



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ

Κυριάκος Α. Βλαχοκυριάκος

Επιβλέπων: **Ανδρέας Αρβανιτογεώργος**,
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήματος Μαθηματικών Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΑΤΡΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2018

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Επίπεδα Δυναμικά Συστήματα
Ποιοτική Ανάλυση και Μελέτη**

Κυριάκος Α. Βλαχοκυριάκος

ΑΜ: 115700

Επιβλέπων

Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Συνεπιβλέπων

Μιχαήλ Ανούσης

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

© Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2017

Η παρούσα διατριβή, η οποία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της ΘΕ «Διπλωματική Εργασία» του προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά»(ΜΣΜ), και τα λοιπά αποτελέσματα της αντίστοιχης Διπλωματικής Εργασίας (ΔΕ) αποτελούν συνιδιοκτησία του ΕΑΠ και του φοιτητή, ο καθένας από τους οποίους έχει το δικαίωμα ανεξάρτητης χρήσης και αναπαραγωγής τους (στο σύνολο ή τμηματικά) για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, σε κάθε περίπτωση αναφέροντας τον τίτλο και τον συγγραφέα και το ΕΑΠ, όπου εκπονήθηκε η Διπλωματική Εργασία, καθώς και τον επιβλέποντα και την επιτροπή κρίσης.

Περίληψη

Η εργασία αυτή, εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου και πραγματεύεται τα επίπεδα δυναμικά συστήματα, συστήματα διαφορικών εξισώσεων με αναλυτικές πολυωνυμικές συναρτήσεις. Στα κεφάλαια που περιγράφονται παρακάτω, δίνονται βασικές και θεμελιώδεις έννοιες συνήθων διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων αυτών, δίνοντας έμφαση σε τοπολογικές συμπεριφορές, χωρίς εύρεση της αναλυτικής λύσης. Διατυπώνονται τα θεωρήματα ύπαρξης, μοναδικότητας και εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες όπως και μελετάται η γραφική απεικόνιση τέτοιων συστημάτων που ονομάζεται πορτραίτο φάσεων.

Μελετώνται θεμελιώδεις ιδιομορφίες διαφορικών συστημάτων, γραφοντάς τα με την ισοδύναμη μορφή του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου, τα υπερβολικά και τα ημι-υπερβολικά σημεία ιδιομορφίας. Τα πρώτα είναι σημεία με δυο ιδιοτιμές χωρίς μηδενικό πραγματικό μέρος και τα δεύτερα έχουν μοναδική μη μηδενική ιδιοτιμή. Επίσης, δίνονται οι κανονικές μορφές για τέτοιου είδους ιδιομορφίες.

Δίνουμε το βασικό εργαλείο για τη μελέτη μη θεμελιωδών ιδιομορφιών για τα επίπεδα δυναμικά συστήματα, το οποίο βασίζεται σε αλλαγή μεταβλητών, που καλούνται Blow-Ups. Χρησιμοποιείται αυτή η τεχνική για μηδενοδύναμες ιδιομορφίες, δηλαδή για ιδιομορφίες με μηδενικές και τις δύο ιδιοτιμές, χωρίς το γραμμικό μέρος τους να είναι ταυτοτικά μηδέν. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την διάκριση μεταξύ κέντρων και εστιών, ένα πρόβλημα που γενικά είναι αδύνατο να λυθεί, εκτός της περίπτωσης που το σημείο ιδιομορφίας είναι γραμμικό κέντρο.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων, Επίπεδα Δυναμικά συστήματα

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων, Επίπεδα Δυναμικά συστήματα, Θεμελιώδεις Ιδιομορφίες, Κανονική Μορφή, Πορτραίτο Φάσεων.

Abstract

This thesis was carried out within the framework of the postgraduate program of the Hellenic Open University and it deals with planar dynamical systems, systems of differential equations with analytic polynomials. In the following chapters, fundamental notions of differential equations and systems of differential equations are given, emphasising in topological behaviours, without finding analytical expression for their solution. We recall the theorem of existence, uniqueness and continuous dependence on initial conditions, as well as the graphical representation of the systems, called phase portrait. Elementary singular points of differential systems are being studied, writing them in the equivalent form of their corresponding vector field, i.e. the hyperbolic and semi hyperbolic elementary singularities. The first are those having two eigenvalues with non zero real part, whereas the second, have a unique non zero eigenvalue. Also, normal forms of these singularities are being given.

We present the basic tool for studying non elementary singularities for planar dynamical systems, which is based on changes of variables called Blow-Ups. This technique is being used for nilpotent singularities, namely singularities having both eigenvalues zero but their linear part not identically zero. Subsequently, an algorithm for discrimination between focuses and centers is given, a problem which generally is impossible to solve, except for the case of a singular point being a linear center.

SUBJECT AREA: Systems of Differential Equations, Planar Dynamical Systems

KEYWORDS: Systems of Differential Equations, Planar Dynamical Systems, Elementary Singularities, Normal Form, Phase Portrait.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ολόψυχα την οικογένειά μου που με στήριξε και με παρότρυνε για το καλύτερο.

Δεν δύναμαι να μην ευχαριστήσω και τον επιβλέποντα καθηγητή μου για τη βοήθεια που μου προσέφερε τόσο προπτυχιακά όσο και μεταπτυχιακά και για το ότι με δίδαξε ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της διαχρονικής και βαθιάς γνώσης.

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	19
	Πρόλογος	19
2		23
	Ιστορικά Στοιχεία Περί Δυναμικών Συστημάτων	23
3		25
	Εισαγωγικές Έννοιες Διαφορικών Εξισώσεων	25
	3.1 Διανυσματικά Πεδία	25
	3.2 Πορτραίτο Φάσεων Διανυσματικού Πεδίου	27
	3.3 Τοπολογική Ισοδυναμία	30
	3.4 Οριακά Σύνολα Τροχιών	30
	3.5 Κρίσιμα Σημεία	32
	3.6 Περιοδικές Τροχιές	34
	3.7 Το Θεώρημα Poincaré-Bendixson	34
	3.8 Η Απεικόνιση Lyapunov	37
4	Στοιχειώδεις Ιδιομορφίες	41
	4.1 Το Θεώρημα Κανονικών Μορφών	41
	4.2 Ελκτικά και Απωστικά Ανώμαλα Σημεία	43
	4.3 Σάγματα σε Υπερβολικές Ιδιομορφίες	44
	4.4 Ημι-Υπερβολικές Ιδιομορφίες	47
	4.5 Σύνοψη για τα σημεία ιδιομορφίας	49

5	Αποσαφήνιση Μη Στοιχειωδών Ιδιομορφιών	51
5.1	Ομογενές Blow-Up	51
5.2	Ανισότητα Lojasiewicz	55
5.3	Μηδενοδύναμες Ιδιομορφίες	56
6	Κέντρα και Σταθερές Lyapunov	59
6.1	Κέντρα στις Διαφορικές Εξισώσεις	59
6.2	Κανονική Μορφή για Γραμμικό Κέντρο	59
6.3	Σταθερές Lyapunov	66
	Ορολογία	69
	Βιβλιογραφία	71

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

Σκοπός της εργασίας, είναι η μελέτη συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή συστημάτων δυο πραγματικών μεταβλητών, της μορφής,

$$\dot{x} = P(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x, y)$$

όπου P, Q, C^r συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , U , με $r = 1, 2, \dots, \infty, \omega$. Ως συνήθως, με C^r συμβολίζουμε τις αναλυτικές συναρτήσεις. Ιδιαίτερη έμφαση, δίνεται σε πολυωνμικά συστήματα, δηλαδή συστήματα της παραπάνω μορφής με P, Q πολυώνυμα.

Αντί να μιλάμε για διαφορικές εξισώσεις ή συστήματα διαφορικών εξισώσεων, συνήθως κάνουμε μνεία για το αντίστοιχο *διανυσματικό πεδίο*,

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

στο $U \subset \mathbb{R}^2$. Αυτό μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τέτοια συστήματα χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στις συντεταγμένες, κάτι το οποίο συνηθίζεται σε τέτοιες θεωρίες δυναμικών συστημάτων. Ένας άλλος τρόπος συμβολισμού του διανυσματικού πεδίου είναι $X = (P, Q)$, χωρίς να υπάρχει διαφορά μεταξύ των δυο τρόπων γραφής.

Όλα τα συμπεράσματα και οι ορισμοί που δίνονται για τα δισδιάστατα συστήματα,

μπορούν εύκολα να γενικευθούν και σε συστήματα μεγαλύτερων διαστάσεων. Σκοπός όμως είναι η κατανόηση και η μελέτη αυτών σε δύο διαστάσεις. Επίσης, εκτός ειδικών περιπτώσεων, δεν γίνεται αναφορά σε θεωρία διακλαδώσεων, δίνοντας έτσι βάση στη μελέτη των αρχικών συστημάτων.

Πρωταρχικός σκοπός, δεν είναι η αναζήτηση κάποιας αναλυτικής έκφρασης των λύσεων του συστήματος, μιας και στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό είναι αδύνατο. Ακόμα και στις περιπτώσεις που μπορεί εν γένει να βρεθεί αναλυτική έκφραση λύσης για τέτοια συστήματα, δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο τι μπορεί αυτή να αντιπροσωπεύει. Επικεντρωνόμαστε στη γραφική αναπαράσταση και αριθμητική ανάλυση τέτοιων συστημάτων, μέσω του πορτραίτου φάσεων αυτών στο U , που, στη προκειμένη περίπτωση είναι το σύνολο όλων των τροχιών του αρχικού συστήματος.

Στη γενική ιδέα της ποιοτικής ανάλυσης των συστημάτων αυτών, μια ξεκάθαρη εικόνα για τη συμπεριφορά και τη κατανόηση τέτοιων συστημάτων, είναι η σχεδίαση πορτραίτου φάσεων. Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά τα περιεχόμενα για κάθε ένα από τα κεφάλαια της εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται συνοπτικά μια ιστορική αναδρομή των δυναμικών συστημάτων, ξεκινώντας από την εποχή του Νεύτωνα μέχρι σήμερα, δίνοντας παράλληλα παραδείγματα μελετών που, είτε έβαλαν τα πρώτα θεμέλια στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, είτε επέκτειναν τη θεωρία των προυπάρχουσων μελετών για αυτά.

Βασικοί ορισμοί και έννοιες των διαφορικών εξισώσεων, καθώς και η ποιοτική θεωρία αυτών, δίνονται στο Κεφάλαιο 3. Διατυπώνονται θεωρήματα ύπαρξης, μοναδικότητας και συνέχειας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων ως προς τις αρχικές συνθήκες και εισάγονται οι έννοιες των οριακών συνόλων των τροχιών, των α και ω οριακών συνόλων. Ακολούθως, διατυπώνεται το θεώρημα Poincaré-Bendixson για τον χαρακτηρισμό των οριακών αυτών συνόλων και χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις Lyapunov για τη μελέτη της ευστάθειας και της ασυμπτωτικής ευστάθειας συστημάτων. Αναλύουμε τις τοπικές συμπεριφορές των τροχιών κοντά σε σημεία ιδιομορφίας και τις περιοδικές τροχιές.

Στα επόμενα κεφάλαια, μας απασχολεί περισσότερο η μελέτη των σημείων ιδιομορφίας. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε στοιχειώδη σημεία ισορροπίας, υπερβολικά και ημι-υπερβολικά και δίνουμε τις κανονικές μορφές για τέτοιες ιδιομορφίες δίνοντας τις απαραίτητες αποδείξεις, πάντα για συστήματα δύο διαστάσεων. Στο κεφάλαιο 5, δίνεται το βασικό εργαλείο για τη μελέτη των ιδιομορφιών των συστημάτων στο επίπεδο, που ονομάσαμε Blow-Ups.

Ένα σοβαρό ερώτημα, που αφορά την διάκριση μεταξύ κέντρων και εστιών, μελετάται στο Κεφάλαιο 6. Γενικά το ερώτημα αυτό είναι αδύνατο να απαντηθεί, ωστόσο, υπάρχουν αλγόριθμοι επίλυσης στη περίπτωση που το σημείο ιδιομορφίας είναι γραμμικό κέντρο.

Τέλος, ειδική μνεία γίνεται και στη βιβλιογραφία που μπορεί κάποιος να ανατρέξει για περισσότερη και πιο ενδελεχή έρευνα, όπου και βασίστηκε η εργασία αυτή. Βασικό βιβλίο μελέτης επίπεδων δυναμικών συστημάτων και ποιοτικής ανάλυσης αυτών, είναι το "Qualitative Theory of Planar Dynamical Differential Systems" (Dumortier, Llibre, Artés). Η αναλυτικότητα και ο κατανοητός τρόπος γραφής βοήθησαν κατα πολύ στην μελέτη των συστημάτων καθώς και στη συγγραφή της εργασίας. Σημαντική ήταν επίσης και η συμβολή των βιβλίων "Μή Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις" (Μπούντης Α.) και "Dynamical Systems: An Introduction" (Barreira, Valls). Περισσότερες βιβλιογραφικές αναφορές και παραπομπές, δίνονται στο τέλος της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Ιστορικά Στοιχεία Περί Δυναμικών Συστημάτων

Ήταν το 1666 όταν ο Νεύτωνας σε ηλικία 24 ετών, ανακάλυψε, μεταξύ άλλων, τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, με την έννοια που τις γνωρίζουμε σήμερα. Για πρώτη φορά στην ιστορία της ανθρωπότητας, εξηγεί τις πλανητικές τροχιές, εξελίσσοντας την θεωρία του Κέπλερ περί ελλειπτικών πλανητικών τροχιών, συνδυάζοντας το νόμο της παγκόσμιας έλξης με τον διαφορικό λογισμό. Μέχρι τότε είχε μελετήσει πλήρως αυτό που ονομάζουμε πρόβλημα 2 σωμάτων, χωρίς όμως να μπορεί να επεκτείνει την έρευνά του σε παραπάνω από δύο σώματα. Με το ίδιο πρόβλημα καταπιάστηκαν μεγάλοι μαθηματικοί όπως οι Euler και Gauss, χωρίς όμως σημαντικά αποτελέσματα. Ο Poincaré, στα τέλη του 1800, διαπίστωσε ότι στη πραγματικότητα, δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτική έκφραση λύσης στο πρόβλημα των τριών και πάνω σωμάτων, προσεγγίζοντας το πρόβλημα γεωμετρικά, χρησιμοποιώντας τον χώρο φάσεων. Διαπίστωσε αυτό που ονομάζεται «χάος», ένα φαινόμενο που εμφανίζεται σε ντετερμινιστικά συστήματα, δηλαδή μη στοχαστικά συστήματα στα οποία η τωρινή κατάσταση καθορίζει την μελλοντική κατάσταση. Σε τέτοια συστήματα εμφανίζεται απεριοδική συμπεριφορά, συμπεριφορά η οποία δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί ποιοτικά και την οποία επιδεικνύουν συστήματα ευαίσθητα εξαρτώμενα από τις αρχικές συνθήκες. Αμελητέα, φαινομενικά, αλλαγή στις αρχικές συνθήκες του συστήματος, κάνει τις λύσεις του να αποκλίνουν εκθετικά, ακόμη και αν η συμπεριφορά του συστήματος στην αρχή δεν επιδείκνυε τέτοιου είδους απόκλιση. Τα χρόνια μεταξύ 1920 και 1950 ήταν η εποχή των εφαρμογών των μη γραμμικών ταλαντωτών στη Φυσική και τη Μηχανική, όπως τα ηλεκτρονικά ραδιόφωνα σωλήνων κενού, πρόδρομων των ημιαγωγών, ραντάρ και lasers. Σχεδόν ταυτόχρονα, το 1950, η έλευση των υπολογιστών όπως τους γνωρίζουμε σήμερα, έδωσε στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων ένα εργαλείο για την απεικόνιση των τροχιών όπου και χρησιμοποιήθηκαν από τον μαθηματικό και μετεωρολόγο Edward Lorenz, σε ένα

χαοτικό μοντέλο δυναμικής της ατμόσφαιρας. Απο το 1975 μέχρι το 1980, πολλοί επιστήμονες μελέτησαν συστήματα τέτοιου είδους, όπως ο πληθυσμιακός βιολόγος Robert May, ο οποίος παρατήρησε χαοτική συμπεριφορά σε απεικονίσεις της μορφής $x_{n+1} = f(x_n)$ και μελέτησε το λογιστικό μοντέλο πληθυσμού, ο Γαλλοαμερικανός μαθηματικός Benoit Mandelbrot, ο οποίος είναι προάγγελος των φράκταλς άμεσα συσχετιζόμενα με το χάος και ο φυσικός Mitchell Feigenbaum, ο οποίος μελέτησε και διαπίστωσε μια καθολική διαδρομή στο χάος, κάτι το οποίο σημαίνει ότι όλα τα συστήματα ποιοτικά έχουν την ίδια τροχιά προς το χάος, ανεξαρτήτως φυσικών, χημικών ή μηχανικών συστημάτων και έβαλε τα μαθηματικά θεμέλια για αυτή τη διαπίστωση. Η μελέτη των μαθηματικών Ruelle και Takens τρία χρόνια πιο πρίν, περίπου το 1975, ήταν το έναυσμα για τέτοιου είδους έρευνες. Οι δύο τους, συσχέτισαν το χάος στα δυναμικά συστήματα με τον στροβιλισμό στις εξισώσεις Navier-Stokes. Στα χρόνια που ακολούθησαν, τα δυναμικά συστήματα έγιναν αναπόσπαστο κομμάτι μελετης και έρευνας γύρω απο τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Απο το 1990 μέχρι και σήμερα, δυναμικά συστήματα χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές, όπως στις τροχιές των δορυφόρων και στη θεωρία δικτύων, δίνοντας αφορμή για νέες μελέτες και έρευνες.

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγικές Έννοιες Διαφορικών Εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρονται τα βασικά στοιχεία μελέτης διαφορικών εξισώσεων στο επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, στις πρώτες παραγράφους συζητάμε έννοιες όπως το πορτραίτο φάσεων, τοπολογικές ισοδυναμίες και τροχιές διαφορικών εξισώσεων και ακολουθεί μελέτη πορτραίτων φάσεων στα κρίσιμα σημεία και τέλος το θεώρημα Poincaré-Bendixson.

3.1 Διανυσματικά Πεδία

Έστω Δ ένα ανοικτό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου. Ένα διανυσματικό πεδίο κλάσης C^r στο σύνολο Δ , είναι μια απεικόνιση $X : \Delta \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου r ένας θετικός ακέραιος και C^r μια αναλυτική συνάρτηση. Η γραφική αναπαράσταση ενός διανυσματικού πεδίου στο επίπεδο, αποτελείται από διανύσματα της μορφής $(x, X(x))$, όπου ο συμβολισμός $X(x)$ υποδηλώνει ένα ελεύθερο διάνυσμα στο σημείο x . Η ολοκλήρωση ενός διανυσματικού πεδίου, επαφίεται στην εύρεση καμπυλών της μορφής $X(t)$, όπου t ανήκει σε κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας, οι οποίες είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x} = X(x), x \in \Delta$$

Σε πολλές διαφορικές εξισώσεις η μεταβλητή t υποδηλώνει το χρόνο, δηλαδή την ανεξάρτητη μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης, ενώ η x ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή. Όταν η εξίσωση δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή t , τότε ονομάζεται αυτόνομη διαφορική εξίσωση. Οι λύσεις μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης, είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις $f : A \rightarrow \Delta$, όπου A είναι το διάστημα ορισμού της

λύσης, τέτοια ώστε

$$\frac{df(t)}{dt} = X(f(t))$$

για κάθε t που ανήκει στο A .

Ένας άλλος συμβολισμός του διανυσματικού πεδίου X είναι με τη χρήση ενός διαφορικού τελεστή

$$X = X_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

όπου αν εφαρμοστεί σε μια συνάρτηση g κλάσης τουλάχιστον C^1 θα δώσει

$$Xg = X_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

Ένα σημείο $x \in \Delta$ τέτοιο ώστε $X(x) = 0$ ονομάζεται κρίσιμο σημείο του . Παρόμοια, ένα σημείο $x \in \Delta$ τέτοιο ώστε $X(x) \neq 0$, ονομάζεται κανονικό σημείο του . Αν x είναι κρίσιμο σημείο του , τότε

$$0 = f'(t) = X(f(t)) = X(x)$$

δηλαδή η $f(t) = x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = X(x)$, $x \in \Delta$. Αν η f είναι μια λύση μιας διαφορικής εξίσωσης σε ένα διάστημα , τότε μια άλλη συνάρτηση, έστω g , ονομάζεται επέκταση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης, αν η ίδια η g είναι λύση της οριζόμενη σε ένα υποδιάστημα του , και ο περιορισμός της g στο , είναι ίση με την f . Μια λύση ονομάζεται *μεγιστική λύση*, αν δεν υπάρχει μια τέτοια επέκταση. Σε αυτή τη περίπτωση, το σύνολο ονομάζεται *μεγιστικό διάστημα* και συμβολίζεται με A_{x_0} . Αν $f : A_{x_0} \rightarrow \Delta$ είναι maximal λύση, τότε η εικόνα αυτής

$$\gamma_f = \{f(t) : t \in A_{x_0}\} \subset \Delta$$

εφοδιασμένη με τον προσανατολισμό που επάγεται από την f , καλείται *τροχιά* ή *μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη της μεγιστικής λύσης f* . Φυσικά, το εφαπτόμενο διάνυσμα $f'(t)$ στο $f(t)$ συμπίπτει με τη τιμή του διανυσματικού πεδίου X στο σημείο $f(t)$.

Θεώρημα 1. Έστω X διανυσματικό πεδίο κλάσης C^r , $1 \leq r \leq +\infty$. Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

I. Για κάθε x στο Δ υπάρχει ανοικτό διάστημα A_x , στο οποίο ορίζεται μια μεγιστική λύση f_x η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $f_x(0) = x$. (Υπαρξη και μοναδικότητα μεγιστικών λύσεων)

II. Αν $y = f_x(t)$, $t \in A_x$ τότε $A_y = A_x - t = \{r - t : t \in A_x\}$ και $f_y(s) = f_x(t + s)$, $\forall s \in A_y$. (Ιδιότητες ροής)

III. Αν $\Omega = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in A_x\}$, τότε το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 και η απεικόνιση κλάσης C^r , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο $f(t, x) = f_x(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$D_1 D_2 f(t, x) = DX(f(t, x)) D_2 f(t, x)$$

για κάθε $(t, x) \in \Omega$. Ο τελεστής D_1 συμβολίζει τη μερική παράγωγο ως προς το t , ο τελεστής D_2 τη μερική παράγωγο ως προς x και DX ο Ιακωβιανός πίνακας, που ονομάζεται γραμμικό μέρος του διανυσματικού πεδίου. (Συνέχεια ως προς τις αρχικές συνθήκες)

Η απεικόνιση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, καλείται ροή παραγόμενη από το διανυσματικό πεδίο X .

Πρόταση 1. Έστω $f_x(t)$ μια λύση του σε ένα μεγιστικό διάστημα A_x . Αν $f_x(t_1) = f_x(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in A_x$, τότε $A_x = \mathbb{R}$ και $f_x(t+c) = f_x(t)$, για κάθε t στο \mathbb{R} και $c = t_2 - t_1$. Επομένως η f_x είναι μια περιοδική λύση με περίοδο c .

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : [t_2, t_2+c] \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $g(t) = f_x(t-c)$. Τότε,

$$g'(t) = f'_x(t-c) = X(f_x(t-c)) = X(g(t))$$

και

$$g(t_2) = f_x(t_1) = f_x(t_2)$$

Λόγω της μοναδικότητας των λύσεων, έχουμε $[t_2, t_2+c] \subseteq A$ και $f_x(t) = f_x(t+c)$, αν $t \in [t_2, t_2+c]$. Ακολουθώντας την ίδια λογική, συμπεραίνουμε ότι $A = \mathbb{R}$ και $f_x(t+c) = f_x(t)$, για κάθε t στο \mathbb{R} .

3.2 Πορτραίτο Φάσεων Διανυσματικού Πεδίου

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, η τροχιά γ_p ενός διανυσματικού πεδίου μέσω του σημείου p είναι η εικόνα της μεγιστικής λύσης f_p , εφοδιασμένη με το προσανατολισμό που επάγεται από την f , αν η λύση αυτή είναι κανονική. Δυο διαφορετικές τροχιές του είτε θα συμπίπτουν είτε θα αποκλίνουν, αφού για κάθε $q \in \gamma_q$ τότε $q = f(t_1, p)$, $f(t, q) = f(t+t_1, p)$ και $A_p - t_1 = A_q$ για κάποιο t_1 στο A_p .

Θεώρημα 2. Αν f είναι μεγιστική λύση ενός διαφορικού συστήματος και A το πεδίο ορισμού της, τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

I. Η απεικόνιση f είναι αμφιμορφισμός.

II. $A = \mathbb{R}$, f σταθερή απεικόνιση και γ_f σημείο.

III. $A = \mathbb{R}$, η f περιοδική απεικόνιση περιόδου T , με $T > 0$ τέτοιο ώστε $f(t+T) = f(t)$, για κάθε t στο \mathbb{R} και $f(t_1) \neq f(t_2)$ αν $|t_1 - t_2| < T$.

Έστω P και Q πολώνυμα συντελεστών x, y βαθμού m και n αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα Bezout, δυο καμπύλες $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ τέμνονται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, αν τα πολώνυμα P και Q δεν έχουν κοινό παράγοντα στον δακτύλιο των πολωνύμων. Σε αυτή τη περίπτωση, οι δυο καμπύλες έχουν το πολύ mn σημεία τομής. Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$$

όπου P και Q πολώνυμα πραγματικών συντελεστών x, y ονομάζεται πολωνυμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων τάξης m , αν m είναι ο μέγιστος βαθμός των δύο παραπάνω πολωνύμων. Από το θεώρημα Bezout, προκύπτει ότι ένα τέτοιο πολωνυμικό σύστημα βαθμού m , θα έχει άπειρα κανονικά σημεία ή το πολύ m^2 . Το πορτραίτο φάσεων ενός διανυσματικού πεδίου, είναι το σύνολο των προσανατολισμένων τροχιών του. Απεικονίζονται σχεδιάζοντας προσανατολισμένες τροχιές οι οποίες συνήθως απεικονίζονται με βέλη.

Παράδειγμα 1

Έστω το διανυσματικό πεδίο $X = (P, Q)$ στο \mathbb{R}^2 , με $P(x, y) = P(x)$ και $Q(x, y) = -y$. Ας υποθέσουμε ότι το πολώνυμο $P(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων που το μηδενίζουν, έστω $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < +\infty$.

Παρατηρούμε ότι οι κατακόρυφες ευθείες $y = 0, y = x_1, y = x_2, \dots, y = x_n$ παραμένουν αμετάβλητες στο διανυσματικό πεδίο, επομένως το πολώνυμο $P(x)$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα. Επιλέγουμε ένα διάστημα από αυτά, στο οποίο το $P(x)$ είναι θετικό. Τότε αν για κάποιο $x \in (x_i, x_{i+1})$ η $f(t, x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x} = P(x)$, τότε θα έχει θετική παράγωγο σε ολόκληρο το μεγιστικό διάστημα της $A_x = (w_-(x), w_+(x))$. Επομένως:

- Καθώς $t \rightarrow w_-(x)$, η απεικόνιση $f(t, x \rightarrow x_i)$ και αν $t \rightarrow w_+(x)$ τότε $f(t, x) \rightarrow x_{i+1}$. Αυτό είναι λογικό, μιας και αν η $f(t, x)$ συνέκλινε σε κάποιο άλλο σημείο, οι δύο τροχιές θα τέμνονταν, αφού η f έχει θετική παράγωγο.
- Για κάθε $i \geq 1$, ισχύει ότι $w_-(x) = -\infty$, αφού για κάθε $t \in A_x$, έχουμε ότι $f(t, x) > x_1 > -\infty \Rightarrow w_-(x) = -\infty$.
- Αν $i > n$, όμοια με προηγουμένως $w_+(x) = +\infty$.

Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε αν επιλέξουμε ένα διάστημα στο οποίο το πολώνυμο $P(x)$ είναι αρνητικό.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε τα γραμμικά επίπεδα συστήματα της μορφής $\dot{x} = Ax$, όπου A είναι ένας 2×2 πίνακας με $Det(A) \neq 0$. Το σύστημα γράφεται στην ισοδύναμη μορφή,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x, y) = \frac{dx}{dt} \\ \dot{y}(t) &= G(x, y) = \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

Τα σημεία ισορροπίας πληρούν τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = 0 &\Rightarrow F(x, y) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 &\Rightarrow G(x, y) = 0\end{aligned}$$

Για να καθορίσουμε την ευστάθεια- αστάθεια του εκάστοτε σημείου ισορροπίας έστω \hat{x}, \hat{y} , αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός γειτονικού σημείου, επομένως εισάγουμε μικρές μεταβολές ως προς x, y :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x} + \Delta x \\ \hat{y} + \Delta y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F(\hat{x} + \Delta x, \hat{y} + \Delta y) \\ G(\hat{x} + \Delta x, \hat{y} + \Delta y) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\hat{x}, \hat{y}) \\ G(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\hat{x}, \hat{y})} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \dots \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\hat{x}, \hat{y})} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \dots\end{aligned}$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A :

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda)(\frac{\partial G}{\partial y} - \lambda) - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)}_{Tr(A)} + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right)}_{Det(A)} =$$

$$0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ Tr(A) \pm \sqrt{(Tr(A))^2 - 4 \cdot Det(A)} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, χαρακτηρίζουμε τα σημεία ισορροπίας ως ακολούθως:

- Αν $DetA < 0$ έχουμε σάγμα.
- Αν $DetA > 0$ και $TrA = 0$ έχουμε κέντρο.
- Αν $DetA > 0$ και $(TrA)^2 - 4DetA < 0$ έχουμε εστία.
- Αν $DetA > 0$ και $(TrA)^2 - 4DetA > 0$ έχουμε κόμβο.

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A , δίνονται απο τον τύπο

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} A \pm \sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \text{Det} A} \right\}$$

με αντίστοιχους ιδιοχώρους E_1, E_2 αντίστοιχα. Στη περίπτωση σάγματος, οι τροχιές του συστήματος που αντιστοιχούν στις τροχιές των E_1, E_2 ονομάζονται διαχωρίζουσες του συστήματος.

3.3 Τοπολογική Ισοδυναμία

Έστω διανυσματικά πεδία οριζόμενα στα ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 , Δ_1 και Δ_2 . Λέμε ότι το X_1 είναι *τοπολογικά ισοδύναμο* με το X_2 αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ που στέλνει τροχιές του Δ_1 στο Δ_2 , διατηρώντας το προσανατολισμό. Αυτή η απεικόνιση, ονομάζεται *τοπολογική ισοδυναμία* μεταξύ των X_1, X_2 .

Στη περίπτωση που αντί για διανυσματικά πεδία είχαμε ροές που αντιστοιχούν σε κάποια διανυσματικά πεδία X_1, X_2 , τότε ανάλογη απεικόνιση υπάρχει και ονομάζεται *τοπολογική συζυγία*.

Μια τοπολογική ισοδυναμία, στέλνει κρίσιμα σημεία σε κρίσιμα σημεία και περιοδικές τροχιές σε περιοδικές τροχιές. Στη περίπτωση συζυγίας, διατηρείται και η περίοδος των περιοδικών τροχιών.

Παράδειγμα 1

Το σύστημα

$$\dot{x} = x^2$$

$$\dot{y} = y$$

έχει σημείο ισορροπίας το $(0, 0)$ και απο το πίνακα $X'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ στο σημείο

$$(0, 0) \text{ γίνεται } X'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα του πίνακα A είναι ίση με το μηδέν, συνεπώς τα συστήματα $x' = X(x)$ και $y' = Ay$ δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμα και άρα τα πορτραίτα φάσεων τους είναι διαφορετικά.

3.4 Οριακά Σύνολα Τροχιών

Έστω Δ ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ ένα διανυσματικό πεδίο κλάσης C^r . Έστω επίσης $f(t) = f(t, p) = f_p(t)$ η ολοκληρωτική καμπύλη αυ-

τού, η οποία διέρχεται από το σημείο p και ορίζεται στο μεγιστικό διάστημα $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Αν $\omega_+(p) = \infty$, ορίζουμε το σύνολο

$$\omega(p) = \left\{ q \in \Delta : \text{υπάρχει ακολουθία } \{t_n\} \text{ με } t_n \rightarrow \infty \text{ και } f(t_n) \rightarrow q \text{ όταν } n \rightarrow \infty \right\}$$

και παρόμοια, αν $\omega_-(p) = -\infty$ ορίζουμε

$$\alpha(p) = \left\{ q \in \Delta : \text{υπάρχει } \{t_n\} \text{ με } t_n \rightarrow -\infty \text{ και } f(t_n) \rightarrow q \text{ όταν } n \rightarrow \infty \right\}$$

ονομάζονται ω -όριο και α -όριο του p αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1

Έστω $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ διανυσματικό πεδίο με $X(x, y) = (x, -y)$. Θεωρούμε το σημείο $p = (0, 0)$. Τότε τα οριακά σύνολα είναι $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$.

Αν $p \in \{(x, 0) : x \neq 0\}$, τότε $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$ και $\omega(p) = \emptyset$

Αν $p \in \{(0, y) : y \neq 0\}$, τότε $\omega(p) = \{(0, 0)\}$ και $\alpha(p) = \emptyset$

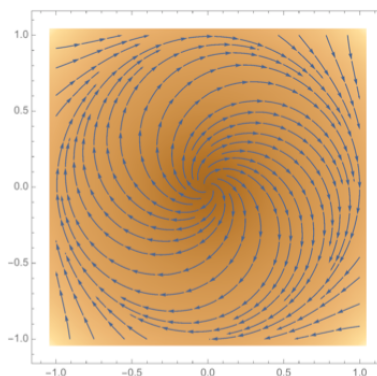
Αν $p \in \{(x, y) : xy \neq 0\}$, τότε $\alpha(p) = \omega(p) = \emptyset$

Παράδειγμα 2

Έστω $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ διανυσματικό πεδίο με

$$X(x, y) = (y + x - x^3 - xy^2, -x + y - yx^2 - y^3)$$

με πορτραίτο φάσεων που απεικονίζεται παρακάτω.



Είναι εμφανές ότι η μοναδική περιοδική τροχιά είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Έχουμε,

- $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$, αν $p \in \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\alpha(p) = \emptyset$, αν $p \in \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$

- $\alpha(p) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, αν $p \in \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

3.5 Κρίσιμα Σημεία

Έστω p ένα κρίσιμο σημείο ενός διανυσματικού πεδίου στο επίπεδο, της μορφής $X = (P, Q)$. Η ποσότητα

$$DX(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται γραμμικό μέρος του διανυσματικού πεδίου στο κρίσιμο σημείο p . Σύμφωνα με το πίνακα αυτό:

Ένα κρίσιμο σημείο p ονομάζεται *μη εκφυλισμένο*, αν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή αυτού του πίνακα.

Ένα κρίσιμο σημείο p ονομάζεται *υπερβολικό*, αν οι δυο ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα έχουν πραγματικά μέρη διάφορα του μηδενός.

Ένα κρίσιμο σημείο p ονομάζεται *ημι-υπερβολικό* αν ακριβώς μια ιδιοτιμή του πίνακα ισούται με το μηδέν.

Ένα κρίσιμο σημείο p ονομάζεται *μηδενοδύναμο*, αν και οι δυο ιδιοτιμές του $DX(p)$ είναι μηδέν, αλλά $DX(p) \neq 0$. Στη περίπτωση που $DX(p) \equiv 0$, το σημείο p ονομάζεται *γραμμικά μηδενοδύναμο*.

Ένα κρίσιμο σημείο p , ονομάζεται *κέντρο* αν υπάρχει ανοικτή περιοχή-γειτονιά που να αποτελείται από περιοδικές τροχιές. *Γραμμικό κέντρο* λέγεται όταν οι ιδιοτιμές του πίνακα $DX(p)$ είναι φανταστικές, χωρίς ταυτόχρονα να μηδενίζονται. Σε αυτή τη περίπτωση, το διανυσματικό πεδίο, παρουσιάζει είτε κέντρο είτε εστία στο p .

Οι περιπτώσεις των υπερβολικών και ημι-υπερβολικών κρίσιμων σημείων, συχνά ονομάζονται *θεμελιώδεις*.

Για να καταφέρουμε να μελετήσουμε τοπικά ένα πορτραίτο φάσεων σε ένα σημείο p , βρίσκουμε την ορίζουσα

$$\det(p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{vmatrix}$$

το άθροισμα της κύριας διαγωνίου

$$\text{tr}(p) = \frac{\partial P}{\partial x}(p) + \frac{\partial Q}{\partial y}(p)$$

και τη διακρίνουσα

$$\Delta(p) = \text{tr}^2(p) - 4\det(p)$$

και εξετάζουμε τα παρακάτω:

- Αν $\det(p) \neq 0$, τότε το σημείο είναι μη εκφυλισμένο και είναι είτε υπερβολικό είτε γραμμικό κέντρο.
- Αν $\det(p) = 0$ και $\text{tr}(p) \neq 0$, τότε είναι ημι-υπερβολικό.
- Αν $\det(p) = 0$ και $\text{tr}(p) = 0$, τότε είναι είτε γραμμικά μηδέν, είτε μηδενοδύναμο. Αυτό εξαρτάται από το αν ο πίνακας $DX(p)$ είναι μηδέν ή όχι.

Είναι εμφανές ότι με αλλαγή στις συντεταγμένες ενός συστήματος, μπορούμε πάντα να μεταφέρουμε ένα κρίσιμο σημείο στην αρχή των αξόνων. Αυτό γίνεται εύκολα, αφού αν $p = (x_0, y_0)$ είναι ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος

$$\dot{x} = P(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x, y)$$

τότε το σημείο $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο του συστήματος

$$\dot{x} = P(x - x_0, y - y_0)$$

$$\dot{y} = Q(x - x_0, y - y_0)$$

Το τελικό σύστημα, παίρνει τη μορφή

$$\dot{x} = ax + by + F(x, y)$$

$$\dot{y} = cx + dy + G(x, y)$$

όπου η παράγωγος των $F(x, y), G(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$ μηδενίζεται.

Επομένως με αλλαγή συντεταγμένων, ο πίνακας $D(0, 0)$ είναι ο $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

και μπορεί να γραφεί στη κανονική μορφή Jordan.

Αν το σημείο είναι υπερβολικό, τότε η κανονική μορφή Jordan του πίνακα είναι $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0, a \neq 0$ και $b > 0$.

Αν είναι ημι-υπερβολικό ή γραμμικό κέντρο, θα είναι αντίστοιχα, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

και $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ με $\lambda \neq 0$ και $b > 0$.

Τέλος, στη περίπτωση μηδενοδύναμου σημείου ή γραμμικά μηδενοδύναμου έχουμε $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

Κάνοντας επιπλέον αλλαγή στη μονάδα του χρόνου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην περίπτωση των υπερβολικών σημείων, κάποιο από τα λ_1, λ_2 ισούται με ± 1 με $a = \pm 1$ ή $b = 1$ και στις περιπτώσεις ημι-υπερβολικού σημείου και γραμμικού κέντρου, $\lambda = \pm 1$ και $b = 1$ αντίστοιχα. Αυτό επιτυγχάνεται, θέτοντας μια καινούρια μονάδα χρόνου έστω \bar{t} , για την οποία ισχύει $\bar{t} = \gamma \cdot t, t > 0$.

3.6 Περιοδικές Τροχιές

Έστω $\gamma = \{f_p(t) : t \in \mathbb{R}\}$ μια περιοδική τροχιά περιόδου T , ενός διανυσματικού πεδίου. Η περιοδική τροχιά γ καλείται *οριακός κύκλος* αν υπάρχει περιοχή V της γ τέτοια ώστε η γ να είναι η μοναδική περιοδική τροχιά εντός της V .

Πρόταση 2. Υπάρχουν μόνο τρεις διαφορετικοί τύποι οριακών κύκλων στο \mathbb{R}^2 :

- * *Ευσταθής, όταν $\omega(q) = \gamma$, για κάθε q στο V .*
- * *Ασταθής, όταν $\alpha(q) = \gamma$, για κάθε q στο V .*
- * *Ημιευσταθής, όταν $\omega(q) = \gamma$, για κάθε q στο $V \cap \text{Ext}(\gamma)$ και $\alpha(q) = \gamma$, για κάθε q στο $V \cap \text{Int}(\gamma)$.*

Παραπάνω με $\text{Ext}(\gamma)$ συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε μη φραγμένη περιοχή του $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ και καλούνται εξωτερικά σημεία της γ και με $\text{Int}(\gamma)$ το σύνολο των σημείων που ανήκουν στη φραγμένη περιοχή του $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ και καλούνται εσωτερικά σημεία της γ .

3.7 Το Θεώρημα Poincaré-Bendixson

Έστω Δ ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και X ένα διανυσματικό πεδίο κλάσης C^r με $r \geq 1$. Επίσης ας υποθέσουμε, εντός του Δ , μια θετική τροχιά διερχόμενη από το σημείο p , έστω γ_p^+ .

Θεώρημα 3. (Θεώρημα Poincaré-Bendixson I) Έστω $f(t) = f(t, p)$ η ολοκληρωτική καμπύλη ενός διανυσματικού πεδίου για κάθε $t \geq 0$, τέτοια ώστε η γ_p^+ να περιέχεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο K του ανοικτού υποσυνόλου Δ του \mathbb{R}^2 . Τότε:

- Αν $\omega(p)$ περιέχει ένα κανονικό σημείο, τότε η $\omega(p)$ είναι μια περιοδική τροχιά.
- Αν $\omega(p)$ περιέχει κανονικά και κρίσιμα σημεία, τότε η $\omega(p)$ δημιουργήθηκε από σύνολο τροχιών με κάθε μια εξ'αυτών να συγκλίνει σε ένα από

τα κρίσιμα σημεία της $\omega(p)$ καθώς $t \rightarrow \pm\infty$.

• Αν $\omega(p)$ δεν περιέχει κανονικά σημεία, τότε η $\omega(p)$ είναι μοναδικό κανονικό σημείο.

Για την απόδειξη του θεωρήματος Poincaré-Bendixson, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 1. Αν το σημείο p ανήκει στο σύνολο $\Sigma \cap \omega(\gamma)$, όπου Σ η εγκάρσια τομή του X και $\gamma = \{f(t)\}$ μια τροχιά του X , τότε το σημείο p είναι το όριο της ακολουθίας σημείων $f(t_n)$ της Σ καθώς $t_n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Έστω $\gamma = \{f(t)\} = \{f(t, q)\}$ και $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$.

Έστω επίσης μια γειτονιά V του σημείου p και την απεικόνιση $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$. Αφού το σημείο p ανήκει στο $\omega(\gamma)$, υπάρχει μια ακολουθία $\{\tilde{t}_n\}$, τέτοια ώστε $\tilde{t}_n \rightarrow \infty$ και $f(\tilde{t}_n) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Τότε θα υπάρχει κάποιο n_0 στο \mathbb{N} , τέτοιο ώστε $f(\tilde{t}_n)$ να ανήκει στο V , για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $t_n = \tilde{t}_n + \tau(f(\tilde{t}_n))$ για $n \geq n_0$. Τότε ισχύει,

$$f(t_n) = f(\tilde{t}_n + \tau(f(\tilde{t}_n)), q) = f(\tau(f(\tilde{t}_n)), f(\tilde{t}_n))$$

και εξ' ορισμού της τ , συμπεραίνουμε ότι $f(t_n)$ ανήκει στο Σ .

Αφού η τ είναι συνεχής απεικόνιση,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tau(\tilde{t}_n), f(\tilde{t}_n)) = f(0, p) = p$$

αφού $f(\tilde{t}_n) \rightarrow p$ και $\tau(f(\tilde{t}_n)) \rightarrow \tau(p) = 0$ καθώς το n τείνει στο άπειρο. \square

Σημειώνουμε εδώ, ότι η εγκάρσια τομή Σ του διανυσματικού πεδίου X έχει διάσταση 1, μιας και θεωρήσαμε το διανυσματικό πεδίο στο \mathbb{R}^2 .

Λήμμα 2. Έστω Σ η εγκάρσια τομή του X εντός του Δ . Αν γ είναι μια τροχιά του X και το σημείο p ανήκει στο $\Sigma \cap \gamma$, τότε η τροχιά $\gamma_p^+ = \{f(t, p) : t \geq 0\}$ τέμνει τη Σ σε μια (πεπερασμένη ή μη) ακολουθία σημείων $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$.

Απόδειξη. Έστω $D = \{t \in \mathbb{R}^+ : f(t, p) \in \Sigma\}$. Αφού Σ είναι η εγκάρσια τομή του X και μιας τροχιάς του, το D θα περιέχει διακριτά σημεία, τα οποία μπορούμε να τα διατάξουμε,

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$$

Έστω $p_1 = p$. Ας υποθέσουμε, εφόσον υπάρχει, ότι $p_2 = f(t_1, p)$. Με επαγωγή, θα ισχύει ότι $p_n = f(t_{n-1}, p)$. Αν $p_1 = p_2$, τότε η γ είναι περιοδική τροχιά περιόδου $\tau = t_1$ και $p = p_n$, για κάθε n . Σε αντίθετη περίπτωση, $p_1 \neq p_2$, υποθέτουμε ότι $p_1 < p_2$ και αν υπάρχει το σημείο p_3 , θα αποδείξουμε ότι $p_3 > p_2$.

Λόγω συνέχειας και συνεκτικότητας του διανυσματικού πεδίου, οι τροχιές του X τέμνουν την εγκάρσια τομή ομοιοτρόπως, έστω από αριστερά προς δεξιά. Επίσης, στο \mathbb{R}^2 , ισχύει το θεώρημα καμπυλών Jordan, το οποίο αναφέρει ότι αν σ είναι μια συνεχής, απλή και κλειστή καμπύλη, τότε αυτή χωρίζει το επίπεδο σε δυο περιοχές, η μια εξ'αυτών φραγμένη από τη καμπύλη αυτή (το εσωτερικό της καμπύλης) και η δεύτερη η περιοχή που περιέχει όλα τα γειτονικά εξωτερικά σημεία της καμπύλης (το εξωτερικό της καμπύλης). Είναι προφανές, ότι το κοινό όριο μεταξύ των δυο αυτών περιοχών είναι η ίδια η καμπύλη σ .

Έστω μια τέτοια καμπύλη Jordan, που ορίζεται από την ένωση του τμήματος $p_1\bar{p}_2 \subset \Sigma$ με το τόξο $\widehat{p_1p_2}$ της τροχιάς $\widehat{p_1p_2} = \{f(t, p) : 0 \leq t \leq t_1\}$. Συγκεκριμένα, η τροχιά γ με αρχή το σημείο p_2 για $t > t_1$ περιέχεται στην εσωτερική περιοχή της καμπύλης και δεν μπορεί να τέμνει το τόξο $\widehat{p_1p_2}$ και το τμήμα $p_1\bar{p}_2$, λόγω της μοναδικότητας των τροχιών και λόγω της κατεύθυνσης της ροής αντίστοιχα.

Συνεπώς, στη περίπτωση που υπάρχει t_3 θα πρέπει να υπάρχουν $p_1 < p_2 < p_3$, κ.ο.κ. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, παίρνουμε

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$$

Άρα η $\{p_n\}$ είναι μια ακολουθία σημείων. Ανάλογη απόδειξη μπορεί να γίνει αν $p_2 < p_1$. □

Λήμμα 3. Αν Σ είναι η εγκάρσια τομή ενός διανυσματικού πεδίου X και σημείο $p \in \Delta$, τότε η Σ τέμνει την $\omega(p)$ σε ένα σημείο το πολύ.

Απόδειξη. Από το λήμμα 2 που απεδείχθη προηγουμένως, ένα σύνολο σημείων της τροχιάς γ_p^+ της Σ , έχει το πολύ ένα οριακό σημείο, μιας και το σύνολο είναι ακολουθία σημείων. Επομένως από το λήμμα 1, καταλήγουμε στο συμπέρασμα. □

Λήμμα 4. Έστω $p \in \Delta$ με γ_p^+ να περιέχεται σε ένα συμπαγές σύνολο και γ μια τροχιά του διανυσματικού πεδίου X με $\gamma \subset \omega(p)$. Αν $\omega(p)$ περιέχει κανονικά σημεία, τότε η γ είναι κλειστή τροχιά και $\omega(p) = \gamma$.

Απόδειξη. Έστω κανονικό σημείο q στο $\omega(p)$, V μια γειτονιά του q και

Σ_q η αντίστοιχη εγκάρσια τομή. Απο το λήμμα 1, θα υπάρχει μια ακολουθία $t_n \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε $\gamma(t_n)$ να ανήκει στη τομή Σ_q . Η τροχιά γ είναι περιοδική τροχιά, αφού $\gamma(t_n) \in \omega(p)$ και η ακολουθία $\{\gamma(t_n)\}$ εκπίπτει σε σημείο.

Για να αποδείξουμε ότι $\gamma = \omega(p)$, αρκεί να δείξουμε ότι η γ είναι ανοικτό σύνολο στο $\omega(p)$, αφού $\omega(p)$ συνεκτικό και γ κλειστό και μή κενό σύνολο.

Έστω \bar{p} σημείο της γ , $V_{\bar{p}}$ μια γειτονιά του \bar{p} και $\Sigma_{\bar{p}}$ η αντίστοιχη εγκάρσια τομή. Θα δείξουμε ότι $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, κάτι που σημαίνει ότι το γ είναι ανοικτό στο $\omega(p)$.

Είναι προφανές ότι $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο σημείο $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, τέτοιο ώστε να μην ανήκει στη γ . Τότε, θα υπάρχει πραγματικός t τέτοιος ώστε $f(t, \bar{q})$ να ανήκει στο $\omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$ και $f(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$. Συνεπώς, υπάρχουν δυο διαφορετικά σημεία της $\omega(p)$ στην εγκάρσια τομή $\Sigma_{\bar{p}}$, κάτι το οποίο είναι άτοπο, λόγω του λήμματος 3. Συνεπώς, $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. \square

Ακολούθως, αποδεικνύουμε το θεώρημα Poincaré-Bendixson.

Απόδειξη. Έστω ότι η $\omega(p)$ περιέχει ένα κανονικό σημείο, έστω $q \in \omega(p)$. Τότε, η τροχιά γ_q περιέχεται στο $\omega(p)$. Επειδή το $\omega(p)$ συνεκτικό, έχουμε ότι $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Τότε απο το παραπάνω λήμμα, έχουμε ότι $\omega(p) = \gamma_q$ μια περιοδική τροχιά.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\omega(p)$ περιέχει τόσο κανονικά όσο και κρίσιμα σημεία. Αν η γ είναι κανονική τροχιά που περιέχεται στην $\omega(p)$, τότε απο το παραπάνω λήμμα και απο τη στιγμή που τα $\alpha(\gamma)$ και $\omega(\gamma)$ είναι συνεκτικά, θα ισχύει ότι $\alpha(\gamma)$ και $\omega(\gamma)$ θα είναι κανονικά σημεία του πεδίου. Το πεδίο X έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων στο $\omega(p)$.

Όμοια με παραπάνω, αν $\omega(p)$ δεν περιέχει κανονικά σημεία και το πεδίο έχει πεπερασμένου πλήθους κρίσιμα σημεία στην $\omega(p)$, το $\omega(p)$ είναι μοναδικό κανονικό σημείο. \square

3.8 Η Απεικόνιση Lyapunov

Προκειμένου να διαπιστωθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών, είναι ενδιαφέρον να συζητήσουμε τη μέθοδο των απεικονίσεων Lyapunov. Έστω διανυσματικό πεδίο X κλάσης C^1 με $X : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με Δ ανοικτό σύνολο και $f(p, t)$ η ροή του πεδίου X . Αν $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση κλάσης C^1 , τότε για κάποιο p στο Δ , η παράγωγος της F

κατα μήκος της λύσης $f(p, t)$ είναι:

$$XF(p) = \frac{d}{dt}F(f(p, t)) = DF_p(X(p)) = \langle \nabla F_p, X_p \rangle =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)X_1(p) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)X_2(p)$$

όπου $\nabla F_p = \nabla F(p)$ είναι η απόκλιση της F στο p . Συνήθως επίσης είναι και ο συμβολισμός του $XF(p)$ ως $\dot{F}(p)$.

Η F ονομάζεται *απεικόνιση Lyapunov* του X αν $XF(p) < 0$ στο Δ . Δηλαδή η συνάρτηση Lyapunov φθίνει κατα μήκος των τροχιών της.

Το σημείο p του X καλείται *σταθερά Lyapunov*, αν για κάθε γειτονιά $V \subset \Delta$ του p υπάρχει γειτονιά $W \subset V$ του p τέτοια ώστε για κάθε $q \in W$ και για κάθε $t \in [0, +\infty)$ να είναι $f(q, t) \in V$. Αν επιπλέον $\lim_{t \rightarrow \infty} f(q, t)$, για κάθε $q \in W$ τότε το p καλείται *ασυμπτωτική σταθερά Lyapunov*. Στη περίπτωση που $\dot{F} \equiv 0$ τότε η F ονομάζεται *πρώτο ολοκλήρωμα του X* .

Θεώρημα 4. Έστω X διανυσματικό πεδίο στο ανοικτό υποσύνολο Δ του \mathbb{R}^2 και p ένα σημείο του X . Αν V περιοχή του p τέτοια ώστε η F να είναι συνεχής στο V με $F(p) = 0$ και για κάθε $q \in V \setminus \{p\}$ να ισχύει ότι $F(q) > 0$ και $\dot{F} \leq 0$, τότε το p είναι ευσταθές.

Απόδειξη. Για κάθε γειτονιά W του p , επιλέγουμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό, ούτως ώστε η σφαίρα $\bar{B}_\epsilon(p)$ να ανήκει στη γειτονιά W . Έστω $m_\epsilon = \min\{F(q) | q \in S_\epsilon(p)\}$, όπου με $S_\epsilon(p)$ συμβολίζουμε το σύνορο $\partial B_\epsilon(p)$. Ας επιλέξουμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $F(q) < m_\epsilon$ για κάθε q στο $B_\delta(p)$. Αφού $\dot{F}(q) \leq 0$, η τιμή $f(q, t)$ παραμένει στη σφαίρα $B_\epsilon(p)$ για κάθε θετικό t , μιας και $F(f(q, t))$ δε μπορεί ποτέ να πάρει τη τιμή m_ϵ . Συνεπώς το p είναι ευσταθές.

Αν επιπλέον ισχύει $\dot{F}(q) < 0$, τότε αρχικά παρατηρούμε ότι το X δεν έχει άλλες ιδιομορφίες στο V εκτός του p , επομένως από το θεώρημα Poincaré-Bendixson, είτε $f(q, t) \rightarrow p$ για κάθε q εντός της $B_\delta(p)$ είτε για κάποιο q , το $f(q, t)$ τείνει σε κάποιο ω -οριακό σύνολο, που περιέχει κάποιο σημείο p_1 τέτοιο ώστε $F(p_1) \neq 0$. Κάτι το οποίο είναι άτοπο, αφού η $F(f(q, t))$ είναι αυστηρά φθίνουσα. \square

Παράδειγμα 1

Το σύστημα

$$\dot{x} = -y^3$$

$$\dot{y} = x^3$$

έχει σαν πρώτο ολοκλήρωμα $x^4 + y^4$ και επομένως το σημείο $(0, 0)$ είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές, αφού η παράγωγος στο σημείο δεν είναι αυστηρά μικρότερη του μηδενός.

Παράδειγμα 2

Το σύστημα

$$\dot{x} = -y^3 - x^3$$

$$\dot{y} = x^3 - y^3$$

έχει συνάρτηση Lyapunov $F = x^4 + y^4$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ και συνεπώς παρουσιάζει ασυμπτωτική ευστάθεια στο $(0, 0)$.

Για να αποφανθούμε για την ευστάθεια ή την ασυμπτωτική ευστάθεια περιοδικών τροχιών, χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5. Έστω γ μια περιοδική τροχιά του πεδίου X και V μια γειτονιά του γ τέτοια ώστε η f_L να είναι συνεχής στο V με $F \equiv 0$ στο γ . Τότε για κάθε $q \in V \setminus \gamma$ έχουμε $F > 0$ και $\dot{F}(q) \leq 0$ και η γ είναι ευσταθής. Αν $\dot{F}(q) < 0$ τότε η γ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 3

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = y + (1 - x^2 - y^2)x$$

$$\dot{y} = -x + (1 - x^2 - y^2)y$$

Η $\gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι περιοδική τροχιά και η απεικόνιση F που δίνεται από το τύπο

$$F = \begin{cases} 1 - (x^2 + y^2), & \text{αν } x^2 + y^2 < 1 \\ -1 + (x^2 + y^2), & \text{αν } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 5 στο $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, αφού $F > 0$ και $\dot{F}(q) \leq 0$, για κάθε σημείο q στο $V \setminus \gamma$. Συνεπώς η γ είναι ευσταθής.

Κεφάλαιο 4

Στοιχειώδεις Ιδιομορφίες

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε στοιχειώδη ανώμαλα σημεία υπερβολικού και ημι-υπερβολικού τύπου. Τα υπερβολικά ανώμαλα σημεία είναι εκείνα με μη μηδενικό πραγματικό μέρος στις ιδιοτιμές τους, ενώ τα ημι-υπερβολικά, έχουν μοναδική μη μηδενική ιδιοτιμή. Επίσης, εξετάζονται κανονικές μορφές τέτοιων ιδιομορφιών.

4.1 Το Θεώρημα Κανονικών Μορφών

Έστω $X = A + f$ ένα διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R}^n με γραμμικό μέρος A και f μια συνάρτηση κλάσης C^∞ τέτοια ώστε $f(0) = 0, Df(0) = 0$. Σκοπός της θεωρίας κανονικών μορφών είναι να καθοριστεί για κάθε γραμμικό διανυσματικό πεδίο A κατα πόσον μια κλάση μη γραμμικών ιδιομορφιών F_n , τέτοια ώστε για κάθε f η αρχική εξίσωση μπορεί μέσω μιας επιτρεπτής αλλαγής συντεταγμένων να έρθει στη μορφή

$$X' = A + \tilde{f}$$

με $\tilde{f} \in F_n$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια αλλαγή συντεταγμένων h με $r \geq 1$, δρα σε ένα διανυσματικό πεδίο X_1 για να το μετατρέψει στο X_2 ,

$$Dh_{h^{-1}(p)}X_1(h^{-1}(p)) = X_2(p)$$

κάτι το οποίο συνήθως γράφεται $X_2 = h_*X_1$.

Για να βρούμε τη κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων, θεωρούμε $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ την απεικόνιση

$$ad_m A : H^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$$

$$X \rightarrow [A, X]$$

όπου $H^m(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο των πολυωνυμικών διανυσματικών πεδίων του \mathbb{R}^n τα οποία είναι ομογενή βαθμού m , $[A, X] = A \circ X - X \circ A$. Ας είναι $B^m = ad_m A(H^m(\mathbb{R}^n))$ και G^m το συμπλήρωμα του B^m .

Θεώρημα 6. Έστω X ένα διανυσματικό πεδίο κλάσης C^r , ορισμένο σε μια περιοχή του μηδενός με $X(0) = 0$ και $DX(0) = A$, $r \in \mathbb{N}$ με $r \geq 1$ και B^k, G^k όπως ορίζονται παραπάνω. Τότε υπάρχει μια επιτρεπτή αλλαγή μεταβλητών $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ σε μια γειτονιά του μηδενός τέτοια ώστε η $X' = \phi_*(X)$ να είναι της μορφής

$$X'(y) = Ay + g_2(y) + \dots + g_r(y) + o(\|y\|^r)$$

με $g_i \in G^i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή για $2 \leq s < r$. Υποθέτουμε ότι

$$X(x) = Ay + g_2(y) + \dots + g_r(y) + o(\|y\|^r)$$

με $g_i \in G^i, i = 2, \dots, s-1$ και f_s ομογενής βαθμού s . Δοκιμάζουμε μετασχηματισμό της μορφής

$$x = h(y) = y + P(y)$$

όπου P είναι ομογενές βαθμού s . Αρκεί να υπολογίσουμε το P . Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (I + DP(y))\dot{y} &= A(y + P(y)) + g_2(y) + \dots + g_{s-1}(y) + f_s(y) + o(\|y\|^s) \Leftrightarrow \\ \dot{y} &= (I + DP(y))^{-1} [Ay + g_2(y) + \dots + g_{s-1}(y) + f_s(y) + AP(y) + o(\|y\|^s)] = \\ &= (I - Dp(y) + O(\|y\|^s)) [Ay + \dots] \\ &= Ay + g_2(y) + \dots + g_{s-1}(y) + f_s(y) + AP(y) - DP(y)Ay + o(\|y\|^s) \end{aligned}$$

Οι $s-1$ όροι του X παραμένουν αμετάβλητοι, ενώ για τους όρους s τάξης παίρνουμε

$$f_s(y) - ad_s A(P)(y)$$

Είναι προφανές ότι με κατάλληλη επιλογή του P ο τελευταίος όρος ανήκει στη G_s . Αποδεικνύεται επίσης ότι αν X είναι διανυσματικό πεδίο κλάσεως C^∞ ορισμένο σε περιοχή του $0 \in \mathbb{R}^n$ με $X(0) = 0$, υπάρχει ένας επιτρεπτός μετασχηματισμός συντεταγμένων $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$

σε περιοχή του μηδενός τέτοιος ώστε $X' = \phi_*(X)$ να έχει άπειρης τάξης απεικόνιση που δέχεται μια διαφορίσιμη συνάρτηση και παράγει ένα πολυώνυμο και είναι της μορφής

$$l_\infty X'(0) = A + \sum_{i=2}^{\infty} g_i$$

όπου $g_i \in G^i, \forall i = 2, 3, \dots$

4.2 Ελκτικά και Απωστικά Ανώμαλα Σημεία

Ας υποθέσουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο X είναι κλάσης τουλάχιστον C^∞ και έχει ανώμαλο σημείο το $(0, 0)$ με ελκτική ή απωστική συμπεριφορά. Κάθε σύστημα διαφορικών εξισώσεων X κοντά στο ανώμαλο σημείο παίρνει τη μορφή

$$\dot{x} = ax + by + P(x, y)$$

$$\dot{y} = cx + dy + Q(x, y)$$

με $P(0, 0) = Q(0, 0) = DP(0, 0) = DQ(0, 0) = 0$.

Ο πίνακας $DX(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει των ιδιοτι-

μών του ως $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

με $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ και $a \neq 0, b > 0$

Θα δείξουμε ότι μια τέτοια ιδιομορφία είναι τοπικά C^0 σύζευξη στο γραμμικό της μέρος. Αρκεί να δείξουμε μόνο την ελκτική περίπτωση, δηλαδή $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ και $a < 0$. Η απωστική περίπτωση είναι ακριβώς η ίδια με τη περίπτωση της έλξης, αφού αντιστρέφοντας το χρόνο, η μια περίπτωση συμπίπτει με την άλλη.

Ξεκινάμε με τη τρίτη περίπτωση, όπου η $S_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ είναι μια εγκάρσια τομή για τις X και $L = DX(0)$ για αρκετά μικρό r . Ας υποθέσουμε ότι $r = r_0 > 0$. Για κάθε

$$p \in B(r_0)(0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$$

και οι δυο τροχιές των X και L τείνουν στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$.

Έστω $\phi(p, t)$ και $\psi(p, t)$ οι τροχιές των X και L . Επιλέγοντας $p \in B_{r_0}(0) - \{0\}$ υπάρχει μια μοναδική τιμή του χρόνου $t_p > 0$ τέτοιο ώστε $\phi(p, -t_p) \in$

S_{r_0} . Ορίζουμε τοπική συζυγία στο C^0 $h : B_{r_0}(0) \rightarrow B_{r_0}(0)$ ως εξής

$$h(0) = 0$$

$$h(p) = \psi(\phi(p, -t_p), t_p)$$

η οποία είναι ομοιομορφισμός.

Για τη δεύτερη περίπτωση, μπορεί να βρεθεί μια επιτρεπτή γραμμική αλλαγή συντεταγμένων, μετατρέποντας το γραμμικό μέρος $DX(0)$ στη μορφή

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

όπου $\epsilon > 0$ είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Επιλέγοντας ένα αρκετά μικρό $\epsilon > 0$, μπορεί να γίνει ίδια κατασκευή με τη προηγούμενη περίπτωση με αποτέλεσμα το X να είναι τοπική συζυγία του $L = DX(0)$.

Παρόμοια μεθοδολογία ισχύει και για τη πρώτη περίπτωση, όχι όμως με κύκλους S_r και κλειστές περιοχές $B_{r_0}(0)$, αλλά επιλέγοντας

$$S'_r = \{(x, y) : |\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2 = r^2\}$$

και

$$B'_{r_0}(0) = \{(x, y) : |\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2 < r_0^2\}$$

Σε κάθε περίπτωση, παραπάνω σκιαγραφείται η απόδειξη του θεωρήματος Hartman-Gobman:

Θεώρημα 7. Ένα διανυσματικό πεδίο σε μια υπερβολική ιδιομορφία είναι τοπικά C^0 συζυγές με το γραμμικό του μέρος $DX(0)$.

Σημειώνεται ότι ένα σημείο p είναι υπερβολικό αν οι ιδιοτιμές στο σημείο αυτό έχουν μή μηδενικό πραγματικό μέρος. Επίσης, το παραπάνω Θεώρημα, ισχύει ανεξαρτήτως διάστασης.

4.3 Σάγματα σε Υπερβολικές Ιδιομορφίες

Η διαφορική εξίσωση X σε ένα τέτοιο ανώμαλο σημείο παίρνει τη μορφή

$$\dot{x} = \lambda_1 x + P(x, y)$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y + Q(x, y)$$

με $P(0,0) = Q(0,0) = DP(0,0) = DQ(0,0) = 0$ με $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Κανονικοποιούμε σε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -\lambda, \lambda \geq 1$ μιας και σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτή τη μορφή, πολλαπλασιάζοντας έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό. Συνεπώς, εξετάζουμε το X το οποίο παίρνει τώρα τη μορφή

$$\dot{x} = x + P(x, y)$$

$$\dot{y} = -\lambda y + Q(x, y)$$

με $\lambda > 0$. Υποθέτουμε ότι οι P, Q είναι αναλυτικές συναρτήσεις και θέλουμε να εξετάσουμε την ύπαρξη μιας αναλυτικής συνάρτησης $y(x)$ με την ιδιότητα $y(0) = y'(0) = 0$ και το γράφημά της $(x, y(x))$ να παραμένει αμετάβλητο. Ένα τέτοιο γράφημα ονομάζεται *ασταθής πολλαπλότητα* του συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ύπαρξη της ασταθούς πολλαπλότητας στο $-$ με σκοπό να βρούμε απεικόνιση $x(y)$ με την αντίστοιχη ιδιότητα $x(0) = x'(0) = 0$ και με γράφημα $(x(y), y)$ αμετάβλητο, όπως παραπάνω. Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται *ευσταθής πολλαπλότητα* του συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Για την απόδειξη της ύπαρξης της απεικόνισης $y(x)$, γράφουμε $(x, y) = (x, xu)$ και το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \dot{x} = x + P(x, xu) \\ u\dot{x} + x\dot{u} = -\lambda xu + Q(x, xu) \end{cases}$$

το οποίο γίνεται

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + R(x, u)) \\ \dot{u} = -\mu u + S(x, u) \end{cases}$$

με $\mu = \lambda + 1 > 1$ και R, S αναλυτικές συναρτήσεις.

Γράφουμε το u σαν y και το μ σαν λ και για να αποδείξουμε την ύπαρξη της ασταθούς πολλαπλότητας σαν έκφραση της μορφής $u = xu(x)$, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις δυο τελευταίες διαφορικές εξισώσεις με την έκφραση $1 + R(x, u)^{-1}$. Η μελέτη αυτού του συστήματος, αναγάγεται στο παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 5. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$x \frac{dy}{dx} = -(\lambda + B(x, y))y + A(x)$$

με A, B αναλυτικές συναρτήσεις, $(0) = 0$, $(0, 0) = 0$ και $\lambda > 0$. Τότε υπάρχει αναλυτική έκφραση της λύσης $y(x)$ ορισμένη σε ένα διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$, όπου ϵ ένας θετικός αριθμός έτσι ώστε $y(0) = 0$ και $y'(0) = \frac{A'(0)}{\lambda+1}$.

Στη περίπτωση ενός συστήματος της μορφής

$$\dot{x} = x + P(x, y)$$

$$\dot{y} = -\lambda y + Q(x, y)$$

με $\lambda > 0$ όπου P, Q κλάσης C^∞ , μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση του παρακάτω λήμματος, η ύπαρξη μιας ασταθούς πολλαπλότητας και κατ' αναλογία ευσταθούς πολλαπλότητας. Με παρομοια λογική όπως στην αναλυτική περίπτωση:

Λήμμα 6. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$x \frac{dy}{dx} = -(\lambda + B(x, y))y + A(x)$$

με A, B συναρτήσεις κλάσης C^∞ με την ιδιότητα $A(0) = 0, B(0, 0) = 0, \lambda > 0$. Τότε υπάρχει μια λύση $y(x)$ κλάσης C^∞ , ορισμένη σε ένα διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$, όπου ϵ θετικός αριθμός έτσι ώστε $y(0) = 0$ και $y'(0) = \frac{A'(0)}{\lambda+1}$.

Η παραπάνω ανάλυση, συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα το οποίο αφορά υπερβολικά σάγματα.

Θεώρημα 8. Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = \lambda_1 x + P(x, y)$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y + Q(x, y)$$

όπου P και Q συναρτήσεις κλάσης C^∞ με $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ και $DP(0, 0) = DQ(0, 0) = 0$ και $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Τότε Σε μια μικρή γειτονιά του σημείου, υπάρχουν αμετάβλητες πολλαπλότητες W^u, W^s με

$$W^u = \{(x, a(x))\}$$

$$W^s = \{(b(y), y)\}$$

όπου a, b είναι κλάσης C^∞ με την ιδιότητα $a(0) = a'(0) = b(0) = b'(0) = 0$. Επιπλέον οι W^u, W^s ορίζονται μονοσήμαντα. Αν P, Q είναι αναλυτικές συναρτήσεις, τότε και οι a, b είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

4.4 Ημι-Υπερβολικές Ιδιομορφίες

Απο το θεώρημα κανονικής μορφής Jordan, μπορούμε να γράψουμε το διανυσματικό πεδίο X ως

$$\dot{x} = -\lambda x + F(x, y)$$

$$\dot{y} = G(x, y)$$

όπου το λ είναι διάφορο του μηδενός και F, G συναρτήσεις κλάσης C^∞ . Όμοια και εδώ ισχύουν $F(0, 0) = G(0, 0) = DF(0, 0) = DG(0, 0) = 0$, μιας και μπορούμε με αλλαγή του ανωμάλου σημείου, να τοποθετήσουμε την ανωμαλία στο $(0, 0)$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda > 0$, τότε παρατηρούμε ότι υπάρχει μια αμετάβλητη πολλαπλότητα της μορφής $(x, y(x))$, όπου $y(x)$ μια απεικόνιση ίδιας κλάσης, με $y(0) = y'(0) = 0$ στην οποία το είναι υπερβολική συστολή.

Αυτή η πολλαπλότητα ονομάζεται *ισχυρή σταθερή πολλαπλότητα*.

Θεώρημα 9. *Εστω X ένα διανυσματικό πεδίο κλάσης C^∞ . Τότε κοντά στο $x = 0$, υπάρχει μοναδική απεικόνιση κλάσης C^∞ , $y = a(x)$ με $a(0) = a'(0) = 0$, του οποίου το γράφημα $(x, a(x))$ παραμένει αμετάβλητο στο X . Αν F, G είναι αναλυτικές, τότε και η $a(x)$ είναι αναλυτική.*

Απόδειξη. Με αλλαγή μεταβλητών $(x, y) = (x, xY)$, το σύστημα γράφεται

$$\dot{x} = x(-\lambda + H(x, Y))$$

$$\dot{Y} = \lambda Y + K(x, Y)$$

με $H(x, y) = \frac{F(x, xY)}{x}$ και $K(x, Y) = \frac{G(x, xY) - YF(x, Y)}{x}$. Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως, αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ευστάθειας πολλαπλότητας για υπερβολικά σάγματα. \square

Πρόταση 3. *Εστω η διαφορική εξίσωση*

$$\dot{u} = \lambda u(1 + g(u))$$

στο \mathbb{R} , με λ διάφορο του μηδενός και g μια συνάρτηση κλάσης C^∞ τέτοια ώστε $g(0) = 0$. Τότε υπάρχει μοναδική αλλαγή συντεταγμένων $u = x(1 + a(x))$, $a(0) = 0$ τέτοια ώστε η παραπάνω εξίσωση να παίρνει τη μορφή $\dot{x} = \lambda x$. Αν η g είναι αναλυτική, τότε η a είναι αναλυτική.

Απόδειξη. Η αλλαγή των συντεταγμένων που αναφέρεται παραπάνω, με-

τατρέπει τη παραπάνω διαφορική εξίσωση στη

$$(1 + a(x) + x \frac{da}{dx}(x))\dot{x} = \lambda x(1 + a(x))(1 + g(x(1 + a(x))))$$

Εξισώνοντας τα μέλη, παίρνουμε

$$1 + a(x) = x \frac{da}{dx}(x) = (1 + a(x))(1 + g(x(1 + a(x))))$$

Με εύκολους υπολογισμούς, καταλήγουμε ότι η $a(x)$ πρέπει να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y)h(x, y)$$

όπου $h(x, y) = \frac{g(x(1+y(x)))}{x}$. Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική λύση a με $a(0) = 0$.

4.5 Σύνοψη για τα σημεία ιδιομορφίας

Σε αυτή τη παράγραφο, δίνονται δυο θεωρήματα που συνοψίζουν τις προηγούμενες αναλύσεις και είναι χρήσιμα στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς αυτών.

Θεώρημα 10. Έστω $(0, 0)$ ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο ενός διανυσματικού πεδίου X , το οποίο δίνεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = ax + by + A(x, y)$$

$$\dot{y} = cx + dy + B(x, y)$$

όπου A, B αναλυτικές συναρτήσεις σε περιοχή της αρχής με $A(0, 0) = B(0, 0) = DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$. Αν λ_1, λ_2 είναι δυο ιδιοτιμές του γραμμικού μέρους του $DX(0)$ του συστήματος στο $(0, 0)$, τότε ισχύουν τα εξής:

1. Αν οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι πραγματικές και ετερόσημες, τότε το $(0, 0)$ είναι σάγμα. Αν E_1, E_2 είναι οι ιδιοχώροι των ιδιοτιμών λ_1, λ_2 , τότε υπάρχουν δυο αμετάβλητες αναλυτικές καμπύλες, εφαπτόμενες κατ'αντιστοιχία στους E_1 και E_2 στο μηδέν, σε ένα από τα σημεία που προσελκύονται στην αρχή και σε ένα από τα σημεία που απωθούνται από την αρχή.
2. Αν λ_1, λ_2 είναι πραγματικές και ομόσημες, με $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$, τότε το $(0, 0)$ είναι κόμβος. Αν $\lambda_1 > 0$ (αντίστοιχα $\lambda_1 < 0$) τότε είναι απωστικό ή ασταθές (αντίστοιχα ελκτικό ή ευσταθές).
3. Αν $\lambda_1 = a + bi$ και $\lambda_2 = a - bi$ με $a, b \neq 0$ τότε το $(0, 0)$ είναι εστία. Αν $a > 0$ είναι απωστική ή ασταθής, ενώ αν $a < 0$ είναι ελκτική ή ευσταθής εστία.

Θεώρημα 11. Έστω $(0, 0)$ ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο ενός διανυσματικού πεδίου X το οποίο δίνεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = A(x, y)$$

$$\dot{y} = \lambda y + B(x, y)$$

όπου A, B αναλυτικές συναρτήσεις σε μια περιοχή της αρχής με $A(0, 0) = B(0, 0) = DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$ και $\lambda > 0$. Έστω $y = f(x)$ η λύση της εξίσωσης $\lambda y + B(x, y) = 0$ σε μια περιοχή του σημείου $(0, 0)$ και έστω ότι η απεικόνιση $g(x) = A(x, f(x))$ έχει τη μορφή $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, με $m \geq 2$ και $a_m \neq 0$. Τότε υπάρχει αναλυτική καμπύλη, αμετάβλητη μετασχηματισμών, που ονομάζεται ασταθής πολλαπλότητα, εφαπτόμενη στο 0 ,

στο οποίο το X παρουσιάζει απωστική συμπεριφορά αν $\lambda > 0$. Επιπλέον ισχύουν οι προτάσεις:

1. Αν m περιττός και $a_m < 0$, τότε το $(0, 0)$ είναι τοπολογικό σάγμα.
2. Αν m περιττός και $a_m > 0$, τότε το $(0, 0)$ είναι ασταθές τοπολογικό σάγμα.
3. Αν m άρτιος τότε το $(0, 0)$ είναι σάγμα-κόμβος, ένα σημείο στο οποίο μια γειτονιά του είναι ένωση μιας παραβολικής και δύο υπερβολικών τροχιών.

Κεφάλαιο 5

Αποσαφήνιση Μη Στοιχειωδών Ιδιομορφιών

Το βασικό εργαλείο για τη μελέτη μη γραμμικών ιδιομορφιών για επίπεδα συστήματα διαφορικών εξισώσεων, βασίζεται σε αλλαγή των μεταβλητών η οποία ονομάζεται blow-up (έκρηξη λύσεων). Χρησιμοποιούνται σε ιδιομορφίες με δυο μηδενικές ιδιοτιμές αλλά το γραμμικό τους μέρος να είναι μη μηδενικό.

5.1 Ομογενές Blow-Up

Η βασική ιδέα του ομογενούς blow-up είναι η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, τοποθετώντας πάντα το σημείο ιδιομορφίας στην αρχή των αξόνων. Ας υποθέσουμε ότι το 0 είναι ιδιομορφία ενός C^∞ διανυσματικού πεδίου X του \mathbb{R}^2 και θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο ίδιας κλάσης, έστω \hat{X} , στο κύλινδρο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\phi_*(\hat{X}) = X$ με την έννοια $D\phi_v(X(\phi(v)))$, η οποία στην ουσία είναι το πεδίο X γραμμένο σε πολικές συντεταγμένες. Για να μελετήσουμε το πορτραίτο φάσεων του X σε μια γειτονιά V της αρχής, αρκεί να μελετήσουμε το πορτραίτο φάσεων του \hat{X} σε μια περιοχή του $\phi^{-1}(V)$ του κύκλου $\mathbb{S} \times \{0\}$ και μπορούμε να περιορίσουμε και ακτίνα $r \geq 0$. Αν η $j_k(X)(0)$ είναι μηδέν, τότε $j_k(\hat{X})(u) = 0$, για κάθε $u \in \mathbb{S}^2 \times \{0\}$. Ο κύλινδρος είναι μια καλή επιφάνεια για να έχουμε μια καλή οπτική για το πορτραίτο φάσεων, παρόλα αυτά δεν μας βοηθάει

στους υπολογισμούς, μια και συνεχώς παρουσιάζονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Για το λόγο αυτό, είναι προτιμότερο να κάνουμε υπολογισμούς σε διαφορετικούς τοπολογικούς χώρους.

Για τις περιοχές του κυλίνδρου όπου $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, χρησιμοποιούμε τον χάρτη

$$K^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) = (\bar{x}, \bar{y})$$

Σε αυτό το χάρτη, η έκφραση της απεικόνισης blow-up ϕ δίνεται απο τη

$$\phi^x : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}, \bar{x}\bar{y})$$

Αυτό, διότι

$$\phi = \phi^x \circ K^x : (\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, \tan \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \cos \theta \tan \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

μέσω των απεικονίσεων K^x και ϕ^x .

Η απεικόνιση ϕ^x καλείται blow-up στη κατεύθυνση του x .

Αντίστοιχα, στις περιοχές του κυλίνδρου όπου $\theta \in (0, \pi)$ και $\theta \in (\pi, 2\pi)$ χρησιμοποιούμε τον χάρτη

$$K^y : (\theta, r) \mapsto (\cot \theta, r \sin \theta) = (\bar{x}, \bar{y})$$

Η έκφραση της απεικόνισης blow-up είναι η

$$\phi^y : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}\bar{y}, \bar{y})$$

Η απεικόνιση αυτή καλείται blow-up στη κατεύθυνση του y .

Οι δύο παραπάνω απεικονίσεις blow-up, καλούνται κατευθυνόμενες απεικονίσεις blow-up.

Στη περίπτωση που $j_k(X)(0) = 0$, $j_{k+1}(X)(0) \neq 0$ τότε τα \hat{X} , \hat{X}^x , \hat{X}^y είναι εκφυλισμένα και για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του εκφυλισμού, κάνουμε την αντικατάσταση

$$\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X}$$

Τότε \bar{X} είναι διανυσματικό πεδίο κλάσης C^∞ στο $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Για $r > 0$, δεν αλλάζουν οι τροχιές του \hat{X} όσον αφορά τις κατευθύνσεις του, αλλά μόνο η παραμετρικοποίησή του ως προς t .

Για την κατευθυνόμενη blow-up, χρησιμοποιούμε την $\frac{1}{\bar{x}^k} \hat{X}^x$ στη ϕ^x και την $\frac{1}{\bar{y}^k} \hat{X}^y$ για την ϕ^y .

Στη περίπτωση που $\bar{x} \neq 0$ (αντίστοιχα $\bar{y} \neq 0$), τα διανυσματικά πεδία $\frac{1}{r^k} \hat{X}^k$ και $\frac{1}{\bar{x}^k} X \hat{X}^k$ (αντίστοιχα $\frac{1}{\bar{y}^k} \hat{X}^k$) δεν είναι ίσα με μια αναλυτική αλλαγή συντεταγμένων όπως τα \hat{X}, \hat{X}^x , αλλά μπορούν να γίνουν ίσα, με μια αναλυτική αλλαγή συντεταγμένων και με πολλαπλασιασμό με μια μη μηδενική αναλυτική συνάρτηση.

Για τη κατευθυνόμενη ως προς τη x συνιστώσα, αφού $\phi = \phi^x \circ K^x$, ισχύει ότι $(K^x)_*(\hat{X}) = \hat{X}^x$. Επομένως

$$(K^x)_*(\bar{X}) = (K^x)_*\left(\frac{\hat{X}}{r^k}\right) = \frac{1}{r^k}(K^x)_*(\hat{X}) = \frac{1}{r^k}\hat{X}^x = \bar{X}^x\left(\frac{\bar{x}}{r}\right)^k$$

Στις πολικές συντεταγμένες, θα πρέπει $\frac{\bar{x}}{r} = \cos \theta$ που είναι θετικό, μιας και $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Για τη κατευθυνόμενη απεικόνιση ως προς y , έχουμε $(K^y)_*(\hat{X}) = \hat{X}^y$ και $(K^y)_*(\bar{X}) = \bar{X}^y(\sin \theta)^k$ με $\sin \theta > 0$ στο τμήμα του κυλίνδρου για το οποίο $\theta \in (0, \pi)$.

Παρόμοια μελέτη για τη ϕ^x θα γινόταν και στη περιοχή $\{(\theta, r) : \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\}$, αλλά με αρνητικό συνημίτονο.

Για περιπτώσεις k , στα πορτραίτα φάσεων για το \bar{X}^x στο $\{\bar{x} \leq 0\}$ θα έπρεπε να αντιστρέψουμε το χρόνο. Το ίδιο θα παρατηρούσαμε αν χρησιμοποιούσαμε το \bar{X}^y για τη μελέτη του \bar{X} στο $\{(\theta, r : \theta \in (\pi, 2\pi), r > 0\}$.

Για την αποφυγή αυτής της αντιστροφής, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη ϕ^x ή τη ϕ^y μόνο για $\bar{x} \geq 0$ και $\bar{y} \geq 0$ αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα δύο επιπλέον blow-ups

$$\phi^{-x} : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (-\bar{x}, -\bar{x}\bar{y})$$

$$\phi^{-y} : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (-\bar{x}\bar{y}, -\bar{y})$$

Παράδειγμα 1

Αναζητάμε τη τοπολογική δομή της ιδιομορφίας του

$$X = (x^2 - 2xy)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - xy)\frac{\partial}{\partial y} + O(\|(x, y)\|^3)$$

Οι τύποι για το blow-up σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\bar{X} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_2 r \frac{\partial}{\partial r}$$

όπου

$$\begin{aligned}\eta_1(\theta, r) &= \frac{1}{r^{k+2}} \langle X, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \rangle (\phi(r, \theta)) = \\ &= \frac{1}{r^{k+2}} (-r \sin \theta X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta X_2(r \cos \theta, r \sin \theta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2(\theta, r) &= \frac{1}{r^{k+2}} \langle X, x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \rangle (\phi(r, \theta)) = \\ &= \frac{1}{r^{k+2}} (-r \cos \theta X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta X_2(r \cos \theta, r \sin \theta))\end{aligned}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, $k = 1$ και το αποτέλεσμα των τύπων είναι

$$\bar{X}(\theta, r) = (\cos \theta \sin \theta (3 \sin \theta - 2 \cos \theta) + O(r)) \frac{\partial}{\partial \theta} +$$

$$r(\cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta + O(r)) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

με σημεία μηδενισμού για $\theta = 0, \pi, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \tan \theta = \frac{2}{3}$.

Σε αυτές τις ιδιομορφίες, η ακτινική ιδιοτιμή δίνεται από τον συντελεστή $r \frac{\partial}{\partial r}$ ενώ η εφαπτομενική ιδιοτιμή δίνεται παραγωγίζοντας ως προς θ τη $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Όλες οι ιδιομορφίες στο $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ είναι υπερβολικές και επομένως έγινε η αποδόμηση του X στο 0 μιας και όλες οι ιδιομορφίες είναι στοιχειώδεις.

Παράδειγμα 2

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ένα μόνο blow-up δεν είναι αρκετό για την αποσαφήνιση των ιδιομορφιών σε στοιχειώδεις ιδιομορφίες. Παραμένουν μη στοιχειώδεις του \bar{X} στο $r = 0$ και πρέπει να επαναλάβουμε άλλη μια φορά τη διαδικασία για να γίνει τελικά η αποσαφήνιση. Το αρχικό διανυσματικό πεδίο είναι

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + xy) \frac{\partial}{\partial y} + O(\|(x, y)\|^3)$$

Η μέθοδος του blow-up στη κατεύθυνση του y δεν δίνει ιδιομορφίες, επομένως δοκιμάζουμε blow-up στη x -κατεύθυνση. Γράφουμε

$$x = \bar{x}, y = \bar{x}\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} = x, \bar{y} = \frac{y}{x}$$

Επομένως παίρνουμε

$$\bar{\dot{x}} = \dot{x} = y + O(\|(x, y)\|^3) = \bar{y}\bar{x} + O(|\bar{x}|^3)$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\dot{y}}{x} - y \frac{\dot{x}}{x^2} = (x + y) + \frac{1}{x} O(\|(x, y)\|^3) - \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x^2} O(\|(x, y)\|^3) \\ &= \bar{x} + \bar{y}\bar{x} - \bar{y}^2 + O(|\bar{x}|^2)\end{aligned}$$

Η μόνη ιδιομορφία είναι στο $\bar{x} = 0$ για $\bar{y} = 0$ και καθώς οι ιδιομορφίες δεν είναι στοιχειώδεις, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία blow-up. Για τη x -κατεύθυνση η διαδικασία δεν δίνει ιδιομορφίες, αλλά για τη y -κατεύθυνση ($\bar{x} = \bar{y}\bar{x}, \bar{y} = \bar{y}$) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}} &= \dot{y} = (\bar{x} + \bar{y}\bar{x} - \bar{y}^2 + O(|x|^2)) = \bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2 + O(\|(\bar{x}, \bar{y})\|^2) \\ \dot{\bar{x}} &= \frac{\dot{x}}{\bar{y}} - \bar{x} \frac{\dot{y}}{\bar{y}^2} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{y}} O(|\bar{x}|^3) - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} (\bar{x} + \bar{y}\bar{x} - \bar{y}^2 + O(|\bar{x}|^2)) \\ &= \bar{y} - \bar{x}^2 + \bar{y}\bar{x} + O(\|(\bar{x}, \bar{y})\|^2)\end{aligned}$$

Καταλήγουμε επομένως στο

$$(\bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + (2\bar{x}\bar{y} - \bar{x}^2) \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$$

το οποίο δεν έχει στοιχειώδεις ιδιομορφίες, αλλά καταφέρνουμε στο προηγούμενο παράδειγμα με ένα blow-up να τις αποδομήσουμε σε στοιχειώδεις.

5.2 Ανισότητα Lojasiewicz

Τίθεται το ερώτημα, δοθέντος ενός διανυσματικού πεδίου, αν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν τελικά μέσα από ένα πεπερασμένο αριθμό blow-up καταλήγουμε σε αποδόμηση των ιδιομορφιών ή όχι. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, χρησιμοποιούμε την ανισότητα Lojasiewicz και ένα θεώρημα, το οποίο αναφέρεται παρακάτω, χωρίς απόδειξη.

Λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο X του \mathbb{R}^2 ικανοποιεί την ανισότητα Lojasiewicz στο μηδέν, αν υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 1$ και $c > 0$ τέτοια ώστε $\|X(x)\| \geq c\|x\|^k$ σε μια γειτονιά του μηδενός. Η ανισότητα, ισχύει και για αναλυτικά διανυσματικά πεδία σε μεμονωμένες ιδιομορφίες.

Θεώρημα 12. *Αν το X στο μηδέν, ικανοποιεί την ανισότητα Lojasiewicz, τότε υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία blow-ups $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n$ που οδηγεί σε ένα διανυσματικό πεδίο \bar{X}^n , όπου όλες οι ιδιομορφίες του είναι στοιχειώδεις.*

Αυτές οι ιδιομορφίες μπορούν να είναι:

1. Απομονωμένες ιδιομορφίες p που είναι είτε υπερβολικές είτε ημι-υπερβολικές.
2. Κανονικές αναλυτικές κλειστές καμπύλες κατα μήκος των οποίων το \tilde{X}^n είναι υπερβολικό.

5.3 Μηδενοδύναμες Ιδιομορφίες

Παρακάτω, δίνεται το θεώρημα μηδενοδύναμων ιδιομορφιών, το οποίο μας βοηθά στο να αποφανθούμε ως προς τη τοπική συμπεριφορά ενός μηδενοδύναμου σημείου ιδιομορφίας.

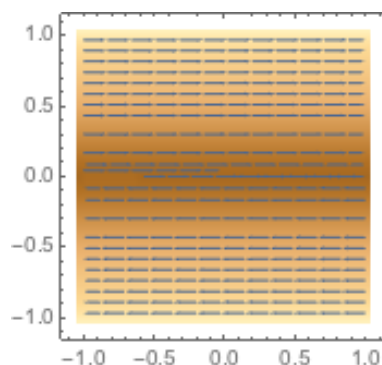
Θεώρημα 13. Έστω ότι το $(0, 0)$ είναι απομονωμένο ιδιόμορφο σημείο ενός διανυσματικού πεδίου X το οποίο δίνεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = y + A(x, y)$$

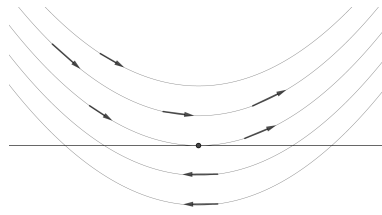
$$\dot{y} = B(x, y)$$

με A, B αναλυτικές συναρτήσεις σε μια περιοχή του σημείου $(0, 0)$ και $j_1 A(0, 0) = j_1 B(0, 0) = 0$. Αν $y = f(x)$ μια λύση της εξίσωσης $y + A(x, y) = 0$ σε μια περιοχή του $(0, 0)$ και $F(x) = B(x, f(x)), G(x) = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y})(x, f(x))$, τότε ισχύουν τα εξής:

1. Αν $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$, τότε το πορτραίτο φάσεων είναι



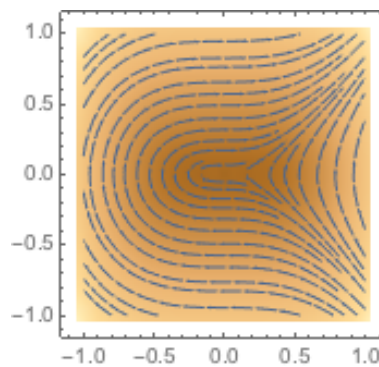
2. Αν $F(x) \equiv 0$ και $G(x) = bx^n + o(x^n), \forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1, b \neq 0$, τότε το πορτραίτο φάσεων του X είναι



3. Αν $G(x) \equiv 0$ και $F(x) = ax^m + o(x^m)$, $\forall m \geq 2$ και $a \neq 0$ τότε:

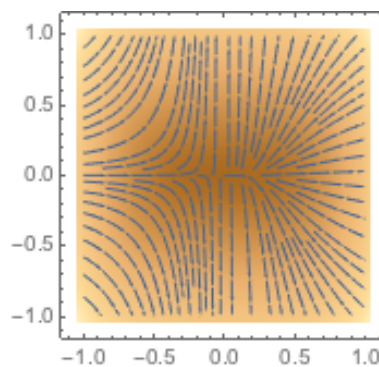
* Αν m περιττός και $a > 0$, τότε έχουμε σάγμα και αν $a < 0$ έχουμε κέντρο ή εστία.

* Αν m άρτιος τότε έχουμε cusp, η οποία απεικονίζεται παρακάτω.



4. Αν $F(x) = ax^m + o(x^m)$ και $G(x) = bx^n + o(x^n)$ με $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a, b \neq 0$ τότε:

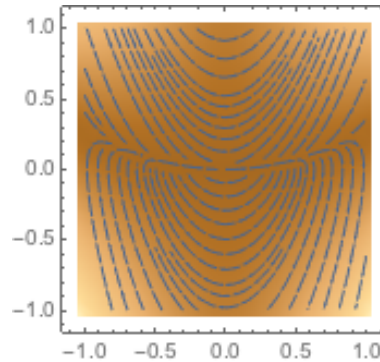
* Αν m άρτιος, τότε αν $m < 2n+1$ τότε έχουμε cusp, ενώ αν $m > 2n+1$ τότε έχουμε σάγμα-κόμβο, που απεικονίζεται παρακάτω



* Αν m περιττός και $a > 0$ τότε είναι σάγμα.

* Αν m περιττός και $a < 0$, τότε:

- Αν $m < 2n + 1$ ή $m = 2n + 1$ και $b^2 + 4a(n + 1) < 0$ έχουμε κέντρο ή εστία.
- Αν n περιττός και είτε $m > 2n + 1$ ή $m = 2n + 1$ και $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ τότε το πορτραίτο φάσεων αποτελείται από ένα υπερβολικό και ένα ελλειπτικό τομέα, όπως απεικονίζεται παρακάτω.



- Αν n άρτιος και είτε $m > 2n + 1$ ή $m = 2n + 1$ και $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$ τότε το πορτραίτο φάσεων είναι κόμβος, οποίος είναι ελκτικός αν $b < 0$ και απωστικός αν $b > 0$.

Κεφάλαιο 6

Κέντρα και Σταθερές Lyapunov

Απο τα πιο δύσκολα προβλήματα στη θεωρία των επίπεδων δυναμικών συστημάτων είναι ο διαχωρισμός μεταξύ κέντρου και εστίας, κάτι το οποίο εν γένει είναι ένα πρόβλημα το οποίο δεν έχει λύση. Ωστόσο, υπάρχουν αλγόριθμοι για κέντρα στις γραμμικές ιδιομορφίες που μας δίνουν λύση.

6.1 Κέντρα στις Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω P, Q αναλυτικές συναρτήσεις και έστω το σημείο ιδιομορφίας $(x, y) = (0, 0)$ το οποίο είναι είτε κέντρο είτε εστία για το σύστημα

$$\dot{x} = P(x, y) \text{ και } \dot{y} = Q(x, y).$$

Τότε με μια επιτρεπτή αλλαγή συντεταγμένων, το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή,

$$\dot{x} = \lambda x + y + p(x, y) \text{ και } \dot{y} = -x + \lambda y + q(x, y)$$

όπου p, q αναλυτικές συναρτήσεις χωρίς γραμμικά ή σταθερά μέρη. Αν $\lambda \neq 0$ έχουμε εστία, η οποία είναι ευσταθής αν $\lambda < 0$ και ευσταθής αν $\lambda > 0$. Στη περίπτωση που $\lambda = 0$ τότε μπορεί να έχουμε είτε κέντρο, είτε εστία.

6.2 Κανονική Μορφή για Γραμμικό Κέντρο

Θα υπολογίσουμε τη κανονική μορφή για ιδιομορφίες γραμμικών κέντρων. Λόγω απλοποίησης των υπολογισμών, χρησιμοποιούμε μιγαδικές συντεταγμένες.

Έστω $z = x + iy$ και $\bar{z} = x - iy$ με αντίστοιχες παραγώγους

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ και } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

και

$$\begin{aligned} \alpha\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) &= i\alpha\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left[z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, z^i\bar{z}^j\frac{\partial}{\partial z}\right] = (i-1-j)z^i\bar{z}^j\frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad \left[z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, z^i\bar{z}^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right] = (i+1-j)z^i\bar{z}^j\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Ο πυρήνας $Kerad_{2m}A = \{0\}$, ενώ

$$\begin{aligned} Kerad_{2m+1}A &= Span \left\{ (z\bar{z})^m z \frac{\partial}{\partial z}, (z\bar{z})^m \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\} \\ &= Span \left\{ (z\bar{z})^m i \left(z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), (z\bar{z})^m \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right\} \\ &= Span \left\{ (x^2 + y^2)^m \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), (x^2 + y^2)^m \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned}$$

επομένως οδηγούμαστε στη

$$(\alpha + f(x^2 + y^2))\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + g(x^2 + y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

με $f(0) = g(0) = 0$, η οποία είναι η κανονική μορφή για το γραμμικό κέντρο. Διαιρώντας με τον όρο $\alpha + f(x^2 + y^2)$ παίρνουμε τελικά

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + h(x^2 + y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Το αρχικό διαφορικό σύστημα, παρουσιάζει κέντρο, αν η συνάρτηση h της παραπάνω σχέσης είναι ταυτοτικά μηδέν.

Ας υποθέσουμε ένα επίπεδο διαφορικό σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\dot{x} = -y + P(x, y) = -y + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x, y) \quad (6.1)$$

$$\dot{y} = x + Q(x, y) = x + \sum_{k=2}^{\infty} Q_k(x, y) \quad (6.2)$$

όπου P_k, Q_k ομογενή πολυώνυμα k βαθμού. Σε πολικές συντεταγμένες μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{k=2}^{\infty} S_k(\theta)r^k$$

όπου $S_k(\theta)$ τριγωνομετρικά πολυώνυμα, μεταβλητών $\sin\theta, \cos\theta$, και σε

μιγαδικές συντεταγμένες αντίστοιχα,

$$\dot{z} = iz + \sum_{k=2}^{\infty} R_k(z, \bar{z})$$

οπου R_k ομογενές πολυώνυμο k βαθμού μεταβλητών z, \bar{z} .

Αν συμβολίσουμε με $r(\theta, 0)$ τη λύση της εξίσωσης σε πολικές συντεταγμένες, τέτοια ώστε $r(0, r_0) = r_0$ τότε κοντά στο r_0 θα ισχύει

$$r(\theta, r_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(\theta)r_0^k$$

με $u_k(0) = 0$ για $k \geq 2$. Η απεικόνιση Poincaré κοντά στο r_0 θα είναι

$$\Pi(r_0) = r(2\pi, r_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(2\pi)r_0^k$$

Αφού Π είναι αναλυτική και $\Pi(r_0) \equiv r_0$ το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζει κέντρο, αν και μόνον αν $u_n(2\pi) = 0, \forall n$. Ας υποθέσουμε προσωρινά, ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει, και έστω K ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $u_K(2\pi) \neq 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το διαφορικό σύστημα που μελετούμε είναι ισοδύναμο με μια αναλυτική ισότητα, της οποίας οι $2k + 1$ όροι του πολυωνύμου *Taylor* δίνονται απο

$$\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_{i=1}^k \alpha_i (x^2 + y^2)^i \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

με $k = \frac{K}{2}$, μπορούμε να γράψουμε την αναλυτική αυτή συνάρτηση στις πολικές συντεταγμένες ως

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{l=1}^k \alpha_l r^{2l} + O(r^{2k+2})$$

Επομένως, θα πρέπει $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0, K = 2k + 1$, επομένως είναι περιττό και $u_K(2\pi) = 2\pi\alpha_k$.

Η παραπάνω διαδικασία, αν και φαίνεται απλή, σε πολλές εφαρμογές οι υπολογισμοί αυτοί γίνονται αρκετά πολύπλοκοι, ιδιαίτερος εαν συμπεριλαμβάνονται περισσότερες παράμετροι. Επομένως, διαφορετικές τεχνικές ίσως βοηθήσουν περισσότερο σε τέτοιες περιπτώσεις.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σειρά της μορφής

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + O(\|(x, y)\|^3)$$

με $\dot{V} = \eta_2 r^2 + \eta_4 r^4 + \dots + \eta_{2k} r^{2k} + \dots$ το ρυθμό μεταβολής της κατά μήκος των τροχιών της, όπου $r^2 = x^2 + y^2$. οι τιμές η_{2k} ονομάζονται εστιακές τιμές και είναι πολυώνυμα συντελεστών p, q . Θα δείξουμε, την ύπαρξη τέτοιων η_{2l} για τα οποία υπάρχει $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + O(\|(x, y)\|^3)$ με ρυθμό μεταβολής

$$\dot{V} = \eta_{2l} r^{2l} + O(r^{2l+1})$$

Αυτή η έκφραση, παραμένει αμετάβλητη σε μετασχηματισμούς και πολλαπλασιασμό του διανυσματικού πεδίου με μια απεικόνιση f τέτοια ώστε $f(0) = 1$. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις (5.1) και (5.2) έχουν τη μορφή

$$\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha_k (x^2 + y^2)^k \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) + Y$$

όπου $Y = O(\|(x, y)\|^{2k+3})$. Επιπλέον,

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \sum_{i=3}^{2l} P_i(x, y) + W(x, y)$$

όπου P_i ομογενή πολυώνυμα βαθμού i και $W = O(\|(x, y)\|^{2l+1})$. Το πρόβλημα αναγάγεται στο παρακάτω

$$\sum_{i=3}^{2l} \left(x \frac{\partial P_i}{\partial y} - y \frac{\partial P_i}{\partial x}\right) + \alpha_k (x^2 + y^2)^{k+1} - \eta_{2l} (x^2 + y^2)^l = O(\|(x, y)\|^p) \quad (6.3)$$

όπου $p = \min \{2l + 1, 2k + 3\}$. Υποθέτουμε ότι $k = l - 1$ ώστε η (5.3) να μπορεί να γραφεί

$$\sum_{i=3}^{2l} \left(x \frac{\partial P_i}{\partial y} - y \frac{\partial P_i}{\partial x}\right) + (\alpha_{l-1} - \eta_{2l}) (x^2 + y^2)^l = O(\|(x, y)\|^p)$$

Αν γράψουμε

$$P_i(x, y) = \sum_{j=0}^i a_j x^j y^{i-j}$$

παρατηρούμε ότι

$$x \frac{\partial P_i}{\partial y} - y \frac{\partial P_i}{\partial x} = -\alpha_1 y^i + \sum_{k=1}^{i-1} ((i-k+1)\alpha_{k-1} - (k+1)\alpha_{k+1}) x^k y^{i-k} + a_{i-1} x^i \quad (6.4)$$

Για i περιττό, η παραπάνω έκφραση πρέπει να μηδενίζεται, κάτι το οποίο είναι άτοπο για $P_i = 0$.

Για i άρτιο και $i < 2l$ επίσης πρέπει να μηδενίζεται. Αυτό επιτυγχάνεται αν επιλέξουμε $i = 2p$ και

$$P_i(x, y) = \alpha_0 (y^{2p} + \sum_{k=1}^p \frac{p-(k-1)}{k} \frac{p-(k-2)}{k-1} \dots \frac{p-1}{2} p x^{2k} y^{2(p-k)})$$

Για $i = 2l$ μπορούμε να πάρουμε μια έκφραση σαν τη παραπάνω η οποία καθιστά τη (5.4) ίση με το μηδέν, αλλά μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι η (5.4) δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $c(x^2 + y^2)^l$, $c \neq 0$.

Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι για τη πρώτη μη μηδενική εστιακή τιμή ότι

$$\eta_{2l} = \alpha_{l-1}$$

Αν συνδυάσουμε και τη σχέση $u_K(2\pi) = 2\pi\alpha_k$, παίρνουμε

$$u_{2l-1}(2\pi) = 2\pi\eta_{2l}$$

Το συμπέρασμα όλων αυτών είναι ότι η αρχή είναι κέντρο αν και μόνον αν $\eta_{2k} = 0, \forall k$. Επιπλέον, η ευστάθειά του καθορίζεται από το πρόσημο της πρώτης εστιακής μη μηδενικής τιμής. Επειδή τα η_{2k} είναι σχετικά μόνο όταν $\eta - 2l = 0, l < k$ μπορούμε να θέσουμε $\eta_2 = \eta_4 = \dots = \eta_{2k-2} = 0$ στην έκφραση των η_{2k} . Οι ποσότητες από αυτή τη διαδικασία ονομάζονται Σταθερές Lyapunov και συμβολίζονται με $L(k), k = 1, 2, \dots$. Σε πολλές εφαρμογές είναι πιο εύκολο να υπολογιστούν οι σταθερές Lyapunov, παρά η κανονική μορφή, ωστόσο χρειάζεται η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, εκτός των απλών περιπτώσεων. Φυσικά, χρειάζεται να υπολογιστεί μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος των σταθερών, χωρίς όμως να γνωρίζουμε εκ των προτέρων πόσες και ποιες σταθερές θα χρειαστούν. Γι' αυτό το λόγο χρειαζόμαστε ένα σύνολο από προϋποθέσεις την επάρκεια των οποίων εξετάζουμε ξεχωριστά.

Πολλές φορές, αντί να χρησιμοποιούμε στην ανάλυσή μας το η_{2l} , είναι

προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε

$$V_{2n+1} = u_{2n+1}(2\pi) = 2\pi u_{2n+1}$$

όπου $u_2(2\pi) = \dots = u_{2n}(2\pi) = 0$, η οποία ονομάζεται *n-οστή σταθερά Lyapunov*. Καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 14. Έστω ένα αναλυτικό διαφορικό σύστημα (5.1), (5.2), το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$dH(x, y) + \omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) + \dots = 0$$

όπου $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ και $\omega_l(x, y) = -Q_{l+1}(x, y)dx + P_{l+1}(x, y)dy$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$V_n = -\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\rho^{\frac{n+1}{2}}} \int_{H=\rho} \sum_{l=1}^{n-1} \omega_l h_{n-1-l}$$

όπου $h_0 \equiv 1$ και $h_m, m = 1, \dots, n-2$ είναι πολώνυμα που ορίζονται από τη σχέση

$$d\left(\sum_{l=1}^m \omega_l h_{m-l}\right) = -d(h_m dH)$$

Είναι άξιο παρατήρησης ότι στο παραπάνω θεώρημα, είναι κομβικής σημασίας ο υπολογισμός των πολωνύμων h_m , προκειμένου να υπολογίσουμε τις σταθερές Lyapunov. Παρακάτω, δίνονται χρήσιμα λήμματα και θεωρήματα για έναν τέτοιο υπολογισμό, χωρίς τις αποδείξεις τους.

Θεώρημα 15. Έστω η λύση της αναλυτικής διαφορικής εξίσωσης στο επίπεδο

$$\omega_\epsilon = dH + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \omega_i = 0$$

όπου ω_i πολώνυμα, όχι απαραίτητα ομογενή, που μηδενίζονται ταυτότικά στην αρχή των αξόνων και $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Έστω επίσης $L(\rho, \epsilon) = \rho + \epsilon L_1(\rho) + \dots + \epsilon^k L_k(\rho) + O(\epsilon^{k+1})$ η απεικόνιση που ορίζει τη πρώτη επιστροφή στην εγκάρσια τομή Σ . Υποθέτουμε ότι $L_1(\rho) \equiv \dots \equiv L_{m-1}(\rho) \equiv 0$. Τότε υπάρχουν πολώνυμα $h_0 \equiv 1, h_1, \dots, h_{m-1}$ τέτοια ώστε

$$d\left(\sum_{i=1}^m \omega_i h_{m-i}\right) = -d(h_m dH)$$

και η m -οστή παράγωγος ως προς ϵ είναι

$$-m! \int_{H=\rho} \sum_{i=1}^m \omega_i h_{m-1}$$

Λήμμα 7. *Ας υποθέσουμε τη διαφορική μορφή*

$$\omega = A(z, \bar{z})dz + B(z, \bar{z})d\bar{z}$$

με A, B πολυώνυμα των z, \bar{z} . Τότε

$$\int_{H=\rho} \omega = -2\pi i \sum_k \text{coef}\left(-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}A + \frac{\partial}{\partial z}B, z^k \bar{z}^k\right) \frac{(2\rho)^{k+1}}{k+1}$$

όπου με $\text{coef}(f, z^k \bar{z}^l)$ συμβολίζεται η απεικόνιση που μας δίνει το συντελεστή του μονωνύμου $z^k \bar{z}^l, \forall k, l$.

Έστω P το σύνολο όλων των πολυωνύμων των μεταβλητών z, \bar{z} , τα οποία μηδενίζονται ταυτοτικά στην αρχή των αξόνων. Ορίζουμε σαν $P_0 \subset P$ το πολυώνυμο το οποίο σχηματίζεται απο τα πολυώνυμα χωρίς μονώνυμο της μορφής $z^k \bar{z}^k, \forall k > 0$ και με $P_1 \subset P$ το πολυώνυμο το οποίο έχει παράγωγο ως προς z βρίσκεται στο P_0 . Ορίζουμε τους τελεστές,

$$G : P_0 \rightarrow P_0 \quad (6.5)$$

$$R = \sum_{k \neq l} r_{kl} z^k \bar{z}^l \mapsto \sum_{k \neq l} \frac{2}{k-l} r_{kl} z^k \bar{z}^l \quad (6.6)$$

$$F : P_1 \rightarrow P_0 \quad (6.7)$$

$$R \mapsto -\text{Im}\left(G\left(\frac{\partial R(z, \bar{z})}{\partial z}\right)\right) \quad (6.8)$$

Λήμμα 8. *Έστω η απεικόνιση $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ και ω ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε $\int_{H=\rho} \omega \equiv 0$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο g τέτοιο ώστε $d\omega = d(gdH)$.*

* Αν το ω είναι γραμμένο σε μιγαδικές συντεταγμένες

$$\omega = A(z, \bar{z})dz + B(z, \bar{z})d\bar{z}$$

τότε

$$g(z, \bar{z}) = G\left(\frac{\partial A(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial B(z, \bar{z})}{\partial z}\right)$$

όπου G είναι η απεικόνιση

$$G : P_0 \rightarrow P_0$$

$$R = \sum_{k \neq l} r_{kl} z^k \bar{z}^l \mapsto \sum_{k \neq l} \frac{2}{k-l} r_{kl} z^k \bar{z}^l$$

* Αν το ω είναι γραμμένο σε πολικές συντεταγμένες

$$\omega = \alpha(r, \theta) dr + \beta(r, \theta) d\theta$$

τότε

$$g(r, \theta) = \frac{1}{r} \int_0^\theta \left(\frac{\partial \alpha(r, \psi)}{\partial \psi} - \frac{\partial \beta(r, \psi)}{\partial r} \right) d\psi$$

6.3 Σταθερές Lyapunov

Η γενική μορφή ενός πολωνυμικού διανυσματικού πεδίου με ασθενή εστία, δίνεται απο

$$\dot{x} = -y + P \quad (6.9)$$

$$\dot{y} = x + Q \quad (6.10)$$

όπου

$$P = \sum_{k=2}^n X_k(x, y), \quad X_k = \sum_{i=0}^k A_{ki} x^{k-i} y^i$$

$$Q = \sum_{k=2}^n Y_k(x, y), \quad Y_k = \sum_{i=0}^k b_{ki} x^{k-i} y^i$$

Στη περίπτωση που έχουμε εστία, τότε οι Poincaré και Lyapunov απέδειξαν ότι υπάρχει συνάρτηση $F = \sum_{p=2}^{\infty} F_p$ όπου $F_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ και $F_p = \sum_{i=0}^p f_{pi} x^{p-i} y^i$, τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial t} = V(x^2 + y^2)^i + \dots$, όπου $V \neq 0$. Η σταθερά V καλείται σταθερά Poincaré-Lyapunov και εξαρτάται απο τους συντελεστές P, Q . Για να ερευνήσουμε οριακούς κύκλους, θα πρέπει να ορίσουμε και να ερευνήσουμε υψηλότερης τάξης σταθερών Poincaré-Lyapunov. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει $F(x, y) = \sum_{p=2}^{\infty} F_p$ τέτοια ώστε $\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} -V_i'(x^2 + y^2)^{i+1}$. Η σταθερά V' σε αυτή τη περίπτωση καλείται η i -οστή γενικευμένη σταθερά Poincaré-Lyapunov ή σταθερά Poincaré-Lyapunov τάξης i .

Οι τελεστές του συστήματος (5.9) και (5.10) είναι:

$$D = \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$E_i = X_i \frac{\partial}{\partial x} + Y_i \frac{\partial}{\partial y}$$

με $2 \leq i \leq n$. Αν η συνάρτηση F_i είναι ομογενής τάξης i ως προς x, y τότε και η $D(F_i)$ είναι τάξης i και η $E_i(F_j)$ είναι τάξης $i + j - 1$. Η απεικόνιση

$$G_k(F_2, F_3, \dots, F_k) = \sum_{i=2}^k E_i(F_{k-i+2}) = \sum_{i=0}^{k+1} g_{k+1} x^{k+1-i} y^i$$

είναι τάξης $k + 1$, όπου οι συναρτήσεις $F_p, V_{\frac{p}{2}-1}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις,

$$D(F_p) = G_{p-1} + V_{\frac{p}{2}-1} F_2^{\frac{p}{2}}$$

και

$$\begin{cases} V_{\frac{p}{2}-1} = 0 & p = 2k + 1 \\ V_{\frac{p}{2}-1} = -\frac{2^k \sum_{m=0}^k g_{p,2m} (2m-1)!! (2k-2m-1)!!}{\sum_{m=0}^k C_k^m (2m-1)!! (2k-2m-1)!!} & p = 2k \end{cases}$$

Παρόλα αυτά, οι απεικονίσεις F_{2k} δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Έστω $F_3, F_4, \dots, F_{2k}, \dots$ είναι λύση του συστήματος (5.9), (5.10). Επειδή η διαφορά της τάξης και του πίνακα των αγνώστων συντελεστών του F_{2k} είναι 1, η γενική λύση του F_{2k} εξαρτάται μόνο απο μια παράμετρο. Η γενική λύση τότε είναι

$$F_{2k}' = F_{2k} + A_{k-1} F_2^k$$

αφού $D(F_2^k) = 0$ για κάθε ακέραιο k . Επιλέγοντας διαφορετικές σταθερές A_1, \dots, A_{k-1} τότε η αντίστοιχη σταθερά Poincaré-Lyapunov αλλάζει.

Θεώρημα 16. Για το σύστημα των (5.9), (5.10), η σταθερά Poincaré-Lyapunov V_k τάξης k είναι μοναδικά ορισμένο modulo το ιδεώδες που γεννιέται απο V_1, \dots, V_{k-1} .

Ορολογία

α-οριακό σύνολο
ω-οριακό σύνολο
Ανισότητα Lojasiewicz
Οριακός κύκλος
Ασυμπτωτική Ευστάθεια
Αυτόνομο Σύστημα
Θεώρημα Bendixson
Θεώρημα Bezout
Περιοδική Τροχιά
Σημείο Ιδιομορφίας
Κανονικό Σημείο Ιδιομορφίας
Υπερβολικό Σημείο Ιδιομορφίας
Ημι-υπερβολικό Σημείο Ιδιομορφίας
Γραμμικό Μέρος
Ιακωβιανός Πίνακας
Blow-Up
Poincaré-Bendixson
Διαχωρίζουσα
Σάγμα
Κόμβος
Τοπολογική Ισοδυναμία
Διανυσματικό Πεδίο
Πορτραίτο Φάσεων
Θεώρημα Κανονικών Μορφών
Μηδενοδύναμες Ιδιομορφίες
Σταθερές Lyapunov

Βιβλιογραφία

Βουγιατζής, Γ. Μελετιδίου, Ε. (2015). *Εισαγωγή στα Μή Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα*. Αθήνα: Σύνδεμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Barreira, L. Valls, C. (2013). *Dynamical Systems: An Introduction*. London: Springer

Dumortier, F. Llibre, J. Artes J. (2006). *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Heidelberg: Springer

Μπούντης, Α. (1997). *Μή Γραμμικές Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού

Μυριτζής, Ι. (2015). *Δυναμικά Συστήματα*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. USA: Addison-Wesley Publishing Company

Jiang, Q. Llibre, J. (2005) *Qualitative Classification of Singular Points*. Qualitative Theory of Dynamical Systems 6, 87-167, Article No. 94