



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ

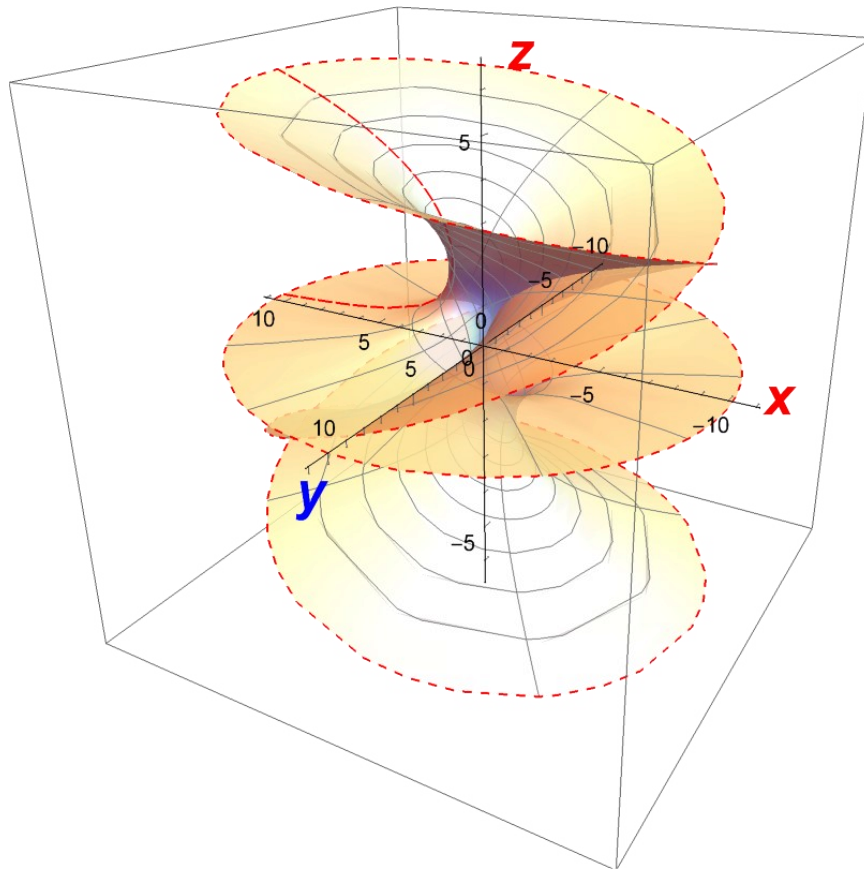
ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΑΡΑΜΕΤΡΗΣΗ WEIRSTRASS-ΕΝΝΕΡΙΕΡ

ΚΑΡΙΝΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Πάτρα 2024



**Εξώφυλλο:** Η επιφάνεια του Richmond

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο ο προγράμματος "Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά" (ΜΣΜ) της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Εξετάζουμε τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης στον  $\mathbb{R}^3$ .

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται σε ορισμούς και βασικά θεωρήματα της διαφορικής γεωμετρίας, αναγκαία για την ανάπτυξη της θεωρίας των επιφανειών ελάχιστης έκτασης. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τους ορισμούς της καμπυλότητας και εστιάζει στην έννοια της μέσης καμπυλότητας " $H$ ". Μία ελαχιστική επιφάνεια, ιστορικά ορίζεται να έχει την ελάχιστη έκταση, εφόσον περικλείεται από μία απλή κλειστή καμπύλη. Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται στην ισοδυναμία μεταξύ της μέσης καμπυλότητας " $H$ " και την ελάχιστη έκταση. Εξετάζουμε δύο κλάσεις επιφανειών, τις επιφάνειες εκ περιστροφής και τις ευθειογενείς. Γι' αυτές τις κλάσεις αποδεικνύουμε ότι το αλυσσοειδές και το ελικοειδές είναι αντίστοιχα επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η παραμέτρηση Weirstrass-Enneper για την κατασκευή επιφανειών ελάχιστης έκτασης. Στο συμπέρασμα ανακεφαλαιώνονται τα συμπεράσματα της εργασίας και θίγονται προβληματισμοί που ενσκήπτουν.

Καρίνας Ιωάννης Μαθηματικός

Θεσσαλονίκη 30/6/2024

## ABSTRACT

This thesis is submitted under the master's program "Graduated Studies in Mathematics" of EAP. We examine the minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . The first chapter refers to the definitions and main theorems of Differential Geometry, necessary for the development of the theory of minimal surfaces. The chapter is completed with the definitions of curvature and focus at the meaning of mean curvature " $H$ ". A minimal surface historically is defined as the surface having the least possible area, bounded by a simple closed curve. The second chapter refers to the equivalence, between mean curvature  $H$  and minimal area. We developed two classes of surfaces, the surfaces of revolution and ruled surfaces. For these classes we prove that the evaluated minimal surfaces are the Catenoid and the Helicoid respectively. The last chapter presents the Weirstrass-Enneper method for constructing minimal surfaces. As a conclusion the results of our text are summarized and external questions that may be arise are given.

Θέλω να ευχαριστήσω τον κύριο Ανδρέα Αρβανιτογεώργο, για τις παραινέσεις, υποδείξεις και οριοθετήσεις, τόσο βιβλιογραφικά όσο και σε χρονικό πλαίσιο. Επιπλέον ευχαριστώ τους κυρίους Πουλάκη Δημήτριο ως δεύτερο επιβλέποντα για τις συζητήσεις και την εγγύτητα, και τον κύριο Ανούση Μιχαήλ, που μου έδωσε διέξοδο όταν ήμουν έτοιμος να εγκαταλείψω την προσπάθεια.

## Πίνακας περιεχομένων

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Εισαγωγή .....	4
1.2 Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ .....	4
1.3 Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ .....	9
1.4 Εφαπτόμενο επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ .....	12
1.5 Θεμελιώδεις μορφές .....	13
<b>ΣΥΝΟΨΗ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ</b> .....	<b>21</b>

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ

2.1 Ιστορική προσέγγιση των επιφανειών ελάχιστης έκτασης .....	
2.1.1 Η απόδειξη του Langrange .....	23
2.1.2 Η επιφάνεια του Scherk	
2.2 Επιφάνεια Ελάχιστης Έκτασης με μέση καμπυλότητα $H=0$ .....	27
2.3 Κατηγορίες επιφανειών ελάχιστης έκτασης .....	29
2.3.1 Ευθειογενείς επιφάνειες (ruled surfaces) .....	
2.3.2 Επιφάνειες εκ περιστροφής .....	32
2.4 Δύο επιφάνειες ελάχιστης έκτασης υπολογίζοντας $H=0$ .....	39
2.4.1 Επιφάνεια του Ennepier	
2.4.2 Επιφάνεια του Catalan	
2.4.2α Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Mathematica	
<b>ΣΥΝΟΨΗ του 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ</b> .....	<b>42</b>

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ WEIRSTRASS-ENNEPIER

3.1 Εισαγωγικές έννοιες	
3.2 Ισοθερμική επιφάνεια και αρμονικές συναρτήσεις .....	43
3.3 Σύνδεση ελαχιστικών επιφανειών με τις μιγαδικές συναρτήσεις .....	45
3.4 Παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών με την αναπαραμέτρηση Weirstrass .....	51
3.4.1 Επιφάνεια Ennepier .....	52
3.4.1α Επιφάνεια του Ennepier ανώτερης τάξης .....	53
3.4.2 επιφάνεια του Richmond .....	54
3.4.3 Δεύτερος ορισμός αναπαραμέτρησης Weirstrass-Ennepier	
<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</b> .....	<b>60</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	<b>61</b>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

#### 1.1 Εισαγωγή

Η διαφορική γεωμετρία μελετά τις ιδιότητες των καμπυλών και των επιφανειών στις δύο, τρεις ή περισσότερες διαστάσεις, συνδυάζοντας στοιχεία από την γραμμική άλγεβρα, την αναλυτική γεωμετρία, το διαφορικό λογισμό, αλλά και έννοιες από την τοπολογία ή τη μιγαδική ανάλυση.

Για την παρουσίαση των επιφανειών ελάχιστης έκτασης (minimal surfaces), θα δώσουμε το βασικό πλαίσιο ορισμών, εννοιών και αποδείξεων όπου απαιτείται, καθώς και εποπτικό υλικό με χρήση του λογισμικού mathematica. Εναλλακτικά, ανάλογα με τις ανάγκες του κειμένου, θα χρησιμοποιείται και η έκφραση "ελαχιστική επιφάνεια". Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε όσα χρειάζονται για τη μελέτη των επιφανειών ελάχιστης έκτασης.

#### Προαπαιτούμενη γνώση

Αναλυτική γεωμετρία, Απειροστικός λογισμός, Γραμμική άλγεβρα

#### 1.2 Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

Στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$  ορίζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με τη σχέση

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

και βασικές ιδιότητες

$$\alpha) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$\beta) \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$\gamma) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Με το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται η νόρμα (μέτρο)

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Από τη γραμμικότητα των κανόνων παραγωγίσης εύκολα προκύπτει ο ακόλουθος κανόνας: Έστω  $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , δύο συναρτήσεις και ορίζουμε τη συνάρτηση

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(t) = \langle \gamma(t), \beta(t) \rangle$ .

$$\text{Τότε } \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \beta(t) \rangle = \left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \beta(t) \right\rangle + \left\langle \gamma(t), \frac{d\beta(t)}{dt} \right\rangle$$

**Ορισμός 1.2.1** Έστω ένα διάστημα  $I \subset \mathbb{R}$ . **Παραμετρημένη καμπύλη** (parametrised curve) στον  $\mathbb{R}^n$  ορίζεται μία συνεχής συνάρτηση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  που για κάθε  $t \in I$  δίνεται από τη σχέση  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

Το **εφαπτόμενο διάνυσμα** σε κάθε σημείο της είναι το  $\overline{\gamma'(t)} = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$  και το **μήκος τόξου** όπως γνωρίζουμε από τον απειροστικό λογισμό είναι μια απεικόνιση που προκύπτει από την άθροιση (κατά Riemann) στοιχειωδών μηκών  $\gamma_i'(t)$

$$L(\gamma): I \rightarrow \mathbb{R}^n, L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(u)\| du < \infty$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις  $\gamma_i(t): I \rightarrow \mathbb{R}$ , για  $1 \leq i \leq n$  λέγονται **συντεταγμένες** και για  $n=2$  η  $\gamma$  ονομάζεται επίπεδη καμπύλη, ενώ για  $n=3$  η καμπύλη βρίσκεται στο χώρο (space curve). Γενικά θα αναφερόμαστε σε καμπύλες στον  $\mathbb{R}^3$ .

Η εικόνα  $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$  λέγεται **ίχνος (τροχιά)** της  $\gamma$ , και αν δεν υπάρχει λόγος διευκρίνησης θα χρησιμοποιούμε τη λέξη "καμπύλη" και για την τροχιά.

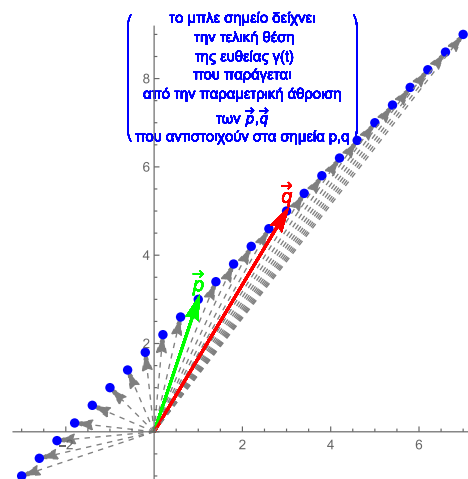
**Ορισμός 1.2.2.** **Κανονική** ονομάζεται κάθε καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  του ορισμού 1.2.1 αν επιπλέον ισχύουν

- είναι  $C^1$ , δηλαδή η παράγωγος  $\gamma'$  υπάρχει και είναι συνεχής
- $\gamma'(t_0) \neq 0$  για κάθε  $t_0 \in I$ , με την έννοια ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα δεν μηδενίζεται ταυτόχρονα για όλες τις συντεταγμένες  $\gamma_i$ .

### Παραδείγματα 1.2.3

i. Η απεικόνιση  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (1-t)p + tq$

όπου  $p, q$  σημεία του  $\mathbb{R}^2$ , είναι μια παραμέτρηση της ευθείας που διέρχεται από τα  $p, q$ .



ii. Ο μοναδιαίος κύκλος  $x^2 + y^2 = 1$  μπορεί να παραμετρηθεί ως

$\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  αλλά και ως  $\gamma: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ . Όπως θα δούμε οι δύο παραμετρήσεις έχουν διαφορετική ταχύτητα. Γενικά,

Η εικόνα της  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , με  $\gamma'(t) \neq 0$  για κάθε  $t \in I$  περιέχεται σε κύκλο με κέντρο το  $(0,0)$  αν και μόνο αν το διάνυσμα  $\gamma(t)$  είναι κάθετο στο  $\gamma'(t)$  για κάθε  $t \in I$  ([2], σελ. 10).

iii. Η παραβολή  $y=x^2$  μπορεί να έχει παραμετρήσεις  $\gamma(t)=(t, t^2)$  και  $\tilde{\gamma}(t)=(t^3, t^6)$  όμως η δεύτερη παραμέτρηση δεν είναι κανονική καθώς  $\tilde{\gamma}'(t)=(3t^2, 6t^5) \Rightarrow \tilde{\gamma}'(0)=(0,0)$ <sup>1</sup>

iv. Η απεικόνιση  $(t^3-4t, t^2-4)$  δεν είναι "1-1", παρ' όλα αυτά ορίζει μια κανονική καμπύλη στο επίπεδο (οι παράγωγοι των συντεταγμένων  $t^3-4t$ ,  $t^2-4$  δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα).

v. Η απεικόνιση  $(t, |t|)$  δεν είναι παραμετρημένη καμπύλη καθώς δεν παραγωγίζεται στο 0 (έχει το ίδιο ίχνος με τη συνάρτηση  $y=|x|$  που είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0).

Θα ορίσουμε τώρα τρεις έννοιες που θα χρειαστούν για τις βασικές έννοιες της **καμπυλότητας** και της **στρέψης** στη μελέτη μας.

Αρχικά ορίζουμε ως **ταχύτητα** μιας καμπύλης  $\gamma$  την ποσότητα  $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$  και από τη γνωστή σχέση στον απειροστικό λογισμό

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \quad (1.2.1)$$

ορίζεται το **μήκος** της καμπύλης  $\gamma$  από το  $t_0$  ως το  $t$ .

Το **εφαπτόμενο** διάνυσμα (tangent vector)  $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  (1.2.2)

και το **κάθετο** διάνυσμα

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \quad (1.2.3)$$

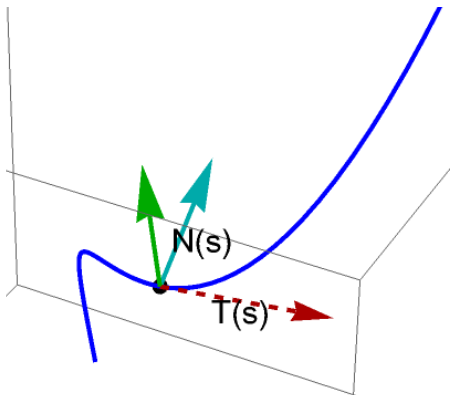
ορίζουν στις καμπύλες του  $\mathbb{R}^2$  τη θέση κάθε σημείου τους, ενώ για τις καμπύλες στο χώρο το  $N(t)$  ονομάζεται διάνυσμα **πρώτης (ή κύριας) καθέτου** (principal normal vector), καθώς χρειάζεται και το διάνυσμα της **δεύτερης καθέτου** (binormal vector)

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad (1.2.4)$$

για να καθορισθεί η **στρέψη της καμπύλης**, όπου με "x" συμβολίζουμε το σύνηθες εξωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^3$ .

Το ζεύγος  $\{T(s), N(s)\}$  για τον  $\mathbb{R}^2$  και η τριάδα  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  για τον  $\mathbb{R}^3$  ονομάζονται "**πλαίσιο Frenet**", και θα διευκρινίσουμε γιατί χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή "s" αντί για την "t".

<sup>1</sup> (βλ. [1], παρ. 13.10. σελ17)



Πλαίσιο Frenet για τρισδιάστατη καμπύλη

Προηγουμένως στα Παραδείγματα 2 και 3 είδαμε ότι μπορούν να υπάρχουν διαφορετικές παραμετρήσεις για την ίδια καμπύλη, όπως και παραμετρήσεις με τις οποίες η καμπύλη δεν ορίζεται ως κανονική.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με κανονικές καμπύλες. Θα αναφέρουμε εν συντομία κάποια συμπεράσματα της διαφορικής γεωμετρίας που μας δίνουν το δικαίωμα αυτό.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι  $\|T(t)\| = \|N(t)\| = 1$  και ένα σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι αν  $\|\gamma'(t)\| = 1$  (το γράφουμε  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ ), ισχύει είτε ότι το διάνυσμα  $\dot{\gamma}(s)$  είναι κάθετο στο  $\ddot{\gamma}(s)$  είτε ότι  $\ddot{\gamma}(s) = 0$ . Άρα  $\ddot{\gamma}(s) \cdot N(s)$  και το  $\dot{\gamma}(s) = T(s)$  και  $\dot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0$  (1.2.5)

Η παραμέτρηση  $\dot{\gamma}(s)$  λεγεται *παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου* (parameterization by arc-length) γιατί στον τύπο  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$  αν  $t=s$ , όπου  $s$  το μήκος τόξου, ισχύει

$s(t) = t - t_0 \Rightarrow 1 = \frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|$ , δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας έχει μοναδιαίο μέτρο. Αυτό ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή αν  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , το ολοκλήρωμα ισούται με το μήκος τόξου.

Η παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου μας οδηγεί, από τη σχέση (1.2.5), ότι τα διανύσματα της πρώτης και δεύτερης καθέτου είναι κάθετα. Αυτό μας χρειάζεται στην απόδειξη του θεωρήματος του Catalan. Το θεώρημα 1.2.3 μας δίνει την δυνατότητα να παραμετρήσουμε μία καμπύλη ως προς μήκος τόξου

Διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι διαφορετικές παραμετρήσεις της ίδιας καμπύλης δεν θα αλλάζουν το μήκος (αν τρέξουμε την ίδια διαδρομή με διαφορετική ταχύτητα δεν θα αλλάξει η απόσταση που διανύσαμε) και αυτό αποδεικνύεται για τις κανονικές καμπύλες με το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.2.3** Έστω  $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  μια κανονική καμπύλη. Τότε το ίχνος  $\gamma(\alpha, \beta)$  είναι δυνατό να παραμετροποιηθεί ως προς μήκος τόξου.

**Απόδειξη:** Έστω  $\sigma(t) = \int_{\alpha}^t \|\gamma'(u)\| du$  η συνάρτηση μήκους τόξου από το  $\alpha$  στο  $t$ .



Τότε  $\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$  (καθώς η  $\gamma$  είναι κανονική), άρα η  $\sigma$  θα είναι γνησίως αύξουσα και θα ορίζεται η  $\tau = \sigma^{-1}$  με  $\tau: (0, L(\gamma)) \rightarrow (\alpha, \beta)$  που θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας και θα είναι "1-1".

Θα ισχύει  $\sigma(\tau(s)) = s$  για  $s \in (0, L(\gamma))$ , και επομένως  $\frac{d}{ds}(\sigma(\tau(s))) = s' = 1$ .

Ορίζουμε την  $\alpha: (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ως τη σύνθεση  $\alpha = \sigma \circ \tau$

Τότε ο κανόνας της αλυσίδας δίνει  $\dot{\alpha}(s) = \gamma'(\tau(s))\dot{\tau}(s) \Rightarrow \|\dot{\alpha}(s)\| = \|\gamma'(\tau(s))\dot{\tau}(s)\| = \|\sigma'(\tau(s))\dot{\tau}(s)\| = 1$

Καθώς η  $\tau$  είναι "1-1" η  $\alpha$  παραμετρικοποιεί την  $\gamma$  με μοναδιαία ταχύτητα (μήκος τόξου) ■ <sup>2</sup>

Η  $\alpha$  λέγεται "αναπαραμέτρηση της  $\gamma$  ως προς μήκος τόξου" και θα την συμβολίζουμε με  $\gamma(s)$ . Η παραπάνω απόδειξη μας δίνει και τον τρόπο που μπορεί να κατασκευαστεί μία τέτοια παραμέτρηση, εφόσον για την αναπαραμέτρηση ( $\sigma$ ) που έχουμε, μπορούμε να ορίσουμε με αναλυτικό τύπο την αντίστροφη της.

Στη συνέχεια θα θυμίσουμε δύο σημαντικά γινόμενα διανυσμάτων από την αναλυτική γεωμετρία. Θα μας χρειαστούν σε πολλά σημεία, όπως στον καθορισμό του κάθετου διανύσματος σε μια επιφάνεια, στο εμβαδό επιφανείας και στα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης.

#### 1.2.4 Εξωτερικό και μικτό γινόμενο

**Ορισμός 1.2.4α** Για δύο διανύσματα  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  το **εξωτερικό**

**γινόμενο** είναι το  $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ , με  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  την ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

- Το  $\vec{u} \times \vec{v}$  είναι κάθετο στο επίπεδο των  $u, v$  και τα  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$  ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα-βάση του  $\mathbb{R}^3$ , όχι όμως κατ' ανάγκη ορθοκανονικό.

- Το  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$  είναι το εμβαδό που ορίζει το παραλληλόγραμμο των  $u, v$ . Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για το εμβαδό της επιφάνειας. Εξηγήσεις ερμηνείες και αποδείξεις επ' αυτού υπάρχουν σε όλα τα βιβλία αναλυτικής γεωμετρίας

**Ορισμός 1.2.4β** Μικτό γινόμενο είναι ο αριθμός  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{z} \rangle = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}]$  για τρία διανύσματα

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{z} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ .

- Το μέτρο του  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}]$  δίνει τον όγκο του παραλληλεπίπεδου των  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$  εφόσον τα τρία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

<sup>2</sup> Στο [10] σελ. 15-16 μπορεί να δει κανείς μια αναλυτική παρουσίαση της απόδειξης. Εδώ ακολουθήσαμε την πορεία του [2] στο Θεώρημα 1.

- Αν τα μη μηδενικά  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$  είναι συνεπίπεδα, ή δύο από τα  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$  είναι συνευθειακά, τότε

$$[u,v,z]=0$$

### 1.2.5 Καμπυλότητα και στρέψη (καμπύλης)

Έχουμε τώρα τη δυνατότητα να δώσουμε το θεμελιώδη ορισμό της καμπυλότητας για τη μελέτη των καμπυλών και κατ' επέκταση των επιφανειών. Επίσης θ ορίσουμε τη στρέψη σε μία τρισδιάστατη καμπύλη καθώς χρειάζεται στη μελέτη μας.

**Ορισμός 1.2.5α** Έστω  $\gamma$  μία καμπύλη με παραμετροποίηση μήκους τόξου. Τότε ονομάζουμε **καμπυλότητα (curvature)** της  $\gamma$  την ποσότητα  $\kappa = \|\dot{\gamma}(s)\|$

**Ορισμός 1.2.5β** Αντίστοιχα για την  $\gamma$  με μοναδιαία παραμέτρηση ορίζουμε ως **στρέψη (torsion)** της  $\gamma$  τη συνάρτηση

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = \langle \dot{N}(s), B(s) \rangle$$

#### Παρατηρήσεις

- Μία καμπύλη είναι ευθεία αν και μόνο αν έχει μηδενική καμπυλότητα [2 σελ. 23]
- Οι κανονικές καμπύλες έχουν μη μηδενική καμπυλότητα
- Η στρέψη δείχνει πόσο γρήγορα η πρώτη κάθετος  $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$  στρέφεται προς τη

διεύθυνση της δεύτερης κάθετου  $B(s)$  ή ισοδύναμα, απομακρύνεται από τον φορέα του  $T(s)$  [2 σελ. 24]

- Μία καμπύλη είναι επίπεδη αν και μόνο αν έχει μηδενική στρέψη [2 σελ. 27]
- Διαφορετικοί συγγραφείς δίνουν διαφορετικούς ορισμούς για κανονικές καμπύλες παραμετρημένες σε μήκος τόξου. Έτσι στο [10] σελ 17, ορίζεται ως  $\kappa = \|\dot{T}(s)\|$ , σχέση που προκύπτει άμεσα, καθώς  $\dot{\gamma}(s) = T(s)$  και με τον ορισμό που ακολουθήσαμε ισχύει  $\kappa = \|\dot{\gamma}(s)\|$ .

Όμοια ορίσαμε  $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = \langle \dot{N}(s), B(s) \rangle$  αλλά καθώς  $B(s) = T(s) \times N(s)$  θα ήταν δυνατό να ορίσουμε  $\tau = -N \cdot \dot{B}$ .

- Με την ανάλυση που δίνεται στο [10, σελ 19-20] καταλήγουμε στους τύπους του Frenet

$$\text{(Frenet Formulas)}^3 \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \text{ Ένα πρώτο πολύ σημαντικό συμπέρασμα}$$

αυτών των εξισώσεων [1, πρόταση 2.3.5] είναι ότι

<sup>3</sup> Γενικά τις διαφορικές εξισώσεις του Frenet τις αποδεικνύουν σχεδόν όλοι οι συγγραφείς [2, σελ 26], [1, theorem 2.3.4, "the Frenet-Serret equations"]. Αυτό γιατί σε καμπύλες με μοναδιαία παραμέτρηση τα  $\dot{T} = \kappa N$ ,  $\dot{N} = -\kappa T + \tau B$ ,  $\dot{B} = -\tau N$  έχουν γραμμική εξάρτηση και είναι παράλληλα ή συνεπίπεδα.

"Μία καμπύλη  $\gamma(s)$  με σταθερή καμπυλότητα και μηδενική στρέψη είναι κύκλος (τμήμα)"

**Ορισμός 1.2.6** Μία καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  λέγεται γενικευμένη έλικά (ή ισοκλινής καμπύλη) όταν οι εφαπτόμενες της σχηματίζουν σταθερή γωνία με σταθερό διάνυσμα του χώρου.

Η πιο απλή περίπτωση έλικας είναι η καμπύλη  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  που ονομάζεται κυκλική έλικά με βήμα  $b$  και ακτίνα  $a$ .

Για να δείξουμε ότι είναι έλικά σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, αρκεί να αποδείξουμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  σχηματίζει σταθερή γωνία με το σταθερό διάνυσμα  $\vec{\delta} = (0, 0, b)$ . Ισχύει

$$\cos(\gamma', \vec{\delta}) = \frac{\langle \gamma', \vec{\delta} \rangle}{\|\gamma'\| \|\vec{\delta}\|} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}}$$

που είναι σταθερό καθώς τα  $a, b$  είναι σταθερές ποσότητες.

Υπάρχουν δύο προτάσεις που χρειάζονται για τη μελέτη της έλικας και του ελικοειδούς και στηρίζονται στις εξισώσεις του Frenet.

**Πρόταση 1.2.7** Μία καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\kappa > 0$ , είναι γενικευμένη έλικά αν και μόνο αν

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{σταθερό}$$

Απόδειξη: (Ευθύ) Υποθέτουμε ότι η  $\gamma$  είναι παραμετρημένη σε μήκος τόξου. Αν  $M$  το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$  που σχηματίζει γωνία  $\omega$  με το εφαπτόμενο  $T(s)$ , τότε  $\langle M, T(s) \rangle = \cos \omega \Rightarrow$  με παραγωγή  $M = \lambda T(s) + \mu B(s)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ .

Πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά με  $T, B$  και επειδή τα διανύσματα  $T, B$  είναι μοναδιαία και κάθετα καταλήγουμε ότι  $\lambda = \langle M, T(s) \rangle = \cos \omega$ ,  $\mu = \langle M, B(s) \rangle = \cos(\pi/2 - \omega) = \sin \omega$ .

Παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας ξανά τις σχέσεις Frenet καταλήγουμε στην σχέση

$$0 = (\cos \omega \kappa(s) - \sin \omega \tau(s)) N(s).$$

Καθώς το  $N(s) \neq 0$  καταλήγουμε  $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c$  (σταθερά)

Αντίστροφα, αν  $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c$  μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $c = \cot \omega$ , για σταθερή γωνία  $\omega$ , καθώς

η συνάρτηση της συνεφαπτομένης έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ .

Αυτό σημαίνει ότι  $\cos \omega \kappa(s) = \sin \omega \tau(s)$  και πολλαπλασιάζοντας με  $N(s)$  καταλήγουμε στη σχέση  $\langle M, T(s) \rangle = \cos \omega$ , δηλαδή το μοναδιαίο  $M$  σχηματίζει σταθερή γωνία με το  $T$ , άρα η καμπύλη είναι γενικευμένη έλικά. ■

Αναλυτικά την παραπάνω απόδειξη μπορεί να την δει κανείς στο [2] σελ 28-29.

Επίσης η καμπυλότητα και η στρέψη μίας τρισδιάστατης καμπύλης συνδέονται με τη σχέση

$$\tau(s) = \frac{\langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle}{\kappa(s)^2}$$

### 1.3 Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

Επιφάνεια είναι "ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  που μοιάζει με τον  $\mathbb{R}^2$  στην εγγύτητα οποιουδήποτε δοθέντος σημείου...", ([1] σελ 63). Στο νου μας πάντα έχουμε την επιφάνεια της Γης, που φαίνεται να είναι επίπεδη, αλλά στο σύγχρονο κόσμο έχουμε πειστεί ότι δεν είναι. Το επίπεδο είναι αυτονόητη έννοια στην καθημερινότητα μας, αλλά δεν είναι τόσο εύκολο οριστεί. Στο δεύτερο κεφάλαιο επίσης θα δούμε γιατί ο κώνος *δεν είναι επιφάνεια*.

Αναλυτική προσέγγιση των παραπάνω μπορεί να βρει κανείς σε οποιοδήποτε βιβλίο Διαφορικής Γεωμετρίας, αλλά δεν ανήκει στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Έτσι θα δώσουμε κατευθείαν έναν κεντρικό ορισμό που θα μας χρειαστεί παρακάτω. Ας αναφέρουμε ότι η λεία απεικόνιση, είναι μία "1-1" συνεχής και με συνεχή αντίστροφη απεικόνιση, και καθορίζει την κανονική επιφάνεια, που σε πολλές πηγές αναφέρεται και ως "λεία επιφάνεια".<sup>4</sup>

**Ορισμός 1.3.1** Ένα μη κενό συνεκτικό υποσύνολο  $M$  του  $\mathbb{R}^3$  ονομάζεται **κανονική επιφάνεια** (regular surface), εάν για κάθε  $p \in M$  υπάρχουν ανοικτές περιοχές

$V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  και μια "1-1" απεικόνιση  $X: U \rightarrow V \cap M$ ,  $X = X(u, v)$  τέτοια ώστε

1. Η  $X$  να είναι ομοιομορφισμός (εξήγηση πιο κάτω)
2. Να είναι  $X_u(q) \times X_v(q) \neq 0$  για κάθε  $q \in U$

Η απεικόνιση  $X$  λέγεται **τοπική παραμέτρηση** (local parametrisation) της  $M$  και η δυάδα  $(V \cap M, X^{-1})$  τοπικός χάρτης ή **τοπικό σύστημα συντεταγμένων** της  $M$  στο  $p = X(q)$ . Αν θεωρήσουμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $O_{xyz}$  του  $\mathbb{R}^3$  η απεικόνιση  $X$  έχει τη μορφή  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , όπου  $x, y, z$  απεικονίσεις από τον  $U \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Συχνά την παραμέτρηση μιας κανονικής επιφάνειας θα την ονομάζουμε κι αυτή κανονική.

Αυτός ο ορισμός της επιφάνειας μας λέει ότι η επιφάνεια ορίζεται ως υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ , ώστε κάθε σημείο  $p \in$  να συνδέεται *ομοιομορφικά* με ένα υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^2$  στο οποίο

<sup>4</sup>Π.χ. Κ. Αθανασόπουλος "σημειώσεις του προπτυχιακού μαθήματος Διαφορική γεωμετρία" σελ 25.  
<http://users.math.uoc.gr/~athanako/diff-geom-notes-i.pdf>,

ανήκει το  $q$ . Θυμίζουμε ότι ομοιομορφισμό ονομάζουμε μια ένα προς ένα και επί, συνεχή, αντιστρέψιμη απεικόνιση, που έχει συνεχή αντίστροφο. Ας δώσουμε ένα κεντρικό παράδειγμα, που θα συναντήσουμε πιο κάτω και στη μελέτη των επιφανειών ελάχιστης έκτασης (παράγραφος 2.1)

**Ορισμός 1.3.2.** Παραμέτρηση του Monge (Monge graph) ορίζουμε ως κάθε τοπική απεικόνιση

$$X(u,v)=(u,v,f(u,v)) \text{ όπου}$$

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } U \text{ ανοικτό υποσύνολο του } \mathbb{R}^2.$$

Πολλές γνωστές επιφάνειες μπορούν να παρασταθούν εύκολα μ' αυτόν τον τρόπο.

### Παράδειγματα 1.3.3

α) Κάθε επίπεδο που δεν είναι κάθετο στον άξονα  $z$ 's μπορεί να γραφεί ως

$$(x, y, \frac{-Ax - By - \Delta}{\Gamma}) \text{ ή το παραβολοειδές } (x, y, x^2 + y^2) \text{ είναι δύο χαρακτηριστικές}$$

περιπτώσεις κανονικών επιφανειών  $M$  όπου  $X^{-1}(x,y,z)=(x,y)$  στις οποίες εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -\frac{A}{\Gamma} \\ 0 & 1 & -\frac{B}{\Gamma} \end{pmatrix} = \left( \frac{A}{\Gamma}, \frac{B}{\Gamma}, 1 \right) \text{ για την πρώτη και } \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} = (-2x, -2y, 1) \text{ για τη δεύτερη, που}$$

μας δίνει ότι  $\|X_u \times X_v\| \neq 0 \Rightarrow X_u \times X_v \neq (0,0,0)$ , αφού μηδενικό μέτρο έχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα<sup>5</sup>

Αυτή όμως η θεώρηση είναι αρκετά δύσχρηστη και πολλές κανονικές επιφάνειες χρειάζονται πολλούς χάρτες  $X^{-1}$  για να καλυφθούν, παραδείγματος χάριν η σφαίρα η ο κύλινδρος. Έτσι υπάρχει μια δεύτερη προσέγγιση, που όμως<sup>6</sup> χρειάζεται την έννοια του διαφορικού πεπλεγμένης συνάρτησης.

**Ορισμός 1.3.4.** Ορίζουμε διαφορικό  $DF(p)$  τη γραμμική απεικόνιση που δίνεται από τον  $m \times n$  πίνακα μερικών παραγώγων

$$DF(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, [DF(p)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \text{ όπου}$$

- $p=(x_1, \dots, x_n)$  ένα σημείο του χώρου  $\mathbb{R}^n$ , και καθορίζει τις στήλες του πίνακα
- $F=(F_1, F_2, \dots, F_m): U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  διαφορίσιμη απεικόνιση

<sup>5</sup> ([2] σελ. 44-45).

<sup>6</sup> (βλ. [1] άσκηση 4.1.2 σελ. 70-71, & ).

### Κανονική τιμή

**Θεώρημα 1.3.3 (Πεπλεγμένης συνάρτησης)** Έστω  $U$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  ( $U \subset \mathbb{R}^3$ ),  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη απεικόνιση και  $q$  κανονική τιμή της  $f$ , δηλαδή η κλίση

$$(\nabla f)(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq 0$$

για κάθε  $p \in M = f^{-1}(\{q\})$ . Τότε το  $M$  είναι μια κανονική επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$ .

**Απόδειξη (βασική ιδέα):** Ορίζουμε την  $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με τιμή

$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$  στην οποία ο πίνακας διαφορικού

$$DF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{pmatrix}$$

έχει  $\det([DF(p)]) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$  άρα υπάρχει αντίστροφη απεικόνιση.

Αυτό οδηγεί μέσω του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης στο να είναι η επιφάνεια κανονική [αναλυτικά [2] θεώρημα 2.2 σελ. 48] ■

**Παράδειγμα 1.3.4** Η  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , έχει κλίση στο σημείο  $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $(\nabla f)(p) = (2x, 2y, 2z)|_p = 2p$  άρα για κάθε  $r > 0$  ( $r = 2p$ ) είναι κανονική τιμή της  $f$ . Άρα η σφαίρα

$$M \subset \mathbb{R}^3 \quad S_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} (= f^{-1}(r^2)),$$

ακτίνας  $r$  είναι μια κανονική επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$ .

**Ορισμός 1.3.5** Η απεικόνιση  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου  $U$  ανοικτό, με την προϋπόθεση ότι

$$X_u(q) \times X_v(q) \neq 0 \text{ για κάθε } q \in U \text{ είναι μια κανονική παραμετρημένη επιφάνεια.}$$

Η εικόνα  $X(U)$  ονομάζεται **τμήμα επιφανείας** (surface patch<sup>7</sup>).

### 1.4 Εφαπτόμενο επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$

Η βέλτιστη γραμμική προσέγγιση μιας κανονικής επιφανείας γίνεται με τον εφαπτόμενο χώρο, και για επιφάνειες του  $\mathbb{R}^3$  ο χώρος αυτός είναι επίπεδο. Έτσι για μία κανονική επιφάνεια  $M$ , σε κάθε σημείο της  $p$  ορίζουμε το εφαπτόμενο επίπεδο ως εξής:

**Ορισμός 1.4.1** Ο εφαπτόμενος χώρος  $T_p M$  (tangent space) μιας κανονικής επιφανείας  $M$  στο σημείο  $p \in M$  είναι το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων  $\gamma'(0)$  σε κάθε λεία (ή κλάσης  $C^1$ ) καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow M$ , τέτοια ώστε  $\gamma(0) = p$ .

<sup>7</sup> "μπάλωμα επιφανείας" (βλ [1], σημείωση σελ. 64)

Εφόσον  $M \subset \mathbb{R}^3$  ο  $T_p M$  θα αναφέρεται και ως εφαπτόμενο επίπεδο. Θα έχει διάσταση 2 (για απόδειξη βλ. [2] σελ. 63), δηλαδή  $T_p M = \text{span}\{X_u(\alpha, \beta), X_v(\alpha, \beta)\}$  όπου  $X(\alpha, \beta) = p$ .

**Παράδειγμα 1.4.2** Έστω  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$  με κανονική παραμέτρηση

$$M = \{X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\} \quad \text{και} \quad X(q) = p \in \mathbb{R}^3, \quad \text{όπου} \quad q = (u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Τότε ισχύουν

- Ο εφαπτόμενος χώρος παράγεται από τα  $X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)$ .
- Το  $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)$  είναι κάθετο στην  $M$  και κατά συνέπεια στο  $T_p M$  στο σημείο  $p$

Άρα για το τυχαίο σημείο  $p(x, y, z)$  του επιπέδου  $T_p M$  θα ισχύει

$$\langle (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0), X_u(q) \times X_v(q) \rangle = 0. \quad (\text{εξίσωση 1.4.2})$$

Αυτή είναι και η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου.

**Παράδειγμα 1.4.3** Έστω  $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$  στο σημείο  $p = (1, 1, 0)$  της επιφάνειας ισχύουν

$$X_u = (1, 0, 2)$$

$$X_v = (0, 1, -2)$$

$$X_u \times X_v = (-2, 2, 1)$$

άρα για το τυχαίο σημείο στο εφαπτόμενο επίπεδο θα έχουμε

$$\langle (x, y, z) - (1, 1, 0), (-2, 2, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow -2(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y + z = 0.$$

**Παράδειγμα 1.4.4** Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της

επιφάνειας του ελλειψοειδούς  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  στο σημείο του  $p = (x_0, y_0, z_0)$  δίνεται από τον

$$\text{τύπο} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

**Απόδειξη**

$$\text{Έστω } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \quad \text{Τότε } f_x(p) = \frac{2x}{a^2} \Big|_p, \quad f_y(p) = \frac{2y}{b^2} \Big|_p, \quad f_z(p) = \frac{2z}{c^2} \Big|_p$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  και το  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$  θα είναι κάθετα. Με πράξεις

$$\text{προκύπτει ο τύπος } \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1 \quad \blacksquare$$

Το κάθετο διάνυσμα είναι εξίσου σημαντικό με το εφαπτόμενο επίπεδο για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών της επιφάνειας. Θα το κανονικοποιήσουμε στην επόμενη παράγραφο. Παρατηρούμε όμως ότι εδώ δεν είναι απαραίτητο να έχει μοναδιαίο μέτρο, ώστε να καθοριστεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου, στο σημείο  $p$  της επιφάνειας.

## 1.5 Θεμελιώδεις μορφές

Η πρώτη και δεύτερη θεμελιώδης μορφή καθορίζουν τοπικά τη γεωμετρία μιας κανονικής επιφάνειας στον  $\mathbb{R}^3$ . Ορίζοντας κατάλληλα τρεις συναρτήσεις  $E, F, G$  τάξης τουλάχιστον  $C^3$  (δηλ. με συνεχείς παραγώγους 3ης τάξης) και τρεις συναρτήσεις  $e, f, g \in C^1$ , με πεδίο ορισμού  $U \subset \mathbb{R}^2$  (είναι οι θεμελιώδεις μορφές που θα αναπτύξουμε σ' αυτή την παράγραφο), μπορούμε να μελετήσουμε τοπικά μία επιφάνεια. ([2], σελ 95). Η μελέτη αυτή γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλων καμπυλών (γεωδαισιακές). Στη συνέχεια ορίζουμε την πρώτη θεμελιώδη μορφή.

**I) Ορισμός 1.5.1** Έστω  $M$  κανονική επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  το εσωτερικό γινόμενο στον εφαπτόμενο διανυσματικό χώρο  $T_p M$ , όπου το  $p \in M$ . Ορίζουμε ως **πρώτη θεμελιώδη μορφή** την ποσότητα  $\mathbb{I} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{I}_p(Z) = \langle Z, Z \rangle = \|Z\|^2$  για κάθε διάνυσμα του  $T_p M$ .

Αυτή

- είναι θετικά ορισμένη και τετραγωνική
- είναι διγραμμική και συμμετρική (δηλαδή  $\langle \lambda_1 Z, \lambda_2 W \rangle = \langle \lambda_2 W, \lambda_1 Z \rangle = \lambda_1 Z + \lambda_2 W$ )
- καθορίζει το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων  $Z, W$  στον εφαπτόμενο χώρο  $T_p M$

μέσω της ταυτότητας πολικότητας  $\langle Z, W \rangle = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_p(Z+W) - \mathbb{I}(Z) - \mathbb{I}(W))$  (βλ. [2] σελ. 76)

- βοηθά να ορίσουμε το **μήκος μιας καμπύλης  $\gamma$**  σε μια επιφάνεια  $M$  ( $\gamma \in M$ ) μέσω της σχέσης

$$\gamma : I \rightarrow M, \text{ και } \gamma \text{ είναι } C^1, \text{ τότε } L(\gamma) = \int_I \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt$$

- ορίζει μια **μετρική  $d$**  μεταξύ δύο σημείων  $p, q$  της κανονικής επιφάνειας  $M$  ως εξής:

Αν  $C_{pq}$  το σύνολο των καμπυλών που περνά από τα  $p, q$  ορίζουμε ως μήκος  $d(p, q)$  τον ελάχιστο μη αρνητικό αριθμό των μηκών  $L(\gamma)$  της καμπύλης. Φορμαλιστικά:

$\gamma : [0, 1] \rightarrow M \wedge (\gamma \in C_{pq} : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q)$  ορίζουμε

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+, d(p, q) = \inf \{ L(\gamma) : \gamma \in C \}$$

*Το μήκος υπάρχει, δηλαδή η συνάρτηση  $L$  έχει ελάχιστο, καθώς τα δύο σημεία βρίσκονται σε ένα κλειστό, άρα και συμπαγές υποσύνολο της επιφάνειας  $M$ . Το θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιηθεί και για το πιο ουσιαστικό κομμάτι της εργασίας, όπου θα οριστούν η μέγιστη και ελάχιστη καμπυλότητα.*

Το σύνολο  $(M, d)$  είναι μετρικός χώρος δηλαδή

- i)  $d(p, q) \geq 0$ , ii)  $d(p, q) \Leftrightarrow p = q$ , iii)  $d(p, q) = d(q, p)$ , iv)  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q), \forall p, q, r \in M$

*Το μήκος καμπύλης και η επαγόμενη μετρική, αλλά και όλες οι ιδιότητες που καθορίζονται αποκλειστικά από την πρώτη θεμελιώδη μορφή ονομάζονται εσωτερικές ιδιότητες της επιφάνειας  $M$ .*



Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες θεωρούμε ένα διάνυσμα  $w$  του  $T_pM$  εφαπτόμενου χώρου. Αυτό αποδεικνύεται ότι είναι το μοναδικό που εφάπτεται σε μια καμπύλη  $\gamma$  με  $\gamma(0)=p$  που περνάει από το  $p$ .

Θυμίζουμε ότι  $p = X(u, v) \equiv X(q) \in X(U)$  και ότι ο  $T_pM$  παράγεται από τα  $X_u(u, v)$ ,  $X_v(u, v)$ .

Τότε λόγω της διγραμμικότητας και της γραμμικής ανεξαρτησίας των  $u, v$  παίρνουμε

$$\langle w, w \rangle = \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, \lambda_1 u + \lambda_2 v \rangle = \lambda_1^2 E(q) + 2\lambda_1 \lambda_2 F(q) + \lambda_2^2 G(q)$$

Όπου τα

$$E(q) = \langle X_u(q), X_u(q) \rangle, \quad G(q) = \langle X_v(q), X_v(q) \rangle,$$

$$F(q) = \langle X_u(q), X_v(q) \rangle$$

είναι τα **θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης** στο  $p$  για την επιφάνεια  $M$ .

Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ισχύουν

$$E(q) = \|X_u(q)\|^2, \quad G(q) = \|X_v(q)\|^2,$$

$$F(q) = \langle X_u(q), X_v(q) \rangle = \langle X_v(q), X_u(q) \rangle, \text{ λόγω της συμμετρικότητας της διγραμμικής μορφής}$$

Πριν προχωρήσουμε στη δεύτερη θεμελιώδη μορφή θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και στοιχεία σημαντικά για τη μελέτη μας, που συνδέονται με την πρώτη θεμελιώδη μορφή, είναι δηλαδή *εσωτερικές ιδιότητες της επιφάνειας*.

**Ορισμός 1.5.1α** Ονομάζουμε **διαφορικό**  $dX(u, v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  την απεικόνιση που ορίζεται με τον πίνακα  $[dX]: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $[dX](u, v) = (X_u, X_v)^t$  Αυτό οδηγεί στο

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t$$

• Ο  $T_pM$  είδαμε ότι παράγεται από τα  $X_u(u, v)$ ,  $X_v(u, v)$ . Για τυχαία διανύσματα  $Z, W \in T_pM$ , αν  $Z = \alpha X_u + \beta X_v$ ,  $W = \gamma X_u + \delta X_v$  οδηγούμαστε στο

$$\langle Z, W \rangle_p = \alpha\beta E + (\alpha\delta + \beta\gamma)F + \beta\delta G \text{ και για } Z=W \text{ παίρνουμε ότι}$$

$$I_p(Z) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Εδώ θα σημειώσουμε ότι αν  $E=G (=1)$  και  $F=0$  οδηγούμαστε στην ουσία της παρουσίασης, που είναι οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Η συμμετρικότητα και διγραμμικότητα της  $I: T_pM \rightarrow \mathbb{R}^+$  μας δίνει το δικαίωμα να ψάξουμε για τέτοια τροποποίηση της απεικόνισης.

**Ορισμός 1.5.1β** Έστω  $M_1$  και  $M_2$  κανονικές επιφάνειες. Μία λεία απεικόνιση  $f: M_1 \rightarrow M_2$  λέγεται **τοπική ισομετρία** εάν απεικονίζει καμπύλες της  $M_1$  σε καμπύλες ίσου μήκους της  $M_2$

Μία αμφιδιαφόριση  $\varphi$  μεταξύ κανονικών επιφανειών  $M_1, M_2$  διατηρεί τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές και οι  $M_1, M_2$  λέγονται **ισομετρικές** ([2], σελ 78)

**Ορισμός 1.5.1γ** Έστω  $M_1$  και  $M_2$  κανονικές επιφάνειες. Μία λεία απεικόνιση  $f: M_1 \rightarrow M_2$  λέγεται **σύμμορφη** εάν δύο τεμνόμενες καμπύλες της  $M_1$ , έστω  $\gamma_1, \tilde{\gamma}_2$ , απεικονίζονται μέσω της  $f$  σε τεμνόμενες καμπύλες  $\gamma'_1, \tilde{\gamma}'_2$  της  $M_2$  με ίση γωνία.

Μία αμφιδιαφόριση  $f$  είναι σύμμορφη απεικόνιση αν και μόνο αν για κάθε τμήμα επιφανείας  $X_1$  της  $M_1$ , οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές του  $X_1$  και του  $f \circ X_1$  είναι ανάλογες. ([2], σελ 80)

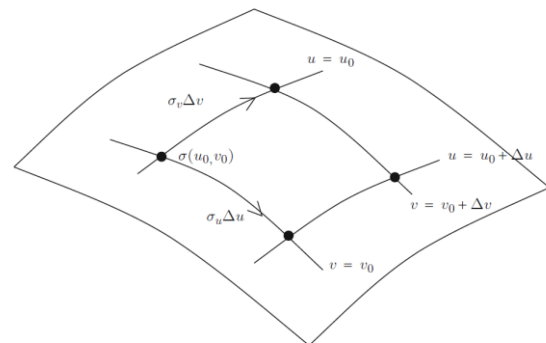
**Ορισμός 1.5.1δ** Το εμβαδό του τμήματος επιφανείας ορίζεται ως

$$A(X(U)) = \int_U \sqrt{\|X_u \times X_v\|^2} du dv, \quad A(X(U)) = \int_U \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (1.5.1\beta)$$

και αποδεικνύεται ότι δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της  $M$ . ([1], σελ 132 πρόταση 1.6.4)

Καθώς το εμβαδό είναι πολύ σημαντικό στη μελέτη μας, θα δώσουμε κάποια επιπλέον στοιχεία.

Κατ' αρχήν θεωρούμε μια μικρή μεταβολή (διαταραχή)  $\Delta u$  και  $\Delta v$  στην απεικόνιση  $\sigma$  του σημείου  $(u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$  μέσω της  $\sigma$  στην επιφάνεια  $M$ , όπως απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Οι παραμέτρικές καμπύλες της επιφάνειας που σχετίζονται με το  $(u_0, v_0)$



δημιουργούν το κατά προσέγγιση παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος.

$$\text{Ισχύει } \|\sigma_u \Delta u \times \sigma_v \Delta v\| = \|\sigma_u \times \sigma_v\| \langle \Delta u, \Delta v \rangle$$

σύμφωνα με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου. Η άθροιση όλων των στοιχειωδών εμβαδών είναι το εμβαδό της επιφάνειας. Έτσι προκύπτει η σχέση

$$A_\sigma(M) = \iint_M \|\sigma_u \times \sigma_v\| du dv \quad \text{που είναι η ίδια με την (1.5.1}\beta)$$

Ισχύει από την αναλυτική γεωμετρία ότι  $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$

και αν το εφαρμόσουμε στην

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = (\sigma_u \times \sigma_v) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) = \dots = EG - F^2 \quad \text{παίρνουμε τη δεύτερη σχέση.}$$

Δείξαμε έτσι γιατί το εμβαδό εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή, άρα είναι εσωτερική ιδιότητα της επιφάνειας.

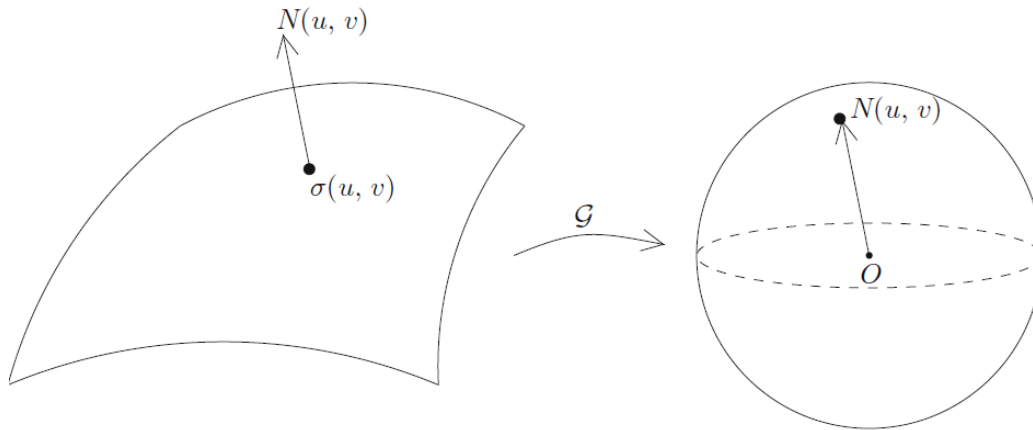
Το εμβαδό ενός τμήματος επιφανείας παραμένει αναλλοίωτο κατά την αναπαραμέτρηση τμήματος επιφανείας. ([1], πρόταση 6.4.3)

Ισχύει επίσης το θεώρημα

Μια τοπική αμφιδιαφόριση  $M_1 \rightarrow M_2$  είναι ισεμβαδική, αν και μόνο αν, διατηρούνται τοπικά οι πρώτες θεμελιώδεις μορφές και ικανοποιούν τη σχέση

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$$

**II) Ορισμός 1.5.2** Έστω  $M$  κανονική επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$ . Μια λεία απεικόνιση  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  ονομάζεται **απεικόνιση Gauss της  $M$**  (orientation) αν για κάθε  $p \in M$  η εικόνα  $N(p)$  έχει διάνυσμα θέσης ίσο με το μοναδιαίο κάθετο της  $M$  στο  $p$ .



Κάθε κανονική επιφάνεια είναι τοπικά προσανατολισμένη. Αυτό γιατί αν

$U \subset \mathbb{R}^2$  &  $X: U \rightarrow X(U) \subset M$  είναι μια τοπική παραμέτρηση της  $M$  με  $X(\bar{0}) = p$  τότε για κάθε

$$N(q) = N(X(u, v)) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|}$$

η  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  είναι μια τοπική απεικόνιση Gauss της  $M$ .

Θα το χρησιμοποιούμε απλοποιημένο και ως  $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$ . ([3] σελ. 11)

Εύκολα συμπεραίνουμε για το διάνυσμα  $N$ :

- είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα  $x_u, x_v$  (που με τη σειρά τους όπως είδαμε είναι εφαπτόμενα στο σημείο  $p \in S$ )
- έχει μοναδιαίο μέτρο

Για να ορίσουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή μας χρειάζεται ο **τελεστής σχήματος** (απεικόνιση Weingarten) που είναι το διαφορικό της απεικόνισης Gauss, και το "-" μπαίνει για υπολογιστικούς λόγους ([1] σελ 151).

**Ορισμός 1.5.3** Ορίζουμε ως **τελεστή σχήματος** την συμμετρική διγραμμική απεικόνιση

$$S_p: T_p M \rightarrow T_p M, S_p(Z) = -dN_p(Z) \text{ για κάθε } Z \in T_p M.$$

- Είναι πολύ σημαντικό ότι το διάνυσμα  $S_p(Z)$  σε κάθε διάνυσμα  $Z$  του εφαπτόμενου χώρου έχει την ιδιότητα  $\langle S_p(Z), W \rangle = \langle Z, S_p(W) \rangle$ , δηλαδή ο  $S$  είναι αυτοσυζυγής.

- Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας του  $S$  είναι συμμετρικός και διαγωνιοποιήσιμος, με πραγματικές ιδιοτιμές.
- Επομένως υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{Z_1, Z_2\}$  ιδιοδιανυσμάτων της απεικόνισης  $S_p$  του εφαπτομενικού χώρου  $T_p S$  ώστε

$$S_p(Z_1) = \lambda_1 Z_1 \text{ και } S_p(Z_2) = \lambda_2 Z_2 \text{ και } \lambda_1, \lambda_2 \text{ να είναι οι ιδιοτιμές της } S_p \text{ ([2], σελ 93)}$$

Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο καθώς θα μας βοηθήσει να ορίσουμε τις κύριες καμπυλότητες, που με τη σειρά τους θα μας οδηγήσουν στη μέση καμπυλότητα  $H$ . Μέσω της  $H$  μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία επιφάνεια έχει ελάχιστη έκταση.

Ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο  $p$  μιας επιφάνειας  $X$ , που παράγεται από τα διανύσματα  $X_u, X_v$ , είδαμε ότι ταυτίζεται ισομορφικά με την απεικόνιση Weingarten,

$$\text{δηλαδή } T_p M \cong T_{N(p)} \mathbb{S}^2,$$

Αν ο πίνακας του τελεστή  $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$  ως προς τη βάση  $\{X_u, X_v\}$  είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ θα ισχύει } \begin{pmatrix} S_p(X_u) \\ S_p(X_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

Ισχύουν επίσης  $dN_p(X_u) = N_u$  και  $dN_p(X_v) = N_v$

**Ορισμός 1.5.4** Η Δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι η συμμετρική διγραμμική απεικόνιση

$$III : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_p(Z, W) = \langle S_p(Z), W \rangle$$

για οποιαδήποτε δύο εφαπτόμενα διανύσματα  $Z, W$ , του  $T_p M$ .

Στην ουσία τώρα, από τη σχέση (1.5.3) το  $S_p(X_u)$  και το  $S_p(X_v)$  είναι γραμμικοί συνδυασμοί

των  $X_u$  και  $X_v$  και ισχύει  $dN_p(X_u) = \frac{d}{dt}(N \circ \alpha) \Big|_{t=0} = \dots N_u$  ([2] σελ.94)

**Ορισμός 1.5.5** Τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης ορίζονται ως

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{[X_u X_v X_{uu}]}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{[X_u X_v X_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{[X_u X_v X_{uv}]}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{[X_u X_v X_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{[X_u X_v X_{vv}]}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{[X_u X_v X_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

όπου οι διαφορετικές εκφράσεις χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση και η ποσότητα

$[X_u X_v X_{uu}] = \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle$  είναι το μικτό γινόμενο, σύμφωνα με τον ορισμό 1.2.4β

. Για αναλυτικές αποδείξεις των παραπάνω σχέσεων μπορεί να ανατρέξει κανείς στο [1] σελ.

152

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η τελευταία στήλη π.χ.  $e = \frac{[X_u X_v X_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}$  μας δίνει ότι τα ποσά

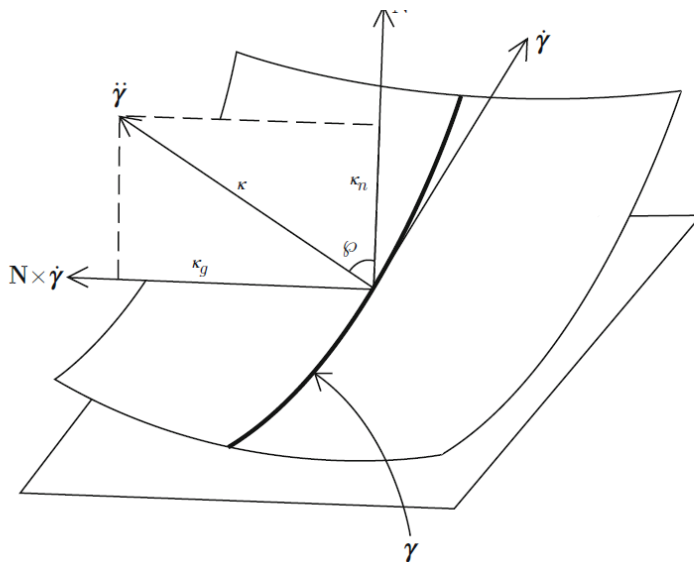
δεύτερης τάξης παράγονται μόνο από τα δύο εφαπτόμενα,  $X_u$  και  $X_v$ , και το μικτό γινόμενο με το  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vv}$  αντίστοιχα, που προκύπτει με μερική παραγωγή των  $X_u$  και  $X_v$ .

Αυτό οδηγεί στο Theorema Egregium του Gauss, που δείχνει ότι μπορούμε να συμπεράνουμε την κύρτωση μιας επιφάνειας, σαν εσωτερικοί παρατηρητές πάνω σ' αυτή. Αναλυτικά μπορεί να βρεθεί στα ([1], [2])

**Ορισμός 1.5.6** Ονομάζουμε κάθετη καμπυλότητα (normal curvature) τον αριθμό

$$\kappa_n(Z) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle, \text{ όπου}$$

- $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  είναι η απεικόνιση Gauss της προσανατολισμένης κανονικής επιφάνειας  $M$ ,
- το  $p \in M$  είναι σημείο της, και το  $Z \in T_p M$  είναι διάνυσμα στον εφαπτομενικό χώρο
- $\gamma: I \rightarrow M$  οποιαδήποτε λεία καμπύλη με παραμέτρηση μήκους τόξου, και επιπλέον  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = Z$



Δεδομένου ότι το εσωτερικό γινόμενο συνδέεται άμεσα με τη γωνία των αντίστοιχων διανυσμάτων το σχήμα μας δείχνει τη φυσική σημασία της κάθετης καμπυλότητας: είναι ο αριθμός που συνδέει το κάθετο διάνυσμα  $N(p)$  στο  $p$  με την καμπυλότητα στην  $\gamma \in M$  μέσω της  $\dot{\gamma}(0)$  και δείχνει στην ουσία την κύρτωση της επιφάνειας.

Για την κάθετη καμπυλότητα ισχύει το θεώρημα του Meusnier, που την συνδέει με την δεύτερη θεμελιώδη μορφή

**Πρόταση 1.5.7 (θεώρημα του Meusnier)** Η κάθετη καμπυλότητα στη διεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος  $Z$ , της επιφάνειας  $M$ , στο σημείο της  $p$ , ικανοποιεί τη σχέση

$$\kappa_n(Z) = \text{III}_p \langle Z, Z \rangle = \langle S_p(Z), Z \rangle$$

**Απόδειξη:** Αν  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = Z$  και  $N(\gamma(s))$  είναι κάθετο στο εφαπτόμενο  $\dot{\gamma}(s)$  (θυμόμαστε τη σύμβαση στην παρ.1.7 ότι το  $s$  εδώ δηλώνει το μήκος τόξου, ώστε το  $N(\gamma(s))$  να είναι κάθετο σ' αυτό), άρα

$$\frac{d}{ds}(\langle \dot{\gamma}(s), N(\gamma(s)) \rangle) = 0 \Rightarrow \langle \dot{\gamma}(s), N(\gamma(s)) \rangle + \langle \dot{\gamma}(s), dN(\gamma(s))\dot{\gamma}(s) \rangle = 0 \text{ και καθώς}$$

$$\kappa_n(Z) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle, \quad Z = \dot{\gamma}(0) \text{ παίρνουμε}$$

$$\kappa_n(Z) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle = -\langle Z, dN_p Z \rangle \quad \text{άρα}$$

$$\kappa_n(Z) = \text{III}_p \langle Z, Z \rangle = \langle S_p(Z), Z \rangle \quad \blacksquare$$

Ο εφαπτόμενος χώρος  $T_p M$  μας ενδιαφέρει για τη μελέτη των χαρακτηριστικών της επιφάνειας. Έτσι μπορούμε να περιοριστούμε σε ένα μοναδιαίο κύκλο γύρω από το σημείο  $p$ , έστω  $T_p^1 M = \{Z \in T_p M : \|Z\| = 1\}$ .

Ο κύκλος όμως είναι κλειστή καμπύλη και η επιφάνεια που ορίζει συμπαγής, άρα από την ανάλυση γνωρίζουμε ότι η συνεχής συνάρτηση  $\tilde{\kappa}_n : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\kappa}_n(Z) = \kappa_n(Z)$ , που είναι ο περιορισμός της συνάρτησης  $\kappa_n$ , παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο διευθύνσεις, που καθορίζονται από τα αντίστοιχα διανύσματα  $Z_1$  και  $Z_2$  στον εφαπτόμενο χώρο  $T_p^1 M$  τέτοιες ώστε

$$\kappa_1(p) \equiv \tilde{\kappa}_n(Z_1) = \max_{Z \in T_p^1 M} \kappa_n$$

$$\kappa_2(p) \equiv \tilde{\kappa}_n(Z_2) = \min_{Z \in T_p^1 M} \kappa_n$$

Αυτές ονομάζονται **κύριες καμπυλότητες** και δηλώνουν στην ουσία τις κατευθύνσεις προς τις οποίες η κάθετη καμπυλότητα είναι μέγιστη και ελάχιστη αντίστοιχα, *άρα προς τα που η επιφάνεια κυρτώνει περισσότερο και προς τα που λιγότερο, από οποιοδήποτε άλλο προσανατολισμό.*

Αν σε κάποιο σημείο οι δύο καμπυλότητες είναι ίσες, δηλαδή  $\kappa_1 = \kappa_2$  το σημείο λέγεται **ομφαλικό**. Στην ουσία στην περιοχή ενός τέτοιου σημείου, η επιφάνεια θα μοιάζει με επίπεδο ή με σφαίρα, όπως θα δούμε αμέσως μόλις δώσουμε τους δύο τελευταίους βασικούς ορισμούς της παρουσίαισης. Πρώτα όμως ένα τελευταίο θεμελιώδες θεώρημα:

#### Πρόταση 1.5.8: Θεώρημα Euler

Έστω  $M$  μια προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  και έστω  $p$  σημείο της,  $T_p M$  το εφαπτόμενο επίπεδο στο  $p$ , και  $Z \in T_p M$ .

Τότε το  $Z$  είναι κύρια διεύθυνση αν και μόνο αν το  $Z$  είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή σχήματος

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M \quad ^8$$

**Απόδειξη:** Ο ορισμός 1.5.3 μας δίνει ότι για τον  $S_p$  υπάρχουν ιδιοδιανύσματα  $Z_1$  και  $Z_2$  ώστε  $\{Z_1, Z_2\}$  να είναι ορθοκανονική βάση, άρα θα ισχύουν

<sup>8</sup> Δηλαδή υπάρχουν πάντα δύο ιδιοδιανύσματα του  $T_p M$ , καθώς υπάρχουν δύο κύριες καμπυλότητες σε μία κανονική επιφάνεια.

$S_p(Z_1)=\lambda_1 Z_1$  και  $S_p(Z_2)=\lambda_2 Z_2$  με  $\lambda_1, \lambda_2$  τις αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\in \mathbb{R}$ .

Άρα κάθε μοναδιαίο εφαπτόμενο  $Z(\theta)$  στον  $T_p M$  θα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός

$$Z(\theta)=\cos\theta Z_1+\sin\theta Z_2.$$

Η καμπυλότητα στο  $Z(\theta)$  γίνεται

$$\begin{aligned} \kappa_n(Z(\theta)) &= \langle S_p(Z(\theta)), Z(\theta) \rangle \quad (\text{ή ακόμα και } \kappa_n(\theta) = \text{III}_p(Z(\theta), Z(\theta))) \\ &= \langle S_p(\cos\theta Z_1 + \sin\theta Z_2), \cos\theta Z_1 + \sin\theta Z_2 \rangle \end{aligned}$$

που επειδή η  $S_p$  είναι συμμετρική και διγραμμική γίνεται

$$\kappa_n(Z(\theta)) = \cos^2\theta \langle S_p(Z_1), Z_1 \rangle + \sin^2\theta \langle S_p(Z_2), Z_2 \rangle + \cos\theta\sin\theta (\langle S_p(Z_1), Z_2 \rangle + \langle S_p(Z_2), Z_1 \rangle)$$

Όμως  $\langle S_p(Z_1), Z_1 \rangle = \lambda_1 Z_1^2 = \lambda_1$ ,  $\langle S_p(Z_2), Z_2 \rangle = \lambda_2 Z_2^2 = \lambda_2$  γιατί τα  $Z_1, Z_2$  είναι μοναδιαία και καθώς είναι κάθετα μεταξύ τους οι όροι στην παρένθεση  $\cos\theta\sin\theta$  είναι 0.

Άρα τελικά  $\kappa_n(\theta) = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta$  που για  $\theta=0$  και  $\theta=\pi/2$  δίνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Αυτές όμως είναι και οι κύριες καμπυλότητες  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$

Η σχέση  $\kappa_n(\theta) = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta$  λέγεται και *τύπος του Euler* ■

Η ανάλυση των χαρακτηριστικών του  $S_p$  (διγραμμική τετραγωνική μορφή) που έγινε ως τώρα, μας δίνει το δικαίωμα να πούμε ότι ως προς την ορθοκανονική βάση των κύριων

διευθύνσεων  $\{Z_1, Z_2\}$ , ο πίνακας του θα είναι ο διαγώνιος  $[S_p] = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$

Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό

**Ορισμός 1.5.9** Έστω  $M$  μια προσανατολισμένη κανονική επιφάνεια με απεικόνιση Gauss

$N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ . και έστω  $p$  σημείο της,  $T_p M$  το εφαπτόμενο επίπεδο στο  $p$ , και  $Z \in T_p M$ .

Ορίζουμε ως

- **μέση καμπυλότητα  $H$**  την ποσότητα  $H = \frac{1}{2} \text{Tr}([S_p]) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$

- **καμπυλότητα Gauss** την ποσότητα  $K = \det[S_p] = \kappa_1 \cdot \kappa_2$

Αν  $H(p)=0$  για κάθε  $p \in M$  η επιφάνεια λέγεται επιφάνεια ελάχιστης έκτασης (ελαχιστική, minimal surface).

Αν  $K(p)=0$  για κάθε  $p \in M$  η επιφάνεια ονομάζεται επίπεδη.

Ισχύουν διάφορα σημαντικά συμπεράσματα για την μέση καμπυλότητα  $H$  και την καμπυλότητα Gauss:

- Ισχύει πάντα  $H^2 \geq K$  και η ισότητα ισχύει μόνο για τα ομφαλικά σημεία.

- $H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$ ,  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$

- Σε μία συμπαγή επιφάνεια υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $p \in M$  με θετική καμπυλότητα Gauss  $K$ .

- Δεν υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες στον  $\mathbb{R}^3$  με  $K \leq 0$ . Ειδικότερα, δεν υπάρχουν συμπαγείς του  $\mathbb{R}^3$  ελάχιστης έκτασης. Άρα η σφαίρα δεν είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης.

- Η μέση καμπυλότητα  $H$  μιας κανονικής επιφάνειας στο σημείο  $p$  δίνεται από τη σχέση

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_p(\theta) d\theta, \text{ όπου } \kappa_p(\theta) \text{ είναι η κάθετη καμπυλότητα στο } p, \text{ ως προς τη}$$

κατεύθυνση που σχηματίζει η γωνία  $\theta$  με σταθερό διάνυσμα.

### Σύνοψη του Πρώτου Κεφαλαίου

Στόχος αυτού του κεφαλαίου ήταν να ορίσουμε την έννοια της μέσης καμπυλότητας για μια επιφάνεια. Έτσι αρχικά χρειάστηκε να ορίσουμε την κανονική παραμέτρηση της καμπύλης στον  $\mathbb{R}^2$  και τον  $\mathbb{R}^3$ , και να αναφέρουμε τα τρία διανύσματα που καθορίζουν τη θέση του σημείου της καμπύλης στο χώρο, δηλαδή το πλαίσιο Frenet. Ορίσαμε την κανονική επιφάνεια και τις θεμελιώδεις μορφές, για να φτάσουμε στις κύριες καμπυλότητες και τη σύνδεση τους με τον τελεστή σχήματος. Τέλος ορίσαμε τη μέση καμπυλότητα  $H$ , ως ημίαθροισμα των κύριων καμπυλοτήτων, και την καμπυλότητα Gauss, που είναι το γινόμενο τους. Η μέση καμπυλότητα  $H$  θα καθορίσει την έννοια της επιφάνειας ελάχιστης έκτασης.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ

#### 2.1 Ιστορική προσέγγιση των επιφανειών ελάχιστης έκτασης

Οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης ιστορικά αποδίδονται στον Plateau αλλά η πρώτη ουσιαστική προσέγγιση είχε γίνει πολύ νωρίτερα από τον Lagrange. Το πρόβλημα του Plateau θέτει το ερώτημα, ποια είναι η εξίσωση μιας επιφάνειας που περιέχεται σε μια απλή κλειστή καμπύλη, με την προϋπόθεση αυτή να έχει το ελάχιστο εμβαδό.

Γενικά αναφέρεται και ως πρόβλημα της σαπουνόφουσας, καθώς διατυπώθηκε η εικασία ότι μία μεμβράνη σε προσαρμοσμένη σε ένα κλειστό βρόγχο θα τείνει να καταλάβει την ελάχιστη δυνατή έκταση<sup>9</sup>

Όπως αναφέρθηκε, ο Lagrange έφτασε πρώτος να ορίσει μία συνθήκη, ώστε μία επιφάνεια με κάποια συγκεκριμένη παραμέτρηση, να έχει ελάχιστη έκταση.

##### 2.1.1 Η απόδειξη του Langrange

Έστω μία συνάρτηση  $z=f(x,y)$ , με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x, y$ .

Έστω ακόμα

- Μία κλειστή περιοχή  $D$  του  $R^2$  με το σύνορο  $\partial D$  κλάσης  $C^1$ , δηλαδή με συνεχείς μερικές παραγώγους.

---

<sup>9</sup> Παραδείγματα στο Oprea, J. *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*. American Mathematical Society, 2000

- Η  $z=f(x,y)$  να ορίζεται ως  $f:\bar{D}\rightarrow\mathbb{R}$  και να είναι κλάσης  $C^2$  (δηλαδή με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους στο κάλυμμα του  $D$ ) και το γράφημα της να είναι

$$G_f=\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \bar{D}, z=f(x, y)\}.$$

Τότε η συνθήκη ώστε η  $z=f(x,y)$  έχει ελάχιστη έκταση, είναι η

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = 0, \quad (2.1.1)$$

όπου  $f_x, f_y$  οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι της  $z=f(x,y)$

**Παρατήρηση :** Αυτή είναι η παραμέτρηση Monge που δώσαμε στον ορισμό 1.3.2. Το συμπέρασμα του Lagrange γενικεύεται. Αυτό συμβαίνει γιατί *τοπικά* κάθε συνάρτηση στον  $\mathbb{R}^3$  μπορεί να παρασταθεί με παραμέτρηση Monge, δηλαδή ως  $z=f(x,y)$  <sup>10</sup>

Η αποδεικτική πορεία που ακολούθησε ο Lagrange το 1760 είναι αυτή που περιγράφουμε στη συνέχεια.

Αρχικά θεωρούμε την παραμέτρηση της  $\sigma(x,y)=(x,y,f(x,y))$  και οι σχέσεις **1.5.1δ** μας δίνουν ότι έχει εμβαδό

$$A_\sigma(D) = \iint_D \|\sigma_x \times \sigma_y\| dx dy \quad (2.1.1\alpha)$$

Θα δώσουμε μια πιο αναλυτική γραφή αυτής της σχέσης για το σκοπό μας. Υπολογίζουμε

$$\sigma_x \times \sigma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + 1\vec{k} \quad \text{άρα}$$

$$\|\sigma_x \times \sigma_y\| = \sqrt{(-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + 1\vec{k})^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Το στοιχειώδες εμβαδό της παραμέτρησης  $\sigma$  από την αναλυτική γεωμετρία γνωρίζουμε ότι εκφράζεται από το  $\|\sigma_x \times \sigma_y\|$  άρα η σχέση (2.1.1α) γίνεται

$$A_\sigma(D) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

Η διαδικασία τώρα για την προσέγγιση της  $f$  ως επιφάνειας ελάχιστης έκτασης απαιτεί να ορίσουμε την κλάση των συναρτήσεων  $h$  με την ιδιότητα να μηδενίζονται (vanish) στο σύνορο, δηλαδή  $\partial D_h = 0$ , και οι  $h$  να είναι  $C^2$  στο  $D$ ,  $C^1$  στο  $\partial D$ .

<sup>10</sup> Αυτό στηρίζεται στο θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (βλ. π.χ. Αλικάκος-Καλογερόπουλος "συνήθεις διαφορικές εξισώσεις", παράγραφος 2.5. Βασική προϋπόθεση οι συναρτήσεις  $f(x,y)$  να έχουν μη μηδενικές συνεχείς μερικές παραγώγους, να είναι δηλαδή  $C^1$ .

Τότε αν θεωρήσουμε παράμετρο  $s \in \mathbb{R}$  και την περιοχή  $A_s(f+sh)$  της οικογένειας συναρτήσεων όλων των διαταραχών  $s \cdot h$  της επιφάνειας  $f$ , η  $f$  θα είναι κρίσιμο (stationary) σημείο αν και μόνο αν  $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(f+sh) = 0$ .

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(f+sh) = 0.$$

Τα κρίσιμα σημεία ορίζουν ακρότατα, στην περίπτωση μας ελάχιστη έκταση.

Επειδή οι συναρτήσεις θεωρούνται ομοιόμορφα συνεχείς το εμβαδό αυτό γίνεται

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(f+sh) &= \int_D \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \sqrt{1+(f_x+sh_x)^2+(f_y+sh_y)^2} dx dy \\ &= \int_D \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx dy \quad (\text{θεωρούμε } |\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2) \end{aligned}$$

Καθώς το  $s \rightarrow 0$  θα ισχύει  $(s)'=1$  άρα η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \sqrt{1+(f_x+sh_x)^2+(f_y+sh_y)^2} &= \frac{(1+(f_x+sh_x)^2+(f_y+sh_y)^2)'}{2\sqrt{1+(f_x+sh_x)^2+(f_y+sh_y)^2}} \\ &= \frac{2f_x h_x (s)' + 2f_y h_y (s)' + 2s(h_x^2 + h_y^2)'}{2\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε με παραγοντική ολοκλήρωση την ποσότητα

$$\int_D \frac{f_x h_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx dy = [f_x h]_{\partial D} - \int_D \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} h dx dy$$

και όμοια την

$$\int_D \frac{f_y h_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx dy = [f_y h]_{\partial D} - \int_D \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} h dx dy$$

και κατόπιν προσθέτουμε κατά μέλη και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι στο σύνορο η  $h$  μηδενίζεται, άρα  $[f_x h] = [f_y h] = 0$  και καταλήγουμε στο ότι

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(f+sh) = - \int_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) h dx dy = 0$$

Επειδή αυτό πρέπει να συμβαίνει για όλες τις συναρτήσεις  $h$  αναγκαστικά θα πρέπει

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = 0 \quad (2.1.1)$$

Η τελευταία θεωρείται ιστορικά η εξίσωση του Lagrange για τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης [4]. ■

**Παρατήρηση:** Από πολλούς συγγραφείς ως συνθήκη για μία επιφάνεια ελάχιστης έκτασης δίνεται η εξίσωση ΜΔΕ

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0 \quad (2.1.1\alpha)$$

Αυτή προκύπτει από την (2.1.1) με πράξεις ως εξής:

Απόδειξη της συνθήκης  $(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0$  για τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης.

Παραγωγίζουμε ως προς x την ποσότητα

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} &= \frac{f_{xx} \cdot \sqrt{1+|\nabla f|^2} - f_x \left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)'}{\left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)^2} = \frac{f_{xx} \cdot \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} - f_x \frac{1}{2\sqrt{1+|\nabla f|^2}} (1+f_x^2+f_y^2)'}{\left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)^2} = \\ &= \frac{f_{xx} \cdot (1+f_y^2) + f_{xx} \cdot f_x^2 - f_x (f_x f_{xx} + f_y f_{yx})}{\left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)^{3/2}} = \frac{f_{xx} \cdot (1+f_y^2) + f_{xx} \cdot f_x^2 - f_x^2 f_{xx} - f_x f_y f_{yx}}{\left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε όπως και παραπάνω τη συντόμευση  $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2$  και ότι  $f_{xy} = f_{yx}$ .

Εντελώς συμμετρικά, με παραγωγή ως προς y παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = \frac{f_{yy} \cdot (1+f_x^2) - f_x f_y f_{xy}}{\left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)^{3/2}} \text{ και προσθέτοντας κατά μέλη}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{\left( \sqrt{1+|\nabla f|^2} \right)^{3/2}} = 0}$$

Η τελευταία σχέση είναι ταυτοτικά 0 όταν μηδενίζεται ο αριθμητής

$$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0 \quad (2.1.1\alpha)$$

Άρα μια επιφάνεια ελάχιστης έκτασης  $z=f(x,y)$  πληροί αναγκαστικά τη δοθείσα εξίσωση ■

**Παρατήρηση** Άμεση συνέπεια της σχέσης (2.1.1α) είναι ότι μια επίπεδη καμπύλη κλειστή  $f(x,y)=c$  περικλείει μια επιφάνεια ελάχιστης έκτασης. Αυτό συμβαίνει επειδή οι μερικές παράγωγοι στη σχέση μηδενίζονται.

Προφανώς κάθε μεταφορά ή στροφή (ισομετρία) του τμήματος επιφάνειας που περικλείεται από την απλή κλειστή καμπύλη (π.χ.  $f(z,y)=c$  ή  $f(x,z)=c$ ), όπως ορίστηκε αρχικά στην παραπάνω απόδειξη, θα αφήνει το αποτέλεσμα αυτό αναλλοίωτο.

Επομένως αποδεικνύεται ένας κανόνας προφανής διαισθητικά "μια επιφάνεια που περικλείεται από μια επίπεδη κλειστή καμπύλη έχει ελάχιστη έκταση αν και μόνο αν είναι το χωρίο του επιπέδου που περιέχεται σ' αυτή"

Αυτό μας οδηγεί στο ότι οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης παρουσιάζουν ενδιαφέρον σε τρισδιάστατες καμπύλες. Πριν δώσουμε μια πιο γενική και σύγχρονη οπτική του παραπάνω συμπεράσματος του Lagrange, θα δούμε μία επιφάνεια που μπορεί να αποδειχθεί ότι έχει ελάχιστη έκταση χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (2.1.1).

### 2.1.2 Η επιφάνεια του Scherk

Ορίζουμε ως επιφάνεια του Scherk την επιφάνεια που δίνεται με την παραμέτρηση  $z(x,y) = c \ln\left(\frac{\cos(x/c)}{\cos(y/c)}\right)$  με  $c$  σταθερά. Μπορούμε να θεωρήσουμε  $c=1$  καθώς για τις άλλες

τιμές του  $c>0$  η  $z(x,y)$  είναι σύμμορφη.<sup>11</sup> Έστω επομένως  $f(x,y,z) = (x,y, \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right))$

Παίρνουμε εύκολα με πράξεις

$$f_{yy} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad f_x = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad f_y = \frac{\sin y}{\cos y}, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$f_{xx} = -\frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

και όμοια  $f_{yy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ .

Μας χρειάζονται ακόμα τα

$$1 + f_x^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{άρα και } 1 + f_y^2 = 1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$(1 + f_y^2)f_{xx} = \frac{-1}{\cos^2 y \cdot \cos^2 x}, \quad \text{και όμοια } (1 + f_x^2)f_{yy} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$$

Προφανώς ισχύει  $-2f_x f_y f_{xy} = 0$  καθώς  $f_{xy} = 0$ .

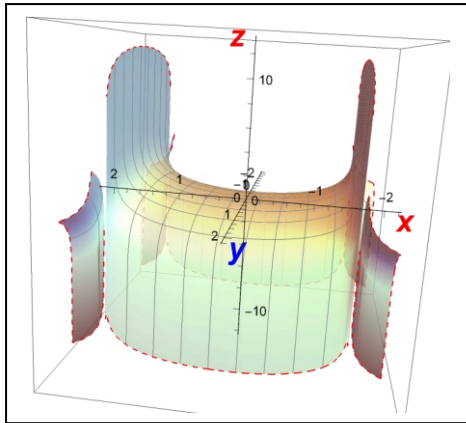
Αντικαθιστώντας στην (2.1.1α)

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} - 2 \cdot 0 + \frac{-1}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = 0$$

Επομένως η επιφάνεια  $f(x,y,z) = (x,y, \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right))$  έχει ελάχιστη έκταση ■

---

<sup>11</sup> άρα διατηρεί τις γωνίες, και επομένως τα εμβαδά που ορίζονται θα είναι ανάλογα (Ορισμός 1.5.1γ). Αυτό όμως σημαίνει ότι θα παίρνουν ελάχιστη τιμή στην ίδια θέση. (Αναλυτικά [2] Θεώρημα 4.2)



Εικόνα 1 επιφάνεια του Scherk. Πολλές από τις επόμενες επιφάνειες έχουν αυτοτομές. Εδώ έχουμε έλλειψη συνεκτικότητας λόγω του πεδίου ορισμού.

## 2.2 Επιφάνεια Ελάχιστης Έκτασης με μέση καμπυλότητα $H=0$

Η προσέγγιση του Lagrange παρουσιάζει την εξής αδυναμία: αν μια συνάρτηση ορίζεται ως  $f:=z(x,y)$ , δεν μπορεί να περιγράψει πολλές επιφάνειες (π.χ. η σφαίρα), παρά μόνο τοπικά. Επίσης, αν εξετάσουμε το πρόβλημα ως την επιφάνεια με ελάχιστο εμβαδό που περιέχεται σε μία κλειστή καμπύλη, χάνουμε πολλές κλάσεις ελαχιστικών επιφανειών.

Οι ευθειογενείς και οι επιφάνειες εκ περιστροφής είναι δύο κατηγορίες που δεν περιγράφονται από την παραμέτρηση  $z=f(x,y)$ . Θα δείξουμε ότι οι ελικοειδείς και οι αλυσσοειδείς είναι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης, και ανήκουν στις κατηγορίες αυτές.

Για τις ανάγκες μας δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 2.2.1** Επιφάνεια ελάχιστης έκτασης ορίζεται ως η λεία επιφάνεια της οποίας η μέση καμπυλότητα  $H$  είναι παντού μηδέν.

$$\text{Θυμίζουμε ότι } H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

όπου  $E, F, G$  και  $e, f, g$  τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης.

Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι, δηλαδή *κάθε επιφάνεια με ελάχιστη έκταση έχει μέση καμπυλότητα μηδέν και αντίστροφα, κάθε τμήμα επιφάνειας που έχει  $H=0$  έχει ελάχιστη έκταση*. Η παράγραφος 12.1 στο [1] είναι αφιερωμένη σ' αυτό το συσχετισμό, και η απόδειξη ακολουθεί παρόμοια συλλογιστική με την προσέγγιση του Langrange. Έχει όμως πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, καθώς ξεκινά από την διαταραχή μιας παραμέτρησης, όπως την έχουμε αναπτύξει στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου. Θα ορίσουμε τις έννοιες μέχρι το σημείο της απόδειξης και θα παραπέμψουμε στο ([1] σελ. 287 κ.έ) για το μέρος των πράξεων.

Επομένως, έστω

$$\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \sigma^0, \sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ένα τμήμα επιφάνειας}$$

$$\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \tau) \equiv \sigma^\tau \text{ η οικογένεια τμημάτων επιφανείας με τα χαρακτηριστικά:}$$

- $U$  ανεξάρτητο του  $\tau$ ,
- $\tau \in (-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$  και η απεικόνιση  $\sigma^\tau$  να είναι λεία, δηλαδή,  
 $(u, v, \tau) \mapsto \sigma^\tau(u, v)$  από το ανοικτό υποσύνολο  $\{(u, v, \tau) \mid (u, v) \in U \text{ και } \tau \in (-\delta, \delta)\}$   
(που είναι απεικόνιση  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) με την  $\sigma^\tau$  να είναι λεία.

Η επιφανειακή διακύμανση της οικογένειας  $\sigma^\tau$  είναι η συνάρτηση

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi = \dot{\sigma}^\tau \Big|_{\tau=0}, \quad \text{όπου " } \dot{\sigma}^\tau \text{ " δηλώνει την } \frac{d\sigma}{d\tau}$$

Τότε, για κάθε κλειστή καμπύλη  $\pi$ , που περιέχεται μαζί με το εσωτερικό της στο  $U$ , η  $\pi$  αντιστοιχεί σε μία απλή κλειστή καμπύλη  $\gamma^\tau = \sigma^\tau \circ \pi$  του τμήματος επιφανείας  $\sigma^\tau$ . Ως συνάρτηση επιφανείας  $A(\tau)$  ορίζουμε το εμβαδό του τμήματος  $\sigma^\tau$ , εντός της  $\gamma^\tau$ .

$$\text{Δηλαδή } A(\tau) = \iint_{\text{int}\pi} dA_{\sigma^\tau}$$

Ως εδώ έχουμε

- μία σταθερή συνοριακή καμπύλη  $\gamma$ , άρα θα ισχύει  $\gamma^\tau = \gamma$  για κάθε  $\tau$
- $\Phi(u, v) = 0$  όταν το  $(u, v)$  είναι σημείο της καμπύλης  $\pi$  (θυμίζουμε  $\gamma^\tau = \sigma^\tau \circ \pi$ )

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι στην πιο απλή περίπτωση, εκείνη της απόδειξης του

*Langrange*, είχαμε θέσει  $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(f+sh) = 0$  για τις διαταραχές των συναρτήσεων  $f+sh$ . Η

αντιστοίχιση των ιδεών είναι προφανής.

Για να δώσουμε μια εικόνα έξω από συμβολισμούς, μπορούμε να φανταστούμε ένα τεντωμένο ύφασμα σε ένα κλειστό, παραμορφωμένο τρισδιάστατα σύρμα, που το δονεί ελαφρά ο αέρας. Εμπειρικά μπορούμε να φανταστούμε ότι η επιφάνεια του υφάσματος θα έχει την ελάχιστη έκταση όταν δεν πάλλεται καθόλου από τον αέρα.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε το θεώρημα που συνδέει τη μέση καμπυλότητα  $H$  και την ελάχιστη επιφάνεια.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1** Με τους παραπάνω συμβολισμούς, αν η επιφανειακή διακύμανση  $\Phi$  μηδενίζεται κατά μήκος της συνοριακής καμπύλης  $\pi$ , τότε

$$\dot{A}(0) = -2 \iint_{\text{int}\pi} H(EG - F^2)^{1/2} \alpha dudv \quad (2.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν το  $\sigma$  έχει το ελάχιστο εμβαδό μεταξύ όλων των επιφανειών με τη δοθείσα συνοριακή καμπύλη  $\gamma$ , τότε η  $A$  πρέπει να έχει απόλυτο ελάχιστο στο  $\tau=0$ , άρα  $\dot{A}(0) = 0$  για όλες τις λείες οικογένειες επιφανειών σαν τις παραπάνω.

Στη σχέση (2.1) διευκρινίζουμε

- $H$  είναι η μέση καμπυλότητα της  $\sigma$

- $E, F, G$  είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης
- $\alpha = \langle \varphi, N \rangle$  όπου  $N$  είναι κατά τα γνωστά το  $N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$  μοναδιαίο κάθετο.

- η συνάρτηση  $\phi$  δίνει την επιφανειακή διακύμανση

Για να είναι  $\dot{A}(0) = 0$  από αυτή τη σχέση, δηλαδή

$$\iint_{\text{int}\pi} H(EG - F^2)^{1/2} \alpha \, du \, dv = 0 \text{ στο εσωτερικό του } \pi \text{ πρέπει } H=0.$$

Αυτό γιατί  $(EG - F^2)^{1/2} > 0$  και

το  $\alpha$  δεν μηδενίζει για καμία τιμή στο εσωτερικό της καμπύλης καθώς ορίσαμε την  $\sigma$  να είναι κανονική επιφάνεια.

Η αναλυτική απόδειξη, που δείχνει την παραπάνω σύνδεση ελάχιστης έκτασης - μέσης καμπυλότητας βρίσκεται στο [1] (σελ. 287-288).<sup>12</sup>

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε, ότι καθώς η μέση καμπυλότητα  $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$  δίνει τη μέση τιμή της κύρτωσης μιας επιφάνειας  $S$ , θα συνεπάγεται ότι ο μηδενισμός της σε κάθε σημείο της  $S$  θα δηλώνει ότι αυτή η επιφάνεια ορίζει το ελάχιστο εμβαδό, που περιέχεται σε μία αντίστοιχη κλειστή καμπύλη.

## 2.3 Κατηγορίες επιφανειών ελάχιστης έκτασης

### 2.3.1 Ευθειογενείς επιφάνειες (ruled surfaces)

Κάθε επιφάνεια που σχηματίζεται από μία **ένωση ευθειών** λέγεται **ευθειογενής (Ruled Surface-για συντομία RS)**. Οι **ευθείες** που την παράγουν λέγονται **γεννήτορες (rulings-για συντομία ru)**.

Για να την ορίσουμε υποθέτουμε μία καμπύλη  $C$  που τέμνει όλους τους γεννήτορες και έστω  $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια παραμέτρηση  $\gamma(u)$  της  $C$ .

Έστω ότι το  $p \in RS$  και ανήκει σε κάποια από τις ευθείες  $ru$  (γεννήτορες). Έστω ακόμη ότι η ευθεία  $ru$  τέμνει την  $C$  στο  $q$ , δηλαδή  $\gamma(u) = q$ , και  $\bar{\delta}(u) / ru$  που διέρχεται από το  $\gamma(u)$ . Τότε το τυχαίο σημείο της επιφάνειας  $RS$  θα δίνεται από τη σχέση

$$p \equiv \gamma(u) + v\bar{\delta}(u) \text{ για κάποια } u, v \in \mathbb{R}$$

Η απεικόνιση  $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\sigma(u, v) \equiv p$  είναι λεία, για  $\alpha < u < \beta$ .

Το εφαπτόμενο διάνυσμα κατά μήκος της  $\gamma$  θα είναι  $\sigma_u = \dot{\gamma} + v\dot{\delta}$  και αρκεί να είναι τα  $\sigma_u, \bar{\delta}$  γραμμικά ανεξάρτητα και το  $v$  κατάλληλο.

<sup>12</sup> Αξιόλογη προσέγγιση μπορεί να βρει κανείς και στο [7], σελ. 197 κ.ε. Εκεί υπάρχει και μια σύντομη σχετικά απόδειξη πάνω στην οποία πιθανώς στηρίζεται και ο Pressley στη δική του ανάλυση, όπως επίσης και ένα εύγλωττο σχήμα για τη σχέση (2.1)



Αρκεί δηλαδή η  $C$  να μην είναι ποτέ εφαπτόμενη στους γεννήτορες.

- Μία σημαντική περίπτωση ευθειογενούς επιφάνειας είναι ο γενικευμένος κύλινδρος. Σ' αυτόν οι γεννήτορες είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Αν  $\vec{\alpha} (\equiv \vec{\delta})$  ένα σταθερό, μοναδιαίο διάνυσμα, παράλληλο στους γεννήτορες, τότε η παραμέτρηση  $\sigma$  του κυλίνδρου θα είναι

$$\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\vec{\alpha} \text{ και είναι κανονική.}$$

- Παραδείγματα ευθειογενούς επιφάνειας είναι και οι επιφάνειες με παραμέτρηση

$$\sigma(u,v) = (u \cos \omega v, u \sin \omega v, \alpha v), \text{ που είναι οι } \mathbf{ελικοειδείς}, \text{ όπου,}$$

$\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα του σημείου  $p$  της επιφάνειας, και όταν  $\alpha > 0$ , ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα  $\alpha$ , ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον  $z$ 's.

Θα τις εξετάσουμε διεξοδικά, καθώς είναι η μόνη κλάση ευθειογενών επιφανειών ελάχιστης έκτασης εκτός του επιπέδου.

- Άλλη κατηγορία ευθειογενούς επιφάνειας είναι ο (γενικευμένος) κώνος. Την αναφέρουμε για δύο λόγους: ο ένας είναι ιστορικός, καθώς οι τέσσερις βασικές καμπύλες του επιπέδου (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή) προκύπτουν ως κατάλληλες τομές του κώνου με ένα επίπεδο, και ο δεύτερος ότι δεν εμπίπτει καθαρά σε κάποια κατηγορία κανονικών επιφανειών, όπως θα αναλύσουμε αμέσως πιο κάτω.

Για την κατασκευή του, χρειαζόμαστε αρχικά μία καμπύλη με τα ίδια χαρακτηριστικά, δηλαδή υποθέτουμε μία καμπύλη  $C$  που τέμνει όλους τους γεννήτορες και έστω

$$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ μια παραμέτρηση της.}$$

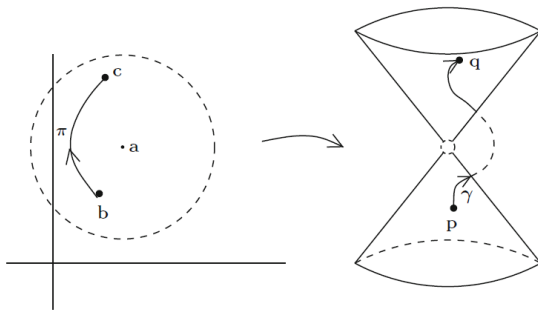
Όλες οι ευθείες, (γεννήτορες) περνούν από το ίδιο σημείο (κορυφή του κώνου). Άρα το παράλληλο διάνυσμα σε κάθε μία από αυτές θα έχει συντεταγμένες

$$\vec{\delta}(u) = \gamma(u) - \mathbf{v}, \text{ όπου } \mathbf{v} \equiv (x_0, y_0, z_0) \text{ η (σταθερή) κορυφή του κώνου}$$

Άρα μία παραμέτρηση του τυχαίου σημείου του κώνου θα προκύψει αν στο διάνυσμα θέσης της καμπύλης  $\gamma$  προσθέσουμε ένα διάνυσμα  $v\vec{\delta}$  όπου  $v$  μία παράμετρος. Άρα η παραμέτρηση θα έχει μορφή  $\sigma(u,v) = (1+v)\gamma(u) - v\mathbf{v}$ , όπου  $\mathbf{v} \equiv (x_0, y_0, z_0)$  η κορυφή του κώνου.

Οι μερικές παράγωγοι δεν ορίζονται στην κορυφή του κώνου, άρα, ως κανονική επιφάνεια κώνου μπορούμε να πάρουμε μόνο ένα τμήμα που δεν περιέχει την κορυφή του, ή ένα αντίστοιχο τμήμα του αντεστραμμένου κώνου.

Η  $\sigma(u,v) = v(f(u), g(u), 1)$  είναι μια απλή περίπτωση κώνου, όπου η  $\gamma$  είναι επίπεδη καμπύλη στο  $xy$  και για το  $v$  έχουμε αναπαραμέτρηση  $v \rightarrow v-1$  ([1], σχήμα 4.6 σελ. 70 και σελ. 100)



Όπως αναφέραμε, θα αποδείξουμε ότι οι μόνες ευθιογενείς επιφάνειες ελάχιστης έκτασης είναι οι ελικοειδείς και τα επίπεδα που παράγονται από μία παράλληλη μεταφορά μίας τέννουσας ευθείας σε μία γεννήτρια ευθεία της επιφάνειας (πρόταση 2.2.2).

Αυτό είναι το θεώρημα του Catalan για τις ευθιογενείς επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Η απόδειξη του δίνεται στην επόμενη ενότητα. Θα δώσουμε ένα λήμμα που θα χρειαστεί γι' αυτή την απόδειξη ώστε να συντομεύσουμε την έκταση της.

**Λήμμα 2.1.1** Ένας γενικευμένος κύλινδρος έχει ελάχιστη έκταση μόνο αν είναι τμήμα ενός επιπέδου.

**Απόδειξη** Έστω  $\sigma(u,v) = \gamma(u) + v\vec{a}$  μία παραμέτρηση του γενικευμένου κυλίνδρου.

Θεωρούμε την  $\gamma$  μοναδιαίας ταχύτητας, το  $\|\vec{a}\| = 1$  και την  $\dot{\gamma}$  κάθετη στο  $\vec{a}$  και επίπεδη.

Θεωρούμε δηλαδή μια παραμέτρηση  $\sigma(u,v) = (f(u), g(u), v)$  του κυλίνδρου, όπου όμως  $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ , την καμπύλη  $\gamma$  στο επίπεδο  $xy$ , και για ευκολία  $\vec{a} = (0, 0, 1)$

Καθώς  $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \Rightarrow E = \langle (\dot{f}, \dot{g}, 0), (\dot{f}, \dot{g}, 0) \rangle = 1$  και αντίστοιχα

$$G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = \|\vec{a}\|^2 = 1 \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0 \quad \text{καθώς τα } \sigma_u, \sigma_v \text{ είναι κάθετα.}$$

Άμεσα προκύπτουν  $E=G=1, F=0$ . Ισχύουν ακόμα

- το  $\sigma_{uu} = (\ddot{f}, \ddot{g}, 0)$  και είναι κάθετο στη  $\dot{\gamma}$ , λόγω της παραμέτρησης μήκους τόξου, άρα κάθετο και στο  $\sigma_u$ .

- $\sigma_{uv} = 0$  και  $\sigma_{vv} = 0$  το πρώτο λόγω της καθετότητας, και το δεύτερο λόγω του ότι  $\sigma_v = \vec{a}$

- Το κάθετο στην επιφάνεια είναι  $N = \sigma_u \times \vec{a}$  και είναι παράλληλο με το  $\sigma_{uu}$

Από την δεύτερη στήλη των σχέσεων 1.5.5 παίρνουμε επίσης

- $e = \langle N, \sigma_{uu} \rangle = \pm \kappa, \quad g = \langle N, \sigma_{vv} \rangle = 0, \quad f = \langle N, \sigma_{uv} \rangle = 0$  καθώς τα  $N$  και  $\sigma_{uu}$  είναι παράλληλα, και

τα  $\sigma_{uv}, \sigma_{vv}$  μηδενικά.

Αντικαθιστώντας στον τύπο της μέσης καμπυλότητας

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \Rightarrow H = \frac{\pm \kappa}{2}. \text{ Για να είναι ελαχιστική η επιφάνεια του γενικευμένου}$$

κυλίνδρου, θα πρέπει να ισχύει  $H=0 \Leftrightarrow \kappa=0 \Leftrightarrow \eta$  γ είναι τμήμα ευθείας  $\Leftrightarrow$  ο κύλινδρος είναι ανοικτό υποσύνολο επιπέδου ■

### 2.3.2 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Κατ' αντιστοιχία με την προηγούμενη παράγραφο, μια επιφάνεια που δημιουργείται αν περιστρέψουμε μία καμπύλη γύρω από έναν άξονα, λέγεται **επιφάνεια εκ περιστροφής** (*surface of revolution*). Η καμπύλη που περιστρέφουμε λέγεται **γενέτειρα** (profile curve), και οι κύκλοι που λαμβάνουμε, περιστρέφοντας το τυχαίο σημείο της γενέτειρας γύρω από τον άξονα περιστροφής λέγονται *παράλληλοι*, ενώ οι καμπύλες που διαγράφονται από την περιστροφή της γενέτειρας λέγονται *μεσημβρινοί*.

Θα διατυπώσουμε τώρα μια σημαντική πρόταση:

**Πρόταση 2.3.2.1** Μία επιφάνεια εκ περιστροφής  $S$  είναι ελαχιστική αν και μόνο αν η  $S$  είναι ανοικτό υποσύνολο ενός επιπέδου, ή μίας αλυσσοειδούς.

**Απόδειξη.**

Ας ορίσουμε μια παραμέτρηση μιας επιφάνειας εκ περιστροφής, με την παραδοχή ότι

- έχουμε μια (λεία) καμπύλη με παραμέτρηση  $\gamma(u)=(f(u),0,g(u))$  στο επίπεδο  $xz$
- περιστρέφουμε το σημείο  $q$  της καμπύλης  $\gamma$  γύρω από τον  $z'$ <sup>13</sup>

Τότε σε κάθε σημείο του επιπέδου  $z=g(u)$  που τέμνει εγκάρσια την καμπύλη, το αντίστοιχο σημείο  $p$  της επιφάνειας θα βρίσκεται σε κύκλο ακτίνας  $f(u)$ . Άρα η παραμέτρηση της επιφάνειας θα ορίζεται ως

$$\sigma(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), v \in [0, 2\pi).$$

Προϋποθέτουμε επιπλέον ότι

- $f(u)>0$ , που δεν βλάπτει τη γενικότητα, καθώς μπορούμε να μεταφέρουμε το τμήμα της καμπύλης  $f(u)$  κατακόρυφα προς τα πάνω

- η  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$  είναι παραμετρημένη σε μήκος τόξου, δηλαδή έχει μοναδιαία

$$\text{ταχύτητα, άρα } \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1.$$

Με αυτές τις προϋποθέσεις υπολογίζουμε για την  $\sigma$ :

- τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

<sup>13</sup> Θυμίζουμε ότι αυτό γίνεται με πολλαπλασιασμό του  $\gamma(u)=(f(u),0,g(u))$  με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ στη θετική φορά ή τον } \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ στην αρνητική.}$$

Καθώς η επιφάνεια θα μετατοπιστεί ισομετρικά στη συνέχεια της απόδειξης διαλέγουμε τον δεύτερο πίνακα. Έτσι προκύπτει η εξίσωση  $\sigma(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \{\dot{f} \cos v, \dot{f} \sin v, \dot{g}\}, \quad \sigma_v = \{-f \sin v, f \cos v, 0\} \\ \Rightarrow E &= \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = \dot{f}^2 \cos^2 v + \dot{f}^2 \sin^2 v + \dot{g}^2 = \dot{f}^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) + \dot{g}^2 = 1 \\ \Rightarrow F &= \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = -\dot{f}^2 \cos v \sin v + \dot{f} \sin v \cos v + \dot{g} \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow G &= \dots = f^2\end{aligned}$$

- για το κάθετο διάνυσμα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\sigma_u \times \sigma_v &= \{-\dot{g} \cos v, \dot{g} \sin v, f\dot{f}\} \\ \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 &= f^2 (\dot{f}^2 + \dot{g}^2) = G, \text{ καθώς } \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1\end{aligned}$$

Άρα αν η  $\mathbf{v}$  είναι κανονική τότε το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2}$  δεν μηδενίζεται και η

επιφάνεια  $\sigma$  είναι κανονική.

$$\text{Ισχύουν ακόμα } \mathbf{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dot{f} \cos v & \dot{f} \sin v & \dot{g} \\ -f \sin v & f \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, f).$$

- για τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης  $e, f, g$  καθώς

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= (\ddot{f} \cos v, \ddot{f} \sin v, \ddot{g}) \\ \sigma_{uv} &= (-\dot{f} \sin v, \dot{f} \cos v, 0) \\ \sigma_{vv} &= (-f \cos v, -f \sin v, 0)\end{aligned}$$

με πράξεις παίρνουμε

$$e = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{N} = f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g}, \quad g = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{N} = f\dot{g}, \quad f = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Συνοψίζοντας

$$(E=1, G=f^2, F=0), \quad (e=f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g}, \quad g=f\dot{g}, \quad f=0)$$

είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι για να μην υπάρχει σύγχυση των συμβόλων, ειδικά σ' αυτή τη θέση, τα ποσά β' τάξης  $g$  και  $f$  σημειώθηκαν ως  $g (=f\dot{g})$ ,  $f = 0$ . Στη συνέχεια επανερχόμαστε στον απλό συμβολισμό, όπου  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις που καθορίζουν την  $\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (f(\mathbf{u}) \cos v, f(\mathbf{u}) \sin v, g(\mathbf{u}))$ , ενώ  $g$  και  $f$  συμβολίζουν τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης.

Τα  $E, F, G, e, f, g$ , μας χρειάζονται για να καθορίσουμε τη μέση καμπυλότητα. Αυτή δίνεται από τη σχέση

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + Eg - 2ff'}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{(f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g})f^2 + f\dot{g}}{1 \cdot f^2 - 0} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \left( \frac{(f\ddot{g} - \dot{f}\dot{g})f + \dot{g}}{f} \right) \quad (*)$$

και από τη σχέση  $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$  με παραγωγή ως προς  $u$  παίρνουμε

$$f\ddot{f} + \dot{f}\dot{g} = 0 \Rightarrow \ddot{g} = -\frac{\dot{f}\ddot{f}}{\dot{g}} \text{ επομένως η ποσότητα}$$

$$\ddot{f}g - \dot{f}\dot{g} = \dot{f} \left( -\frac{\dot{f}\dot{f}}{\dot{g}} \right) - \dot{f}\dot{g} = -\frac{\dot{f}(\dot{f}^2 + \dot{g}^2)}{\dot{g}} = -\frac{\dot{f}}{\dot{g}}$$

Εδώ έχουμε κάνει την υπόθεση ότι  $\dot{g}(u) \neq 0$ , που ισχύει αν θεωρήσουμε κάποια τιμή του  $u=u_0$  στην οποία  $\dot{g}(u_0) \neq 0$ . Η  $g$  είναι λεία, άρα συνεχής, και επομένως υπάρχει κάποιο διάστημα που περιέχει το  $u_0$  και στο οποίο ισχύει  $\dot{g}(u) \neq 0$  (\*). Θεωρούμε επιπλέον τα διάστημα αυτό να είναι το μέγιστο δυνατό.

*Αυτή η παραδοχή θα μας χρειαστεί στο τέλος της απόδειξης.*

Αντικαθιστώντας στην (\*)

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{(\ddot{f}g - \dot{f}\dot{g})f + \dot{g}}{f} \right) \Rightarrow H = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{g}}{f} - \frac{\dot{f}}{\dot{g}} \right) \Rightarrow H = \frac{\dot{g}^2 - \dot{f}^2}{f\dot{g}}$$

Η επιφάνεια  $M$  είναι ελαχιστική αν και μόνο αν  $H=0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{f\ddot{f} = 1 - \dot{f}^2} \quad (2.2.1)$$

που προκύπτει με αντικατάσταση, καθώς πρέπει  $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1 \Leftrightarrow \dot{g}^2 = 1 - \dot{f}^2$ .

Καθώς υποθέσαμε  $\dot{g}(u) \neq 0$  σε μια περιοχή του  $u_0$  που μελετάμε, ισχύουν άμεσα

$$1 - \dot{f}^2 \neq 0, \quad \dot{g}^2 - \dot{f}^2 = 0 \quad \text{και} \quad \dot{g}^2 = 1 - \dot{f}^2.$$

**Λήμμα 2.3.2.2** Η διαφορική εξίσωση  $f\ddot{f} = 1 - \dot{f}^2$  έχει λύση

$$f(g) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha(g-c))$$

**Απόδειξη.** Αρχικά υποθέτουμε ότι οι  $f, g$  είναι συναρτήσεις του  $u$  και θα καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση. Αυτή στην ουσία μας δείχνει, ότι η παραμετρημένη σε μήκος τόξου καμπύλη  $\gamma(u)$ , με παραμέτρηση  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$ , είναι αλυσσοειδής καμπύλη με άξονα συμμετρίας τον  $x'$ . Για συντομία στη διατύπωση της λύσης παραλείπουμε όπου δεν είναι απαραίτητο την μεταβλητή  $u$ .

Θέτουμε  $h = \dot{f} \Rightarrow \ddot{f} = \frac{dh}{du} = \frac{dh}{df} \frac{df}{du} = h \frac{dh}{df}$  άρα η (2.2.1) γίνεται

$$fh \frac{dh}{df} = 1 - h^2.$$

Επειδή ισχύει  $1 - h^2 = 1 - \dot{f}^2 \neq 0$  διαιρώντας και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int \frac{hdh}{1-h^2} = \int \frac{df}{f} \Rightarrow h(u) = \frac{\sqrt{a^2 f^2(u) - 1}}{af}, \quad a \text{ μη μηδενική σταθερά.}$$

Στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλος χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με το  $-2$  και τότε ο αριθμητής είναι παράγωγος του παρονομαστή. Επίσης η σταθερά  $a$  θα

μπορούσε να έχει πρόσημο -, αλλά με αντικατάσταση  $-u$  όπου είναι αναγκαίο, αυτό διορθώνεται. Άρα η σταθερά  $a$  ενσωματώνει όλες αυτές τις μετατροπές.

$$\text{Όμως } h(u) = \frac{df}{du} \Rightarrow \frac{df}{du} = \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af} \Rightarrow \frac{af}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} df = du$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη και κάνοντας πράξεις φτάνουμε στη σχέση

$$f(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 (u+b)^2}$$

με  $b$  δεύτερη σταθερά, που την απαλείφουμε κάνοντας την οριζόντια μετατόπιση  $u \mapsto u+b$ .

Άρα θεωρούμε χωρίς να αλλοιώνεται η αποδεικτική πορεία

$$f(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 u^2} \quad (**)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε και το  $g(u)$ :

$$\text{Από τη σχέση } \dot{g}^2 = 1 - \dot{f}^2 \Rightarrow \dot{g}^2 = 1 - h^2 = \frac{1}{a^2 f^2}, \text{ όπου η τελευταία ισότητα } 1 - h^2 = \frac{1}{a^2 f^2}$$

προκύπτει με πράξεις από τη σχέση  $h(u) = \frac{\sqrt{a^2 f^2(u) - 1}}{af}$  και κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών. Άρα

$$\dot{g}^2 = \frac{1}{a^2 f^2} \Rightarrow \frac{dg}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 u^2}} \text{ όπου αντικαταστήσαμε την } f^2 \text{ από την } (**).$$

Αυτή η διαφορική με άμεση ολοκλήρωση δίνει

$$g(u) = \pm \frac{1}{a} \sinh^{-1}(au) + c \text{ (c σταθερά)} \quad \text{και λύνοντας ως προς } u$$

$$\Rightarrow au = \pm \frac{1}{a} \sinh(ag - c) \text{ και αντικαθιστώντας στην}$$

$$f(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 u^2} \Rightarrow f(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \sinh^2 a(g(u) - c)},$$

όπου το 1 μπορεί να απαλειφθεί καθώς  $\cosh^2 h - \sinh^2 h = 1$ , και καταλήγουμε στη σχέση

$$f(g) = \frac{1}{a} \cosh(a(g - c)) \quad \text{καθώς η μεταβλητή } u \text{ είναι κοινή για τις } f, g$$

Άρα η λύση της διαφορικής (2.2.1) είναι η αλυσσοειδής με παράμετρο  $a$ , έστω  $S_a$  ■

### Συνέχεια της απόδειξης της πρότασης 2.3.2.1

Αυτό σημαίνει ότι με μία μεταφορά κατά τον  $z$ 's της αλυσσοειδούς  $S_a$  μπορούμε να έχουμε ένα ανοικτό υποσύνολο της επιφάνειας  $S$  που αντιστοιχεί στα  $u \in (\alpha, \beta)$ .

Ός εδώ αποδείξαμε ότι, εφόσον  $\dot{g}(u) \neq 0$  σε μια περιοχή, και για ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , η επιφάνεια  $S$  είναι ελάχιστης έκτασης.

Λόγω της συνέχειας της  $\dot{g}$ , το διάστημα αυτό μπορούμε να ορίσουμε να είναι το μεγαλύτερο δυνατό που περιέχει το  $u_0$  ώστε  $\dot{g}(u) \neq 0$ .

Αν από τις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήσουμε ότι

$f = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 u^2}$  παραγωγίζοντας και αντικαθιστώντας στην  $\dot{g}^2 = 1 - \dot{f}^2$  καταλήγουμε στην

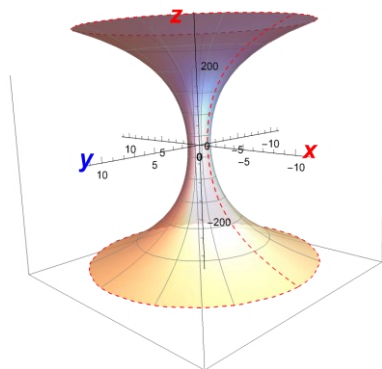
$$\dot{g}^2 = \frac{1}{1 + a^2 u^2} \text{ άρα } \dot{g}^2(\beta) \neq 0 \Rightarrow \dot{g}(\beta) \neq 0$$

Άρα πρέπει  $\dot{g}(\beta) \neq 0$  και παρόμοιος συλλογισμός μας οδηγεί στο ότι  $\dot{g}(a) \neq 0$ .

Άρα η  $S$  είναι ανοικτό υποσύνολο μιας αλυσσοειδούς.

Η περίπτωση  $\dot{g}(u) = 0$  για όλες τις τιμές της  $u$  που ορίζεται η γενέτειρα καμπύλη μας δίνει ότι  $g(u) = c$ , με  $c$  μία σταθερά, που από τη σχέση  $\dot{g}^2 = 1 - \dot{f}^2$  εύκολα παίρνουμε ότι και  $f = d$  άρα η επιφάνεια εκ περιστροφής είναι κάποιο επίπεδο  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ■<sup>14</sup>

Δηλαδή η μη τετριμμένη ελαχιστική επιφάνεια εκ περιστροφής είναι κάποιο αλυσσοειδές.



Εικόνα 2η αλυσσοειδής επιφάνεια (Catenoid)  
Στο επίπεδο  $xz$  διαγράφεται η αλυσσοειδής καμπύλη (Catenary).

**Πρόταση 2.3.2.2 (Θεώρημα Catalan)** Μία ευθιογενής επιφάνεια είναι ελαχιστική αν και μόνο αν η  $S$  είναι ανοικτό υποσύνολο ενός επιπέδου, ή μίας ελικοειδούς.

**Απόδειξη:** Για μια ευθιογενή επιφάνεια ορίζουμε, σύμφωνα με την 2.3.1, την παραμέτρηση

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v \bar{\delta}(u)$$

όπου θεωρούμε ότι η  $\gamma$  έχει παραμέτρηση σε μήκους τόξου και το  $\bar{\delta}$  ώστε  $\|\bar{\delta}\| = 1$ . Στο

Λήμμα 2.1.1 εξετάσαμε την περίπτωση να έχουμε  $\dot{\delta} = 0$ , καθώς το διάνυσμα ήταν το σταθερά προσανατολισμένο παράλληλα στον  $z$ 'z δηλαδή ίσχυε  $\bar{\delta} \equiv \bar{\alpha} = (0, 0, 1)$ .

<sup>14</sup> Μία πολύ πιο συνοπτική εκδοχή της παραπάνω απόδειξης μπορεί να βρει κανείς στο [19], σελ. 7.

Εδώ θεωρούμε  $\bar{\delta} \mapsto \delta(u)$  Έχουμε τότε άμεσα ότι  $\langle \bar{\delta}, \dot{\delta} \rangle = 0$  (προκύπτει με παραγωγή της  $\|\bar{\delta}\|^2 = 1$  και επιπλέον

- η  $\gamma$  τέμνει όλους τους γεννήτορες κάθετα,
- το  $\bar{\delta}(u)$  είναι παράλληλο στους γεννήτορες, και
- τα  $\gamma, \bar{\delta}$  τέμνονται κάθετα, δηλαδή  $\langle \gamma, \bar{\delta} \rangle = 0$  και από την  $\langle \bar{\delta}, \dot{\delta} \rangle = 0$
- τα  $\bar{\delta}, \dot{\delta}$  είναι κάθετα.

Με μερικές παραγωγίσεις ως προς  $u, v$  της  $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v \bar{\delta}(u)$  παίρνουμε

$$\sigma_u = \dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}, \quad \sigma_v = \bar{\delta} \text{ άρα από τις γνωστές σχέσεις}$$

$$E = \|\dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}\|^2, \quad F = \langle \dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}, \bar{\delta} \rangle = \langle \dot{\gamma}, \bar{\delta} \rangle \quad (\text{καθώς } \dot{\delta} \perp \bar{\delta}), \quad G = \langle \bar{\delta}, \bar{\delta} \rangle = 1$$

Για ευκολία θέτουμε  $A = (EG - F^2)^{1/2}$ , άρα το μοναδιαίο κάθετο γίνεται

$$N = A^{-1} (\dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}) \times \bar{\delta}$$

όπου το  $A \neq 0$  καθώς τα διανύσματα  $\dot{\gamma}, \bar{\delta}$  με τον τρόπο κατασκευής τους δεν μηδενίζονται, και γενικά το μοναδιαίο κάθετο  $N$  δεν μηδενίζεται στην επιφάνεια, δηλαδή κατά τα γνωστά, η επιφάνεια είναι κανονική. Έχουμε ακόμα

$\sigma_{uu} = \ddot{\gamma} + v \ddot{\bar{\delta}}, \quad \sigma_{uv} = \dot{\bar{\delta}}$  και  $\sigma_{vv} = 0$  (όπου οι σχέσεις για τα  $\sigma_{uv}$  και  $\sigma_{vv}$  είναι συνέπεια της δευτέρης παραγωγίσης στα  $\sigma_u = \dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}, \quad \sigma_v = \bar{\delta}$  αντίστοιχα).

Το  $\dot{\gamma}$  είναι ανεξάρτητο του  $v$  και το  $\sigma_v = \bar{\delta}$  είναι σταθερό και μοναδιαίο.

Έχοντας αυτά κατά νου παίρνουμε από τις σχέσεις (1.5.5)

$$e = \langle \sigma_{uu}, N \rangle = A^{-1} \langle \ddot{\gamma} + v \ddot{\bar{\delta}}, (\dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}) \times \bar{\delta} \rangle$$

$$f = \langle \sigma_{uv}, N \rangle = A^{-1} \langle \dot{\bar{\delta}}, (\dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}) \times \bar{\delta} \rangle = A^{-1} \langle \dot{\bar{\delta}}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle \quad (\text{καθώς } \dot{\delta} \times \bar{\delta} = 0)$$

$$g = \langle \sigma_{vv}, N \rangle = 0$$

Για να έχουμε την  $\sigma(u, v)$  επιφάνεια ελάχιστης έκτασης πρέπει  $H = 0$

$$\text{Οπότε αντικαθιστώντας στην } H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{A^2} \quad (=0) \text{ προκύπτει } eG = 2fF$$

(οι ποσότητες  $A^{-1}, A^2$  απαλείφονται ως διαφορές του 0)  $\Rightarrow$

$$\langle \ddot{\gamma} + v \ddot{\bar{\delta}}, (\dot{\gamma} + v \dot{\bar{\delta}}) \times \bar{\delta} \rangle = 2 \langle \dot{\gamma}, \bar{\delta} \rangle \langle \dot{\bar{\delta}}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle$$

Η εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε  $(u, v)$ . Αν γραφτεί ως προς  $v$  είναι δευτεροβάθμια εξίσωση, και μηδενίζουμε τους συντελεστές, ώστε να ισχύει για κάθε  $v$ , οπότε προκύπτουν <sup>15</sup>

<sup>15</sup> Για την παραγωγή της δευτεροβάθμιας, που είναι σχοινοτενής και παραλείπεται, μπορεί να ανατρέξει κανείς στο [14] με διαδικτυακή προσπάθεια



$$\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle = 2 \langle \dot{\gamma}, \bar{\delta} \rangle \langle \dot{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle \quad (2.2.2\alpha)$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\delta} \times \bar{\delta} \rangle + \langle \ddot{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle = 0 \quad (2.2.2\beta)$$

$$\langle \ddot{\delta}, \dot{\delta} \times \bar{\delta} \rangle = 0 \quad ((2.2.2\gamma))$$

Η τρίτη σχέση (2.2.2γ) μας δίνει άμεσα ότι τα  $\ddot{\delta}$ ,  $\dot{\delta}$ ,  $\bar{\delta}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Όμως τα  $\dot{\delta}$ ,  $\bar{\delta}$  είναι μοναδιαία και κάθετα, άρα υπάρχουν λείες συναρτήσεις  $\alpha(u)$ ,  $\beta(u)$  τέτοιες ώστε

$$\ddot{\delta} = \alpha \dot{\delta} + \beta \bar{\delta} \quad (*)$$

Το  $\dot{\delta}$  είναι μοναδιαίας ταχύτητας άρα ισχύει  $\dot{\delta} \cdot \dot{\delta} = 0$  (σχέση 1.2.5).

Παραγωγίζοντας την  $\langle \bar{\delta}, \dot{\delta} \rangle = 0 \Rightarrow$

$$\langle \bar{\delta}, \ddot{\delta} \rangle + \langle \dot{\delta}, \dot{\delta} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{\delta}, \ddot{\delta} \rangle = -1 \quad (\text{καθώς } \langle \dot{\delta}, \dot{\delta} \rangle = \|\dot{\delta}\|^2 = 1).$$

Πολλαπλασιάζοντας την (\*) αρχικά με  $\bar{\delta}$  και μετά με  $\dot{\delta}$  και αντικαθιστώντας καταλήγουμε στο  $\alpha=0$  και  $\beta=-1$  άρα  $\ddot{\delta} = -\bar{\delta}$  (\*\*)

Άρα η καμπυλότητα της καμπύλης  $\delta$  είναι 1 και το κύριο κάθετο διάνυσμα της είναι το  $-\bar{\delta}$ . Θυμίζουμε ότι μία καμπύλη στον  $\mathbb{R}^3$  χρειάζεται και το δεύτερο κάθετο διάνυσμα για να καθοριστεί (πλαίσιο Frenet) που δίνεται από τη σχέση  $B(t) = T(t) \times N(t)$  (σχέση 1.2.4).

Όμως από την (\*\*) έχουμε

$$\frac{d}{du}(\dot{\delta} \times \bar{\delta}) = (\ddot{\delta} \times \bar{\delta}) + \dot{\delta} \times \dot{\bar{\delta}} = -\bar{\delta} \times \bar{\delta} = \vec{0}$$

Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη  $\delta$  έχει μηδενική στρέψη, και σταθερή καμπυλότητα, άρα παραμετρά έναν κύκλο ακτίνας 1 (Παρατηρήσεις σελίδα 12). Μπορούμε να μεταφέρουμε ή να στρέψουμε ισομετρικά αυτή την καμπύλη, να εφαρμόσουμε δηλαδή μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^3$ , ώστε να υποθεσουμε ότι η καμπύλη  $\delta$  είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο  $xy$  επίπεδο.

$$\text{Τελικά δηλαδή ορίζουμε } \delta(u) = (\cos u, \sin u, 0) \quad (2.2.2\delta)$$

Από τις καθετότητες των διανυσμάτων  $\dot{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta}$  (η  $\gamma$  είναι κάθετη στο  $\bar{\delta}$ ) (\*\*) γίνεται

$$\ddot{\delta} = -\bar{\delta} \Rightarrow \langle \ddot{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle = \langle -\bar{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle = 0 \Rightarrow$$

η εξίσωση (2,2.2β) γίνεται

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\delta} \times \bar{\delta} \rangle + \langle \ddot{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle = 0$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\delta} \times \bar{\delta} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\gamma}, \dot{\delta} \times \bar{\delta} \rangle = 0$$

Άρα το  $\dot{\gamma}$  είναι πάντα παράλληλο στο επίπεδο  $xy$  άρα

$\gamma(u)=(f(u),g(u),au+b)$ ,  $a, b$  σταθερές (2.2.2ε)

Αν  $a=0$  η  $\gamma$  είναι ανοικτό υποσύνολο του επιπέδου  $z=b$ . Ειδικά από την εξίσωση (2.2.2α) δηλαδή την  $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle = 2 \langle \dot{\gamma}, \bar{\delta} \rangle \langle \dot{\delta}, \dot{\gamma} \times \bar{\delta} \rangle$ , αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε τις ποσότητες που χρειάζονται σε συνδυασμό με τις (2.2.2δ) και (2.2.2ε). Τελικά παίρνουμε τη σχέση

$$\ddot{g} \cos u - \ddot{f} \sin u = 2(\dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u) \quad (***)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη  $\langle \dot{\gamma}, \bar{\delta} \rangle = 0$  καθώς και τα  $\dot{\gamma}, \bar{\delta}$  είναι κάθετα,

$$\text{παίρνουμε } \dot{f} \sin u = \dot{g} \cos u \quad \text{και με διαφύριση } \Rightarrow$$

$$\ddot{f} \sin u + \dot{f} \cos u = \ddot{g} \cos u - \dot{g} \sin u \Leftrightarrow \ddot{g} \cos u - \ddot{f} \sin u = \dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u .$$

Άρα η σχέση (\*\*\*) γίνεται

$$\begin{aligned} \ddot{g} \cos u - \ddot{f} \sin u = 2(\dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u) &\Leftrightarrow \dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u = 2(\dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u) \quad (***) \\ &\Leftrightarrow \dot{f} \cos u + \dot{g} \sin u = 0 \end{aligned}$$

Για τιμές που δεν μηδενίζεται το  $\cos u$  πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (\*\*\*) και καταλήγουμε στο  $\dot{g}(\sin u + \cos u \tan u) = 0$  που μας δίνει  $\dot{g} = 0$ . Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι  $\dot{f} = 0$  όπου δεν μηδενίζεται το  $\sin u$ , και λόγω της συνέχειας των  $\dot{f}, \dot{g}$  καταλήγουμε στο  $\dot{f} = \dot{g} = 0$ .

Οι  $f, g$  είναι επομένως σταθερές, όπως και η  $b$ , και με κατάλληλη ισομετρία στον  $\mathbb{R}^3$  (μετατόπιση, στροφή), μπορούμε να θεωρήσουμε  $f=g=b=0$ .

Άρα η (2.2.2ε) γίνεται  $\gamma(u)=(0,0,au)$  και συνδυάζοντας την με την

$$\delta(u)=(\cos u, \sin u, 0) \quad (2.2.2δ) \quad \text{καθώς}$$

$$\sigma(u,v)=\gamma(u)+v\delta(u) \quad \text{καταλήγουμε}$$

στην  $\sigma(u,v)=(v \cos u, v \sin u, au)$  που είναι μία παραμέτρηση του ελικοειδούς.

Την περίπτωση  $\dot{\delta} = 0$  την αντιμετωπίσαμε στο λήμμα 2.2.1, όπου καταλήξαμε ότι ο γενικευμένος κύλινδρος με ελάχιστη έκταση, εκφυλίζεται αναγκαστικά σε επίπεδο.

Η απόδειξη χρειάζεται για να ολοκληρωθεί έναν συλλογισμό παρόμοιο με το τέλος της Πρότασης 2.2.1: Δε είναι δυνατό να έχουμε κομμάτια όπου το κάθετο διάνυσμα να είναι ταυτοτικά μηδέν, καθώς μπορούμε να ορίσουμε τα μεγαλύτερα δυνατά τμήματα που θα ορίζεται η ελικοειδής ή το επίπεδο, λόγω της συνέχειας των παραγώγων. ■

**Παρατήρηση:** Για οπτική ευκολία μας βολεύει να γράφουμε τις  $u, v$  κατοπτρικά. Έτσι ελικοειδές ονομάζουμε συνήθως την ευθιογενή επιφάνεια  $\sigma(u,v)=(u \cos v, u \sin v, av)$ .

Στο βιβλίο του Presley, απ' όπου διασκευάστηκε η παραπάνω αποδεικτική προσέγγιση,<sup>16</sup>

<sup>16</sup> Παρόμοια αποδεικτική διαδρομή υπάρχει και στο [3], σελ. 37-44.

χρησιμοποιούνται και οι δυο τρόποι. Την ελικοειδή θα τη δώσουμε σαν γράφημα στο τέλος του Κεφαλαίου 3, στο Παράδειγμα 3.4.4. Εκεί θα εξηγήσουμε γιατί είναι ελικοειδής και η επιφάνεια με παραμέτρηση  $\sigma(u,v)=(\sinh u \cdot \cos v, \sinh u \cdot \sin v, uv)$ .

## 2.4 Δύο επιφάνειες ελάχιστης έκτασης

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι δύο γνωστές επιφάνειες είναι ελάχιστης έκτασης, αποδεικνύοντας ότι η μέση καμπυλότητα  $H$  είναι μηδέν.

**2.4.1 Επιφάνεια του Enneper** Έστω η επιφάνεια που ορίζεται με την παραμέτρηση

$$\sigma(u,v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), u, v, \in \mathbb{R}$$

Αυτή είναι η επιφάνεια του Enneper. Θα υπολογίσουμε τα θεμελιώδη ποσά για να βρούμε τη μέση καμπυλότητα.

Ισχύουν

$$\sigma_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$$

$$\sigma_v = (2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v)$$

$$\sigma_{uu} = (-2u, 2v, 2)$$

$$\sigma_{uv} = (2v, 2u, 0)$$

$$\sigma_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

Θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = -4uv + 2uv(1 + u^2 - v^2) + 2uv(1 - u^2 + v^2) = 0$$

$$G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = -4uv + 2uv(1 + u^2 - v^2) + 2uv(1 - u^2 + v^2) = (1 + u^2 + v^2)^2$$

**Ισχύει  $E=G, F=0$ .**

Οι επιφάνειες αυτές όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο λέγονται ισοθερμικές και είναι εν δυνάμει επιφάνειες ελάχιστης έκτασης.

Κάθετο στην επιφάνεια και θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης

$$N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \dots = \left( \frac{-2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-(u^2+v^2)^2}{1+u^2+v^2} \right)$$

$$e = \langle \sigma_{uu}, N \rangle = \frac{2(1+u^2+v^2)^2}{\sqrt{(1+u^2+v^2)^4}} = 2$$

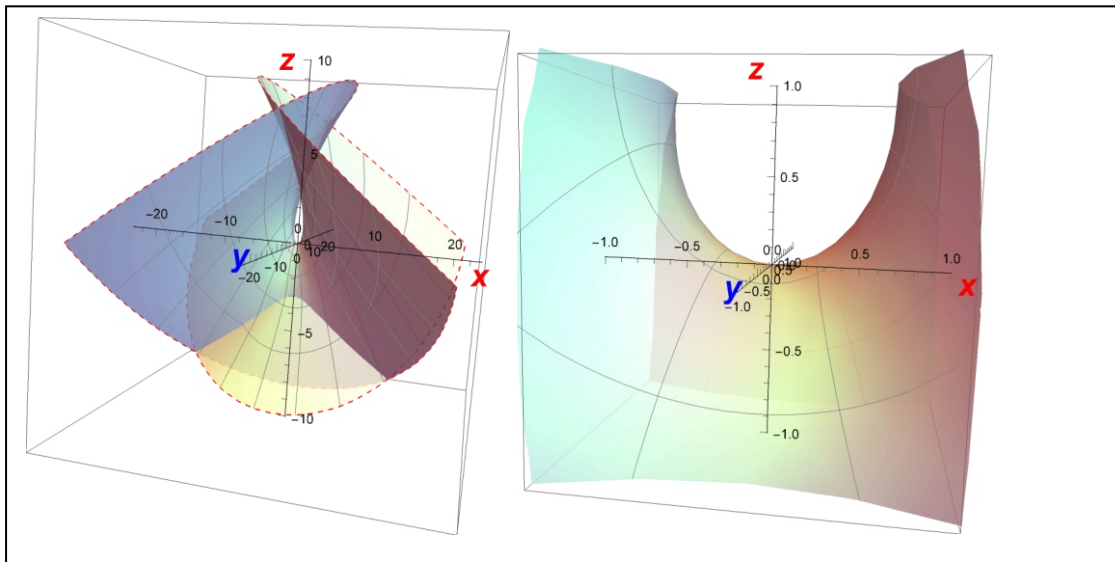
$$f = \langle \sigma_{uv}, N \rangle = 0$$

$$g = \langle \sigma_{vv}, N \rangle = -\frac{2(1+u^2+v^2)^2}{\sqrt{(1+u^2+v^2)^4}} = -2$$

Μετά από αυτά μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον τύπο της μέσης καμπυλότητας  $H$

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{E^2} \text{ καθώς } f=F=0 \text{ και αν παρατηρήσουμε ότι } E=G,$$

$e=-g$  προκύπτει κατευθείαν ότι  $H=0$ .



Εικόνα 3 Η επιφάνεια Enneper στο δεύτερο σχήμα δεν έχει αυτοτομές

Δηλαδή η επιφάνεια Enneper είναι ελαχιστική. Παρ' όλα αυτά όπως φαίνεται στο γράφημα της έχει αυτοτομές, άρα για να έχουμε κλειστές καμπύλες που θα περιέχουν ελάχιστη έκταση πρέπει να τις ορίζουμε κατάλληλα, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα.

### 2.4.2 Επιφάνεια του Catalan

Είναι η επιφάνεια που ορίζεται με την παραμέτρηση

$$\sigma(u, v) = \left( u - \sin u \cdot \cosh v, 1 - \cos u \cdot \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \cdot \sinh \frac{v}{2} \right), u, v, \in \mathbb{R}$$

#### 2.4.2α Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Mathematica

Για τους επίπονους υπολογισμούς των θεμελιωδών μορφών (αλλά και για επαλήθευση) μπορούμε να χρησιμοποιούμε και το λογισμικό Mathematica. Ας δούμε για την επιφάνεια Catalan κάποια εκδοχή εντολών του λογισμικού:

```

σ[u_, v_] := {u - Sin[u]Cosh[v], 1 - Cos[u] * Cosh[v], -4Sin[u/2]Sinh[v/2]}
E1=D[σ[u,v],{u,1}].D[σ[u,v],{u,1}]/FullSimplify
G1=D[σ[u,v],{v,1}].D[σ[u,v],{v,1}]/FullSimplify
F1=D[σ[u,v],{u,1}].D[σ[u,v],{v,1}]/FullSimplify
e1=D[σ[u,v],{u,1}].Cross[D[σ[u,v],{v,1}],D[σ[u,v],{u,2}]]/\[Sqrt](E1*G1-F1^2)/FullSimplify
f1=D[σ[u,v],{u,1}].Cross[D[σ[u,v],{v,1}],D[σ[u,v],{u,1},{v,1}]]/\[Sqrt](E1*G1-
F1^2)/FullSimplify
g1=D[σ[u,v],{u,1}].Cross[D[σ[u,v],{v,1}],D[σ[u,v],{v,2}]]/\[Sqrt](E1*G1-F1^2)/FullSimplify
H=(e1*G1-2f1*F1+g1*E1)/2/FullSimplify

```

Παίρνουμε

- $E=G=2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh v - \cos u)$  και  $F=0$ .

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε δηλαδή ότι η επιφάνεια Catalan είναι ισοθερμική. Για τα ποσά δεύτερης τάξης παίρνουμε

$$e = \frac{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cosh^3\left(\frac{v}{2}\right)(\cos u - \cosh v)}{\sqrt{2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh v - \cos u)^2 - 0^2}} = -g$$

$$f = \frac{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cosh^3\left(\frac{v}{2}\right)(\cos u - \cosh v)}{\sqrt{2\cosh^4\left(\frac{v}{2}\right)(\cos u - \cosh v)^2}}$$

Για τη μέση καμπυλότητα με τον τύπο

$$H = (e^2 * G1 - 2f^2 * F1 + g^2 * E1) / (2(E1 * G1 - F1^2)) // FullSimplify \text{ παίρνουμε } \text{όντως } H=0$$

Επομένως η επιφάνεια είναι ελαχιστική ■

*Ο τελικός έλεγχος στη χρήση του λογισμικού είναι απαραίτητος.*

Τέλος για το γράφημα χρησιμοποιούμε τη φόρμα

ParametricPlot3D[{σ[u, v]}, {u, -4π, 4π}, {v, -Log[4π], Log[4π]}, Axes →

True, AxesLabel →

{Style[x, Large, Bold, Red], Style[y, Large, Bold, Blue], Style[z, Large, Bold, Red]}, AxesStyle →

Directive[{Black, Thickness[0.005], Dashing[15]}], AxesOrigin →

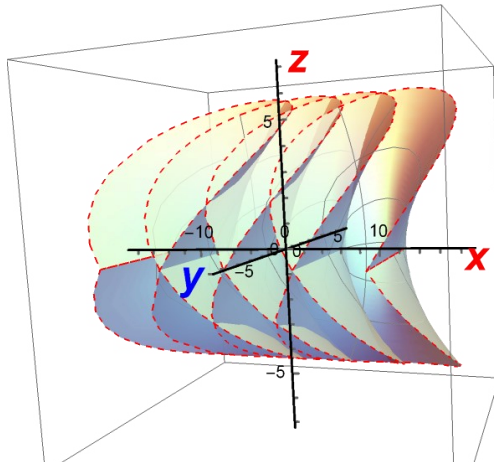
{0,0,0}, BoxRatios → {1,1,1}, ViewPoint → Front, PlotRange → All, PlotStyle →

Directive[ColorFunction →

Function[{x, y, z}, Hue[x]], Specularity[Green, 5], Opacity[0.8]], Mesh →

5, MeshStyle → Gray, PlotPoints → 25, BoundaryStyle →

Directive[Red, Thin, Dashed]]



Εικόνα 4 Η επιφάνεια Catalan. Έχει και αυτή αυτοτομές.

### Σύνοψη του Δεύτερου Κεφαλαίου

Στην Παράγραφο 2.1 είδαμε μια ιστορική προσέγγιση των επιφανειών ελάχιστης έκτασης και την απόδειξη του Langrange. Για την απόδειξη αυτή χρησιμοποιήθηκε η παραμέτρηση Monge. Πολλές οικογένειες επιφανειών δεν παραμετρώνται με την μέθοδο του Langrange, παρά μόνο τοπικά. Έτσι δώσαμε μια ισοδύναμη προσέγγιση για τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης, μέσω της μέσης καμπυλότητας  $H$ , και περιγράψαμε γιατί οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης έχουν  $H=0$ . Σκιαγραφήσαμε την πορεία της απόδειξης αυτής της ισοδυναμίας, η οποία είναι γενίκευση της διαδικασίας που ακολούθησε ο Langrange. Στη συνέχεια θεωρήσαμε δύο σημαντικές κατηγορίες επιφανειών, τις ευθειογενείς και τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Εκεί είδαμε ότι υπάρχουν δύο σημαντικές κατηγορίες εκτός του επιπέδου, που είναι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Είναι οι ελικοειδείς και οι αλυσοειδείς αντίστοιχα, και καμία άλλη.

Η διαδικασία απόδειξης ότι μία επιφάνεια είναι κανονική με τον υπολογισμό της μέσης καμπυλότητας  $H$  έχει συχνά επίπονες πράξεις. Επίσης δεν μας δίνει δυνατότητα κατασκευής μιας επιφάνειας ελάχιστης έκτασης, παρά μόνο τον έλεγχο ότι αυτή εμπίπτει σ' αυτή την κατηγορία. Μία μέθοδο κατασκευής επιφάνειας ελάχιστης έκτασης, θα αναπτύξουμε στο 3ο κεφάλαιο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ WEIRSTRASS-ENNEPIER

#### 3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ο έλεγχος μίας επιφάνειας ελάχιστης έκτασης με τη μέση καμπυλότητα  $H$  μπορεί να έχει απαιτητικούς υπολογισμούς αλλά δίνει τη δυνατότητα να ελέγξουμε αν μια δοσμένη επιφάνεια έχει ελάχιστη έκταση. Δεν μας δίνει όμως τη δυνατότητα να κατασκευάζουμε μια επιφάνεια ελάχιστης έκτασης. Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει την αναπαράσταση Weirstrass-Enneper που οδηγεί στην κατασκευή επιφανειών ελάχιστης έκτασης.

Θα χρησιμοποιούμε  $\mathbf{x}$  αντί για  $M$  για επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  ορίζοντας  $\mathbf{x}(u,v)=(x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$  για την παραμέτρηση του και για τον μιγαδικό  $z=u+iv$  αναφέρουμε τις γνωστές σχέσεις,

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad v = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (*), \quad \text{ενώ θα χρειαστεί και ότι}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dz} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \stackrel{\text{λόγω των } (*)}{=} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \left( \frac{1}{2} \right) + i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \left( \frac{1}{2i} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_u - i \mathbf{x}_v) \quad (3.1\alpha)$$

Η αναπαραμέτρηση  $\mathbf{x}$  θα αναλύεται σε τρεις συνιστώσες  $x^j$  και επίσης θα χρησιμοποιηθεί το διαφορικό ως προς τον  $\bar{z}$  που με όμοιο τρόπο γίνεται

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\bar{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{λόγω των (*)}}{=} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \left( \frac{1}{2} \right) - i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \left( \frac{1}{2i} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_u + i\mathbf{x}_v). \quad (3.1\beta)$$

### 3.2 Ισοθερμική επιφάνεια και αρμονικές συναρτήσεις

**Ορισμός 3.2.1** **Ισοθερμική** λέγεται μία **κανονική** παραμετρική επιφάνεια  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  όταν  $E=G>0$  και  $F=0$ , όπου  $E, G, F$  τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle$$

Γεωμετρικά η ισοθερμική επιφάνεια δείχνει ότι τα διανύσματα που παράγουν τον εφαπτόμενο χώρο  $T_pM$ , είναι μεταξύ τους κάθετα ( $F=0$ ), και ίσου μέτρου. Πρέπει να έχουμε κατά νου ότι μία επιφάνεια δεν είναι κατ' ανάγκη παραμετρημένη ισοθερμικά.

Στην ενότητα 2.4 περιγράψαμε την επιφάνεια Enneper και είδαμε ότι έχει τα χαρακτηριστικά  $E=G, F=0$ , άρα είναι ισοθερμική, και υπολογίσαμε ότι  $H=0$ , άρα είναι και ελαχιστική. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε πως συνδέονται αυτές οι έννοιες.

**Ορισμός 3.2.2** Ως **Λαπλασιανή**  $\Delta f$  για μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $f$  ορίζουμε την ποσότητα

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (u,v) \in U.$$

Αν  $\Delta f=0$  η  $f$  λέγεται **αρμονική**.

**Πρόταση 3.2.3** Μια ισοθερμική παραμέτρηση  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μιας επιφανείας έχει την ιδιότητα  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH) \cdot \mathbf{N}$  όπου

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \text{ είναι η μέση καμπυλότητα και } E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle.$$

Θυμίζουμε  $E, G, F$  είναι τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης

$e, f, g$  είναι τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης

$\mathbf{N}$  είναι το κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο.

#### Απόδειξη

i) Ισχύει  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = c\mathbf{N}$  (3.2.3.α) Με δεδομένο ότι η  $\mathbf{x}$  είναι ισοθερμική, άρα  $E=G$  και  $F=0$ , η απόδειξη αυτή είναι καθαρά θέμα πράξεων. Έχουμε



$$\begin{aligned}
E = G &\Rightarrow \langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle, \quad F = 0 \Rightarrow \langle x_u, x_v \rangle = 0 \\
\langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle &\Rightarrow \text{διαφορίζοντας ως προς } u \quad \langle x_{uu}, x_u \rangle + \langle x_u, x_{uu} \rangle = \langle x_{vv}, x_v \rangle + \langle x_v, x_{vv} \rangle \\
2\langle x_{uu}, x_u \rangle &= \langle x_{vv}, x_v \rangle + \langle x_v, x_{vv} \rangle \\
\langle x_u, x_v \rangle = 0 &\Rightarrow \text{διαφορίζοντας ως προς } v \quad \langle x_{uv}, x_v \rangle + \langle x_u, x_{vv} \rangle = 0 \\
\text{άρα} \\
\langle x_{uu}, x_u \rangle &= \langle x_{vv}, x_v \rangle \\
\langle x_{uv}, x_v \rangle &= -\langle x_u, x_{vv} \rangle
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\langle x_{uu}, x_u \rangle = \langle x_{vv}, x_v \rangle &= -\langle x_u, x_{vv} \rangle \Rightarrow \\
\langle x_{uu}, x_u \rangle + \langle x_u, x_{vv} \rangle = 0 &\Rightarrow \boxed{\langle x_{uu} + x_{vv}, x_u \rangle = 0}
\end{aligned}$$

Δηλαδή τα διανύσματα  $x_{uu} + x_{vv}, x_u$  είναι κάθετα.

Με ακριβώς ίδια τη διαδικασία λόγω της διγραμμικής μορφής μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση  $\langle x_{uu} + x_{vv}, x_v \rangle = 0$  άρα τα  $x_{uu} + x_{vv}, x_v$  είναι επίσης κάθετα.

Τελικά παίρνουμε ότι  $x_{uu} + x_{vv} = c \cdot N$  καθώς από τις δύο σχέσεις καθετότητας τα  $x_{uu} + x_{vv}, N$  θα είναι αναγκαστικά παράλληλα.

ii) Λόγω του  $F=0$  έχουμε  $H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{E^2}$ . Αυτή η σχέση μας οδηγεί στο  $2EH = e + g$ . (3.2.3β)

Ο ορισμός (1.5.5) (δεύτερη στήλη σχέσεων) μας δίνει  $e = \langle N_u, X_{uu} \rangle$ ,  $g = \langle N_v, X_{vv} \rangle$  κι αυτό με τη σειρά του στο  $e + g = \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle$ ,

καθώς  $N_u = N_v$  και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

iii) Από την 3.2.3α  $e + g = N \cdot (cN) \Leftrightarrow e + g = cN^2$  και επειδή  $\|N\|^2 = N^2 = 1 \Rightarrow e + g = c$ .

Άρα από την (3.2.3β) παίρνουμε το συμπέρασμα, δηλαδή  $x_{uu} + x_{vv} = (2EH)N$  ■

**Πόρισμα 3.2.3.** Έστω  $x(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$  μια παραμέτρηση κανονικής ισοθερμικής επιφάνειας. Τότε οι συναρτήσεις  $x^1 = x_1(u,v)$ ,  $x^2 = x_2(u,v)$ ,  $x^3 = x_3(u,v)$  είναι αρμονικές.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

η **ισοθερμική**  $x(u,v)$  είναι **ελαχιστική**  $\Leftrightarrow x^j$  **αρμονικές**,  $j=1,2,3$

Απόδειξη Ευθύ: Αν η  $x(u,v)$  είναι ελαχιστική ισχύει  $H=0$ . Από την Πρόταση 3.2.3

ισχύει  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH) \cdot \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = \mathbf{0}$  και θα ισχύει για κάθε συντεταγμένη της  $\mathbf{x}^j$ ,

καθώς  $x = (x^1, x^2, x^3)$  επομένως  $\Delta \mathbf{x}^j = 0$ .

**Αντίστροφο:** Αν οι  $x^j$  είναι αρμονικές τότε  $\Delta x^j = 0$  άρα  $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (0, 0, 0)$ , επομένως από την πρόταση 3.2.3  $(2EH)\mathbf{N} = 0$ .

Καθώς θεωρήσαμε την  $x$  ισοθερμική, άρα  $E > 0$  και το μοναδιαίο κάθετο  $\mathbf{N} \neq 0$  πρέπει αναγκαστικά  $H = 0$  δηλαδή η ισοθερμική  $x$  είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης. ■

*Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η καμπυλότητα ( $\kappa$ ) μιας καμπύλης  $x(t)$  πάνω σε μια επιφάνεια  $\mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ , καθορίζει το ρυθμό που μεταβάλλεται το εφαπτόμενο διάνυσμα. Εφόσον η καμπύλη  $x(t)$  δεν είναι κατ' ανάγκη παραμετρημένη κατά μήκος τόξου, οι κύριες καμπυλότητες δεν είναι ακριβώς ίσες με τις δεύτερες παραγώγους  $\|\ddot{x}_{uu}\|$ ,  $\|\ddot{x}_{vv}\|$ , αλλά είναι ανάλογες. Άρα είναι λογικό οι συνιστώσες των  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$  να είναι μηδέν.*

Σχηματικά:  $\mathbf{x}_{uu}^j + \mathbf{x}_{vv}^j = 0$ ,  $j=1, 2, 3$  τότε και  $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$  και αντίστροφα [6, σελ. 3]

### 3.3 Σύνδεση ελαχιστικών επιφανειών και μιγαδικών συναρτήσεων.

Έστω  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια κανονική παραμέτρηση  $\mathbf{x}(u, v)$  επιφάνειας με συνιστώσες

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$$

Έστω  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ . Ορίζουμε την σχετιζόμενη συνάρτηση  $\phi$

$$\phi(z) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u - i\mathbf{x}_v) \text{ με συνιστώσες } \phi_j(z) = \frac{1}{2}(x_u^j - x_v^j).$$

Οι συνιστώσες της  $\phi$  και οι επιφάνειες ελάχιστης έκτασης (ελαχιστικές) έχουν μία πολύ σημαντική σύνδεση που αποδεικνύεται στο παρακάτω θεώρημα.

#### Θεώρημα 3.3.1

**A)** Η παραμετρική επιφάνεια  $x$  είναι ισοθερμική αν και μόνο αν  $\langle \phi, \phi \rangle = 0$  με τη  $\phi \neq 0$ .

Αν ισχύει αυτή η συνθήκη

**B)** η  $x$  είναι ελαχιστική αν και μόνο αν οι  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  είναι ολόμορφες συναρτήσεις

#### Απόδειξη

**A)** Ισχύει η σχέση

$$i) \langle \Phi, \Phi \rangle = \frac{1}{4}(E - G - 2iF)$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \Phi \rangle &= \sum_{j=1}^3 \varphi_j^2(z) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2}(x_u^j - ix_v^j) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \left( (x_u^j)^2 - (x_v^j)^2 - 2ix_u^j x_v^j \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \left( \|x_u\|^2 - \|x_v\|^2 - 2ix_u x_v \right) \\ &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF) \quad (*) \end{aligned}$$

Το πρώτο μέρος της απόδειξης έχει δειχθεί, καθώς

αν η  $x$  είναι ισοθερμική, τότε  $E=G$  και  $F=0$  άρα η (\*) δίνει  $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0$

Αντίστροφα Αν ισχύει  $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0 \xRightarrow{\text{λόγω της (*)}} \frac{1}{4}(E - G - 2iF) = 0 \Rightarrow E = G$  και  $F=0$

γιατί πρέπει να μηδενίζεται και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος.

Αυτός όμως είναι ο Ορισμός 3.2.1 για την ισοθερμική επιφάνεια.

Η περίπτωση  $\Phi=0$  αποκλείεται, καθώς η  $x$  είναι κανονική και η  $\Phi$  ορίζεται ως  $\Phi(z) = \frac{1}{2}(x_u - ix_v)$ , επομένως δεν μηδενίζεται καθώς δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα τα  $x_u, x_v$

**B)** Το Πόρισμα 3.2.3 μας δίνει για την ισοθερμική  $x$  ότι αν  $\Delta x=0$  τότε  $x_{uu}+x_{vv}=0$  δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) = - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) \quad \text{που είναι η μία συνθήκη Cauchy-Riemann.}$$

Η κανονικότητα της  $x$  μας δίνει άμεσα  $x_{uv}=x_{vu}$  που σημαίνει

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) = - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) \quad \text{που είναι η δεύτερη συνθήκη Cauchy-Riemann.}$$

Οι συνθήκες Cauchy-Riemann όμως ικανοποιούνται αν και μόνο αν μία συνάρτηση  $\Phi^j$  είναι ολόμορφη, κι αυτό είναι το δεύτερο συμπέρασμα ■

Σχηματικά ( $x$  ισοθερμική  $\Leftrightarrow \varphi^2=0$ )  $\Rightarrow x$  ελαχιστική  $\Leftrightarrow$  οι  $\Phi^j$  είναι ολόμορφες.

Η αναπαράμετρηση Weirstrass-Enneper (WER- Weirstrass-Enneper Representation) στην ουσία μας δίνει ελαχιστικές επιφάνειες από δύο συναρτήσεις  $f, g$  με κατάλληλα χαρακτηριστικά ( $f$  ολόμορφη,  $g$  μερόμορφη).

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο θεώρημα με την κεντρική ιδέα ότι η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσης. Πριν δώσουμε το κεντρικό θεώρημα της WER θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή σε μια απλή κλειστή καμπύλη του  $\mathbb{R}^3$ , που ορίζει ένα τμήμα επιφάνειας, μπορούμε να παράγουμε τις συνιστώσες  $x^j$  της  $\mathbf{x}$  από τις συνιστώσες της *συνάρτησης*  $\phi$ . Έτσι έχουμε το επόμενο:

**Θεώρημα 3.3.2** Έστω  $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$  μια ισοθερμική αναπαραμέτρηση κανονικής επιφάνειας και  $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$  με  $\phi(w)=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}=\frac{1}{2}(\mathbf{x}_u-i\mathbf{x}_v)$ , την *συνάρτηση*  $\phi$ .

Επίσης θεωρούμε ότι οι  $\phi_j, j=1,2,3$  είναι ολόμορφες. Τότε οι συνιστώσες της  $\mathbf{x}$  δίνονται από τις σχέσεις

$$x^j(u,v)=c_j+2\operatorname{Re}\left(\int_{\gamma}\phi_j(w)dw\right)$$

όπου η  $\gamma$  είναι μία απλή καμπύλη σε συνεκτικό χωρίο  $U\subset\mathbb{C}$  από το σημείο  $z_0=u_0+iv_0$  στο  $z=u+iv$ , και το  $c\in\mathbb{R}^3$

**Απόδειξη ([6], σελ 6), [3])** Αν  $z=u+iv\Rightarrow dz=du+idv$  έχουμε τον τελεστή

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad 17$$

(σχέσεις 3.1α,β στην αρχή του κεφαλαίου) άρα για κάθε συνιστώσα  $\phi_j$  καθώς ισχύει

$$\phi_j=\frac{\partial x^j}{\partial u}-i\frac{\partial x^j}{\partial v}\Rightarrow$$

$$\phi_j dz=\frac{1}{2}(x_u^j-ix_v^j)(du+idv)=\frac{1}{2}((x_u^j du+x_v^j dv)+i(x_u^j dv-x_v^j du)) \quad (3.3.2\alpha)$$

και για να οδηγηθούμε σε πραγματικό μέρος χρειαζόμαστε και την αντίστοιχη σχέση με συζυγή οπότε

$$\overline{\phi_j} d\bar{z}=\frac{1}{2}(x_u^j+ix_v^j)(du-idv)=\frac{1}{2}((x_u^j du+x_v^j dv)-i(x_u^j dv-x_v^j du)) \quad (3.3.2\beta)$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, για κάθε πραγματική συνιστώσα  $x^j$  έχουμε

<sup>17</sup>Λέγονται παράγωγοι του Wirtinger. ([https://en.wikipedia.org/wiki/Wirtinger\\_derivatives](https://en.wikipedia.org/wiki/Wirtinger_derivatives))

$$\begin{aligned}
dx^j &= \frac{\partial x^j}{\partial z} dz + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \\
&= \phi_j dz + \bar{\phi}_j d\bar{z} \quad (\text{προσθέτοντας τις 3.2.2α,β}) \\
&= x_u^j du + x_v^j dv \\
&= 2\operatorname{Re}(\phi_j dz)
\end{aligned}$$

και με ολοκλήρωση  $x^j(u, v) = c_j + 2\operatorname{Re}\left(\int_{\gamma} \phi_j(w) dw\right)$  ■

Ορίζουμε τώρα τις  $\phi_i$  με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ως εξής:

**Θεώρημα 3.3.3** Αν  $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ολόμορφη και  $g: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , μερόμορφη με επιπλέον να ισχύουν:

- Η  $f \cdot g^2$  να είναι ολόμορφη
- αν  $w$  πόλος της  $g$  τάξης  $n$ , τότε το  $w$  είναι ρίζα τάξης  $2n$  της  $f$
- δεν υπάρχουν εκτός των  $w$  άλλες ρίζες της  $f$ .

Τότε η απεικόνιση

$$\varphi(z) = \left( \frac{1}{2}(f - fg^2), \frac{i}{2}(f + fg^2), fg \right) \quad (3.3)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.1. Δηλαδή το πραγματικό μέρος της  $\Phi$ , ορίζει, ως σχετιζόμενη συνάρτηση με την  $\mathbf{x}$ , μία κανονική παραμέτρηση  $\mathbf{x}=(x^1, x^2, x^3)$  μιας επιφάνειας ελάχιστης έκτασης του  $\mathbb{R}^3$ .

Ισχύει και το αντίστροφο, ότι για κάθε σχετιζόμενη συνάρτηση  $\Phi$  με μία κανονική επιφάνεια  $\mathbf{x}$ , υπάρχουν συναρτήσεις  $f, g$  με τα παραπάνω χαρακτηριστικά ως προς την ολομορφία, ώστε η  $\Phi$  να γράφεται στη μορφή (3.3).

#### Απόδειξη

Το ότι  $\varphi \cdot \varphi = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  είναι αποτέλεσμα πράξεων:

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= (\varphi_1^2) + (\varphi_2^2) + (\varphi_3^2) = \left(\frac{1}{2}(1-g^2)\right)^2 + \left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\right)^2 + (fg)^2 \\
&= \frac{1}{4}f^2(1-g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1+g^2)^2 + f^2g^2 \\
&= \frac{1}{4}f^2((1-g^2)^2 - (1+g^2)^2) + f^2g^2 \\
&= \frac{1}{4}f^2(-4g^2) + f^2g^2 = 0
\end{aligned}$$

Άρα η παραμέτρηση  $x$  είναι σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.1 ισοθερμική.

Όμως αν ίσχυε  $\Phi=0$  ταυτοτικά, θα είχαμε  $\varphi_1 = \frac{1}{2}(f - fg^2) \Rightarrow \varphi_1 = 0$  άρα  $f=0$  ή  $g=1$ . Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι η  $g$  έχει αριθμησιμο πλήθος πόλων ως μερόμορφη. Αν πάλι ίσχυε  $g = \pm 1$  που επίσης αντιβαίνει στο ότι η  $g$  είναι μερόμορφη. Άρα η  $\Phi$  δεν είναι μηδενική σε κανένα σημείο.

Θεωρούμε τώρα  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  με τις  $\varphi_i$  ολόμορφες, την  $\Phi$  τέτοια ώστε  $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0$  και να μη μηδενίζεται σε κανένα σημείο ταυτόχρονα ως προς τις τρεις συνιστώσες  $\varphi_i$

Από τη σχέση (3.3), καθώς με αφαίρεση προκύπτει άμεσα ότι  $\varphi_1 - i\varphi_2 = f$  και επειδή  $\varphi_3 = f \cdot g$  οδηγούμαστε να ορίσουμε

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 \quad (3.3.3\alpha)$$

$$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$$

Στην περίπτωση που  $\varphi_1 - i\varphi_2 = 0$  καθώς ισχύει

$$\langle \Phi, \Phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \text{ δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα και } \varphi_1 + i\varphi_2 = 0.$$

Αυτό γιατί τότε θα είχαμε αναγκαστικά  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ . Άρα θα μπορούμε να συνεχίσουμε με τις

$$f = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 + i\varphi_2} \text{ με την ίδια πορεία που θα ακολουθήσουμε από δω και κάτω.}$$

Η  $f$  είναι αναλυτική και η  $g$  ως μερόμορφη γράφεται ως πηλίκιο δύο ολόμορφων [5. Σελ. 128]

Θέλουμε να ορίσουμε τις συνιστώσες της  $\varphi$  ως συνδυασμό των  $f$ ,  $g$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned}\varphi \cdot \varphi = 0 &\Leftrightarrow \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\varphi_3^2 \Leftrightarrow (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) = -\varphi_3^2 \\ &\Leftrightarrow (\varphi_1 + i\varphi_2) = -(\varphi_1 - i\varphi_2) \frac{\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\varphi_1 + i\varphi_2 = -f \cdot g^2} \quad (3.3.3\beta)\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις (3.3.3α) και (3.3.3β) παίρνουμε

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2)}$$

ενώ αφαιρώντας τις (3.3.3α) και (3.3.3β) παίρνουμε

$$2i\varphi_2 = -fg^2 - f \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{1}{2i}f(1+g^2) \Leftrightarrow \boxed{\varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2)}$$

Η τρίτη συνιστώσα προκύπτει πολύ εύκολα καθώς

$$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \Leftrightarrow (\varphi_1 - i\varphi_2)g = \varphi_3 \Leftrightarrow \boxed{\varphi_3 = fg} \quad \text{από την (3.3.3α).}$$

Με τον τρόπο που ορίστηκαν οι  $f$ ,  $g$  ( $f$  ολομορφική,  $g$  μερόμορφη, αλλά με τους πόλους τάξης  $n$  της  $g$ , ρίζες τάξης  $2n$  της  $f$ ) η συνιστώσα

$\varphi_3 = fg$  είναι ολόμορφη, σύμφωνα με τη θεωρία των ολόμορφων συναρτήσεων. Για τον ίδιο λόγο το γινόμενο  $fg^2$  είναι επίσης ολόμορφη συνάρτηση (πόλοι τάξης  $n$  της  $g$ , ρίζες τάξης  $2n$  της  $f$ ), άρα και οι  $\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2)$ ,  $\varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2)$  είναι επίσης ολόμορφες).

Άρα η  $\Phi(w) = \left( \frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg \right)$  είναι η συνάρτηση που ζητούμε ■

Αυτή η ισοδυναμία μας οδηγεί στον παρακάτω θεμελιώδη ορισμό

### ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3 Αναπαραμέτρηση Weirstrass-Ennepier

Έστω

- $U$  απλό, ανοικτό, συνεκτικό χωρίο του  $\mathbb{C}$
- $\gamma$  συνεκτική καμπύλη (contour) του  $U$  από ένα σταθερό σημείο  $z_0$  σε τυχαίο σημείο  $z$
- $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ολόμορφη συνάρτηση (όχι ταυτοτικά μηδέν)
- $g: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , μερόμορφη, ώστε η  $fg^2$  να παραμένει ολόμορφη, πράγμα που συμβαίνει όταν οι πόλοι  $n$  τάξης της  $g$  είναι ρίζες  $2n$  τάξης της  $f$ .

Τότε μία παραμέτρηση ελαχιστικής επιφάνειας δίνεται από τη σχέση

$$x(u, v) = c_0 + \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (1 - g(w)^2) f(w) dw, i (1 + g(w)^2) f(w) dw, 2f(w)g(w) dw \right) \quad (\text{σχέση } 3.3),$$

όπου το  $c_0 = (c_1, c_2, c_3)$  σημείο του  $\mathbb{R}^3$ .

Επίσης μια τέτοια αναπαραμέτρηση ορίζεται για κάθε επιφάνεια ελάχιστης έκτασης. Αυτή ονομάζεται **αναπαραμέτρηση Weirstrass-Enneper** για τις ελαχιστικές επιφάνειες<sup>18</sup> ■

### 3.4 Παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών με την αναπαραμέτρηση Weirstrass.

#### 3.4.1 Επιφάνεια του Enneper

Θα αναπαραμετρήσουμε αρχικά την επιφάνεια του Enneper. Μια παραμέτρηση της είναι η

$$x(u, v) = 2 \left( u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2 \right) \quad (3.4.1)$$

που όπως έχουμε δει στη παράγραφο 2.4 έχει μηδενική μέση καμπυλότητα Η άρα είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης.

Επειδή αυτή η παραμέτρηση έχει πολυωνυμικές συνιστώσες, είναι κατάλληλη για να χρησιμοποιήσουμε την αναπαραμέτρηση Weirstrass.

Πράγματι θέτουμε

$$f(w) = 1, g(w) = w, w \in \mathbb{C}, w = u + iv$$

Οι πολικές συντεταγμένες είναι πιο βολικές για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων άρα ορίζουμε  $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$  επομένως  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow w = re^{i\theta}$  από την ταυτότητα του Euler. Υπολογίζουμε

$$\int f(1 - g^2) dw = \int (1 - w^2) dw = w - \frac{w^3}{3} = re^{i\theta} - \frac{(re^{i\theta})^3}{3} = r(\cos \theta + i \sin \theta) - \frac{1}{3} r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \quad (3.4.1\alpha)$$

$$\int i f(1 + g^2) dw = \int i(1 + w^2) dw = i \left[ w - \frac{w^3}{3} \right] = i \left[ re^{i\theta} + \frac{(re^{i\theta})^3}{3} \right] = ir(\cos \theta + i \sin \theta) - i \frac{1}{3} r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \quad (3.4.1\beta)$$

<sup>18</sup> [6] σελ7, [1], σελ. 305, κ.τ.λ. Οι τελικοί τύποι διαφέρουν στους διάφορους συγγραφείς καθώς μπορούμε να απαλείψουμε με διαφορετικούς τρόπους τις σταθερές  $c_0 = (c_1, c_2, c_3)$ , και  $1/2$ . Πιο συχνή είναι η γραφή στο [6] που απαλείφει τα κλάσματα, και την οποία ακολουθούμε.



$$\int 2fgdw = \int 2wdw = w^2 = r^2 e^{i2\theta} \quad (3.4.1\gamma)$$

Μας ενδιαφέρει το πραγματικό μέρος των (3.4.1α,β,γ)

$$x^1 = \operatorname{Re} \int f(1-g^2)dw = \operatorname{Re} \left( r(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{3}r^3(\cos 3\theta + \sin 3\theta) \right) = \boxed{r \cos\theta - \frac{1}{3}r^3 \cos 3\theta}$$

$$x^2 = \operatorname{Re} \int f(1+g^2)dw = \operatorname{Re} \left( ir(\cos\theta + i\sin\theta) - i\frac{1}{3}r^3(\cos 3\theta + \sin 3\theta) \right) = \boxed{-r \sin\theta - \frac{1}{3}r^3 \sin 3\theta}$$

$$x^3 = \operatorname{Re} \int 2fgdw = \operatorname{Re} (r^2 e^{i2\theta}) = \boxed{r^2 \cos 2\theta}$$

Άρα από τον ορισμό (3.3) και τις αντίστοιχες σχέσεις έχουμε

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (x^1, x^2, x^3) = \left( r \cos\theta - \frac{1}{3}r^3 \cos 3\theta, -r \sin\theta - \frac{1}{3}r^3 \sin 3\theta, r^2 \cos 2\theta \right) \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi \quad (3.4.1\delta)$$

Αυτή είναι η παραμέτρηση της επιφάνειας Ennepier σε πολικές συντεταγμένες. Για να διαπιστώσουμε ότι αντιστοιχίζεται με την (3.4.1) χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Έχουμε  $u = r \cos\theta, v = r \sin\theta \Rightarrow r^2 \cos 2\theta = r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin^2\theta = u^2 - v^2$  άρα όντως  $x^3 = u^2 - v^2$

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos\theta - \frac{1}{3}r^3 \cos 3\theta = r \cos\theta - \frac{1}{3}r^3 (4 \cos^3\theta - 3 \cos\theta) \\ &= r \cos\theta - \frac{4}{3}r^3 \cos^3\theta + r^3 \cos\theta \\ &= u - \frac{1}{3}u^3 + r^3 \cos\theta (1 - \cos^2\theta) \\ &= u - \frac{1}{3}u^3 + r \cos\theta \cdot r^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2 \end{aligned}$$

και χρειάζεται παρόμοιες αλχημείες για να αποδείξουμε ότι

$$x^2 = -r \sin\theta - \frac{1}{3}r^3 \sin 3\theta = \dots = -u^2v + \frac{1}{3}v^3$$

Η πολωννυμική αναπαράμετρηση (3.4.1) επομένως και η πολική (3.4.1δ) της επιφάνειας Ennepier ταυτίζονται.

### 3.4.1α Επιφάνεια Ennepier ανώτερης τάξης <sup>19</sup>

Ως εδώ το κέρδος της παραμέτρησης WER μπορεί να μη μοιάζει σημαντικό. Αν όμως πάρουμε  $f(w)=1$  και  $g_k(w)=w^k$ , ως συναρτήσεις ( $k \in \mathbb{N} > 1$ ) μπορούμε να πάρουμε τις επιφάνειες Ennepier ανώτερης τάξης καθώς η  $g_k$  είναι ολόμορφη (άρα και μερόμορφη).

Έτσι ορίζονται οι σχέσεις

$$\bullet \int f(1-g^2)dw = \int (1-w^{2k})dw = w - \frac{w^{2k+1}}{2k+1} = re^{i\theta} - \frac{(re^{i\theta})^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{2k+1} r^{2k+1} (\cos(2k+1)\theta + i\sin(2k+1)\theta)$$

και με πράξεις  $x^1(r, \theta) = r \cos\theta - \frac{r^{2k+1}}{2k+1} \cos(2k+1)\theta$  **(3.4.2α)**

•

$$\int i \cdot f(1+g^2)dw = \int i(1+w^{2k})dw = i \left[ w + \frac{w^{2k+1}}{2k+1} \right] = i \left[ re^{i\theta} + \frac{(re^{i\theta})^{2k+1}}{2k+1} \right]$$

$$= i \left[ r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2k+1} r^{2k+1} (\cos(2k+1)\theta + i\sin(2k+1)\theta) \right]$$

$$= ir \cos\theta - r \sin\theta + \frac{1}{2k+1} r^{2k+1} (i \cos(2k+1)\theta - \sin(2k+1)\theta)$$

απ' όπου  $x^2(r, \theta) = -r \sin\theta - \frac{r^{2k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\theta$  **(3.4.2β)**

• Με όμοιο ακριβώς τρόπο παίρνουμε

$$x^3 = \operatorname{Re} \int 2fgdw = \frac{2r^{k+1}}{k+1} (\cos(k+1)\theta)$$
 **(3.4.2γ)**

Από τις (3.4.2α,β,γ) και τον Ορισμό (3.3) και τις αντίστοιχες σχέσεις παίρνουμε την επιφάνεια

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (x^1, x^2, x^3) = \left( r \cos\theta - \frac{r^{2k+1}}{2k+1} \cos(2k+1)\theta, -r \sin\theta - \frac{r^{2k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\theta, \frac{2r^{k+1}}{k+1} (\cos(k+1)\theta) \right)$$

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$$
 **(3.4.2δ)**

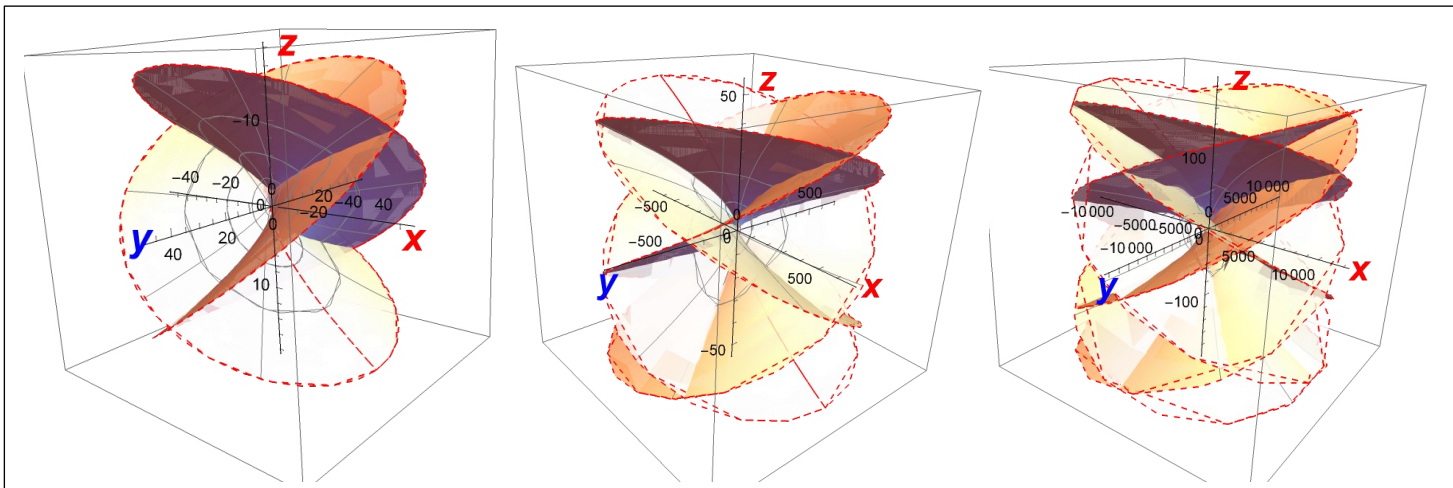
<sup>19</sup> Στο [8] σελ. 40, διατυπώνεται ως "Higher Order Ennepier Surfaces", με παραπομπή στο [Oprea, J : "The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple. American Mathematical Society, 2000, σελ. 80]. Επίσης στο [15], σελ. 734, αναφέρεται ως "Ennepier's Surface of Degree n".

Η ιδέα είναι η ίδια και στα δύο συγγράμματα: η συνάρτηση  $g$  υψώνεται σε δύναμη  $k \in \mathbb{N}$ . Στην εικόνα 5 που ακολουθεί μπορεί να δει κανείς ότι καθώς αυξάνεται το  $k$  μεγαλώνει το πλήθος των αυτοτομών. Για τις αυτοτομές της επιφάνειας Ennepier υπάρχει εκτενής ανάλυση στο [8] σελ. 40-44 & 56-59.

που είναι η παραμέτρηση της επιφάνειας Ennepier ανώτερης τάξης  $k$ , σε πολικές συντεταγμένες. Αυτή προκύπτει άμεσα ότι είναι ελαχιστική, από το **Θεώρημα 3.3.3**.

Ας σημειώσουμε ότι υπάρχει αντίστοιχη πολυωνυμική αναπαραμέτρηση, καθώς μπορούμε να αναπτύξουμε τις ποσότητες  $\cos(2k+1)\theta$ ,  $\sin(2k+1)\theta$  και να αντικαταστήσουμε κατάλληλα.

### Επιφάνειες Ennepier για $k=1,2,3$



Εικόνα 5 Επιφάνειες Ennepier

Ένα πλαίσιο εντολών που μπορεί να δοθεί για να κατασκευάσουμε με το Mathematica τις παραπάνω επιφάνειες είναι

- $$\sigma[r,\theta]:=\{r*\text{Cos}[\theta]-r^{(2k+1)}\text{Cos}[(2k+1)*\theta]/(2k+1),-r*\text{Sin}[\theta]-r^{(2k+1)}*\text{Sin}[(2k+1)\theta]/(2k+1),2r^{(k+1)}\text{Cos}[(k+1)*\theta]/(2k+1)\}$$

$\sigma[r,\theta]//\text{TraditionalForm}$

- `Table[ParametricPlot3D[σ[r, θ], {r, -5, 5}, {θ, 0, 2π}, Axes → True, AxesLabel → {Style[x, Large, Bold, Red], Style[y, Large, Bold, Blue], Style[z, Large, Bold, Red]}, PlotRange → All, AxesStyle → Directive[{Black, Thickness[0.8], Dashing[15]}], AxesOrigin → {0, 0, 0}, BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint → Front, PlotStyle → Directive[ColorFunction → "RainbowOpacity", Specularity[White, 5], Opacity[0.8]], Mesh → 10, MeshStyle → Gray, PlotPoints → 25, BoundaryStyle → Directive[Red, Thin, Dashed]], {k, 1, 3}]`

### 3.4.2 Επιφάνεια του Richmond

Δεύτερη επιλογή συναρτήσεων  $f, g$  μπορεί να είναι οι

$$f(w) = w^2, g(w) = \frac{1}{w^2}, w \in \mathbb{C}^*$$

Πραγματικά, ο πόλος  $w=0$  της  $g$  είναι ρίζα δεύτερης τάξης της  $f$  και οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος (3.3) ισχύουν.

Θα βρούμε αρχικά την αναπαράμετρηση σε πολικές συντεταγμένες ξεκινώντας από το ότι  $w = re^{i\theta}$ , και  $|w| > 0$ .

$$\begin{aligned} \int f(1-g^2)dw &= \int (w^2 - \frac{1}{w^2})dw = \frac{w^3}{3} + \frac{1}{w} = \frac{r^3 e^{i3\theta}}{3} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \\ &= \frac{r^3}{3} (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x^1 = \operatorname{Re} \int f(1-g^2)dw = \boxed{\frac{r^3}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{r} \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \int if(1+g^2)dw &= \int i(w^2 + \frac{1}{w^2})dw = i \left( \frac{w^3}{3} - \frac{1}{w} \right) = \frac{ir^3 e^{i3\theta}}{3} - \frac{i}{r} e^{-i\theta} \\ &= \frac{r^3}{3} (i \cos 3\theta - \sin 3\theta) - \frac{1}{r} (i \cos \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } x^2 = \operatorname{Re} \int if(1+g^2)dw = \boxed{-\frac{r^3}{3} \sin 3\theta - \frac{1}{r} \sin \theta}$$

$$\text{Όμοια } x^3 = \operatorname{Re} \left( \int 2fgdw = \int 2w^2 \frac{1}{w^2} dw = 2re^{i\theta} \right) = \boxed{2r \cos \theta}$$

Άρα μια παραμέτρηση σε πολικές συντεταγμένες της επιφάνειας είναι

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (x^1, x^2, x^3) = \left( \frac{r^3}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{r} \cos \theta, -\frac{r^3}{3} \sin 3\theta - \frac{1}{r} \sin \theta, 2r \cos \theta \right)$$

$$0 < r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{(3.4.2)}$$

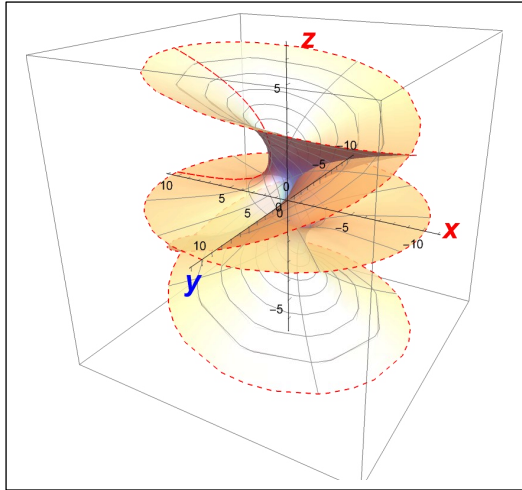
Για να κάνουμε μια ρητή παραμέτρηση της επιφάνειας χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta \Rightarrow r^2 = u^2 + v^2$  και ταυτότητες. Έτσι έχουμε διαδοχικά

$$\left. \begin{aligned} \frac{r^3}{3} \cos 3\theta &= \frac{1}{3} r^3 (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = \frac{4}{3} u^3 - r^2 u \\ \frac{1}{r} \cos \theta &= \frac{u}{r^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} \end{aligned} \right\} x^1 = \boxed{\frac{1}{3} u^3 - uv^2 + \frac{u}{u^2 + v^2}}$$

Όμοια

$$x^2 = -\frac{r^3}{3} \sin 3\theta - \frac{1}{r} \sin \theta = \frac{1}{3} r^3 (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) - \frac{r \sin \theta}{r^2} = \boxed{u^2 v - \frac{1}{3} v^3 - \frac{v}{u^2 + v^2}}$$

ενώ η  $x^3 = 2r \cos \theta = \boxed{2u}$  φαίνεται άμεσα.



Εικόνα 6 επιφάνεια Richmond

Γενικά η ρητή-πολυωνυμική παραμέτρηση της επιφάνειας είναι πιο οικεία, αλλά η πολικές συντεταγμένες μπορούν να μας δώσουν επιφάνειες ανώτερης τάξης. Έτσι, αν εργαστούμε όπως στην επιφάνεια Enneper, μπορούμε να ξεκινήσουμε π.χ. από συναρτήσεις

$$f(w) = w^{2k}, g(w) = \frac{1}{w^2}, \quad w \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}^+$$

### 3.4.3 Δεύτερος τρόπος αναπαράμετρησης Weirstrass-Enneper

Στα προηγούμενα δύο παραδείγματα είδαμε ότι οι  $f, g$  μπορεί να είναι ολόμορφες, και ότι η πολύπλοκη διατύπωση για τους πόλους της της  $g$ , εφόσον υπάρχουν, ξεπερνιέται αν αυτοί είναι ρίζες διπλάσιας τάξης της  $f$ . Μια τροποποίηση του ορισμού, πιο ευέλικτη στους υπολογισμούς για μία μεγάλη ομάδα συναρτήσεων γίνεται ως εξής:

Έστω ότι η  $g$  είναι μια ολόμορφη συνάρτηση που έχει επίσης συνεχή αντίστροφη  $g^{-1}$ .

Θέτουμε  $\tau = g \Rightarrow \frac{d\tau}{dw} = \frac{dg}{dw} \Rightarrow d\tau = dg, w \in \mathbb{C}$  Τότε η  $F(\tau) = f/g' = f \frac{dw}{dg}$  έχει την ιδιότητα

$$F(\tau)d\tau = f/g' = f \left( \frac{dw}{dg} \right) d\tau = fdw \quad (\text{ορίσαμε } d\tau = dg)$$

Τότε η σχέση 3.3 γίνεται

$$x(u, v) = c_0 + \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (1 - g(w)^2) f(w) dw, i (1 + g(w)^2) f(w) dw, 2f(w)g(w) dw \right) \Rightarrow$$

$$x(u, v) = c_0 + \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau, i (1 + \tau^2) F(\tau) d\tau, 2\tau F(\tau) d\tau \right) \text{ όπου η } F \text{ είναι μια ολόμορφη}$$

συνάρτηση και  $w = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$ .

Καθώς  $u = \frac{w + \bar{w}}{2}$ ,  $v = \frac{w - \bar{w}}{2i}$  οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύουν ότι μία παραμέτρηση επιφάνειας ελάχιστης έκτασης  $\mathbf{x}(u,v)$  μπορεί να δοθεί από τις ολόμορφες συναρτήσεις  $F(\tau)$  και  $g(w)=\tau$ , από τον παρακάτω εναλλακτικό τρόπο:

### ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4 Αναπαράσταση Weirstrass-Enneper II

- Έστω η ολομορφική συνάρτηση  $F(\tau)$
- $g$  είναι μια ολόμορφη συνάρτηση που έχει επίσης συνεχή αντίστροφη  $g^{-1}$  με  $g(w)=\tau$

Τότε μία επιφάνειας ελάχιστης έκτασης  $\mathbf{x}(u,v)$  μπορεί να παραμετρηθεί από τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned}x^1(w, \bar{w}) &= \operatorname{Re} \left( \int (1 - \tau^2) F(\tau) dw \right) \\x^2(w, \bar{w}) &= \operatorname{Re} \left( \int i(1 + \tau^2) F(\tau) dw \right) \quad (\text{σχέσεις 3.4}) \\x^3(w, \bar{w}) &= \operatorname{Re} \left( \int 2\tau F(\tau) dw \right)\end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Το πιο σημαντικό στις παραπάνω σχέσεις είναι ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση  $F$  ορίζει μια επιφάνεια ελάχιστης έκτασης.<sup>20</sup>

### Παράδειγμα 3.4.4 Το ελικοειδές με την αναπαράσταση Weirstrass-Enneper

Στην πρόταση 2.3.2.2 (Θεώρημα Catalan) είδαμε ότι το ελικοειδές είναι η μόνη ευθιγογενής επιφάνεια που έχει ελάχιστη έκταση. Θυμίζουμε ότι μία παραμέτρηση του ελικοειδούς είναι η

$$\sigma(u,v) = (u \cos v, u \sin v, av), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Θα επιλέξουμε για ευκολία στους υπολογισμούς  $a=1$ , καθώς είναι σταθερά.

Θεωρούμε ότι  $F(\tau) = \frac{i}{2\tau^2}$ , με  $\tau = e^w$ . Άρα  $\tau^{-1} = \operatorname{Log} w$  που είναι ο κύριος κλάδος της μιγαδικής συνάρτησης  $\operatorname{Log} w + \operatorname{Arg} w$  και είναι ολόμορφη για  $w \neq 0$ .

Στο πεδίο ορισμού της  $\tau^{-1}$  οι  $F$  και  $\tau$  είναι ολόμορφες. Υπολογίζουμε τα  $x^1, x^2, x^3$  κατά τα γνωστά

<sup>20</sup> [6] σελ. 7, [4] σελ. 125. Σε αυτά τα συγγράμματα αναφέρεται και ως δεύτερος ορισμός

$$\begin{aligned}
x^1 &= \operatorname{Re} \left( \int (1 - \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau \right) = \operatorname{Re} \left( \int \left( \frac{i}{2\tau^2} - \frac{i}{2} \right) d\tau \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{-i}{2\tau} - \frac{i}{2} \tau \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{-i}{2} (e^{-(u+iv)} + e^{(u+iv)}) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{-i}{2} (e^{-u} (\cos(-v) + i \sin(-v)) + e^u (\cos v + i \sin v)) \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{-u} \sin(-v) + \frac{1}{2} e^u \sin v
\end{aligned}$$

Όμοια παίρνουμε για τις  $x^2$  και  $x^3$

$$\begin{aligned}
x^2 &= \operatorname{Re} \left( \int i(1 + \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau \right) = \operatorname{Re} \left( \int \left( -\frac{1}{2\tau^2} - \frac{1}{2} \right) d\tau \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\tau} - \frac{i}{2} \tau \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} (e^{-(u+iv)} - e^{(u+iv)}) \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{-u} \cos(-u) - \frac{1}{2} e^u \cos u
\end{aligned}$$

$$x^3 = \operatorname{Re} \left( \int 2\tau \frac{i}{2\tau^2} d\tau \right) = \operatorname{Re}(i \operatorname{Log} |\tau|) = \operatorname{Re}(i \operatorname{Log} |e^z|) = \operatorname{Re}(iz) = -v$$

Αν αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις Weirstrass-Enneper (σχέσεις 3.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(u, v) &= \left( \frac{1}{2} (e^u - e^{-u}) \sin v, -\frac{1}{2} (e^u - e^{-u}) \cos v, -v \right) \Leftrightarrow \mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cdot \sin v, -\sinh u \cdot \cos v, -v) \Leftrightarrow \\
&\mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cdot \sin v, -\sinh u \cdot \cos v, -v)
\end{aligned}$$

Αυτή είναι μια παραμέτρηση ελικοειδούς καθώς

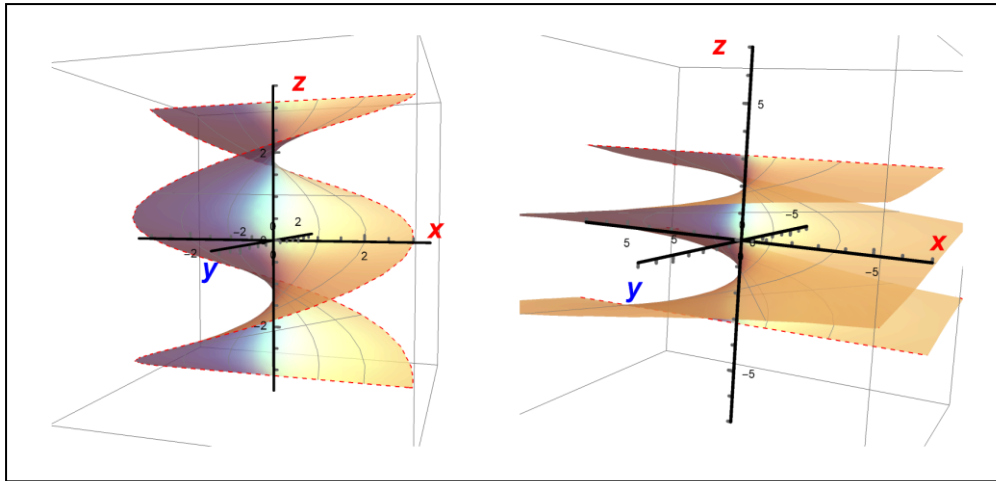
- είναι ελαχιστική, από το θεώρημα 3.3,
- είναι ευθειογενής: θέτουμε  $U = \sinh u$  που είναι ισομορφισμός  $u \mapsto \sinh u$ ,  $u \in \mathbb{R}$

και επίσης  $V = v - \frac{\pi}{2}$  που είναι παράλληλη μετατόπιση, άρα επίσης ισόμορφη. Τότε

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cdot \sin v, -\sinh u \cdot \cos v, -v) \Leftrightarrow \mathbf{x}(u, v) = c_0 + (U \cos V, U \sin V, -V)$$

$$\text{με } c_0 = (0, 0, -\frac{\pi}{2}).$$

Η  $\mathbf{x}(U, V) = (U \cos V, U \sin V, -V)$  είναι ελικοειδής ως προς  $U, V$  άρα η  $\mathbf{x}(u, v)$  όπως δόθηκε είναι μια άλλη παραμέτρηση και μεταφορά κατά το  $c_0$ . Το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύεται και από την **Πρόταση 2.3.2.2 (Θεώρημα Catalan)**



Ελικοειδής με διαφορετική παραμέτρηση :  $(u \cdot \sin v, u \cdot \cos v, v)$  &  $(\sinh u \cdot \sin v, -\sinh u \cdot \cos v, -v)$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.4.4** Τα συγγράμματα που πραγματεύονται την αναπαραμέτρηση Weirstrass-Enneper δίνουν χωρίς υπολογισμούς τις συναρτήσεις  $f, g$  (ολόμορφη, μερόμορφη) ή  $F, \tau$ , όταν πρόκειται να παραχθούν γνωστές επιφάνειες ελάχιστης έκτασης. Ας δούμε πώς μπορούν να προκύψουν από τη θεωρία WER οι συναρτήσεις  $F, \tau$  που δώσαμε στο τελευταίο παράδειγμα.

Ας θεωρήσουμε την αναπαραμέτρηση  $x(u,v)=(u \cos v, u \sin v, av)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ . Αν υπολογίσουμε την μέση καμπυλότητα "H" η επιφάνεια προκύπτει ελαχιστική. Για να αποφύγουμε τους μακροσκελείς υπολογισμούς χρησιμοποιούμε εντολές στο Mathematica:

$$\sigma[u, v] := \{u * \text{Cos}[v], u * \text{Sin}[v], v\}$$

$E1 = D[\sigma[u, v], \{u, 1\}] \cdot D[\sigma[u, v], \{u, 1\}] // \text{FullSimplify}$

$G1 = D[\sigma[u, v], \{v, 1\}] \cdot D[\sigma[u, v], \{v, 1\}] // \text{FullSimplify}$

$F1 = D[\sigma[u, v], \{u, 1\}] \cdot D[\sigma[u, v], \{v, 1\}]$

$e1 = D[\sigma[u, v], \{u, 1\}] \cdot \text{Cross}[D[\sigma[u, v], \{v, 1\}], D[\sigma[u, v], \{u, 2\}]] / \sqrt{E1 * G1 - F1^2}$

$f1 = D[\sigma[u, v], \{u, 1\}] \cdot \text{Cross}[D[\sigma[u, v], \{v, 1\}], D[\sigma[u, v], \{u, 1\}, \{v, 1\}]] / \sqrt{E1 * G1 - F1^2}$

$g1 = D[\sigma[u, v], \{u, 1\}] \cdot \text{Cross}[D[\sigma[u, v], \{v, 1\}], D[\sigma[u, v], \{v, 2\}]] / \sqrt{E1 * G1 - F1^2}$

$H = (e1 * G1 - 2f1 * F1 + g1 * E1) / 2$

Και παίρνουμε ως αποτέλεσμα

$$E1=1, G1=1+u^2, F1=0$$

$$e1=0, g1=0, f1=(-\text{Cos}[v]^2 - \text{Sin}[v]^2)/(1+u^2) \text{ και τελικά}$$

$$H=0$$

Δηλαδή, η επιφάνεια είναι ελαχιστική, καθώς  $H=0$ , αλλά η παραμέτρηση δεν είναι



ισοθερμική, καθώς  $E1 \neq G1$  για τα ποσά πρώτης τάξης. Άρα δεν είναι κατάλληλη για να εμφανίσουμε τη συνάρτηση  $\varphi$ .

Άρα χρειαζόμαστε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.2 μία ισοθερμική παραμέτρηση.

Ξεκινούμε από την  $\sigma(u, v) = \{\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), v\}$

Αυτή είναι αρμονική, δηλαδή  $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$ . Υπολογίζουμε τη συνάρτηση  $\varphi$  με

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \text{ με } \varphi(w) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u - i\mathbf{x}_v) = \left\{ \frac{1}{2} \cosh[u + iv], -\frac{1}{2} i \sinh[u + iv], -\frac{i}{2} \right\}$$

Γι' αυτήν όντως ισχύει  $\varphi^2 = 0$ . Υπολογίζουμε όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 3.3.3 τα ποσά

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 \quad (3.3.3\alpha)$$

$$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$$

και προκύπτουν  $f(u, v) = 1/2e^{-u-iv}$ ,  $g(u, v) = -i/2e^{u+iv}$

Από αυτά θέτοντας  $F = f/g$ ,  $g = e^w$ ,  $w = u + iv$  προκύπτουν όλα όσα υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ■

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Διαφορετικά πεδία των μαθηματικών συνδέονται με έννοιες της φυσικής στην περίπτωση των επιφανειών ελάχιστης έκτασης. Ο προβληματισμός για το πώς μπορεί να περιγραφεί μια επιφάνεια που περικλείεται σε μια απλή, κλειστή καμπύλη, ώστε αυτή παράλληλα να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδό, απασχόλησε επιστήμονες του 19ου αιώνα, καταγράφεται ως το πρόβλημα του Plateau, αν και αρχική λύση έδωσε για περιορισμένες συνθήκες ο Langrange.

Η εξέλιξη της διαφορικής γεωμετρίας έδωσε γενικότερες λύσεις, αν και η προσέγγιση του Langrange αποδεικνύει για πρώτη φορά, κάτι που μοιάζει προφανές: μια επίπεδη κλειστή καμπύλη ορίζει ως επιφάνεια ελάχιστης έκτασης το τμήμα του επιπέδου που περικλείει.

Έτσι ο προβληματισμός εστιάστηκε στις τρισδιάστατες κλειστές καμπύλες, και αργότερα

στις επιφάνειες Riemann σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Η θεώρηση των επιφανειών μέσω της καμπυλότητας τους, συνέδεσε αρχικά τις επιφάνειες ελάχιστης έκτασης με τη μέση καμπυλότητα "H". Αν μία επιφάνεια έχει μέση καμπυλότητα  $H=0$  είναι ελαχιστική και αντίστροφα.

Η παραμέτρηση Weirstrass-Enneper είναι ένας τρόπος να κατασκευάζουμε ελαχιστικές επιφάνειες μέσω κατάλληλων συναρτήσεων  $f, g$  και το πραγματικό τους μέρος.

Το γενικότερο πρόβλημα, δηλαδή η ύπαρξη μιας επιφάνειας ελάχιστης έκτασης, που περιέχεται σε μία απλή, κλειστή καμπύλη (Jordan), αποδείχθηκε από τους Douglas και Radó ανεξάρτητα το 1931 (βλ. [16], [17], [18]). Γενικά, η εύρεση της επιφάνειας που περιέχεται σε μια κλειστή τρισδιάστατη καμπύλη και έχει ελάχιστο εμβαδό, είναι αντικείμενο ερευνών σε πολλά επιστημονικά πεδία<sup>21</sup>, και στις περισσότερες περιπτώσεις αντιμετωπίζεται με επίλυση ολοκληρωτικών-διαφορικών εξισώσεων, σε μια προσέγγιση όπως αυτή που περιγράψαμε στην Ενότητα 2.1. Αυτή όμως η θεώρηση ξεπερνά τα όρια αυτής της παρουσίασης.

---

<sup>21</sup> Για παράδειγμα [20] σελ. 8: Η αναφορά στην επιφάνεια Willmore, ως γενίκευση των επιφανειών ελάχιστης έκτασης, μελετά τις κυτταρικές μεμβράνες.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] Andrew Presley: "Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, (2020)
- [2] Αρβανιτογεώργος Ανδρέας: "Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία", ΣΕΑΒ, (2015)
- [3] Evan Snyder: "Minimal Surfaces and The Weierstrass-Enneper Representation", CSUSB ScholarWorks, (2020)
- [5] Lars V. Ahlfors: "COMPLEX ANALYSIS" (Third Edition), Mc Graw-Hill, (1979)
- [6] Myla Kilchrist and Dave Packard: "The Weierstrass-Enneper Representations", Colorado State University "Dynamics at the Horsetooth" (Volume 4, σελ. 1-12), (2012)
- [7] Manfredo P Do Carmo: "Differential Geometry of Curves and Surfaces (Second Edition)" Prentice Hall, (1976)
- [8] Sheikh, Shafaq Naz: "The Theory of Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with a look at the Area Minimizing Property", Oslo University (Master Thesis), (2022)
- [9] Γκίκας, Καραγιαννάκης, Λάμπρου: "Αγγλοελληνικό Λεξικό Μαθηματικών Όρων", Τροχαλία, (1992).
- [10] John Oprea: "Differential Geometry and its Applications", The Mathematical Association of America, (2007)
- [11] Mike Korevaar: "Making Minimal Surfaces with Complex Analysis", χειρόγραφες σημειώσεις, (σελ. 1-12), (2002)
- [12] Franc Forstneric: "Minimal surfaces in Euclidean spaces by way of complex analysis", 2023
- [13] Franc Frostneric "Minimal surfaces for undergraduates" Cornell University (2021)  
<https://arxiv.org/abs/2101.01375>

[14] Yuichiro Sato: "on the classification of ruled minimal surfaces in pseudo-Euclidean space", Math. J. Okayama Univ. 61 (2019), (σελ. 173–186)

[15] Elsa Abbena, Simon Salamon, Alfred Gray: " Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica", Chapman and Hall, (2006)

[16] Jesse Douglas: "Solutions of the Problem of Plateau", Cambridge Mass, (1931)

[17] Thomas Schmidt: " Minimal Surfaces and Plateau's Problem", Lecture Notes, (2015)

[18] Giuseppe Tinaglia: "The theory of minimal surfaces: Plateau Problem", King's College London, (διαφάνειες 1-66)

[19] Shuhui He: " Minimal Surfaces", AMSI, (2014)

[20] Alex Verzea: " Minimal Surfaces", MATH 580: Partial Differential Equations Professor: Gantumur Tsogtgerel (σελ1-11), (2012)

[4][https://ocw.mit.edu/courses/18-994-seminar-in-geometry-fall-](https://ocw.mit.edu/courses/18-994-seminar-in-geometry-fall-2004/57baa4cfbbefdf7a1ac1776205c3ad1b_chapter18.pdf)

[2004/57baa4cfbbefdf7a1ac1776205c3ad1b\\_chapter18.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/18-994-seminar-in-geometry-fall-2004/57baa4cfbbefdf7a1ac1776205c3ad1b_chapter18.pdf)

(σελίδες 123-130)