Μετασχηματισμός Laplace

Θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση y= f(x) ορισμένη στο [0, ∞) ή (0,∞). Ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace ως το γενικευμένο ολοκλήρωμα με παράμετρο s την ακόλουθη σχέση:

$$\mathrm{L}\{\mathrm{f(x)}\}(\mathrm{s}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

Έστω D το σύνολο όλων των σημείων s ∈ R για τα οποία το άνωθεν ολοκλήρωμα συγκλίνει. Αν D ≠ ∅, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα ορίζει μια πραγματική τιμή του s στο σύνολο D. Η παράμετρος s είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή αυτής της συνάρτησης την οποία γράφουμε L{f(x)}(s), και την καλούμε Μετασχηματισμό Laplace της f(x). Αν D = ∅, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f(x) δεν υπάρχει.

Αν y = f(x) είναι μια <<nice>> πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [a, ∞) ή (a, ∞), με 0 < a < ∞, τότε για να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιούμε τον παραπάνω ορισμό για f(x) = 0 στα [0, a) ή [0, a], αντίστοιχα. Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα κατά Reimann με παράμετρο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και να εφαρμόσουμε τη θεωρία και τα αποτελέσματα σχετικά με τα γενικευμένα ολοκληρώματα με παραμέτρους μαζί με όλες τις διαφορετικές σχετικές τεχνικές που χρειαζόμαστε για τη μελέτη και τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace.

Αν A = [a, ∞) ή A = (a, ∞) όπου a ≥ 0 και $\int_A |\mathrm{f(x)}|\mathrm{dx} < \infty$, αν η f(x) είναι απολύτως ενσωματώσιμη σε σχέση με το A , τότε ο μετασχηματισμός Laplace του f(x) υπάρχει (συγκλίνει απόλυτα) ∀ s ≥ 0. Αυτό προκύπτει άμεσα από το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης καθώς ∀ s ≥ 0 και ∀ x ∈ A έχουμε : $|e^{-sx}f(x)| \le |f(x)|$. Οι εκθετικές συναρτήσεις στο [0, ∞) ή (0, ∞) μορφή αποτελούν μια πολύ μεγάλη κατηγορία , επαρκείς για τις περισσότερες ανάγκες των εφαρμογών. Ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 2.4.1

Μια πραγματική συνάρτηση y = f(x) στο [0, ∞) ή (0, ∞) ορίζεται ως μια εκθετική τάξη ως προς u, αν υπάρχουν σταθερές u$\geq 0, M \geq 0$ $και$ $A \geq 0$ τέτοιες ώστε |f(x)| ≤ Me^{ux}, για όλα τα x∈ [A, ∞).

Για μια συνάρτηση f(x) εκθετικής τάξης u στο [0, ∞) με σταθερές M ≥ 0 και A ≥ 0 όπως στον παραπάνω ορισμό, έχουμε ότι

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{f(x)\,dx} = \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{f(x)dx} + \int_{\mathrm{A}}^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{f(x)\,dx}.$$

Για όλα τα s > u , παίρνουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{A}}^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{f(x)\,dx}$ συγκλίνει απόλυτα επειδή $\int_A^\infty \mathrm{e}^{-sx}|\mathrm{f(x)}| \leq \int_{\mathrm{A}}^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{Me^{ux}dx} = \mathrm{M}[\frac{\mathrm{e^{(u-s)x}}}{\mathrm{u-s}}]_{\mathrm{A}}^\infty = \mathrm{M}\ \frac{\mathrm{e^{(u-s)A}}}{\mathrm{s-u}} < \infty.$
Επομένως, συμπεραίνουμε ότι L{f(x)}(s) = $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{f(x)}dx$, υπάρχει για όλα τα s > μ αν και μόνο αν $\int_0^A \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{f(x)}dx$ υπάρχει για όλα τα s > ν, για μερικά ν>0, όπου μ > max{u,v} σταθερά.
Εφόσον το διάστημα [0, A] είναι κλειστό και φραγμένο, παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν , για παράδειγμα, όταν η f(x) είναι συνεχής ή φραγμένη ή απολύτως ενσωματώσιμη στο [0,A].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 2.4.1

Έστω η συνάρτηση f(x)=1 για x∈ $[0,\infty)$. Τότε L(f(x))(p)= $\frac{1}{p}$, $p > 0$

Πράγματι, L(1)(p)=$\int_0^\infty e^{-px} \times 1\ dx = \int_0^\infty e^{-px}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-px}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-pt}}{-p} - \frac{1}{-p}\right) = \frac{1}{p}$

Παράδειγμα 2.4.2

Έστω η συνάρτηση f(x)=x για x∈ $[0,\infty)$. Τότε L(f(x))(p) = $\frac{1}{p^2}$, $p > 0$

Πράγματι, L(x)(p)=$\int_0^\infty e^{-px} \times x\ dx = \int_0^\infty xe^{-px}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \left(\frac{e^{-px}}{-p}\right)' x\ dx = \lim_{t\to\infty}\left([\frac{e^{-px}}{-p}x]_0^t + \frac{1}{p}\int_0^t e^{-px}dx\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{-pe^{-pt}} + \lim_{t\to\infty}[\frac{e^{-px}}{-p^2}]_0^t = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{-p^2e^{pt}} + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{-p^2e^{-pt}} + \frac{1}{p^2}\right) = 0 + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$

Παράδειγμα 2.4.3

Έστω η συνάρτηση f(x)=e^{ax} για x∈ $[0,\infty)$. Τότε L(f(x))(p) = $\frac{1}{p-a}$, $p > a$

Πράγματι, L(e^{ax})=$\int_0^\infty e^{ax}\, e^{-px} dx = \int_0^\infty e^{(-p+a)x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{(-p+a)x} dx =$
$\lim_{t\to\infty} [\frac{e^{(-p+a)x}}{-p+a}]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{e^{(-p+a)t}}{-p+a} - \frac{1}{-p+a}\right) = \frac{1}{p-a}$

Παράδειγμα 2.4.4

Όλες οι φραγμένες συναρτήσεις στο [0, ∞) είναι εκθετικής τάξης. Το M είναι το φράγμα του |f(x)| στο [0, ∞) (άρα, A = 0) και u = 0 (το μικρότερο u).
Όλες οι δυνάμεις της μορφής x^nμε n ∈ N, και όλα τα πολυώνυμα στο [0, ∞) είναι εκθετικής τάξης. Αυτό συμβαίνει γιατί $x^n = e^{ln(x^n)} = e^{nln(x)} = e^{-n} e^{-\mathrm{nx}}$ για όλα τα n ∈ $[0,\infty)${από τη στιγμή που ln(x) ≤ x − 1 για όλα τα x > 0} . Επομένως, M = e^{-n} και u = n. Επίσης, όλες οι συναρτήσεις της μορφής C e^{kx} στο [0,∞) με C, k τυχαίες πραγματικές σταθερές της εκθετικής τάξης. Παίρνουμε M = |C| και u = |k|.

Οι συναρτήσεις της μορφής exp(x^a) για κάθε πραγματικό α > 1δεν είναι εκθετικής τάξης. Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση exp (e^x)

Παράδειγμα 2.4.5

Η συνάρτηση f(x)= $\frac{1}{x}$, $για\ x > 0$ είναι μια εκθετική σειρά καθώς , |f(x)| ≤ x για όλα τα x ∈ [1, ∞). Αλλά, L{ $\frac{1}{x}$ }(s) = $\int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{x} dx$ δεν υπάρχει καθώς

∀ s ∈ R, $\int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{x} dx$ = ∞.

Αν διαλέξουμε σταθερά B >0 {π.χ. B=1} και ορίσουμε

g(x)=$\begin{cases} 0 & ,0 \le x < B \\ \frac{1}{x} & ,B \le x < \infty \end{cases}$, τότε L{g(x)}(s) =$\int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx = \int_B^\infty e^{-sx} \frac{1}{x} dx$ υπάρχει για όλα τα s > 0.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ!

1.Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός τελεστής στο σύνολο των συναρτήσεων, εφόσον υπάρχει. Δηλαδή, για οποιεσδήποτε πραγματικές <<nice>> συναρτήσεις f(x) και h(x) στο [0, ∞) των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace υπάρχουν και για οποιαδήποτε σταθερά c ∈ R ,ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων (f + h)(x) = f(x) + h(x) και (cf)(x) = cf(x) υπάρχει και ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες γραμμικότητας:

(a) L{(f + h)(x)}(s) = L{f(x) + h(x)}(s) = L{f(x)}(s) + L{h(x)}(s),

(b) L{(cf)(x)}(s) = L{cf(x)}(s) = cL{f(x)}(s).

2. Είναι φανερό ότι εάν μια συνάρτηση f : [0, ∞) → R είναι μια nice function και ο μετασχηματισμός Laplace L{f(x)}(s) = $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ υπάρχει , τότε είναι μοναδικός.

3. Με ανώτερα μαθηματικά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής ένας προς ένα στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων για το οποίο υπάρχει. Αν δηλαδή η f(x) και η g(x) είναι δύο πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στο [0, ∞) και υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Laplace τους τότε αν f = g θα έχουμε L{f(x)} = L{g(x)}.

4. Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται και για μιγαδικές συναρτήσεις f: [0, +∞)→ C ως L(f)= L(Re(f))+ i L (Im (f)). Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace επεκτείνεται και για όλες τις τιμές του s ∈ C για τις οποίες το μη γνήσιο ολοκλήρωμα της f(t) e^{-st} συγκλίνει.

5. Ο μετασχηματισμός Laplace απεικονίζει μια συνάρτηση f ορισμένη στο πεδίο του χρόνου t σε μια νέα συνάρτηση F= F(s) στο πεδίο συχνοτήτων.

Παράδειγμα 2.4.6

Θεωρούμε ότι F(s) := L{f(x)}(s) και G(s) := L{g(x)}(s) είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δύο συναρτήσεων f(x), g(x) στο [0,∞) για s > (≥)a ≥ 0 όπου a: σταθερά. Πολλαπλασιάζοντας έχουμε

F(s)G(s) =$\{\int_0^\infty e^{-su} f(u)du\}\{\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv\}= \int_0^\infty g(v)dv \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)du$

Θέτουμε τώρα u + v = t , και έχουμε

F(s)G(s) =$\int_0^\infty g(v)dv \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{f(t - v)dt}$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης θα έχουμε

F(s)G(s)= $\int_0^\infty e^{-st}\,[\int_0^t \mathrm{f(t - v)g(v)dv}]\mathrm{dt}$

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται μπορούμε να το γράψουμε :

(f ∗ g)(t) :=$\int_0^t \mathrm{f(t - v)g(v)dv}$ και το ονομάζουμε συνέλιξη των συναρτήσεων f,g.

Επομένως, έχουμε αποδείξει τον κανόνα ότι

L{(f ∗ g)(x)}(s) = L{f(x)}(s) · L{g(x)}(s), δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων (όπως ορίζεται παραπάνω) είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών τους Laplace.

Μερικές ιδιότητες της συνέλιξης είναι οι ακόλουθες:

a) Αντιμεταθετική : f ∗ g = g ∗ f. Αυτό προκύπτει άμεσα με αλλαγή μεταβλητής t − v = u και έχουμε $\int_0^t f(t-v)g(v)dv = \int_0^t f(u)g(t-u)du$
b) a(f ∗ g)=(a f) ∗ g = f ∗ (a g) για κάθε πραγματική σταθερά a. Συγκεκριμένα , 0 ∗ g =0= f ∗ 0.

c) Είναι γραμμικό σε σχέση με κάθε θέση συνάρτησης. Δηλαδή για οποιαδήποτε πραγματικές σταθερές a και b, έχουμε

(a $f_1 + b\ f_2) *$ g = a (f_1 ∗ g) + b(f_2 ∗ g) και f∗ (ag_1 + bg_2) = a(f ∗ g_1) + b(f ∗ g_2)

d) Η συνέλιξη είναι συνειρμική, δηλ. (f ∗ g) ∗ h = f ∗ (g ∗ h).
e) Γενικά, (f ∗ 1)(x) =$\int_0^x \mathrm{f(x - w)dw} \neq \mathrm{f(x)}$

Π.χ. (sin ∗1)(x) =$\int_0^x \sin(x - w) \cdot 1dw = [\cos(x - w)]_0^x$ =cos(0) − cos(x)=1 − cos(x)$\neq \sin(x)$

f) Αν οι συναρτήσεις f(x), g(x) είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και μια από αυτές συνεχής τότε η (f ∗ g)(x) είναι συνεχής.

g) Αν f(x), g(x) δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο [0, ∞). Τότε (f ∗ g)(x) = 0 για όλα τα x ∈ [0, ∞) αν και μόνο αν f(x) = 0 ή g(x)=0 για όλα τα x ∈ [0, ∞), π.χ.
f ∗ g ≡ 0 ⟸⟹ f ≡ 0 ή g ≡ 0.

Συνάρτηση Δέλτα του Dirac

Η μονάδα ή αλλιώς το σταθερό στοιχείο της συνέλιξης ονομάζεται συνάρτηση Δέλτα Dirac. Θα δείξουμε πως καταλήγουμε στον ορισμό του μέσου του μετασχηματισμού Laplace αλλά και μέσω της συνέλιξης.
Για κάθε ε > 0, θεωρούμε τη δίκλαδη συνάρτηση

$$D_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \le x \le \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < x \end{cases}$$

Και κάθε συνάρτηση f : [0, ∞)→R η οποία είναι συνεχής στο [0,α) για κάποια α>0. Τότε έχουμε ότι :

a) $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$
b) Για κάθε ε > 0,
$\int_0^\infty D_\varepsilon(x)dx = 1$ και έτσι $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty D_\varepsilon(x)dx = 1.$
c) Για 0 < ε < α, χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα και έχουμε
$\int_0^\infty D_\varepsilon(x)\, f(x)\, dx = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon\frac{1}{\varepsilon} f(x_\varepsilon)$= $f(x_\varepsilon)$, για κάποια 0 ≤ $x_\varepsilon \le \varepsilon$.
Στη συνέχεια , λόγω της συνέχειας της f(x) στο [0, α) θα έχουμε ότι
$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^\infty D_\varepsilon(x)\, f(x)\, dx$= f ($\lim_{x\to 0^+} x_\varepsilon$)= f (0)

Λόγω των a) , b) και c) μπορούμε να ορίσουμε το σύμβολο δ(x), ∀ x ∈ R ως

δ(x) = $\begin{cases} \neq 0 & ,x = 0 \\ 0 & ,x \neq 0 \end{cases}$,

και το οποίο πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

(1) $\int_0^\infty \delta(x)dx$ = 1

(2) Για κάθε f : [0, ∞) → R συνεχής στο [0 , α), για κάποια α > 0

$\int_0^\infty f(x)\delta(x)dx$ = f(0)

Η συνάρτηση δ(x) δεν είναι συνάρτηση με την κλασσική έννοια αλλά κατά κάποιον τρόπο είναι ένας τελεστής που προέρχεται από τις διαδικασίες μιας συνάρτησης. Για κάθε α>0, θεωρούμε τη μετατόπιση δ(x − α) του δ(x), και ορίζουμε

$\forall$ α > 0, $\int_0^\infty f(x)\delta(x-\alpha)dx = \int_{-\alpha}^\infty f(u+\alpha)\delta(u)du = \int_0^\infty f(u+a)\delta(u)du = f(0+a) = f(a)$.

Επομένως, για όλα τα x∈ [0, ∞) και για κάθε f(x) ∈ C, έχουμε

(f ∗δ)(x) = $\int_0^x f(x-u)\delta(u)du = \int_0^\infty f(x-u)\delta(u)du = f(x-0) = f(x)$.

Επομένως , f ∗ δ = f = δ ∗ f. Άρα το στοιχείο της μονάδας για τη μεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης στο σύνολο C, είναι η συνάρτηση δ(x) του Dirac.
Ο μετασχηματισμός Laplace για τη συνάρτηση δ(x) και τη μετατόπισή της δ(x-α), για α>0 θα είναι :

L{δ(x)}(s) = $\int_0^\infty e^{-sx}\delta(x) = e^{-0s} = 1$ Και L{δ(x − a)}(s) = $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx}\delta(x-\alpha) = e^{-\alpha s}$

Παράδειγμα 2.4.7

Να αποδείξετε ότι L{sin($\sqrt{x}$)}(s) = $\dfrac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4s}}}{2\, s^{\frac{3}{2}}}$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δυναμοσειρά του sin(x) και θα έχουμε

$$\sin(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1/2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}{s^{n+1+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{4^{n+1}(n+1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 2(n+1)}{n!4(n+1)} \left(\frac{1}{4s}\right)^n =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\, s^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{4s}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}\ e^{-\frac{1}{4s}}}{2\, s^{\frac{3}{2}}}$$

Πίνακας(1) μετασχηματισμού Laplace

	Συνάρτηση h(x), x ∈ [0, ∞)	*Μετασχηματισμός Laplace* L {h(x)} (s)
1.	*α (σταθερά)*	$\frac{\alpha}{s}$, s>0
2.	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, s>a
3.	sin(αx)	$\frac{\alpha}{s^2+a^2}$,s>0
4.	cos (αx)	$\frac{s}{s^2+a^2}$,s>0
5.	x^n, n = 0, 1, 2, 3…	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s> 0, [0! = Γ(1) = 1]
6.	x^p *, p>-1*	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, s> 0, [p! = Γ(p + 1)]
7.	sinh(αx)	$\frac{\alpha}{s^2-a^2}$, s>|a|
8.	cosh(αx)	$\frac{s}{s^2-a^2}$, s>|a|
9.	e^{ax} sin(bx)	$\frac{b}{(s-a)^2+a^2}$, s>α
10.	e^{ax} cos(bx)	$\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2}$, s>α
11.	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, s>α

Πίνακας(2) μετασχηματισμού Laplace

	Συνάρτηση h(x) x ∈ [0, ∞) or x ∈ (0, ∞)	Μετασχηματισμός Laplace L {h(x)} (s), for s>k ≥ 0, k constant
1.	f'(x)	s L{f(x)}(s) − f(0)
2.	f''(x)	s^2 L{f(x)}(s) – s f(0) – f ' (0)
3.	$f^n(x)$	s^n L{f(x)}(s) – s^{n-1} f(0) -….. – $f^{(n-1)}$ (0)
4.	$e^{ax}f(x)$, α: σταθερά	L{f(x)}(s − α) , για s>k + α
5.	H_b(x) · f(x − b) H_b(x) : συνάρτηση Heaviside	e^{-bs}L{f(x)}(s),s>k
6.	$\int_0^x \mathrm{f(t)\ dt}$	$\frac{1}{s}$L{f(x)}(s)
7.	$\int_x^\infty \mathrm{f(t)\ dt}$	$\frac{1}{s}[\int_0^\infty \mathrm{f(t)\ dt} - \mathrm{L\{f(x)\}(s)}]$
8.	$x^n f(x)$, n = 0, 1, 2, 3, …	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}$ L{f(x)}(s)
9.	$x^n f(x)$, n = 0, 1, 2, 3, …	$\int_s^\infty \mathrm{L\{f(x)\}(u)\ du}$
10.	$x^n f(x)$, n = 0, 1, 2, 3, …	$\frac{1}{\alpha}$L{f(x)}($\frac{s}{\alpha}$)
11.	$(-x)^n f(x)$, n = 0, 1, 2, 3, …	$\frac{d^n}{ds^n}$ L{f(x)}(s)

Εφαρμογή: Θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace για να υπολογίσουμε γενικευμένα ολοκληρώματα.

Π.χ. 1) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\infty e^{-3x}\,\mathrm{sinh(x)\,sin(x)\,dx} = \frac{6}{85}$

θεωρούμε τη συνάρτηση sinh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, σταθερά k > 0. Γενικά έχουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-\mathrm{kx}}\,\mathrm{sinh(x)\,sin(x)\,dx} =$$

$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-kx} e^{x}\,\sin(x)\,dx$ - $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-kx} e^{-x}\,\sin(x)\,dx$=

$\frac{1}{2}\,L\,\{e^x \mathrm{sin(x)}\}\mathrm{(k)} \;-\frac{1}{2}\,L\,\{e^{-x}\mathrm{sin(x)}\}\mathrm{(k)}$

με τη χρήση του παραπάνω πίνακα(1) έχουμε

$\frac{1}{2}\,[\frac{1}{(\mathrm{k}-1)^2+1^2} - \frac{1}{(\mathrm{k}+1)^2+1^2}]$ = $\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{k}^4+4}$

Άρα, για k=3, θα πάρουμε $\int_0^\infty e^{-3x}\,\mathrm{sinh(x)\,sin(x)\,dx} = \frac{6}{85}$

Π.χ. 2) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}x}\,\frac{\mathrm{sinh(x)\,sin(x)}}{x}\;\mathrm{dx} = \frac{\pi}{8}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση sinh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, σταθερά k > 0. Γενικά έχουμε ότι

$\int_0^\infty e^{-\mathrm{kx}}\;\frac{\mathrm{sinh(x)\,sin(x)}}{x}\,\mathrm{dx} =$

$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{e^x\,\sin(x)}{x}\,dx$ - $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{e^{-x}\,\sin(x)}{x}\,dx$

με τη χρήση του παραπάνω πίνακα(2) έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_k^\infty \mathrm{L\{e^x\,sin(x)\}(u)du} - \frac{1}{2}\int_k^\infty \mathrm{L\{e^{-x}\,sin(x)\}(u)du} =$$

$$\frac{1}{2}\int_k^\infty \frac{1}{(u-1)^2+1^2}\,du - \frac{1}{2}\int_k^\infty \frac{1}{(u+1)^2+1^2}\,du =$$

$\frac{1}{2}[\arctan(v)]_{k-1}^{k+1} = \frac{1}{2}[\arctan(\mathrm{k}+1) - \arctan(\mathrm{k}-1)]$= $\frac{1}{2}$ arctan $(\frac{2}{k^2})$

Για κ=$\sqrt{2}$, θα έχουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{2}x}\,\frac{\sinh(\mathrm{x})\,\sin(\mathrm{x})}{x}\ \mathrm{dx}\ =\frac{1}{2}\arctan(1)=\frac{\pi}{8}$$

2.4.2 Αντίστροφη διαδικασία μετασχηματισμού Laplace

Στις συνεχείς συναρτήσεις η μετατροπή Laplace είναι ένας τελεστής ένας προς έναν. Ο μετασχηματισμός Laplace δύο διαφορετικών συναρτήσεων είναι διαφορετικός. Το ίδιο ισχύει ουσιαστικά και για τις <<nice>> ασυνεχείς συναρτήσεις στις οποίες μπορούμε να επιτρέψουμε δύο συναρτήσεις να διαφέρουν σε «λίγα» εξαιρετικά σημεία (σημεία ασυνέχειας). Έτσι, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.4.3
Θεωρούμε μια συνάρτηση f(x) με μετασχηματισμό Laplace g(s) = L{f(x)}(s). Μπορούμε να πούμε ότι η f(x) είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της g(x) και γράφουμε $L^{-1}\{g(x)\}(x)=f(x)$.

Ο L^{-1} είναι το αντίστροφο του γραμμικού τελεστή L, και αποτελεί από μόνος του έναν γραμμικό τελεστή. Γενικά, αν ξέρουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης, εφαρμόζοντας σε αυτήν τον αντίστροφο μετασχηματισμός Laplace μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση.

Ουσιαστικά έχουμε και χρησιμοποιούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\mathrm{f(x)} \xrightarrow[L]{} \mathrm{L\{f(x)\}(s)\ =g(s)} \xrightarrow[L^{-1}]{} L^{-1}\mathrm{\{g(s)\}(x)\ =f(x)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δεν ορίζεται πάντα.
2. Αν μια συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace F=F(s), s$\in C$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F ορίζεται μέσω του τύπου f(t)= $\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st}F(s)ds$,όπου γ $\in R$, οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός που εκλέγεται έτσι ώστε η κατακόρυφος Re(s)=γ να περιέχει όλους τους πόλους της F στο αριστερό της μέρος.
3. Αν η αρχική συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί αντίστροφοι μετασχηματισμοί.

Έστω F, G οι μετασχηματισμοί Laplace δύο συναρτήσεων f, g :[0, +∞)→R. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

1. Γραμμικότητα

$$L^{-1}(aF\pm bG)=a\ L^{-1}(F)\pm bL^{-1}(G).$$

Πράγματι, $L^{-1}(aF \pm bG)$=$L^{-1}\big(aL(f) \pm bL(g)\big) =$
$L^{-1}\big(L(af \pm bg)\big) = af \pm bg = a\, L^{-1}(F) \pm b\, L^{-1}(G)$.

2. Συνέλιξη

$$L^{-1}\big(F(s)G(s)\big)(t) = f * g(t)$$

Παράδειγμα 2.4.8

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διαδικασία να βρείτε τη συνάρτηση f(x) όταν έχουμε L{e^{-5x}}$(s) \; = \frac{1}{s+5}$.

f(x)= $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}(x)$= e^{-5x} ή σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία έχουμε

$e^{-5x}\ \overrightarrow{L}$ L{e^{-5x}}(s)=$\frac{1}{s+5}\ \overrightarrow{L^{-1}}\ \ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}(x)$= e^{-5x}

Παράδειγμα 2.4.9

Αν ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης f(x) είναι L{f(x)}(s) = $\frac{3}{s^2+4}$. Να αποδείξετε ότι f(x)= $\frac{3}{2}$ sin(2x).

$\frac{3}{2}$ sin(2x)$\overrightarrow{L}$ L{ $\frac{3}{2}$ sin(2x)}(s) = $\frac{3}{s^2+4}$ $\overrightarrow{L^{-1}}$ $L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+4}\right\}(x)$ =$\frac{3}{2}$ sin(2x).

Παράδειγμα 2.4.10

Να αποδείξετε ότι $L^{-1}\left\{e^{-a\sqrt{s}}\right\}(x) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\ x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{-a^2}{4x}}$, όπου σταθερά α>0.

Αν L{f(x)}(s) = g(s), τότε έχουμε L{f ’ (x)}(s) = s g(s) − f(0).
Αν f(0) = 0 και L^{-1}{s g(s)}(x) = f ‘ (x) τότε για

f(x) := erfc ($\frac{\alpha}{2}\sqrt{x}$)= 1 - $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha\sqrt{x}}{2}} e^{-u^2}\,du$ έχουμε ότι
f(0)=1-1=0

Άρα g(s) := L{f(x)}(s) = $\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$

Έτσι έχουμε L^{-1}\{s · g(s)\}(x) $=L^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}$ = f ’ (x) = $\frac{d}{dx}(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha\sqrt{x}}{2}} e^{-u^2} du)$ $=\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\ x^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{-a^2}{4x}}$

2.5 Εφαρμογές

Εφαρμογή 1: Θα παρατηρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται για να δώσει πλήρεις λύσεις προβλημάτων αρχικής τιμής στις διαφορικές εξισώσεις. Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.5.1

Η δυναμοσειρά $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\ (\frac{x}{2})^{2n}$ συγκλίνει για όλα τα x∈ R και αποτελεί λύση της συνάρτηση Bessel 1ου είδους μηδενικής τάξης, δηλαδή της εξίσωσης t y’’ + y’ + t y = 0, y(0)=1, y ‘(0)=0.

Ο μετασχηματισμός Laplace του άνωθεν προβλήματος είναι

$$L\{J_0(x)\}(s) = L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\ \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right\}(s) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\ \frac{1}{2^{2n}} L\{\ x^{\ 2n}\}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\ \frac{1}{2^{2n}}\ \frac{(2n)!}{s^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{s^{2n}}\ (1)$$

Χρησιμοποιώντας τη σύγκλιση διωνυμικής σειράς για s >1 , έχουμε ότι

(1)= $\frac{1}{s}\left(1\ + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{s}\ (\ \frac{s^2+1}{s^2}\ )^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ το οποίο ορίζεται για κάθε s ≥ 0.

Λόγω της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace μπορούμε να πούμε ότι

$\boldsymbol{L\{J_0(x)\}(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+s^2}}}$ για κάθε s ≥ 0.

Επομένως,

$\boldsymbol{L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right\}(x) = J_0(x)}$

Παράδειγμα 2.5.2

Η επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές οδηγεί στην επίλυση μιας καινούργιας διαφορικής εξίσωσης , κάτι που μπορεί να μην είναι πάντα δυνατόν. Για παράδειγμα, θεωρούμε το πρόβλημα

$y'' + t\,y' + t^3 y = 0$, $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$

Ο μετασχηματισμός Fourier το παραπάνω προβλήματος μας οδηγεί στο παρακάτω πρόβλημα.

$$(s^2Y - s\,a_0 - a_1) - \frac{d}{ds}(sY - a_0) - \frac{d^3Y}{ds^3} = 0 \text{ ή}$$

$$\frac{d^3Y}{ds^3} + s\frac{dY}{ds} + (1 - s^2)Y = -s\,a_0 - a_1$$

Το πρόβλημα στο οποίο καταλήξαμε είναι πιο δύσκολο να επιλυθεί από το αρχικό.

Παράδειγμα 2.5.3

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικής οριακής τιμής με μια μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial \mathrm{u(x,t)}}{\partial \mathrm{t}} = \kappa\ \frac{\partial^2 \mathrm{u(x,t)}}{\partial \mathrm{x}^2}\ , \kappa > 0\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}, \gamma\iota\alpha\ x > 0\ \kappa\alpha\iota\ t > 0$$

u(x, 0) = 0, για x ≥ 0

u(0, t) = a, όπου a σταθερά, για t >0

u(∞, t) = $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \gamma\iota\alpha\ t > 0$

Αυτό είναι ένα μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος για τη μεταφορά της θερμότητας κατά μήκος μιας ομοιόμορφης και μονωμένης ράβδου άπειρου μήκους , τοποθετημένη στον θετικό άξονα r και με αριστερό άκρο την αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση u(x,t) μας δείχνει τη θερμοκρασία στη θέση x τη χρονική στιγμή t. Το k είναι μια θετική σταθερά . Εξαρτάται από το ομοιόμορφο υλικό της ράβδου, το οποίο είναι καλός αγωγός της θερμότητας.

Στην αρχή, τη χρονική στιγμή t=0, η ράβδος σε κάθε της σημείο έχει την ίδια θερμοκρασία. Στη συνέχεια μια πηγή εκπέμπει θερμότητα στην αρχή της ράβδου με τέτοιον τρόπο ώστε :

1) Η θερμοκρασία στην αρχή της ράβδου (x=0) παραμένει σταθερή και ίση με a για κάθε t>0.
2) Η θερμοκρασία στο τέλος της ράβδου (x=∞) είναι πάντα η αρχική θερμοκρασία , δηλαδή μηδέν.

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace. Θεωρούμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης u(x,t) τη σχέση

U(x, s) = L{ u(x,t)}(s)=$\int_0^\infty e^{-st}\ u(x,t)dt$

Σύμφωνα με την 1η σχέση του **πίνακα 2**,και παραγωγίζοντας μέσα στο ολοκλήρωμα δύο φορές , έχουμε τη μερική διαφορική εξίσωση

s U(x, s) = k $\frac{\partial^2\ U(x,s)}{\partial x^2}$.

Όπως φαίνεται, η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

U(x ,s)= $c_1(s)\ e^{x\sqrt{\frac{s}{k}}} + c_2(s)\ e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}}$.

Από τις 2 τελευταίες συνθήκες έχουμε

U(0,s) = $\frac{a}{s}$, U($\infty, t) = \lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0$.

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να έχουμε $c_1(s) = 0$ και c_2 (s) = $\frac{a}{s}$.

Επομένως, μετασχηματισμός Laplace της λύσης του προβλήματος είναι U(x,s) = $\frac{a}{s}\, e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. file:///C:/Users/User/Downloads/Ioannis%20Markos%20Roussos%20-%20Improper%20Riemann%20Integrals-Chapman%20and%20Hall_CRC%20(2013).pdf
2. https://esiros.sites.sch.gr/wordpress/?p=2294
3. http://mycourses.ntua.gr/courses/SURVEY1094/document/MATH._ANALUSH_-SATM-.pdf
4. http://archive.eclass.uth.gr/eclass/modules/document/file.php/DIB103/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%91%CE%BD%CE%AC%CE%BB%CF%85%CF%83%CE%B7%20%CE%99-%CE%97%CE%BB%CE%B5%CE%BA%CF%84%CF%81%CE%BF%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CE%A3%CF%8D%CE%B3%CE%B3%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%B1/Chapter9.pdf
5. https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/5619/triantafylloum_bessel.pdf?sequence=3
6. http://users.sch.gr//jblack/autosch/iware/files/Chap16.pdf
7. https://users.auth.gr/massen/MMPII/MMF-II-2010.pdf
8. Louis Brand, Μαθηματική ανάλυση, ελληνική μαθηματική εταιρεία, 1984
9. http://www.math.ntua.gr/~stavraka/ODE_PDE_WEB/335-418_Kefalaio%207.pdf
10. https://users.auth.gr/natreas/diaforikes/topo-Laplace.pdf