



Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακή Ειδίκευση Καθηγητών Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική Εργασία

Από τη μηχανική του Νεύτωνα στη μηχανική του Lagrange.
Εφαρμογή της Λαγκρανζιανής Μηχανικής στη μελέτη φυσικών
συστημάτων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Κανέλλος Μπάνος

Επιβλέπων καθηγητής: Απόστολος Τσιριγώτης

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Κανέλλου Μπάνου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Από τη μηχανική του Νεύτωνα στη μηχανική του Lagrange.
Εφαρμογή της Λαγκρανζιανής Μηχανικής στη μελέτη φυσικών
συστημάτων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Κανέλλος Μπάνος

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Απόστολος Τσιριγώτης

Μέλος Ε.ΔΙ.Π. Ε.Α.Π.

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Σταύρος Νόνης

Μεταδιδακτορικός Ερευνητής Ε.Α.Π.

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2026

*Αφιερώνω την εργασία αυτή
στον υιό μου Παναγιώτη
και τη σύντροφό μου Βίκυ
για τη στήριξη που μου πρόσφεραν στην εκπόνησή της*

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τη μετάβαση από τη Νευτώνεια Μηχανική στη Λαγκρανζιανή Μηχανική. Η εργασία έχει ως σκοπό, αφενός να παρουσιάσει με συστηματικό τρόπο μια εναλλακτική θεωρία για την περιγραφή των μηχανικών συστημάτων, την αναλυτική μηχανική κατά Lagrange, αφετέρου να την αξιοποιήσει για τη μελέτη φυσικών συστημάτων που συναντώνται στα προγράμματα σπουδών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Οι επιμέρους στόχοι της εργασίας είναι:

1. Να παρουσιάσει με εύληπτο τρόπο τις έννοιες που θεμελιώνουν τη Λαγκρανζιανή μηχανική.
2. Να αναδείξει την ανάγκη της μετάβασης από τη Νευτώνεια στη Λαγκρανζιανή θεώρηση.
3. Να καταγράψει τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η Λαγκρανζιανή θεώρηση σε σχέση με τη Νευτώνεια.
4. Να αναδείξει τη Λαγκρανζιανή προσέγγιση ως εναλλακτικό και συμπληρωματικό εργαλείο στη διδασκαλία της φυσικής.

Αρχικά, επιχειρείται μια ανασκόπηση της Νευτώνειας μηχανικής που περιλαμβάνει τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας, τους θεμελιώδεις νόμους της κίνησης και τη σχέση αυτών με τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα όρια ισχύος της θεωρίας, όπως και ορισμένα φαινόμενα που αδυνατεί να εξηγήσει. Επίσης, αναδεικνύονται οι περιορισμοί της Νευτώνειας προσέγγισης σε συστήματα που υπόκεινται σε περιορισμούς και στα οποία καθίσταται δύσκολη η διαχείριση των δυνάμεων που επιβάλλουν αυτούς τους περιορισμούς, όπως και η εξάρτηση από συγκεκριμένα συστήματα συντεταγμένων.

Το κύριο μέρος της εργασίας εστιάζει στη Λαγκρανζιανή θεώρηση, η οποία στηρίζεται στις αρχές των δυνατών έργων και του D' Alembert. Οι αρχές αυτές αποτελούν τη γέφυρα της μετάβασης από τη Νευτώνεια στη Λαγκρανζιανή μηχανική. Εισάγονται οι έννοιες των δεσμών, των βαθμών ελευθερίας και των γενικευμένων συντεταγμένων, ενώ αναπτύσσεται η Λαγκρανζιανή συνάρτηση ως θεμελιώδες εργαλείο ενεργειακής περιγραφής της κίνησης. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις Euler–Lagrange για συστήματα διατηρητικά και μη διατηρητικά, η έννοια των διατηρούμενων ποσοτήτων και η μεθοδολογία υπολογισμού των αντιδράσεων των δεσμών μέσω των πολλαπλασιαστών Λαγκράνζ.

Λέξεις-Κλειδιά

Νευτώνεια Μηχανική, Λαγκρανζιανή Μηχανική, δεσμοί, βαθμοί ελευθερίας, γενικευμένες συντεταγμένες, εξισώσεις Euler-Lagrange.

Application of Lagrangian Mechanics to the Study of Physical Systems in Secondary Education

Kanellos Banos

Abstract

This diploma thesis examines the transition from Newtonian to Lagrangian Mechanics. The purpose of the thesis is to systematically present an alternative theory for the description of mechanical systems, namely analytical mechanics according to Lagrange, and to apply it to the study of physical systems encountered in secondary education curricula.

The specific objectives of the thesis are:

1. To present in an accessible manner the concepts that form the foundation of Lagrangian mechanics.
2. To highlight the necessity of the transition from the Newtonian to the Lagrangian perspective.
3. To record the advantages offered by the Lagrangian approach in comparison with the Newtonian one.
4. To demonstrate the Lagrangian approach as an alternative and complementary tool in the teaching of physics.

The thesis offers an overview of Newtonian mechanics, including the law of universal gravitation, the fundamental laws of motion, and their relationship to the conservation of energy and momentum. Subsequently, it presents the limitations of the theory, along with certain phenomena that require further explanation. Additionally, the thesis highlights the limitations of the Newtonian approach in systems subject to constraints, where it becomes difficult to manage the forces imposing these constraints, as well as its dependence on specific coordinate systems.

The main part of the thesis focuses on the Lagrangian formulation, which is based on the principles of virtual work and d'Alembert's principle. These principles constitute the bridge for the transition from Newtonian to Lagrangian mechanics. The concepts of constraints, degrees of freedom, and generalized coordinates are also introduced, while the Lagrangian function is developed as a fundamental tool for the energy-based description of motion. Finally, the Euler–Lagrange equations

for conservative and non-conservative systems are presented, together with the concept of conserved quantities and the methodology for calculating constraint reactions through the use of Lagrange multipliers.

Keywords

Newtonian Mechanics, Lagrangian Mechanics, constraints, degrees of freedom, generalized coordinates, Euler-Lagrange equations.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract	vii
Περιεχόμενα	ix
Κατάλογος Σχημάτων	xi
Συνοτομογραφίες & Ακρωνύμια.....	xii
Κεφάλαιο 1. Ανασκόπηση της Νευτώνειας μηχανικής	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Θεμελιώδεις νόμοι.....	1
1.3 Από τον δεύτερο νόμο στη διατήρηση της ενέργειας	2
1.4 Ο τρίτος νόμος και τα εκτεταμένα σώματα.....	3
1.5 Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας	4
1.6 Τα όρια ισχύος της Νευτώνειας μηχανικής και τα φαινόμενα που αδυνατεί να εξηγήσει	4
Κεφάλαιο 2. Από τη Νευτώνεια στη Λαγκρανζιανή θεώρηση.....	6
2.1 Αναγκαιότητα της μετάβασης	6
2.2 Βαθμοί ελευθερίας, η έννοια του δεσμού και οι γενικευμένες συντεταγμένες.....	7
2.3 Από την αρχή των δυνατών έργων στις εξισώσεις Lagrange σε συστήματα με δεσμούς	10
2.4 Η συνάρτηση Lagrange και οι εξισώσεις Euler-Lagrange	14
2.5 Το ολοκλήρωμα Jacobi και οι διατηρούμενες ποσότητες	15
2.6 Πολλαπλασιαστές Lagrange και υπολογισμός των δυνάμεων που επιβάλλουν τους δεσμούς (αντιδράσεις δεσμών)	16
Κεφάλαιο 3. Εφαρμογές της Λαγκρανζιανής θεώρησης	23
3.1 Κίνηση σωματιδίου στο πεδίο βαρύτητας.....	23
3.2 Κίνηση σωματιδίου σε σταθερό κεκλιμένο επίπεδο	25
3.3 Κίνηση σωματιδίου επί κινούμενου κεκλιμένου επιπέδου	32
3.4 Αρμονικός ταλαντωτής	39
3.5 Απλό εκκρεμές	41
3.6 Κωνικό εκκρεμές.....	44
3.7 Περιστροφή ράβδου σε κατακόρυφο επίπεδο περί σταθερό άξονα.....	48

3.8 Σύνθετη κίνηση ράβδου σε κατακόρυφο επίπεδο με το ένα άκρο της να ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο.....	52
3.9 Κύλιση στερεού σώματος στο επίπεδο	58
3.10 Κίνηση σωματιδίου σε κυκλική τροχιά.....	61
3.11 Κίνηση δακτυλίου σε λείο συρμάτινο ημικυκλικό οδηγό προσδεμένο σε ελατήριο	65
3.12 Ελεύθερη κίνηση σωματιδίου σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση διατηρητικών δυνάμεων.....	74
3.13 Σύστημα περιστρεφόμενης τροχαλίας-σώματος δεμένα με νήμα.....	77
3.14 Μηχανή Atwood.....	80
3.15 Κίνηση σωματιδίου στο επίπεδο επί της καμπύλης $y = f(x)$	82
3.16 Κίνηση σωματιδίου στην επιφάνεια σφαίρας άνευ τριβών.....	85
Συμπεράσματα	92
Βιβλιογραφία.....	94

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1: Κίνηση σωματιδίου στο βαρυτικό πεδίο	23
Σχήμα 2: Μονοδιάστατη κίνηση σωματίου σε κεκλιμένο επίπεδο	26
Σχήμα 3: Από την ελεύθερη κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο Oxy , στη δεσμευμένη κίνησή του κατά μήκος του κεκλιμένου	27
Σχήμα 4: Μελέτη της κίνησης σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες στο νέο σύστημα αξόνων Oxy	29
Σχήμα 5: Κίνηση σωματιδίου σε κινούμενο κεκλιμένο επίπεδο	32
Σχήμα 6: Δυνάμεις μεταξύ σωματιδίου και κεκλιμένου επιπέδου.....	38
Σχήμα 7: Αρμονικός ταλαντωτής.....	39
Σχήμα 8: Απλό εκκρεμές.....	41
Σχήμα 9: Κωνικό Εκκρεμές	44
Σχήμα 10: Δυνάμεις στο κωνικό εκκρεμές	46
Σχήμα 11: Περιστροφή ράβδου γύρω από το ένα άκρο της	48
Σχήμα 12: Συντεταγμένες του άκρου O της ράβδου συναρτήσει αυτών του κέντρου μάζας	50
Σχήμα 13: Σύνθετη κίνηση ράβδου στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy	53
Σχήμα 14: Ελεύθερη κίνηση ράβδου στο επίπεδο Oxy για την εύρεση του δεσμού.....	53
Σχήμα 15: Κύλιση στερεού σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο	58
Σχήμα 16: Κίνηση σωματιδίου σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά.....	61
Σχήμα 17: Κίνηση δακτυλίου σε ημικυκλικό κατακόρυφο οδηγό, δεμένο σε ελατήριο	66
Σχήμα 18: Δυνάμεις στον δακτύλιο	71
Σχήμα 19: Σύστημα τροχαλία-σώμα.....	77
Σχήμα 20: Μηχανή Atwood.....	80
Σχήμα 21: Κίνηση σωματιδίου επί της καμπύλης $y = f(x)$ του επιπέδου Oxy	82
Σχήμα 22: Κίνηση σωματιδίου στην επιφάνεια σφαίρας.....	85

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

Δ.Ε.	Διπλωματική Εργασία
Ν.Μ.	Νευτώνεια Μηχανική
Λ.Μ.	Λαγκρανζιανή Μηχανική
Σ.Λ.	Συνάρτηση Λαγκράνζ
Ε-Λ	Εξισώσεις Euler-Lagrange
Π.Λ.	Πολλαπλασιαστές Λαγκράνζ

Κεφάλαιο 1. Ανασκόπηση της Νευτώνειας μηχανικής

1.1 Εισαγωγή

Η Νευτώνεια Μηχανική αποτελεί την πρώτη ολοκληρωμένη φυσική θεωρία για την περιγραφή της κίνησης. Οικοδομήθηκε τον 17ο αιώνα από τον Ισαάκ Νεύτωνα, ο οποίος μέσα από το έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* έθεσε τους νόμους που διέπουν τις κινήσεις όλων των υλικών σωμάτων και σε συνδυασμό με τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας ενοποίησε τις γήινες και ουράνιες κινήσεις υπό κοινές φυσικές αρχές. Αποτέλεσε, δε, την αφετηρία για μεταγενέστερες θεωρίες, όπως η Λαγκρανζιανή και η Χαμιλτονιανή μηχανική, καθώς και για τη σύγχρονη σχετικιστική και κβαντική φυσική.

1.2 Θεμελιώδεις νόμοι

Η Νευτώνεια μηχανική θεμελιώνεται στους τρεις νόμους της κίνησης και στην έννοια της δύναμης ως το αίτιο μεταβολής της κίνησης.

Πρώτος νόμος: Κάθε σώμα διατηρεί την κινητική κατάσταση (ηρεμία ή ομαλή κίνηση) στην οποία βρίσκεται αρχικά, εκτός αν αναγκαστεί να τη μεταβάλλει εξαιτίας των ασκούμενων σε αυτό δυνάμεων.

Ο νόμος αυτός, γνωστός και ως νόμος της αδράνειας, καθορίζει τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, δηλαδή τα συστήματα που είναι κατάλληλα για να περιγράψουν την εξέλιξη της κίνησης βάσει του δεύτερου νόμου.

Δεύτερος νόμος: Η μεταβολή της ορμής ενός σώματος είναι ανάλογη της δύναμης που δέχεται και λαμβάνει χώρα κατά τη διεύθυνση της ευθείας που ενεργεί αυτή η δύναμη:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Αν η μάζα είναι σταθερή, τότε παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ο νόμος αυτός, γνωστός και ως θεμελιώδης νόμος της μηχανικής, διέπει την εξέλιξη της κίνησης των σωμάτων, όταν σε αυτά ασκούνται καθορισμένες δυνάμεις.

Τρίτος νόμος: Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, τότε ανεξάρτητα από τη φύση της αλληλεπίδρασης και το μέγεθός τους, οι ασκούμενες δυνάμεις από το ένα στο άλλο είναι πάντα αντίθετες: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

1.3 Από τον δεύτερο νόμο στη διατήρηση της ενέργειας

Με αφετηρία τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μπορούμε να καταλήξουμε στη διατήρηση της ενέργειας.

Έστω ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται σε μια διάσταση (άξονας x) και υπόκειται σε μια δύναμη $F(x)$ που είναι συνάρτηση μόνο της θέσης του x στον άξονα. Παίρνουμε το δεύτερο νόμο και πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη με την ταχύτητα v του σωματιδίου:

$$F(x) = ma = m \frac{dv}{dt} \rightarrow F(x)v = m \frac{dv}{dt} v \rightarrow F(x) \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)$$

όπου η ποσότητα $\frac{1}{2} mv^2$ καλείται κινητική ενέργεια του σώματος.

Η δύναμη F , ως συνάρτηση μόνο της θέσης, είναι διατηρητική, επομένως υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V(x)$, που καλείται δυναμική ενέργεια, τέτοια ώστε:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Επιστρέφοντας στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \rightarrow -\frac{d}{dt} V(x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + V(x) \right) &= 0 \rightarrow \frac{1}{2} mv^2 + V(x) = E = \text{σταθ.} \end{aligned}$$

Καταλήξαμε ότι το άθροισμα των δύο ενεργειών που είναι η ολική ενέργεια E του σωματιδίου διατηρείται κατά την κίνησή του.

Η διατήρηση της ενέργειας γενικεύεται και για κίνηση στις τρεις διαστάσεις.

1.4 Ο τρίτος νόμος και τα εκτεταμένα σώματα

Οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν ρητά για σωματίδια αμελητέων διαστάσεων. Αν λοιπόν, είναι γνωστή η ασκούμενη δύναμη σε ένα σωματίδιο, τότε η εφαρμογή του δεύτερου νόμου λύνει το πρόβλημα της κίνησης υπό την έννοια ότι, αν είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες, τότε μπορεί να προβλέψει την εξέλιξη αυτής στον χρόνο.

Στο σημείο αυτό ίσως αναρωτηθεί κάποιος για τη χρησιμότητα του τρίτου νόμου, αφού σε πρώτη ανάγνωση δε φαίνεται να παίζει κάποιο ρόλο στον καθορισμό της κίνησης ενός σωματιδίου.

Ας μελετήσουμε τώρα την κίνηση ενός στερεού σώματος που κινείται στον χώρο χωρίς να περιστρέφεται, θεωρώντας ότι απαρτίζεται από N υλικά σημεία. Τότε η δύναμη σε καθένα από αυτά θα είναι το άθροισμα των δυνάμεων αλληλεπίδρασης από τα υπόλοιπα $N - 1$ σωματίδια και της δύναμης της βαρύτητας.

Δεδομένου ότι το στερεό κινείται χωρίς να αλλάζει προσανατολισμό, συνεπάγεται ότι αυτό κινείται ως όλον με αποτέλεσμα όλα τα σωματίδιά του να έχουν την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$, οπότε, αν εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο για κάθε σωματίδιο και αθροίσουμε τις σχέσεις κατά μέλη, τότε οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης θα δώσουν συνολικά μηδενικό αποτέλεσμα λόγω του τρίτου νόμου (αφού για κάθε ζεύγος σωματιδίων αν $\vec{F}_{i \rightarrow j}$ είναι η δύναμη στο j -οστό σωματίδιο από το i -οστό με $i \neq j$ τότε θα εμφανιστεί και η αντίθετη δύναμη $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ από το j -οστό σωματίδιο στο i -οστό σωματίδιο, οπότε $\vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = 0$) και θα προκύψει

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{a} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{g} \rightarrow m \vec{a} = \vec{B}$$

όπου m και $\vec{B}$ είναι η μάζα και το βάρος του στερεού, αντίστοιχα.

Καταλήξαμε σε μία σχέση που δεν είναι τίποτα άλλο από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για ολόκληρο το στερεό σώμα.

Η χρησιμότητα του τρίτου νόμου, λοιπόν, αναδεικνύεται στα συστήματα σωματιδίων όπου δίνει την δυνατότητα να τα αντιμετωπίζουμε ως ένα ενιαίο σώμα και ειδικότερα τα στερεά σώματα να τα μελετάμε ως προς την μεταφορική τους κίνηση σαν να ήταν σωματίδια και όχι σώματα με διαστάσεις.

Η δεύτερη σπουδαία συνεισφορά του τρίτου νόμου έγκειται στη διατήρηση της ορμής ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων, μιας και οι εσωτερικές δυνάμεις δρουν ως ζεύγη δράσης-αντίδρασης και αλληλοεξουδετερώνονται.

1.5 Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας

Ο Νεύτωνας ανακάλυψε τον νόμο της παγκόσμιας έλξης γνωρίζοντας από τους νόμους του Κέπλερ ότι η τροχιά των πλανητών κατά την περιφορά τους γύρω από τον Ήλιο είναι ελλειπτική.

Ο νόμος αυτός πρεσβεύει ότι κάθε σώμα στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο με δύναμη που δρα στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους και είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης που τα χωρίζει:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Η τιμή της σταθεράς αναλογίας G , γνωστής ως σταθερά της παγκόσμιας έλξης, σχετίζεται με την ισχύ της βαρύτητας ως θεμελιώδους δύναμης. Ο νόμος αποτελεί ένα μεγάλο ενοποιητικό βήμα στη φυσική υπό την έννοια ότι περιγράφει τόσο τις κινήσεις των σωμάτων στην Γη, όσο και τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων.

1.6 Τα όρια ισχύος της Νευτώνειας μηχανικής και τα φαινόμενα που αδυνατεί να εξηγήσει

Η Νευτώνεια μηχανική αποτέλεσε την πρώτη θεμελιώδη θεωρία για την περιγραφή της κίνησης των σωμάτων. Στηρίζεται στην έννοια του απόλυτου χώρου που είναι τρισδιάστατος και ευκλείδειος και στην έννοια του απόλυτου χρόνου που ρέει ομοιόμορφα και είναι κοινός για όλους τους παρατηρητές. Επιπλέον, καθορίζει πλήρως την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος μέσω αιτιοκρατικών νόμων κίνησης, αν πλέον των ασκούμενων δυνάμεων δοθούν και οι αρχικές συνθήκες.

Παρότι η Νευτώνεια θεώρηση υπήρξε αδιαμφισβήτητα μια εξαιρετικά επιτυχής θεωρία, έχει σαφή όρια εγκυρότητας, πέραν των οποίων δίνει λανθασμένα αποτελέσματα. Έτσι, περιγράφει με ακρίβεια την κίνηση μακροσκοπικών σωμάτων, όταν οι ταχύτητές τους είναι μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός. Αντίθετα, στην περίπτωση των υψηλών ταχυτήτων το καταλληλότερο πλαίσιο για την περιγραφή της κίνησης είναι η ειδική θεωρία

της σχετικότητας, καθ' ότι τα πειραματικά δεδομένα επιβεβαιώνουν φαινόμενα όπως η διαστολή του χρόνου, η συστολή του μήκους, η εξάρτηση της μάζας από την ταχύτητα κ.λπ.

Ένα δεύτερο σημαντικό όριο της Νευτώνειας μηχανικής εμφανίζεται στην περιγραφή της κίνησης σε ισχυρά βαρυτικά πεδία. Ο Νεύτωνας αντιλαμβάνεται τη βαρυτική αλληλεπίδραση ως δύναμη που διαδίδεται ακαριαία στο χώρο, χωρίς να επηρεάζει τη γεωμετρία του χώρου και του χρόνου. Όμως, τίποτα δεν μπορεί να διαδοθεί γρηγορότερα από το φως σύμφωνα με την θεωρία της Σχετικότητας. Επίσης, δεν μπορεί να εξηγήσει επακριβώς φαινόμενα όπως η μετάπτωση του περιηλίου του πλανήτη Ερμή ή η εκτροπή του φωτός από ένα ισχυρό βαρυτικό πεδίο, μιας και τα φωτόνια δεν έχουν μάζα. Τα παραπάνω υποδεικνύουν ότι η βαρύτητα δεν μπορεί να εξηγηθεί επαρκώς στο πλαίσιο της Νευτώνειας δυναμικής.

Σημαντική, επίσης, είναι η αποτυχία της Νευτώνειας θεωρίας να περιγράψει την κίνηση μικροσκοπικών σωματιδίων. Η θεωρία προϋποθέτει ότι η θέση και η ταχύτητα κάθε σωματιδίου προσδιορίζεται επακριβώς κάθε χρονική στιγμή και ως εκ τούτου αυτό ακολουθεί μια καλά ορισμένη τροχιά. Ωστόσο, σε ατομικές και υποατομικές κλίμακες, η έννοια της κλασικής τροχιάς καθίσταται ανεπαρκής διότι τα σωματίδια εμφανίζουν και κυματικές ιδιότητες και υπόκεινται στην αρχή της απροσδιοριστίας. Η αδυναμία αυτή γίνεται ιδιαίτερα εμφανής σε περιπτώσεις εγκλωβισμού σωματιδίων σε πολύ μικρές περιοχές του χώρου, όπου η ενέργεια παίρνει διακριτές τιμές και όχι συνεχείς, όπως απαιτεί η Νευτώνεια μηχανική.

Συνοψίζοντας, η μηχανική του Νεύτωνα δεν αποτελεί μια καθολική θεωρία της κίνησης, αλλά ειδική περίπτωση ευρύτερων φυσικών θεωριών.

Κεφάλαιο 2. Από τη Νευτώνεια στη Λαγκρανζιανή θεώρηση

2.1 Αναγκαιότητα της μετάβασης

Η Νευτώνεια μηχανική ερμήνευσε πληθώρα φαινομένων με ιδιαίτερη επιτυχία για αρκετούς αιώνες. Η επιτυχία αυτή ώθησε την επιστημονική κοινότητα στην αναζήτηση μορφοποίησης της θεωρίας σε μια πιο ευέλικτη στην πράξη μορφή. Δημιουργήθηκε έτσι η Λαγκρανζιανή θεώρηση της μηχανικής, η οποία επιλύει με πιο συστηματικό και απλό τρόπο τα προβλήματα της μηχανικής, υπερκεράζοντας ορισμένα μειονεκτήματα της Νευτώνειας θεωρίας, τα σημαντικότερα απ' τα οποία είναι:

- **Δυσκολία εφαρμογής του δεύτερου Νευτώνειου νόμου**

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange διατηρούν την ίδια μορφή ανεξάρτητα από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, σε αντίθεση με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα που αλλάζει μορφή και μάλιστα είναι πιο πολύπλοκος στα μη καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων (πολικό, σφαιρικό και κυλινδρικό), επειδή η επιτάχυνση περιλαμβάνει περισσότερους όρους απ' ότι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, όπου εμφανίζεται ως η δεύτερη παράγωγος της θέσης. Επιπρόσθετα, ενώ στον δεύτερο νόμο υπεισέρχονται διανυσματικές ποσότητες (δύναμη, επιτάχυνση), η λαγκρανζιανή θεώρηση χρησιμοποιεί βαθμωτές ποσότητες (κινητική, δυναμική ενέργεια) που ο χειρισμός τους είναι ευκολότερος έναντι των διανυσμάτων.

- **Απαλλαγή από τις δυνάμεις των δεσμών στη Λαγκρανζιανή μηχανική**

Η μελέτη της κίνησης ενός συστήματος στη Νευτώνεια μηχανική στηρίζεται στην εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και στους υπολογισμούς υπεισέρχονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα. Αν υπάρχουν δεσμοί (περιορισμοί) στην κίνηση του συστήματος, τότε εκτός των πραγματικών δυνάμεων, ασκούνται και οι δυνάμεις που επιβάλλουν τους περιορισμούς αυτούς, οι οποίες δεν είναι εκ των προτέρων γνωστές.

Αντίθετα, στην Λαγκρανζιανή θεώρηση μπορούν να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κίνησης χωρίς την ανάγκη υπολογισμού των δυνάμεων που επιβάλλουν τους δεσμούς, αφού αυτοί μπορούν να ενσωματωθούν απευθείας στη συνάρτηση Lagrange που περιγράφει το σύστημα. Η απαλλαγή από τις δυνάμεις των δεσμών καθιστά την Λαγκρανζιανή μηχανική αποτελεσματική καθώς μειώνει τον αριθμό των εξισώσεων και απλοποιεί την μαθηματική ανάλυση.

- **Ευχέρεια επιλογής των κατάλληλων συντεταγμένων ανά φυσικό σύστημα**

Στη λαγκρανζιανή μηχανική, ανάλογα με τη γεωμετρία και τους περιορισμούς που επιβάλλονται στο υπό μελέτη φυσικό σύστημα, δίνεται η δυνατότητα επιλογής των κατάλληλων συντεταγμένων που οδηγούν σε απλούστερες εξισώσεις. Οι συντεταγμένες αυτές, γνωστές ως γενικευμένες συντεταγμένες, ισούνται σε αριθμό με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του δεσμευμένου συστήματος και αρκούν για τη μαθηματική περιγραφή του.

2.2 Βαθμοί ελευθερίας, η έννοια του δεσμού και οι γενικευμένες συντεταγμένες

Οι βαθμοί ελευθερίας ενός συστήματος στη μηχανική ορίζονται ως το πλήθος των ανεξάρτητων συντεταγμένων που απαιτούνται για να καθοριστεί πλήρως η θέση του.

Έτσι, οι βαθμοί ελευθερίας:

- είναι τρεις για ένα σωματίδιο, αν αυτό κινείται ελεύθερα στον χώρο και δύο, αν κινείται ελεύθερα σε ένα επίπεδο,
- είναι έξι για ένα στερεό σώμα, αν κινείται ελεύθερα στον χώρο (τρεις για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας και τρεις για τις δυνατές περιστροφές περί των αξόνων x, y και z) και τρεις, αν αυτό κινείται ελεύθερα σε ένα επίπεδο (δύο για τη μεταφορά και ένας για την περιστροφή),
- είναι $3N$ για ένα σύστημα N σωματιδίων, αν κινούνται ελεύθερα στον χώρο και $2N$ αν κινούνται ελεύθερα σε ένα επίπεδο.

Ελεύθερη κίνηση ενός συστήματος σημαίνει ότι δεν υπάρχει κάποιο αίτιο που να περιορίζει τις θέσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί καθώς και τις κατευθύνσεις στις οποίες μπορεί να κινηθεί. Συχνά, όμως, στην κίνηση των σωμάτων επιβάλλονται περιορισμοί που καλούνται δεσμοί. Οι δεσμοί επιβάλλονται από δυνάμεις που λέγονται αντιδράσεις δεσμών.

Δυνάμεις δεσμών συναντώνται σε ποικίλες περιπτώσεις:

- Κίνηση σωματιδίου σε καμπύλη ή επιφάνεια.
- Περιστροφή γύρω από ακλόνητο άξονα, όπου οι δυνάμεις στήριξης εμποδίζουν την μεταφορά του σώματος.

- Συστήματα συνδεδεμένων σωμάτων μέσω νημάτων, αρθρώσεων ή τροχαλίων.
- Κύλιση στερεού, όπου η στατική τριβή δρα ως δύναμη δεσμού.
- Εσωτερικοί δεσμοί στα στερεά σώματα, που διατηρούν σταθερές τις αποστάσεις μεταξύ των υλικών σημείων τους.

Οι δεσμοί στους οποίους υπόκειται ένα μηχανικό σύστημα ταξινομούνται σε διάφορες κατηγορίες αλλά για τις ανάγκες της εργασίας θα εστιάσουμε σε ένα είδος δεσμών που καλούνται ολόνομοι δεσμοί και εκφράζονται μέσω εξισώσεων που συνδέουν τις συντεταγμένες που καθορίζουν τη θέση του συστήματος (όχι των ταχυτήτων). Οι δεσμοί αυτοί είναι δυνατόν να εξαρτώνται από τον χρόνο, οπότε καλούνται ρεόνομοι, ή όχι, οπότε καλούνται σκληρόνομοι.

Για να περιγράψουμε ένα σύστημα που υπόκειται σε δεσμούς, πρέπει να βρούμε τους βαθμούς ελευθερίας του. Αυτοί θα προκύψουν, αν από το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του αντίστοιχου ελεύθερου συστήματος (χωρίς περιορισμούς), αφαιρέσουμε το πλήθος των δεσμών. Για παράδειγμα, αν ένα σύστημα N σωματιδίων κινείται ελεύθερα στον χώρο και υπόκειται σε κ το πλήθος δεσμούς, τότε οι βαθμοί ελευθερίας του δεσμευμένου συστήματος θα είναι n το πλήθος με:

$$n = 3N - \kappa$$

Τις n αυτές ανεξάρτητες συντεταγμένες τις συμβολίζουμε με q_i , όπου $i = 1, 2 \dots n$ και τις ονομάζουμε γενικευμένες συντεταγμένες. Κάθε γενικευμένη συντεταγμένη μπορεί να εκφράζει απόσταση ή γωνία. Η κατάλληλη επιλογή των συντεταγμένων αυτών μπορεί να απλοποιήσει τη μαθηματική περιγραφή του συστήματος.

Για να γίνουν κατανοητά όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω θα αναφέρουμε δύο παραδείγματα:

- *Περιορισμός κίνησης σε σφαιρική επιφάνεια*

Το σωματίδιο δεσμεύεται κατά την κίνησή του, γιατί πρέπει να απέχει σταθερή απόσταση από το κέντρο της σφαίρας, επομένως δεν μπορεί να κινηθεί ελεύθερα στον χώρο. Μαθηματικά ο περιορισμός (δεσμός) εκφράζεται μέσω της σχέσης:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

και η εξίσωση του δεσμού είναι της μορφής:

$$f(x, y, z) = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

Επιτρέπονται μόνο οι μετατοπίσεις που διατηρούν το σωματίδιο στην επιφάνεια της σφαίρας και όχι αυτές προς το εσωτερικό ή το εξωτερικό της σφαίρας. Από τη σχέση του δεσμού προκύπτει ότι δύο συντεταγμένες εκ των x, y και z είναι ανεξάρτητες, οπότε οι βαθμοί ελευθερίας μειώνονται από τρεις (ελεύθερο σωματίδιο στο χώρο) σε δύο. Ως γενικευμένες συντεταγμένες μπορούμε να επιλέξουμε δύο εκ των καρτεσιανών συντεταγμένων ή καλύτερα λόγω σφαιρικής συμμετρίας ενδείκνυται να επιλέξουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες (θ, φ) των σφαιρικών συντεταγμένων.

- *Απλό εκκρεμές*

Σφαιρίδιο δεμένο στο ένα άκρο ενός μη εκτατού νήματος κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν η κίνηση ήταν ελεύθερη, η θέση του σωματιδίου θα καθοριζόταν από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) ή από τις πολικές (r, θ) . Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό, η απόσταση του σφαιριδίου από το σημείο ανάρτησης του νήματος πρέπει να διατηρείται σταθερή και ίση με το μήκος του, άρα η κίνηση παύει να είναι ελεύθερη και το σφαιρίδιο δεσμεύεται να κινείται πάνω στον κύκλο ακτίνας ℓ .

Μαθηματικά ο δεσμός εκφράζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω της σχέσης:

$$x^2 + y^2 = \ell^2,$$

με εξίσωση:

$$f(x, y) = 0 = x^2 + y^2 - \ell^2$$

ενώ σε πολικές συντεταγμένες μέσω της σχέσης:

$$r = \ell,$$

με εξίσωση:

$$f(r, \theta) = 0 = r - \ell$$

Ο δεσμός μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας από δύο σε έναν και η περιγραφή της μπορεί να γίνει από μια καρτεσιανή συντεταγμένη ή τη γωνία θ που είναι η ενδεδειγμένη επιλογή.

2.3 Από την αρχή των δυνατών έργων στις εξισώσεις Lagrange σε συστήματα με δεσμούς

Όπως είναι γνωστό, ένα σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, αν η ασκούμενη σε αυτό δύναμη είναι μηδενική. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να διατυπώσουμε την συνθήκη ισορροπίας μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας την έννοια του έργου δύναμης. Ας θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο, ενώ ισορροπεί, μετατοπίζεται απειροελάχιστα, τότε για να διατηρείται σε ισορροπία θα πρέπει το έργο της δύναμης να είναι μηδενικό για κάθε τέτοια απειροστή μετατόπιση.

Αντίστοιχα, η κατάσταση ισορροπίας ενός συστήματος N σωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί ως εκείνη στην οποία το δυνατό έργο των πραγματικών δυνάμεων είναι μηδενικό για όλες τις απειροστές μετατοπίσεις των σωματιδίων:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Η παραπάνω πρόταση ισορροπίας αποτελεί την *αρχή των δυνατών έργων*.

Οι μετατοπίσεις $\delta \vec{r}_i$ για τις οποίες μιλάμε, καλούνται δυνατές μετατοπίσεις και δεν έχουν καμία σχέση με τις πραγματικές μετατοπίσεις, οι οποίες λαμβάνουν χώρα προϊόντος του χρόνου και μετατοπίζουν τα σωματίδια από την ισορροπία. Αντίθετα, είναι εικονικές, μη πραγματοποιήσιμες και στιγμιαίες μετατοπίσεις (δεν έχουν χρονικό «πάχος»), τις οποίες φανταζόμαστε για να υπολογίσουμε το έργο των δυνάμεων, αν αυτές πραγματοποιούνταν. Είναι μετακινήσεις που θα μπορούσαν να κάνουν τα σωματίδια χωρίς να παραβιάζουν τους περιορισμούς του συστήματος.

Για παράδειγμα, αν ένα σώμα περιορίζεται να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο, τότε δυνατή μετατόπιση είναι κάθε υποθετική μετατόπιση επί του επιπέδου, ενώ μετατόπιση που θέτει το σώμα εκτός του επιπέδου δεν είναι επιτρεπτή, γιατί παραβιάζει τον περιορισμό.

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι το απλό εκκρεμές, όπου κάθε υποθετική μετατόπιση κάθετη στο νήμα είναι επιτρεπτή, σε αντίθεση με μετατοπίσεις προς ή από το σημείο στήριξης του νήματος, οι οποίες δεν είναι επιτρεπτές μιας και παραβιάζουν τον δεσμό, ο οποίος επιβάλλει στο σωματίδιο να απέχει σταθερή απόσταση από το σημείο αυτό.

Έστω τώρα ότι το σύστημα των N σωματιδίων υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς.

Τις δυνάμεις που ενεργούν σε αυτό τις διακρίνουμε σε:

- *Πραγματικές δυνάμεις*: είναι οι δυνάμεις που προκαλούν την κίνηση ή προσπαθούν να τη μεταβάλλουν και πηγάζουν από φυσικά αίτια όπως πεδία (βαρυτικό, ηλεκτρικό, μαγνητικό), ελατήρια, εξωτερικές ωθήσεις, δυνάμεις κινητικής τριβής κ.λπ.
- *Δυνάμεις δεσμών*: είναι οι δυνάμεις που επιβάλλουν τους περιορισμούς στην κίνηση και υποχρεώνουν τα σωματίδια να κινούνται με τρόπο συμβατό με τη γεωμετρία του δεσμού.

Η συνολική δύναμη σε κάθε σωματίδιο του συστήματος τότε θα είναι το άθροισμα της πραγματικής δύναμης $\vec{F}_i$ και της αντίδρασης του δεσμού $\vec{R}_i$, όπου i ο δείκτης του σωματιδίου και επειδή το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία ισχύει:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Αθροίζοντας για όλα τα σωματίδια παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

και λόγω της αρχής των δυνατών έργων καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι το έργο των δυνάμεων των δεσμών στις δυνατές μετατοπίσεις σε ένα μηχανικό σύστημα είναι μηδενικό, απ' όπου προκύπτει ότι οι δυνάμεις των δεσμών είναι κάθετες στις δυνατές μετατοπίσεις.

Αν το σύστημα των σωματιδίων τώρα βρίσκεται σε κίνηση, η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για το i -οστό σωματίδιο δίνει:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i \rightarrow \vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0,$$

όπου η ποσότητα $-m_i \vec{a}_i$ καλείται δύναμη αδράνειας. Η σχέση αυτή εκφράζει την ισορροπία του σωματιδίου όπως την αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με αυτό. Επεκτείνοντας τη σχέση αυτή στο σύστημα των σωματιδίων και θεωρώντας ως $\delta \vec{r}_i$ την δυνατή μετατόπιση του i -οστού σωματιδίου που είναι συμβατή με τους περιορισμούς στους

οποίους υπόκειται το σύστημα, τότε εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών έργων, καταλήγουμε στην αρχή D' Alembert:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + 0 = 0 \rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Η αρχή αυτή αναγάγει ένα δυναμικό πρόβλημα κίνησης σε στατικό και δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις της κίνησης χωρίς να λάβουμε υπόψη τις δυνάμεις των δεσμών, πράγμα το οποίο δεν είναι εφικτό, όταν η περιγραφή γίνεται ακολουθώντας τους νόμους του Νεύτωνα.

Με αφετηρία την αρχή D' Alembert, την εισαγωγή των γενικευμένων συντεταγμένων και την κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία καταλήγουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange την οποία θα παρουσιάσουμε συνοπτικά:

Έστω ότι το σύστημα περιγράφεται από κ το πλήθος γενικευμένες συντεταγμένες q_j με $j = 1, 2, \dots, \kappa$.

Εκφράζουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$ του i -οστού σωματιδίου με $i = 1, 2, \dots, N$, ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων και του χρόνου:

$$\vec{r}_i = f(q_1, q_2, \dots, q_\kappa, t),$$

Οι δυνατές μετατοπίσεις, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ γράφονται:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Αντικαθιστώντας στην αρχή D' Alembert παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

και αλλάζοντας την σειρά των αθροισμάτων:

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \left[\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Λόγω ανεξαρτησίας των δq_j προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0$$

Ορίζουμε τις γενικευμένες δυνάμεις:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

και η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Οι εξισώσεις Lagrange στις οποίες καταλήγουμε είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Αν οι δυνάμεις είναι διατηρητικές και προέρχονται από δυναμικό, το οποίο είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων (και ενδεχομένως του χρόνου):

$$V = V(q_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

τότε:

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Ορίζοντας την συνάρτηση *Lagrange*:

$$L = T - V$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις *Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

2.4 Η συνάρτηση Lagrange και οι εξισώσεις Euler-Lagrange

Η δυναμική ενός μηχανικού συστήματος περιγράφεται μέσω της συνάρτησης *Lagrange*, μιας βαθμωτής συνάρτησης που ορίζεται από τη σχέση:

$$L = T - V$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος και V η δυναμική του ενέργεια. Για να εκφράσουμε τις ενέργειες αυτές, πρέπει να βρούμε το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του συστήματος και στη συνέχεια να επιλέξουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες q_j με τις οποίες θα το περιγράψουμε, οπότε η συνάρτηση L θα είναι μια συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων, των γενικευμένων ταχυτήτων και ενδεχομένως του χρόνου:

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Η λαγκρανζιανή συνάρτηση περιγράφει πλήρως το σύστημα, διότι σε αυτή είναι κρυμμένη η φυσική του προβλήματος και οι συμμετρίες του συστήματος από τις οποίες θα προκύψουν οι διατηρούμενες ποσότητες.

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης δίνονται μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Αν στο σύστημα ενεργούν και μη συντηρητικές δυνάμεις, τότε οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

όπου η λαγκρανζιανή περιγράφει μόνο τις συντηρητικές δυνάμεις και Q_j είναι οι γενικευμένες μη συντηρητικές δυνάμεις:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Τέλος $\vec{F}_i$ είναι η συνισταμένη των μη συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνται στο i -οστό σωματίδιο.

2.5 Το ολοκλήρωμα Jacobi και οι διατηρούμενες ποσότητες

Έστω $L = L(q, \dot{q}, t)$ η λαγκρανζιανή ενός συστήματος με έναν βαθμό ελευθερίας που περιγράφεται από την γενικευμένη συντεταγμένη q . Ο ρυθμός μεταβολής της λαγκρανζιανής είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \rightarrow \rightarrow \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt} \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] = \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Αν η λαγκρανζιανή δεν έχει ρητή εξάρτηση από το χρόνο ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), τότε παίρνουμε:

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} = \text{σταθ.}$$

Αντίστοιχα, αν το σύστημα έχει n βαθμούς ελευθερίας και q_j οι γενικευμένες συντεταγμένες με $j = 1, 2, \dots, n$, τότε θα ισχύει:

$$J = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{σταθ.}$$

Η ποσότητα είναι γνωστή ως ολοκλήρωμα Jacobi.

Διατηρούμενες ποσότητες

- *Ενέργεια:* Αν πλέον της λαγκρανζιανής, ο χρόνος δεν εμφανίζεται ρητά και στις εξισώσεις των δεσμών, τότε το ολοκλήρωμα Jacobi ταυτίζεται με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας και εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας.

- Γενικευμένη ορμή: ορίζεται από την σχέση $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ και αντιστοιχεί στην γενικευμένη συντεταγμένη q_j .

Αν η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από την συντεταγμένη q_j (δηλαδή $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$), τότε η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή διατηρείται:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{σταθ.}$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από τις εξισώσεις Euler-Lagrange ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = \text{σταθ.}$$

2.6 Πολλαπλασιαστές Lagrange και υπολογισμός των δυνάμεων που επιβάλλουν τους δεσμούς (αντιδράσεις δεσμών)

Έστω ένα μηχανικό σύστημα που υπόκειται σε δεσμούς. Αντιδράσεις δεσμών καλούνται οι γενικευμένες δυνάμεις που επιβάλλουν τους περιορισμούς αυτούς στην κίνηση του συστήματος.

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων αυτών ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

- Βρίσκουμε τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, χωρίς να λάβουμε υπόψη τους δεσμούς.
- Επιλέγουμε γενικευμένες συντεταγμένες, ίσες σε αριθμό με τους βαθμούς ελευθερίας, για τη μαθηματική περιγραφή και γράφουμε τη συνάρτηση Lagrange L που αντιστοιχεί στην ελεύθερη κίνηση του συστήματος:

$$L = T - V$$

- Εισάγουμε τους δεσμούς στη συνάρτηση αυτή, μέσω πολλαπλασιαστών Lagrange, που είναι ίσοι σε πλήθος με αυτούς και έτσι προκύπτει η λαγκρανζιανή $\mathcal{L}$ του δεσμευμένου συστήματος:

$$\mathcal{L} = T - V + \sum_i \lambda_i f_i$$

όπου f_i είναι οι εξισώσεις των δεσμών και λ_i είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange, οι οποίοι λογίζονται ως μεταβλητές του προβλήματος, αυξάνοντας έτσι τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

- Γράφουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange.
- Επιβάλλουμε τους δεσμούς στις εξισώσεις αυτές.

Η γενικευμένη δύναμη που απορρέει από τον εκάστοτε δεσμό με εξίσωση f_i δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F}_{\text{δεσμού},i} = \lambda_i (\vec{\nabla} f_i)$$

όπου $\vec{\nabla} f_i$ είναι ένα διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση της δύναμης που επιβάλλει τον δεσμό αυτό.

Η ποσότητα $\vec{\nabla}$ είναι ένας διαφορικός τελεστής που δρα σε μια συνάρτηση μετασχηματίζοντάς την και ορίζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k},$$

ενώ όταν δρα σε μια βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z)$ δίνει την κλίση της:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος της κλίσης είναι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης ως προς κάθε μεταβλητή της. Η μερική παράγωγος ως προς μια μεταβλητή, για παράδειγμα την x , δείχνει πόσο αλλάζει η τιμή της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται μόνο η μεταβλητή x και κατά την παραγωγή οι y και z θεωρούνται σταθερές ποσότητες και όχι μεταβλητές.

Αντίστοιχα σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) , η κλίση μιας συνάρτησης $g = g(r, \varphi)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\nabla} g(r, \varphi) = \frac{\partial g}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Η απειροστή μεταβολή της συνάρτησης $f(x, y, z)$ για απειροστή μετατόπιση

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

στον χώρο, είναι:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \rightarrow$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Ένας δεσμός στη μηχανική εκφράζεται με μια εξίσωση της μορφής:

$$f(x, y, z) = 0$$

που ορίζει τον επιτρεπτό χώρο κίνησης του σωματιδίου, ο οποίος μπορεί να είναι μια επιφάνεια ή καμπύλη. Για παράδειγμα ο δεσμός:

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

περιορίζει την κίνηση του σωματιδίου στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R , ενώ ο δεσμός:

$$f = x^2 - y^2 - \ell^2 = 0$$

περιορίζει την κίνηση στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας ℓ (απλό εκκρεμές).

Το σωματίδιο μπορεί να κινείται μόνο επί της επιφάνειας, άρα οι επιτρεπτές μετατοπίσεις (ή αλλιώς δυνατές μετατοπίσεις $\delta\vec{r}$) είναι εφαπτόμενες σε αυτή ώστε να είναι συμβατές με τον δεσμό.

Για τις δυνατές μετατοπίσεις $\delta\vec{r}$ ισχύει:

$$\delta f = \vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλίση του δεσμού $\vec{\nabla} f$ είναι κάθετη σε κάθε δυνατή μετατόπιση.

$$\vec{\nabla} f \perp \delta\vec{r}$$

Συνεπώς και η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό:

$$\vec{F}_\delta = \lambda(\vec{\nabla} f),$$

όντας ανάλογη της κλίσης, δεν παράγει έργο στις δυνατές μετατοπίσεις και έχει διεύθυνση κάθετη στον επιτρεπτό χώρο κίνησης. Ο ρόλος της είναι να συγκρατεί το σωματίδιο πάνω στον χώρο αυτό χωρίς να του προσδίδει ή να του αφαιρεί ενέργεια.

- Για να γίνουν κατανοητά όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω ένα σωματίδιο που δεσμεύεται να κινείται πάνω στην καμπύλη $y = x^2$, σε κατακόρυφο επίπεδο, εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$.

Η εξίσωση του δεσμού τότε είναι:

$$f(x, y) = y - x^2 = 0 \quad (1)$$

Για την μελέτη του προβλήματος υπάρχουν δύο τρόποι εργασίας, τους οποίους θα αναλύσουμε:

A. Κατασκευάζουμε τη λαγκρανζιανή του συστήματος επιβάλλοντας εξαρχής τον δεσμό σε αυτή, μειώνοντας έτσι τους βαθμούς ελευθερίας του σε έναν.

B. Κατασκευάζουμε τη λαγκρανζιανή του συστήματος, θεωρώντας το σύστημα ελεύθερο (χωρίς περιορισμούς) και στη συνέχεια εισάγουμε σε αυτήν τον δεσμό, μέσω ενός πολλαπλασιαστή λαγκράνζ λ , ο οποίος θα λογίζεται ως μεταβλητή, αυξάνοντας έτσι τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος σε τρεις (x, y, λ) . Το κέρδος στην περίπτωση αυτή είναι ότι εκτός από τις εξισώσεις κίνησης, μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό.

A. Η θέση του σωματιδίου στο επίπεδο καθορίζεται από δύο συντεταγμένες (x, y) . Όμως, οι συντεταγμένες αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού πρέπει να ικανοποιούν τον παραπάνω δεσμό, οπότε το σύστημα έχει έναν βαθμό ελευθερίας.

Η λαγκρανζιανή του συστήματος τότε είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Θέτοντας σε αυτή $y = x^2$ (δεσμός) και $\dot{y} = 2x\dot{x}$ παίρνουμε:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}(1 + 4x^2)\dot{x}^2 - mgx^2$$

Εξίσωση *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} (1 + 4x^2) - mg \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 8x - 2mgx = 4mx\dot{x}^2 - 2mgx, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{m}{2} (1 + 4x^2) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x}^2) = \frac{m}{2} (1 + 4x^2) 2\dot{x} = m(1 + 4x^2)\dot{x}\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [m(1 + 4x^2)\dot{x}] &= 4mx\dot{x}^2 - 2mgx \rightarrow \\ \rightarrow \dot{x} \frac{d}{dt} (1 + 4x^2) + (1 + 4x^2) \frac{d}{dt} \dot{x} &= 4x\dot{x}^2 - 2gx \rightarrow \\ \rightarrow \dot{x} \cdot 8x\dot{x} + (1 + 4x^2)\ddot{x} - 4x\dot{x}^2 + 2gx &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow (1 + 4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + 2gx &= 0 \rightarrow \\ \ddot{x} &= -\frac{2x(g + 2\dot{x}^2)}{1 + 4x^2}\end{aligned}$$

Η επιτάχυνση στον άξονα y θα προκύψει από τη δεύτερη χρονική παράγωγο του δεσμού $y = x^2$:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 2x\dot{x} \rightarrow \\ \rightarrow \ddot{y} &= 2(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\end{aligned} \quad (2)$$

Β. Η χωρίς περιορισμούς λαγκρανζιανή του συστήματος είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

ενώ με την εισαγωγή του δεσμού παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = L + \lambda f = T - V + \lambda f = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - x^2) \quad (3)$$

Οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* τότε είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -2\lambda x \rightarrow m\ddot{x} = -2\lambda x \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = -mg + \lambda \rightarrow m\ddot{y} = -mg + \lambda \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = y - x^2 \quad (6)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4) και (5) στην (2) προκύπτει το λ :

$$-g + \frac{\lambda}{m} = 2\dot{x}^2 + 2x \left(-\frac{2\lambda}{m} x \right) \rightarrow \frac{\lambda}{m} (1 + 4x^2) = 2\dot{x}^2 \rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2m\dot{x}^2}{1 + 4x^2} \quad (7)$$

Η κλίση του δεσμού είναι το διάνυσμα:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \hat{j} \right) = (-2x\hat{i} + \hat{j}) = (-2x, 1)$$

και η δύναμη του δεσμού:

$$\vec{F}_\delta = \lambda \vec{\nabla} f = \frac{2m\dot{x}^2}{1 + 4x^2} (-2x\hat{i} + \hat{j})$$

Κάθε δυνατή μετατόπιση $\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y)$, συμβατή με την εξίσωση του δεσμού

$$f(x, y) = y - x^2 = 0,$$

πρέπει να διατηρεί το σωματίδιο πάνω στην καμπύλη, επομένως ισχύει:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0 \rightarrow -2x\delta x + 1 \cdot \delta y = 0 \rightarrow$$

$$\delta y = 2x\delta x \quad (8)$$

Τότε για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\nabla} f$ και $\delta \vec{r}$ παίρνουμε:

$$\vec{\nabla} f \cdot \delta \vec{r} = (-2x, 1) \cdot (\delta x, \delta y) = -2x\delta x + \delta y \xrightarrow{(8)}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \delta \vec{r} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} f \perp \delta \vec{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_\delta = \lambda \vec{\nabla} f \perp \delta \vec{r}$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η διεύθυνση της δύναμης του δεσμού, είναι κάθετη σε κάθε δυνατή μετατόπιση, δηλαδή κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης σε κάθε σημείο της. Το έργο της είναι μηδενικό και ως εκ τούτου δεν μεταβάλλει την ενέργεια του σωματιδίου.

Αντικαθιστώντας τώρα τη σχέση (7) στις σχέσεις (4) και (5) βρίσκουμε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης του σωματιδίου:

$$\ddot{x} = -\frac{4x\dot{x}^2}{1+4x^2}, \quad \ddot{y} = \frac{2\dot{x}^2}{1+4x^2} - g$$

Διατηρούμενες ποσότητες

- *Ενέργεια:*

Επειδή τόσο η λαγκρανζιανή του συστήματος όσο και ο δεσμός δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), το ολοκλήρωμα Jacobi, που αποτελεί μια σταθερά της κίνησης, εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\begin{aligned} J &= \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} - \mathcal{L} = E \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{x} m \dot{x} + \dot{y} m \dot{y} + \dot{\lambda} \cdot 0 - \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m \dot{y}^2}{2} + mgy - \lambda(y - x^2) = E \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{y}^2}{2} + mgy - \lambda \cdot 0 = mgy_0 \end{aligned}$$

όπου η σταθερά E υπολογίστηκε από τις αρχικές συνθήκες.

Αν θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο εκκινεί από την ηρεμία ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$), ευρισκόμενο στη θέση (x_0, y_0) , τότε προκύπτει:

$$E = \frac{m \dot{x}_0^2}{2} + \frac{m \dot{y}_0^2}{2} + mgy_0 = 0 + 0 + mgy_0 = mgy_0$$

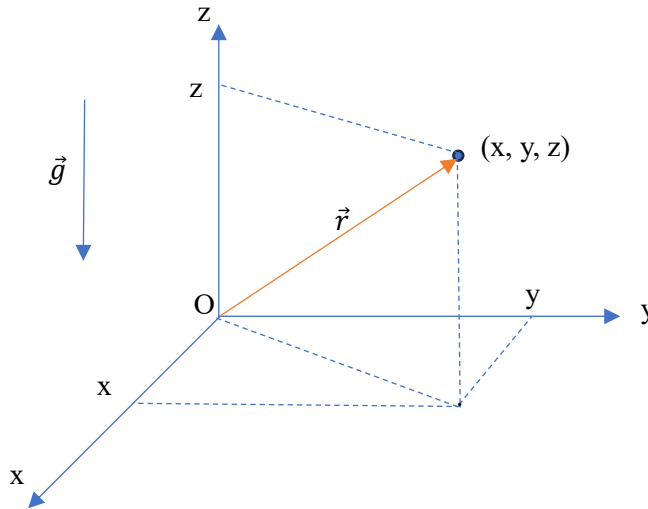
- *Ορμή:*

Η λαγκρανζιανή (σχέση 3) εξαρτάται από τις συντεταγμένες θέσης x και y , δηλαδή $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \neq 0$ και $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \neq 0$, συνεπώς οι αντίστοιχες ορμές $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ και $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$ δεν διατηρούνται κατά την κίνηση.

Κεφάλαιο 3. Εφαρμογές της Λαγκρανζιανής θεώρησης

3.1 Κίνηση σωματιδίου στο πεδίο βαρύτητας

Σωματίδιο μάζας m κινείται ελεύθερα στο χώρο, εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$. Να γίνει ανάλυση της κίνησης.



Σχήμα 1: Κίνηση σωματιδίου στο βαρυτικό πεδίο

Η θέση του σωματιδίου προσδιορίζεται από τρεις ανεξάρτητες συντεταγμένες και ως εκ τούτου το πρόβλημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας.

Επιλέγονται ως γενικευμένες συντεταγμένες q_i για την περιγραφή της κίνησης οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) (βλ. Σχήμα 1).

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια ως προς το επίπεδο xy είναι:

$$V = mgz$$

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (1.1)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για κάθε συντεταγμένη είναι:

$$x: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = 0 \rightarrow m\dot{x} = p_x = \text{σταθ.} \quad (1.2)$$

$$y: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = 0 \rightarrow m\dot{y} = p_y = \text{σταθ.} \quad (1.3)$$

$$z: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial L}{\partial z} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = -mg \rightarrow m\ddot{z} = -mg \rightarrow \ddot{z} = -g \quad (1.4)$$

Αρχικές συνθήκες

Έστω ότι το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση (x_0, y_0, z_0) με ταχύτητα $\vec{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, τότε:

Η κίνηση στον άξονα x είναι ομαλή με εξίσωση

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \quad (1.5)$$

Η κίνηση στον άξονα y είναι ομαλή με εξίσωση

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t \quad (1.6)$$

Η κίνηση στον άξονα z γίνεται με σταθερή επιτάχυνση με εξίσωση

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.7)$$

Διατηρούμενες ποσότητες

- *Ενέργεια*: η ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται κατά την κίνηση γιατί η συνάρτηση Lagrange δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), οπότε από το ολοκλήρωμα Jacobi παίρνουμε:

$$\begin{aligned} J = E = \text{σταθ.} &\rightarrow \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = E \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{x}(m\dot{x}) + \dot{y}(m\dot{y}) + \dot{z}(m\dot{z}) - \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz \rightarrow \\ J = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz &= E = \text{σταθ.} \end{aligned} \quad (1.8)$$

όπου η σταθερά E είναι ίση με:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + mgz_0$$

- **Ορμή:** Η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες x και y , άρα οι αντίστοιχες ορμές $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ και $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ διατηρούνται (σχέσεις 1.2 και 1.3)

Ελεύθερη πτώση

Στην περίπτωση που η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδενική ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$), η κίνηση που εκτελεί λέγεται ελεύθερη πτώση.

Οι εξισώσεις κίνησης τότε όπως προκύπτουν από τις σχέσεις (1.5), (1.6) και (1.7) είναι:

$$x(t) = x_0 = \text{σταθ.}$$

$$y(t) = y_0 = \text{σταθ.}$$

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \text{ και } \dot{z}(t) = -gt$$

ενώ από τη σχέση (1.8) δεδομένου ότι $\dot{x}(t) = \dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}(t) = \dot{y}_0 = 0$ παίρνουμε για τη διατήρηση της ενέργειας τη σχέση:

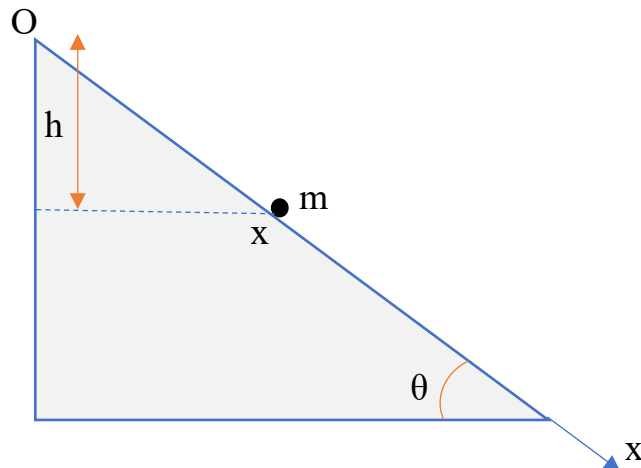
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + mgz_0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz = mgz_0 \end{aligned}$$

3.2 Κίνηση σωματιδίου σε σταθερό κεκλιμένο επίπεδο

Σωματίδιο μάζας m κινείται ευθύγραμμα επί κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης θ , εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου (βλ. Σχήμα 2).

Άνευ τριβής

Έστω ότι το σωματίδιο αφήνεται να κινηθεί από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου O , χωρίς ταχύτητα και τη χρονική στιγμή t διέρχεται από τη θέση x .



Σχήμα 2: Μονοδιάστατη κίνηση σωματίου σε κεκλιμένο επίπεδο

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Η δυναμική ενέργεια ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο O είναι:

$$V = -mgh = -mgx\eta\mu\theta$$

Η Λαγκρανζιανή είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx\eta\mu\theta \quad (2.1)$$

Εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = mg\eta\mu\theta \rightarrow m\ddot{x} = mg\eta\mu\theta \rightarrow \ddot{x} = g\eta\mu\theta$$

Το σωματίδιο κινείται με σταθερή επιτάχυνση και οι εξισώσεις κίνησης με βάση τις αρχικές συνθήκες $[x(0) = x_0 = 0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0]$ είναι:

$$\dot{x}(t) = g\eta\mu\theta t$$

$$x(t) = \frac{1}{2}g\eta\mu\theta t^2$$

Διατηρούμενες ποσότητες:

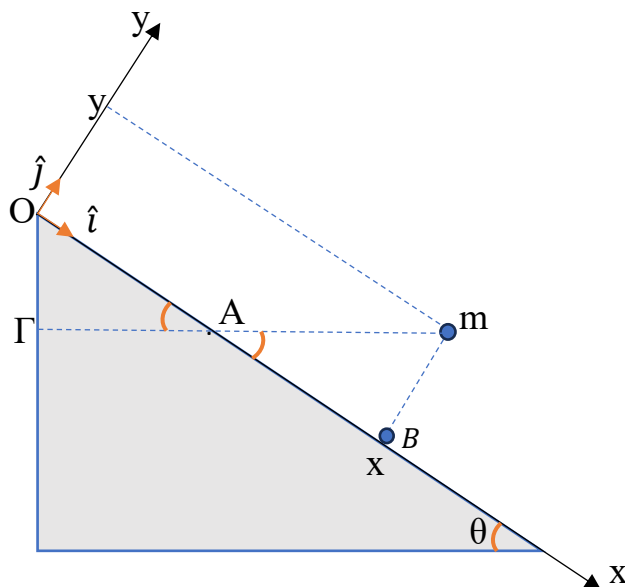
Η ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται δεδομένου ότι η Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο:

$$\begin{aligned} J = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L &= \dot{x}(m\dot{x}) - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx\eta\mu\theta = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mxg\eta\mu\theta = \text{σταθ.} = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 - mgx_0\eta\mu\theta = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mxg\eta\mu\theta = 0 \end{aligned}$$

Παρουσία τριβής

Η ευθύγραμμη κίνηση του σωματιδίου στο κεκλιμένο επίπεδο είναι ισοδύναμη με την κίνηση πάνω σε ένα μονοδιάστατο σύρμα κλίσης ίση με αυτήν του κεκλιμένου. Για να προσδιοριστεί η δύναμη που θα δεχτεί το σωματίδιο από το σύρμα, δεν γίνεται η δέσμευση εξαρχής πάνω του, αλλά θεωρείται ότι κινείται ελεύθερα (χωρίς περιορισμούς) στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy που περιέχει το σύρμα (βλ. Σχήμα 3) και κατόπιν εισάγεται ένας πολλαπλασιαστής Lagrange που πετυχαίνει την δέσμευση της κίνησης επί του σύρματος (άξονας x). Ο δεσμός θα προκύψει από την απαίτηση να ισχύει $y = 0$ κατά τη διάρκεια της κίνησης και επομένως η εξίσωση του δεσμού είναι

$$f(x, y) = y - 0 = y \quad (2.2)$$



Σχήμα 3: Από την ελεύθερη κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο Oxy , στη δεσμευμένη κίνησή του κατά μήκος του κεκλιμένου

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Ο είναι:

$$V = -mgh = -mg(OA)\eta\mu\theta = -mg(x - AB)\eta\mu\theta = -mg\left(x - \frac{y}{\varepsilon\phi\theta}\right)\eta\mu\theta$$

$$\rightarrow V = -mg(x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος μαζί με τον δεσμό είναι:

$$L = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta) + \lambda y \quad (2.3)$$

Όταν οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα μηχανικό σύστημα είναι διατηρητικές, τότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange για μια εκ των γενικευμένων συντεταγμένων q έχουν την γνωστή μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Αν όμως επιπλέον αυτών, ασκούνται και μη συντηρητικές δυνάμεις με συνισταμένη $\vec{F}$ τότε οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$$

Αν $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου, τότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) - mg\eta\mu\theta = -T\hat{i} \cdot \hat{i} \rightarrow m\ddot{x} = mg\eta\mu\theta - T \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) - (-mg\sigma\upsilon\nu\theta + \lambda) = -T\hat{i} \cdot \hat{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow m\ddot{y} = -mg\sigma\upsilon\nu\theta + \lambda \quad (2.5)$$

Επιβάλλοντας στην εξίσωση (2.5) τον δεσμό $y = 0 \rightarrow \dot{y} = 0$ παίρνουμε $\lambda = mg\sigma\upsilon\nu\theta$ και η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό αυτό δίνεται από τη σχέση:

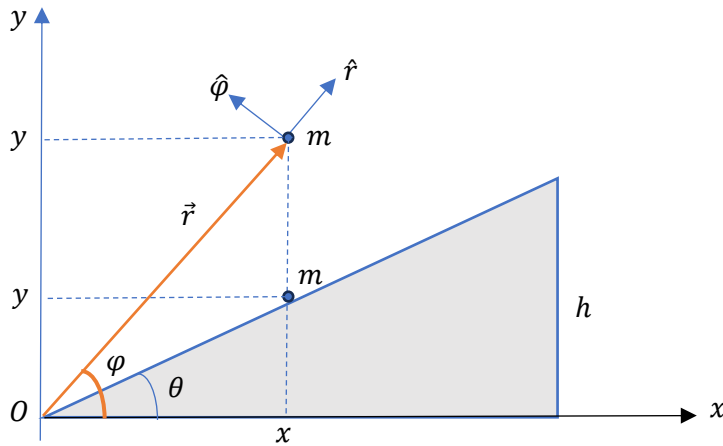
$$\vec{F} = \lambda(\vec{\nabla}f) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda(0, \hat{j}) = mg\sigma\upsilon\nu\theta\hat{j},$$

δηλαδή είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο (η γνωστή κάθετη αντίδραση $\vec{N}$).

Η τριβή έχει μέτρο $T = \mu F = \mu mg \sin \theta$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.4) προκύπτει για την επιτάχυνση:

$$m\ddot{x} = mg \eta \mu \theta - \mu mg \sin \theta \rightarrow \alpha = \ddot{x} = g(\eta \mu \theta - \mu \sin \theta)$$

- Ας μελετήσουμε ξανά το πρόβλημα, άνευ τριβής, αλλάζοντας τον προσανατολισμό των αξόνων (βλ. Σχήμα 4). Η περιγραφή θα γίνει σε καρτεσιανές (x, y) και σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) , για να αναδειχθεί το γεγονός ότι η επιλογή των κατάλληλων γενικευμένων συντεταγμένων (πολικών στη συγκεκριμένη περίπτωση) μπορεί να συντομεύσει τη λύση του.



Σχήμα 4: Μελέτη της κίνησης σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες στο νέο σύστημα αξόνων Oxy

Περιγραφή σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

Η σχέση που δεσμεύει το σωματίδιο να κινείται επί του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varepsilon \varphi \theta = \frac{y}{x} \rightarrow y = \varepsilon \varphi \theta x$, οπότε η εξίσωση του δεσμού είναι:

$$f(x, y) = y - \varepsilon \varphi \theta x = 0 \quad (2.6)$$

Θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα x , η Λαγκρανζιανή του συστήματος με τον δεσμό είναι:

$$L = T - V + \lambda f = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - \varepsilon \varphi \theta x) \quad (2.7)$$

και οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$x: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -\lambda \varepsilon \varphi \theta \rightarrow \ddot{x} = -\frac{\lambda}{m} \varepsilon \varphi \theta \quad (2.8)$$

$$y: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = -mg + \lambda \rightarrow \ddot{y} = -g + \frac{\lambda}{m} \quad (2.9)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{d}{dt} (0) = y - \varepsilon \varphi \theta x \rightarrow y = \varepsilon \varphi \theta x \quad (2.10)$$

Διατηρούμενες ποσότητες

Η ενέργεια διατηρείται επειδή και η συνάρτηση L και ο δεσμός δεν έχουν άμεση εξάρτηση από το χρόνο, οπότε από το ολοκλήρωμα Jacobi έχουμε:

$$\begin{aligned} J &= \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = \dot{x}(m\dot{x}) + \dot{y}(m\dot{y}) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy - \lambda(y - \varepsilon \varphi \theta x) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy - 0 = \text{σταθ.} \end{aligned}$$

Η σταθερά υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Αν θεωρήσουμε αρχικά ότι το σώμα ξεκινά από την ηρεμία, δηλαδή $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, ευρισκόμενο στη θέση $y(0) = h$, τότε η σταθερά ισούται με mgh οπότε καταλήγουμε:

$$mgh = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την σχέση (2.9) και αντικαθιστώντας σε αυτήν τις σχέσεις (2.7) και (2.8) προκύπτει το λ :

$$\ddot{y} = \varepsilon \varphi \theta \ddot{x} \rightarrow -g + \frac{\lambda}{m} = \varepsilon \varphi \theta \left(-\frac{\lambda}{m} \varepsilon \varphi \theta \right) \rightarrow \lambda = \frac{mg}{1 + \varepsilon \varphi^2 \theta} = mg \sin^2 \theta$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια το λ στις σχέσεις (2.7) και (2.8), προκύπτουν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σωματιδίου:

$$\ddot{x} = -\frac{\varepsilon \varphi \theta}{m} mg \sin^2 \theta = -g \eta \mu \theta \sin \theta$$

$$\ddot{y} = \varepsilon \varphi \theta (-g \eta \mu \theta \sin \theta) = -g \eta \mu^2 \theta$$

το μέτρο της οποίας δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{g^2 \eta \mu^2 \theta (\sin^2 \theta + \eta \mu^2 \theta)} = g \eta \mu \theta$$

Η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό είναι:

$$\vec{F}_{\text{δεσμού}} = \lambda \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} \right) = \lambda (-\varepsilon \varphi \theta \hat{i} + \hat{j})$$

με μέτρο:

$$F_{\text{δεσμού}} = \sqrt{\lambda^2 (1 + \varepsilon \varphi^2 \theta)} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta}} = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{mg \sin^2 \theta}{\sin \theta} = mg \sin \theta$$

και διεύθυνση:

$$\varepsilon \varphi \omega = \frac{F_x}{F_y} = \frac{\lambda \varepsilon \varphi \theta}{\lambda} = \varepsilon \varphi \theta \rightarrow \omega = \theta,$$

απ' όπου προκύπτει ότι είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο.

Περιγραφή σε πολικές συντεταγμένες

Από το Σχήμα 4 προκύπτουν οι σχέσεις μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων

$$x = r \sin \varphi, \quad y = r \eta \mu \varphi$$

οι χρονικές παράγωγοι των οποίων είναι

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \varphi - r \dot{\varphi} \eta \mu \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \eta \mu \varphi + r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των ταχυτήτων προκύπτει:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = mgy = mgr \eta \mu \varphi$$

Από την σχέση του δεσμού προκύπτει:

$$y = \varepsilon \varphi \theta x \rightarrow r \eta \mu \varphi = \varepsilon \varphi \theta r \sin \varphi \rightarrow \varepsilon \varphi \varphi = \varepsilon \varphi \theta \rightarrow \varphi = \theta,$$

οπότε η εξίσωση του δεσμού είναι: $f = \varphi - \theta = 0$

Η συνάρτηση Lagrange που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$L = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\eta\mu\varphi + \lambda(\varphi - \theta) \quad (2.11)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\dot{r}\dot{\phi}^2 - mg\eta\mu\varphi \rightarrow m\ddot{r} = m\dot{r}\dot{\phi}^2 - mg\eta\mu\varphi \quad (2.12)$$

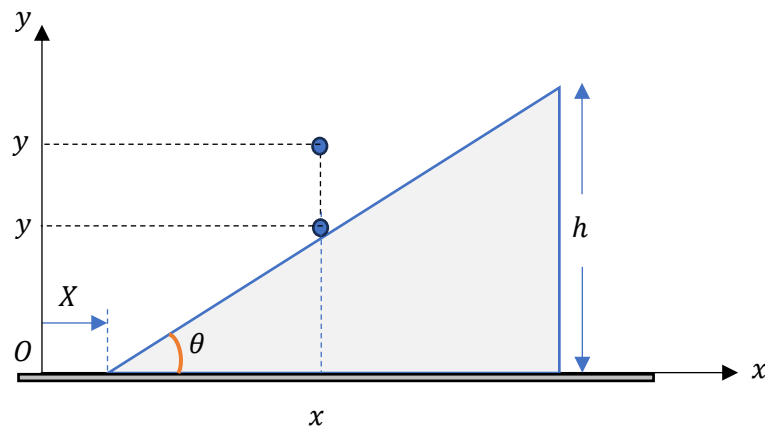
$$\varphi: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = -mg\sigma\upsilon\nu\varphi + \lambda \quad (2.13)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = \varphi - \theta \rightarrow \varphi = \theta \rightarrow \dot{\phi} = \dot{\theta} \rightarrow \dot{\phi} = 0$$

Θέτοντας $\varphi = \theta$ και $\dot{\phi} = 0$ στις εξισώσεις (2.12) και (2.13) προκύπτει $\ddot{r} = -g\eta\mu\theta$ και $\lambda = mgr\sigma\upsilon\nu\theta$, ενώ η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό είναι:

$$\vec{F} = \lambda \left(\vec{\nabla} f(r, \varphi) \right) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\phi} \right) = mgr\sigma\upsilon\nu\theta \left(0 + \frac{1}{r} \hat{\phi} \right) = mg\sigma\upsilon\nu\theta \hat{\phi}$$

3.3 Κίνηση σωματιδίου επί κινούμενου κεκλιμένου επιπέδου



Σχήμα 5: Κίνηση σωματιδίου σε κινούμενο κεκλιμένο επίπεδο

Στο Σχήμα 5 το σωματίδιο μάζας m κινείται ελεύθερα στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy στο οποίο ανήκει και η τομή του λείου κεκλιμένου επιπέδου μάζας M , το οποίο όμως έχει τη δυνατότητα να κινείται οριζόντια χωρίς τριβές.

Αν X η θέση του κεκλιμένου επιπέδου και (x, y) η θέση του σωματιδίου κάποια στιγμή, τότε η δέσμευση του σωματιδίου πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο επιτυγχάνεται αν ισχύει $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x-X} \rightarrow y = \varepsilon\varphi\theta(x - X)$, οπότε η εξίσωση του δεσμού είναι:

$$f(x, y, X) = y - \varepsilon\varphi\theta(x - X) = 0 \quad (3.1)$$

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος, εισάγοντας έναν πολλαπλασιαστή Lagrange είναι:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mgy + \lambda[y - \varepsilon\varphi\theta(x - X)] \quad (3.2)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$x: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -\lambda\varepsilon\varphi\theta \rightarrow m\ddot{x} = -\lambda\varepsilon\varphi\theta \quad (3.3)$$

$$y: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = -mg + \lambda \rightarrow m\ddot{y} = -mg + \lambda \quad (3.4)$$

$$X: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \rightarrow \frac{d}{dt} (M\dot{X}) = \lambda\varepsilon\varphi\theta \rightarrow M\ddot{X} = \lambda\varepsilon\varphi\theta \quad (3.5)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = y - \varepsilon\varphi\theta(x - X) \quad (3.6)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο τη σχέση (3.6) και αντικαθιστώντας κατόπιν σε αυτήν τις σχέσεις (3.3), (3.4) και (3.5) προσδιορίζουμε το λ :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \varepsilon\varphi\theta(\ddot{x} - \ddot{X}) \rightarrow -g + \frac{\lambda}{m} = \varepsilon\varphi\theta \left(-\frac{\lambda\varepsilon\varphi\theta}{m} - \frac{\lambda\varepsilon\varphi\theta}{M} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow -g + \frac{\lambda}{m} = -\lambda\varepsilon\varphi^2\theta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει:

$$\lambda = \frac{g}{\frac{1}{m} + \varepsilon\varphi^2\theta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)} \quad (3.7)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια το λ στις σχέσεις (3.3), (3.4), (3.5) βρίσκουμε τις επιταχύνσεις των σωμάτων του συστήματος, οι οποίες είναι:

$$\ddot{x} = -\frac{\varepsilon\varphi\theta}{m} \lambda = -\frac{\varepsilon\varphi\theta}{m} \cdot \frac{g}{\left[\frac{1}{m} + \varepsilon\varphi^2\theta \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \right]} = -\frac{g\varepsilon\varphi\theta}{1 + \varepsilon\varphi^2\theta \left(1 + \frac{m}{M} \right)} \quad (3.8)$$

$$\ddot{y} = \frac{\lambda}{m} - g = \frac{1}{m} \cdot \frac{g}{\left[\frac{1}{m} + \varepsilon\varphi^2\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right]} - g = -\frac{g\varepsilon\varphi^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)}{1 + \varepsilon\varphi^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \quad (3.9)$$

$$\ddot{X} = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{M}\lambda = \frac{g\varepsilon\varphi\theta}{M\left[\frac{1}{m} + \varepsilon\varphi^2\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right]} \quad (3.10)$$

Η αντίδραση του δεσμού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{F}_\delta = \lambda(\vec{\nabla}f) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial X}\hat{i}\right) = \lambda(-\varepsilon\varphi\theta\hat{i} + \hat{j} + \varepsilon\varphi\theta\hat{i})$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι εκφράζουν τη δύναμη που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο σώμα

$$\vec{F}_{\kappa.ε \rightarrow \sigma\omega\mu\alpha} = -\lambda\varepsilon\varphi\theta\hat{i} + \lambda\hat{j} \quad (3.11)$$

και ο τρίτος όρος την δύναμη που ασκεί το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο

$$\vec{F}_{\sigma\omega\mu\alpha \rightarrow \kappa.ε} = \lambda\varepsilon\varphi\theta\hat{i} \quad (3.12)$$

Οι δυνάμεις αυτές μεταξύ των σωμάτων, σε πρώτη ανάγνωση, αντίκειται στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα που υποστηρίζει ότι πρέπει να είναι αντίθετες

$$\vec{F}_{\kappa.ε \rightarrow \sigma\omega\mu\alpha} = -\vec{F}_{\sigma\omega\mu\alpha \rightarrow \kappa.ε}$$

Όμως, οι δυνάμεις αυτές δεν είναι οι συνολικές δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο, αλλά μόνο αυτές οι οποίες επιβάλλουν τον δεσμό το σώμα να κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

Τα μέτρα των δυνάμεων αυτών είναι:

$$\begin{aligned} F_{\kappa.ε \rightarrow \sigma\omega\mu\alpha} &= \sqrt{\lambda^2(1 + \varepsilon\varphi^2\theta)} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}} = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{g}{\frac{1}{m} + \varepsilon\varphi^2\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)} = \\ &= \frac{mg}{\sin\theta\left[1 + \frac{\eta\mu^2\theta}{\sin^2\theta}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right]} = \frac{mg\sin\theta}{\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{m}{M} \cdot \eta\mu^2\theta} \rightarrow \\ F_{\kappa.ε \rightarrow \sigma\omega\mu\alpha} &= \frac{mMg\sin\theta}{M + m \cdot \eta\mu^2\theta} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$F_{\sigma\omega\mu\alpha \rightarrow \kappa.ε} = \frac{\eta\mu\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{g}{\frac{1}{m} + \varepsilon\varphi^2\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)} \hat{i} = \frac{mg\eta\mu\theta}{\sin\theta\left[1 + \frac{\eta\mu^2\theta}{\sin^2\theta}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right]} \hat{i} =$$

$$= \frac{mg\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta \left(1 + \frac{m}{M}\right)} \hat{i} = \frac{mg\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \frac{m}{M} \cdot \eta\mu^2\theta} \hat{i} \rightarrow$$

$$F_{\sigma\omega\mu\alpha \rightarrow \kappa.ε.} = \frac{mMg\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{M + m \cdot \eta\mu^2\theta} \hat{i} \quad (3.14)$$

Διατηρούμενες ποσότητες

- *Ορμή:*

Οι σχέσεις (3.3) και (3.5) προστιθέμενες οδηγούν στην διατήρηση της ορμής του συστήματος στον άξονα x:

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x} + M\dot{X}) = 0 \rightarrow m\dot{x} + M\dot{X} = \text{σταθ.} \quad (3.15)$$

- *Ενέργεια:*

Το ολοκλήρωμα Jacobi εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας, διότι τόσο η συνάρτηση Lagrange (σχέση 3.2) όσο και ο δεσμός (σχέση 3.1) δεν έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο:

$$J = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{X} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} + \dot{\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \mathcal{L} = \dot{x}(m\dot{x}) + \dot{y}(m\dot{y}) + \dot{X}(M\dot{X}) + \dot{\lambda} \cdot 0 - \mathcal{L}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την συνάρτηση $\mathcal{L}$ και θέτοντας $f(x, y, X) = 0$ παίρνουμε:

$$J = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + mgy = E = \text{σταθ.} = mgh \quad (3.16)$$

Η σταθερά E υπολογίστηκε από τις αρχικές συνθήκες: θεωρούμε αρχικά ότι τα σώματα είναι ακίνητα και ότι το σωματίδιο αφήνεται από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου ύψους h , οπότε θα ισχύουν $y(0) = h$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{X}(0) = 0$ και με αντικατάσταση στη σχέση (3.16) προκύπτει $E = mgh$.

Ως εφαρμογή ας υπολογίσουμε τις ταχύτητες των σωμάτων τη στιγμή που το σωματίδιο φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου:

Τότε για το σωματίδιο είναι $y = 0$ και η σχέση (3.16) γίνεται:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 = mgh \quad (3.17)$$

Από τη σχέση (3.15) παίρνουμε:

$$\dot{x} = -\frac{M}{m}\dot{X}$$

αφού από τις αρχικές συνθήκες τα σώματα είναι αρχικά ακίνητα. Από τον δεσμό που διέπει το σύστημα προκύπτει $\dot{y} = \varepsilon\varphi\theta(\dot{x} - \dot{X})$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (3.16) βρίσκουμε την ταχύτητα του κεκλιμένου επιπέδου:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left[\frac{M^2}{m^2}\dot{X}^2 + \varepsilon\varphi^2\theta\left(-\frac{M}{m}\dot{X} - \dot{X}\right)^2\right] + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 &= mgh \rightarrow \\ \dot{X}^2 &= \frac{2m^2gh}{M^2 + \varepsilon\varphi^2\theta(M+m)^2 + mM} = \\ &= \frac{2m^2gh}{M^2 + \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}(M+m)^2 + mM} = \frac{2m^2gh\sigma\upsilon\nu^2\theta}{M^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + (m+M)^2\eta\mu^2\theta + mM\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \\ &= \frac{2m^2gh\sigma\upsilon\nu^2\theta}{M\sigma\upsilon\nu^2\theta(M+m) + \eta\mu^2\theta(m+M)^2} = \frac{2m^2gh\sigma\upsilon\nu^2\theta}{(m+M)[M\sigma\upsilon\nu^2\theta + (m+M)\eta\mu^2\theta]} \rightarrow \\ \rightarrow \dot{X}^2 &= \frac{2m^2gh\sigma\upsilon\nu^2\theta}{(m+M)(M+m\cdot\eta\mu^2\theta)} \rightarrow \dot{X} = m\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m+M)(M+m\cdot\eta\mu^2\theta)}} \quad (3.18) \end{aligned}$$

Η x συνιστώσα της ταχύτητας του σωματιδίου είναι:

$$\dot{x} = -\frac{M}{m}\dot{X} = -M\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m+M)(M+m\cdot\eta\mu^2\theta)}} \quad (3.19)$$

και η y συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι:

$$\dot{y} = \varepsilon\varphi\theta(\dot{x} - \dot{X}) = -\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}(m+M)\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m+M)(M+m\cdot\eta\mu^2\theta)}} \rightarrow$$

$$\dot{y} = -(m + M)\eta\mu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m + M)(M + m \cdot \eta\mu^2\theta)}} \quad (3.20)$$

Περιπτώσεις

- Στην περίπτωση που το κεκλιμένο επίπεδο είναι πολύ βαρύ σε σχέση με το σωματίδιο, δηλαδή αν:

$$M \gg m \rightarrow \begin{cases} \frac{m}{M} \rightarrow 0, & M + m \cong M \\ \frac{1}{M} \ll \frac{1}{m} \rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \cong \frac{1}{m} \end{cases}$$

Τότε:

Η σχέση (3.11) δίνει:

$$\ddot{X} = \frac{g\epsilon\varphi\theta}{M\left(\frac{1}{m} + \epsilon\varphi^2\theta \cdot \frac{1}{m}\right)} = \frac{m}{M} \cdot \frac{g\epsilon\varphi\theta}{1 + \epsilon\varphi^2\theta} \cong 0,$$

δηλαδή πρακτικά το κεκλιμένο επίπεδο ακινητεί.

Οι σχέσεις (3.8) και (3.9) δίνουν:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g\epsilon\varphi\theta}{1 + \epsilon\varphi^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \cong -\frac{g\epsilon\varphi\theta}{1 + \epsilon\varphi^2\theta} \cong -g\epsilon\varphi\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta \cong -g\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \\ \ddot{y} &= -\frac{g\epsilon\varphi^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)}{1 + \epsilon\varphi^2\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \cong -\frac{g\epsilon\varphi^2\theta}{1 + \epsilon\varphi^2\theta} \cong -g\epsilon\varphi^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta = -g\eta\mu^2\theta \end{aligned}$$

Η επιτάχυνση του σωματιδίου τότε έχει μέτρο:

$$\alpha = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{g^2\eta\mu^2\theta(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = g\eta\mu\theta$$

και διεύθυνση:

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \epsilon\varphi\theta \rightarrow \varphi = \theta,$$

δηλαδή κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

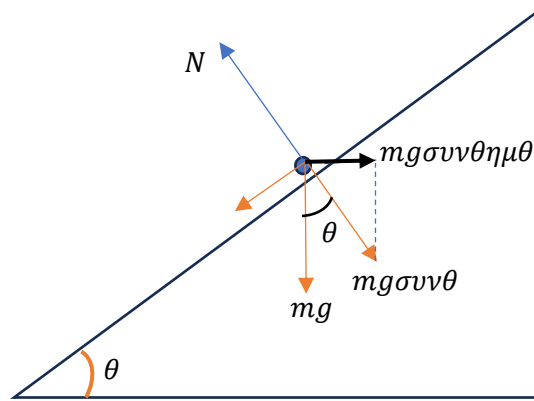
Η σχέση (3.13) γίνεται:

$$F_{κ.ε. \rightarrow \sigma\omega\mu\alpha} = \frac{mMg\sigma\upsilon\nu\theta}{M + m \cdot \eta\mu^2\theta} = \frac{mg\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \frac{m}{M} \cdot \eta\mu^2\theta} \cong mg\sigma\upsilon\nu\theta$$

ενώ η δύναμη από το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο σχέση (3.14) γίνεται:

$$F_{\sigma\omega\mu\alpha \rightarrow \kappa.ε.} = \frac{mMg\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{M + m \cdot \eta\mu^2\theta} \hat{i} = \frac{mg\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \frac{m}{M} \cdot \eta\mu^2\theta} \cong mg\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

Τόση είναι η x συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το σωματίδιο στο κεκλιμένο, σύμφωνα με το Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Δυνάμεις μεταξύ σωματιδίου και κεκλιμένου επιπέδου

Οι σχέσεις (3.19) και (3.20) για τις συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου γίνονται:

$$\dot{x} = -M\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m+M)(M+m \cdot \eta\mu^2\theta)}} \cong -M\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{M \cdot M}} \cong -\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{2gh}$$

$$\dot{y} = -(m+M)\eta\mu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m+M)(M+m \cdot \eta\mu^2\theta)}} \cong -M\eta\mu\theta \sqrt{\frac{2gh}{M \cdot M}} \cong -\eta\mu\theta \sqrt{2gh}$$

οπότε το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2gh}$, ενώ η ταχύτητα του κεκλιμένου επιπέδου από τη σχέση (3.18) γίνεται:

$$\dot{X} = m\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{(m+M)(M+m \cdot \eta\mu^2\theta)}} \cong m\sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{\frac{2gh}{M \cdot M}} \cong \frac{m}{M} \sigma\upsilon\nu\theta \sqrt{2gh} \cong 0$$

- Στην περίπτωση που είναι $\theta = \pi/2$ τότε:

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης σώματος- επιπέδου μηδενίζονται (σχέσεις 3.14 και 3.15) γιατί $\sin\theta = 0$.

Η ταχύτητα του σωματιδίου γίνεται $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{2gh}$ αφού $\dot{x} = 0$ (προκύπτει από τη σχέση 2.19 θέτοντας $\sin\theta = 0$) και $\dot{y} = -\sqrt{2gh}$ (θέτοντας $\eta\mu\theta = 1$ στη σχέση 3.20), το σώμα δηλαδή εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h .

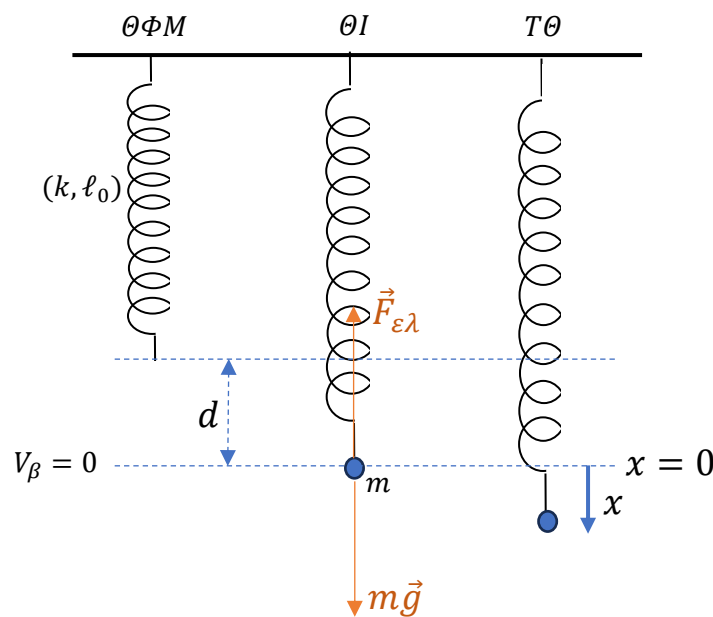
Η ταχύτητα του κεκλιμένου επιπέδου μηδενίζεται (θέτοντας $\sin\theta = 0$ στη σχέση 3.18).

- Στην περίπτωση που $\theta = 0$ η δύναμη από το επίπεδο στο σώμα (σχέση 3.14) γίνεται:

$$F_{\kappa.ε. \rightarrow \text{σώμα}} = \frac{mMg\sin\theta}{M + m \cdot \eta\mu^2\theta} = \frac{mMg \cdot \sin\theta}{M + m \cdot 0} = mg$$

3.4 Αρμονικός ταλαντωτής

Σωματίδιο μάζας m αναρτάται στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου, φυσικού μήκους ℓ_0 και σταθεράς k . Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο στην οροφή. Το σωματίδιο κινείται εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$.



Σχήμα 7: Αρμονικός ταλαντωτής

Στο Σχήμα 7 φαίνονται η θέση φυσικού μήκους ($\Theta\Phi M$) του ελατηρίου, το επίπεδο αναφοράς για την δυναμική ενέργεια βαρύτητας ($V_\beta = 0$), η θέση ισορροπίας (ΘI) του σωματιδίου και μια τυχαία θέση ($I\Theta$) του x , τη χρονική στιγμή t , μετρούμενη από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$).

Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{B} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \rightarrow \vec{B} = -\vec{F}_{\varepsilon\lambda} \rightarrow mg = kd \quad (4.1)$$

Στην τυχαία θέση x του σωματιδίου, η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ και η δυναμική ενέργεια είναι $V = V_\beta + V_{\varepsilon\lambda} = -mgx + \frac{1}{2}k(x+d)^2$.

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}k(x+d)^2 \quad (4.2)$$

Εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = mg - k(x+d) \rightarrow m\ddot{x} = mg - kx - kd,$$

οπότε λόγω της σχέσης (4.1) προκύπτει η διαφορική εξίσωση:

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \xrightarrow{\frac{k}{m}=\omega_0^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.3)$$

που περιγράφει μια αρμονική ταλάντωση περί της θέσης $x=0$ και έχει ως γενική λύση

$$x(t) = \alpha\eta\mu\omega t + \beta\sigma\upsilon\nu\omega t \quad (4.4)$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega\alpha\sigma\upsilon\nu\omega t - \omega\beta\eta\mu\omega t \quad (4.5)$$

Οι συντελεστές α και β υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες: Έστω στη γενική περίπτωση ότι $x(t=0) = x_0$ και $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = v_0$, τότε από τις σχέσεις (4.4) και (4.5) προκύπτουν: $x_0 = \beta$ και $v_0 = \omega\alpha \rightarrow \alpha = \frac{v_0}{\omega}$.

Τελικά η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση του σωματιδίου είναι:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\eta\mu\omega t + x_0\sigma\upsilon\nu\omega t \quad (4.6)$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι:

$$v = \dot{x} = v_0 \sin \omega t - \omega x_0 \eta \mu \omega t$$

Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι:

$$\begin{aligned} \alpha = \dot{v} &= -v_0 \omega \eta \mu \omega t - \omega^2 x_0 \sin \omega t \rightarrow \\ &\rightarrow \alpha = -\omega^2 x \end{aligned}$$

Διατήρηση της ενέργειας:

Η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο, επομένως το ολοκλήρωμα Jacobi που αποτελεί μια σταθερά της κίνησης, ισούται με την ενέργεια E του συστήματος:

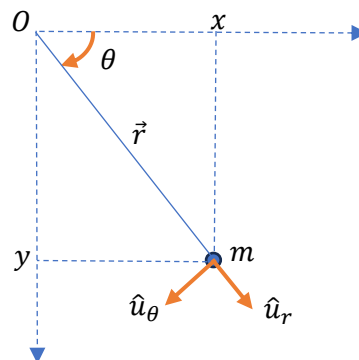
$$\begin{aligned} J = E \rightarrow \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L &= E \rightarrow \dot{x} \cdot m \dot{x} - \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m g x - \frac{1}{2} k (x + d)^2 \right] = E \rightarrow \\ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m g x + \frac{1}{2} k \left(x + \frac{m g}{k} \right)^2 &= E \end{aligned}$$

όπου η σταθερά E προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 - m g x_0 + \frac{1}{2} k \left(x + \frac{m g}{k} \right)^2$$

3.5 Απλό εκκρεμές

Σωματίδιο μάζας m αναρτάται στο ελεύθερο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος, μήκους ℓ , το άλλο άκρο του οποίου αναρτάται σε σταθερό σημείο O (βλ. Σχήμα 8). Το σωματίδιο κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t το νήμα σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x .



Σχήμα 8: Απλό εκκρεμές

Είναι προτιμότερο να επιλέξουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) . Το γεγονός ότι το νήμα δεν έχει ελαστικότητα επιβάλλει στο σωματίδιο να απέχει σταθερή απόσταση στη διάρκεια της κίνησής του από το σημείο ανάρτησης, δηλαδή ισχύει $r = \ell$ που αποτελεί και τον δεσμό του προβλήματος με εξίσωση:

$$f(r) = r - \ell = 0 \quad (5.1)$$

Για να βρούμε εκτός από τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης και τη δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό αυτό, θεωρούμε ότι η κίνηση του σωματιδίου στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy γίνεται άνευ περιορισμών και εισάγοντας τον παραπάνω δεσμό μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange στην Λαγκρανζιανή, δεσμεύουμε το σωματίδιο να απέχει σταθερή απόσταση από το σημείο ανάρτησης.

Από την σχέση 5.1 προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x = r \sin \theta \quad \text{και} \quad y = r \eta \mu \theta$$

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου:

$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \eta \mu \theta$ και $\dot{y} = \dot{r} \eta \mu \theta + r \dot{\theta} \sigma \nu \theta$, οπότε κατόπιν πράξεων προκύπτει η κινητική του ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης είναι

$$V = -mgy = -mgr \eta \mu \theta,$$

οπότε η συνάρτηση Lagrange που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda f = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \eta \mu \theta + \lambda (r - \ell) \quad (5.2)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$r: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + m g \eta \mu \theta + \lambda \quad (5.3)$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = m g r \sigma \nu \theta \quad (5.4)$$

$$\lambda: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = r - \ell \rightarrow r = \ell \quad (5.5)$$

Επιβάλλοντας τον δεσμό $r = \ell$ καθώς και $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ στις σχέσεις (5.3), (5.4) βρίσκουμε το λ και τη γωνιακή επιτάχυνση του σωματιδίου:

$$0 = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\eta\mu\theta + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -(m\ell\dot{\theta}^2 + mg\eta\mu\theta) \quad (5.6)$$

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = mg\ell\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = mg\ell\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\sigma\upsilon\nu\theta \quad (5.7)$$

Από τη σχέση (5.7) μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου ως εξής:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = \frac{g}{\ell}\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} &= \dot{\theta}\frac{g}{\ell}\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{\ell}\eta\mu\theta\right) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{\ell}\eta\mu\theta\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{\ell}\eta\mu\theta = \sigma\tau\alpha\theta. \end{aligned}$$

Η σταθερά υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες: έστω ότι τη στιγμή $t=0$ το σωματίδιο αφήνεται από την ηρεμία να κινηθεί, δηλαδή $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0$ και το νήμα σχηματίζει γωνία $\theta(0) = \theta_0$ με τον άξονα x , τότε θα έχουμε:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{\ell}\eta\mu\theta = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \frac{g}{\ell}\eta\mu\theta_0 \rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{\ell}(\eta\mu\theta - \eta\mu\theta_0)$$

Οπότε η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{\ell}(\eta\mu\theta - \eta\mu\theta_0)} \quad (5.8)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.8) στη σχέση (5.6) θα προκύψει η τελική έκφραση για το λ και κατ' επέκταση η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό $r = \ell$:

$$\begin{aligned} \lambda &= -m\ell\dot{\theta}^2 - mg\eta\mu\theta = -m\ell 2\frac{g}{\ell}(\eta\mu\theta - \eta\mu\theta_0) - mg\eta\mu\theta = \\ &= mg(2\eta\mu\theta_0 - 3\eta\mu\theta) \\ \vec{F}_\delta &= \lambda \cdot \vec{\nabla} f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta \right) = \lambda \hat{u}_r + 0 = mg(2\eta\mu\theta_0 - 3\eta\mu\theta) \hat{u}_r \end{aligned} \quad (5.9)$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη έχει ακτινική διεύθυνση και δεν είναι τίποτα άλλο από τη δύναμη που ασκεί το νήμα (τάση του νήματος) στο σωματίδιο.

- Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα τη δύναμη αυτή όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο ($\theta = \pi/2$), θεωρώντας ότι τη στιγμή $t=0$ αυτό είναι οριζόντιο $\theta(0) = \theta_0 = 0$ και εν συνεχεία να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα με τη Νευτώνεια φυσική:

Πράγματι από τη σχέση (5.9) προκύπτει: $\vec{F}_\delta = mg(0 - 3) = -3mg\hat{r}$

Σύμφωνα με τη Νευτώνεια φυσική οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο στην κατακόρυφη θέση του νήματος (βάρος και η τάση του νήματος) έχουν αντίθετη κατεύθυνση με την τάση να έχει φορά προς το σημείο ανάρτησης ώστε η συνισταμένη τους να ισούται με την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή ισχύει: $T - mg = m\omega^2\ell$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα, τότε από τη σχέση (4.8) προκύπτει:

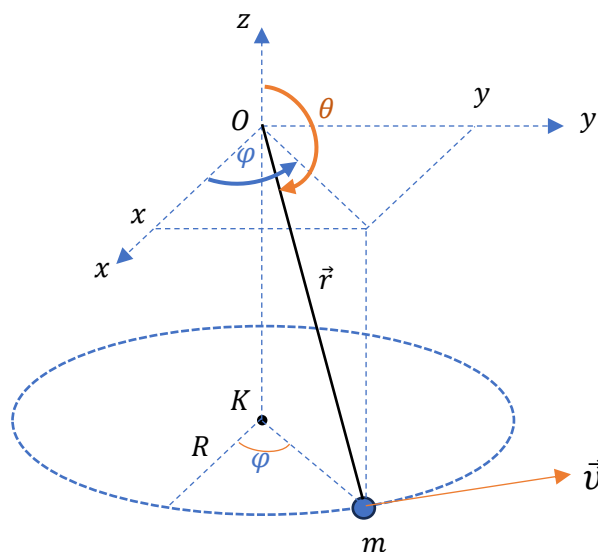
$$\omega^2 = 2\frac{g}{\ell}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu 0\right) = 2\frac{g}{\ell}$$

οπότε η δύναμη του νήματος, σε συμφωνία με το προηγούμενο αποτέλεσμα, έχει μέτρο:

$$T = mg + m\frac{2g}{\ell}\ell = 3mg$$

3.6 Κωνικό εκκρεμές

Σφαιρίδιο μάζας m αναρτάται στο ένα άκρο ενός μη ελαστικού και αβαρούς νήματος, μήκους ℓ , το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O και διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R , εντός του ομογενούς πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$. Να γίνει μελέτη της κίνησης.



Σχήμα 9: Κωνικό Εκκρεμές

Λαγκρανζιανή θεώρηση

Επιλέγουμε το σημείο ανάρτησης του νήματος Ο ως την αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.

Επιλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης τις σφαιρικές (r, θ, φ) .

Ο δεσμός της κίνησης περιγράφεται από τη σχέση $r = \ell$ με εξίσωση

$$f = r - \ell = 0 \quad (6.1)$$

και οφείλεται στην ανελαστικότητα του νήματος.

Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \eta \mu^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

Η δυναμική του ενέργεια ως προς το σημείο ανάρτησης είναι:

$$V = mgz = mgr \sin \theta$$

και λαμβάνει αρνητικές τιμές γιατί $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ άρα $\sin \theta < 0$.

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος μαζί με τον δεσμό είναι:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda f = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \eta \mu^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgr \sin \theta + \lambda (r - \ell) \quad (6.2)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$r: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\eta\mu^2\theta\dot{\varphi}^2 - mgr \sin \theta + \lambda \quad (6.3)$$

$$\theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = mr^2\eta\mu\theta\sin\theta\dot{\varphi}^2 + mgr\eta\mu\theta \quad (6.4)$$

Το γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη φ , αυτομάτως οδηγεί στη διατήρηση της αντίστοιχης γενικευμένης ορμής P_φ , η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς τον άξονα z:

$$\varphi: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = P_\varphi = mr^2\eta\mu^2\theta\dot{\varphi} = \text{σταθ} \quad (6.5)$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange για το λ θα δώσει πάλι τον δεσμό $r = \ell$.

Στο κωνικό εκκρεμές η γωνία θ είναι σταθερή άρα $\dot{\theta} = 0$, οπότε θέτοντας στις παραπάνω εξισώσεις $r = \ell$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ και $\dot{\theta} = 0$ βρίσκουμε από την εξίσωση (6.5) ότι η γωνιακή ταχύτητα του σφαιριδίου $\dot{\phi}$ περί τον άξονα z είναι σταθερή και από την εξίσωση (6.4) υπολογίζουμε το μέτρο της.

$$0 = m\ell^2\eta\mu\theta\sin\theta\dot{\phi}^2 + mg\ell\eta\mu\theta \rightarrow \ell\sin\theta\dot{\phi}^2 = -g \rightarrow$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{-\frac{g}{\ell\sin\theta}} \quad (6.6)$$

ενώ από τη σχέση (6.3) και μέσω της (6.6) προσδιορίζουμε το λ :

$$\lambda = mg\sin\theta - m\ell\eta\mu^2\theta\dot{\phi}^2 = mg\sin\theta + m\ell\eta\mu^2\theta\frac{g}{\ell\sin\theta} \rightarrow \lambda = \frac{mg}{\sin\theta}$$

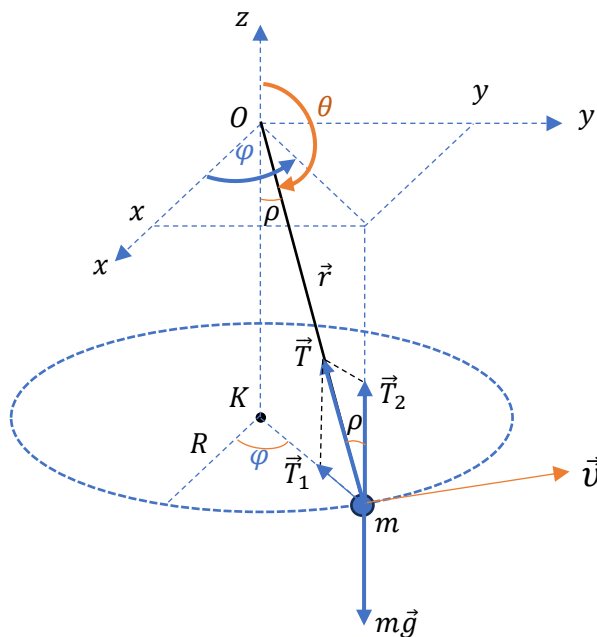
Η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό με εξίσωση $f = r - \ell$ είναι:

$$\vec{F} = \lambda(\vec{\nabla}f) = \lambda\frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r = \lambda\hat{u}_r = \frac{mg}{\sin\theta}\hat{u}_r,$$

η διεύθυνσή της είναι ακτινική και εκφράζει τη δύναμη που ασκεί το νήμα στο σφαιρίδιο.

Νευτώνεια θεώρηση

Στο σωματίδιο ασκούνται (βλ. Σχήμα 10) το βάρος $\vec{B}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$ με συνιστώσες $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$. Έστω ρ η γωνία του νήματος με την κατακόρυφο.



Σχήμα 10: Δυνάμεις στο κωνικό εκκρεμές

Στην κατακόρυφη διεύθυνση το σωματίδιο δεν μετακινείται, επομένως:

$$mg = T_2 = T \sin \rho \quad (6.7)$$

Στην ακτινική διεύθυνση η συνιστώσα $\vec{T}_1$ λειτουργεί ως κεντρομόλος

$$T_1 = m \frac{v^2}{R} \rightarrow$$

$$T \eta \mu \rho = m \omega^2 R \quad (6.8)$$

Από το σχήμα προκύπτουν:

$$\eta \mu \rho = \frac{R}{\ell} \rightarrow R = \ell \eta \mu \rho$$

$$\rho + \theta = \pi \rightarrow \begin{cases} \eta \mu \rho = \eta \mu \theta \\ \sin \rho = -\sin \theta \end{cases}$$

οπότε η τάση του νήματος από την σχέση (6.7) είναι:

$$T = -\frac{mg}{\sin \theta}$$

και από την σχέση (6.8) προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα:

$$-\frac{mg}{\sin \theta} \eta \mu \theta = m \omega^2 \ell \eta \mu \theta \rightarrow \omega = \sqrt{-\frac{g}{\ell \sin \theta}}$$

Σύγκριση των δύο μεθόδων

Οι δύο μέθοδοι οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα, αλλά ακολουθούν διαφορετική προσέγγιση.

Νευτώνεια μέθοδος:

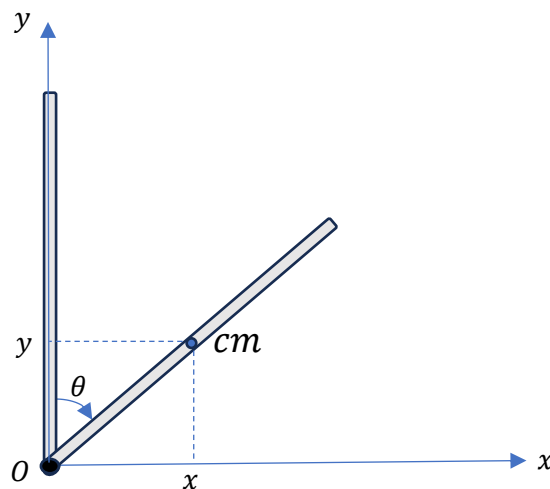
- ▶ Είναι περισσότερο διαισθητική παρέχοντας άμεση φυσική εικόνα για την εξέλιξη της κίνησης και γρήγορους υπολογισμούς μέσω της ανάλυσης των δυνάμεων.
- ▶ Προκειμένου να προσδιοριστεί η γωνιακή ταχύτητα είναι αναγκαίος ο υπολογισμός της τάσης του νήματος.
- ▶ Δεν είναι άμεσα διακριτές οι διατηρούμενες ποσότητες (ενέργεια και στροφορμή).
- ▶ Η τάση του νήματος σχεδιάζεται έτσι ώστε να έχει τη διεύθυνση που ορίζει αυτό. Το γεγονός αυτό δεν προκύπτει από κάποια φυσική θεωρία, αλλά είναι απόρροια εμπειρικών και πειραματικών δεδομένων, θεωρείται δηλαδή μια δύναμη φαινομενολογικού τύπου.

Λαγκρανζιανή μέθοδος:

- Δίνει τις εξισώσεις κίνησης χωρίς να είναι αναγκαίος ο υπολογισμός της τάσης, η οποία προκύπτει μετά την επίλυση των εξισώσεων αυτών.
- Η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να προσδιοριστεί χωρίς τη χρήση της δύναμης του δεσμού.
- Οι διατηρούμενες ποσότητες προκύπτουν άμεσα από τη μορφή της λαγκρανζιανής.
- Η διεύθυνση της τάσης του νήματος, ως δύναμη του δεσμού, προκύπτει μαθηματικά ότι συμπίπτει με τη διεύθυνση που ορίζει αυτό.

3.7 Περιστροφή ράβδου σε κατακόρυφο επίπεδο περί σταθερό άξονα

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ που μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, άνευ τριβών, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O , εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$ (βλ. Σχήμα 11). Να γίνει μελέτη της κίνησης.



Σχήμα 11: Περιστροφή ράβδου γύρω από το ένα άκρο της

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής υπολογίζεται από το θεώρημα Steiner:

$$I_0 = I_{cm} + m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο τη χρονική στιγμή t .

Τότε η κινητική της ενέργεια λόγω περιστροφής δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

ενώ η δυναμική της ενέργεια ως προς οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τον x άξονα είναι:

$$V = mgy = mg \frac{\ell}{2} \sin \theta$$

Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (7.1)$$

Επειδή το πρόβλημα έχει έναν βαθμό ελευθερίας, προκύπτει μια εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\theta} \right) = mg \frac{\ell}{2}$$

απ' όπου υπολογίζεται η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου:

$$\alpha_\gamma = \ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell} \eta \mu \theta \quad (7.2)$$

Αν η κίνηση της ράβδου γινόταν χωρίς περιορισμούς, το σύστημα θα είχε 3 βαθμούς ελευθερίας: (x, y) για τη θέση του κέντρου μάζας και θ για την περιστροφή περί αυτού, όμως σύμφωνα με το Σχήμα II το άκρο της O υπόκεινται σε δύο δεσμούς ($x_0 = y_0 = 0$) επομένως έχει 1 βαθμό ελευθερίας.

Επιπλέον, επειδή τόσο η Λαγκρανζιανή του συστήματος όσο και οι δεσμοί δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμα Jacobi αποτελεί μια σταθερά της κίνησης που ισούται με την μηχανική ενέργεια E του συστήματος:

$$J = E = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \dot{\theta} \left(\frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\theta} \right) - \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (7.3)$$

Η σταθερά E υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες:

Θεωρούμε ότι στην αρχική της θέση ($t=0$), η ράβδος δεν έχει ταχύτητα $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0$ και σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία $\theta(0) = \theta_0$. Τότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$E = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}_0^2 + m g \frac{\ell}{2} \sin \theta_0 = 0 + m g \frac{\ell}{2} \sin \theta_0 = m g \frac{\ell}{2} \sin \theta_0 \quad (7.4)$$

Από τις σχέσεις (7.3) και (7.4) κατόπιν πράξεων υπολογίζεται η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου:

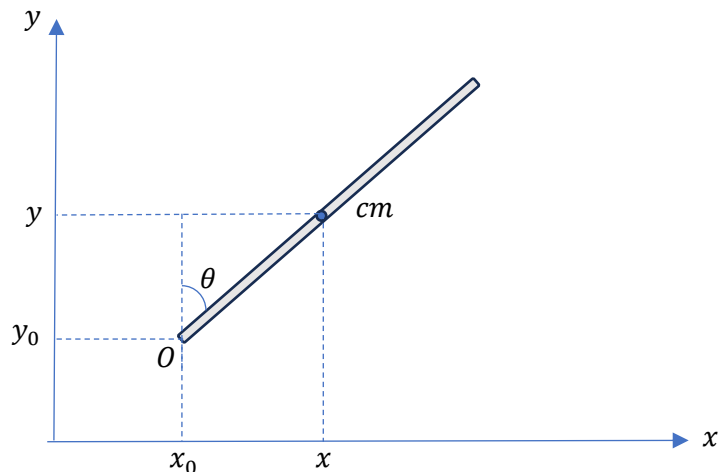
$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{\ell} (\sin \theta_0 - \sin \theta)} \quad (7.5)$$

Για τον υπολογισμό της δύναμης που ασκεί ο άξονας περιστροφής στην ράβδο, θεωρούμε ότι αυτή κινείται ελεύθερα στο κατακόρυφο επίπεδο, δηλαδή δεν την δεσμεύουμε εκ των προτέρων και στη συνέχεια αφού βρούμε από τη γεωμετρία του σχήματος τις συντεταγμένες του άκρου O, θα τις μηδενίσουμε για να πάρουμε τις εξισώσεις των δεσμών. Έτσι από το Σχήμα 12 έχουμε:

$$\eta \mu \theta = \frac{x - x_0}{\ell/2} \rightarrow x_0 = x - \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{y - y_0}{\ell/2} \rightarrow y_0 = y - \frac{\ell}{2} \sin \theta$$

και θέτοντας $x_0 = y_0 = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις των δεσμών:

$$f_1(x, \theta) = x - \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta \quad \text{και} \quad f_2(y, \theta) = y - \frac{\ell}{2} \sin \theta \quad (7.6)$$



Σχήμα 12: Συντεταγμένες του άκρου O της ράβδου συναρτήσει αυτών του κέντρου μάζας

Θεωρώντας την κίνηση της ράβδου ως επαλληλία μιας μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας και μιας στροφικής γύρω από αυτό και εισάγοντας τους δεσμούς η Λαγκρανζιανή του συστήματος παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 - mgy + \lambda_1 \left(x - \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \right) + \lambda_2 \left(y - \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta \right) \quad (7.7)$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange που αποτελούν μεταβλητές για το σύστημα, το οποίο έχει πλέον 5 βαθμούς ελευθερίας.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange τότε είναι:

$$x: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = \lambda_1 \rightarrow m\ddot{x} = \lambda_1 \quad (7.8)$$

$$y: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = -mg + \lambda_2 \rightarrow m\ddot{y} = -mg + \lambda_2 \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta} \right) = -\frac{\ell}{2}\lambda_1\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\ell}{2}\lambda_2\eta\mu\theta \rightarrow \\ &\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{6}{m\ell}(\lambda_2\eta\mu\theta - \lambda_1\sigma\upsilon\nu\theta) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\lambda_1: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \rightarrow 0 = x - \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \rightarrow x = \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \quad (7.11)$$

$$\lambda_2: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \rightarrow 0 = y - \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow y = \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta \quad (7.12)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές τις σχέσεις (7.11) και (7.12) ως προς το χρόνο προκύπτουν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας:

$$\dot{x} = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \ddot{x} = \frac{\ell}{2}(\ddot{\theta}\sigma\upsilon\nu\theta - \dot{\theta}^2\eta\mu\theta)$$

$$\dot{y} = -\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\eta\mu\theta \rightarrow \ddot{y} = -\frac{\ell}{2}(\ddot{\theta}\eta\mu\theta + \dot{\theta}^2\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μέσω των (7.2) και (7.5) προκύπτουν οι τελικές εκφράσεις των συνιστωσών της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\ell}{2} \left[\frac{3g}{2\ell} \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{3g}{\ell} (\sigma\upsilon\nu\theta_0 - \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta \right] \rightarrow \\ \ddot{x} &= \frac{3g}{2} \left(\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta_0 \right) \eta\mu\theta \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\ddot{y} = -\frac{\ell}{2} \left[\frac{3g}{2\ell} \eta\mu^2\theta + \frac{3g}{\ell} (\sigma\upsilon\nu\theta_0 - \sigma\upsilon\nu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta \right] \xrightarrow{\eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$\ddot{y} = -\frac{3g}{2} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} \sin\theta - \sin\theta_0 \right) \sin\theta \right] \quad (7.14)$$

Οι γενικευμένες δυνάμεις που επιβάλλουν τους δεσμούς f_1 και f_2 είναι:

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{\nabla} f_1(x, \theta) = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right) = \lambda_1 \left(\hat{i}, \frac{\ell}{2} \sin\theta \hat{\theta} \right) \quad (7.15)$$

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{\nabla} f_2(y, \theta) = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right) = \lambda_2 \left(\hat{j}, -\frac{\ell}{2} \eta \mu \theta \hat{\theta} \right) \quad (7.16)$$

Η δύναμη που ασκεί ο άξονας περιστροφής στη ράβδο είναι:

$$\vec{F}_{\text{άξονας} \rightarrow \text{ράβδο}} = \lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j} = \vec{F}_x \hat{i} + \vec{F}_y \hat{j} \quad (7.17)$$

όπου

$$F_x = \lambda_1 = \frac{3mg}{2} \left(\frac{3}{2} \sin\theta - \sin\theta_0 \right) \eta \mu \theta \quad (7.18)$$

όπως προκύπτει από τις σχέσεις (7.8) και (7.13) και

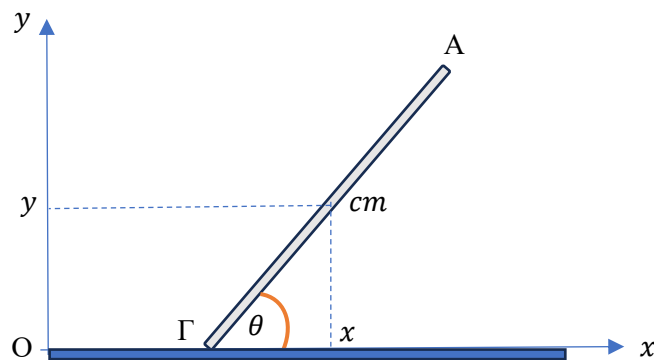
$$F_y = \lambda_2 = mg - \frac{3}{2} mg \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} \sin\theta - \sin\theta_0 \right) \sin\theta \right] \quad (7.19)$$

όπως προκύπτει από τις σχέσεις (7.9) και (7.14).

Οι όροι στις σχέσεις (7.15) και (7.16) που σχετίζονται με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\theta}$ εκφράζουν τις ροπές των παραπάνω δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας και ευθύνονται για την περιστροφή της ράβδου γύρω από αυτό.

3.8 Σύνθετη κίνηση ράβδου σε κατακόρυφο επίπεδο με το ένα άκρο της να ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ, μάζας m και μήκους ℓ , συγκρατείται αρχικά σε κατακόρυφη θέση με το άκρο της Γ να ακουμπά σε λείο οριζόντιο δάπεδο και κάποια στιγμή ($t=0$) αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί εντός του ομογενούς πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$. Τη χρονική στιγμή t , ο άξονας της ράβδου σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο Σχήμα 13. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας $I_{cm} = (1/12)m\ell^2$.



Σχήμα 13: Σύνθετη κίνηση ράβδου στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy

► Εύρεση των δεσμών

Για να βρούμε αν η κίνηση της ράβδου υπόκειται σε κάποιον δεσμό, δεν δεσμεύουμε εξαρχής το άκρο της Γ να ολισθαίνει επί του δαπέδου (άξονας x), αλλά θεωρούμε ότι η κίνηση γίνεται χωρίς περιορισμούς στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy (βλ. Σχήμα 14). Τότε, οι βαθμοί ελευθερίας είναι τρεις: δύο μεταφορικοί για την κίνηση του κέντρου μάζας (x, y) και ένας για την περιστροφή θ .

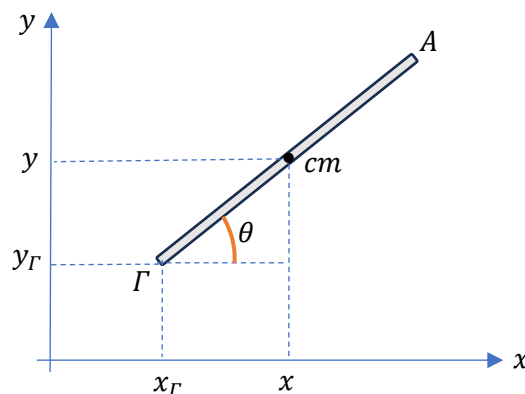
Από την γεωμετρία του Σχήματος 14 προκύπτει η σχέση: $y - y_\Gamma = (\ell/2)\eta\mu\theta$.

Η δέσμευση του άκρου Γ να κινείται επί του δαπέδου επιτυγχάνεται αν ισχύει $y_\Gamma = 0$ οπότε καταλήγουμε στη σχέση του δεσμού $y = (\ell/2)\eta\mu\theta$ με εξίσωση:

$$f = y - \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \quad (8.1)$$

► Βαθμοί ελευθερίας

Οι βαθμοί ελευθερίας μειώθηκαν κατά έναν λόγω του δεσμού, επομένως είναι δύο.



Σχήμα 14: Ελεύθερη κίνηση ράβδου στο επίπεδο Oxy για την εύρεση του δεσμού

► Επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων

Υπάρχουν δύο δυνατότητες: ή να επιβάλλουμε απευθείας τον δεσμό $y = (\ell/2)\eta\mu\theta$ στην Λαγκρανζιανή και να επιλέξουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις $q_1 = x$ και $q_2 = \theta$ ή να γράψουμε την Λαγκρανζιανή χωρίς κανέναν περιορισμό και να εισάγουμε σε αυτή το δεσμό μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange λ , ο οποίος θα αποτελεί παράμετρο όπως και οι (x, y, θ) . Στην δεύτερη περίπτωση το κέρδος είναι ότι εκτός από τις εξισώσεις κίνησης μπορούμε να υπολογίσουμε και την δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό. Για λόγους πληρότητας θα υιοθετήσουμε τη δεύτερη επιλογή.

► Συνάρτηση Lagrange

Η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας της λόγω μεταφορικής κίνησης και της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης γύρω από αυτό:

$$T = T_{cm} + T_{\sigma\tau\omicron\phi\iota\kappa\eta} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2$$

Η δυναμική ενέργεια της ράβδου ως προς το δάπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$V = mgy$$

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος εισάγοντας την εξίσωση του δεσμού (σχέση 8.1) έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 - mgy + \lambda\left(y - \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta\right) \quad (8.2)$$

► Εξισώσεις Euler-Lagrange

$$x: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \quad (8.3)$$

$$y: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg + \lambda \rightarrow m\ddot{y} = -mg + \lambda \quad (8.4)$$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}(I_{cm}\dot{\theta}) = -\lambda\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta \rightarrow I_{cm}\ddot{\theta} = -\lambda\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta \quad (8.5)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = y - \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta \quad (8.6)$$

► Διατηρούμενες ποσότητες

- *Ενέργεια:*

Η ενέργεια διατηρείται γιατί τόσο η Λαγκρανζιανή (σχέση 8.2) όσο και ο δεσμός (σχέση 8.6) δεν εξαρτώνται ρητά από το χρόνο. Από το ολοκλήρωμα Jacobi έχουμε:

$$J = \sum_i q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} - \mathcal{L} = \dot{x} m \dot{x} + \dot{y} m \dot{y} + \dot{\theta} I_{cm} \dot{\theta} - \mathcal{L}$$

$$\rightarrow J = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 + mgy = E = \text{σταθ.}$$

Η σταθερά E υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες: έστω ότι η ράβδος αφέθηκε χωρίς ταχύτητα από μια θέση που σχηματίζει γωνία θ_0 με το δάπεδο οπότε είναι $y(0) = (\ell/2)\eta\mu\theta_0$ και $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε $E = mg(\ell/2)\eta\mu\theta_0$ και καταλήγουμε:

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 + mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta = mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta_0 \quad (8.7)$$

- *Ορμή:*

Επειδή η Λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη από την συντεταγμένη x , η γενικευμένη ορμή p_x που συμπίπτει με τη συνήθη ορμή $p_x = m\dot{x}$ διατηρείται κατά την κίνηση της ράβδου, όπως φαίνεται από τη σχέση (8.3).

Επίσης απ' την ίδια σχέση προκύπτει $\dot{x} = \text{σταθ.} \rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}(t=0) \rightarrow \dot{x}(t) = 0$, δηλαδή το κέντρο μάζας της ράβδου κινείται μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση.

► Υπολογισμός της δύναμης που επιβάλλει το δεσμό (αντίδραση δεσμού)

Παραγωγίζοντας το δεσμό δύο φορές ως προς το χρόνο προκύπτει

$$y = \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta \rightarrow \dot{y} = \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \sigma \nu \theta \rightarrow \ddot{y} = \frac{\ell}{2} (\ddot{\theta} \sigma \nu \theta - \dot{\theta}^2 \eta \mu \theta) \quad (8.8)$$

Θέτοντας στη σχέση (8.7) $\dot{x} = 0$ και $\dot{y} = (\ell/2)\dot{\theta}\sigma\nu\theta$ βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 \sigma \nu^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta &= m g \frac{\ell}{2} \eta \mu \theta_0 \rightarrow \\ \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{12 g (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)}{\ell (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta)}} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (8.8) τις σχέσεις (8.5) και (8.9) παίρνουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\ell}{2} \left(-\frac{\lambda \ell}{2} \frac{\sigma \nu^2 \theta}{(1/12) m \ell^2} - \frac{12 g \eta \mu \theta (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)}{\ell (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta)} \right) = \\ &= -\frac{3 \lambda \sigma \nu^2 \theta}{m} - \frac{6 g \eta \mu \theta (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)}{1 + 3 \sigma \nu^2 \theta} \end{aligned}$$

την οποία αντικαθιστούμε στην σχέση (8.4) και υπολογίζουμε το λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= m g + m \left(-\frac{3 \lambda \sigma \nu^2 \theta}{m} - \frac{6 g \eta \mu \theta (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)}{1 + 3 \sigma \nu^2 \theta} \right) = \\ &= m g - 3 \lambda \sigma \nu^2 \theta - \frac{6 m g \eta \mu \theta (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)}{1 + 3 \sigma \nu^2 \theta} \rightarrow \\ &\rightarrow \lambda (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta) = m g - \frac{6 m g \eta \mu \theta (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)}{1 + 3 \sigma \nu^2 \theta} \rightarrow \\ &\rightarrow \lambda (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta)^2 = m g (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta) - 6 m g \eta \mu \theta \eta \mu \theta_0 + 6 m g \eta \mu^2 \theta \rightarrow \\ &\rightarrow \lambda (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta)^2 = m g (1 + 3 - 3 \eta \mu^2 \theta) - 6 m g \eta \mu \theta \eta \mu \theta_0 + 6 m g \eta \mu^2 \theta \rightarrow \\ &\rightarrow \lambda (1 + 3 \sigma \nu^2 \theta)^2 = m g (4 + 3 \eta \mu^2 \theta - 6 \eta \mu \theta \eta \mu \theta_0) \rightarrow \\ \lambda &= m g \frac{3 \eta \mu^2 \theta - 6 \eta \mu \theta \cdot \eta \mu \theta_0 + 4}{(1 + 3 \sigma \nu^2 \theta)^2} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμού με εξίσωση $f(y, \theta) = y - (\ell/2)\eta\mu\theta$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \lambda \vec{\nabla} f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \vec{F} = \lambda \left(0 + \hat{y} + \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \hat{\theta} \right) = \lambda \hat{y} + \lambda \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \hat{\theta}\end{aligned}\quad (8.11)$$

Ο πρώτος όρος $\lambda \hat{y}$ εκφράζει την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ που ασκεί το λείο δάπεδο στη ράβδο, ενώ ο δεύτερος όρος τη ροπή της δύναμης αυτής που ευθύνεται για την περιστροφή της γύρω το κέντρο μάζας της. Τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου την υπολογίζουμε αντικαθιστώντας την έκφραση του λ στην σχέση (8.5):

$$\ddot{\theta} = -6g\sigma\upsilon\nu\theta \frac{3\eta\mu^2\theta - 6\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta_0 + 4}{(1 + 3\sigma\upsilon\nu^2\theta)^2} \quad (8.12)$$

Η ταχύτητα με την οποία ολισθαίνει το άκρο Γ της ράβδου κατά μήκος του δαπέδου προκύπτει από την γεωμετρία του Σχήματος 13:

$$\begin{aligned}x - x_\Gamma &= \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \dot{x} - \dot{x}_\Gamma = -\frac{\ell}{2} \dot{\theta} \eta\mu\theta \rightarrow 0 - \dot{x}_\Gamma = -\frac{\ell}{2} \dot{\theta} \eta\mu\theta \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{x}_\Gamma = \frac{\ell}{2} \eta\mu\theta \sqrt{\frac{12g(\eta\mu\theta_0 - \eta\mu\theta)}{\ell(1 + 3\sigma\upsilon\nu^2\theta)}}\end{aligned}$$

Απώλεια επαφής με το δάπεδο:

Η ράβδος χάνει την επαφή όταν μηδενίζεται η δύναμη $\vec{N} = \lambda \hat{y}$ που δέχεται από αυτό. Πρέπει δηλαδή να ισχύει:

$$\lambda = 0 \rightarrow 3\eta\mu^2\theta - 6\eta\mu\theta_0 \cdot \eta\mu\theta + 4 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύση αν:

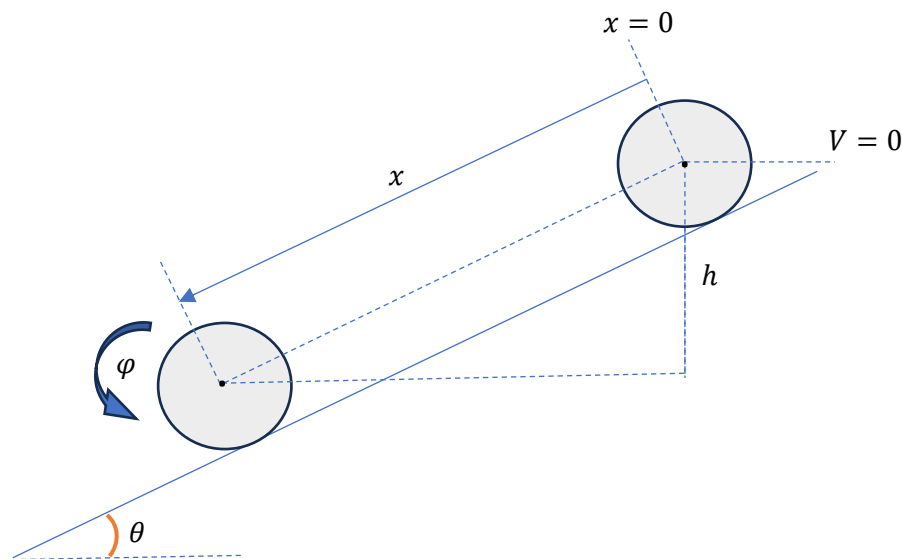
$$\Delta \geq 0 \rightarrow 36\eta\mu^2\theta_0 - 4 \cdot 3 \cdot 4 \geq 0 \rightarrow \eta\mu^2\theta_0 \geq \frac{4}{3} \xrightarrow{\left(\frac{4}{3} > 1\right)} \eta\mu^2\theta_0 > 1$$

Όμως $\eta\mu^2\theta_0 \leq 1$, το οποίο σημαίνει ότι ανεξάρτητα από την τιμή της γωνίας εκκίνησης θ_0 , η ράβδος δεν χάνει την επαφή με το δάπεδο.

3.9 Κύλιση στερεού σώματος στο επίπεδο

1. Σε κεκλιμένο επίπεδο

Ομογενές στερεό σώμα, κυκλικής διατομής, με ακτίνα R , μάζα m και ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας $I_{cm} = \kappa m R^2$, με $0 < \kappa \leq 1$, κυλίεται ευθύγραμμα επί σταθερού κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης θ , εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$. Να γίνει μελέτη της κίνησης.



Σχήμα 15: Κύλιση στερεού σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Στο Σχήμα 15 φαίνεται μια κάθετη τομή του στερεού που περιέχει το κέντρο μάζας. Η κύλιση του στερεού μελετάται ως επαλληλία μιας μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του και μιας στροφικής κίνησής του περί άξονα κάθετο στο επίπεδο της τομής του που διέρχεται από το κέντρο του.

Αν λοιπόν x είναι η θέση του κέντρου μάζας του στερεού, ως προς ένα σημείο αναφοράς τη χρονική στιγμή t και φ η γωνία στροφής του στον ίδιο χρόνο, τότε λόγω της κύλισης οι παραπάνω συντεταγμένες δεσμεύονται μεταξύ τους να ικανοποιούν κάθε στιγμή τη σχέση $x=R\varphi$ που αποτελεί και τον δεσμό του προβλήματος με εξίσωση:

$$f(x, \varphi) = x - R\varphi = 0 \quad (9.1)$$

Η κινητική ενέργεια του στερεού θα προκύψει από το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς του κέντρου μάζας και της αντίστοιχης ενέργειας λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας:

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\varphi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια του στερεού ως προς το επίπεδο αναφοράς που φαίνεται στο Σχήμα 15 δίνεται από τη σχέση:

$$V = -mgh = -mgx\eta\mu\theta$$

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος, εισάγοντας μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange λ τον δεσμό, γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\varphi}^2 + mgx\eta\mu\theta + \lambda(x - R\varphi) \quad (9.2)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$x: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = mg\eta\mu\theta + \lambda \rightarrow m\ddot{x} = mg\eta\mu\theta + \lambda \quad (9.3)$$

$$\varphi: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}(I_{cm}\dot{\varphi}) = -\lambda R \rightarrow I_{cm}\ddot{\varphi} = -\lambda R \quad (9.4)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\lambda}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} \rightarrow 0 = x - R\varphi \quad (9.5)$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές τον δεσμό $x = R\varphi$ προκύπτει $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$ από την οποία μέσω των (9.3) και (9.4) θα προσδιορίσουμε το λ :

$$\begin{aligned} \ddot{x} = R\ddot{\varphi} \rightarrow g\eta\mu\theta + \frac{\lambda}{m} &= -\frac{\lambda R^2}{I_{cm}} \rightarrow \lambda\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I_{cm}}\right) = -g\eta\mu\theta \rightarrow \\ \rightarrow \lambda &= -\frac{I_{cm}}{mR^2 + I_{cm}}mg\eta\mu\theta \end{aligned} \quad (9.6)$$

Η γενικευμένη δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό με εξίσωση $f(x, \varphi) = x - R\varphi$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F}_\delta = \lambda\left(\vec{\nabla}f(x, \varphi)\right) = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right) = \lambda(\hat{x} - R\hat{\varphi}) = \lambda\hat{x} - \lambda R\hat{\varphi} \quad (9.7)$$

όπου ο όρος $\lambda\hat{x}$ αντιστοιχεί σε συνήθη δύναμη που δεν είναι άλλη από την στατική τριβή μιας και το σημείο επαφής του στερεού με το πλάγιο επίπεδο είναι στιγμιαία ακίνητο.

$$\vec{T}_s = -\frac{I_{cm}}{mR^2 + I_{cm}}mg\eta\mu\theta\hat{x} \xrightarrow{I_{cm}=kmR^2} \vec{T}_s = -\frac{\kappa}{1+\kappa}mg\eta\mu\theta\hat{\varphi} \quad (9.8)$$

ενώ ο όρος $-λR\hat{\phi}$ εκφράζει τη ροπή της στατικής τριβής που ευθύνεται για την περιστροφή του στερεού περί το κέντρο μάζας

$$\vec{\tau}_s = \frac{I_{cm} \cdot R}{mR^2 + I_{cm}} \cdot mg\eta\mu\theta\hat{\phi} \xrightarrow{I_{cm}=kmR^2} \vec{\tau}_s = \frac{\kappa}{1+\kappa} mgR\eta\mu\theta\hat{\phi} \quad (9.9)$$

Από τις σχέσεις (9.3) και (9.4) μέσω της σχέσης (9.6) βρίσκουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού και τη γωνιακή του επιτάχυνση:

$$\vec{a}_{cm} = \ddot{x} = \frac{mR^2}{I_{cm} + mR^2} \cdot g\eta\mu\theta\hat{x} = \frac{mR^2}{(1+\kappa)mR^2} g\eta\mu\theta\hat{x} = \frac{g\eta\mu\theta}{1+\kappa} \hat{x} \quad (9.10)$$

$$\vec{\alpha}_\gamma = \ddot{\phi} = \frac{mR}{I_{cm} + mR^2} \cdot g\eta\mu\theta\hat{\phi} = \frac{mR}{(1+\kappa)mR^2} g\eta\mu\theta\hat{\phi} = \frac{g\eta\mu\theta}{R(1+\kappa)} \hat{\phi} \quad (9.11)$$

Ο υπολογισμός της ταχύτητας του κέντρου μάζας του στερεού όταν αυτό κατέλθει κατά h , καθώς και της γωνιακής του ταχύτητας, θα γίνει μέσω του ολοκληρώματος Jacobi που εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας αφού τόσο η Λαγκρανζιανή όσο και ο δεσμός δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο:

$$J = E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} = \dot{x}m\dot{x} + \dot{\phi}I_{cm}\dot{\phi} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\phi}^2 - mgx\eta\mu\theta - \lambda f$$

θέτοντας $f = x - R\phi = 0$ καταλήγουμε $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\phi}^2 - mgx\eta\mu\theta = \text{σταθ.} = E$

Η σταθερά E υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες: αν θεωρήσουμε ότι το στερεό αφήνεται από την ηρεμία, δηλαδή είναι $\dot{x}(0) = 0 = \dot{\phi}(0)$ από τη θέση $x(0) = 0$ τότε προκύπτει $E = 0$, οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\kappa mR^2 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 - mgx\eta\mu\theta &= 0 \rightarrow \\ \dot{x} &= \sqrt{\frac{2gx\eta\mu\theta}{1+\kappa}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\kappa}} \end{aligned} \quad (9.12)$$

και

$$\dot{\phi} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2gx\eta\mu\theta}{1+\kappa}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2gh}{1+\kappa}} \quad (9.13)$$

Αν το στερεό είναι συμπαγής σφαίρα τότε $\kappa = 2/5$, αν είναι σφαιρικό κέλυφος τότε $\kappa = 2/3$, αν είναι συμπαγής κύλινδρος ή δίσκος τότε $\kappa = 1/2$ ενώ αν είναι δακτύλιος ή λεπτό κυλινδρικό κέλυφος τότε $\kappa = 1$.

Οπότε, αν τα παραπάνω στερεά αφήνονταν από το ίδιο ύψος, την ίδια στιγμή, τότε η σφαίρα σε σχέση με τα υπόλοιπα στερεά θα περιστρέφεται γρηγορότερα και το κέντρο της θα κινείται ταχύτερα με αποτέλεσμα να φτάνει πρώτη στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

2. Σε οριζόντιο επίπεδο

Στην περίπτωση που η κύλιση λαμβάνει χώρα σε οριζόντιο επίπεδο, τότε η γωνία κλίσης θ του επιπέδου μηδενίζεται και στη λαγκρανζιανή που περιγράφει το σύστημα δεν υπεισέρχεται ο όρος της δυναμικής ενέργειας. Η έκφρασή της θα προκύψει αν θέσουμε $\theta = 0$ στη σχέση (9.2):

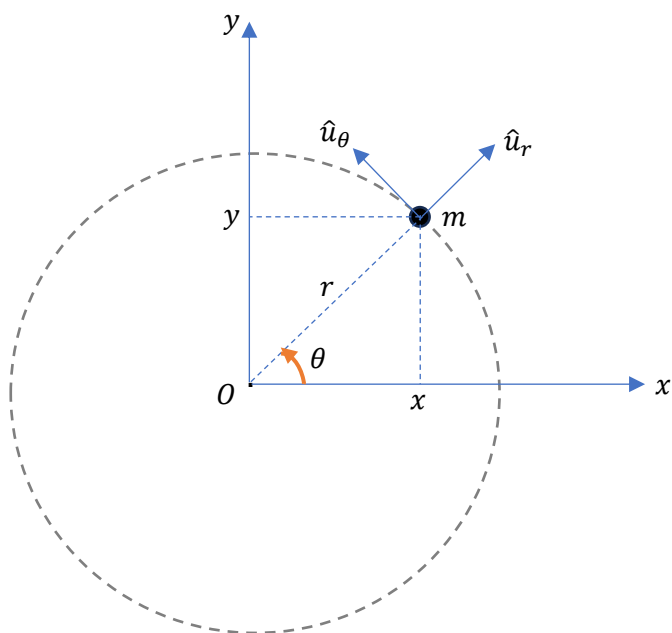
$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\varphi}^2 + \lambda(x - R\varphi) \quad (9.14)$$

Αντίστοιχα, θέτοντας $\theta = 0$ στις σχέσεις (9.11), (9.13) και (9.14) προκύπτει ότι το στερεό εκτελεί ομαλή κίνηση ($\ddot{x} = \ddot{\varphi} = 0$) και δεν απαιτείται στατική τριβή ($T_s = 0$) για να ικανοποιείται η συνθήκη κύλισης ($\dot{x} = R\dot{\varphi}$).

3.10 Κίνηση σωματιδίου σε κυκλική τροχιά

1. Σε κατακόρυφο επίπεδο

Σωματίδιο μάζας m ολισθαίνει χωρίς τριβές σε κατακόρυφη κυκλική στεφάνη ακτίνας a , εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$. Να γίνει μελέτη της κίνησης.



Σχήμα 16: Κίνηση σωματιδίου σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά

► Εύρεση δεσμών

Αν (x, y) είναι η θέση του σωματιδίου μια χρονική στιγμή t (βλ. Σχήμα 16), τότε είναι:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

σχέση που περιγράφει τον δεσμό στην κίνηση, με εξίσωση της μορφής:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0 \quad (10.1)$$

Αντίστοιχα, σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , ο δεσμός περιγράφεται από τη σχέση $r = \alpha$ με εξίσωση:

$$f(r) = r - \alpha = 0 \quad (10.2)$$

► Βαθμοί ελευθερίας

Το σωματίδιο κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy . Αν η κίνηση ήταν ελεύθερη, θα αντιστοιχούσαν δύο βαθμοί ελευθερίας, όμως λόγω του δεσμού που περιγράψαμε παραπάνω, οι βαθμοί ελευθερίας υποβιβάζονται σε έναν.

► Επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων

Για την απλούστερη μαθηματική περιγραφή του συστήματος, ενδείκνυται να χρησιμοποιήσουμε ως γενικευμένη συντεταγμένη q τη γωνία θ .

► Συνάρτηση Lagrange

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \xrightarrow{r=\alpha \rightarrow \dot{r}=0} T = \frac{1}{2} m \alpha^2 \dot{\theta}^2$$

Η δυναμική ενέργεια ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα x είναι:

$$V = mgy = mg\alpha\eta\mu\theta$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος γράφεται ως:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \alpha^2 \dot{\theta}^2 - mg\alpha\eta\mu\theta \quad (10.3)$$

► Εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\alpha^2 \dot{\theta}) = -mg\alpha \sin\theta \rightarrow m\alpha^2 \ddot{\theta} = -mg\alpha \sin\theta \rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\alpha} \sin\theta \quad (10.4)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση της κίνησης. Από αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ως εξής:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\alpha} \sin\theta \rightarrow \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{g}{\alpha} \dot{\theta} \sin\theta \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{g}{\alpha} \eta \mu \theta \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{\alpha} \eta \mu \theta \right) = 0 \rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{\alpha} \eta \mu \theta = \text{σταθ.}$$

Η σταθερά υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες: θεωρούμε ότι το σωματίδιο αφέθηκε από την ηρεμία $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0 = 0$ σε γωνία $\theta(0) = \theta_0$. Τότε ισχύει:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{\alpha} \eta \mu \theta = \dot{\theta}_0^2 + \frac{g}{\alpha} \eta \mu \theta_0 \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\alpha} (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta) \rightarrow$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (\eta \mu \theta_0 - \eta \mu \theta)} \quad (10.5)$$

► Διατηρούμενες ποσότητες

Κατά την κίνηση του σωματιδίου διατηρείται η ενέργεια διότι τόσο λαγκρανζιανή όσο και ο δεσμός δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο:

$$J = E \rightarrow \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = E \rightarrow \dot{\theta} (m\alpha^2 \dot{\theta}) - \frac{1}{2} m\alpha^2 \dot{\theta}^2 + mg\alpha \eta \mu \theta = E \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m\alpha^2 \dot{\theta}^2 + mg\alpha \eta \mu \theta = E$$

Η σταθερά E υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες:

$$E = \frac{1}{2} m\alpha^2 \dot{\theta}_0^2 + mg\alpha \eta \mu \theta_0 = 0 + mg\alpha \eta \mu \theta_0 \rightarrow E = mg\alpha \eta \mu \theta_0$$

► Υπολογισμός της δύναμης που επιβάλλει τον δεσμό

Για να υπολογίσουμε την αντίδραση του δεσμού, θεωρούμε ότι το σωματίδιο κινείται χωρίς περιορισμούς στο επίπεδο Oxy και προσθέτουμε στην ελεύθερη λαγκρανζιανή του, μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange, τον δεσμό $r = a$ που πετυχαίνει την δέσμευσή του στον κύκλο, οπότε η λαγκρανζιανή έχει τη μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\eta\mu\theta + \lambda(r - a) \quad (10.6)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\dot{r}\dot{\theta}^2 - mg\eta\mu\theta + \lambda \quad (10.7)$$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -mgr\sigma\upsilon\nu\theta \quad (10.8)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{d}{dt}(0) = r - a \rightarrow r - a = 0 \rightarrow r = a \rightarrow \dot{r} = 0 \quad (10.9)$$

Επιβάλλουμε τον δεσμό στις σχέσεις (10.7) και (10.8) και παίρνουμε, αντίστοιχα:

$$0 = m\alpha\dot{\theta}^2 - mg\eta\mu\theta + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = mg\eta\mu\theta - m\alpha\dot{\theta}^2 \quad (10.10)$$

$$m\alpha^2\ddot{\theta} = -mg\alpha\sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta,$$

δηλαδή τη σχέση (10.4), η οποία οδηγεί στη σχέση (10.5) για τη γωνιακή ταχύτητα. Αντικαθιστώντας τη σχέση (10.5) στη σχέση (10.10) βρίσκουμε την τελική έκφραση για το λ :

$$\lambda = mg\eta\mu\theta - m\alpha\frac{2g}{\alpha}(\eta\mu\theta_0 - \eta\mu\theta) \rightarrow \lambda = mg(3\eta\mu\theta - 2\eta\mu\theta_0),$$

οπότε η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό με εξίσωση $f = r - a$ είναι:

$$\begin{aligned} \vec{F}_\delta &= \lambda(\vec{\nabla}f) = mg(3\eta\mu\theta - 2\eta\mu\theta_0)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta\right) = \\ &= mg(3\eta\mu\theta - 2\eta\mu\theta_0)(\hat{u}_r + 0) \rightarrow \\ &\rightarrow \vec{F}_\delta = mg(3\eta\mu\theta - 2\eta\mu\theta_0)\hat{u}_r \end{aligned} \quad (10.11)$$

2. Σε οριζόντιο επίπεδο

Στην περίπτωση αυτή η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν και η λαγκρανζιανή του συστήματος όπως προκύπτει από τη σχέση (10.6), είναι:

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \lambda(r - \alpha) \quad (10.11)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange τότε είναι

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L'}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m r \dot{\theta}^2 + \lambda \quad (10.12)$$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L'}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = 0 \rightarrow m r^2 \dot{\theta} = \text{σταθ.} \quad (10.13)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}}\right) = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = r - \alpha \rightarrow r = \alpha \text{ (ο δεσμός)}$$

Από τον δεσμό $r = \alpha$, έπεται $\dot{r} = 0$ και από τη σχέση (10.12) προκύπτει:

$$\lambda = -m\alpha\dot{\theta}^2,$$

ενώ από τη σχέση (10.13) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ είναι σταθερή, δηλαδή η κίνηση του σωματιδίου είναι ομαλή κυκλική. Η δύναμη του δεσμού είναι

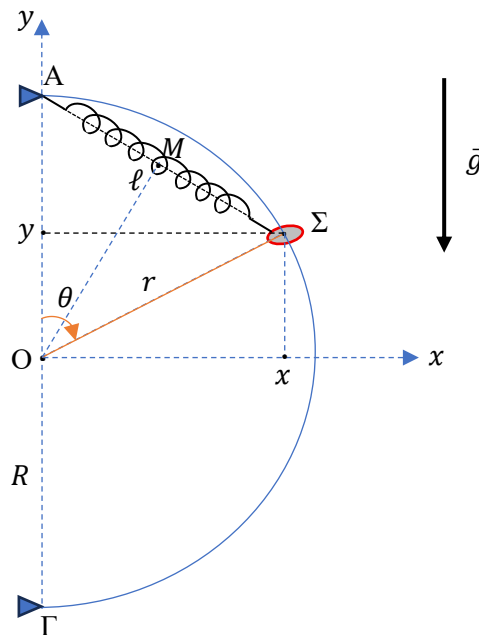
$$\vec{F}_\delta = \lambda(\vec{\nabla} f) = -m\alpha\dot{\theta}^2 \left(\frac{\partial(r - \alpha)}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r - \alpha)}{\partial \theta} \hat{u}_\theta \right) = -m\alpha\dot{\theta}^2 (\hat{u}_r + 0) \rightarrow$$

$$\vec{F}_\delta = -m\alpha\dot{\theta}^2 \hat{u}_r \quad (10.14)$$

Η δύναμη του δεσμού δεν είναι τίποτα άλλο από την αναγκαία κεντρομόλο δύναμη που συγκρατεί το σωματίδιο στην κυκλική τροχιά.

3.11 Κίνηση δακτυλίου σε λείο συρμάτινο ημικυκλικό οδηγό προσδεμένο σε ελατήριο

Μικρός δακτύλιος Σ , μάζας m , κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$, επί λείου κατακόρυφου συρμάτινου ημικυκλικού οδηγού, ακτίνας R , δεμένος στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους R , το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο στο ένα ακλόνητο άκρο A του οδηγού.



Σχήμα 17: Κίνηση δακτυλίου σε ημικυκλικό κατακόρυφο οδηγό, δεμένο σε ελατήριο

Λαγκρανζιανή θεώρηση

Επιλέγουμε το κέντρο O του ημικυκλικού οδηγού ως την αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς Oxy . Στο Σχήμα 17 φαίνεται η θέση (x, y) του δακτυλίου μια χρονική στιγμή t .

Το μήκος ℓ του ελατηρίου τότε υπολογίζεται από το ισοσκελές τρίγωνο OAS ως εξής:

Το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά AS είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας θ , οπότε αν M είναι το μέσον της πλευράς AS τότε έχουμε:

$$\eta\mu(\theta/2) = \frac{(\ell/2)}{R} \rightarrow \ell = 2R\eta\mu(\theta/2)$$

Για τη μαθηματική περιγραφή του συστήματος ενδείκνυται η χρήση των πολικών συντεταγμένων (r, θ) . Η ελεύθερη κίνηση του δακτυλίου στο επίπεδο θα αντιστοιχούσε σε δύο βαθμούς ελευθερίας. Όμως, ο δακτύλιος περιορίζεται να κινείται στην καμπύλη που ορίζει ο ημικυκλικός οδηγός και ο περιορισμός αυτός εκφράζεται από τη σχέση $r = R$. Έτσι λόγω του δεσμού οι βαθμοί ελευθερίας υποβιβάζονται σε έναν και επιλέγουμε ως γενικευμένη συντεταγμένη q τη γωνία θ . Η εξίσωση του δεσμού είναι:

$$f(r) = r - R = 0 \quad (11.1)$$

Η κινητική ενέργεια του δακτυλίου στις πολικές συντεταγμένες είναι:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \xrightarrow{r=R \rightarrow \dot{r}=0} T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

Ως επίπεδο αναφοράς για την δυναμική ενέργεια επιλέγεται το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα x , οπότε η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} V = V_g + V_{el} &= mgy + \frac{1}{2}k(\ell - R)^2 = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(2R\eta\mu\frac{\theta}{2} - R\right)^2 \rightarrow \\ V &= mgR\sin\theta + \frac{1}{2}kR^2\left(2\cdot\eta\mu\frac{\theta}{2} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος είναι:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\sin\theta - \frac{1}{2}kR^2\left(2\cdot\eta\mu\frac{\theta}{2} - 1\right)^2 \quad (11.2)$$

Οι μερικές παράγωγοι της L είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mgR\eta\mu\theta - \frac{1}{2}kR^2 \cdot 2\left(2\eta\mu\frac{\theta}{2} - 1\right)2 \cdot \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \\ &= mgR\eta\mu\theta - kR^2\sin\frac{\theta}{2}\left(2\eta\mu\frac{\theta}{2} - 1\right) \xrightarrow{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\eta\mu\theta} \\ \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mgR\eta\mu\theta - kR^2\eta\mu\theta + kR^2\sin(\theta/2) = (mgR - kR^2)\eta\mu\theta + kR^2\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) = (mgR - kR^2)\eta\mu\theta + kR^2\sin\frac{\theta}{2} \rightarrow \\ \ddot{\theta} &= \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right)\eta\mu\theta + \frac{k}{m} \cdot \sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του δακτυλίου.

Διατήρηση της ενέργειας: Η λαγκρανζιανή και ο δεσμός του συστήματος δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, οπότε το ολοκλήρωμα Jacobi ισούται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος:

$$J = \dot{\theta} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m g R \sin \theta + \frac{1}{2} k R^2 \left(2 \cdot \eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2 = E$$

Η σταθερά E υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες που είναι η θέση και η ταχύτητα του δακτυλίου τη στιγμή $t = 0$. Για να προκύψουν απλούστερες εκφράσεις, θα θεωρήσουμε ότι ο δακτύλιος ξεκινά από την ηρεμία από το άνω άκρο του οδηγού, δηλαδή $\theta(0) = \theta_0 = 0$ και $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0$. Τότε η σταθερά E είναι:

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_0^2 + m g R \sin \theta_0 + \frac{1}{2} k R^2 \left(2 \cdot \eta \mu \frac{\theta_0}{2} - 1 \right)^2 = m g R + \frac{1}{2} k R^2$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας υπολογίζεται η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου:

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m g R \sin \theta + \frac{1}{2} k R^2 \left(2 \eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2 &= m g R + \frac{1}{2} k R^2 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 &= m g R (1 - \sin \theta) + \frac{1}{2} k R^2 \left[1 - \left(2 \eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2 \right] \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 &= m g R (1 - \sin \theta) + \frac{1}{2} k R^2 \left(-4 \eta \mu^2 \frac{\theta}{2} + 4 \eta \mu \frac{\theta}{2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{R} (1 - \sin \theta) + \frac{4k}{m} \cdot \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(1 - \eta \mu \frac{\theta}{2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{2g}{R} (1 - \sin \theta) + \frac{4k}{m} \cdot \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(1 - \eta \mu \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned} \quad (11.4)$$

Η τιμή της γωνιακής ταχύτητας:

- στο άνω άκρο του οδηγού όπου $\theta = 0 \rightarrow \sin \theta = 1$, $\eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0$ είναι $\dot{\theta}(0) = 0$
- στο κάτω άκρο όπου $\theta = \pi \rightarrow \sin \theta = -1$, $\eta \mu \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1$ είναι $\dot{\theta}(\pi) = \sqrt{\frac{4g}{R}}$

Αντίδραση δεσμού

Για τον υπολογισμό της δύναμης που περιορίζει την κίνηση του δακτυλίου στον οδηγό, αρκεί να γραφεί η λαγκρανζιανή της δεσμευμένης κίνησης, η οποία προκύπτει αν στην αντίστοιχη λαγκρανζιανή της ελεύθερης κίνησής (άνευ περιορισμών) του στο επίπεδο Oxy , προστεθεί ο δεσμός $r = R$ μέσω ενός πολλαπλασιαστή λαγκράνζ λ .

Το μήκος του ελατηρίου τότε από το τρίγωνο OAS του σχήματος 17 είναι:

$$\ell^2 = x^2 + (R - y)^2 \rightarrow \ell = \sqrt{(r\eta\mu\theta)^2 + (R - r\sigma\upsilon\nu\theta)^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Η λαγκρανζιανή που αντιστοιχεί στην ελεύθερη κίνηση του δακτυλίου είναι:

$$L = T - V = T - (V_\beta + V_{\varepsilon\lambda}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}k(\ell - R)^2 \text{ με}$$

$$\ell = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Η λαγκρανζιανή του δεσμευμένου συστήματος είναι: $\mathcal{L} = L + \lambda f \rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{k}{2}(\ell - R)^2 + \lambda(r - R) \quad (11.5)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange

Οι μερικές παράγωγοι της $\mathcal{L}$ είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = r - R,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 - mgr\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{k}{2}2(\ell - R) \cdot \frac{1}{2\ell}(2r - 2R\sigma\upsilon\nu\theta) + \lambda =$$

$$= m\dot{\theta}^2 - mgr\sigma\upsilon\nu\theta - k\frac{(\ell - R)}{\ell}(r - R\sigma\upsilon\nu\theta) + \lambda,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mgr\eta\mu\theta - \frac{k}{2}2(\ell - R) \cdot \frac{1}{2\ell}2rR\eta\mu\theta = mgr\eta\mu\theta - k\frac{\ell - R}{\ell}rR\eta\mu\theta$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow$$

$$\rightarrow m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 - mgr\sigma\upsilon\nu\theta - k\frac{(\ell - R)}{\ell}(r - R\sigma\upsilon\nu\theta) + \lambda \quad (11.6)$$

$$\theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = mgr \eta \mu \theta - k \frac{\ell - R}{\ell} r R \eta \mu \theta \quad (11.7)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow 0 = r - R \rightarrow r = R$$

Θέτοντας $r = R$ και $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ έχουμε:

$$\ell = \sqrt{R^2 + R^2 - 2RR \cos \theta} = \sqrt{2R^2(1 - \cos \theta)} = \sqrt{2R^2 \cdot 2\eta \mu^2 \frac{\theta}{2}} = 2R\eta \mu \frac{\theta}{2},$$

$$(11.6) \rightarrow 0 = mR\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - k \frac{R \left(2\eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right)}{2R\eta \mu \frac{\theta}{2}} R(1 - \cos \theta) + \lambda \frac{1 - \cos \theta = 2\eta \mu^2 \frac{\theta}{2}}{2}$$

$$\rightarrow \lambda = -mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + kR \left(2\eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right) \eta \mu \frac{\theta}{2} \xrightarrow{(11.4)}$$

$$\lambda = -mR \left[\frac{2g}{R} (1 - \cos \theta) + \frac{4k}{m} \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(1 - \eta \mu \frac{\theta}{2} \right) \right] + mg \cos \theta + kR \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(2\eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = -2mg + 3mg \cos \theta + kR \eta \mu \frac{\theta}{2} \left[2\eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 - 4 \left(1 - \eta \mu \frac{\theta}{2} \right) \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = mg(3 \cos \theta - 2) + kR \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(6\eta \mu \frac{\theta}{2} - 5 \right)$$

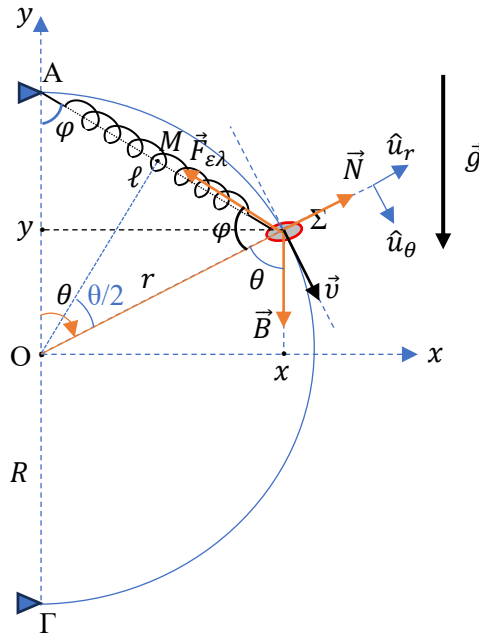
Η δύναμη επομένως που επιβάλλει τον δεσμό με εξίσωση $f = r - R$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F}_{\text{δεσμού}} = \lambda(\nabla f) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{δεσμού}} = \left[mg(3 \cos \theta - 2) + kR \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(6\eta \mu \frac{\theta}{2} - 5 \right) \right] \hat{u}_r \quad (11.8)$$

έχει δηλαδή τη διεύθυνση της ακτίνας του οδηγού σε κάθε σημείο του.

Νευτώνεια θεώρηση



Σχήμα 18: Δυνάμεις στον δακτύλιο

Στο Σχήμα 18 έχουν σχεδιαστεί οι ασκούμενες δυνάμεις στον δακτύλιο. Το τρίγωνο OAS είναι ισοσκελές και το ύψος OM είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας θ , οπότε οι γωνίες φ και $\theta/2$ είναι συμπληρωματικές.

Εφαρμογή δεύτερου νόμου

Η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες στη γενική περίπτωση δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta \quad (11.9)$$

Στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης είναι $r = \text{σταθ.} \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ και η επιτάχυνση ισούται με:

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta \quad (11.10)$$

- εφαπτομενική διεύθυνση:

$$\begin{aligned} \vec{F}_\theta = m\vec{a}_\theta &\rightarrow mg\eta\mu\theta\hat{u}_\theta - F_{\varepsilon\lambda}\eta\mu\varphi\hat{u}_\theta = mR\ddot{\theta}\hat{u}_\theta \xrightarrow{\eta\mu\varphi = \text{συν}\frac{\theta}{2}} \\ &\rightarrow mg\eta\mu\theta - k(\ell - R)\text{συν}\frac{\theta}{2} = mR\ddot{\theta} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \ddot{\theta} &= \frac{g}{R} \eta \mu \theta - \frac{k}{mR} \left(2R \eta \mu \frac{\theta}{2} - R \right) \sigma \nu \nu \frac{\theta}{2} = \frac{g}{R} \eta \mu \theta - \frac{k}{m} \left(2 \eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right) \sigma \nu \nu \frac{\theta}{2} = \\
 &= \frac{g}{R} \eta \mu \theta - \frac{k}{m} 2 \eta \mu \frac{\theta}{2} \sigma \nu \nu \frac{\theta}{2} + \frac{k}{m} \sigma \nu \nu \frac{\theta}{2} \rightarrow \\
 \rightarrow \ddot{\theta} &= \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m} \right) \eta \mu \theta + \frac{k}{m} \sigma \nu \nu \frac{\theta}{2} \quad (11.11)
 \end{aligned}$$

- ακτινική διεύθυνση:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_r = m \vec{a}_r &\rightarrow -mg \sigma \nu \nu \theta \hat{u}_r - F_{ελ} \sigma \nu \nu \phi \hat{u}_r + N \hat{u}_r = -mR \dot{\theta}^2 \hat{u}_r \xrightarrow{\sigma \nu \nu \phi = \eta \mu \frac{\theta}{2}} \\
 -mg \sigma \nu \nu \theta - k \left(2R \eta \mu \frac{\theta}{2} - R \right) \eta \mu \frac{\theta}{2} + N &= -mR \dot{\theta}^2 \rightarrow \\
 \rightarrow N &= -mR \dot{\theta}^2 + mg \sigma \nu \nu \theta + kR \left(2 \eta \mu \frac{\theta}{2} - 1 \right) \eta \mu \frac{\theta}{2} \xrightarrow{(11.4)} \\
 \rightarrow N(\theta) &= \left[mg(3 \sigma \nu \nu \theta - 2) + kR \eta \mu \frac{\theta}{2} \left(6 \eta \mu \frac{\theta}{2} - 5 \right) \right] \hat{u}_r \quad (11.12)
 \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί ο οδηγός στο σωματίδιο όταν αυτό βρίσκεται στο άνω άκρο του, θέτουμε $\theta = 0$ και παίρνουμε:

$$N(0) = mg$$

ενώ στο κάτω άκρο είναι:

$$N(\pi) = mg(3 \cdot \sigma \nu \nu \pi - 2) + kR \eta \mu \frac{\pi}{2} \left(6 \eta \mu \frac{\pi}{2} - 5 \right) = -5mg + kR$$

Διατήρηση ενέργειας

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται κατά την κίνηση του δακτυλίου, διότι η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο και οι υπόλοιπες δυνάμεις είναι διατηρητικές, οπότε θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια βαρύτητας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα x , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 mgR + \frac{1}{2} k(\ell - R)^2 &= \frac{1}{2} m v^2 + mgR \sigma \nu \nu \theta + \frac{1}{2} k(\ell' - R)^2 \rightarrow \\
 \rightarrow mg(R - R \sigma \nu \nu \theta) + \frac{1}{2} k(0 - R)^2 &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k \left(2R \eta \mu \frac{\theta}{2} - R \right)^2 \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2mgR(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + kR^2 &= mR^2\dot{\theta}^2 + kR^2\left(2\eta\mu\frac{\theta}{2} - 1\right)^2 \rightarrow \\
 \rightarrow \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{R}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + \frac{kR^2}{mR^2}\left[1 - \left(2\eta\mu\frac{\theta}{2} - 1\right)^2\right] = \\
 &= \frac{2g}{R}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + \frac{4k}{m}\left(-4\eta\mu^2\frac{\theta}{2} + 4\eta\mu\frac{\theta}{2}\right) = \\
 &= \frac{2g}{R}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + \frac{4k}{m} \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}\left(1 - \eta\mu\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \\
 \rightarrow \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + \frac{4k}{m} \cdot \eta\mu\frac{\theta}{2}\left(1 - \eta\mu\frac{\theta}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Σύγκριση των δύο θεωρήσεων

Οι δύο θεωρήσεις καταλήγουν στα ίδια αποτελέσματα έχοντας όμως διαφορετική αφετηρία. Η λαγκρανζιανή προσέγγιση αντιμετωπίζει τον δεσμό $r = R$ ως έναν περιορισμό γεωμετρικής φύσης, τον οποίο δύναται να ενσωματώσει είτε απευθείας στη συνάρτηση λαγκράντζ, απομονώνοντας με τον τρόπο αυτό τη φυσική κίνηση από τη δύναμη του δεσμού, είτε μέσω ενός πολλαπλασιαστή λαγκράντζ, μέσω του οποίου προσδιορίζει τη δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό αυτό. Παράλληλα δίνει με συστηματικό τρόπο τις εξισώσεις κίνησης, αλλά είναι λιγότερο διαισθητική και περισσότερο αφηρημένη σε σχέση με τη Νευτώνεια. Επίσης απαιτεί περισσότερες αλγεβρικές πράξεις εξαιτίας των παραγωγίσεων.

Αντίθετα, η Νευτώνεια προσέγγιση αντιμετωπίζει τον δεσμό όχι ως γεωμετρικό περιορισμό, αλλά ως δύναμη που πρέπει να συμπεριληφθεί στο σύνολο των ασκούμενων στο σώμα δυνάμεων, όπως ορίζει ο δεύτερος νόμος. Παράλληλα επιτρέπει την άμεση κατανόηση της κίνησης, μέσω της ανάλυσής της σε ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, οδηγώντας σε γρήγορους υπολογισμούς και διευκολύνοντας την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

3.12 Ελεύθερη κίνηση σωματιδίου σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση διατηρητικών δυνάμεων

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο Oxy , άνευ τριβών, υπό την επίδραση ενός διατηρητικού πεδίου δυνάμεων. Να γίνει μελέτη της κίνησης.

Θα περιγράψουμε την κίνηση τόσο σε καρτεσιανές όσο και σε πολικές συντεταγμένες.

- **Καρτεσιανές συντεταγμένες ($q_1 = x, q_2 = y$)**

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια στη γενική περίπτωση είναι συνάρτηση των δύο συντεταγμένων x και y :

$$V = V(x, y)$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y) \quad (12.1)$$

Οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* οδηγούν στον δεύτερο νόμο του Newton σε κάθε άξονα:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (12.2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \rightarrow m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (12.3)$$

Η ασκούμενη στο σωματίδιο δύναμη θα προκύψει από την κλίση της συνάρτησης του δυναμικού:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(x, y) \rightarrow F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}\right) \rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

Η ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται κατά την κίνηση διότι η λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$):

$$J = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = E$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y)$$

και αφού εκτελέσουμε τις πράξεις καταλήγουμε:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) = E = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + V(x_0, y_0) \quad (12.4)$$

όπου η σταθερά E προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες (x_0, y_0) και $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$.

- **Πολικές συντεταγμένες ($q_1 = r, q_2 = \theta$)**

Η κινητική ενέργεια σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια στη γενική περίπτωση θα είναι μια συνάρτηση των r και θ , δηλαδή:

$$V = V(r, \theta)$$

Η συνάρτηση *Lagrange* του συστήματος είναι:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, \theta) \quad (12.5)$$

Από τις εξισώσεις *Euler-Lagrange* προκύπτουν:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \rightarrow m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (12.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (12.7)$$

Η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο και η δυναμική ενέργεια συνδέονται με τη σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}V(r, \theta) \rightarrow \\ &\rightarrow F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτουν η ακτινική συνιστώσα της δύναμης:

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

και η αζιμουθιακή της συνιστώσα:

$$F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Η εξίσωση (12.6) αποτελεί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση ($ma_r = F_r$), στην οποία το σωματίδιο κινείται με επιτάχυνση:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

Αντίστοιχα, η εξίσωση (12.7) αποτελεί τον δεύτερο νόμο για τη στροφική κίνηση του σωματιδίου περί το σημείο O , ο οποίος συνδέει τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του με την ασκούμενη σε αυτό ροπή της δύναμης (rF_θ).

Η ενέργεια του σωματιδίου διατηρείται κατά την κίνηση διότι:

$$\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial t} = 0$$

Ειδική περίπτωση: Κίνηση σε κεντρικό πεδίο δύναμης

Αν το δυναμικό στο οποίο κινείται το σωματίδιο δεν έχει εξάρτηση από τη γωνιακή συντεταγμένη θ , είναι δηλαδή της μορφής $V = V(r)$, τότε χαρακτηρίζεται ως κεντρικό πεδίο δύναμης, το οποίο δρα στο σωματίδιο κατά τρόπο ώστε η δύναμη που το κινεί να έχει διεύθυνση που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο και φορά προς αυτό το σημείο ή αντίθετα.

Με άλλα λόγια η ασκούμενη στο σωματίδιο δύναμη $\vec{F}$ είναι συγγραμμική του διανύσματος θέσης $\vec{r}$. Τότε εκτός της ενέργειας διατηρείται και η στροφορμή κατά την κίνηση του σωματιδίου. Αυτό προκύπτει από τη σχέση (12.7) διότι ισχύει:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

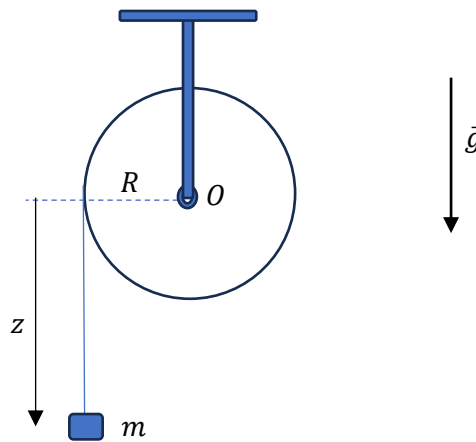
οπότε:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

που αντιστοιχεί στη στροφορμή ως προς τον άξονα z .

3.13 Σύστημα περιστρεφόμενης τροχαλίας-σώματος δεμένα με νήμα

Ομογενής τροχαλία μάζας M και ακτίνας R μπορεί να στρέφεται άνευ τριβών περί οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό της και διέρχεται από το κέντρο της O . Στην περιφέρεια της τροχαλίας έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές και μη ελαστικό νήμα και στο ελεύθερο άκρο του έχει προσδεθεί σώμα μάζας m (βλ. Σχήμα 19). Το σύστημα βρίσκεται εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$ και κάποια στιγμή ($t = 0$) αφήνεται ελεύθερο. Το σώμα m κατέρχεται χωρίς το νήμα να ολισθαίνει ως προς την τροχαλία.



Σχήμα 19: Σύστημα τροχαλία-σώμα

Αν τη χρονική στιγμή t το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά z και η γωνία στροφής της τροχαλίας είναι θ , τότε εξαιτίας της μη ολίσθησης του νήματος ως προς την τροχαλία και της ανελαστικότητάς του ισχύει $z = R\theta$ που εκφράζει τον δεσμό του συστήματος με εξίσωση:

$$f(z, \theta) = z - R\theta = 0 \quad (13.1)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος χωρίς την επιβολή του δεσμού είναι:

$$T = T_m + T_{\text{τροχ.}} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2,$$

ενώ η δυναμική του ενέργεια ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της τροχαλίας είναι:

$$V = -mgz$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος γράφεται:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + mgz$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος μαζί με τον δεσμό γράφεται:

$$\mathcal{L} = L + \lambda f(z, \theta) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + mgz + \lambda(z - R\theta) \quad (13.2)$$

Euler-Lagrange:

$$z: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = mg + \lambda \rightarrow m\ddot{z} = mg + \lambda \quad (13.3)$$

$$\theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} \right) = -\lambda R \rightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = -\lambda R \quad (13.4)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{d}{dt} (0) = z - R\theta \rightarrow 0 = z - R\theta \rightarrow \ddot{z} = R\ddot{\theta} \quad (13.5)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (13.3) και (13.4) στη σχέση (13.5) προκύπτει η έκφραση του λ :

$$g + \frac{\lambda}{m} = R \left(-\frac{2\lambda}{MR} \right) \rightarrow \lambda \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right) = -g \rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{mMg}{2m + M} \quad (13.6)$$

Η επιτάχυνση του σώματος προκύπτει με αντικατάσταση του λ στη σχέση (13.3):

$$\ddot{z} = g + \frac{1}{m} \left(-\frac{mM}{2m + M} g \right) = g \left(1 - \frac{M}{2m + M} \right) = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}} = \text{σταθ.} \quad (13.7)$$

Αντίστοιχα η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας προκύπτει από τη σχέση (13.5):

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{z}}{R} = \frac{g}{\left(1 + \frac{M}{2m} \right) R} = \text{σταθ.} \quad (13.8)$$

Η γενικευμένη δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό είναι:

$$\vec{F} = \lambda(\nabla f) = \lambda \left(\frac{\partial f(z, \theta)}{\partial z} \hat{z} + \frac{\partial f(z, \theta)}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) = \lambda(\dot{z}, -R\dot{\theta}) = (\lambda\dot{z}, -\lambda R\dot{\theta}) \quad (13.9)$$

όπου η z-συνιστώσα της εκφράζει τη δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα:

$$\vec{T}_v = -\frac{mMg}{2m + M} \hat{z} = -\frac{mg}{1 + \frac{2m}{M}} \hat{z} \quad (13.10)$$

και η θ-συνιστώσα της εκφράζει τη ροπή αυτής της δύναμης που ευθύνεται για την περιστροφή της τροχαλίας:

$$\vec{\tau} = \frac{mg}{\left(1 + \frac{2m}{M}\right)} R\hat{\theta} \quad (13.11)$$

Διατήρηση της ενέργειας

Η ενέργεια διατηρείται λόγω της μη ρητής χρονοεξάρτησης τόσο της λαγκρανζιανής που περιγράφει το σύστημα όσο και του δεσμού στον οποίο υπόκειται και εκφράζεται μέσω του ολοκληρώματος Jacobi:

$$J = \dot{z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} - \mathcal{L} = E$$

Με αντικατάσταση της $\mathcal{L}$ στην παραπάνω σχέση και αφού εκτελέσουμε πράξεις καταλήγουμε:

$$\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 - mgz = E = -mgz_0 \quad (13.12)$$

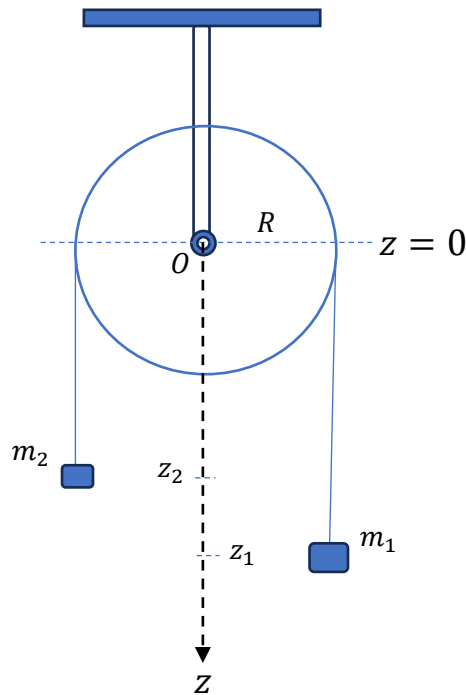
όπου η σταθερά E υπολογίστηκε από τις αρχικές συνθήκες:

αν θεωρήσουμε αρχικά ($t = 0$) ότι τα σώματα του συστήματος είναι ακίνητα ($\dot{z}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$) και το σώμα m βρίσκεται στη θέση z_0 , τότε θα ισχύει

$$\frac{1}{2} m \dot{z}_0^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}_0^2 - mgz_0 = E \rightarrow E = -mgz_0$$

3.14 Μηχανή Atwood

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με αβαρές και ανελαστικό νήμα, το οποίο είναι περασμένο στο αυλάκι μιας αβαρούς τροχαλίας, ακτίνας R , όπως φαίνεται στο Σχήμα 20. Το σύστημα κινείται εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$.



Σχήμα 20: Μηχανή Atwood

Τα σώματα συνδέονται με νήμα σταθερού μήκους ℓ , επομένως είναι:

$$z_1 + z_2 + \pi R = \ell = \text{σταθ.} \rightarrow z_1 + z_2 = \ell - \pi R = c = \text{σταθ.}$$

που αποτελεί τον δεσμό του προβλήματος με εξίσωση:

$$f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 - c = 0 \quad (14.1)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος ως προς το οριζόντιο επίπεδο $z = 0$ είναι:

$$V = -mgz_1 - mgz_2$$

Η λαγκρανζιανή του συστήματος εισάγοντας τον δεσμό μέσω ενός πολλαπλασιαστή λαγκράνζ είναι:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2 + \lambda(z_1 + z_2 - c) \quad (14.2)$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$z_1: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}(m_1\dot{z}_1) = m_1g + \lambda_1 \rightarrow m_1\ddot{z}_1 = m_1g + \lambda \quad (14.3)$$

$$z_2: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}(m_2\dot{z}_2) = m_2g + \lambda_2 \rightarrow m_2\ddot{z}_2 = m_2g + \lambda \quad (14.4)$$

$$\lambda: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right) \rightarrow 0 = z_1 + z_2 - c \quad (14.5)$$

Παίρνοντας δύο φορές τη χρονική παράγωγο της σχέσης (14.5) προκύπτει:

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0 \rightarrow \dot{z}_1 = -\dot{z}_2 \text{ και } \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 \quad (14.6)$$

τα σώματα δηλαδή έχουν αντίθετες ταχύτητες και αντίθετες επιταχύνσεις. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (14.3) και (14.4) και μέσω της σχέσης (14.6) προκύπτουν οι επιταχύνσεις των σωμάτων:

$$\ddot{z}_1(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g \rightarrow \ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad (14.7)$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad (14.8)$$

Από τη σχέση (14.3) υπολογίζουμε το λ :

$$\lambda = m_1(\ddot{z}_1 - g) = m_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g - g\right) = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \quad (14.9)$$

Οι συνιστώσες της αντίδρασης του δεσμού είναι:

- στο σώμα m_1

$$\vec{F}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1} \hat{z} = -\frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} \hat{z} \quad (14.10)$$

- και στο σώμα m_2

$$\vec{F}_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial z_2} \hat{z} = -\frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \hat{z} \quad (14.11)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις αυτές είναι ίσες και εκφράζουν την τάση του νήματος σε κάθε σώμα.

Διατήρηση της ενέργειας:

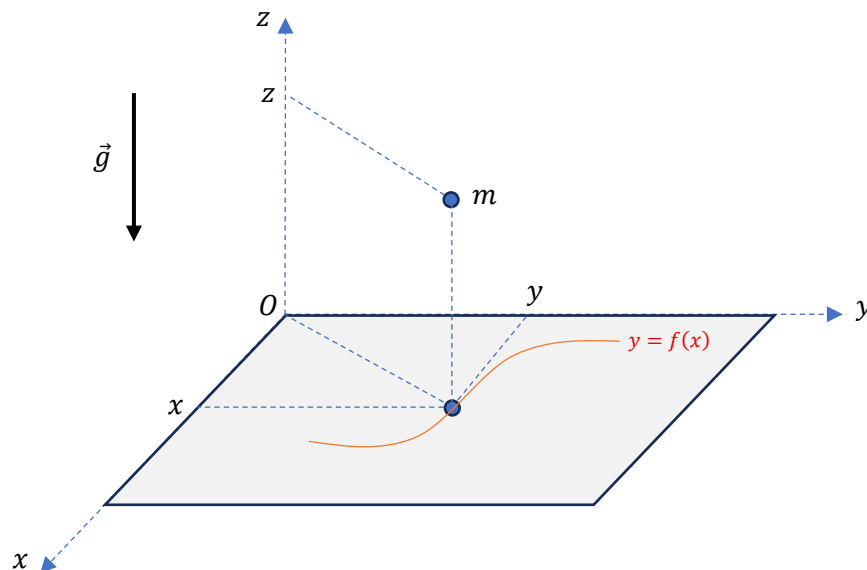
Επειδή $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ και $\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial t} = 0$, το ολοκλήρωμα Jacobi εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\begin{aligned} J = E &\rightarrow \dot{z}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} + \dot{z}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2} + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} - \mathcal{L} = E \rightarrow \\ \dot{z}_1 \cdot m_1 \dot{z}_1 + \dot{z}_2 \cdot m_2 \dot{z}_2 + \dot{\lambda} \cdot 0 - \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 - \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2 - \lambda \cdot 0 &= E \rightarrow \\ \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2 &= E = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 \end{aligned} \quad (14.12)$$

όπου η σταθερά E υπολογίστηκε από τις αρχικές συνθήκες: θεωρήσαμε αρχικά ακίνητα τα σώματα στις θέσεις $z_{1,0} = h_1$ και $z_{2,0} = h_2$.

3.15 Κίνηση σωματιδίου στο επίπεδο επί της καμπύλης $y = f(x)$

Σωματίδιο μάζας m κινείται χωρίς τριβές επί της καμπύλης $y = f(x)$ του οριζοντίου επιπέδου Oxy (βλ. Σχήμα 21), εντός ομογενούς πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$. Να μελετηθεί η κίνηση.



Σχήμα 21: Κίνηση σωματιδίου επί της καμπύλης $y = f(x)$ του επιπέδου Oxy

Αρχικά θεωρούμε ότι το σωματίδιο κινείται ελεύθερα στον χώρο. Επιλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες q_i για τη μαθηματική περιγραφή, τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) .

Η λαγκρανζιανή του σωματιδίου τότε είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (15.1)$$

Θα επιβάλλουμε τώρα στο σωματίδιο δύο δεσμεύσεις:

- Μία που θα περιορίσει την κίνησή του από τον χώρο, στο επίπεδο xy , η οποία επιτυγχάνεται αν ισχύει $z = 0$, οπότε η εξίσωση του δεσμού αυτού είναι:

$$f_1(z) = z - 0 = z = 0 \quad (15.2)$$

- Μία δεύτερη που θα περιορίσει την κίνηση μόνο επί της καμπύλης $y = f(x)$ του επιπέδου αυτού. Η ίδια η καμπύλη εκφράζει τον δεσμό, οπότε η εξίσωσή του είναι:

$$f_2(x, y) = y - f(x) = 0 \quad (15.3)$$

Εισάγοντας τους δεσμούς στην παραπάνω λαγκρανζιανή, μέσω δύο πολλαπλασιαστών λαγκράνζ, παίρνουμε τη λαγκρανζιανή του δεσμευμένου συστήματος:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda_1 z + \lambda_2 (y - f(x)) \end{aligned} \quad (15.4)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange τότε είναι:

$$x: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow m\ddot{x} = -\lambda_2 f' \quad (15.5)$$

$$y: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = \lambda_2 \rightarrow m\ddot{y} = \lambda_2 \quad (15.6)$$

$$z: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = -mg + \lambda_1 \rightarrow m\ddot{z} = -mg + \lambda_1 \quad (15.7)$$

Από τις αντίστοιχες εξισώσεις ως προς τις μεταβλητές λ_1 και λ_2 θα προκύψουν πάλι οι δεσμοί:

$$\lambda_1: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \rightarrow 0 = z$$

$$\lambda_2: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \rightarrow 0 = y - f(x)$$

Αν θέσουμε $z = 0 \rightarrow \ddot{z} = 0$ στη σχέση (15.7) προκύπτει $\lambda_1 = mg$, οπότε η δύναμη του δεσμού αυτού είναι:

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \hat{z} = mg \hat{z} \quad (15.8)$$

και εκφράζει την κάθετη αντίδραση του επιπέδου Oxy στο σώμα.

Παραγωγίζοντας δύο φορές τον δεσμό $y = f(x)$ ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (15.5) και (15.6) βρίσκουμε μια έκφραση για τον πολλαπλασιαστή λ_2 :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = f' \dot{x}, \\ \ddot{y} &= \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt} (f' \dot{x}) = \frac{df'}{dt} \dot{x} + f' \frac{d\dot{x}}{dt} = (f'' \dot{x}) \dot{x} + f' \ddot{x} \rightarrow \\ &\rightarrow \ddot{y} = f'' \dot{x}^2 + f' \ddot{x} \xrightarrow{(15.5), (15.6)} \frac{\lambda_2}{m} = f'' \dot{x}^2 - f' \frac{\lambda_2}{m} f' \rightarrow \frac{\lambda_2}{m} (1 + f'^2) = f'' \dot{x}^2 \rightarrow \\ \lambda_2 &= m \frac{f'' \dot{x}^2}{1 + f'^2} \end{aligned}$$

Η x -συνιστώσα της επιτάχυνσης προκύπτει από τη σχέση (15.5):

$$\ddot{x} = -\frac{f'}{m} \lambda_2 = -\frac{f'}{m} m \frac{\dot{x}^2 f''}{1 + f'^2} = -\frac{f' f''}{1 + f'^2} \dot{x}^2 \quad (15.9)$$

ενώ η y -συνιστώσα της επιτάχυνσης προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (15.5) και (15.6):

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = -\frac{1}{f'} \rightarrow \ddot{y} = \frac{f''}{1 + f'^2} \dot{x}^2 \quad (15.10)$$

Η ασκούμενη δύναμη στο σωματίδιο λόγω της κίνησης στην καμπύλη $y = f(x)$ είναι:

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 \nabla f_2(x, y) = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \hat{y} \right) = \lambda_2 (-f' \hat{x} + \hat{y}) \quad (15.11)$$

με μέτρο:

$$F_2 = \lambda_2 \sqrt{1 + f'^2} = m \frac{f'' \dot{x}^2}{1 + f'^2} \sqrt{1 + f'^2} = m \frac{f'' \dot{x}^2}{\sqrt{1 + f'^2}} \quad (15.12)$$

Για να διαφανεί ο ρόλος της δύναμης $\vec{F}_2$, θα εστιάσουμε στην κίνηση του σωματιδίου στο επίπεδο xy και θα επιβάλλουμε εξαρχής τον δεσμό $y = f(x)$ στην λαγκρανζιανή, η οποία θα ισούται μόνο με την κινητική ενέργεια μιας και δεν υπάρχει δυναμικό:

$$L' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \xrightarrow{y=f(x) \rightarrow \dot{y}=f' \dot{x}} L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + f'^2 \dot{x}^2) = \frac{1}{2} m (1 + f'^2) \dot{x}^2$$

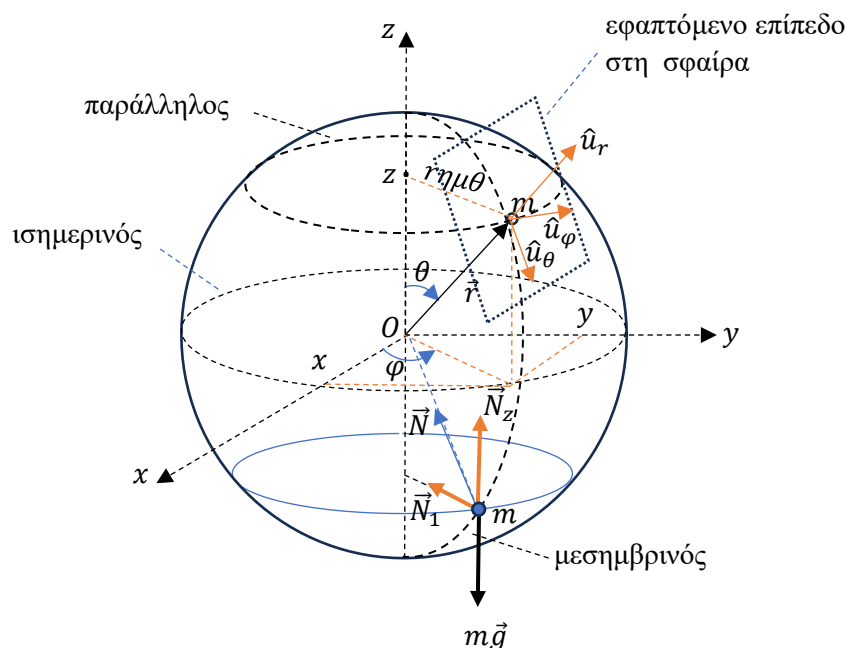
Επειδή τόσο η συνάρτηση L' , όσο και ο δεσμός δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, η ενέργεια διατηρείται σύμφωνα με το ολοκλήρωμα Jacobi και αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ με σταθερό μέτρο ταχύτητας

$$v = \left[(1 + f'^2) \dot{x}^2 \right]^{1/2}$$

Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η ασκούμενη δύναμη να είναι κάθετη στην ταχύτητα του σωματιδίου σε κάθε σημείο της καμπύλης. Ο ρόλος της δηλαδή, περιορίζεται μόνο στο να αλλάζει τη διεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου, χωρίς να μεταβάλλει την ενέργειά του, αναγκάζοντάς το να «στρίβει» για να παραμένει συνεχώς πάνω στην καμπύλη.

3.16 Κίνηση σωματιδίου στην επιφάνεια σφαίρας άνευ τριβών

Σωματίδιο μάζας m κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R , χωρίς τριβές, εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$. Να μελετηθεί η κίνηση.



Σχήμα 22: Κίνηση σωματιδίου στην επιφάνεια σφαίρας

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος, κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες για τη μαθηματική περιγραφή είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) όπως φαίνεται στο Σχήμα 22. Θεωρούμε ότι το σωματίδιο κινείται ελεύθερα στον χώρο και στη συνέχεια πετυχαίνουμε τη δέσμευση επί της επιφάνειας της σφαίρας απαιτώντας η απόστασή του από το κέντρο της να είναι σταθερή, δηλαδή $r = R = \text{σταθ.}$ που εκφράζει τον δεσμό του συστήματος με εξίσωση:

$$f(r) = r - R = 0 \quad (16.1)$$

Η ταχύτητα σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$v = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{u}_\varphi$$

Η κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

Η δυναμική ενέργεια ως προς το επίπεδο xy είναι:

$$V = mgz = mgr\sin\theta$$

Η ελεύθερη λαγκρανζιανή είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgr\sin\theta$$

Η λαγκρανζιανή του δεσμευμένου σωματιδίου είναι:

$$\mathcal{L} = L + \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgr\sin\theta + \lambda(r - R) \quad (16.2)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange τότε είναι:

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - mg\sin\theta + \lambda \quad (16.3)$$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\theta \quad (16.4)$$

$$\varphi: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0 \quad (16.5)$$

Από την αντίστοιχη εξίσωση ως προς λ θα προκύψει πάλι ο δεσμός $r = R$, τον οποίο επιβάλλουμε στις τρεις παραπάνω εξισώσεις με $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ και προκύπτουν:

Από τη σχέση (16.3) προσδιορίζεται το λ :

$$0 = mR\dot{\theta}^2 + mR\eta\mu^2\theta\dot{\phi}^2 - mg\sigma\eta\nu\theta + \lambda \rightarrow$$

$$\lambda = mg\sigma\eta\nu\theta - mR(\dot{\theta}^2 + \eta\mu^2\theta\dot{\phi}^2) \quad (16.6)$$

Η δύναμη που επιβάλλει τον δεσμό προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{F}_\delta = \vec{N} = \lambda \vec{\nabla} f(r) = [mg\sigma\eta\nu\theta - mR(\dot{\theta}^2 + \eta\mu^2\theta\dot{\phi}^2)]\hat{u}_r \quad (16.7)$$

και έχει ακτινική διεύθυνση, δηλαδή είναι κάθετη στην επιφάνεια της σφαίρας σε κάθε θέση του σωματιδίου.

Από τη σχέση (16.4) προσδιορίζεται το $\ddot{\theta}$:

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\eta\mu\theta\sigma\eta\nu\theta\dot{\phi}^2 + mgR\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = \eta\mu\theta \left(\frac{g}{R} + \sigma\eta\nu\theta\dot{\phi}^2 \right) \quad (16.8)$$

Η σχέση (16.5) εκφράζει τη διατήρηση της γενικευμένης ορμής, η οποία είναι η στροφορμή του σωματιδίου λόγω της περιστροφής του περί τον άξονα z:

$$p_\phi = mR^2\eta\mu^2\theta\dot{\phi} = \sigma\tau\alpha\theta. = L_z = mR^2\eta\mu^2\theta_0\dot{\phi}_0 \quad (16.9)$$

Επίσης, η ενέργεια του σωματιδίου αποτελεί μια σταθερά της κίνησης, διότι η λαγκρανζιανή και ο δεσμός δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο:

$$J = \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} - \mathcal{L} = E \xrightarrow{r=R \rightarrow \dot{r}=0}$$

$$\frac{1}{2} mR^2(\dot{\theta}^2 + \eta\mu^2\theta\dot{\phi}^2) + mgR\sigma\eta\nu\theta = E = \sigma\tau\alpha\theta. \quad (16.10)$$

με:

$$E = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}_0^2 + \eta\mu^2\theta_0\dot{\phi}_0^2) + mgR\sigma\eta\nu\theta_0$$

Οι τιμές τόσο της ενέργειας όσο και της στροφορμής του σωματιδίου, ως σταθερές ποσότητες της κίνησης, προκύπτουν άμεσα από τις αρχικές συνθήκες που είναι η αρχική θέση (θ_0, ϕ_0) του σωματιδίου και η αρχική του ταχύτητα $(\dot{\theta}_0, \dot{\phi}_0)$.

Το σωματίδιο εκτελεί γενικά δύο γωνιακές κινήσεις, συζευγμένες μεταξύ τους:

- μια περιστροφική κίνηση ως προς τον άξονα z, κατά μήκος ενός παράλληλου κύκλου με ακτίνα $R\eta\mu\theta$ και γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$ και

- μια περιστροφική κίνηση κατά μήκος ενός κατακόρυφου κύκλου (μεσημβρινού), γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο της σφαίρας και κάθετο στο επίπεδό του με ακτίνα την ακτίνα R της σφαίρας και γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$.

Χαρακτηριστικά της κίνησης του σωματιδίου ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες

► Κίνηση σε σταθερό ύψος:

Αν το σωματίδιο κινείται κατά τρόπο ώστε $\theta(t) = \theta_0 = \text{σταθ.}$ τότε είναι $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ και ταυτόχρονα $z = R\sin\theta_0 = \text{σταθ.}$ Αυτό σημαίνει ότι κατά την κίνησή του το σωματίδιο βρίσκεται σε σταθερό ύψος στη σφαίρα (δεν ανεβοκατεβαίνει). Η τροχιά που διαγράφει τότε είναι κυκλική με το επίπεδό της οριζόντιο (κίνηση κατά μήκος ενός κύκλου παράλληλου προς τον ισημερινό) και σταθερή γωνιακή ταχύτητα που προκύπτει από τη σχέση (16.8):

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{R\sin\theta_0} \quad (16.11)$$

Για να είναι εφικτή μια τέτοια κίνηση θα πρέπει να ισχύει $\dot{\phi}^2 > 0$, άρα $\sin\theta_0 < 0$, δηλαδή το σωματίδιο να κινείται στο κάτω ημισφαίριο ($\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$).

Η δύναμη του δεσμού στην περίπτωση αυτή θα προκύψει αν στη γενική σχέση (16.7) αντικαταστήσουμε τη σχέση (16.11) και παράλληλα θέσουμε $\dot{\theta} = 0$:

$$N = mg\sin\theta_0 - mR\eta\mu^2\theta_0 \left(-\frac{g}{R\sin\theta_0} \right) = mg \left(\frac{\sin^2\theta_0 + \eta\mu^2\theta_0}{\sin\theta_0} \right) = \frac{mg}{\sin\theta_0}$$

Επειδή $\sin\theta_0 < 0$, η δύναμη έχει φορά προς το κέντρο της σφαίρας.

Η φυσική ερμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος γίνεται εμφανής μέσω της Νευτώνειας μηχανικής:

Η δύναμη $\vec{N}$ είπαμε πρωτότερα ότι έχει τη διεύθυνση της ακτίνας της σφαίρας, οπότε μπορεί να αναλυθεί (βλ. Σχήμα 22) σε:

- μια κατακόρυφη συνιστώσα που έχει μέτρο $N_z = \frac{mg}{\sin\theta_0} \sin\theta_0$ και εξουδετερώνει ακριβώς το βάρος του σωματιδίου
- και μια οριζόντια συνιστώσα μέτρου $N_1 = \frac{mg}{\sin\theta_0} \eta\mu\theta_0$ που λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη και το συγκρατεί στην κυκλική τροχιά γύρω από τον άξονα z .

► *Κίνηση με μηδενική στροφορμή:*

Στην περίπτωση αυτή το σωματίδιο κινείται κατά τρόπο ώστε $L_z = 0$, άρα είναι $\dot{\phi} = 0$ που σημαίνει ότι δεν παρατηρείται οριζόντια περιστροφική κίνηση. Τότε, το σωματίδιο κινείται κατά μήκος ενός μεσημβρινού, δηλαδή ενός μέγιστου κύκλου της σφαίρας που το επίπεδό του είναι κατακόρυφο, με επιτάχυνση:

$$\ddot{\theta} = (g/R)\eta\mu\theta \quad (16.12)$$

που προέκυψε θέτοντας $\dot{\phi} = 0$ στη σχέση (16.8).

Η ενέργεια του σωματιδίου τότε θέτοντας $\dot{\phi} = 0$ στη σχέση (16.10) είναι ίση με:

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\sigma\eta\theta$$

και μηδενίζοντας τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ παίρνουμε τη σχέση:

$$\sigma\eta\theta_0 = \frac{E}{mgR}$$

από την οποία βρίσκουμε τη γωνία θ_0 που το σωματίδιο σταματάει στιγμιαία την κατακόρυφη κίνηση, αλλάζοντας στη συνέχεια κατεύθυνση.

Το δυναμικό $V(\theta) = mgR\sigma\eta\theta$:

- στο ανώτερο σημείο της σφαίρας ($\theta=0$, βόρειος πόλος) είναι $V(0) = mgR$,
- στον ισημερινό της σφαίρας ($\theta=\pi/2$) είναι μηδέν και
- στο κατώτερο σημείο ($\theta=\pi$, νότιος πόλος) είναι $V(\pi) = -mgR$.

Ανάλογα με την ενέργεια του σωματιδίου διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $-mgR \leq E < 0$, το σωματίδιο εγκλωβίζεται στο κάτω ημισφαίριο εκτελώντας παλινδρομική κίνηση (ταλάντωση). Σταματάει στιγμιαία σε μια γωνία θ_0 κάτω από τον ισημερινό, περνάει από τον νότιο πόλο και ανέρχεται στο ίδιο ύψος από την άλλη πλευρά.
- Αν $E = 0$, το σωματίδιο φτάνει ακριβώς στον ισημερινό με μηδενική ταχύτητα ($\dot{\theta} = 0$) και επιστρέφει στη συνέχεια στον νότιο πόλο για να ανέλθει στο ίδιο ύψος από την άλλη πλευρά.

- Αν $0 < E < mgR$, το σωματίδιο κάνει πάλι ταλάντωση, ευρύτερη όμως, καθώς διέρχεται από τον ισημερινό και μπαίνει στο πάνω ημισφαίριο, σταματώντας σε μια οξεία γωνία θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$).
- Αν $E = mgR$, η ταχύτητα μηδενίζεται ακριβώς στον βόρειο πόλο.
- Αν $E > mgR$, το σωματίδιο κάνει ανακύκλωση (πλήρεις περιστροφές).

Η δύναμη που ασκεί η επιφάνεια της σφαίρας στο σωματίδιο θέτοντας $\dot{\phi} = 0$ και

$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - \sin\theta)}$ στη σχέση (16.7) και μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή:

$$N(\theta) = mg(3\sin\theta - 2) \quad (16.13)$$

- Για $\sin\theta > \frac{2}{3}$ η δύναμη έχει φορά προς τα έξω, για $\sin\theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta \approx 48^\circ$ η δύναμη μηδενίζεται, ενώ για $\sin\theta < \frac{2}{3}$ η δύναμη έχει φορά προς το κέντρο της σφαίρας.
- Στον βόρειο πόλο: είναι $\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 1$ και προκύπτει $N = mg$
- Στον ισημερινό: είναι $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\theta = 0$ και προκύπτει $N = -2mg$
- Στον νότιο πόλο: είναι $\theta = \pi \rightarrow \sin\theta = -1$ και προκύπτει $N = -5mg$ (μέγιστη κατά μέτρο)

Μια περίπτωση μηδενικής στροφορμής είναι όταν το σωματίδιο ξεκινά (λόγω μικρής ώθησης) από το ανώτερο σημείο της σφαίρας (βόρειος πόλος) χωρίς ταχύτητα. Τότε οι αρχικές συνθήκες είναι: $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0$, η στροφορμή αρχικά είναι μηδέν (σχέση 16.9) και επειδή διατηρείται θα ισχύει κάθε στιγμή $\dot{\phi}(t) = 0$. Με βάση τις αρχικές συνθήκες η σχέση (16.10) απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\sin\theta = mgR$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - \sin\theta)},$$

οπότε στον ισημερινό ($\theta = \pi/2$) η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

ενώ στον νότιο πόλο ($\theta = \pi$) είναι μέγιστη με τιμή:

$$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{4g}{R}}$$

Περνώντας από τον νότιο πόλο, το σωματίδιο στη συνέχεια ανέρχεται από την αντίθετη πλευρά του μεσημβρινού και ολοκληρώνει την ανακύκλωση φτάνοντας με μηδενική ταχύτητα στον βόρειο πόλο για να ξεκινήσει στη συνέχεια έναν νέο κύκλο ανακύκλωσης με την ίδια φορά κίνησης.

► Γενική περίπτωση: κίνηση με μη μηδενική στροφορμή:

Στην περίπτωση αυτή το σωματίδιο λόγω μιας αρχικής ώθησης έχει στροφορμή μη μηδενική:

$$L_z = mR^2\eta\mu^2\theta\dot{\phi} \quad (16.14)$$

που διατηρείται σταθερή. Αν λύσουμε την παραπάνω σχέση ως προς $\dot{\phi}$ και αντικαταστήσουμε στην γενική εξίσωση της ενέργειας (σχέση 16.10) προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2mR^2\eta\mu^2\theta} + mgR\sin\theta \quad (16.15)$$

Από τη σχέση (16.14) συμπεραίνουμε ότι το σωματίδιο δεν μπορεί να περάσει από τον βόρειο πόλο ($\theta = 0$) ή τον νότιο πόλο ($\theta = \pi$) διότι τότε είναι $\eta\mu\theta = 0$, γεγονός που οδηγεί σε μηδενισμό της στροφορμής. Με άλλα λόγια όταν προσεγγίζει έναν πόλο, ισχύει $\eta\mu\theta \rightarrow 0$ και η ταχύτητα:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{mR^2\eta\mu^2\theta}$$

απειρίζεται όπως και η ενέργεια επειδή απειρίζεται ο τρίτος όρος της σχέσης (16.15), γεγονός μη αποδεκτό διότι η ενέργεια του σωματιδίου είναι πεπερασμένη. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι η ταχύτητα $\dot{\theta}$ μηδενίζεται πριν το σωματίδιο φτάσει στους πόλους, αντιστρέφοντας την κατεύθυνση κίνησης. Έτσι η κίνηση εγκλωβίζεται σε μια ζώνη μεταξύ δύο παράλληλων κύκλων που αντιστοιχούν σε γωνίες θ_{min} και θ_{max} , στην οποία το σωματίδιο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z και ταυτόχρονα ανεβοκατεβαίνει.

Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία είχε ως αντικείμενο μελέτης τη Λαγκρανζιανή μηχανική, η οποία, όμως, παρουσιάστηκε όχι μόνο ως μια θεωρία εναλλακτική της Νευτώνειας μηχανικής, αλλά και ως ένα ισχυρό θεωρητικό εργαλείο για την περιγραφή και τη μελέτη ενός μηχανικού συστήματος.

Η μελέτη που πραγματοποιήθηκε κατέδειξε ότι η Λαγκρανζιανή θεώρηση:

- Προσφέρει με συστηματικό (αλγοριθμικό) τρόπο τις εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του εκάστοτε φυσικού συστήματος, μέσω μιας ενιαίας συνάρτησης, της Λαγκρανζιανής, χρησιμοποιώντας βαθμωτά μεγέθη (όπως η κινητική και η δυναμική ενέργεια), σε αντίθεση με τη Νευτώνεια μηχανική που χρησιμοποιεί διανυσματικά μεγέθη (δυνάμεις, επιταχύνσεις, ταχύτητες), καθιστώντας έτσι απλούστερη τη μαθηματική επεξεργασία.
- Μέσω των γενικευμένων συντεταγμένων παρέχει ελευθερία στην επιλογή των μεταβλητών και επιτρέπει την περιγραφή της κίνησης με αυτές που είναι πιο συμβατές με τη γεωμετρία και τους περιορισμούς του υπό μελέτη συστήματος. Με τον τρόπο αυτό απελευθερώνει το σύστημα από τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων, που επιβάλλει η Νευτώνεια θεώρηση.
- Ενσωματώνει τους δεσμούς απευθείας στη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, αποδεσμεύοντας τις εξισώσεις κίνησης από τις δυνάμεις που τους επιβάλλουν.
- Αποκαλύπτει άμεσα τις διατηρούμενες ποσότητες από τη μορφή της Λαγκρανζιανής του συστήματος.

Συνολικά θα λέγαμε ότι, παρότι οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες ως προς τα φυσικά αποτελέσματα που προβλέπουν, εντούτοις η Λαγκρανζιανή μηχανική αποτελεί ένα ανώτερο εννοιολογικό πλαίσιο και ένα σημαντικό επίτευγμα της θεωρητικής φυσικής, καθώς προσφέρει έναν γενικό, συστηματικό και ιδιαίτερα αποτελεσματικό τρόπο περιγραφής της κίνησης.

Από διδακτική άποψη, το συμπέρασμα που προκύπτει από την εργασία είναι ότι, παρότι το πλήρες μαθηματικό υπόβαθρο της Λαγκρανζιανής θεωρίας υπερβαίνει τις απαιτήσεις της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ωστόσο βασικές έννοιές της όπως οι δεσμοί, οι βαθμοί ελευθερίας και η ενεργειακή περιγραφή της κίνησης μπορούν να λειτουργήσουν

συμπληρωματικά προς τη Νευτώνεια διδασκαλία της φυσικής, προσφέροντας στους μαθητές μια νέα οπτική της μηχανικής και την πεποίθηση ότι η φυσική δεν αποτελεί απλώς ένα σύνολο τύπων και υπολογισμών, αλλά ένα συνεκτικό θεωρητικό πλαίσιο ερμηνείας του φυσικού κόσμου.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Kibble, T. W. B., & Berkshire, F. H. (2024). *Κλασική μηχανική* (Π. Δήτσας & Δ. Σαρδελής, Επιστ. επιμ.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Βλαχάκης, Ν. (2024). *Κλασική μηχανική [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <https://doi.org/10.57713/kallipos-338>

Δρής, Ε., & Αλεξόπουλος, Θ. (2021). *Αναλυτική δυναμική [Μεταπτυχιακό εγχειρίδιο]*. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <https://doi.org/10.57713/kallipos-18>

Ιωάννου, Π., & Αποστολάτος, Θ. (2007). *Θεωρητική μηχανική* (2η έκδ.). Αθήνα: ΕΚΠΑ.

Τσίγκανος, Κ. Χ. (2001). *Εισαγωγή στη θεωρητική μηχανική: Με 200 παραδείγματα και λυμένα προβλήματα*. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλη.

Χατζηδημητρίου, Ι. Δ. (2000). *Θεωρητική μηχανική: Αναλυτική δυναμική. Ειδική θεωρία της σχετικότητας* (Τόμ. Β', 3η έκδ.). Εκδόσεις Γιαχούδη.

Ξενόγλωσση

Goldstein, H., Poole, C. P., & Safko, J. L. (2002). *Classical mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (3rd ed.). Pergamon Press.

Διαδικτυακές πηγές

Ανοικτά ακαδημαϊκά μαθήματα

<https://opencourses.uoa.gr/modules/units/?course=PHYS19&id=1888>

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.