Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διερεύνηση των διαδικασιών κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων στη τριτοβάθμια εκπαίδευση από προπτυχιακούς φοιτητές και φοιτήτριες. Μελέτη περίπτωσης.

Φοιτήτρια: Θεοδώρα Συγούρα

Επιβλέπων Καθηγητής: Σπυρίδων Δουκάκης

Πάτρα, Ιούνιος 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Συγούρα Θεοδώρας που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Διερεύνηση των διαδικασιών κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων στη τριτοβάθμια εκπαίδευση από προπτυχιακούς φοιτητές και φοιτήτριες. Μελέτη περίπτωσης.

Θεοδώρα Συγούρα

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Δουκάκης Σπυρίδων
Επ.Καθηγητής,
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Αυγερινός Ευγένιος
Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πάτρα, Ιούνιος 2022

Ευχαριστίες

Αρχικά νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον κύριο Δουκάκη Σπυρίδωνα επιβλέπων καθηγητή της παρούσας εργασίας που με τις πολύτιμες συμβουλές και τις εύστοχες παρατηρήσεις του, με βοήθησε στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και τον β' επιβλέποντα Καθηγητή, κύριο Αυγερινό Ευγένιο.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους φοιτητές και φοιτήτριες που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα με αποτέλεσμα την ολοκλήρωσή της και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Δράττομαι της ευκαιρίας να ευχαριστήσω τα δύο παιδιά μου Ιωάννα και Θανάση και τον σύζυγό μου Τάσο για την κατανόηση που επέδειξαν μέχρι την ολοκλήρωση των σπουδών μου, καθώς και τους γονείς μου Σταύρο και Ευαγγελία που τόσα χρόνια υπήρξαν υποστηρικτές και αρωγοί αυτής της προσπάθειας.

Περίληψη

Η κατασκευή και η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι δύο έννοιες που συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους. Είναι έννοιες, βασικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών και αποτελούν θεμέλιο για την κατανόηση του μαθήματος. Έτσι παρά το γεγονός ότι η κατασκευή των προβλημάτων, στην πλειοψηφία των προγραμμάτων σπουδών, ήταν τα παλαιότερα έτη μία συνιστώσα ξεχασμένη, πλέον αντιμετωπίζεται ως συμπλήρωμα στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων.

Τα οφέλη που αποκομίζονται από την κατασκευή προβλημάτων είναι πολλά και έχουν επισημανθεί σε διάφορες εκπαιδευτικές έρευνες. Χρήση της κατασκευής προβλημάτων γίνεται κατά κύριο λόγο από τους διδάσκοντες, κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, οι οποίοι είτε θέτουν ερωτήματα βασισμένα σε ένα ήδη υπάρχον πρόβλημα, είτε δημιουργούν νέα.

Στην παρούσα έρευνα στόχος είναι η εξέταση των ικανοτήτων κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων από φοιτητές και φοιτήτριες διαφόρων τμημάτων της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στην εισαγωγή, που αποτελεί το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μία πρώτη αναφορά στην διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων. Στο δεύτερο κεφάλαιο της έρευνας καθορίζεται η κατασκευή προβλημάτων ως προς το περιεχόμενό της και ταυτόχρονα επισημαίνονται τα οφέλη που αποκομίζονται από αυτή, ενώ τονίζεται και η σημασία της ενσωμάτωσής της στη διδασκαλία.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας και τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν. Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 92 φοιτητές και φοιτήτριες που κλήθηκαν να απαντήσουν σε δύο φύλλα εργασίας και ένα ερωτηματολόγιο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η στατιστική ανάλυση των απαντήσεων των ερευνητικών εργαλείων. Εξετάζονται οι μέθοδοι κατασκευής προβλημάτων που είναι γνωστές στο δείγμα καθώς και η συχνότητα που τις χρησιμοποιούν. Επιχειρείται η συσχέτιση της ικανότητας κατασκευής προβλημάτων με κάποια χαρακτηριστικά που ίσως την επηρεάζουν, καθώς επίσης εξετάζεται αν οι φοιτητές και φοιτήτριες που επιλύουν συγκεκριμένα προβλήματα μπορούν στη συνέχεια να κατασκευάσουν νέα.

Από την έρευνα προέκυψε ότι ένα μεγάλο μέρος των φοιτητών και φοιτητριών δεν κατόρθωσε να ολοκληρώσει τα ερωτήματα που τους τέθηκαν και δυσκολεύτηκε κυρίως στην διαδικασία κατασκευής προβλημάτων. Συγκεκριμένα στο πρώτο φύλλο εργασίας μόλις το 29% απάντησε σωστά στο δοσμένο πρόβλημα, ενώ το 39% διατύπωσε ορθά ένα νέο. Στο δεύτερο, οι ορθές απαντήσεις στο δοσμένο πρόβλημα ήταν περισσότερες. Συγκεκριμένα το 42% του δείγματος απάντησε σωστά, αλλά το 30% κατασκεύασε ένα νέο. Η περισσότερο χρησιμοποιούμενη τεχνική κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων είναι αυτή της Αντίφασης (Αντιπαραδειγμάτων), με ποσοστό 30%. Τέλος, προέκυψε ότι δεν υπάρχει σημαντική στατιστική διαφορά ανάμεσα στην κατασκευή προβλημάτων και το φύλο, την ηλικία του ατόμου ή δεξιότητες όπως, η δημιουργικότητα ή η ευρηματικότητα. Η διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων βρέθηκε ότι σχετίζεται με τη διαδικασία της επίλυσης. Τα αποτελέσματα αυτά οδηγούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων και εύστοχων παρατηρήσεων που παρουσιάζονται στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας. Για παράδειγμα, αρκετά ενδιαφέρον είναι το αποτέλεσμα που αφορά τις μαθηματικές γνώσεις που αξιοποίησαν οι συμμετέχοντες στην έρευνα, προκειμένου να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα. Οι γνώσεις αυτές προέρχονται κυρίως από τη φοίτησή τους στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και γι' αυτό το λόγο θα έβρισκαν ενδιαφέρουσα την ένταξη της κατασκευής προβλημάτων στη διδακτική διαδικασία.

Λέξεις – Κλειδιά

Μαθηματικά προβλήματα, κατασκευή προβλημάτων, επίλυση προβλημάτων, τεχνικές κατασκευής

Exploring maths problem posing procedures in tertiary education by undergraduate students. A case study.

Sygoura Theodora

Abstract

Problem posing and problem solving are two concepts that are inextricably linked to each other. They are basic notions for the teaching of Mathematics and constitute a fundament for the comprehension of the subject. Therefore, despite the fact that problem posing, in the majority of the curricula, used to be a long forgotten component, it is now confronted as a complement to the procedure of problem solving.

The benefits gained from problem posing are numerous and have been highlighted in several educational studies. Application of problem posing is mainly conducted by tutors, during the teaching process, who either pose issues based on an already existing problem or create new.

The aim of the present study is to examine the skills of students from various departments of tertiary education in mathematics problem posing. In the introduction, which constitutes the first chapter of the dissertation a first reference is made to the process of problem posing. In the second chapter of the study, problem posing is identified regarding its content and the benefits gained from it are highlighted, while the significance of its inclusion to tuition is emphasized.

In the next chapter, the methodology of the study and the tools used in it are presented. The study sample consists of 92 tertiary students who were addressed to answer two worksheets and a questionnaire.

In the fourth chapter, the statistical analysis of the answers to the study tools is presented. The methodology of problem posing which is known to the sample as well as the frequency at which it is used is analyzed. The interrelation between the ability to problem posing and some characteristics that may affect it is attempted, and in addition, it is examined whether the students who solve specific problems can subsequently pose new ones.

From the study emerged that a great number of the students did not succeed in completing the questions addressed to them and mainly faced difficulty with the problem posing process. Specifically, in the first worksheet, only 29% answered rightly to the given problem, while 39% formulated properly a new one. In the second the correct answers to the given problem were more. In particular, 42% of the sample answered rightly, but 30% pose a new one. The most used problem posing technique is that of Contradiction (Counterexamples) with a 30% percentage. Finally, it arose that there exists no important variation difference between problem posing and gender, age, or personal skills, such as creativity or innovation. It was found that the problem posing process is related to the problem solving one. These results lead to the deduction of conclusions and insightful remarks presented in the study's last chapter. For example, it is rather interesting the outcome that regards the mathematical knowledge the sample deployed, in order to pose mathematical problems. This knowledge stems mainly from their attendance in secondary education and for this reason the participants would find the inclusion of problem posing in the teaching process intriguing.

Keywords: Mathematical problems, problem posing, problem solving, posing techniques.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Πινάκων

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

ΔΕ	Διπλωματική Εργασία
ΕΑΠ	Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
ΣΥΝ	Συντονιστής
ΜΣΜ	Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

1. Εισαγωγή

Μέσω της επιστήμης των μαθηματικών ο άνθρωπος κατανοεί τον κόσμο και τις υπόλοιπες επιστήμες. Καθημερινά έρχεται αντιμέτωπος με προβλήματα πάσης φύσεως τα οποία πρέπει να λύσει. Η επίλυση των προβλημάτων είναι στενά συνδεδεμένη με την κατασκευή τους. Η κατασκευή και επίλυση προβλημάτων είναι διαδικασίες που αλληλοεξαρτώνται και είναι θεμελιώδεις για την μαθηματική επιστήμη αλλά και για την ποιότητα της καθημερινής ζωής του ανθρώπου συμβάλλοντας στο να λαμβάνονται «καλές» αποφάσεις (Singer, Ellerton & Cai, 2013).

Σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα που έχουν διατυπωθεί από έναν εκπαιδευτικό ή έχουν παρουσιαστεί σε ένα εγχειρίδιο. Η κατασκευή προβλημάτων απασχολεί ιδιαιτέρως τα τελευταία χρόνια τους ερευνητές, αφού πλέον θεωρείται μία από τις σημαντικότερες δραστηριότητες κατά τη διδακτική πράξη και μέσο για την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987), η διαμόρφωση ενός μαθηματικού προβλήματος δεν πρέπει να θεωρηθεί μόνο ως ο στόχος της διδασκαλίας αλλά θα πρέπει αντιμετωπιστεί και ως ένα μέσο διδασκαλίας.

Πολλοί ερευνητές θεωρούν την κατασκευή προβλημάτων ως μία σημαντική πτυχή της μαθηματικής εκπαίδευσης (Freudenthal, 1973; Polya, 1957). Σε πολλές χώρες έχει ζητηθεί να συμπεριληφθεί η κατασκευή προβλημάτων στα προγράμματα σπουδών καθώς και δραστηριότητες που παρακινούν τους εκπαιδευόμενους να δημιουργούν και στη συνέχεια να λύνουν προβλήματα πέρα των προ-διατυπωμένων (NCTM, 2000).

Σημαντικός κρίνεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού που θα πρέπει να καθοδηγήσει και να βοηθήσει όταν είναι απαραίτητο κατά τη διδασκαλία. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να παρακινεί και να δημιουργεί τις κατάλληλες συνθήκες ώστε, κατά τη διδακτική πράξη, να κατασκευάζονται προβλήματα είτε αλλάζοντας σε αυτά δεδομένα, είτε αλλάζοντας τις ερωτήσεις, είτε διατυπώνοντας νέα προβλήματα. Έτσι ο εκπαιδευτικός θα έχει τη δυνατότητα να κατανοήσει τη σκέψη των μαθητών του όσο αφορά τα μαθηματικά (English, 1997), αλλά και να αντιληφθεί ποιες από τις μαθηματικές έννοιες έχουν γίνει κτήμα τους. Τα οφέλη ωστόσο είναι πολλά και για τον ίδιο τον μαθητή, παρόλο που σαν διαδικασία φαντάζει δυσκολότερη από αυτή της επίλυσης προβλημάτων. Μέσω της κατασκευής προβλημάτων ενισχύεται η γενίκευση των μαθηματικών του γνώσεων (Stoyanova, 1997).

2. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

2.1 Πρόβλημα

Πρόβλημα είναι μία δυσκολία ή μία κατάσταση η οποία παραμένει άλυτη και εμποδίζει ένα άτομο να επιτύχει ένα στόχο ή σκοπό. Πιο συγκεκριμένα, ο Schoenfeld (1985) ορίζει το πρόβλημα ως μία αμφίβολη ή δύσκολη ερώτηση, ένα ζήτημα που χρήζει διερεύνησης ή σκέψης, μία ερώτηση που βοηθά στην άσκηση του μυαλού. Το άτομο δεν γνωρίζει έναν τρόπο, ώστε να αντιμετωπίσει άμεσα το πρόβλημα. Έτσι η πορεία που πρέπει να ακολουθηθεί για να επιτευχθεί η λύση του παραμένει άγνωστη. Ο εν δυνάμει λύτης αντιλαμβάνεται ότι βρίσκεται σε κατάσταση προβλήματος όταν υπάρχει μία σημαντική διαφορά μεταξύ αυτού που επιδιώκει και αυτού που πραγματικά συμβαίνει. Το άτομο δεν έχει αντιμετωπίσει μία παρόμοια κατάσταση, οπότε δεν έχει και μία συγκεκριμένη στρατηγική για να φτάσει στη λύση του.

2.2 Μαθηματικό Πρόβλημα

Σύμφωνα με τους Newell και Simon «κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν θέλει κάτι και δεν γνωρίζει άμεσα τη σειρά των ενεργειών που μπορεί να ακολουθήσει ώστε να το πετύχει» (Newell & Simon, 1972). Για να χαρακτηριστεί ένα πρόβλημα μαθηματικό θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του μαθηματικές έννοιες και κανόνες (Μαμωνά-Downs, 2017). Αυτό που θα καθορίσει λοιπόν, σε μεγάλο βαθμό, την επίτευξη του στόχου, που δεν είναι άλλη από τη λύση του προβλήματος, είναι η σχέση του λύτη με τις μαθηματικές έννοιες και τους μαθηματικούς κανόνες.

Κάποιες από τις κατηγορίες στις οποίες κατατάσσονται τα μαθηματικά προβλήματα είναι για παράδειγμα προβλήματα τα οποία προκύπτουν από τον πραγματικό κόσμο, μαθηματικά προβλήματα που είναι αφηρημένα, όπως αυτά του Hilbert, καθώς και προβλήματα που δημιουργούνται από την ίδια τη φύση των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα το παράδοξο του Russell.

Όμως ο τρόπος με τον οποίο θα λυθεί ένα πρόβλημα συνδέεται άμεσα και με το πως έχει κατασκευαστεί το εν λόγω πρόβλημα. Η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος είναι μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές διεργασίες, την οποία πρέπει να την αντιλαμβανόμαστε τόσο ως το στόχο κατά τη διδακτική πράξη, όσο και ως ένα εργαλείο διδασκαλίας. Είναι λοιπόν ιδιαιτέρως σημαντικό, ο διδάσκων να μπορέσει να προετοιμάσει τους διδασκόμενους ώστε να μπορούν από μόνοι τους να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα, τα οποία στη συνέχεια θα τα λύνουν. Η εισαγωγή των μεθόδων κατασκευής προβλημάτων θα επιδράσει θετικά στους διδασκόμενους καλλιεργώντας τους ακόμη περισσότερο τη μαθηματική σκέψη (Kilpatrick, 1987).

2.3 Κατασκευή προβλημάτων-Ορισμοί

Τα τελευταία χρόνια πολλές έρευνες τονίζουν την άρρηκτη σύνδεση μεταξύ των διαδικασιών της κατασκευής ενός μαθηματικού προβλήματος (problem posing) και της επίλυσής του (problem solving). Για να υπάρχει νόημα στην κατασκευή ενός προβλήματος, σαφώς θα πρέπει να έχει τεθεί ως στόχος η επίλυσή του, αλλά και για να επιλυθεί το πρόβλημα θα πρέπει, αντίστροφα, να είναι ορθά και με σαφήνεια διατυπωμένο. Η κατασκευή προβλήματος είναι μία διαδικασία που εμπειρικά αποδεικνύεται, ότι είναι δυσκολότερη και περισσότερο χρονοβόρα από τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, χωρίς να οδηγεί πάντα σε επιθυμητά αποτελέσματα.

Έχουν δοθεί κατά καιρούς διάφοροι ορισμοί, για να αποδοθεί η έννοια της κατασκευής προβλήματος. Κάποιοι ερευνητές την αναφέρουν ως ανίχνευση προβλήματος (problem sensing), κάποιοι ως διατύπωση προβλήματος (problem formulation), ή ως εύρεση προβλήματος (problem finding), ως προβληματισμό (problematizing) και ως δημιουργία (problem creating). Κατά τον Dunker (1945), η κατασκευή ενός προβλήματος είναι είτε η δημιουργία ενός νέου, είτε η αναδιατύπωση ενός που έχει ήδη δοθεί. Σύμφωνα με την Leung (1993), η κατασκευή του προβλήματος είναι μία σειρά από διατυπωμένα μαθηματικά προβλήματα μιας κατάστασης δεδομένης, ενώ η Μαμωνά-Downs (2017) αναφέρεται σ' αυτήν ως μία δραστηριότητα που προκύπτει όταν κατασκευάζουμε προβλήματα από ένα ήδη υπάρχον. Η κατασκευή τέτοιων προβλημάτων μπορεί να επιτευχθεί τροποποιώντας στοιχεία του αρχικού προβλήματος όπως αριθμούς, πράξεις και συνθήκες (Brown & Walter, 1990).

Τον δικό του ορισμό για την κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος έδωσε ο Silver (1994). Η κατασκευή κατά τον ίδιο ενός προβλήματος είναι η κατασκευή νέων προβλημάτων ή η αναδιατύπωση κάποιων που έχουν ήδη κατασκευαστεί. Η δημιουργία του νέου προβλήματος μπορεί να συμβεί σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

α) πριν από την επίλυση του προβλήματος (pre-solution), δηλαδή όταν η δημιουργία των προβλημάτων προκύπτει από μία δεδομένη ή επινοημένη κατάσταση που μπορεί να είναι για παράδειγμα ένα διάγραμμα ή μία εικόνα,

β) κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος (within-solution), όταν το άτομο το οποίο λύνει το πρόβλημα σκόπιμα τροποποιεί κάποια από τα στοιχεία του προβλήματος δηλαδή αλλάζει τους στόχους ή τις συνθήκες,

γ) μετά την επίλυση του (post-solution), όταν ο λύτης δημιουργεί νέα προβλήματα με βάση την εμπειρία που έχει αποκτήσει από την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος ή ενός συνόλου προβλημάτων.

Λίγα χρόνια αργότερα η κατασκευή προβλήματος ορίστηκε από τις Stoyanova και Ellerton (1996), ως η κατασκευή αναπαραστάσεων που προκύπτουν από την προσωπική εμπειρία του λύτη, ο οποίος τις μετασχηματίζει σε προβλήματα μαθηματικών.

2.4 Κατασκευή προβλήματος βάσει κατηγοριών μαθηματικών καταστάσεων

Μία πλευρά της κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων που έχει ερευνηθεί σχετίζεται με το είδος των μαθηματικών καταστάσεων βάσει των οποίων καλείται ο λύτης να πραγματοποιήσει την κατασκευή. Τρεις είναι οι κατηγορίες στις οποίες οι καταστάσεις μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τα δομικά χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν. Θα πρέπει ωστόσο, να τονιστεί ότι κατά την Stoyanova (1997), τα όρια μεταξύ αυτών των τριών καταστάσεων δεν είναι πάντα πολύ καλά διακεκριμένα. Οι ορισμοί των κατηγοριών, δόθηκαν για τη διευκόλυνση των ερευνητών στις διαδικασίες της έρευνας και στην επιλογή των κατάλληλων συνθηκών που εξυπηρετούσαν σε κάθε περίσταση το σκοπό της έρευνας.

- Ελεύθερες μαθηματικές καταστάσεις

Στις ελεύθερες καταστάσεις το πρόβλημα που δίνεται δεν είναι έτοιμο. Το άτομο που θα κατασκευάσει το πρόβλημα καλείται να βρει το ίδιο τις μαθηματικές καταστάσεις, βάσει των οποίων θα γίνει η κατασκευή του, άνευ περιορισμών, θέτοντας ερωτήματα όπως «Κατασκεύασε ένα πρόβλημα που να είναι δύσκολο» ή «Φτιάξε ένα κατάλληλο πρόβλημα για ένα μαθηματικό διαγωνισμό». Για την επίτευξη του στόχου, θα πρέπει να ανακαλέσει αλλά και να μαθηματικοποιήσει εμπειρίες που έχει, ώστε να τις παρουσιάσει σε ένα πρόβλημα που θα είναι καλώς δομημένο. Στις ελεύθερες καταστάσεις το άτομο έχει λάβει υπόψη του που απευθύνονται τα προβλήματα που κατασκευάζει.

Το 1988, σε έρευνα της Ellerton ζητήθηκε από ομάδα ατόμων, με χρήση της ελεύθερης κατάστασης να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα του οποίου η επίλυση θα ήταν δύσκολη για κάποιο φίλο τους. Έθεταν, λοιπόν, ερωτήματα παρόμοια με αντίστοιχα με τα οποία είχαν έρθει πρόσφατα, αντιμέτωποι. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν κατά πόσο κατανοήθηκαν μαθηματικές έννοιες καθώς και το βαθμό της αντιληπτικής τους ικανότητας, όσον αφορά γενικότερα τα μαθηματικά.

- Ημιδομημένες μαθηματικές καταστάσεις

Στις ημιδομιμένες μαθηματικές καταστάσεις, εμπεριέχονται πλούσια μαθηματικά δεδομένα αλλά και πληροφορίες, όμως δεν υπάρχει έργο. Τα άτομα καλούνται να αντιμετωπίσουν ημιτελή προβλήματα χρησιμοποιώντας γνώσεις που έχουν αποκομίσει από προηγούμενες εμπειρίες. Τους ζητείται, λοιπόν, να κατασκευάσουν και να διατυπώσουν τα προσωπικά τους ερωτήματα και να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα παρόμοιο μ' αυτό που τους έχει δοθεί. Έχουν πετύχει μ' αυτό τον τρόπο να μετατρέψουν την κατάσταση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Το πρόβλημα που θα κατασκευαστεί ενδέχεται να βασίζεται σε συγκεκριμένες εικόνες και διαγράμματα (Gonzales, 1998).

Έρευνες που έχουν γίνει, υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά προβλήματα που δημιουργούνται μέσα στις ημιδομημένες καταστάσεις αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο, που αντικατοπτρίζει το γεγονός του κατά πόσο κατανοητές, ή όχι είναι συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

- Δομημένες μαθηματικές καταστάσεις

Στις δομημένες καταστάσεις κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων, δίνεται είτε ένα πρόβλημα συγκεκριμένο, είτε η λύση του και ζητείται η κατασκευή ενός νέου. Στις καταστάσεις αυτές στο αρχικό, γενικό πρόβλημα που δίνεται, η ερώτηση έχει παραληφθεί και οι λύτες καλούνται ή να θέσουν έναν αριθμό πιθανών ερωτήσεων ή να κατασκευάσουν τη δομή του προβλήματος ή ακόμη και να τη βελτιώσουν.

Σύμφωνα με τον Polya (1957) με τρεις διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσε να επιτευχθεί η κατασκευή ενός νέου προβλήματος από ένα ήδη δοσμένο:

i. Κρατώντας σταθερά τα ζητούμενα του προβλήματος και αλλάζοντας τα δεδομένα και τους περιορισμούς
ii. Κρατώντας σταθερά τα δεδομένα και αλλάζοντας τα ζητούμενα και τους περιορισμούς, και τέλος
iii. Αλλάζοντας τόσο τα ζητούμενα όσο και τα δεδομένα του προβλήματος.

Οι Brown και Walter (1983, 1993), πρότειναν την κατασκευή προβλημάτων μέσα από δομημένες καταστάσεις, μέσω της στρατηγικής «What-if-not». Στην στρατηγική αυτή, προσεγγίζεται η κατασκευή ενός νέου προβλήματος από ένα άλλο, ήδη λυμένο, αλλάζοντας τις συνθήκες και τους στόχους του αρχικού.

Με παρόμοιο τρόπο, όρισε και ο Abu-Elwan (2002) τις τρεις αυτές καταστάσεις κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Κατά τον ίδιο μέσα από τις ελεύθερες καταστάσεις προκύπτουν προβλήματα εύκολα ή δύσκολα που προέρχονται από την καθημερινότητα, προβλήματα αρεστά στον κατασκευαστή τους ή σε αυτούς που απευθύνονται. Από την άλλη, τα προβλήματα που κατασκευάζονται μέσα από τις ημι-δομημένες καταστάσεις, ίσως είναι παρόμοια ανοιχτά με το πρόβλημα που δίνεται, με παρόμοιες συνθήκες, προβλήματα βασισμένα σε μία θεωρία, προβλήματα που προκύπτουν από εικόνες, ή που είναι λεκτικά. Τέλος, σύμφωνα με τον ίδιο τα προβλήματα που δημιουργούνται μέσα από τις δομημένες καταστάσεις έχουν γνωστά και άγνωστα δεδομένα. Ο κάθε ένας προσωπικά μπορεί να επιλέξει τι θα αλλάξει ή τι θα διατηρήσει ίδιο από τα γνωστά ή τα ζητούμενα.

Και οι τρεις καταστάσεις που έχουν αναφερθεί για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων, μπορούν να συμβάλλουν στην απόκτηση της μαθηματικής γνώσης. Μέσω των καταστάσεων αυτών δίνεται έμφαση στη διατύπωση του προβλήματος και έτσι είτε μπορεί να ξεκινήσει μία εκτεταμένη και καρποφόρα μαθηματική δραστηριότητα είτε βοηθούν σε μία διαρκή διαδικασία δημιουργίας νέων υποερωτημάτων (Christou et al., 2005).

2.5 Διαδικασίες κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων

Τα τελευταία χρόνια έχει εμπλουτιστεί αλλά και αποσαφηνιστεί η έννοια της διαδικασίας που μπορεί να ακολουθηθεί για την κατασκευή προβλημάτων. Κατά τον Kilpatrick (1987), τέσσερις είναι οι βασικές διαδικασίες, με πρώτη αυτή της σύνδεσης (association).

Κάνοντας χρήση των μαθηματικών γνώσεων που έχει κανείς, μπορεί από ένα ήδη υπάρχον πρόβλημα να δημιουργήσει ένα νέο με ερωτήματα που συνδέονται με το αρχικό.

Στη δεύτερη διαδικασία, αυτή της αναλογίας (analogy), ο κατασκευαστής δημιουργεί ένα νέο πρόβλημα το οποίο θα έχει ίδια δομή με το δοσμένο, τροποποιώντας ορισμένα δεδομένα. Θα πρέπει όμως να έχει επίγνωση ότι αυτή η τροποποίηση ενδεχομένως να επηρεάζει τόσο την επίλυση, όσο και τη δομή του αρχικού.

Η γενίκευση (generalization), είναι η τρίτη διαδικασία σύμφωνα με τον Kilpatrick που ακολουθείται για την κατασκευή προβλημάτων. Η γενίκευση συναντάται σε περιβάλλοντα με αυξημένο μαθηματικό ενδιαφέρον, αφήνοντας ωστόσο ερωτήματα σχετικά με το πως μέσω της διαδικασίας της γενίκευσης επιτυγχάνεται η κατασκευή νέων προβλημάτων.

Τέλος, αναφέρεται η διαδικασία της αντίφασης (contradiction). Εδώ η κατασκευή του νέου προβλήματος επιτυγχάνεται, χωρίς όμως να συμφωνεί με κάποια από τα δεδομένα του αρχικού.

2.6 Στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων

Κατά τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων αναπτύσσονται διάφορες στρατηγικές ώστε να επιτευχθεί ο σχεδιασμός του. Όταν αναφερόμαστε στον όρο στρατηγική εννοούμε όλα τα βήματα που ακολουθούνται για την κατασκευή ενός προβλήματος. Η στρατηγική λοιπόν, δεν οδηγεί σε ένα μόνο δρόμο για τη λύση, αλλά σε ένα σύνολο πιθανών διαδρομών που μπορεί να περιλαμβάνουν ή και όχι τη διαδρομή της λύσης (Stoyanova, 1997).

Σε δύο μεγάλες κατηγορίες ταξινομούνται οι στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων σύμφωνα με τους Brown και Walter (1983), οι οποίοι αξιοποίησαν την τεχνική του Polya (1954), «What if». Στην πρώτη κατηγορία κατατάσσονται στρατηγικές που δέχονται τα δεδομένα του δοσμένου προβλήματος. Σε αυτές ο κατασκευαστής επικεντρώνεται σε ερωτήματα ή παρατηρήσεις που αφορούν τα δεδομένα. Προτείνονται ερωτήσεις που είναι γενικές και θα μπορούσαν να δώσουν το έναυσμα για την κατασκευή ενός νέου προβλήματος. Οι ερωτήσεις αυτές σχετίζονται με τύπους μαθηματικούς, λύσεις, δεδομένα, αποδείξεις, περιορισμούς, πεδία ορισμού.

Από πέντε βήματα χαρακτηρίζονται οι στρατηγικές που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία αυτή της πρόκλησης των δεδομένων του προβλήματος. Στο πρώτο βήμα έχει επιλεγεί ένα σημείο σαν σημείο εκκίνησης με βάση τα δεδομένα που δίνονται. Στο δεύτερο βήμα δίνονται κάποια από τα χαρακτηριστικά των δεδομένων του προβλήματος, ορισμένα από τα οποία στο τρίτο βήμα αμφισβητούνται, με ερωτήσεις του τύπου «τι θα γινόταν αν άλλαζε κάθε ένα από τα χαρακτηριστικά;». Τα νέα δεδομένα που προκύπτουν μετά την αμφισβήτηση χρησιμοποιούνται στο τέταρτο βήμα για τη δημιουργία νέων ερωτημάτων – προβλημάτων. Κάποια από αυτά επιλέγονται για ανάλυση – επίλυση στο τελευταίο βήμα.

Σε τέσσερις κατηγορίες ταξινόμησε η Stoyanova (1997), τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται μέσα σε ελεύθερες, ημιδομημένες και δομημένες μαθηματικές καταστάσεις:

Η πρώτη είναι η στρατηγική της αναδιατύπωσης (reformulation strategy). Σ' αυτή γίνεται μία αναδιάταξη των στοιχείων που αφορούν τη δομή του προβλήματος, χωρίς όμως να έχει αλλάξει η φύση του. Δηλαδή, το πρόβλημα που κατασκευάστηκε είναι πανομοιότυπο με το δοσμένο και η μόνη διαφορά εντοπίζεται στην παρουσίαση των πληροφοριών του.

Ακόμη μία στρατηγική είναι αυτή της ανακατασκευής (reconstruction strategy). Εδώ το νέο πρόβλημα κατασκευάζεται μετά από διάφορες τροποποιήσεις του αρχικού, αλλάζοντας και τη φύση του. Το νέο πρόβλημα σχετίζεται κατά κάποιο τρόπο με το δοσμένο αλλά κατά βάση διαφέρει ως προς το περιεχόμενο.

Η τρίτη είναι η στρατηγική της απομίμησης (imitation strategy). Το πρόβλημα που κατασκευάζεται με την στρατηγική αυτή προκύπτει, με την προσθήκη μίας δομής σχετικής με το δοσμένο πρόβλημα. Το νέο πρόβλημα μοιάζει με άλλα που έχουν ήδη επιλυθεί. Στην στρατηγική αυτή λαμβάνονται υπόψη δύο θέματα. Η εκτεταμένη δομή του νέου προβλήματος καθώς και ότι το άτομο που καλείται να το κατασκευάσει πρέπει να κατορθώσει να το συνδέσει με προηγούμενες μαθηματικές καταστάσεις που έχει αντιμετωπίσει.

Τελευταία είναι η στρατηγική της εφεύρεσης (invention strategy). Τα νέα προβλήματα που κατασκευάζονται με την στρατηγική αυτή δεν σχετίζονται με προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες του ατόμου. Το πρόβλημα δεν μοιάζει με προηγούμενα και δεν μπορεί να επιτευχθεί η άμεση λύση του.

Οι Kontorovich, Koichu, Berman και Leikin (2012), αναφέρουν παραδείγματα στρατηγικών κατασκευής προβλημάτων ανάλογα με το υπόβαθρο του κατασκευαστή ή το δοσμένο πρόβλημα, που είναι:

- Συμμετρία (Symmetry)

Το νέο πρόβλημα που δημιουργείται προκύπτει από την αλλαγή των δεδομένων και των ζητούμενων του αρχικού (Silver et al., 1996).

- Χειρισμός των Περιορισμών (Constraint Manipulation)

Η δημιουργία του νέου προβλήματος προκύπτει από τις μεταβολές των συνθηκών ή των υποθέσεων του δοσμένου προβλήματος. Το νέο πρόβλημα δημιουργείται είτε θέτοντας νέους αριθμούς στο πρόβλημα, είτε εφαρμόζοντας την τεχνική «What- if- not» που πρότειναν οι Brown και Walter δίνοντας απαντήσεις σε ερωτήσεις όπως «τι θα συνέβαινε αν κάθε χαρακτηριστικό δεν ήταν έτσι».

- Χειρισμός Στόχου (Goal Manipulation)

Δημιουργία νέων προβλημάτων με αλλαγή των ζητούμενων του δοσμένου προβλήματος διατηρώντας σταθερές τις αρχικές υποθέσεις.

- Στοχεύοντας μία συγκεκριμένη λύση (targeting a particular solution)

Μέσω της στρατηγικής αυτής δημιουργούνται νέα προβλήματα για των οποίων τη λύση γίνεται χρήση θεωρημάτων ή συγκεκριμένων μαθηματικών μεθόδων επίλυσης.

- Γενίκευση (Generalization)

Δημιουργία νέου προβλήματος, για το οποίο το δοσμένο πρόβλημα είναι μία ειδική του περίπτωση.

- Η Αλυσιδωτή Κατασκευή (Chaining)

Η δημιουργία του νέου προβλήματος επιτυγχάνεται μέσω της επέκτασης του δοσμένου προβλήματος ώστε για την επίλυσή του απαιτείται πρωτίστως η επίλυση του αρχικού. Όταν σε ένα άτομο δοθεί μία μέτρια ή μερική διατύπωση ενός προβλήματος και του ζητηθεί να κατασκευάσει ένα εκ νέου πρόβλημα τότε, του δίνεται η δυνατότητα να βελτιώσει την ικανότητα του ως προς την κατασκευή προβλημάτων (Silver et al., 1990) .

2.7 Τα οφέλη της κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων

Πολλά και μη αμφισβητήσιμα είναι τα οφέλη που αποκομίζει κανείς κατά τη διάρκεια κατασκευής προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987), η εμπειρία της ανακάλυψης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων θα πρέπει να είναι αναπόσπαστο κομμάτι της εκπαίδευσης κάθε ατόμου.

Η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί ένα ισχυρό μέσο ανάπτυξης της μαθηματικής ικανότητας και είναι καταλυτική η επίδρασή της στη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης του κατασκευαστή. Μέσω αυτής της διαδικασίας, δίνεται ένα έναυσμα για ενεργητική συμμετοχή των διδασκομένων κατά τη διδακτική πράξη. Η ενασχόληση με τη δημιουργία νέων προβλημάτων, σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες έχει ως αποτέλεσμα τη διέγερση του μαθηματικού ενδιαφέροντος μέσα στην αίθουσα (Silver et al., 1994). Έτσι ενισχύεται με μεγαλύτερη ευελιξία, ο μαθηματικός τρόπος σκέψης καθώς και οι δεξιότητες για την επίλυση των προβλημάτων. Όλα αυτά συμβάλλουν στην ανάπτυξη μιας θετικής στάσης για τη μαθηματική επιστήμη, αφού τονώνεται η αυτοπεποίθηση των ατόμων όταν τα προβλήματα που έχουν κατασκευάσει αποτελούν το αντικείμενο ανάπτυξης δραστηριοτήτων κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης.

Σε πολλές έρευνες έχει εντοπιστεί η δυσκολία κάποιων για τα μαθηματικά και ο φόβος με τον οποίο τα αντιμετωπίζουν καθώς πολλές φορές επιδιώκουν και να τα αποφύγουν. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ενασχόληση με την κατασκευή προβλημάτων μπορεί να μειώσει το άγχος και τη φοβία για τα μαθηματικά (Brown & Walter, 1983). Ο λόγος είναι απλός. Το να θέτει κανείς ερωτήματα ή να δημιουργεί προβλήματα φαντάζει λιγότερο τρομακτικό από το να δίνει απαντήσεις ή λύσεις.

Ο Lowrie (1999), πρότεινε σε άτομα διαφορετικών ηλικιακών ομάδων την κατασκευή προβλημάτων τα οποία θα τα έλυναν οι φίλοι τους. Το συμπέρασμα της έρευνας ήταν ότι καθώς τα άτομα σχεδίαζαν τα προβλήματα που απευθύνονταν στους φίλους τους, κατανόησαν ευκολότερα τη διαδικασία επίλυσης τους. Επίσης η έρευνα κατασκευής προβλημάτων σε άτομα στα οποία δόθηκαν δομές προβλημάτων και προβλήματα διαφόρων τύπων, έδειξε ότι στα άτομα αυτά αναπτύχθηκαν δεξιότητες κατασκευής προβλημάτων. Τα άτομα μετέπειτα έθεσαν μεγαλύτερο αριθμό προβλημάτων τα οποία ήταν και πιο σύνθετα (English 1997).

Η δημιουργία ενός μαθηματικού προβλήματος, βοηθάει και τον εκπαιδευτικό να καταλάβει κατά πόσο έχουν γίνει αντιληπτές οι διάφορες μαθηματικές έννοιες και με ποιον τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι η κατασκευή προβλημάτων κατά τη διδασκαλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό ως ένα εργαλείο με το οποίο θα ενισχύσουν τις αλλαγές στις πρακτικές τους (Crespo, 2003), ή θα βελτιώσουν την διδακτική τους επάρκεια.

Συνοψίζοντας, γίνεται εύκολα αντιληπτή η σημασία αλλά και τα οφέλη της κατασκευής προβλημάτων στη διδακτική των μαθηματικών. Η διαδικασία αυτή αποτελεί κριτήριο και μέτρο για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης (Kilpatrick, 1987), ενισχύοντας τόσο την κατανόηση όσο και την επίλυση των προβλημάτων με αποτέλεσμα την καλύτερη αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών. Όμως η προσοχή που δίνεται από μαθητές εκπαιδευτικούς και ερευνητές για την κατασκευή προβλημάτων δεν είναι αυτή που θα έπρεπε.

2.8 Η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων και η δημιουργικότητα

Σε πολλές μελέτες, η κατασκευή προβλημάτων θεωρείται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ως μία δραστηριότητα που ενισχύει τη μαθηματική κατανόηση, επιτρέπει την αυτόνομη μάθηση αλλά και βοηθάει στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας. Δύο γνωστικά πεδία εμπλέκονται για τον όρο μαθηματική δημιουργικότητα. Τα μαθηματικά και η δημιουργικότητα (Haylock, 1987). Παρόλα αυτά δεν υπάρχει ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο, πλήρως, να εξηγεί τη δομή της μαθηματικής δημιουργικότητας. Ο Jensen (1973) έδωσε ως ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας, την ικανότητα των ατόμων να δώσουν πολλές και διαφορετικές απαντήσεις που είναι εφαρμόσιμες, όταν η παρουσίασή τους γίνεται με μία μαθηματική κατάσταση σε γραπτή ή αναπαραστασιακή μορφή. Η μαθηματική δημιουργικότητα ορίζεται επίσης, ως οι αλγόριθμοι, οι στρατηγικές ή οι διάφορες προσεγγίσεις που ακολουθούνται για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος.

Σύμφωνα με τον Ρώσο ψυχολόγο Krutetski (1976), η μαθηματική δημιουργικότητα εκδηλώνεται με πέντε τρόπους: α) κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό πρόβλημα, β) κάνοντας χρήση εναλλακτικών μεθόδων, γ) μέσω της εφεύρεσης αποδείξεων και της δημιουργίας τύπων και τέλος δ) μέσω της δημιουργίας μοναδικών μεθόδων κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Βιβλιογραφικά, είναι εμφανής μία σχέση μεταξύ της κατασκευής ενός μαθηματικού προβλήματος, της μαθηματικής περιέργειας και της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η κατασκευή προβλημάτων για πολλούς ερευνητές προκαλεί τη μαθηματική περιέργεια, για άλλους η μαθηματική περιέργεια είναι ο δρόμος που οδηγεί στη μαθηματική δημιουργικότητα και υπάρχει η πεποίθηση ότι η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων ενισχύει τη μαθηματική δημιουργικότητα.

Σύμφωνα με τον Silver (1997), η κατασκευή προβλημάτων όχι μόνο πυροδοτεί την περιέργεια κατά τη διδακτική πράξη των μαθηματικών, αλλά αποτελεί τη βάση της ανάπτυξης της μαθηματικής δημιουργικότητας. Δηλαδή η μαθηματική δημιουργικότητα ενθαρρύνεται μέσα από την κατασκευή και μετέπειτα από την επίλυση προβλημάτων.

Η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί τη βάση για την εξερεύνηση της μαθηματικής περιέργειας, ωστόσο προσφέρει πολλά περισσότερα. Η English (2003) θεωρεί ότι η κατασκευή προβλημάτων προκύπτει φυσικά και αβίαστα, αφού αποτελεί κομμάτι της καθημερινότητάς μας και παρουσιάζει τρία οφέλη της. Κατά την ίδια μέσω της κατασκευής του μαθηματικού προβλήματος προάγεται η εννοιολογική ανάπτυξη του ατόμου, υποστηρίζεται σημαντικά η κατανόηση της δομής και του σχεδιασμού του προβλήματος και τέλος ενισχύεται η πρόσβαση σε «σημαντικά» μαθηματικά. Εν συντομία, η κατασκευή προβλημάτων όχι μόνο ενισχύει τη μαθηματική περιέργεια αλλά συμβάλλει και στη διαμόρφωση της κατανόησης των μαθηματικών.

Κάτι που απασχόλησε επίσης την έρευνα, είναι η σχέση της κατασκευή προβλημάτων και της μαθηματικής ικανότητας. Ερευνητές όπως ο Krutetski (1976) και η Ellerton (1986) αντιπαραβάλλουν ο καθένας την κατασκευή προβλημάτων με διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής ικανότητας. Η Ellerton ζήτησε στην έρευνά της την κατασκευή προβλημάτων που η επίλυση τους θα ήταν δύσκολη για το άτομο στο οποίο απευθυνόταν. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν τα μαθηματικά «ικανότερα» άτομα ήταν αυτά που κατασκεύασαν προβλήματα με μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας. Σε μία ακόμη έρευνα των Silver και Cai (1996), ζητήθηκε η διατύπωση ερωτήσεων καθώς και η συσχέτιση κατασκευής προβλημάτων με τη λύση τους μετά τη μελέτη ενός σύντομου κειμένου. Οι πιο «ικανοί» μαθηματικά, ήταν αυτοί που κατασκεύασαν τα περισσότερα προβλήματα.

Όμως η δημιουργικότητα δεν είναι μόνο χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθηματικά ικανότερων ατόμων. Η μαθηματική δημιουργικότητα είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει μέσα από τη διαδικασία της σκέψης και χαρακτηρίζεται από ευχέρεια (fluency), ευελιξία (flexibility) και πρωτοτυπία (novelty). Σύμφωνα με τον Sheffield (2000), ως ευχέρεια ορίζεται ο αριθμός των ορθών απαντήσεων και μεθόδων που δόθηκαν σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ή ακόμη και τα ερωτήματα που προέκυψαν μετέπειτα. Η ευελιξία αφορά το πλήθος των διαφορετικών απαντήσεων, μεθόδων και ερωτημάτων, ενώ η πρωτοτυπία αναφέρεται στο βαθμό της μοναδικότητας αυτών των ιδεών. Με τη μοναδικότητα, οι ιδέες χαρακτηρίζονται από μεγαλύτερη πρωτοτυπία. Αυτά τα τρία χαρακτηριστικά χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές προσεγγίσεις που αφορούσαν τη μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Torrance, 1966). Όμως ο Torrance (1974), είχε προσθέσει σε αυτά και την επεξεργασία (elaboration), δηλαδή την ικανότητα του να περιγράφονται καθώς και να γενικεύονται οι ιδέες.

Λόγω του γεγονότος ότι η κατασκευή προβλημάτων έχει ενσωματωθεί στην αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας ή της μαθηματικής ικανότητας είναι φυσικό να υποθέσουμε την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στην κατασκευή και τη δημιουργικότητα. Όμως η σχέση αυτή παραμένει ασαφής για κάποιους ερευνητές. Ο Haylock (1987) σε ένα σύνολο ερευνών εξέτασε τη σχέση της δημιουργικότητας και των μαθηματικών και βρήκε ημιτελή τη βάση του ισχυρισμού της σχέσης. Η Leung (1993) διεξήγαγε μία έρευνα στην οποία μελέτησε τον τρόπο με τον οποίο σχετίζονται τα προβλήματα που τέθηκαν από απόφοιτους δασκάλους δημοτικών σχολείων με τις επιδόσεις τους σε τεστ για τη δημιουργικότητα και τη μαθηματική τους γνώση. Τα αποτελέσματα έδειξαν τη μη ύπαρξη ουσιαστικής σχέσης μεταξύ της βαθμολογίας για την κατασκευή προβλημάτων και των επιδόσεων στο τεστ που αφορούσε τη δημιουργικότητα. Αξίζει να τονιστεί, η ισχυρή σχέση που εντοπίστηκε μεταξύ της μαθηματικής γνώσης και της ποιότητας των προβλημάτων που κατασκευάζονται (Leung,1993).

2.9 Σχέση μεταξύ της κατασκευής και της επίλυσης προβλημάτων

Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι ο σχεδιασμός όλης της διαδικασίας που ακολουθείται για τη μετάβαση από μία κατάσταση που είναι δεδομένη σε μία άλλη που ζητείται (Mayer, 1985). Η επίλυση προβλήματος περιλαμβάνει όλες τις συνειδητές αποφάσεις ώστε να αναπτυχθεί η επιχειρηματολογία όταν αναζητούμε τη λύση (Μαμωνά, 2015).

Η επίλυση ενός προβλήματος ακολουθεί τέσσερις φάσεις. Η πρώτη είναι αυτή της κατανόησης του προβλήματος. Στη φάση αυτή διερευνούμε τα ζητούμενα του προβλήματος, ανακαλύπτουμε συνθήκες που ίσως ισχύουν ή εξετάζουμε ειδικές περιπτώσεις. Στη δεύτερη φάση εξετάζονται οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος και ο τρόπος σύνδεσης των δεδομένων με τα ζητούμενα, ώστε να κατασκευαστεί ένα σχέδιο που θα οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Στην επόμενη φάση εκτελείται το σχέδιο που κατασκευάστηκε στη δεύτερη φάση και τέλος γίνεται η ανασκόπηση. Εδώ ελέγχουμε αν γίνεται οποιαδήποτε βελτίωση στην έκφραση της λύσης, το αποτέλεσμα αλλά και τους συλλογισμούς που χρησιμοποιήσαμε σε όλη τη διαδικασία της λύσης (Polya, 1957).

Τρεις είναι οι προοπτικές για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων.

- Επίλυση προβλημάτων που έχει ως στόχο την κατανόηση εννοιών.
- Επίλυση προβλημάτων που έχει ως στόχο την εκ νέου εύρεση αποτελεσμάτων βασισμένα σε μία μαθηματική θεωρία.
- Επίλυση προβλημάτων ώστε να επιτευχθεί η μελέτη όλων των νοητικών διεργασιών που ακολουθούνται στην επίλυσή τους (Μαμωνά,2015).

Κατά την αναδιατύπωση ενός ήδη δοσμένου μαθηματικού προβλήματος γίνεται εύκολα αντιληπτή η σχέση ανάμεσα στην επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων. Στην αναδιατύπωση, τροποποιείται ή αναπαράγεται το δοσμένο πρόβλημα ώστε να επιτευχθεί ευκολότερα η επίλυσή του. Έτσι με την αναδιατύπωση του δοσμένου προβλήματος, έχει κατασκευαστεί ένα νέο το οποίο θα γίνει το επίκεντρο όλων των διαδικασιών με στόχο τη λύση του. Ο Polya (1957) συμπεριέλαβε την κατασκευή προβλημάτων ως μία χρήσιμη στρατηγική επίλυσης προβλημάτων. Εντόπισε τη σχέση ανάμεσα στην επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων στην ίδια τη φύση της επίλυσης και θεώρησε ότι η επίλυση προβλημάτων είναι μία ακολουθία επιτυχών αναδιατυπώσεων. Συνέστησε μάλιστα και τέσσερις στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων: την αναλογία (χρήση βοηθητικού στοιχείου ή προβλήματος), την αποσύνθεση και ανασυνδυασμό (μεταβολή του προβλήματος), τη γενίκευση (εφεύρεση του γενικού προβλήματος) και τέλος την εξειδίκευση (συγκεκριμένες ερμηνείες). Στην πραγματικότητα ο Polya προτείνει τη χρήση στρατηγικών μέσω των οποίων η κατασκευή προβλημάτων γίνεται το μέσο που ενισχύει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

Η κατασκευή προβλημάτων για πολλούς ερευνητές είναι το μέσο που βοηθάει στην πιο ολοκληρωμένη ανάλυσή τους, συμβάλλοντας σημαντικά στην ενίσχυση της ικανότητας επίλυσης. Σύμφωνα με τον Silver (1993), το συχνότερο κίνητρο για το διδακτικό και εκπαιδευτικό ενδιαφέρον για την κατασκευή προβλημάτων είναι το πόσο δυναμικά συμβάλλει και βοηθάει στο να γίνει το άτομο καλύτερος λύτης μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο δεν έχει διευκρινιστεί κατά πόσο καθώς και με ποιο τρόπο συμβάλλει η κατασκευή προβλημάτων στην ανάπτυξη και βελτίωση αυτής της ικανότητας. Οι Silver και Cai (1993) εξέτασαν τις απαντήσεις μαθητών γυμνασίου που τους είχε ζητηθεί η δημιουργία τριών προβλημάτων, βασισμένων σε μία σύντομη ιστορία. Τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν, ταξινομήθηκαν με βάση τη μαθηματική πολυπλοκότητα δηλαδή το πλήθος των πράξεων που απαιτούνταν για τη λύση. Στη συνέχεια έγινε σύγκριση της μαθηματικής πολυπλοκότητας με τις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση και βρέθηκε μία ισχυρή, θετική σχέση ανάμεσα στην κατασκευή και στις αποδόσεις τους στην επίλυση. Αντίθετα ήταν τα αποτελέσματα της έρευνας των Silver και Μαμωνά. Στην έρευνα αυτή ζητήθηκε από δασκάλους η κατασκευή προβλημάτων στο πλαίσιο ενός περιβάλλοντος εργασίας. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας δεν επιβεβαίωσαν την παραπάνω σχέση.

Μέσω της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, όχι μόνο επιτυγχάνεται η εύρεση της απάντησης στο πρόβλημα που έχει δοθεί αλλά ενισχύεται σημαντικά και η εκτίμηση των χαρακτηριστικών του. Από την επίλυση ενός προβλήματος συχνά οδηγούμαστε στην κατασκευή νέων προβλημάτων, αλλά δεν γίνεται πάντα η σωστή εκτίμηση της σημασίας της λύσης όταν δεν δημιουργούνται ή δεν αναλύονται περαιτέρω προβλήματα ή ερωτήματα (Brown &Walter, 1983).

Από τις έρευνες αποδεικνύεται ότι οι δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων επηρεάζουν με θετικό τρόπο την ικανότητα της επίλυσής τους από το άτομο. Παράλληλα προσφέρουν την ευκαιρία να αποκτήσουν οι εκπαιδευτικοί μία σαφέστερη εικόνα για την κατανόηση τόσο των μαθηματικών εννοιών όσο και των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευόμενους (English, 2003, Leung, 1997, Christou, 2005). Στις μελέτες αυτές η κατασκευή προβλημάτων είναι μία εργασία που τα άτομα θέτουν ή κατασκευάζουν ένα πρόβλημα βασισμένο σε δοσμένες πληροφορίες και στη συνέχεια το λύνουν. Έτσι βελτιώνεται ο τρόπος σκέψης, οι δεξιότητες και η αυτοπεποίθηση τους.

2.10 Ενσωμάτωση της κατασκευής προβλημάτων στη διδακτική πράξη

Παρόλο που τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για την ενσωμάτωση της κατασκευής προβλημάτων στη διδακτική πράξη, οι έρευνες που έχουν γίνει είναι σχετικά πρόσφατες. Αρχικά η πλειοψηφία των ερευνών αφορούσε την επίλυση των προβλημάτων. Οι μελέτες που σχετίζονται με την κατασκευή προβλημάτων έχουν διερευνητικό χαρακτήρα, χρησιμοποιούν ποικιλία προσεγγίσεων, εξετάζουν την κατασκευή τόσο από τη μεριά των εκπαιδευτικών, όσο και από αυτή των εκπαιδευόμενων, ωστόσο παρουσιάζουν ελλείψεις στις επιλογές των μεθόδων που αφορούν τη μελέτη της. Η ύπαρξη κατασκευής προβλημάτων επιβάλλεται πλέον σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα των χωρών του κόσμου, καθώς έτσι θα επιτευχθεί η εμπλοκή με δραστηριότητες μάθησης με στόχο την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που θα έχει ως συνέπεια τη διατύπωση νέων προβλημάτων από μη δομημένες καταστάσεις (Singer et al, 2013).

Για την εφαρμογή της κατασκευής προβλημάτων στη διδακτική πράξη πρωταρχικός είναι ο ρόλος του δασκάλου (Gonzales, 1996). Ενώ η κατασκευή προβλημάτων αναγνωρίζεται πλέον ως μία μέθοδος διδασκαλίας με μεγάλη αξία, σε πολλούς δεν δίνεται η δυνατότητα να βιώσουν μέσω αυτής, τη μελέτη των μαθηματικών (Silver et al, 1996). Στις περισσότερες περιπτώσεις οι δάσκαλοι τείνουν να δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στις δεξιότητες, τους κανόνες και τις διαδικασίες, παρά σε μέσα ανάπτυξης της κατανόησης και του συλλογισμού (Ernest, 1991). Έτσι κάποιοι από τους δασκάλους σπάνια χρησιμοποιούν την κατασκευή προβλημάτων στις αίθουσες διδασκαλίας, γιατί δυσκολεύονται οι ίδιοι να την εφαρμόσουν, ή γιατί δεν διαθέτουν τις απαιτούμενες δεξιότητες (Leung & Silver, 1997). Θα πρέπει λοιπόν σε πρώτη φάση, οι δάσκαλοι να διδαχθούν τον τρόπο με τον οποίο θα ενσωματώνουν την κατασκευή προβλημάτων στα μαθήματά τους, κάτι που θα τους βοηθήσει να εξοικειωθούν περισσότερο με τις γνώσεις και αντιλήψεις των μαθητών τους στο μάθημα των μαθηματικών (Zibidis, Chionidou-Moskofoglou & Doukakis, 2011). Η κατασκευή προβλημάτων ουσιαστικά δίνει στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να ελέγχουν το πρόγραμμα σπουδών, να δημιουργούν το πλαίσιο που αφορά το σχεδιασμό του μαθήματος, σε μία συνεχή επικοινωνία με τους μαθητές.

Ο τρόπος με τον οποίο θα διδαχθούν την κατασκευή των μαθηματικών προβλημάτων οι μαθητές, θα καθορίσει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητά τους να κατασκευάζουν μόνοι τους προβλήματα ή να θέτουν ερωτήματα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί, σε ένα δοσμένο πρόβλημα, να ξεκινήσει αλλάζοντας κάποιες πληροφορίες, χωρίς όμως να το αλλάζει ριζικά. Η ίδια εργασία μπορεί να ανατεθεί αργότερα στους μαθητές του σε προβλήματα με αυξανόμενη δυσκολία, ώστε τελικά να του ζητηθεί η κατασκευή προβλημάτων με χρήση μόνο των αριθμητικών δεδομένων από το αρχικό πρόβλημα (Kilpatrick, 1987).

Για να ενισχύσει τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει την συνεργασία των μαθητών σε όλη τη διάρκειά της. Έτσι ο ρόλος των μαθητών στην αίθουσα διδασκαλίας γίνεται σαφέστερα πιο ενεργός και ενισχύεται η ενθάρρυνση της συμμετοχικότητάς του, ώστε να θέτει από την πλευρά του ερωτήματα. Με αυτόν τον τρόπο η γνώση γίνεται μέσω της προσωπικής αναζήτησης με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και δεν παρέχεται ως στείρα γνώση προς απομνημόνευση (Brown &Walter,1983).

Μέσω της κατασκευής προβλημάτων μπορεί να βελτιωθεί και η επικοινωνία κατά τη διδακτική πράξη, ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς και τους εκπαιδευόμενους. Η ενσωμάτωση της κατασκευής προβλημάτων για παράδειγμα, σε ημιδομημένες μαθηματικές καταστάσεις ενισχύουν την επικοινωνία στις αίθουσες διδασκαλίας αλλά επιφέρουν και αλλαγές που αφορούν στον χαρακτήρα της (Stoyanova, 1997).

Ο εκπαιδευτικός με διάφορους τρόπους πρέπει να προτρέψει τους μαθητές του να κάνουν χρήση της κατασκευής προβλημάτων κατά τη διδακτική ώρα. Αρχικά θα πρέπει να τους βοηθήσει να εξοικειωθούν με την επίλυση προβλημάτων. Αυτό θα ενισχύσει την αυτοπεποίθησή τους και έτσι θα είναι ακόμη ευκολότερη η δημιουργία νέων προβλημάτων παρόμοια με αυτά που έχουν ήδη λύσει ή νέων ερωτημάτων στα δοσμένα προβλήματα. Ιδιαιτέρως χρήσιμη θα ήταν η επίλυση προβλημάτων που έχει κατασκευάσει κάθε μαθητής, από τους υπόλοιπους της τάξης.

Τα τελευταία χρόνια, έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρήση της τεχνολογίας κατά την κατασκευή προβλημάτων στη διδακτική πράξη. Η τεχνολογία παρέχει ένα μαθησιακό περιβάλλον εξερεύνησης, πειράματος και εφεύρεσης χωρίς όλο αυτό να το μετατρέπει σε μία χρονοβόρα διαδικασία. Μέσω της χρήσης της τεχνολογίας διευκολύνεται η κατασκευή προβλημάτων.

2.11 Πηγές για την κατασκευή προβλημάτων

Κατά τη διδακτική διαδικασία, οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν διάφορες πηγές που θα συμβάλλουν στην εφαρμογή δραστηριοτήτων για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Οι δραστηριότητες αυτές, ταξινομούνται βάσει της αρχικής πηγής της κατάστασης κατασκευής προβλημάτων ως εξής:

- Το πρόβλημα ως πηγή κατασκευής προβλημάτων.

Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987) μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας που αφορά την κατασκευή προβλημάτων βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, που αποτελεί πηγή είτε για τη διατύπωση υποπροβλημάτων, είτε νέων προβλημάτων που είναι συναφή με αυτό, όπως επίσης αφορά και την αναδιατύπωση προβλημάτων τα οποία θεωρούνται κακώς διατυπωμένα. Στην ουσία όλες οι μαθηματικές καταστάσεις που μπορούν να αναφερθούν ως ημιδομημένες αποτελούν πηγή για τη δημιουργία και κατασκευή νέων προβλημάτων.

- Η επίλυση προβλήματος ως πηγή κατασκευής προβλημάτων.

Η επίλυση προβλήματος προτείνεται ως η δεύτερη πηγή κατασκευής προβλημάτων. Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987), υπάρχουν δύο φάσεις στη διαδικασία επίλυσης όπου είναι πιθανό να προκύψουν νέα προβλήματα. Η πρώτη φάση αφορά την αλλαγή μερικών ή όλων των συνθηκών ώστε να προκύψει ένα νέο πρόβλημα. Στη δεύτερη φάση, μετά την επίλυση του προβλήματος ο λύτης ελέγχει πώς μπορεί να επηρεαστεί η λύση από τις διάφορες τροποποιήσεις του προβλήματος. Ο μαθητής δηλαδή οφείλει να εφιστήσει την προσοχή του στις αλλαγές που συμβαίνουν στις συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες επηρεάζουν το μαθηματικό μοντέλο και διερευνούν τη σύνδεση ανάμεσα στις τροποποιήσεις και στη λύση (Stoyanova, 1997).

- Καθημερινές καταστάσεις ως πηγή κατασκευής προβλημάτων.

Το άτομο στην καθημερινότητά του εκτός της διδακτικής πράξης, έρχεται αντιμέτωπο και με προβλήματα που προκύπτουν από ελεύθερες ή ημι-δομημένες καταστάσεις, που είναι κακώς διατυπωμένα και περιέχουν άλλοτε ελλιπή και άλλοτε δεδομένα που πλεονάζουν. Για την αντιμετώπιση ενός τέτοιου προβλήματος ο λύτης αρχικά πρέπει να ξεκινήσει από τη διατύπωσή του. Όμως οι δραστηριότητες που αντιμετωπίζει κατά τη διδακτική πράξη είναι εκ διαμέτρου αντίθετες, αφού εκεί έρχεται αντιμέτωπο με την επίλυση καλώς δομημένων προβλημάτων (Stoyanova, 1997; Doukakis & Matzakos, 2013). Συνήθως η κατασκευή προβλημάτων είναι μία διαδικασία με μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας από την επίλυση τους. Η ύπαρξη ασκήσεων που αφορούν σε μία συγκεκριμένη κατάσταση με στόχο τη λεγόμενη μοντελοποίηση, δηλαδή την κατασκευή μοντέλων στα μαθηματικά, μετατρέπουν το άτομο σε έναν πιο έμπειρο λύτη ως προς την κατασκευή προβλημάτων (Kilpatrick, 1987).

2.12 Δυσκολίες στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων

Η κατασκευή προβλημάτων βελτιώνει τη σκέψη των μαθητών, τις δεξιότητές τους στην επίλυση, τις στάσεις και την αυτοπεποίθησή τους όσο αφορά τα μαθηματικά και συμβάλλει στην ευρύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (English, 1997,1998).

Σαν διαδικασία όμως, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θεωρείται δυσκολότερη από αυτή της επίλυσης προβλημάτων. Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές και ζητήθηκε η κατασκευή προβλημάτων, παρατηρήθηκε ότι οι φοιτητές αξιοποίησαν μεμονωμένες γνώσεις τις οποίες κατέκτησαν σε πρόσφατο χρόνο χωρίς να μπουν στη διαδικασία ανεύρεσης περαιτέρω πληροφοριών και χωρίς να εφαρμόσουν συνδυαστικά τις γνώσεις τους. Ένιωσαν δηλαδή, μεγαλύτερη ασφάλεια στο να αντλήσουν πληροφορίες και δεδομένα κατασκευής προβλημάτων από το οικείο τους μαθησιακό περιβάλλον (Μαμωνά, 2015), γεγονός που καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων που θα ενσωματωθούν στη διδακτική πράξη (Stoyanova, 1997).

Η English (1997), τόνισε οι μαθητές χρειάζονται γνώση που θα τους επιτρέπει να ασχοληθούν με τις γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται με την κατασκευή προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι εάν δεν κατανοήσουν τι είναι ένα πρόβλημα, αν δεν αναγνωρίσουν τη δομή του ή παρόμοιες δομές δεν θα καταφέρουν τελικά να δημιουργήσουν ένα νέο πρόβλημα. Επομένως πρέπει να διερευνυθούν οι τρόποι με τους οποίους κατανοούνται οι διάφοροι τύποι προβλημάτων καθώς και οι τύποι των τυπικών και μη τυπικών στρατηγικών που χρησιμοποιούνται. Η ίδια τόνισε ότι εάν η ικανότητα κατανόησης των μαθητών, μιας μαθηματικής κατάστασης, από πολλές οπτικές γωνίες βελτιωθεί, τότε μπορεί να βελτιωθεί και η ικανότητά τους για την κατασκευή νέων προβλημάτων.

Στις δυσκολίες των μελλοντικών εκπαιδευτικών κατά τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων αναφέρεται η έρευνα των Sengul και Katranci (2015). Παρατηρήθηκε ότι κατά την έρευνα κατασκευάστηκαν μαθηματικά προβλήματα τα οποία ήταν κατανοητά και ακολουθούσαν τις μαθηματικές αρχές αλλά εντοπίστηκαν δυσκολίες λόγω απειρίας, έλλειψης μαθηματικών γνώσεων και γνώσεων που αφορούν και το πρόγραμμα σπουδών και το μαθηματικό επιπέδο των μαθητών στους οποίους απευθύνονταν τα προβλήματα που κατασκεύασαν.

Η διαδικασία κατασκευής προβλημάτων σίγουρα επηρεάζεται από την καταλληλότητα του κατασκευαστή. Ο κατασκευαστής θα πρέπει να νιώθει και να θεωρεί ότι έχει θέσει ένα «ποιοτικό» πρόβλημα, το οποίο θα αξιολογηθεί και θα κριθεί ως προς τη μαθηματική του ορθότητα και καταλληλότητα.

3. Ερευνητική Διαδικασία

3.1 Σκοπός της Έρευνας – Ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα έχει ως σκοπό να διερευνήσει εάν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες που διδάσκονται μαθηματικά στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση, έχουν την ικανότητα και σε ποιο βαθμό να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα. Συγκεκριμένα μέσω ποσοτικής έρευνας μελετώνται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα.

- Ποιες μεθόδους κατασκευής προβλημάτων γνωρίζουν και χρησιμοποιούν οι προπτυχιακοί φοιτητές και φοιτήτριες;
- Οι φοιτητές και φοιτήτριες που επιλύουν συγκεκριμένα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να κατασκευάζουν αντίστοιχα, νέα προβλήματα;
- Ποια χαρακτηριστικά επηρεάζουν την ικανότητα των φοιτητών- φοιτητριών για την κατασκευή προβλημάτων;

3.2 Ερευνητική Μέθοδος

Για τη μελέτη των ερωτημάτων πραγματοποιήθηκε ποσοτική έρευνα. Η ποσοτική έρευνα αναλύει την ποιότητα εμφάνισης ενός φαινομένου το οποίο εξετάζεται στην έρευνα (Kvale, 1996) και δίνει στον ερευνητή τη δυνατότητα προσέγγισης του ερευνητικού πεδίου και της επικέντρωσης σε αυτό (Παρασκευοπούλου-Κόλλια,2008). Στην παρούσα μελέτη θα εξαχθούν και θα σχολιαστούν συμπεράσματα μετά την ποσοτική ανάλυση συλλογής δεδομένων.

3.3 Ερευνητικά εργαλεία

Σε μία έρευνα είναι πρακτικά δύσκολο και χρονοβόρο να συλλεχθούν δεδομένα για ολόκληρο τον πληθυσμό. Για το λόγο αυτό επιλέγεται η μέθοδος της δειγματοληψίας, στην οποία εξετάζεται ένας συγκεκριμένος αριθμός ατόμων από τον πληθυσμό και αυτός ο αριθμός συμπεριλαμβάνεται στην έρευνα. Δύο είναι τα είδη της μεθόδου της δειγματοληψίας, η πιθανοτική και η μη πιθανοτική. Στην πιθανοτική επιλέγεται τυχαία το δείγμα από τον πληθυσμό που αφορά την έρευνα (Babbie,2011), ενώ στη μη πιθανοτική η επιλογή του δείγματος γίνεται με τεχνικές κατά τις οποίες δεν χρησιμοποιούνται οι νόμοι των πιθανοτήτων (Χαλικιάς, Μανωλέσου & Λάλου, 2015).

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε η μη πιθανοτική δειγματοληψία και συγκεκριμένα η στρωματοποιημένη τυχαία δειγματοληψία και συμμετείχαν 92 προπτυχιακοί φοιτητές και φοιτήτριες διαφόρων τμημάτων της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Για τη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν, δημιουργήθηκαν δύο φύλλα εργασίας με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, στις οποίες ζητήθηκε από τους φοιτητές και φοιτήτριες να δώσουν εκτεταμένες απαντήσεις καθώς και εξηγήσεις ή αιτιολογήσεις. Στο πρώτο φύλλο εργασίας δίνεται στους συμμετέχοντες στην έρευνα, η συνάρτηση:

$$f(x) = 50 - \frac{25x^2}{(x+2)^2}, \text{με } x \geq 0$$

και τους ζητείται να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Σε δεύτερο χρόνο τους ζητείται η κατασκευή ενός δικού τους προβλήματος με την ίδια συνάρτηση, με τέτοιο τρόπο ώστε να διαφαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατά της. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας δίνονται στους φοιτητές – φοιτήτριες οι μήτρες:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

και καλούνται να λύσουν τη εξίσωση $A \cdot X = B$. Στην συνέχεια με χρήση αυτών των πινάκων τους ζητείται η κατασκευή ενός νέου μαθηματικού προβλήματος.

Επίσης, σε δεύτερη φάση, οι συμμετέχοντες στην έρευνα κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο. Το ερωτηματολόγιο, αποτελεί τη πιο συνηθισμένη μορφή για την ποσοτική έρευνα και περιλαμβάνει δομημένες ερωτήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες στην έρευνα θα δώσουν γραπτές απαντήσεις σε ερωτήματα που έχουν τεθεί από τον ερευνητή με ορισμένη σειρά. Έτσι, το σύνολο των φοιτητών – φοιτητριών θα απαντήσει στις ίδιες ερωτήσεις και στη συνέχεια θα γίνει η συλλογή των δεδομένων (Λαγουμιντζής κ.ά., 2015). Το ερωτηματολόγιο πρέπει να είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντλούνται πληροφορίες χρήσιμες για την ανάλυση (Babbie, 2011).

Στην παρούσα εργασία, με στόχο τη συλλογή των πρωτογενών δεδομένων, διαμορφώθηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιέχει ερωτήσεις κυρίως κλειστού τύπου, που είναι σύντομες και έχουν καθορισμένη σειρά έτσι ώστε να μην παραληφθούν ή απορριφθούν από τους συμμετέχοντες στην έρευνα. Οι ερωτήσεις είναι απλής απάντησης δηλαδή ο φοιτητής – φοιτήτρια πρέπει να επιλέξει μία από τις απαντήσεις που προτείνονται, ή είναι πολλαπλής επιλογής, όπου επιλέγει περισσότερες από μία από τις προτεινόμενες απαντήσεις, ή τέλος, είναι ερωτήσεις τύπου Likert δηλαδή κλίμακες συμφωνίας των συμμετεχόντων στην έρευνα με μία άποψη. Χρησιμοποιείται στις ερωτήσεις αυτές, η πενταβάθμια κλίμακα (Καθόλου, Λίγο, Αρκετά, Πολύ, Πάρα Πολύ).

Το παρόν ερωτηματολόγιο αποτελείται από 28 ερωτήσεις που είναι διαχωρισμένες σε τέσσερις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα συμπεριλαμβάνονται οι ερωτήσεις 1 έως 10 που είναι σχετικές με το ποιες τεχνικές κατασκευής προβλημάτων γνωρίζουν οι φοιτητές – φοιτήτριες και πόσο συχνά χρησιμοποιούν την κάθε μία από αυτές. Τη δεύτερη ενότητα αποτελούν οι ερωτήσεις από 11 έως 16, που σχετίζονται με το κατά πόσο πιστεύεται ότι συμβάλλουν οι διάφορες μαθηματικές δεξιότητες στην κατασκευή προβλημάτων. Η τρίτη ενότητα που περιέχει τις ερωτήσεις 17 έως 22 αφορά ερωτήσεις για τα δύο φύλλα εργασίας τα οποία κλήθηκαν οι φοιτητές – φοιτήτριες να απαντήσουν, ενώ στην τέταρτη με τις ερωτήσεις από 23 έως 28, περιλαμβάνονται ερωτήσεις δημογραφικές και είναι οι τελευταίες ώστε να μην λειτουργήσουν αποτρεπτικά αφού μία μερίδα ατόμων που συμμετέχει σε έρευνες τις θεωρεί βαρετές (Babbie, 2011).

Μαζί με το ερωτηματολόγιο και τα φύλλα εργασίας, ενσωματωμένο υπάρχει και ένα εισαγωγικό σημείωμα στο οποίο αναφέρονται πληροφορίες για το σκοπό της έρευνας, την ερευνήτρια, το Πανεπιστημιακό ίδρυμα και τονίζεται η εμπιστευτικότητά τους καθώς και μία εκτίμηση για το χρόνο που απαιτούν, ενώ τέλος εκφράζονται ευχαριστίες προς τους συμμετέχοντες για το χρόνο και την προσοχή που θα διαθέσουν. Όλα αυτά τα στοιχεία αυξάνουν τις πιθανότητες για την επιτυχέστερη απάντησή τους (Babbie, 2011).

4. Αποτελέσματα

4.1 Εισαγωγή

Με την ολοκλήρωση της συλλογής των ερωτηματολογίων και των φύλλων εργασίας που απάντησαν οι φοιτητές και φοιτήτριες πραγματοποιήθηκε η βαθμολόγησή τους. Όσο αφορά τη βαθμολόγηση των δύο φύλλων εργασίας ακολουθήθηκε συγκεκριμένο πρωτόκολλο διόρθωσης, καθορισμένο από την ερευνήτρια, η ανάλυση του οποίου γίνεται σε συγκεκριμένη παράγραφο παρακάτω.

Από τις απαντήσεις που δόθηκαν από τους φοιτητές-φοιτήτριες και τις βαθμολογίες που συγκέντρωσαν δίνεται η δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων για τις μαθηματικές τους γνώσεις και το βαθμό ικανότητας για κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων κάνοντας χρήση διαδικασιών κατασκευής που πιθανώς γνωρίζουν.

Ακολούθησε στατιστική ανάλυση ώστε να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει.

4.2 Διαμόρφωση του πρωτόκολλου βαθμολόγησης

Για τα προβλήματα που περιέχονται στα δύο φύλλα εργασίας και των οποίων η επίλυση έχει ζητηθεί επιλέχθηκε η κλίμακα βαθμολόγησης [0, 10]. Η βαθμολόγηση γίνεται ως εξής:

Περιγραφή της απάντησης	**Βαθμολόγηση**
Ορθή	10
Μερικώς Ορθή	[4, 8]
Λανθασμένη/Λείπει η απάντηση	0

Πίνακας 1. Κλίμακα Βαθμολόγησης

Ως ορθή χαρακτηρίζεται μία λύση όταν συμφωνεί με αυτή που προτείνεται ως ενδεικτική λύση αλλά και οποιαδήποτε άλλη λύση είναι επιστημονικά τεκμηριωμένη και σωστή, παρά το γεγονός ότι διαφέρει από τη δοσμένη ως προτεινόμενη.

Οι μερικώς ορθές απαντήσεις, είναι οι απαντήσεις που κινούνται με στόχο την άρτια επίλυση του μαθηματικού προβλήματος που δίνεται, ωστόσο στις απαντήσεις αυτές υπάρχουν ελλείψεις που οδηγούν είτε στη μερική επίλυση είτε στη μη επίλυσή του. Οι διαφορετικές απαντήσεις που δόθηκαν όπου απουσίαζαν άλλες φορές περισσότερες και άλλες λιγότερες δικαιολογήσεις διαμόρφωσαν το διάστημα [4, 8] των μερικώς ορθών απαντήσεων.

Με 0 μονάδες έχουν βαθμολογηθεί τα φύλλα με εντελώς λανθασμένες απαντήσεις ή εκείνα στα οποία λείπει η απάντηση.

Όσο αφορά το δεύτερο μέρος των φύλλων εργασίας όπου ζητείται η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων μία απάντηση κρίνεται ορθή όταν το πρόβλημα είναι καλώς διατυπωμένο με σαφήνεια και ακρίβεια.

4.3 Ενδεικτικές απαντήσεις των φύλλων εργασίας

Στην παράγραφο αυτή παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις των δύο φύλλων εργασίας με απώτερο στόχο τη διαμόρφωση ενός ασφαλούς πλαισίου που αφορά τη βαθμολόγηση τους.

<u>1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>

i. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 50 - \frac{25x^2}{(x+2)^2}$,*με* $x \geq 0$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

<u>Ορθή Απάντηση:</u>

Για $x \geq 0$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το $f(0) = 50$.

<u>Μερικώς Ορθή Απάντηση:</u>

Κάθε απάντηση που περιέχει κάποιο τμήμα ή μέρος της ορθής απάντησης.

<u>Λανθασμένη Απάντηση:</u> Άλλες απαντήσεις.

ii. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση να κατασκευάσετε ένα δικό σας μαθηματικό πρόβλημα. Η διατύπωση του προβλήματος να γίνει με τρόπο ώστε να διαφαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατά της.

Ορθή Απάντηση: Οποιαδήποτε διατύπωση είναι σαφής, ακριβής και διαφαίνονται σε αυτή τα δεδομένα που ζητούνται από την ερευνήτρια.

Λανθασμένη Απάντηση: Διατυπώσεις που δεν έχουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά ή απουσιάζουν.

2ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

i. Δίνονται οι παρακάτω μήτρες :

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.Να λυθεί η εξίσωση $A \cdot X = B$.

Ορθή Απάντηση: $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

Μερικώς Ορθή Απάντηση:

Κάθε απάντηση που περιέχει κάποιο τμήμα ή μέρος της ορθής απάντησης.

Λανθασμένη Απάντηση: Άλλες απαντήσεις.

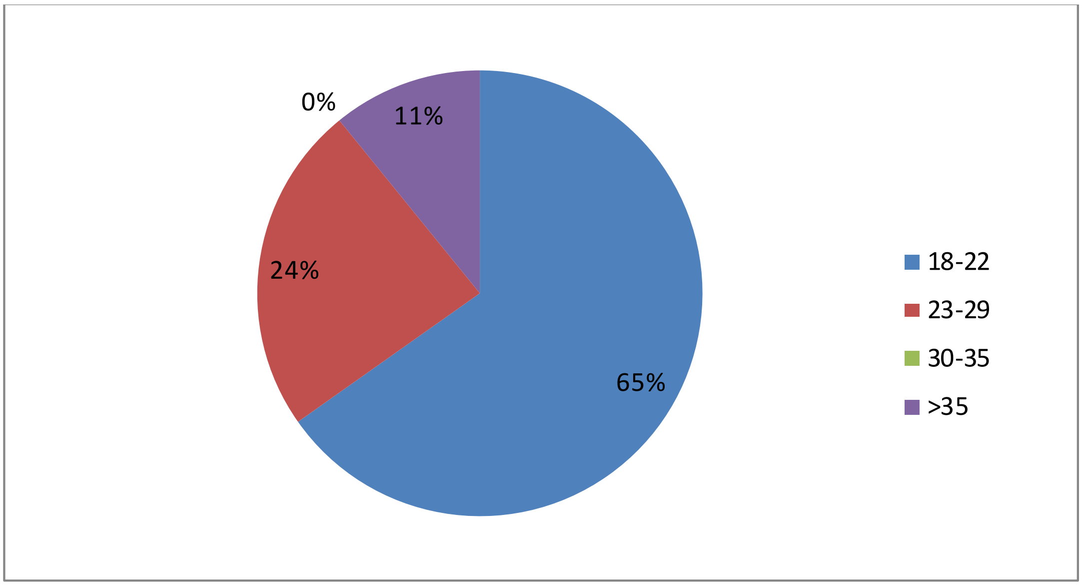
ii. Χρησιμοποιώντας τις μήτρες του πρώτου ερωτήματος να διατυπώσετε ένα δικό σας μαθηματικό πρόβλημα

Ορθή Απάντηση: Οποιαδήποτε διατύπωση είναι σαφής και ακριβής.

Λανθασμένη Απάντηση: Διατυπώσεις που δεν έχουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά ή απουσιάζουν.

4.4 Δημογραφική ανάλυση

Το ερωτηματολόγιο καθώς και τα δύο φύλλα εργασίας της εν λόγω έρευνας διανεμήθηκαν σε 92 φοιτητές και φοιτήτριες διαφόρων τμημάτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.Από τα άτομα αυτά, οι 51 (55,4%) είναι άντρες, ενώ οι 41 (44,6%) γυναίκες. Οι ηλικίες τους παρουσιάζονται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1. Ηλικίες Ερωτηθέντων

Το 65% των ερωτηθέντων απαρτίζεται από ηλικίες της κλάσης 18-22 και το 24% αφορά φοιτητές και φοιτήτριες που ανήκουν στην ηλικιακή ομάδα 23-29. Επιπλέον υπάρχει ένα μικρό ποσοστό ατόμων οι όποιοι είναι άνω των 35, ενώ δεν υπάρχει φοιτητής ή φοιτήτρια με ηλικία μεταξύ των 30-35 ετών.

4.5 Επιδόσεις ανά φύλλο εργασίας και αποτελέσματα ερωτήσεων που τα αφορούν.

Σε αυτή την παράγραφο δίνεται μία γενική εικόνα των επιδόσεων των ερωτηθέντων στα δύο φύλλα εργασίας και παρουσιάζονται αποτελέσματα των απαντήσεων τους, σε ερωτήσεις που σχετίζονται με τα φύλλα εργασίας έτσι όπως προέκυψαν από την ανάλυση του ερωτηματολογίου.

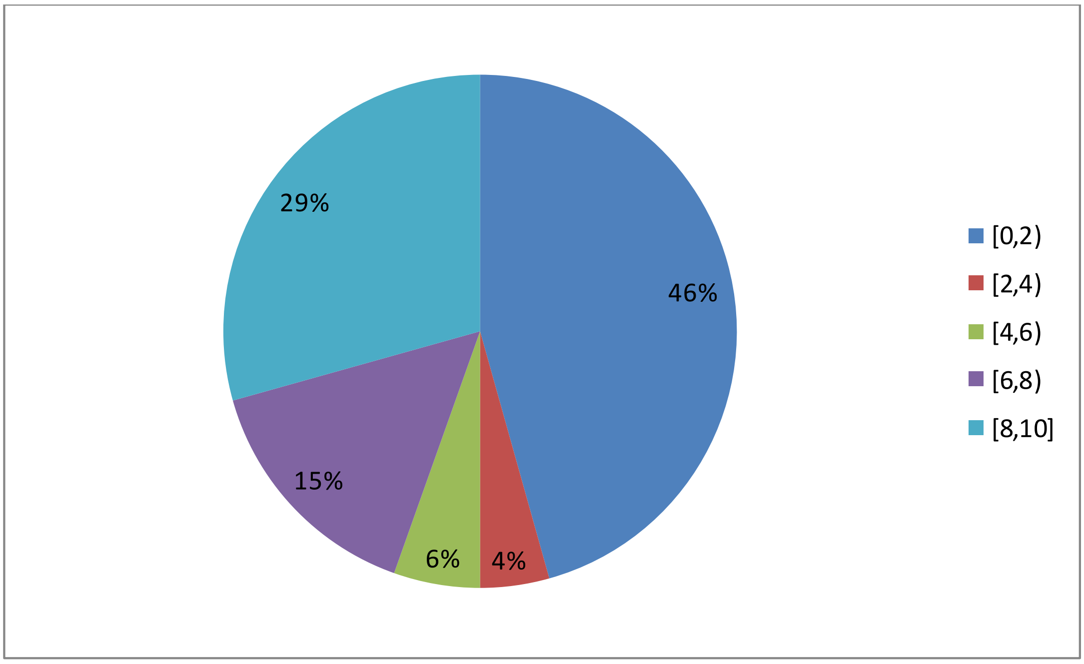
Χαρακτηριστικό των αποτελεσμάτων είναι το χαμηλό ποσοστό των φοιτητών και φοιτητριών που συγκέντρωσαν υψηλή βαθμολογία στην επίλυση του πρώτου φύλλου εργασίας καθώς και τα χαμηλά ποσοστά που παρατηρήθηκαν στα άτομα που ορθά κατασκεύασαν δικά τους προβλήματα και στα δύο φύλλα εργασίας.

Έστω $\boldsymbol{x_i}$ η επίδοση των ερωτηθέντων στο πρώτο φύλλο εργασίας και $\boldsymbol{y_i}$ στο δεύτερο. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Βαθμολογία	Επίδοση στο 1ο Φύλλο $\boldsymbol{x_i}$	Επίδοση στο 2ο Φύλλο $\boldsymbol{y_i}$	$\boldsymbol{f_{x_i}\%}$	$\boldsymbol{f_{y_i}\%}$
[0, 2)	42	41	45,65%	44,57%
[2, 4)	4	5	4,35%	5,43%
[4, 6)	5	2	5,43%	2,17%
[6, 8)	14	5	15,22%	5,43%
[8, 10]	27	39	29,35%	42,39%
Σύνολο	92	92	100%	100%

Πίνακας 2. Επιδόσεις στα φύλλα εργασίας

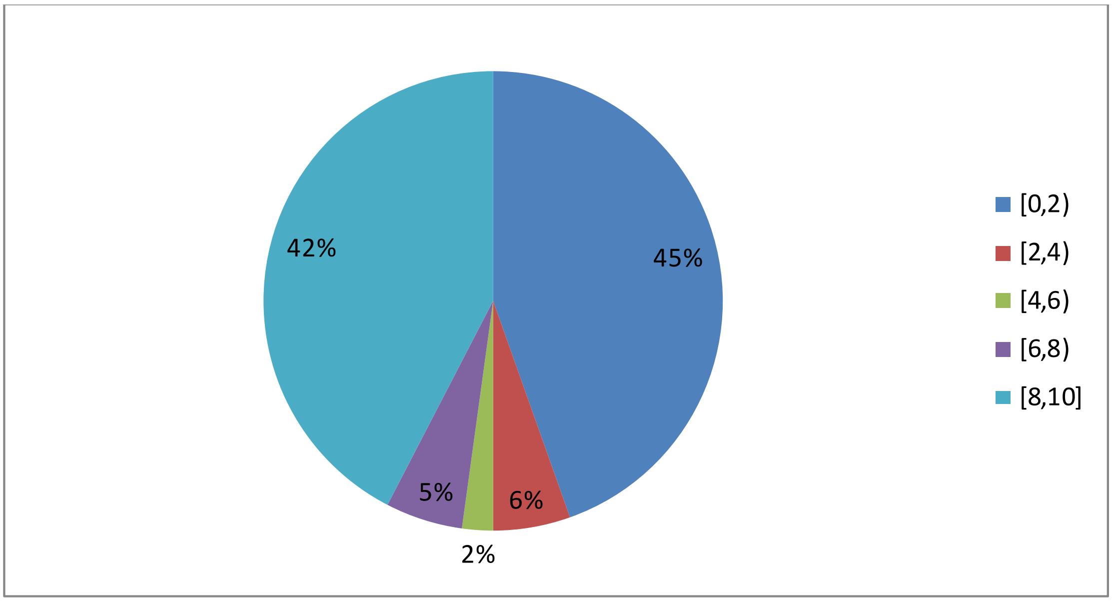
Συγκεκριμένα στο πρώτο φύλλο εργασίας 42 (46%) φοιτητές και φοιτήτριες έλαβαν βαθμολογία που κυμαίνεται από 0 έως 2, ενώ 27 (29%) έλαβαν την υψηλότερη βαθμολογία και κατατάσσονται στην κλάση [8, 10].Η επίδοση 14 ατόμων ήταν από 6 έως 8, ενώ οι τελευταίες 9 παρατηρήσεις κατανεμήθηκαν στις κλάσεις [2, 4) και [4, 6).



Εικόνα 2. Επιδόσεις στο 1° φύλλο εργασίας

Όσον αφορά τις επιδόσεις των φοιτητών και φοιτητριών στο δεύτερο φύλλο εργασίας δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές σε σχέση με το πρώτο φύλλο. Ειδικότερα, 41 από τα

92 άτομα (45%) βαθμολογήθηκαν από 0 έως 2 και 39 (42%) από 8 έως και 10. Οι υπόλοιπες βαθμολογίες κατανεμήθηκαν στις κλάσεις [2, 4), [4, 6) και [6, 8).



Εικόνα 3. Επιδόσεις στο 2ο φύλλο εργασίας

Η μέση τιμή επίδοσης των φοιτητών και φοιτητριών στο πρώτο φύλλο εργασίας είναι $\bar{x} = 3{,}8$ ενώ στο δεύτερο φύλλο υπολογίστηκε σε $\bar{y} = 4{,}4$.

Με βάση το πρωτόκολλο βαθμολόγησης που έχει οριστεί σε προηγούμενη παράγραφο, παρουσιάζονται οι ορθές, οι μερικώς ορθές και οι λανθασμένες απαντήσεις ανά φύλλο εργασίας στους παρακάτω πίνακες:

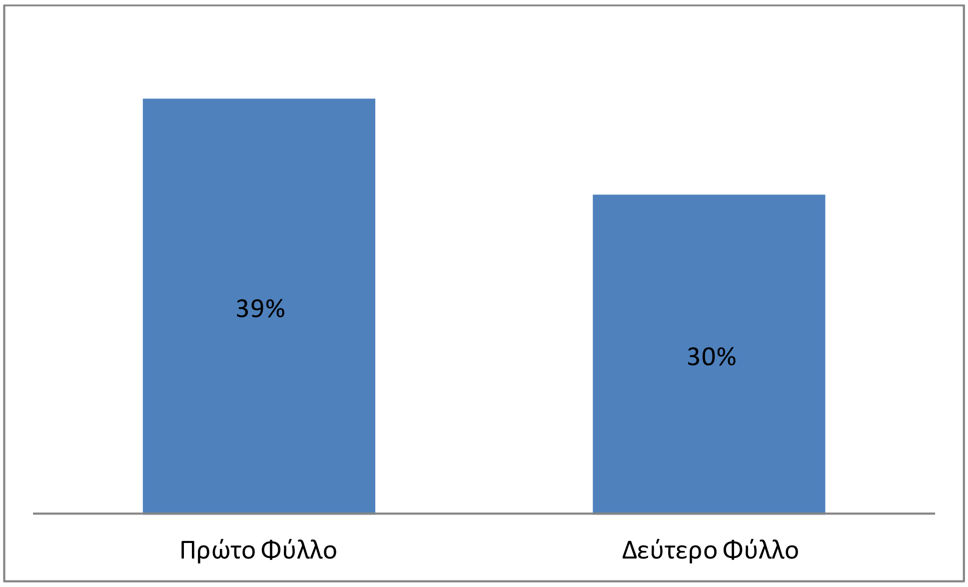
Επίδοση	$\boldsymbol{\nu_\iota}$	$\boldsymbol{f_i}$
Ορθή Απάντηση	27	0,29
Μερικώς Ορθή Απάντηση	19	0,21
Λανθασμένη Απάντηση	46	0,5

Πίνακας 3. Συχνότητες ορθών και λανθασμένων απαντήσεων 1ου φύλλου εργασίας

Επίδοση	ν_ι	f_i
Ορθή Απάντηση	39	0,42
Μερικώς Ορθή Απάντηση	7	0,08
Λανθασμένη Απάντηση	46	0,42

Πίνακας 4. Συχνότητες ορθών και λανθασμένων απαντήσεων 2ου φύλλου εργασίας

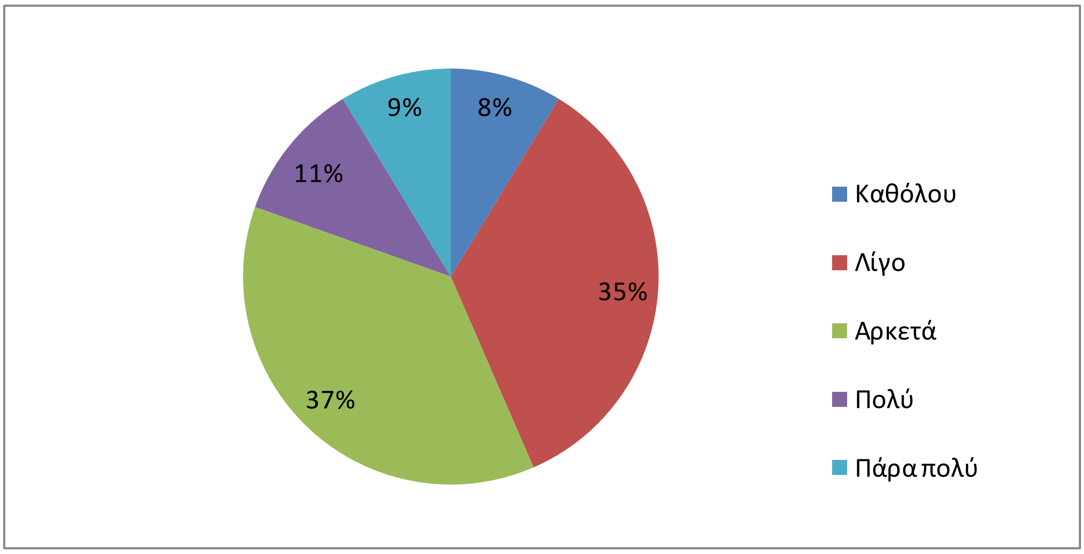
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε δεύτερη φάση στα δύο φύλλα εργασίας, ζητήθηκε από τους φοιτητές και φοιτήτριες η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος. Από τις 92 διατυπώσεις οι 36 ήταν σωστές στο πρώτο φύλλο εργασίας, δηλαδή το 39%, ενώ οι ορθές διατυπώσεις του δευτέρου φύλλου ανέρχονται στο ποσοστό του 30% αφού από τις 92 απαντήσεις, οι 28 ήταν ορθές. Η κατασκευή των νέων προβλημάτων ελέγχθηκε και διαπιστώθηκε ότι όλα τα προβλήματα από τα δύο φύλλα εργασίας που είχαν ορθή διατύπωση μπορούσαν και να επιλυθούν.



Εικόνα 4. Ορθές διατυπώσεις προβλημάτων ανά φύλλο εργασίας

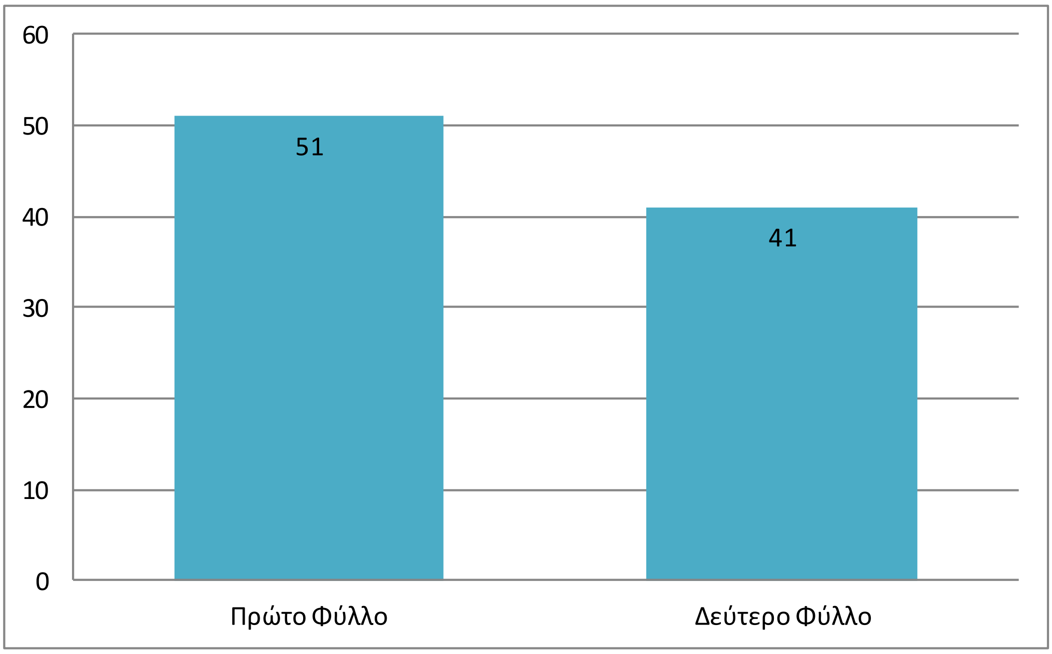
Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των 92 ερωτηθέντων στην πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου που αφορά το βαθμό δυσκολίας που αντιμετωπίζουν κατά την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Οι περισσότεροι από τους φοιτητές-φοιτήτριες δήλωσαν ότι δυσκολεύονται αρκετά να κατασκευάσουν προβλήματα και το ποσοστό τους ανέρχεται στο 37%, ενώ το ποσοστό αυτών που δυσκολεύονται ελάχιστα είναι λίγο μικρότερο και αγγίζει το 35%.

Στην Εικόνα 5 παρουσιάζονται οι απαντήσεις που έχουν δοθεί στην πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου.



Εικόνα 5. Δυσκολία κατασκευής προβλημάτων

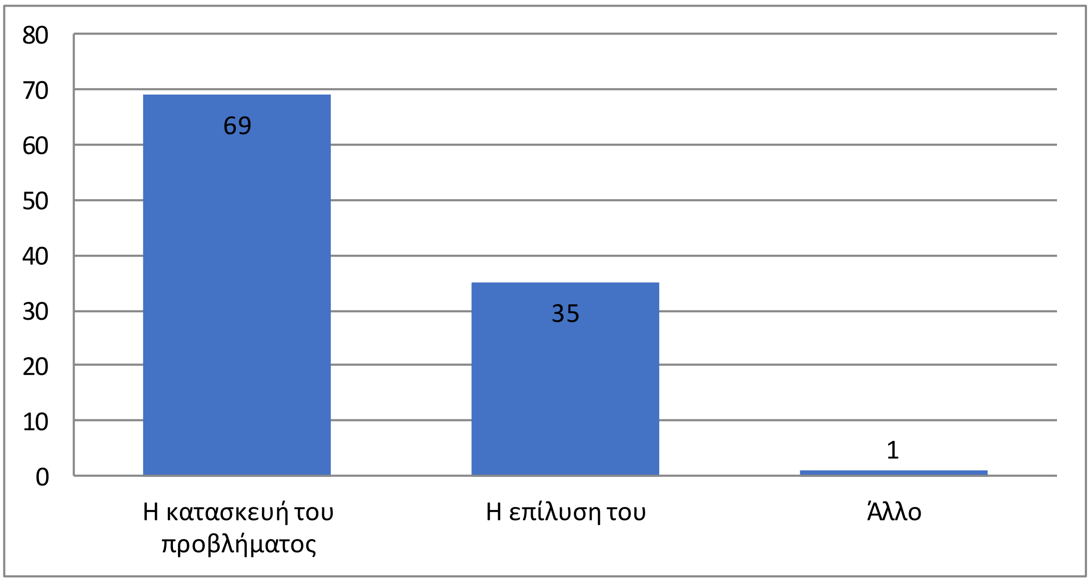
Στην τρίτη ενότητα του ερωτηματολογίου τίθεται στους φοιτητές το ερώτημα ποιο από τα δύο φύλλα εργασίας βρήκανε περισσότερο ενδιαφέρον και ποιο τους δυσκόλεψε περισσότερο. Από τα 92 άτομα τα 34 (37%) βρήκαν πιο ενδιαφέρον το πρώτο φύλλο, ενώ τα 58 (63%) το δεύτερο. Όπως αποτυπώνεται και στην Εικόνα 6, οι ερωτηθέντες δήλωσαν ότι αντιμετώπισαν μεγαλύτερη δυσκολία στο πρώτο φύλλο εργασίας, αποτέλεσμα που συμφωνεί με το ποσοστό των ατόμων που πέτυχαν υψηλή βαθμολογία, [8, 10], στο δεύτερο φύλλο και είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο του πρώτου φύλλου, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.



Εικόνα 6. Εκτίμηση δυσκολίας φύλλων εργασίας

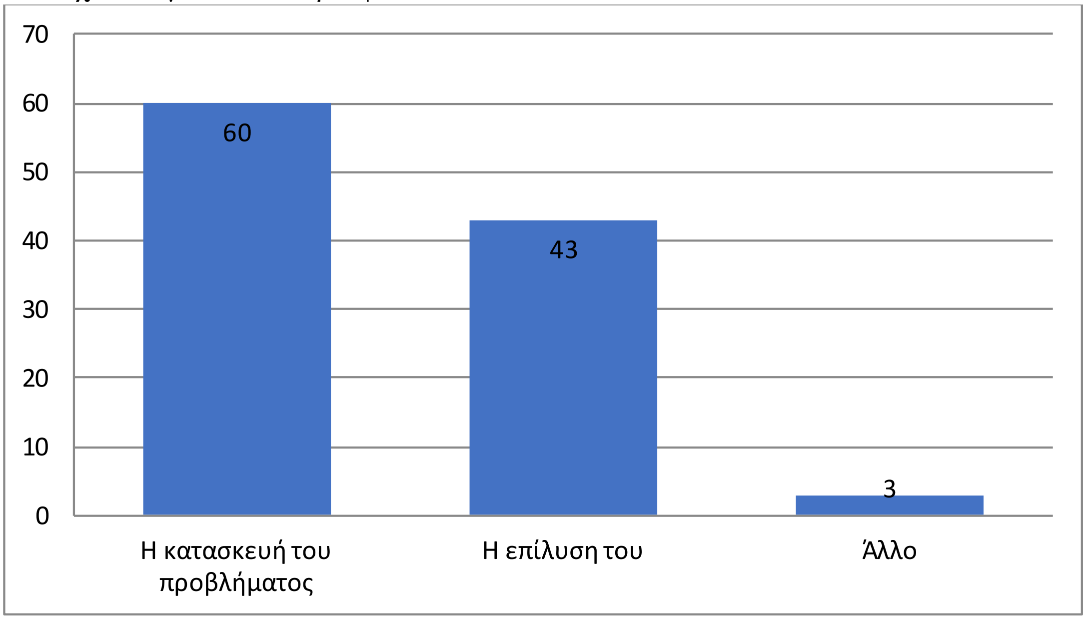
Στο ερωτηματολόγιο ζητήθηκε με ερώτηση, η διευκρίνιση για το που έγκειται η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι ερωτηθέντες στα φύλλα εργασίας. Αν αφορά δηλαδή την επίλυση του δοθέντος προβλήματος, την κατασκευή ενός νέου ή αν υπήρξε κάποια άλλη δυσκολία. Συγκεκριμένα στο πρώτο φύλλο εργασίας 69 άτομα (65%) απάντησαν ότι αυτό που τους δυσκόλεψε περισσότερο ήταν η διαδικασία κατασκευής του μαθηματικού προβλήματος, ενώ 35 (33%) δυσκολεύτηκαν στην επίλυση του. Ένα άτομο έδωσε άλλη απάντηση από τις δύο που αναφέρθηκαν (Εικόνα 6).

Ομοίως, ρωτήθηκαν οι φοιτητές και φοιτήτριες για το δεύτερο φύλλο εργασίας. Η κατασκευή του μαθηματικού προβλήματος που ζητήθηκε, δυσκόλεψε τους 60 από τους 92 (57%) και η επίλυση του τους 43 (41%), (Εικόνα 7). Παρατηρείται η ύπαρξη μιας μερίδας των ερωτηθέντων που δυσκολεύτηκαν τόσο στην επίλυση όσο και στην κατασκευή του μαθηματικού προβλήματος. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με διαγράμματα στις Εικόνες 7 και 8.



Εικόνα 7. Μορφές δυσκολίας 1ου φύλλου εργασίας

Αντίστοιχα και για το δεύτερο φύλλο:



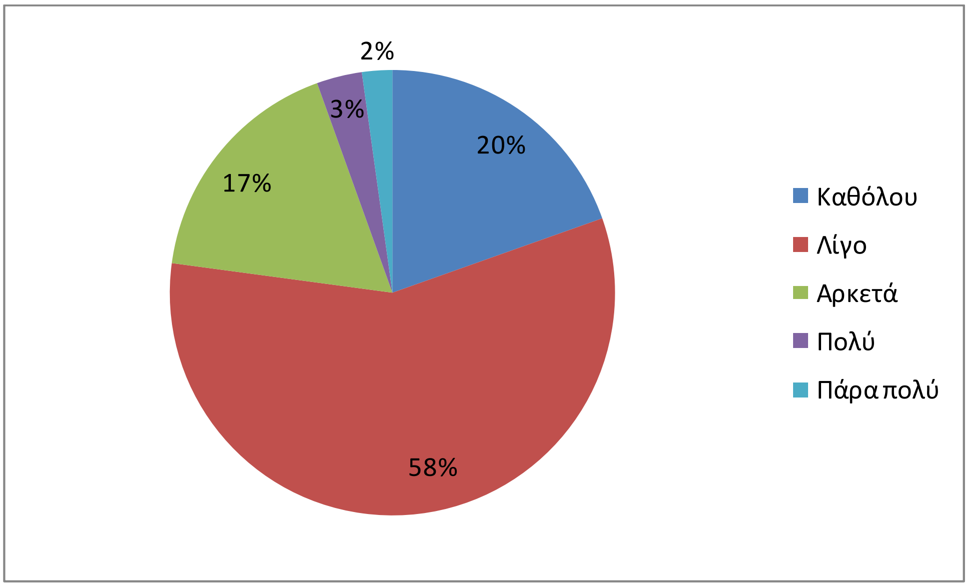
Εικόνα 8. Μορφές δυσκολίας 2ου φύλλου εργασίας

Τέλος σε ερώτηση σε ποιο από τα δύο φύλλα χρειάστηκε να ανακαλέσουν στη μνήμη τους ήδη γνωστά μαθηματικά θεωρήματα και τύπους, με δυνατότητα να έχουν περισσότερες από μία επιλογές, οι 67 ερωτηθέντες επέλεξαν το πρώτο φύλλο και 43 το δεύτερο.

4.6 Αποτελέσματα που αφορούν τις τεχνικές κατασκευής προβλημάτων

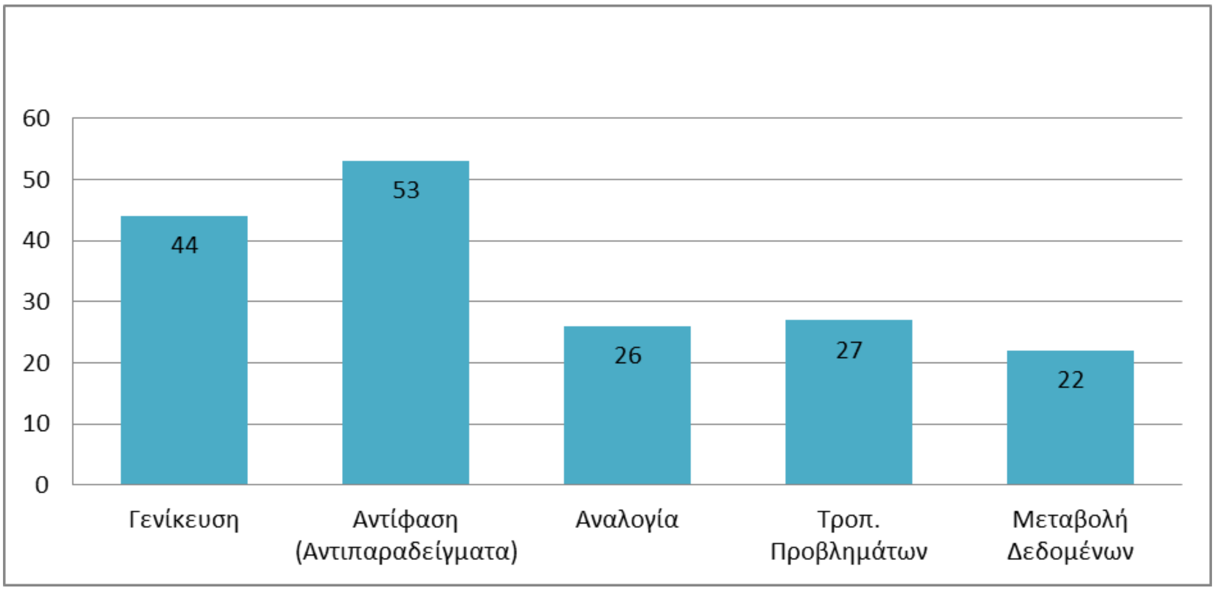
Στην πρώτη ενότητα του ερωτηματολογίου ζητείται από τους συμμετέχοντες στην έρευνα φοιτητές και φοιτήτριες, να απαντήσουν αν και ποιες από τις τεχνικές κατασκευής προβλημάτων γνωρίζουν.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το υψηλό ποσοστό των ατόμων που είτε δεν γνωρίζουν καθόλου τεχνικές κατασκευής προβλημάτων με ποσοστό να ανέρχεται στο 19,6% είτε λίγο, με ποσοστό 57,6% (53 από τους 92 ερωτηθέντες). Το ποσοστό αυτών που γνωρίζουν αρκετά τεχνικές κατασκευής φτάνει το 17,4%, ενώ πολύ μικρά ποσοστά σημειώνονται σε αυτούς που γνωρίζουν πολύ (3,3%) ή πάρα πολύ (2,2%) τεχνικές κατασκευής προβλημάτων.



Εικόνα 9. Γνώση τεχνικών κατασκευής προβλημάτων

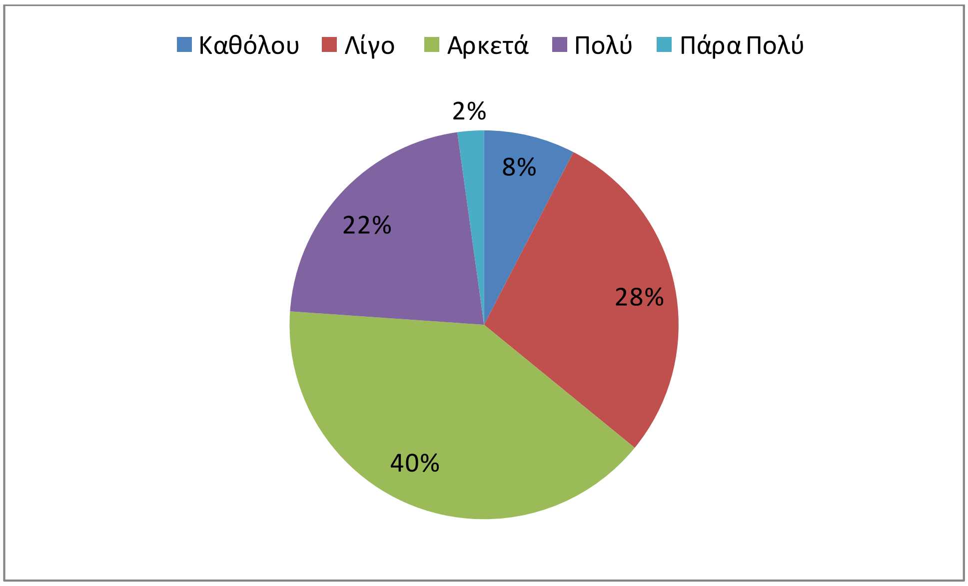
Η πιο γνωστή τεχνική κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων είναι η τεχνική της Αντίφασης (Αντιπαραδείγματα) με 53 απαντήσεις (30%) και ακολουθεί η τεχνική της Γενίκευσης με 44 απαντήσεις (25%).



Εικόνα 10. Τεχνικές κατασκευής προβλημάτων

Μολονότι το ποσοστό των ατόμων που χρησιμοποιεί πάρα πολύ συχνά και τις δύο αυτές τεχνικές αγγίζει μόλις το 2,2%, την τεχνική των Αντιπαραδειγμάτων χρησιμοποιεί πολύ συχνά το 20,7% ενώ της Γενίκευσης το 6,5%. Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι κανένας από τους 92 ερωτηθέντες δεν δήλωσε να χρησιμοποιεί πάρα πολύ την τεχνική της αναλογίας και μόλις το 5,4% την χρησιμοποιεί πολύ. Τις τεχνικές της τροποποίησης και της μεταβολής δεδομένων δεν τις χρησιμοποιεί καθόλου το 34,8% και το 38% των ερωτηθέντων αντίστοιχα.

Σε ερώτηση που αφορά το πόσο ενδιαφέρουσα είναι η μελέτη και η ανεύρεση πληροφοριών γύρω από τις τεχνικές κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων το 64,1% των φοιτητών –φοιτητριών απάντησε αρκετά, πολύ και πάρα πολύ. Τα ποσοστά αναλυτικά φαίνονται στην Εικόνα 11 παρακάτω.

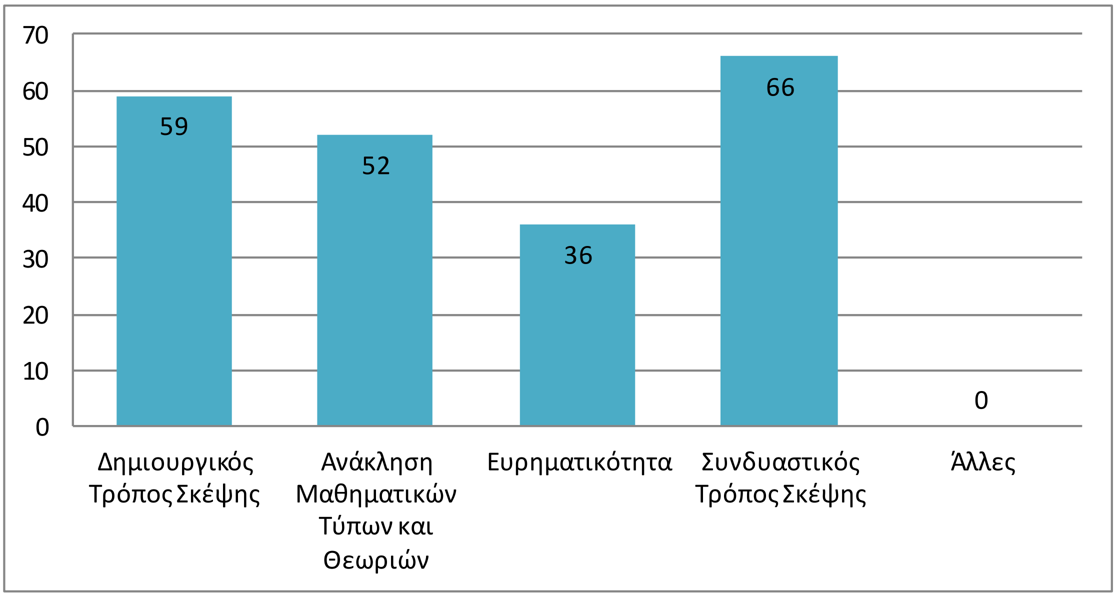


Εικόνα 11. Βαθμός ενδιαφέροντος ανεύρεσης πληροφοριών μέσω τεχνικών κατασκευής

Τέλος το 60,9% θεωρεί ότι χρειάζεται αρκετά συχνά να γίνονται επιλεγμένες προϋποθέσεις κατά τη διαδικασία κατασκευής μαθηματικών προβλήματων, σε αντίθεση με το 15,2% που θεωρεί ότι δεν χρειάζεται καθόλου.

4.7 Η συμβολή των δεξιοτήτων στην κατασκευή προβλημάτων – Αποτελέσματα

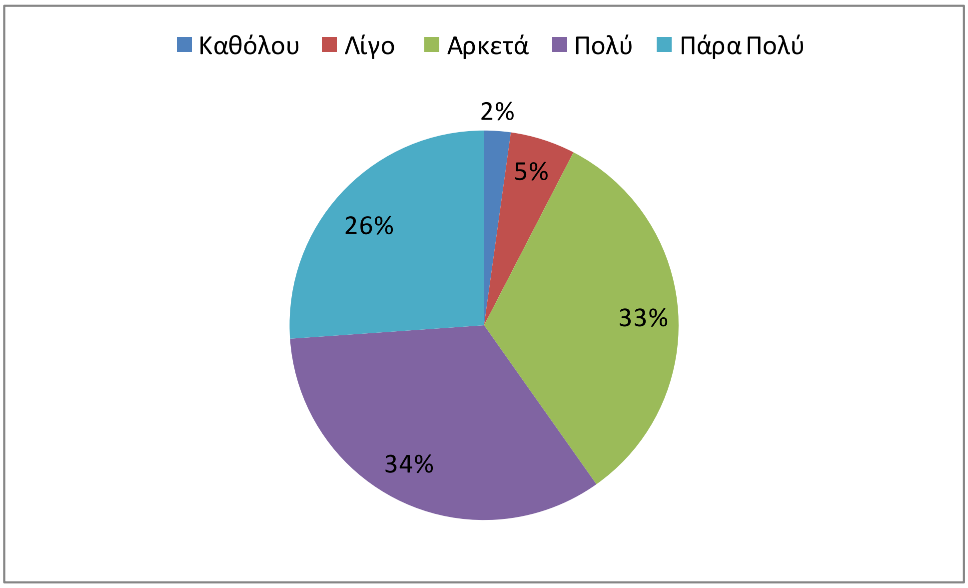
Στην δεύτερη ενότητα του ερωτηματολογίου, ζητείται η γνώμη των συμμετεχόντων στην έρευνα, για τη συμβολή των δεξιοτήτων στην ευκολότερη κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Από τους 92 συμμετέχοντες στην έρευνα, οι 66 θεωρούν πως ο συνδυαστικός τρόπος σκέψης συμβάλλει θετικά στην κατασκευή προβλημάτων. Ακολουθούν με 59 απαντήσεις ο δημιουργικός τρόπος σκέψης (28%), η ανάκληση μαθηματικών τύπων και θεωριών με 52 (24%) και τέλος η ευρηματικότητα με 36 απαντήσεις.



Εικόνα 12. Συμβολή δεξιοτήτων στην κατασκευή προβλημάτων

Στις ερωτήσεις που αφορούν σε ποιο βαθμό συμβάλλει κάθε μία από τις δεξιότητες στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων στην απάντηση πάρα πολύ συγκεντρώθηκαν τα παρακάτω ποσοστά. Το 10,9% των ερωτηθέντων πιστεύει ότι ο δημιουργικός τρόπος σκέψης και η ανάκληση ήδη γνωστών τύπων και μαθηματικών θεωριών συμβάλλουν πάρα πολύ στην κατασκευή προβλημάτων. Η ευρηματικότητα συγκέντρωσε το ποσοστό 7,6% στην επιλογή πάρα πολύ, ενώ το υψηλότερο ποσοστό 29,3% στην ίδια επιλογή, εμφανίζεται στον συνδυαστικό τρόπο σκέψης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλούν τα αποτελέσματα στην ερώτηση για το εάν οι φοιτητές-φοιτήτριες θεωρούν ότι η εξάσκηση στην κατασκευή προβλημάτων βοηθάει στην καλλιέργεια της ευκολότερης κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας. Παρατηρείται ότι μόλις το 2,2% θεωρεί ότι η κατασκευή προβλημάτων δεν συμβάλει στην ευκολότερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, ενώ το 5,4% ότι βοηθάει ελάχιστα.



Εικόνα 13. Η συμβολή της κατασκευής προβλημάτων στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών

4.8 Επαγωγική Ανάλυση της Έρευνας

Ακολουθεί περαιτέρω ανάλυση σχετικά με τους φοιτητές- φοιτήτριες που συμμετείχαν στην έρευνα και τις επιδόσεις τους στα δύο φύλλα εργασίας. Ουσιαστικά έχουν γίνει ενέργειες για την εξαγωγή, όσο το δυνατό, ασφαλέστερων συμπερασμάτων μπορούμε να αποκομίσουμε από την έρευνα. Γίνεται λοιπόν μία προσπάθεια συσχέτισης της επίδοσης στα φύλλα εργασίας με το φύλο του ατόμου και την ηλικία του. Επίσης έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζει η βαθμολογία των ερωτηθέντων στις γραπτές εξετάσεις των μαθηματικών, σε πανελλήνιο επίπεδο και των επιδόσεών τους στα φύλλα εργασίας της έρευνας. Τέλος γίνεται μία σύγκριση που αφορά την κατασκευή των μαθηματικών προβλημάτων σε σχέση με την επίλυση αυτών που έχουν δοθεί στα δύο φύλλα αλλά και πως διαφοροποιείται η ικανότητα κατασκευής προβλημάτων βάσει των μαθηματικών τους δεξιοτήτων.

Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν τα μη παραμετρικά τεστ Mann – Whitney (λόγω της ύπαρξης δύο κατηγοριών) και Kruskal – Wallis (λόγω της ύπαρξης περισσοτέρων από δύο κατηγοριών). Στο Παράρτημα Β παρουσιάζονται αναλυτικά όλοι οι πίνακες που προέκυψαν από το στατιστικό πρόγραμμα SPSS.

4.8.1. Συσχέτιση των επιδόσεων των φύλλων εργασίας με φύλο και ηλικία

Αρχικά γίνεται συσχέτιση του φύλου του ατόμου σε σχέση με τις επιδόσεις που σημείωσε στην επίλυση των προβλημάτων στα δύο φύλλα εργασίας ξεχωριστά. Σε δεύτερη φάση γίνεται μελέτη με στόχο να συσχετιστούν η ηλικία με την επίδοσή τους σε κάθε ένα από τα φύλλα εργασίας αντίστοιχα.

Τα δεδομένα μας αποτελούνται από κατηγορικές μεταβλητές γι' αυτό εφαρμόστηκε και στα δυο μέρη το μη παραμετρικό τεστ Mann - Whitney. Η ενέργεια αυτή πραγματοποιείται για να ελέγξουμε αν τα δεδομένα μας διαφοροποιούνται ή όχι υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η μηδενική έναντι της εναλλακτικής. Τα αποτελέσματα στην κάθε μια περίπτωση είναι ένας πίνακας διπλής εισόδου.

Συγκεκριμένα, αν p-value < 0.05 τότε υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης (Ho), δηλαδή υπάρχει σημαντική στατιστική διαφορά, έναντι της εναλλακτικής (H1) όπου τα δεδομένα μας δεν διαφέρουν στατιστικώς σημαντικά μεταξύ τους.

Το φύλο των ερωτηθέντων ($\bar{x} = 1.44,\ sd = 0.49$) δεν διαφοροποιείται από την επίδοση των ατόμων στο πρώτο φύλλο εργασίας ($\bar{x} = 3.8,\ sd = 3.6$) καθώς η τιμή του p-value είναι μεγαλύτερη από 0.05 και συγκεκριμένα, 0.421. Άρα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για απόρριψη της εναλλακτικής υπόθεσης και αποδοχή της μηδενικής, δηλαδή την μη διαφοροποίηση των μεταβλητών.

Το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο φύλλο εργασίας ($\bar{x} = 4.4,\ sd = 4.1$) σε σχέση με το φύλο των φοιτητών και φοιτητριών ($\bar{x} = 1.44,\ sd = 0.49$). Οι δυο μεταβλητές είναι μη διαφοροποιήσιμες διότι το p-value είναι 0.987 άρα υπερβαίνει της τιμής 0.05. Άρα αποδεχόμαστε την Ho και δεχόμαστε τη μη διαφοροποίηση μεταξύ των μεταβλητών.

Στο δεύτερο μέρος αυτής της διεργασίας γίνεται η εξέταση την διαφοροποίησης ή μη των μεταβλητών ανάμεσα στην ηλικία των ατόμων και των επιδόσεων τους στα δύο φύλλα εργασίας.

Εφαρμόζουμε το μη παραμετρικό τεστ Kruskal- Wallis καθώς τα δεδομένα είναι ποιοτικά και υπάρχουν παραπάνω από δυο κατηγορίες.

Ακολουθεί και η εκτέλεση του μη παραμετρικού τεστ για τις μεταβλητές της ηλικίας των ατόμων και την επίδοση των δυο φύλλων εργασίας αντίστοιχα.

Η ηλικία των ερωτηθέντων ($\bar{x} = 1.55,\ sd = 0.95$) δεν διαφοροποιείται με την επίδοση των ατόμων στο πρώτο φύλλο εργασίας ($\bar{x} = 3.8,\ sd = 3.6$) καθώς το p-value είναι

0.680> 0.05. Άρα υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης (Ho) και θεωρούμε ότι οι μεταβλητές είναι μη διαφοροποιήσιμες μεταξύ τους.

Τέλος, παρουσιάζονται οι μεταβλητές για το δεύτερο φύλλο εργασίας ($\bar{x} = 4.4$, $sd = 4.1$) σε σχέση με την ηλικία ($\bar{x} = 1.55$, $sd = 0.95$). Οι μεταβλητές και σε αυτή την περίπτωση είναι μη διαφοροποιήσιμες μεταξύ τους καθώς το p-value είναι 0.896> 0.05. Άρα υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι οι μεταβλητές δεν διαφοροποιούνται μεταξύ τους όποτε αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση έναντι της εναλλακτικής.

4.8.2. Συσχέτιση επίδοσης στα φύλλα εργασίας με τη βαθμολογία σε πανελλήνιο επίπεδο

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα, μετά την ολοκλήρωση των δύο φύλλων εργασίας, κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερώτηση του ερωτηματολογίου ποια ήταν η βαθμολογία τους σε πανελλήνιο επίπεδο, στο μάθημα των μαθηματικών. Καθώς γίνεται προσπάθεια για την καλύτερη κατανόηση του δείγματος και την σωστή αξιολόγηση των δεδομένων, θα εφαρμοστεί παρακάτω ο έλεγχος κανονικότητας για να ελεγχθεί αν το δείγμα μας ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Έπειτα από την εφαρμογή του, δίνεται ότι τα p-value στα δυο τεστ κανονικότητας Kolmogorov- Smirnov και Shapiro-Wilk είναι μικρότερα από το 0.05, συμπερασματικά οι μεταβλητές των δυο φύλλων εργασίας και η βαθμολογία των ατόμων σε πανελλήνιο επίπεδο ως προς τις ηλικίες των ερωτηθέντων ακολουθούν μη κανονική κατανομή.

Σε αυτή την περίπτωση θα εφαρμοστεί ο μη παραμετρικός συντελεστής συσχέτισης ρ του Spearman.

Για την εφαρμογή του συντελεστή συσχέτισης ρ του Spearman, θεωρείται ότι ισχύει η υπόθεση της μη-κανονικότητας των δεδομένων. Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman λαμβάνει τιμές μέσα από το διάστημα [-1, 1]. Όταν ο συντελεστής ρ είναι -1 υπάρχει αρνητική συσχέτιση των δεδομένων, ενώ όταν ο ρ να είναι 1 υπάρχει θετική συσχέτιση των δεδομένων. Τέλος όταν ο ρ είναι 0 τότε δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δυο μεταβλητών και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνας των μεταβλητών αυτών είναι τα εξής: Ύπαρξη αρνητικής συσχέτισης μεταξύ της βαθμολογίας σε πανελλήνιο επίπεδο με τα δυο φύλλα εργασίας, καθώς οι τιμές είναι -0.035 και -0.105 αντίστοιχα και ύπαρξη θετικής συσχέτισης μεταξύ των δυο φύλλων εργασίας με τιμή 0.071.

4.8.3. Συσχέτιση της κατασκευής με την επίλυση των προβλημάτων

Στα πλαίσια της διερεύνησης, έγινε επεξεργασία των δεδομένων, για τον εντοπισμό της συσχέτισης ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, όπως έχουν δοθεί στα δύο φύλλα εργασίας.

Πριν την έναρξη του ελέγχου για την συσχέτιση των δυο μεταβλητών, πρέπει πρώτα να ελεγχθεί αν οι μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή. Πραγματοποιήθηκε έλεγχος κανονικότητας και τα p-value για τα δυο τεστ Kolmogorov- Smirnov και Shapiro-Wilk είναι μικρότερα από το 0.05. Άρα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης και το αποτέλεσμα είναι στατιστικά σημαντικό, δηλαδή ότι οι δυο μεταβλητές μας δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Στη συνέχεια, γίνεται η εφαρμογή του μη παραμετρικού συντελεστή συσχέτισης Spearman για να βρεθεί η συσχέτιση των δυο μεταβλητών. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0.307 δηλαδή υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στην κατασκευή ενός νέου μαθηματικού προβλήματος και την επίλυση του προβλήματος που έχει δοθεί στο πρώτο φύλλο εργασίας.

Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα και για το δεύτερο φύλλο εργασίας. Στον έλεγχο για την κανονικότητα βρέθηκε ότι οι δύο μεταβλητές δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή οπότε θα εφαρμοστεί ο μη παραμετρικός συντελεστής συσχέτισης Spearman.

Ο συντελεστής συσχέτισης Spearman είναι 0.047 οπότε υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στην επίλυση του δοθέντος προβλήματος στο δεύτερο φύλλο και στην ικανότητα κατασκευής νέου προβλήματος που ζητήθηκε σε δεύτερη φάση.

4.8.4. Συσχέτιση δεξιοτήτων, ηλικίας και φύλου με την ικανότητα κατασκευής προβλημάτων

Παρακάτω, παρουσιάζεται η διαφοροποίηση στην ικανότητα των ερωτηθέντων να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με τις μαθηματικές δεξιότητες που πιστεύουν ότι συμβάλλουν ώστε να επιτευχθεί η ευκολότερη κατασκευή.

Όπως προαναφέρθηκε, αρχικά θα πραγματοποιηθεί ο έλεγχος της κανονικότητας. Δίνεται ότι οι δυο μεταβλητές δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή οπότε συνεχίζεται η έρευνα με το μη παραμετρικό έλεγχο Kruskal- Wallis.

Στον πίνακα που προκύπτει για τις δυο μεταβλητές, το p-value είναι 0.295> 0.05, οπότε υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση και άρα δεν υπάρχει στατιστική σημαντικότητα, συνεπώς δεν υπάρχει κάποια διαφοροποίηση ανάμεσα στην ικανότητα των φοιτητών και φοιτητριών να κατασκευάσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα με τις μαθηματικές τους δεξιότητες (Kruskal-WallisH= 4.922, df= 4).

Στην συνέχεια, εξετάζεται η διαφοροποίηση στην ικανότητα των φοιτητών και φοιτητριών κατασκευής προβλημάτων με την δημιουργικότητα των ερωτηθέντων.

Δεν υπάρχει διαφοροποίηση στις δύο μεταβλητές, δηλαδή δεν υπάρχει στατιστική σημαντικότητα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης καθώς το p- value είναι 0,907 δηλαδή παίρνει τιμή μεγαλύτερη του 0.05. Άρα δεν υπάρχει διαφοροποίηση στην ικανότητα των ερωτηθέντων να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα με τον δημιουργικό τρόπο σκέψης τους (Kruskal-WallisH= 1.016, df= 4).

Παρόμοια, εξετάζεται η διαφοροποίηση στην ικανότητα των φοιτητών και φοιτητριών που αφορά την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων με την ευρηματικότητα των ατόμων.

Δεν υπάρχει διαφοροποίηση στις δύο μεταβλητές, δηλαδή δεν υπάρχει στατιστική σημαντικότητα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης καθώς το p-value είναι 0.251 και πάλι ξεπερνάει την τιμή 0.05. Άρα δεν υπάρχει διαφοροποίηση στην ευρηματικότητα των ατόμων με την ικανότητα τους στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (Kruskal-WallisH= 5.371, df= 4).

Η διαδικασία συνεχίζεται για την εξέταση της διαφοροποίησης που αφορά, την ικανοτήτων των ερωτηθέντων στην κατασκευή των μαθηματικών προβλημάτων με τον συνδυαστικό τρόπο σκέψης.

Δεν υπάρχει διαφοροποίηση στις δύο μεταβλητές, δηλαδή δεν υπάρχει στατιστική σημαντικότητα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης καθώς το p-value είναι 0.626>0.05. Άρα δεν υπάρχει διαφοροποίηση στον συνδυαστικό τρόπο σκέψης των ατόμων με την ικανότητα τους στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (Kruskal-WallisH= 2.604, df= 4).

Όμοια, ακολουθεί η εξέταση της διαφοροποίησης που αφορά την ικανοτήτων των ερωτηθέντων στην κατασκευή των μαθηματικών προβλημάτων σε σχέση με το φύλο τους.

Δεν υπάρχει διαφοροποίηση στις δύο μεταβλητές, δηλαδή δεν υπάρχει στατιστική σημαντικότητα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης καθώς το p-value είναι 0.901 και κατά πολύ μεγαλύτερο από 0.05. Συνεπώς, δεν υπάρχει διαφοροποίηση στην ικανότητα των φοιτητών και φοιτητριών στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων με το φύλο των ατόμων (Kruskal-WallisH= 0.015, df= 1).

Τέλος, η εξέταση στην διαφοροποίηση των ατόμων που αφορά την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων με την ηλικία των φοιτητών και φοιτητριών παρουσιάζεται παρακάτω.

Δεν υπάρχει διαφοροποίηση στις δυο μεταβλητές, δηλαδή δεν υπάρχει στατιστική σημαντικότητα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης καθώς το p-value είναι 0.346 >0.05. Άρα δεν υπάρχει διαφοροποίηση στην ηλικία των ατόμων με την ικανότητα τους στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (Kruskal-WallisH= 2.121, df= 2).

5. Συζήτηση

Διεξάγοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, επιδίωξη ήταν να διερευνηθεί ο βαθμός ικανότητας κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων των φοιτητών και φοιτητριών διαφόρων τμημάτων Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Πιο συγκεκριμένα, αντικείμενο μελέτης αποτέλεσαν οι μέθοδοι κατασκευής προβλημάτων που οι φοιτητές και οι φοιτήτριες αξιοποιούν, ο συσχετισμός επίλυσης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων και τα χαρακτηριστικά που επιδρούν στην ικανότητά τους για να κατασκευάσουν ένα νέο πρόβλημα. Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν δίνουν απαντήσεις στα ερωτήματα της έρευνας. Μέσω των ερωτηματολογίων και των φύλλων εργασίας που διανεμήθηκαν συγκεντρώθηκε ένας σημαντικός αριθμός απαντήσεων προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα και να παρουσιαστούν τα ευρήματα.

Τα ευρήματα αυτά συγκλίνουν σε αρκετά μεγάλο βαθμό, με αντίστοιχα ευρήματα άλλων συναδέλφων αλλά και ερευνητών. Χαρακτηριστική είναι η θετική σχέση που εντοπίστηκε στην εργασία αυτή, ανάμεσα στην επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων. Η ίδια σχέση εντοπίστηκε σε έρευνα των Silver και Cai (1993). Όμως τα ευρήματα αυτά αποκλίνουν με τα ευρήματα της έρευνας των Μαμωνά και Silver (1996) που δεν επιβεβαιώνουν τη σχέση αυτή. Επιπλέον τα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής συγκλίνουν με αυτά της έρευνας της Μαμωνά (2015) σε ομάδα φοιτητών αφού και στις δύο περιπτώσεις οι συμμετέχοντες στις δύο έρευνες άντλησαν πληροφορίες και δεδομένα από το οικείο μαθησιακό τους περιβάλλον προκειμένου να τα χρησιμοποιήσουν στην κατασκευή νέων προβλημάτων. Τέλος, η μη διαφοροποίηση ανάμεσα στις δεξιότητες που πιστεύεται ότι συμβάλλουν θετικά και στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων, αποτελεί το σημείο στο οποίο συγκλίνει η έρευνα αυτή με την έρευνα της Leung (1993), όπου δεν εντοπίστηκε σχέση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της κατασκευής προβλημάτων, αλλά σχέση μεταξύ της μαθηματικής γνώσης και της ποιότητας των νέων προβλημάτων.

Από τη μία πλευρά μπορεί τα ευρήματα της παρούσας εργασίας να βοήθησαν στο να μελετηθούν οι παράμετροι των προβλημάτων που τέθηκαν, όμως παρατηρείται ότι υπάρχει έλλειψη πρωτοτυπίας καθώς πολλές απαντήσεις που αφορούν την κατασκευή νέων προβλημάτων επαναλαμβάνονται, ενώ παρατηρείται και η αδυναμία διατύπωσης ολοκληρωμένων απαντήσεων στα φύλλα εργασίας που διανεμήθηκαν. Περαιτέρω πιθανές ερμηνείες γύρω από τα ευρήματα της έρευνας αφορούν τη δυσκολία των προβλημάτων που τέθηκαν σε σχέση με το γνωστικό επίπεδο των συμμετεχόντων στην έρευνα, καθώς και το βαθμό αφομοίωσης των μαθηματικών εννοιών που έχουν διδαχθεί οι ερωτηθέντες.

Όπως σε κάθε μελέτη έτσι και στη συγκεκριμένη υπήρξαν ορισμένοι περιορισμοί οι οποίοι πιθανώς να επηρέασαν τα ευρήματα και αφορούν κυρίως το κοινό στο οποίο απευθύνονταν η έρευνα. Ειδικότερα, το κοινό περιελάμβανε μόνο φοιτητές και φοιτήτριες διαφόρων σχολών της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, με τους οποίους υπήρξε αδυναμία διαπροσωπικής επαφής λόγω των ιδιαίτερων υγειονομικών συνθηκών που επικρατούσαν κατά την περίοδο που πραγματοποιούνταν η έρευνα για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας. Εξαιτίας της πανδημίας (Covid-19), υπήρχαν αρκετές απουσίες από τις παραδόσεις μαθημάτων και δεν επιτρεπόταν η είσοδός της ερευνήτριας στα τμήματα των σχολών.

Επιπρόσθετα, ένας παράγοντας που μπορεί να επηρέασε τα ευρήματα, αφορά το είδος των προβλημάτων που τέθηκαν αρχικά προς επίλυση και μετέπειτα προς κατασκευή νέου, αφού για ένα μέρος του κοινού μπορεί να ήταν προσιτά και να παρουσίαζαν ενδιαφέρον, ενώ για ένα άλλο μέρος του κοινού να ίσχυε το αντίθετο. Τέλος, ένας παράγοντας που θα μπορούσε να καταστήσει άκυρα τα ευρήματα αφορά το βαθμό ειλικρίνειας με τον οποίο απάντησαν οι συμμετέχοντες, κάτι όμως το οποίο δεν μπορεί να ελεχθεί από την ερευνήτρια.

Παρόλα αυτά, κατά τη διαδικασία ερμηνείας των αποτελεσμάτων δεν αποκαλύφθηκε κάποιο πιθανό ελάττωμα που θα μπορούσε να οδηγήσει σε λανθασμένες ερμηνείες. Για το λόγο αυτό, οι ερμηνείες που προκύπτουν μέσα από τη συγκεκριμένη έρευνα, μπορούν να συμβάλλουν σε μία νέα, πιο ολιστική κατανόηση του θέματος της έρευνάς αυτής. Αναλυτικότερα, καθίσταται σαφής η ανάγκη για καλύτερη αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών από την πλευρά των μαθητών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης και η ανάγκη ένταξης της διδασκαλίας κατασκευής προβλημάτων στα προγράμματα σπουδών. Έτσι η παρούσα διπλωματική εργασία θα μπορούσε να αποτελέσει μία πρώτη βάση, αρχικά για τον εντοπισμό των αδυναμιών που αφορούν τη διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και την ανακάλυψη μεθόδων που θα μετατρέψουν τη διδασκαλία της κατασκευής προβλημάτων σε μία εύκολη και ενδιαφέρουσα διαδικασία για όλους τους διδασκόμενους.

Ο ικανοποιητικός αριθμός των απαντήσεων που συγκεντρώθηκαν κατά τη διεξαγωγή της έρευνας την καθιστά έγκυρη για τη γενίκευση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν, αφού και το ερωτηματολόγιο και τα φύλλα εργασίας ενισχύουν την αξιοπιστία της ποσοτικής έρευνας που έχει πραγματοποιηθεί. Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας θα μπορούσαν να μελετηθούν και από άλλους συναδέλφους και να αξιοποιηθούν με απώτερο στόχο να εφαρμοστούν σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης ακόμη και σε άτομα με ιδιαίτερες εκπαιδευτικές ανάγκες, πάντα βέβαια με τη σωστή καθοδήγηση των ειδικών, αλλά και σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς που θα εξασκηθούν κατάλληλα για την εφαρμογή τους στην διαδικασία της διδασκαλίας.

Μελετώντας τα ευρήματα της έρευνας καθίσταται σαφής η ανάγκη για μία ριζική αναπροσαρμογή του τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών. Καταδεικνύεται η ανεπάρκεια των φοιτητών-φοιτητριών τόσο στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, όσο και στην κατασκευή νέων. Άρα η πιθανή εφαρμογή των ευρημάτων της παρούσας έρευνας μπορεί να υλοποιηθεί μόνο μέσα από μία νέα προσέγγιση των μαθηματικών στις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Συνεπώς, οι επιπτώσεις κρίνεται ότι θα είναι θετικές καθώς θα δημιουργηθούν νέες βάσεις προκειμένου διδάσκοντες και διδασκόμενοι να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις με νέους και πιο εποικοδομητικούς τρόπους.

Μία περαιτέρω έρευνα που θα μπορούσε να γίνει σαν συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είτε από την ίδια την ερευνήτρια είτε από άλλους συναδέλφους, αφορά τις τεχνικές κατασκευής προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στις απαντήσεις των φοιτητών και των φοιτητριών στα δύο φύλλα εργασίας. Μία τέτοια έρευνα, με έναν πιο ευρύ και αναλυτικό χαρακτήρα, θα παρουσίαζε μεγάλο ενδιαφέρον αφού θα γινόταν μια μελέτη των τεχνικών που είναι γνωστές στους συμμετέχοντες, θα εξετάζονταν ο βαθμός εφαρμογής τους στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων και θα διερευνόνταν ταυτόχρονα οι λόγοι για τους οποίους ορισμένοι φοιτητές και φοιτήτριες παρουσίασαν ολική ανικανότητα απάντησης στα φύλλα εργασίας. Έτσι θα εντοπιστούν και οι αιτίες που έχουν ως αποτέλεσμα τόσο την έλλειψη πρωτοτυπίας στις απαντήσεις που δόθηκαν όσο και οι αιτίες των κενών φύλλων εργασίας.

6. Συμπεράσματα

Η μελέτη της ικανότητας κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων από φοιτητές και φοιτήτριες διαφόρων τμημάτων της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ήταν ο στόχος της παρούσας έρευνας. Η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων συμβάλλει στην πλήρη κατανόηση μαθηματικών τύπων και θεωριών και αποτελεί το μέσο που οδηγεί επιτυχώς στην επίλυσή τους.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί στην έρευνα αυτή, η αδυναμία μεγάλου μέρους των συμμετεχόντων να απαντήσουν ολοκληρωμένα και στα δύο ερωτήματα των φύλλων εργασίας παρόλο που το 65% ανήκει στην ηλικιακή ομάδα 18-22, δηλαδή αφορά άτομα τα οποία εισήχθησαν στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση αμέσως μετά την αποφοίτησή τους από τη Δευτεροβάθμια, το οποίο συνεπάγεται τη συνεχόμενη επαφή τους με τη μαθηματική επιστήμη. Ως αποτέλεσμα λοιπόν, είναι οι χαμηλές επιδόσεις που σημειώθηκαν αφού πολλοί από τους ερωτηθέντες δεν κατάφεραν να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα που τους δόθηκε αλλά ούτε να κατασκευάσουν ένα δικό τους. Αυτές οι χαμηλές επιδόσεις, οι οποίες δεν παρουσιάζουν μεγάλη διαφορά ή διακύμανση ανάμεσα στα δύο φύλλα εργασίας, είναι που γεννούν εύλογα ερωτήματα για το μαθηματικό γνωστικό επίπεδο των συμμετεχόντων στην έρευνα.

Σε κανένα από τα δύο φύλλα εργασίας το ποσοστό αυτών που έλυσαν ορθά τα δοθέντα προβλήματα δεν ανέρχεται πάνω από το 50%. Επειδή όμως δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία σε σχέση με το γνωστικό τους υπόβαθρο, έγινε μία προσπάθεια συσχέτισης των επιδόσεων τους στα φύλλα εργασίας με τη βαθμολογία που είχαν πετύχει στο μάθημα των μαθηματικών σε πανελλήνιο επίπεδο που ήταν οριακά αρνητική.

Επίσης, από την έρευνα προκύπτει ότι οι επιδόσεις των φοιτητών και φοιτητριών στα φύλλα εργασίας, όσο αφορά την επίλυση των προβλημάτων, δεν διαφοροποιούνται σε σχέση με το φύλο του ατόμου ή με την ηλικία του.

Η κατασκευή προβλημάτων ως διαδικασία φαίνεται να δυσκολεύει το δείγμα περισσότερο από την επίλυσή του, γεγονός που αποδεικνύει τη μη εξοικείωση του κοινού με αυτή, αφού δεν συμπεριλαμβάνεται στα προγράμματα σπουδών της Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Ωστόσο, στην ερώτηση που αφορά τη δυσκολία κατασκευής προβλημάτων το 43% των ερωτηθέντων απάντησαν ότι δυσκολεύονται λίγο έως καθόλου. Το εύρημα αυτό καταδεικνύει μία αντίφαση, καθώς σε θεωρητικό επίπεδο δεν θεωρούν τη διαδικασία απαιτητική ή δύσκολη αλλά σε πρακτικό επίπεδο αδυνατούν να αντεπεξέλθουν ικανοποιητικά και να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις.

Επιπρόσθετα, η πλειοψηφία των φοιτητών και φοιτητριών που κατασκεύασαν ορθά μαθηματικά προβλήματα στην έρευνα αυτή και τα οποία ήταν επιλύσιμα, δεν πρωτοτύπησαν στις διατυπώσεις τους. Οι απαντήσεις τους δεν παρέκκλιναν από το γνωστό τους περιβάλλον αφού παρατηρούνται παρόμοιες διατυπώσεις στις απαντήσεις των 92 φοιτητών και φοιτητριών. Οι διατυπώσεις αυτές είναι κυρίως βασισμένες σε προβλήματα που συναντώνται σε βιβλία μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, γεγονός που δικαιολογεί το μεγαλύτερο ποσοστό των ορθών κατασκευών στο πρώτο φύλλο εργασίας, που αφορά τη μονοτονία και τα ακρότατα δοθείσας συνάρτησης. Οι μαθηματικές αυτές έννοιες διδάσκονται για πρώτη φορά στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ οι μήτρες που εξετάζονται στο δεύτερο φύλλο αποτελούν μέρος της ύλης των πρώτων εξαμήνων της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, με αποτέλεσμα οι φοιτητές και φοιτήτριες να είναι λιγότερο εξοικειωμένοι με αυτές.

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονίσουμε ότι τη χρονική περίοδο που διεξήχθει η έρευνα (Φεβρουάριος 2022), απευθύνθηκε σε φοιτητές και φοιτήτριες οι οποίοι εδώ και δύο χρόνια παρακολουθούσαν τα μαθήματα των εξαμήνων τους διαδικτυακά, λόγω της πανδημίας. Το γεγονός αυτό καθιστά τη διδασκαλία αλλά και την αφομοίωση των πληροφοριών δυσκολότερη. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι επηρέασε την ποιότητα των δοθέντων απαντήσεων στα φύλλα εργασίας.

Σε συνέχεια της έρευνας φαίνεται ότι η ικανότητα κατασκευής προβλημάτων δεν διαφοροποιείται σε σχέση με τις δεξιότητες του ατόμου που πιστεύεται ότι συμβάλλουν στο να κάνουν ευκολότερη τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι ένα άτομο για παράδειγμα, με αυξημένη δημιουργικότητα, δεν είναι ικανότερο να κατασκευάζει ποιοτικότερα μαθηματικά προβλήματα. Παρόλα αυτά στην ερώτηση σχετικά με τις δεξιότητες που απαιτούνται το μεγαλύτερο ποσοστό των ερωτηθέντων πιστεύει ότι θα έπρεπε να διαθέτει έναν περισσότερο συνδυαστικό τρόπο σκέψης.

Ακόμη, δεν παρατηρείται καμία διαφοροποίηση στην ικανότητα του ατόμου να κατασκευάζει μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με το φύλο ή την ηλικία του.

Παρόλα αυτά εντοπίζεται μία θετική συσχέτιση και στα δύο φύλλα εργασίας ανάμεσα στην επίλυση των προβλημάτων που κλήθηκαν να απαντήσουν οι φοιτητές και φοιτήτριες και στη δημιουργία των νέων που τους ζητήθηκε. Πιθανώς, η ερμηνεία του αποτελέσματος αυτού, να είναι ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνα που ολοκλήρωσαν τη διαδικασία της επίλυσης με επιτυχία είχαν κατανοήσει πλήρως τις μαθηματικές έννοιες και ήταν ικανοί να δημιουργήσουν νέα προβλήματα.

Τέλος, εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι ένα υψηλό ποσοστό των ερωτηθέντων δεν γνωρίζουν τεχνικές κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Η πιο γνωστή τεχνική για τους φοιτητές είναι η τεχνική της αντίφασης (αντιπαραδειγμάτων) αλλά και πάλι ένα πολύ μικρό ποσοστό των ερωτηθέντων την χρησιμοποιεί πολύ συχνά.

Και ενώ η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων είναι σαν διαδικασία μη οικεία στους φοιτητές και φοιτήτριες, το μεγαλύτερο ποσοστό τους θεωρεί ότι η κατασκευή προβλημάτων βοηθάει το άτομο να κατανοήσει ευκολότερα μία μαθηματική έννοια. Επίσης, θεωρούν εξαιρετικά ενδιαφέρουσα τη μελέτη και την ανεύρεση πληροφοριών γύρω από τις τεχνικές κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Αυτό συνεπάγεται ότι η ενδεχόμενη ένταξη της κατασκευής προβλημάτων στη διδακτική διαδικασία θα βρει ως αποδέκτη ένα μεγάλο μέρος του κοινού των φοιτητών και των φοιτητριών, που ενδιαφέρονται να ασχοληθούν με την κατασκευή και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, όπως διαφαίνεται μέσα από την έρευνα.

Μελετώντας όλα τα παραπάνω πορίσματα της έρευνας, διαπιστώνουμε ότι ενώ τα μαθηματικά και η επιστήμη τους αποτελούν βασικό τομέα της εκπαιδευτικής διαδικασίας και αναπόσπαστο μέρος της ζωής μας, δεν έχουν καταφέρει οι περισσότεροι να εξοικειωθούν με αυτά αν και διδάσκονται στα δώδεκα χρόνια της βασικής εκπαίδευσης. Φυσικά αυτή η κρίση αποτελεί μία γενίκευση καθώς η παρούσα έρευνα απευθύνθηκε σε ένα συγκεκριμένο κοινό το οποίο όμως δεν παύει να αποτελεί μέρος της ευρύτερης κοινωνίας και να καταδεικνύει έντονα την ανάγκη για ολιστικές αλλαγές στη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπλέον, για να μπορέσει η έρευνα αυτή να βρει μια πιο πρακτική εφαρμογή είναι απαραίτητο να μελετηθούν σε βάθος τα αίτια και στη συνέχεια να εφαρμοστούν οι απαραίτητες αλλαγές. Γι’ αυτό το λόγο θεωρώ ότι η έρευνα αυτή αποτελεί μια αφορμή για την ανάδειξη του προβλήματος και μπορούν να υλοποιηθούν μελλοντικές έρευνες οι οποίες να προτείνουν πρακτικές εφαρμογές των αλλαγών. Οι αλλαγές αυτές δεν είναι απαραίτητο να απευθύνονται μόνο σε μαθητές, μαθήτριες, σε φοιτητές, φοιτήτριες ή σε διδάσκοντες αλλά να αφορούν και την ανανέωση των σχολικών εγχειριδίων, την αναδιοργάνωση και ανακατανομή της διδαχθείσας ύλης και την εισαγωγή καινοτόμων τρόπων διδασκαλίας της κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Ακόμη ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η έρευνα σχετικά με τα μαθηματικά προβλήματα με τα άτομα που χρήζουν ιδιαίτερης και ειδικότερης εκπαιδευτικής προσέγγισης, καθώς μέχρι τώρα έρευνες φανερώνουν ότι πολλά από τα άτομα αυτά εμφανίζουν εντυπωσιακές ικανότητες στο μάθημα των μαθηματικών και γι’ αυτό το λόγο αξίζει να διερευνυθεί ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά και τις ιδιαίτερες ικανότητες που τους χαρακτηρίζουν.

Βιβλιογραφία

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Abu-Elwan, R. E. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective teachers' problem solving performance. Journal of Science and Mathematics Education in S. E. Asia, 1, 56-69.

Babbie, E. (2011). Εισαγωγή στην Κοινωνική Έρευνα. Αθήνα: Εκδόσεις Κριτική

Baumanns L, Rott B (2021) The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing ,Educational Studies in Mathematics, 110, 251–269.

Brown, S., & Walter, M. I. (1983). The art of problem posing. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1990). The Art of Problem Posing (2nd ED). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1993), Problem Posing in Mathematics Education. In Stephen I. Brown & Marion I. Walter (Eds.) Problem Posing: Reflection and Applications, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 16-27.

Cai, J., Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. Journal of Mathematical Behavior (21), pp. 401-421.

Cai J, Hwang S (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future Research. International Journal of Educational Research,102,1-8.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. ZDM, 37(3), 149–158.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teacher's practices. Educational Studies in Mathematics.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. Journal of Mathematics Teacher Education, Vol 11, 395–415.

Doukakis, S., & Matzakos, N. (2013, October). Training prospective engineering educators in the use of GeoGebra for simulation construction. In *2013 12th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET)* (pp. 1-5). IEEE.

Duncker, K. (1945). On problem solving. Psychological Monographs, 58 (5, Whole No. 270). Education Department of Western Australia. (1994). Mathematics student outcomestatements with pointers and work samples. Perth: Author.

Ellerton, N. F. (1986), Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians, Educational Studies in Mathematics, 17, 261-271

Ellerton. N. F. (1988). Exploring children's perception of mathematics through letters and problems written by children. In A. Borbas (Ed.), Proceedings of the 12th International Conference for the Psyychology of Mathematics Education, Vol. 1 (pp. 97 280-287). Veszprem. Hungary: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. Educational Studies in Mathematics, 34, (No.3), pp. 183-217.

English, L. D. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. Journal for Research in Mathematics Education, 29(1), pp. 83-106.

English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. K. Lester (Ed.), Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-grade 6 (pp. 187-198). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Ernest, P. (1991). The Philosophy of Mathematics Education. London: Palmer Press

Fetterly, J. (2010). An exploratory study of the use of a problem-posing approach on pre-service elementary education teachers' mathematical creativity, beliefs, and anxiety (Electronic theses, treatises and dissertations). Florida State University, Tallahassee, FL.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel

Gonzales, N. A. (1996). Problem formulation: Insights from student generated questions. School Science and Mathematics, 96(3), 152–157.

Haylock, D. W. (1985). Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 16(4), 547-553.

Haylock, D. W. (1987), A framework for assessing mathematical creativity in school children, Educational Studies in Mathematics, 18, 59-74.

Haylock, D. W.(1997). Recognizing mathematical creativity in school children. International Reviews on Mathematical Education, 29(3), 68-74.

Ho, H., Senturk, D., Lam, A. G., Zimmer, J. M., Hong, S., Okamoto, Y., Chiu, S., Nakazawa, Y., &Wang, C. (2000) The affective and cognative dimensions of math anxiety: A cross-national study. Journal for Research in Mathematics Education, 31(3), 362-379.

Jensen, L. R. (1973). The relationships among mathematical creativity, numerical aptitude and mathematical achievement. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas, Austin.

Kilpatrick, J. (1987). Problem fonnulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education.Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kvale, S. (1996). Interviews, an introduction to qualitative research interviewing. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Krutetskii, V.A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: The University of Chicago Press.

Kontorovich, I., Koichu , B. (2012). Feeling of innovation in expert problem posing. Nordic Studies in Mathematics Education, 17(3-4), 199–211.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. Journal of Mathematical Behavior, 31, 149-161.

Lavy I, Shriki A (2007), Problem Posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 129-136.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In

R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129–145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher (Chapter 9)

Leikin, R. & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. &Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 161-168. Seoul: PME.

Leung, S. S.: (1993), The Relation of Mathematical Knowledge and Creative Thinking to the Mathematical Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers on Tasks Differing in Numerical Information Content. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. Zentralbatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), International Review on Mathematical Education, 97(2), 48-52.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal, Vol 9, 5–24.

Lowrie, T. (1999): Free problem posing: Year 3/4 students constructing problems for friends to solve. – In: J. Truran & K. Truran (Eds.), Making a difference. Panorama, South Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia, p. 328-335.

Mallart et al, Font, Diez (2017). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing ,14(4),1465-1481.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction for mathematical problem solving. In E.A. Silver (ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple research perspectives, (pp. 123- 138). Lawrence Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Osana, H. P., & Pelczer, I. (2015). A Review on Problem Posing in Teacher Education. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), Mathematical Problem Posing: From research to effective practice (pp. 469-492). New York: Springer.

Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning: A Guide to the Art of Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematic: Princeton University Press framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. Journal of Mathematical Behavior, 31, 149-161.

Polya, G. (1957). How to solve it? (2nd ed.). New York: Doubleday.

Schoenfled, Alan H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, San Diego, New York, London, Toronto, Montreal, Sydney, Tokio: Academic Press

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York: Macmillan, pp. 334-370.

Şengül, S. & Katrancı, Y. (2015). Free problem posing cases of prospective mathematics teachers: Difficulties and solutions. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 174 (2015), 1983 – 1990.

Sheffield, J. E. (2000). Creating and developing promising young mathematicians. Teaching Children Mathematic. 6(7), 416-419.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 14 (1), 19–28.

Silver, EA., & Cai, J. [1993} Mathematical problem po.sing and problem solving by middle school student~;· Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research A

Silver, E. A., Kilpatrick, J., Schlesinger, B. (1990). Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms. New York: College Entrance Examination Board

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S. & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education. 27(3). 293-309.

Silver, E. A., Cai, J. (1996): An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. –In: Journal for Research in Mathematics Education 27(No.5), p. 521-539.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity though instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. International Reviews on Mathematical Education, 29, 75-80.

Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 9–26

Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 9–26.

Stoyanova, E. (1997). Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young Australians. Thesis, Edith Cowan University, Faculty of Education. For the Degree of Doctor of Philosophy in Education.

Stoyanova, E. N. (1997). Extending and exploring students' problem solving via problem posing. Edith Cowan University.

Stoyanova E., & Ellerton, N. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), Technology in mathematics education (pp. 518-525). Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Melbourne: MERGA.

Torrance, E. P. (1966). Torrance tests o/creative thinking: Norms-technical manual. Englewood Cliffs, NJ: Personell Press.

Torrance, E. P. (1974). Torrance tests of creative thinking. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service

Yerushalmy M., Chazan D., Gordon M. (1990). Mathematical problem posing: implications for facilitating student inquiry in classrooms. Instructional Science, 19,219-245

Zibidis, D., Chionidou-Moskofoglou, M., & Doukakis, S. (2011). Primary teachers' embedding educational software of mathematics in their teaching practices. *International Journal of Teaching and Case Studies*, *3*(2-4), 216-227.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Λαγουμιντζής, Γ., Βλαχόπουλος, Γ. & Κουτσογιάννης, Κ. (2015). Μεθοδολογία της Έρευνας στις Επιστήμες Υγείας. Αθήνα: Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα

Μαμωνά-Downs Γ.,Παπαδόπουλος Ι.(2017).Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Παρασκευοπούλου - Κόλλια, Ε.Α. (2008). Μεθοδολογία ποιοτικής Έρευνας στις κοινωνικές Επιστήμες και Συνεντεύξεις. Open Education-The Journal for Open and Distance Education Technology. Vol. 4, Number 1/Section 1

Τουμάσης, Μ., (2000), Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα :

Εκδόσεις EEGutenberg.

Χαλικιάς Μ.,Μανωλέσου Α., Λάλου Π.,(2015).Μεθοδολογία Έρευνας και Εισαγωγή στη Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων με το IBM SPSS STATISTICS.

Παράρτημα Α: «Φύλλα εργασίας» και «Ερωτηματολόγιο Έρευνας»

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Κυρίες και Κύριοι

Το παρόν ερωτηματολόγιο και τα φύλλα εργασίας τα οποία σας ζητούνται να απαντήσετε, αποτελούν ένα μέρος της έρευνας που διεξάγω για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας με τίτλο: Διερεύνηση των διαδικασιών κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων στην τριτοβάθμια εκπαίδευση από προπτυχιακούς φοιτητές και φοιτήτριες. Μελέτη περίπτωσης» του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου.

Σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει τη σημασία κατασκευής και δημιουργίας των μαθηματικών προβλημάτων με στόχο την πληρέστερη διδασκαλία των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτό θα επιτευχθεί με έρευνα που θα διεξαχθεί σε φοιτητές και φοιτήτριες που σπουδάζουν σε διάφορα τμήματα σχολών. Τα φύλλα εργασίας και το ερωτηματολόγιο που θα διανεμηθούν είναι επικεντρωμένα στις μεθόδους με τις οποίες οι φοιτητές-φοιτήτριες κατασκευάζουν τα μαθηματικά προβλήματα με απώτερο στόχο την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης.

Σας παρακαλώ να συμπληρώσετε με ειλικρίνεια σημειώνοντας με χ την απάντηση που θεωρείτε ότι σας εκφράζει ή γράφοντας όπου απαιτείται την άποψη σας.

Τα φύλλα εργασίας και το ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμα και τα στοιχεία της έρευνας θα χρησιμοποιηθούν μόνο για ερευνητική χρήση.

Ευχαριστώ εκ των προτέρων για το χρόνο που θα διαθέσετε.

Με εκτίμηση

Συγούρα Θεοδώρα

1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

i. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 50 - \frac{25x^2}{(x+2)^2}$,με $x \geq 0$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απάντηση:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

ii. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω συνάρτηση να κατασκευάσετε ένα δικό σας μαθηματικό πρόβλημα. Η διατύπωση του προβλήματος να γίνει με τρόπο ώστε να διαφαίνονται η μονοτονία και τα ακρότατά της.

Απάντηση:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

i. Δίνονται οι παρακάτω μήτρες :

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.Να λυθεί η εξίσωση $A \cdot X = B$.

Απάντηση:

………

………

………

………

………

………

………

………

ii. Χρησιμοποιώντας τις μήτρες του πρώτου ερωτήματος να διατυπώσετε ένα δικό σας μαθηματικό πρόβλημα.

Απάντηση:

………

………

………

………

………

………

………

………

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ενότητα 1 : Τεχνικές κατασκευής Μαθηματικών Προβλημάτων

1.Σας δυσκολεύει η κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων ;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

2. Βρίσκετε ενδιαφέρουσα την μελέτη και την ανεύρεση πληροφοριών γύρω από τις τεχνικές κατασκευής Μαθηματικών Προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

3. Γνωρίζετε τεχνικές κατασκευής Μαθηματικών Προβλημάτων;

□ Καμία □ Λίγες □ Αρκετές □ Πολλές □ Πάρα πολλές

4.Ποια από τις παρακάτω τεχνικές κατασκευής Μαθηματικών Προβλημάτων γνωρίζετε; (Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μια απαντήσεις)

□ Τεχνική της Γενίκευσης

□ Τεχνική της Αντίφασης (Αντιπαραδείγματα)

□ Τεχνική της Αναλογίας

□ Τεχνική της Τροποποίησης Προβλημάτων

□ Τεχνική της Μεταβολής Δεδομένων

□ Άλλες…………………………………………………………

5. Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε την τεχνική της γενίκευσης μέσα στην τάξη, μετά την παρουσίαση της λύσης των προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

6.Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε την τεχνική των αντιπαραδειγμάτων στην κατασκευή προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

7.Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε την τεχνική της αναλογίας στην κατασκευή προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

8.Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε την τεχνική της τροποποίησης στην κατασκευή προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

9. Πόσο συχνά χρησιμοποιείτε την τεχνική της μεταβολής δεδομένων στην κατασκευή προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

10.Πόσο συχνά χρειάζεται να γίνονται επιλεγμένες προϋποθέσεις κατά τη διαδικασία κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

<u>Ενότητα 2:</u> Οι δεξιότητες κατασκευής Μαθηματικών Προβλημάτων

11.Ποιες δεξιότητες πιστεύετε ότι συμβάλλουν στην ευκολότερη κατασκευή Μαθηματικών προβλημάτων; (Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μια απαντήσεις).

□ Δημιουργικός Τρόπος Σκέψης

□ Ανάκληση Μαθηματικών Τύπων και Θεωριών

□ Ευρηματικότητα

□ Συνδυαστικός Τρόπος Σκέψης

□ Άλλες...

12.Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι βοηθάει ο δημιουργικός τρόπος σκέψης στην κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

13. Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι βοηθάει η ανάκληση των ήδη γνωστών μαθηματικών τύπων και θεωρημάτων στην κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

14. Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι βοηθάει η ευρηματικότητα στην κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

15. Σε ποιο βαθμό πιστεύετε ότι βοηθάει ο συνδυαστικός τρόπος σκέψης στην κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

16.Πιστεύετε ότι η εξάσκηση στην κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων βοηθάει στην καλλιέργεια της ευκολότερης κατανόησης μιας Μαθηματικής Έννοιας;

□ Καθόλου □ Λίγο □ Αρκετά □ Πολύ □ Πάρα πολύ

<u>Ενότητα 3:</u> Φύλλα Εργασίας

17.Ποιο φύλλο εργασίας από τα δύο βρήκατε πιο ενδιαφέρον;

□ Πρώτο Φύλλο □ Δεύτερο Φύλλο

18.Ποιο φύλλο εργασίας από τα δύο σας δυσκόλεψε περισσότερο;

□ Πρώτο Φύλλο □ Δεύτερο Φύλλο

19.Τί σας δυσκόλεψε περισσότερο στο πρώτο φύλλο εργασίας; (Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μια απαντήσεις).

□ Η κατασκευή του προβλήματος

□ Η επίλυσή του

□ Άλλο……………………………………………………………………

20.Τι σας δυσκόλεψε περισσότερο στο δεύτερο φύλλο εργασίας; (Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μια απαντήσεις).

□ Η κατασκευή του προβλήματος

□ Η επίλυσή του

□ Άλλο……………………………………………………………………

21.Σε ποιο από τα δύο φύλλα εργασίας χρειάστηκε να ανακαλέσετε στην μνήμη σας ήδη γνωστά μαθηματικά θεωρήματα και τύπους; (Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μια απαντήσεις).

□ Πρώτο Φύλλο □ Δεύτερο Φύλλο

22.Σε ποιο φύλλο εργασίας χρειάστηκε να γίνουν επιλεγμένες προϋποθέσεις στην κατασκευή του Μαθηματικού προβλήματος; (Μπορείτε να επιλέξετε περισσότερες από μια απαντήσεις).

□ Πρώτο Φύλλο □ Δεύτερο Φύλλο

<u>Ενότητα 4:</u> Δημογραφικά Στοιχεία

23. Φύλο
□ Άνδρας □ Γυναίκα

24. Ηλικία
□ 18-22
□ 23-29
□ 30-35
□ >35

25.Αναγράψτε τη Σχολή Φοίτησης σας.
………………………………………………………………………………………

26.Αναγράψτε τμήμα και εξάμηνο φοίτησης.

……………………………………………………………………………………………

27.Αναγράψτε τη βαθμολογία σας στο μάθημα των μαθηματικών, σε πανελλήνιο επίπεδο.

……………………………………………………………………………………………

28.Πληροφορίες που θα θέλατε να αναφέρετε.

……………………………………………………………………………………………

Παράρτημα B: «Πίνακες SPSS»

Case Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
$Technics[a]	86	93,5%	6	6,5%	92	100,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

$Technics Frequencies

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Known Technics[a]	Γενίκευσης	44	25,6%	51,2%
	ΑντίφασηςΑντιπαραδείγματα	53	30,8%	61,6%
	Αναλογίας	26	15,1%	30,2%
	ΤροποποίησηςΠροβλημάτων	27	15,7%	31,4%
	ΜεταβολήςΔεδομένων	22	12,8%	25,6%
Total		172	100,0%	200,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

Case Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
$RequirementsNeededinMath[a]	92	100,0%	0	0,0%	92	100,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

$RequirementsNeededinMath Frequencies

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Requirements[a]	ΔημιουργικόςΤρόποςΣκέψης	59	27,7%	64,1%

	ΑνάκλησηΜαθηματικώνΤύπωνκαιΘεωριών	52	24,4%	56,5%
	Ευρηματικότητα	36	16,9%	39,1%
	ΣυνδυαστικόςΤρόποςΣκέψης	66	31,0%	71,7%
Total		213	100,0%	231,5%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

Case Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
$Difficulty_in_the_first_paper[a]	91	98,9%	1	1,1%	92	100,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

$Difficulty_in_the_first_paper Frequencies

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Answers[a]	Ηκατασκευήτουπροβλήματος	69	66,3%	75,8%
	Ηεπίλυσητου	35	33,7%	38,5%
Total		104	100,0%	114,3%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

Case Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
$Difficulty_in_the_second_paper[a]	88	95,7%	4	4,3%	92	100,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

$Difficulty_in_the_second_paper Frequencies

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Answers[a]	Ηκατασκευήτουπροβλήματος	60	58,3%	68,2%
	Ηεπίλυσητου	43	41,7%	48,9%

Total	103	100,0%	117,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

Case Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
$Ερώτηση21[a]	92	100,0%	0	0,0%	92	100,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

$Ερώτηση21 Frequencies

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Answers[a]	ΠρώτοΦύλλο	67	60,9%	72,8%
	ΔεύτεροΦύλλο	43	39,1%	46,7%
Total		110	100,0%	119,6%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

Case Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
$Ερώτηση22[a]	92	100,0%	0	0,0%	92	100,0%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

$Ερώτηση22 Frequencies

		Responses		Percent of Cases
		N	Percent	
Answers[a]	ΠρώτοΦύλλο	64	57,7%	69,6%
	ΔεύτεροΦύλλο	47	42,3%	51,1%
Total		111	100,0%	120,7%

a. Dichotomy group tabulated at value 1.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
E23		N	Percent	N	Percent	N	Percent
Επίδοση Φυλλο 1	1	51	100,0%	0	0,0%	51	100,0%
	2	41	100,0%	0	0,0%	41	100,0%

Descriptives

	E23			Statistic	Std. Error
Επίδοση Φυλλο 1	1	Mean		3,55	,492
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,56	
			Upper Bound	4,54	
		5% Trimmed Mean		3,42	
		Median		3,00	
		Variance		12,333	
		Std. Deviation		3,512	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		,228	,333
		Kurtosis		-1,670	,656
	2	Mean		4,00	,594
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,80	
			Upper Bound	5,20	
		5% Trimmed Mean		3,92	
		Median		4,00	
		Variance		14,450	
		Std. Deviation		3,801	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		8	
		Skewness		,167	,369
		Kurtosis		-1,756	,724

Tests of Normality

	E23	Kolmogorov-Smirnov[a] Statistic	df	Sig.	Shapiro-Wilk Statistic	df	Sig.
Επίδοση Φυλλο 1	1	,256	51	,000	,811	51	,000
	2	,248	41	,000	,812	41	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Επίδοση Φυλλο 1 is the same across categories of E23.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	,421	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Mann-Whitney U Test Summary

Total N	92
Mann-Whitney U	1145,000
Wilcoxon W	2006,000
Test Statistic	1145,000
Standard Error	123,632
Standardized Test Statistic	,805
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,421

Case Processing Summary

	E23	Cases Valid N	Valid Percent	Missing N	Missing Percent	Total N	Total Percent
Επίδοση Φύλλο 2	1	51	100,0%	0	0,0%	51	100,0%
	2	41	100,0%	0	0,0%	41	100,0%

Descriptives

	E23			Statistic	Std. Error
Επίδοση Φύλλο 2	1	Mean		4,31	,551
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,21	
			Upper Bound	5,42	
		5% Trimmed Mean		4,24	
		Median		3,00	
		Variance		15,500	
		Std. Deviation		3,937	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		8	
		Skewness		,157	,333
		Kurtosis		-1,805	,656
	2	Mean		4,51	,669
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,16	
			Upper Bound	5,86	
		5% Trimmed Mean		4,46	
		Median		6,00	
		Variance		18,356	
		Std. Deviation		4,284	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		9	
		Skewness		,063	,369
		Kurtosis		-1,906	,724

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E23	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Επίδοση Φύλλο 2	1	,251	51	,000	,809	51	,000
	2	,257	41	,000	,775	41	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Επίδοση Φύλλο 2 is the same across categories of E23.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	,987	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Mann-Whitney U Test Summary

Total N	92
Mann-Whitney U	1043,500
Wilcoxon W	1904,500
Test Statistic	1043,500
Standard Error	124,798
Standardized Test Statistic	-,016
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,987

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E24	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Επίδοση Φυλλο 1	>35	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%
	18-22	60	100,0%	0	0,0%	60	100,0%
	23-29	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%

Descriptives

	E24			Statistic	Std. Error
Επίδοση Φυλλο 1	>35	Mean		3,50	1,067
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,09	
			Upper Bound	5,91	
		5% Trimmed Mean		3,44	
		Median		3,00	
		Variance		11,389	

		Std. Deviation		3,375	
		Minimum		0	
		Maximum		8	
		Range		8	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		,130	,687
		Kurtosis		-2,181	1,334
	18-22	Mean		4,05	,480
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,09	
			Upper Bound	5,01	
		5% Trimmed Mean		3,96	
		Median		5,50	
		Variance		13,811	
		Std. Deviation		3,716	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		,056	,309
		Kurtosis		-1,724	,608
	23-29	Mean		3,05	,757
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,47	
			Upper Bound	4,62	
		5% Trimmed Mean		2,88	
		Median		1,00	
		Variance		12,617	
		Std. Deviation		3,552	
		Minimum		0	
		Maximum		9	
		Range		9	
		Interquartile Range		6	
		Skewness		,695	,491
		Kurtosis		-1,246	,953

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E24	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Επίδοση Φυλλο 1	>35	,271	10	,037	,820	10	,025

	18-22	,244	60	,000	,816	60	,000
	23-29	,263	22	,000	,786	22	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Επίδοση Φυλλο 1 is the same across categories of E24.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,680	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	,772[a,b]
Degree Of Freedom	2
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,680

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E24	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Επίδοση Φύλλο 2	>35	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%
	18-22	60	100,0%	0	0,0%	60	100,0%
	23-29	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%

Descriptives

	E24			Statistic	Std. Error
Επίδοση Φύλλο 2	>35	Mean		3,40	1,194
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,70	
			Upper Bound	6,10	
		5% Trimmed Mean		3,28	
		Median		2,00	
		Variance		14,267	
		Std. Deviation		3,777	
		Minimum		0	
		Maximum		9	
		Range		9	
		Interquartile Range		8	
		Skewness		,802	,687
		Kurtosis		-1,276	1,334
	18-22	Mean		4,58	,543
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,50	
			Upper Bound	5,67	
		5% Trimmed Mean		4,54	
		Median		6,00	
		Variance		17,705	
		Std. Deviation		4,208	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		9	
		Skewness		,009	,309
		Kurtosis		-1,897	,608
	23-29	Mean		4,36	,839
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,62	
			Upper Bound	6,11	
		5% Trimmed Mean		4,29	
		Median		4,50	
		Variance		15,481	
		Std. Deviation		3,935	
		Minimum		0	
		Maximum		10	

	Range	10	
	Interquartile Range	7	
	Skewness	,176	,491
	Kurtosis	-1,751	,953

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E24	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Επίδοση Φύλλο 2	>35	,245	10	,092	,792	10	,012
	18-22	,269	60	,000	,774	60	,000
	23-29	,258	22	,001	,838	22	,002

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Επίδοση Φύλλο 2 is the same across categories of E24.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,896	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	,219[a,b]
Degree Of Freedom	2
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,896

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E24	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Επίδοση Φυλλο 1	>35	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%

	18-22	60	100,0%	0	0,0%	60	100,0%
	23-29	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%
Επίδοση Φύλλο 2	>35	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%
	18-22	60	100,0%	0	0,0%	60	100,0%
	23-29	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%
E27	>35	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%
	17-22	60	100,0%	0	0,0%	60	100,0%
	23-29	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%

Descriptives

	E24			Statistic	Std. Error
Επίδοση Φύλλο 1	>35	Mean		3,50	1,067
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,09	
			Upper Bound	5,91	
		5% Trimmed Mean		3,44	
		Median		3,00	
		Variance		11,389	
		Std. Deviation		3,375	
		Minimum		0	
		Maximum		8	
		Range		8	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		,130	,687
		Kurtosis		-2,181	1,334
	18-22	Mean		4,05	,480
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,09	
			Upper Bound	5,01	
		5% Trimmed Mean		3,96	
		Median		5,50	
		Variance		13,811	
		Std. Deviation		3,716	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		,056	,309
		Kurtosis		-1,724	,608
	23-29	Mean		3,05	,757

		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,47	
			Upper Bound	4,62	
		5% Trimmed Mean		2,88	
		Median		1,00	
		Variance		12,617	
		Std. Deviation		3,552	
		Minimum		0	
		Maximum		9	
		Range		9	
		Interquartile Range		6	
		Skewness		,695	,491
		Kurtosis		-1,246	,953
Επίδοση Φύλλο 2	>35	Mean		3,40	1,194
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,70	
			Upper Bound	6,10	
		5% Trimmed Mean		3,28	
		Median		2,00	
		Variance		14,267	
		Std. Deviation		3,777	
		Minimum		0	
		Maximum		9	
		Range		9	
		Interquartile Range		8	
		Skewness		,802	,687
		Kurtosis		-1,276	1,334
	18-22	Mean		4,58	,543
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,50	
			Upper Bound	5,67	
		5% Trimmed Mean		4,54	
		Median		6,00	
		Variance		17,705	
		Std. Deviation		4,208	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		9	
		Skewness		,009	,309
		Kurtosis		-1,897	,608
	23-29	Mean		4,36	,839

		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,62	
			Upper Bound	6,11	
		5% Trimmed Mean		4,29	
		Median		4,50	
		Variance		15,481	
		Std. Deviation		3,935	
		Minimum		0	
		Maximum		10	
		Range		10	
		Interquartile Range		7	
		Skewness		,176	,491
		Kurtosis		-1,751	,953
E27	>35	Mean		14,480	1,3010
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	11,537	
			Upper Bound	17,423	
		5% Trimmed Mean		14,489	
		Median		15,500	
		Variance		16,926	
		Std. Deviation		4,1141	
		Minimum		9,0	
		Maximum		19,8	
		Range		10,8	
		Interquartile Range		8,3	
		Skewness		-,160	,687
		Kurtosis		-1,847	1,334
	18-22	Mean		11,258	,7145
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	9,829	
			Upper Bound	12,688	
		5% Trimmed Mean		11,454	
		Median		12,000	
		Variance		30,628	
		Std. Deviation		5,5342	
		Minimum		,0	
		Maximum		19,0	
		Range		19,0	
		Interquartile Range		9,1	
		Skewness		-,477	,309
		Kurtosis		-,838	,608
	23-29	Mean		12,332	,9183

	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	10,422	
		Upper Bound	14,242	
	5% Trimmed Mean		12,425	
	Median		13,850	
	Variance		18,552	
	Std. Deviation		4,3072	
	Minimum		5,0	
	Maximum		18,0	
	Range		13,0	
	Interquartile Range		7,3	
	Skewness		-,389	,491
	Kurtosis		-1,320	,953

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E24	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Επίδοση Φυλλο 1	>35	,271	10	,037	,820	10	,025
	18-22	,244	60	,000	,816	60	,000
	23-29	,263	22	,000	,786	22	,000
Επίδοση Φύλλο 2	>35	,245	10	,092	,792	10	,012
	18-22	,269	60	,000	,774	60	,000
	23-29	,258	22	,001	,838	22	,002
E27	>35	,201	10	,200*	,891	10	,173
	18-22	,123	60	,024	,939	60	,005
	23-29	,232	22	,003	,903	22	,035

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Correlations

			Επίδοση Φυλλο 1	Επίδοση Φύλλο 2	E27
Spearman's rho	Επίδοση Φυλλο 1	Correlation Coefficient	1,000	,071	-,035
		Sig. (2-tailed)	.	,502	,742
		N	92	92	92
	Επίδοση Φύλλο 2	Correlation Coefficient	,071	1,000	-,105
		Sig. (2-tailed)	,502	.	,318
		N	92	92	92
	E27	Correlation Coefficient	-,035	-,105	1,000

	Sig. (2-tailed)	,742	,318	.
	N	92	92	92

Case Processing Summary

	Ηεπίλυσητου	Cases Valid N	Valid Percent	Missing N	Missing Percent	Total N	Total Percent
Ερώτηση 1	Όχι	56	100,0%	0	0,0%	56	100,0%
	Ναι	35	100,0%	0	0,0%	35	100,0%

Descriptives

	Ηεπίλυσητου			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	Όχι	Mean		2,50	,132
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,23	
			Upper Bound	2,77	
		5% Trimmed Mean		2,44	
		Median		2,00	
		Variance		,982	
		Std. Deviation		,991	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,698	,319
		Kurtosis		,521	,628
	Ναι	Mean		3,11	,168
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,77	
			Upper Bound	3,46	
		5% Trimmed Mean		3,10	
		Median		3,00	
		Variance		,987	
		Std. Deviation		,993	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		2	
		Skewness		,333	,398
		Kurtosis		-,162	,778

Tests of Normality

	Ηεπίλυσητου	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	Όχι	,247	56	,000	,872	56	,000
	Ναι	,260	35	,000	,891	35	,002

a. Lilliefors Significance Correction

Correlations

			Ερώτηση 1	Ηεπίλυσητου
Spearman's rho	Ερώτηση 1	Correlation Coefficient	1,000	,307**
		Sig. (2-tailed)	.	,003
		N	92	91
	Ηεπίλυσητου	Correlation Coefficient	,307**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,003	.
		N	91	91

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Case Processing Summary

	Ηεπίλυσητου	Cases					
		Valid		Missing		Total	
		N	Percent	N	Percent	N	Percent
Ερώτηση 1	Όχι	49	100,0%	0	0,0%	49	100,0%
	Ναι	43	100,0%	0	0,0%	43	100,0%

Descriptives

	Ηεπίλυσητου			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	Όχι	Mean		2,69	,131
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,43	
			Upper Bound	2,96	
		5% Trimmed Mean		2,66	
		Median		3,00	
		Variance		,842	
		Std. Deviation		,918	
		Minimum		1	

		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,661	,340
		Kurtosis		,889	,668
	Ναι	Mean		2,84	,182
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,47	
			Upper Bound	3,20	
		5% Trimmed Mean		2,82	
		Median		3,00	
		Variance		1,425	
		Std. Deviation		1,194	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		2	
		Skewness		,329	,361
		Kurtosis		-,711	,709

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Ηεπίλυσητου	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	Όχι	,247	49	,000	,854	49	,000
	Ναι	,200	43	,000	,906	43	,002

a. Lilliefors Significance Correction

Correlations

			Ερώτηση 1	Ηεπίλυσητου
Spearman's rho	Ερώτηση 1	Correlation Coefficient	1,000	,047
		Sig. (2-tailed)	.	,653
		N	92	92
	Ηεπίλυσητου	Correlation Coefficient	,047	1,000
		Sig. (2-tailed)	,653	.
		N	92	92

Case Processing Summary

	E12	Cases Valid N	Valid Percent	Missing N	Missing Percent	Total N	Total Percent
Ερώτηση 1	Αρκε	39	100,0%	0	0,0%	39	100,0%
	Καθό	2	100,0%	0	0,0%	2	100,0%
	Λίγο	12	100,0%	0	0,0%	12	100,0%
	Πάρα	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%
	Πολύ	29	100,0%	0	0,0%	29	100,0%

Descriptives

	E12			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	Αρκε	Mean		2,64	,145
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,35	
			Upper Bound	2,93	
		5% Trimmed Mean		2,63	
		Median		3,00	
		Variance		,815	
		Std. Deviation		,903	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,345	,378
		Kurtosis		,114	,741
	Καθό	Mean		3,00	,000
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3,00	
			Upper Bound	3,00	
		5% Trimmed Mean		3,00	
		Median		3,00	
		Variance		,000	
		Std. Deviation		,000	
		Minimum		3	
		Maximum		3	
		Range		0	

		Interquartile Range		0	
		Skewness		.	.
		Kurtosis		.	.
	Λίγο	Mean		2,67	,188
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,25	
			Upper Bound	3,08	
		5% Trimmed Mean		2,63	
		Median		3,00	
		Variance		,424	
		Std. Deviation		,651	
		Minimum		2	
		Maximum		4	
		Range		2	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,439	,637
		Kurtosis		-,337	1,232
	Πάρα	Mean		3,00	,471
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,93	
			Upper Bound	4,07	
		5% Trimmed Mean		3,00	
		Median		3,00	
		Variance		2,222	
		Std. Deviation		1,491	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		3	
		Skewness		,000	,687
		Kurtosis		-1,334	1,334
	Πολύ	Mean		2,86	,231
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,39	
			Upper Bound	3,34	
		5% Trimmed Mean		2,85	
		Median		3,00	
		Variance		1,552	
		Std. Deviation		1,246	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	

	Interquartile Range	2	
	Skew ness	,517	,434
	Kurtosis	-,604	,845

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E12	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	Αρκε	,223	39	,000	,891	39	,001
	Καθό	.	2	.			
	Λίγο	,279	12	,011	,784	12	,006
	Πάρα	,149	10	,200*	,918	10	,341
	Πολύ	,215	29	,001	,876	29	,003

*. This is a low er bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Ερώτηση 1 is the same across categories of E12.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,907	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	1,016[a,b]
Degree Of Freedom	4
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,907

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

	E13n	Valid N	Valid Percent	Missing N	Missing Percent	Total N	Total Percent
Ερώτηση 1	1,00	2	100,0%	0	0,0%	2	100,0%
	2,00	8	100,0%	0	0,0%	8	100,0%
	3,00	42	100,0%	0	0,0%	42	100,0%
	4,00	30	100,0%	0	0,0%	30	100,0%
	5,00	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%

Descriptives

	E13n			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	1,00	Mean		2,50	,500
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-3,85	
			Upper Bound	8,85	
		5% Trimmed Mean		.	
		Median		2,50	
		Variance		,500	
		Std. Deviation		,707	
		Minimum		2	
		Maximum		3	
		Range		1	
		Interquartile Range		.	
		Skewness		.	.
		Kurtosis		.	.
	2,00	Mean		2,50	,500
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,32	
			Upper Bound	3,68	
		5% Trimmed Mean		2,44	
		Median		2,00	
		Variance		2,000	
		Std. Deviation		1,414	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	

		Interquartile Range		3	
		Skewness		,808	,752
		Kurtosis		-,229	1,481
	3,00	Mean		2,60	,123
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,35	
			Upper Bound	2,84	
		5% Trimmed Mean		2,58	
		Median		3,00	
		Variance		,637	
		Std. Deviation		,798	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,579	,365
		Kurtosis		,999	,717
	4,00	Mean		2,87	,208
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,44	
			Upper Bound	3,29	
		5% Trimmed Mean		2,85	
		Median		3,00	
		Variance		1,292	
		Std. Deviation		1,137	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		2	
		Skewness		,278	,427
		Kurtosis		-,494	,833
	5,00	Mean		3,40	,427
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,43	
			Upper Bound	4,37	
		5% Trimmed Mean		3,44	
		Median		3,00	
		Variance		1,822	
		Std. Deviation		1,350	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	

	Interquartile Range	2	
	Skew ness	-,244	,687
	Kurtosis	-,598	1,334

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E13n	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	1,00	,260	2	.			
	2,00	,263	8	,109	,897	8	,273
	3,00	,248	42	,000	,848	42	,000
	4,00	,187	30	,009	,916	30	,021
	5,00	,217	10	,200*	,896	10	,198

*. This is a low er bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Ερώτηση 1 is the same across categories of E13.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,295	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	4,922[a,b]
Degree Of Freedom	4
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,295

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E14	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Ερώτηση 1	Αρκε	31	100,0%	0	0,0%	31	100,0%
	Καθό	3	100,0%	0	0,0%	3	100,0%
	Λίγο	17	100,0%	0	0,0%	17	100,0%
	Πάρα	7	100,0%	0	0,0%	7	100,0%
	Πολύ	34	100,0%	0	0,0%	34	100,0%

Descriptives

	E14			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	Αρκε	Mean		2,68	,156
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,36	
			Upper Bound	3,00	
		5% Trimmed Mean		2,66	
		Median		3,00	
		Variance		,759	
		Std. Deviation		,871	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,381	,421
		Kurtosis		,673	,821
	Καθό	Mean		4,00	,577
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,52	
			Upper Bound	6,48	
		5% Trimmed Mean		.	
		Median		4,00	
		Variance		1,000	
		Std. Deviation		1,000	
		Minimum		3	

		Maximum		5	
		Range		2	
		Interquartile Range		.	
		Skewness		,000	1,225
		Kurtosis		.	.
	Λίγο	Mean		2,76	,250
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,23	
			Upper Bound	3,30	
		5% Trimmed Mean		2,79	
		Median		3,00	
		Variance		1,066	
		Std. Deviation		1,033	
		Minimum		1	
		Maximum		4	
		Range		3	
		Interquartile Range		2	
		Skewness		-,240	,550
		Kurtosis		-1,032	1,063
	Πάρα	Mean		3,14	,553
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,79	
			Upper Bound	4,50	
		5% Trimmed Mean		3,16	
		Median		3,00	
		Variance		2,143	
		Std. Deviation		1,464	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		3	
		Skewness		,109	,794
		Kurtosis		-,666	1,587
	Πολύ	Mean		2,65	,188
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,26	
			Upper Bound	3,03	
		5% Trimmed Mean		2,61	
		Median		2,00	
		Variance		1,205	
		Std. Deviation		1,098	
		Minimum		1	

	Maximum	5	
	Range	4	
	Interquartile Range	1	
	Skew ness	,915	,403
	Kurtosis	,483	,788

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E14	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	Αρκε	,227	31	,000	,880	31	,002
	Καθό	,175	3	.	1,000	3	1,000
	Λίγο	,182	17	,136	,876	17	,028
	Πάρα	,253	7	,195	,900	7	,330
	Πολύ	,252	34	,000	,835	34	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Ερώτηση 1 is the same across categories of E14.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,251	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	5,371[a,b]
Degree Of Freedom	4
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,251

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E15	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Ερώτηση 1	Αρκε	19	100,0%	0	0,0%	19	100,0%
	Καθό	3	100,0%	0	0,0%	3	100,0%
	Λίγο	6	100,0%	0	0,0%	6	100,0%
	Πάρα	27	100,0%	0	0,0%	27	100,0%
	Πολύ	37	100,0%	0	0,0%	37	100,0%

Descriptives

	E15			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	Αρκε	Mean		2,63	,256
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,09	
			Upper Bound	3,17	
		5% Trimmed Mean		2,59	
		Median		2,00	
		Variance		1,246	
		Std. Deviation		1,116	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,837	,524
		Kurtosis		,528	1,014
	Καθό	Mean		3,67	,667
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,80	
			Upper Bound	6,54	
		5% Trimmed Mean		.	
		Median		3,00	
		Variance		1,333	
		Std. Deviation		1,155	
		Minimum		3	

		Maximum		5	
		Range		2	
		Interquartile Range		.	
		Skewness		1,732	1,225
		Kurtosis		.	.
	Λίγο	Mean		2,67	,422
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,58	
			Upper Bound	3,75	
		5% Trimmed Mean		2,69	
		Median		3,00	
		Variance		1,067	
		Std. Deviation		1,033	
		Minimum		1	
		Maximum		4	
		Range		3	
		Interquartile Range		2	
		Skewness		-,666	,845
		Kurtosis		,586	1,741
	Πάρα	Mean		2,74	,189
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,35	
			Upper Bound	3,13	
		5% Trimmed Mean		2,73	
		Median		3,00	
		Variance		,969	
		Std. Deviation		,984	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,308	,448
		Kurtosis		-,279	,872
	Πολύ	Mean		2,78	,178
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,42	
			Upper Bound	3,15	
		5% Trimmed Mean		2,76	
		Median		3,00	
		Variance		1,174	
		Std. Deviation		1,084	
		Minimum		1	

	Maximum	5	
	Range	4	
	Interquartile Range	1	
	Skew ness	,595	,388
	Kurtosis	,027	,759

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E15	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	Αρκε	,241	19	,005	,868	19	,013
	Καθό	,385	3	.	,750	3	,000
	Λίγο	,293	6	,117	,915	6	,473
	Πάρα	,219	27	,002	,906	27	,018
	Πολύ	,232	37	,000	,879	37	,001

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Ερώτηση 1 is the same across categories of E15.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,626	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	2,604[a,b]
Degree Of Freedom	4
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,626

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E23	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Ερώτηση 1	1	51	100,0%	0	0,0%	51	100,0%
	2	41	100,0%	0	0,0%	41	100,0%

Descriptives

	E23			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	1	Mean		2,75	,142
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,46	
			Upper Bound	3,03	
		5% Trimmed Mean		2,72	
		Median		3,00	
		Variance		1,034	
		Std. Deviation		1,017	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,304	,333
		Kurtosis		-,101	,656
	2	Mean		2,78	,173
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,43	
			Upper Bound	3,13	
		5% Trimmed Mean		2,76	
		Median		3,00	
		Variance		1,226	
		Std. Deviation		1,107	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,692	,369
		Kurtosis		-,066	,724

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E23	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	1	,205	51	,000	,904	51	,001
	2	,226	41	,000	,864	41	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Ερώτηση 1 is the same across categories of E23.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,901	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	,015[a,b]
Degree Of Freedom	1
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,901

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	E24	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Ερώτηση 1	>35	10	100,0%	0	0,0%	10	100,0%
	18-22	60	100,0%	0	0,0%	60	100,0%
	23-29	22	100,0%	0	0,0%	22	100,0%

Descriptives

	E24			Statistic	Std. Error
Ερώτηση 1	>35	Mean		2,30	,213
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,82	
			Upper Bound	2,78	
		5% Trimmed Mean		2,33	
		Median		2,00	
		Variance		,456	
		Std. Deviation		,675	
		Minimum		1	
		Maximum		3	
		Range		2	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		-,434	,687
		Kurtosis		-,283	1,334
	18-22	Mean		2,83	,143
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,55	
			Upper Bound	3,12	
		5% Trimmed Mean		2,81	
		Median		3,00	
		Variance		1,226	
		Std. Deviation		1,107	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	
		Skewness		,342	,309
		Kurtosis		-,368	,608
	23-29	Mean		2,77	,218
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	2,32	
			Upper Bound	3,23	
		5% Trimmed Mean		2,74	
		Median		3,00	
		Variance		1,041	
		Std. Deviation		1,020	
		Minimum		1	
		Maximum		5	
		Range		4	
		Interquartile Range		1	

	Skew ness	,797	,491
	Kurtosis	,430	,953

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	E24	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Ερώτηση 1	>35	,272	10	,035	,802	10	,015
	18-22	,207	60	,000	,904	60	,000
	23-29	,230	22	,004	,864	22	,006

a. Lilliefors Significance Correction

Nonparametric Tests

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Ερώτηση 1 is the same across categories of E24.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,346	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,050.

Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary

Total N	92
Test Statistic	2,121[a,b]
Degree Of Freedom	2
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,346

a. The test statistic is adjusted for ties.

b. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.