ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Πρόγραμμα σπουδών
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Τίτλος Διπλωματικής εργασίας

Μια μελέτη-γνωριμία της Πλειότιμης Ανάλυσης
(Set Valued/ Multivalued Analysis)
(συνέχεια και είδη συνέχειας, κλειστές κυρτές διαδικασίες, εφαπτόμενοι κώνοι, (επί)/διαφορισιμότητα, μετρησιμότητα και ολοκλήρωση κλπ). Θέαση της κλασσικής ανάλυσης μέσα από τα μάτια της πλειότιμης ανάλυσης

Γεώργιος Νικολάου

Επιβλέπων καθηγητής: **Ευγένιος Αυγερινός**

Πάτρα, Ιούλιος 2022

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ-ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΤΗΣ ΠΛΕΙΟΤΙΜΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ (Set-Valued/ Multivalued Analysis) (συνέχεια και είδη συνέχειας, κλειστές κυρτές διαδικασίες, εφαπτόμενοι κώνοι, (επί)/διαφορισιμότητα, μετρησιμότητα και ολοκλήρωση κλπ). Θέαση της κλασσικής ανάλυσης μέσα από τα μάτια της πλειότιμης ανάλυσης

Νικολάου Γεώργιος

Επιτροπή Επίβλεψης Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:	**Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:**
Ευγένιος Αυγερινός	**Βασίλειος Παπαδόπουλος**

Πάτρα, Ιούλιος 2022

Ευχαριστίες

Σε αυτήν τη δύσκολη, όσο και γοητευτική μαθηματική διαδρομή, θα ήθελα να αναφερθώ στον κύριο επιβλέποντά μου στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο κ. Ευγένιο Αυγερινό με αίσθημα ευγνωμοσύνης για την ενθάρρυνση, την πίστη και την εμπνευσμένη καθοδήγηση που μου πρόσφερε σε ώρες δύσκολες και απαιτητικές.

«Ευχαριστώ» από καρδιάς θέλω να απευθύνω στη Ρένα και στους μικρούς μας Δημήτριο-Αστέριο και Αλέξανδρο για την υπομονή και κατανόηση να επιτρέψουν συνεπιβάτη στην παιδική τους ηλικία αυτό το δικό μου ακαδημαϊκό ταξίδι.

Περίληψη

Είναι πλέον κοινά αποδεκτό ότι η Πλειότιμη Ανάλυση -δηλαδή η μελέτη απεικονίσεων οι οποίες παίρνουν ως τιμές σύνολα, τις οποίες και καλούμε πλειότιμες απεικονίσεις- έχει σημαντικές εφαρμογές σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς της μαθηματικής επιστήμης.
Η Πλειότιμη Ανάλυση χρησιμοποιεί έννοιες από διαφορετικά μαθηματικά πεδία, όπως η τοπολογία, η θεωρία μέτρου, η περιγραφική συνολοθεωρία και η μη-γραμμική ανάλυση.
Ήδη από τις αρχές του εικοστού αιώνα, πολλοί αξιόλογοι μαθηματικοί, όπως οι Hausdorff, Vietoris, Hahn και Kuratowski έκαναν κάποιες αρχικές έρευνες.
Η Πλειότιμη Ανάλυση έχει πλέον εξελιχθεί σε ένα αυτόνομο πεδίο μαθηματικής έρευνας με τις δικές της μεθόδους και έχει παράξει αποτελέσματα με πολλές εφαρμογές σε διάφορους κλάδους επιστημών.

Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής γίνεται μια προσπάθεια να παρουσιαστούν οι βασικές έννοιες, τα θεωρήματα, οι προτάσεις της πλειότιμης ανάλυσης.

Το περιεχόμενό της διαρθρώνεται σε επτά κεφάλαια:

- Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η -βασική για τα επόμενα- έννοια του ορίου συνόλων και παρέχονται προτάσεις για τον λογισμό με όρια συνόλων.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζονται οι πλειότιμες συναρτήσεις, η συνέχειά τους -κάτω και άνω ημισυνέχεια- και αναφέρονται κριτήρια ημισυνέχειας.
- Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις κλειστές κυρτές διαδικασίες που αποτελούν το ανάλογο των γραμμικών τελεστών στο πλαίσιο της πλειότιμης ανάλυσης, καθώς επίσης και στα αντίστοιχά θεωρήματα ανοικτής απεικόνισης κλειστού γραφήματος και ομοιόμορφου φράγματος.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζονται η έννοια και διάφορα είδη εφαπτόμενων κώνων σε υποσύνολα, όπως παρακείμενος κώνος, ενδεχόμενος κώνος, εφαπτόμενος κώνος Clarke, εφαπτόμενος κώνος Dubovitskij-Miljutin και περιγράφονται βασικές ιδιότητές τους.
- Στο πέμπτο κεφάλαιο επιχειρείται μια εισαγωγή στην έννοια της παραγώγου μιας πλειότιμης απεικόνισης ορίζοντας τις ενδεχόμενες, παρακείμενες και κυκλικές παραγώγους δια μέσου των αντίστοιχων κώνων.
- Στο έκτο κεφάλαιο ορίζεται η έννοια της επιδιαφορισιμότητας και παρέχονται χρήσιμες προτάσεις επιδιαφορίσιμου λογισμού.

- Στο έβδομο κεφάλαιο εξετάζεται η έννοια της μετρησιμότητας και ολοκλήρωσης (κατά Aumann) των πλειότιμων απεικονίσεων. Αναφέρονται βασικές προτάσεις μετρησιμότητας πλειότιμων απεικονίσεων και αποδεικνύεται το βασικό Θεώρημα Χαρακτηρισμού.

Λέξεις κλειδιά

Πλειότιμη ανάλυση. Κατώτερο-ανώτερο όριο συνόλων. Κάτω & άνω ημισυνεχής συνάρτηση.

Κλειστές κυρτές διαδικασίες

Ενδεχόμενος κώνος. Παρακείμενος κώνος. Εφαπτόμενος κώνος Clarke.

Ενδεχόμενη, παρακείμενη, κυκλική παράγωγος.

Επιδιαφορισιμότητα. Μετρησιμότητα, ολοκλήρωση πλειότιμων απεικονίσεων

Abstract

It is now commonly accepted that Set-Valued Analysis - that is, the study of visualizations that take as values sets, which we call major representations - has important applications in many different areas of mathematical science.

Set-Valued Analysis uses concepts from different mathematical fields, such as topology, measure theory, descriptive set-theory, and non-linear analysis.

As early as the beginning of the twentieth century, many notable mathematicians, such as Hausdorff, Vietoris, Hahn and Kuratowski made some initial research.

Set-Valued Analysis has now evolved into an autonomous field of mathematical research with its own methods and has produced results with many applications in various disciplines of science.

In the context of this work, an attempt is made to present the basic concepts, the theorems, the propositions of the Set-Valued analysis.

Its content is structured in seven chapters:

- In the first chapter, the -basic for the following- concept of the limit of sets is introduced and proposals for calculus with limits of sets are provided.
- The second chapter defines the Set-Valued functions, their continuity - lower and upper semi-continuity - and mentions semi-continuity criteria.
- The third chapter refers to the closed convex processes that constitute the analogue of linear operators in the context of Set-Valued analysis, as well as to the corresponding theorems of open map, of a closed graph and a uniform Boundedness.
- The fourth chapter examines the concept and different types of tangent cones to subsets, such as an adjacent cone, a contingent cone, a Clarke tangent cone, a Dubovitskij-Miljutin tangent cone, and their basic properties are described.
- The fifth chapter attempts an introduction to the concept of the derivative of a Set-Valued maps by defining the contingent, adjacent and circatangent derivatives through the corresponding cones.
- The sixth chapter defines the concept of Epiderivatives and provides useful proposals for Epidifferential Calculus.

The seventh chapter examines the concept of the measurability and integration (according to Aumann) of the Set-Valued maps. Basic propositions of the measurability of the Set-Valued maps are mentioned and the important Characterization Theorem is proved.

Keywords

Set-Valued analysis. Lower-upper limits of sets. Lower & upper semi-continuous function. Closed convex processes. Contingent cone. Adjacent cone. Clarke tangent cone

Contingent, adjacent, circatangent derivative.

Epiderivatives. Measurability, integration of Set-Valued maps

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

1.1. Όρια συνόλων

Η έννοια του ορίου ακολουθίας συνόλων που ανήκουν στο δυναμοσύνολο ενός μετρικού και γενικότερα τοπολογικού χώρου είναι απαραίτητη για την μελέτη των βασικών εννοιών της συνέχειας, διαφορισιμότητας , ολοκληρωσιμότητας των πλειότιμων απεικονίσεων

Τα όρια των συνόλων εισήχθησαν από τον **Painleve** το 1902, όπως αναφέρει ο μαθητής του **Zoretti**. Διαδόθηκαν από τον **Kuratowski** στο διάσημο και επιδραστικό βιβλίο του **Topologie** και έτσι, συχνά αποκαλούνται **Kuratowski** *κάτω ή κατώτερο και άνω ή ανώτερο όριο ακολουθιών συνόλων*.

Το κάτω όριο μιας ακολουθίας υποσυνόλων K_n είναι το σύνολο των ορίων ακολουθιών στοιχείων $x_n \in K_n$ και το άνω όριο είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης τέτοιων ακολουθιών.

Ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες των κατώτερων και ανώτερων ορίων διερευνώνται στην ενότητα 1, ενώ ο λογισμός τους παρουσιάζεται στην ενότητα 2.

1.1.1 Ορισμοί

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και K ένα υποσύνολο του X.

Ορίζουμε την *απόσταση* του x από το K ως $d_K(x) := d(x,K) := \inf_{y\in K} d(x,y)$

Αν K=∅ θέτουμε $d(x,\emptyset) := +\infty$

Η σφαίρα ακτίνας r γύρω από το K ορίζεται ως εξής

$$B_X(\mathrm{K},r) := \{x \in X \mid d(x,K) \le r\}$$

Την κλειστότητα του $A \subset X$ την συμβολίζουμε με $\overline{A}$ και το εσωτερικό του A^o ή intA

Οι γραμμικοί χώροι με νόρμα, που καθορίζει πλήρη μετρική, συγκροτούν την κλάση των χώρων Banach

Όταν ο X είναι ένας χώρος Banach του οποίου η μοναδιαία σφαίρα συμβολίζεται με B (ή B_X αν πρέπει να αναφερθεί ο χώρος), παρατηρούμε ότι

$$B_X(K,r) = \overline{K + rB_X}$$

Οι σφαίρες B(K, r) είναι περιοχές του K. Όταν το K είναι συμπαγές, κάθε περιοχή του K περιέχει μια τέτοια σφαίρα γύρω από το K

Η έννοια του κατώτερου και ανώτερου ορίου ακολουθίας είναι σημαντική για τους ορισμούς που ακολουθούν οπότε υπενθυμίζουμε τα εξής:

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε $t_n = \inf\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...\}$ και $T_n = \sup\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...\}$

Τότε ορίζουμε το ανώτερο όριο της α_n ως $\limsup \alpha_n = \inf\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ και το κατώτερο όριο της α_n ως $\liminf \alpha_n = \sup\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$

Το $\limsup \alpha_n$ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός x για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία α_{k_n} της (α_n) με $\alpha_{k_n} \to x$

Το $\liminf \alpha_n$ είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός y για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία α_{l_n} της ($\alpha_η$) με $\alpha_{l_n} \to y$ □

Το ανώτερο και το κατώτερο όριο μιας φραγμένης ακολουθίας περιγράφονται μέσω των περιοχών τους ως εξής:

(1) $x \leq lim\,sup\,\alpha_n$ αν και μόνο αν: για κάθε ε > 0 το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < \alpha_n\}$ είναι άπειρο.

(2) $x \geq lim\,sup\,\alpha_n$ αν και μόνο αν: για κάθε ε > 0 το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < \alpha_n\}$ είναι πεπερασμένο.

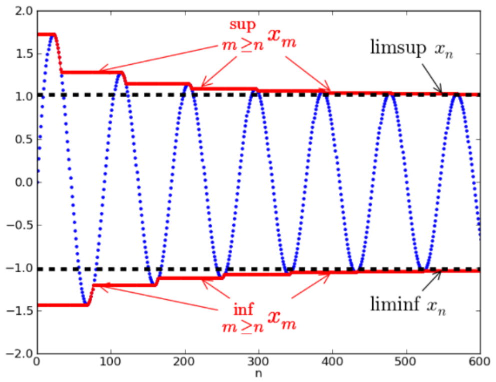
(3) $x \geq lim\,inf\,\alpha_n$ αν και μόνο αν: για κάθε ε > 0 το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

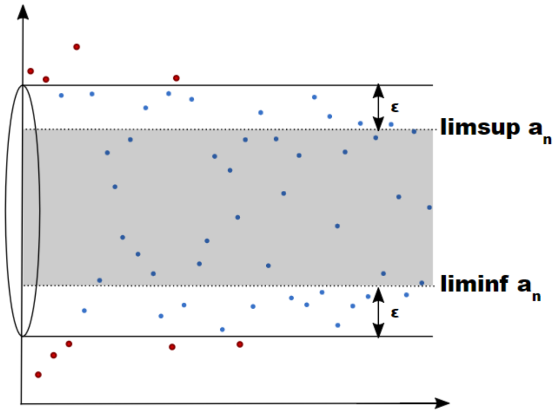
(4) $x \leq lim\,inf\,\alpha_n$ αν και μόνο αν: για κάθε ε > 0 το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

$x = lim\,sup\,\alpha_n$ αν και μόνο αν: για κάθε ε > 0 το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < \alpha_n\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < \alpha_n\}$ είναι πεπερασμένο.

$x = lim\,inf\,\alpha_n$ αν και μόνο αν: για κάθε ε > 0 το $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Τα παρακάτω σχήματα διευκρινίζουν τις προηγούμενες έννοιες





Πηγή εικόνας:[Limit inferior and limit superior - Wikipedia]

Αν η α_n δεν είναι φραγμένη άνω τότε $\limsup \alpha_n = +\infty$ ενώ αν δεν είναι φραγμένη κάτω τότε $\liminf \alpha_n = -\infty$

Η α_n συγκλίνει αν και μόνο αν $liminf\ \alpha_n = limsup\ \alpha_n = lim\ \alpha_n$

Ορισμός 1.1.2

Έστω $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X

Ως ανώτερο όριο της ακολουθίας K_n. (συμβ: $\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n$) ορίζουμε το υποσύνολο

$$\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n := \left\{ x \in X \ \Big|\ \operatorname*{liminf}_{n\to\infty}\ d(x, K_n) = 0 \right\}$$

και ως κατώτερο όριο της ακολουθίας K_n (συμβ: $\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n$).ορίζουμε το υποσύνολο

$$\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n := \left\{ x \in X \ \Big|\ \lim_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0 \right\}$$

Ένα υποσύνολο K λέμε ότι είναι το όριο ή το οριακό σύνολο της ακολουθίας υποσυνόλων K_n αν

$$K = \mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n = \mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n =: \mathrm{Lim}_{n\to\infty} K_n$$

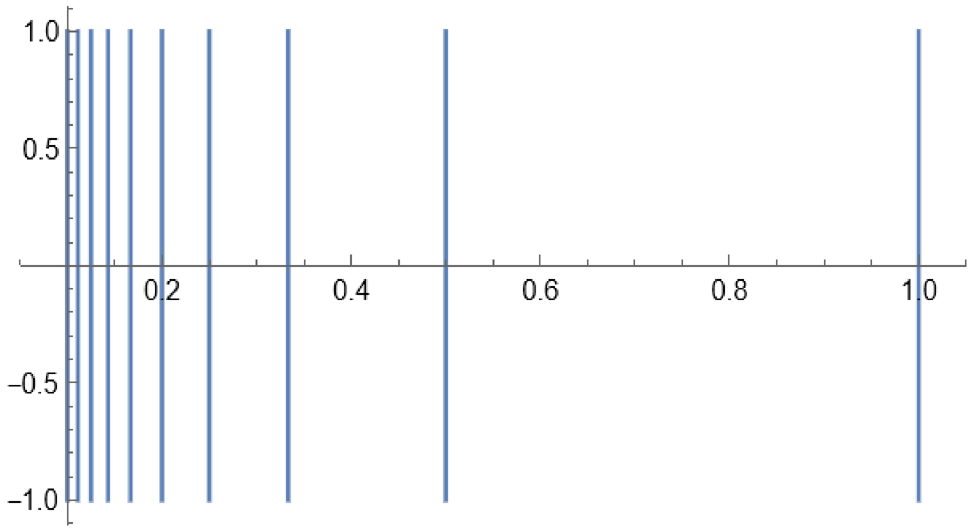
Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια παραδείγματα άνω και κάτω ορίων συνόλων

Παραδείγματα Ανώτερου και Κατώτερου ορίου Συνόλων

1) Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων

$K_n := \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 1]$ στην οποία αντιστοιχεί το παρακάτω γράφημα

Σχήμα 1.1



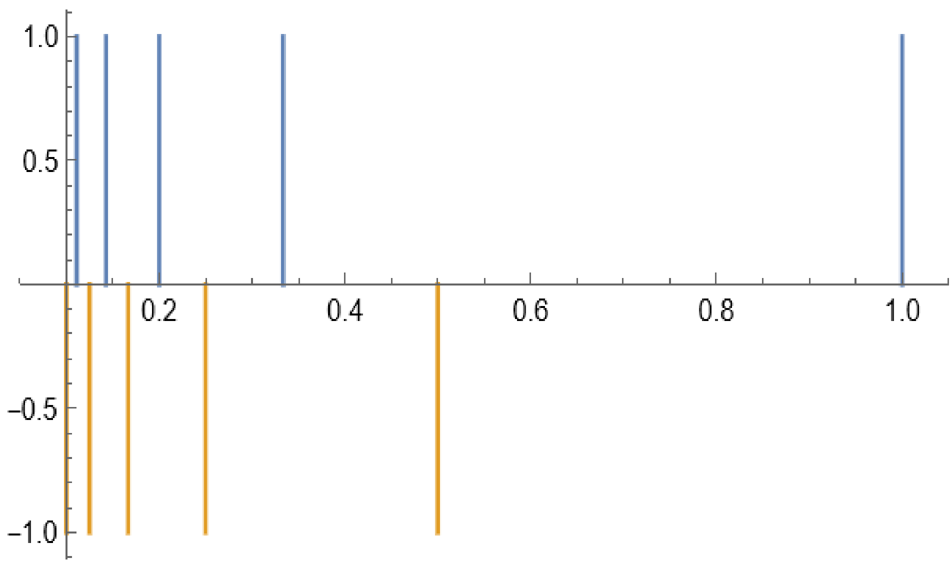
Παρατηρούμε ότι $\text{Limsup}_{n\to\infty} K_n = \text{Liminf}_{n\to\infty} K_n = [-1,1]$

2) Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων

$$K_n := \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [0,1] & ,n \ \text{άρτιος} \\ \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [-1,0] & ,n \ \text{περιττός} \end{cases}$$

στην οποία αντιστοιχεί το παρακάτω γράφημα

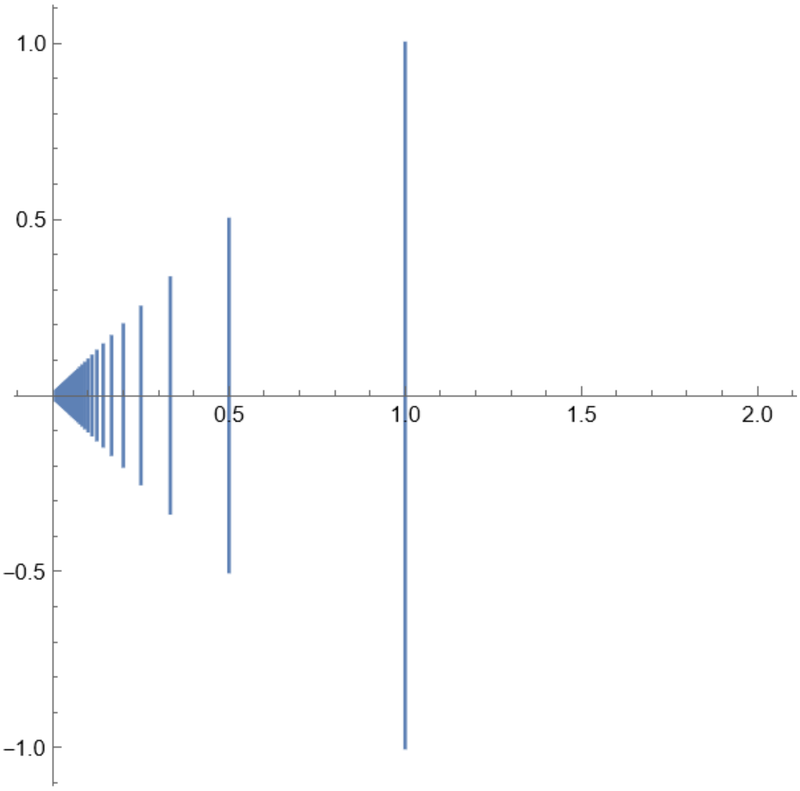
Σχήμα 1.2



Παρατηρούμε ότι $\text{Limsup}_{n\to\infty} K_n = [-1,1]$ και $\text{Liminf}_{n\to\infty} K_n = \{0\}$

3) Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων: $K_n := \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ στην οποία αντιστοιχεί το παρακάτω γράφημα

Σχήμα 1.3



Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n = \mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n = \{0\}$

Παρατηρήσεις:

Τα κατώτερα και τα ανώτερα όρια είναι προφανώς κλειστά σύνολα.

Βλέπουμε επίσης αμέσως ότι

$$\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n \subset \mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n$$

Τα ανώτερα και κατώτερα όρια των υποσυνόλων K_n και των αντίστοιχων κλειστοτήτων τους $\overline{K_n}$ συμπίπτουν, αφού $d(x, K_n) = d\left(x, \overline{K_n}\right)$.

Οποιαδήποτε φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων K_n έχει όριο, το οποίο είναι η τομή των αντίστοιχων κλειστοτήτων τους $\overline{K_n}$,δηλαδή αν $K_n \subset K_m$ για κάθε $n \geq m$ τότε $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{K_n}$

Ένα άνω όριο μπορεί να είναι κενό (καμία υπακολουθία στοιχείων $x_n \in K_n$ δεν έχει σημείο συσσώρευσης .)

Σχετικά με τις ακολουθίες μονοσύνολων $\{x_n\}$, το καθορισμένο όριο, όταν υπάρχει, είναι είτε κενό (η ακολουθία των στοιχείων x_n δεν συγκλίνει), ή είναι ένα μονοσύνολο με στοιχείο το όριο της ακολουθίας.

Ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 1.1.3

Αν $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, τότε $\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n$ είναι το σύνολο των ορίων των ακολουθιών $x_n \in K_n$ και $\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n$ είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης των ακολουθιών $x_n \in K_n$, δηλ. των ορίων υπακολουθιών $x_m \in K_m$

Το άνω όριο είναι επίσης ίσο με το υποσύνολο των σημείων συσσώρευσης των «κατά προσέγγιση» ακολουθιών που ικανοποιούν την συνθήκη:

$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists N(\varepsilon) > 0$ *τέτοιο ώστε* $\forall n > N,\ x_n \in B(K_n, \varepsilon)$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2 ισχύουν οι εξής ισοδύναμες διατυπώσεις

των ανώτερων και κατώτερων ορίων: $\mathrm{Lim\,sup}_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{N>0}\left(\overline{\bigcup_{n\geq N} K_n}\right) = \bigcap_{\varepsilon>0}\left(\bigcap_{N>0}\left(\bigcup_{n\geq N} B(K_n, \varepsilon)\right)\right)$

και $\mathrm{Liminf}_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{\varepsilon>0}\left(\bigcup_{N>0}\left(\bigcap_{n\geq N} B(K_n, \varepsilon)\right)\right)$

Θεώρημα 1.1.4

Έστω K ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

για οποιαδήποτε περιοχή $\mathcal{U}$ του $K, \exists N$ έτσι ώστε $\forall n \geq N, K_n \subset \mathcal{U}$

Τότε $\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} K_n \subset \overline{K}$.

Αντιστρόφως, εάν ο μετρικός χώρος X είναι συμπαγής, τότε για το άνω όριο $Limsup_{n\to\infty} K_n$ ισχύει η παραπάνω ιδιότητα (και έτσι, είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο που την ικανοποιεί.)

Απόδειξη . Το δεύτερο είναι συνέπεια του ακόλουθου γενικότερου αποτελέσματος:

Πρόταση 1.1.5 Ας υποθέσουμε ότι L_n και M_n είναι ακολουθίες υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου και ότι υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο M έτσι ώστε:

για οποιαδήποτε περιοχή $\mathcal{W}$ του $M, \exists N$ έτσι ώστε $\forall n \geq N,\ M_n \subset \mathcal{W}$ Τότε, για οποιαδήποτε περιοχή $\mathcal{U}$ του $M \cap \left(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} L_n\right)$, υπάρχει ένας ακέραιος N έτσι ώστε για κάθε $n \geq N$ να είναι $L_n \cap M_n \subset \mathcal{U}$

Απόδειξη

Αν το M περιέχεται στη περιοχή $\mathcal{U}$, το συμπέρασμα προκύπτει από την υπόθεση σχετικά με το M .

Διαφορετικά, αν $\mathcal{U}$ είναι μια ανοιχτή περιοχή, το υποσύνολο $K := M \setminus \mathcal{U} \neq \varnothing$, είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς και ξένο ως προς το $Limsup_{n\to\infty} L_n$ δηλαδή $Limsup_{n\to\infty} L_n \bigcap K = \varnothing$

Αν λοιπόν $y \in K$. τότε $y \notin \mathrm{Limsup}_{n\to\infty} L_{n,}$ επομένως υπάρχουν $\varepsilon_y > 0$ και N_y έτσι ώστε, για κάθε $n \geq N_y$, $y \notin B\left(L_n, \varepsilon_y\right)$. Το υποσύνολο K όντας συμπαγές, μπορεί να καλυφθεί από p σφαίρες $B\left(y_i, \varepsilon_{y_i}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι για όλους $n \geq N_0 := \max_{i=1,\dots,p} N_{y_i}$ και... $\mathcal{V} := \bigcup_{i=1}^{p} B\left(y_i, \varepsilon_{y_i}\right)$ ισχύει $L_n \cap V = \emptyset$ Επίσης το σύνολο, $\mathcal{W} := \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ είναι μια περιοχή του M , οπότε συμπεραίνουμε από την υπόθεση ότι υπάρχει N_1 έτσι ώστε

$$\forall n \geq N_1,\ M_n \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

Επομένως $L_n \cap M_n \subset \mathcal{U}$ για κάθε $n \geq \max\left(N_0, N_1\right)$.

Παρατήρηση: Εάν το M δεν είναι συμπαγές, αλλά απλά κλειστό, το συμπέρασμα της πρότασης παραμένει αληθές για κάθε περιοχή $\mathcal{U}$ του $M \cap \left(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} L_n\right)$ της οποίας το συμπλήρωμα στο M είναι συμπαγές.

Παρέχουμε επίσης ένα χρήσιμο τεχνικό λήμμα:

Λήμμα 1.1.6

Θεωρούμε μια ακολουθία υποσυνόλων $L_n \subset Z$ ενός μετρικού χώρου Z και μια ακολουθία υποσυνόλων $M_n \subset Y$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Y .Έστω $\varphi : Z \times Y \mapsto R$ να είναι μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Δηλώνουμε με το $M^{\sharp}$ το άνω όριο της M_n και L^b το κάτω όριο της L_n. Τότε

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{y\in M_n}\ \inf_{z\in L_n} \varphi(z, y)\right) \leq \sup_{y\in M^{\sharp}}\ \inf_{z\in L^b} \varphi(z, y)$$

1.1.7 Το Θεώρημα Συμπάγειας -The Compactness Theorem

Το Θεώρημα Συμπάγειας Bolzano-Weierstrass προσαρμόστηκε το 1927 στο πλαίσιο των πλειότιμων συναρτήσεων

Υπενθυμίζουμε τα παρακάτω από την κλασσική Ανάλυση :

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία ‘έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

Με δεδομένο ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει για να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία μιας φραγμένης ακολουθίας αρκεί να βρούμε μια μονότονη υπακολουθία της. Το τελευταίο ισχύει εντελώς γενικά, όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα: *Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε την έννοια του σημείου κορυφής μιας ακολουθίας.

Ορισμός 1.2.3. Έστω (α_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι ο α_m είναι σημείο κορυφής της (α_n) αν $\alpha_m \geq \alpha_n$ για κάθε $n \geq m$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν η (α_n) *είναι φθίνουσα τότε κάθε όρος της είναι σημείο* κορυφής της. Αν η (α_n) *είναι γνησίως αύξουσα τότε* δεν έχει κανένα σημείο κορυφής.

Έστω (α_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) *Η (α_n) έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής.* Τότε, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \ldots\ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots\ldots$ ώστε όλοι οι όροι $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots\ldots \alpha_{k_n}, \ldots$ *να είναι σημεία* κορυφής της (α_n) .Αφού $k_n < k_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η (α_{k_n}) *είναι* υπακολουθία της (α_η). *Από τον ορισμό του* σημείου κορυφής βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\alpha_{k_n} \geq \alpha_{k_{n+1}}$ (έχουμε $k_n < k_{n+1}$ και ο α_{k_n} είναι σημείο κορυφής της (α_η)). Δηλαδή,

$\alpha_{k_1} \geq \alpha_{k_2} \geq \ldots\ldots \geq \alpha_{k_n} \geq \alpha_{k_{n+1}} \ldots$ Άρα, η υπακολουθία (α_{k_n}) *είναι* φθίνουσα.

(β) *Η (α_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής.* Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: αν $m \geq N$ τότε ο α_m δεν είναι σημείο κορυφής της (α_n) (παίρνουμε $N = k + 1$ όπου α_k *το* τελευταίο σημείο κορυφής της (α_η) ή $N = 1$ αν δεν υπάρχουν σημεία κορυφής).

Με βάση τον ορισμό του σημείου κορυφής αυτό σημαίνει ότι: αν $m \geq N$ *τότε υπάρχει* $n > m$ ώστε $\alpha_n > \alpha_m$.

Εφαρμόζουμε διαδοχικά το παραπάνω. Θέτουμε $k_1 = N$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $\alpha_{k_2} > \alpha_{k_1}$. Κατόπιν βρίσκουμε $k_3 > k_2$ ώστε $\alpha_{k_3} > \alpha_{k_2}$ και ούτω καθεξής.

Υπάρχουν δηλαδή $k_1 < k_2 < \ldots\ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots\ldots$ ώστε $\alpha_{k_1} < \alpha_{k_2} < \ldots\ldots < \alpha_{k_n} < \alpha_{k_{n+1}} \ldots$

Τότε, η α_{k_n} είναι γνησίως αύξουσα υπακολουθία της (α_n).

Θεώρημα 1.1.8 (Zarankiewicz)

Κάθε ακολουθία υποσυνόλων K_n ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου X περιέχει μια υπακολουθία που έχει ένα (πιθανώς κενό) όριο.

Απόδειξη

Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\mathcal{U}_m$ που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

$\forall$ ανοικτό υποσύνολο $\mathcal{U}$, και $\forall x \in \mathcal{U}$, $\exists \mathcal{U}_m$ έτσι ώστε $x \in \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}$

Θεωρούμε μια ακολουθία υποσυνόλων K_n. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία υπακολουθιών $\left(K_n^{(m)}\right)_{n>0}$ με επαγωγή.

Για $m = 0$, ορίζουμε $K_n^{(0)} := K_n$. Ας υποθέσουμε οι $m-1$ υπακολουθίες $\left(K_n^{(p)}\right)_{n>0}, 0 \leq p \leq m-1$ έχουν κατασκευαστεί.

Θεωρούμε το $m^{\text{οστό}}$ ανοικτό υποσύνολο $\mathcal{U}_m$. Τότε, είτε για κάθε επιμέρους ακολουθία n_j ισχύει

$$\mathcal{U}_m \cap \left(\operatorname{Limsup}_{j\to\infty} K_{n_j}^{(m-1)}\right) \neq \emptyset$$

οπότε ορίζουμε $K_j^{(m)} := K_j^{(m-1)}$, ή υπάρχει μια υπακολουθία n_j έτσι ώστε

$$\mathcal{U}_m \cap \left(\operatorname{Limsup}_{j\to\infty} K_{n_j}^{(m-1)}\right) = \emptyset$$

οπότε ορίζουμε $K_j^{(m)} := K_{n_j}^{(m-1)}$. (Η επιλογή μιας τέτοιας ακολουθίας δεν έχει σημασία.)

Εφόσον αυτές οι υπακολουθίες $\left(K_n^{(m)}\right)_{n>0}$ έχουν κατασκευαστεί, εξάγουμε τη διαγώνια υπακολουθία $D_n := K_n^{(n)}$. Ισχυριζόμαστε ότι έχει ένα καθορισμένο όριο δηλαδή. $\operatorname{Limsup}_{n\to\infty} D_n = \operatorname{Liminf}_{n\to\infty} D_n$.

Αν όχι, τότε θα υπήρχε

$$x_0 \in \operatorname{Limsup}_{n\to\infty} D_n \quad \& \quad x_0 \notin \operatorname{Liminf}_{n\to\infty} D_n$$

Η τελευταία προϋπόθεση σημαίνει ότι υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή $\mathcal{U}$ του x_0 και μια υπακολουθία D_{n_j} έτσι ώστε $\mathcal{U} \cap D_{n_j} = \emptyset$ για οποιαδήποτε j. Από την υπόθεση υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{U}_m$ έτσι ώστε $x_0 \in \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\mathcal{U}_m \cap \left(\mathrm{Limsup}_{j\to\infty}\ D_{n_j}\right) = \emptyset$$

Δεδομένου ότι για $n_j \geq m, D_{n_j} := K_{n_j}^{(n_j)} = K_{p_j}^{(m-1)}$ για μερικούς p_j, παρατηρούμε ότι D_{n_j} είναι μια υπακολουθία της ακολουθίας $\left(K_n^{(m-1)}\right)_{n>0}$, το ανώ όριο της οποίας είναι ξένο με το $\mathcal{U}_m$.

Από την κατασκευή του $\left(K_n^{(m)}\right)_{n>0}$, συμπεραίνουμε ότι $K_j^{(m)} = K_{p_j}^{(m-1)}$

και κατά συνέπεια, ότι

$$\mathcal{U}_m \cap \left(\mathrm{Limsup}_{j\to\infty}\ K_j^{(m)}\right) = \mathcal{U}_m \cap \left(\mathrm{Limsup}_{j\to\infty}\ K_{p_j}^{(m-1)}\right) = \emptyset$$

Επειδή $D_n := K_n^{(n)} = K_{p_n}^{(m)}$ για μερικούς p_n, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(D_n)_{n\geq m}$ είναι μια υπακολουθία της ακολουθίας $\left(K_j^{(m)}\right)_{j>0}$. Έτσι

$$x_0 \in \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ D_n \subset \mathrm{Limsup}_{j\to\infty}\ K_j^{(m)} \subset X \setminus \mathcal{U}_m$$

που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι x_0 ανήκει στο $\mathcal{U}_m$.

Κυρτή θήκη των ορίων -Convex Hull of Limits

Δεδομένου ότι η συνάρτηση απόστασης σε ένα υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα είναι κυρτή αν και μόνο αν αυτό το υποσύνολο είναι κυρτό, συμπεραίνουμε ότι το κατώτερο όριο μιας ακολουθίας κυρτών υποσυνόλων είναι κλειστό και κυρτό.

Είναι χρήσιμο να υπάρχει ένας χαρακτηρισμός του κλειστής κυρτής θήκης του ανώτερου ορίου. Δηλώνουμε με $\mathrm{co}(K)$ τη κυρτή θήκη του K και με $\overline{co}(K)$ τη κλειστή κυρτή θήκη του.

Λήμμα 1.1.9

Αν K_n είναι μια ακολουθία υποσυνόλων που περιέχεται σε ένα φραγμένο υποσύνολο ενός , πεπερασμένης διάστασης, διανυσματικού χώρου X τότε

$$\overline{co}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n) = \bigcap_{N>0} \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{n\geq N} K_n\right)$$

Απόδειξη

Αφού $\overline{\mathrm{A}} \subseteq \overline{\mathrm{co}}\mathrm{A}$ και $\mathrm{Lim\,sup}_{n\to\infty} \mathrm{K}_n = \bigcap_{N>0} \left(\overline{\bigcup_{n\geq N} \mathrm{K}_n}\right)$ η κλειστή κυρτή θήκη του ανώτερου ορίου περιέχεται προφανώς στο κλειστό κυρτό υποσύνολο

$$A := \bigcap_{N>0} \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{n\geq N} K_n\right) \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad \overline{co}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n) \subseteq A$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $A \subseteq \overline{co}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n)$ όταν η διάσταση του X είναι πεπερασμένη και τα υποσύνολα K_n περιέχονται σε ένα φραγμένο σύνολο.

Έστω $x \in A$

Τότε το x είναι το όριο μιας υπακολουθίας v_N κυρτών συνδυασμών στοιχείων του $\bigcup_{n\geq N} K_n$ και δεδομένου ότι η διάσταση του X είναι ακέραιος p, το Θεώρημα του Καραθεοδωρή για κυρτές θήκες (Carathéodory's theorem (convex hull))

https://en.wikipedia.org/wiki/Carath%C3%A9odory%27s_theorem_(convex_hull)

μας επιτρέπει να γράψουμε ότι $v_N := \sum_{j=0}^{p} a_j^N x_{N_j}$

όπου $N_j \geq N,\ a_j^N \geq 0,\ \sum_{j=0}^{p} a_j^N = 1$ και $x_{N_j} \in K_{N_j}$.

Το διάνυσμα a^N από $p+1$ στοιχεία a_j^N περιέχει μια υπακολουθία (και πάλι συμβολίζεται με) a^N. η οποία συγκλίνει σε κάποιο μη αρνητικό διάνυσμα a από $p+1$ στοιχεία a_j έτσι ώστε $\sum_{j=0}^{p} a_j = 1$. Καθώς τα υποσύνολα K_n περιέχονται σε ένα δεδομένο συμπαγές υποσύνολο, μπορούμε να εξαγάγουμε διαδοχικά υπακολουθίες (και πάλι συμβολίζεται με) x_{N_j} συγκλίνουσες σε στοιχεία x_j, τα οποία ανήκουν στο ανώτερο όριο των υποσυνόλων K_n. Έτσι το x είναι ίσο με τον κυρτό συνδυασμό $\sum_{j=0}^{p} a_j x_j$, και το λήμμα αποδεικνύεται.

1.2 Λογισμός ορίων συνόλων

Ξεκινάμε επισημαίνοντας τις ακόλουθες προφανείς ιδιότητες:

Πρόταση 1.2.1 Αν $K_n, L_n, K_n^i, (i = 1, \dots, p)$ είναι ακολουθίες υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου τότε

$$\begin{cases} \text{i)} & \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ (K_n \cap L_n) & \subset \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n \cap \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ L_n \\ \text{ii)} & \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ (K_n \cap L_n) & \subset \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ K_n \cap \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ L_n \\ \text{iii)} & \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ (K_n \cup L_n) & = \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n \cup \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ L_n \\ \text{iv)} & \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ (K_n \cup L_n) & \supset \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ K_n \cup \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ L_n \\ \text{v)} & \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ \prod_{i=1}^{p} K_n^i & \subset \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n^i \\ \text{vi)} & \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ \prod_{i=1}^{p} K_n^i & = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ K_n^i \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Πρέπει επίσης να συσχετίσουμε τις άμεσες και αντίστροφες εικόνες των ανωτέρων και κατώτερων ορίων μιας ακολουθίας υποσυνόλων με τα ανώτερα και κατώτερα όρια των άμεσων και αντίστροφων εικόνων τους. Αναφέρουμε τώρα τις προφανείς σχέσεις και αναβάλλουμε τις αποδείξεις των κριτηρίων που μετατρέπουν τις ακόλουθες εγκλείσεις σε ισότητες.

Πρόταση 1.2.2

Αν K_n να είναι μια ακολουθία υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X, M_n είναι μια ακολουθία υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου Y και $f : X \mapsto Y$ είναι μία μονότιμη συνεχής συνάρτηση τότε ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} \text{i)} & f(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n) & \subset \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ f(K_n) \\ ii) & f(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ K_n) & \subset \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ f(K_n) \\ iii) & \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ f^{-1}(M_n) & \subset f^{-1}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ M_n) \\ iv) & \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ f^{-1}(M_n) & \subset f^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n) \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν και υπό ποιες προϋποθέσεις ισχύουν τα αντίστροφα των παραπάνω. Σχετικά έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις:

1.2.1 Άμεσες εικόνες (Direct Images)

Όταν η f είναι γνήσια ***(proper)*** στις σχέσεις (2) ισχύουν ισότητες.

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνεχής μονότιμη συνάρτηση από έναν μετρικό χώρο X σε έναν μετρικό χώρο Y είναι *γνήσια* ***(proper)*** εάν και μόνο εάν μία από τις ακόλουθες ισοδύναμες προτάσεις είναι αληθής:

Αν $f(x_n)$ συγκλίνει στο Y τότε η x_n έχει ένα σημείο συσσώρευσης

$$\Leftrightarrow, \begin{cases} \text{i) η } f \text{ απεικονίζει κλειστά υποσύνολα σε κλειστά υποσύνολα} \\ \text{ii) } \forall \text{ συμπαγή } M \subset Y, \text{ το } f^{-1}(M) \text{ είναι συμπαγές} \end{cases}$$

Πρόταση 1.2.3

Θέτουμε τις παραδοχές της Πρότασης 1.2.2. Ας υποθέσουμε ότι f είναι *γνήσια*, τότε

$$f(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n) = \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ f(K_n)$$

Επιπλέον, εάν f είναι επί, λαμβάνουμε

$$f^{-1}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ M_n) = \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ f^{-1}(M_n)$$

Η απόδειξη είναι μια απλή συνέπεια των ορισμών και παραλείπεται.

Στην περίπτωση των συνεχών γραμμικών τελεστών, λαμβάνουμε ένα πιο συγκεκριμένο κριτήριο χρησιμοποιώντας το πολικό σύνολο

$$K^\circ := \{p \in X^\star \mid \forall x \in K, \langle p, x\rangle \leq 1\}$$

ενός υποσυνόλου K του X.

Όταν X και Y είναι οι χώροι Banach και f είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.2.4

Έστω . X και Y χώροι Banach, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X και $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ να είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί

$$0 \in \mathrm{Int}\left(\mathrm{Im}\,(A^*) + \bigcup_{N>0}\bigcap_{n>N} K_n^\circ\right)$$

- Αν ο X είναι ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος ,τότε:

$$\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ A(K_n) = A(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n)$$

- Αν ο X είναι αυτοπαθής τότε:

$$\sigma - \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ A(K_n) = A(\sigma - \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n)$$

Απόδειξη-

Η απόδειξη μπορεί να αναζητηθεί στο **[1]**/ *Theorem 1.2.4/ p.29*

1.2.2 Αντίστροφες εικόνες-Inverse Images

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση των αντίστροφων εικόνων των ορίων.

Ξεκινάμε πρώτα με ένα απλό κριτήριο που ισχύει όταν τα υποσύνολα M_n είναι κυρτά και η απεικόνιση f είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής.

Πρόταση 1.2.5

Θεωρούμε δύο χώρους Banach X και Y, έναν συνεχή γραμμικό τελεστή $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ και μια ακολουθία κυρτών υποσυνόλων $M_n \subset Y$. Υποθέτουμε ότι η «υπόθεση περιορισμού»

$$\exists \gamma > 0, c > 0 \ \text{ τέτοια ώστε } \gamma B \subset \mathrm{c}A(B_X) - M_n$$

ισχύει για αρκετά μεγάλα n . Τότε

$$\begin{cases}\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ A^{-1}(M_n) = A^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)\\ \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ A^{-1}(M_n) = A^{-1}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ M_n)\end{cases}$$

Αυτή η πρόταση είναι συνέπεια ενός ακριβέστερου αποτελέσματος:

Πρόταση 1.2.6

Θεωρούμε δύο χώρους Banach X και Y, έναν συνεχή γραμμικό τελεστή $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ και δύο ακολουθίες κυρτών υποσυνόλων $L_n \subset X$ και $M_n \subset Y$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\gamma > 0, c > 0, N > 0$ τέτοια ώστε:

$$\forall n \geq N,\ \gamma B \subset A(L_n \cap \mathrm{c}B_X) - M_n$$

Τότε

$\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\left(L_n \cap A^{-1}(M_n)\right) = (\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ L_n) \cap A^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$

$\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\left(L_n \cap A^{-1}(M_n)\right) \supset (\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ L_n) \cap A^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$ και

$\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\left(L_n \cap A^{-1}(M_n)\right) \supset (\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ L_n) \cap A^{-1}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ M_n)$

Απόδειξη

Η συμπερίληψη

$$\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\left(L_n \cap A^{-1}(M_n)\right) \subset (\mathrm{Liminf}_{\ n\to\infty} L_n) \cap A^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$$

είναι προφανής.

Έστω $x \in\ \mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ L_n \cap A^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$

Τότε το χ είναι το όριο μιας ακολουθίας στοιχείων x_n που ανήκουν στο L_n τέτοια ώστε το $A(x_n)$ ανήκει στο M_n.

Γνωρίζουμε ότι το x μπορεί να προσεγγιστεί από στοιχεία $u_n \in L_n$ και ότι το $A(x)$ μπορεί να προσεγγιστεί από στοιχεία $v_n \in M_n$. Τότε η ακολουθίαψ$\varepsilon_n := \|A(u_n) - v_n\|$ συγκλίνει στο 0 και η ακολουθία $\theta_n := \frac{\gamma}{\gamma+\varepsilon_n} \in]0,1[$

συγκλίνει στο 1 και ικανοποιεί την ισότητα $\theta_n\varepsilon_n = (1-\theta_n)\gamma$. Επομένως

$\theta_n\left(v_n - A(u_n)\right) \in \theta_n\varepsilon_n B = (1-\theta_n)\gamma B \subset (1-\theta_n)(A(L_n \cap cB_X) - M_n)$

Κατά συνέπεια, υπάρχουν στοιχεία $u_n' \in L_n \cap cB_X$ και $v_n' \in M_n$ τέτοια ώστε

$$A(\theta_n u_n + (1-\theta_n)u_n') = \theta_n v_n + (1-\theta_n)v_n'$$

Αν ορίσουμε $\quad x_n := \theta_n u_n + (1-\theta_n)u_n'$

παρατηρούμε ότι η x_n ανήκει L_n και το $A(x_n)$ ανήκει στο M_n, γιατί αυτά τα υποσύνολα είναι κυρτά.

Επιπλέον η $\|x_n - u_n\| = (1-\theta_n)\|u_n - u_n'\|$ συγκλίνει στο 0 αφού οι ακολουθίες u_n και u_n' είναι φραγμένες, η πρώτη επειδή συγκλίνει στο u και η δεύτερη επειδή φράσσεται από το c από την υπόθεση. Άρα η x_n , συγκλίνει στο x.□

Η απόδειξη της δεύτερης και της τρίτης πρότασης είναι ανάλογη.

Πρόταση 1.2.7

Ας υποθέσουμε ότι X και Y είναι χώροι Banach, ότι η απεικόνιση $f: X \mapsto Y$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο x του $f^{-1}(\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$, και αυτό $f'(x)$ είναι επί. Τότε το x ανήκει στο κατώτερο όριο $\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ f^{-1}(M_n)$, και μια παρόμοια πρόταση ισχύει για τα ανώτερα όρια.

Απόδειξη

Ορίζουμε $y = f(x)$ και θεωρούμε μια ακολουθία στοιχείων $y_n \in M_n$ που συγκλίνουν στο y. Στη συνέχεια (1.2) υπονοεί την ύπαρξη μιας λύσης x_n στην εξίσωση $f(x_n) = y_n$ που ικανοποιεί την ανισότητα $\|x - x_n\| \leq l\|y - y_n\|$ για n αρκετά μεγάλο. Ως εκ τούτου x , το όριο του $x_n \in f^{-1}(M_n)$ ανήκει στο κατώτερο όριο των αντίστροφων εικόνων των υποσυνόλων M_n. Η απόδειξη της δεύτερης πρότασης είναι ανάλογη.

Θεώρημα 1.2.8

Έστω X Y δύο χώροι Banach. Θεωρούμε μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων $M_n \subset Y$ και μια απεικόνιση $f: X \mapsto Y$ συνεχώς διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο

$$x \in f^{-1}(\text{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\eta > 0$ τέτοιες που

$$\forall y_n \in B(f(x), \eta) \cap M_n,\ B_Y \subset cf'(x)(B_X) - T_{M_n}(y_n)$$

Τότε το x ανήκει στο Liminf $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(M_n)$ και μια παρόμοια πρόταση ισχύει για τα ανώτερα όρια.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια ενός γενικότερου αποτελέσματος:

Θεώρημα 1.2.9

Έστω X και Y είναι δύο χώροι Banach. Θεωρούμε μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων $M_n \subset Y$ και μια απεικόνιση $f: X \mapsto Y$ διαφορίσιμη σε μια περιοχή $\mathcal{U}$ του $f^{-1}(\text{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$ (αντίστοιχα $f^{-1}(\text{Limsup}\ {}_{n\to\infty} M_n)\big)$ έτσι ώστε οι παράγωγοι $f'(x)$ να είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $\mathcal{U}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\eta > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathcal{U}$,

$$\forall y_n \in B(f(x), \eta) \cap M_n,\ B_Y \subset cf'(x)(B_X) - T_{M_n}(y_n)$$

Τότε

$$\text{Liminf}_{n\to\infty}\ f^{-1}(M_n) = f^{-1}(\text{Liminf}_{n\to\infty}\ M_n)$$

(αντίστοιχα

$$\text{Limsup}_{n\to\infty}\ f^{-1}(M_n) = f^{-1}(\text{Limsup}\ (\text{Lim}_{n\to\infty}\ M_n)$$

Κεφάλαιο 2.

Ορισμός-Συνέχεια πλειότιμων απεικονίσεων

2.1 Ορισμοί-βασικές ιδιότητες πλειότιμων συναρτήσεων

Οι ακολουθίες των υποσυνόλων μπορούν να ταξινομηθούν ως πλειότιμες απεικονίσεις που ορίζονται στο σύνολο $\mathbb{N}$ των ακεραίων.

Φυσικά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\mathbb{N}$ με έναν μετρικό (ή ακόμα και τοπολογικό) χώρο X και τις ακολουθίες υποσυνόλων $n \multimap K_n$ με πλειότιμες απεικονίσεις $x \multimap F(x)$ (που συσχετίζουν με ένα σημείο x ένα υποσύνολο F(x) και να προσαρμόσουμε τον ορισμό των ανώτερων και κατώτερων ορίων σε αυτή την περίπτωση, που ονομάζεται συνεχής περίπτωση

Αν X είναι ένα σύνολο με 2^X συμβολίζουμε το δυναμοσύνολο του X, ενώ με $2^X \backslash \{\emptyset\}$ το σύνολο όλων των μη κενών υποσυνόλων του X.

Ορισμός

Έστω X και Y σύνολα.

Πλειότιμη συνάρτηση (multifunction ή set-valued map, ή multivalued function,ή point to set map ή correspondence.) ονομάζουμε μία απεικόνιση $F: X \multimap 2^Y$

Ο συμβολισμός $F: X \multimap Y$ θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω για πλειότιμες απεικονίσεις χάριν ευκολίας ενώ ο συμβολισμός $f : X \rightarrow Y$ θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω για μονότιμες αντιστοιχίσεις, δηλαδή το f(x) να είναι ένα σημείο του Y

Έστω $F : X \multimap Y$ είναι μια πλειότιμη συνάρτηση.

Θα λέμε ότι το F(x) είναι η εικόνα ή η τιμή της F στο x.

Το *γράφημα* της F ορίζεται ως εξής: $Graph(F) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$

Το *πεδίο ορισμού* της F (Dom(F)) είναι το υποσύνολο των στοιχείων $x \in X$ έτσι ώστε το F(x) να μην είναι κενό δηλαδή $Dom(F) := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$

Η πλειότιμη συνάρτηση F λέγεται *μη τετριμμένη* εάν το γράφημά της δεν είναι κενό, δηλ. εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in X$ έτσι ώστε το F(x) να μην είναι κενό.

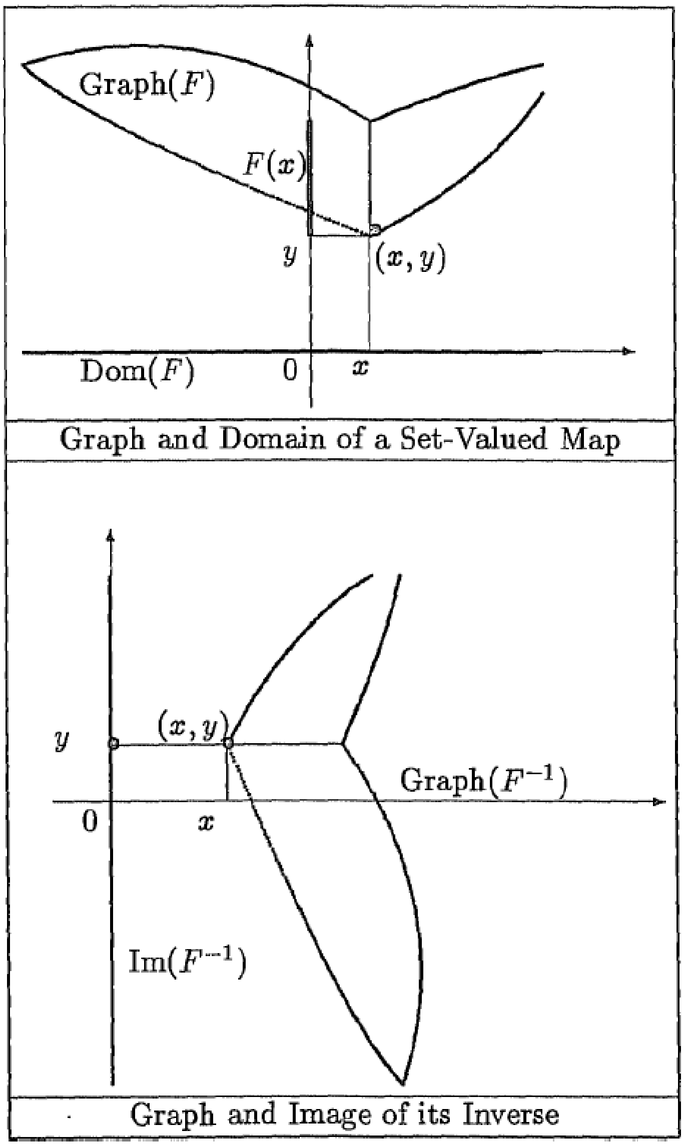
Λέμε ότι η F είναι *αυστηρή (strict)* αν όλες οι εικόνες F(x) είναι μη κενές

Η εικόνα της F είναι η ένωση των εικόνων (ή των τιμών) F(x), για κάθε $x \in X$ δηλαδή: $Im(F) := \bigcup_{x \in X} F(x)$

Η αντίστροφη F^{-1} της F είναι η πλειότιμη συνάρτηση από το Y στο X η οποία ορίζεται ως εξής:

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x,y) \in Graph(F)$$

Figure 1.2: Graph of a Set-Valued Map and of its Inverse



Πηγή εικόνας:[1] σελ.35

Εάν το K είναι υποσύνολο του X, συμβολίζουμε με $F|_K$ τον περιορισμό του F στο K, που ορίζεται από την ισότητα:

$$F|_K(x) := \begin{cases} F(x) & \alpha\nu \;\; x \in K \\ \varnothing & \alpha\nu \;\; x \notin K \end{cases}$$

Θα γράφουμε $F \subset G \Leftrightarrow Graph(F) \subset Graph(G)$. Τότε θα λέμε ότι η G είναι μια επέκταση της F

Εντελώς φυσιολογικά ορίζονται δύο συναρτήσεις προβολές ως εξής: $p_F : Graph(F) \to X \quad \kappa\alpha\iota \quad q_F : Graph(F) \to Y$ τέτοιες ώστε $p_F(x,y) = x \quad \kappa\alpha\iota \quad q_F(x,y) = y$ για κάθε $(x,y) \in Graph(F)$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της F είναι η εικόνα του F^{-1} και συμπίπτει με την προβολή του γραφήματος στον χώρο X και, με συμμετρικό τρόπο, η εικόνα του F είναι ίση με το πεδίο ορισμού του F^{-1} και με την προβολή του γραφήματος στον χώρο Y

Αναφέρουμε στη συνέχεια κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες

$$\begin{cases} i)\ F(K_1 \cup K_2) & = & F(K_1) \cup F(K_2) \\ ii)\ F(K_1 \cap K_2) & \subset & F(K_1) \cap F(K_2) \\ iii)\ F(X \setminus K) & \supset & \operatorname{Im}(F) \setminus F(K) \\ \text{iv)}\ K_1 \subset K_2 & \Rightarrow & F(K_1) \subset F(K_2) \end{cases}$$

Μία αντιστοίχιση από σημείο σε σύνολο : $\varphi : X \multimap Y$ επεκτείνεται σε μια αντιστοίχιση σύνολο προς σύνολο θέτοντας $\varphi(A) = \bigcup_{x \in A} \phi(x)$ για $A \subset X$ Τότε το φ(A) καλείται η εικόνα του A μέσω της φ

Έστω τώρα $A \subset Y$.

Η αντίστροφη εικόνα του A υπό την F, την οποία θα συμβολίζουμε με $F^{-1}(A)$ είναι το σύνολο $F^{-1}(A) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ (σύμφωνα με κάποιους συγγραφείς το $F^{-1}(A)$ λέγεται ασθενής αντίστροφη εικόνα του A υπό την F (weak inverse image of A under F)

Αντίστοιχα ο πυρήνας του A υπό την F (συμβολίζουμε $F^{+1}(A)$) είναι το σύνολο $F^{+1}(A) = \{x \in X : F(x) \subset A\}$ (σύμφωνα με κάποιους συγγραφείς το$F^{+1}(A)$ λέγεται ισχυρή αντίστροφη εικόνα του A υπό την F –(strong inverse image of A under F)

Προφανώς $F^{+1}(A) \subseteq F^{-1}(A)$

Τα δύο παραπάνω σύνολα συμπίπτουν όταν η F είναι μονότιμη συνάρτηση

Αν $A = \{y\}$ γράφουμε $F^{-1}(y)$ αντί $F^{-1}(\{y\})$ και είναι $F^{-1}(y) = \{x \in X | y \in F(x)\}$

Για κάθε $A \subset Y$ισχύει $F^{-1}(A) = (F^{+1}(A^c))^c$ ή ισοδύναμα $F^{+1}(Y \setminus A) = X \setminus F^{-1}(A)$ και $F^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus F^{+1}(A)$.Πράγματι:

$x \in F^{+1}(Y \setminus A) \Leftrightarrow F(x) \subset (Y \setminus A) \Leftrightarrow F(x) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin F^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in X \setminus F^{-1}(A)$

$x \in F^{-1}(Y \setminus A) \Leftrightarrow F(x) \cap (Y \setminus A) \neq \emptyset \Leftrightarrow F(x) \nsubseteq A \Leftrightarrow \quad x \notin F^{+1}(A) \Leftrightarrow x \in X \setminus F^{+1}(A)$

Αν $X \subset Y$ τότε ένα σημείο $x \in X$ ονομάζεται σταθερό σημείο της F αν $x \in F(x)$

Ορίζουμε το σύνολο των σταθερών σημείων $Fix(F) = \{x \in X \mid x \in F(x)\}$

Υπάρχουν δύο τρόποι για τον ορισμό της σύνθεσης πλειότιμων απεικονίσεων (οι οποίοι συμπίπτουν όταν οι απεικονίσεις είναι μονότιμες):

Αν X, Y, Z είναι μετρικοί χώροι και $H: X \multimap Y$, $G: Y \multimap Z$ πλειότιμες απεικονίσεις τότε:

Η συνήθης σύνθεση συναρτήσεων $H \circ G: X \multimap Z$ της H και G ορίζεται ως

$(H \circ G)(x) = \bigcup_{y \in G(x)} H(y)$ για κάθε $x \in X$

Το τετραγωνικό γινόμενο $H \,\square\, G: X \multimap Z$ της H και G στο x ορίζεται ως εξής:

$$(H \,\square\, G)(x) := \bigcap_{y \in G(x)} H(y)$$

Έστω I η ταυτοτική συνάρτηση επί ενός συνόλου. Συμπεραίνουμε τους ακόλουθους τύπους

$$\begin{cases} \text{Graph}\ (H \circ G) & = (G \times \mathrm{I}))^{-1}(\text{Graph}\ (H)) \\ & = (\mathrm{I} \times H)(\text{Graph}\ (G)) \\ \text{Graph}\ (H \,\square\, G) & = (G \times \mathrm{I})^{+1}(\text{Graph}\ (H)) \end{cases}$$

Επίσης ισχύει ότι το αντίστροφο ενός γινομένου είναι το γινόμενο των αντίστροφων (με αντίστροφη σειρά):

$$\begin{cases} \text{i)}(H \circ G)^{-1}(z) = G^{-1}(H^{-1}(z)) = (G^{-1} \circ H^{-1})(z) \\ \text{ii)}(H \,\square\, G)^{-1}(z) = G^{+1}(H^{-1}(z)) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι

$$\begin{cases} \text{i)}x \in (H \,\square\, G)^{-1}(z) \Leftrightarrow G(x) \subset H^{-1}(z) \\ ii)\ x \in (G^{-1} \,\square\, H^{-1})(z) \Leftrightarrow H^{-1}(z) \subset G(x) \end{cases}$$

Άρα $G(x) = H^{-1}(z) \Leftrightarrow x \in (G^{-1} \,\square\, H^{-1})(z) \cap (H \,\square\, G)^{-1}(z)$

Επιπλέον επισημαίνουμε τις ακόλουθες σχέσεις: Όταν το M είναι ένα υποσύνολο του Z τότε

$$\begin{cases} i)\ (H \circ G)^{-1}(M) & = G^{-1}(H^{-1}(M)) \\ ii)\ (H \circ G)^{+1}(M) & = G^{+1}(H^{+1}(M)) \end{cases}$$

Γενικότερα όταν το σύμβολο $\star$ υποδηλώνει μια πράξη σε υποσύνολα, χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τον ορισμό πράξης σε πλειότιμες απεικονίσει, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_1 \star F_2: x \multimap F_1(x) \star F_2(x)$$

Ορίζουμε με αυτόν τον τρόπο τις πράξεις $F_1 \cap F_2, F_1 \cup F_2, F_1 + F_2$ (σε διανυσματικούς χώρους) κ.λπ. Ομοίως, εάν α είναι μια πλειότιμη απεικόνιση από τα υποσύνολα του Y στα υποσύνολα του Y, ορίζουμε

$$\alpha(F): x \multimap \alpha(F(x))$$

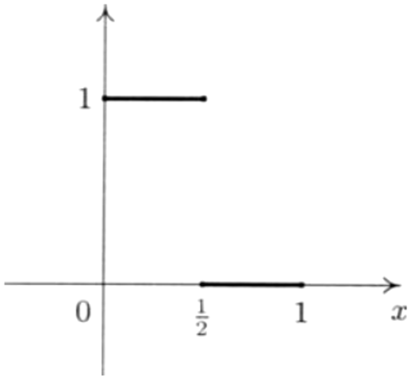
Για παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε $\bar{F}$, co (F), κ.λπ., για να δηλώσουμε την πλειότιμη απεικόνιση $x \multimap \bar{F}(x), x \multimap$ co $(F(x))$κλπ.

Παραδείγματα πλειότιμων συναρτήσεων:

Παρακάτω ορίζονται κάποιες πλειότιμες συναρτήσεις και δίνονται τα γραφήματά τους όπου μπορούν να παρασταθούν

1. $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ με:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\} & x = \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

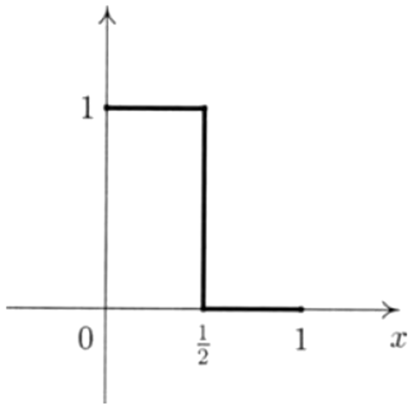


Σχήμα 2.1:Graph(f_1)

---

2. $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ με

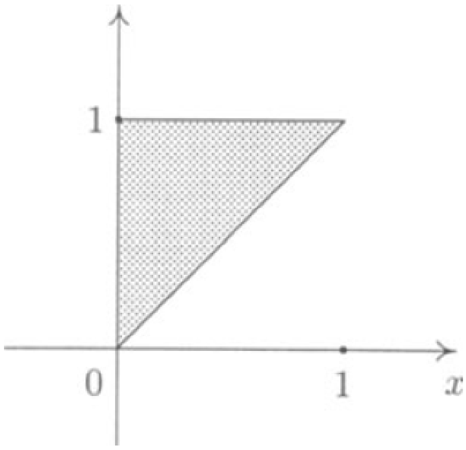
$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & x = \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Σχήμα 2.2:Graph(f_2)

---

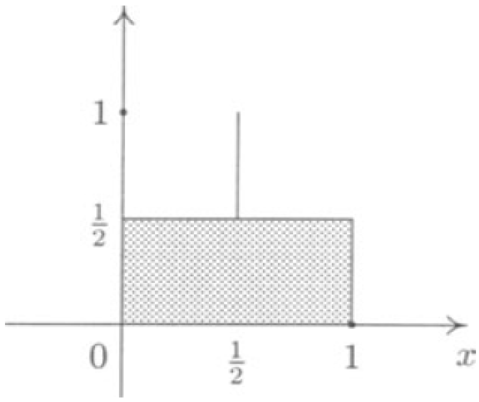
3. $f_3 : [0,1] \to [0,1]$ με: $f_3(x) = [x,1]$



Σχήμα 2. 3:Graph(f_3)

4. $f_4:[0,1]\to[0,1]$ με:

$$f_4(x)=\begin{cases}[0,\frac{1}{2}] & x\neq\frac{1}{2}\\ [0,1] & x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

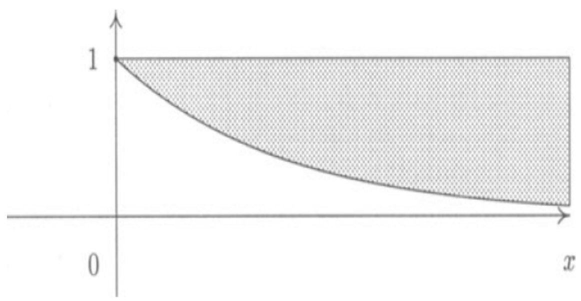


Σχήμα 2.4:Graph(f_4)

---

5. $f_5:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$f_5(x)=[e^{-x},1]$

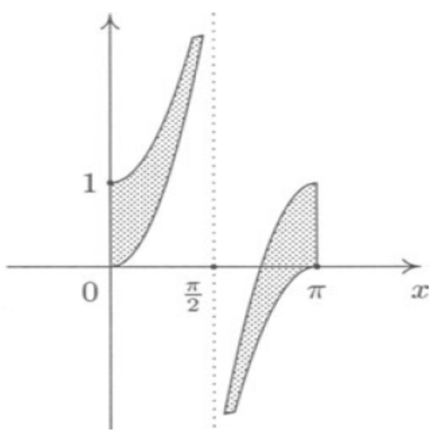


Σχήμα 2. 5:Graph(f_5)

---

6. $f_6:[0,\pi]\to\mathbb{R}$

$$f_6(x)=\begin{cases}[\tan x,1+\tan x] & x\neq\frac{\pi}{2}\\ \{0\} & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

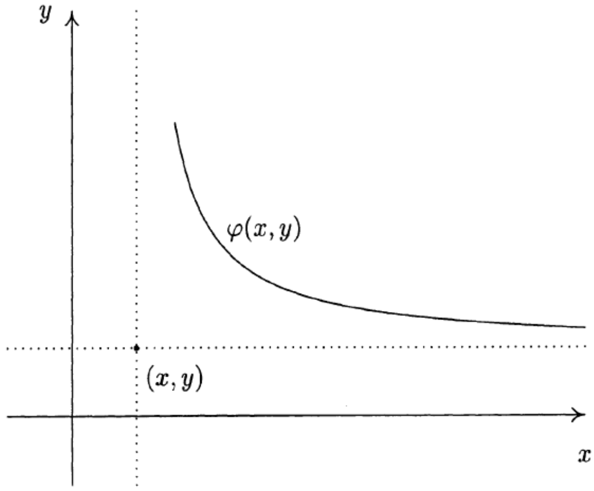


Σχήμα 2. 6:Graph(f_6)

7. $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f_7(x,y) = \{(x+a, y+b) \in \mathbb{R}^2 \mid a,b > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; a \cdot b = 1\}$

Παρατήρηση: Το διπλανό σχήμα δεν είναι το γράφημα της f_7



8. (Μετρική προβολή). Έστω A ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού (X, d). Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα $a \in A$ τέτοιο ώστε $d(a,x) = dist(x,A)$

Ορίζουμε τις μετρικές προβολές $P(x) = \{a \in A \mid d(a,x) = dist(x,A)\} \;\; , x \in X$

Έστω P μια ιδιότητα ενός υποσυνόλου (για παράδειγμα, κλειστό, κυρτό κ.λπ..)

Γενικά θα θεωρούμε ότι μια πλειότιμη απεικόνιση ικανοποιεί την ιδιότητα P εάν και μόνο εάν το γράφημά της την ικανοποιεί

Για παράδειγμα, μια πλειότιμη απεικόνιση λέγεται ότι είναι κλειστή(αντίστοιχα κυρτή, , μετρήσιμη, κ.λπ. εάν και μόνο αν το γράφημα της είναι κλειστό (αντίστοιχα κυρτό, , μετρήσιμο κ.λπ.)

Εάν οι εικόνες ενός μιας πλειότιμης απεικόνισης F είναι κλειστές, κυρτές, φραγμένες, συμπαγείς και ούτω καθεξής, λέμε ότι η F είναι κλειστής τιμής, κυρτής τιμή, φραγμένης τιμής, συμπαγούς τιμής και ούτω καθεξής

2.2 Πλειότιμες απεικονίσεις και συνέχεια

2.2.1 Ορισμοί

Σε αυτή την ενότητα, X, Y, Z υποδηλώνουν μετρικούς χώρους. Περιγράφουμε τις έννοιες των ημισυνεχών πλειότιμων απεικονίσεων που εισήχθησαν από τους Bouligand, Kuratowski και Wilson στις αρχές της δεκαετίας του τριάντα.

Ορισμός 2.2.1

Έστω X,Y μετρικοί χώροι.

Μια πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ ονομάζεται άνω ημισυνεχής (upper semicontinuous, usc εν συντομία) στο x ∈Dom(F) εάν και μόνο εάν για οποιαδήποτε περιοχή U του F(x) υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε $y \in B_X(x, \delta),\ F(y) \subset U$

Η $F: X \multimap Y$ είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν είναι άνω ημισυνεχής σε οποιοδήποτε σημείο του Dom(F).

Όταν το F(x) είναι συμπαγές, η $F: X \multimap Y$ είναι άνω ημισυνεχής στο x αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o \ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \ \ \forall y \in B_X(x, \delta), F(y) \subset B_Y(F(x), \varepsilon)$$

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός είναι μια φυσική προσαρμογή του ορισμού μιας συνεχούς μονότιμης συνάρτησης. Γιατί λοιπόν χρησιμοποιούμε το όρο άνω ημισυνεχής αντί για συνεχής; Ένας από τους λόγους είναι ότι ο γνωστός ισοδύναμος ορισμός των συνεχών απεικονίσεων – *μια απεικόνιση f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν απεικονίζει ακολουθίες που συγκλίνουν στο x σε ακολουθίες που συγκλίνουν στο f(x)* - δεν ισχύει πλέον στην περίπτωση των πλειότιμων απεικονίσεων.

Στην περίπτωση των πλειότιμων απεικονίσεων έχουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.2

Μια πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ ονομάζεται κάτω ημισυνεχής (lower semicontinuous,lsc) στο x ∈ Dom(F) εάν και μόνο εάν για οποιοδήποτε y ∈ F(x) και για οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων x_n ∈Dom(F) που συγκλίνει στο x, υπάρχει ακολουθία στοιχείων $y_n \in F(x_n)$ που συγκλίνει στο y.

Μια πλειότιμη απεικόνιση ονομάζεται κάτω ημισυνεχής αν είναι κάτω ημισυνεχής σε κάθε σημείο x ∈ Dom(F)

Ισοδύναμα ,όπως και στις μονότιμες συναρτήσεις, μπορούμε πούμε ότι:

Μια πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ ονομάζεται κάτω ημισυνεχής στο χ αν και μόνο αν για οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο $U \subset Y$ τέτοιο ώστε $U \cap F(x) \neq \emptyset$

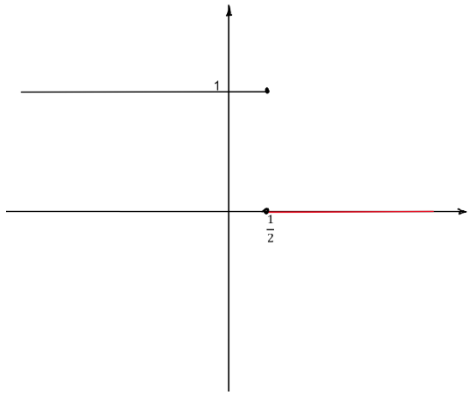
$\exists \delta > 0 \ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \forall y \in B_X(x, \delta)\ , F(y) \cap U \neq \emptyset$

Υπάρχουν πλειότιμες απεικονίσεις που ικανοποιούν τη μία από τις παραπάνω ιδιότητες ημισυνέχειας και όχι την άλλη

Παραδείγματα

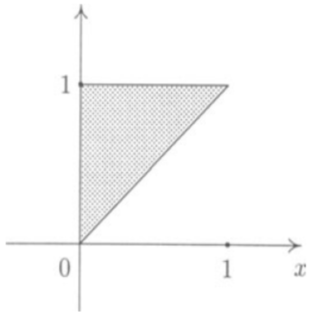
1. Η παρακάτω συνάρτηση είναι άνω ημισυνεχής αλλά δεν είναι κάτω ημισυνεχής

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & x<\dfrac{1}{2}\\ \{0,1\} & x=\dfrac{1}{2}\\ 0 & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$



2. Η συνάρτηση $f_3\colon[0,1]\to[0,1]$ με: $f_3(x)=[x,1]$

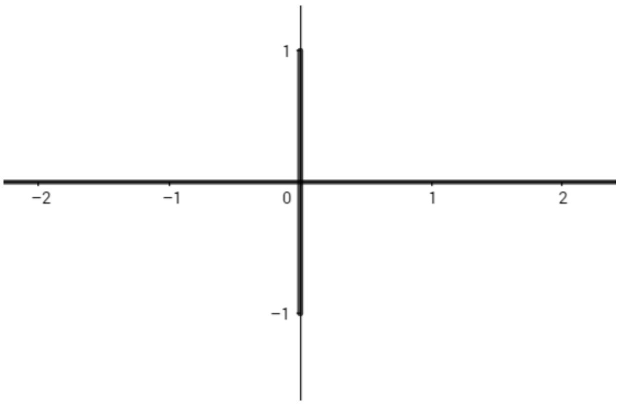
είναι κάτω ημισυνεχής αλλά δεν είναι άνω ημισυνεχής



Εικόνα 3:Graph(f_3)

3. Η παρακάτω συνάρτηση είναι άνω ημισυνεχής στο 0 αλλά δεν είναι κάτω ημισυνεχής στο 0

$$F_1(x)=\begin{cases}\{0\} & ,x\neq 0\\ [-1,1] & ,x=0\end{cases}$$



Πράγματι:

Το $F(0)=[-1,1]$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{R}$.Θεωρούμε αυθαίρετο ε>0.Τότε για κάθε y∈(-ε, ε)

με y≠0,$F(y)=\{0\}\subset[-1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ ενώ αν y=0 $F(0)=[-1,1]\subset[-1-\varepsilon,1+\varepsilon]$

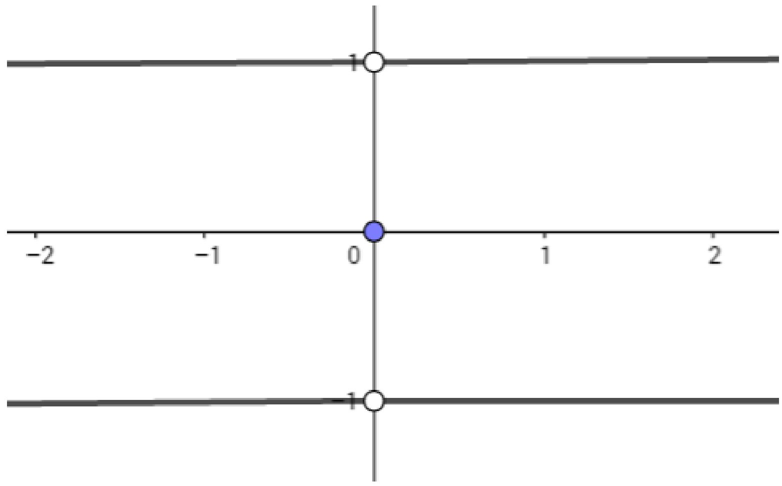
Θεωρούμε την ακολουθία $x_n=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}.\, Προφανώς\ x_n\to 0$ $Όμως\ F(0)=[-1,1]$

Άρα αν $y\in F(0)\ με\ y\neq 0$ δεν υπάρχει $y_n\in F(x_n)\colon y_n\to y$ αφού $F(x_n)=\{0\}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Για χ≠0 η συνάρτηση είναι συνεχής

4. Η παρακάτω συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής
αλλά δεν είναι άνω ημισυνεχής

$$F_2(x) = \begin{cases} [-1,1] & , x \neq 0 \\ \{0\} & , x = 0 \end{cases}$$



Ορισμός 2.2.3

Μια πλειότιμη απεικόνιση $F : X \multimap Y$ είναι συνεχής στο x αν είναι και άνω ημισυνεχής και κάτω ημισυνεχής στο x και ότι είναι συνεχής αν και μόνο εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x∈Dom(F)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες της αντίστροφης εικόνας και του πυρήνα για τον χαρακτηρισμό των άνω και κάτω ημισυνεχών απεικονίσεων:

Ισχύει η εξής πρόταση

Πρόταση 2.2.4

Μια πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ είναι άνω ημισυνεχής στο x αν ο πυρήνας οποιασδήποτε περιοχής του F(x) είναι μια περιοχή του x και είναι κάτω ημισυνεχής στο x εάν η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε ανοιχτού υποσυνόλου που τέμνει το F(x) είναι μια περιοχή του x.

Πράγματι έστω U μια περιοχή του F(x).Τότε το $F^{+1}(U)$ είναι περιοχή του x οπότε $x \in \left(F^{+1}(U)\right)^{o}$ άρα $\exists \delta: B_x(x,\delta) \subset F^{+1}(U)$ Τότε όμως $\forall y \in B_x(\delta,\varepsilon)\ F(y) \subset U$.Άρα η F είναι άνω ημισυνεχής στο χ από τον ορισμό 1.4.1

$$U \cap F(x) \neq \emptyset$$

Άρα, η F είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν ο πυρήνας οποιουδήποτε ανοιχτού υποσυνόλου είναι ανοιχτό σύνολο και είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε ανοιχτού υποσυνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.

Πράγματι έστω $x \in \mathrm{Dom}(F)$ και U περιοχή. του $F(x)$ δηλαδή $F(x) \subset U^o$ Τότε όμως το $F^{+1}(U^o)$ είναι ανοικτό και $x \in F^{+1}(U^o)$ Άρα υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε $B_X(x,\delta) \subset F^{+1}(U^o)$ Άρα $\forall y \in B_X(x,\delta)$ έχουμε $F(y) \subset U^o \subseteq U$ Άρα η F είναι άνω ημισυνεχής στο χ από τον *ορισμό 2.2.1*

Αν το σύνολο Dom(F) είναι κλειστό, τότε η F είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν ο πυρήνας οποιουδήποτε κλειστού υποσυνόλου είναι κλειστός και η F είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε κλειστού υποσυνόλου είναι κλειστή

Θα χρειαστεί επίσης να προσαρμόσουμε στην περίπτωση των πλειότιμων απεικονίσεων την έννοια της συνθήκης Lipschitz.

Ορισμός 2.2.5

Έστω ότι X και Y είναι χώροι με νόρμα. Θα λέμε ότι η $F : X \multimap Y$ είναι Lipschitz κοντά στο $x \in X$ αν υπάρχει μια θετική σταθερά l και μια περιοχή $\mathcal{U} \subset \mathrm{Dom}(F)$ του x τέτοια ώστε $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{U},\ F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\| B_Y$

Σε αυτή την περίπτωση F ονομάζεται επίσης Lipschitz (ή l-Lipschitz) στο $\mathcal{U}$. Αν $y \in F(x)$, η F λέγεται ψευδό-Lipschitz κοντά στο $(x,y) \in \mathrm{Graph}(F)$ εάν υπάρχει θετική σταθερά l και περιοχές $\mathcal{U} \subset \mathrm{Dom}(F)$ του x και $\mathcal{V}$ του y έτσι ώστε

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{U},\ F(x_1) \cap \mathcal{V} \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\| B_Y$

Μπορούμε επίσης να προσαρμόσουμε τους ορισμούς των άνω και κάτω ορίων συνόλων στην περίπτωση των πλειότιμων απεικονίσεων $F : X \multimap Y$. Για το σκοπό αυτό, η σημειογραφία $x' \to_F x$ σημαίνει ότι το x' παραμένει στο Dom(F) και συγκλίνει στο x.

Ορισμός 2.2.6

Όταν η $F : X \multimap Y$,είναι μια πλειότιμη απεικόνιση λέμε ότι το

$\mathrm{Limsup}_{x' \to x} F(x') := \left\{ y \in Y \mid \liminf_{x' \to_F x} d\left(y, F(x')\right) = 0 \right\}$ είναι το ανώτερο όριο του F(x') όταν $x' \to x$

και ότι το

$\mathrm{Liminf}_{x' \to x} F(x') := \left\{ y \in Y \mid \lim_{x' \to_F x} d\left(y, F(x')\right) = 0 \right\}$ είναι το κατώτερο όριο του F(x') όταν $x' \to x$

Τα σύνολα αυτά είναι προφανώς κλειστά και $\mathrm{Liminf}_{x' \to x} F(x') \subset \overline{F(x)} \subset \mathrm{Limsup}_{x' \to x} F(x')$

Πρόταση 2.2.7

Ένα σημείο (x,y) ανήκει στην κλειστότητα του γραφήματος μιας πλειότιμης απεικόνιση $F : X \multimap Y$ αν και μόνο αν

$$y \in \text{Limsup}_{x' \to x} F(x')$$

και F είναι κάτω ημισυνεχής στο $x \in \text{Dom}(F)$ αν και μόνο αν

$$F(x) \subset \text{Liminf}_{x' \to x} F(x')$$

Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε την έλλειψη κλειστότητας (του γραφήματος) ή την έλλειψη κάτω ημισυνέχειας από την σχέση μεταξύ των συνόλων

$$F(x), \ \ \text{Liminf}_{x' \to x} \ F(x') \ \text{ και } \ \text{Limsup}_{x' \to x} \ F(x')$$

Παρατήρηση - Αυτή η πρόταση οδήγησε αρκετούς συγγραφείς να ονομάσουν τις άνω ημισυνεχείς απεικονίσεις εκείνες που είναι κλειστές σύμφωνα με την ορολογία μας. Φυσικά, αυτές οι δύο έννοιες συμπίπτουν για απεικονίσεις συμπαγών τιμών, καθώς το *Θεώρημα 1.1.4* μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί στην περίπτωση πλειότιμων απεικονίσεων:
Έτσι έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.2.8

Το γράφημα μιας άνω ημισυνεχούς πλειότιμης συνάρτησης $F : X \multimap Y$ με κλειστό πεδίο ορισμού και κλειστές τιμές είναι κλειστό. Το αντίστροφο ισχύει αν υποθέσουμε ότι ο Y είναι συμπαγής.

Γενικότερα, εφαρμόζοντας την *Πρότασης* 1.1.5 σε άνω ημισυνεχείς απεικονίσεις προκύπτει η εξής πρόταση:

Πρόταση 2.2.9

Έστω ότι F και G να είναι δύο πλειότιμες απεικονίσεις από X προς Y. Ας υποθέσουμε ότι η F είναι κλειστή, ότι το $G(x)$ είναι συμπαγές και ότι η G είναι άνω ημισυνεχής στο $x \in \text{Dom}(F \cap G)$. Τότε η $F \cap G$ είναι άνω ημισυνεχής στο x.

Άμεσο πόρισμα της *πρότασης 1.4.9* είναι το παρακάτω:

Πόρισμα 2.2.10

Έστω $F: X \multimap Y$ μια κλειστή πλειότιμη απεικόνιση και $r: X \to \mathbf{R}_+$ μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Εάν η διάσταση του Y είναι πεπερασμένη, η πλειότιμη απεικόνιση $F_r: X \multimap Y$ που ορίζεται από

$$F_r(x) := F(x) \cap r(x)B$$

είναι άνω ημισυνεχής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η $x \multimap r(x)B$ είναι άνω ημισυνεχής (αντίστοιχα κάτω ημισυνεχής, Lipschitz) όταν η r είναι άνω ημισυνεχής (αντίστοιχα κάτω ημισυνεχής, Lipschitz.)

Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση παρέχει έναν εύκολο τρόπο κατασκευής άνω ημισυνεχών απεικονίσεων, τέμνοντας πλειότιμες απεικονίσεις με κλειστό γράφημα με πλειότιμες απεικονίσεις οι οποίες έχουν τιμές σφαιρικές περιοχές , η ακτίνα των οποίων είναι πραγματική άνω ημισυνεχής συνάρτηση

Επεκτείνουμε στη συνέχεια την έννοια των γνήσιων συναρτήσεων σε πλειότιμες απεικονίσεις με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 2.2.11 (Γνήσια πλειότιμη απεικόνιση -Proper Set-Valued Map)

Έστω $F: X \multimap Y$ μια κλειστή πλειότιμη απεικόνιση

Οι δύο ακόλουθες ιδιότητες είναι προφανώς ισοδύναμες:

- Η προβολή π_Y: Graph $(F) \mapsto Y$ είναι γνήσια
- Εάν μια ακολουθία $y_n \in F(x_n)$ συγκλίνει στο Y, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ έχει ένα σημείο συσσώρευσης

Αν επαληθεύονται οι δύο παραπάνω ιδιότητες τότε λέμε ότι η πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ είναι γνήσια **(proper)**

Όταν η F είναι γνήσια , οι εικόνες $F(K)$ κλειστών υποσυνόλων $K \subset X$ είναι κλειστές και οι αντίστροφες εικόνες $F^{-1}(M)$ συμπαγών υποσυνόλων $M \subset Y$ είναι συμπαγή. υποσύνολα

- Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{cases} i) & F(K) = \pi_Y(\text{Graph }(F) \cap (K \times Y)) \\ ii) & F^{-1}(M) = \pi_X(\text{Graph }(F) \cap \pi_Y^{-1}(M)) \end{cases}$$

Αν μια πλειότιμη απεικόνιση είναι γνήσια τότε η εικόνα της είναι κλειστή

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι *τοπικά συμπαγής* αν για κάθε x ∈ X υπάρχει συμπαγής περιοχή U του x

Πρόταση 2.2.12

Ας υποθέσουμε ότι το X είναι τοπικά συμπαγές και ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset X$, το γράφημα του περιορισμού $F|_K$ της $F: X \multimap Y$ στο K είναι συμπαγές. Τότε

i. η F είναι άνω ημισυνεχής

ii. η F^{-1} είναι γνήσια (και έτσι, το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό)

Απόδειξη

i) Αφού ο X είναι τοπικά συμπαγής για κάθε $x \in \mathrm{Dom}\,(F)$, υπάρχει μία συμπαγής περιοχή K του x.Άρα περιορισμός $F|_K$ είναι άνω ημισυνεχής στο K, με συμπαγές γράφημα. Τότε η F είναι άνω ημισυνεχής στο x.

ii) Ας υποθέσουμε ότι μια ακολουθία $x_n \in F^{-1}(y_n) \subset \mathrm{Dom}\,(F)$ συγκλίνει σε κάποιο x. Πρέπει να ελέγξουμε ότι η ακολουθία y_n έχει ένα σημείο συσσώρευσης. Δεδομένου ότι η συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παραμένει σε ένα συμπαγές υποσύνολο K, και ότι το ζεύγος (x_n, y_n) ανήκει στο γράφημα της $F|_K$, η οποία είναι συμπαγής, η ακολουθία (x_n, y_n) έχει ένα σημείο συσσώρευσης (x, y), το οποίο ανήκει στο γράφημα της F. Έτσι το $y \in F^{-1}(x)$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3 Γενική συνέχεια (Generic Continuity)

Αν και οι έννοιες της άνω ημισυνέχειας και της κάτω ημισυνέχειας είναι διακριτές, γενικά συμπίπτουν, δηλαδή, μια ημισυνεχής απεικόνιση είναι συνεχής σε ένα *residual*.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα *residual* ενός μετρικού χώρου X είναι μια αριθμήσιμη τομή πυκνών ανοικτών υποσυνόλων $A_n \subset X$. Οι αριθμήσιμες τομές *residual*. είναι *residual*.. Το θεώρημα του Baire δηλώνει ότι ένα *residual* ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πυκνό. Μια ιδιότητα που είναι αληθής για κάθε στοιχείο ενός *residual*. ονομάζεται γενική.

Θεώρημα 2.3.1 (Γενική Συνέχεια- Generic Continuity)

Έστω F μια πλειότιμη απεικόνιση από έναν πλήρη μετρικό χώρο X σε έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο Y.

i. Αν F είναι άνω ημισυνεχής, είναι συνεχής σε ένα *residual*. του X.

ii. Αν F είναι κάτω ημισυνεχής με συμπαγείς τιμές, είναι συνεχής σε ένα *residual*. του X.

iii. Αν F είναι κάτω ημισυνεχής με κλειστές τιμές, τότε υπάρχει ένα *residual*. R του X έτσι ώστε $\forall x \in R,\ \mathrm{Limsup}_{x'\to x}\ F(x') = F(x)$

Απόδειξη

Αφού Y είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\mathcal{V}_n \subset Y$, κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις, που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα: $\forall$ ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{V} \subset Y, \forall y \in \mathcal{V}, \exists \mathcal{V}_n$ έτσι ώστε $y \in \overline{\mathcal{V}_n} \subset \mathcal{V}$

i) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι F είναι άνω ημισυνεχής. Για οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{V}_n$ θεωρούμε το υποσύνολο:

$L_n := F^{-1}(\overline{\mathcal{V}_n}) = \{x \in X \mid F(x) \cap \overline{\mathcal{V}_n} \neq \emptyset\}$

το οποίο είναι κλειστό αφού $\overline{\mathcal{V}_n}$ είναι κλειστό. (*Πρόταση 1.4.4*)Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν $x \in X$ είναι τέτοια ώστε

$$\forall n \in \mathbf{N}, x \in L_n \Rightarrow x \in \mathrm{Int}\,(L_n)$$

τότε η F είναι κάτω ημισυνεχής στο x. Πράγματι, έστω $\mathcal{V} \subset Y$ ένα ανοιχτό υποσύνολο τέτοιο ώστε $F(x) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $n \in \mathrm{N}$ και

$$y \in F(x) \cap \overline{\mathcal{V}_\pi} \subset F(x) \cap \mathcal{V}$$

Έτσι $x \in L_n$ οπότε από τη υπόθεση ανήκει σε $\mathrm{Int}\,(L_n\ \cdot)$ Επειδή

$$L_n = F^{-1}(\overline{\mathcal{V}_n}) \subset F^{-1}(\mathcal{V})$$

συμπεραίνουμε ότι η F είναι κάτω ημισυνεχής στο x. Επομένως, το υποσύνολο $D^\flat$ των σημείων όπου η F δεν είναι κάτω ημισυνεχής περιέχεται στην αριθμήσιμη ένωση των υποσυνόλων ∂L_n, που είναι κλειστά υποσύνολα με $Int\left(\partial L_n\right) = \varnothing$.

Λαμβάνοντας τα συμπληρώματα, συμπεραίνουμε ότι το συμπλήρωμα του $D^\flat$, το οποίο είναι το σύνολο των στοιχείων στα οποία F είναι συνεχής, περιέχει ένα *residual*..

ii). – Εάν η F είναι κάτω ημισυνεχής, τότε τα υποσύνολα

$$K_n := F^{+1}(\overline{\mathcal{V}_n}) = \{x \in X \mid F(x) \subset \overline{\mathcal{V}_n}\}$$

είναι κλειστά με την Πρόταση 1.4.4.

Αν $x \in X$ είναι τέτοια που

$$\forall n \in \mathbf{N}, x \in K_n \Longrightarrow x \in \mathrm{Int}\,(K_n)$$

τότε η F είναι άνω ημισυνεχής στο x. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα ανοιχτό σύνολο $\mathcal{V} \subset Y$ τέτοιο ώστε $F(x) \subset \mathcal{V}$. Για κάθε $y \in F(x)$ θεωρούμε $\mathcal{V}_{n_y}$ να είναι τέτοια ώστε $y \in \mathcal{V}_{n_y} \subset \mathcal{V}$. Επειδή F έχει συμπαγείς εικόνες, το $F(x)$ μπορεί να καλυφθεί από έναν πεπερασμένο αριθμό συνόλων $\mathcal{V}_{n_j} := \mathcal{V}_{n_{y_j}}, j = 1, \dots, m.$ Έτσι

$$F(x) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{\mathcal{V}_{n_j}} := \overline{\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_{n_j}} \subset \mathcal{V}$$

Η οικογένεια των $\mathcal{V}_n$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις, οπότε για μερικούς n

$$x \in F^{+1}\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_{n_j}}\right) = K_n \subset F^{+1}(\mathcal{V})$$

Έτσι $x \in \text{Int}\,(F^{+1}(\mathcal{V})$ οπότε αποδείχθηκε ότι η F είναι άνω ημισυνεχής στο x.

Επομένως, το υποσύνολο $D^\sharp$ των σημείων όπου F δεν είναι άνω ημισυνεχής περιέχεται στην αριθμήσιμη ένωση των υποσυνόλων $\partial K_n := K_n \setminus \text{Int}\,(K_n)$. Οι εσωτερικοί χώροι αυτών των υποσυνόλων είναι άδειοι επειδή είναι κλειστοί.

Λαμβάνοντας τα συμπληρώματα, συμπεραίνουμε ότι το συμπλήρωμα του $D^\sharp$, το οποίο είναι το σύνολο των στοιχείων στα οποία F είναι συνεχής, περιέχει ένα residual.

3. - Ακολουθούμε την απόδειξη του Choquet για να αποδείξουμε την τρίτη πρόταση. Βασίζεται στο γεγονός ότι οποιοσδήποτε πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος Y είναι ομοιομορφικός με ένα υποσύνολο Z_0 ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Z.

Θεωρούμε φ τον ομοιομορφισμό του Y στο Z_0, και ορίζουμε

$G_0 := \varphi \circ F : X \multimap Z_0$ & $G(x) := \overline{G_0(x)}$ τη κλειστότητα του $G_0(x)$ μέσα στο Z.

Επειδή F είναι κάτω ημισυνεχής, το ίδιο είναι οι G_0 και G.

Από την προηγούμενη απόδειξη , υπάρχει ένα υπόλοιπο R του X έτσι ώστε η G να είναι άνω ημισυνεχής από το R προς το Z. Άρα, για οποιαδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει η έτσι ώστε, για κάθε $x' \in B(x, \eta)$,

$$G_0(x') \subset G(x') \subset B(G(x), \varepsilon) = B(G_0(x), \varepsilon)$$

Από την άλλη $G_0(x) = G(x) \cap Z_0$ αφού τα $G_0(x)$ είναι κλειστά υποσύνολα στο Z_0 για την επαγόμενη τοπολογία. Επομένως

$$\forall x \in R, \text{Limsup}_{x' \to x}\ G_0(x') = G_0(x)$$

Τελικά η F είναι ομοιομορφισμός, αφού ή φ είναι ομοιομορφισμός

Παρατήρηση - Είναι εύκολο να κατασκευαστεί μία κάτω ημισυνεχής πλειότιμη απεικόνιση F (με κλειστές αλλά μη συμπαγείς τιμές) που δεν είναι πουθενά άνω ημισυνεχής:

Παίρνουμε: $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$ και $F(t) := \{(x, y) \mid y = tx\}$.

2.3.3 Παράδειγμα: Παραμετροποιημένες πλειότιμες απεικονίσεις (Parametrized Set-Valued Maps)

Θεωρούμε τους μετρικούς χώρους X, Y και Z, μία πλειότιμη απεικόνιση $U : X \multimap Z$ και μια μονότιμη απεικόνιση $f : \text{Graph}\,(U) \mapsto Y$

Ορίζουμε την πλειότιμη απεικόνιση $F : X \multimap Y$ ως εξής:

$$\forall x \in X,\ F(x) := (f(x,u))_{u\in U(x)}$$

Τότε ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.4

Ας υποθέσουμε ότι f είναι συνεχής από το Graph (U) στο Y. Τότε:

i. Αν η U είναι κάτω ημισυνεχής, τότε η F.είναι κάτω ημισυνεχής

ii. Εάν η U είναι άνω ημισυνεχής με συμπαγείς τιμές, έτσι είναι και η F.

Απόδειξη

i) Θεωρούμε μια ακολουθία $x_n \in \mathrm{Dom}\,(F)$ που συγκλίνει σε $x \in \mathrm{Dom}\,(F)$ και παίρνουμε $y := f(x,u)$ που ανήκει στο $F(x)$ όταν $u \in U(x)$. Επειδή η U είναι κάτω ημισυνεχής, υπάρχει μια ακολουθία $u_n \in U(x_n)$ που συγκλίνει στο u. Τότε, η ακολουθία $y_n = f(x_n, u_n)$ όπου y_n ανήκει στην $F(x_n)$, συγκλίνει στο y επειδή η f είναι συνεχής. Άρα η F είναι κάτω ημισυνεχής.

ii) Θεωρούμε σταθερό $x \in \mathrm{Dom}\,(U), \varepsilon > 0$ και την περιοχή $B(F(x),\varepsilon)$ του $F(x)$ η οποία είναι μια περιοχή καθενός $f(x,u)$ όταν $u \in U(x)$.Τότε η συνέχεια της f υπονοεί την ύπαρξη $\eta_u > 0$ και $\delta_u > 0$ έτσι ώστε

$$\forall (x',v) \in \mathrm{Graph}(U) \cap \big(B(x,\eta_u) \times B(u,\delta_u)\big), \qquad f(x',v) \in B(F(x),\varepsilon)$$

Το υποσύνολο $U(x)$ όντας συμπαγές, μπορεί να καλυφθεί από p σφαίρες $B(u_i, \delta u_i)$. Επειδή η U είναι άνω ημισυνεχής, υπάρχει $\eta_0 > 0$ έτσι ώστε

$$\forall x' \in B(x,\eta_0), \qquad U(x') \subset \bigcup_{i=1}^{p} B\big(u_i, \delta_{u_i}\big)$$

Αν $\eta := \min\big(\eta_0, \min\,(\eta_{u_i}, \mathrm{i} = 1, \cdots, p)\ \big) > 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\forall x' \in B(x,\eta), \qquad F(x') \subset B(F(x),\varepsilon)$$

Άρα η F είναι άνω ημισυνεχής στο x.□

2.4.Περιθώριες Απεικονίσεις- Marginal Functions

Ορισμός 2.4.1) Περιθώριες Συναρτήσεις -Marginal Functions

Έστω μια πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ και μια συνάρτηση $f: \mathrm{Graph}\ (F) \mapsto$ R. Ορίζουμε τότε την περιθώρια συνάρτηση (marginal function) $g: X \mapsto R \cup \{+\infty\}$ ως εξής:

$$g(x) := \sup_{y\in F(x)} f(x,y)$$

Θεώρημα 2.4.2 (Θεώρημα Μέγιστου-Maximum Theorem)

Έστω μετρικοί χώροι X, Y, μια πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ και μια συνάρτηση $f: \mathrm{Graph}(F) \mapsto \mathrm{R}$ Τότε:

1. Αν f και F είναι κάτω ημισυνεχείς, και η περιθώρια συνάρτηση $g(x)$ είναι κάτω ημισυνεχής

2. Αν f και F είναι άνω ημισυνεχείς και εάν οι τιμές του F είναι συμπαγείς και η περιθώρια συνάρτηση $g(x)$ είναι άνω ημισυνεχής

Απόδειξη

1. Θεωρούμε μια ακολουθία x_n συγκλίνουσα στο x .Έστω $\lambda < g(x)$ Επιλέγουμε $y \in F(x)$ έτσι ώστε $\lambda \leq f(x, y)$. Τότε υπάρχει ακολουθία $y_n \in F(x_n)$ συγκλίνουσα σε y (επειδή η F είναι κάτω ημισυνεχής) και γνωρίζουμε ότι $f(x_n, y_n) \leq g(x_n)$. Επειδή η f είναι κάτω ημισυνεχής, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda \leq f(x, y) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n, y_n) \leq \liminf_{n \to \infty} g(x_n)$$

Αφήνοντας τα λ να συγκλίνουν στο $g(x)$, η πρόταση επαληθεύεται.

2 Για να αποδείξουμε τη δεύτερη πρόταση , επιλέγουμε $x \in X$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$.

Επειδή η f είναι άνω ημισυνεχής, μπορούμε να συσχετίσουμε με οποιοδήποτε $y \in F(x)$ ανοιχτές περιοχές $\mathcal{V}(y)$ του y και $\mathcal{U}_y(x)$ του x έτσι ώστε

$$\forall u \in \mathcal{U}_y(x) \text{ και } v \in \mathcal{V}(y),\ f(u, v) \leq f(x, y) + \varepsilon \quad (1.4)$$

Επειδή η $F(x)$ είναι συμπαγής, μπορεί να καλυφθεί από n ανοικτές περιοχές $\mathcal{V}(y_i)$, $i = 1, \cdots, p$, η ένωση των οποίων αποτελεί μια περιοχή του $F(x)$. Αφού η F είναι άνω ημισυνεχής υπάρχει μια περιοχή $\mathcal{U}_0(x)$ έτσι ώστε

$$\forall x' \in \mathcal{U}_0(x), \quad F(x') \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{V}(y_i)$$

Θεωρούμε την περιοχή: $\mathcal{U}(x) := \mathcal{U}_0(x) \cap \bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{U}_{y_i}(x)$

Παρατηρούμε ότι $\forall u \in \mathcal{U}(x), \quad \forall v \in F(u), \quad f(u, v) \leq \sup_{i=1,\cdots,p} f(x, y_i) + \varepsilon \leq g(x) + \varepsilon$

(χάρη στο (1.4)) και συμπεραίνουμε ότι $\forall u \in \mathcal{U}(x),\ g(u) \leq g(x) + \varepsilon$

Άρα η περιθώρια συνάρτηση $g(x)$ είναι άνω ημισυνεχής

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει το ακόλουθο :

Λήμμα 2.4.3

Εάν μια πλειότιμη απεικόνιση F είναι κάτω ημισυνεχής (αντίστοιχα άνω ημισυνεχής με συμπαγείς τιμές), τότε η συνάρτηση $(x,y) \mapsto d(y, F(x))$ είναι άνω ημισυνεχής (αντίστοιχα κάτω ημισυνεχής) στο $\mathrm{Dom}\,(F)$.

2.5 Κριτήρια κάτω ημισυνέχειας

Αναφέρουμε στην ενότητα αυτή κριτήρια κάτω ημισυνέχειας, μερικά από τα οποία είναι προσαρμογές των αποτελεσμάτων σε κατώτερα όρια ακολουθιών στη συνεχή περίπτωση.

Πρόταση 2.5.1

Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X, δύο χώρους με νόρμα Y και Z, δύο πλειότιμες απεικονίσεις $G: X \multimap Y$ και $F: X \multimap Z$, και μια μονότιμη απεικόνιση f από $X \times Z \mapsto Y$ που επαληθεύουν τις ακόλουθες υποθέσεις:

$$\begin{cases} \text{i)} & G \text{ και } F \text{ είναι κάτω ημισυνεχείς με κυρτές τιμές} \\ ii) & \eta\ f \text{ είναι συνεχής} \\ iii) & \forall x \in X,\ u \mapsto f(x,u) \quad \text{είναι αφφινική} \end{cases}$$

Θέτουμε την ακόλουθη προϋπόθεση:

$\forall x \in X, \exists \gamma > 0, \delta > 0, \mathrm{c} > 0, r > 0$ έτσι ώστε $\forall x' \in B(x,\delta)$ έχουμε

$$\gamma B_Y \subset f(x', F(x') \cap rB_Z) - G(x')$$

Τότε, η πλειότιμη απεικόνιση $R: X \multimap Z$ που ορίζεται από

$$R(x) := \{u \in F(x) \mid f(x,u) \in G(x)\}$$

είναι κάτω ημισυνεχής με μη κενές κυρτές τιμές.

Η απόδειξη είναι μια απλή προσαρμογή της *πρότασης 1.2.6.*

Δηλώνουμε τώρα μια άλλη συνθήκη που είναι λιγότερο συμμετρική.

Πρόταση 2.5.2

Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X, δύο χώρους με νόρμα Y και Z, δύο πλειότιμες απεικονίσεις $G: X \multimap Y$ και $F: X \multimap Z$, και μια μονότιμη απεικόνιση f από $X \times Z \mapsto Y$ τέτοιες ώστε:

$$\begin{cases} i)\ F \quad \text{είναι κάτω ημισυνεχή ς με κυρτές τιμές} \\ ii)\ f \quad \text{είναι συνεχής} \\ iii)\ \forall x \in X, u \mapsto f(x,u) \quad \text{είναι αφινική} \\ iv)\ \forall x \in X, \qquad G(x) \ \text{είναι κυρτό με μη κενό πυρήνα} \\ v)\ \text{το γράφημα της απεικόνισης } X \ni x \multimap Int\ (G(x)) \quad \text{είναι ανοικτό} \end{cases}$$

Θέτουμε την ακόλουθη προϋπόθεση:

$$\forall x \in X,\ \exists u \in F(x) \text{ τέτοιο ώστε } \quad f(x,u) \in \mathrm{Int}\,(G(x)) \quad \mathbf{(2.1)}$$

Τότε, η πλειότιμη απεικόνιση $R: X \multimap Z$ που ορίζεται από

$$R(x) := \{u \in F(x) \mid f(x,u) \in G(x)\}$$

είναι κάτω ημισυνεχής με κυρτές τιμές.

Απόδειξη

1.-Θεωρούμε την πλειότιμη απεικόνιση $S: X \multimap Z$ που ορίζεται από

$$S(x) = \{u \in F(x) \mid f(x,u) \in \mathrm{Int}\,(G(x))\} \subset R(x)$$

Η παραδοχή **(2.1)** συνεπάγεται ότι το $S(x)$ δεν είναι κενό.

Ισχυριζόμαστε ότι η S είναι κάτω ημισυνεχής.

Πράγματι, αν $x_n \to x$ και αν u ανήκει στο $S(x) \subset F(x)$, υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων $u_n \in F(x_n)$ που συγκλίνει σε u επειδή η F είναι κάτω ημισυνεχής. Επειδή

$$\big(x_n, f(x_n, u_n)\big) \text{ συγκλίνει στο } (x, f(x,u)) \in \mathrm{Graph}\,(\mathrm{Int}\,(G(\cdot)))$$

από τη συνέχεια της f και δεδομένου ότι το γράφημα του $\mathrm{Int}\,(G(\cdot))$ είναι ανοιχτό, τα στοιχεία $f(x_n, u_n)$ ανήκουν στο $\mathrm{Int}\,\big(G(x_n)\big)$ για n αρκετά μεγάλο και έτσι, τα στοιχεία u_n ανήκουν στο $S(x_n)$ και συγκλίνουν σε u.

2. – Η κυρτότητα των $F(x)$ και $G(x)$ συνεπάγεται ότι $\overline{S(x)} = R(x)$. Πράγματι, αν $u \in R(x)$ και $u_0 \in S(x)$ τότε το $v_\theta := \theta u_0 + (1-\theta)u$ ανήκει στο $S(x)$ όταν $\theta \in]0,1[$ επειδή η $G(x)$ είναι κυρτή και $f(x, u_0)$ ανήκει στο εσωτερικό του $G(x)$ Άρα για κάθε $\theta \in]0,1[$,

$$f(x,u) + \theta(f(x,u_0) - f(x,u)) = f(x, y + \theta y_0 - \theta y) = f(x, v_\theta) \in \mathrm{Int}\,(G(x)$$

Τότε το u είναι το όριο του v_θ όταν το $\theta > 0$ συγκλίνει στο 0 .

3.–Το θεώρημα προκύπτει επειδή η κλειστότητα οποιασδήποτε κάτω ημισυνεχούς πλειότιμης συνάρτησης είναι επίσης κάτω ημισυνεχής.

Επεκτείνουμε στη συνέχεια το παραπάνω κριτήριο κάτω ημισυνεχούς απεικόνισης σε άπειρη τομή πλειότιμων απεικονίσεων.

Αποδεικνύουμε αρχικά το ακόλουθο:

Λήμμα 2.5.3

Ας υποθέσουμε ότι η F είναι κάτω ημισυνεχής και ότι η H είναι άνω ημισυνεχής με συμπαγείς εικόνες. Αν θέσουμε $e_n := \sup_{y \in H(x_n)} \frac{d(z, F(x_n, y))}{2}$ (1.8) τότε $\lim_{n \to \infty} e_n = 0$

Απόδειξη

Αφού η F είναι κάτω ημισυνεχής, από το *Λήμμα 2.4.3* του *Θεωρήματος Μέγιστου* προκύπτει ότι η συνάρτηση $(x, y, z) \mapsto d(z, F(x, y))$

είναι άνω ημισυνεχής. Επομένως, για οποιαδήποτε $\varepsilon > 0$ και οποιαδήποτε $y \in H(x)$, υπάρχει ακέραιος N_y και μια περιοχή $\mathcal{V}_y$ του y έτσι ώστε:

$\forall y' \in \mathcal{V}_y, \forall n \geq N_y,\ d\big(z, F(x_n, y')\big) \leq \varepsilon$ (1.9) επειδή $d(z, F(x, y)) = 0$.

Άρα το συμπαγές σύνολο $H(x)$ μπορεί να καλύπτεται από p περιοχές $\mathcal{V}_{y_i}$. Επιπλέον αφού η H είναι άνω ημισυνεχής, υπάρχει ένας ακέραιος N_0 έτσι ώστε,

$$\forall n \geq N_0, H(x_n) \subset \bigcup_{i=1,\ldots,p} \mathcal{V}_{y_i}$$

Θέτουμε $N := \max_{i=0,\ldots,p} N_{y_i}$. Τότε, για κάθε $n \geq N$ και $y \in H(x_n)$, το y ανήκει σε κάποιο $\mathcal{V}_{y_i}$, έτσι ώστε, από (1.9), $d\big(z, F(x_n, y)\big) \leq \varepsilon$. Έτσι

$$\forall n \geq N, e_n := \sup_{y \in H(x_n)} \frac{d\big(z, F(x_n, y)\big)}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ και το λήμμα μας αποδεικνύεται.

Θεώρημα 2.5.4

Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X,τους διανυσματικούς χώρους με νόρμα Y και Z και τις πλειότιμες απεικονίσεις $F: X \times Y \multimap Z$ και $H: X \multimap Y$. Υποθέτουμε ότι

$$\begin{cases} (i)\ \eta\ F \text{ είναι κάτω ημισυνεχής με κυρτές τιμές} \\ (ii) \text{η } H \text{ είναι άνω ημισυνεχής με συμπαγείς τιμές} \end{cases}$$

και ότι υπάρχουν θετικές σταθερές γ, δ, c έτσι ώστε για κάθε απεικόνιση e: $Y \mapsto \gamma B$ να ισχύει

$\forall x' \in B(x, \delta)$, $cB \cap \bigcap_{y \in H(x')} (F(x', y) - e(y)) \neq \emptyset$ **(2.2)**

Τότε η πλειότιμη απεικόνιση $G: X \multimap Z$ που ορίζεται από

$$\forall x \in X,\ G(x) := \bigcap_{y \in H(x)} F(x, y)$$

είναι κάτω ημισυνεχής (με μη κενές κυρτές εικόνες.)

Παρατήρηση - Όταν η πλειότιμη απεικόνιση F είναι τοπικά φραγμένη (με την έννοια ότι αντιστοιχίζει κάποια περιοχή κάθε σημείου σε ένα φραγμένο υποσύνολο), δεν χρειαζόμαστε τη σταθερά c και μπορούμε να αντικαταστήσουμε το **(2.2)** με

$$\forall x' \in B(x, \delta), \bigcap_{y \in H(x')} (F(x', y) - e(y)) \neq \emptyset$$

Απόδειξη

Ας επιλέξουμε οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων $x_n \in \mathrm{Dom}\,(F)$ συγκλίνουσα σε x και $z \in G(x)$. Πρέπει να προσεγγίσουμε το z με στοιχεία $z_n \in G(x_n)$.

Εισάγουμε τους ακόλουθους αριθμούς: $e_n := \sup\limits_{y \in H(x_n)} \frac{d(z, F(x_n, y))}{2}$

Τώρα, ας επιλέξουμε για κάθε $y \in H(x_n)$ ένα στοιχείο $u_n(y) \in F(x_n, y)$ τέτοιο ώστε

$$\|z - u_n(y)\| \leq 2d\big(z, F(x_n, y)\big) \leq e_n$$

και ας θέσουμε $\theta_n := \frac{\gamma}{(\gamma + e_n)}$. Τότε

$$\theta_n(z - u_n(y)) \in \theta_n e_n B = (1 - \theta_n)\gamma B$$

Κατά συνέπεια υπάρχει $a_n(y) \in \gamma B$ έτσι ώστε

$$\theta_n(z - u_n(y)) = (1 - \theta_n) a_n(y)$$

Επομένως, η υπόθεση (1.7) συνεπάγεται την ύπαρξη για κάθε n αρκετά μεγάλων στοιχείων $w_n \in \mathrm{c}\,B$ και στοιχείων $v_n(y) \in F(x_n, y)$ έτσι ώστε $a_n(y) = v_n(y) - w_n$ για κάθε $y \in H(x_n)$.

Άρα, μπορούμε να γράψουμε $\theta_n(z - u_n(y)) = (1 - \theta_n)(v_n(y) - w_n)$

Άρα η κοινή τιμή : $z_n := \theta_n z + (1 - \theta_n) w_n = \theta_n u_n(y) + (1 - \theta_n) v_n(y)$

δεν εξαρτάται από y, ανήκει σε όλους $F(x_n, y)$ (από κυρτότητα), συγκλίνει σε z επειδή

$$\|z - z_n\| = (1 - \theta_n)\|z - w_n\| \leq (1 - \theta_n)(\| z \| + \mathrm{c})$$

και, επειδή $1 - \theta_n = \frac{e_n}{\gamma + e_n}$ συγκλίνει στο 0 όταν e_n, συγκλίνει στο 0 χάρη στο *λήμμα 2.5.3.*

Για πλειότιμες απεικονίσεις με μη κυρτές εικόνες, συμπεραίνουμε από το *Θεώρημα 1.2.9* τη συνεχή εκδοχή του÷

Θεώρημα 2.5.5

Θεωρούμε $G: X \multimap Z$ να είναι μια κλειστή κάτω ημισυνεχής πλειότιμη απεικόνιση από ένα μετρικό χώρο X σε ένα χώρο Banach Z και $f: X \times Y \mapsto Z$ να είναι μια συνεχής μονότιμη απεικόνιση, όπου Y είναι ένας άλλος χώρος Banach. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο y και ότι υπάρχουν σταθερές $\mathrm{c} > 0$ και $\eta > 0$ τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} \forall x \in B(x_0, \eta), \quad y \in B(y_0, \eta), \quad z \in B(f(x_0, y_0), \eta) \cap G(x) \\ B_Z \subset c f'_y(x, y)(B_Y) - T_{G(x)}(z) \end{cases}$$

Τότε , η πλειότιμη απεικόνιση R που ορίζεται από $R(x) := \{y \in Y \mid f(x, y) \in G(x)\}$ είναι κάτω ημισυνεχής στο x_0.

Κεφάλαιο 3

Κλειστές κυρτές διαδικασίες -Closed Convex Processes

Εισαγωγή

Ένα ερώτημα που -με πολύ φυσιολογικό τρόπο -τίθεται είναι: ποιο είναι το ανάλογο των συνεχών γραμμικών τελεστών στο πλαίσιο των πλειότιμων απεικονίσεων; Δεδομένου ότι το γράφημα ενός συνεχούς γραμμικού τελεστή $A \in \mathcal{L}$ (X, Y) είναι ένας (κλειστός) διανυσματικός υπόχωρος του X×Y, είναι πολύ φυσικό να θεωρούμε τις πλειότιμες απεικονίσεις, με κλειστούς κυρτούς κώνους ως γραφήματά τους, σαν αυτά τα ανάλογα. Τέτοιες πλειότιμες απεικονίσεις ονομάζονται κλειστές κυρτές διαδικασίες (**closed convex processes**) και εκείνες των οποίων το γράφημα είναι διανυσματικός υπόχωρος ονομάζονται γραμμικές διαδικασίες **(linear processes)**..

Θα αποδείξουμε ότι οι κλειστές κυρτές διαδικασίες απολαμβάνουν όλες (σχεδόν) τις ιδιότητες των συνεχών γραμμικών τελεστών, συμπεριλαμβανομένων του Θεωρήματος Ανοικτής Απεικόνισης , Κλειστού Γραφήματος του Banach (Ενότητα 2) και του Θεωρήματος Ομοιόμορφου Φράγματος(Ενότητα 3.)

3.1 Ορισμοί

Παρακάτω θα εισαγάγουμε το ανάλογο των συνεχών γραμμικών τελεστών, που είναι οι κλειστές κυρτές διαδικασίες στις πλειότιμες απεικονίσεις,

Ορισμός 3.1.1 (Κλειστή Κυρτή Διαδικασία -Closed Convex Process)

Έστω $F: X \multimap Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση από έναν χώρο με νόρμα X σε ένα έναν χώρο με νόρμα Y. Θα λέμε ότι η F

-είναι κυρτή (convex) αν το γράφημά της είναι κυρτό

-κλειστή (closed) αν το γράφημά της είναι κλειστό

-διαδικασία (a process) (ή θετικά ομοιογενής- positively homogeneous) αν το γράφημά της είναι ένας κώνος

γραμμική διαδικασία (a linear process) αν το γράφημά της είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Άρα, μια κλειστή κυρτή διαδικασία είναι μια πλειότιμη απεικόνιση της οποίας το γράφημα είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος.

Θα δούμε ότι τις περισσότερες ιδιότητες των συνεχών γραμμικών τελεστών ικανοποιούν οι κλειστές κυρτές διαδικασίες.

Λήμμα 3.1.2

Μια πλειότιμη απεικόνιση F:

είναι **κυρτή** αν και μόνο αν

$$\begin{cases}\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}\,(F),\ \forall \lambda \in [0,1] \\ \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\end{cases}$$

είναι **μια διαδικασία** αν και μόνο αν

$$\forall x \in X, \qquad \forall \lambda > 0, \qquad \lambda F(x) = F(\lambda x) \text{ και } 0 \in F(0)$$

είναι **μια κυρτή διαδικασία** αν και μόνο αν είναι μια *διαδικασία* που ικανοποιεί:

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ F(x_1) + F(x_2) \subset F(x_1 + x_2)$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού και η εικόνα μιας κλειστής κυρτής διαδικασίας είναι κυρτοί κώνοι (όχι απαραίτητα κλειστοί).

Για μια κλειστή κυρτή διαδικασία ορίζεται μια νόρμα με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 3.1.3 (Νόρμα κλειστής κυρτής διαδικασίας)

Έστω $: X \multimap Y$ να είναι μια κλειστή κυρτή διαδικασία. Η νόρμα $\| F \|$ ισούται με

$$\begin{cases} \| F \| & := \sup_{x \in \text{Dom}(F)} \dfrac{d\big(0, F(x)\big)}{\| x \|} \\ & = \sup_{x \in \text{Dom}(F)} \inf_{v \in F(x)} \dfrac{\| v \|}{\| x \|} \\ & = \sup_{x \in \text{Dom}(F) \cap B} \inf_{v \in F(x)} \| v \| \end{cases}$$

όπου B η μοναδιαία σφαίρα

3.2 Θεωρήματα ανοικτής απεικόνισης και κλειστού γραφήματος (Open Mapping and Closed Graph Theorems)

Το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης Banach μπορεί να επεκταθεί σε κλειστές κυρτές διαδικασίες.

Υπενθυμίζουμε το:

Θεώρημα (Ανοικτής απεικόνισης Banach)[**5**]. Έστω X, Y χώροι Banach και T: X→Y φραγμένος γραμμικός τελεστής, επί. Τότε ο T είναι ανοικτός τελεστής,

(δηλαδή αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε η εικόνα T(G) είναι ανοικτό υποσύνολο του Y).

Αποδεικνύουμε καταρχήν το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 3.2.1 Θεωρούμε έναν αυτοπαθή χώρο Banach X, έναν χώρο Banach Y,και μια κλειστή κυρτή διαδικασία $F: X \multimap Y$.

Ορίζουμε συνάρτηση $\rho\ Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\rho(y) := \inf_{x \in F^{-1}(y)} \|x - x_0\| = d(x_0, F^{-1}(y))$$

Όταν $y \notin \mathrm{Im}\,(F)$) θέτουμε $\rho(y) = +\infty$

Τότε η συνάρτηση ρ είναι κάτω ημισυνεχής.

Απόδειξη

Η $F: X \multimap Y$ είναι κυρτή, οπότε η συνάρτηση ρ είναι προφανώς κυρτή

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα μη κενά τμήματα $\{y \mid \rho(y) \leq \lambda\}$ είναι κλειστά. Θεωρούμε μια ακολουθία στοιχείων y_n ενός τέτοιου τμήματος που συγκλίνει σε κάποιο y. Ο χώρος X, είναι αυτοπαθής οπότε υπάρχει $x_n \in F^{-1}(y_n)$ για την οποία ισχύει $\|x_n - x_0\| = \rho(y_n) \leq \lambda$. Άρα τα στοιχεία x_n παραμένουν στην σφαίρα $x_0 + \lambda B$. Επίσης αφού ο X είναι αυτοπαθής , υπάρχει ένα (ασθενές) σημείο συσσώρευσης x της ακολουθίας x_n. Τότε το σημείο (x, y) είναι ένα ασθενές σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας (x_n, y_n), επομένως, ανήκει στο γράφημα του F το οποίο ως κλειστό και κυρτό, είναι κλειστό στο $X \times Y$ όταν το X εφοδιάζεται με την ασθενή τοπολογία και το Y με την τοπολογία της νόρμας. Δεδομένου ότι τα στοιχεία x_n ανήκουν στην σφαίρα $x_0 + \lambda B$, η οποία είναι ασθενώς κλειστή, το σημείο συσσώρευσης x ανήκει επίσης σε αυτή την σφαίρα. Άρα

$$\rho(y) \leq \|x - x_0\| \leq \lambda\,. \ \square$$

Θεώρημα 3.2.2 (Robinson-Ursescu)

Έστω ότι X, Y είναι χώροι Banach,και $F: X \multimap Y$ είναι μια κλειστή κυρτή πλειότιμη απεικόνιση . Υποθέτουμε ότι το y_0 ανήκει στο εσωτερικό της εικόνας της F και $x_0 \in F^{-1}(y_0)$. Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές l και γ τέτοιες ώστε για οποιαδήποτε $y \in y_0 + \gamma B$, υπάρχει x τέτοιο ώστε $y \in F(x)$ και $\|x - x_0\| \leq l\|y - y_0\|$

Απόδειξη

Για λόγους απλότητας, αποδεικνύουμε αυτό το θεώρημα μόνο όταν ο χώρος Banach X είναι αυτοπαθής .Ορίζουμε τη συνάρτηση ρ ως:

$$\rho(y) := \inf_{x \in F^{-1}(y)} \|x - x_0\| = d(x_0, F^{-1}(y))$$

Όταν $y \notin \mathrm{Im}\,(F)$) θέτουμε $\rho(y) = +\infty$ Η $F: X \multimap Y$ είναι κυρτή, οπότε η συνάρτηση ρ είναι προφανώς κυρτή. Η συνάρτηση ρ είναι κάτω ημισυνεχής. όπως αποδείχθηκε στο *Λήμμα 3.2.1*

Στη συνέχεια, από το Θεώρημα του Baire προκύπτει ότι η ρ είναι συνεχής στο εσωτερικό του $\mathrm{Im}\,(F)$,

-Πράγματι: το πεδίο ορισμού του ρ είναι η ένωση των τμημάτων $S_n \coloneqq \{y: \rho(y) \leq n\}$ *που είναι κλειστά επειδή η ρ είναι κάτω ημισυνεχής. Εφόσον το εσωτερικό του πεδίου ορισμού του ρ δεν είναι κενό, το εσωτερικό ενός από αυτά τα τμήματα δεν είναι κενό. Οπότε, η κυρτή συνάρτηση ρ που είναι φραγμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο* $Int(S_n)$ *για κάποιο n, είναι συνεχής (και ακόμα, τοπικά Lipschitz) στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.-*

το οποίο δεν είναι κενό από την υπόθεση . Δεδομένου ότι οι συνεχείς κυρτές συναρτήσεις είναι τοπικά Lipschitz, υπάρχει μια σφαίρα ακτίνας $\gamma > 0$ με κέντρο το y_0 και μια σταθερά $l' > 0$ τέτοια ώστε για όλα τα y σε αυτή τη σφαίρα,

$$\| \rho(y) \| = \|\rho(y) - \rho(y_0)\| \leq l' \|y - y_0\|$$

Είναι $\rho(y_0) = d(x_0, F^{-1}(y_0)) = 0$ αφού $x_0 \in F^{-1}(y_0)$ από υπόθεση

Επομένως $d(x_0, F^{-1}(y)) \leq l' \|y - y_0\|$

Θέτουμε $l = 2l'$ και το θεώρημα απεδείχθη

Θεώρημα 3.2.3 (Ανοικτής απεικόνισης - Open Mapping)

Έστω X, Y χώροι Banach. Ας υποθέσουμε ότι μια κλειστή κυρτή διαδικασία $F: X \multimap Y$ είναι επί (Im $(F) = Y$). Τότε η F^{-1} είναι Lipschitz δηλαδή:

Υπάρχει μια σταθερά $l > 0$ έτσι ώστε, για κάθε $x_1 \in F^{-1}(y_1)$ και για οποιοδήποτε $y_2 \in Y$, μπορούμε να βρούμε ένα $x_2 \in F^{-1}(y_2)$ τέτοιο ώστε

$$\|x_1 - x_2\| \leq l \|y_1 - y_2\|$$

(Στην πραγματικότητα, αυτό το θεώρημα ισχύει γενικά για κλειστές κυρτές απεικονίσεις)

Απόδειξη

Παίρνουμε $x_0 = 0, y_0 = 0$ στο *Θεώρημα 3.2.2*. Το 0 ανήκει στο εσωτερικό του κώνου Im (F) αν και μόνο αν Im $(F) = Y$, Άρα η F είναι επί από το *Θεώρημα 3.2.2* για μια σταθερά $l > 0$ Έχουμε:

$$\forall y \in Y, \exists x \in F^{-1}(y) \quad \text{τέτοιο ώστε } \| x \| \leq l \| y \|$$

Έστω $y_1, y_2 \in Y$ Τότε μπορούμε να επιλέξουμε $x_1 \in F^{-1}(y_1)$ και $e \in F^{-1}(y_2 - y_1)$ τέτοια ώστε $\| e \| \leq l \|y_1 - y_2\|$. Τότε το $x_2 := x_1 + e$ ανήκει στο $F^{-1}(y_2)$ επειδή η F είναι μια κυρτή διαδικασία και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|x_1 - x_2\| = \| e \| \leq l \|y_1 - y_2\| \square$$

Πόρισμα 3.2.4

Θεωρούμε τους χώρους Banach X, Y, ένα συνεχή γραμμικό τελεστή $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ και ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο $K \subset X$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε $Ax_0 \in$ Int $(A(K))$.

Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές l και γ τέτοιες ώστε για κάθε $y \in A(x_0) + \gamma B$, υπάρχει λύση $x \in K$ της εξίσωσης $Ax = y$ ώστε $\|x - x_0\| \leq l\|y - A(x_0)\|$.

Απόδειξη

Προκύπτει από το *Θεώρημα 3.2.2.* για $\bar{K} := \text{Graph}\ (F)$ και $A := \pi_Y$.□

Δεδομένου ότι ο περιορισμός $F := A|_K$ ενός συνεχούς γραμμικού τελεστή $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ σε έναν κλειστό κυρτό κώνο είναι μια κλειστή κυρτή διαδικασία, ισχύει το εξής:

Πόρισμα 3.2.5

Θεωρούμε τους χώρους Banach X, Y, ένα συνεχή γραμμικό τελεστή $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ και ένα κλειστό κυρτό κώνο $K \subset X$ έτσι ώστε $A(K) = Y$.

Τότε η πλειότιμη απεικόνιση $y \multimap A^{-1}(y) \cap K$ είναι Lipschitz: δηλαδή υπάρχει μια θετική σταθερά l τέτοια ώστε $\forall y_1, y_2 \in Y, A^{-1}(y_1) \cap K \subset A^{-1}(y_2) \cap K + l\|y_1 - y_2\|B$

Όπως και στην περίπτωση των συνεχών γραμμικών τελεστών, το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος, το οποίο υπενθυμίζουμε για συνεχείς γραμμικούς τελεστές.

*Θεώρημα κλειστού γραφήματος**[5]**. Έστω X, Y χώροι Banach και T: X →Y γραμμικός τελεστής, ώστε το γράφημα G του T, δηλαδή το σύνολο G = {(x,T(x)) ∈X×Y:x∈X}, είναι κλειστό υποσύνολο του X × Y. Τότε ο τελεστής T είναι φραγμένος.*

Στο πλαίσιο της πλειότιμης ανάλυσης το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3.2.6 (Θεώρημα κλειστού γραφήματος- Closed Graph Theorem)

Μια κλειστή κυρτή διαδικασία F από ένα χώρο Banach X σε ένα άλλο Y της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ολόκληρος ο χώρος ,είναι Lipschitz: δηλαδή υπάρχει μια σταθερά (Lipschitz) $l > 0$ έτσι ώστε

$$\forall x_1, x_2 \in X, F(x_1) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|B$$

Έτσι, η νόρμα της F είναι πεπερασμένη , $\|F\| < +\infty$ όταν $\text{Dom}\ (F) = X$.

Απόδειξη

Αρκεί να εφαρμόσουμε , το *Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης* 3.2.3 στην κλειστή κυρτή διαδικασία F^{-1}□

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε το θεώρημα *ομοιόμορφου φράγματος* για συνεχείς γραμμικούς τελεστές.

*Θεώρημα (Αρχή ομοιόμορφου φράγματος)***[5].** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και T_i; $i \in I$ οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στο Y, ώστε $sup\|T_i(x)\| < \infty$ για κάθε $x \in X$. Τότε υπάρχει M > 0 ώστε $\|T_i\|$ <M για κάθε $i \in$*I.

Μπορούμε τώρα να προσαρμόσουμε το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος στην περίπτωση κλειστών κυρτών διαδικασιών.

Θεώρημα 3.2.7 (Ομοιόμορφου φράγματος- Uniform Boundedness)

Θεωρούμε τους χώρους Banach X, Y, και F_h μια οικογένεια κλειστών κυρτών διαδικασιών από X προς Y, "κατά σημείο φραγμένες" με την έννοια ότι

$\forall x \in X, \exists y_h \in F_h(x)$ τέτοιο ώστε $\sup_h \|y_h\| < +\infty$ **(3.1)**

Τότε αυτή η οικογένεια είναι «ομοιόμορφα φραγμένη» με την έννοια ότι

$$\sup_h \|F_h\| < +\infty$$

Κατά συνέπεια, μπορούμε να μιλάμε για φραγμένες οικογένειες κλειστών κυρτών διαδικασιών, χωρίς να διευκρινίζουμε αν είναι σημειακά ή ομοιόμορφα.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις θετικά ομοιογενείς κυρτές κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις ρ_h που ορίζεται από

$$\rho_h(x) := \inf_{y \in F_h(x)} \| y \| = d(0, F_h(x))$$

(οι οποίες είναι κάτω ημισυνεχείς επειδή οι κλειστές κυρτές διαδικασίες F_h είναι Lipschitz)

Θεωρούμε συνάρτηση ρ που ορίζεται ως εξής

$$\forall x \in X, \rho(x) := \sup_h \rho_h(x)$$

Η υπόθεση **(3.1)** υποδηλώνει ότι αυτή η συνάρτηση ρ είναι πεπερασμένη. Δεδομένου ότι είναι επίσης θετικά ομοιογενής, κυρτή και κάτω ημισυνεχής (είναι το supremum τέτοιων συναρτήσεων), είναι συνεχής στο 0.Άρα, υπάρχει μια σταθερά l έτσι ώστε:

$\sup_h d(0, F_h(x)) = \rho(x) \leq l \| x \|$ δηλαδή . $\|F_h\| \leq l < \infty$.□

Η ακόλουθη συνέπεια του *Θεωρήματος 3.2.7* επεκτείνει σε κλειστές κυρτές διαδικασίες το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα σύγκλισης.

Θεώρημα 3.2.8 (Διασταυρούμενη Σύγκλιση- Crossed Convergence)

Θεωρούμε μετρικό χώρο U, χώρους Banach X, Y και μια πλειότιμη απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε u ∈ U μια κλειστή κυρτή διαδικασία F(u) : X⤳Y. Ας υποθέσουμε ότι η οικογένεια των κλειστών κυρτών διαδικασιών F(u) είναι σημειακά φραγμένη

Τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

$$\begin{cases} i) \quad \eta \ \alpha\pi\varepsilon\iota\kappa\acute{o}\nu\iota\sigma\eta \ \ u \multimap Graph\big(F(u)\big) \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\tau\omega\ \eta\mu\iota\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \\ ii) \quad \eta \ \alpha\pi\varepsilon\iota\kappa\acute{o}\nu\iota\sigma\eta \ (u,x) \multimap F(u)(x) \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\acute{\alpha}\tau\omega\ \eta\mu\iota\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \end{cases}$$

Απόδειξη

i)⇒ii). Θεωρούμε μια ακολουθία στοιχείων (u_n, x_n) η οποία συγκλίνει σε (u, x) και ένα στοιχείο $y \in F(u)(x)$. Πρέπει να το προσεγγίσουμε με στοιχεία $y_n \in F(u_n)(x_n)$.

Επειδή η $u \multimap$ Graph $(F(u))$ είναι κάτω ημισυνεχής, μπορούμε να προσεγγίσουμε το (x, y) από στοιχεία $(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \in$ Graph $\big(F(u_n)\big)$. Με την υπόθεση του σημειακού φράγματος και το *Θεώρημα 3.2.7*, υπάρχουν $l > 0$ και λύσεις $f_n \in F(u_n)(x_n - \hat{x}_n)$ τέτοιες ώστε

$$\|f_n\| \leq l\|x_n - \hat{x}_n\|$$

Η δεξιά πλευρά της παραπάνω ανισότητας συγκλίνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$. Επειδή η $F(u_n)$ είναι μια κυρτή διαδικασία, το στοιχείο $y_n := \hat{y}_n + f_n$ ανήκει στο $F(u_n)(x_n)$. Συνεπώς καθώς η y_n συγκλίνει στο y, συμπεραίνουμε ότι η πλειότιμη απεικόνιση $(u, x) \multimap F(u)(x)$ είναι κάτω ημισυνεχής στο (u, x).

Το αντίστροφο ισχύει προφανώς ακόμη και όταν η οικογένεια $(F(u))_{u \in U}$ δεν είναι φραγμένη□

Κεφάλαιο 4 .Εφαπτόμενοι κώνοι- Tangent Cones

4.1 Εφαπτόμενοι κώνοι σε ένα υποσύνολο

4.1.1 Ενδεχόμενοι κώνοι- Contingent Cones

Ξεκινάμε με μια παρουσίαση των ενδεχόμενων κώνων:

Ορισμός 4.1.1 Ενδεχόμενοι κώνοι (**Contingent Cones**)

Έστω $K \subset X$ ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου με νόρμα X και $x \in \overline{K}$. Ο ενδεχόμενος κώνος $T_K(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$T_K(x) := \left\{ v \mid \liminf_{h \to 0+} \; d_K\left(\frac{x + h\,v}{h}\right) = 0 \right\}$$

Βλέπουμε αμέσως ότι ο ενδεχόμενος κώνος $T_K(x)$ είναι το ανώτερο όριο των υποσυνόλων $\frac{(K-x)}{h}$ και έτσι ο $T_K(x)$ είναι ένας κλειστός κώνος.

Θέτουμε : $S_K(x) := \bigcup_{h>0} \frac{K-x}{h}$ τον κώνο που παράγεται από το σύνολο $(K - x)$. Συνεπώς ο ενδεχόμενος κώνος $T_K(x)$ περιέχεται στο $\overline{S_K(x)}$.

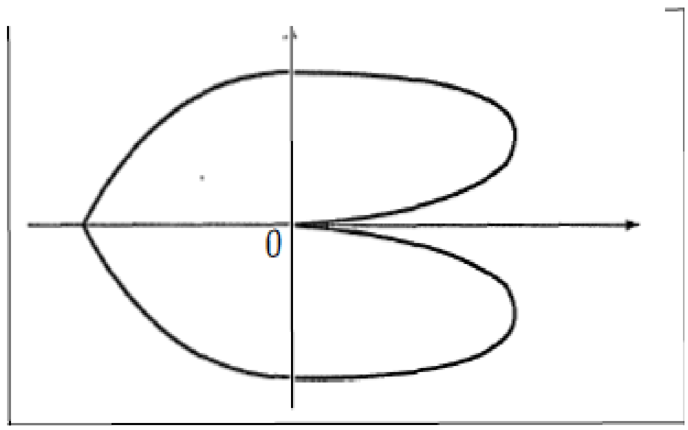
Είναι πολύ εύχρηστο να έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό αυτού του κώνου όσον αφορά τις ακολουθίες:

$v \in T_K(x)$ αν και μόνο αν $\exists h_n \to 0+$ και $\exists v_n \to v$ τέτοια ώστε $\forall n, x + h_n v_n \in K$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $x \in \text{Int}\,(K)$, τότε $T_K(x) = X$

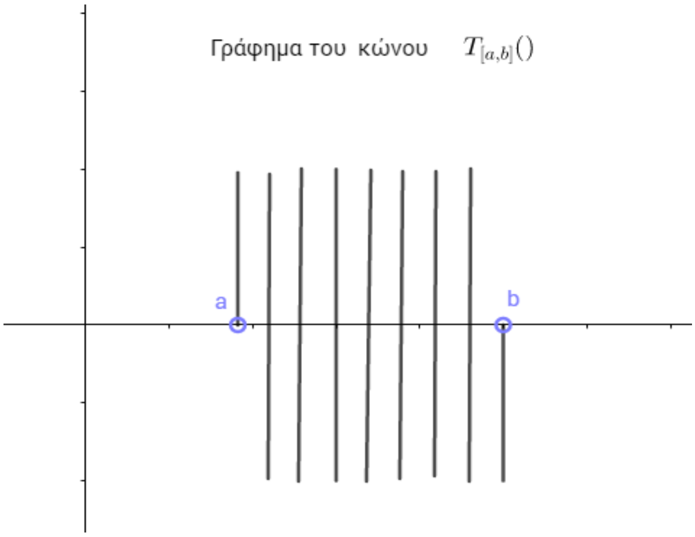
Μπορεί επίσης να είναι $T_K(x) = X$ ακόμα και αν το x δεν ανήκει στο εσωτερικό του K (βλέπε σχήμα 4.1.)

Σχήμα 4.1 Υποσύνολο Κ με Τκ(0)=Χ -Πηγή[1]/σελ.122



Δυστυχώς, το γράφημα της πλειότιμης απεικόνισης $K \ni x \multimap T_K(x) \subset X$

δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αυτή η σημαντική ιδιότητα λείπει κάθε φορά που οι περιορισμοί ανισότητας περιέχονται στον ορισμό του K, όπως το ακόλουθο παράδειγμα όπου K=[a,b]. Θα δούμε ότι η πλειότιμη απεικόνιση είναι κλειστή όταν το K περιγράφεται από περιορισμούς ισότητας και είναι κάτω ημισυνεχής όταν το K είναι κυρτό



Σχήμα 4. 1 Πηγή[1]/σελ.123

Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε έναν χώρο με νόρμα X, μια συνεχή απεικόνιση $g = (g_1, \dots, g_p): X \mapsto \mathbf{R}^p$ και το υποσύνολο K του X που ορίζεται από : $K := \{x \in X \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, p\}$

Έστω $x \in K$. Θέτουμε $I(x) := \{i = 1, \dots, p \mid g_i(x) = 0\}$

Παρατηρούμε ότι $T_K(x) = X$ οποτεδήποτε $I(x) = \emptyset$ και ότι, διαφορετικά, η συμπερίληψη

$$T_K(x) \subset \{u \in X \mid \forall i \in I(x), \langle g_i'(x), u\rangle \geq 0\}$$

ισχύει όταν η g είναι κατά Fréchet διαφορίσιμη στο x.

-Υπενθυμίζουμε ότι:

Αν V , W είναι διανυσματικοί χώροι με νόρμα και $U \subseteq V$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του V, μια συνάρτηση $f: U \to W$ ονομάζεται Fréchet διαφορίσιμη στο $x \in U$ αν υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A: V \to W$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Ah \|_W}{\| h \|_V} = 0.$$

Αν θέσουμε επιπλέον την υπόθεση περιορισμού:

$$\exists v_0 \in X \quad τέτοιο \ \ ώστε \ \ \forall i \in I(x), \langle g_i'(x), v_0\rangle > 0$$

τότε ο ενδεχόμενος κώνος είναι:

$$T_K(x) = \{u \in X \mid \forall i \in I(x) \ , \ \langle g_i'(x), u\rangle \geq 0\}$$

Πράγματι, έστω u τέτοιο ώστε $\langle g_i'(x), u\rangle \geq 0$ για οποιαδήποτε $i \in I(x)$. Για $i \notin I(x)$, οι γνήσιες ανισότητες $g_i(x) > 0$ υπονοούν ότι για κάποια $\alpha > 0$ έχουμε

$$\forall h \in [0, \alpha], \qquad \forall i \notin I(x), \qquad g_i(x + hu) \geq 0$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\langle g_i'(x), u\rangle > 0$ για κάθε $i \in I(x)$. Τότε

$$\forall i \in I(x), g_i(x + hu) = g_i(x + hu) - g_i(x) = \langle g_i'(x), u\rangle + h\, \varepsilon_i(h)$$

όπου $\varepsilon_i(h)$ συγκλίνει στο 0 όταν $h \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι $g_i(x + hu) \geq 0$ για h αρκετά μικρό και για όλα τα $i \in I(x)$, και συνεπώς για κάθε $i = 1, \dots, p$.

Τότε το στοιχείο u ανήκει στον ενδεχόμενο κώνο $T_K(x)$.

Εξετάζουμε τώρα τη γενική περίπτωση. Από την υπόθεση, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\beta \in]0,1[$, το $u_\beta := (1 - \beta)u + \beta v_0$ ικανοποιεί τις αυστηρές ανισότητες $\langle g_i'(x), u_\beta\rangle > 0$ για οποιοδήποτε $i \in I(x)$ και, από ό,τι αποδείχθηκε προηγουμένως, ανήκει επίσης στον ενδεχόμενο κώνο $T_K(x)$. Αν το β συγκλίνει στο 0 , συμπεραίνουμε ότι το όριο u του u_β ανήκει επίσης στον ενδεχόμενο κώνο $T_K(x)$.□

Αναφέρουμε παρακάτω κάποιες βασικές ιδιότητες των ενδεχόμενων κώνων:

Πίνακας 4.1-Ιδιότητες ενδεχόμενων κώνων

(1) ▹ Αν $K \subset L$ και $x \in \bar{K}$ τότε $T_K(x) \subset T_L(x)$
(2) ▹ Αν $K_i \subset X$, $(i = 1, \dots, n)$ και $x \in \overline{\cup_\iota K_\iota}$ τότε $T_{\cup_{i=1}^n K_i}(x) = \cup_{i \in I(x)} T_{K_i}(x)$ όπου $I(x) := \{i \mid x \in \overline{K_\iota}\}$
(3) ▹ Αν $K_i \subset X_i$, $(i = 1, \dots, n)$ και $x_i \in \overline{K_\iota}$ τότε $T_{\prod_{i=1}^n K_i}(x_1, \dots, x_n) \subset \Pi_{i=1}^n T_{K_i}(x_i)$
(4) ▹ Αν $g \in C^1(X, Y)$, $αν\ K \subset X,\ x \in \bar{K}\ και\ M \subset Y\ τότε\ \overline{g'(x)(T_K(x))} \subset T_{g(K)}(g(x))$ και $T_{g^{-1}(M)}(x) \subset g'(x)^{-1} T_M(g(x))$
(5) ▹ Αν $K_i \subset X, (i = 1, \dots, n)$ και $x \in \overline{\cap_\iota K_\iota}$ τότε $T_{\cap_{i=1}^n K_i}(x) \subset \cap_{i=1}^n T_{K_i}(x)$

4.1.2 Στοιχειώδεις ιδιότητες ενδεχόμενων κώνων

Πρόταση 4.1.2

Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος Banach X είναι λείος, δηλαδή ότι η νόρμα του X είναι Gateaux διαφορίσιμη ως προς την αρχή, και με $J(x)$ συμβολίζουμε την κλίση του στο x. η οποία είναι μια απεικόνιση από το X στη μοναδιαία σφαίρα του $X^\star$, που ονομάζεται δυαδική απεικόνιση ,τέτοια ώστε $\langle J(x), x\rangle = \| x \|$. Η δυαδική απεικόνιση είναι συνεχής από το X στο $X^\star$ εφοδιασμένο με την ασθενή-* τοπολογία

Έστω K ένα κλειστό υποσύνολο του X.

Θέτουμε $\Pi_K(y) := \{ z \in K \mid \| z - y \| = d_K(y) \}$

Θεωρούμε $y \notin K$ τέτοια ώστε $\Pi_K(y) \neq \emptyset$. Τότε

$$\forall z \in \Pi_K(y),\ \forall v \in \overline{co}(T_K(z)), \langle J(y-z), v\rangle \leq 0$$

Απόδειξη

Έστω $v \in T_K(z)$: Υπάρχουν $h_n > 0$ και $v_n \in X$ που συγκλίνουν στο 0 και v αντίστοιχα τέτοια ώστε $z + h_n v_n \in K$ για κάθε $n \geq 0$. Δεδομένου ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|$ είναι κυρτή και Gâteaux διαφορίσιμη από την υπόθεση, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

για κάθε $y_1 \neq 0$ και y_2, $\quad < J(y_1), y_2 - y_1 > \leq \|y_2\| - \|y_1\|$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\begin{cases} \langle J(y-z-h_n v_n), v_n\rangle \\ = \dfrac{\langle J(y-z-h_n v_n), y-z-(y-z-h_n v_n)\rangle}{h_n} \\ \leq \dfrac{\| y-z \| - \|y-z-h_n v_n\|}{h_n} \leq 0 \end{cases}$$

Δεδομένου ότι J είναι συνεχής από το X στο X^* εφοδιασμένο με την ασθενή⋆ τοπολογία , συμπεραίνουμε ότι $J(y-z-h_n v_n)$ συγκλίνει ασθενώς σε $J(y-z)$. Άρα $< J(y-z-h_n v_n), v_n >$ συγκλίνει στο $< J(y-z), \boldsymbol{v} >$ γιατί η v_n συγκλίνει στο v, Επομένως

$$\forall v \in T_K(z), \langle J(y-z), v\rangle \leq 0$$

και έτσι η ίδια ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε v στην κλειστή κυρτή θήκη του $T_K(z)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον κώνο Dubovitskij-Miljutin που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.1.3

Ο **"εφαπτόμενος κώνος Dubovitskij-Miljutin"(*“Dubovitskij-Miljutin tangent cone”***) $D_K(x)$ του Kστο $x \in \bar{K}$ ορίζεται ως εξής:

$v \in D_K(x)$ αν και μόνο αν $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\mathrm{x} + (0, \varepsilon](v + \varepsilon B) \subset K$

Αυτός ο κώνος είναι το συμπλήρωμα του ενδεχόμενου κώνου στο συμπλήρωμα:

Λήμμα 4.1.4

Έστω ότι x ανήκει στο σύνορο του K και $\widehat{K}$ δηλώνει το συμπλήρωμα του K. Τότε, το συμπλήρωμα του ενδεχόμενου κώνου $T_{\widehat{K}}(x)$ $\ \tau o \upsilon\, \widehat{K}$ στο x είναι ο "κώνος Dubovitskij-Miljutin" $D_K(x)$ του K στο $\boldsymbol{x}$

Παρατήρηση - Το τελευταίο παράδειγμα δείχνει ότι όταν

$$K := \{x \mid g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, p\}$$

τότε, το ανοιχτό υποσύνολο $\{v \mid \langle g_j'(x), v\rangle > 0, j \in I(x)\}$ περιέχεται στο $D_K(x)$.

4.1.3. Παρακείμενοι κώνοι και εφαπτόμενοι Κώνοι Clarke (Adjacent and Clarke Tangent Cones)

Ορισμός 4.1.5

Έστω $K \subset X$ είναι ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου με νόρμα X και $x \in \bar{K}$

1. - Ο ενδιάμεσος ή παρακείμενος κώνος (intermediate or adjacent cone) $T_K^b(x)$ ορίζεται από

$$T_K^b(x) := \left\{ v \middle| \lim_{h \to 0+} d_K \frac{(x + hv)}{h} = 0 \right\}$$

2.-Ο εφαπτόμενος κώνος Clarke ή ο κυκλικός κώνος (the Clarke tangent cone or circatangent cone) $C_K(x)$ ορίζεται από

$$C_K(x) := \left\{ v \;\middle|\; \lim_{h \to 0+ ,x' \underset{K}{\to} x} d_K \frac{(x' + hv)}{h} = 0 \right\}$$

όπου $\underset{K}{\to}$ υποδηλώνει τη σύγκλιση στο K.

Θα λέμε ότι ένα $K \subset X$ υποσύνολο είναι παραγωγίσιμο (derivable) στο $x \in \bar{K}$ αν και μόνο εάν $T_K^b(x) = T_K(x)$ και εφαπτομενικά κανονικό (tangentially regular) στο x εάν $T_K(x) = C_K(x)$

Βλέπουμε αμέσως ότι αυτοί οι εφαπτόμενοι κώνοι είναι κατώτερα όρια

$$T_K^b(x) = \mathrm{Liminf}_{h \to 0+} \frac{K - x}{h}$$

και $$C_K(x) = \mathrm{Liminf}_{h \to 0+, K \ni x' \to x} \frac{K - x'}{h}$$

Έτσι είναι κλειστοί κώνοι.Ισχύει ότι

$$C_K(x) \subset T_K^b(x) \subset T_K(x) \subset \overline{S_K(x)}$$

και ότι αυτοί οι εφαπτόμενοι κώνοι στο K και την κλειστότητα $\bar{K}$ του K συμπίπτουν και ότι αν $x \in \mathrm{Int}(K)$,τότε $C_K(x) = X$

Θα δούμε αργότερα ότι το αντίστροφο ισχύει όταν η διάσταση του X είναι πεπερασμένη.

Αυτοί οι εφαπτόμενοι κώνοι μπορεί να είναι όλοι διαφορετικοί.. Στο παράδειγμα του συνόλου του *σχήματος 4.1*, ο παρακείμενος και οι ενδεχόμενος κώνος στο μηδέν συμπίπτουν (με ολόκληρο το διάστημα) και ο κώνος $C_K(0)$ είναι ίσος με τον οριζόντιο άξονα $\mathbf{R} \times \{0\}$.

Είναι πολύ εύχρηστο να χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό αυτών των κώνων όσον αφορά τις ακολουθίες:

$$v \in T_K^b(x) \Leftrightarrow \forall h_n \to 0+, \exists v_n \to v \text{ τέτοιο ώστε } \forall n, \quad x + h_n v_n \in K$$

και $$v \in C_K(x) \Leftrightarrow \forall h_n \to 0+, \forall x_n \underset{K}{\to} x, \exists v_n \to v \text{ τέτοιο ώστε } \forall n, x_n + h_n v_n \in K$$

Πρόταση 4.1.6

Ο εφαπτόμενος κώνος $C_K(x)$ είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

$$C_K(x) + T_K(x) \subset T_K(x) \ \ \& \ \ C_K(x) + T_K^b(x) \subset T_K^b(x)$$

Απόδειξη

Έστω v_1 και v_2 ανήκουν στο $C_K(x)$. Για να αποδείξουμε ότι $v_1 + v_2$ ανήκει σε αυτόν τον κώνο, ας επιλέξουμε οποιαδήποτε ακολουθία $h_n > 0$ που συγκλίνει στο 0 και οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων $x_n \in K$ που συγκλίνουν στο x. Υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων v_{1n} που συγκλίνουν στο v_1 τέτοια ώστε τα στοιχεία $x_{1n} := x_n + h_n v_{1n}$ να ανήκουν στο K για κάθε n. Επειδή όμως η ακολουθία x_{1n} επίσης συγκλίνει στο x εντός του K, υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων v_{2n} που συγκλίνουν σε v_2 τέτοια ώστε

$$\forall n, \ x_{1n} + h_n v_{2n} = x_n + h_n(v_{1n} + v_{2n}) \in K$$

Αυτό σημαίνει ότι $v_1 + v_2$ ανήκει στο $C_K(x)$ επειδή η ακολουθία των στοιχείων $v_{1n} + v_{2n}$ συγκλίνει σε $v_1 + v_2$. Η απόδειξη των δύο άλλων εγκλεισμάτων είναι ανάλογη □

Επισημαίνουμε τη σημαντική και ίσως απροσδόκητη ιδιότητα ότι ο εφαπτόμενος κώνος Clarke $C_K(x)$ είναι πάντα ένας κλειστός κυρτός κώνος. Συχνά όμως ο κώνος αυτός ταυτίζεται με τον τετριμμένο κώνο $\{0\}$.

Για παράδειγμα, εξετάζουμε το υποσύνολο $K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ |x| = |y|\}$

Βλέπουμε ότι $T_K(0) = T_K^b(0) = K$ και $C_K(0) = \{0\}$

Οι στοιχειώδεις ιδιότητες των παρακείμενων κώνων είναι οι ίδιες με αυτές των ενδεχόμενων κώνων, εκτός από τον τύπο του ενδιάμεσου εφαπτόμενου κώνου στο γινόμενο, ο οποίος είναι το γινόμενο των ενδιάμεσων εφαπτόμενων κώνων και ο τύπος για την ένωση. Συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα 4.2.

1. Πίνακας 4.2: Ιδιότητες παρακείμενων εφαπτόμενων κώνων.

(1) Αν $K \subset L$ και $x \in \bar{K}$, τότε $T_K^b(x) \subset T_L^b(x)$

(2) Αν $K_i \subset X$, $(i = 1, \dots, n)$ και $x \in \overline{\bigcup_i K_i}$, τότε $T^b_{\bigcup_{i=1}^n K_i}(x) \supset \bigcup_{i \in I(x)} T^b_{K_i}(x)$
όπου $I(x) := \{i \mid x \in \bar{K_i}\}$

(3) Αν $K_i \subset X_i$, $(i = 1, \dots, n)$ και $x_i \in \bar{K_i}$, τότε $T_{\prod_{i=1}^b K_i}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n T^b_{K_i}(x_i)$

(4) Εάν $g \in C^1(X, Y)$, εάν $K \subset X, x \in \bar{K}$ και $M \subset Y$, τότε $g'(x)\big(T_K^b(x)\big) \subset T^b_{g(K)}(g(x))$
και $T^b_{g^{-1}(M)}(x) \subset g'(x)^{-1} T^b_M(g(x))$

(5) Εάν $K_i \subset X$ και $x \in \bigcap_i K_i (i = 1, \dots, n)$, τότε $T_{\bigcap_{i=1}^b K_i}(x) \subset \bigcap_{i=1}^n T^b_{K_i}(x)$

Αλλά θα δείξουμε σε λίγο ότι ο εφαπτόμενος κώνος Clarke και ο ενδεχόμενος κώνος συμπίπτουν σε εκείνα τα σημεία x όπου το K είναι λείο , δηλαδή, όπου η πλειότιμη απεικόνιση $x \multimap T_K(x)$ είναι κάτω ημισυνεχής. Άρα, ο κώνος $C_K(x)$ μπορεί να θεωρηθεί ως "κανονικοποίηση" του ενδεχόμενου κώνου $T_K(x)$.

4.2-Εφαπτόμενοι κώνοι σε κυρτά σύνολα- Tangent Cones to Convex Sets

Για κυρτά υποσύνολα K, η κατάσταση απλοποιείται από το γεγονός ότι οι εφαπτόμενοι κώνοι Clarke και οι ενδεχόμενοι κώνοι συμπίπτουν με τον κλειστό κώνο που παράγεται από $K - x$:

Πρόταση 4.2.1 (Εφαπτόμενοι Κώνοι σε Κυρτά Σύνολα)

Ας υποθέσουμε ότι το K είναι κυρτό. Τότε, ο ενδεχόμενος κώνος $T_K(x)$ του K $\sigma\tau o$ x είναι κυρτός και

$$C_K(x) = T_K^b(x) = T_K(x) = \overline{S_K(x)}$$

Θα συμβολίζουμε με $T_K(x)$ την κοινή τιμή αυτών των κώνων και θα τον ονομάσουμε ο εφαπτόμενος κώνος του κυρτού υποσυνόλου K στο x.

Απόδειξη

Αφού μπορούμε να γράψουμε ότι για οποιαδήποτε $t \in [0, h]$

$$x + tv = \left(1 - \frac{t}{h}\right)x + \frac{t}{h}(x + hv)$$

το $x + tv$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός στοιχείων του K.

Σημειώνουμε λοιπόν την ακόλουθη συνέπεια της κυρτότητας:

$\forall v \in S_K(x), \exists h > 0$, έτσι ώστε $\forall t \in [0, h]$, $x + tv \in K$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $S_K(x)$ περιέχεται στο $C_K(x)$.

Θέτουμε $v := \frac{y-x}{h}$ $\in S_K(x)$ (όπου $y \in K$ και $h > 0$) και θεωρούμε ακολουθίες στοιχείων $h_n > 0$ και $x_n \in K$ συγκλίνουσες στο 0 και x αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι η ακολουθία $v_n := \frac{y-x_n}{h}$ συγκλίνει στο v και ότι

$$x_n + h_n v_n = \left(1 - \frac{h_n}{h}\right)x_n + \frac{h_n}{h} y \in K$$

δεδομένου ότι είναι ένας κυρτός συνδυασμός στοιχείων του K.

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε βασικές ιδιότητες εφαπτόμενων κώνων σε κυρτά σύνολα

Πίνακας 4.3: Ιδιότητες εφαπτόμενων κώνων σε κυρτά σύνολα.

(1) Εάν $x \in K \subset L \subset X$, τότε $T_K(x) \subset T_L(x)$ & $N_L(x) \subset N_K(x)$

(2) Εάν $x_i \in K_i \subset X_i$, $(i = 1, \dots, n)$, τότε

$$T_{\prod_{i=1}^n K_i(x_1,\dots,x_n)} = \prod_{i=1}^{n} T_{K_i}(x_i)$$

$$N_{\prod_{i=1}^n K_i(x_1,\dots,x_n)} = \prod_{i=1}^{n} N_{K_i}(x_i)$$

(3) Εάν $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $x \in K \subset X$, τότε

$$T_{A(K)}(Ax) = \overline{A(T_K(x))}$$
$$N_{A(K)}(Ax) = A^{\star^{-1}} N_K(x)$$

(4) Εάν $K_1, K_2 \subset X, x_i \in K_i, i = 1,2$, τότε

$$T_{K_1+K_2}(x_1 + x_2) = \overline{T_{K_1}(x_1) + T_{K_2}(x_2)}$$
$$N_{K_1+K_2}(x_1 + x_2) = N_{K_1}(x_1) \cap N_{K_2}(x_2)$$

Ιδιαίτερα, αν $x_1 \in K$ και x_2 ανήκει σε έναν υποχώρο P του X, τότε

$$T_{K+P}(x_1 + x_2) = \overline{T_{K_1}(x_1) + P}$$
$$N_{K+P}(x_1 + x_2) = N_K(x_1) \cap P^{\perp}$$

(5) Εάν $L \subset X$ και $M \subset Y$ είναι κλειστά κυρτά υποσύνολα και $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ έτσι ώστε $0 \in \text{Int}\,(M - A(L))$, τότε, για κάθε $x \in L \cap A^{-1}(M)$ ισχύει:

$$T_{L\cap A^{-1}(M)} = T_L(x) \cap A^{-1} T_M(Ax)$$

$$N_{L\cap A^{-1}(M)} = N_L(x) + A^* N_M(Ax)$$

(5) α) Αν $M \subset Y$ είναι κλειστό κυρτό και αν $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ τέτοιο ώστε $0 \in \text{Int}(\text{Im}\,(A) - M)$, τότε για κάθε $x \in A^{-1}(M)$ ισχύει:

$$T_{A^{-1}(M)}(x) = A^{-1} T_M(Ax)$$
$$N_{A^{-1}(M)}(x) = A^{\star} N_M(Ax)$$

(5)β) Εάν $K_1, K_2 \subset X$ είναι κλειστά κυρτά και $0 \in \text{Int}\,(K_1 - K_2)$, τότε για οποιαδήποτε $x \in K_1 \cap K_2$ ισχύει:

$$T_{K_1\cap K_2}(x) = T_{K_1}(x) \cap T_{K_2}(x)$$
$$N_{K_1\cap K_2}(x) = N_{K_1}(x) + N_{K_2}(x)$$

(5)γ) Αν $K_i \subset X$, $(i = 1, \dots, n)$, είναι κλειστά και κυρτά, $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ και αν υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x_i$ με $\|x_i\| \le \gamma$, $\bigcap_{i=1}^n (K_i - x_i) \neq \emptyset$, τότε

$$T_{\bigcap_{i=1}^{n} K_i}(x) = \bigcap_{i=1}^{n} T_{K_i}(x)$$

$$N_{\bigcap_{i=1}^{n} K_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_{K_i}(x)$$

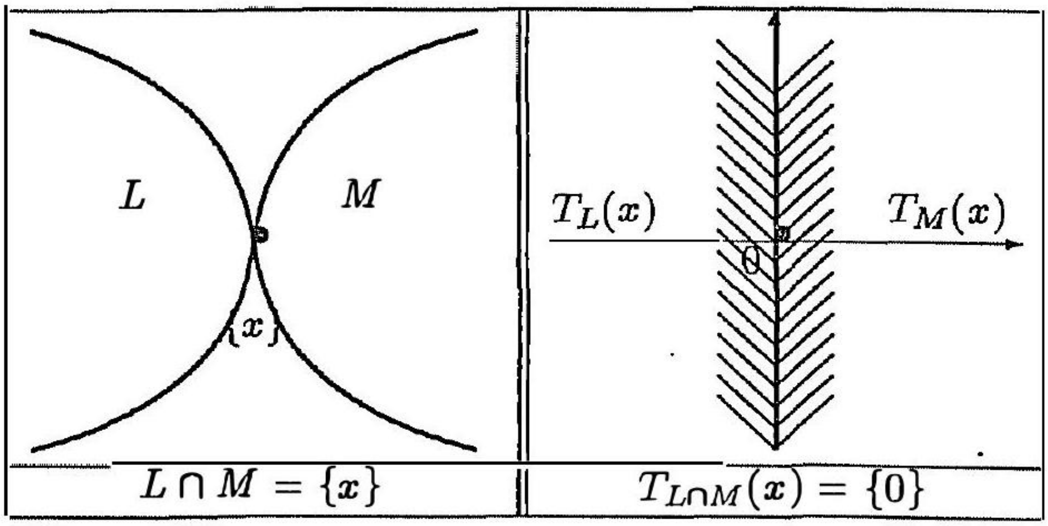
Παρατήρηση – Η ιδιότητα $T_{K_1 \cap K_2}(x) = T_{K_1}(x) \cap T_{K_2}(x)$

είναι ψευδής όταν $0 \notin \mathrm{Int}\,(K_1 - K_2)$. Για παράδειγμα θεωρούμε δύο σφαίρες K_1 και K_2 εφαπτόμενες σε ένα σημείο x. Ο εφαπτόμενος κώνος στην τομή $\{x\}$ είναι το $\{0\}$, ενώ η τομή των εφαπτόμενων κώνων είναι ένα υπερεπίπεδο. Αυτό δείχνει ότι δεν μπορούμε να απαλλαγούμε από τις υποθέσεις στον λογισμό των εφαπτόμενων κώνων σε αντίστροφες εικόνες και τομές.

Παρακάτω δίνεται σχετικό παράδειγμα:

Εικόνα 4.3: Αντιπαράδειγμα: Εφαπτόμενος κώνος στην τομή

Πηγή:**[1]** σελ.142



Εικόνα 4.3

Κεφάλαιο 5-Παράγωγος πλειότιμης συνάρτησης

Εισαγωγή

Ο Pierre de Fermat εισήγαγε στο πρώτο μισό του δέκατου έβδομου αιώνα την έννοια της εφαπτομένης στο γράφημα μιας συνάρτησης:

Ο εφαπτόμενος χώρος στο γράφημα μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο (x, y) του γραφήματός του είναι η ευθεία γραμμή με κλίση $f'(x)$, δηλαδή, το γράφημα της γραμμικής συνάρτησης $u \mapsto f'(x)u$.

Είναι δυνατή η υλοποίηση αυτής της ιδέας για οποιαδήποτε πλειότιμη απεικόνιση F δεδομένου ότι έχουμε εισαγάγει τις έννοιες της επαφής για οποιοδήποτε υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τον ενδεχόμενο κώνο στο γράφημα της πλειότιμης απεικόνισης F σε κάποιο σημείο (x, y) του γραφήματός του ως το γράφημα της σχετικής "ενδεχόμενης παραγώγου" της F σε αυτό το σημείο (x, y)

Δεδομένου ότι ο ενδεχόμενος κώνος είναι τουλάχιστον... ένας κώνος, η ενδεχόμενη παράγωγος είναι τουλάχιστον θετικά ομοιογενής (ή μια διαδικασία). Αυτό είναι που απομένει από τη γνωστή, αλλά πολυτελή, απαίτηση της γραμμικότητας.

Ωστόσο, όταν ο ενδεχόμενος κώνος τυχαίνει να είναι κυρτός (αυτό συμβαίνει όταν το γράφημα είναι λείο), η ενδεχόμενη παράγωγος είναι μια κλειστή κυρτή διαδικασία, δηλαδή το ανάλογο ενός συνεχούς γραμμικού τελεστή στο πλαίσιο των πλειότιμων απεικονίσεων

Με αυτόν τον διαφορικό λογισμό, είμαστε σε θέση να προσεγγίσουμε λύσεις για μια συμπερίληψη

$$F(x) \ni y$$

με λύσεις για κατά προσέγγιση συμπερίληψη

$$F_n(x_n) \ni y_n$$

προσαρμόζοντας την αρχή του Lax:

Η σύγκλιση των δεδομένων y_n προς y, η συνέπεια της F_n ως προς F και η ευστάθεια του F_n συνεπάγονται τη σύγκλιση ορισμένων λύσεων x_n στη λύση x.

Συνέπεια σημαίνει ότι (x, y) ανήκει στο κάτω όριο των γραφημάτων των απεικονίσεων F_n. Ευστάθεια σημαίνει εδώ ότι οι νόρμες των αντίστροφων εικόνων $DF_n(x_n, y_n)^{-1}$ είναι φραγμένες όταν τα ζεύγη (x_n, y_n) παίρνουν τιμές σε μια περιοχή του (x, y). Θα συμπεράνουμε ότι, αν η δεξιά πλευρά y_n συγκλίνει σε y, υπάρχουν κατά προσέγγιση λύσεις $x_n \in F^{-1}(y_n)$ που συγκλίνουν σε x, και θα παράσχουμε μια εκτίμηση σφάλματος.

Όταν οι απεικονίσεις $F_n = F$ είναι σταθερές, αυτή η αρχή συνοψίζεται στη πρόταση του *Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης*.

Θεωρούμε επίσης μια εφαρμογή στην Ποιοτική Ανάλυση, ένα πεδίο που ξεκίνησε στα μαθηματικά οικονομικά με το όνομα «συγκριτική στατική» και αναλήφθηκε από επιστήμονες υπολογιστών ως τομέας της Τεχνητής Νοημοσύνης. Για παράδειγμα, αν οι διανυσματικοί χώροι X και Y είναι πεπερασμένων διαστάσεων, μας ενδιαφέρει μόνο η δυνατότητα επίλυσης μιας εξίσωσης ή μιας συμπερίληψης $F(x) \ni y$ για καθορισμένα διανύσματα σημείων. Παρέχουμε ένα διπλό κριτήριο που μας επιτρέπει να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα.

5.1. Ενδεχόμενες παράγωγοι (Contingent Derivatives)

Επιστρέφοντας στην αρχική άποψη που πρότεινε ο Fermat, είμαστε σε θέση να ορίσουμε γεωμετρικά παράγωγους πλειότιμων απεικονίσεων από την επιλογή των εφαπτόμενων κώνων στα γραφήματα, παρόλο που δίνουν πολύ περίεργα όρια διαφορικών πηλίκων.

Ορισμός 5.1.1

Θεωρούμε χώρους με νόρμα X, Y και $F: X \multimap Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση

Η ενδεχόμενη παράγωγος $DF(x, y)$ της F στο $(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(F)$ είναι η πλειότιμη απεικόνιση από το X προς το Y που ορίζεται από

$$\mathrm{Graph}\,(DF(x, y)) := T_{\mathrm{Graph}\,(F)}(x, y)$$

Όταν η $F := f$ είναι μονότιμη , ορίζουμε $Df(x) := Df(x, f(x))$. Θα λέμε ότι η F είναι λεία στο$(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(F)$ εάν η απεικόνιση

$$\mathrm{Graph}\,(F) \ni (x', y') \multimap \mathrm{Graph}\,\big(DF(x', y')\big)$$

είναι κάτω ημισυνεχής στο (x, y) (δηλαδή, αν το γράφημα του F είναι λείο στο (x, y))

Η F λέγεται παραγωγίσιμη στο (x, y) αν το $\mathrm{Graph}\,(F)$ μπορεί να παραγωγιστεί σε εκείνο το σημείο.

Η πλειότιμη απεικόνιση F είναι λεία (αντίστοιχα παραγωγίσιμη) αν είναι λεία (αντίστοιχα παραγωγίσιμη) σε κάθε σημείο του γραφήματός της.

Τέλος, θα λέμε ότι η F είναι ψευδο-κυρτή στο $(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(F)$ εάν και μόνο εάν

$$\forall x' \in \mathrm{Dom}\,(F),\ F(x') \subset DF(x, y)(x' - x) + y$$

(δηλαδή, αν το γράφημά της είναι ψευδο-κυρτό στο (x, y)).

Φυσικά, η ενδεχόμενη παράγωγος είναι μια κλειστή κυρτή διαδικασία όταν η F είναι λεία στο (x, y).

Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την παράγωγο της αντίστροφης μιας πλειότιμης απεικόνισης F (ή ακόμα και μιας μη αμφιμονότιμης μονότιμης απεικόνισης): Η ενδεχόμενη παράγωγος της αντίστροφης μιας πλειότιμης απεικόνισης F είναι η αντίστροφη της ενδεχόμενης παραγώγου:

$$D(F^{-1})(y,x) = DF(x,y)^{-1}$$

Ο περιορισμός $F := f|_K$ μιας μονότιμης απεικόνισης f σε ένα υποσύνολο $K \subset X$ παρέχει ένα παράδειγμα πλειότιμης απεικόνισης που ορίζεται από

$$f|_K(x) := \begin{cases} f(x) & \alpha\nu \quad x \in K \\ \emptyset & \alpha\nu \quad x \notin K \end{cases}$$

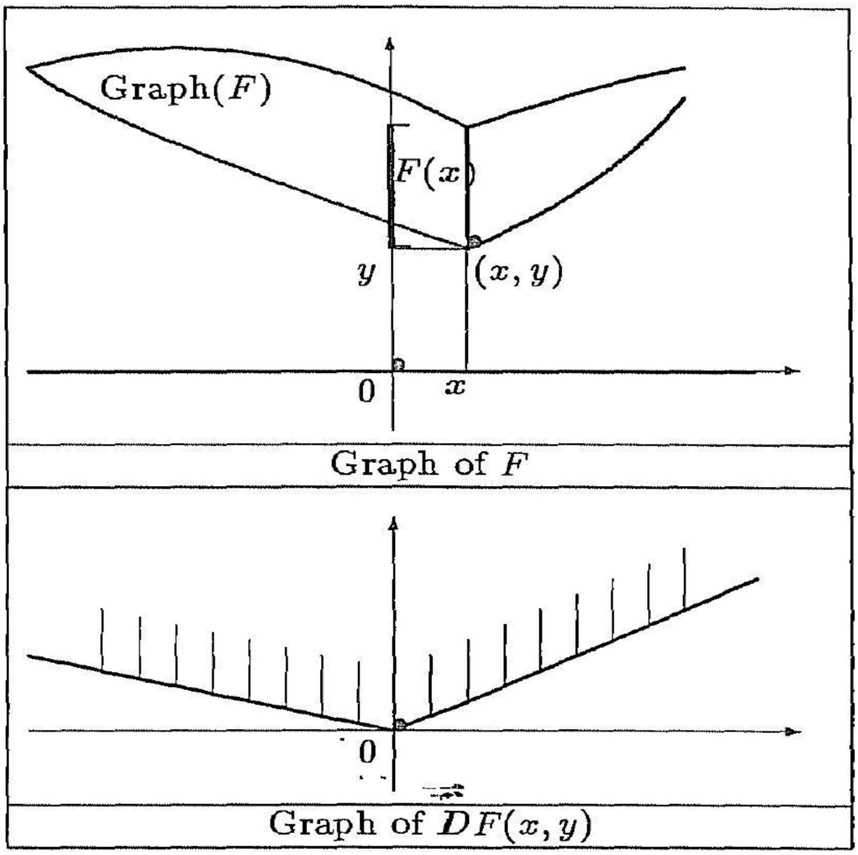
για την οποία λαμβάνουμε τον ακόλουθο τύπο:

Αν f είναι Fréchet διαφορίσιμη γύρω από ένα σημείο $x \in K$, τότε η ενδεχόμενη παράγωγος του περιορισμού της f στο K είναι ο περιορισμός της παραγώγου στον ενδεχόμενο κώνο:

$$D(f|_K)(x) = D(f|_K)(x, f(x)) = f'(x)|_{T_K(x)}$$

Στην πραγματικότητα, αυτό προκύπτει από το επόμενο χρήσιμο σχήμα:

Σχήμα 5.1: Γράφημα της Ενδεχόμενης Παραγώγου



Πρόταση 5.1.2

Έστω X και Y χώροι με νόρμα , f μια μονότιμη απεικόνιση από ένα ανοιχτό υποσύνολο $\Omega \subset X$ προς Y, $M: X \multimap Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση .Ορίζουμε την πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ ως εξής :

$$\forall x \in X,\ F(x) := f(x) - M(x)$$

Αν η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x \in \Omega \cap \text{Dom}\,(M)$, τότε για κάθε $y \in F(x)$ ισχύει:

$$DF(x,y)(u) = f'(x)u - DM(x, f(x) - y)(u)$$

Απόδειξη

Έστω ότι $v \in DF(x,y)(u)$. Τότε υπάρχουν $h_n > 0$ που συγκλίνουν στο 0 και ακολουθίες u_n και v_n συγκλίνουσες σε u και v αντίστοιχα έτσι ώστε για κάθε n

$$y + h_n v_n \in f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n)$$

Επειδή

$$f(x + h_n u_n) = f(x) + h_n\big(f'(x)u + \varepsilon(h_n)\big)$$

όπου $\varepsilon(h_n)$ συγκλίνει στο 0 μαζί με το h_n παίρνουμε

$$f(x) - y + h_n\big(f'(x)u - v_n + \varepsilon(h_n)\big) \in M(x + h_n u_n)$$

και έτσι $f'(x)u - v \in DM(x, f(x) - y)(u)$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι το $f'(x)u - v$ ανήκει στο $DM(x, f(x) - y)(u)$. Τότε , υπάρχει μια ακολουθία $h_n > 0$ που συγκλίνει προς το 0 και ακολουθίες u_n και w_n συγκλίνουσες σε u και $f'(x)u - v$ έτσι ώστε

$$f(x) - y + h_n w_n \in M(x + h_n u_n)$$

Κατά συνέπεια , για μερικούς $\varepsilon(h_n) \to 0$, η ακολουθία $v_n := f'(x)u + \varepsilon(h_n) - w_n$ συγκλίνει στο v και

$$y + h_n v_n \in f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n)$$

Όταν προσθέτουμε "περιορισμούς κατάστασης" L, αυτό το αποτέλεσμα γίνεται:

Πρόταση 5.1.3

Έστω X και Y χώροι με νόρμα, $f: \Omega \mapsto Y$ να είναι μια μονότιμη απεικόνιση, όπου το $\Omega \subset X$ είναι ανοιχτό, $M: X \multimap Y$ να είναι μια πλειότιμη απεικόνιση και $L \subset X$. Ορίζουμε την πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ ως εξής:

$$F(x) := \begin{cases} f(x) - M(x) & \text{όταν } x \in L \\ \emptyset & \text{όταν } x \notin L \end{cases}$$

Αν η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x \in \Omega \cap \text{Dom}\,(F)$, τότε για κάθε $y \in F(x)$

$$DF(x,y)(u) \subset \begin{cases} f'(x)u - DM(x, f(x) - y)(u) & \text{όταν } u \in T_L(x) \\ \emptyset & \text{όταν } u \notin T_L(x) \end{cases}$$

Η ισότητα ισχύει όταν υποθέτουμε ότι L ή M είναι διαφορίσιμη στο x και η M είναι *Lipschitz* στο x.

Ειδικότερα, εάν η M είναι σταθερή, τότε

$$\forall u \in T_L(x),\ DF(x,y)(u) = f'(x)u - T_M(f(x)-y)$$

Παρατήρηση - Οι δύο παραπάνω προτάσεις παραμένουν αληθείς εάν f είναι τοπικά *Lipschitz* και Gâteaux διαφορίσιμη.

Υπενθυμίζουμε ότι:

Ας υποθέσουμε ότι X και Y είναι τοπικά κυρτοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (για παράδειγμα, χώροι Banach), $U \subseteq X$ είναι ανοιχτό και $F\colon X \to Y$. Το διαφορικό Gâteaux *$dF(u;\psi)$ της F στο $u \in U$ κατά την κατεύθυνση $\psi \in X$ ορίζεται ως*

$$dF(u;\psi) = \lim_{\tau\to 0}\frac{F(u+\tau\psi)-F(u)}{\tau} = \frac{d}{d\tau}F(u+\tau\psi)\Big|_{\tau=0}$$

Αν το όριο υπάρχει για κάθε $\psi \in X$, τότε η F είναι Gateaux διαφορίσιμη στο u.

Απόδειξη

Έστω $v \in DF(x,y)(u)$. Τότε υπάρχουν $h_n > 0$ που συγκλίνουν στο 0 και ακολουθίες u_n και v_n συγκλίνουσες σε u και v αντίστοιχα έτσι ώστε για κάθε n να ισχύουν

$$x + h_n u_n \in L \quad \& \quad y + h_n v_n \in f(x+h_n u_n) - M(x+h_n u_n)$$

Αυτό σημαίνει ότι το u ανήκει στο $T_L(x)$. Αφού μπορούμε να γράψουμε

$$f(x+h_n u_n) = f(x) + h_n\big(f'(x)u + \varepsilon(h_n)\big)$$

οπού $\varepsilon(h_n)$ συγκλίνει στο 0 με το h_n, παίρνουμε

$$f(x) - y + h_n\big(f'(x)u - v_n + \varepsilon(h_n)\big) \in M(x+h_n u_n)$$

και έτσι $f'(x)u - v \in DM(x, f(x)-y)(u)$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η M είναι παραγωγίσιμη , ότι το u ανήκει στο $T_L(x)$ και ότι $f'(x)u - v \in DM(x, f(x)-y)(u)$.

Επομένως, υπάρχει μια ακολουθία $h_n > 0$ με $h_n \to 0$ και ακολουθίες $u_n, \bar{u}_n$ και w_n συγκλίνουσες σε u, u και $f'(x)u - v$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $x + h_n u_n \in L$ και $f(x) - y + h_n w_n \in M(x + h_n \bar{u}_n)$. Επειδή M είναι *Lipschitz* στο x υπάρχει μια ακολουθία $\bar{w}_n$ συγκλίνουσα σε $f'(x)u - v$ έτσι ώστε

$$\forall n \geq 1,\ f(x) - y + h_n \bar{w}_n \in M(x + h_n u_n)$$

κατά συνέπεια , για κάποια $\varepsilon(h_n) \to 0$, η ακολουθία $v_n := f'(x)u + \varepsilon(h_n) - \bar{w}_n$ συγκλίνει στο v και ισχύει $y + h_n v_n \in f(x + h_n u_n) - M(x + h_n u_n)$ □

Στη συνέχεια στόχος μας είναι να χαρακτηρίσουμε τις ενδεχόμενες παραγώγους με επαρκή όρια διαφορικών πηλίκων.

Η ενδεχόμενη παράγωγος προς την κατεύθυνση u είναι το ανώτατο όριο των διαφορικών πηλίκων

$$DF(x,y)(u) = \mathrm{Limsup}_{h\to 0+,u'\to u} \frac{F(x+hu')-y}{h}$$

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.1.4

Έστω X και Y χώροι με νόρμα, $F: X \multimap Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση και $(x,y) \in \mathrm{Graph}\,(F)$. Τότε

$$v \in DF(x,y)(u) \Leftrightarrow \lim\inf_{h\to 0+,u'\to u} d\left(v, \frac{F(x+hu')-y}{h}\right) = 0$$

Αν $x \in \mathrm{Int}\,(\mathrm{Dom}\,(F))$ και F είναι *Lipschitz στο* xτότε

$$v \in DF(x,y)(u) \Leftrightarrow \liminf_{h\to 0+} d\left(v, \frac{F(x+hu)-y}{h}\right) = 0$$

Αν επιπλέον η διάσταση του Y είναι πεπερασμένη και l δηλώνει τη σταθερά Lipschitz της F στο x τότε

$$\mathrm{Dom}\big(DF(x,y)\big) = X \quad \text{και η} \quad DF(x,y) \quad \text{είναι} \quad l - \mathrm{Lipschitz}$$

Απόδειξη

Οι δύο πρώτες προτάσεις είναι προφανείς.

Αποδεικνύουμε την τελευταία.

Έστω $u \in X$ και l η σταθερά Lipschitz της F σε μια περιοχή του x. Τότε, για κάθε $h > 0$ αρκετά μικρό και $y \in F(x)$ ισχύει ότι

$$y \cdot\in F(x) \subset F(x+hu) + l\,h \parallel u \parallel B$$

Άρα, υπάρχει $y_h \in F(x+hu)$ έτσι ώστε $v_h := \frac{(y_h - y)}{h} \in l \parallel u \parallel B$, το οποίο είναι συμπαγές. Επομένως η ακολουθία v_h έχει ένα σημείο συσσώρευσης $v \in DF(x,y)(u)$.

Θεωρούμε $u_1, u_2 \in X$ και $v_1 \in DF(x,y)(u_1)$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $v_2 \in DF(x,y)(u_2)$ έτσι ώστε $\|v_1 - v_2\| \le l\|u_1 - u_2\|$.

Θεωρώ $h_n \to 0^+$ και $v_{1n} \to v_1$ έτσι ώστε $y + h_n v_{1n} \in F(x + h_n u_1)$ και $z_n \in F(x + h_n u_2)$ να είναι τέτοια ώστε για όλα τα μεγάλα n,

$$\|z_n - y - h_n v_{1n}\| \le l h_n \|u_1 - u_2\|$$

(υπάρχουν από την Lipschitz - συνέχεια της F στο x.) Λαμβάνοντας μια υπακολουθία και διατηρώντας τους ίδιους συμβολισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η φραγμένη ακολουθία $\frac{z_n-y}{h_n}$ συγκλίνει σε κάποιο $v_2 \in DF(x,y)(u_2)$.

Τότε όμως είναι σαφές ότι $\|v_1 - v_2\| \leq l\|u_1 - u_2\|$ και η πρόταση απεδείχθη □

Παρατήρηση 1. –Πεδίο ορισμού της Παραγώγου

Είναι πολύ χρήσιμο να συσχετιστούν οι εφαπτόμενοι κώνοι στο πεδίο ορισμού μιας πλειότιμης απεικόνισης με το πεδίο ορισμού της παραγώγου της.

Πάντα έχουμε

$$\overline{\mathrm{Dom}\,(DF(x,y))} \subset T_{\mathrm{Dom}\,(F)}(x)$$

Αν F είναι ψευδο-κυρτή σε $(x,y) \in \mathrm{Graph}\,(F)$, (και ιδίως, εάν η F είναι κυρτή), τότε η ισότητα

$$\overline{\mathrm{Dom}\,(DF(x,y))} = T_{\mathrm{Dom}\,(F)}(x)$$

ισχύει, γιατί

$$\mathrm{Dom}\,(F) = \pi_X \mathrm{Graph}\,(F)$$

οπού π_X είναι η προβολή από $X \times Y$ στο X. Συμπεραίνουμε λοιπόν από την *Πρόταση 4.2.9* ότι
$$\begin{cases} \overline{\mathrm{Dom}\,(DF(x,y))} = \overline{\pi_X \mathrm{Graph}\,(DF(x,y))} \\ = \overline{\pi_X T_{\mathrm{Graph}\,(F)}(x,y)} = T_{\pi_X(\mathrm{Graph}\,(F))}(x) = T_{\mathrm{Dom}\,(F)}(x) \end{cases}$$ □

Παρατήρηση 2.- Πυρήνας της Ενδεχόμενης Παραγώγου

Ο πυρήνας της ενδεχόμενης παραγώγου σχετίζεται με τον ενδεχόμενο κώνο με την αντίστροφη εικόνα:

$$T_{F^{-1}(y)}(x) \subset \ker\, DF(x,y) := DF(x,y)^{-1}(0)$$

Η ισότητα ισχύει σε αυτόν τον τύπο όταν η F^{-1} είναι ψευδο- Lipschitz γύρω από το (y,x)
Για να αποδείξουμε την αντίστροφη συμπερίληψη, θεωρούμε u να ανήκει στον πυρήνα του $DF(x,y)$. Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $h_n > 0$ με $h_n \to 0$, u_n και v_n που συγκλίνουν αντίστοιχα σε u και 0 τέτοιες ώστε

$$\forall n\,,\, y + h_n v_n \in F(x + h_n u_n)$$

Επειδή η F^{-1} είναι ψευδο- Lipschitz γύρω από το (y,x), υπάρχουν $l > 0$ και ένα στοιχείο $x_n^1 \in F^{-1}(y)$ έτσι ώστε

$$\|x_n^1 - (x + h_n u_n)\| \leq l\|y - (y + h_n v_n)\| = l h_n \|v_n\|$$

Τότε, θέτοντας $u_n^1 := (x_n^1 - x)/h_n$, βλέπουμε ότι

$$x + h_n u_n^1 = x_n^1 \in F^{-1}(y)$$

και ότι η u_n^1 συγκλίνει σε u επειδή $\|u_n^1 - u_n\| \leq l\|v_n\|$ και επειδή $v_n \to 0$.Άρα, αποδείξαμε ότι το u ανήκει στον ενδεχόμενο κώνο της $F^{-1}(y)$ στο x.□

Ορισμός 5.1.5 Κάτω ημισυνεχής διαφορισιμότητα.(Lower Semicontinuous Differentiability)

Θεωρούμε χώρους με νόρμα X, Y και $F: X \multimap Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση Λέμε ότι η F είναι κάτω ημισυνεχώς διαφορίσιμη στο $(x, y) \in Graph(F)$ Εάν η πλειότιμη απεικόνιση

$$(x, y, u) \in \text{Graph } (F) \times X \multimap \text{DF } (x, y)(u)$$

είναι κάτω ημισυνεχής.

Η παραπάνω πρόταση υπονοεί ότι η F είναι λεία στο (x_0, y_0). Το αντίστροφο χρειάζεται περαιτέρω παραδοχές. Αντλούμε για παράδειγμα από το *Θεώρημα "Διασταυρούμενης Σύγκλισης"* το ακόλουθο κριτήριο:

Πρόταση 5.1.6

Ας υποθέσουμε ότι X και Y είναι χώροι Banach και ότι η F είναι λεία σε κάποια περιοχή $\mathcal{U}$ του $(x_0, y_0) \in$ Graph (F). Εάν ισχύει η ανισότητα

$$\forall u \in X, \quad \sup_{(x,y) \in \mathcal{U} \cap Graph(F)} \quad \inf_{v \in DF(x,y)(u)} \| v \| < +\infty$$

τότε, η πλειότιμη απεικόνιση

$$(x, y, u) \in \text{Graph } (F) \times X \multimap DF(x, y)(u)$$

είναι κάτω ημισυνεχής στο $(\mathcal{U} \cap \text{Graph } (F)) \times X$.

5.2. Παρακείμενες και κυκλικές παράγωγοι (Adjacent and Circatangent Derivatives)

5.2.1. Ορισμοί και στοιχειώδεις ιδιότητες

Μπορούμε επίσης να συσχετίσουμε με οποιαδήποτε άλλη έννοια εφαπτόμενου κώνου μια έννοια παραγώγου. Δεδομένου ότι οδηγηθήκαμε στην εισαγωγή του Clarke και των παρακείμενων (ή ενδιάμεσων) εφαπτόμενων κώνων, μπορούμε να εισαγάγουμε δύο ακόμη γραφικές παραγώγους:

Ορισμός 5.2.1

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $F: X \multimap Y$ μια πλειότιμη απεικόνιση και $y \in F(x)$.

1. η παρακείμενη παράγωγος $D^b F(x, y)$ είναι η πλειότιμη απεικόνιση από το X προς Y που ορίζεται από την ισότητα:

$$\text{Graph } (D^b F(x, y)) := T^b_{\text{Graph } (F)}(x, y)$$

2. η κυκλική παράγωγος $CF(x,y)$ είναι η πλειότιμη απεικόνιση από το X προς Y που ορίζεται από την ισότητα:

$$\text{Graph }(CF(x,y)) := C_{\text{Graph }(F)}(x,y)$$

Όταν $F := f$ είναι μονότιμη, ορίζουμε

$$D^b f(x) := D^b f\big(x, f(x)\big), \qquad \text{και} \qquad Cf(x) := Cf(x, f(x))$$

Βλέπουμε αμέσως ότι αυτές οι γραφικές παράγωγοι είναι κλειστές διαδικασίες, και ότι

$$\forall u, CF(x,y)(u) \subset D^b F(x,y)(u) \subset DF(x,y)(u)$$

Όταν η f είναι μονότιμη, παρατηρούμε ότι οι κυκλικές και παρακείμενες παράγωγοι $Cf(x)(u)$ και $D^b f(x)(u)$ είναι είτε κενά είτε περιέχουν μόνο ένα στοιχείο. Ιδιαίτερα

i)$D^b f(x)(u) = f^{'}(x)u$ αν η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο x

ii) $Cf(x)(u) = f^{'}(x)u$ αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο x

Φυσικά, η κυκλική παράγωγος είναι πάντα μια κλειστή κυρτή διαδικασία.

Όσον αφορά την ενδεχόμενη παράγωγο, μια γραφική παράγωγος της αντίστροφης μιας πλειότιμης απεικόνισης F είναι η αντίστροφη της παραγώγου δηλαδή έχουμε:

$$\begin{cases} \text{i)} D^\flat(F^{-1})(y,x) = D^\flat F(x,y)^{-1} \\ \text{ii)} C(F^{-1})(y,x) = CF(x,y)^{-1} \end{cases}$$

Αν K είναι ένα υποσύνολο του X και $f: X \mapsto Y$ είναι μια μονότιμη απεικόνιση με συνεχή παράγωγο γύρω από ένα σημείο $x \in K$, τότε η παράγωγος του περιορισμού είναι ο περιορισμός της παραγώγου στον αντίστοιχο εφαπτόμενο κώνο:

$$\begin{cases} \text{i)} D^\flat(f|_K)(x) := D^\flat(f|_K)(x, f(x)) = f'(x)|_{T_K^\flat(x)} \\ \text{ii)} C(f|_K)(x) := C(f|_K)(x, f(x)) = f'(x)|_{C_K(x)} \end{cases}$$

Στην πραγματικότητα, αυτοί οι τύποι προκύπτουν από την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.2.2

Θεωρούμε τους χώρους με νόρμα X, Y, μια μονότιμη απεικόνιση f από ένα ανοιχτό υποσύνολο $\Omega \subset X$ προς το Y και μια πλειότιμη απεικόνιση $M : X \multimap Y$. Ορίζουμε τη πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ ως εξής:

$$\forall x \in X,\ F(x) := f(x) - M(x)$$

Αν η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x \in \Omega \cap \text{Dom }(M)$, τότε για κάθε $y \in F(x)$

$$D^b F(x,y)(u) = f'(x)u - D^b M(x, f(x) - y)(u)$$

και αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο x τότε

$$CF(x,y)(u) = f'(x)u - CM(x, f(x) - y)(u)$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνη της Πρότασης 5.1.2 και παραλείπεται.

Πρόταση 5.2.3

Έστω X και Y είναι χώροι με νόρμα, f μια μονότιμη απεικόνιση από ένα ανοιχτό υποσύνολο $\Omega \subset X$ προς το $Y, M: X \multimap Y$ να είναι μια πλειότιμη απεικόνισηκαι $L \subset X$. Θεωρούμε την πλειότιμη απεικόνιση $F: X \multimap Y$ που ορίζεται από:

$$F(x) := \begin{cases} f(x) - M(x) & \text{όταν } x \in L \\ \emptyset & \text{όταν } x \notin L \end{cases}$$

Αν η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο $x \in \Omega \cap \mathrm{Dom}\,(F)$ και η M είναι Lipschitz στο x, τότε για κάθε $y \in F(x)$ η παρακείμενη παράγωγος του F στο (x, y) ισούται με

$$\mathrm{D^b F(x,y)(u)} = \begin{cases} \mathrm{f'(x)u - D^b M(x, f(x) - y)(u)} & \text{όταν } \mathrm{u \in T_L^b(x)} \\ \emptyset \quad \text{όταν } \mathrm{u \notin T_L^b(x)} \end{cases}$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για μια απεικόνιση f συνεχώς διαφοροποιήσιμη στο x, τις κυκλικές παραγώγους των F και M και τον εφαπτόμενο κώνο Clarke στο L.

Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτή της *Πρότασης 5.1.3* και οι ισότητες αυτές παραμένουν αληθείς όταν η f είναι Lipschitz στο x και Gâteaux διαφορίσιμη.

Κεφάλαιο 6

Επιπαράγωγοι εκτεταμένων συναρτήσεων (Epiderivatives of Extended Functions)

6.1. Ενδεχόμενες επιπαράγωγοι(Contingent Epiderivatives)

6.1.1.Εκτεταμένες (extended) συναρτήσεις και τα επιγραφήματά τους

Ας θεωρήσουμε μια εκτεταμένη συνάρτηση $V: X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ της οποίας το πεδίο ορισμού

$$\mathrm{Dom}\,(V) := \{x \in X \mid V(x) \neq \pm\infty\}$$

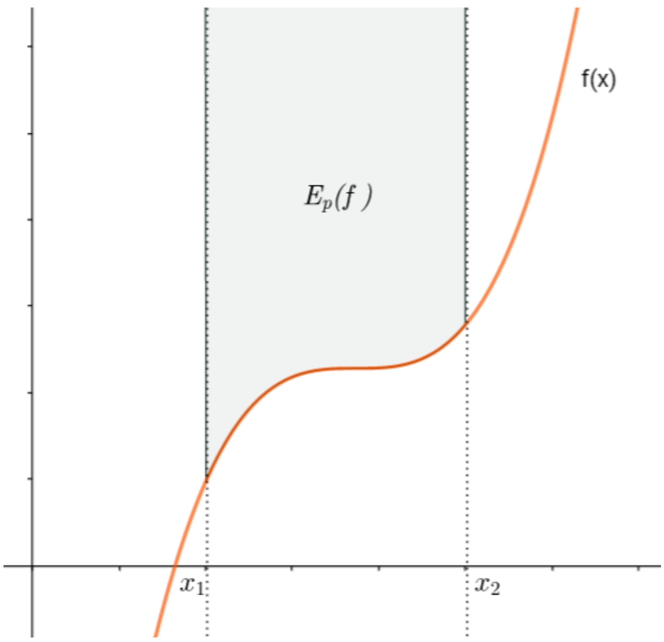
είναι μη κενό. Μια τέτοια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι μη τετριμμένη.

Οποιαδήποτε συνάρτηση V που ορίζεται σε ένα υποσύνολο $K \subset X$ μπορεί να θεωρηθεί ως η εκτεταμένη συνάρτηση V_K ίση με τη V στο K και το $+\infty$, για τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο K και της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το K.

Μια εκτεταμένη συνάρτηση χαρακτηρίζεται από το επιγράφημα (epigraph) της που ορίζεται ως

$$\mathcal{E}p(V) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbf{R} \mid V(x) \leq \lambda\}$$

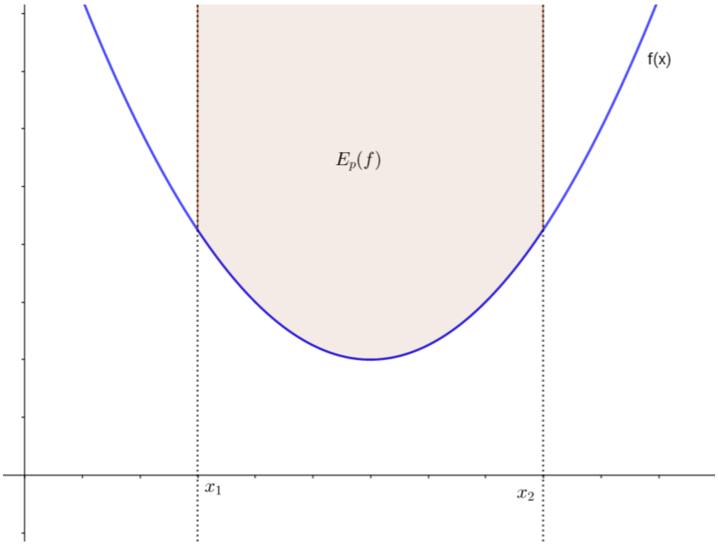
Επιγράφημα



Σχήμα 6.1

Μια εκτεταμένη συνάρτηση V είναι κυρτή (αντίστοιχα θετικά ομοιογενής) αν και μόνο αν η επιγράφημα της είναι κυρτό (αντίστοιχα κώνος).

Επιγράφημα κυρτής

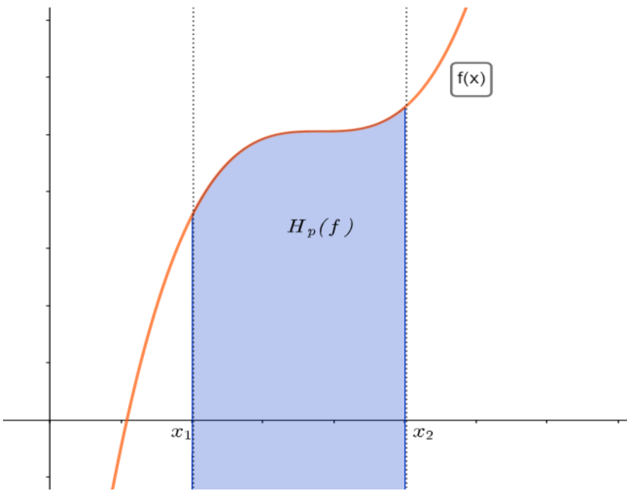


Σχήμα 6.2

Παρατηρούμε επίσης ότι οποιαδήποτε θετικά ομοιογενής εκτεταμένη συνάρτηση είναι μη τετριμμένη όταν $V(0) \neq -\infty$. Σε αυτή την περίπτωση, $V(0) = 0$.

Το υπογράφημα (hypograph) μιας $W: X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ συνάρτησης ορίζεται με συμμετρικό τρόπο:

Υπογράφημα



Σχήμα 6.3

$$\mathcal{H}p(W) := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbf{R} \mid W(x) \geq \lambda\} = -\mathcal{E}p(-W)$$

Μια τέτοια συνάρτηση W είναι κοίλη αν και μόνο αν η $-W$ είναι κυρτή, δηλαδή, αν και μόνο αν το υπογράφημά της είναι κυρτό.

Τα κύρια παραδείγματα εκτεταμένων συναρτήσεων είναι οι δείκτες ψ_K υποσυνόλων K που ορίζονται από $\psi_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in K \\ +\infty & \text{αν } x \notin K \end{cases}$

Ο δείκτης ψ_K είναι κάτω ημισυνεχής εάν και μόνο εάν το K είναι κλειστό και είναι κυρτός εάν και μόνο εάν το K είναι κυρτό. Κάποιος μπορεί να θεωρήσει το άθροισμα $V + \psi_K$ ως τον περιορισμό του V στο K

Υπενθυμίζουμε τη σύμβαση $\inf(\emptyset) := +\infty$.

Λήμμα 6.1.1

Θεωρούμε μια συνάρτηση $\delta: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Η επιγράφημα της είναι κλειστό αν και μόνο αν

$$\forall v \in X,\ \delta(v) = \liminf_{v' \to v} \delta(v')$$

Ας υποθέσουμε ότι το επιγράφημα του δ είναι ένας κλειστός κώνος. Τότε, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

$$\begin{cases} i) & \forall v \in X,\ \delta(v) > -\infty \\ ii) & \delta(0) = 0 \\ iii) & (0, -1) \notin \mathcal{E}p(\delta) \end{cases}$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το επιγράφημα του δ είναι κλειστό και επιλέγουμε $v \in X$. Υπάρχει μια ακολουθία στοιχείωνv_n που συγκλίνουν στο v τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to \infty} \delta(v_n) = \liminf_{v' \to v} \delta(v')$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε $\lambda > \liminf_{v' \to v} \delta(v')$, υπάρχει N τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq N$, $\delta(v_n) \leq \lambda$, δηλαδή, τέτοια ώστε $(v_n, \lambda) \in \mathcal{E}p(\delta)$. Λαμβάνοντας το όριο, συμπεραίνουμε ότι $\delta(v) \leq \lambda$, και έτσι, ότι $\delta(v) \leq \liminf_{v' \to v} \delta(v')$. Η αντίστροφη πρόταση είναι προφανής.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι η επιγράφημα του δ είναι κώνος. Τότε αυτό περιέχει το (0,0) και $\delta(0) \leq 0$. Οι προτάσεις ii) και iii) είναι σαφώς ισοδύναμες.

Αν το i) ισχύει και $\delta(0) < 0$, τότε το

$$(0, -1) = \frac{1}{-\delta(0)}(0, \delta(0))$$

ανήκει στην επιγράφημα του δ, όπως και όλα τα $(0, -\lambda)$, και (θεωρώντας ότι $\lambda \to +\infty$) συμπεραίνουμε ότι $\delta(0) = -\infty$,άτοπο οπότε i) συνεπάγεται ii).

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\delta(0) = 0$ και ότι για μερικούς v, $\delta(v) = -\infty$. Τότε , για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, το ζεύγος $(v, \frac{-1}{\varepsilon})$ ανήκει στο επιγράφημα του δ, καθώς και τα ζεύγη

$(\varepsilon v, -1)$: Θεωρώντας ότι $\varepsilon \to 0$, συμπεραίνουμε ότι το $(0, -1)$ ανήκει και στο επιγράφημα, αφού είναι κλειστό. Άρα $\delta(0) < 0$,άτοπο.□

6.1.2. Ενδεχόμενες επιπαράγωγοι- Contingent Epiderivatives

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε μια εκτεταμένη συνάρτηση V ως την πλειότιμη απεικόνιση $\mathrm{V}: X \multimap \mathbf{R}$ που ορίζεται από

$$\mathrm{V}(x) := \begin{cases} V(x) & \text{αν } x \in \mathrm{Dom}\,(V) \\ \emptyset & \text{αν } x \notin \mathrm{Dom}\,(V) \end{cases}$$

έτσι ώστε να μπορούμε να ορίσουμε με τον συνήθη τρόπο τις ενδεχόμενες παραγώγους της V στο $x \in \mathrm{Dom}$ (V)

$$\begin{cases} D\mathbf{V}(x)(u) := D\mathbf{V}(x, V(x))(u) \\ = \left\{ v \middle| \liminf_{h \to 0+, u' \to u} \dfrac{|V(x + hu') - V(x) - hv\,|}{h} = 0 \right\} \end{cases}$$

Ωστόσο, τα προβλήματα ελαχιστοποίησης και οι συναρτήσεις Lyapunov περιλαμβάνουν προφανώς τη σχέση διάταξης στο **R**. Κατά συνέπεια, όταν αντιμετωπίζουμε τέτοια προβλήματα, είναι βολικό να εξετάσουμε δύο νέες πλειότιμες απεικονίσεις $\mathbf{V}_\uparrow$ και $V_\downarrow$ οι οποίες ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$V_\uparrow(x) := \begin{Bmatrix} V(x) + \mathbf{R}_+ & \alpha\nu & x \in Dom(V) \\ \emptyset & \alpha\nu & V(x) = +\infty \\ \mathbf{R} & \alpha\nu & V(x) = -\infty \end{Bmatrix}$$

$$V_\downarrow(x) := \begin{Bmatrix} V(x) - \mathbf{R}_+ & \alpha\nu & x \in Dom(V) \\ \emptyset & \alpha\nu & V(x) = -\infty \\ \mathbf{R} & \alpha\nu & V(x) = +\infty \end{Bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Graph}(\mathbf{V}_\uparrow) = \mathcal{E}p(V) \qquad \& \qquad \mathrm{Graph}\,(\mathbf{V}_\downarrow) = \mathcal{H}p(V)$$

Κατά συνέπεια, οδηγούμαστε φυσικά να συσχετιστούμε με αυτές τις δύο πλειότιμες απεικονίσεις $\mathbf{V}_\uparrow$ και $\mathbf{V}_\downarrow$ τις ενδεχόμενες παραγώγους τους. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{Bmatrix} \forall \lambda \geq V(x), \forall u \in \mathrm{Dom}\big(D\mathbf{V}_\uparrow(x, \lambda)\big) \\ D\mathbf{V}_\uparrow(x, \lambda)(u) = D\mathbf{V}_\uparrow(x, \lambda)(u) + \mathbf{R}_+ \end{Bmatrix}$$

Ορισμός 6.1.2

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $D_\uparrow V(x)$ από το X στο $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ που ορίζεται από

$$\forall u \in X, D_{\uparrow}V(x)(u) := inf\{v \mid v \in D\mathbf{V}_{\uparrow}(x, V(x))(u)\}$$

είναι η ενδεχόμενη επιπαράγωγος(***contingent epiderivative***)του V στο x ως προς την κατεύθυνση u.

Η συνάρτηση V λέγεται ότι είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμη**(contingent epiderivative)** στο x αν η ενδεχόμενη επιπαράγωγος της δεν παίρνει ποτέ την τιμή $-\infty$.

Λέγεται ότι είναι επι-λεία (**episleek**) $(\sigma\tau o\ x)$ αν το επιγράφημα του είναι λείο (στο $(x, V(x))$).

Στην πραγματικότητα, η ενδεχόμενη παράγωγος μπορεί να χαρακτηριστεί ως όριο διαφορικών πηλίκων:

Πρόταση 6.1.3

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x ανήκει στον πεδίο ορισμού της. Τότε

$$D_{\uparrow}V(x)(u) = \liminf_{h \to 0+, u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h}$$

Η συνάρτηση V είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμη στο x εάν και μόνο εάν $D_{\uparrow}V(x)(0) = 0$

Απόδειξη

Υποθέτουμε πρώτα ότι $D_{\uparrow}V(x)(u) < +\infty$. Από τον ορισμό της ενδεχόμενης επιπαράγωγου, για οποιοδήποτε $\lambda > D_{\uparrow}V(x)(u)$, υπάρχει κάποιο $v \in D\mathbf{V}_{\uparrow}(x, V(x))(u)$ μικρότερο από το λ. Επομένως, μπορούμε να συσχετίσουμε με οποιαδήποτε $\varepsilon > 0$ στοιχεία $h \in]0, \varepsilon[$ και $(u', v') \in B((u, v), \varepsilon)$ τέτοια ώστε $V(x) + hv' \geq V(x + hu')$. Έτσι

$$\frac{V(x + hu') - V(x)}{h} \leq \lambda + \varepsilon$$

Κατά συνέπεια, το liminf των διαφορικών πηλίκων $\frac{V(x+hu')-V(x)}{h}$ είναι μικρότερο ή ίσο με $D_{\uparrow}V(x)(u)$. Αντιστρόφως, έστω $h_n > 0$ που συγκλίνει στο 0, u_n που συγκλίνει στο u και $\lambda_n \geq V(x + h_n u_n)$ να είναι τέτοια ώστε τα διαφορικά πηλίκα

$$v_n := \frac{\lambda_n - V(x)}{h_n}$$

να συγκλίνουν στο

$$v := \liminf_{h \to 0+, u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h}$$

Τότε, τα ζεύγη $(x + h_n u_n, V(x) + h_n v_n)$ ανήκουν στο γράφημα του $\mathbf{V}_{\uparrow}$, έτσι ώστε $v \in D\mathbf{V}_{\uparrow}(x)(u)$. Έτσι

$$\liminf_{h \to 0+, u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h} \geq D_{\uparrow}V(x)(u)$$

Εξετάζουμε στη συνέχεια την περίπτωση όταν $D_\uparrow V(x)(u) = +\infty$, δηλαδή, την περίπτωση όταν το υποσύνολο $D\mathbf{V}_\uparrow(x, V(x))(u) = \emptyset$. Τότε, για οποιαδήποτε $v \in \mathbf{R}$, για οποιαδήποτε $h_n > 0$ που συγκλίνουν στο 0 και οποιαδήποτε ακολουθία u_n που συγκλίνει στο u, έχουμε

$$V(x + h_n u_n) \geq V(x) + h_n v$$

για n αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε το liminf των διαφορικών πηλίκων να είναι ίσο με $+\infty$. □

Ορίζουμε με συμμετρικό τρόπο την ενδεχόμενη υποπαράγωγο (***contingent hypoderivative***) $D_\downarrow V(x)$ από το X στο $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ $της$ $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ σε ένα σημείο x του πεδίου της ως εξής

$$D_\downarrow V(x)(u) := -D_\uparrow(-V)(x)(u) = \limsup_{h \to 0+, u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h}$$

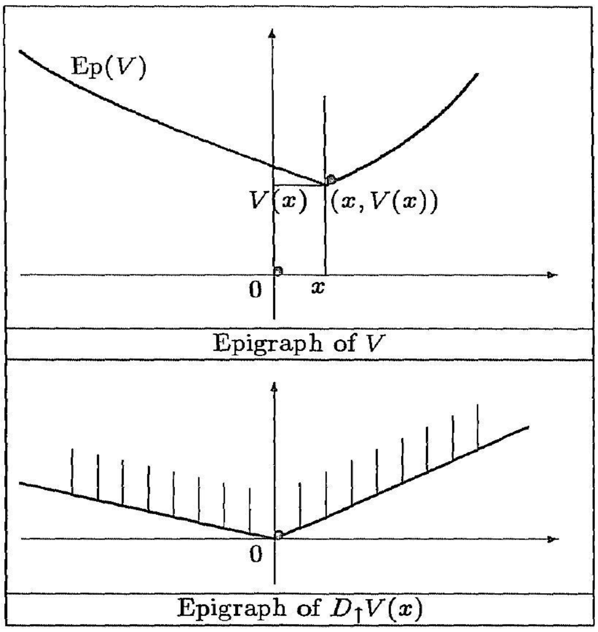
Θα μπορούσαμε επίσης να ορίσουμε την ενδεχόμενη επιπαράγωγο μιας συνάρτησης παίρνοντας τον ενδεχόμενο κώνο στο επιγράφημα της:

Πρόταση 6.1.4

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Τότε, ο ενδεχόμενος κώνος στο επιγράφημα του V στο $(x, V(x))$ είναι το επιγράφημα της ενδεχόμενης επιπαραγώγου του V στο x :

$$\mathcal{E}p(D_\uparrow V(x)) = T_{\mathcal{E}p(V)}(x, V(x))$$

Σχήμα 6.4-Πηγή:[1]/σελ227: Επιγράφημα της Ενδεχόμενης Παραγώγου



Κατά συνέπεια, το επιγράφημα της ενδεχόμενης επιπαραγώγου στο x είναι ένας κλειστός κώνος. Η ενδεχόμενη επιπαράγωγος $D_\uparrow V(x)$ είναι τότε κάτω ημισυνεχής και θετικά ομοιογενής όποτε η V είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμη στο x.

Επιπλέον $\quad \forall w \geq V(x), T_{\mathcal{E}p(V)}(x,w) \subset T_{\mathrm{Dom}\,(V)}(x) \times \mathbb{R}$

και $\quad \forall w > V(x), \mathrm{Dom}\,(D_{\uparrow}V(x)) \times \mathbb{R} \subset T_{\mathcal{E}_{p(V)}}(x,w)$

Εάν ο περιορισμός του V $\sigma\tau o$ πεδίο ορισμού του είναι άνω ημισυνεχής, τότε, για κάθε $w > V(x)$,

$$T_{\mathcal{E}p(V)}(x,w) = T_{\mathrm{Dom}\,(V)}(x) \times \mathbf{R}$$

Απόδειξη

1. Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό της ενδεχόμενης επιπαραγώγου.. Έστω $w \geq V(x)$. Ας υποθέσουμε ότι (u,v) ανήκει στο $T_{\mathcal{E}_{p(V)}}(x,w)$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες u_n, v_n και $h_n > 0$ συγκλίνουσες σε u, v και 0 αντίστοιχα τέτοιες ώστε

$$w + h_n v_n \geq V(x + h_n u_n)$$

Άρα το u ανήκει στον ενδεχόμενο κώνο στο πεδίο ορισμού της V στο x, και έτσι, ότι $T_{\mathcal{E}_{p(V)}}(x,w) \subset T_{\mathrm{Dom}\,(V)}(x) \times \mathbf{R}$.

2. Αν το u ανήκει στο πεδίο της ενδεχόμενης παράγωγου του V στο x, αν $w > V(x)$ και αν v είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, ελέγχουμε ότι το (u,v) ανήκει στο $T_{\mathcal{E}p(V)}(x,w)$.

Πράγματι, υπάρχουν ακολουθίες στοιχείων $h_n > 0$, u_n και v_n συγκλίνουσες σε $0, u$ και $D_{\uparrow}V(x)(u)$ αντίστοιχα τέτοιες ώστε

$$(x + h_n u_n, V(x) + h_n v_n) \in \mathcal{E}p(V)$$

Αλλά μπορούμε να γράψουμε

$$(x + h_n u_n, w + h_n v) = (x + h_n u_n, V(x) + h_n v_n) + \big(0, w - V(x) + h_n(v - v_n)\big)$$

Δεδομένου ότι το $w - V(x) + h_n(v - v_n)$ είναι αυστηρά θετικό όταν h_n είναι αρκετά μικρό, συμπεραίνουμε ότι $(x + h_n u_n, w + h_n v)$ ανήκει στο επιγράφημα του V, δηλαδή, το (u,v) ανήκει στον κώνο $T_{\mathcal{E}p(V)}(x,w)$.

3. Έστω w αυστηρά μεγαλύτερο από το $V(x)$ και u ανήκει στο $T_{\mathrm{Dom}(V)}(x)$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες u_n και $h_n > 0$ συγκλίνουσες u και 0 τέτοιες ώστε $V(x + h_n u_n) < +\infty$ για κάθε n.

Όταν η V είναι άνω ημισυνεχής στο πεδίο ορισμού της, για κάθε

$$0 < \varepsilon < (w - V(x))/2$$

υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $h_n \|u_n\| < \eta$, άρα

$$V(x + h_n u_n) \leq V(x) + \varepsilon < w - \varepsilon$$

Έστω $v \in \mathbf{R}$. Τότε για οποιοδήποτε $h_n > 0$ όταν $v \geq 0$ ή για οποιοδήποτε $h_n \in]0, \frac{\varepsilon}{-v}[$ όταν $v < 0$, η ανισότητα $w - \varepsilon \leq w + h_n v$ συνεπάγεται ότι $V(x + h_n u_n) \leq w + h_n v$, δηλαδή, ότι το ζεύγος (u, v) ανήκει σε $T_{\mathcal{E}p(V)}(x, w)$. □

Πρόταση 6.1.5

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια εκτεταμένη συνάρτηση και x ας ανήκει στον πεδίο ορισμού της. Τότε για οποιοδήποτε

$$u \in \mathrm{Dom}\,(D_\uparrow V(x)) \cap \mathrm{Dom}\,(D_\downarrow V(x))$$

ισχύει:

$$\{D_\uparrow V(x)(u), D_\downarrow V(x)(u)\} \subset D\,\mathrm{V}(x)(u) \subset [D_\uparrow V(x)(u), D_\downarrow V(x)(u)]$$

Απόδειξη

Δεδομένου ότι $\mathrm{Graph}\,(V) = \mathcal{E}p(V) \cap \mathcal{H}p(V)$, συμπεραίνουμε ότι οι εγκλείσεις

$$T_{\mathrm{Graph}(V)}(x, V(x)) \subset T_{\mathcal{E}_p(V)}(x, V(x)) \cap T_{\mathcal{H}(V)}(x, V(x))$$

μπορεί να μετατραπούν σε

$$\mathrm{Graph}\,(D\mathbf{V}(x)) \subset \mathcal{E}p(D_\uparrow V(x)) \cap \mathcal{H}p(D_\downarrow V(x))$$

από την οποία προκύπτει η συμπερίληψη

$$D\mathbf{V}(x)(u) \subset [D_\uparrow V(x)(u), D_\downarrow V(x)(u)]$$

Δεδομένου ότι η ενδεχόμενη επιπαράγωγος του V στο x ως προς την κατεύθυνση u είναι ίση με

$$D_\uparrow V(x)(u) := \liminf_{h \to 0+, u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h}$$

παρατηρούμε ότι το $D_\uparrow V(x)(u)$ είναι το όριο μιας υπακολουθίας διαφορικών πηλίκων $\left(\frac{V(x+hu')-V(x)}{h}\right)$ όταν $h \to 0+$ και έτσι, το $D_\uparrow V(x)(u)$ ανήκει στο $D\mathrm{V}(x)(u)$. Το ίδιο ισχύει και για την ενδεχόμενη υποπαράγωγο.□

Θεώρημα 6.1.6

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια εκτεταμένη συνάρτηση που είναι συνεχής σε μια περιοχή του $x \in \mathrm{Dom}\,(V)$. Τότε, για κάθε

$$\mathrm{u} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}_\uparrow \mathrm{V}(\mathrm{x})) \bigcap \mathrm{Dom}(\mathrm{D}_\downarrow \mathrm{V}(\mathrm{x}))$$

έχουμε:

$$D\mathbf{V}(x)(u) = [D_\uparrow V(x)(u), D_\downarrow V(x)(u)]$$

Απόδειξη

Με βάση την *Πρόταση 6.1.6*, αρκεί να δείξουμε ότι όταν η V είναι συνεχής σε μια περιοχή του x, η σχέση

$$T_{\mathrm{Ep}(V)}(x, V(x)) \cap T_{\mathrm{Hp}\,(V)}(x, V(x)) \subset T_{\mathrm{Graph}\,(V)}(x, V(x))$$

ισχύει.

Επιλέγουμε οποιοδήποτε (u, v) στην τομή: Υπάρχουν ακολουθίες $h_n^{\dagger} > 0$ και $h_n^{\downarrow} > 0$ συγκλίνουσες στο $0+$, και ακολουθίες ζευγών $\left(u_n^{\dagger}, v_n^{\dagger}\right)$ και $\left(u_n^{\downarrow}, v_n^{\downarrow}\right)$ συγκλίνουσες σε (u, v) τέτοιες ώστε

$$\frac{V\left(x + h_n^{\uparrow} u_n^{\uparrow}\right) - V(x)}{h_n^{\uparrow}} \leq v_n^{\uparrow} \quad \& \quad \frac{V\left(x + h_n^{\downarrow} u_n^{\downarrow}\right) - V(x)}{h_n^{\downarrow}} \leq v_n^{\downarrow}$$

Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε n αρκετά μεγάλο, υπάρχει $\lambda_n \in [0,1]$ τέτοιο ώστε, θέτοντας

$$h_n := (1 - \lambda_n) h_n^{\uparrow} + \lambda_n h_n^{\downarrow}$$

και

$$u_n := \frac{(1 - \lambda_n) h_n^{\uparrow} u_n^{\uparrow} + \lambda_n h_n^{\downarrow} u_n^{\downarrow}}{h_n} \& v_n := \frac{(1 - \lambda_n) h_n^{\uparrow} v_n^{\uparrow} + \lambda_n h_n^{\downarrow} v_n^{\downarrow}}{h_n}$$

έχουμε την ακόλουθη ισότητα

$$\frac{V(x + h_n u_n) - V(x)}{h_n} = v_n$$

Πράγματι η $h_n > 0$ συγκλίνει στο $0+$ και η (u_n, v_n) συγκλίνει στο (u, v). Έτσι, το (u, v) ανήκει στον ενδεχόμενο κώνο στο γράφημα του V. Για να βρούμε τέτοια ακολουθία λ_n , εξετάζουμε για όλα τα μεγάλα n τις συνεχείς συναρτήσεις $\varphi_n: [0,1] \to \mathbf{R}$ που ορίζονται από

$$\varphi_n(\lambda) := V\left(x + (1 - \lambda) h_n^{\uparrow} u_n^{\uparrow} + \lambda h_n^{\downarrow} u_n^{\downarrow}\right) - \left(V(x) + (1 - \lambda) h_n^{\uparrow} v_n^{\uparrow} + \lambda h_n^{\downarrow} v_n^{\downarrow}\right)$$

$$\text{και παρατηρούμε ότι } \varphi_n(0) \leq 0 \ \& \ \varphi_n(1) \geq 0$$

Δεδομένου ότι η φ_n είναι συνεχής, υπάρχει $\lambda_n \in [0,1]$ τέτοια ώστε $\varphi_n(\lambda_n) = 0$. Τότε η λ_n ικανοποιεί την απαιτούμενη ιδιότητα.□

Η ενδεχόμενη παράγωγος συμπίπτει με την κατευθυνόμενη παράγωγο $< V'(x), u >$ όταν η V είναι Fréchet διαφορίσιμη.

Εάν *η* V είναι Fréchet διαφορίσιμη σε ένα σημείο $x \in K$, τότε η ενδεχόμενη παράγωγος του περιορισμού είναι ο περιορισμός της παραγώγου στον ενδεχόμενο κώνο:

$$D_{\uparrow}(V|_K)(x)(u) := \begin{cases} < V'(x), u > & \text{αν } u \in T_K(x) \\ +\infty & \text{αν } u \notin T_K(x) \end{cases}$$

Οι τύποι γίνονται πολύ πιο απλοί όταν η V είναι Lipschitz: η ενδεχόμενη επιπαράγωγος συμπίπτει με την κατώτερη παράγωγο Dini (***lower Dini derivative***):

Πρόταση 6.1.7

Ας υποθέσουμε ότι $V\colon X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι Lipschitz σε ένα σημείο x του πεδίου ορισμού της. Τότε

$$D_{\uparrow}V(x)(u) = \liminf_{h\to 0+} \frac{V(x+hu)-V(x)}{h} \text{ (η κατώτερη παράγωγος Dini)}$$

και ικανοποιεί για κάποιο $l > 0$:

$$\forall u \in X,\ |D_{\uparrow}V(x)(u)| \leq l \parallel u \parallel$$

Παρατήρηση

Υπάρχουν και άλλες στενές συνδέσεις μεταξύ ενδεχόμενων κώνων και ενδεχόμενων επιπαραγώγων.

Έστω ψ_K είναι ο δείκτης ενός υποσυνόλου K. Τότε έχουμε:

$$D_{\uparrow}(\psi_K)(x) = \psi_{T_K(x)}$$

Επομένως μπορούμε είτε να αντλήσουμε ιδιότητες των επιπαραγώγων από τις ιδιότητες των εφαπτόμενων κώνων στα επιγραφήματα, όπως κάναμε, είτε να ακολουθήσουμε την αντίθετη προσέγγιση χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο. Υπάρχει επίσης μια προφανής σχέση μεταξύ του ενδεχόμενου κώνου και της ενδεχόμενης επιπαράγωγου της συνάρτησης απόστασης του K , αφού μπορούμε να γράψουμε για κάθε $x \in K$:

$$T_K(x) = \{v \in X \mid D_{\uparrow}d_K(x)(v) = 0\}$$

Αναφέρουμε επίσης την ακόλουθη εκτίμηση της ενδεχόμενης επιπαράγωγου της συνάρτησης απόστασης του K :

Πρόταση 6.1.8

Έστω K ένα κλειστό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου με νόρμα και $\Pi_K(y)$ το σύνολο των προβολών του y επάνω στο K, δηλαδή, το υποσύνολο του $z \in K$ έτσι ώστε $\parallel y - z \parallel = d_K(y)$. Τότε, όταν $\Pi_K(y) \neq \emptyset$, έχουμε:

$$D_{\uparrow}d_K(y)(v) \leq d\big(v, T_K(\Pi_K(y))\big)$$

Απόδειξη

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας αυτή την ανισότητα όταν το y ανήκει στο K. Πράγματι, για κάθε $w \in X$,η ανισότητα

$$d_K(y + hv) \leq d_K(y + hw) + h \parallel v - w \parallel$$

συνεπάγεται ότι

$$D_{\uparrow}d_K(y)(v) = \liminf_{h\to 0+}\frac{d_K(y+hv)}{h} \leq \| v - w \| \text{ αν } w \in T_K(y)$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι $y \notin K$. Επιλέγουμε $z \in \Pi_K(y)$. Τότε

$$d_K(y+hv) - d_K(y) \leq \| y - z \| + d_K(z+hv) - d_K(y) = d_K(z+hv)$$

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης, συμπεραίνουμε ότι $D_{\uparrow}d_K(z)(v) \leq d(v, T_K(z))$, και κατά συνέπεια, ότι $D_{\uparrow}d_K(y)(v) \leq d(v, T_K(z))$.□

6.1.3. Κανόνες Fermat και Ekeland

Δεδομένου ότι μπορούμε να ορίσουμε την ενδεχόμενη επιπαράγωγο οποιασδήποτε εκτεταμένης συνάρτησης $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, μπορούμε να επεκτείνουμε τον "κανόνα Fermat" σε οποιοδήποτε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 6.1.9 (Κανόνας Fermat)

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ είναι μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση σε έναν χώρο με νόρμα X και $x \in \text{Dom}\,(V)$ ένα σημείο τοπικού ελαχίστου της V στο X.

Τότε το x , είναι, μια λύση για τις ανισότητες:

$$\forall u \in X, 0 \leq D_{\uparrow}V(x)(u)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι φυσικά προφανής: Γράφουμε ότι για κάθε $u' \in X$ και για κάθε $h > 0$

$$0 \leq (V(x+hu') - V(x))/h$$

και παίρνουμε το liminf όταν το h συγκλίνει στο 0 και το u' στο u.

Η αντίστροφη πρόταση δεν είναι αληθής χωρίς περαιτέρω υποθέσεις όπως κυρτότητα ή, γενικότερα, η ψευδο-κυρτότητα ή συνθήκες δεύτερης τάξης:

Ορισμός 6.1.10

Μια εκτεταμένη συνάρτηση $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ ονομάζεται ψευδο-κυρτή στο $x \in \text{Dom}\,(V)$ αν το επιγράφημα της είναι ψευδο-κυρτό (**pseudo-convex**) στο $(x, V(x))$, δηλαδή, αν

$$\forall y \in X,\ D_{\uparrow}V(x)(y-x) \leq V(y) - V(x)$$

Συμπεραίνουμε εύκολα από αυτόν τον ορισμό το αντίστροφο του Κανόνα Fermat

Πρόταση 6.1.11

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ και $x \in \text{Dom}\,(V)$ τέτοιο ώστε $0 \leq D_{\uparrow}V(x)(u)$ για κάθε $u \in X$. Εάν η V είναι ψευδο-κυρτή στο x, τότε το x επιτυγχάνει το ελάχιστο του V.

Αυτό που δεν είναι προφανές είναι η χρήση αυτού του κανόνα Fermat για όλο και πιο γενικά προβλήματα, όταν η συνάρτηση V είναι ορισμένη από άλλες απλούστερες συναρτήσεις και περιλαμβάνει περιορισμούς.

Η αναζήτηση των απαραίτητων συνθηκών για ένα ελάχιστο απαιτεί έναν αρκετά πλούσιο λογισμό των ενδεχόμενων επιπαραγώγων που παρέχει εκτιμήσεις του $D_{\uparrow}V(x)(u)$. Συγκεκριμένα, όταν πρόκειται για περιορισμούς (του τύπου $x \in K$), το γεγονός ότι η επιπαράγωγο του περιορισμού K είναι ο περιορισμός της επιπαραγώγου στον ενδεχόμενο κώνο $T_K(x)$, επιτρέπει σε κάποιον να γράψει τις απαραίτητες συνθήκες χρησιμοποιώντας επίσης ενδεχόμενους κώνους σε σύνολα περιορισμών (ή στη δυική μορφή, χρησιμοποιώντας κλίσεις και πολικούς των ενδεχόμενων κώνων.)

Με τον ίδιο τρόπο, είναι εύκολο να εξαχθεί μια επιδιαφορική (epidifferential) εκδοχή της Αρχής παραλλαγής του Ekeland:

Θεώρημα Ekeland

Έστω X ένας χώρος Banach, $V: X \mapsto \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ μια μη τετριμμένη κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη συνάρτηση και $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(V)$. Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια λύση $x_\varepsilon \in \mathrm{Dom}\,(V)$ για:

$$\begin{cases} \text{i)} \quad V(x_\varepsilon) + \varepsilon \| x_\varepsilon - x_0 \| \leq V(x_0) \\ \text{ii)} \quad \forall u \in X,\ 0 \leq D_{\uparrow}V(x_\varepsilon)(u) + \varepsilon \parallel u \parallel \end{cases}$$

6.1.4. Στοιχειώδεις ιδιότητες

Παρακάτω παρουσιάζουμε μερικούς τύπους σχετικά με τις επιπαραγώγους που επιτρέπουν την εκμετάλλευση των κανόνων Fermat και Ekeland.

1. -Άθροισμα και σύνθεση

Πρόταση 6.1.13

Έστω δύο χώρους Banach $X, Y, \mu\iota\alpha\ \mu o\nu ó\tau\iota\mu\eta\ \alpha\pi\varepsilon\iota\kappa ó\nu\iota\sigma\eta$ $f: X \mapsto Y$ και δύο εκτεταμένες συναρτήσεις V και W από X και Y προς $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ αντίστοιχα.

Αν το x_0 ανήκει στο πεδίο της συνάρτησης $V + W \circ f$ και αν η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο x_0. τότε

$$D_{\uparrow}V(x_0)(u) + D_{\uparrow}W\big(f(x_0)\big)(f'(x_0)u) \leq D_{\uparrow}(V + W \circ f)(x_0)(u)$$

Ιδιαίτερα, αν K είναι υποσύνολο του X και αν $x_0 \in K \cap \mathrm{Dom}\,(V)$, τότε

$$\forall u \in T_K(x_0),\ D_{\uparrow}V(x_0)(u) \leq D_{\uparrow}(V|_K)(x_0)(u)$$

2. - Supremum των Συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τώρα μια οικογένεια συναρτήσεων $V_i: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}, (i \in I)$ και ας συνδέσουμε με αυτή τη συνάρτηση U που ορίζεται από

$$U(x) := \sup_{i \in I} V_i(x)$$

Θέτουμε $I(x) := \{i \in I \mid V_i(x) = U(x)\}$. Η ακόλουθη εκτίμηση είναι προφανής όταν η $I(x)$ δεν είναι κενή και $x \in \mathrm{Dom}\,(U)$:

$$\forall u \in X, \sup_{i \in I(x)} D_\uparrow V_i(x)(u) \le D_\uparrow U(x)(u)$$

γιατί, για κάθε $i \in I(x)$,

$$\frac{V_i(x+hu) - V_i(x)}{h} \le \frac{U(x+hu) - U(x)}{h}$$

3. - Περιθώρια συνάρτηση (Marginal Function)

Θεωρούμε χώρους με νόρμα X και Y και μια εκτεταμένη συνάρτηση $U: X \times Y \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ Συνδέουμε με αυτά την περιθώρια συνάρτηση $V: X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ που ορίζεται από

$$V(x) := \inf_{y \in Y} U(x, y)$$

Συμβολίζουμε με π την προβολή από το $X \times Y \times \mathbf{R}$ στο $X \times \mathbf{R}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\pi \mathcal{E}p(U) \subset \mathcal{E}p(V) \subset \overline{\pi \mathcal{E}p(\bar{U})}$$

Η πρώτη συμπερίληψη είναι προφανής. Ο ίδιος ο ορισμός του infimum υπονοεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $(x, \lambda) \in \mathcal{E}p(V)$, υπάρχει $y_\varepsilon \in Y$ τέτοιο ώστε $(x, y_\varepsilon, \lambda + \varepsilon) \in \mathcal{E}p(U)$. Λαμβάνοντας προβολές και παίρνοντας το όριο, ακολουθεί η δεύτερη συμπερίληψη.

Έστω $x_0 \in X$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y_0 \in Y$ που επιτυγχάνει το ελάχιστο της $U(x_0, \cdot)$ στο Y :

$$V(x_0) = U(x_0, y_0) \ne \pm\infty$$

Παίρνοντας τους ενδεχόμενους κώνους στους παραπάνω εγκλεισμούς, συνάγουμε την ανισότητα $\forall u \in X, D_\uparrow V(x_0)(u) \le \liminf_{u' \to u} \left(\inf_{v \in Y} D_\uparrow U(x_0, y_0)(u', v) \right)$

από την σχέση:

$$\begin{cases} \overline{\pi \mathcal{E}p(D_\uparrow U(x_0, y_0))} = \overline{\pi T_{\mathcal{E}p(U)}(x_0, y_0, U(x_0, y_0))} \\ \subset T_{\pi(\mathcal{E}_p(U))}(x_0, V(x_0)) = T_{\mathcal{E}_{p(V)}}(x_0, V(x_0)) = \mathcal{E}_p(D_\uparrow V(x_0)) \end{cases}$$

Για να ισχύουν οι ισότητες σε μερικούς από τους παραπάνω τύπους, χρειαζόμαστε περαιτέρω υποθέσεις, όπως οι συναρτήσεις να είναι επι-λείες(episleek)ή ψευδο-κυρτές, οι οποίες στην πραγματικότητα απαιτούν την εισαγωγή παρακείμενων και κυκλικών επιπαραγώγων. Αυτά είναι τα θέματα της επόμενης ενότητας.

6.2. Άλλες επιπαράγωγοι

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του "lim sup inf" (ή Γ-σύγκλιση) των συναρτήσεων δύο μεταβλητών

$\mathrm{limsup}_{x'\to x}\inf_{y'\to y}\phi(x',y') := \sup_{\varepsilon>0}\inf_{\eta>0}\sup_{x'\in B(x,\eta)}\inf_{y'\in B(y,\varepsilon)}\phi(x',y')$

Με τον ίδιο τρόπο, θέτουμε

$\mathrm{liminf}_{x'\to x}\sup_{y'\to y}\phi(x',y') := \inf_{\varepsilon>0}\sup_{\eta>0}\inf_{x'\in B(x,\eta)}\sup_{y'\in B(y,\varepsilon)}\phi(x',y')$

6.2.1.Παρακείμενες και κυκλικές επιπαράγωγοι-Adjacent and Circatangent Epiderivatives

Μπορούμε να συσχετίσουμε με τους παρακείμενους και Clarke εφαπτόμενους κώνους τις παρακείμενες και κυκλικές παραγώγους του V στο $x \in \mathrm{Dom}\,(V)$ μιας εκτεταμένης συνάρτησης $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ η οποία θεωρείται ως πλειότιμη απεικόνιση$\mathbf{V}: X \multimap \mathbf{R}$ που λαμβάνει κενές τιμές εκτός του πεδίου του V :

$$\begin{cases} D^b\mathbf{V}(x)(u) := D^b\mathbf{V}(x, V(x))(u) = \\ \left\{ v \middle| \lim_{h\to 0+}\sup \inf_{u'\to u} \dfrac{|V(x+hu') - V(x) - hv|}{h} = 0 \right\} \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} C\mathbf{V}(x)(u) := C\mathbf{V}(x, V(x))(u) = \\ \left\{ v \middle| lim \sup_{h\to 0+, x'\to x} \inf_{u'\to u} \dfrac{|V(x'+hu') - V(x) - hv|}{h} = 0 \right\} \end{cases}$$

Οδηγούμαστε επίσης φυσικά να συσχετίσουμε με τους δύο πλειότιμες απεικονίσεις $\mathbf{V}_\uparrow$ και $\mathbf{V}_\downarrow$, που ορίζονται στην προηγούμενη ενότητα, τις παρακείμενες και κυκλικές παραγώγους τους σε σημεία $(x, V(x))$.

Ορισμός 6.2.1 (Epiderivatives)

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $D_\uparrow^b V(x)$ και $C_\uparrow V(x)$ από το X στο $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ που ορίζονται αντίστοιχα από

$$\begin{cases} i)\ \forall u \in X, D_\uparrow^b V(x)(u) := inf\{v \mid v \in D^b\mathbf{V}_\uparrow(x, V(x))(u)\} \\ ii)\ \forall u \in X,\ C_\uparrow V(x)(u) := \inf\{v \mid v \in C\mathbf{V}_\uparrow(x, V(x))(u)\} \end{cases}$$

είναι οι ενδεχόμενες και κυκλικές επιπαράγωγοι του V στο x ως προς την κατεύθυνση u. Αυτές οι επιπαράγωγοι μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν ως όρια διαφορικών πηλίκων.

Πρόταση 6.2.2

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x να ανήκει στον πεδίο ορισμού της. Τότε

$$D_{\uparrow}^{b} V(x)(u) = \limsup_{h \to 0+} \inf_{u' \to u} \frac{V(\mathrm{x} + hu') - \mathrm{V(x)}}{h}$$

και

$$C_{\uparrow} V(x)(u) = \limsup_{h \to 0+, x' \to x, V(x') \leq \lambda' \to V(x)} \inf_{u' \to u} \frac{V(x' + hu') - \lambda'}{h}$$

Ορίζουμε με συμμετρικό τρόπο τις ενδεχόμενες και κυκλικές επιπαραγώγους $D_{\downarrow}^{b} V(x)$ και $C_{\downarrow} V(x)$ από το X στο $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$D_{\downarrow}^{b} V(x)(u) = -D_{\uparrow}^{b}(-V)(x)(u) := \liminf_{h \to 0+} \sup_{u' \to u} \frac{V(x + hu') - V(x)}{h}$$

και

$$\begin{cases} C_{\downarrow} V(x)(u) = -C_{\uparrow}(-V)(x)(u) \\ := \liminf_{h \to 0+, x' \to x, V(x') \geq \lambda' \to V(x)} \sup_{u' \to u} \dfrac{V(x' + hu') - \lambda'}{h} \end{cases}$$

Φυσικά, όταν η V είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμη, οι παρακείμενες και κυκλικές επιπαράγωγοι είναι κάτω ημισυνεχείς και θετικά ομοιογενείς και η κυκλική επιπαράγωγος είναι επιπλέον κυρτή. Συμπίπτουν με τις κατευθυνόμενες παραγώγους $\langle V'(x), u \rangle$ όταν η V είναι αντίστοιχα Fréchet και συνεχώς διαφορίσιμη.

Έστω $K \subset X, x \in K$ και V να είναι Fréchet διαφορίσιμη στο x. Τότε, η παρακείμενη επιπαράγωγος του περιορισμού $V|_K$ είναι ο περιορισμός της παραγώγου στον παρακείμενο κώνο.

Όταν η V είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα σημείο $x \in K$, παρόμοια πρόταση ισχύει για την κυκλική παράγωγο:

i) $$D_{\uparrow}^{b}(V|_K)(x)(u) := \begin{cases} < V'(x), u > & \alpha\nu \quad u \in T_K^b(x) \\ +\infty & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ii) $$C_{\uparrow}(V|_K)(x)(u) := \begin{cases} < V'(x), u > & \alpha\nu \quad u \in C_K(x) \\ +\infty & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Οι τύποι γίνονται πολύ πιο απλοί όταν η V είναι Lipschitz.

Πρόταση 6.2.3

Ας υποθέσουμε ότι $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι Lipschitz σε ένα σημείο x του πεδίου ορισμού του. Τότε

$D_{\uparrow}^{b} V(x)(u) = \limsup_{h \to 0+} \frac{V(x+hu)-V(x)}{h}$ είναι η ανώτερη παράγωγος Dini και

$$C_{\uparrow} V(x)(u) = \limsup_{h \to 0+, x' \to x} \frac{V(x'+hu)-V(x')}{h}$$

Επιπλέον, για κάποια περιοχή $\mathcal{U}$ του x,

$$\begin{cases} i) \text{ η απεικόνιση } (y,u) \in \mathcal{U} \times X \mapsto C_{\uparrow} V(y)(u) \text{ είναι άνω ημισυνεχής} \\ ii) \text{ η απεικόνιση } u \mapsto C_{\uparrow} V(x)(u) \text{ είναι Lipschitz στο } X \\ iii) \ \forall u \in X,\ C_{\uparrow}(-V)(x)(u) = C_{\uparrow} V(x)(-u) \end{cases}$$

Παρατηρούμε επίσης τις ακόλουθες σχέσεις μεταξύ των εφαπτόμενων κώνων στα επιγραφήματα και τα επιγραφήματα των επιπαραγώγων

Πρόταση 6.2.4

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x ας ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Τότε, οι εφαπτόμενοι κώνοι στο επιγράφημα του V στο $(x, V(x))$ είναι τα επιγραφήματα των αντίστοιχων επιπαραγώγων του V στο x :

$$\mathcal{E}p\big(D_{\uparrow}^{b} V(x)\big) = T_{\mathcal{E}_{p(V)}}^{b}\big(x, V(x)\big) \quad \& \quad \mathcal{E}p(C_{\uparrow} V(x)) = C_{\mathcal{E}_{p(V)}}(x, V(x))$$

και, όταν $x \in K \subset X$, $\quad D_{\uparrow}^{b}(\psi_K)(x) = \psi_{T_K^b(x)} \quad \& \quad C_{\uparrow}(\psi_K)(x) = \psi_{C_K(x)}$

Οι σχέσεις μεταξύ εφαπτόμενων κώνων και επιπαραγώγων των συναρτήσεων απόστασης δίνονται στην παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.2.5

Έστω K ένα υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα $X, y \in X$ και $\Pi_K(y)$ να είναι το σύνολο των προβολών του y επάνω K. Τότε, αν $\Pi_K(y) \neq \emptyset$, έχουμε

$$\begin{cases} i) \quad D_{\uparrow}^{b} d_K(y)(v) \leq d\left(v, T_K^b(\Pi_K(y))\right) \\ ii) \quad C_{\uparrow} d_K(y)(v) \leq d\big(v, C_K(\Pi_K(y))\big) \end{cases}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη της πρώτης πρότασης είναι ανάλογη με την απόδειξη της *πρότασης 6.1.8*. Για την απόδειξη της δεύτερης ανισότητας, παίρνουμε $z \in \Pi_K(y)$ και $w \in C_K(z)$. Παρατηρούμε ότι όταν $y \notin K$, $\ \forall z \in \Pi_K(y)$, $\forall x \in K, \| z - x \| \leq 2 \| y - x \|$

Έτσι

$$\begin{cases} \sup_{h\le\alpha,\|y-x\|\le\beta} (d_K(y+hv)-d_K(y))/h \le \sup_{h\le\alpha,\|z-x\|\le 2\beta} d_K(z+hw)/h + \| v-w \| \\ \end{cases}$$

έτσι ώστε για κάθε $w \in C_K(z)$, $\quad C_{\uparrow}d_K(y)(v) \le \| v-w \|$. Αφού τα $z \in \Pi_K(y)$ και $w \in C_K(z)$ επιλέχθηκαν αυθαίρετα, η πρόταση αποδείχθηκε.

Οι παρακείμενες παράγωγοι έχουν τις εξής ιδιότητες:

Πρόταση 6.2.6

Έστω $V: X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι μια εκτεταμένη συνάρτηση συνεχής σε μια περιοχή του $x \in \mathrm{Int}\,(\mathrm{Dom}\,(V))$. Οι τιμές της παρακείμενης παραγώγου στο x είναι κυρτές.

Επιπλέον, για οποιαδήποτε $u \in \mathrm{Dom}\left(D_{\uparrow}^{b}V(x)\right) \cap \mathrm{Dom}\left(D_{\downarrow}^{b}V(x)\right)$ έχουμε

$$D^b\mathbf{V}(x)(u) = \left[D_{\uparrow}^{b}V(x)(u), D_{\downarrow}^{b}V(x)(u)\right]$$

Απόδειξη

Όσον αφορά την ενδεχόμενη περίπτωση, μπορούμε να ελέγξουμε ότι για οποιαδήποτε $u \in \mathrm{Dom}\left(D_{\uparrow}^{b}V(x)\right) \cap \mathrm{Dom}\left(D_{\downarrow}^{b}V(x)\right)$, έχουμε

$$\left\{D_{\uparrow}^{b}V(x)(u), D_{\downarrow}^{b}V(x)(u)\right\} \subset D^b\mathbf{V}(x)(u) \subset \left[D_{\uparrow}^{b}V(x)(u), D_{\downarrow}^{b}V(x)(u)\right]$$

Ας πάρουμε τώρα δύο στοιχεία v_1 και v_2 στο D^b $\mathrm{V}(x)(u)$. Επιλέγουμε οποιοδήποτε $\lambda \in [0,1]$. Θα δείξουμε ότι $(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$ ανήκει στο $D^b\mathbf{V}(x)(u)$ και επομένως, το $D^b\mathbf{V}(x)(u)$ είναι ένα διάστημα.

Εξ ορισμού της παρακείμενης παραγώγου, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες u_{1h} και u_{2h} που συγκλίνουν στο u όταν $h \to 0+$ και είναι τέτοιες ώστε:

$$\frac{V(x+h\,u_{1h}) - V(x)}{h} \to v_1 \quad \& \quad \frac{V(x+h\,u_{2h}) - V(x)}{h} \to v_2$$

Δεδομένου ότι η V είναι συνεχής σε μια περιοχή του x, για h αρκετά μικρό, απεικονίζει το διάστημα $x + h[u_{1h}, u_{2h}]$ σε ένα συνεκτικό υποσύνολο, δηλαδή, ένα διάστημα που περιέχει τα $V(x+hu_{1h})$ και $V(x+hu_{2h})$. Τότε υπάρχει $w_h \in [u_{1h}, u_{2h}]$ τέτοιο ώστε

$$(1-\lambda)V(x+hu_{1h}) + \lambda V(x+u_{2h}) = V(x+hw_h)$$

Κατά συνέπεια τα w_h συγκλίνουν σε u και

$$\lim_{h\to 0+} \frac{V(x+hw_h) - V(x)}{h} = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$$

6.2.2. Άλλες κυρτές επιπαράγωγοι

Ορισμός 6.2.7

Έστω $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ μια μη τετριμμένη εκτεταμένη συνάρτηση και x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Θα λέμε ότι μια κάτω ημισυνεχής κυρτή θετικά ομοιογενής συνάρτηση

$$\delta V(x): X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$$

που ικανοποιεί τη

$$D_{\uparrow}V(x)(u) \leq \delta V(x)(u) \leq C_{\uparrow}V(x)(u)$$

είναι μια κυρτή επιπαράγωγος (**convex epiderivative**). Λέμε ότι είναι ελάχιστη εάν δεν υπάρχει άλλη αυστηρά μικρότερη κυρτή επιπαράγωγος.

Όλα αυτές τα κυρτές επιπαράγωγοι συμπίπτουν όταν η V είναι επι-λεία(**epislee**k).

Κυρτές επιπαράγωγοι υπάρχουν οποτεδήποτε η V είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμη στο x και δεν υπάρχουν αν η κυκλική επιπαράγωγος στο x παίρνει την τιμή $-\infty$ (ή, ισοδύναμα,$C_{\uparrow}V(x)(0) < 0$.)

Τα επιγραφήματα των κυρτών επιπαραγώγων είναι οι κλειστοί κυρτοί κώνοι που βρίσκονται μεταξύ του εφαπτόμενου κώνου Clarke και του ενδεχόμενου κώνου στο επιγράφημα του V στο x

Μεταξύ των πιθανών επιλογών τέτοιων κυρτών επιπαραγώγων, μπορούμε να ξεχωρίσουμε την κυρτή επιπαράγωγο $D_{\uparrow}^{\infty}V(x)$ της οποίας το επιγράφημα είναι ο κυρτός πυρήνας του επιγραφήματος της ενδεχόμενης επιπαραγώγου. Ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$\forall u \in X,\ D_{\uparrow}V(x)(u) \leq D_{\uparrow}^{\infty}V(x)(u) = \sup_{v \in \mathrm{Dom}\,(D_{\uparrow}V(x))} (D_{\uparrow}V(x)(u+v) - D_{\uparrow}V(x)(v))$$
$$\leq C_{\uparrow}V(x)(u)$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_V(x)$ την οικογένεια των ελάχιστων κυρτών επιπαραγώγων $\delta V(x)$ του V στο x. Δεδομένου ότι ο κυρτός πυρήνας του ενδεχόμενου κώνου είναι η τομή των μέγιστων κλειστών κυρτών υποκόνων του (από την Πρόταση 4.5.2), συμπεραίνουμε ότι η $D_{\uparrow}^{\infty}V(x)$ είναι το supremum των ελάχιστων κυρτών επιπαραγώγων:

$$\forall u \in X,\ D_{\uparrow}^{\infty}V(x)(u) = \sup_{\delta V(x) \in \mathcal{D}_V(x)} \delta V(x)(u)$$

Επίσης, ο κυρτός πυρήνας ενός κώνου P που είναι ίσος με τον εφαπτομενικό κώνο Clarke του P στην αρχή (*Πρόταση 4.5.3*), μας δίνει τον τύπο

$$\forall u \in X, D_{\uparrow}^{\infty}V(x)(u) = C_{\uparrow}(D_{\uparrow}V(x))(0)(u)P_{\uparrow}V(x)(v)$$

6.3. Επιδιαφορίσιμος Λογισμός

Είναι η επιπαράγωγος του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ίση με το άθροισμα των επιπαραγώγων; Απαντάμε εδώ σε αυτή την ερώτηση και μελετάμε επίσης την επιδιαφορισιμότητα της σύνθεσης.

Θεώρημα 6.3.1

Ας εξετάσουμε δύο πεπερασμένους διανυσματικούς χώρους X και Y, μια συνεχή μονότιμη απεικόνιση $f: X \mapsto Y$ και δύο εκτεταμένες κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις V και W από το X και Y προς το $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ αντίστοιχα.Έστω x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$U := V + W \circ f$$

Υποθέτουμε ότι f είναι συνεχώς διαφορίσιμη γύρω από το x_0, ότι V και W είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμες στο x_0 και $f(x_0)$ αντίστοιχα και ότι η ακόλουθη συνθήκη:

$\mathrm{Dom}\left(C_\uparrow W\big(f(x_0)\big)\right) - f'(x_0)\left(\mathrm{Dom}\left(C_\uparrow V(x_0)\right)\right) = Y$ ισχύει.

Τότε, οι επιπαράγωγοι της U ικανοποιούν τα παρακάτω:

$$\begin{cases} i) \quad D_\uparrow U(x_0)(u) & \leq & D_\uparrow^b V(x_0)(u) \; + \; D_\uparrow W\big(f(x_0)\big)\,(f'(x_0)u) \\ ii) \quad D_\uparrow^b U(x_0)(u) & = & D_\uparrow^b V(x_0)(u) \; + \; D_\uparrow^b \mathrm{W}(f(x_0))(f'(x_0)u) \\ iii) \quad C_\uparrow U(x_0)(u) & \leq & C_\uparrow V(x_0)(u) \; + \; C_\uparrow W\big(f(x_0)\big)\,(f'(x_0)u) \end{cases}$$

Συγκεκριμένα, εάν το K είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X και εάν $x_0 \in K \cap \mathrm{Dom}\,(V)$ έτσι ώστε $\mathrm{Dom}\left(C_\uparrow V(x_0)\right) - C_K(x_0) = X$ τότε, αν η V είναι ενδεχόμενα επιδιαφορίσιμη στο x_0 έχουμε:

$$\begin{cases} i)\ \forall u \in T_K^b(x_0), & D_\uparrow(V|_K)(x_0)(u) \leq D_\uparrow V(x_0)(u) \\ ii)\ \forall u \in T_K^b(x_0), & D_\uparrow^b(V|_K)(x_0)(u) = D_\uparrow^b V(x_0)(u) \\ iii)\ \forall u \in C_K(x_0), & C_\uparrow(V|_K)(x_0)(u) \leq C_\uparrow V(x_0)(u) \end{cases}$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε τον τύπο μόνο στην περίπτωση των κυκλικών παραγώγων.

Αν ορίσουμε

$$\begin{cases} K := \mathcal{E}p(V) \times \mathcal{E}p(W) \times \mathbf{R} \subset X \times \mathbf{R} \times Y \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ G(x,a,y,b,c) := (f(x) - y, a + b - c) \\ H(x,a,y,b,c) := (x,c) \end{cases}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{E}_p(U) = H(K \cap G^{-1}(0,0))$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το *Θεώρημα 4.3.3* για να εκτιμήσουμε τους εφαπτόμενους κώνους στο $K \cap G^{-1}(0,0)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι οι υποθέσεις του θεωρήματός μας υποδηλώνουν τις αντίστοιχες εγκάρσιες συνθήκες του *Θεωρήματος 4.3.3.*

Ας ορίσουμε

$$z_0 = \Big(x_0, V(x_0), f(x_0), W\big(f(x_0)\big), U(x_0)\Big)$$

Στη συνέχεια συμπεραίνουμε ότι

$$C_K(z_0) \cap G'(z_0)^{-1}(0,0) \subset C_{K\cap G^{-1}(0)}(z_0)$$

Απομένει να δείξουμε ότι αυτή η συμπερίληψη συνεπάγεται την επιθυμητή ανισότητα. Έστω $u \in \mathrm{Dom}\,\big(C_\uparrow V(x_0)\big)$ έτσι ώστε $f'(x_0)u \in \mathrm{Dom}\,\Big(C_\uparrow W\big(f(x_0)\big)\Big)$.

Ορίζουμε

$$\lambda = C_\uparrow V(x_0)(u),\ \mu = C_\uparrow W\big(f(x_0)\big)(f'(x_0)u)$$

Έτσι

$$(u, \lambda, f'(x_0)u, \mu, \lambda + \mu) \in C_K(z_0) \cap G'(z_0)^{-1}(0,0)$$

οπότε, ανήκει στον εφαπτόμενο κώνο Clarke $K \cap G^{-1}(0,0)$ στο z_0

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ακολουθία $h_n > 0$ που συγκλίνει στο 0 και για οποιαδήποτε ακολουθία

$$z_n := (x_n, a_n, y_n, b_n, c_n) \in K \cap G^{-1}(0,0)$$

που συγκλίνει στο z_0, υπάρχουν στοιχεία $w_n := (u_n, \lambda_n, v_n, \mu_n, \nu_n)$ που συγκλίνουν στην $(u, \lambda, f'(x_0)u, \mu, \lambda + \mu)$ τέτοια ώστε

$$\forall n \geq 0, z_n + h_n w_n \in K \cap G^{-1}(0,0)$$

Δεδομένου ότι z_n και $z_n + h_n w_n$ ανήκουν στο $G^{-1}(0,0)$, συμπεραίνουμε ότι

$$f(x_n) = y_n, \qquad f(x_n + h_n u_n) = y_n + h_n v_n,\ \ c_n = a_n + b_n,\ \ \nu_n = \lambda_n + \mu_n$$

και χρησιμοποιώντας ότι $z_n + h_n w_n$ ανήκει στο K, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{V(x_n + h_n u_n) - a_n}{h_n} \leq \lambda_n \quad \& \quad \frac{W(y_n + h_n v_n) - b_n}{h_n} \leq \mu_n$$

Συνεπώς

$$\frac{U(x_n + h_n u_n) - c_n}{h_n} \leq \nu_n$$

Δεδομένου ότι (u_n, ν_n) συγκλίνει στο $(u, \lambda + \mu)$, τελικά έχουμε:

$C_\uparrow U(x_0)(u) \leq \lambda + \mu = C_\uparrow V(x_0)(u) + C_\uparrow W\big(f(x_0)\big)(f'(x_0)u)$.□

Παρατήρηση - *Εάν X, Y είναι χώροι Banach, τα συμπεράσματα παραμένουν αληθή όταν αντικαθιστούμε την ¨εγκάρσια¨ υπόθεση με την ακόλουθη υπόθεση σταθερότητας: υπάρχουν σταθερές $c > 0, \alpha \in [0,1[$ και $\eta > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε n,*

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \forall x \in \text{Dom}\,(V) \cap B(x_0, \eta), \forall y \in \text{Dom}\,(W) \cap B(f(x_0), \eta) \\ B_Y \subset f'(x_0)\left(\text{Dom}\,\left(D_\uparrow^b V(x)\right) \cap \text{c}B_X\right) - \text{Dom}\,(D_\uparrow W(y)) + \alpha B_Y \\ ii) \quad \sup\limits_{u \in \text{Dom}\,\left(D_\uparrow^b V(x)\right)} \dfrac{\left|D_\uparrow^b V(x)(u)\right|}{\|u\|} \leq \text{c} \\ \text{iii)} \quad \sup\limits_{v \in \text{Dom}\,(D_\uparrow W(y))} \dfrac{|D_\uparrow W(y)(v)|}{\|v\|} \leq c \end{cases} \tag{6.5}$$

Για το σκοπό αυτό, πρέπει να ελέγξουμε ότι ικανοποιείται η δεύτερη εγκάρσια υπόθεση του *Θεωρήματος 4.3.3*, δηλαδή ότι υπάρχει μια σταθερά $c' > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε n, για κάθε

$$(x, a, y, b, \text{c}) \in K \text{ κοντά στο } z_0 = \Big(x_0, V(x_0), f(x_0), W\big(f(x_0)\big), U(x_0)\Big)$$

για κάθε $(z, \lambda) \in Y \times \mathbf{R}$, υπάρχουν $(u, \mu, v, \nu, \delta) \in T_K(x, a, y, b, c)$ και e τέτοια ώστε

$$\begin{cases} i)\; z = f'(x)u - v + e \quad \& \quad \lambda = \mu + \nu - \delta \\ ii) \;\; \| e \| \leq \alpha(\| z \| + |\lambda|) \quad \& \quad \| u \| + \| v \| + |\mu| + |\nu| + |\delta| \leq c'(\| z \| + |\lambda|) \end{cases}$$

Οι παραδοχές (6.5) υπονοούν αμέσως ότι υπάρχουν $u \in \text{Dom}\,\left(D_\uparrow^b V(x)\right)$, $v \in \text{Dom}\,(D_\uparrow W(y))$ και e τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \text{i)} \;\; z = f'(x)u - v + e \\ \text{ii)} \;\; \| e \| \leq \alpha \| z \| \;\&\; \| u \| \leq \text{c} \| z \| \;\&\; \| v \| \leq (1 + \alpha + c\|f'(x)\|) \| z \| \end{cases}$$

Ας πάρουμε τώρα

$$\mu := c \| u \|, \nu := c \| v \|, \; \delta := \mu + \nu - \lambda$$

Συμπεραίνουμε από το (6.5) iii) ότι *το* (u, μ) ανήκει στο $\mathcal{E}p\big(D_\uparrow^b V(x)\big)$, το (v, ν) ανήκει $\mathcal{E}p(D_\uparrow W(y))$ και ότι

$$D_\uparrow^b V(x)(u) + D_\uparrow W(y)(v) \leq c(\| u \| + \| v \|) = \mu + \nu = \lambda + \delta$$

Κατά συνέπεια

$|\delta| \leq \big(|\lambda| + c(\| u \| + \| v \|)\big) \leq c'(\| z \| + |\lambda|)$.□

Στη συνέχεια παρέχουμε τύπους για τον υπολογισμό της επιπαραγώγου του supremum ενός πεπερασμένου αριθμού εκτεταμένων συναρτήσεων.

Ας εξετάσουμε μια πεπερασμένη οικογένεια συναρτήσεων

$$V_i : X \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}, \; (i \in I)$$

με την οποία συσχετίζουμε τη συνάρτηση U που ορίζεται από

$$U(x) := \max_{i \in I} V_i(x)$$

Θέτουμε

$$I(x) := \{i \in I \mid V_i(x) = U(x)\}$$

Πρόταση 6.3.2

Θεωρούμε έναν πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο X και n εκτεταμένες συναρτήσεις $V_i : X \mapsto \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Εάν ισχύει η ακόλουθη ΄΄εγκάρσια΄΄ υπόθεση στο $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(U)$

$$\forall u_i \in X, \bigcap_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Dom}\,\left(C_{\uparrow}V_i(x_0)\right) - u_i\right) \neq \emptyset$$

τότε

$$\forall u \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}\,\left(D_{\uparrow}^{b}V_i(x_0)\right), D^{b}U(x_0)(u) = \max_{i \in I(x_0)} D_{\uparrow}^{b}V_i(x_0)(u)$$

και

$$\forall u \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}\,\left(C_{\uparrow}V_i(x_0)\right), CU(x_0)(u) \leq \max_{i \in I(x_0)} C_{\uparrow}V_i(x_0)(u)$$

Απόδειξη

Δεδομένου ότι η διάσταση του X είναι πεπερασμένη και δεδομένου ότι το επιγράφημα του U είναι η τομή των επιγραφημάτων των n συναρτήσεων V_i, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το *Πόρισμα 4.3.6*, και να συμπεράνουμε ότι αν για όλα τα ζεύγη (u_i, λ_i),

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left(C_{\mathcal{E}_p(V_i)}\left(x_0, U(x_0)\right) - (u_i, \lambda_i)\right) \neq \emptyset$$

τότε

$$T_{\mathcal{E}_p(U)}^{b}\left(x_0, U(x_0)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} T_{\mathcal{E}_p(V_i)}^{b}\left(x_0, U(x_0)\right)$$

Η προηγούμενη ιδιότητα προκύπτει αμέσως από την υπόθεση

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Dom}\,\left(C_{\uparrow}V_i(x_0)\right) - u_i\right) \neq \emptyset$$

Η αριστερή πλευρά του τελευταίου τύπου είναι το επιγράφημα της παρακείμενης επιπαραγώγου του U στο x_0. Επειδή

$$T_{\mathcal{E}_p(V_i)}^{b}\left(x_0, U(x_0)\right) \supset T_{\mathrm{Dom}\,(V_i)}^{b}(x_0) \times \mathbf{R}$$

όταν $V_i(x_0) < U(x_0)$, δηλαδή, όταν $i \notin I(x_0)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall u \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Dom}\left(D_{\uparrow}^{b} V_i(x_0)\right), D^b U(x_0)(u) \leq \max_{i \in I(x_0)} D_{\uparrow}^{b} V_i(x_0)(u)$$

Η απόδειξη της δεύτερης πρότασης είναι ανάλογη.□

Τώρα συμπληρώνουμε τους τύπους για τις επιπαραγώγους των περιθωρίων συναρτήσεων: Εξετάζουμε δύο διανυσματικούς χώρους με νόρμα X και Y μια εκτεταμένη συνάρτηση

$$U: X \times Y \mapsto \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$$

με την οποία συσχετίζουμε την περιθώρια συνάρτηση $V: X \mapsto \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ που ορίζεται από

$$V(x) := \inf_{y \in Y} U(x, y)$$

Πρόταση 6.3.3

Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους με νόρμα X και Y, μια εκτεταμένη συνάρτηση $U: X \times Y \mapsto \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και την περιθώρια της συνάρτηση V. Έστω $x_0 \in \operatorname{Dom}(V)$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y_0 \in Y$ που επιτυγχάνει το ελάχιστο της $U(x_0, \cdot)$ στο Y :

$$V(x_0) = U(x_0, y_0)$$

Αν U είναι ψευδο-κυρτή στο (x_0, y_0), τότε

$$\forall u \in X, D_{\uparrow} V(x_0)(u) = \liminf_{u' \to u} \left(\inf_{v \in Y} D_{\uparrow} U(x_0, y_0)(u', v) \right)$$

Απόδειξη

Έστω π η προβολή από $X \times Y \times \mathbf{R}$ στο $X \times \mathbf{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\pi \mathcal{E}p(U) \subset \mathcal{E}p(V) \subset \overline{\pi \mathcal{E}p(U)}$$

Συμπεραίνουμε αυτές τις προτάσεις από οποιοδήποτε κριτήριο που υπονοεί ότι οι ενδεχόμενοι κώνοι στις εικόνες είναι οι κλειστότητες των εικόνων των ενδεχόμενων κώνων. Αυτή είναι η περίπτωση του επιγράφηματος μιας ψευδοκυρτής συνάρτησης, το οποίο είναι ψευδο-κυρτό. Στη συνέχεια, από τις ισότητες

$$\begin{cases} \overline{\pi \mathcal{E}p(D_{\uparrow} U(x_0, y_0))} = \overline{\pi T_{\mathcal{E}p(U)}\big(x_0, y_0, U(x_0, y_0)\big)} \\ = T_{\pi(\mathcal{E}_{p(U)})}\big(x_0, V(x_0)\big) = T_{\mathcal{E}p(V)}\big(x_0, V(x_0)\big) = \mathcal{E}p\big(D_{\uparrow} V(x_0)\big) \end{cases}$$

μπορεί εύκολα να πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.□

Κεφάλαιο 7 .

Μετρησιμότητα και ολοκλήρωση πλειότιμων απεικονίσεων

7.1 Μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις λαμβάνοντας τις τιμές τους σε έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο, (πολωνικός χώρος - *Polish space*). Αυτό περιέχει διαχωρίσιμους χώρους Banach και, ειδικότερα, χώρους Lebesgue L^p και χώρους Sobolev $W^{m,p}$ με $1 \leq p < \infty$.

Θεωρούμε ένα σύνολο Ω και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων A του Ω.

Η οικογένεια $\mathcal{A}$ ονομάζεται $\sigma - \acute{\alpha}\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\alpha$ εάν επαληθεύει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{cases} i) & \emptyset \in \mathcal{A} \\ ii) & A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A} \\ iii) & A_n \in \mathcal{A}, n = 1,2,\ldots \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι από i) και ii) προκύπτει ότι $\Omega = \Omega \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$ και από ii) και iii) προκύπτει ότι η τομή μιας μετρήσιμης οικογένειας στοιχείων $\mathcal{A}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{A}$.

Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{A})$ ονομάζεται μετρήσιμος χώρος και τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ μετρήσιμα σύνολα.

Αν Ω είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε η μικρότερη σ −άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα ονομάζεται Borel σ −άλγεβρα. Το δηλώνουμε με $\mathcal{B}(\Omega)$ ή απλά με $\mathcal{B}$, όταν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα.

Μια απεικόνιση $\mu: \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ ονομάζεται θετικό μέτρο εάν για οποιαδήποτε ακολουθία ξένων συνόλων $A_n \in \mathcal{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

Ένα θετικό μέτρο είναι σ-πεπερασμένο αν το Ω είναι η ένωση μιας (αριθμήσιμης) ακολουθίας μετρήσιμων συνόλων πεπερασμένου μέτρου. Η $\sigma -$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι πλήρης (ακριβέστερα μ-πλήρης) αν για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ οποιοδήποτε υποσύνολό του, $A_1 \subset A$,είναι ένα στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{A}$.

Για παράδειγμα, για κάθε ανοιχτό (ή κλειστό) υποσύνολο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, το σύνολο όλων των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω είναι πλήρης $\sigma -$ άλγεβρα (σε σχέση με το μέτρο Lebesgue.) Το μέτρο Lebesgue είναι επίσης σ-πεπερασμένο.

Συνοπτικά, θα λέμε ότι η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου εάν μ είναι ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο τέτοιο ώστε η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι $\mu -$ πλήρης.

Θεωρούμε ένα πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X. Μια μονότιμη απεικόνιση $f: \Omega \mapsto X$ λέγεται ότι είναι *μετρήσιμη (measurable)* ($\mathcal{A}$-μετρήσιμη, ακριβέστερα) αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{O} \subset X, f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{A}$ (ή ισοδύναμα για κάθε κλειστό υποσύνολο $C \subset X,\ f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.)

Μια απεικόνιση λέμε ότι είναι *απλή* αν παίρνει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών. Μια απλή απεικόνιση είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $x \in X,\ f^{-1}(x) \in \mathcal{A}$.

Για τον έλεγχο της μετρησιμότητας μιας απεικόνισης μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\begin{cases} i) & \eta\ f \text{ είναι } \mathcal{A}-\text{μετρήσιμη} \\ ii) & \eta\ f\ \text{είναι} \text{ το σημειακό όριο απλών μετρήσιμων απεικονίσεων} \\ iii) & \eta\ f \text{ είναι το ομοιόμορφο όριο μετρήσιμων απεικονίσεων} \\ & \text{αν θεωρήσουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών} \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε αμέσως ότι το σημειακό όριο μετρήσιμων απεικονίσεων είναι μετρήσιμη απεικόνιση .

Οι μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις με κλειστές εικόνες ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 7.1.1

Θεωρούμε έναν μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρος X και μια πλειότιμη απεικόνιση $F: \Omega \multimap X$ με κλειστές εικόνες.

Η πλειότιμη απεικόνιση F ονομάζεται μετρήσιμη εάν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου είναι ένα μετρήσιμο σύνολο δηλαδή για κάθε ανοικτό υποσύνολο $\mathcal{O} \subset X$ έχουμε

$$F^{-1}(\mathcal{O}) := \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$$

Παρατήρηση *- Η έννοια της μετρησιμότητας που χρησιμοποιούμε εδώ ονομάζεται μερικές φορές στη βιβλιογραφία ασθενής μετρησιμότητα (weak measurability): μια πλειότιμη απεικόνιση είναι ασθενώς μετρήσιμη εάν οι αντίστροφες εικόνες των ανοικτών συνόλων είναι μετρήσιμες, σε σύγκριση με την ισχυρή μετρησιμότητα (strong measurability): οι αντίστροφες εικόνες κλειστών συνόλων είναι μετρήσιμες. Ωστόσο στο πλαίσιο που θα ασχοληθούμε (πλήρεις σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου), αυτές οι δύο έννοιες συμπίπτουν. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε απλώς τη λέξη "μετρήσιμη".*

Το πεδίο ορισμού μιας μετρήσιμης απεικόνισης είναι μετρήσιμο καθώς και το συμπλήρωμα του: $\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) = \emptyset\}$.

Μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση έχει μετρήσιμη επιλογή:

Ορισμός 7.1.2

Θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{A})$ ένα μετρήσιμο χώρο και X έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο. Θεωρούμε μια πλειότιμη απεικόνιση $F: \Omega \multimap X$. Μια μετρήσιμη μονότιμη απεικόνιση $f: \Omega \mapsto X$ τέτοια ώστε $\forall \omega \in \Omega,\ f(\omega) \in F(\omega)$ ονομάζεται μετρήσιμη επιλογή (measurable selection) της F.

Θεώρημα 7.1.3 (Μετρήσιμη Επιλογή - Measurable Selection)

Θεωρούμε X ένας πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο, $(\Omega, \mathcal{A})$ έναν μετρήσιμο χώρο, F μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση από το Ω σε κλειστά μη κενά υποσύνολα του X.
Τότε , υπάρχει μια μετρήσιμη επιλογή της F.

Απόδειξη

Έστω ένα μετρήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n\}_{n\geq 1}$ του X.
Θα κατασκευάσουμε με επαγωγή μια ακολουθία μετρήσιμων απεικονίσεων $f_k: \Omega \mapsto X, k \geq 0$ οι οποίες λαμβάνουν τιμές στο $\{x_n\}_{n\geq 1}$ και συγκλίνουν ομοιόμορφα σε μια επιλογή f της F οπότε η f είναι μετρήσιμη.

Έστω d η απόσταση στον μετρικό χώρο X. Για κάθε $\omega \in \Omega$ θεωρούμε $n \geq 1$ να είναι ο μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε $F(\omega) \cap \overset{o}{B}(x_n, 1) \neq \emptyset$. Θέτουμε $f_0(\omega) = x_n$. Τότε η $f_0(\cdot)$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον

$$\forall \omega \in \Omega,\ d(f_0(\omega), F(\omega)) < 1$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη κατασκευάσει μετρήσιμες απεικονίσεις

$$f_k: \Omega \mapsto \{x_n\}_{n\geq 1},\ k = 0, \dots, m$$

που ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\forall\ 0 \leq k \leq m,\ \forall \omega \in \Omega,\ d(f_k(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^k} \qquad (7.2)$$

και $$\forall\ 0 \leq k < m-1,\ d(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)) < \frac{1}{2^{k-1}} \qquad (7.3)$$

Για κάθε n ορίζουμε το σύνολο

$$S_n = \{\omega \in \Omega \mid f_m(\omega) = x_n\}$$

Τα σύνολα S_n είναι ξένα μεταξύ τους και $\bigcup_{n\geq 1} S_n = \Omega$. Επιπλέον από την (7.2) προκύπτει ότι

$$\forall \omega \in S_n,\ F(\omega) \cap \overset{\circ}{B}(x_n, 2^{-m}) \neq \emptyset$$

Έστω $\omega \in \Omega$ και n τέτοιο ώστε $\omega \in S_n$. Θεωρούμε τον μικρότερο ακέραιο r έτσι ώστε

$$F(\omega) \cap \overset{\circ}{B}(x_n, 2^{-m}) \cap \overset{o}{B}\left(x_r, 2^{-(m+1)}\right) \neq \emptyset$$

και ορίζουμε $f_{m+1}(\omega) = x_r$. Τότε

$$d(f_m(\omega), f_{m+1}(\omega)) \leq 2^{-m} + 2^{-(m+1)} < 2^{-m+1}$$

Επιπλέον

$$d(f_{m+1}(\omega), F(\omega)) < 2^{-(m+1)}$$

Κατά συνέπεια ορίζεται μια μετρήσιμη απεικόνιση

$$f_{m+1}: \Omega \mapsto \{x_n\}_{n\geq 1}$$

που επαληθεύει τις (7.2), (7.3) αν το m αντικατασταθεί από το $m+1$.

Από την ανισότητα (7.3) προκύπτει ότι για κάθε $\omega \in \Omega$, η $(f_k(\omega))_{k\geq 1}$ είναι μια ακολουθία Cauchy σε έναν πλήρη μετρικό χώρο X. Άρα συγκλίνει. Έστω $f(\omega)$ το όριο των $f_k(\omega)$. Από το (7.3) συμπεραίνουμε ότι f_k συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και από (7.2) ότι

$$d(f(\omega), F(\omega)) = 0$$

Έτσι η f είναι μετρήσιμη και για κάθε $\omega \in \Omega$, με $f(\omega) \in F(\omega)$.□

Το επόμενο θεώρημα παρέχει αρκετούς χρήσιμους χαρακτηρισμούς της μετρησιμότητας. Για τον σκοπό αυτό, συμβολίζουμε με $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ τη $\sigma -$ άλγεβρα που παράγεται από το γινόμενο $A \times B$ οπού $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του μετρικού χώρου X.)

Θεώρημα 7.1.4 (Θεώρημα Χαρακτηρισμού -Characterization Theorem)

Θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ να είναι πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, X έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο και $F: \Omega \multimap X$ μια πλειότιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές εικόνες. Τότε , οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

i) $\eta\, F$ είναι μετρήσιμη

ii) Το γράφημα της F ανήκει στο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

iii) $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ για κάθε κλειστό σύνολο $C \subset X$

iv) $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε σύνολο Borel $B \subset X$

v) Για κάθε $x \in X$ η απεικόνιση $d(x, F(\cdot))$ είναι μετρήσιμη

vi) Υπάρχει μια ακολουθία μετρήσιμων επιλογών $(f_n)_{n\geq 1}$ της F έτσι ώστε:

$\forall \omega \in \Omega,\ F(\omega) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} f_n(\omega)}$

Μια μετρήσιμη οικογένεια επιλογών που ικανοποιούν την τελευταία ιδιότητα λέγεται ότι είναι *πυκνή* (*dense)*.

Η ισοδυναμία των προτάσεων i) και ii) είναι θεμελιώδης στο πλαίσιο της γραφικής μας προσέγγισης, καθώς χαρακτηρίζει τις μετρήσιμες απεικονίσεις συνόλων μέσω της μετρησιμότητας των γραφημάτων τους.

Η ισοδυναμία των προτάσεων i) και vi), λόγω του *θεωρήματος Castaing(7.3.1)*, είναι επίσης πολύ χρήσιμη, καθώς η αριθμησιμότητα είναι βασική σε πολλά προβλήματα μετρησιμότητας. Θα αποδείξουμε αυτό το θεώρημα στην τρίτη ενότητα. Αλλά πρώτα το χρησιμοποιούμε για να παρέχουμε κάποιες ιδιότητες των μετρήσιμων πλειότιμων απεικονίσεων

7.2. Λογισμός Μετρήσιμων Απεικονίσεων

Αναπτύσσουμε σε αυτή την ενότητα τον λογισμό των μετρήσιμων πλειότιμων απεικονίσεων σε πλήρεις σ-πεπερασμένους χώρους μέτρου. Ωστόσο, ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει ότι ορισμένα από τα παρακάτω αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν σε γενικότερες περιπτώσεις.

Οι ημισυνεχείς απεικονίσεις είναι μετρήσιμες:

Πρόταση 7.2.1 (Συνέχεια και μετρησιμότητα)

Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο Ω και ένα πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του Ω. Θεωρούμε ότι ο X είναι ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $F: \Omega \multimap X$ μια πλειότιμη απεικόνιση με κλειστές μη κενές εικόνες. Αν F είναι άνω ημισυνεχής (ή κάτω ημισυνεχής), τότε η F είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη

Εάν F είναι άνω ημισυνεχής, τότε για κάθε κλειστό σύνολο $C \subset X$, $F^{-1}(C)$ είναι κλειστό. Αν F είναι κάτω ημισυνεχής, τότε για κάθε ανοιχτό σύνολο $\mathcal{O} \subset X, F^{-1}(\mathcal{O})$ είναι ανοιχτό. Συμπεραίνουμε από το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4* ότι η F είναι μετρήσιμη.□

Θεώρημα 7.2.2 (Κυρτής θήκης-Convex Hull)

Θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ να είναι πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και $F: \Omega \multimap X$ μια πλειότιμη απεικόνιση με κλειστές εικόνες. Τότε, η απεικόνιση $\Omega \ni \omega \multimap \overline{\mathrm{co}} F(\omega)$ είναι μετρήσιμη.

Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα χρειαζόμαστε το ακόλουθο γνωστό αποτέλεσμα:

Υπενθυμίζουμε ότι *μια απεικόνιση φ από το $\Omega \times X$ σε μετρικό χώρο Y ονομάζεται Καραθεοδωρή, αν για κάθε $x \in X$, η $\varphi(\cdot, x)$ είναι μετρήσιμη και για κάθε $\omega \in \Omega$, η $\varphi(\omega, \cdot)$ είναι συνεχής.*

Λήμμα 7.2.3 . Θεωρούμε δύο πλήρεις διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους X, Y, ένα χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A})$ και μια απεικόνιση Καραθεοδωρή $\varphi: \Omega \times X \mapsto Y$. Τότε για κάθε μετρήσιμη $f: \Omega \mapsto X$ η απεικόνιση $\omega \mapsto \varphi(\omega, f(\omega))$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη

Αφού η $f(\cdot)$ είναι μετρήσιμη, υπάρχει μια ακολουθία απλών μετρήσιμων απεικονίσεων $f_n: \Omega \mapsto X$ συγκλίνουσα σημειακά προς την f. Τότε η απεικόνιση $\omega \mapsto \varphi(\omega, f_n(\omega))$ είναι μετρήσιμη. Επειδή η φ είναι συνεχής σε σχέση με τη δεύτερη μεταβλητή,

$$\forall \omega \in \Omega, \lim_{n \to \infty} \varphi(\omega, f_n(\omega)) = \varphi(\omega, f(\omega))$$

Έτσι $\varphi(\omega, f(\omega))$ είναι το σημειακό όριο των μετρήσιμων απεικονίσεων .Άρα είναι μετρήσιμη.

□

Απόδειξη του θεωρήματος 7.2.2

Δεν είναι περιοριστικό να υποθέσουμε ότι F έχει μη κενές. εικόνες .Το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού* 7.1.4 υπονοεί ότι υπάρχει μια πυκνή ακολουθία μετρήσιμων επιλογών $(f_n)_{n\geq 1}$ της F. Αν $\mathbf{Q}_+$υποδηλώνει όλους τους μη αρνητικούς ρητούς αριθμούς θεωρούμε το σύνολο

$$\Lambda := \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \middle| \lambda_i \in \mathbf{Q}_+, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \geq 1\right\}$$

και τη μετρήσιμη οικογένεια απεικονίσεων $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ οπού $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda$. Με το *Λήμμα 7.2.3* οι απεικονίσεις αυτές είναι μετρήσιμες επιλογές του $\overline{coF}$. Είναι επίσης πυκνές στο $\overline{coF}$. Από το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4* προκύπτει η απόδειξη.□

Θεώρημα 7.2.4 (Ένωση και Τομή-Union and Intersection)

Θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ έναν πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου, X έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο και $F_n: \Omega \multimap X$ πλειότιμες απεικονίσεις με κλειστές εικόνες. Τότε, οι απεικονίσεις

i) $\Omega \ni \omega \multimap G(\omega) := \overline{\bigcup_{n\geq 1} F_n(\omega)}$ και

ii) $\Omega \ni \omega \multimap H(\omega) := \bigcap_{n\geq 1} F_n(\omega)$

είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη

i) Έστω ανοιχτό σύνολο $\mathcal{O} \subset X$. Τότε

$$G^{-1}(\mathcal{O}) = \left\{\omega \in \Omega \middle| \bigcup_{n\geq 1} (F_n(\omega) \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset\right\} = \bigcup_{n\geq 1} F_n^{-1}(\mathcal{O})$$

Άρα η G είναι μετρήσιμη

Για να αποδείξουμε το ii) παρατηρούμε ότι η H έχει κλειστές εικόνες και

$$\text{Graph } (H) = \bigcap_{n\geq 1} \text{Graph } (F_n)$$

Από *το Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4*,το γράφημα της (F_n) ανήκει στο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ άρα και το γράφημα της H, η οποία είναι μετρήσιμη, χάρη στο ίδιο θεώρημα.□

Θεώρημα 7.2.5 (Κατώτερα και Ανώτερα Όρια-Lower and Upper Limits)

Θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ να είναι πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, X έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο και $F_n: \Omega \multimap X, n \geq 1$ πλειότιμες απεικονίσεις με κλειστές εικόνες. Τότε, οι απεικονίσεις

$\Omega \ni \omega \multimap \text{Liminf}_{n\to\infty} F_n(\omega)$ & $\Omega \ni \omega \multimap \text{Limsup}_{n\to\infty} F_n(\omega)$ είναι μετρήσιμες.

Κατά συνέπεια, αν για κάθε $\omega \in \Omega$, οι εικόνες $F_n(\omega)$ συγκλίνουν σε ένα υποσύνολο $F(\omega)$, η πλειότιμη απεικόνιση F (που ονομάζεται σημειακό όριο pointwise limit) είναι μετρήσιμη. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα 7.2.6

Θεωρούμε έναν μετρήσιμη χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, πλήρεις διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους X, Y και έστω $g: \Omega \times X \mapsto Y$ μια απεικόνιση Καραθεοδωρή. Τότε η g είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη.

Απόδειξη

Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία απεικονίσεων $g_n: \Omega \times X \mapsto Y$ μετρήσιμες στο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, που συγκλίνουν σημειακά στο g. Θεωρούμε μια πυκνή ακολουθία $x_k \in X, k \geq 1$. Έστω $(\omega, x) \in \Omega \times X$. Για κάθε $n \geq 1$ έστω k ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την

$$x \in \mathring{B}\left(x_k, \frac{1}{n}\right)$$

Θέτουμε $g_n(\omega, x) = g(\omega, x_k)$. Τότε η g_n συγκλίνει σημειακά προς τη g. Επιπλέον

$$\forall y \in Y_k := \overset{o}{B}\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup_{m<k} \overset{o}{B}\left(x_m, \frac{1}{n}\right), \quad g_n(\omega, y) = g(\omega, x_k)$$

Αλλά $\cup_{n\geq 1} Y_k = X$ και Άρα για κάθε n , οι g_n είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμες □.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.5

Από το λήμμα 7.2.6 και το θεώρημα 7.1.4 η απεικόνιση $(\omega, x) \mapsto d(F_n(\omega), x)$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη. Έτσι για κάθε $\varepsilon > 0$,

Graph $\big(B(F_n(\cdot), \varepsilon)\big) := \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid d(F_n(\omega), x) \leq \varepsilon\} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$

Αυτό και το Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4 συνεπάγονται ότι η απεικόνιση

$$\omega \multimap B(F_n(\omega), \varepsilon) \text{είναι μετρήσιμη}$$

Τότε, το αποτέλεσμα προκύπτει από το *Θεώρημα* 7.2.4 και τις ισότητες

$$\begin{cases} \text{i) } \operatorname{Liminf}_{n\to\infty} F_n(\omega) = \bigcap_{k\geq 1} \overline{\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} B\left(F_n(\omega), \frac{1}{k}\right)} \\ \text{ii) } \operatorname{Limsup}_{n\to\infty} F_n(\omega) = \bigcap_{N\geq 1} \overline{\bigcup_{n\geq N} F_n(\omega)} \end{cases}$$

Ορισμός 7.2.7 Θεωρούμε τους μετρικούς χώρους X, Y και ένα χώρο μέτρου$(\Omega, \mathcal{A})$.

Μια πλειότιμη απεικόνιση $G: \Omega \times X \multimap Y$ με κλειστές τιμές ονομάζεται απεικόνιση Καραθεοδωρή αν για κάθε $x \in X$ η απεικόνιση $\omega \multimap G(\omega, x)$ είναι μετρήσιμη και για κάθε $\omega \in \Omega$ η απεικόνισης $x \multimap G(\omega, x)$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 7.2.8 (Άμεσης εικόνας-Direct Image)

Θεωρούμε $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ να είναι πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου ,X έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο και $F: \Omega \multimap X$ μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση με κλειστές εικόνες.

Θεωρούμε μια πλειότιμη απεικόνιση Καραθεοδωρή G από $\Omega \times X$ σε έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο Y. Τότε, η απεικόνιση

$$\Omega \ni \omega \multimap \overline{G(\omega, F(\omega))}$$

είναι μετρήσιμη.

Ειδικότερα για κάθε μετρήσιμη μονότιμη απεικόνιση $z: \Omega \mapsto X$, η πλειότιμη απεικόνιση $\omega \multimap G(\omega, z(\omega))$ είναι μετρήσιμη και για κάθε Καραθεοδωρή μονότιμη απεικόνιση φ από τo $\Omega \times X$ προς τo Y, η πλειότιμη απεικόνιση

$$\Omega \ni \omega \multimap \overline{\varphi(\omega, F(\omega))}$$

είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη

Δεν είναι περιοριστικό να υποθέσουμε ότι F δεν έχει κενές εικόνες. Από το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4*, υπάρχει μια πυκνή ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1}$ μετρήσιμων επιλογών F.

Ισχυριζόμαστε ότι η $\omega \multimap G(\omega, f_n(\omega))$ είναι μετρήσιμη. Πράγματι, θεωρούμε μια ακολουθία μετρήσιμων απλών απεικονίσεων f_{nk} από το Ω προς το X, που συγκλίνουν σημειακά στην f_n όταν $k \to \infty$. Τότε, δεδομένου ότι οι f_{nk} είναι απλές, για κάθε k η πλειότιμη απεικόνιση $\omega \multimap G(\omega, f_{nk}(\omega))$ είναι μετρήσιμη. Από την άλλη, δεδομένου ότι η $G(\omega, \cdot)$ είναι συνεχής, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathrm{Lim}_{k\to\infty}\ G(\omega, f_{nk}(\omega)) = G(\omega, f_n(\omega))$

και από το *Θεώρημα 7.2.5*, συμπεραίνουμε ότι αυτό το όριο είναι και πάλι μια μετρήσιμη απεικόνιση.

Επίσης, δεδομένου ότι η G είναι συνεχής σε σχέση με τη δεύτερη μεταβλητή και $(f_n)_{n\geq 1}$ είναι πυκνό, για κάθε $\omega \in \Omega$

$$G(\omega, F(\omega)) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} G(\omega, f_n(\omega))}$$

Από το Θεώρημα 7.2.4 προκύπτει η απόδειξη. □

Θεώρημα 7.2.9 (Αντίστροφης εικόνας-Inverse Image))

Θεωρούμε ένα πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, πλήρεις διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους X, Y, και μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις $F: \Omega \multimap X, G: \Omega \multimap Y$ με κλειστές εικόνες. Έστω $g: \Omega \times X \mapsto Y$ μια απεικόνιση Καραθεοδωρή. Τότε η πλειότιμη απεικόνιση που ορίζεται από την ισότητα

$$H(\omega) := \{x \in F(\omega) \mid g(\omega, x) \in G(\omega)\}$$

είναι μετρήσιμη. Κατά συνέπεια, αν

$$\forall \omega \in \Omega,\ g(\omega, F(\omega)) \cap G(\omega) \neq \emptyset$$

τότε υπάρχει μια μετρήσιμη επιλογή f της F έτσι ώστε κάθε $\omega \in \Omega$, το $g(\omega, f(\omega))$ να ανήκει στο $G(\omega)$.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση H έχει κλειστές εικόνες. Ορίζουμε την μονότιμη απεικόνιση $\varphi: \Omega \times X \mapsto \Omega \times Y$ ως εξής $\varphi(\omega, x) = (\omega, g(\omega, x))$. Τότε, από το Λήμμα 7.2.6,

$$\forall B \in \mathcal{B}(Y),\ \{(\omega, x) \mid g(\omega, x) \in B\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\text{Graph }(H) = \text{Graph }(F) \cap \varphi^{-1}(\text{Graph (G)})$$

Από το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4*,

$$\text{Graph}(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X) \quad \& \quad \text{Graph }(G) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$$

Από την άλλη για κάθε $A \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$,

$$\varphi^{-1}(A \times B) = \{(\omega, x) \mid g(\omega, x) \in B\} \cap (A \times X) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$$

Άρα για κάθε $C \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$, $\varphi^{-1}(C) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$.

Έτσι το Graph (H) ανήκει στο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$ και από το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4*, συμπεραίνουμε ότι η H είναι μετρήσιμη. Τέλος, από το *Θεώρημα Μετρήσιμης Επιλογής* προκύπτει ότι έχει μετρήσιμη επιλογή, όποτε η H δεν έχει κενές εικόνες.□

Ως συνέπεια των παραπάνω, λαμβάνουμε το πολύ χρήσιμο :

Θεώρημα 7.2.10 (Filippov)

Θεωρούμε ένα πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, πλήρεις διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους X, Y και μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση $F: \Omega \multimap X$ με κλειστές μη κενές εικόνες. Έστω $g: \Omega \times X \mapsto Y$ μια απεικόνιση Καραθεοδωρή. Τότε, για κάθε μετρήσιμη απεικόνιση $h: \Omega \mapsto Y$ τέτοια ώστε

$$h(\omega) \in g(\omega, F(\omega)) \text{ για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega$$

υπάρχει μετρήσιμη επιλογή $f(\omega) \in F(\omega)$ έτσι ώστε

$$h(\omega) = g\big(\omega, f(\omega)\big) \text{ για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega$$

Οι περιθώριες απεικονίσεις είναι μετρήσιμες υπό τις ακόλουθες συνθήκες:

Θεώρημα 7.2.11 (Περιθώριας απεικόνισης-Marginal Map)

Θεωρούμε ένα πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, πλήρεις διαχωρίσιμους μετρικούς χώροι X, Y μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση $F: \Omega \multimap X$ με κλειστές μη κενές εικόνες και μια συνάρτηση Καραθεοδωρή $f: \Omega \times X \mapsto \mathbf{R}$. Τότε, η περιθώρια συνάρτηση $v: \Omega \mapsto \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\forall \omega \in \Omega,\ v(\omega) := \inf_{x \in F(\omega)} f(\omega, x)$$

είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, η περιθώρια απεικόνιση R που ορίζεται από

$$\forall \omega \in \Omega,\ R(\omega) := \left\{ x \in F(\omega) \mid f(\omega, x) = \inf_{y \in F(\omega)} f(\omega, y) \right\}$$

είναι επίσης μετρήσιμη.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το εξής:

Λήμμα 7.2.12

Θεωρούμε έναν μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$. Τότε, για κάθε ακολουθία μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων $f_n: \Omega \mapsto \mathbf{R}$, η συνάρτηση

$$\omega \mapsto f(\omega) := \inf_{n \geq 1} f_n(\omega) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$$

έχει μετρήσιμο πεδίο ορισμού και είναι μετρήσιμη σε αυτό. Μια παρόμοια πρόταση ισχύει για το $\sup_{n \geq 1} f_n$.

Απόδειξη θεωρήματος 7.2.11

Θεωρούμε μια πυκνή οικογένεια μετρήσιμων επιλογών $(g_n)_{n \geq 1}$ της απεικόνισης F. Δεδομένου ότι οι απεικονίσεις $f(\omega, \cdot)$ είναι συνεχείς, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall \omega \in \Omega,\ v(\omega) = \inf_{n \geq 1} f(\omega, g_n(\omega))$$

Δεδομένου ότι οι απεικονίσεις $\omega \mapsto f(\omega, g_n(\omega))$ είναι μετρήσιμες από το *Λήμμα 7.2.3*, συμπεραίνουμε από το *Λήμμα 7.2.12* ότι η v είναι επίσης μετρήσιμη.

Η εφαρμογή του *Θεωρήματος 7.2.9* στις αντίστροφες μετρήσιμων απεικονίσεων συνεπάγεται ότι η περιθώρια απεικόνιση R είναι μετρήσιμη, δεδομένου ότι

$$R(\omega) = \{x \in F(\omega) \mid f(\omega, x) = v(\omega)\}$$

και η v είναι μετρήσιμη.□

Λήμμα 7.2.13

Θεωρούμε έναν πλήρη, σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, έναν πλήρη διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X, μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση $F: \Omega \multimap X$ με κλειστές εικόνες και μετρήσιμες μονότιμες απεικονίσεις $f: \Omega \mapsto X, \rho : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$. Τότε, οι ακόλουθες απεικονίσεις είναι μετρήσιμες:

- η απεικόνιση $\omega \multimap B(f(\omega), \rho(\omega))$
- η συνάρτηση απόστασης $\Omega \ni \omega \mapsto d(f(\omega), F(\omega))$
- η απεικόνιση προβολής $\Omega \ni \omega \multimap \Pi_{F(\omega)}(f(\omega))$ που ορίζεται από

$$\Pi_{F(\omega)}(f(\omega)) := \{x \in F(\omega) \mid d(x, f(\omega)) = d(f(\omega), F(\omega))\}$$

Κατά συνέπεια, αν για κάθε $\omega \in \Omega$, ισχύει $\Pi_{F(\omega)}(f(\omega)) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει μια μετρήσιμη επιλογή $g(\omega) \in F(\omega)$ τέτοια ώστε

$$d(f(\omega), g(\omega)) = d(f(\omega), F(\omega))$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\omega, x) = d(x, f(\omega))$. Από το *Λήμμα 7.2.3* είναι μετρήσιμη στο ω. Δεδομένου ότι είναι επίσης συνεχής στο x μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το *Θεώρημα 7.2.9* με $F \equiv X$, $G(\omega) = [0, \rho(\omega)]$.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη και την τρίτη πρόταση, εφαρμόζουμε το *Θεώρημα 7.2.11* στη συνάρτηση $(\omega, x) \mapsto d(x, f(\omega))$□

Θεώρημα 7.2.14 (Συνάρτηση Υποστήριξης- Support Function)

Θεωρούμε ένα πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,X έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach, $F: \Omega \multimap X$ μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές εικόνες. Τότε, έχει μετρήσιμες συναρτήσεις υποστήριξης δηλαδή:

για κάθε $p \in X^\star$ η συνάρτηση $\omega \mapsto \sigma(F(\omega), p) := \sup_{f \in F(\omega)} \langle p, f \rangle$ είναι μετρήσιμη

Η αντίστροφη πρόταση ισχύει αν ο δυικός χώρος του X είναι διαχωρίσιμος και οι εικόνες του F είναι κυρτές και φραγμένες.

Απόδειξη

Το *θεώρημα 7.2.11* υποδηλώνει ότι οι συναρτήσεις υποστήριξης. $\sigma(F(\cdot), p)$ είναι μετρήσιμες. Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι για κάθε $p \in X^\star$, η $\sigma(p, F(\cdot))$ είναι μετρήσιμη, ότι ο $X^\star$ είναι διαχωρίσιμος και η F έχει κλειστές κυρτές και φραγμένες εικόνες. Για να αποδειχθεί η τελευταία δήλωση είναι αρκετή για να επαληθεύσει ότι για κάθε x, η απεικόνιση $\omega \mapsto d(x, F(\omega))$ είναι μετρήσιμη.

Παρατηρούμε ότι αφού το $F(\omega)$ είναι φραγμένο, η συνάρτηση υποστήριξής του $\sigma(F(\omega), \cdot)$ είναι συνεχής. Έστω $p_n \in X^\star, n \geq 1$ ένα πυκνό σύνολο σημείων της μοναδιαίας σφαίρας του $X^\star$. Από την υπόθεσή μας, για κάθε $n \geq 1$, η $\sigma(F(\cdot), p_n)$ είναι μετρήσιμη. Έστω $x \in X$. Τότε, με δεδομένο ότι το $F(\omega)$ είναι κλειστό και κυρτό, παίρνουμε

$$\begin{cases} d(x,F(\omega)) = d(0,F(\omega)-x) = -\inf_{\|p\|_* \le 1} \sigma(F(\omega)-x,p) \\ = \sup_{\|p\|_* \le 1} (\langle p,x\rangle - \sigma(F(\omega),p)) = \sup_{n\ge 1}\left(\langle p_n,x\rangle - \sigma(F(\omega),p_n)\right) \end{cases}$$

Έτσι η $d(x,F(\cdot))$ είναι το supremum μετρήσιμων συναρτήσεων. Κατά συνέπεια είναι μετρήσιμη.□

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι πολύ χρήσιμο για τη μελέτη προβλημάτων χαλάρωσης στη θεωρία ελέγχου.

Θεώρημα 7.2.15 (Αναπαράστασης Καραθεοδωρή -Caratheodory Representation)

Θεωρούμε ένα πλήρη σ-πεπερασμένο χώρο μέτρου $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση $G:\Omega \multimap \mathbf{R}^n$ με μη κενές κλειστές εικόνες και μετρήσιμη επιλογή $f(\omega) \in \mathrm{co}(G(\omega))$. Τότε, υπάρχουν μετρήσιμες συναρτήσεις $\lambda_k:\Omega \mapsto \mathbf{R}_+$και μετρήσιμες επιλογές $f_k(\omega) \in G(\omega), k=0,\dots n$ έτσι ώστε

$$f(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(\omega) f_k(\omega) \quad \& \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(\omega) = 1$$

Απόδειξη

Έστω S^{n+1} να συμβολίζει το σύνολο όλων των σημείων $(\lambda_0,\dots,\boldsymbol{\lambda_n}) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$ έτσι ώστε $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k = 1$. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση

$$h: \mathbf{R}_+^{n+1} \times (\mathbf{R}^n)^{n+1} \mapsto \mathbf{R}^n$$

που ορίζεται από

$$h(\lambda_0,\dots,\lambda_n,x_0,\dots,x_n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$$

και την μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση $F(\omega) = S^{n+1} \times (G(\omega))^{n+1}$

Από το θεώρημα Καραθεοδωρή, $f(\omega) \in h(F(\omega))$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη εφαρμόζοντας θεώρημα 7.2.9 σε αυτήν την πλειότιμη απεικόνιση F με $g(\omega,x) = h(x)$ και την απεικόνιση G ίση με f.

7.3. Απόδειξη του Θεωρήματος Χαρακτηρισμού

Το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4* είναι η συνέπεια τόσο του *Θεωρήματος Castaing* όσο και ενός κλασικού αποτελέσματος στην συνάρτηση προβολή ορισμένων κατηγοριών υποσυνόλων Borel.

Δείχνουμε πρώτα ότι μια απεικόνιση είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν έχει ένα μετρήσιμο πυκνό υποσύνολο μετρήσιμων επιλογών.

Θεώρημα 7.3.1 (Castaing)

Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ να είναι χώρος μέτρου, X ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $F: \Omega \multimap X$ να είναι ένας πλειότιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές εικόνες. Τότε, οι προτάσεις $i), v), vi$) του *Θεωρήματος Χαρακτηρισμού 7.1.4* είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

- Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι $i) \Longrightarrow vi.$ Θεωρούμε ένα πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο $\{x_n\}_{n\geq 1}$ του X. Για όλα τα $n, k \geq 1$ ορίζουμε την πλειότιμη απεικόνιση $G_{nk}: \Omega \multimap X$ ως εξής:

$$G_{nk}(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap \overset{o}{B}\left(x_n, \frac{1}{k}\right) & \text{αν } F(\omega) \cap \overset{o}{B}\left(x_n, \frac{1}{k}\right) \neq \emptyset \\ F(\omega) & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε $F_{nk}(\omega) = \overline{G_{nk}(\omega)}$. Τότε η F_{nk} έχει μη κενές κλειστές εικόνες και είναι μετρήσιμη. Αυτό προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του G_{nk} και την ισότητα:

$$\text{για κάθε ανοικτό } \mathcal{O} \subset X,\ F_{nk}^{-1}(\mathcal{O}) = G_{nk}^{-1}(\mathcal{O})$$

Άρα, από το *Θεώρημα 7.1.3* η F_{nk} έχει μετρήσιμη επιλογή f_{nk}.

Απομένει να επαληθευτεί ότι για κάθε $\omega \in \Omega$, οι τιμές $f_{nk}(\omega)$ είναι πυκνές στο $F(\omega)$.

Έστω $x \in F(\omega)$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $k \geq 1$ τέτοια ώστε $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και n τέτοια ώστε $d(x_n, x) < \frac{1}{k}$. Έτσι $F(\omega) \cap B(x_n, 1/k) \neq \emptyset$ και $f_{nk}(\omega) \in B\left(x_n, \frac{1}{k}\right)$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$d(f_{nk}(\omega), x) \leq d(f_{nk}(\omega), x_n) + d(x_n, x) < \varepsilon$$

Αφού $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, προκύπτει η απόδειξη του ισχυρισμού.

- Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι $vi) \Longrightarrow v.$

Έστω $f_n(\cdot)$ ορισμένες όπως στο $vi)$. Θεωρούμε $x \in X$ και συμβολίζουμε με d την μετρική του X. Τότε, για κάθε n, η συνάρτηση $\omega \mapsto d(x, f_n(\omega))$ είναι μετρήσιμη (χάρη στο *Λήμμα 7.2.3.*) Κατά συνέπεια, η συνάρτηση

$$\omega \mapsto d(x, F(\omega)) = \inf_{n\geq 1} d(x, f_n(\omega))$$

είναι επίσης μετρήσιμη και η πρόταση v) αποδεικνύεται.

- Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η v) ισχύει. Τότε, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύει

$$\{\omega \in \Omega \mid d(x, F(\omega)) < r\} = F^{-1}(\overset{o}{B}(x, r)) \in \mathcal{A}$$

Θεωρούμε ανοιχτό σύνολο $\mathcal{O} \subset X$. Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, το $\mathcal{O}$ είναι μια μετρήσιμη ένωση από σφαίρες $\overset{o}{B}(x_n, r_n)$. Έτσι

$F^{-1}(\mathcal{O}) = \cup_{n\geq 1} F^{-1}\left(\overset{\circ}{B}(x_n, r_n)\right) \in \mathcal{A}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.□

Για να αποδείξουμε το υπόλοιπο *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4.* χρειαζόμαστε μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα της συνάρτησης προβολής που ισχύει στους πλήρεις μετρικούς χώρους

Θεώρημα 7.3.2 (Μετρήσιμη Προβολή-Measurable Projection)

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, X ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$. Τότε η προβολή του είναι μετρήσιμη δηλαδή :

$$\pi_\Omega(G) := \{\omega \in \Omega \mid \exists x \in X, (\omega, x) \in G\} \in \mathcal{A}$$

Η απόδειξη βρίσκεται στο :CASTAING CH. & VALADIER M. (1977) Convex Analysis AND MEASURABLE MULTIFUNCTIONS, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math.

Συνεχίζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος Χαρακτηρισμού 7.1.4

Γνωρίζουμε ήδη ότι $i) \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow vi$. Είναι σαφές ότι $v) \Longrightarrow iii$).

Για να δείξουμε ότι $ii) \Longrightarrow i$), θεωρούμε ένα ανοιχτό υποσύνολο $\mathcal{O} \subset X$ και ορίζουμε τα κλειστά σύνολα

$$C_n = \{x \in X \mid d(x, X \setminus \mathcal{O}) \geq \frac{1}{n}\}$$

όπου d δηλώνει την απόσταση . Τότε $\mathcal{O} = \cup_{n\geq 1} C_n$. Συνεπώς $F(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ αν και μόνο αν για κάποια $n \geq 1, F(\omega) \cap C_n \neq \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$F^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{n\geq 1} F^{-1}(C_n) \in \mathcal{A}$$

και η πρόταση $i)$ απεδείχθη

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $v) \Rightarrow$ ii). Παρατηρούμε ότι

$$\text{Graph } (F) = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid d(x, F(\omega)) = 0\}$$

Από το *Λήμμα 7.2.6* η συνάρτηση $(\omega, x) \mapsto d(x, F(\omega))$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ μετρήσιμη. Άρα

$$\{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid d(x, F(\omega)) = 0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Έτσι Graph $(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Παρατήρηση: *Είναι αρκετά δελεαστικό να σκεφτούμε ότι η προβολή (και επομένως οποιαδήποτε συνεχής εικόνα) ενός συνόλου Borel θα πρέπει να είναι ακόμα ένα σύνολο Borel. Αυτός ο ισχυρισμός διατυπώθηκε κάποτε από τον Lebesgue. Ο Suslin, ο οποίος είχε ανακαλύψει* *αυτό το λάθος, δεν μπορούσε να πιστέψει ότι ο μεγάλος Lebesgue θα διέπραττε ένα τέτοιο λάθος. Η ανακάλυψη συνόλων Borel των οποίων η συνεχής εικόνα δεν είναι Borel ξεκίνησε την εντατική μελέτη αναλυτικών συνόλων, δηλαδή συνεχών εικόνων συνόλων Borel, τα οποία έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες.*

Τελειώνουμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι η ii) ισχύει και παρατηρώντας ότι για κάθε σύνολο Borel $B \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$F^{-1}(B) = \pi_{\Omega}(\text{Graph } (F) \cap (\Omega \times B))$$

Αλλά το Graph $(F) \cap (\Omega \times B)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το *Θεώρημα 7.3.2*, συμπεραίνουμε την iv).

7.4. Όρια Μετρήσιμων Απεικονίσεων και Επιλογών

Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ πλήρης $\sigma -$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Για μια μετρήσιμη απεικόνισης $f: \Omega \mapsto X$ έτσι ώστε το $\| f(\cdot) \|$ να ανήκει στο $L^1(X; \boldsymbol{R}, \mu)$, συμβολίζουμε με $\int_{\Omega} f d\mu$ ή $\int_{\Omega} f(\omega)\, \mu(d\omega)$ το ολοκλήρωμα του f.

Υπενθυμίζουμε ότι δύο μετρήσιμες μονότιμες απεικονίσεις είναι ίσες σχεδόν παντού εάν το σύνολο όπου είναι διαφορετικές είναι μηδενικού μέτρου.

Δηλώνουμε με $L^p(\Omega; X, \mu), 1 \leq p < \infty$ το χώρο Banach των μετρήσιμων απεικονίσεων $f: \Omega \mapsto X$ έτσι ώστε $\int_{\Omega} \| f \|^p \, d\mu < \infty$.

Θεωρούμε μια ακολουθία μετρήσιμων πλειότιμων απεικονίσεων

$$K_n: \Omega \ni \omega \multimap K_n(\omega) \subset X$$

Συνδέουμε με αυτές τα υποσύνολα $\mathcal{K}_n \subset L^p(\Omega; X, \mu)(1 \leq p < \infty)$ των επιλογών, που ορίζονται από

$$\mathcal{K}_{\boldsymbol{n}} := \{x(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega, x(\omega) \in K_n(\omega)\}$$

Ο σκοπός του επόμενου θεωρήματος είναι να συγκρίνει τα όρια των συνόλων $\mathcal{K}_n$ και τα σύνολα επιλογών $x(\cdot)$ των ορίων των συνόλων $K_n(\omega)$.

Θεώρημα 7.4.1

Ας υποθέσουμε ότι οι πλειότιμες απεικονίσεις K_n είναι μετρήσιμες, έχουν κλειστές εικόνες και ότι η απεικόνιση $\omega \mapsto \sup_{n \geq 1} d(0, K_n(\omega))$ ανήκει στο $L^p(\Omega; X, \mu)$ όπου $1 \leq p < \infty$.

Τότε

$$\begin{cases} \{x(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega \text{ }, x(\omega) \in \text{Liminf}_{n\to\infty} \; K_n(\omega)\} \\ \subset \text{Liminf}_{n\to\infty} \; \mathcal{K}_n \subset \text{Limsup}_{n\to\infty} \; \mathcal{K}_n \subset \\ \{ x(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{ για όλα σχεδόν τα } \omega \text{ }, x(\omega) \in \text{Limsup}_{n\to\infty} K_n(\omega) \} \end{cases}$$

Κατά συνέπεια, εάν τα υποσύνολα $K_n(\omega)$ έχουν ένα όριο $K(\omega)$ για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$ τότε, τα υποσύνολα $\mathcal{K}_n$ συγκλίνουν προς το υποσύνολο

$$\mathcal{K} := \{x(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega \ \mu\varepsilon \ , x(\omega) \in K(\omega)\}$$

Επιπλέον, αν η διάσταση του X είναι πεπερασμένη και αν ο χώρος $L^p(\Omega; X, \mu)$ είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία, τότε

$$\begin{cases} \sigma - \mathrm{Limsup}_{n\to\infty} \ \mathcal{K}_n \subset \\ \{x(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega \ , \ x(\omega) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} \ K_n(\omega))\} \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $x(\cdot)$ ανήκουν στο πρώτο υποσύνολο. Τότε, οι συναρτήσεις $a_n(\cdot)$ που ορίζονται από

$$a_n(\omega) := d(x(\omega), K_n(\omega))$$

είναι μετρήσιμες και συγκλίνουν στο 0 σχεδόν παντού. Επειδή

Αφού για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$, $a_n(\omega) \leq \| x(\omega) \| + \sup_{n\geq 1} d(0, K_n(\omega))$

και δεδομένου ότι η δεξιά πλευρά αυτής της ανισότητας ανήκει στο $L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$, συμπεραίνουμε από το *Θεώρημα του Lebesgue* ότι οι συναρτήσεις $a_n(\cdot)$ συγκλίνουν στο 0 στο $L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$. Έστω $k \in L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$ να είναι μια συνάρτηση με αυστηρά θετικές τιμές. Το *πόρισμα* 7.2.13 μας επιτρέπει να επιλέξουμε μια μετρήσιμη επιλογή $z_n(\cdot)$ από $K_n(\cdot)$ έτσι ώστε

$$\|x(\omega) - z_n(\omega)\| \leq a_n(\omega) + k(\omega)/n$$

Η επιλογή αυτή ανήκει στο $L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$ επειδή

$$\text{Για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega, \ \|z_n(\omega)\| \leq \| x(\omega) \| + a_n(\omega) + k(\omega)/n$$

Επομένως $z_n(\cdot)$ ανήκει στο $\mathcal{K}_n$ και συγκλίνει στο $x(\cdot)$ μέσα στο $L^p(\Omega; X, \mu)$ δηλαδή το $x(\cdot)$ ανήκει στο κατώτερο όριο των υποσυνόλων $\mathcal{K}_n$.

Ας επιλέξουμε μερικά $x(\cdot)$ στο ανώτατο όριο των υποσυνόλων $\mathcal{K}_n$. Τότε, υπάρχει μια υπακολουθία στοιχείων $z_{n'}(\cdot)$ του $\mathcal{K}_{n'}$ που συγκλίνουν στο $x(\cdot)$ μέσα στο $L^p(\Omega; X, \mu)$. Υπάρχει τότε μια υπακολουθία που συγκλίνει σχεδόν παντού στο $x(\cdot)$ και κατά συνέπεια, για σχεδόν όλα τα ω, το $x(\omega)$ ανήκει στο ανώτερο όριο των υποσυνόλων $K_n(\omega)$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το $x(\cdot)$ ανήκει στο ακολουθιακά ασθενές ανώτερο όριο των υποσυνόλων $\mathcal{K}_n$. Είναι ένα ασθενές όριο στο $L^p(\Omega; X, \mu)$ μιας υπακολουθίας συναρτήσεων $z_n(\cdot) \in \mathcal{K}_n$ και επίσης, χάρη στο Θεώρημα του Mazur, το ισχυρό όριο των κυρτών συνδυασμών $v_n(\cdot)$ των στοιχείων της ακολουθίας $z_n(\cdot)$. Τότε, μια υπακολουθία (και πάλι συμβολίζεται με) v_n συγκλίνει σχεδόν παντού προς το $x(\cdot)$. Συμπεραίνουμε όπως στην απόδειξη του *Θεωρήματος Σύγκλισης 7.2.1* ότι

για όλους σχεδόν $\omega \in \Omega, x(\omega) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} \ K_n(\omega))$□

7.5. Εφαπτόμενοι κώνοι σε χώρους Lebesgue

Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ πλήρης $\sigma -$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Ας εξετάσουμε μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση

$$K: \Omega \ni \omega \multimap K(\omega) \subset X$$

Συνδέουμε με αυτή το υποσύνολο $\mathcal{K} \subset L^p(\Omega; X, \mu)$ των επιλογών που ορίζονται από

$$\mathcal{K} := \{x(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega, x(\omega) \in K(\omega)\}$$

Θα χαρακτηρίσουμε τους ενδεχόμενους και παρακείμενους εφαπτόμενους κώνους στο $\mathcal{K}$ σε σχέση με τους εφαπτόμενους κώνους στα υποσύνολα $K(\omega)$.

Θεώρημα 7.5.1

Ας υποθέσουμε ότι η πλειότιμη απεικόνιση K είναι μετρήσιμη και έχει κλειστές εικόνες. Τότε, για κάθε $x \in \mathcal{K}$, οι πλειότιμες απεικονίσεις:

$$\Omega \ni \omega \multimap T_{K(\omega)}\big(x(\omega)\big) \ \ \& \ \ \Omega \ni \omega \multimap T^b_{K(\omega)}(x(\omega))$$

είναι μετρήσιμες. Επιπλέον

$$\begin{cases} \left\{v(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega, v(\omega) \in T^b_{K(\omega)}(x(\omega))\right\} \\ \subset T^b_{\mathcal{K}}(x(\cdot)) \subset T_{\mathcal{K}}(x(\cdot)) \\ \subset \left\{v(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega, v(\omega) \in T_{K(\omega)}(x(\omega))\right\} \end{cases}$$

Αυτό το θεώρημα και οι πολυάριθμες εφαρμογές του παρακινούν την εισαγωγή παρακείμενων εφαπτόμενων κώνων και παραγωγίσιμων συνόλων.

Απόδειξη

Έστω $x \in \mathcal{K}$ και $\omega \in \Omega$.

Έστω $\mathbf{Q}_+$ το μετρήσιμο σύνολο όλων των αυστηρά θετικών ρητών. Από τον ίδιο τον ορισμό των εφαπτόμενων κώνων, μπορούμε να γράψουμε

$$T_{K(\omega)}(x(\omega)) = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{Q}_+} cl\left(\bigcup_{h \in]0,\alpha] \cap \mathbf{Q}_+} \frac{K(\omega) - x(\omega)}{h}\right)$$

και

$$T^b_{K(\omega)}(x(\omega)) = \bigcap_{n>0} cl\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbf{Q}_+]} \bigcap_{h \in]0,\alpha] \cap \mathbf{Q}_+} \left(\frac{K(\omega) - x(\omega)}{h} + \frac{1}{n}B\right)\right)$$

Συμπεραίνουμε τον πρώτο ισχυρισμό από το *Θεώρημα 7.2.4.*

Για να αποδείξετε τη δεύτερη ισότητα, Θεωρούμε $v(\cdot)$ στο πρώτο υποσύνολο. Πρέπει να αποδείξουμε ότι όταν τα $h > 0$ συγκλίνουν στο 0 , υπάρχουν απεικονίσεις $v_h(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu)$ που συγκλίνουν στο $v(\cdot)$ έτσι ώστε

$$\text{για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega \ , \qquad x(\omega) + h v_h(\omega) \in K(\omega)$$

Ορίζουμε:

$$a_h(\omega) := d\left(v(\omega), \frac{K(\omega) - x(\omega)}{h}\right)$$

Οι συναρτήσεις a_h είναι μετρήσιμες και συγκλίνουν στο 0 σχεδόν παντού γιατί για σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$, το $v(\omega)$ ανήκει στον παρακείμενο κώνο του $K(\omega)$ στο $x(\omega)$

Δεδομένου ότι για σχεδόν όλα τα $\omega, a_h(\omega) \leq \| v(\omega) \|$ και $v \in L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$, από το θεώρημα σύγκλισης του Lebesgue, οι συναρτήσεις $a_h(\cdot)$ συγκλίνουν στο 0 στο $L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$.

Έστω $k \in L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$ με αυστηρά θετικές τιμές. Από το *πόρισμα 7.2.13* προκύπτει ότι για μερικούς $z_h \in \mathcal{K}$

$$\forall \omega \in \Omega, d\left(v(\omega), \frac{z_h(\omega) - x(\omega)}{h}\right) \leq a_h(\omega) + hk(\omega)$$

Ορίζουμε τώρα τις απεικονίσεις $v_h(\cdot)$ ως εξής:

$$v_h(\omega) := \frac{z_h(\omega) - x(\omega)}{h}$$

Είναι μετρήσιμες, και επαληθεύουν την ανισότητα

$$\|v_h(\omega) - v(\omega)\| \leq a_h(\omega) + hk(\omega)$$

και έτσι, συγκλίνουν στο $v(\cdot)$ στο $L^p(\Omega; X, \mu)$ επειδή η $a_h(\cdot)$ συγκλίνει στο 0 στο $L^p(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$.

Συμπεραίνουμε ότι το $v(\cdot)$ ανήκει στο $T^b_{\mathcal{K}}(x(\cdot))$ επειδή

$$\text{για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega,\ x(\omega) + hv_h(\omega) \in K(\omega)$$

Ας επιλέξουμε τα επόμενα μερικά $v(\cdot)$ στον ενδεχόμενο κώνο στο υποσύνολο $\mathcal{K}$. Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $h_n > 0$ και $v_n(\cdot)$ που συγκλίνουν αντίστοιχα στο 0 και στο $x(\cdot)$ μέσα στο $L^p(\Omega; X)$ και τέτοιες ώστε:

$$\text{για όλα σχεδόν τα } \omega \in \Omega, x(\omega) + h_n v_n(\omega) \in K(\omega)$$

Τότε, η υπακολουθία (και πάλι συμβολίζεται) $v_n(\cdot)$ συγκλίνει σχεδόν παντού προς τη $v(\cdot)$ και κατά συνέπεια, για όλα σχεδόν $\tau\alpha\ \omega$, το $v(\omega)$ ανήκει στον ενδεχόμενο κώνο στο υποσύνολο $K(\omega)$ στο $x(\omega)$.

Ως προφανή συνέπεια, λαμβάνουμε το

Πόρισμα 7.5.2

Ας υποθέσουμε ότι η πλειότιμη απεικόνιση K είναι μετρήσιμη και έχει κλειστές εικόνες. Έστω $x(\cdot) \in \mathcal{K}$. Αν για σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, τα υποσύνολα $K(\omega)$ είναι παραγωγίσιμα στο $x(\omega)$, έτσι είναι και το $\mathcal{K}$ στο x και

$T_K(x) = \{v(\cdot) \in L^p(\Omega; X, \mu) \mid \text{για όλα σχεδόν τα } \omega, v(\omega) \in T_{K(\omega)}(x(\omega))\}$

7.6. Ολοκλήρωμα πλειότιμων απεικονίσεων

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|$.

Σε αυτή την ενότητα διερευνούμε ορισμένες ιδιότητες του ολοκληρώματος μιας πλειότιμης απεικόνισης F από το Ω σε κλειστά μη κενά υποσύνολα του X.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων επιλογών της F:

$\mathcal{F} = \{f \in L^1(\Omega; X, \mu) \mid f(\omega) \in F(\omega)$ σχεδόν παντού στο $\Omega\}$

Μια πλειότιμη απεικόνιση$F: \Omega \multimap X$ ονομάζεται ολοκληρωμένα φραγμένη, εάν υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $k \in L^1(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$ έτσι ώστε

$$F(\omega) \subset k(\omega)B \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega$$

Σε αυτή την περίπτωση κάθε μετρήσιμη επιλογή F είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{F}$ χάρη στο Θεώρημα του Lebesgue.

Ο **Aumann** πρότεινε τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας πλειότιμης απεικόνισης με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 7.6.1

Το ολοκλήρωμα της F επί του Ω είναι το σύνολο των ολοκληρωμάτων των ολοκληρώσιμων επιλογών της F:

$$\int_\Omega F d\mu := \left\{ \int_\Omega f d\mu \mid f \in \mathcal{F} \right\}$$

Το ολοκλήρωμα είναι κυρτό όταν η F έχει κυρτές εικόνες και θα αποδειχθεί αργότερα ότι η κλειστότητά του εξακολουθεί να είναι κυρτή ακόμα και όταν οι εικόνες του F δεν είναι πλέον κυρτές.

Είναι επίσης σαφές ότι $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\int_\Omega \lambda F d\mu = \lambda \int_\Omega F d\mu$

Πρόταση 7.6.2

Θεωρούμε μετρήσιμες, ολοκληρωμένα φραγμένες πλειότιμες απεικονίσεις

$F, F_i: \Omega \multimap X, i = 1,2$ με μη κενές κλειστές εικόνες και σύνολο $G(\omega) := \overline{F_1(\omega) + F_2(\omega)}$.

Τότε

1. $\overline{\int_{\Omega} G d\mu} = \overline{\int_{\Omega} F_1 \mu + \int_{\Omega} F_2 d\mu}$

2. $\overline{\int_{\Omega} \overline{co} F d\mu} = \overline{co} \int_{\Omega} F d\mu$

3. $\forall p \in X^{\star}, \sigma\left(\int_{\Omega} F d\mu, p\right) = \int_{\Omega} \sigma(F(\omega), p)\mu(d\omega)$

4. Αν για κάποια $x \in \int_{\Omega} F d\mu$ και $p \in X^{\star}$ $< p, x >= \sigma\left(\int_{\Omega} F d\mu, p\right)$

τότε για κάθε $\bar{f} \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $x = \int_{\Omega} \bar{f} d\mu$ προκύπτει ότι

για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$, $< p, \bar{f}(\omega) >= \sigma(F(\omega), p)$

Απόδειξη

Από τα *Θεωρήματα 7.2.8 και 7.2.2* συμπεραίνουμε ότι τα G και $\overline{co} F$ είναι μετρήσιμα. Για να αποδείξουμε την πρώτη ισότητα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\Omega} G d\mu \subset \overline{\int_{\Omega} F_1 d\mu + \int_{\Omega} F_2 d\mu}$$

αφού η άλλη συμπερίληψη είναι προφανής.

Θεωρούμε μια μετρήσιμη επιλογή g του G και έστω $(f_{in})_{n\geq 1}$ μια πυκνή ακολουθία μετρήσιμων επιλογών F_i (που υπάρχουν από το *Θεώρημα Χαρακτηρισμού 7.1.4.*) Τότε η $(f_{1n} + f_{2m})_{n,m\geq 1}$ είναι μια πυκνή ακολουθία μετρήσιμων επιλογών *του* G. Θέτουμε

$$G_{nm}(\omega) = \{f_{1i}(\omega) + f_{2j}(\omega) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

Τότε

$$\forall \omega \in \Omega, \lim_{n\to\infty, m\to\infty} d(g(\omega), G_{nm}(\omega)) = 0$$

Χάρη στο *Πόρισμα 7.2.13*, υπάρχει μια μετρήσιμη επιλογή g_{nm} του G_{nm} που επαληθεύει την $\|g(\omega) - g_{nm}(\omega)\| = d(g(\omega), G_{nm}(\omega))$

Έτσι $g_{nm}(\omega) \in F_1(\omega) + F_2(\omega)$. Εφαρμόζοντας το *Θεώρημα 7.2.9*, λαμβάνουμε μετρήσιμες επιλογές f_{nm}^i των F_i έτσι ώστε $f_{nm}^1 + f_{nm}^2 = g_{nm}$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$d\left(\int_{\Omega} g_{nm} d\mu, \int_{\Omega} F_1 d\mu + \int_{\Omega} F_2 d\mu\right) = 0$$

Παίρνοντας το όριο όταν $n, m \to \infty$, προκύπτει η πρώτη πρόταση.

Είναι σαφές ότι

$$\overline{co} \int_{\Omega} F d\mu \subset \overline{\int_{\Omega} \overline{\mathrm{co}} F d\mu}$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη συμπερίληψη, θεωρούμε $k \in L^1(\Omega; \mathbf{R}, \mu)$ με αυστηρά θετικές τιμές και μετρήσιμη επιλογή g του $\overline{co}F$. Υπενθυμίζουμε ότι το *Θεώρημα 7.2.14* δηλώνει ότι η συνάρτηση υποστήριξης

$$\omega \mapsto \sigma(\overline{\mathrm{co}\ F}(\omega), \boldsymbol{p}) = \sigma(F(\omega), p)$$

είναι μετρήσιμη και παρατηρούμε ότι για κάθε $p \in X^\star$

$$\left\langle p, \int_\Omega g d\mu \right\rangle \leq \int_\Omega \sigma(\overline{\mathrm{co}}F(\omega), p)\mu(d\omega) = \int_\Omega \sigma(F(\omega), p)\mu(d\omega)$$

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και θέτουμε $\varphi(x) = \langle p, x\rangle$. Το *Θεώρημα* 7.2.9 σχετικά με τη μετρησιμότητα των αντίστροφων εικόνων που εφαρμόζονται με

$$G(\omega) = [\sigma(F(\omega), p) - \varepsilon k(\omega), \sigma(F(\omega), p)]$$

συνεπάγεται ότι υπάρχει μετρήσιμη επιλογή $f \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε

$$\langle p, f(\omega)\rangle \geq \sigma(F(\omega), p) - \varepsilon k(\omega)$$

Συνεπώς

$$\int_\Omega \sigma(F(\omega), p)\mu(d\omega) \leq \int_\Omega (\langle p, f\rangle + \varepsilon k) d\mu \leq \sigma\left(\int_\Omega F d\mu, p\right) + \varepsilon \parallel k \parallel_{L^1}$$

Επειδή $\varepsilon > 0$ και $p \in X^\star$ είναι αυθαίρετα, από το θεώρημα διαχωρισμού, προκύπτει η απόδειξη της δεύτερης και της τρίτης πρότασης.

Θεωρούμε $x, \bar{f}$ όπως στην υπόθεση της 4. Από την τρίτη πρόταση

$$\int_\Omega \sigma(F(\omega), p)\mu(d\omega) = \sigma\left(\int_\Omega F d\mu, p\right) = \int_\Omega \langle p, \bar{f}\rangle d\mu$$

Κατά συνέπεια, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_\Omega (\sigma(F(\omega), p) - \langle p, \bar{f}(\omega)\rangle)\mu(d\omega) = 0$$

Αλλά $\sigma(F(\omega), p) \geq \langle p, \bar{f}(\omega)\rangle$ και η πρόταση απεδείχθη.

Το διάσημο θεώρημα του Lyapunov για την κυρτότητα του συνόλου τιμών ενός διανυσματικού μέτρου υποδηλώνει ότι το ολοκλήρωμα μιας πλειότιμης απεικόνισης είναι κυρτό όταν *το X* είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$ ονομάζεται άτομο (για το μέτρο μ) εάν $\mu(A) > 0$ και για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο $A_1 \subset A, \mu(A_1)$ ισούται είτε με 0 είτε με $\mu(A)$. Ένα μέτρο είναι μη ατομικό εάν το $\mathcal{A}$ δεν περιέχει άτομα. Το μέτρο Dirac και τα διακριτά μέτρα είναι ατομικά. Το μέτρο Lebesgue είναι μη ατομικό.

Ένα σημείο z ενός κυρτού συνόλου K ονομάζεται ακραίο εάν δεν υπάρχει $x, y \in K$ και $0 < \lambda < 1$ έτσι ώστε $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Συμβολίζουμε με ext.$(K)$ το σύνολο όλων των ακραίων σημείων του K.

Όταν $X = \mathbf{R}^n$, τότε το ολοκλήρωμα οποιουδήποτε πλειότιμης απεικόνισης τιμές είναι κυρτό (ακόμη και όταν οι τιμές του F δεν είναι κυρτές) και είναι κλειστό όταν η απεικόνιση είναι ολοκληρωτικά φραγμένη:

Θεώρημα 7.6.3 (Κυρτότητα του Ολοκληρώματος-Convexity of the Integral)

Έστω $F: \Omega \multimap \mathbf{R}^n$ μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές εικόνες. Αν το μέτρο μ είναι μη ατομικό, τότε

- Το ολοκλήρωμα $\int_\Omega F d\mu$ είναι κυρτό και τα ακραία σημεία του $\overline{co}\left(\int_\Omega F d\mu\right)$ περιέχονται στο $\int_\Omega F d\mu$.
- Εάν μια ακολουθία $x_k \in \int_\Omega F d\mu, k = 1,2, \ldots$ συγκλίνει σε ένα ακραίο σημείο x του $\overline{co}\left(\int_\Omega F d\mu\right)$ τότε, κάθε ακολουθία $f_k \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε $\int_\Omega f_k d\mu = x_k$ συγκλίνει στο $L^1(\Omega; \mathbf{R}^n, \mu)$ σε κάποια $f \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\int_\Omega f d\mu = x$.

Ειδικά για κάθε $x \in$ ext $\left(\overline{co} \int_\Omega F d\mu\right)$ υπάρχει μια μοναδική $f \in \mathcal{F}$ με $x = \int_\Omega f d\mu$.

Εάν επιπλέον F είναι ολοκληρωτικά φραγμένη, τότε το ολοκλήρωμα της F είναι επίσης συμπαγές.

Όταν η διάσταση του χώρου Banach X δεν είναι πεπερασμένη, το ολοκλήρωμα μπορεί να μην είναι πλέον κυρτό, αλλά η κλειστότητά του είναι κυρτή:

Θεώρημα 7.6.4 (Κυρτότητα της κλειστότητας του ολοκληρώματος)

Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και $F: \Omega \multimap X$ μια μετρήσιμη πλειότιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές εικόνες. Αν το μέτρο μ είναι μη ατομικό, τότε η κλειστότητα του ολοκληρώματος του είναι κυρτή:

1. $\overline{\int_\Omega F d\mu} = \overline{co}\left(\int_\Omega F d\mu\right)$.
2. Αν $x \in \mathrm{ext}\int_\Omega F d\mu$ τότε η $f \in \mathcal{F}$ που ικανοποιεί την $\int_\Omega f d\mu = x$ είναι μοναδική.
3. Αν η F είναι ολοκληρωτικά φραγμένη, τότε

$$\int_\Omega \overline{co} F \, d\mu = \overline{\int_\Omega F d\mu}$$

Επιπλέον, όταν ο X είναι αυτοπαθής , η F έχει κυρτές εικόνες και είναι ολοκληρωτικά φραγμένη, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\Omega F d\mu$ είναι κλειστό.

Παρατήρηση - *Η τρίτη πρόταση παραμένει αληθής αν υποθέσουμε ότι* $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *και* $\mu(\Omega) < \infty$ *αντί του ολοκληρωτικού φράγματος της* F.

Ορισμός 7.6.5

Θεωρούμε μια πλειότιμη απεικόνιση $F: \Omega \multimap X$. Λέμε ότι η $f \in \mathcal{F}$ είναι μια ακραία επιλογή *(extremal selection)* της F αν το $\int_\Omega f d\mu$ είναι ένα ακραίο σημείο του $\overline{co}\left(\int_\Omega F d\mu\right)$. Δηλώνουμε με $\mathcal{F}_e$ το σύνολο των ακραίων επιλογών:

$$\mathcal{F}_e := \left\{ f \in \mathcal{F} \mid \int_\Omega f d\mu \in \operatorname{ext}\left(\overline{\operatorname{co}} \int_\Omega F d\mu\right)\right\}$$

Συμπεραίνουμε από το *Θεώρημα 7.6.3 και το Θεώρημα Καραθεοδωρή ότι*:

Πόρισμα 7.6.6

Έστω $F: \Omega \multimap \mathbf{R}^n$ μια μετρήσιμη ολοκληρωτικά φραγμένη πλειότιμη απεικόνιση με μη κενές κλειστές εικόνες. Αν το μ είναι μη ατομικό, τότε για κάθε

$$x \in \int_\Omega F d\mu$$

υπάρχουν $n+1$ ακραίες επιλογές $f_k \in \mathcal{F}_e$ και $n+1$ μετρήσιμα σύνολα $A_k \in \mathcal{A}, k = 0, \dots, n$, έτσι ώστε

$$x = \int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_{A_k} f_k \right) d\mu$$

όπου χ_{A_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A_k.

Απόδειξη

Έστω $x \in \int_\Omega F d\mu$ και ας $\lambda_k \geq 0, x_k \in \operatorname{ext}\left(\overline{co} \int_\Omega F d\mu\right), k = 0, \dots, n$ να είναι τέτοια ώστε

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k = x, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$$

που υπάρχουν από το *θεώρημα Καραθεοδωρή*. Από το *θεώρημα 7.6.3* προκύπτει ότι υπάρχουν $f_k \in \mathcal{F}_e$ έτσι ώστε $\int_\Omega f_k d\mu = x_k$ για κάθε $k = 0, \dots, n$.

Τότε, η πλειότιμη απεικόνιση $G(\omega) := \{f_k(\omega)\}_{k=0,1,\dots,n}$ έχει κλειστές μη κενές εικόνες και είναι μετρήσιμη. Δεδομένου ότι κάθε x_k ανήκει στο ολοκλήρωμά του, το οποίο είναι κυρτό από το Θεώρημα 7.6.3, το ίδιο είναι και το x. Άρα, υπάρχει μια ολοκληρώσιμη επιλογή $f := \sum_{k=0}^{n} \chi_{A_k} f_k$ της G έτσι ώστε $x = \int_\Omega f d\mu$□

Θεώρημα 7.6.7

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης $\sigma -$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Θεωρούμε μετρήσιμες πλειότιμες απεικονίσεις $K_n: \Omega \ni \omega \multimap K_n(\omega) \subset X$

με κλειστές εικόνες.

1. Εάν η συνάρτηση $\omega \mapsto \sup_{n\geq 1} d(0, K_n(\omega))$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int_\Omega (\mathrm{Liminf}_{n\to\infty}\ K_n) d\mu \subset \mathrm{Liminf}_{n\to\infty} \left(\int_\Omega K_n d\mu\right)$$

2. Αν η διάσταση του X είναι πεπερασμένη και $\omega \mapsto \sup_{n\geq 1} \|K_n(\omega)\|$ είναι ολοκληρώσιμη τότε:

$$\mathrm{Limsup}_{n\to\infty} \left(\int_\Omega K_n d\mu\right) \cdot\subset \int_\Omega (\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n) d\mu$$

Επομένως από τις προηγούμενες υποθέσεις, εάν τα υποσύνολα $K_n(\omega)$ έχουν ένα όριο όταν $n \to \infty$ για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$ τότε

$$\mathrm{Lim}_{n\to\infty} \left(\int_\Omega K_n d\mu\right) = \int_\Omega (\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\ K_n) d\mu$$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε αρχικά την πρώτη συμπερίληψη.

Ένα στοιχείο v του ολοκληρώματος του κατώτερου ορίου μπορεί να γραφτεί $v = \int_\Omega f d\mu$ όπου η f είναι η ολοκληρώσιμη επιλογή του κατώτερου ορίου των απεικονίσεων $K_n(\cdot)$. Από το *Θεώρημα 7.4.1*, είναι το όριο στο $L^1(\Omega; X, \mu)$ των απεικονίσεων $f_n \in \mathcal{K}_n$, οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες επιλογές των πλειότιμων απεικονίσεων $K_n(\cdot)$. Έτσι το v είναι το όριο των ολοκληρωμάτων $v_n = \int_\Omega f_n d\mu \in \int_\Omega K_n d\mu$

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη συμπερίληψη, υποθέτουμε ότι

$$v := \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_{n_j}(\omega)\mu(d\omega) \in \mathrm{Limsup}_{n\to\infty} \int_\Omega K_n(\omega)\mu(d\omega)$$

όπου $f_{n_j} \in \mathcal{K}_{n_j}$. Επειδή $\sup_{n\geq 0} \|K_n(\cdot)\|$ είναι ακέραιος, οι απεικονίσεις $f_{n_j}(\cdot)$ είναι ολοκληρωτικά φραγμένες. Από το Θεώρημα Dunford-Pettis https://en.wikipedia.org/wiki/Dunford%E2%80%93Pettis_property, μια υπακολουθία (και πάλι συμβολίζεται με) $f_{n_j}(\cdot)$ συγκλίνει ασθενώς σε μια απεικόνιση $f(\cdot)$, η οποία ανήκει στο ακολουθιακά ασθενές ανώτερο όριο των υποσυνόλων $\mathcal{K}_n$

Η δεύτερη πρόταση του *Θεωρήματος 7.4.1* υπονοεί ότι

για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in \overline{co}(\mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n(\omega))$

Επομένως, από το *Θεώρημα 8.6.3*, συμπεραίνουμε ότι

$$v \in \int_\Omega \overline{co}(\mathrm{Limsup}\ _{n\to\infty} K_n(\omega))\mu(d\omega) = \int_\Omega \mathrm{Limsup}_{n\to\infty}\ K_n(\omega)\mu(d\omega)$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της δεύτερης συμπερίληψης.□

Βιβλιογραφία

[1] Jean - Pierre Aubin, Helene Frankowska, Set-Valued Analysis, Systems &Control: Foundations and Applications, Birkhauser, Boston 1990

[2] Klaus Deimling, Multivalued Differential Equations, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 1, Berlin, 1992

[3] Lech Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and Its Applications, Springer- Science+ Business Media, B. V.,1999

[4] Z. Denkowski -S. Migorski- N. Papageorgiou, An Introduction to NONLINEAR ANALYSIS theory, Springer Science+Business Media, LLC,2003

[5] Σ. Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία 1988

[6] N.L. Carothers, REAL ANALYSIS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 2000

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης