



«Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας»

«Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά»

Διπλωματική Εργασία

«Η μοντελοποίηση μαθηματικού προβλήματος στα πλαίσια
της διεπιστημονικής προσέγγισης της εκπαίδευσης»

Χρήστος Λαμπράκης

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή φοιτήτριας («συγγραφέας / δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας / δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας / δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και πε-ριουσιακών του δικαιωμάτων.



«Η μοντελοποίηση μαθηματικού προβλήματος στα πλαίσια της διεπιστημονικής προσέγγισης της εκπαίδευσης»

Χρήστος Λαμπράκης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Ευγένιος Αυγερινός

Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πάτρα, Μάιος 2025

στην Ευφροσύνη

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία δε θα είχε περατωθεί χωρίς να έχω τη στήριξη συγκεκριμένων ανθρώπων τους οποίους θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη τόσο για την υπόδειξη του θέματος της εργασίας όσο και για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κύριο Ευγένιο Αυγερινό για τις επισημάνσεις και τις πολύτιμες συμβουλές του. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για τη στήριξη και την ενθάρρυνση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Αυτή η εργασία διερευνά τις διεπιστημονικές διαστάσεις της διδασκαλίας και της μάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, δίνοντας έμφαση στις κρίσιμες συνδέσεις με τον πραγματικό κόσμο και τα πεδία STEM. Τα τρέχοντα εκπαιδευτικά παραδείγματα υποστηρίζουν όλο και περισσότερο μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στη μάθηση, όπου τα μαθηματικά δεν είναι απομονωμένα από τις εφαρμογές τους, αλλά βασίζονται σε πραγματικές συνθήκες. Βασισμένη σε προκαταρκτικά αποτελέσματα από μια ολοκληρωμένη έρευνα που ανατέθηκε για το 14ο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICME-14), αυτή η μελέτη διεξάγει μια συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση για να αποσαφηνίσει τις σχέσεις μεταξύ της μαθηματικής μοντελοποίησης, των μαθηματικών και της διεπιστημονικής εκπαίδευσης.

Τα ευρήματα υπογραμμίζουν ότι η ισχυρή κατανόηση των πραγματικών εφαρμογών των μαθηματικών είναι απαραίτητη για την προώθηση της διεπιστημονικής συνεργασίας μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών. Η ανασκόπηση εντοπίζει βασικά ζητήματα και προκλήσεις που προκύπτουν κατά την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης σε εκπαιδευτικά πλαίσια, ιδιαίτερα όσον αφορά το βάθος της μαθηματικής κατανόησης που απαιτείται για την αποτελεσματική ενσωμάτωση STEM. Υποστηρίζει ότι μια καλά ανεπτυγμένη σχέση μεταξύ της μαθηματικής μοντελοποίησης και των εφαρμογών του πραγματικού κόσμου όχι μόνο ενισχύει τη συμμετοχή των μαθητών αλλά επίσης εμπλουτίζει την εκπαιδευτική εμπειρία γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πράξης.

Η μεταπτυχιακή εργασία είναι δομημένη ώστε να παρέχει μια ολοκληρωμένη επισκόπηση των θεωρητικών πλαισίων, των ερευνητικών ερωτημάτων και των μεθοδολογιών συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, με αποκορύφωμα τη σύνθεση των αποτελεσμάτων και τη συζήτηση των επιπτώσεων για την ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών και την παιδαγωγική. Αντιμετωπίζοντας αυτές τις διεπιστημονικές πτυχές, η έρευνα συνεισφέρει πολύτιμες γνώσεις στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, υποστηρίζοντας μια παιδαγωγική αλλαγή που δίνει προτεραιότητα στη συνάφεια του πραγματικού κόσμου και τη συνεργατική μάθηση στους κλάδους STEM. Τελικά, στοχεύει να ενημερώσει τους εκπαιδευτικούς και τους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής σχετικά με αποτελεσματικές στρατηγικές για την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποί-

ησης στις διδακτικές πρακτικές, ενισχύοντας έτσι τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών και προετοιμάζοντας τους μαθητές για την πολυπλοκότητα του σύγχρονου κόσμου.

Λέξεις - Κλειδιά

Διεπιστημονικότητα, Μαθηματικά, Μαθηματική μοντελοποίηση, Σχέση με το πραγματικό κόσμο, STEM

«Mathematical problem modeling within the context of an interdisciplinary approach to education»

«Christos Lamprakis»

Abstract

This postgraduate work explores the interdisciplinary dimensions of teaching and learning mathematical modeling within the context of mathematics education, emphasizing the critical connections to the real world and STEM fields. Current educational paradigms increasingly advocate for an integrated approach to learning, where mathematics is not isolated from its applications but is instead grounded in real-world contexts. Drawing on preliminary results from a comprehensive survey commissioned for the 14th International Congress on Mathematical Education (ICME-14), this study conducts a systematic review of the literature to elucidate the relationships between mathematical modeling, mathematics, and interdisciplinary education.

The findings highlight that a robust understanding of the real-world applications of mathematics is essential to foster disciplinary collaboration among educators and researchers. The review identifies key issues and challenges that arise when integrating mathematical modeling into educational frameworks, particularly with respect to the depth of mathematical understanding required for effective STEM integration. It argues that a well-developed relationship between mathematical modeling and real-world applications not only enhances student engagement, but also enriches the educational experience by bridging the gap between theory and practice.

The work is structured to provide a comprehensive overview of theoretical frameworks, research questions, and bibliographic data collection methodologies, culminating in a synthesis of results and a discussion of the implications for curriculum development and pedagogy. By addressing these interdisciplinary aspects, the research contributes valuable insight to the field of mathematics education, advocating for a pedagogical shift that prioritizes real-world relevance and collaborative learning in STEM disciplines. Ultimately, this work aims to inform educators and policy makers about effective strategies for integrating mathematical modeling into teaching practices, thus enhancing student learning outcomes and preparing learners for the complexities

of the modern world.

Keywords: Interdisciplinary, Mathematics, Mathematical modeling, Relationships to the real world, STEM.

Περιεχόμενα

Περίληψη	ix
Abstract	xii
Κατάλογος Σχημάτων	xvii
Κατάλογος Πινάκων	xix
Συντομογραφίες & Ακρωνύμια	xxi
1 Εισαγωγή	1
1.1 Αντικείμενο της Μεταπτυχιακής Εργασίας	2
1.2 Σκοπός και στόχος εργασίας	3
1.3 Δομή της εργασίας	4
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	5
2.1 Θεμέλια Μαθηματικής Μοντελοποίησης	5
2.1.1 Η Ιστορική της εξέλιξη	5
2.1.2 Η εξέλιξή της στην διδασκαλία	8
2.2 Σημαντικότητα μαθηματικής μοντελοποίησης	10
2.2.1 Τελευταίες εξελίξεις στη Μαθηματική Μοντελοποίηση	11
2.2.2 Περιορισμοί της μαθηματικής μοντελοποίησης	13
2.3 Ο κύκλος μοντελοποίησης ως εργαλείο εννοιολόγησης και ανάλυσης	15
2.4 Διεπιστημονικότητα στην Εκπαίδευση	21
2.4.1 Ορισμός και επίπεδα	21
2.4.2 Μαθηματική μοντελοποίηση και διεπιστημονικότητα	23
2.4.3 Μαθηματική μοντελοποίηση και μια καλά κατανοητή σχέση με τον πραγματικό κόσμο	24
3 Ερευνητικά Ερωτήματα	27
3.1 Κεντρικές Ερευνητικές Ερωτήσεις	28
Διπλωματική Εργασία	xiii

3.1.1	Ερώτηση 1	28
3.1.2	Ερώτηση 2	28
3.1.3	Ερώτηση 3	28
3.1.4	Ερώτηση 4	29
3.1.5	Ερώτηση 5	29
3.1.6	Ερώτηση 6	29
3.2	Επιστημονική Αξία των Ερωτήσεων	30
3.2.1	Συνάφεια με την βιβλιογραφία	30
3.2.2	Ευθυγράμμιση με τη Μεθοδολογία	30
3.2.3	Συμβολή στην Εκπαιδευτική Πρακτική	30
3.2.4	Συμβολή στη Θεωρητική Κατανόηση	31
3.2.5	Μακροπρόθεσμες Επιπτώσεις	31
3.3	Υποθέσεις της έρευνας	31
3.3.1	Υπόθεση 1η	32
3.3.2	Υπόθεση 2η	32
3.3.3	Υπόθεση 3η	32
4	Μεθοδολογία	35
4.1	Αναλυτική Επιθεώρηση Λογοτεχνίας	35
4.2	Διαδικασίες συλλογής δεδομένων	36
4.3	Τεχνικές Ανάλυσης Δεδομένων	38
4.4	Δεοντολογικά ζητήματα	39
4.5	Περιορισμοί της Μελέτης	41
4.6	Περίληψη Βασικών Ευρημάτων	42
4.7	Συμπέρασμα	44
5	Συγκέντρωση Αποτελεσμάτων – Σύνθεση Δεδομένων	47
5.1	Διάπλεξη μαθηματικής μοντελοποίησης με περιβαλλοντικά θέματα	47
5.2	Η Μαθηματική Μοντελοποίηση ως Εργαλείο Διεπιστημονικής Εκπαίδευσης Μαθητών Πληροφορικής και Κυβερνοασφάλειας	52
5.2.1	Σύνδεση με θέματα οικονομίας	55
5.3	Προκλήσεις και ευκαιρίες της μαθηματικής μοντελοποίησης στην Βιολογία και Ιατρική	56

5.3.1	Πρώιμες εξελίξεις στη Μαθηματική Μοντελοποίηση στη Βιολογία και την Ιατρική	57
5.3.2	Εφαρμογές στη Βιολογία	60
5.3.3	Εφαρμογές στην Ιατρική	62
5.4	Διεπιστημονική διδασκαλία μεταξύ μαθηματικών και φυσικής	64
5.4.1	Παραδείγματα Διεπιστημονικών Ενοτήτων Διδασκαλίας	65
6	Συμπεράσματα και συζήτηση για μελλοντικές έρευνες	67
	Βιβλιογραφικές αναφορές	71

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Κύκλος μοντελοποίησης	16
-----	---------------------------------	----

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Φάσεις στη διαδικασία μοντελοποίησης	18
4.1	Βιβλιογραφική συστηματική αναφορά	46
5.1	Θέματα, κατηγορίες και δείγματα δηλώσεων για την προστασία του περιβάλ- λοντος μέσω χρήσης πλαστικών μπουκαλιών	50
5.2	Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στη Βιολογία και Ιατρική	58
5.3	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) στη Βιολογία και την Ιατρική	59

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

ΣΔΕ	Συνήθης Διαφορικές Εξισώσεις
ΜΔΕ	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
ICME	Διεθνή Συνέδρια για τη Μαθηματική Εκπαίδευση
ICTMA	Διεθνή Συνέδρια για τη Διδασκαλία Μαθηματικής Μοντελοποίησης
STEM	Επιστήμη, Τεχνολογία, Μηχανική, Μαθηματικά
S-I-R	Ευάλωτοι-Μολυσμένοι-Αναρρώσαντες

1. Εισαγωγή

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια δυναμική διαδικασία που γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ των θεωρητικών μαθηματικών και των εφαρμογών τους στον πραγματικό κόσμο. Μέσα από τη μοντελοποίηση, τα μαθηματικά δεν περιορίζονται σε αφηρημένες έννοιες, αλλά αποκτούν πρακτική διάσταση, επιτρέποντας στους μαθητές να αντιμετωπίζουν πραγματικά προβλήματα. Η προσέγγιση αυτή έχει αναγνωριστεί ως καίριας σημασίας για τη βελτίωση των δεξιοτήτων κριτικής σκέψης, επίλυσης θεμάτων και λήψης αποφάσεων. Από την εισαγωγή της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική κοινότητα, η σημασία της έχει αυξηθεί σταδιακά. Τα ICME (Διεθνή Συνέδρια για τη Μαθηματική Εκπαίδευση) και ICTMA (Διεθνή Συνέδρια για τη Διδασκαλία Μαθηματικής Μοντελοποίησης) έχουν προσφέρει σημαντική ώθηση στη θεσμοθέτηση της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική πρακτική. Επιπλέον, η σύνδεση της μαθηματικής μοντελοποίησης με τις αρχές του STEM την καθιστά ένα από τα πιο επίκαιρα εργαλεία για την ενίσχυση της διεπιστημονικότητας στην εκπαίδευση.

Η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει ένα μοναδικό πλαίσιο για τη διεπιστημονική εκπαίδευση, καθώς επιτρέπει τη σύνθεση γνώσεων από διάφορους επιστημονικούς κλάδους, όπως η φυσική, η χημεία, η βιολογία και οι κοινωνικές επιστήμες. Μέσω της χρήσης ρεαλιστικών ζητημάτων, οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες που τους βοηθούν να αναγνωρίζουν, να διατυπώνουν και να επιλύουν προβλήματα με σύνθετες διαστάσεις. Για παράδειγμα, η εφαρμογή μαθηματικών μοντέλων για την κατανόηση της κλιματικής αλλαγής απαιτεί συνδυασμό γνώσεων από τη φυσική, τη γεωγραφία, τα μαθηματικά και τις κοινωνικές επιστήμες. Αυτή η προσέγγιση όχι μόνο ενισχύει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά και ενθαρρύνει την ανάπτυξη ικανοτήτων συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών πεδίων.

Σε πολλές χώρες, η πολιτική στήριξη για την ένταξη του STEM στα εκπαιδευτικά συστήματα έχει οδηγήσει σε αυξημένη έμφαση στη μαθηματική μοντελοποίηση. Οργανισμοί όπως η UNESCO και ερευνητικά ιδρύματα παγκοσμίως υπογραμμίζουν την ανάγκη για εκπαιδευτικά προγράμματα που ενσωματώνουν τη μαθηματική μοντελοποίηση ως μέσο για τη διεπιστημονική εκπαίδευση. Ειδικότερα, η ικανότητα των μαθητών να αναπτύσσουν και να ελέγχουν μαθηματικά μοντέλα θεωρείται απαραίτητη δεξιότητα για τη συμμετοχή τους σε σύγχρονες

επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις. Η μαθηματική μοντελοποίηση προσφέρει μια μοναδική ευκαιρία για την εκπαίδευση να γίνει πιο σχετική και πρακτική για τους εκπαιδευόμενους. Εστιάζοντας στη σύνδεση θεωρητικών μαθηματικών εννοιών με πραγματικά προβλήματα, οι μαθητές μπορούν να προσεγγίζουν τη γνώση με πιο δημιουργικό και διεπιστημονικό τρόπο. Αυτό δεν συμβάλλει μόνο στην κατανόηση των μαθηματικών, αλλά δημιουργεί και ένα ισχυρό θεμέλιο για τη μελλοντική τους εξέλιξη σε επιστημονικούς και επαγγελματικούς τομείς.

1.1 Αντικείμενο της Μεταπτυχιακής Εργασίας

Η συγκεκριμένη διατριβή εστιάζει στη μαθηματική μοντελοποίηση ως πυρήνα για τη διεπιστημονική εκπαίδευση. Ο στόχος είναι η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η μοντελοποίηση μπορεί να λειτουργήσει ως ένα εργαλείο γεφύρωσης ανάμεσα στα μαθηματικά, τον πραγματικό κόσμο και τις υπόλοιπες επιστημονικές περιοχές που περιλαμβάνονται στο STEM (Επιστήμη, Τεχνολογία, Μηχανική και Μαθηματικά). Η βιβλιογραφική έρευνα επικεντρώνεται στη διασύνδεση αυτών των πεδίων μέσω πραγματικών προβλημάτων και την ενίσχυση της κατανόησης των μαθητών για το πώς τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν πρακτικά σε ποικίλα επιστημονικά και κοινωνικά πλαίσια.

Οι στόχοι της έρευνας αποσκοπούν στην εμπέδωση, προόδο και εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης ως εργαλείου διεπιστημονικής εκπαίδευσης. Αναπτύσσοντας αντίληψη για την διεπιστημονικότητα, διερευνάται ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματική μοντελοποίηση επιτρέπει την ενσωμάτωση διαφορετικών επιστημονικών προσεγγίσεων σε μια συνεκτική εκπαιδευτική πρακτική. Ενισχύοντας τη σχέση μαθηματικών και πραγματικού κόσμου, αναλύονται οι μηχανισμοί που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να γεφυρώσουν τη θεωρητική γνώση με τις πρακτικές εφαρμογές. Σημαντική είναι η στήριξη εκπαιδευτικών στρατηγικών καθώς, γίνεται ανάπτυξη εκπαιδευτικών μεθόδων που ενισχύουν τη χρήση της μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση και την εκπαίδευση STEM. Παρόλα αυτά πρέπει να γίνει και η κατανόηση των δυσκολιών και των ζητημάτων που προκύπτουν κατά την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης σε διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα και επίπεδα.

Η εργασία αυτή, φιλοδοξεί να συνεισφέρει ουσιαστικά στην εκπαιδευτική κοινότητα προσφέροντας, ένα θεωρητικό και πρακτικό πλαίσιο για την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επίσης παρέχοντας κατευθυντήριες γραμμές για τη χρήση της μοντελοποίησης ως εργαλείου ενίσχυσης της διεπιστημονικότητας, ενισχύοντας τις δυνα-

τότητες της ολοκλήρωσης STEM και τελικά στρατηγικές για την εξισορρόπηση θεωρητικού βάθους και πρακτικών εφαρμογών, ώστε να ενισχυθεί η μαθησιακή εμπειρία των μαθητών.

1.2 Σκοπός και στόχος εργασίας

Ο σκοπός της είναι να διερευνήσει πώς η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να λειτουργήσει ως πλαίσιο διεπιστημονικής εκπαίδευσης, υποβοηθώντας τη σύνδεση μαθηματικών και πραγματικού κόσμου. Πιο συγκεκριμένα, να γίνει εμβάθυνση στην αντίληψη του πώς τα μαθηματικά μπορούν να ενσωματωθούν σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία μέσω πραγματικών προβλημάτων. Επιπλέον να αναπτυχθούν μαθηματικές δεξιότητες, παρέχοντας ευκαιρίες στους μαθητές να αποκτήσουν βαθιά κατανόηση μαθηματικών εννοιών μέσα από αυθεντικές εφαρμογές. Να εξασφαλιστεί ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δεν απλοποιεί υπερβολικά τα μαθηματικά, αλλά προάγει τη θεωρητική κατανόηση παράλληλα με την πρακτική εφαρμογή.

Για να επιτευχθεί ο παραπάνω σκοπός, η έρευνα επικεντρώνεται στους εξής ειδικούς στόχους, όπως η κατανόηση της σχέσης μαθηματικών και πραγματικού κόσμου όπου γίνεται εξέταση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση για να ενώσουν τη θεωρία και την πρακτική. Μέσω της ανάλυσης παραδειγμάτων αυθεντικών προβλημάτων που επιτρέπουν τη χρήση μαθηματικών μοντέλων για την κατανόηση και επίλυση ρεαλιστικών ζητημάτων. Ένας άλλος τρόπος είναι η ανάλυση προκλήσεων στη διεπιστημονικότητα, μέσω του εντοπισμού των βασικών δοκιμασιών που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή διεπιστημονικών πρακτικών στην εκπαίδευση και την κατανόηση των περιορισμών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί στην ενσωμάτωση πολλαπλών επιστημονικών πεδίων. Η προώθηση της συνεργατικής μάθησης είναι μια ακόμη μέθοδος, όπου γίνεται διερεύνηση του ρόλου της συνεργασίας και της ομαδικής εργασίας κατά την επίλυση προβλημάτων μαθηματικής μοντελοποίησης και εξετάζεται το πώς παιδιά με διαφορετικές δεξιότητες και γνώσεις μπορούν να συνεισφέρουν αποτελεσματικά σε διεπιστημονικά έργα. Μια ενδιαφέρουσα μέθοδος είναι, να εξασφαλίσουν το μαθηματικό βάθος, καθώς γίνεται ανάλυση του πώς μπορεί να διατηρηθεί η μαθηματική ακρίβεια και ο θεωρητικός χαρακτήρας της εκπαίδευσης κατά τη χρήση μοντελοποίησης σε διεπιστημονικά πλαίσια. Κατατίθενται, προτάσεις για εκπαιδευτικές μεθόδους που εξισορροπούν το μαθηματικό βάθος με τις πρακτικές εφαρμογές. Τέλος αναφορικά με την ενσωμάτωση STEM, να καθοριστούν στρατηγικές για την ομαλή ένταξη της μαθηματικής μοντελοποίησης στα STEM μαθήματα και να παρέχουν κατευθυντήριες γραμμές για εκπαιδευτικούς ώστε να προσαρμό-

σουν τις διδακτικές τους μεθόδους για την υποστήριξη της διεπιστημονικότητας.

1.3 Δομή της εργασίας

Στο κεφάλαιο 2, αναλύεται η υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση, τη διεπιστημονικότητα και τη σχέση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο. Περιγράφονται θεωρητικά μοντέλα, όπως οι κύκλοι μοντελοποίησης, και οι διεπιστημονικές προσεγγίσεις στην εκπαίδευση. Στο κεφάλαιο 3 διατυπώνονται τα κύρια ερωτήματα που καθοδηγούν την έρευνα, συνδέοντας τα θεωρητικά ευρήματα με τις πρακτικές εφαρμογές και τους στόχους της διατριβής. Στο κεφάλαιο 4, παρουσιάζεται η μεθοδολογία συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, όπου περιγράφει τη συστηματική προσέγγιση που ακολουθήθηκε για τη συλλογή, κωδικοποίηση και ανάλυση βιβλιογραφικών δεδομένων. Εξηγεί τα εργαλεία και τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την εξασφάλιση αξιοπιστίας και εγκυρότητας. Κατά την ανάπτυξη του κεφαλαίου 5, θα παρουσιαστούν τα ευρήματα της έρευνας, συνδέοντας τα με τα ερωτήματα και τους στόχους της διατριβής. Περιλαμβάνει ανάλυση παραδειγμάτων και συνθετικά συμπεράσματα. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα αναλυθούν και συζητηθούν τα ευρήματα, και θα εξετασθούν πρακτικές και θεωρητικές επιπτώσεις τους προτείνοντας κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2. Θεωρητικό υπόβαθρο

2.1 Θεμέλια Μαθηματικής Μοντελοποίησης

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι η εφαρμογή των μαθηματικών για την περιγραφή ζητημάτων του πραγματικού κόσμου και τη διερεύνηση σημαντικών ερωτημάτων που προκύπτουν από αυτά. Χρησιμοποιώντας μαθηματικά εργαλεία, το πρόβλημα του πραγματικού κόσμου μεταφράζεται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα που μιμείται το πρόβλημα του πραγματικού κόσμου. Λαμβάνεται μια λύση στο μαθηματικό πρόβλημα, η οποία ερμηνεύεται στη γλώσσα των προβλημάτων του πραγματικού κόσμου για να γίνουν προβλέψεις για τον πραγματικό κόσμο. Με τον όρο προβλήματα του πραγματικού κόσμου, εννοούμε ζητήματα από τη βιολογία, τη χημεία, την οικολογία, το περιβάλλον, τη μηχανική, τη φυσική, τις κοινωνικές επιστήμες, τη στατιστική και ούτω καθεξής. Η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να περιγραφεί ως μια δραστηριότητα που επιτρέπει σε έναν μαθηματικό να είναι βιολόγος, χημικός, οικολόγος ή οικονομολόγος ανάλογα με το τι αντιμετωπίζει. Ο πρωταρχικός στόχος ενός μοντελιστή είναι να διεξάγει πειράματα για τη μαθηματική αναπαράσταση ενός πραγματικού προβλήματος, αντί να αναλαμβάνει πειράματα σε ρεαλιστικές συνθήκες.

«Προκλήσεις στη μαθηματική μοντελοποίηση όχι για την παραγωγή του πιο ολοκληρωμένου περιγραφικού μοντέλου αλλά για την παραγωγή του απλούστερου δυνατού μοντέλου που ενσωματώνει τα κύρια χαρακτηριστικά του φαινομένου που μας ενδιαφέρει.»

Howard Emmons

2.1.1 Η Ιστορική της εξέλιξη

Η μοντελοποίηση (από το λατινικό «*modellus*») είναι ένας τρόπος χειρισμού της πραγματικότητας. Είναι η ικανότητα να δημιουργείς μοντέλα που ξεχωρίζουν τον άνθρωπο από τα ζώα. Μοντέλα ρεαλιστικών αντικειμένων και πραγμάτων που χρησιμοποιούνται από τα έλλογα όντα από τη Λίθινη Εποχή, όπως είναι εμφανές στις σπηλαιογραφίες. Η μοντελοποίηση έγινε σημαντική στην Αρχαία Εγγύς Ανατολή και στον Αρχαίο Ελληνικό πολιτισμό. Είναι η γραφή και η καταμέτρηση των αριθμών που αποτέλεσαν τα πρώτα δείγματα. Δύο άλλοι τομείς όπου χρησιμοποιήθηκε μοντελοποίηση στις προκαταρκτικές του μορφές είναι η αστρονομία και η αρχιτεκτονική. Μέχρι το έτος 2000 π.Χ., οι τρεις αρχαίοι πολιτισμοί της Βαβυλώνας, της

Αιγύπτου και της Ινδίας είχαν καλή γνώση των μαθηματικών και χρησιμοποιούσαν μαθηματικά μοντέλα σε διάφορους τομείς της ζωής.

Στον Αρχαίο Ελληνικό πολιτισμό, η ανάπτυξη της φιλοσοφίας και η στενή σχέση της με τα μαθηματικά συνέβαλε σε μια απαγωγική μέθοδο, η οποία οδήγησε πιθανώς στην πρώτη περιήγηση της μαθηματικής θεωρίας. Από το 600 περίπου π.Χ., η γεωμετρία έγινε χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση της πραγματικότητας. Ο Θαλής προέβλεψε την ηλιακή έκλειψη του 585 π.Χ. και επινόησε μια μέθοδο για τη μέτρηση των υψών μετρώντας τα μήκη των σκιών χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία. Ο Πυθαγόρας ανέπτυξε τη θεωρία των αριθμών και, το πιο σημαντικό, ξεκίνησε τη χρήση αποδείξεων για να αποκτήσει νέα αποτελέσματα από ήδη γνωστά θεωρήματα. Οι Έλληνες φιλόσοφοι Αριστοτέλης, Εύδοξος και άλλοι συνέβαλαν περαιτέρω, και στα επόμενα 300 χρόνια μετά τον Θαλή, η γεωμετρία και άλλοι κλάδοι των μαθηματικών αναπτύχθηκαν κι άλλο. Στο ζενίθ έφτασε ο Ευκλείδης της Αλεξάνδρειας, ο οποίος, γύρω στο 300 π.Χ., έγραψε τα **Στοιχεία**, μια πραγματική συλλογή σχεδόν όλων των γνωστών μαθηματικών κλάδων της εποχής. Αυτή η εργασία περιλάμβανε, μεταξύ άλλων, την πρώτη ακριβή περιγραφή της γεωμετρίας και μια πραγματεία για τη θεωρία αριθμών. Γι' αυτό και τα συγγράμματά του έγιναν σημαντικά για τη διδασκαλία των μαθηματικών για πολλές εκατοντάδες χρόνια, και γύρω στο 250 π.Χ., ο Ερατοσθένης ο Κυρήνης χρησιμοποίησε αυτή τη γνώση για να υπολογίσει τις αποστάσεις μεταξύ της Γης και του Ήλιου και της Γης και της Σελήνης. περιφέρεια της γης χρησιμοποιώντας ένα γεωμετρικό μοντέλο.

Ένα επιπλέον βήμα στην ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων έγινε από τον Διόφαντο από την Αλεξάνδρεια περίπου το 250 μ.Χ., ο οποίος, στο βιβλίο του **Αριθμητικά**, ανέπτυξε τις απαρχές της άλγεβρας με βάση το συμβολισμό και την ιδέα μιας μεταβλητής. Στον τομέα της αστρονομίας, ο Πτολεμαίος, επηρεασμένος από την ιδέα του Πυθαγόρα για την περιγραφή της ουράνιας μηχανικής με κύκλους, ανέπτυξε ένα μαθηματικό μοντέλο του ηλιακού συστήματος χρησιμοποιώντας κύκλους για να προβλέψει την κίνηση του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών. Το μοντέλο ήταν τόσο ακριβές που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τις αρχές του δέκατου έβδομου αιώνα, όταν ο Johannes Kepler ανακάλυψε ένα πολύ πιο απλό και ανώτερο μοντέλο πλανητικής κίνησης το 1619. Αυτό το μοντέλο, με μεταγενέστερες βελτιώσεις που έγιναν από τον Νεύτωνα και τον Αϊνστάιν, χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα.

Τα μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιούνται για προβλήματα του πραγματικού κόσμου και ως εκ τούτου σημαντική για την ανθρώπινη ανάπτυξη. Πιο αναλυτικά, αναπτύχθηκαν στην Κίνα,

την Ινδία και την Περσία καθώς και στον δυτικό κόσμο. Ένας από τους πιο διάσημους Άραβες μαθηματικούς ήταν ο Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, ο οποίος έζησε στα τέλη του όγδοου αιώνα. Είναι ενδιαφέρον ότι το όνομά του εξακολουθεί να επιβιώνει στον αλγόριθμο της λέξης. Τα γνωστά βιβλία του είναι το *Υπολογισμός με Ινδικούς Αριθμούς*, (Algoritmo de Numero Indorum), που σήμερα ονομάζονται αραβικοί αριθμοί) και το *The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing* (ένα βιβλίο για τις διαδικασίες εξισορρόπησης υπολογισμού). Και τα δύο αυτά έργα περιέχουν μαθηματικά μοντέλα και αλγόριθμους επίλυσης προβλημάτων για χρήση στο εμπόριο, την έρευνα και την άρδευση.

Στον δυτικό κόσμο, μόλις τον δέκατο έκτο αιώνα αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά και τα μαθηματικά μοντέλα. Ο μεγαλύτερος μαθηματικός του δυτικού κόσμου μετά την παρακμή του ελληνικού πολιτισμού ήταν ο Fibonacci, Leonardo da Pisa. Έκανε πολλά ταξίδια στην Ανατολή και εξοικειώθηκε με τα μαθηματικά όπως αυτά ασκούσαν στον ανατολικό κόσμο. Χρησιμοποίησε αλγεβρικές μεθόδους που καταγράφηκαν στα βιβλία του Al-Khwarizmi για να βελτιώσει το εμπόριο του ως έμπορος. Πρώτα συνειδητοποίησε το μεγάλο πρακτικό πλεονέκτημα της χρήσης των ινδικών αριθμών σε σχέση με τους ρωμαϊκούς αριθμούς που εξακολουθούσαν να χρησιμοποιούνται στην Ευρώπη εκείνη την εποχή. Το βιβλίο του Liber Abaci, που εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1202, ξεκίνησε με αναφορά στις δέκα «ινδικές φιγούρες» (0, 1, 2,..., 9), όπως τις αποκαλούσε. Επίσης, το 1202 είναι μια σημαντική χρονιά αφού είδε τον αριθμό 0 να εισαχθεί στην Ευρώπη. Το ίδιο το βιβλίο προοριζόταν να είναι ένα εγχειρίδιο άλγεβρας για εμπορική χρήση. Ασχολήθηκε λεπτομερώς με αριθμητικούς κανόνες χρησιμοποιώντας αριθμητικά παραδείγματα που προέκυψαν από πρακτική χρήση, όπως οι εφαρμογές τους στο μέτρο και τη μετατροπή νομισμάτων.

Ο Ιταλός ζωγράφος Giotto (1267–1336) και ο αναγεννησιακός αρχιτέκτονας και γλύπτης Filippo Brunelleschi (1377–1446) είναι υπεύθυνοι για την ανάπτυξη των γεωμετρικών αρχών. Στους μεταγενέστερους αιώνες, ανακαλύφθηκαν πολλές περισσότερες και ποικίλες μαθηματικές αρχές και η πολυπλοκότητα και η πολυπλοκότητα των μοντέλων αυξήθηκαν. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι παρά τα επιτεύγματα των Diophant και Al-Khwarizmi, η συστηματική χρήση των μεταβλητών επινοήθηκε από τον Vieta (1540-1603). Παρ' όλες αυτές τις εξελίξεις, χρειάστηκαν πολλά χρόνια για να συνειδητοποιήσουμε τον πραγματικό ρόλο των μεταβλητών στη διατύπωση της μαθηματικής θεωρίας. Χρειάστηκε επίσης χρόνος για να γίνει πλήρως κατανοητή η σημασία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η φυσική και η εφαρμογή της στη φύση και στα φυσικά φαινόμενα είναι μια σημαντική δύναμη στη μαθηματική μοντελοποίηση

και στην περαιτέρω ανάπτυξή της. Αργότερα τα οικονομικά έγιναν ένας άλλος τομέας μελέτης όπου η μαθηματική μοντελοποίηση άρχισε να παίζει σημαντικό ρόλο.

2.1.2 Η εξέλιξή της στην διδασκαλία

Η μαθηματική μοντελοποίηση έχει υποστεί σημαντική πρόοδο κατά τη διάρκεια των δεκαετιών, αντανακλώντας τη μετάβασή της από ένα τεχνικό εργαλείο που χρησιμοποιείται κυρίως στα εφαρμοσμένα μαθηματικά σε έναν ακρογωνιαίο λίθο της σύγχρονης διεπιστημονικής εκπαίδευσης. Αυτή η ιστορική τροχιά υπογραμμίζει τις αλλαγές τόσο στον σκοπό όσο και στην εφαρμογή της, που οδηγούνται από τις εξελίξεις στην εκπαίδευση, την τεχνολογία και τις κοινωνικές ανάγκες. Εξετάζοντας αυτήν την εξέλιξη, μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα πώς η μαθηματική μοντελοποίηση έχει μετατραπεί σε μια ζωτικής σημασίας εκπαιδευτική προσέγγιση, ενισχύοντας την κριτική σκέψη, την επίλυση προβλημάτων και τη διεπιστημονική συνεργασία.

Πριν από τη δεκαετία του 1980, η μαθηματική μοντελοποίηση συνδέθηκε κυρίως με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά και χρησιμοποιήθηκε σε εξαιρετικά εξειδικευμένους τομείς όπως η μηχανική, η φυσική και η υπολογιστική επιστήμη. Θεωρήθηκε ως μια τεχνική δεξιότητα που χρησιμοποιείται για την επίλυση συγκεκριμένων, καλά καθορισμένων προβλημάτων στη βιομηχανία και τον ακαδημαϊκό χώρο. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, η μοντελοποίηση επικεντρώθηκε στην εξαγωγή μαθηματικών αναπαραστάσεων φυσικών φαινομένων, όπως η δυναμική των ρευστών, η θερμοδυναμική και τα μηχανικά συστήματα. Οι μηχανικοί και οι επιστήμονες βασίστηκαν στη μαθηματική μοντελοποίηση για τη βελτιστοποίηση των σχεδίων, την πρόβλεψη των αποτελεσμάτων και την προσομοίωση συστημάτων πραγματικού κόσμου. Η μοντελοποίηση διδάσκονταν κυρίως σε προγράμματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και επαγγελματικής κατάρτισης, με στόχο φοιτητές στη μηχανική, τη φυσική και τα μαθηματικά. Η παρουσία του στην εκπαίδευση K-12 ήταν ελάχιστη, καθώς θεωρήθηκε πολύ περίπλοκη για τους νεότερους μαθητές. Η έμφαση δόθηκε στην τεχνική ακρίβεια και στις υπολογιστικές μεθόδους, παρά στην εκπαιδευτική ή διεπιστημονική ολοκλήρωση. Η στενή εστίαση σε τεχνικά πεδία περιόρισε την αναγνώριση των ευρύτερων δυνατοτήτων της μοντελοποίησης για διεπιστημονική μάθηση και επίλυση προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο. Η μοντελοποίηση απουσίαζε σε μεγάλο βαθμό από τη γενική εκπαίδευση, αφήνοντάς την απρόσιτη σε μαθητές εκτός εξειδικευμένων τομέων.

Τα τέλη του 20ου αιώνα σηματοδότησε μια κομβική αλλαγή στο ρόλο της μαθηματικής μοντε-

λοποίησης, με γνώμονα τα κινήματα εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης και την αναγνώριση των δυνατοτήτων της ως παιδαγωγικού εργαλείου. Ερευνητές όπως ο Ubiratan D'Ambrosio (1989) υποστήριξαν τη χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως μέσου ενσωμάτωσης των μαθηματικών με περιβάλλοντα πραγματικού κόσμου και άλλους κλάδους. Αυτή η περίοδος είδε την εισαγωγή της μοντελοποίησης στα προγράμματα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ιδιαίτερα στην Ευρώπη και τη Βόρεια Αμερική, ως ένας τρόπος να γίνουν τα μαθηματικά πιο συναφή και ελκυστικά. Η μαθηματική μοντελοποίηση άρχισε να θεωρείται ως γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και άλλων μαθημάτων, όπως η βιολογία, τα οικονομικά και οι κοινωνικές επιστήμες. Αυτή η διεπιστημονική προσέγγιση ευθυγραμμίστηκε με την αυξανόμενη ζήτηση για δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και κριτικής σκέψης στην εκπαίδευση. Η Διεθνής Κοινότητα Καθηγητών Μαθηματικής Μοντελοποίησης και Εφαρμογών (ICTMA), που ιδρύθηκε τη δεκαετία του 1980, διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην προώθηση της μοντελοποίησης ως κεντρικής συνιστώσας της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μέσα από συνέδρια, δημοσιεύσεις και συνεργασίες, η (ICTMA) προώθησε τις παιδαγωγικές και θεωρητικές βάσεις του μοντελισμού. Η εμφάνιση των προσωπικών υπολογιστών και του υπολογιστικού λογισμικού στις δεκαετίες του 1980 και του 1990 επέτρεψε την πιο προσιτή και εξελιγμένη μοντελοποίηση. Εργαλεία όπως το MATLAB και το λογισμικό υπολογιστικών φύλλων επέτρεψαν στους μαθητές να ασχοληθούν με πολύπλοκα προβλήματα χωρίς εκτεταμένους μη αυτόματους υπολογισμούς. Η μοντελοποίηση χρησιμοποιήθηκε ολοένα και περισσότερο για τη δημιουργία συμφραζομένων αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, αποδεικνύοντας τη συνάφειά τους με την καθημερινή ζωή και τις παγκόσμιες προκλήσεις. Για παράδειγμα, οι μαθητές μοντελοποίησαν την αύξηση του πληθυσμού, τις χρηματοπιστωτικές αγορές και τα περιβαλλοντικά συστήματα, συνδέοντας τα μαθηματικά με θέματα που θα μπορούσαν να σχετίζονται και να ενδιαφέρονται για αυτά. Ωστόσο, η ενοποίηση της μοντελοποίησης παρέμεινε άνιση, με σημαντικές ανισότητες μεταξύ χωρών, περιοχών και εκπαιδευτικών συστημάτων.

Η άνοδος της εκπαίδευσης STEM τον 21ο αιώνα έφερε στο προσκήνιο τη μαθηματική μοντελοποίηση ως κρίσιμη μέθοδο για τη διδασκαλία της διεπιστημονικής επίλυσης προβλημάτων και την προώθηση της καινοτομίας. Η μοντελοποίηση έγινε κεντρικό στοιχείο των προγραμμάτων σπουδών STEM, δίνοντας έμφαση στον ρόλο της στην προετοιμασία των μαθητών για σταδιοδρομία στις επιστήμες, την τεχνολογία, τη μηχανική και τα μαθηματικά. Χρησιμοποιήθηκε ολοένα και περισσότερο για την αντιμετώπιση προκλήσεων του πραγματικού κόσμου, όπως η κλιματική αλλαγή, οι κρίσεις στη δημόσια υγεία και η ανάπτυξη ανανεώσιμων πηγών ενέργειας.

Για παράδειγμα, οι μαθητές χρησιμοποίησαν μαθηματικά μοντέλα για να προσομοιώσουν την εξάπλωση μολυσματικών ασθενειών, αναλύοντας μεταβλητές όπως τα ποσοστά μετάδοσης και η πυκνότητα πληθυσμού. Οι νέες μέθοδοι διδασκαλίας, όπως η μάθηση βάσει έργου και η σχεδιαστική σκέψη, ενσωμάτωσαν τη μαθηματική μοντελοποίηση για να εμπλακούν οι μαθητές στην πρακτική, συνεργατική επίλυση προβλημάτων. Η επαναληπτική φύση της μοντελοποίησης ευθυγραμμίστηκε με αυτές τις προσεγγίσεις, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να βελτιώσουν τα μοντέλα τους με βάση την ανατροφοδότηση και τις μεταβαλλόμενες συνθήκες. Η ευρεία διαθεσιμότητα προηγμένων υπολογιστικών εργαλείων, λογισμικού προσομοίωσης και διαδικτυακών πλατφορμών επέκτεινε το εύρος και την προσβασιμότητα των εργασιών μοντελοποίησης. Τεχνολογίες όπως το λογισμικό οπτικοποίησης δεδομένων και οι πλατφόρμες κωδικοποίησης επέτρεψαν στους μαθητές να εξερευνήσουν σύνθετα, πραγματικά προβλήματα σε πρωτοφανή επίπεδα βάθους. Η μαθηματική μοντελοποίηση απέκτησε εξέχουσα θέση στα διεθνή εκπαιδευτικά πρότυπα και πλαίσια. Οργανισμοί όπως η UNESCO, τόνισαν τη σημασία του για την ενίσχυση των δεξιοτήτων του 21ου αιώνα, όπως η κριτική σκέψη, η συνεργασία και η προσαρμοστικότητα. Παρά την αυξανόμενη εξέχουσα θέση της, η ενσωμάτωση της μοντελοποίησης στην καθιερωμένη εκπαίδευση αντιμετώπισε προκλήσεις, συμπεριλαμβανομένης της περιορισμένης κατάρτισης και ετοιμότητας των εκπαιδευτικών. Περιορισμοί σπουδών που έδιναν προτεραιότητα στα παραδοσιακά, διαδικαστικά μαθηματικά έναντι της διερευνητικής, βασισμένης σε εφαρμογές μάθησης. Ανισότητες στην πρόσβαση σε πόρους, ιδιαίτερα σε σχολεία και περιφέρειες που δεν διαθέτουν πόρους.

2.2 Σημαντικότητα μαθηματικής μοντελοποίησης

Ένα μαθηματικό μοντέλο, όπως αναφέρθηκε, είναι μια μαθηματική περιγραφή μιας πραγματικής κατάστασης ζωής. Έτσι, εάν ένα μαθηματικό μοντέλο μπορεί να αντανακλά ή να μιμηθεί τη συμπεριφορά μιας πραγματικής κατάστασης, τότε μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα το σύστημα μέσω της σωστής ανάλυσης του μοντέλου χρησιμοποιώντας κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία. Επιπλέον, κατά τη διαδικασία κατασκευής του μοντέλου, ανακαλύπτουμε διάφορους παράγοντες που διέπουν το σύστημα, που είναι πιο σημαντικοί για το σύστημα και που αποκαλύπτουν πώς συνδέονται διαφορετικές πτυχές του συστήματος.

Η σημασία της μαθηματικής μοντελοποίησης στη φυσική, τη χημεία, τη βιολογία, τα οικονομικά, ακόμη και τη βιομηχανία δεν μπορεί να αγνοηθεί. Η μαθηματική μοντελοποίηση στις βασικές επιστήμες κερδίζει δημοτικότητα, κυρίως σε βιολογικές επιστήμες, οικονομικά και

βιομηχανικά προβλήματα. Για παράδειγμα, εάν λάβουμε υπόψη τη μαθηματική μοντελοποίηση στη βιομηχανία χάλυβα, πολλές πτυχές της κατασκευής χάλυβα, από την εξόρυξη έως τη διανομή, είναι επιρρεπείς στη μαθηματική μοντελοποίηση. Μάλιστα, εταιρείες χάλυβα έχουν συμμετάσχει σε πολλά εργαστήρια μαθηματικών - βιομηχανίας, όπου συζητήσαν διάφορα προβλήματα και έλαβαν λύσεις μέσω μαθηματικών μοντελοποιήσεων – προβλήματα ελέγχου ψύξης πλινθωμάτων, μεταφορά θερμότητας και μάζας σε υψικάμινους, μηχανική θερμής έλασης, συγκόλληση με τριβή, ψύξη με ψεκασμό και συρρίκνωση στη στερεοποίηση πλινθωμάτων, για να αναφέρουμε μερικά.

Για την απόκτηση φυσικής διορατικότητας, χρησιμοποιούνται αναλυτικές τεχνικές. Ωστόσο, για την αντιμετώπιση πιο σύνθετων προβλημάτων, οι αριθμητικές προσεγγίσεις είναι αρκετά χρήσιμες. Είναι πάντα σκόπιμο και χρήσιμο να διαμορφώνεται ένα σύνθετο σύστημα με ένα απλό μοντέλο του οποίου η εξίσωση δίνει μια αναλυτική λύση. Στη συνέχεια, το μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί σε ένα πιο ρεαλιστικό που μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Μαζί με τα αναλυτικά αποτελέσματα για απλούστερα μοντέλα και την αριθμητική λύση από πιο ρεαλιστικά μοντέλα, μπορεί κανείς να αποκτήσει τη μέγιστη εικόνα του προβλήματος.

2.2.1 Τελευταίες εξελίξεις στη Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ένας τομέας μεγάλης ανάπτυξης και έρευνας. Τα τελευταία χρόνια, μαθηματικά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί για την επικύρωση υποθέσεων που έγιναν από πειραματικά δεδομένα, και ταυτόχρονα, ο σχεδιασμός και ο έλεγχος αυτών των μοντέλων οδήγησαν σε ελεγχόμενες πειραματικές προβλέψεις. Υπάρχουν εντυπωσιακές περιπτώσεις στις οποίες τα μαθηματικά μοντέλα έχουν δώσει νέα εικόνα για βιολογικά συστήματα, φυσικά συστήματα, προβλήματα λήψης αποφάσεων, διαστημικά μοντέλα, βιομηχανικά προβλήματα, οικονομικά προβλήματα κ.λπ. Η ανάπτυξη της μαθηματικής μοντελοποίησης σχετίζεται στενά με σημαντικά επιτεύγματα στον τομέα των υπολογιστικών μαθηματικών.

Σκεφτείτε ένα νέο προϊόν που κυκλοφορεί από μια εταιρεία. Στη διαδικασία ανάπτυξης, υπάρχουν κρίσιμες αποφάσεις που εμπλέκονται στην κυκλοφορία του, όπως ο χρόνος, ο καθορισμός της τιμής, η σειρά εκκίνησης. Οι ειδικοί χρησιμοποιούν και αναπτύσσουν μαθηματικά μοντέλα για να διευκολύνουν τη λήψη αυτών των αποφάσεων. Ομοίως, για να επιβιώσει ο ανταγωνισμός της αγοράς, η μείωση του κόστους είναι μία από τις κύριες στρατηγικές για ένα εργοστάσιο παραγωγής, όπου εμπλέκεται μεγάλο μέρος του κόστους λειτουργίας της παραγωγής. Η σωστή διάταξη του εξοπλισμού μπορεί να οδηγήσει σε τεράστια μείωση αυτού του κόστους. Αυτό ο-

δηγεί σε ένα πρόβλημα δυναμικής διάταξης εγκαταστάσεων για την εύρεση θέσεων εξοπλισμού σε περιβάλλοντα παραγωγής, που είναι ένας από τους αναπτυσσόμενους τομείς στον τομέα της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Η μαθηματική μοντελοποίηση εντείνει επίσης τη μελέτη των δυνητικά θανατηφόρων ιών γρίπης ή του κορονοϊού (COVID-19) από τη μητέρα φύση και τους βιοτρομοκράτες. Μαθηματικά μοντέλα αναπτύσσονται επίσης στις οπτικές επιστήμες, συγκεκριμένα, περιθλακτική οπτική, δομές και κυματοδηγοί φωτονικού χάσματος, μοντελοποίηση θρεπτικών ουσιών, μελέτη της δυναμικής των υψικαμίνων, μελέτη διάβρωσης και πρόβλεψη επιφανειακής καθίζησης.

Στις γεωεπιστήμες, έχουν αναπτυχθεί μαθηματικά μοντέλα για τη συσ-σώρευση γωνιακών θραυσμάτων βράχου που προέρχονται από απότομες πλαγιές βράχου ή βράχους από τη μηχανική διάβρωση της βραχομάζας (**Talus**). Η έννοια διατυπώθηκε από τους Rapp και Fairbridge. Οι Hiroyuki και Yukinori κατασκεύασαν ένα νέο μαθηματικό μοντέλο για την ανάπτυξη αυτού του «υλικού» και την υποχώρηση των βράχων πίσω από τον αστραγάλο, το οποίο εφαρμόστηκε αργότερα στο αποτέλεσμα ενός πειράματος πεδίου για την ανάπτυξη του αστραγάλου σε ένα βράχο που αποτελείται από κιμωλία. Ανέπτυξαν το μοντέλο που ήταν σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις πεδίου.

Υπήρξε τρομερή ανάπτυξη στον διεπιστημονικό τομέα των εφαρμοσμένων μαθηματικά στην ανθρώπινη φυσιολογία την τελευταία δεκαετία, και αυτή η εξέλιξη συνεχίζεται ακόμη. Ένας από τους κύριους λόγους για αυτήν την εξέλιξη είναι η βελτιωμένη ικανότητα του ερευνητή να συλλέγει δεδομένα, η οπτικοποίηση των οποίων έχει πολύ καλύτερη ανάλυση σε χρόνο και χώρο από ό,τι πριν από λίγα χρόνια. Ταυτόχρονα, αυτή η εξέλιξη αποτελεί επίσης μια τεράστια συλλογή δεδομένων όπως προκύπτουν από προηγμένες τεχνικές μέτρησης. Μέσω της στατιστικής ανάλυσης, είναι δυνατό να βρεθούν συσχετισμοί, αλλά μια τέτοια ανάλυση αποτυγχάνει να παρέχει εικόνα για τους μηχανισμούς που ευθύνονται για αυτούς τους συσχετισμούς. Ωστόσο, όταν συνδυάζεται με μαθηματική μοντελοποίηση, αποκαλύπτονται νέες ιδέες για τους φυσιολογικούς μηχανισμούς.

Αναπτύσσονται μαθηματικά μοντέλα στον τομέα του υπολογιστικού νέφους για τη διευκόλυνση της υποδομής των υπολογιστικών πόρων στους οποίους μεγάλες ομάδες συστημάτων (ή σύννεφα) συνδέονται μεταξύ τους μέσω του Διαδικτύου για την παροχή υπηρεσιών πληροφορικής (για παράδειγμα, παροχή ασφαλούς διαχείρισης δισεκατομμυρίων διαδικτυακών συναλλαγών). Η ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων παρατηρείται επίσης στη μελέτη της διακύμανσης του

προστατευτικού αερίου στη συγκόλληση GTA, για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς γήρανσης για συγκεκριμένα σύνθετα υλικά Al-Cu-Mg/Bagasse Ash, για λήψη αποφάσεων και εκτιμήσεις για τη δημόσια υγεία, για την ανάπτυξη εγκεφαλικού φλοιού αναδιπλούμενα μοτίβα που έχουν γοητεύσει τους επιστήμονες με την ομορφιά και την πολυπλοκότητά τους για αιώνες, για να προβλέψουν την έκφραση του ηλιελαίου, στην ανάπτυξη ενός νέου τρισδιάστατου μοντέλου μαθηματικής ιονόσφαιρας στον Ευρωπαϊκό Οργανισμό Διαστήματος/Ευρωπαϊκό Κέντρο Διαστημικών Χειριστών, στη μοντελοποίηση μπαταριών ή στη μαθηματική περιγραφή των μπαταριών, το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό και τη χρήση των μπαταριών, στην εκτίμηση των διαδικασιών των μπαταριών και σχεδιασμός μπαταρίας. Αυτοί είναι μερικοί τομείς όπου η μαθηματική μοντελοποίηση παίζει σημαντικό ρόλο. Ωστόσο, υπάρχουν πολλοί περισσότεροι τομείς εφαρμογής.

2.2.2 Περιορισμοί της μαθηματικής μοντελοποίησης

Μερικές φορές, αν και το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι καλά προσαρμοσμένο στην κατάσταση που επικρατεί, μπορεί να δώσει απροσδόκητα αποτελέσματα ή απλώς να αποτύχει. Αυτό μπορεί να είναι μια ένδειξη ότι έχουμε φτάσει στο όριο του παρόντος μαθηματικού μοντέλου και πρέπει να αναζητήσουμε μια νέα βελτίωση του πραγματικού κόσμου ή μια νέα θεωρητική ανακάλυψη. Ένας παρόμοιος τύπος προβλήματος αντιμετωπίστηκε στο , το οποίο ασχολείται με τη θεωρία Moiré, που περιλαμβάνει τη μαθηματική μοντελοποίηση των φαινομένων που εμφανίζονται στην υπέρθεση δύο ή περισσότερων δομών (γραμμικά πλέγματα, οθόνες κουκκίδων, κ.λπ.), είτε περιοδικές είτε όχι.

Στη μαθηματική μοντελοποίηση, πρέπει να γίνουν περισσότερες υποθέσεις, καθώς οι πληροφορίες για τα συστήματα του πραγματικού κόσμου γίνονται λιγότερο ακριβείς ή πιο δύσκολο να μετρηθούν. Η μοντελοποίηση γίνεται μια λιγότερο ακριβής προσπάθεια καθώς απομακρύνεται από τα φυσικά συστήματα προς τα κοινωνικά συστήματα. Για παράδειγμα, η μοντελοποίηση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος είναι πολύ πιο απλή από τη μοντελοποίηση της ανθρώπινης λήψης αποφάσεων ή του περιβάλλοντος. Δεδομένου ότι τα φυσικά συστήματα συνήθως δεν αλλάζουν, οι εύλογες προηγούμενες πληροφορίες σχετικά με ένα φυσικό σύστημα είναι αρκετά πολύτιμες για τη μοντελοποίηση της μελλοντικής απόδοσης. Ωστόσο, τόσο τα κοινωνικά συστήματα όσο και τα περιβάλλοντα συχνά αλλάζουν με τρόπους που δεν ανήκουν στο παρελθόν, και ακόμη και οι σωστές πληροφορίες μπορεί να έχουν μικρότερη αξία για το σχηματισμό υποθέσεων. Έτσι, για να κατανοήσουμε τους περιορισμούς ενός μοντέλου, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τις

βασικές παραδοχές που χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία του.

Τα συστήματα του πραγματικού κόσμου είναι πολύπλοκα και εμπλέκονται πολλά αλληλένδετα στοιχεία. Δεδομένου ότι τα μοντέλα είναι αφαιρέσεις της πραγματικότητας, ένα καλό μοντέλο πρέπει να προσπαθήσει να ενσωματώσει όλα τα κρίσιμα στοιχεία και τα αλληλένδετα στοιχεία του συστήματος του πραγματικού κόσμου. Αυτό δεν είναι πάντα δυνατό. Έτσι, ένας σημαντικός εγγενής περιορισμός ενός μοντέλου δημιουργείται από ό,τι παραλείπεται. Προβλήματα προκύπτουν όταν βασικές πτυχές του συστήματος του πραγματικού κόσμου αντιμετωπίζονται ανεπαρκώς σε ένα μοντέλο ή αγνοούνται για να αποφευχθούν επιπλοκές, οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε ελλιπή μοντέλα. Άλλοι περιορισμοί ενός μαθηματικού μοντέλου είναι ότι μπορεί να υποθέσουν ότι το μέλλον θα είναι όπως το παρελθόν, τα δεδομένα εισόδου μπορεί να είναι αβέβαια ή η χρησιμότητα ενός μοντέλου μπορεί να περιορίζεται από τον αρχικό του σκοπό.

Ωστόσο, παρά όλους αυτούς τους περιορισμούς και τις παγίδες, ένα καλό μοντέλο μπορεί να είναι διατυπώνεται, εάν ένας μοντελιστής κάνει στον εαυτό του/της τις ακόλουθες ερωτήσεις σχετικά με το μοντέλο:

1. Η δομή του μοντέλου μοιάζει με το υπό διαμόρφωση σύστημα;
2. Γιατί το επιλεγμένο μοντέλο είναι κατάλληλο για χρήση σε μια δεδομένη εφαρμογή;
3. Πόσο καλά αποδίδει το μοντέλο;
4. Έχει αναλυθεί το μοντέλο από κάποιον άλλο εκτός από τους συγγραφείς του μοντέλου;
5. Είναι διαθέσιμη επαρκής τεκμηρίωση του μοντέλου για όλους όσους επιθυμούν να το μελετήσουν;
6. Ποιες παραδοχές και δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή εξόδου μοντέλου για τη συγκεκριμένη εφαρμογή;
7. Ποια είναι η ακρίβεια της εξόδου του μοντέλου;

Δεν πρέπει κανείς να προεκβάλλει το μοντέλο πέρα από την περιοχή προσαρμογής. Ένα μοντέλο δεν πρέπει να εφαρμόζεται εκτός εάν κατανοήσει κανείς τις απλουστευτικές παραδοχές στις οποίες βασίζεται και μπορεί να ελέγξει τη δυνατότητα εφαρμογής τους. Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουμε ότι το μοντέλο δεν είναι η πραγματικότητα και δεν πρέπει να παραμορφώνεται η πραγματικότητα για να ταιριάζει στο μοντέλο. Ένα απαξιωμένο μοντέλο δεν πρέπει να διατηρείται και δεν πρέπει να περιορίζεται σε ένα μόνο μοντέλο, καθώς περισ-

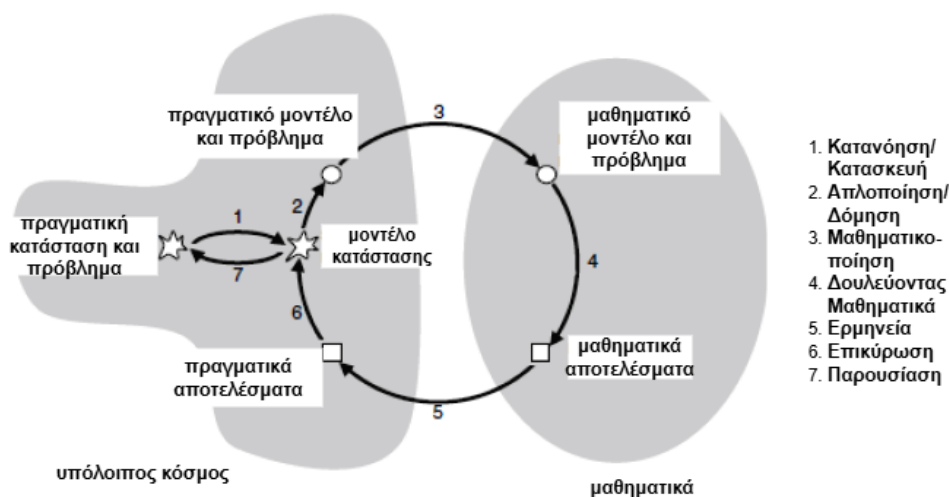
σότερα από ένα μοντέλα μπορεί να είναι χρήσιμα για την κατανόηση διαφορετικών πτυχών του ίδιου φαινομένου. Είναι επιτακτική ανάγκη να γνωρίζετε τους εγγενείς περιορισμούς των μοντέλων. Δεν υπάρχει καλύτερο μοντέλο, μόνο καλύτερα μοντέλα

2.3 Ο κύκλος μοντελοποίησης ως εργαλείο εννοιολόγησης και ανάλυσης

Πολλές έρευνες για τη μαθηματική μοντελοποίηση περιγράφουν τη μαθηματική μοντελοποίηση μέσω ενός κύκλου μοντελοποίησης (Niss & Blum, 2020, Geiger & Frejd, 2015). Ένας κύκλος μοντελοποίησης είναι ένα σχηματικό διάγραμμα που δείχνει τη μαθηματική μοντελοποίηση ως μια κυκλική διαδικασία, η οποία αποτελείται από επόμενες φάσεις. Δείτε το Σχήμα 2.1 για ένα συχνά χρησιμοποιούμενο παράδειγμα από το Blum (2015), το οποίο δείχνει επτά φάσεις στη διαδικασία μοντελοποίησης. Άλλοι κύκλοι μοντελοποίησης μπορεί να έχουν λιγότερες ή περισσότερες φάσεις και άλλες διατυπώσεις (Perrenet & Zwaneveld, 2012).

Ο κύκλος μοντελοποίησης στο Σχήμα 2.1 βασίζεται σε μια προηγούμενη έκδοση των Blum και Leib (2007), στην οποία η 1η φάση ονομάστηκε κατανόηση, για να δείξει ότι η διαδικασία μοντελοποίησης ξεκινά από μια προβληματική κατάσταση που πρέπει να γίνει κατανοητή. Στη νέα έκδοση αυτού του κύκλου μοντελοποίησης (Blum, 2015), είναι γραμμένο να κατασκευάζει για να υποδείξει ότι ένας μοντελιστής πρέπει να δημιουργήσει ένα νοητικό μοντέλο του προβλήματος και της μελλοντικής εργασίας. Μετά από αυτό το ξεκίνημα, ο μοντελιστής περνάει από διάφορες φάσεις δομώντας και απλοποιώντας το πλαίσιο του προβλήματος (π.χ. κάνοντας μια πρόχειρη σχεδίαση της κατάστασης του προβλήματος), το οποίο είναι μαθηματικοποιήσιμο (π.χ. δημιουργώντας αλγεβρικούς τύπους) και το οποίο μπορεί να εργαστεί μαθηματικά (π.χ. χειρισμό των αλγεβρικών τύπων). Τα μαθηματικά αποτελέσματα μπορούν να ερμηνευθούν και να επικυρωθούν λαμβάνοντας υπόψη το αρχικό πρόβλημα. Σε περίπτωση που τα αποτελέσματα θεωρηθούν ανεπαρκή για την πραγματική κατάσταση, ολόκληρη η διαδικασία μοντελοποίησης επαναλαμβάνεται. Εάν ο διαμορφωτής είναι «έτοιμος», τα αποτελέσματα μπορούν να εκτεθούν, δηλαδή, να παρουσιαστούν σε άλλους.

Όταν οι μαθητές αναλαμβάνουν μια εργασία μοντελοποίησης, οι μαθητές ακολουθούν άλλες διαδρομές από αυτές που περιγράφονται σε έναν κύκλο μοντελοποίησης, «πηδώντας» μπρος-πίσω μεταξύ των φάσεων (Borromeo Ferri, 2006, Ärleback, 2009). Ωστόσο, οι περισσότερες φάσεις παρατηρούνται κάπου στις δραστηριότητες των μαθητών. Έτσι, ένας κύκλος μοντελοποίησης δεν δείχνει ούτε τι κάνει ένας μοντελιστής βήμα-βήμα, ούτε είναι μια συνταγή



Σχήμα 2.1: Κύκλος μοντελοποίησης

που πρέπει να ακολουθείται αυστηρά. Οι Niss και Blum (2020) εξηγούν ότι ένας κύκλος μοντελοποίησης «πρέπει να νοείται ως μια αναλυτική (ιδανικού τύπου) ανακατασκευή των βημάτων της μοντελοποίησης που είναι απαραίτητα παρόντα, ρητά ή σιωπηρά, ως όργανο για την αποτύπωση και την κατανόηση των κύριων διαδικασιών στη μαθηματική μοντελοποίηση». Έτσι, ένας κύκλος μοντελοποίησης είναι ένα εργαλείο για τους ερευνητές και τους εκπαιδευτικούς για να κατανοήσουν, να κατανοήσουν, να αναγνωρίσουν, να εξηγήσουν και να αναλύσουν σημαντικές πτυχές στη μοντελοποίηση, ανεξάρτητα από το αν αυτό γίνεται από έναν ειδικό ή έναν αρχάριο. Έτσι, ένας κύκλος μοντελοποίησης δεν προσφέρει ορισμό, δηλαδή δεν προσφέρει μια ρητή δήλωση που διευκρινίζει τι είναι η μαθηματική μοντελοποίηση. Επίσης, ένας κύκλος μοντελοποίησης δεν χαρακτηρίζει τη μαθηματική μοντελοποίηση. δηλαδή δεν προσφέρει ποιότητες μοντελοποίησης. Αντίθετα, ένας κύκλος μοντελοποίησης εννοιολογεί τη μαθηματική μοντελοποίηση. Δηλαδή, προσφέρει μια αφηρημένη και δομημένη ιδέα βασικών πτυχών, η οποία είναι απλοποιημένη ώστε να είναι πρακτική για χρήση στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, σε εκπαιδευτικές-πολιτικές συζητήσεις και στην έρευνα. Με άλλα λόγια, ένας κύκλος μοντελοποίησης είναι ένα μοντέλο.

Τα πλεονεκτήματα της εννοιολόγησης της μαθηματικής μοντελοποίησης μέσω ενός κύκλου μοντελοποίησης είναι πολλαπλά. Για παράδειγμα, οι κύκλοι μοντελοποίησης δείχνουν ότι η μοντελοποίηση είναι πολύπλοκη και ότι κάθε φάση επηρεάζει άλλες δυναμικά. Επίσης, οι κύκλοι μοντελοποίησης δείχνουν ότι η μοντελοποίηση ξεκινά από την πραγματική ζωή και επιστρέφει σε αυτήν, και ότι τα μαθηματικά είναι μια χρήσιμη εργαλειοθήκη στη διαδικασία λύσης. Επιπλέον, οι κύκλοι μοντελοποίησης δείχνουν ότι η μοντελοποίηση δεν είναι μια καθαρά μα-

θηματική δραστηριότητα, ωστόσο ότι οι μαθηματικές δραστηριότητες παίζουν κεντρικό ρόλο. Επίσης, οι κύκλοι μοντελοποίησης δείχνουν ότι η μοντελοποίηση διαφέρει από την «εφαρμογή μαθηματικών», η οποία ξεκινά από ένα μαθηματικό αντικείμενο, έννοια ή αλγόριθμο που στη συνέχεια χρησιμοποιείται σε ένα μη μαθηματικό πλαίσιο, ανεξάρτητα από το αν θα λυθεί ένα πρόβλημα.

Εκτός από τη χρήση κύκλων μοντελοποίησης ως εργαλείο εννοιοποίησης, οι ερευνητές χρησιμοποιούν τους κύκλους μοντελοποίησης ως αναλυτικό εργαλείο για να αναλύσουν τα δεδομένα τους υπό το φως των διαφορετικών φάσεων που διακρίνει ένας κύκλος μοντελοποίησης. Για παράδειγμα, βλέπουμε ότι οι κύκλοι μοντελοποίησης χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των δραστηριοτήτων των μαθητών σχετικά με το πότε βρίσκονται σε ποια φάση (Arleback, 2009), για την ανάλυση των ικανοτήτων μοντελοποίησης των μαθητών σχετικά με το εάν οι μαθητές είναι σε θέση να «περάσουν» μια συγκεκριμένη φάση (Haines, Crouch, & Davis, 2000), για την ανάλυση μαθηματικών εργασιών για ορισμένες εμφατικές θέσεις της μοντελοποίησης (Frejd, 2011), ή να αναλύσει την κουλτούρα της τάξης για να δοθεί έμφαση σε ορισμένες φάσεις μοντελοποίησης (Brady & Jung, 2021). Η χρήση των κύκλων μοντελοποίησης ως αναλυτικού εργαλείου αποδίδει ένα πλούσιο σύνολο γνώσεων.

Όταν οι κύκλοι μοντελοποίησης χρησιμοποιούνται ως αναλυτικό εργαλείο στην έρευνα της μαθηματικής μοντελοποίησης, τα αποτελέσματα θα παισιώνονται από αυτό. Οι τυπικοί κύκλοι μοντελοποίησης περιγράφουν γνωστικές δραστηριότητες, οι οποίες είναι δραστηριότητες που ένας ερευνητής μπορεί να παρατηρήσει ή να αφαιρέσει από την ομιλία, τις χειρονομίες, τα γραπτά, τις αντιδράσεις και άλλες ρητές ή σιωπηρές εκφράσεις ενός μοντελιστή. Γενικότερα, οι γνωστικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν νοητικές προσπάθειες για τη χρήση και την κατανόηση των πληροφοριών. Δραστηριότητες όπως η ομιλία, η ακρόαση, η ανάγνωση, η ανάμνηση, η μη ρουτίνα επίλυση προβλημάτων, η λήψη αποφάσεων και η λήψη νοημάτων αναφέρονται ως παραδείγματα γνωστικών δραστηριοτήτων. Οι γνωστικές δραστηριότητες μπορούν να διδαχθούν μέσω της εμπειρίας ή μέσω της διδασκαλίας. Όταν ένα αναλυτικό πλαίσιο έχει γνωστική εστίαση, τα αποτελέσματα της έρευνας θα είναι κατά κύριο λόγο γνωστικής φύσης. Αυτό σημαίνει ότι έχουν ως μονάδα ανάλυσης τις νοητικές δραστηριότητες ενός ατόμου ή μιας ομάδας. Με έμφαση στις γνωστικές πτυχές, η έρευνα ενδέχεται να μην συλλάβει άλλες πτυχές που παίζουν επίσης ρόλο στη μαθηματική μοντελοποίηση. Παρακάτω, δίνουμε μερικές πτυχές που δεν αποτυπώνονται αμέσως από ένα θεωρητικό πλαίσιο που βασίζεται στις γνωστικές δραστηριότητες σε έναν κύκλο μοντελοποίησης.

Πίνακας 2.1: Φάσεις στη διαδικασία μοντελοποίησης

	Γνωστικές δραστηριότητες	Μεταγνωστικές στρατηγικές	Χρήση εργαλείων	Κοινωνικοί κανόνες
1	Κατασκευή	Στρατηγικές για κατανόηση και ερμηνεία πληροφοριών, αναθεώρηση πρόσθετων πληροφοριών.	Ερμηνεία κειμένων, έρευνα πόρων (π.χ., Wikipedia)	Κανόνες εντός της ομάδας, στην τάξη, κανόνες του ιδιοκτήτη/πελάτη του έργου.
2	Απλοποίηση	Στρατηγικές για επιλογή και οργάνωση πληροφοριών, ανάπτυξη στρατηγικών και σχεδίων.	Πειρατισμός με μολύβι και χαρτί, υπολογιστικά φύλλα κ.λπ.	Κανόνες εντός της ομάδας, στην τάξη, κανόνες σχετικά με τις πτυχές που πρέπει να επιλεχθούν και το πλαίσιο στο οποίο επιτρέπεται η δημιουργικότητα.
3	Μαθηματικοποίηση	Στρατηγικές για παρακολούθηση προόδου.	Σχεδιάστε με μολύβι και χαρτί, χρησιμοποιήστε οπτικοποιήσεις	Κανόνες εντός της ομάδας, στην τάξη, κανόνες σχετικά με την ακρίβεια, τη χρήση του δικού τους περιεχομένου.

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα

	Γνωστικές δραστηριότητες	Μεταγνωστικές στρατηγικές	Χρήση εργαλείων	Κοινωνικοί κανόνες
4	Δουλεύοντας μαθηματικά	Στρατηγικές για οργάνωση πληροφοριών, ανάπτυξη	Υπολογίστε και προσομοιώστε με μολύβι και χαρτί, GeoGebra, CAS, κ.λπ.	Κανόνες εντός της ομάδας, στην τάξη, κανόνες που χρησιμοποιούν τις τυπικές μεθόδους και τα νοήματά τους.
5	Ερμηνεία	Στρατηγικές για ερμηνεία αποτελεσμάτων, εξήγηση ευρημάτων.	Χρησιμοποιήστε παρουσιάσεις με μολύβι και χαρτί	Κανόνες εντός της ομάδας, στην τάξη, κανόνες με τον πελάτη παρουσία του έργου.
6	Επικύρωση	Στρατηγικές για επιβεβαίωση και πειθώ.	Έλεγχος με μολύβι και χαρτί, πληροφορίες με χρήση πόρων	Κανόνες εντός της ομάδας, στην τάξη, κανόνες που θεωρούνται ότι επιβεβαιώνουν.
7	Έκθεση	Στρατηγικές για παρουσίαση και πειθώ.	Παρουσίαση με μολύβι και χαρτί ή ψηφιακά εργαλεία	Κανόνες εντός της ομάδας, με τον πελάτη, εστιάζοντας στην πειθώ.

Η επιτυχημένη μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει μεταγνωστικές στρατηγικές (Maab, 2006, Stillman, 1998, Vorholter, 2018). Αυτά χρειάζονται για τη ρύθμιση και τον συντονισμό των πολλών διαδικασιών στη μοντελοποίηση, τόσο μεμονωμένες όσο και ομαδικές διαδικασίες. Κατά τη διάρκεια της εργασίας μοντελοποίησης, οι στόχοι και τα αποτελέσματα πρέπει να συντονίζονται και να ρυθμίζονται λαμβάνοντας υπόψη τους στόχους στην εργασία, τους πόρους που υπάρχουν, το διδακτικό συμβόλαιο από τον δάσκαλο κ.λπ. Διαφορετικές μεταγνωστικές στρατηγικές μπορούν να συνδεθούν με καθεμία από τις διαφορετικές φάσεις σε έναν κύκλο μοντελοποίησης. Για παράδειγμα, όταν ξεκινούν, οι μαθητές πρέπει να «διαβάσουν» τις προθέ-

σεις σε μια περιγραφή εργασίας και να προβλέψουν τι μπορούν να κάνουν για να φτάσουν σε μια ικανοποιητική απάντηση. Σε κάθε μία από τις φάσεις των κύκλων μοντελοποίησης, μπορούν να περιμένουν απροσδόκητες καταστάσεις και μπορεί να αλλάξουν αντανακλαστικά τα αρχικά σχέδια. Χρειάζεται να προβλέπουν, να προβληματίζονται, να σχεδιάζουν, να παρακολουθούν κ.λπ. Από ερευνητική άποψη, για να αναλύονται οι μεταγνωστικές στρατηγικές, χρειάζεται ένα διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο από ό,τι για τις γνωστικές δραστηριότητες. Ωστόσο, οι μεταγνωστικές στρατηγικές και οι γνωστικές διεργασίες είναι αλληλένδετες. Έτσι, μπορεί κανείς να αντιληφθεί τις μεταγνωστικές στρατηγικές ως ένα πρωταρχικό στρώμα στους τυπικούς κύκλους μοντελοποίησης, όπου οι μεταγνωστικές στρατηγικές και οι γνωστικές δραστηριότητες είναι δύο διαστάσεις σε ένα θεωρητικό πλαίσιο.

Μια άλλη πτυχή στη μαθηματική μοντελοποίηση που δεν αποτυπώνεται στους τυπικούς κύκλους μοντελοποίησης είναι η χρήση εργαλείων. Ως εκ τούτου, ο Greefrath (2011) σχεδίασε έναν εναλλακτικό κύκλο μοντελοποίησης που περιγράφει τις λειτουργίες των ψηφιακών εργαλείων σε κάθε φάση των κύκλων μοντελοποίησης. Θέλουμε να επεκτείνουμε αυτή την ιδέα, βασιζόμενοι στη θεωρία του Vygotskian (Williams & Goos, 2013), η οποία εξηγεί ότι οποιαδήποτε γνωστική δραστηριότητα διαμεσολαβείται πάντα από εργαλεία, όπως στυλό, μαυροπίνακες ή ψηφιακά εργαλεία. Η διαμεσολάβηση συνεπάγεται ότι το εργαλείο αλλάζει τόσο τα αποτελέσματα της δραστηριότητας (π.χ., μια μαθηματική απάντηση γίνεται πιο ακριβής), αλλά επίσης αλλάζει τις γνωστικές δραστηριότητες (π.χ. η καταγραφή των ενδιάμεσων βημάτων εκφορτώνει τις απαιτήσεις μνήμης). Όταν ξεκινά μια εργασία μοντελοποίησης, ένας μοντελιστής μπορεί να προσπαθήσει να κατανοήσει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη Wikipedia ως εργαλείο διερεύνησης. Ένα άλλο εργαλείο στην αρχή μιας διαδικασίας μοντελοποίησης είναι το φύλλο εργασιών, το οποίο προσφέρει στους μαθητές τις πληροφορίες που πρέπει να χρησιμοποιηθούν και τις οδηγίες που πρέπει να ακολουθήσουν. Σημαντικά εργαλεία στη μοντελοποίηση είναι το χαρτί και το μολύβι για τη δημιουργία σημειώσεων και σκίτσων. Στο τέλος της διαδικασίας μοντελοποίησης, ένας μοντελιστής θα παρουσιάσει τα αποτελέσματα της δραστηριότητας, πιθανώς σε γραπτή μορφή ή σε προφορική παρουσίαση σε ένα κοινό. Έτσι, η χρήση εργαλείων μπορεί να είναι μια άλλη αναλυτική διάσταση που μπορεί να είναι ένα γενικό επίπεδο στους τυπικούς κύκλους μοντελοποίησης

Μια άλλη αναλυτική διάσταση για την έρευνα για τη μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να είναι οι κοινωνικοί κανόνες. Αυτά είναι κοινωνικά κοινά, άρρητα ή ρητά πρότυπα αποδεκτής συμπεριφοράς. Όπως δείχνουν οι κύκλοι μοντελοποίησης του Blum (2015), η μοντελοποίηση

λαμβάνει χώρα σε δύο κόσμους: τον «μαθηματικό κόσμο» και τον «υπόλοιπο κόσμο», στους οποίους υπάρχουν διαφορετικοί κοινωνικοί κανόνες. Για παράδειγμα, στον «υπόλοιπο κόσμο», οι αριθμητικές απαντήσεις μπορεί να είναι εκτιμήσεις και, ως εκ τούτου, όχι τόσο μαθηματικά ακριβείς. Ωστόσο, όταν παρουσιάζεται η τελική απάντηση του προβλήματος στον πελάτη, ένας μοντελιστής θα συμμορφώνεται με τους κανόνες παρουσίασης (π.χ. σωστή ορθογραφία, ελκυστική διάταξη). Όσον αφορά τους κανόνες στον μαθηματικό κόσμο, οι Yackel και Cobb (1996) περιέγραψαν κοινωνικομαθηματικούς κανόνες, όπως η χρήση προτιμώμενων συμβόλων παρά δημιουργικών εφευρέσεων, και ο συγκεκριμένος τρόπος για να δικαιολογηθούν οι ισχυρισμοί (δίνοντας μια απόδειξη αντί για μερικά παραδείγματα). Επίσης, υπάρχουν κανόνες της τάξης, γνωστοί και ως διδακτικό συμβόλαιο (Brousseau, 2002). Επίσης, στην ομαδική εργασία, μπορεί να υπάρχουν ανταγωνιστικοί κανόνες, με ορισμένους μαθητές να κάνουν την προσπάθεια επειδή θεωρούν τη δραστηριότητα σχετική, ενώ άλλοι την κάνουν για να περάσουν τις εξετάσεις (Hernandez-Martinez & Vos, 2018). Έτσι, οι κοινωνικοί κανόνες θα επηρεάσουν οποιαδήποτε δραστηριότητα μοντελοποίησης με πολλούς τρόπους, και αυτοί μπορεί να διαφέρουν μεταξύ των φάσεων (Bonotto, 2020 & Dede, 2019).

2.4 Διεπιστημονικότητα στην Εκπαίδευση

2.4.1 Ορισμός και επίπεδα

Όλες οι ανθρώπινες επιστήμες συμπλέκονται και μπορούν πάντα να χρησιμοποιηθούν για να ερμηνεύσουν η μία την άλλη: τα σύνορά τους γίνονται ασαφή, οι ενδιάμεσοι και σύνθετοι κλάδοι πολλαπλασιάζονται ατελείωτα και στο τέλος το σωστό τους αντικείμενο μπορεί ακόμη και να εξαφανιστεί εντελώς (Foucault, 1970). Το πρόβλημα της διεπιστημονικότητας απαιτεί την κατανόηση της έννοιας της «επιστήμης» (discipline) ή της «επιστημονικότητας» (disciplinarity). Στην πραγματικότητα, η επιστημονικότητα μπορεί να γίνει κατανοητή ως ένα πολύπλευρο και ένθετο σύστημα, όπου διαφορετικές μορφές έρευνας βρίσκονται σε ένα ή άλλο επίπεδο πολυπλοκότητας της διαδικασίας έρευνας: μονο - επιστημονικότητα (mono-disciplinarity) → πολυ-επιστημονικότητα (multi-disciplinarity) → διε-επιστημονικότητα (inter-disciplinarity) → δια-επιστημονικότητα (trans-disciplinarity) και μετα - επιστημονικότητα (meta-disciplinarity). Εδώ προτείνεται ότι η διε - επιστημονικότητα περιλαμβάνει κάποιο είδος υβριδισμού των «πολλαπλών» επιστημών (ίσως όταν η χημεία και η βιολογία γίνονται βιοχημεία) ενώ η «δια - επιστημονικότητα» συνήθως συνεπάγεται υπέρβαση λόγω κάποιου είδους υπαγωγής των κλάδων σε μια κοινή επιχείρηση επίλυσης προβλημάτων, και εδώ οι

κλάδοι δεν επισημαίνονται απαραίτητα συνειδητά, και ως εκ τούτου, μπορεί να φαίνεται σχεδόν να εξαφανίζονται. Ουσιαστικά αυτό συμβαίνει επειδή η εστίαση της προσοχής είναι στο πρόβλημα και οι κλάδοι παρέχουν απλώς εργαλεία για την επίτευξη λύσης. Στις στατιστικές, για παράδειγμα, οι ιδιότητες των κατανομών ενδιαφέρουν τους μαθηματικούς, ενώ οι κοινωνικοί επιστήμονες μπορεί να επικεντρωθούν στην κινητοποίηση των δεδομένων με σκοπό τη σύγκριση των χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Στα σχολικά έργα STEM, τα μαθηματικά συχνά εξαφανίζονται στην επιστήμη και την τεχνολογία που εμπλέκονται, και στην πραγματικότητα η εξ-αφάνιση των μαθηματικών έχει από καιρό σημειωθεί (Williams & Wake, 2007). Τέλος, στη μετα-επιστημονικότητα, αντιλαμβάνεται κανείς τις ρίζες στη σχέση και τη διαφορά τους, π.χ. όταν η φύση της «χρήσης αποδεικτικών στοιχείων» στην ιστορία και στην επιστήμη γίνεται αντιπαραβαλλόμενη αλλά ως εκ τούτου πιο ξεκάθαρη.

Στη συνέχεια, όμως, έρχεται κανείς στην έννοια της «διεπιστημονικότητας» στον επαγγελματικό κόσμο εκτός της «επιστήμης»: για παράδειγμα μπορεί κανείς να μιλήσει για διεπιστημονικές ομάδες στην υπηρεσία υγείας. Εδώ οι κλάδοι μπορεί να εμφανίζονται απλώς σε διαφορετικούς τίτλους εργασίας και αρμοδιότητες, όπως φυσιοθεραπευτής, νοσηλεύτης, δάσκαλος, γενικός ιατρός και σύμβουλος. Σε αυτό το εξωσχολικό πλαίσιο βλέπει κανείς να προκύπτουν πολλά από τα ίδια ζητήματα κοινή εργασία όπως κάνει κανείς στην ακαδημία και την επιστήμη: αλλά τώρα η ομαδική εργασία, η επαγγελματική ή επιστημονική «ταυτότητα» και ο καταμερισμός της εργασίας είναι απολύτως ουσιαστική και πρέπει με κάποιο τρόπο να ενταχθούν στο ολιστικό συμφέρον της «υγείας του ασθενούς». Κάθε «πειθαρχία» έχει τότε κάποιο είδος επαγγελματικής ταυτότητας σε κίνδυνο, αλλά πρέπει επίσης να αποδεικνύεται αποτελεσματική για το ευρύτερο καλό, στην «κοινή επιχείρηση» ή δραστηριότητα του υγειονομική περίθαλψη.

Οι επαγγελματικοί κλάδοι έχουν επίσης συχνά τις επιστημονικές καθώς και πρακτικές «βάσεις γνώσεων» τους, αν και ο επαγγελματισμός τους μπορεί να οριστεί ίσως πιο συχνά από την πρακτική ικανότητα παρά από το επίσημο πρόγραμμα σπουδών τους ή τις επιστημονικές εταιρείες αυτές καθαυτές. Πράγματι, πολλοί από αυτούς τους επαγγελματικούς κλάδους έχουν δημιουργήσει σχολεία στον ακαδημαϊκό χώρο, καθώς απαιτούν επαγγελματικά προσόντα και διαπίστευση: σχολές μηχανικής, νοσηλευτικής, κοινωνικής εργασίας, κινηματογράφου, παιχνιδιών ηλεκτρονικών υπολογιστών κ.λπ. είναι πλέον κοινός τόπος στα πανεπιστήμια. Σε αυτή την ενότητα, στη συνέχεια, φωτίζουμε και τα δύο αυτά είδη επιστημών σε μια γενική θεωρία ή εννοιολογικό πλαίσιο πειθαρχίας.

2.4.2 Μαθηματική μοντελοποίηση και διεπιστημονικότητα

Η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να γίνει κατανοητή ως επίλυση προβλημάτων πραγματικού κόσμου, αν και αναγνωρίζουμε ότι δεν χρειάζεται να είναι. Η μαθηματική μοντελοποίηση σε αυτήν την ερμηνεία είναι στη συνέχεια η διαδικασία εφαρμογής των μαθηματικών σε ένα πραγματικό πρόβλημα ή κατάσταση με στόχο την κατανόησή του (Niss et al., 2007). Είναι κάτι περισσότερο από την εφαρμογή των μαθηματικών σε μια κλειστή κατάσταση όπου τίποτα δεν χρειάζεται να υποθεθεί ή να εκτιμηθεί — απλώς μια γνωστή μαθηματική τεχνική που εφαρμόζεται. Έτσι, είναι δυνατές πολλαπλές ερμηνείες της κατάστασης που διαμορφώνεται. «Η επιχείρηση μοντελοποίησης περιλαμβάνει τον εντοπισμό και την αντιμετώπιση ερωτήσεων ανοιχτού τύπου, τη δημιουργία, τη βελτίωση και την επικύρωση μοντέλων και την επιχειρηματολογία για την εφαρμογή των ενημερωμένων μοντέλων αποτελεσμάτων» (Niss et al., 2007). «Οι βασικοί χαρακτηρισμοί της μοντελοποίησης... περιλαμβάνουν την τοποθέτηση και την επίλυση προβλημάτων που βρίσκονται στον πραγματικό κόσμο, που για τους σκοπούς μας περιλαμβάνει άλλους τομείς πειθαρχίας όπως η μηχανική ή η ιατρική, και τα γενικά πλαίσια ζωής καθώς επηρεάζουν τα άτομα, τις ομάδες και τις κοινότητες» (Niss et al., 2007). Ως εκ τούτου, οι ερευνητές ανέπτυξαν ή πρότειναν θεωρητικές απόψεις σχετικά με την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικής μοντελοποίησης και διαθεματικής εκπαίδευσης στα μαθηματικά (Borromeo Ferri και Mousoulides, 2017, English, 2013, Michelsen, 2006, 2015). Η καθηγήτρια L.English για παράδειγμα το 2013, ανέδειξε την ανάγκη να οικοδομήσουμε μια ισχυρότερη βάση στις μαθηματικές επιστήμες μέσω μαθησιακών εμπειριών προσανατολισμένων στο μέλλον για να εξοπλίσει τους μαθητές για τις προκλήσεις του 21ου αιώνα. Απαριθμεί τις βασικές ικανότητες που αποτελούν βασικά στοιχεία παραγωγικών και καινοτόμων πρακτικών στο χώρο εργασίας για τη διασφάλιση αυτής της θεμελίωσης. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, συνιστά αυξημένη εστίαση στην επίλυση προβλημάτων διεπιστημονικού χαρακτήρα που εμπλέκει τους μαθητές σε πολύπλοκα μοντέλα με δύσκολα σενάρια βασισμένα στη ζωή. Σε τέτοιες μαθησιακές εμπειρίες, γνώσεις και δεξιότητες από τουλάχιστον δύο κλάδους εφαρμόζονται σε σενάρια πραγματικού κόσμου με στόχο τη διαμόρφωση της συνολικής μαθησιακής εμπειρίας. Επιπλέον η ίδια, θεωρεί ότι τέτοια μαθηματική μοντελοποίηση έχει εφαρμογή στην πρωτοβάθμια και μέση εκπαίδευση, όπου η εστίαση είναι στη συμμετοχή των μαθητών στα είδη μαθηματικής και επιστημονικής σκέψης που απαιτούνται για προκλήσεις πέρα από την τάξη. Υποστηρίζει το επιχειρήμα της από δύο μελέτες που βασίζονται στον σχεδιασμό, μια μελέτη μοντελοποίησης δεδομένων και τις εμπειρίες μοντελοποίησης με βάση τη μηχανική.

2.4.3 Μαθηματική μοντελοποίηση και μια καλά κατανοητή σχέση με τον πραγματικό κόσμο

Οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου υπάρχουν από την αρχή των μαθηματικών (Joseph, 2011). Εάν η μαθηματική μοντελοποίηση θεωρείται ως επίλυση προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο, είναι απαραίτητη μια καλά κατανοητή σχέση μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου. Όταν υπάρχει μια τέτοια σχέση, η πραγματική κατάσταση ενθαρρύνει μια βαθύτερη κατανόηση και επεξεργασία των μαθηματικών, αλλά ταυτόχρονα η χρήση των μαθηματικών ενθαρρύνει τη βαθύτερη κατανόηση και επεξεργασία του πραγματικού κόσμου. Το ένα εμπλουτίζει το άλλο. Το παράδειγμα του νερού που πέφτει από δύο πύλες σε έναν τοίχο φράγματος στον υπερχειλιστή από κάτω δείχνει την άποψή μας και αποτελεί ένα πλαίσιο για το σχεδιασμό υλικών μοντελοποίησης για μια τάξη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Από μαθηματική άποψη, η διατήρηση μιας καλά κατανοητής σχέσης κάθε μοντελοποίησης στην τάξη με τον πραγματικό κόσμο είναι ένα ζήτημα για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο.

Η κατάσταση που πρόκειται να μοντελοποιηθεί προέρχεται από την παρατήρηση ότι το νερό από την πύλη που βρίσκεται χαμηλότερα στο τοίχωμα του φράγματος φαίνεται να έχει ισχυρότερη ορμή από αυτό από την υψηλότερη πύλη. Ωστόσο, οι οριζόντιες αποστάσεις από το τοίχωμα του φράγματος μέχρι το σημείο πρόσκρουσης στον υπερχειλιστή φαίνεται να είναι παρόμοιες. Θέτουμε το πραγματικό πρόβλημα: Ποια είναι η σχέση μεταξύ της θέσης μιας πύλης και της οριζόντιας απόστασης από το σημείο που προσγειώνεται το νερό; Αυτή η κατάσταση αφορά τα μαθηματικά και τη φυσική. (Stillman et al.), που υποβλήθηκε, για μια πλήρη λύση σε αυτό το πρόβλημα. Από τη σκοπιά των μαθηματικών, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σημασία της δημιουργίας και της επιλογής μεταβλητών, της δημιουργίας μιας απλοποιημένης κατάστασης και της επικύρωσης της λύσης που προέρχεται από το μοντέλο με πείραμα. Κατά τη μοντελοποίησή τους, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκτιμήσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών για να κατανοήσουν (να αναπαραστήσουν, να εξηγήσουν, να προβλέψουν) μέρη του κόσμου. Από την σκοπιά του πραγματικού κόσμου, εμπλουτίζεται η γνώση της φυσικής. Οι σπουδαστές μαθαίνουν ότι η ταχύτητα του νερού που χύνεται είναι ανάλογη με την τετραγωνική ρίζα της απόστασης της πύλης από την κορυφή και ότι η οριζόντια απόσταση από το σημείο προσγειώσεως του νερού που χύνεται γίνεται μέγιστο όταν η πύλη βρίσκεται στο μέσο του ύψους (βάθους) του νερού στο φράγμα στον τοίχο όπου βρίσκονται οι πύλες. Δύο ερωτήσεις είναι κρίσιμες τόσο στην επίλυση μιας αυθεντικής εργασίας του πραγματικού κόσμου όπως αυτή όσο

και στον σχεδιασμό της εφαρμογής και της διαχείρισής της στην τάξη. Πρώτον, ποιος τύπος μαθηματικών μπορεί να εφαρμοστεί και δεύτερον, πώς μπορεί να εννοηθεί η κατάσταση του πραγματικού κόσμου. Η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των δύο οδηγεί σε μια καλά κατανοητή σχέση μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου όταν εμπλουτίζουν το ένα το άλλο.

3. Ερευνητικά Ερωτήματα

Η διατύπωση των ερευνητικών ερωτήσεων αποτελεί κρίσιμο στοιχείο της μεταπτυχιακής διατριβής, καθώς θέτει τις βάσεις για τη διερεύνηση του κεντρικού προβλήματος και καθοδηγεί τη μεθοδολογική προσέγγιση. Στο πλαίσιο αυτής της διατριβής, οι ερευνητικές ερωτήσεις αποσκοπούν στην εξερεύνηση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως εργαλείου διεπιστημονικής εκπαίδευσης και στη μελέτη της σχέσης των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Οι ερευνητικές ερωτήσεις προσδιορίζουν το πλαίσιο της έρευνας, αφού αναδεικνύουν τα θεμελιώδη ζητήματα που εξετάζει η διατριβή, όπως η διεπιστημονικότητα, η μαθηματική μοντελοποίηση και η σύνδεση θεωρίας-πράξης. Επίσης βοηθούν στη διαμόρφωση ενός σαφούς θεωρητικού πλαισίου, στο οποίο εντάσσεται η ανάλυση. Κατευθύνουν τη μεθοδολογία, δηλαδή, καθορίζουν τα εργαλεία και τις τεχνικές συλλογής και ανάλυσης δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν αφενός και αφετέρου υποδεικνύουν τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να μετρηθούν οι παράμετροι της έρευνας. Εν συνεχεία, διασφαλίζουν τη συνοχή καθώς σχετίζονται άμεσα με τη θεωρητική βάση της διατριβής που προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2 και συνδέονται με τη μεθοδολογική ανάλυση που θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 4. Έτσι εξασφαλίζουν ότι η έρευνα διατηρεί μια εστιασμένη και οργανωμένη προσέγγιση. Εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι απαντούν στα κενά της βιβλιογραφίας διότι ανταποκρίνονται στις προκλήσεις που εντοπίστηκαν στη βιβλιογραφική επισκόπηση, όπως η περιορισμένη κατανόηση της σύνδεσης μαθηματικών και πραγματικού κόσμου ή οι δυσκολίες στην ενσωμάτωση της διεπιστημονικότητας.

Οι ερωτήσεις διαμορφώθηκαν με βάση κάποια από τα επόμενα κριτήρια. Αρχικά πρέπει να γίνει ευθυγράμμιση με το σκοπό της εργασίας, όπου κάθε ζήτημα να αντανακλά πτυχές της μαθηματικής μοντελοποίησης και της διεπιστημονικής εκπαίδευσης, εστιάζοντας τόσο στη θεωρητική κατανόηση όσο και στην πρακτική εφαρμογή. Επίσης πρέπει να είναι διατυπωμένες με σαφήνεια, ώστε να καθοδηγούν τη συλλογή δεδομένων και την ανάλυση. Η σχεδίαση με τρόπο που επιτρέπει τη μέτρηση και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, αποσκοπούν στη δημιουργία γνώσης που μπορεί να βελτιώσει την εκπαιδευτική διαδικασία, εστιάζοντας στις πρακτικές επιπτώσεις της μαθηματικής μοντελοποίησης. Μέσα από τις ερευνητικές ερωτήσεις, επιδιώκονται οι παρακάτω στόχοι, όπως η ανάδειξη της μαθηματικής μοντελοποίησης, την

ενίσχυση της διεπιστημονικότητας, των εντοπισμό προκλήσεων και την παρουσίαση λύσεων και στρατηγικών για την ενίσχυσή της στην εκπαιδευτική διαδικασία.

3.1 Κεντρικές Ερευνητικές Ερωτήσεις

Οι κεντρικές ερευνητικές ερωτήσεις που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα καθοδηγούν τη διδακτορική διατριβή, λειτουργώντας ως «πυξίδα» για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων. Η διαμόρφωσή τους βασίζεται στα θεωρητικά μοντέλα και τη βιβλιογραφία που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Χωρίζονται σε τρία επίπεδα (θεωρητικό, πρακτικό, και μεθοδολογικό) και καλύπτουν πτυχές της μαθηματικής μοντελοποίησης και της διεπιστημονικότητας.

Οι ερωτήσεις στο θεωρητικό επίπεδο επικεντρώνονται στη βαθύτερη κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης και της σχέσης της με τη διεπιστημονικότητα.

3.1.1 Ερώτηση 1

«Ποια είναι η σχέση μεταξύ μαθηματικής μοντελοποίησης και διεπιστημονικότητας;» Ο σκοπός του ζητήματος αυτού είναι να διερευνηθεί πώς η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα μεταξύ επιστημονικών πεδίων. Στην ουσία, εξετάζει τη θεωρητική διάσταση της μοντελοποίησης, τονίζοντας πώς τα μαθηματικά ενοποιούν γνώση από διαφορετικές επιστήμες. Με αυτό το τρόπο αναδεικνύει τον ρόλο της μαθηματικής μοντελοποίησης ως θεμελιώδους στοιχείου στη διεπιστημονική εκπαίδευση.

3.1.2 Ερώτηση 2

«Πώς μπορεί να διατηρηθεί η ισορροπία μεταξύ μαθηματικής ακρίβειας και πρακτικής συνάφειας;» Στην περίπτωση αυτή γίνεται η εξέταση στο πώς η μαθηματική ακρίβεια μπορεί να διατηρηθεί ενώ ταυτόχρονα εξυπηρετείται η πρακτική συνάφεια. Εστιάζει, δηλαδή, στη δυσκολία διατήρησης της μαθηματικής αυστηρότητας όταν τα μαθηματικά εφαρμόζονται σε σύνθετα προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Εξασφαλίζει ότι οι μαθητές κατανοούν τόσο την πρακτική όσο και τη θεωρητική διάσταση των μαθηματικών.

Οι ερωτήσεις σε πρακτικό επίπεδο ασχολούνται με την εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική πράξη και τις επιπτώσεις της στους μαθητές.

3.1.3 Ερώτηση 3

«Πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης στον πραγματικό κόσμο;» Σκοπός της, είναι να κατανοηθεί πώς οι μαθητές βλέπουν τη σύνδεση των

μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο. Πιο αναλυτικά, εξετάζει τις αντιλήψεις και τις εμπειρίες μαθητών μέσα από συμμετοχή σε δραστηριότητες μοντελοποίησης. Έτσι, αναδεικνύει πώς η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει τη συνάφεια των μαθηματικών για τους μαθητές.

3.1.4 Ερώτηση 4

«Ποιες είναι οι επιπτώσεις της μαθηματικής μοντελοποίησης στην ανάπτυξη δεξιοτήτων STEM»; Η διατύπωσή του έχει ως σκοπό να εξεταστεί πώς η συμμετοχή σε δραστηριότητες μοντελοποίησης συμβάλλει στην καλλιέργεια δεξιοτήτων όπως η κριτική σκέψη, η ανάλυση και η επίλυση προβλημάτων. Μελετά, επίσης, την επιρροή της μαθηματικής μοντελοποίησης στην ανάπτυξη δεξιοτήτων που είναι κρίσιμες για τα STEM μαθήματα, τεκμηριώνοντας τη συνεισφορά της μοντελοποίησης στη βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής.

Στο μεθοδολογικό επίπεδο, οι ερωτήσεις επικεντρώνονται στις μεθόδους και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της μαθηματικής μοντελοποίησης.

3.1.5 Ερώτηση 5

«Ποια εργαλεία και μέθοδοι είναι πιο κατάλληλα για τη μελέτη της μαθηματικής μοντελοποίησης σε διεπιστημονικό πλαίσιο;» Σκοπός αυτής της τοποθέτησης είναι να καθοριστούν οι κατάλληλες μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της μαθηματικής μοντελοποίησης. Αναλυτικότερα, διερευνά την εφαρμογή ποσοτικών, ποιοτικών, ή μικτών μεθόδων για τη συλλογή δεδομένων. Έτσι, εξασφαλίζει ότι τα δεδομένα είναι έγκυρα, αξιόπιστα και επαρκή για την ανάλυση.

3.1.6 Ερώτηση 6

«Πώς μπορεί να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα των δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαίδευση STEM»; Εδώ, πρέπει να αναπτυχθούν και να αξιολογηθούν κριτήρια που μετρούν την επιτυχία της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική πράξη με απώτερο σκοπό την εξέταση στο πώς οι δραστηριότητες μοντελοποίησης επηρεάζουν την απόδοση των μαθητών και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Οι ερωτήσεις στα τρία επίπεδα είναι αλληλένδετες.

- Θεωρητικό → Πρακτικό: Οι θεωρητικές ερωτήσεις καθοδηγούν την ανάλυση των πρακτικών εφαρμογών.
- Πρακτικό → Μεθοδολογικό: Οι πρακτικές ερωτήσεις προσδιορίζουν τις ανάγκες για

μεθοδολογικά εργαλεία και μεθόδους.

- Μεθοδολογικό → Θεωρητικό: Τα ευρήματα από τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις επανεξετάζουν και ενισχύουν τη θεωρητική βάση.

3.2 Επιστημονική Αξία των Ερωτήσεων

Η επιστημονική αξία των ερευνητικών ερωτήσεων καθορίζει τη σημασία τους για την εκπαιδευτική έρευνα και την πρακτική εφαρμογή. Οι ερωτήσεις που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 δεν είναι μόνο θεωρητικά τεκμηριωμένες, αλλά επίσης σχεδιασμένες για να προσφέρουν λύσεις σε κρίσιμα ζητήματα που αφορούν τη μαθηματική μοντελοποίηση, τη διεπιστημονικότητα και τη σχέση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

3.2.1 Συνάφεια με την βιβλιογραφία

Παρόλο που η βιβλιογραφία αναγνωρίζει τη σημασία της μαθηματικής μοντελοποίησης στη διεπιστημονική εκπαίδευση, υπάρχει περιορισμένη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αυτή μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά. Η βιβλιογραφία δείχνει ότι συχνά υπάρχει έλλειψη ισορροπίας μεταξύ της μαθηματικής ακρίβειας και της πρακτικής συνάφειας. Ενώ υπάρχουν ενδείξεις ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει τη μάθηση, τα εργαλεία αξιολόγησης είναι συχνά ανεπαρκή. Στόχος επομένως των ερωτήσεων είναι να εστιάζουν στην ανάπτυξη ενός πλαισίου που συνδέει θεωρητικά μοντέλα με πρακτικές εφαρμογές, γεφυρώνοντας αυτό το χάσμα από τη μια και από την άλλη να επικεντρώνονται στην ανάπτυξη μεθόδων που μπορούν να αξιολογήσουν την αποτελεσματικότητα των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης.

3.2.2 Ευθυγράμμιση με τη Μεθοδολογία

Οι ερωτήσεις καλύπτουν τόσο την ποιοτική όσο και την ποσοτική διάσταση, επιτρέποντας την πλήρη κατανόηση των θεμάτων που εξετάζονται. Οι ερωτήσεις περιλαμβάνουν και τις δύο προσεγγίσεις, π.χ., πειραματικές μελέτες για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της μοντελοποίησης και περιγραφικές μελέτες για την καταγραφή των αντιλήψεων μαθητών και εκπαιδευτικών. Δεδομένα από μαθητές, εκπαιδευτικούς, και διδακτικά σενάρια επιτρέπουν την πολυδιάστατη ανάλυση της μοντελοποίησης.

3.2.3 Συμβολή στην Εκπαιδευτική Πρακτική

Οι ερωτήσεις έχουν πρακτική αξία για τους εκπαιδευτικούς, τους μαθητές, και τους φορείς χάραξης πολιτικής. Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις παρέχουν κατευθυντήριες γραμμές για τη

χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη. Ενισχύουν τις διδακτικές πρακτικές με έμφαση στην εφαρμογή των μαθηματικών σε πραγματικά προβλήματα. Εστιάζουν στη βελτίωση δεξιοτήτων όπως η κριτική σκέψη, η συνεργασία, και η επίλυση προβλημάτων Αναδεικνύουν τη σημασία της μαθηματικής μοντελοποίησης για την προετοιμασία των μαθητών για τον επαγγελματικό κόσμο. Οι ερωτήσεις παρέχουν τη βάση για τη διαμόρφωση πολιτικών που ενσωματώνουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στη διεπιστημονική εκπαίδευση.

3.2.4 Συμβολή στη Θεωρητική Κατανόηση

Η απάντηση στις ερωτήσεις προάγει τη θεωρητική κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης. Εξετάζουν πώς τα υπάρχοντα θεωρητικά μοντέλα (π.χ., κύκλος μοντελοποίησης, διεπιστημονική κλίμακα) μπορούν να επεκταθούν ή να προσαρμοστούν. Οι ερωτήσεις εστιάζουν στις γνωστικές και επιστημολογικές προκλήσεις της μοντελοποίησης, συμβάλλοντας στην καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας. Ενισχύουν τη συζήτηση για το πώς η διεπιστημονικότητα μπορεί να ενσωματωθεί αποτελεσματικά στην εκπαιδευτική πρακτική.

3.2.5 Μακροπρόθεσμες Επιπτώσεις

Οι ερωτήσεις έχουν μακροπρόθεσμη επιστημονική και κοινωνική αξία, καθώς συμβάλλουν στη δημιουργία καινοτόμων εκπαιδευτικών προγραμμάτων που ενσωματώνουν τη μαθηματική μοντελοποίηση. Επιπλέον, υποστηρίζουν την ανάπτυξη μιας γενιάς μαθητών που είναι καλά εξοπλισμένοι για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των STEM επαγγελμάτων. Σημαντικό είναι ότι παρέχουν τη βάση για την ανάπτυξη εκπαιδευτικών συστημάτων που συνδυάζουν θεωρία και πράξη.

3.3 Υποθέσεις της έρευνας

Η διατύπωση των υποθέσεων είναι ένα κρίσιμο βήμα για τη σύνδεση των ερευνητικών ερωτήσεων με τα δεδομένα και τα αποτελέσματα της έρευνας. Οι υποθέσεις βασίζονται στις θεωρητικές βάσεις που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 και τις ερευνητικές ερωτήσεις που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Εκφράζουν τις προσδοκίες του ερευνητή για τις σχέσεις και τις επιπτώσεις που διερευνώνται.

Οι υποθέσεις διαμορφώνονται για την καθοδήγηση της έρευνας, παρέχοντας συγκεκριμένες κατευθύνσεις για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων και προσδιορίζοντας τις βασικές παραμέτρους που θα εξεταστούν. Εξετάζουν την εγκυρότητα και την εφαρμοσιμότητα των θεωρητικών

μοντέλων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Εν συνεχεία, δημιουργούν ένα σαφές πλαίσιο για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων και τη διατύπωση συμπερασμάτων.

3.3.1 Υπόθεση 1η

«Η μαθηματική μοντελοποίηση προάγει τη διεπιστημονικότητα μέσω της σύνδεσης γνώσεων από διαφορετικούς επιστημονικούς τομείς.» Η λογική αυτής της ικασίας είναι ότι η μαθηματική μοντελοποίηση, με την ενσωμάτωση πραγματικών προβλημάτων, ενισχύει τη συνεργασία και την ενοποίηση επιστημονικών εννοιών. Μελέτες (Gresnigt et al., 2014) έχουν δείξει ότι η διεπιστημονική προσέγγιση βασίζεται στη δυνατότητα της μοντελοποίησης να γεφυρώνει διαφορετικούς τομείς.

3.3.2 Υπόθεση 2η

«Οι μαθητές που συμμετέχουν σε δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης αναπτύσσουν βαθύτερη κατανόηση μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων STEM.» Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης ενισχύουν την κριτική σκέψη, την επίλυση προβλημάτων και την εφαρμογή θεωρητικών γνώσεων στην πράξη. Έρευνες (Blum & Leib, 2007) δείχνουν ότι οι μαθητές που ασχολούνται με πραγματικά προβλήματα μέσω μαθηματικής μοντελοποίησης αποκτούν πιο ουσιαστική κατανόηση.

3.3.3 Υπόθεση 3η

«Η αποτελεσματικότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης εξαρτάται από τη σαφήνεια του πραγματικού προβλήματος και τη σωστή επιλογή εργαλείων.» Ένα πρόβλημα που είναι σαφές και σχετικό με την εμπειρία των μαθητών αυξάνει τη συμμετοχή και τη μάθηση, ενώ τα κατάλληλα εργαλεία διευκολύνουν τη διαδικασία. Μελέτες (Niss et al., 2007) υπογραμμίζουν τη σημασία της επιλογής προβλημάτων και εργαλείων για την επιτυχία της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Οι υποθέσεις καθορίζουν τα δεδομένα που πρέπει να συλλεχθούν (π.χ., μαθητικές αντιλήψεις, αποτελέσματα δραστηριοτήτων, βαθμός συνεργασίας). Διαμορφώνουν τα κριτήρια επιλογής εργαλείων και τεχνικών για την ανάλυση. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τις υποθέσεις για την επιβεβαίωση ή την απόρριψή τους. Παρέχουν τη βάση για την ερμηνεία των ευρημάτων και τη διατύπωση συμπερασμάτων. Οι υποθέσεις επιτρέπουν την ανατροφοδότηση και την προσαρμογή των θεωρητικών μοντέλων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Οι υποθέσεις διασφαλίζουν ότι η έρευνα είναι καλά θεμελιωμένη στη θεωρία και την πρακτική. Παρέχουν

ένα πλαίσιο για την ερμηνεία των ευρημάτων και τη σύνδεσή τους με τη βιβλιογραφία. Οι υποθέσεις υποστηρίζουν τη διεπιστημονικότητα, καθώς εστιάζουν στη σύνδεση μαθηματικών και άλλων επιστημών.

4. Μεθοδολογία

Ο σκοπός της μεθοδολογίας είναι να διασφαλίσει τη συστηματική και ακριβή συλλογή, ανάλυση και παρουσίαση δεδομένων από τη βιβλιογραφία, ώστε να απαντηθούν οι ερευνητικές ερωτήσεις. Η επιλογή μιας κατάλληλης μεθοδολογικής προσέγγισης είναι κρίσιμη για την εγκυρότητα και την αξιοπιστία της έρευνας, ειδικά όταν εξετάζονται σύνθετα θέματα όπως η μαθηματική μοντελοποίηση και η διεπιστημονικότητα.

4.1 Αναλυτική Επιθεώρηση Λογοτεχνίας

Αυτή η ενότητα περιγράφει τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή μιας ολοκληρωμένης συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, με επίκεντρο τη διδασκαλία και τη μάθηση της μαθηματικής μοντελοποίησης και τις διεπιστημονικές πτυχές της. Μια αναλυτική ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, ιδιαίτερα του έργου των Newman και Gough (2020), χρησιμεύει ως κρίσιμο πλαίσιο για την κατανόηση της υπάρχουσας υποτροφίας σε αυτόν τον τομέα.

Ο πρωταρχικός στόχος της αναλυτικής ανασκόπησης είναι η σύνθεση της υπάρχουσας έρευνας σχετικά με την ενοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης με εφαρμογές πραγματικού κόσμου και την εκπαίδευση STEM. Αναλύοντας συστηματικά τη βιβλιογραφία, στοχεύουμε να εντοπίσουμε κενά στην τρέχουσα έρευνα, να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα των διεπιστημονικών πρακτικών και να κατανοήσουμε τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί. Οι Newman και Gough (2020) προτείνουν μια δομημένη προσέγγιση για τη διεξαγωγή βιβλιογραφικών ανασκοπήσεων που τονίζει τη σημασία της σαφήνειας, της αυστηρότητας και της συνέπειας.

Αρχικά περιλαμβάνει το καθορισμό ενός πεδίου εφαρμογής. Αναλυτικότερα, η ανασκόπηση επικεντρώνεται σε μελέτες που εξετάζουν ρητά τη σχέση μεταξύ μαθηματικής μοντελοποίησης και πραγματικών πλαισίων, προσδιορίζοντας βασικά θέματα που σχετίζονται με τη διεπιστημονική εκπαίδευση. Επίσης, οι μελέτες επιλέχθηκαν με βάση τη συνάφειά τους με τα ερευνητικά ερωτήματα, τη μεθοδολογική ορθότητα και τη συμβολή τους στην κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθηματικών και των κλάδων όπως η επιστήμη και η τεχνολογία. Από κάθε επιλεγμένη μελέτη εξήχθησαν βασικές πληροφορίες όπως η συγγραφή, το έτος δημοσίευσης, η μεθοδολογία, τα ευρήματα και οι επιπτώσεις στη διδακτική πρακτική.

Η αναλυτική ανασκόπηση αποκάλυψε πολλά επαναλαμβανόμενα θέματα στη βιβλιογραφία. Πολλές μελέτες τόνισαν πώς η μαθηματική μοντελοποίηση ενισχύει την κατανόηση των μαθητών περίπλοκων προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, ενισχύοντας την κριτική σκέψη και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Επιπλέον, η έρευνα επισήμανε τη σημαντικότητα των συλλογικών προσπαθειών μεταξύ εκπαιδευτικών από διαφορετικούς κλάδους. Αυτή η διεπιστημονική προσέγγιση όχι μόνο εμπλουτίζει τη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά παρέχει επίσης στους μαθητές ποικίλες προοπτικές για την επίλυση προβλημάτων. Παρά τα οφέλη, πολυάριθμες μελέτες επισήμαναν προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί, συμπεριλαμβανομένων των περιορισμών στο πρόγραμμα σπουδών, της έλλειψης κατάρτισης και των διαφορετικών επιπέδων ετοιμότητας των μαθητών.

Η ανασκόπηση υποδεικνύει την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση αποτελεσματικών στρατηγικών για την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης στο πλαίσιο STEM. Η μελλοντική έρευνα θα πρέπει να επικεντρωθεί στην ανάπτυξη προγραμμάτων επαγγελματικής ανάπτυξης για εκπαιδευτικούς για την ενίσχυση των διεπιστημονικών δεξιοτήτων διδασκαλίας τους. Επιπλέον να στοχεύσει στις διαχρονικές μελέτες που αξιολογούν τον αντίκτυπο των διεπιστημονικών προσεγγίσεων στα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών. Τέλος να επικεντρωθεί στη διερεύνηση τεχνολογικών εργαλείων που μπορούν να διευκολύνουν την ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης σε περιβάλλοντα πραγματικού κόσμου.

4.2 Διαδικασίες συλλογής δεδομένων

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφονται οι διαδικασίες συλλογής δεδομένων για να εξασφαλιστεί μια συστηματική προσέγγιση για τη συγκέντρωση σχετικής βιβλιογραφίας αναφορικά με τις διεπιστημονικές πτυχές της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Ο στόχος είναι να δημιουργηθεί μια ισχυρή βάση για την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών, της εφαρμογής του πραγματικού κόσμου και της ολοκλήρωσης STEM.

Η επιλογή της βιβλιογραφίας καθοδηγείται από συγκεκριμένα κριτήρια για τη διασφάλιση της συνάφειας και της ποιότητας Ένα κριτήριο είναι η συνάφεια με το θέμα καθώς οι μελέτες πρέπει να αντιμετωπίζουν ρητά πτυχές της μαθηματικής μοντελοποίησης, της διεπιστημονικής εκπαίδευσης και τις συνδέσεις τους με τις πραγματικές εφαρμογές και τα πεδία STEM. Ένας άλλος σημαντικός παράγοντας είναι να περιλαμβάνονται μόνο άρθρα περιοδικών με κριτές, βιβλία και εργασίες συνεδρίων για την εξασφάλιση επιστημονικής αυστηρότητας. Σημαντική

είναι και η ημερομηνία δημοσίευσης καθώς η εστίαση σε πρόσφατες δημοσιεύσεις (μετά το 2010) διασφαλίζει ότι τα ευρήματα αντικατοπτρίζουν τις τρέχουσες τάσεις και μεθοδολογίες στον τομέα.

Χρησιμοποιήθηκαν πολλαπλές ακαδημαϊκές βάσεις δεδομένων για τη διεξαγωγή ολοκληρωμένης αναζήτησης σχετικής βιβλιογραφίας. Βασικές βάσεις δεδομένων όπως JSTOR, ERIC, Web of Science και Google Scholar επιλέχθηκαν για τα εκτεταμένα αποθετήρια εκπαιδευτικής έρευνας. Στην συνέχεια, χρησιμοποιήθηκαν συγκεκριμένοι όροι αναζήτησης, συμπεριλαμβανομένης της "μαθηματικής μοντελοποίησης", "διεπιστημονικής εκπαίδευσης", "ενσωμάτωση STEM", "εφαρμογές πραγματικού κόσμου" και συνδυασμών τους. Οι τελεστές Boolean (και, ή) χρησιμοποιήθηκαν για την αποτελεσματική βελτίωση των αναζητήσεων. Χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της δειγματοληψίας χιονοστιβάδας, όπου εξετάστηκαν αναφορές από επιλεγμένα άρθρα για τον εντοπισμό πρόσθετων σχετικών μελετών.

Αναπτύχθηκε ένα τυποποιημένο φύλλο εξαγωγής δεδομένων για τη συλλογή βασικών πληροφοριών από κάθε πηγή, συμπεριλαμβανομένης της συγγραφής, του έτους έκδοσης, της μεθοδολογίας, των ευρημάτων και της συνάφειας με τα ερευνητικά ερωτήματα. Η λογοτεχνία κατηγοριοποιήθηκε θεματικά για να διευκολυνθεί η σύνθεση. Οι κατηγορίες περιελάμβαναν μεθοδολογικές προσεγγίσεις, διεπιστημονικά πλαίσια, εφαρμογές πραγματικού κόσμου και ευρήματα που σχετίζονται με το STEM.

Η ενσωμάτωση της αναλυτικής ανασκόπησης των Newman και Gough (2020) ενισχύει τη μεθοδολογική αυστηρότητα. Το πλαίσιο τους τονίζει τη σημασία της κριτικής ανάλυσης της βιβλιογραφίας για την κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ θεωρητικών θεμελίων και πρακτικών εφαρμογών. Αυτή η ανασκόπηση χρησιμεύει ως καθοδηγητικός φακός για την αξιολόγηση της ποιότητας και της εφαρμοσιμότητας των μελετών που εξετάζονται. Κάθε επιλεγμένη μελέτη αξιολογήθηκε κριτικά με βάση τα κριτήρια των των Newman και Gough για την αξιολόγηση της ευρωστίας των ερευνητικών ευρημάτων και των επιπτώσεών τους στην πρακτική στην εκπαίδευση στα μαθηματικά. Οι γνώσεις που αποκτήθηκαν από αυτήν την αναλυτική ανασκόπηση θα συντεθούν στην ενότητα των αποτελεσμάτων, επισημαίνοντας κοινά θέματα, κενά στη βιβλιογραφία και επιπτώσεις για μελλοντική έρευνα στο πεδίο.

4.3 Τεχνικές Ανάλυσης Δεδομένων

Αυτή η ενότητα περιγράφει τις τεχνικές ανάλυσης δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τη σύνθεση της συλλεγόμενης βιβλιογραφίας σχετικά με τις διεπιστημονικές πτυχές της μαθηματικής μοντελοποίησης και τη σχέση της με τις εφαρμογές του πραγματικού κόσμου και την εκπαίδευση STEM. Ο στόχος είναι η εξαγωγή ουσιαστικών γνώσεων που ενημερώνουν τα ερευνητικά ερωτήματα και συμβάλλουν στην ευρύτερη κατανόηση του θέματος.

Υιοθετήθηκε μια προσέγγιση ποιοτικής ανάλυσης περιεχομένου για τη συστηματική ερμηνεία της βιβλιογραφίας. Αυτή η μέθοδος επιτρέπει τον εντοπισμό προτύπων, θεμάτων και γνώσεων από διάφορες μελέτες. Αναπτύχθηκε ένα πλαίσιο κωδικοποίησης με βάση τις αρχικές αναγνώσεις της βιβλιογραφίας. Το πλαίσιο περιλάμβανε προκαθορισμένους κώδικες που σχετίζονται με βασικά θέματα όπως:

- Διαθεματικές πρακτικές στη μαθηματική εκπαίδευση
- Πραγματικές εφαρμογές της μαθηματικής μοντελοποίησης
- Προκλήσεις στην ενσωμάτωση των κλάδων STEM
- Μεθοδολογικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης

Διεξήχθη μια ανοιχτή διαδικασία κωδικοποίησης για να επιτραπεί η εμφάνιση νέων θεμάτων που δεν είχαν αρχικά προβλεφθεί. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία περιλάμβανε τη συνεχή βελτίωση των κωδίκων και τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ τους.

Με βάση την ποιοτική ανάλυση περιεχομένου, χρησιμοποιήθηκε θεματική διάγνωση για την περαιτέρω εξέταση των πληροφοριών. Τα βασικά θέματα εντοπίστηκαν από τα κωδικοποιημένα δεδομένα, εστιάζοντας στον τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης της μαθηματικής μοντελοποίησης σε διεπιστημονικά πλαίσια. Τα θέματα μπορεί να περιλαμβάνουν την αποτελεσματικότητα των συνεργατικών περιβαλλόντων μάθησης, τον ρόλο των προβλημάτων του πραγματικού κόσμου στην εμπλοκή των μαθητών και τις παιδαγωγικές στρατηγικές που ενισχύουν τις διεπιστημονικές συνδέσεις. Κάθε κύριο θέμα διερευνήθηκε σε βάθος για τον εντοπισμό επιμέρους θεμάτων που παρέχουν πλουσιότερες πληροφορίες. Για παράδειγμα, στις "εφαρμογές του πραγματικού κόσμου", τα υποθέματα μπορεί να περιλαμβάνουν περιπτωσιολογικές μελέτες, μάθηση βάσει έργου και ενσωμάτωση τεχνολογίας.

Διεξήχθη μια συγκριτική ανάλυση για να εξεταστούν οι διαφορές και οι ομοιότητες μεταξύ των

μελετών. Τα ευρήματα από διάφορες μελέτες συγκρίθηκαν για να τονιστούν κοινά σημεία στις προσεγγίσεις, τις προκλήσεις που αντιμετωπίστηκαν και τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν. Αυτό βοηθά στον εντοπισμό βέλτιστων πρακτικών και αποτελεσματικών στρατηγικών στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η ανάλυση έλαβε επίσης υπόψη παράγοντες όπως η γεωγραφική θέση, το μορφωτικό επίπεδο και η θεσμική υποστήριξη, που μπορεί να επηρεάσουν την αποτελεσματικότητα των διεπιστημονικών πρακτικών διδασκαλίας.

Η αναλυτική ανασκόπηση των Newman και Gough (2020) παρείχε έναν θεωρητικό φακό για την ερμηνεία των ευρημάτων. Τα πλαίσια που προτάθηκαν από τους παραπάνω ερευνητές, εφαρμόστηκαν για να αξιολογηθεί πόσο καλά οι μελέτες αντιμετωπίζουν τις πολυπλοκότητες της διεπιστημονικής διδασκαλίας και μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό περιλαμβάνει την αξιολόγηση της ευθυγράμμισης μεταξύ θεωρητικών προοπτικών και πρακτικών εφαρμογών. Ενσωματώνοντας αυτά τα θεωρητικά πλαίσια, η ανάλυση στοχεύει να αντλήσει συνέπειες για την πρακτική, προτείνοντας πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εφαρμόσουν καλύτερα διεπιστημονικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία μαθηματικών μοντέλων.

4.4 Δεοντολογικά ζητήματα

Οι ηθικοί προβληματισμοί είναι υψίστης σημασίας στην ακαδημαϊκή έρευνα, ιδιαίτερα όταν διεξάγεται μια συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση. Αυτή η ενότητα περιγράφει το δεοντολογικό πλαίσιο που καθοδηγεί τη μεθοδολογία συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, διασφαλίζοντας την ακεραιότητα, τη διαφάνεια και τον σεβασμό για τις πνευματικές συνεισφορές.

Μία από τις βασικές ηθικές αρχές στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας είναι ο σεβασμός των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Όλες οι πηγές που περιλαμβάνονται στην ανασκόπηση αναφέρθηκαν σχολαστικά ακολουθώντας ένα τυποποιημένο στυλ αναφοράς (π.χ. APA). Αυτό όχι μόνο δίνει τα εύσημα στους αρχικούς συγγραφείς αλλά και διευκολύνει τους αναγνώστες στον εντοπισμό του υλικού αναφοράς. Λήφθηκαν αυστηρά μέτρα για την αποφυγή οποιασδήποτε μορφής λογοκλοπής. Αυτό περιλάμβανε την ακριβή παράφραση των ιδεών και τη χρήση εισαγωγικών για απευθείας εισαγωγικά, διατηρώντας έτσι την ακεραιότητα του αρχικού έργου των συγγραφέων.

Η διαφάνεια στη μεθοδολογία ενισχύει την αξιοπιστία και την αναπαραγωγικότητα της έρευνας. Η όλη διαδικασία συλλογής και ανάλυσης δεδομένων τεκμηριώθηκε λεπτομερώς. Αυτό περιλαμβάνει τα κριτήρια επιλογής, τις βάσεις δεδομένων που χρησιμοποιούνται, τις στρατηγικές

αναζήτησης και τις τεχνικές ανάλυσης. Αυτή η διαφάνεια επιτρέπει σε άλλους ερευνητές να αναπαράγουν τη μελέτη ή να βασίζονται στα ευρήματά της. Όποτε ήταν δυνατόν, καταβλήθηκαν προσπάθειες για τη χρήση βιβλιογραφίας ανοιχτής πρόσβασης για τη διασφάλιση της συμμετοχής και της προσβασιμότητας για όλα τα ενδιαφερόμενα μέρη στην εκπαιδευτική κοινότητα.

Η αναστοχαστικότητα περιλαμβάνει την κριτική αυτογνωσία του ερευνητή σχετικά με τις προκαταλήψεις και τις προοπτικές του. Ο ερευνητής ασχολήθηκε με συνεχή αυτοστοχασμό σε όλη τη διαδικασία ανασκόπησης της βιβλιογραφίας. Αυτό περιλάμβανε την αναγνώριση προσωπικών προκαταλήψεων που μπορεί να επηρεάσουν την επιλογή και την ερμηνεία της λογοτεχνίας, επιδιώκοντας έτσι μια αντικειμενική ανάλυση. Η αναγνώριση των προοπτικών των διαφόρων ενδιαφερομένων (π.χ. εκπαιδευτικών, σπουδαστών, φορέων χάραξης πολιτικής) είναι ζωτικής σημασίας. Αυτό ελήφθη υπόψη κατά την ανάλυση των επιπτώσεων των ευρημάτων, διασφαλίζοντας ότι εκπροσωπούνται διαφορετικές απόψεις.

Αν και η ίδια η βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν απαιτεί τυπικά ηθική έγκριση καθώς περιλαμβάνει δευτερεύοντα δεδομένα, η συμμόρφωση με τις κατευθυντήριες γραμμές του ιδρύματος εξακολουθεί να είναι απαραίτητη. Η έρευνα συμμορφώθηκε με τις δεοντολογικές κατευθυντήριες γραμμές που περιγράφονται από το IRB (*Επιστημονικό Συμβούλιο Εγκρίσεων -ΕΣΕ*) του ιδρύματος. Αυτό περιλαμβάνει τη διασφάλιση ότι δεν περιλαμβάνονται ευαίσθητα ή προσωπικά δεδομένα στην αναθεωρημένη βιβλιογραφία. Η έρευνα ασχολήθηκε με ευρύτερα ηθικά πλαίσια στην εκπαίδευση, όπως αυτά που προάγουν την ισότητα και τη συμπερίληψη. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη διεπιστημονική εκπαίδευση, όπου πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το διαφορετικό υπόβαθρο των μαθητών.

Η ηθική έρευνα πρέπει να συμβάλλει θετικά στο σώμα της γνώσης και της κοινωνίας. Τα ευρήματα από αυτήν την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στοχεύουν να ενημερώσουν και να ενισχύσουν τις διδακτικές πρακτικές στην εκπαίδευση των μαθηματικών, ιδιαίτερα στην ενίσχυση των διεπιστημονικών συνδέσεων. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε βελτιωμένα εκπαιδευτικά αποτελέσματα και καλύτερη προετοιμασία των μαθητών για τις πραγματικές προκλήσεις. Αναδεικνύοντας αποτελεσματικές στρατηγικές και πρακτικές, η έρευνα επιδιώκει να προωθήσει τη δίκαιη πρόσβαση σε ποιοτική εκπαίδευση στα μαθηματικά, διασφαλίζοντας ότι όλοι οι μαθητές επωφελούνται από τις διεπιστημονικές προσεγγίσεις.

4.5 Περιορισμοί της Μελέτης

Η κατανόηση των περιορισμών μιας μελέτης είναι ζωτικής σημασίας για τη διαμόρφωση των ευρημάτων της και για την καθοδήγηση της μελλοντικής έρευνας. Αυτή η ενότητα περιγράφει τους πιθανούς περιορισμούς που συναντώνται κατά τη διαδικασία συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, αναγνωρίζοντας τις επιπτώσεις τους στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων που προκύπτουν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας.

Ένας από τους κύριους περιορισμούς σχετίζεται με το εύρος της βιβλιογραφίας που εξετάζεται. Τα κριτήρια επιλογής, αν και έχουν σχεδιαστεί για να είναι περιεκτικά, ενδέχεται να αποκλείουν ακούσια σχετικές μελέτες. Για παράδειγμα, μελέτες που δημοσιεύονται σε μη αγγλικές γλώσσες ή εκείνες που δεν χρησιμοποιούν ρητά τους όρους "μαθηματική μοντελοποίηση" ή "διεπιστημονική εκπαίδευση" μπορεί να παραβλεφθούν, οδηγώντας ενδεχομένως σε μια προκατειλημμένη κατανόηση του πεδίου. Δίνοντας προτεραιότητα στη βιβλιογραφία που δημοσιεύτηκε μετά το 2010, η ανασκόπηση μπορεί να χάσει θεμελιώδεις μελέτες που έχουν επηρεάσει σημαντικά τις τρέχουσες μεθοδολογίες και θεωρίες στη μαθηματική μοντελοποίηση και τη διεπιστημονική εκπαίδευση.

Η ποιότητα των πηγών που περιλαμβάνονται στην ανασκόπηση μπορεί επίσης να επηρεάσει τα ευρήματα. Οι αναλύσεις που περιλαμβάνονται ποικίλλουν ως προς τη μεθοδολογική αυστηρότητα, με ορισμένες να χρησιμοποιούν ισχυρούς πειραματικούς σχεδιασμούς, ενώ άλλες μπορεί να βασίζονται σε ανέκδοτα στοιχεία ή παραδείγματα περιπτώσεων. Αυτή η μεταβλητότητα μπορεί να περιπλέξει τη σύνθεση των ευρημάτων και την αξιοπιστία των συμπερασμάτων που εξάγονται. Υπάρχει πιθανότητα μεροληψίας δημοσίευσης, όπου μελέτες με θετικά αποτελέσματα είναι πιο πιθανό να δημοσιευτούν από εκείνες με αρνητικά ή ασαφή ευρήματα. Αυτό μπορεί να παραμορφώσει τη συνολική κατανόηση των αποτελεσματικών πρακτικών στην εκπαίδευση μαθηματικών μοντέλων.

Οι συμφραζόμενοι παράγοντες μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά την εφαρμογή των ευρημάτων της μελέτης. Το εκπαιδευτικό πλαίσιο ποικίλλει ευρέως σε διαφορετικές περιοχές και πολιτισμούς. Οι μελέτες που διεξάγονται σε μια γεωγραφική περιοχή ενδέχεται να μην μπορούν να γενικευτούν σε άλλες λόγω των διαφορετικών προγραμμάτων σπουδών, των εκπαιδευτικών προτύπων και των πολιτισμικών προσδοκιών γύρω από την εκπαίδευση στα μαθηματικά. Οι διαφορές στη θεσμική υποστήριξη, τους πόρους και τις παιδαγωγικές προσεγγίσεις μπορούν να επηρεάσουν την εφαρμογή διεπιστημονικών πρακτικών. Η έλλειψη ομοιομορφίας σε αυτούς

τους παράγοντες μπορεί να περιορίσει τη δυνατότητα εφαρμογής των ευρημάτων σε διάφορα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα.

Η προκατάληψη του ερευνητή είναι ένας άλλος εγγενής περιορισμός. Παρά τις προσπάθειες διατήρησης της αντικειμενικότητας, οι προοπτικές και οι εμπειρίες του ερευνητή μπορεί να επηρεάσουν την ερμηνεία της λογοτεχνίας. Αυτή η υποκειμενικότητα μπορεί να επηρεάσει τη θεματική ανάλυση και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα δεδομένα. Ενώ τονίζεται η ανακλαστικότητα, η πλήρης εξάλειψη της προκατάληψης είναι πρόκληση. Η αναγνώριση αυτού του περιορισμού είναι απαραίτητη για την κατανόηση των αποχρώσεων στην ανάλυση και τη σύνθεση της βιβλιογραφίας. Η αναγνώριση αυτών των περιορισμών ανοίγει δρόμους για μελλοντική έρευνα. Οι μελλοντικές μελέτες θα μπορούσαν να υιοθετήσουν μια πιο περιεκτική προσέγγιση, λαμβάνοντας υπόψη τη λογοτεχνία από διαφορετικές γλώσσες και περιοχές, καθώς και παλαιότερα θεμελιώδη κείμενα που μπορεί να παρέχουν πολύτιμες γνώσεις. Η ενσωμάτωση έρευνας μεικτών μεθόδων θα μπορούσε να ενισχύσει την κατανόηση συνδυάζοντας ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα, παρέχοντας έτσι μια πιο ολοκληρωμένη άποψη των πρακτικών στην εκπαίδευση μαθηματικών μοντέλων. Η μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να επικεντρωθεί σε διαχρονικές μελέτες για την αξιολόγηση του μακροπρόθεσμου αντίκτυπου των διεπιστημονικών προσεγγίσεων στη μάθηση και τη συμμετοχή των μαθητών στα μαθηματικά.

4.6 Περίληψη Βασικών Ευρημάτων

Αυτή η ενότητα συνοψίζει τα βασικά ευρήματα που προέρχονται από τη μεθοδολογία συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, υπογραμμίζοντας τις γνώσεις που αποκτήθηκαν σχετικά με τις διεπιστημονικές πτυχές της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Η σύνθεση της βιβλιογραφίας αποκαλύπτει αρκετά κρίσιμα θέματα και επιπτώσεις για την πρακτική.

Ένα από τα πιο σημαντικά ευρήματα είναι η μεγάλη έμφαση στις διεπιστημονικές συνδέσεις στη μαθηματική μοντελοποίηση. Πολυάριθμες μελέτες υπογραμμίζουν την αποτελεσματικότητα της ενοποίησης των μαθηματικών με άλλους κλάδους όπως η επιστήμη, η τεχνολογία και η μηχανική (STEM). Αυτή η ενοποίηση ενθαρρύνει μια πιο ολιστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των εφαρμογών τους σε πραγματικές συνθήκες. Πολλά άρθρα συνηγορούν υπέρ των συνεργατικών μαθησιακών περιβαλλόντων όπου οι μαθητές συμμετέχουν σε διεπιστημονικά έργα. Μια τέτοια συνεργασία όχι μόνο ενισχύει τη μαθηματική κατανόηση αλλά αναπτύσσει επίσης ζωτικές δεξιότητες όπως η ομαδική εργασία, η επικοινωνία και η επίλυση

προβλημάτων.

Η βιβλιογραφία υπογραμμίζει σταθερά τη σημασία των εφαρμογών του πραγματικού κόσμου στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι μελέτες δείχνουν ότι όταν οι μαθητές βλέπουν τη συνάφεια των μαθηματικών εννοιών με καταστάσεις της πραγματικής ζωής, η εμπλοκή και τα κίνητρά τους αυξάνονται σημαντικά. Αυτό το εύρημα ευθυγραμμίζεται με τις κονστρουκτιβιστικές θεωρίες της μάθησης, οι οποίες τονίζουν τη σημασία του πλαισίου στις εκπαιδευτικές εμπειρίες. Η χρήση περιπτωσιολογικών μελετών και προσεγγίσεων μάθησης βάσει έργου αναφέρεται συχνά ως αποτελεσματικές στρατηγικές για τη δημιουργία συμφραζομένων μαθηματικών μοντέλων. Αυτές οι μέθοδοι επιτρέπουν στους μαθητές να εξερευνήσουν σύνθετα προβλήματα και να εφαρμόσουν μαθηματικές έννοιες σε πρακτικά σενάρια, ενισχύοντας την μαθησιακή τους εμπειρία.

Η σύνθεση της λογοτεχνίας αποκαλύπτει διάφορες παιδαγωγικές στρατηγικές που υποστηρίζουν την αποτελεσματική διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι προσεγγίσεις μάθησης που βασίζονται στην έρευνα επισημαίνονται ως αποτελεσματικές για την προώθηση της κριτικής σκέψης και την προώθηση της βαθύτερης κατανόησης. Αυτή η μέθοδος ενθαρρύνει τους μαθητές να κάνουν ερωτήσεις, να ερευνήσουν και να εξάγουν συμπεράσματα με βάση στοιχεία, ευθυγραμμίζοντας καλά με τις αρχές της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας, όπως το μαθηματικό λογισμικό και οι προσομοιώσεις, αναφέρεται συχνά ως μέσο για την ενίσχυση της μάθησης. Η τεχνολογία παρέχει δυναμικά εργαλεία για μοντελοποίηση και οπτικοποίηση, επιτρέποντας στους μαθητές να πειραματιστούν με μαθηματικές έννοιες με τρόπους που οι παραδοσιακές μέθοδοι μπορεί να μην επιτρέπουν.

Παρά τα θετικά ευρήματα, η βιβλιογραφία εντοπίζει επίσης αρκετές προκλήσεις και εμπόδια στην αποτελεσματική εφαρμογή. Ένα επαναλαμβανόμενο θέμα είναι η ανάγκη για επαγγελματική ανάπτυξη για να εξοπλίσει τους εκπαιδευτικούς με τις απαραίτητες δεξιότητες και αυτοπεποίθηση για να διδάξουν αποτελεσματικά τη μαθηματική μοντελοποίηση. Πολλές μελέτες επισημαίνουν κενά στα προγράμματα κατάρτισης εκπαιδευτικών σχετικά με τη διεπιστημονική διδασκαλία και την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών σε πραγματικές συνθήκες. Η άκαμπτη δομή πολλών προγραμμάτων σπουδών μαθηματικών μπορεί να εμποδίσει την ενσωμάτωση διεπιστημονικών προσεγγίσεων. Οι εκπαιδευτικοί συχνά αντιμετωπίζουν προκλήσεις στην ευθυγράμμιση των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με τυποποιημένες αξιολογήσεις, οι οποίες μπορούν να περιορίσουν την εξερεύνηση εφαρμογών του πραγματικού κόσμου.

Τα ευρήματα αποκαλύπτουν πολλές επιπτώσεις για μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας. Υπάρχει ανάγκη για διαχρονικές μελέτες που παρακολουθούν τη μακροπρόθεσμη επίδραση των διεπιστημονικών μεθόδων διδασκαλίας στα αποτελέσματα των μαθητών. Μια τέτοια έρευνα θα μπορούσε να προσφέρει πολύτιμες γνώσεις για τα διαρκή οφέλη αυτών των προσεγγίσεων. Η μελλοντική προσέγγιση θα πρέπει να στοχεύει στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα πολιτισμικά και θεσμικά πλαίσια επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαίδευση. Η κατανόηση αυτών των δυναμικών θα μπορούσε να οδηγήσει σε πιο προσαρμοσμένες και αποτελεσματικές στρατηγικές διδασκαλίας.

4.7 Συμπέρασμα

Αυτή η τελική ενότητα συνοψίζει τις γενικές γνώσεις που αποκτήθηκαν από τη μεθοδολογία συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων, δίνοντας έμφαση στη σημαντική συμβολή της ανασκόπησης της βιβλιογραφίας στην κατανόηση της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Αντανακλά επίσης τις επιπτώσεις αυτών των ευρημάτων για την πρακτική και τη μελλοντική έρευνα.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αποκάλυψε μια πλούσια συλλογή γνώσεων σχετικά με τη διεπιστημονική φύση της μαθηματικής μοντελοποίησης. Τα ευρήματα υπογραμμίζουν σταθερά την αξία της ολοκλήρωσης των μαθηματικών με άλλους κλάδους. Αυτή η διεπιστημονική προσέγγιση όχι μόνο ενισχύει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, αλλά επίσης ενισχύει την κριτική σκέψη και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων που είναι απαραίτητες σε πραγματικές καταστάσεις. Η έμφαση στις πραγματικές εφαρμογές της μαθηματικής μοντελοποίησης έχει αποδειχθεί ότι εμπλέκει σημαντικά τους μαθητές. Η βιβλιογραφία προτείνει ότι όταν οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν τις μαθηματικές θεωρίες με πρακτικά σενάρια, τα κίνητρα και τα μαθησιακά τους αποτελέσματα βελτιώνονται σημαντικά.

Η σύνθεση της λογοτεχνίας παρουσιάζει διάφορες παιδαγωγικές επιπτώσεις για τους εκπαιδευτικούς. Τα ευρήματα υποστηρίζουν την υιοθέτηση καινοτόμων στρατηγικών διδασκαλίας, όπως η μάθηση βάσει έργου και οι προσεγγίσεις που βασίζονται στην έρευνα, που προάγουν την ενεργό μάθηση και τη συμμετοχή των μαθητών. Αυτές οι μεθοδολογίες ενθαρρύνουν τους μαθητές να εξερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες σε βάθος, ενθαρρύνοντας μια βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση του θέματος. Δεδομένων των προκλήσεων που έχουν εντοπιστεί σχετικά με την ετοιμότητα των εκπαιδευτικών, υπάρχει επιτακτική ανάγκη για συνεχή προ-

γράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης που εξοπλίζουν τους εκπαιδευτικούς με τις δεξιότητες για να διδάξουν αποτελεσματικά τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η κατάρτιση θα πρέπει να επικεντρώνεται στις διεπιστημονικές πρακτικές διδασκαλίας και στην ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην τάξη.

Αυτή η μεθοδολογία συλλογής βιβλιογραφικών δεδομένων συμβάλλει στο υπάρχον σύνολο γνώσεων με διάφορους τρόπους. Η ανασκόπηση έχει επισημάνει κενά στην τρέχουσα βιβλιογραφία, ιδίως όσον αφορά τις μακροπρόθεσμες επιπτώσεις των διεπιστημονικών προσεγγίσεων και τους πολιτισμικούς παράγοντες που επηρεάζουν τις διδακτικές πρακτικές. Ο εντοπισμός αυτών των κενών ανοίγει το δρόμο για μελλοντική έρευνα για την εξερεύνηση αχαρτογράφητων περιοχών που θα μπορούσαν να ενισχύσουν την κατανόηση και την πρακτική. Το αναλυτικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε σε όλη την ανασκόπηση μπορεί να χρησιμεύσει ως οδηγός για μελλοντικές μελέτες. Οι ερευνητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτό το πλαίσιο για να διερευνήσουν πρόσθετες διαστάσεις της μαθηματικής μοντελοποίησης και τον αντίκτυπό της στη μάθηση των μαθητών σε διάφορα εκπαιδευτικά πλαίσια.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή τη μελέτη προτείνουν διάφορες μελλοντικές κατευθύνσεις για έρευνα και πρακτική. Η μελλοντική έρευνα θα πρέπει να στοχεύει στην εξέταση της αποτελεσματικότητας των διεπιστημονικών προσεγγίσεων σε διάφορα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα και πολιτισμικά πλαίσια. Αυτό θα παρείχε μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αυτές οι μέθοδοι μπορούν να προσαρμοστούν και να εφαρμοστούν παγκοσμίως. Υπάρχει ανάγκη για διαχρονικές μελέτες που παρακολουθούν τα αποτελέσματα των μαθητών με την πάροδο του χρόνου. Η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι διεπιστημονικές μέθοδοι διδασκαλίας επηρεάζουν τη μακροπρόθεσμη δέσμευση και την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά θα ήταν ανεκτίμητη στη διαμόρφωση αποτελεσματικών εκπαιδευτικών πρακτικών.

Πίνακας 4.1: Βιβλιογραφική συστηματική αναφορά

Πηγές

Educational Studies in Mathematics 2016–2021
Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education 2018–2020
European Journal of Educational Research 2016–2021
Journal of Mathematical Behavior 2016–2021
Journal of Mathematical Education in Japan
International Journal of STEM Education 2016–2021
Mathematical Thinking and Learning 2016–2021
Journal of Mathematical Education 2016–2021
ZDM – Mathematics Education 2016–2021

Σειρές βιβλίων αναφορικά με την μαθηματική μοντελοποίηση

NCMT Monographs APME 1 volume (Hirsh and Roth McDuffie, 2016)
Realitätsbezüge im Mathematikunterricht book series (REIMA) 11 volumes (e.g., Frank et al. in Greefrath and Siller, 2018)
Springer Series: Advances in Mathematics Education — 1 volume (Chamberlin and Sriraman, 2019)
Springer Series: Early Mathematics Learning and Development
— 1 volume (Suh, Wickstrom and English, 2021)
Springer Series: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling
— 4 volumes (Stillman, Kaiser, Blum and Brown, 2013; Stillman, Blum and Biembengut, 2015; Stillman, Blum and Kaiser, 2017; Stillman, Kaiser and Lampen, 2020; Leung, Stillman, Kaiser, and Wong, 2021)
Handbook of research on STEM education (Johnson, Mohr-Schroeder, Moore and English, 2020)

Πρακτικά Συνεδρίου και Συμποσίου

CNMEM 8th, 9th, and 10th editions of the National Conference on Modelling in Mathematics Education (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática)
— Brazil 28 works analysed

Διδακτορικές Διατριβές

Craig (2017); Gibbons (2019)

5. Συγκέντρωση Αποτελεσμάτων – Σύνθεση Δεδομένων

Όλα ξεκινούν από τη συχνή ερώτηση «Γιατί πρέπει να το μάθω αυτό;» σε σχολικές τάξεις, ζητώντας τη συνάφεια του να κάνεις μαθηματικά. Με βάση τη σύσταση ότι η σύνδεση των μαθηματικών μπορεί να διαμεσολαβηθεί μέσω δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης, μεταφράσαμε αυτήν την ερώτηση σε αντικείμενο μελέτης: την εμπειρία των μαθητών σχετικά με τη συσχέτιση των δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης μέσω ερευνών που αναλύονται παρακάτω.

5.1 Διάπλεξη μαθηματικής μοντελοποίησης με περιβαλλοντικά θέματα

Η αύξηση του πληθυσμού και η επιστημονική - τεχνολογική πρόοδος έχουν επηρεάσει παγκοσμίως την παραγωγή τροφίμων, την εκμετάλλευση ενέργειας, το κλίμα, τη χρήση γης, τον αέρα και την ποιότητα του νερού. Οι ανισόρροπες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ανθρώπων και του περιβάλλοντος τους έχουν οδηγήσει σε ανθρωπογενή περιβαλλοντικά προβλήματα (Atmaca et al., 2020) που απειλούν την ικανότητα αποκατάστασης των φυσικών οικοσυστημάτων. Για παράδειγμα, οι άνθρωποι που αγνοούν τις δικές τους περιβαλλοντικές και κοινωνικές ευθύνες, χρησιμοποιούν τους φυσικούς πόρους σαν να ήταν άπειροι (Calik και Eames, 2012). Τέτοιες ανθρωπογενείς δραστηριότητες και η περιβαλλοντική υποβάθμιση αποτελούν σημαντική οικολογική απειλή για την αειφόρο ανάπτυξη (Montgomery, 2007) και τα φυσικά οικοσυστήματα (π.χ. δασικά οικοσυστήματα). Αυτές οι ανησυχίες πρέπει να επιλυθούν μέσω της αναγνώρισης των διασυνδέσεων μεταξύ του περιβάλλοντος, της κοινωνικής συμπεριφοράς, της πολιτιστικής ιστορίας και των οικονομικών διαδικασιών.

Για να ελαχιστοποιηθεί η συγκεκριμένη ζημιά, οι άνθρωποι πρέπει να ενημερώνονται και να εκπαιδεύονται για τα περιβαλλοντικά προβλήματα. Αυτό απαιτεί την ενεργό συμμετοχή τους στην ανάπτυξη λύσεων σε περιβαλλοντικά ζητήματα. Έτσι, μπορούν να συμπεριφέρονται υπεύθυνα στο περιβάλλον στο οποίο ζουν. Δεδομένης της τεράστιας δημοσιότητας που σχετίζεται με περιβαλλοντικά ζητήματα όπως η υπερθέρμανση του πλανήτη, η περιβαλλοντική εκπαίδευση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αλλάξει τις αντιλήψεις, τις στάσεις και τις συνήθειες των ανθρώπων (Bilianska και Yaroshenko, 2020). Αυτό σημαίνει ότι η επίσημη και άτυπη εκπαίδευση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επίτευξη περιβαλλοντικής εκπαίδευσης,

βιωσιμότητας και αειφόρου ανάπτυξης (Deveci και Karteri, 2021). Στην πραγματικότητα, μια τέτοια στρατηγική ή περιβάλλον μάθησης απαιτεί την ύπαρξη καλά καταρτισμένων δασκάλων με γνώση των παιδαγωγικών στρατηγικών για την περιβαλλοντική εκπαίδευση. Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί, που έχουν καλό επίπεδο περιβαλλοντικής παιδείας και γνώσεων παιδαγωγικού περιεχομένου, σκέφτονται πώς να διδάξουν αποτελεσματικά περιβαλλοντικές έννοιες ή θέματα.

Θέματα	Κατηγορίες	Δηλώσεις
Προστασία περιβάλλοντος/φύσης	Μείωση χρήσης πετρελαίου	Με τη μείωση της παραγωγής πλαστικών, μπορούμε να μειώσουμε την κατανάλωση προϊόντων/αγαθών που βασίζονται στο πετρέλαιο. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιείται μισό λίτρο πετρελαίου για την παραγωγή ενός πλαστικού μπουκαλιού, η μείωση της παραγωγής πλαστικών μπουκαλιών μειώνει την κατανάλωση πετρελαίου.
	Ρύπανση	...πετώντας αυτά τα πλαστικά μπουκάλια ανεξέλεγκτα στο περιβάλλον, προκαλούμε οπτική ρύπανση. Μαζεύοντάς τα, μπορούμε να την αποτρέψουμε.
	Προστασία εδάφους/οργανισμών	Σύμφωνα με ειδήσεις, η διαδικασία αποσύνθεσης των πλαστικών μπουκαλιών διαρκεί περίπου 4000 χρόνια. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, προκαλούν ζημιές στο έδαφος και τους οργανισμούς που ζουν σε αυτό. Φτιάχνοντας ένα σπιτάκι παιχνιδιού από πλαστικά μπουκάλια, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε τις αρνητικές επιπτώσεις τους στη φύση και τα ζώα.
	Παγκόσμια θέρμανση	...όσο μειώνεται η παραγωγή πλαστικών, τόσο μειώνεται και η παγκόσμια θέρμανση.
	Συνεισφορά στην προστασία του περιβάλλοντος	Φτιάχνοντας ένα σπιτάκι παιχνιδιού από πλαστικά μπουκάλια στο σχολείο μας, όχι μόνο θα κάνουμε κάτι καλό για τα μικρότερα παιδιά, αλλά και θα συνεισφέρουμε στην προστασία του περιβάλλοντος.

Θέματα	Κατηγορίες	Δηλώσεις
Απόβλητα - Εξοικονόμηση πόρων	Επαναχρησιμοποίηση	...όταν φτιάχνουμε ένα σπιτάκι παιχνιδιού από πλαστικά μπουκάλια για μικρά παιδιά, τα επαναχρησιμοποιούμε αντί να τα πετάμε στα σκουπίδια. Έτσι, όχι μόνο καθαρίζουμε το περιβάλλον αλλά και περιορίζουμε τις αρνητικές επιπτώσεις τους στη φύση.
	Προτίμηση μεγαλύτερων πλαστικών μπουκαλιών	...αν χρησιμοποιήσουμε μεγάλα πλαστικά μπουκάλια, μπορούν να περιορίσουν την επίδραση του ζεστού αέρα στο σπίτι (θερμομόνωση). Έτσι, τα σπίτια δεν θα είναι τόσο ζεστά όπως σε χώρες της Αφρικής. Με άλλα λόγια, το κλίμα και ο αέρας των σπιτιών (από μεγάλα πλαστικά μπουκάλια) θα είναι καλύτερα (από αυτά με μικρά πλαστικά μπουκάλια).
	Μείωση κατανάλωσης	...μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των πλαστικών μπουκαλιών που ρυπαίνουν τη φύση. Επιπλέον, μπορούμε να συμβάλουμε στη διατήρηση της φύσης μειώνοντας την κατανάλωση πλαστικών μπουκαλιών. Μειώνοντας τον αριθμό των πλαστικών μπουκαλιών, που θα αποσυντεθούν στο έδαφος, θα αυξηθεί επίσης η γονιμότητα του εδάφους.
Ενημέρωση	Εξοικονόμηση ενέργειας	...φτιάχνοντας το σπιτάκι παιχνιδιού από πλαστικά μπουκάλια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ελάχιστη ενέργεια. Δηλαδή, οδηγεί σε εξοικονόμηση ενέργειας.
	Μεταφορά μηνύματος	Αυτό το κτίριο μεταφέρει ένα περιβαλλοντικό μήνυμα στους ανθρώπους που το βλέπουν.

Θέματα	Κατηγορίες	Δηλώσεις
	Ενίσχυση περιβαλλοντικής συνείδησης	...αν φτιάξουμε αυτό το σπιτάκι παιχνιδιού από πλαστικά μπουκάλια σε κοινωνικούς χώρους (παιδότοπους, κήπους, πάρκα), που επισκέπτονται συχνά οι άνθρωποι, αυτό το κτίριο τους ενημερώνει για περιβαλλοντικά ζητήματα και ενισχύει την περιβαλλοντική τους συνείδηση σχετικά με τη διαχείριση αποβλήτων.

Πίνακας 5.1: Θέματα, κατηγορίες και δείγματα δηλώσεων για την προστασία του περιβάλλοντος μέσω χρήσης πλαστικών μπουκαλιών

Η έρευνα είχε στόχο να ενσωματώσει τη μαθηματική μοντελοποίηση με περιβαλλοντικά ζητήματα, εστιάζοντας στη διαχείριση απορριμμάτων (επαναχρησιμοποίηση, ανακύκλωση, μείωση) για την προώθηση ενός φιλικού προς το περιβάλλον τρόπου ζωής μεταξύ των μαθητών γυμνασίου. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω βιντεοσκοπημένων αλληλεπιδράσεων και αναλύθηκαν για περιβαλλοντικά θέματα και κατηγορίες. Ένας δάσκαλος μαθηματικών και θετικών επιστημών συμμετείχε συνεργατικά με τους εκπαιδευόμενους σε μια δραστηριότητα που ονομάζεται «Πλαστικό μπουκάλι», προτρέποντάς τους να σκεφτούν κριτικά τις επιπτώσεις της χρήσης πλαστικών μπουκαλιών στην κατασκευή. Σκιαγραφήθηκαν διάφορα στάδια, όπως η κατανόηση του προβλήματος, η νοητική μοντελοποίηση, η διαμόρφωση πλαισίου και η αξιολόγηση, τα οποία βοήθησαν τους μαθητές να αντιληφθούν τις έννοιες της διαχείρισης απορριμμάτων και τους μαθηματικούς υπολογισμούς.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα 5.1, οι μαθητές χρησιμοποίησαν μαθηματική μοντελοποίηση και σχετικές περιβαλλοντικές έννοιες/ζητήματα μαζί κατά την επίλυση του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι η τρέχουσα έρευνα τους έδωσε τη δυνατότητα να συνδυάσουν τα μαθηματικά με τις φυσικές επιστήμες/περιβαλλοντική εκπαίδευση. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως δείκτης της εφαρμοσιμότητάς της για τους μαθητές γυμνασίου. Διατυπωμένα διαφορετικά, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η διεπιστημονική μαθηματική μοντελοποίηση έτεινε να υποστηρίξει τη μάθηση με βάση τα συμφραζόμενα (μάθηση βασισμένη στο συμφραζόμενο) και τις δεξιότητες σκέψης ανώτερης τάξης (π.χ. επίλυση προβλημάτων, δεξιότητες του 21ου

αιώνα, μαθηματική σκέψη, ικανότητες συλλογισμού, δημιουργική σκέψη και επιστημονικό γραμματισμό).

Επιπλέον, αμφισβήτησε την αφηρημένη και την μηχανική μάθηση των σχολικών μαθηματικών και των φυσικών επιστημών. Ως εκ τούτου, προσπάθησε να ενισχύσει την εξοικείωση των μαθητών γυμνασίου με τη διεπιστημονική μαθηματική μοντελοποίηση και τα περιβαλλοντικά ζητήματα. Δεδομένου ότι οι συμβατικές/διαδικαστικές συνήθειες επίλυσης προβλημάτων δεν επαρκούν για την παραγωγή αποτελεσματικών λύσεων σε ζητήματα της πραγματικής ζωής, οι μαθητές φαίνεται να έχουν παρατηρήσει αυτήν την αδυναμία κατά την εφαρμογή της διεπιστημονικής μαθηματικής μοντελοποίησης. Αυτό σημαίνει ότι μια τέτοια εφαρμογή καλλιεργεί την ανάγκη, το κίνητρο, τον ενθουσιασμό και την περιέργεια για τη μάθηση των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών.

Επειδή οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά σε ένα πρόβλημα της πραγματικής ζωής (ως το πλαίσιο), η διεπιστημονική μαθηματική μοντελοποίηση όχι μόνο ενίσχυσε την επίγνωσή τους για τα περιβαλλοντικά ζητήματα, αλλά τους ενθάρρυνε επίσης να συμπεριφέρονται υπεύθυνα απέναντι στο κοντινό τους περιβάλλον. Επιπλέον, μέσω μιας βάσης «ανάγκης γνώσης», φαίνεται να ενδυνάμωσε την εννοιολογική τους κατανόηση/επίπεδα ουσιαστικής μάθησης. Για παράδειγμα, οι μαθητές είχαν μάθει τις έννοιες «επαναχρησιμοποίηση, ρύπανση, προστασία του περιβάλλοντος, εξοικονόμηση ενέργειας, υπερθέρμανση του πλανήτη και μείωση» για να σκεφτούν τα μαθηματικά τους μοντέλα και τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Δηλαδή, η διεπιστημονική μαθηματική μοντελοποίηση όχι μόνο τους επέτρεψε να αποκτήσουν τις στοχευμένες περιβαλλοντικές έννοιες/ζητήματα, αλλά και υποστήριξε σε κάποιο βαθμό τα επιχειρήματά τους. Επιπλέον, δεδομένων των θεμάτων και των σχετικών κατηγοριών, οι μαθητές ενήργησαν ως υπεύθυνοι πολίτες για το υπό διερεύνηση περιβαλλοντικό ζήτημα και προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τις μαθησιακές τους ικανότητες επιστημονικής έρευνας, επιστημονικής επικοινωνίας και επιστημονικής εννοιολόγησης. Συνοψίζοντας, η διεπιστημονική μαθηματική μοντελοποίηση, η οποία στοχεύει στη διασύνδεση διαφορετικών επιστημονικών κλάδων μεταξύ τους, εξοπλίζει τους μαθητές με τις δεξιότητες του 21ου αιώνα, όπως η έρευνα, η κριτική σκέψη και η καινοτομία σκέψη. Επιπλέον, επειδή επιτρέπει στους μαθητές να συνδέουν τη γνώση περιεχομένου/εννοιολογική κατανόηση οποιουδήποτε επιστημονικού κλάδου με ζητήματα της καθημερινής ζωής, διεγείρει επίσης το ενδιαφέρον τους για την καριέρα/εκπαίδευση STEM.

Τα αποτελέσματα αποκάλυψαν ότι οι διάλογοι των μαθητών εμπίπτουν σε 11 κατηγορίες σε

τρία κύρια θέματα: προστασία του περιβάλλοντος, εξοικονόμηση πόρων και ενημέρωση της κοινωνίας για περιβαλλοντικά ζητήματα. Η μελέτη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η διεπιστημονική μαθηματική μοντελοποίηση ενσωματώνει αποτελεσματικά την περιβαλλοντική εκπαίδευση με ουσιαστικό τρόπο, ενισχύοντας την περιβαλλοντική ευθύνη των μαθητών. Οι περιορισμοί περιελάμβαναν ένα μικρό μέγεθος δείγματος και την έλλειψη φυσικής κατασκευής παιχνιδιών, γεγονός που υποδηλώνει ότι η μελλοντική έρευνα θα πρέπει να περιλαμβάνει μεγαλύτερες ομάδες και πρακτικές εφαρμογές. Η αναφορά αναδεικνύει διάφορες προοπτικές για τη διεπιστημονική εκπαίδευση, ιδιαίτερα στο πλαίσιο των περιβαλλοντικών ζητημάτων. Αποδεικνύει ότι ο συνδυασμός μαθηματικής μοντελοποίησης με προβλήματα του πραγματικού κόσμου μπορεί να ενισχύσει τη συμμετοχή και τη μάθηση των μαθητών. Επιπλέον, τονίζει τη σημασία της ενίσχυσης της κριτικής σκέψης και των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων μέσω της συνεργατικής ομαδικής εργασίας, η οποία επιτρέπει στους εκπαιδευόμενους να εξερευνήσουν περιβαλλοντικά θέματα ολοκληρωμένα. Επίσης, προτείνει μια μετάβαση από τη συμβατική, διαδικαστική επίλυση προβλημάτων σε μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση που λαμβάνει υπόψη τις επιπτώσεις στην πραγματική ζωή και ενθαρρύνει την περιβαλλοντική διαχείριση.

Συμπερασματικά, η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη διεπιστημονική εκπαίδευση, καθώς παρέχει ένα δομημένο πλαίσιο στους μαθητές ώστε να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες σε ρεαλιστικά ζητήματα και συνθήκες. Σε αυτό το πλαίσιο, επιτρέπει στους εφήβους να κατανοήσουν σύνθετα περιβαλλοντικά θέματα, όπως η διαχείριση απορριμμάτων, μέσω ποσοτικής ανάλυσης και μοντελοποίησης. Με την ενασχόληση με τη μαθηματική μοντελοποίηση, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν δεξιότητες στη μέτρηση, τον υπολογισμό και την κριτική ανάλυση, ενώ ταυτόχρονα αντιμετωπίζουν σημαντικές περιβαλλοντικές προκλήσεις. Αυτή η ενσωμάτωση ενισχύει την ικανότητά τους να σκέφτονται κριτικά για τις επιπτώσεις της προτυποποίησής τους, ενισχύοντας τη βαθύτερη κατανόηση τόσο των μαθηματικών όσο και της περιβαλλοντικής επιστήμης. Τελικά, η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμεύει ως γέφυρα μεταξύ των κλάδων, προωθώντας την ολιστική αντίληψη των θεμάτων που απαιτούν συνεργατικές και καινοτόμες λύσεις.

5.2 Η Μαθηματική Μοντελοποίηση ως Εργαλείο Διεπιστημονικής Εκπαίδευσης Μαθητών Πληροφορικής και Κυβερνοασφάλειας

Η διεπιστημονικότητα είναι μία από τις βασικές αρχές στις οποίες πρέπει να αντιστοιχεί το εκπαιδευτικό στοιχείο της σύγχρονης εκπαίδευσης στην επιστήμη των υπολογιστών και στην

ασφάλεια στον κυβερνοχώρο. Η κατηγορία της διεπιστημονικότητας είναι ευρεία και πολυδιάστατη, επομένως έχει πολλούς διαφορετικούς ορισμούς και χαρακτηριστικά. Η διεπιστημονικότητα στην εκπαίδευση νοείται ως μια προσέγγιση όπου οι προοπτικές για ένα κοινό πρόβλημα δύο ή περισσότερων επιστημών ενσωματώνονται (συνδυάζονται) για να επιτευχθεί μια πλήρης, βαθύτερη και πιο γενικευμένη κατανόηση. Πιο αναλυτικά, περιλαμβάνει δηλαδή την αμοιβαία ολοκλήρωση της επιστημολογίας, της ορολογίας, των οργανωτικών εννοιών και των μεθοδολογικών διαδικασιών για τη μάθηση. Τα κύρια χαρακτηριστικά της διεπιστημονικότητας στη μάθηση είναι: η αλληλεπίδραση, η ολοκλήρωση, η εστίαση και ο συνδυασμός. Αναμφίβολα, η διεπιστημονική προσέγγιση είναι σημαντική για την κατάρτιση μαθητών σε οποιαδήποτε ειδικότητα στο πανεπιστήμιο. Είναι όμως ιδιαίτερα σημαντική στη μελλοντική εκπαίδευση στην επιστήμη των υπολογιστών και στον κυβερνοχώρο.

Η χρήση μιας τέτοιας προοπτικής καθιστά δυνατή την ανάπτυξη μιας ενιαίας επιστημονικής πλαισίωσης για τους σπουδαστές αυτών των ειδικοτήτων, με βάση έναν συνδυασμό γνώσεων της επιστήμης των υπολογιστών, των τεχνολογιών της πληροφορίας, της φυσικής, των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Η διεπιστημονική εγγύτητα προωθεί την ανάπτυξη συστηματικών ιδεών και εννοιών, επιτρέπει την ολοκληρωμένη χρήση γνώσεων και δεξιοτήτων διαφόρων ακαδημαϊκών κλάδων στη συλλογή, συστηματοποίηση, αποθήκευση και προστασία πληροφοριών, υλοποίηση σχεδίασης και ανάπτυξης προϊόντων λογισμικού (κινητές εφαρμογές, υλικό και λογισμικό ηλεκτρονικών συστημάτων), σχεδίαση και διαχείριση συστημάτων πληροφορικής σε δίκτυα υπολογιστών και άλλα. Σύμφωνα με τα τρέχοντα κρατικά πρότυπα, ένα από τα αντικείμενα σπουδών και μελλοντικής επαγγελματικής δραστηριότητας των μαθητών «Επιστήμες Υπολογιστών» και «Κυβερνοασφάλεια» είναι μαθηματικά μοντέλα πραγματικών φαινομένων, αντικειμένων, συστημάτων και διαδικασιών.

Στη μελέτη αυτή, η πρώτη ερώτηση αφορούσε τη διευκρίνιση του κατά πόσον χρειάζονται μαθηματικές γνώσεις για την επιτυχή εφαρμογή μιας επαγγελματικής δραστηριότητας; Η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτηθέντων απάντησε καταφατικά σε αυτή την ερώτηση (87,5% του πλήθους). Έτσι, οι ίδιοι ανέφεραν ότι τα μαθηματικά τους βοηθούν να οργανώσουν τις δικές τους επαγγελματικές δραστηριότητες και ότι συχνά δεν διαθέτουν μαθηματική ικανότητα να επιλέγουν τις καλύτερες μεθόδους και τεχνικές για την επίλυση πολύπλοκων εξειδικευμένων εργασιών και πρακτικών προβλημάτων πληροφορικής και για την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητάς τους. Ως αποτέλεσμα της σύνοψης των απαντήσεων διαπιστώθηκε ότι έγινε αναφορά σε δισδιάστατα ή τρισδιάστατα γραφικά, τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, κρυπτογραφία, ανάλυση

δεδομένων και προγνωστικά, αναγνώριση προτύπων (εικόνες, ήχος, βίντεο) και μηχανική μάθηση. Ακολουθούν απλά παραδείγματα διαφορετικών τύπων εργασιών επαγγελματικού προσανατολισμού που χρησιμοποιούνται στην εκπαιδευτική διαδικασία των ειδικοτήτων «Επιστήμες Υπολογιστών» και «Κυβερνοασφάλεια».

Παράδειγμα 1ο:

Έχει σχεδιαστεί για να σχηματίζει δεξιότητες εφαρμογής λογισμού πινάκων για την επίλυση προβλημάτων εφαρμοσμένης κρυπτογραφίας. Ένας τρόπος για την κωδικοποίηση και την αποκωδικοποίηση των μηνυμάτων είναι να γίνει χρήση ενός κλειδιού μήτρας (*matrix key*). Για παράδειγμα, υπάρχει ένα αλφάβητο που περιέχει 28 σύμβολα. Σε κάθε σύμβολο εκχωρείται ένας κωδικός – 0, 2, ..., 26, 27, 28, αντίστοιχα. Το αριθμητικό ισοδύναμο του μηνύματος στη συνέχεια μετατρέπεται σε πίνακα γράφοντας τους αριθμούς σε στήλες. Ταυτόχρονα δημιουργείται ένας πίνακας, σε περίπτωση που δεν υπάρχουν αρκετά ψηφία για να σχηματιστεί ένας πίνακας και γίνεται στη συνέχεια η συμπλήρωση του αριθμητικού μηνύματος στο τέλος με μηδενικά. Πολλαπλασιάζοντας τον μη εκφυλισμένο (άρα και τον αντίστροφο) βασικό πίνακα A με τον πίνακα μηνυμάτων, τα μηνύματα κωδικοποιούνται. Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη μήτρα προς A , λαμβάνονται τα αποκωδικοποιημένα μηνύματα.

Παράδειγμα 2ο:

Η διεργασία έχει σχεδιαστεί για να σχηματίζει δεξιότητες εφαρμογής συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τη μελέτη της ροής κάποιας ποσότητας μέσω ενός δικτύου. Συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων προκύπτουν κατά τη μελέτη της ροής κάποιας ποσότητας μέσω ενός δικτύου (μεταφορά οχημάτων σε οδικά αστικά δίκτυα, ροή ηλεκτρικού ρεύματος σε ενεργειακά δίκτυα, ορισμένα αγαθά από προμηθευτή σε καταναλωτή σε εμπορικά δίκτυα). Ένα δίκτυο είναι ένα σύνολο κόμβων και ένα σύνολο διακλαδώσεων που συνδέουν όλους ή ορισμένους κόμβους. Σε κάθε κλάδο, υποδεικνύεται η κατεύθυνση ροής και το μέγεθός του ορίζεται ως άγνωστο.

Στα προβλήματα ροής δικτύου, θεωρείται ότι:

- η συνολική ροή εισόδου στο δίκτυο είναι ίση με τη συνολική ροή εισόδου έξω από το δίκτυο.
- η συνολική ροή εισόδου στον κόμβο είναι ίση με τη συνολική ροή της πηγής έξω

από τον κόμβο.

Παράδειγμα 3ο:

Μια εργασία για τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου που θα αφορά έναν φωτεινό σηματοδότη. Οι κανονισμοί οδικής κυκλοφορίας ορίζουν ότι η πινακίδα που αναφέρεται στα «Παιδιά» θα τοποθετείται σε οδικά τμήματα όπου μπορούν να εμφανίζονται νεαρά άτομα από εγκαταστάσεις παιδικής μέριμνας (νηπιαγωγείο, σχολείο, κατασκήνωση υγείας κ.λπ.) ακριβώς δίπλα στο δρόμο. Η προειδοποιητική πινακίδα πρέπει να τοποθετείται έξω από κατοικημένες περιοχές σε απόσταση 150 έως 300 m, σε κατοικημένες περιοχές – σε απόσταση 50 έως 100 m πριν από την έναρξη του επικίνδυνου τμήματος. Και επαναλαμβάνεται τουλάχιστον 50 m πριν την έναρξη της επικίνδυνης περιοχής.

Παράδειγμα 4ο:

Η εφαρμογή μιας διεπιστημονικής μαθησιακής προσέγγισης βασισμένης στη μαθηματική μοντελοποίηση είναι η πρακτική άσκηση των μαθητών που ειδικεύονται στις Επιστήμες Υπολογιστών, μαζί με τους μαθητές της ειδικότητας των Μαθηματικών. Με απλά λόγια οι εκπαιδευόμενοι μπορούν να συμμετέχουν σε διαγωνισμούς προγραμματισμού ή κυβερνοασφάλειας. Αυτή η μορφή πρακτικής φέρνει τους μαθητές όσο το δυνατόν πιο κοντά στις μελλοντικές πραγματικές επαγγελματικές τους δραστηριότητες. Οι ομάδες αναπτύσσουν, στα πλαίσια των προτεινόμενων θεμάτων, μια ιδέα για ένα έργο και την υλοποιούν. Βλέπουν (και εφαρμόζουν!) διεπιστημονικούς δεσμούς στην πράξη, αποκτούν εμπειρία στην ομαδική εργασία, στην αυτοοργάνωση, βελτίωση των δεξιοτήτων αυτοεκπαίδευσης (της ίδιας της εκδήλωσης προηγείται ενδεδειγμένη προπαρασκευαστική εργασία) και παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εργασίας, αυξάνουν τα κίνητρα για μάθηση.

5.2.1 Σύνδεση με θέματα οικονομίας

Πώς μπορεί η μάθηση βάσει προβλημάτων, η ψηφιακή εγγραμματοσύνη και οι διεπιστημονικές προσεγγίσεις να ενισχύσουν τις τεχνικές δεξιότητες των μαθητών; Απαντώντας σε αυτό το ερώτημα, οδηγούμαστε στην παροχή πρακτικών συστάσεων για εκπαιδευτικούς και υπεύθυνους χάραξης πολιτικής.

Στους μαθητές παρουσιάστηκαν οικονομικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου προς επίλυση, ενισχύοντας τις αναλυτικές τους δεξιότητες και τις ικανότητες κριτικής σκέψης τους.

Χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα, στατιστικά εργαλεία και οικονομετρικές τεχνικές χρησιμοποιήθηκαν για την ενίσχυση της δομημένης σκέψης και του λογικού συλλογισμού. Οι μαθητές έπρεπε να εφαρμόσουν λογισμό, πιθανότητες και γραμμική άλγεβρα για να λύσουν τεχνικά προβλήματα στα οικονομικά. Βέβαια οι μαθητές διδάχτηκαν να εργάζονται με οικονομικό λογισμικό, βάσεις δεδομένων και γλώσσες προγραμματισμού (όπως Python, R, Stata και MATLAB) για να αναλύουν, να οπτικοποιούν και να ερμηνεύουν αποτελεσματικά τα οικονομικά δεδομένα. Αυτή η προοπτική γεφύρωσε το χάσμα μεταξύ της θεωρητικής μάθησης και των εφαρμογών του πραγματικού κόσμου.

Έτσι μέσω των οικονομικών προσομοιώσεων και μοντέλων, απεικονίζεται η δυναμική της αγοράς ή των διαδικασιών λήψεων αποφάσεων. Καθοριστικό ρόλο παίζουν και γνώσεις από τη ψυχολογία ή την κοινωνιολογία, ώστε μέσω της υπολογιστικής μοντελοποίησης και της εξέτασης σεναρίων, να βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τις οικονομικές διακυμάνσεις και την προγνωστική ανάλυση.

5.3 Προκλήσεις και ευκαιρίες της μαθηματικής μοντελοποίησης στην Βιολογία και Ιατρική

Η μαθηματική μοντελοποίηση έχει αναδειχθεί ως βασικό εργαλείο για την κατανόηση της περίπλοκης δυναμικής των βιολογικών συστημάτων και την προώθηση της ιατρικής έρευνας. Από την αποκάλυψη της πολυπλοκότητας των γενετικών αλληλεπιδράσεων έως την πρόβλεψη της εξάπλωσης μολυσματικών ασθενειών, τα μαθηματικά μοντέλα χρησιμεύουν ως απαραίτητα πλαίσια για τη μελέτη βιολογικών φαινομένων και την ενημέρωση για τη λήψη κλινικών αποφάσεων. Όπως τονίστηκε από τους Smith και Jones (2015), η ενοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης με πειραματικά δεδομένα έχει φέρει επανάσταση στην κατανόησή μας για τις βιολογικές διεργασίες, επιτρέποντας τη διατύπωση ελεγχόμενων υποθέσεων και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του συστήματος. Καθορίζοντας τη μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της βιολογίας και της ιατρικής, περιλαμβάνει την κατασκευή μαθηματικών εξισώσεων ή υπολογιστικών προσομοιώσεων για την περιγραφή και ανάλυση βιολογικών συστημάτων, που κυμαίνονται από τις μοριακές αλληλεπιδράσεις έως τη δυναμική του πληθυσμού. Αυτός ο ορισμός, υπογραμμίζει τη διεπιστημονική φύση της μαθηματικής μοντελοποίησης, γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ των θεωρητικών γνώσεων και των εμπειρικών παρατηρήσεων στη βιολογική και ιατρική έρευνα.

5.3.1 Πρώιμες εξελίξεις στη Μαθηματική Μοντελοποίηση στη Βιολογία και την Ιατρική

Η χρήση της μαθηματικής μοντελοποίησης στη βιολογία και την ιατρική ανάγεται στις πρώιμες προσπάθειες πρωτοπόρων επιστημόνων που προσπάθησαν να ποσοτικοποιήσουν και να κατανοήσουν τα βιολογικά φαινόμενα μέσω μαθηματικών πλαισίων. Σημειωτέον, η εργασία των Lotka και Volterra στις αρχές του 20ου αιώνα έθεσε τις βάσεις για τη μοντελοποίηση της δυναμικής του πληθυσμού. Οι εξισώσεις αρπακτικών-θηραμάτων του Lotka και οι εξισώσεις ανταγωνισμού του Volterra σημείωσαν θεμελιώδη συμβολή στο πεδίο, παρέχοντας μαθηματικές περιγραφές των οικολογικών αλληλεπιδράσεων. Επιπλέον, η έλευση της μαθηματικής επιδημιολογίας μπορεί να αποδοθεί στην πρωτοποριακή έρευνα των Ross, Kermack και McKendrick, όπου και αναπτύχθηκαν διαμερισματικά μοντέλα για τη μελέτη της δυναμικής των μολυσματικών ασθενειών (Ross, 1916, Kermack και McKendrick, 1927). Αυτές οι αρχικές εξελίξεις υπογράμμισαν τη δυνατότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης να διασαφηνίσει τις θεμελιώδεις αρχές που διέπουν τα βιολογικά συστήματα.

Ορόσημα και βασικά στοιχεία στο πεδίο

Σε όλη την ιστορία, πολλά ορόσημα έχουν διαμορφώσει το τοπίο της μαθηματικής μοντελοποίησης στη βιολογία και την ιατρική, παράλληλα με τις συνεισφορές βασικών προσωπικοτήτων που ώθησαν το πεδίο προς τα εμπρός. Ένα τέτοιο ορόσημο είναι η δημοσίευση της θεμελιώδους εργασίας των Hodgkin και Huxley το 1952, όπου διατύπωσαν ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη διάδοση των δυναμικών δράσης στους νευρώνες. Έφερε επανάσταση στη νευροφυσιολογία και έθεσε τα θεμέλια για την υπολογιστική νευροεπιστήμη. Επιπλέον, η έλευση των βιολογικών συστημάτων στα τέλη του 20ου αιώνα σηματοδότησε μια αλλαγή παραδείγματος στη βιολογική έρευνα, με πρωτοπόρους όπως οι Kitano και Ideker να υποστηρίζουν ολοκληρωμένες προσεγγίσεις στη μοντελοποίηση πολύπλοκων βιολογικών δικτύων. Αυτά τα σημεία αναφοράς, υπογράμμισαν τη διεπιστημονική φύση της μαθηματικής μοντελοποίησης, γεφυρώνοντας θεωρητικές γνώσεις με πειραματικές παρατηρήσεις για την αποσαφήνιση βιολογικών φαινομένων.

Εξέλιξη Μαθηματικών Τεχνικών και Υπολογιστικών Εργαλείων

Η εξέλιξη των μαθηματικών τεχνικών και των υπολογιστικών εργαλείων συνέβαλε καθοριστικά στην πρόοδο του πεδίου της μαθηματικής μοντελοποίησης στη βιολογία και την ιατρική. Από την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέχρι την εμφάνι-

ση υπολογιστικών πλατφορμών υψηλής απόδοσης, οι τεχνολογικές εξελίξεις επέτρεψαν στους ερευνητές να αντιμετωπίσουν όλο και πιο περίπλοκα βιολογικά προβλήματα. Για παράδειγμα, η άνοδος της μοντελοποίησης με βάση τους πράκτορες στις αρχές του 21ου αιώνα διευκόλυνε την προσομοίωση ατομικών συμπεριφορών μέσα σε πολύπλοκα συστήματα, προσφέροντας νέες γνώσεις σε φαινόμενα όπως η μετανάστευση κυττάρων και οι μικροβιακές αλληλεπιδράσεις (Anderson et al., 2006). Επιπλέον, η ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης με πειραματικά δεδομένα, που διευκολύνεται από υπολογιστικά πλαίσια όπως το συμπέρασμα Bayes και η μηχανική μάθηση, έχει οδηγήσει στη βελτίωση των μοντέλων και στη δημιουργία ελεγχόμενων προβλέψεων (Gutenkunst et al., 2007 και Wilkinson, 2014).

Τύποι Μαθηματικών Μοντέλων

Τα ντετερμινιστικά μοντέλα είναι μαθηματικά πλαίσια που περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός συστήματος χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η τυχαιότητα ή η μεταβλητότητα. Αυτά τα μοντέλα χαρακτηρίζονται από ντετερμινιστικές εξισώσεις που προβλέπουν με ακρίβεια την εξέλιξη του συστήματος με την πάροδο του χρόνου. Δύο κύριοι τύποι ντετερμινιστικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται συνήθως στη βιολογία και ιατρική είναι οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ) και μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ).

Πίνακας 5.2: Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στη Βιολογία και Ιατρική

Εφαρμογές	Περιγραφή	Πηγές
Δυναμική πληθυσμού	Μοντελοποίηση της αύξησης του πληθυσμού και των αλληλεπιδράσεων	Lotka, A. J. (1925) , Volterra, V. (1926)
Φαρμακοκινητική	Πρόβλεψη συγκέντρωσης φαρμάκου με την πάροδο του χρόνου στο σώμα	Gabrielsson, J. & Weiner, D. (2010)
Ρυθμιστικά Δίκτυα Γονιδίων	Μοντελοποίηση δυναμικής έκφρασης γονιδίων και ρυθμιστικών αλληλεπιδράσεων	Ideker, T. et al. (2000)
Νευροφυσιολογία	Περιγραφή της δυναμικής των δυναμικών δράσης στους νευρώνες	Hodgkin, A. L. & Huxley, A. F. (1952)
Επιδημιολογική Δυναμική	Μοντελοποίηση της εξάπλωσης μολυσματικών ασθενειών στους πληθυσμούς	Kermack, W. O. & McKendrick, A. G. (1927)

Οι ΣΔΕ είναι μαθηματικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν μία ή περισσότερες άγνωστες συναρ-

τήσεις και τις παράγωγές τους σε σχέση με μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Στο πλαίσιο της βιολογίας και της ιατρικής, χρησιμοποιούνται συχνά για τη μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων που χαρακτηρίζονται από συνεχείς αλλαγές με την πάροδο του χρόνου.

Πίνακας 5.3: Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) στη Βιολογία και την Ιατρική

Εφαρμογές	Περιγραφή	Πηγές
Διαδικασίες διάχυσης	Μοντελοποίηση της διάχυσης των μορίων μέσα σε βιολογικούς ιστούς	Crank, J. (1975)
Ανάπτυξη όγκου	Προσομοίωση της ανάπτυξης και της εισβολής όγκων στους ιστούς	Anderson, A. R., et al. (2006)
Καρδιακή Ηλεκτροφυσιολογία	Περιγραφή της διάδοσης ηλεκτρικών σημάτων στην καρδιά	Noble, D. (1962); Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952)
Δυναμική ροής αίματος	Μοντελοποίηση προτύπων ροής αίματος σε αρτηρίες και φλέβες	Quarteroni, A., et al. (2017)
Νευροαπεικόνιση	Προσομοίωση της διάδοσης της νευρωνικής δραστηριότητας στον εγκέφαλο	Kermack, W. O. & Jirsa, V. K., & Kelso, J. A. S. (2005)

Οι ΜΔΕ, επεκτείνουν την έννοια των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων σε συστήματα που χαρακτηρίζονται από χωρικές διακυμάνσεις πέρα από τις χρονικές αλλαγές. Αυτές οι εξισώσεις περιλαμβάνουν μερικές παραγώγους σε σχέση με πολλαπλές ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως ο χώρος και ο χρόνος. Στη βιολογία και την ιατρική, οι εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση φαινομένων που παρουσιάζουν χωρική ετερογένεια, όπως οι διαδικασίες διάχυσης και τα χωρικά μοτίβα στην ανάπτυξη του όγκου.

Τα στοχαστικά μοντέλα ενσωματώνουν την τυχαιότητα ή την αβεβαιότητα στο πλαίσιο μοντελοποίησης, λαμβάνοντας υπόψη την εγγενή μεταβλητότητα στα βιολογικά συστήματα. Σε αντίθεση με τα ντετερμινιστικά μοντέλα, τα στοχαστικά μοντέλα παράγουν πιθανοτικές προβλέψεις παρά ντετερμινιστικές τροχιές. Δύο συνήθως χρησιμοποιούμενες προσεγγίσεις στοχαστικής μοντελοποίησης στη βιολογία και την ιατρική είναι οι διαδικασίες Markov και τα μοντέλα που βασίζονται σε πράκτορες.

Οι διαδικασίες Markov είναι στοχαστικά μοντέλα που περιγράφουν την εξέλιξη ενός συστήματος μέσω μιας σειράς διακριτών καταστάσεων, όπου οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων συμβαίνουν πιθανολογικά με βάση προκαθορισμένες πιθανότητες μετάβασης. Στη βιολογία,

οι διαδικασίες Markov χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση διαφόρων φαινομένων, συμπεριλαμβανομένων της μοριακής κινητικής, της γενετικής πληθυσμού, και επιδημιολογική δυναμική. Για παράδειγμα, το μοντέλο S-I-R για τη δυναμική μολυσματικών ασθενειών είναι ένα κλασικό παράδειγμα μιας διαδικασίας Markov, όπου τα άτομα μεταβαίνουν μεταξύ των καταστάσεων ασθένειας με βάση τα ποσοστά μόλυνσης και ανάρρωσης (Kermack και McKendrick, 1927).

Τα μοντέλα που βασίζονται σε πράκτορες προσομοιώνουν τη συμπεριφορά μεμονωμένων οντοτήτων μέσα σε ένα σύστημα, επιτρέποντας την αναπαράσταση πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων και αναδυόμενων φαινομένων. Συγκεκριμένα, λειτουργούν σύμφωνα με προκαθορισμένους κανόνες και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και το περιβάλλον τους. Η μοντελοποίηση που βασίζεται σε πράκτορες έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη βιολογία και την ιατρική για τη μελέτη φαινομένων όπως η κυτταρική μετανάστευση, η ανοσοαπόκριση και η οικολογική δυναμική. Για παράδειγμα, στην έρευνα για τον καρκίνο, τα μοντέλα που βασίζονται σε παράγοντες προσομοιώνουν τη συμπεριφορά μεμονωμένων καρκινικών κυττάρων μέσα σε ένα μικροπεριβάλλον όγκου, καταγράφοντας τη χωρική και χρονική ετερογένεια της ανάπτυξης του όγκου και της ανταπόκρισης στη θεραπεία (Anderson et al., 2006).

Τα υβριδικά μοντέλα ενσωματώνουν ντετερμινιστικές και στοχαστικές συνιστώσες για να καταγράψουν τόσο τις ντετερμινιστικές τάσεις όσο και τις στοχαστικές διακυμάνσεις που παρατηρούνται στα βιολογικά συστήματα. Αναλυτικότερα, αξιοποιούν τα δυνατά σημεία και των δύο προσεγγίσεων μοντελοποίησης, επιτρέποντας μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση της δυναμικής του συστήματος. Τα υβριδικά μοντέλα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε σενάρια όπου οι ντετερμινιστικές δυνάμεις οδηγούν τη συνολική συμπεριφορά του συστήματος, αλλά οι στοχαστικές διαταραχές παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της μεταβλητότητας και της αβεβαιότητας. Για παράδειγμα, υβριδικά μοντέλα έχουν εφαρμοστεί για τη μελέτη γονιδιακών ρυθμιστικών δικτύων, όπου οι ντετερμινιστικές ΣΔΕ περιγράφουν τη μέση συμπεριφορά της γονιδιακής έκφρασης, ενώ η στοχαστική Οι διακυμάνσεις ευθύνονται για το θόρυβο και τη μεταβλητότητα στις διαδικασίες μεταγραφής και μετάφρασης (Gillespie, 1976).

5.3.2 Εφαρμογές στη Βιολογία

- Δυναμική Πληθυσμού:

Η μαθηματική μοντελοποίηση παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση και την πρόβλεψη της δυναμικής των βιολογικών πληθυσμών. Τα μοντέλα δυναμικής του πληθυσμού,

όπως οι κλασικές εξισώσεις Lotka-Volterra, περιγράφουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ ειδών μέσα στα οικοσυστήματα, συμπεριλαμβανομένης της δυναμικής των θηρευτών-θηραμάτων, του ανταγωνισμού και της αύξησης του πληθυσμού (Lotka, 1925 και Volterra, 1926). Αυτά τα μοντέλα παρέχουν πληροφορίες για τις οικολογικές διαδικασίες και ενημερώνουν τις στρατηγικές διατήρησης που στοχεύουν στη διατήρηση της βιοποικιλότητας.

- Επιδημιολογία:

Στην επιδημιολογία, τα μαθηματικά μοντέλα είναι απαραίτητα εργαλεία για τη μελέτη της εξάπλωσης μολυσματικών ασθενειών και την αξιολόγηση των μέτρων ελέγχου. Διαμερισματικά μοντέλα, όπως το μοντέλο S-I-R, χωρίζουν τον πληθυσμό σε διαφορετικά διαμερίσματα με βάση την κατάσταση της νόσου και προσομοιώνουν τη δυναμική της μετάδοσης της νόσου (Kermack και McKendrick, 1927). Τα επιδημιολογικά μοντέλα βοηθούν τους υπεύθυνους χάραξης πολιτικής να αξιολογήσουν τον αντίκτυπο των παρεμβάσεων, όπως οι εκστρατείες εμβολιασμού και τα μέτρα κοινωνικής αποστασιοποίησης, στη συχνότητα εμφάνισης της νόσου και να ενημερώσουν τις στρατηγικές δημόσιας υγείας.

- Εξελικτική Βιολογία:

Η μαθηματική μοντελοποίηση παρέχει πληροφορίες για τις εξελικτικές διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένης της φυσικής επιλογής, της γενετικής μετατόπισης και της ειδογένεσης. Εξελικτικά μοντέλα, όπως το μοντέλο Wright-Fisher και το μοντέλο Moran, προσομοιώνουν τη δυναμική των συχνοτήτων αλληλόμορφων εντός πληθυσμών και διευκρινίζουν τους παράγοντες που οδηγούν στην εξελικτική αλλαγή (Wright, 1931, Moran, 1958). Αυτά τα μοντέλα συμβάλλουν στην κατανόησή μας για την προσαρμογή, τα πρότυπα βιοποικιλότητας και την εμφάνιση νέων χαρακτηριστικών.

- Νευροεπιστήμη:

Στη νευροεπιστήμη, τα μαθηματικά μοντέλα διευκρινίζουν τη σύνθετη δυναμική των νευρωνικών δικτύων και της νευρωνικής σηματοδότησης. Το μοντέλο των Hodgkin και Huxley για το δυναμικό δράσης, που βασίζεται σε συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις, περιγράφει την ηλεκτρική διεγερσιμότητα των νευρώνων και στηρίζει την κατανόησή μας για τη νευρική επικοινωνία (Hodgkin και Huxley, 1952). Τα υπολογιστικά μοντέλα νευρωνικών κυκλωμάτων προσομοιώνουν την επεξεργασία πληροφοριών στον εγκέφα-

λο και παρέχουν πληροφορίες για τις γνωστικές λειτουργίες, όπως η μάθηση και η μνήμη.

- Βιολογία Συστημάτων:

Η βιολογία συστημάτων χρησιμοποιεί μαθηματική μοντελοποίηση για τη μελέτη της συμπεριφοράς των βιολογικών συστημάτων σε μοριακό επίπεδο. Τα μαθηματικά μοντέλα γονιδιακών ρυθμιστικών δικτύων, μεταβολικών οδών και καταρράκτες σηματοδότησης διευκρινίζουν τις αρχές που διέπουν τις κυτταρικές διεργασίες και την ενσωμάτωσή τους σε πολύπλοκα βιολογικά συστήματα (Ideker et al., 2001). Οι προσεγγίσεις της συστημικής βιολογίας επιτρέπουν τον εντοπισμό βασικών ρυθμιστικών μηχανισμών που διέπουν την κυτταρική λειτουργία και έχουν επιπτώσεις στην ανακάλυψη φαρμάκων και στην εξατομικευμένη ιατρική.

5.3.3 Εφαρμογές στην Ιατρική

- Φαρμακοκινητική και Φαρμακοδυναμική:

Τα μαθηματικά μοντέλα φαρμακοκινητικής και φαρμακοδυναμικής διευκολύνουν τη βελτιστοποίηση των δοσολογικών σχημάτων φαρμάκων και την πρόβλεψη της αποτελεσματικότητας και της τοξικότητας του φαρμάκου. Τα φαρμακοκινητικά μοντέλα περιγράφουν την απορρόφηση, κατανομή, μεταβολισμό και απέκκριση φαρμάκων στο σώμα, ενώ τα φαρμακοδυναμικά μοντέλα χαρακτηρίζουν τη σχέση μεταξύ συγκέντρωσης φαρμάκου και φαρμακολογικής επίδρασης (Gabrielsson και Weiner, 2010). Αυτά τα μοντέλα ενημερώνουν την ανάπτυξη φαρμάκων και τη λήψη θεραπευτικών αποφάσεων, συμβάλλοντας σε εξατομικευμένες θεραπευτικές προσεγγίσεις.

- Μοντελοποίηση ασθενειών:

Τα μαθηματικά μοντέλα δυναμικής της νόσου βοηθούν στην κατανόηση της εξέλιξης της νόσου και στην καθοδήγηση των στρατηγικών παρέμβασης. Η μοντελοποίηση ασθενειών περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων μολυσματικών ασθενειών, χρόνιων παθήσεων και γενετικών διαταραχών. Για παράδειγμα, τα μαθηματικά μοντέλα μετάδοσης του HIV ενημερώνουν τις πολιτικές δημόσιας υγείας που στοχεύουν στον έλεγχο της εξάπλωσης του ιού, ενώ μοντέλα χρόνιων ασθενειών, όπως ο διαβήτης και οι καρδιαγγειακές παθήσεις, υποστηρίζουν τις προσπάθειες κλινικής διαχείρισης και πρόληψης.

- Μοντελοποίηση καρκίνου:

Τα μαθηματικά μοντέλα ανάπτυξης και εξέλιξης του καρκίνου ρίχνουν φως στη δυναμική του όγκου, την ανταπόκριση στη θεραπεία και την εμφάνιση αντοχής στα φάρμακα. Τα μοντέλα καρκίνου ενσωματώνουν βιολογικές γνώσεις με μαθηματικά πλαίσια για να προσομοιώσουν την ανάπτυξη του όγκου, τη μετάσταση και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των καρκινικών κυττάρων και του μικροπεριβάλλοντος (Anderson et al., 2006). Αυτά τα μοντέλα βοηθούν στην ανάπτυξη φαρμάκων, στη βελτιστοποίηση της θεραπείας και στο σχεδιασμό συνδυαστικών θεραπειών στοχεύοντας πολλαπλές πτυχές της βιολογίας του καρκίνου.

- Καρδιαγγειακή Μοντελοποίηση:

Τα μαθηματικά μοντέλα καρδιαγγειακής φυσιολογίας διευκρινίζουν τους μηχανισμούς που κρύβονται πίσω από τις καρδιαγγειακές παθήσεις και καθοδηγούν τη λήψη κλινικών αποφάσεων. Τα υπολογιστικά μοντέλα της ροής του αίματος, της καρδιακής ηλεκτροφυσιολογίας και της αγγειακής αναδιαμόρφωσης προσομοιώνουν φυσιολογικές διεργασίες και παθολογικές καταστάσεις, όπως η υπέρταση, η αθηροσκλήρωση και οι αρρυθμίες (Quarteroni et al., 2017). Τα καρδιαγγειακά μοντέλα υποστηρίζουν τη διάγνωση, τη διαστρωμάτωση κινδύνου και τον σχεδιασμό θεραπείας για καρδιαγγειακές διαταραχές, βελτιώνοντας τελικά τα αποτελέσματα των ασθενών.

- Εξατομικευμένη Ιατρική:

Η μαθηματική μοντελοποίηση συμβάλλει στην πρόοδο της εξατομικευμένης ιατρικής ενσωματώνοντας δεδομένα ειδικά για τον ασθενή και υπολογιστικές προσομοιώσεις για τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών θεραπείας. Ειδικά για τον ασθενή μοντέλα μεταβολισμού φαρμάκων, εξέλιξης της νόσου και ανταπόκρισης στη θεραπεία επιτρέπουν εξατομικευμένες θεραπευτικές παρεμβάσεις που βασίζονται σε μεμονωμένα χαρακτηριστικά και προφίλ βιοδεικτών (Gadkar et al., 2014). Η εξατομικευμένη ιατρική προσεγγίζει τη μόχλευση της μαθηματικής μοντελοποίησης βελτιώνουν τα αποτελέσματα της θεραπείας, ελαχιστοποιούν τις ανεπιθύμητες ενέργειες και βελτιώνουν τη φροντίδα των ασθενών.

Συμπερασματικά, η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμεύει ως ένα ισχυρό εργαλείο για την αποκάλυψη της πολυπλοκότητας των βιολογικών συστημάτων και την προώθηση της ιατρικής έρευνας. Μέσω της ενοποίησης των μαθηματικών αρχών με εμπειρικά δεδομένα, τα μαθηματικά μοντέλα παρέχουν πολύτιμες γνώσεις σχετικά με τη δυναμική, τη συμπεριφορά και τις αλληλεπιδράσεις των βιολογικών διεργασιών σε διαφορετικές κλίμακες. Ωστόσο, ο τομέας της

μαθηματικής μοντελοποίησης αντιμετωπίζει αρκετές προκλήσεις, όπως της διαθεσιμότητας και της ποιότητας δεδομένων, της πολυπλοκότητας του μοντέλου και της εκτίμησης παραμέτρων, που πρέπει να αντιμετωπιστούν για να αξιοποιήσει πλήρως τις δυνατότητές του στη βιολογία και την ιατρική. Η υπέρβαση αυτών των προκλήσεων απαιτεί μια πολύπλευρη προσέγγιση, που περιλαμβάνει την ανάπτυξη ισχυρών μεθόδων απόκτησης δεδομένων, φειδωλών πλαισίων μοντελοποίησης, αυστηρών πρωτοκόλλων επικύρωσης και αποτελεσματικών στρατηγικών διεπιστημονικής συνεργασίας. Παρά αυτές τις προκλήσεις, οι ευκαιρίες που παρουσιάζονται από τη μαθηματική μοντελοποίηση στη βιολογία και την ιατρική είναι τεράστιες. Από την πρόβλεψη της εξάπλωσης της νόσου και τη βελτιστοποίηση των στρατηγικών θεραπείας μέχρι την αποκάλυψη των μυστηρίων της βιολογικής εξέλιξης και την κατανόηση της νευρωνικής δυναμικής, τα μαθηματικά μοντέλα συνεχίζουν να οδηγούν την καινοτομία και την ανακάλυψη σε διάφορους τομείς. Αντιμετωπίζοντας τις προκλήσεις και αγκαλιάζοντας τη διεπιστημονική συνεργασία, οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν το πλήρες δυναμικό της μαθηματικής μοντελοποίησης για την αντιμετώπιση πιεστικών βιοϊατρικών προβλημάτων και τη βελτίωση των αποτελεσμάτων της ανθρώπινης υγείας.

5.4 Διεπιστημονική διδασκαλία μεταξύ μαθηματικών και φυσικής

Τα μαθηματικά και η φυσική είναι κλάδοι βαθιά συνυφασμένοι, με πλούσια ιστορία αμοιβαίας επιρροής και συνεργασίας. Το άρθρο του Eugene Wigner, «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», υπογραμμίζει την εξαιρετική ικανότητα των μαθηματικών να περιγράφουν φυσικά φαινόμενα. Αυτή η συνέργεια μεταξύ των δύο τομέων όχι μόνο εμπλουτίζει την ακαδημαϊκή έρευνα, αλλά επίσης ενισχύει τις εκπαιδευτικές πρακτικές, ιδιαίτερα στην ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αυτή η ενότητα διερευνά τη σημασία της διεπιστημονικής διδασκαλίας μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής, παρουσιάζοντας ένα διδακτικό πλαίσιο για μια τέτοια διδασκαλία και συζητώντας πρακτικά παραδείγματα.

Από τον 17ο αιώνα, η φυσική έχει εμπνεύσει σημαντικά τη μαθηματική ανάπτυξη. Οι παρατηρήσεις του Wigner επαναλαμβάνονται από μελετητές όπως ο Lützen, που υποστηρίζουν ότι οι εξωμαθηματικές περιοχές οδηγούν τις μαθηματικές προόδους. Καθώς προκύπτουν νέα φυσικά ερωτήματα, συχνά πηγαινούν στη διατύπωση μαθηματικών προβλημάτων και εννοιών. Αυτή η αμοιβαία σχέση έχει διαμορφώσει και τα δύο πεδία μέσα από αιώνες έρευνας. Μαθηματικοί όπως ο Michael Atiyah τονίζουν ότι ο 21ος αιώνας θα γίνει μάρτυρας μιας ακόμη στενότερης σχέσης μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής. Ο Vladimir Arnold προειδοποιεί για

τις επιζήμιες συνέπειες του διαχωρισμού των δύο κλάδων, υποστηρίζοντας μια ενοποιημένη προσέγγιση που αξιοποιεί τα δυνατά σημεία και των δύο τομέων. Επικρίνει τις παραδοσιακές παιδαγωγικές μεθόδους που δίνουν έμφαση στους ορισμούς και τις αποδείξεις σε σχέση με τις πρακτικές εφαρμογές και τις πραγματικές παρατηρήσεις.

5.4.1 Παραδείγματα Διεπιστημονικών Ενοτήτων Διδασκαλίας

- Απόσταση ακινητοποίησης αυτοκινήτου: Αυτή η διεργασία εστιάζει στη σχέση μεταξύ αρχικής ταχύτητας και απόστασης πέδησης, ενσωματώνοντας τα μαθηματικά και τη φυσική. Οι μαθητές εξερευνούν πραγματικά σενάρια οδήγησης, χρησιμοποιώντας διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό για να αναλύσουν δεδομένα που συλλέχθηκαν από πειράματα σε αποστάσεις πέδησης. Δίνει, στην ουσία, έμφαση στην αναγκαιότητα συνεργασίας μεταξύ των ατόμων για την κατασκευή ενός ολοκληρωμένου μοντέλου δυναμικής πέδησης.
- Ενέργεια και Αειφορία: Ενσωματώνοντας τη φυσική, τα μαθηματικά και τις κοινωνικές επιστήμες, αυτό το παράδειγμα αντιμετωπίζει το πιεστικό ζήτημα της παραγωγής ενέργειας μέσω των ανεμογεννητριών. Οι μαθητές διερευνούν τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας του ανέμου και της παραγωγής ενέργειας, χρησιμοποιώντας ανάλυση παλινδρόμησης για την ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων. Αυτή η ενότητα υπογραμμίζει τη συνάφεια της φυσικής στα κοινωνικά πλαίσια, ενισχύοντας την κατανόηση των διεπιστημονικών συνδέσεων από τους μαθητές.
- Συναρτήσεις Εκθετικής Ανάπτυξης: Αυτό το έργο ασκεί κριτική στην παραδοσιακή απομονωμένη διδασκαλία των εκθετικών συναρτήσεων, προτείνοντας μια ενότητα που περιλαμβάνει τα μαθηματικά, τη χημεία, τη φυσική και τη βιολογία. Ο στόχος είναι να αποδειχθεί η δυνατότητα μεταφοράς της έννοιας σε διάφορους κλάδους, ενισχύοντας μια ολιστική κατανόηση της εκθετικής ανάπτυξης σε διάφορα επιστημονικά πλαίσια.
- Άθληση: Εστιάζοντας στη μηχανική του άλματος, αυτή η ενότητα ενσωματώνει τα μαθηματικά, τη φυσική και τη φυσική αγωγή. Οι μαθητές αναλύουν τις εγγραφές βίντεο από τα άλματά τους για να εφαρμόσουν μαθηματικά εργαλεία και φυσικούς νόμους για τη βελτιστοποίηση της απόδοσης. Αυτή η πρακτική προσέγγιση ενθαρρύνει την ενεργό δέσμευση και απεικονίζει την αλληλεπίδραση μεταξύ φυσικής αγωγής και επιστημών.

Τα μαθηματικά και η φυσική έχουν μια στενή σχέση και αυτό θα πρέπει να αντικατοπτρίζεται σε συχνές κοινές αλληλουχίες διδασκαλίας μεταξύ των δύο μαθημάτων. Τα παραδείγματα

διεπιστημονικών ενότητων δείχνουν ότι οι μαθητές είναι σε θέση να αρθρώσουν ένα ευρύ φάσμα διεπιστημονικών θεμάτων που αποτυπώνουν τη σχέση μεταξύ μαθηματικών και φυσικής. Το διδακτικό πλαίσιο παρέχει στους μαθητές μια δομή για τον εντοπισμό τέτοιων ζητημάτων με σημαντικό περιεχόμενο για τα συμμετέχοντα θέματα και η μοντελοποίηση χρησιμεύει ως ενοποιητική δραστηριότητα στις ενότητες των μαθητών. Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλά από τα έργα των εξετάσεων εκτός από τα μαθηματικά και τη φυσική περιλαμβάνουν θέματα όπως η χημεία, η βιολογία, ο αθλητισμός και οι κοινωνικές επιστήμες. Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι ορισμένοι από τους μαθητές έχουν ένα υπόβαθρο σε άλλες φυσικές επιστήμες, ή στις ανθρωπιστικές ή στις κοινωνικές επιστήμες. Αυτό οδήγησε σε μια κατάσταση μάθησης στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να διαπραγματευτούν την έννοια της μοντελοποίησης σε διαφορετικά μαθήματα και οι μαθητές επέδειξαν την ικανότητα να ενσωματώνουν δύο ή περισσότερα θέματα σε μια διεπιστημονική ενότητα. Οι μαθητές τονίζουν τη συνάφεια και τις παρακινητικές πτυχές μιας διεπιστημονικής προσέγγισης και της ικανότητας μοντελοποίησης ως συνδετικού κρίκου μεταξύ του διεπιστημονικού πλαισίου και των θεμάτων. Τέλος, οι μαθητές γνωρίζουν τις προκλήσεις της διεπιστημονικής διδασκαλίας.

6. Συμπεράσματα και συζήτηση για μελλοντικές έρευνες

Αυτό το κεφάλαιο παρέχει ένα χώρο για συζήτηση σχετικά με τον ρόλο των μαθηματικών στη διεπιστημονική εκπαίδευση STEM. Αυτή η προσέγγιση αναπόφευκτα εγείρει ερωτήματα αναφορικά με τις διδακτικές πρακτικές και τις τρέχουσες σχολικές και ακαδημαϊκές κουλτούρες, επιπλέον, από πλευράς διδακτέας ύλης, η ολοκληρωμένη εκπαίδευση STEM είναι αρκετά ανησυχητική. Ωστόσο, η αναζήτηση συνδέσεων ή εξαρτήσεων μεταξύ των διαφόρων περιοχών STEM, είτε σε περιεχόμενο, σε ειδικούς τρόπους σκέψης είτε σε γνωσιακή φύση, κερδίζει δυναμική. Δεν είναι ακόμη σαφές τι σημαίνει μάθηση (και διδασκαλία) σε ένα τέτοιο συγκεκριμένο πλαίσιο, όπως δεν είναι ακόμα ξεκάθαρο τι μπορεί να σημαίνει η εκμάθηση μαθηματικών σε μια ολοκληρωμένη προσέγγιση σε πολυκλαδικά ή διεπιστημονικά περιεχόμενα, διαδικασίες ή προβλήματα. Η εξιδανίκευση μιας «καλής» ολοκληρωμένης εργασίας STEM απέχει πολύ από το να έχει διευθετηθεί. Ωστόσο, μπορούμε να δούμε ότι η διεπιστημονικότητα φαίνεται να βρίσκεται στον πυρήνα. Και αυτό δείχνει ότι ο διάλογος μεταξύ διαφορετικών μορφών γνώσης (και, επομένως, ειδικών δασκάλων) είναι επειγόντως απαραίτητος. Στην πραγματικότητα, τα αποτελέσματα που εμφανίζονται ως τα πιο ελπιδοφόρα θολώνουν ορισμένα από τα όρια μεταξύ των πεδίων. Επιπλέον, είναι προφανές ότι οι διαχρονικές μελέτες ή οι εμπειρίες μεγαλύτερης διάρκειας οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα. Τα νέα συμπεράσματα και οι αντιλήψεις σχετικά με τα μαθησιακά κέρδη των μαθητών, στα μαθηματικά και πέρα από αυτό, απαιτούν προφανώς μακροπρόθεσμη ερευνητική εργασία παράλληλα με μακροχρόνιες πρακτικές εμπειρίες. Όπως συνέβαινε πριν από το 2017, το σημείο εκκίνησης για τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, η έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση (ιδιαίτερα τα μαθηματικά) σε διεπιστημονικά πλαίσια STEM είναι ακόμη σε πρωταρχικό στάδιο. Δεν δείχνει ευρεία και ομόφωνη άποψη για το τι απαιτείται από τα προγράμματα σπουδών, τους δασκάλους, τους μαθητές και τα εκπαιδευτικά συστήματα. Η εκπαίδευση STEM συζητείται και διερευνάται επί του παρόντος από πολλές ερευνητικές κοινότητες (εκπαίδευση επιστήμης, μαθηματική εκπαίδευση, εκπαίδευση μηχανικών, πανεπιστημιακή εκπαίδευση, εκπαίδευση υπολογιστών, κ.λπ.). Η έρευνα επικεντρώθηκε στην εκπαίδευση των μαθηματικών, αποκαλύπτοντας μια αυξανόμενη συνειδητοποίηση ότι είναι αδύνατο να σκεφτούμε τον ρόλο των μαθηματικών χωρίς να σκεφτούμε τους ρόλους των άλλων τομέων. Έτσι, υποστηρίζουμε ότι οι δάσκαλοι και οι μαθητές πρέπει να κρατούν τα

μαθηματικά στο προσκήνιο για να δείξουν τον κεντρικό ρόλο τους στη βοήθεια να κατανοήσουμε και να λύσουμε σύνθετα επιστημονικά και κοινωνικά προβλήματα σε έναν εγγενώς διεπιστημονικό κόσμο.

Κατά την ολοκλήρωση της εργασίας, προσφέρονται ερωτήσεις για μελλοντική εργασία για την ενίσχυση την κατανόησή μας για αυτό το σημαντικό ζήτημα. Οι μέθοδοι και το σκεπτικό για τη σύνδεση των συστατικών κλάδων STEM χρειάζονται περαιτέρω διερεύνηση. Ένα ερώτημα που θα μπορούσε να καθοδηγήσει τις μελλοντικές μελέτες είναι:

***Ποια μοντέλα διεπιστημονικών προγραμμάτων σπουδών και προσεγγίσεις αντιπροσω-
πεύουν καλύτερα τις χαρακτηριστικές επιστημικές θέσεις και πρακτικές των μαθημα-
τικών, καθώς και τις διαφορές και τις συνδέσεις μεταξύ των κλάδων STEM;***

Η έρευνα για τις εμπειρίες των μαθητών και τα αποτελέσματα της μάθησης σε ολοκληρωμένα προγράμματα STEM έχει επικεντρωθεί κυρίως στον συναισθηματικό τομέα. Χρειαζόμαστε μελέτες που θέτουν πιο διεισδυτικές ερωτήσεις σχετικά με το πώς φαίνεται η «επιτυχία» σε αυτά τα προγράμματα. Η επιτυχία αποδεικνύεται από βελτιώσεις στις φιλοδοξίες και τη συμμετοχή των μαθητών σε προχωρημένα μαθηματικά και άλλα μαθήματα STEM στο γυμνάσιο και στο πανεπιστήμιο; Ή πρέπει η έρευνα να αναζητήσει αλλαγές στη διεπιστημονική και επιστημονική μάθηση των μαθητών; Έτσι προτείνονται περισσότερες μελέτες να αντιμετωπίσουν τα ακόλουθα ερωτήματα:

***Πώς βελτιώνεται η διεπιστημονική εκπαίδευση STEM εκμάθηση μαθηματικών από
τους μαθητές;***

Τι συνεισφορά έχουν τα μαθηματικά στους μαθητές διεπιστημονική μάθηση STEM;

Πολλά ζητήματα παραμένουν σχετικά με το πώς να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να σκεφτούν διαφορετικά τον πιθανό ρόλο των μαθηματικών στη διεπιστημονική εκπαίδευση STEM, προχωρώντας πέρα από τις τρέχουσες πρακτικές που τοποθετούν τα μαθηματικά ως εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων σε άλλους κλάδους. Η έρευνα για την εκπαίδευση και την ανάπτυξη των εκπαιδευτικών μπορεί να επιδιώξει ερωτήματα όπως τα ακόλουθα:

***Πώς μπορούν τα προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών να υποστηρίξουν ολοκλη-
ρωμένες διδακτικές πρακτικές STEM που διαφυλάσσουν την πειθαρχική ακεραιότητα
των μαθηματικών;***

Τι μαθηματικές γνώσεις χρειάζονται οι δάσκαλοι για τη διεπιστημονική διδασκαλία

STEM;

Οι μελέτες υλοποίησης στην τάξη συχνά περιγράφουν συναρπαστικές εργασίες STEM, αλλά χρειάζεται περισσότερη έρευνα για να γίνει κατανοητό τι κάνει μια εργασία STEM μαθηματικά πλούσια. Γνωρίζουμε επίσης πολύ λίγα για τον τρόπο αξιολόγησης της απόδοσης των μαθητών σε αυτές τις εργασίες. Τα θέματα που προκύπτουν σε αυτόν τον τομέα είναι:

Ποιες προσεγγίσεις για την εφαρμογή στην τάξη θα επιτρέψουν την πλήρη διερεύνηση και υλοποίηση των μαθηματικών ικανοτήτων;

Ποιες προσεγγίσεις στο σχεδιασμό εργασιών θα αποφέρουν «καλά» διεπιστημονικά προβλήματα;

Πώς πρέπει να αξιολογείται η επίδοση των μαθητών σε τέτοια προβλήματα;

Το πλήθος των μελετών στον τομέα της πολιτικής και ηγεσίας STEM και πώς αυτές επηρεάζουν την εφαρμογή διεπιστημονικών προγραμμάτων STEM στα σχολεία, είναι πολύ λίγες. Αν και τέτοια ζητήματα μπορεί να φαίνονται πολύ μακριά από τις τάξεις και τους δασκάλους, η έρευνα που ενημερώνει την ανάπτυξη πολιτικής και την πρακτική της σχολικής ηγεσίας είναι ζωτικής σημασίας για την υποστήριξη της κλιμάκωσης και της βιωσιμότητας των καινοτόμων προγραμμάτων STEM. Απαιτούνται λοιπόν περισσότερες μελέτες για να απαντηθούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

Πώς μπορεί η εκπαιδευτική έρευνα STEM να διαμορφώσει παραγωγικά την εκπαιδευτική πολιτική STEM;

Τι ρόλο υποτίθεται ότι παίζουν τα μαθηματικά σε αυτό το τοπίο πολιτικής;

Ποιες πρακτικές σχολικής ηγεσίας υποστηρίζουν βιώσιμες προσεγγίσεις για την ολοκληρωμένη εκπαίδευση STEM που προάγουν τη μάθηση των μαθητών και την εκτίμηση των μαθηματικών;

Συμπερασματικά, υπάρχουν τώρα περισσότερες ενδείξεις ότι η μάθηση λαμβάνει χώρα σε διαφορετικά πλαίσια STEM, αλλά όχι ακόμη μια ακριβή ιδέα της «διεπιστημονικής μάθησης STEM». Ελπίζουμε ότι οι εργασίες που θα δημοσιευτούν βασιζόμενες και στα ζητήματα που τέθηκαν παραπάνω να βοηθήσουν ώστε να προωθηθεί ο τομέας αυτός.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Γαγάτσης, Α., Δεληγιάννη, Ε., Ηλία, Ι., Μονογυιού, Α., και Παναούρα, Α. (2008). Προβλήματα μάθησης στα μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο: Κλάσματα-Δεκαδικοί-Γεωμετρία. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών τη Αγωγής.
- Χ. Λεμονίδης, Κ. Νικολαντωνάκης, Ε. Μήτσου, (2011). Η λύση προβλημάτων μοντελοποίησης σε μαθητές Στ' δημοτικού και σε μελλοντικούς δασκάλους: μια μελέτη περίπτωσης. Πρακτικά 28ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Μαθηματική Μοντελοποίηση. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα 11-13 Νοεμβρίου, σελ. 367-385.
- Komineas, S., and Charmandaris, E. (2016). Mathematical Modeling (Undergraduate textbook). Kallipos, Open Academic
- J. B. Ärleböck and L. Albarracín (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of 21st century competencies. ZDM Mathematics Education.
- M. R. Bajuri, S. M. Maat, and L. Halim (2018). Mathematical modeling from metacognitive perspective theory: A review on STEM integration practices.
<https://doi.org/10.4236/ce.2018.914161>
- W. Blum and D. Leiß (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, and S. Khan (eds.), Mathematical Modelling (ICTMA 12: Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood.
- Anderson, A. R., et al. (2006). Agent-based modeling of ductal carcinoma in situ: application to patientspecific breast cancer modeling. IEEE Transactions on Medical Imaging, 25(4), 456-467.
- Gadkar, K., et al. (2014). Patient-specific biomarkers and multi-scale models for drug efficacy prediction in diabetes. Conference Proceedings: Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 2014, 6148-6151.

- Lotka, A. J. (1925). Elements of physical biology. Williams & Wilkins.
- Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. Nature, 118(2972), 558-560.
- W. Blum, P.L. Galbraith, H-W. Henn, and M. Niss (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 th ICMI Study. New York: Springer.
- L. Apostel (1972). Interdisciplinarity: Problems of Teaching and Research in Universities. Paris: Centre for Educational Research and Innovation of the Organization for Economic Cooperation and Development.
- S. Carreira and A.M. Baioa (2015). Assessing the best staircase: Students' modelling based on experimentation with real objects. In: K. Krainer and N. Vondrová (eds.) Proceedings of CERME 9. Prague: ERME.
- S. A. Chamberlin and B. Sriraman (eds). (2019). Affect in Mathematical Modeling. Cham: Springer. ZDM Mathematics Education, 52(1), 59–72.
- J. C. Craig (2017). Real fantasies in mathematics education: Numeracy, quantitative reasoners, and transdisciplinary wicked problems. PhD thesis, Michigan State University, MI, USA.
- Astafieva, M., Bodnenko, D., Lytvyn, O., Proshkin, V., and Zhyltsov, O. (2022). Mathematical modeling as a tool for interdisciplinary training of computer sciences and cybersecurity students. Borys Grinchenko Kyiv University.
- Gürbüz, R., and Çalık, M. (2021). Intertwining mathematical modeling with environmental issues. Problems of Education in the 21st Century, 79(3), 412-424.
<https://doi.org/10.33225/pec/21.79.412>
- Pandey, H., and Padamwar, B. V. (2019). Mathematical modeling in biology and medicine: Challenges and opportunities. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 10(1), 735–740.
- Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33(5), 679-690.
<https://doi.org/10.1080/00207390210146023>
- J. Czocher, G. Stillman, and J. Brown (2018). Verification and validation: What do we mean?

- In: J. Hunter, P., Perger, and L. Darragh (eds.). Proceedings of 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).
- U. D'Ambrosio (1989). Historical and epistemological bases for modelling and implications for the curriculum. In: W. Blum, M. Niss and I. Huntley (eds.), Modelling, Applications, and Applied Problem Solving. Chichester: Ellis Horwood.
- J. M. Diego-Mantecón, E. Haro, T. F. Blanco, and A. Romo-Vázquez (2021). The chimera of the competency-based approach to teaching mathematics: A study of carpentry purchases for home projects. Educational Studies in Mathematics.
- J. M. Diego-Mantecón, T. Prodromou, Z. Lavicza, T. F. Blanco, and Z. Ortiz-Laso (2021). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. ZDM Mathematics Education.
- B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo Ferri, and P. Drake (eds.) (2019). Interdisciplinary Mathematics Education [ICME-13 monograph series]. Springer Open.
- R. Durandt, W. Blum, and A. Lindl (2022). Fostering mathematical modelling competency of first year South African engineering students: Which influence does the teaching design have? Educational Studies in Mathematics.
- L. D. English (2008). Mathematical modelling: Linking mathematics, science and arts in the primary curriculum. In: B. Sriraman, C. Michelsen, A. Beckmann and V. Freiman(eds). Proceedings of the Second International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences (MACAS2) (Centre for Science and Mathematics Education, Vol. 4). Odense, University of Southern Denmark.
- L. D. English (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. International Journal of STEM Education, 3:3.
<https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1>
- L. D. English, J. B., Ärleback, and N. Mousoulides (2016). Reflections on progress in mathematical modelling research. In: Á. Gutiérrez., G. C. Leder, and P. Boero (eds.), The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Rotterdam: Sense.
- P. Frejd and V. Geiger (2017). Exploring the notion of mathematical literacy in curricula documents. In: G. Stillman, G. Kaiser and W. Blum (eds.), Mathematical Modelling and

Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham: Springer.

J. H. Jensen (2018). Mathematical modelling — hiding or guiding? In : C. Michelsen, A.Beckmann, V. Freiman, and U. T. Jankvist (eds.), Mathematics as a Bridge between the Disciplines: Proceedings of MACAS — 2017 Symposium.

M. Newman and D. Gough (2020). Systematic reviews in educational research: Methodology, perspectives and application. In: O. Ritcher- Zawacki., M. Kerres, S.Bedenlier, M. Bond., and K. Buntis (eds.), Systematic Reviews in Educational Research: Methodology, Perspectives and Application. Wiesbaden : Springer.

G. A. Stillman, W. Blum, and M. S. Biembengut (eds.) (2015). Mathematical Modelling in Educational Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences. Cham: Springer.

J. Williams and W. -M. Roth (2019). Theoretical perspectives on interdisciplinary mathematics education. In: B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo Ferri, and P. Drake (eds.), Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 MonographSeries. Springer Open.

I K. Namukasa, S. Carreira, M. Goos (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. ZDM – Mathematics Education (2023) 55:1199–1217 <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z>.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα: Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.