



**ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Διπλωματική Εργασία**

Η διδασκαλία της μοντελοποίησης: Γνώσεις και απόψεις των  
μαθηματικών της εκπαίδευσης

Μαρία Μαθιουλάκη

Επιβλέπων καθηγητής: Σπυρίδων Δουκάκης

Πάτρα, Μάιος 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή (*Μαθιουλάκη Μαρία Α.Μ.142641*) που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Η διδασκαλία της μοντελοποίησης: Γνώσεις και απόψεις των  
μαθηματικών της εκπαίδευσης

Μαρία Μαθιουλάκη

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:  
Σπυρίδων Δουκάκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:  
Νικόλαος Ματζάκος

Πάτρα, Μάιος 2022

## **Ευχαριστίες**

Ολοκληρώνοντας τις σπουδές μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά» του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ), θα ήθελα να ευχαριστήσω ορισμένους ανθρώπους που με βοήθησαν και με στήριξαν κατά τη διάρκεια όλης αυτής της διαδικασίας.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Σπυρίδων Δουκάκη, ο οποίος με καθοδήγησε και με τις συμβουλές τους κατάφερα να ολοκληρώσω τη διπλωματική μου εργασία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον συνεπιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Ματζάκο.

Ευχαριστώ πολύ τους 110 συναδέλφους που συμμετείχαν με προθυμία στην έρευνά μου.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ τον σύντροφό μου και τους γονείς μου που με στήριξαν με κάθε τρόπο σε όλη αυτή τη δύσκολη αλλά πολύ ενδιαφέρουσα διαδρομή.

## Περίληψη

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία που έχει ως στόχο την αναπαράσταση ενός πραγματικού προβλήματος με τη χρήση κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων. Στην παρούσα εργασία διερευνάται η γνώση και οι στάσεις των εκπαιδευτικών μαθηματικών σχετικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση. Αρχικά, μέσω της βιβλιογραφικής επισκόπησης ερευνάται ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί την μοντελοποίηση και κάποιες από τις δυσκολίες που συναντούν στην εφαρμογή της στη σχολική τάξη. Από την έρευνα φαίνεται ότι τα τελευταία χρόνια γίνονται προσπάθειες ένταξης της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική διαδικασία καθώς τα οφέλη της εφαρμογής της είναι σημαντικά. Αναδεικνύεται ότι οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και αντιλαμβάνονται τη σημασία των μαθηματικών στην κοινωνία και τον πολιτισμό μας.

Στο πλαίσιο αυτό, πραγματοποιήθηκε έρευνα στην οποία συμμετείχαν 110 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται σε δημόσια, ιδιωτικά σχολεία και φροντιστήρια. Για την έρευνα αυτή επιλέχθηκε η ποσοτική μέθοδος και η συλλογή δεδομένων έγινε με τη χρήση ερωτηματολογίου που στάλθηκε ηλεκτρονικά στους εκπαιδευτικούς. Ακολούθησε η περιγραφική και επαγωγική ανάλυση των δεδομένων. Από τα αποτελέσματα αναδεικνύεται ότι το 86.8% των εκπαιδευτικών γνωρίζει την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης. Σε ποσοστό 57.2% οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν πολύ έως πάρα πολύ με την ενασχόληση των μαθητών και μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους. Επιπλέον τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν πως οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν παρακολουθήσει κάποια μορφή εκπαίδευσης για τη μοντελοποίηση και τα σχολικά προγράμματα σπουδών δεν ενισχύουν την εφαρμογή της. Ακόμη, η έλλειψη χρόνου, τα σχολικά εγχειρίδια και η έλλειψη ενασχόλησης των μαθητών με τη μοντελοποίηση από πολύ μικρές ηλικίες, φαίνεται να δυσκολεύουν την εφαρμογή της κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπλέον αναδεικνύεται ότι οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούνται συχνά τις ψηφιακές τεχνολογίες κατά τη διδασκαλία και δεν επιχειρούν ομαδοσυνεργατικές δράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι η περιορισμένη εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης στα ελληνικά σχολεία, παρ' όλο που γίνονται προσπάθειες ένταξής της. Τέλος, προτείνονται τρόποι ώστε η μοντελοποίηση να γίνει βασικό μέρος της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Μερικοί από αυτούς είναι η παρακολούθηση σεμιναρίων από τους εκπαιδευτικούς σχετικά με την μοντελοποίηση και ο

μετασχηματισμός της διδακτέας ύλης έτσι ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν και να έχουν χρόνο να την εφαρμόσουν. Η μεγαλύτερη χρήση των ψηφιακών μέσων και η συχνότερη ομαδική εργασία είναι στοιχεία που ενισχύουν γενικότερα την εκπαιδευτική διαδικασία αλλά και την μαθηματική μοντελοποίηση ειδικότερα.

### **Λέξεις – Κλειδιά**

Μαθηματική μοντελοποίηση, εκπαιδευτικοί, δυσκολίες, εκπαιδευτική διαδικασία, στατιστική ανάλυση

# Modelling in Mathematics Education: Mathematics teachers' views and knowledge

Maria Mathioulaki

## Abstract

Mathematical modeling is a teaching method that aims to represent a real problem using appropriate mathematical tools. This paper investigates the prior knowledge and attitudes of mathematicians who work in education about mathematical modeling. Initially, the literature review investigates the way in which teachers interact with mathematical modeling as a teaching tool and the difficulties they encounter in its implementation in the classroom. Research shows that in the recent years, efforts have been made to integrate mathematical modeling into the educational process, as the benefits of its application are significant. It turns out that students understand better the mathematical concepts and the importance of mathematics in our society and culture.

In this context, a survey was conducted in which 110 primary and secondary school teachers working in public and private schools and tuition centers participated. The quantitative method of analysis was chosen, and the data collection was done with the use of an e-questionnaire that was sent to the teachers. Descriptive and inferential data analysis followed. The results show that 86.8% of teachers know the concept of mathematical modeling. At a rate of 57.2%, teachers agree very much with the involvement of students in mathematical modeling in the context of their mathematical education. In addition, the results of the research show that teachers have not attended any form of training for modeling and school curricula do not enhance its implementation. Also, the lack of time and school textbooks as well as the lack of students' involvement with modeling from a very young age, seem to make it difficult to apply this method of teaching in mathematics. In addition, it is highlighted that teachers do not often use digital technologies in teaching and do not engage in collaborative activities in the context of mathematical education. The result

of the above-mentioned drawbacks is the limited application of mathematical modeling in Greek schools, despite several efforts of integration to educational process. Finally, several solutions are proposed, so that modeling can become a key part of the educational process. Some of them are the attendance of seminars by the teachers on the modeling and the transformation of the curriculum so that teachers will be able to apply it. The greater use of digital media and the more frequent teamwork are elements that enhance the educational process in general and mathematical modeling in particular.

**Keywords :** Mathematical modeling, Teachers, difficulties, Teaching, Statistical analysis



## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	v
Abstract .....	vii
Κατάλογος Εικόνων και Γραφημάτων .....	xi
Κατάλογος Πινάκων .....	xii
1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ .....	1
1.1 Μαθηματικά μοντέλα .....	1
1.2 Η έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης.....	3
1.3 Σύντομη ιστορική αναδρομή.....	4
1.4 Περιγραφή της διαδικασίας της μαθηματικής μοντελοποίησης .....	5
2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	8
2.1 Διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης .....	8
2.2 Επιχειρήματα υπέρ και κατά της διδασκαλίας της μοντελοποίησης.....	9
2.3 Ο ρόλος της τεχνολογίας στη μαθηματική μοντελοποίηση.....	11
3 ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	15
3.1 Οι δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία της μοντελοποίησης.....	15
3.2 Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της μοντελοποίησης.....	17
3.3 Πρακτικές ένταξης της μαθηματικής μοντελοποίησης στα ελληνικά σχολεία ...	18
3.4 Παράδειγμα προβλημάτων μοντελοποίησης .....	19
4 ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ .....	22
4.1 Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στη μαθηματική μοντελοποίηση.....	22
4.2 Παραδείγματα μετατροπής των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων σε προβλήματα μοντελοποίησης.....	24
5 ΣΚΟΠΟΣ, ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ .....	30
5.1 Ερευνητικό εργαλείο .....	30
5.2 Συλλογή δεδομένων.....	31
5.3 Περιγραφή δείγματος .....	32
6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ.....	34
6.1 Επίδραση στις δραστηριότητες, στα προβλήματα και στις ασκήσεις .....	34
6.2 Μοντελοποίηση.....	39
6.3 Επίδραση δημογραφικών παραγόντων.....	43
6.4 Ερευνητικά συμπεράσματα.....	46
7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ .....	47
7.1 Συμπεράσματα .....	47
7.2 Συζήτηση .....	54
7.3 Προτάσεις ένταξης της μαθηματικής μοντελοποίησης στα ελληνικά σχολεία ...	56
7.4 Περιορισμοί.....	57
7.5 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα .....	58
Βιβλιογραφικές αναφορές.....	59
Παράρτημα Α: Ερωματολόγιο έρευνας .....	65
Παράρτημα Β .....	77



## Κατάλογος Εικόνων και Γραφημάτων

<b>Εικόνα 1</b> -Ο κύκλος της μοντελοποίησης, Jensen, 2007 .....	6
<b>Εικόνα 2</b> -άσκηση 10 σελίδα 37, σχολικό βιβλίο β' γυμνασίου .....	24
<b>Εικόνα 3</b> -άσκηση 16 σελίδα 126, σχολικό βιβλίο β' γυμνασίου .....	26
<b>Εικόνα 4</b> -άσκηση 7 σελίδα 127, σχολικό βιβλίο γ' γυμνασίου .....	28
<b>Γράφημα 1.</b> Μέσες βαθμολογίες των ερωτήσεων για τα οφέλη των υπαρχόντων προγραμμάτων σε φθίνουσα διάταξη. ....	35
<b>Γράφημα 2.</b> Μέσες βαθμολογίες των ερωτήσεων για την προσφορά των σχολικών εγχειριδίων σε φθίνουσα διάταξη. ....	36
<b>Γράφημα 3.</b> Μέσες βαθμολογίες των ερωτήσεων για την αξιοποίηση στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης σε φθίνουσα διάταξη. ....	37

## Κατάλογος Πινάκων

<b>Πίνακας</b>	<b>1.</b> Δημογραφικά στοιχεία συμμετεχόντων στην έρευνα.....	32
<b>Πίνακας</b>	<b>2.</b> Οφέλη υπαρχόντων προγραμμάτων .....	34
<b>Πίνακας</b>	<b>3.</b> Προσφορά σχολικών εγχειριδίων .....	36
<b>Πίνακας</b>	<b>4.</b> Αξιοποίηση στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης.....	37
<b>Πίνακας</b>	<b>5.</b> Γενικές ερωτήσεις ενότητας.....	38
<b>Πίνακας</b>	<b>6.</b> Γνώση και εφαρμογή της μοντελοποίησης .....	39
<b>Πίνακας</b>	<b>7.</b> Εμπόδια εφαρμογής της μοντελοποίησης .....	41
<b>Πίνακας</b>	<b>8.</b> Οφέλη εφαρμογής της μοντελοποίησης.....	42
<b>Πίνακας</b>	<b>9.</b> Προβλήματα εφαρμογής της μοντελοποίησης .....	43
<b>Πίνακας</b>	<b>10.</b> Εργαλεία εφαρμογής της μοντελοποίησης.....	43
<b>Πίνακας</b>	<b>11.</b> Στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα εξέτασης μέσω των τιμών.....	45

# 1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

## 1.1 Μαθηματικά μοντέλα

Η επιστήμη των μαθηματικών είναι απαραίτητη για την ερμηνεία, την μελέτη και την περιγραφή πολύπλοκων φυσικών φαινομένων. Τα μαθηματικά μάλιστα αποτελούν τον συνδετικό κρίκο μεταξύ του κόσμου των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου (Lakoff & Núñez, 2000). Με τη βοήθεια των μαθηματικών οι άνθρωποι έχουν την ευκαιρία να κατανοήσουν και να μελετήσουν και άλλες επιστήμες, ακόμα και να επιλύσουν προβλήματα που σχετίζονται με πολλαπλά φαινόμενα. (Lesh & Doerr, 2003) Για την επίτευξη των παραπάνω αποτελεσμάτων, τα μαθηματικά λειτουργούν με τη χρήση μοντέλων, τα λεγόμενα Μαθηματικά Μοντέλα.

Με τον όρο Μαθηματικό Μοντέλο ορίζεται η περιγραφή και η αναπαράσταση φυσικών φαινομένων, συστημάτων και διαδικασιών. Τα μαθηματικά μοντέλα λειτουργούν με τη χρήση μαθηματικών εννοιών και συμβόλων, όπως για παράδειγμα οι εξισώσεις, οι αλγόριθμοι, τα σύνολα αριθμών, οι γραφικές παραστάσεις κλπ. Στην πραγματικότητα είναι δομές που αποτελούν αναπαραστάσεις (Lehrer & Schauble, 2007). Ουσιαστικά αποτελούν εργαλεία που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να καλλιεργήσει τη σκέψη, να αναπτύξει υποθέσεις καθώς και να εξελίξει την κριτική του ικανότητα.

Τα Μαθηματικά Μοντέλα έχουν ως κύριο στόχο την μελέτη ιδιαίτερων επιστημονικών φαινομένων με τη βοήθεια των μαθηματικών. Επίσης, στοχεύουν στη χρήση και την ανάπτυξη διάφορων μαθηματικών εργαλείων, τα οποία είναι απαραίτητα για την αντιμετώπιση ενός μοντέλου. Ακόμα η πρόβλεψη ή η προσομοίωση των ιδιοτήτων πολύπλοκων συστημάτων γίνεται μέσω των μαθηματικών μοντέλων. Τέλος, ιδιαίτερη σημασία έχει ο έλεγχος των υποθέσεων και η βελτίωση ενός μοντέλου. Αυτό συμβαίνει επειδή το γεγονός ότι κάθε μοντέλο στηρίζεται σε κάποιες υποθέσεις-παραδοχές δεν σημαίνει ότι αυτές είναι απαραίτητα σωστές.

Τα μαθηματικά μοντέλα γίνεται να καταταχθούν σε κατηγορίες ανάλογα με τα μαθηματικά εργαλεία. Μερικές από αυτές είναι:

- Διακριτά/Συνεχή μοντέλα
- Ντετερμινιστικά/Στοχαστικά μοντέλα
- Γραμμικά/Μη γραμμικά μοντέλα

- Ποιοτικά/Ποσοτικά μοντέλα
- Χρόνο-εξαρτώμενα/Χρόνο-ανεξάρτητα μοντέλα
- Μηχανιστικά/Περιγραφικά μοντέλα

Τα διακριτά διακρίνονται από τα συνεχή μοντέλα ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που έχουν, αν είναι δηλαδή διακριτή ή συνεχής. Τα ντετερμινιστικά μοντέλα είναι αυτά που η κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει έναν συγκεκριμένο αριθμό. Τα μοντέλα αυτά παράγουν ένα μόνο αποτέλεσμα. Αντίθετα τα στοχαστικά παράγουν πολλά διαφορετικά αποτελέσματα αφού οι τιμές των μεταβλητών τους είναι τυχαίες. Γι' αυτό το λόγο υπολογίζουν μόνο πιθανότητες αποτελεσμάτων. Γραμμικά ή μη γραμμικά μοντέλα χαρακτηρίζονται αυτά που περιέχουν μαθηματικές σχέσεις που είναι γραμμικές ή όχι. Επιπλέον, όταν προκύπτουν πολλά γενικά αποτελέσματα σχετικά με απαντήσεις σε ένα μοντέλο, τότε αυτό είναι ποιοτικό, ενώ όταν προκύπτει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα τότε χαρακτηρίζεται ποσοτικό. Τα χρόνο-εξαρτώμενα και τα χρόνο-ανεξάρτητα κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με το αν οι μεταβλητές τους είναι εξαρτημένες από το χρόνο. Μηχανιστικά είναι εκείνα τα μοντέλα που προκύπτουν από βασικούς νόμους και τα περιγραφικά αυτά που έχουν σκοπό να περιγράψουν όσο καλύτερα γίνεται μια πραγματικότητα.

Σύμφωνα με τον Sekerak τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να καταταχθούν σε κατηγορίες ανάλογα με τα αρχικά δεδομένα που υπάρχουν:

- Αριθμητικά μοντέλα
- Αλγεβρικά μοντέλα
- Γεωμετρικά μοντέλα
- Γραφικά μοντέλα
- Συνδυαστικά μοντέλα

Αριθμητικά χαρακτηρίζονται εκείνα τα μοντέλα που χρησιμοποιούν αριθμούς για τα δεδομένα τους. Όταν τα αρχικά δεδομένα είναι εξισώσεις, ανισώσεις ή συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων, τότε τα μοντέλα θεωρούνται αλγεβρικά. Τα Γεωμετρικά μοντέλα από την άλλη είναι εκείνα που χρησιμοποιούν κάποιο γεωμετρικό σχήμα ως αρχική πληροφορία. Στις περιπτώσεις που αυτή η αρχική πληροφορία είναι κάποια διαγράμματα ή κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, τα μαθηματικά μοντέλα χαρακτηρίζονται γραφικά.

Τελευταία κατηγορία θεωρούνται τα συνδυαστικά μοντέλα που σ' αυτήν την περίπτωση τα αρχικά δεδομένα είναι ένας συνδυασμός τεσσάρων μοντέλων από τα παραπάνω.

## 1.2 Η έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης

Οι άνθρωποι στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τον κόσμο καταλήγουν στη διαδικασία της μοντελοποίησης. Θέλοντας να ερμηνεύσουν τα διάφορα φυσικά φαινόμενα, να κάνουν προβλέψεις για τις συμπεριφορές συστημάτων καθώς και για να ενεργήσουν πάνω σε αυτά, προβαίνουν σε πρωτοπόμενες και δημιουργικές για την εποχή τους ενέργειες (Brown & Stillman, 2017). Επιστρατεύουν τις ικανότητές τους για να δημιουργήσουν πραγματικά ή συμβολικά κατασκευάσματα, τα μαθηματικά μοντέλα. Τα κατασκευάσματα αυτά μιμούνται κατά κάποιον τρόπο στοιχεία της πραγματικότητας. Η διαδικασία αυτή της μίμησης ή και της αναπαράστασης κάποιων πτυχών του πραγματικού κόσμου αναφέρεται ως μαθηματική μοντελοποίηση.

Είναι αρκετά δύσκολο να δοθεί ένας ακριβής ορισμός για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Οι Cross και Moscardini (1985) όρισαν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης ως τρόπο περιγραφής και αντιμετώπισης ενός προβλήματος του πραγματικού κόσμου με μαθηματικές έννοιες. Οι Masom και Davis (1991) δίνουν ένα διαφορετικό ορισμό για τη μοντελοποίηση, υποστηρίζοντας πως είναι μια διαδικασία αναπαράστασης ενός φυσικού φαινομένου με μαθηματικούς όρους.

Αργότερα, το 2010, ο Josef Sekerok, καθιστά την μαθηματική μοντελοποίηση ως μια γνωστική μέθοδο. Σύμφωνα με αυτήν, αντιστοιχίζεται ένα αρχικό στοιχείο με ένα μοντέλο, το οποίο μοντέλο μελετάται, αναλύεται και τελικά προκύπτουν συμπεράσματα που μας δίνουν διάφορες πληροφορίες για το αρχικό μας στοιχείο. Ένα χρόνο μετά, ο Bahmaei (2011), αναφέρει πως η μοντελοποίηση μπορεί να χαρακτηριστεί και ως μια μαθηματική διαδικασία. Μέσα από το άρθρο του «Mathematical Modelling in primary school, advantages and challenges» αναφέρει πως η μοντελοποίηση περιλαμβάνει μια σειρά από δραστηριότητες και πρακτικές που αν αυτές εφαρμοστούν με στο σωστό τρόπο τότε θα υπάρχει μια ορθή αντιστοίχιση του πραγματικού με τον μαθηματικό κόσμο (Bahmaei, 2014).

Σε μια έκθεση που συντάχθηκε με το όνομα GAIMME (2016), δηλαδή οδηγός της αξιολόγησης και διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαίδευση (Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modelling Education)

παρουσιάζεται ένας πιο ολοκληρωμένος ορισμός για τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η έκθεση αυτή λοιπόν, ορίζει τη μέθοδο αυτή ως μια διαδικασία που αναπαριστά, αναλύει, προβλέπει ή με άλλους τρόπους παρέχει πληροφορίες για καταστάσεις στον πραγματικό κόσμο με τη χρήση βέβαια των μαθηματικών.

Συνοψίζοντας όλους τους παραπάνω ορισμούς συμπεραίνεται πως η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία που έχει ως στόχο την αναπαράσταση ενός πραγματικού προβλήματος με μαθηματικά εργαλεία έτσι ώστε να διεξαχθούν πληροφορίες σχετικές με το αρχικό πραγματικό πρόβλημα (Boaler, 2001). Χρησιμοποιούνται δηλαδή τα μαθηματικά προκειμένου να περιγραφεί μια πραγματική κατάσταση όπως για παράδειγμα ένα φυσικό φαινόμενο. Οι ποσότητες του προβλήματος που πρόκειται να μελετηθεί είναι οι λεγόμενες μεταβλητές και οι σχέσεις μεταξύ αυτών των μεταβλητών είναι οι μαθηματικές σχέσεις που προκύπτουν από βασικούς θεμελιώδεις νόμους.

Με άλλα λόγια, είναι η μέθοδος ανάπτυξης και μελέτης ενός μαθηματικού μοντέλου. Για να είναι όμως αποτελεσματική, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η σωστή χρήση του μοντέλου αυτού. Βασικός παράγοντας ώστε να υπάρξει ένα σωστό μοντέλο είναι η κατάλληλη ανάπτυξη υποθέσεων. Οι υποθέσεις ή παραδοχές είναι πολύ σημαντικές για τη μελέτη ενός φαινομένου του φυσικού κόσμου και παράλληλα διαμορφώνονται και επηρεάζονται από τις διάφορες παραμέτρους, οι οποίες είναι διαφορετικές κάθε φορά καθώς μεταβάλλονται. Γι' αυτό το λόγο η ανάπτυξη ενός ορθού μοντέλου είναι μια δύσκολη διαδικασία αλλά ταυτόχρονα απαραίτητη.

### 1.3 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Από την αρχαιότητα, η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμοποιούταν για την εξήγηση φυσικών φαινομένων. Οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την έννοια αυτή στην απλούστερη μορφή της. Τα πρώτα αναγνωρισμένα μαθηματικά μοντέλα είναι οι αριθμοί γύρω στα 30.000 χρόνια π.Χ. Η χρήση αυτών αποτέλεσε τη βάση για τη δημιουργία όλων των επόμενων μοντέλων. Ο Ερατοσθένης κατάφερε με τη χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου να υπολογίσει πρώτος την απόσταση μεταξύ της Γης και του Ήλιου, την απόσταση μεταξύ της Γης και της Σελήνης και την περίμετρο της Γης, περίπου το 250π.Χ.

Αργότερα, ο Fibonacci έμεινε στην ιστορία για το έργο του που βασίστηκε στη μαθηματική μοντελοποίηση. Ο Fibonacci ασχολήθηκε με μοντέλα που σχετίζονται με τη βιολογία και αναλύουν την πληθυσμιακή ανάπτυξη των βιολογικών ειδών. Ο Αρχιμήδης επίσης έπαιξε



σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μηχανικής χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά. Οι τρεις νόμοι του Νεύτωνα αποτελούν ένα ακόμα παράδειγμα μαθηματικής μοντελοποίησης, οι οποίοι έθεσαν τις βάσεις στην Κλασική Μηχανική.

Είναι πάρα πολλά τα παραδείγματα που μπορεί να έχει εφαρμογή η μαθηματική μοντελοποίηση. Μερικά από αυτά είναι η Κλασική και η Κβαντική μηχανική, όπως και οι εξισώσεις που περιγράφουν κυματικά φαινόμενα. Τα πληθυσμιακά και χρηματοοικονομικά μοντέλα είναι δύο ακόμα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται πολύ τα τελευταία χρόνια και όχι μόνο, όπως επίσης και τα μοντέλα πολύπλοκων μοριακών υλικών. Ο αριθμός των παραδειγμάτων της μοντελοποίησης είναι τεράστιος και διευρύνονται σε πολλές διαφορετικές επιστήμες. Η χρησιμότητά τους είναι αδιαμφισβήτητη χρήσιμη στη ζωή των ανθρώπων αφού όπως είδαμε παραπάνω βοηθάνε στη περιγραφή φαινομένων του πραγματικού κόσμου.

Σταδιακά η μοντελοποίηση έχει εξελιχθεί ιδιαίτερα στο πέρασμα των αιώνων. Πλέον έχουν κατασκευαστεί επιτυχημένα μοντέλα, πολύ καλύτερα από αυτά που είχαν αρχικά στο μυαλό τους οι επιστήμονες. Δύο περιπτώσεις μοντέλων που η αποδοτικότητα τους είναι αδιαμφισβήτητη είναι η εξίσωση του Schrödinger και ο 2ος νόμος της θερμοδυναμικής. Η εξίσωση του Schrödinger είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που μελετάει την ανάπτυξη των σωματιδίων στον μικρόκοσμο. Και στα δύο παραπάνω παραδείγματα, τα μοντέλα θεωρούνται αλάνθαστα, καθώς δεν έχει καταγραφεί καμία περίπτωση που να αποτυγχάνουν.

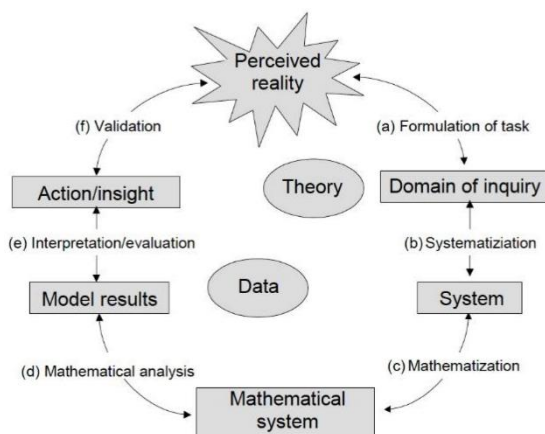
Με την παράθεση των παραπάνω παραδειγμάτων φαίνεται πόσο ισχυρό μπορεί να είναι ένα μαθηματικό μοντέλο και κατ' επέκταση η «δύναμη» της μαθηματικής μοντελοποίησης στην καθημερινή ζωή αλλά και σε πολλές επιστήμες όπως είναι τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Χημεία κ.ά. (Κομηνέας & Χαρμανδάρης, 2015).

#### **1.4 Περιγραφή της διαδικασίας της μαθηματικής μοντελοποίησης**

Η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι μια αναπαράσταση της πραγματικότητας στην απλούστερη μορφή της έτσι ώστε ο άνθρωπος να μπορεί να μελετάει πολλά διαφορετικά φαινόμενα ή συστήματα. Είναι λάθος να θεωρείται πως είναι μια άλλη πραγματικότητα ή μια πιστή απεικόνιση του πραγματικού κόσμου.

Πιο συγκεκριμένα η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης μπορεί να περιγραφεί από τα παρακάτω βήματα (Galbraith, Henn, Niss, 2007):

- ❖ **Βήμα 1:** Συλλογή και οργάνωση δεδομένων για ένα οποιοδήποτε φαινόμενο ή σύστημα.
- ❖ **Βήμα 2:** Δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου με τη χρήση υποθέσεων και παραδοχών.
- ❖ **Βήμα 3:** Λύση του μαθηματικού προβλήματος χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία.
- ❖ **Βήμα 4:** Έλεγχος του μαθηματικού μοντέλου μέσω πειραματικών παρατηρήσεων.
- ❖ **Βήμα 5:** Βελτιστοποίηση του μοντέλου εάν αυτό είναι απαραίτητο.
- ❖ **Βήμα 6:** Επανάληψη της διαδικασίας εάν κριθεί απαραίτητο.
- ❖ **Βήμα 7:** Εφαρμογή του μοντέλου.



Εικόνα 1-Ο κύκλος της μοντελοποίησης, Jensen, 2007

Το παραπάνω σχήμα είναι γνωστό ως «κύκλος μοντελοποίησης». Ονομάστηκε έτσι γιατί θεωρείται μια κυκλική διαδικασία δημιουργίας μοντέλων καθώς πολλές φορές υπάρχει η ανάγκη να ξαναξεκινήσει η διαδικασία από την αρχή έτσι ώστε να υπάρξει ένα καλύτερο αποτέλεσμα για το μαθηματικό πρόβλημα που μελετάται. Επίσης, υπάρχουν περιπτώσεις που αρκετές φορές αυτός που εκτελεί τη μοντελοποίηση χρειάζεται να ανατρέξει στα διάφορα βήματα μέχρι να δημιουργήσει το καλύτερο δυνατό μοντέλο. Πολλές φορές, ανάλογα με τους μοντελιστές αυτός ο κύκλος μπορεί να διαφέρει. Πάντα όμως η αφετηρία του είναι η συλλογή δεδομένων, έπεται η μοντελοποίησή τους και καταλήγει στην ερμηνεία τους στην πραγματικότητα (Jensen, 2007).

Ο κύκλος της μοντελοποίησης δεν αποτελεί αλγόριθμο. Δεν είναι δηλαδή μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο που έχει ως στόχο την επίλυση ενός προβλήματος. Αντίθετα υπάρχει ευελιξία και

προσαρμοστικότητα ώστε οι ερευνητές να μπορούν να ανατρέξουν στα διάφορα στάδια προκειμένου καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Επιπλέον, μερικές φορές χρειάζεται να λαμβάνεται υπόψιν το προηγούμενο και το επόμενο βήμα που θα πραγματοποιηθεί. Συχνό φαινόμενο είναι και η επανάληψη του κύκλου αφού δεν προκύπτουν πάντα τα επιθυμητά αποτελέσματα τόσο εύκολα. Ακόμα οι λύσεις του προβλήματος μπορεί να είναι περισσότερες από μια καθώς δεν υπάρχει μια συγκεκριμένη λύση η οποία είναι σωστή (Jensen, 2007).

Η επιλογή της λύσης τις περισσότερες φορές εξαρτάται από το άτομο που δουλεύει πάνω στο συγκεκριμένο έργο.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι οι νόμοι της Κλασικής Μηχανικής ή αλλιώς οι νόμοι του Νεύτωνα. Μέχρι τότε πολλοί επιστήμονες είχαν επιχειρήσει να περιγράψουν τους νόμους που σχετίζονταν με την κίνηση των σωμάτων, με αποτέλεσμα να υπάρχει τεράστιος αριθμός δεδομένων από πειραματικές παρατηρήσεις. Έτσι λοιπόν, με τη συμβολή πολλών επιστημόνων αλλά κυρίως του Νεύτωνα δημιουργήθηκε το μαθηματικό μοντέλο που αφορά εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική των σωμάτων. Προκειμένου να λυθούν όλες αυτές οι εξισώσεις, η τότε επιστημονική κοινότητα κατέληξε στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού.

## 2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

### 2.1 Διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης

Ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαίδευση. Η εφαρμογή της στα πρώτα στάδια της εκπαιδευτικής διαδικασίας και όχι μόνο, θέτει στους μαθητές τις βάσεις για την ανάπτυξη της μοντελοποίησης στην ανώτατη εκπαίδευση. Η εφαρμογή της στην πρωτοβάθμια αλλά και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση προετοιμάζει τους μαθητές να μπορούν να ανταπεξέλθουν σε πολύπλοκα προβλήματα που σχετίζονται με φυσικά φαινόμενα ή συστήματα. Επίσης είναι απαραίτητη εάν οι μαθητές θέλουν να ασχοληθούν ακαδημαϊκά ή επαγγελματικά με τον τομέα αυτό (Kaiser & Schwarz, 2006).

Η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης έχει τη δυνατότητα να κάνει τους μαθητές να περιγράφουν, να παρατηρούν και να προβλέπουν φυσικά φαινόμενα. Είναι απαραίτητα τα παιδιά να είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται ποια ερωτήματα αφορούν το μαθηματικό μοντέλο και ποια το φαινόμενο που μελετούν. Έτσι θα μπορούν να επεξεργαστούν και να βγάλουν συμπεράσματα για τα αποτελέσματα που διεξάγονται σύμφωνα με το αντίστοιχο φυσικό φαινόμενο ή σύστημα που μελετάται (Kang & Noh, 2012).

Σε πρώτο στάδιο, η μοντελοποίηση εφαρμόζεται στην δημιουργία φυσικών μοντέλων. Η αντιστοίχιση αυτών με τα κατάλληλα φυσικά φαινόμενα και η σύγκριση αυτών με άλλα παρόμοια μοντέλα βοηθάει τους μαθητές του δημοτικού να εξοικειωθούν με την έννοια της μοντελοποίησης. Για να γίνει αυτό οι μαθητές μικρής ηλικίας πρέπει να μπορούν να αντιλαμβάνονται απλές έννοιες όπως αυτές του μικρότερου και του μεγαλύτερου έτσι ώστε να μπορούν να συγκρίνουν αντικείμενα. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να μπορούν εύκολα να ξεχωρίζουν τις διαφορές και τις ομοιότητες των αντικειμένων που καλούνται να μελετήσουν (English & Watters, 2004).

Σε επόμενο στάδιο, η ανάγκη της αναπαράστασης είναι απαραίτητη προϋπόθεση, ειδικά στην επιστήμη των μαθηματικών (Κασιμάτη, 2011). Όσο αφορά άλλες επιστήμες όπως την Φυσική και την Χημεία τα πράγματα είναι λίγο ευκολότερα αφού αναφερόμαστε κυρίως σε φυσικά φαινόμενα. Γι' αυτό το λόγο έχουν κατασκευαστεί μια σειρά από συστήματα αναπαράστασης που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να επιλέξουν το καλύτερο κάθε φορά σύστημα. Επίσης, μέσα από αυτήν οι μαθητές κατανοούν καλύτερα το αντικείμενο μελέτης τους και καταλήγουν ευκολότερα στη λύση του.

Ένας από τους πρώτους ερευνητές που ασχολήθηκαν με την διαδικασία της μοντελοποίησης στην εκπαίδευση ήταν ο Pollak. Το 1976, σε μια διάλεξή του παρουσίασε τη σχέση της μαθηματικής μοντελοποίησης με τα μαθηματικά στα σχολεία. Όσο αφορά τη σχέση της με την πραγματικότητα, δήλωσε πως πάντα η αρχή της διαδικασίας είναι ένα πραγματικό πρόβλημα και με τη χρήση των μαθηματικών κάποια στιγμή επιστρέφουμε πάλι στο αρχικό μας πρόβλημα.

Στις αρχές του 1980, ο NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών, πρότεινε να γίνει η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων το βασικό στοιχείο της διδασκαλίας των μαθηματικών σε όλα τα σχολεία του κόσμου. Από το γεγονός αυτό, φαίνεται η σημασία της μοντελοποίησης στην εκπαίδευση παρ' όλο που μπορεί η αυτή να μην εφαρμόστηκε άμεσα. Μετά από αυτή την προσπάθεια ένταξής της στην εκπαιδευτική διαδικασία, πολλοί ήταν αυτοί που συνέχισαν να επιχειρούν να την εισάγουν σε αυτή.

Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να μπορούν να γίνουν εύκολα αντιληπτά από τους μαθητές. Αυτό είναι κυρίως στην ευχέρεια των διδασκόντων καθώς θα πρέπει να έχουν υπόψιν τους το γνωστικό επίπεδο των μαθητών τους αλλά και τα καθημερινά τους βιώματα (Frejd, 2015). Διαφορετικά οι μαθητές δεν θα μπορέσουν να ανταπεξέλθουν και θα χρησιμοποιούν την αποστήθιση προκειμένου να αντιμετωπίσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα.

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις τελευταίες έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, μέσα από τη διαδικασία της μοντελοποίησης οι μαθητές αποκτούν κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως είναι η ικανότητά τους να παρατηρούν να μετρούν, να συγκρίνουν και να επικοινωνούν με τον περίγυρό τους (Blum, 2011). Επιπλέον, άτομα που είναι εξοικειωμένα με τη μαθηματική μοντελοποίηση μέσα από τις σχολικές δραστηριότητες μπορούν πιο εύκολα να αναπτύξουν την κριτική τους ικανότητα, αφού μαθαίνουν από μικρή ηλικία να επεξεργάζονται δεδομένα και να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά εργαλεία σωστά (Blum, 2015).

## **2.2 Επιχειρήματα υπέρ και κατά της διδασκαλίας της μοντελοποίησης**

Είναι γεγονός ότι τα οφέλη της μοντελοποίησης είναι ευρέως διαδομένα γι' αυτό και γίνονται όλο και περισσότερες προσπάθειες για την ένταξή της στην εκπαιδευτική

διαδικασία. Ένα βασικό πλεονέκτημα που προσφέρει η διδασκαλία της μοντελοποίησης είναι η κατανόηση του φυσικού κόσμου. Οι προσπάθειες επίλυσης πραγματικών προβλημάτων μέσα από τα μαθηματικά αναδεικνύουν τη σημασία των μαθηματικών στην καθημερινή πραγματικότητα. Αυτό δε συμβαίνει μόνο από την εκμάθηση των «στεγνών» μαθηματικών αλλά μέσα από τις διάφορες δραστηριότητες που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τον Blum και Niss (1991) διακρίνονται οι παρακάτω κατηγορίες σκοπών της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαίδευση:

- **Πραγματιστικοί σκοποί:** Βασικός στόχος είναι να δώσει τη δυνατότητα στους μαθητές να μπορούν να περιγράψουν καταστάσεις που δεν σχετίζονται απευθείας με τα μαθηματικά. Οι καταστάσεις αυτές έχουν να κάνουν με την καθημερινότητα των μαθητών, τις συνήθειες τους και γενικότερα με διάφορα γενικά θέματα που απασχολούν το σύνολο του πληθυσμού μια κοινωνίας. Επίσης μπορεί να προέρχονται και από κάποιο διαφορετικό πεδίο μελέτης όπως το πανεπιστημιακό ή το επαγγελματικό.
- **Διαμορφωτικοί σκοποί:** Μέσα από τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης οι διδασκόμενοι αναπτύσσουν σημαντικές δεξιότητες όπως αυτή της επίλυσης προβλημάτων, της επιχειρηματολογίας, της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθηματικού και πραγματικού κόσμου. Σημαντικό επίσης είναι το γεγονός να βρίσκουν ενδιαφέρουσες τις δραστηριότητες του μαθήματος και να μην τις εκτελούν μηχανικά.
- **Πολιτιστικοί σκοποί:** Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αντιληφθούν τη σημασία των μαθηματικών στην κοινωνία και τον πολιτισμό μας. Πολλές φορές χρησιμοποιήθηκε η επιστήμη αυτή ως αντικείμενο μελέτης πολλών άλλων επιστημών όπως και της φιλοσοφίας αντίστοιχα. Είναι σημαντικό λοιπόν να γίνει αντιληπτό ότι η επιστήμη συνεχώς εξελίσσεται και οδηγούμαστε κάθε φορά όλο και βαθύτερα στη γνώση εννοιών και φαινομένων.

Ακόμα ένα επιχείρημα υπέρ της διδασκαλίας της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι ότι επιτρέπει στα παιδιά να εργάζονται με τους συμμαθητές τους χωρίς να είναι απαραίτητη η συμμετοχή του διδάσκοντα. Έτσι, τους δίνεται η δυνατότητα να αναζητήσουν μόνοι τους απαντήσεις σε ερωτήματα που σίγουρα θα δημιουργηθούν, πράγμα που οδηγεί στην κατάκτηση της γνώσης μέσω ανακάλυψης και κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Η εμπειρία που

αποκτούν οι μαθητές που δουλεύουν ομαδικά είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και στα επόμενα χρόνια της ζωής τους σε πολλούς τομείς της καθημερινότητά τους.

Υπάρχουν όμως και εκείνοι που θεωρούν πως η διδασκαλία της μοντελοποίησης δημιουργεί προβλήματα στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ένα από αυτά είναι ο χρόνος που χρειάζεται να διαθέσουν οι εκπαιδευτικοί για αυτήν και τις εφαρμογές της. Πολλοί είναι αυτοί που θεωρούν πως οι ώρες διδασκαλίας των μαθηματικών είναι περιορισμένες και το πρόγραμμα αρκετά φορτωμένο για να αφιερώσουν χρόνο στις πρακτικές της μοντελοποίησης. Υπάρχει η άποψη ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δεν θα πρέπει να διδάσκεται στους μαθητές γιατί παραποιεί την έννοια των μαθηματικών. Δηλαδή, τα μαθηματικά αποδυναμώνονται και οι μαθητές δεν κατανοούν αυτήν την «καθαρότητα» που τα χαρακτηρίζει (Κλαουδάτος, 1992).

Οι εφαρμογές της μοντελοποίησης δεν είναι οι συνηθισμένες δραστηριότητες ή εργασίες που κάνουν οι μαθητές μέσα στην σχολική τάξη ή στο σπίτι τους. Ενδέχεται μερικές φορές να είναι πιο απαιτητικές, να απαιτούν περισσότερο προσωπικό χρόνο από τους μαθητές και επιπλέον δεν είναι οι εργασίες αυτές που θα δώσουν στους μαθητές ένα παραπάνω βαθμό (Jaworski, 2006). Για παράδειγμα, οι συνηθισμένοι σε όλους μας μαθηματικοί υπολογισμοί δεν περιλαμβάνονται στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων της μοντελοποίησης καθώς τις περισσότερες φορές γίνονται μηχανικά χωρίς οι διδασκόμενοι να χρειαστεί να σκεφτούν ιδιαίτερα για να τους επιλύσουν.

Ένα ακόμα αντι-επιχείρημα για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι το γεγονός ότι η εφαρμογή της απαιτεί και από τους διδάσκοντες περισσότερες γνώσεις, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα μαθηματικές. Τα μοντέλα διδασκαλίας που αντιπροσωπεύουν αυτή τη διαδικασία είναι πιο πρωτοποριακά, μέσα από τα οποία καλλιεργείται η επικοινωνία του καθηγητή και του μαθητή αλλά και η συνεργασία μεταξύ των μαθητών. Όλα αυτά απαιτούν ένα διαφορετικό τρόπο διδασκαλίας που αποκλίνει από τον παραδοσιακό που έχουμε συνηθίσει έως σήμερα.

### **2.3 Ο ρόλος της τεχνολογίας στη μαθηματική μοντελοποίηση**

Στα πλαίσια της προσπάθειας να ενταχθεί η μαθηματική μοντελοποίηση στην εκπαιδευτική διαδικασία, ο ρόλος της τεχνολογίας θεωρείται καθοριστικός. Διανύοντας την εποχή της ψηφιακής επανάστασης, θα ήταν παράλογο να μην αναφερθεί η σημασία των ψηφιακών μέσων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Από τα παλαιότερα χρόνια έως σήμερα, η χρήση των παραδοσιακών διδακτικών μέσων όπως είναι ο χάρακας, ο διαβήτης, ο πίνακας κ.ά.

είναι ιδιαίτερα σημαντική κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας γιατί βοηθάνε τους μαθητές να αντιληφθούν καλύτερα τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Πλέον όμως, δημιουργείται η ανάγκη ενσωμάτωσης σύγχρονων εκπαιδευτικών μέσων στην εκπαιδευτική δραστηριότητα. Η τεχνολογία έχει τη δυνατότητα να διευκολύνει τη ζωή μας οπότε γιατί να μην την αξιοποιήσουμε προκειμένου να κάνουμε την εκμάθηση των μαθηματικών ευκολότερη και πιο ενδιαφέρουσα;

Η ένταξη των ψηφιακών μέσων στη διαδικασία της μοντελοποίησης απαιτεί κατάλληλο εξοπλισμό. Μερικά από τα βασικότερα εργαλεία είναι ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, το κινητό και το tablet αφού είναι τα μέσα από τα οποία καθηγητές και μαθητές αποκτούν πρόσβαση σε πολλές πληροφορίες. Εξ' άλλου τα περισσότερα εκπαιδευτικά ιδρύματα πλέον διαθέτουν υπολογιστές, οι οποίοι χρησιμοποιούνται όλο και πιο συχνά. Ακόμα η ύπαρξη προβολικών και διαδραστικών πινάκων ενισχύουν τις δραστηριότητες που αφορούν τη μοντελοποίηση και οι μαθητές φτάνουν στην επίλυση προβλημάτων κατανοώντας καλύτερα το περιεχόμενό τους (Λεωνίδης, 2016).

Εκτός από τα παραπάνω ψηφιακά μέσα, πολύ ισχυρές ψηφιακές τεχνολογίες θεωρούνται τα εκπαιδευτικά λογισμικά, τα οποία χωρίζονται σε γενικής και ειδικής χρήσης. Τα δεύτερα διαθέτουν περισσότερες δυνατότητες σε σχέση με τα πρώτα και γι' αυτό προτιμώνται. Πάντα όμως η επιλογή του λογισμικού που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από τον χρήστη, ανάλογα με τις ανάγκες του.

Σημαντική λειτουργία ενός λογισμικού είναι η αναπαράσταση των συμβόλων που χρειάζονται και η εκτέλεση των πράξεων. Η λειτουργία αυτή υπάρχει σε όλα τα μαθηματικά λογισμικά. Είναι σημαντικό οι μαθητές να μην δυσκολεύονται να εισάγουν τις μεταβλητές, τα σύμβολα ή τις παραμέτρους που θα χρησιμοποιήσουν ώστε να μπορούν μετά εύκολα να τα επεξεργαστούν. Επίσης, η αυτόματη εκτέλεση των πράξεων εξοικονομεί χρόνο στο χρήστη, τον οποίο θα ξόδευε αν έκανε τις πράξεις με χαρτί και μολύβι. Για παράδειγμα οι πράξεις αλγεβρικών παραστάσεων, η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων κ.ά. αποτελούν ενέργειες που είναι απαραίτητες σ' ένα λογισμικό για έναν χρήστη που ασχολείται με τα μαθηματικά και πιο συγκεκριμένα με την Άλγεβρα.

Μια ακόμα λειτουργία που καλό είναι να διαθέτει ένα εκπαιδευτικό λογισμικό είναι η δημιουργία γραφικών παραστάσεων. Από μελέτες που έχουν γίνει σε μαθητές έχει αποδειχτεί ότι η αναπαράσταση του προβλήματος, έστω και γραφικά, εντείνει το



ενδιαφέρον των μαθητών και κάνει το πρόβλημα πιο κατανοητό (Kaiser, Maaß, 2007). Οι γραφικές παραστάσεις δίνουν τη δυνατότητα στο χρήστη να βλέπει τα αποτελέσματα των λύσεων του και αν χρειαστεί μπορεί να δώσει διαφορετικές τιμές στις μεταβλητές του. Έτσι του δίνεται η δυνατότητα να μελετήσει τα αποτελέσματα των λύσεων και να εμβαθύνει σε αυτά.

Κάποια από τα λογισμικά που χρησιμοποιούνται για εκπαιδευτικούς λόγους είναι τα παρακάτω:

- Modellus
- Stella
- Vensim
- Ithink
- GeoGebra

Τα περισσότερο διαδεδομένα στην εκπαιδευτική κοινότητα είναι το Modellus και το Stella (Αποστολοπούλου, 2012). Το πρώτο λογισμικό είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται κυρίως στη διδασκαλία των θετικών επιστημών. Έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει μαθηματικά μοντέλα και να τα επεξεργαστεί με τη χρήση πινάκων, γραφικών παραστάσεων και animation. Το δεύτερο λογισμικό, το Stella, χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο από εκπαιδευτικούς ειδικής αγωγής καθώς δίνει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν δραστηριότητες, προσαρμόζοντας συγκεκριμένο υλικό με σκοπό την ανάπτυξη διάφορων ικανοτήτων στο φάσμα του αυτισμού. Επίσης, είναι αρκετά διαδραστικό και μπορεί να προσαρμοστεί ανάλογα με το μαθησιακό επίπεδο του κάθε παιδιού.

Το GeoGebra είναι ένα λογισμικό που χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Το όνομά του προέρχεται από τις λέξεις geometry και algebra καθώς συνδέει τις δύο αυτές επιστήμες. Αποτελεί για τους εκπαιδευτικούς σημαντικό εργαλείο για τη δημιουργία φύλλων εργασιών και αποτελεί δυνατή επιφάνειες δημιουργίας και πειραματισμού. Επιπλέον, προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικά μοντέλα διατηρώντας τον ενδιαφέρον τους.

Όλες οι παραπάνω λειτουργίες και ακόμα περισσότερες χρησιμοποιούνται προκειμένου να ενταχθεί η μαθηματική μοντελοποίηση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Για να συμβεί αυτό ο χρήστης πρέπει να γνωρίζει να τις χειρίζεται σωστά. Είναι απαραίτητο να ελέγχεται

η ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από ένα τέτοιο λογισμικό. Αυτό βέβαια μπορεί να συμβεί εάν και εφόσον υπάρχουν οι απαραίτητες γνώσεις ώστε ο χρήστης να μπορεί να επεξεργάζεται τα αποτελέσματα και να είναι σε θέση να εξελίξει την κριτική του ικανότητα και τις γνώσεις του. Διαφορετικά όλα τα οφέλη που προσφέρουν τα λογισμικά δεν έχουν καμία σημασία και ο παιδαγωγικός τους ρόλος αποδυναμώνεται.

### **3 ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ**

#### **3.1 Οι δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία της μοντελοποίησης**

Οι καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και πιο συγκεκριμένα του γυμνασίου δεν εφαρμόζουν στο σύνολό τους πρακτικές μοντελοποίησης στα σχολεία. Αυτοί οι οποίοι προσπαθούν να την εντάξουν στη διαδικασία της διδασκαλίας είναι λίγοι και κυρίως πιο ενημερωμένοι σχετικά με τη νέα αυτή μέθοδο (Ferrri & Blum, 2009). Υπάρχει ένας αριθμός εκπαιδευτικών που προτιμούν τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών. Ακόμα όμως και αυτοί που έχουν τη διάθεση να εφαρμόσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση στη διδασκαλία τους αντιμετωπίζουν αρκετά προβλήματα με αποτέλεσμα να αποθαρρύνονται και να επιστρέφουν στις πιο παραδοσιακές μεθόδους.

Η υλοποίηση της μοντελοποίησης στα μαθηματικά είναι μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία για τους καθηγητές της μέσης εκπαίδευσης γιατί απαιτούνται πιο εξειδικευμένες γνώσεις, τις οποίες οι περισσότεροι δεν τις κατέχουν (Asemprara, 2016). Γι' αυτό το λόγο υπάρχουν ειδικά προγράμματα σπουδών που προετοιμάζουν τους εκπαιδευτικούς γι' αυτήν τη νέα μέθοδο. Σύμφωνα με τον Lingeflard (2007), αυτά τα προγράμματα είναι ιδιαίτερα απαιτητικά καθώς χαρακτηρίζονται χρονοβόρα και δύσκολα. Αυτό συμβαίνει γιατί η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνει αντικείμενα μελέτης που έχουν έναν πιο γενικό χαρακτήρα απ' ότι κάποιοι άλλοι τομείς των μαθηματικών, όπως είναι η Άλγεβρα ή η Γεωμετρία.

Οι διδάσκοντες θα πρέπει να κατανοήσουν αρχικά την έννοια και έπειτα το σκοπό της μοντελοποίησης, προκειμένου να βρουν τρόπους να την εφαρμόσουν μέσα στη σχολική τάξη και να προσελκύσουν το ενδιαφέρον των μαθητών τους. Παρ' όλη τη δυσκολία που μπορεί οι περισσότεροι να αντιμετωπίσουν, έχει αποδειχθεί πως η μαθηματική μοντελοποίηση μόνο οφέλη μπορεί να προσφέρει καθώς είναι πολύ βοηθητική για τους μαθητές όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης (Voskoglou, 2006).

Ο Ang (2010), με στόχο τη μελέτη των γνώσεων των καθηγητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία της μοντελοποίησης, πραγματοποίησε μια έρευνα, όπου συμμετείχαν 24 μαθηματικοί εκπαιδευτικοί στη Σιγκαπούρη. Αντικείμενο της έρευνας ήταν να εξετάσει τις γνώσεις και τις δεξιότητες των καθηγητών στη δημιουργία μαθηματικών

μοντέλων, χωρίς όμως οι ίδιοι να έχουν κάποια προηγούμενη εμπειρία πάνω στη μοντελοποίηση. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν τα οφέλη που έχει μια τέτοια διαδικασία για τους μαθητές, πράγμα αναμενόμενο, αφού δεν είχαν τις απαραίτητες γνώσεις γι' αυτό. Παρ' όλα αυτά, φάνηκε πως αντιμετώπισαν την πρόκληση καλοπροαίρετα μιας και έδειξαν ενδιαφέρον για το νέο αυτό τρόπο διδασκαλίας.

Άλλη έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον Ng, το 2013 αναφέρει πως ένα ακόμα εμπόδιο στην εφαρμογή της μοντελοποίησης στα σχολεία είναι η έλλειψη εμπειρίας των εκπαιδευτικών. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μαθηματικούς εκπαιδευτικούς της Σιγκαπούρης και παρατηρήθηκε ότι πολλοί απ' αυτούς που εφάρμοσαν την μοντελοποίηση αδυνατούσαν να αντιληφθούν τη χρησιμότητά της. Χωρίς την ανάλογη εμπειρία είναι δύσκολο να εναρμονιστούν μ' αυτήν και να εντοπίσουν τα σημεία ενός προβλήματος που δυσκολεύουν τους μαθητές τους.

Η Doerr έκανε παρόμοιες έρευνες σε μελλοντικούς καθηγητές οι οποίοι όμως είχαν γνώσεις πάνω στη μαθηματική μοντελοποίηση. Όταν λοιπόν κλήθηκαν να κατασκευάσουν μαθηματικά μοντέλα, δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερες δυσκολίες και αναγνώρισαν τη χρησιμότητα της μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ενώ αρχικά εκτελούσαν τη διαδικασία μηχανικά, ακολουθώντας τις μεθόδους που είχαν διδαχθεί, στη συνέχεια άλλαξαν σκεπτικό, συνειδητοποιώντας πως πρέπει να είναι πιο ευέλικτοι και να την προσαρμόσουν στις ανάγκες των μαθητών τους (Doerr, 2003).

Η έρευνα του Kuntze, Siller και Vogl, που πραγματοποιήθηκε το 2013, επιβεβαιώνει ότι η έλλειψη εμπειρίας είναι βασικό εμπόδιο για τους καθηγητές. Στην συγκεκριμένη έρευνα έλαβαν μέρος 38 εν δυνάμει εκπαιδευτικοί και 48 καθηγητές μαθηματικών που διδάσκουν ήδη σε σχολεία. Όταν ήρθε η στιγμή να απαντήσουν στα ερωτήματα που είχαν να κάνουν με τις γνώσεις τους και την αντίληψή τους σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης, παρατηρήθηκε πως οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί επικεντρώθηκαν στα βήματα που χρειάζονται για την κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου. Από την άλλη μεριά, οι εν ενεργεία καθηγητές ήταν πιο διαλλακτικοί στις απαντήσεις τους με καλύτερη αντίληψη πάνω στην πρακτική της μοντελοποίησης. Από τα αποτελέσματα φάνηκε πως έδιναν καλύτερες συμβουλές και περισσότερες πληροφορίες στους μαθητές σχετικά με το πρόβλημα που είχαν να επιλύσουν και ότι γενικότερα είχαν την ικανότητα να αντιληφθούν ολόκληρη τη διαδικασία πιο σωστά.

Ένας όχι και τόσο μικρός αριθμός εκπαιδευτικών δείχνει να μην έχει κατανοήσει ένα βασικό στοιχείο της μαθηματικής μοντελοποίησης. Από την έρευνα του Gould, το 2013, προέκυψε ότι τα τρία δέκατα των εκπαιδευτικών που έγινε η έρευνα δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι τα προβλήματα της μοντελοποίησης βασίζονται στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Αντίθετα θεωρούν πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί σε τυποποιημένες μαθηματικές ασκήσεις. Το αποτέλεσμα αυτού είναι να μην γίνεται έλεγχος της ορθότητας των λύσεων του προβλήματος αν δηλαδή αυτές ανταποκρίνονται στη πραγματικότητα.

Λαμβάνοντας υπ' όψη μας εργασίες που έχουν γίνει από Έλληνες φοιτητές και καθηγητές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ο περιορισμένος χρόνος των διδακτικών ωρών είναι μια ακόμα δυσκολία που εμποδίζει τους εκπαιδευτικούς της μέσης κυρίως εκπαίδευσης να εφαρμόσουν πρακτικές μοντελοποίησης στα σχολεία (Κλαουδάτος, 1992). Οι περισσότεροι υποστηρίζουν πως το εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας δεν είναι κατάλληλα ρυθμισμένο για να προωθήσει τέτοιες πρακτικές κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους. Το πρόβλημα αυτό εντείνεται σε βασικά μαθήματα όπως είναι τα μαθηματικά καθώς ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών έχει ελλείψεις. Πιο συγκεκριμένα, η ύλη που πρέπει να διδαχτεί στα μαθηματικά του γυμνασίου θεωρείται αρκετά μεγάλη και οι ώρες για τη διδασκαλία τους είναι προσαρμοσμένες στην εξεταστέα ύλη που πρέπει να καλυφθεί. Έτσι, θεωρούν πως η μαθηματική μοντελοποίηση είναι περισσότερο εφικτό να εφαρμοστεί στα δημοτικά σχολεία όπου δεν υπάρχει η πίεση του χρόνου.

Πολλοί είναι αυτοί που πιστεύουν πως η αιτία που η μοντελοποίηση δεν προωθείται στα σχολεία είναι το ίδιο το εκπαιδευτικό σύστημα. Υπάρχει η αντίληψη πως οι μαθητές από το γυμνάσιο και έπειτα μπαίνουν σε μια διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών που είναι πολύ τυποποιημένη (Λεωνίδης, 2016). Για παράδειγμα, τους ζητείται συνήθως να λύνουν ασκήσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένη μεθοδολογία, γεγονός που τους απομακρύνει από το να αποκτήσουν δεξιότητες ώστε να μπορούν να κατασκευάζουν μαθηματικά μοντέλα. Είναι αλήθεια πως στην Ελλάδα, οι μαθητές από μικρή ηλικία προετοιμάζονται για μια σειρά εξετάσεων με αποτέλεσμα να απομακρύνονται από την έννοια της μοντελοποίησης.

### **3.2 Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της μοντελοποίησης**

Δυσκολίες στη διδακτική της μαθηματικής μοντελοποίησης δεν αντιμετωπίζουν μόνοι οι εκπαιδευτικοί αλλά και οι μαθητές. Το γεγονός ότι οι μαθητές του γυμνασίου δεν είναι

αρκετά εξοικειωμένοι με τα ψηφιακά μέσα που χρησιμοποιούνται για δραστηριότητες της μοντελοποίησης καθιστά προβληματική την εφαρμογή της στα σχολεία. Παρ' όλο που τα παιδιά σήμερα κάνουν χρήση της τεχνολογίας, περισσότερο από κάθε άλλη εποχή, η χρήση κατάλληλων λογισμικών φαίνεται να τους δυσκολεύει. Η έρευνα των Greefrath, Hertleif και Siller (2018), έδειξε πως οι μαθητές που κατάφεραν να δουλέψουν με μαθηματικά λογισμικά είναι αυτοί που κατανόησαν καλύτερα την έννοια της μοντελοποίησης. Δοκίμασαν πολλές διαφορετικές εντολές του λογισμικού, επεξεργάστηκαν περισσότερα μοντέλα και γενικότερα πειραματίστηκαν. Οι υπόλοιποι, δηλαδή αυτοί που εξέφρασαν αμφιβολίες για τη χρήση του λογισμικού, έκαναν λόγο για δυσκολίες που συνάντησαν κατά τη χρήση του.

Επιπλέον, στη μελέτη του Hertleif (2017), στην οποία συμμετείχαν 328 μαθητές από την παραπάνω έρευνα διαπιστώθηκε πως οι μαθητές εκτός από τα προβλήματα που είχαν με τη χρήση του λογισμικού, δυσκολεύτηκαν εξαιτίας έλλειψης μαθηματικών γνώσεων. Άτομα δηλαδή που δεν έχουν όλες τις απαραίτητες γνώσεις πάνω στα μαθηματικά εκφράζουν αδυναμία στην εφαρμογή της.

Έχει παρατηρηθεί πως μαθητές μικρότερης ηλικίας μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα την διαδικασία αυτή απ' ότι οι μεγαλύτεροι (Bahmaei, 2014). Αυτό συμβαίνει γιατί η μοντελοποίηση ως νέα μέθοδος διδασκαλίας που χρησιμοποιεί παραγωγή υποθέσεων, παρατήρηση και εφαρμογές, χρειάζεται μια διαφορετική αντιμετώπιση των μαθηματικών από αυτή που έχουμε συνηθίσει έως τώρα. Οπότε μαθητές μεγαλύτερων τάξεων μπορεί να δυσκολευτούν να αντιμετωπίσουν το μάθημα αυτό με εντελώς άλλη οπτική από αυτή που την αντιμετώπιζαν έως τώρα. Όταν λοιπόν, γίνονται προσπάθειες ένταξης της στη διδασκαλία από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού, οι μαθητές φτάνοντας στο γυμνάσιο και στο λύκειο έχουν μάθει να δουλεύουν με αυτή.

### **3.3 Πρακτικές ένταξης της μαθηματικής μοντελοποίησης στα ελληνικά σχολεία**

Τα τελευταία χρόνια, σε πολλές χώρες του κόσμου, αλλά και στην Ελλάδα γίνεται προσπάθεια ένταξης της μαθηματικής μοντελοποίησης στην διδασκαλία. Επιστήμονες και ειδικοί έχουν καταλήξει πως υπάρχουν κυρίως δύο τρόποι που ένας μαθητής μπορεί να εμπλακεί σ' αυτή τη διαδικασία. Ο πρώτος τρόπος είναι δημιουργώντας μοντέλα οι ίδιοι οι μαθητές. Με αυτόν τον τρόπο, οι εκπαιδευτικοί βάζουν τους μαθητές τους στη διαδικασία να εκφράζουν τους συλλογισμούς τους και να έρχονται αντιμέτωποι με αυτούς. Έτσι, με

την αναπαράσταση των σκέψεων τους αποκτούν την δεξιότητα να μπορούν να τις ελέγξουν. Οι ίδιοι διορθώνουν και βελτιώνουν τα μαθηματικά μοντέλα που κατασκευάζουν με αποτέλεσμα να βελτιώνουν παράλληλα τα νοητικά γνωστικά τους σχήματα.

Ο δεύτερος τρόπος εμπλοκής των διδασκόμενων στη μοντελοποίηση είναι η παρατήρηση και η επεξεργασία μοντέλων, τα οποία έχουν κατασκευαστεί από τρίτους. Διερευνώντας μοντέλα άλλων, οι μαθητές έχουν άμεση πρόσβαση στις ιδέες των δημιουργών των μοντέλων. Αυτόματα λοιπόν, συγκρίνουν τα δικά τους γνωστικά σχήματα με των άλλων. Αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη της κριτικής τους σκέψης, πράγμα πολύ σημαντικό ώστε να μπορούν να κατανοήσουν τα μαθηματικά μέσα από την μοντελοποίηση.

Η εισαγωγή της μαθηματικής μοντελοποίησης πραγματοποιείται και μέσα από εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Οι διδάσκοντες έχουν την δυνατότητα να κατασκευάσουν δραστηριότητες που να προέρχονται από την παρατήρηση φυσικών φαινομένων και όχι μόνο. Μπορούν επίσης να πραγματοποιήσουν παιχνίδια εκπαιδευτικού χαρακτήρα και να χρησιμοποιήσουν τα τεχνολογικά μέσα που διαθέτουν για να διδάξουν νέες μαθηματικές έννοιες. Σ' αυτό το σημείο υπάρχει η πιθανότητα να δημιουργηθούν αρκετά περίπλοκα μαθηματικά μοντέλα που να είναι δυσνόητα στους μαθητές. Γι' αυτό οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι πολύ προσεχτικοί κατά τη δημιουργία τους.

Ένα παράδειγμα είναι η διδασκαλία των εξισώσεων και των προβλημάτων τους στην Α' γυμνασίου. Το κεφάλαιο αυτό θεωρείται ένα από τα δυσκολότερα για τους μαθητές του γυμνασίου γιατί δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης και ύστερα να την εντάξουν στη λογική των προβλημάτων που αντιστοιχούν σ' αυτές. Έτσι γι' αυτό το κεφάλαιο, σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα για το μάθημα των μαθηματικών αναφέρεται πως: «Θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν προβλήματα από τις εμπειρίες και το περιβάλλον των μαθητών και να δοθεί η ευκαιρία να παρουσιαστούν στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως είναι:

- Ο σχεδιασμός πίνακα, διαγράμματος ή γραφικής παράστασης
- Δοκιμές απλούστερων αριθμών που μπορεί να επαληθεύουν το πρόβλημα
- Εύρεση του μοντέλου που ικανοποιεί το πρόβλημα
- Δημιουργία υποθέσεων και έλεγχος τους»

### **3.4 Παράδειγμα προβλημάτων μοντελοποίησης**

#### Παράδειγμα

Ο Γιώργος έχει επισκεφτεί το Παρίσι και θέλει να αγοράσει 15 τουλάχιστον *carte postale* στα αγαπημένα του πρόσωπα. Οι μικρού μεγέθους κοστίζουν 2€ η μία και οι μεγαλύτερες 3€ η μία. Ο Γιώργος όμως έχει στο πορτοφόλι του 20€. Πόσα *carte postale* μικρά και μεγάλα μπορεί να αγοράσει;

### Μοντελοποίηση

Οι μεταβλητές που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- X, ο αριθμός των μικρών *carte postale*
- Y, ο αριθμός των μεγάλων *carte postale*

Οι παράμετροι του προβλήματος είναι:

- 2€ η τιμή κάθε *carte postale* μικρού μεγέθους
- 3€ η τιμή κάθε *carte postale* μεγάλου μεγέθους
- 20€ τα χρήματα που έχει ο Γιώργος στο πορτοφόλι του
- Το να αγοράσει τουλάχιστον 15 *carte postale*

Περιορισμοί:

- Το σύνολο των μικρών και μεγάλων *carte postale* που θα αγοράσει ο Γιώργος πρέπει να είναι τουλάχιστον 15, δηλαδή 15 ή περισσότερες. Στα μαθηματικά η πρόταση αυτή αποτυπώνεται:  $X+Y \geq 15$
- Το συνολικό ποσό που μπορεί να πληρώσει είναι μέχρι 20€, δηλαδή 20€ ή λιγότερα. Η μαθηματική διατύπωση είναι:  $2X+3Y \leq 20$
- Ο αριθμός των μικρών και μεγάλων *carte postale* πρέπει να είναι θετικός, ακέραιος αριθμός από τη στιγμή που αναφερόμαστε σε αντικείμενα, δηλαδή  $X \geq 0$  και  $Y \geq 0$

Σ' αυτό το πρόβλημα δεν υπάρχει αντικειμενικός στόχος, οπότε οι δυνατές λύσεις είναι περισσότερες από μια. Σ' αυτήν την περίπτωση ο μαθητής επιλέγει ο ίδιος την λύση που τον βολεύει περισσότερο.

### Μοντέλο

$$X+Y \geq 15$$

$$2X+3Y \leq 20$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$





## 4 ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

### 4.1 Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων στη μαθηματική μοντελοποίηση

Οι ερευνητές εδώ και αρκετά χρόνια έχουν συμφωνήσει πως τα σχολικά βιβλία είναι η αρχή και το τέλος σχετικά με τη μαθηματική γνώση που λαμβάνουν οι μαθητές (Καραβασίλης, Κόσσυβας, 2016). Τα σχολικά εγχειρίδια είναι εκείνα που, σε συνδυασμό φυσικά με τους εκπαιδευτικούς, είναι υπεύθυνα να προετοιμάσουν τους μαθητές για την ένταξή τους στη κοινωνία, οπότε το περιεχόμενό τους πρέπει να είναι διαμορφωμένο ώστε να οδηγεί στην επίτευξη των μαθησιακών στόχων. Επιπλέον, οι δραστηριότητες που πραγματοποιούνται μέσα σε μια τάξη καθορίζουν κατά ένα μεγάλο ποσοστό τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών. Τις περισσότερες φορές οι δραστηριότητες αυτές είναι συνυφασμένες με το περιεχόμενο των βιβλίων. Για να υπάρχει αποτέλεσμα και να μπορέσουν οι μαθητές να διερευνήσουν νέες έννοιες και προβλήματα, οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες θα πρέπει να είναι συγκεκριμένες και σωστά δομημένες. Πολλές φορές όμως, τα βιβλία που χρησιμοποιούνται απομακρύνονται από τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες των μαθητών με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην εκδηλώνουν το απαραίτητο ενδιαφέρον για αυτές.

Σε πολλές χώρες, οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν κατά γράμμα τα διδακτικά εγχειρίδια. Παρατηρείται πως αυτό συμβαίνει στο μάθημα των μαθηματικών σε μεγαλύτερο βαθμό απ' ό τι στα άλλα μαθήματα. Τα σχολικά βιβλία δίνουν τη δυνατότητα στους καθηγητές να μπορούν να επιλέξουν με ποιον τρόπο θα διδάξουν και τους κατευθύνουν σύμφωνα με την ύλη που πρέπει υποχρεωτικά να καλυφθεί κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Επίσης, τους παρέχει μια κατευθυντήρια γραμμή σχετικά με τις δραστηριότητες που θα χρησιμοποιήσουν κατά τη διδασκαλία.

Η ανανέωση των σχολικών βιβλίων θεωρείται πολύ σημαντική ενέργεια αφού σ' αυτά στηρίζεται σχεδόν ολόκληρη η εκπαιδευτική διαδικασία. Στην Ελλάδα, το σχολικό έτος 2007-2008, έγινε για πρώτη φορά αλλαγή των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών του γυμνασίου μετά από 20 περίπου χρόνια. Αντικαταστάθηκαν τα παλιά με νέα βιβλία που ήταν αναβαθμισμένα, διορθωμένα και εμπλουτισμένα με πιο σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας. Τα νέα διδακτικά εγχειρίδια βασίζονται στη διαθεματικότητα και στην ανάπτυξη της ενεργητικής μάθησης. Εκείνη τη περίοδο, γίνεται λόγος για την εισαγωγή δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών, τις οποίες μάλιστα συναντάμε μέσα

στα νέα βιβλία. Παράλληλα όμως, αναφέρθηκαν κάποιες αδυναμίες που εντοπίστηκαν. Μερικές από αυτές είναι η έλλειψη συνεργασίας των συγγραφέων μεταξύ τους, η υποβάθμιση των γεωμετρικών αποδείξεων, ο διαχωρισμός της Άλγεβρας από τη Γεωμετρία, η ένταξη δραστηριοτήτων που θεωρήθηκαν ακατάλληλες για τη διδασκαλία των μαθηματικών και άλλες.

Στα νέα βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου είναι φανερή η προσπάθεια που γίνεται από τους συγγραφείς να εντάξουν την μαθηματική μοντελοποίηση στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επιχείρησαν να εισάγουν δραστηριότητες που να προέρχονται από καθημερινές καταστάσεις και να είναι πιο οικίες στους μαθητές. Όμως οι περισσότερες από αυτές είναι ήδη λυμένες, μη επιτρέποντας στα παιδιά να δημιουργήσουν δικές τους αναπαραστάσεις και τελικά να τις επιλύσουν. Τα σχολικά εγχειρίδια λοιπόν έχουν ως αρχικό στόχο την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών, μεθοδολογιών και ύστερα την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. Η εφαρμογή της μοντελοποίησης όμως στηρίζεται στο γεγονός ότι οι μαθητές θα πρέπει να κατανοούν τις νέες μαθηματικές έννοιες μέσα από την επίλυση προβλημάτων και όχι πριν από αυτά.

Γενικά, παρατηρήθηκε πως η ένταξη δραστηριοτήτων στα βιβλία των μαθηματικών δημιούργησε μερικές αμφιβολίες στους εκπαιδευτικούς. Ανησύχησαν για τον τρόπο διδασκαλίας σχετικά με αυτές λόγω του περιορισμένου χρόνου που έχουν στη διάθεσή τους για να καλύψουν την ύλη και του τρόπου με τον οποίο θα γίνεται πλέον το μάθημα. Αυτό που τους ικανοποίησε ήταν η εισαγωγή λυμένων ασκήσεων και εφαρμογών αλλά εξέφρασαν την επιθυμία τους να μην ενταχθούν παραπάνω προβλήματα που να σχετίζονται με φυσικά φαινόμενα ή καταστάσεις από την καθημερινή ζωή. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί στράφηκαν υπερ των παραδοσιακών ασκήσεων που υπήρχαν μέχρι τότε και τον μονόδρομο τρόπο διδασκαλίας, ακολουθώντας αυστηρά τα σχολικά εγχειρίδια.

Η ύπαρξη προβλημάτων στα βιβλία αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι στη διδασκαλία των μαθηματικών, ειδικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να υπάρχουν και να χρησιμοποιούνται σε όλες τις τάξεις του γυμνασίου και του λυκείου. Ο Schoenfeld αναφέρει πως η διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος βοηθάει τους μαθητές να εξελίσσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και να αναπτύξουν τεχνικές επίλυσης προβλημάτων. Αυτή είναι η βασική διαφορά που υπάρχει μεταξύ αυτών των προβλημάτων και των απλών ασκήσεων που ίσως πολλές φορές προτιμώνται από τους

εκπαιδευτικούς. Οι δραστηριότητες που προτρέπουν τους μαθητές να λύσουν προβλήματα προωθούν επίσης ικανότητες σκέψης και επικοινωνίας.

## 4.2 Παραδείγματα μετατροπής των προβλημάτων των σχολικών βιβλίων σε προβλήματα μοντελοποίησης

Σ' αυτήν την ενότητα θα τροποποιηθούν μερικά προβλήματα των βιβλίων των μαθηματικών του γυμνασίου ώστε να τα μοντελοποιηθούν.

Το πρώτο πρόβλημα είναι το πρόβλημα του βιβλίου της β' γυμνασίου στη σελίδα 37.

**10** Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας «Parla-net» προτείνει στους πελάτες της δύο «πακέτα» συνδρομής:



1ο: πάγιο 7,50 € το μήνα και χρέωση 0,254 € το λεπτό.  
2ο: πάγιο 15 € το μήνα και χρέωση 0,204 € το λεπτό.  
Από πόσο χρόνο ομιλίας και πάνω συμφέρει το 2ο πακέτο;

Εικόνα 2-άσκηση 10 σελίδα 37, σχολικό βιβλίο β' γυμνασίου

### Πρόβλημα μοντελοποίησης:

Ο Χάρης αποφάσισε να αλλάξει εταιρεία κινητής τηλεφωνίας και να μεταφερθεί στη «Parla-net». Η εταιρεία αυτή του προσφέρει 2 διαφορετικά πακέτα συνδρομής, τα οποία διαθέτουν λεπτά ομιλίας, μηνύματα και megabyte (MB). Ο Χάρης δεν μπορεί να πληρώνει πάνω από 30€ το μήνα για κάθε πακέτο.

- i. Αν χρειάζεται μόνο τα λεπτά ομιλίας, ποιο από τα 2 πακέτα τον συμφέρει να επιλέξει;
- ii. Αν χρειάζεται μόνο τα μηνύματα, ποιο από τα 2 πακέτα τον συμφέρει να επιλέξει;
- iii. Αν χρειάζεται μόνο τα MB, ποιο από τα 2 πακέτα τον συμφέρει να επιλέξει;

- iv. Αν χρειάζεται μόνο 3 ώρες ομιλίας το μήνα, πόσα MB μπορεί να έχει με το πρώτο πακέτο και πόσα με το δεύτερο;
- v. Εσείς ποιο πακέτο από τα 2 θα επιλέγατε;

Το αρχικό πρόβλημα του βιβλίου μετατράπηκε σε ανοιχτό πρόβλημα μοντελοποίησης. Αρχικά, είναι φανερό πως είναι βασισμένο σε πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής των μαθητών. Τα παιδιά πλέον, από μικρή ηλικία, έχουν πλήρη εξοικείωση με τα κινητά τηλέφωνα αφού αποτελεί μέρος της ζωής τους. Επομένως η διαδικασία εύρεσης ενός οικονομικού πακέτου θα τους κινήσει την περιέργεια και θα ασχοληθούν ενεργά με το πρόβλημα. Επιπλέον, θεωρείται ανοιχτό πρόβλημα γιατί οι μαθητές πρέπει να αναλύσουν τα δεδομένα που τους δίνονται και με τη χρήση μαθηματικών σχέσεων να καταλήξουν στην πιο οικονομική προσφορά. Όσο αφορά το μαθησιακό πλαίσιο του προβλήματος, τα παιδιά καλούνται να δουλέψουν με εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού. Ο βαθμός δυσκολίας θεωρείται αρκετά μεγάλος αφού θα πρέπει να επεξεργαστούν τα πολλά διαφορετικά δεδομένα που έχουν και να είναι εξοικειωμένα με τις εξισώσεις και τις ανισώσεις.

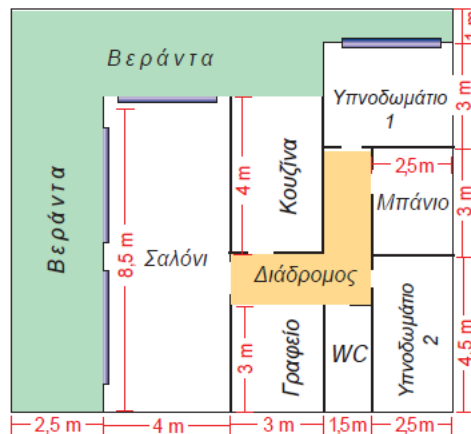
Είναι σημαντικό να τηρηθεί η διαδικασία της μοντελοποίησης ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να την κατανοήσουν. Σε πρώτο στάδιο οι μαθητές θα πρέπει να κατασκευάσουν ένα μοντέλο που να βασίζεται σε πραγματικές καταστάσεις. Για να γίνει αυτό, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η κατανόηση του προβλήματος και των δεδομένων αυτού, των χρεώσεων για ομιλία, μηνύματα και MB. Στη συνέχεια, θα πρέπει να γίνει μαθηματικοποίηση του προβλήματος, να οριστούν δηλαδή όλες οι μεταβλητές που χρειάζονται για προχωρήσει η διαδικασία. Κάνοντας τη μαθηματικοποίηση, το μοντέλο μετατρέπεται σε μαθηματικό και είναι έτοιμο να λυθεί. Αφού πραγματοποιηθεί η μαθηματική επίλυση, οι μαθητές καλούνται να επεξεργαστούν τις πιθανές λύσεις και να καταλήξουν στη πιο σωστή, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση στην πιο συμφέρουσα γι' αυτούς και κατ' επέκταση για τον Χάρη. Έπειτα, χρειάζεται να ελέγξουν την ορθότητα της λύσης, να δουν αν ανταποκρίνεται στη πραγματικότητα και τελικά να την παρουσιάσουν.

Όλη αυτή η κυκλική διαδικασία είναι αυτή που πρέπει να ακολουθείται από τους μαθητές, με τη καθοδήγηση φυσικά από τους εκπαιδευτικούς, όταν έχουν να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα μοντελοποίησης. Αυτό απαιτεί χρόνο και δεν συμβαίνει σε μια διδακτική ώρα

αλλά σε περισσότερες, καθώς είναι μια μεγάλη και περίπλοκη διαδικασία που οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει. Σίγουρα όμως είναι πιο αποτελεσματική.

Το δεύτερο πρόβλημα είναι επίσης της β' γυμνασίου και βρίσκεται στη σελίδα 126 του σχολικού βιβλίου.

- 16** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κάτοψη ενός διαμερίσματος. Να βρείτε:
- Το εμβαδόν κάθε δωματίου.
  - Το εμβαδόν του γωνιακού διαδρόμου.
  - Το εμβαδόν της βεράντας.



Εικόνα 3-άσκηση 16 σελίδα 126, σχολικό βιβλίο β' γυμνασίου

### Πρόβλημα μοντελοποίησης:

Η Ελένη και ο Κώστας αποφάσισαν να χτίσουν ένα καινούργιο σπίτι για να μείνουν με τα παιδιά τους. Όταν ήρθε η στιγμή να βάλουν πλακάκια και ο μάστορας τους ρώτησε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν αυτοί απάντησαν πως δεν θα χρειαστούν περισσότερα από 1000. Είχαν δίκιο ο Κώστας και Η Ελένη; Να βρείτε πόσα ακριβώς πλακάκια θα χρειαστούν.

Παρατηρούμε πως και το δεύτερο πρόβλημα είναι ανοιχτού τύπου και βασίζεται σε στοιχεία της καθημερινής ζωής. Οι μαθητές μπορούν εύκολα να μπουν στη θέση του Κώστα και της Ελένης καθώς θα μπορούσαν να φανταστούν το δικό τους σπίτι. Σ' αυτό το πρόβλημα μοντελοποίησης δεν δίνονται όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για την επίλυσή τους άρα οι μαθητές θα πρέπει να κάνουν πολλές διαφορετικές υποθέσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να

υπάρξουν διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος και κατ' επέκταση λύσεις. Τα παιδιά προκειμένου να φτάσουν στη λύση θα πρέπει να έχουν γνώσεις Γεωμετρίας αφού ασχολούνται με εμβαδά επιφανειών αλλά και Άλγεβρας.

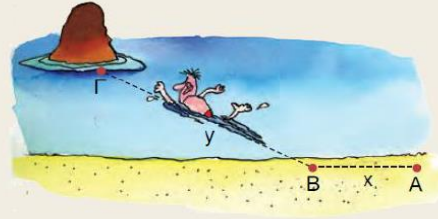
Σε όλα τα προβλήματα μοντελοποίησης όπως και σ' αυτό οι μαθητές καλό θα ήταν να γνωρίζουν τον κύκλο μοντελοποίησης καθώς θα χρειαστεί πολλές φορές να επαναλάβουν κάποιες ενέργειες. Αρχικά, πρέπει να γίνει καλή ανάγνωση και επεξήγηση του προβλήματος για να γίνει κατανοητό από όλους. Μετά από αυτό μπορούν να χωριστούν σε μικρές ομάδες δυο ή τριών ατόμων, έτσι ώστε να εργαστούν ομαδικά και όχι ατομικά. Η ομαδική εργασία έχει θετικό πρόσημο στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μοντελοποίησης γιατί τα παιδιά ανταλλάσσουν απόψεις, ιδέες και συζητούν για τυχόν προβληματισμούς και δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. (Owens, D, 1995) Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί και κάνει κάποιες βασικές διορθώσεις, εάν είναι απαραίτητο.

Κάθε ομάδα καταλήγει στο κατάλληλο μοντέλο και το μαθηματικοποιεί. Το παραπάνω πρόβλημα χρειάζεται ένα μοντέλο που να μπορεί να υπολογίσει τον αριθμό των πλακακιών που θα χρειαστεί να τοποθετηθούν σε μια επιφάνεια ενός τετραγωνικού μέτρου.

Ακολουθεί η εφαρμογή των κατάλληλων μαθηματικών γνώσεων ώστε να επιτευχθεί η λύση του προβλήματος. Αφού ολοκληρωθεί και αυτή η φάση της μοντελοποίησης καταλήγουν στην λύση την οποία πρέπει να ελέγξουν ως προς την ορθότητά της και αν αυτή ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Σε περίπτωση που παρουσιαστεί κάποιο πρόβλημα τότε θα χρειαστεί να επαναλάβουν κάποιες προηγούμενες ενέργειες με τον σωστό τρόπο αυτή τη φορά. Τέλος, οι μαθητές παρουσιάζουν τα αποτελέσματά τους στην υπόλοιπη τάξη, παρέχοντας όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για το πως κατέληξαν στη συγκεκριμένη λύση.

Το τελευταίο πρόβλημα που θα μοντελοποιήσουμε είναι το πρόβλημα 7 στη σελίδα 127 του βιβλίου της γ' γυμνασίου.

- 7 Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:
- Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις  $x, y$ .
  - Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύπησε;



Εικόνα 4-άσκηση 7 σελίδα 127, σχολικό βιβλίο γ' γυμνασίου

### Πρόβλημα μοντελοποίησης:

Κάποιος περπάτησε από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα 4km/h και μετά κολύπησε με ταχύτητα 2km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Όταν έφτασε στο σημείο Γ άρχισε ξαφνικά να χαλάει ο καιρός, οπότε σκέφτηκε να γυρίσει πίσω. Υπάρχει κάποια πιο σύντομη διαδρομή που μπορεί να ακολουθήσει έτσι ώστε να φτάσει από το σημείο Γ στο αρχικό σημείο Α, αν υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες βαδίσματος και κολύμβησης παραμένουν ίδιες;

Για ακόμα μια φορά το μοντελοποιημένο πρόβλημα μετατράπηκε από κλειστού σε ανοιχτού τύπου. Και σε αυτήν την περίπτωση βασίζεται σε πραγματικές καταστάσεις αφού το κολύμπι είναι μια δραστηριότητα που γνωρίζουν όλα τα παιδιά καθώς επίσης για τα περισσότερα αποτελεί μια ευχάριστη διαδικασία. Είναι δηλαδή εύκολο να προσελκύσει τον ενδιαφέρον των μαθητών.

Για να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα οι μαθητές θα πρέπει να έχουν κατανοήσει καλά και να γνωρίζουν να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τις συναρτήσεις, δύο από τις βασικότερες έννοιες που διδάσκονται στη δεύτερη τάξη του γυμνασίου. Παρατηρούμε πως και εδώ συνδυάζεται η Γεωμετρία με την Άλγεβρα. Θα ήταν πολύ βοηθητικό αν υπήρχε η δυνατότητα χρήσης ηλεκτρονικών υπολογιστών ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να αναπαραστήσουν τις διαδρομές και να πειραματιστούν σχετικά με αυτές. Πάντα η εικονική αναπαράσταση ενός προβλήματος καθιστά το πρόβλημα πιο ελκυστικό και περισσότερο κατανοητό.

Ως προς την ανοιχτότητα του προβλήματος, από τη διατύπωση φαίνεται πως η λύση δεν είναι απαραίτητο να είναι μοναδική, αρκεί να είναι σωστή και να ανταποκρίνεται στην



πραγματικότητα. Θα μπορούσαν δηλαδή να υπάρχουν περισσότερες από μια συντομότερες διαδρομές από αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Αυτό βέβαια δεν αναιρεί το γεγονός πως πρέπει να γίνει ο απαραίτητος έλεγχος των αποτελεσμάτων πριν οι μαθητές παρουσιάσουν τη λύση στους συμμαθητές τους.

## 5 ΣΚΟΠΟΣ, ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση των απόψεων των καθηγητών μαθηματικών, σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης στην πρωτοβάθμια και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στηριζόμενοι στο θεωρητικό μέρος της εργασίας και με την βοήθεια του ερωτηματολογίου τα εξεταζόμενα ερευνητικά ερωτήματα είναι

1. Ποιες είναι οι δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης;
2. Ποιες οι πρακτικές που ακολουθούν κατά την εκπαιδευτική πράξη σχετικά με την μοντελοποίηση;
3. Ποια η επίδραση των ατομικών χαρακτηριστικών των συμμετεχόντων στην έρευνα στις απόψεις αυτές;

### 5.1 Ερευνητικό εργαλείο

Η έρευνα στηρίχθηκε σε τέσσερις (4) βασικούς πυλώνες, στους οποίους αναπτύχθηκαν οι ερωτήσεις του ερευνητικού εργαλείου συλλογής δεδομένων. Ο πρώτος (1) πυλώνας αφορά στα δημογραφικά χαρακτηριστικά των ερωτώμενων, τα οποία είναι το φύλο, η ηλικιακή κατηγορία, το επίπεδο σπουδών, τα χρόνια προϋπηρεσίας και οι βαθμίδες διδασκαλίας.

Ο δεύτερος (2) πυλώνας αξιολογεί και αναλύει δεδομένα τα οποία στηρίζονται στην άποψη των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία της μοντελοποίησης. Στον εν λόγω πυλώνα αναπτύχθηκαν δώδεκα ερωτήσεις από τις οποίες οι 11 είναι κλειστού τύπου σχεδιασμένες σε κλίμακα Likert<sup>1</sup> (βαθμός σπουδαιότητας ή συμφωνίας), ενώ μία είναι κλειστή ονομαστικού τύπου.

Ο τρίτος (3) πυλώνας της μελέτης στοχεύει στην ανάδειξη των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ο

---

<sup>1</sup> Η κλίμακα Likert είναι ίσως η πιο διαδομένη κλίμακα μέτρησης απόψεων και συμπεριφορών. Για πρώτη φορά την εφάρμοσε ο παιδοψυχολόγος Rensis Likert. Με την κλίμακα αυτή, οι ερωτώμενοι καλούνται να δηλώσουν το βαθμό στον οποίο συμφωνούν ή διαφωνούν με μία σειρά προτάσεων σχετικά με το αντικείμενο ενδιαφέροντος.

συγκεκριμένος πυλώνας περιέχει 9 ερωτήσεις από τις οποίες οι 6 είναι σχεδιασμένες σε κλίμακα Likert ενώ οι 3 σε ονομαστική κλίμακα κλειστού τύπου και ανοιχτού τύπου.

Ο τέταρτος (4) πυλώνας της μελέτης αφορά στο βαθμό γνώσης καθηγητών μαθηματικών αναφορικά με τη μαθηματική μοντελοποίηση. Στην εν λόγω ενότητα αναπτύχθηκαν 8 ερωτήσεις από τις οποίες οι 3 είναι σχεδιασμένες σε κλίμακα Likert, ενώ οι υπόλοιπες 4 είναι σε ονομαστική κλίμακα και κλειστού τύπου και τύπου(αυθόρμητης απάντησης και πολλαπλής επιλογής καθώς και μία ερώτηση διχοτομική).

Ο έλεγχος της αξιοπιστίας του ερευνητικού εργαλείου έγινε με την βοήθεια του συντελεστή alpha του Cronbach. Ο έλεγχος έδειξε ότι το ερωτηματολόγιο μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο καθώς ο συντελεστής alpha ήταν ίσος με 0.652 σε σύνολο 31 ερωτήσεων. Ο συντελεστής αυτός είναι ελάχιστα μικρότερος από την κριτική τιμή 0.7 που δείχνει ότι ένα ερωτηματολόγιο είναι αξιόπιστο και πιθανότατα οφείλεται στην ύπαρξη ερωτήσεων διχοτομικού τύπου (Field, 2013).

## 5.2 Συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν 110 άτομα, πτυχιούχοι καθηγητές μαθηματικών. Η συλλογή των δεδομένων έγινε ηλεκτρονικά με συμπλήρωση του ερωτηματολογίου. Η περίοδος συλλογής των δεδομένων έλαβε χώρα από τις 26 Ιανουαρίου του 2022 έως και τις 16 Φεβρουαρίου του 2022.

Για την αποστολή του ερωτηματολογίου χρησιμοποιήθηκαν μέσα κοινωνικής δικτύωσης και ηλεκτρονικές διευθύνσεις. Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε ηλεκτρονικά με την βοήθεια των Google Forms. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό του IBM Spss Statistics. Η παρουσίαση των δεδομένων της μελέτης στηρίχθηκε σε περιγραφική και επαγωγική στατιστική ανάλυση.

Τέλος κατά την διεξαγωγή της έρευνας δεν καταγράφηκαν ευαίσθητα δεδομένα ή δεδομένα που μπορεί να οδηγήσουν στην ταυτοποίηση ενός συμμετέχοντα π.χ. διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου. Οι υποψήφιοι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν ότι η έρευνα είναι εθελοντική και ότι μπορούν να αποχωρήσουν από αυτή οποιαδήποτε στιγμή ήθελαν χωρίς την ανάγκη περαιτέρω διευκρινήσεων για την αποχώρησή τους.

### 5.3 Περιγραφή δείγματος

Η περιγραφή των δημογραφικών χαρακτηριστικών του δείγματος παρουσιάζεται στον πίνακα 1. Όσον αφορά το φύλο, σε σύνολο δείγματος 110 εκπαιδευτικών, η πλειοψηφία όσων απάντησαν είναι γυναίκες, με ποσοστό 51.8%, έναντι 48.2% που είναι άνδρες. Όσον αφορά στις ηλικίες των ερωτώμενων η πλειοψηφία, το 41.8%, είναι στην ηλικιακή κλίμακα από 26 ετών μέχρι και 35 ετών. Το 20.9% στην κλίμακα από 46 ετών μέχρι και 55, το 18.2% στην κλίμακα από 36 ετών μέχρι και 45, το 12.7% στην κλίμακα από 56 ετών μέχρι και 65, ενώ το 6.4% ανήκει στις ηλικίες μέχρι 25 ετών. Όσον αφορά στις βαθμίδες διδασκαλίας, η πλειοψηφία του υπό μελέτη δείγματος, εμφανίζεται να διδάσκουν στο Λύκειο σε ποσοστό 26.4%. Το 24.5% διδάσκει μόνο μαθητές γυμνασίου ενώ το 17.3% μόνο σε μαθητές Δημοτικού. Παράλληλα, το 24.5% δήλωσε ότι διδάσκει σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου και το 1.8% σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι 19 εκπαιδευτικού που έκαναν μαθήματα αποκλειστικά σε τάξεις Δημοτικού εξαιρέθηκαν από την ανάλυση καθώς δεν μπόρεσε να επιβεβαιωθεί ότι ήταν μαθηματικοί. Τέλος, το 5.5% δήλωσε ότι διδάσκει σε μαθητές και των τριών βαθμίδων της εκπαίδευσης. Αναφορικά με τα χρόνια προϋπηρεσίας που δήλωσαν ότι κατέχουν οι καθηγητές μαθηματικών που συμμετείχαν στο δείγμα, το 41.8% δήλωσε ότι έχει από 1 έως και 5 έτη προϋπηρεσίας, το 24.5% από 6 έως και 15 έτη, το 24,5% από 16 έως και 25 έτη, ενώ το 9.1% στο σύνολο του υπό μελέτη δείγματος δήλωσε ότι έχει πάνω από 25 έτη προϋπηρεσίας. Στην συνέχεια, το 54.5% των συμμετεχόντων στην έρευνα δήλωσαν ότι είναι κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου, το 5.5% διδακτορικού τίτλου και ένα ποσοστό 6.4% δήλωσε ότι κατέχει και δεύτερο πτυχίο.

**Πίνακας 1.** Δημογραφικά στοιχεία συμμετεχόντων στην έρευνα

		N	N%
Φύλο	Ανδρας	53	48,2%
	Γυναίκα	57	51,8%
Ηλικία	<26	7	6,4%
	26-35	46	41,8%
	36-45	20	18,2%
	46-55	23	20,9%
	56-65	14	12,7%
Διδάσκω σε:	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο	67	60,9%
	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο, Φροντιστήριο	3	2,7%

	Φροντιστήριο	40	36,4%
	Γυμνασίου	27	24,5%
	Γυμνασίου, Λυκείου	27	24,5%
Διδάσκω σε μαθητές και μαθήτριες	Δημοτικού	19	17,3%
	Δημοτικού, Γυμνασίου	2	1,8%
	Δημοτικού, Γυμνασίου, Λυκείου	6	5,5%
	Λυκείου	29	26,4%
Χρόνια προϋπηρεσίας	1-5 έτη	46	41,8%
	6-15 έτη	27	24,5%
	16-25 έτη	27	24,5%
	>25 έτη	10	9,1%
2ο Πτυχίο	Όχι	103	93,6%
	Ναι	7	6,4%
Μεταπτυχιακό	Όχι	50	45,5%
	Ναι	60	54,5%
Διδακτορικό	Όχι	104	94,5%
	Ναι	6	5,5%

## 6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

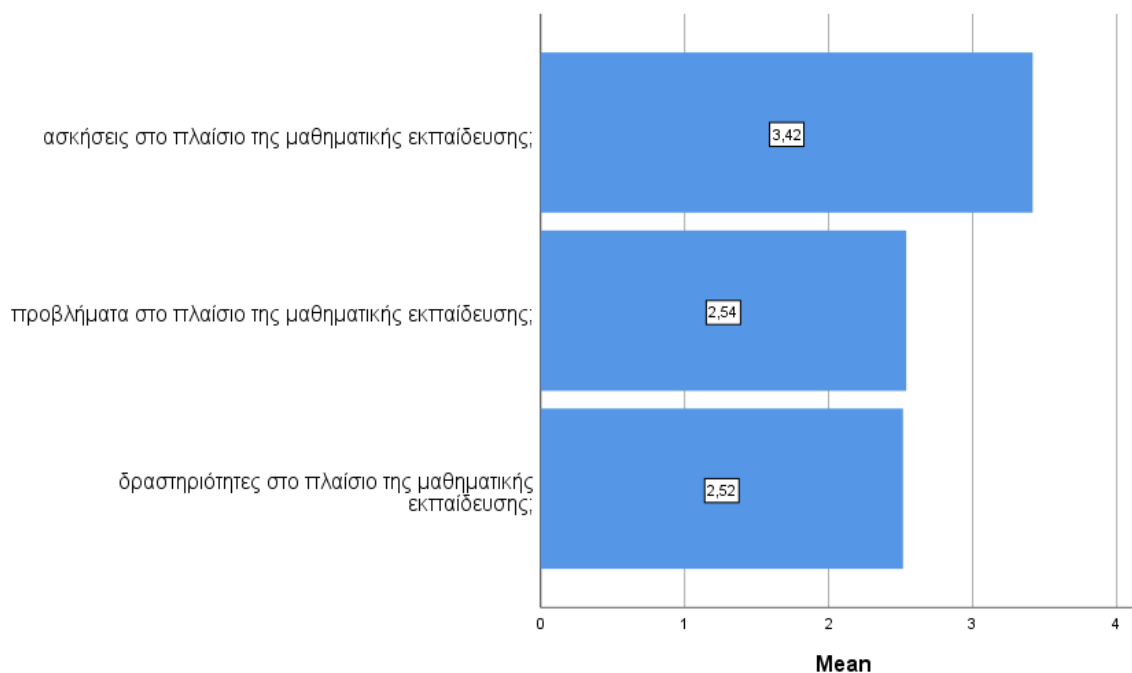
### 6.1 Επίδραση στις δραστηριότητες, στα προβλήματα και στις ασκήσεις

#### 6.1.1. Προσφορά προγραμμάτων σπουδών

Οι πρώτες 3 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου εξετάζαν τα οφέλη των υπαρχόντων προγραμμάτων σπουδών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα 2 το μεγαλύτερο μέρος των (N%=48.4%) απάντησε «Λίγο» στην αξιοποίηση δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στην συνέχεια το 36.3% «Αρκετά», το 8.8% «Πολύ», το 5.5% «Καθόλου» ενώ το 1.1% απάντησε «Πάρα πολύ». Η μέση βαθμολογία σε αυτή την ερώτηση ήταν ίση με 2.52 (SD=0.780) η οποία είναι χαμηλότερη της μέτρια άποψης «Αρκετά». Όσον αφορά την δεύτερη ερώτηση, το 48.4%, ή περίπου ένας στους δύο, απάντησε ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών προσφέρουν «Λίγο» στη δυνατότητα αξιοποίησης των προβλημάτων στα πλαίσια της μαθηματικής μοντελοποίησης. Παράλληλα το 36.3% απάντησε «Αρκετά», το 6.6% «Πολύ», το 5.5% «Καθόλου», ενώ το 3.3% «Πάρα πολύ». (M=2.54, SD=0.834) Όσον αφορά στον τρίτο ερώτημα της μελέτης, το 39.6% διατύπωσε την άποψη ότι τα υπάρχοντα προγράμματα βοηθούν αρκετά στην αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενώ το 26.4% δήλωσε «Πολύ». Παράλληλα, το 17.6% απάντησε «Λίγο», ενώ το 16.5% «Πάρα πολύ» (M=3.42, SD=0.967). Τέλος στο γράφημα 1 παρουσιάζονται οι μέσες βαθμολογίες ανά ερώτηση.

**Πίνακας 2.** Οφέλη υπαρχόντων προγραμμάτων

Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν	Καθόλου		Λίγο		Αρκετά		Πολύ		Πάρα πολύ		M	SD
	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%		
δραστηριότητες στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	5	5,5%	44	48,4%	33	36,3%	8	8,8%	1	1,1%	2,52	,780
προβλήματα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	5	5,5%	44	48,4%	33	36,3%	6	6,6%	3	3,3%	2,54	,834
ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	0	0,0%	16	17,6%	36	39,6%	24	26,4%	15	16,5%	3,42	,967



**Γράφημα 1. Μέσες βαθμολογίες των ερωτήσεων για τα οφέλη των υπαρχόντων προγραμμάτων σε φθίνουσα διάταξη.**

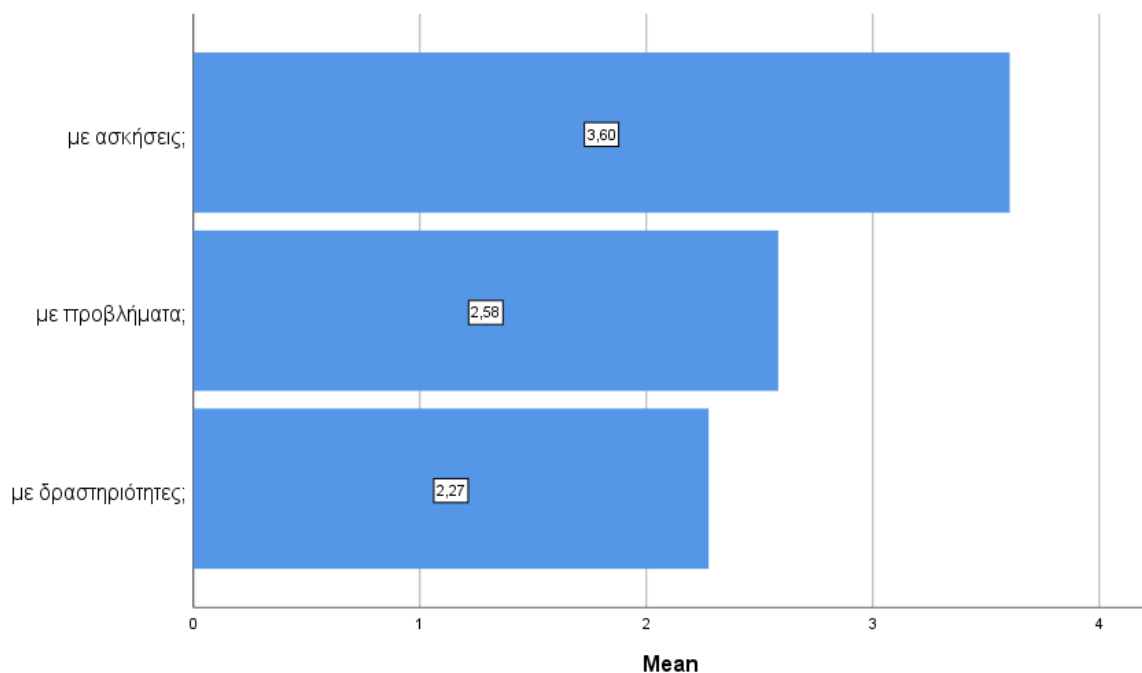
### 6.1.2. Προσφορά σχολικών εγχειριδίων

Στην συνέχεια εξετάστηκε η προσφορά των σχολικών εγχειριδίων στις δραστηριότητες, στα προβλήματα και στις ασκήσεις στην τάξη. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 3 και στο γράφημα 2 και έδειξαν ότι το 59.3% των ερωτώμενων θεωρεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν λίγες ευκαιρίες στους μαθητές να ασχοληθούν με δραστηριότητες. Παράλληλα, το 25.3% απάντησε «Αρκετά», ενώ το 11% «Καθόλου». Τέλος, το 4.4% απάντησε «Πάρα πολύ», ενώ το 1.1% «Πολύ» ( $M=2.27$ ,  $SD=0.831$ ).

Στην συνέχεια, εξετάστηκε η προσφορά των εγχειριδίων στα προβλήματα και το 51.6%, θεωρεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές λίγες ευκαιρίες να ασχοληθούν με προβλήματα. Το 26.4% απάντησε «Αρκετά», το 16.5% «Πολύ», το 4.4% «Καθόλου» ενώ το 1.1% «Πάρα πολύ» ( $M=2.58$ ,  $SD=0.857$ ). Στην τελευταία ερώτηση αυτής της ενότητας ερωτήσεων, το 35.2% απάντησε ότι οι μαθητές στη βάση των σχολικών εγχειριδίων έχουν τη δυνατότητα να ασχοληθούν με ασκήσεις «Αρκετά». Ακολουθούν σε ποσοστά οι επιλογές, «Πολύ» με 29.7%, «Πάρα πολύ» με 22% και «Λίγο» με 13.2% ( $M=3.60$ ,  $SD=0.976$ ).

**Πίνακας 3.** Προσφορά σχολικών εγχειριδίων

Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν	Καθόλου		Λίγο		Αρκετά		Πολύ		Πάρα πολύ		M	SD
	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%		
με δραστηριότητες;	10	11,0%	54	59,3%	23	25,3%	0	0,0%	4	4,4%	2,27	,831
με προβλήματα;	4	4,4%	47	51,6%	24	26,4%	15	16,5%	1	1,1%	2,58	,857
με ασκήσεις;	0	0,0%	12	13,2%	32	35,2%	27	29,7%	20	22,0%	3,60	,976



**Γράφημα 2.** Μέσες βαθμολογίες των ερωτήσεων για την προσφορά των σχολικών εγχειριδίων σε φθίνουσα διάταξη.

### 6.1.3. Αξιοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης

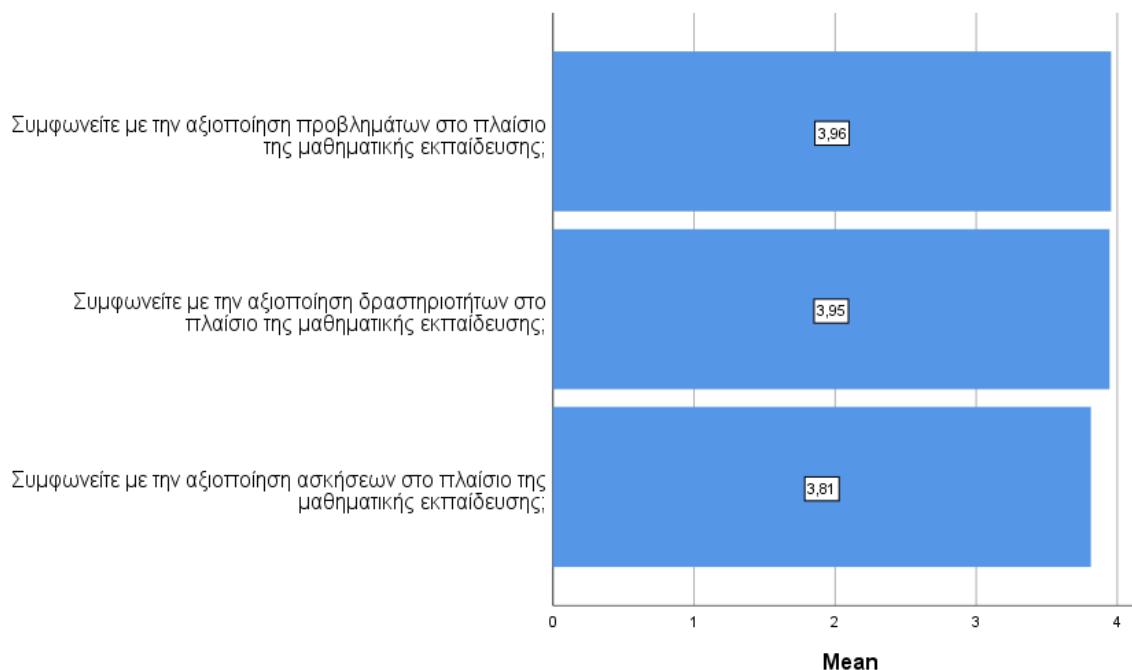
Στην συνέχεια εξετάστηκε κατά πόσο συμφωνούν οι εκπαιδευτικοί της έρευνας για την αξιοποίηση δραστηριοτήτων, προβλημάτων και ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης,. Στο εν λόγω ερώτημα το 34.1% απάντησε ότι «Συμφωνεί πολύ» με την αξιοποίηση διαφόρων δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενώ το 33% απάντησε ότι «Συμφωνεί πάρα πολύ». Ακολουθούν σε ποσοστά οι επιλογές, «Συμφωνώ αρκετά» με 28.6%, «Συμφωνώ λίγο» με 3.3% και το 1.1% δε συμφωνεί καθόλου με την αξιοποίηση δραστηριοτήτων στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης (M=3.95, SD=0.923). Όσον αφορά την αξιοποίηση των προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθητικής



εκπαίδευσης, η πλειονότητα των καθηγητών, το 39.6%, δήλωσε ότι «Συμφωνεί πολύ». Ακολουθούν σε ποσοστά οι απαντήσεις, «Συμφωνώ πάρα πολύ» με 29.7%, «Συμφωνώ αρκετά» με 27.5%, ενώ τα χαμηλότερα ποσοστά εμφανίζονται στην επιλογή «Συμφωνώ λίγο» με 3.3% ( $M=3.96$ ,  $SD=0.842$ ). Τέλος, το 36.3% στο σύνολο του δείγματος απάντησε ότι «Συμφωνεί πολύ» με την αξιοποίηση ασκήσεων στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης, ενώ το 34.1% δήλωσε ότι «Συμφωνεί αρκετά». Ακολουθούν σε ποσοστά οι απαντήσεις, «Συμφωνώ πάρα πολύ» με 25.3%, «Συμφωνώ λίγο» με 3.3% και «Δε συμφωνώ» με ποσοστό 1.1%. ( $M=3.81$ ,  $SD=0.893$ ).

**Πίνακας 4.** Αξιοποίηση στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης

Στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης συμφωνείτε με την αξιοποίηση	Δεν συμφωνώ		Συμφωνώ λίγο		Συμφωνώ αρκετά		Συμφωνώ πολύ		Συμφωνώ πάρα πολύ		M	SD
	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%		
Δραστηριοτήτων	1	1,1%	3	3,3%	26	28,6%	31	34,1%	30	33,0%	3,95	,923
Προβλημάτων	0	0,0%	3	3,3%	25	27,5%	36	39,6%	27	29,7%	3,96	,842
Ασκήσεων	1	1,1%	3	3,3%	31	34,1%	33	36,3%	23	25,3%	3,81	,893



**Γράφημα 3.** Μέσες βαθμολογίες των ερωτήσεων για την αξιοποίηση στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης σε φθίνουσα διάταξη.

#### 6.1.4. Γενικές ερωτήσεις ενότητας

Στην συνέχεια οι συμμετέχοντες στην έρευνας απάντησαν σε 4 γενικές ερωτήσεις της ενότητας αυτής. Πιο συγκεκριμένα, στην ερώτηση για το εάν υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθηματικών προβλημάτων και μαθηματικών δραστηριοτήτων, το 4.4% απάντησε αρνητικά, το 16.7% ότι ίσως υπάρχει μια μικρή διαφορά και το 78.9% ότι πράγματι υπάρχει διαφορά. Στην συνέχεια ερωτήθηκαν για το κατά πόσο θεωρούν τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, το 22% απάντησε «Καθόλου» ή «Λίγο», το 33% «Αρκετά» και το 45.1% «Πολύ» ή «Πάρα πολύ». Στην ερώτηση για το εάν τα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις, το 20.9% απάντησε «Καθόλου» ή «Λίγο», το 33% «Αρκετά» και το 46.2% «Πολύ» ή «Πάρα πολύ». Τέλος, στην ερώτηση για το εάν η ικανότητα ενός/μιας μαθητή/μαθήτριας στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας, το 4.4% απάντησε «Λίγο», το 24.2% «Αρκετά» και το 71.5% «Πολύ» ή «Πάρα πολύ».

#### **Πίνακας 5.** Γενικές ερωτήσεις ενότητας

		<b>N</b>	<b>N%</b>
Θεωρείτε ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθηματικών προβλημάτων και μαθηματικών δραστηριοτήτων;	Όχι δεν υπάρχει	4	4,4%
	Ίσως υπάρχει μια μικρή διαφορά	15	16,7%
	Ναι υπάρχει	71	78,9%
Θεωρείτε πως τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις;	Καθόλου	5	5,5%
	Λίγο	15	16,5%
	Αρκετά	30	33,0%
	Πολύ	23	25,3%
	Πάρα πολύ	18	19,8%
Τα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις;	Καθόλου	4	4,4%
	Λίγο	15	16,5%
	Αρκετά	30	33,0%
	Πολύ	21	23,1%
	Πάρα πολύ	21	23,1%
Η ικανότητα ενός/μιας μαθητή/μαθήτριας στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας;	Καθόλου	0	0,0%
	Λίγο	4	4,4%
	Αρκετά	22	24,2%
	Πολύ	36	39,6%
	Πάρα πολύ	29	31,9%

## 6.2 Μοντελοποίηση

### 6.2.1. Γνώση και εφαρμογή της μοντελοποίησης

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα 5 ερωτήσεων που αφορούν την γνώση των εκπαιδευτικών για την μοντελοποίηση και την εφαρμογή τους στην τάξη. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα 6, το 86.8% απάντησε ότι γνωρίζει τι είναι η μαθητική μοντελοποίηση, το 8.8% ότι έχει ακούσει για αυτή αλλά δεν γνωρίζει τι είναι και το 4.4% ότι και δεν έχει ακούσει και δεν γνωρίζει για αυτήν. Στην συνέχεια μόνο το 29.7% απάντησε θετικά στο εάν έχει παρακολουθήσει κάποιο σεμινάριο ή άλλη μορφή εκπαίδευσης σχετικά με τη μοντελοποίηση. Για την δυνατότητα εφαρμογής της μοντελοποίησης το 80.2% απάντησε αρνητικά (Καθόλου ή Λίγο) στο ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το 15.4% απάντησε «Αρκετά» και το 4.4% θετικά (Πολύ ή Πάρα πολύ). Για το εάν τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση, το 85.7% απάντησε αρνητικά (Καθόλου ή Λίγο), το 11% απάντησε «Αρκετά» και το 3.3% θετικά (Πολύ ή Πάρα πολύ). Τέλος, στο εάν συμφωνούν οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους το 57.2% απάντησε θετικά (Πολύ ή Πάρα πολύ), το 33% απάντησε «Αρκετά» και το 9.9% απάντησε αρνητικά (Καθόλου ή Λίγο).

**Πίνακας 6.** Γνώση και εφαρμογή της μοντελοποίησης

		<b>N</b>	<b>N%</b>
Έχετε ακούσει τον όρο μαθηματική μοντελοποίηση;	Όχι και δεν γνωρίζω τι είναι	4	4,4%
	Ναι αλλά δεν γνωρίζω τι είναι	8	8,8%
	Ναι και γνωρίζω τι είναι	79	86,8%
Έχετε παρακολουθήσει κάποιο σεμινάριο ή άλλη μορφή εκπαίδευσης σχετικά με τη μοντελοποίηση;	Όχι	64	70,3%
	Ναι	27	29,7%
Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	Καθόλου	18	19,8%
	Λίγο	55	60,4%
	Αρκετά	14	15,4%
	Πολύ	2	2,2%
	Πάρα πολύ	2	2,2%
		Καθόλου	29
	Λίγο	49	53,8%

Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση;	Αρκετά	10	11,0%
	Πολύ	2	2,2%
	Πάρα πολύ	1	1,1%
Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;	Καθόλου	1	1,1%
	Λίγο	8	8,8%
	Αρκετά	30	33,0%
	Πολύ	33	36,3%
	Πάρα πολύ	19	20,9%

### 6.2.2. Εμπόδια εφαρμογής της μοντελοποίησης

Στην συνέχεια εξετάστηκαν οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τα πιθανά εμπόδια κατά την εφαρμογή της μοντελοποίησης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 7 και έδειξαν ότι το 58.8% των συμμετεχόντων συμφώνησε ότι η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχουν στην διάθεση τους. Αρνητικά απάντησε το 2.4% και ίσως το 38.8%. Στην συνέχεια, το 53.8% απάντησε αρνητικά (Καθόλου ή Λίγο) ότι είναι δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης, το 31.9% αρκετά και το 4.4% θετικά (Πολύ ή Πάρα πολύ). Στην ερώτηση για το ποιο θεωρούν το βασικότερο πρόβλημα εφαρμογής της μαθηματικής μοντελοποίησης το 39.6% ανέφερε την έλλειψη εμπειρίας, το 18.7% την έλλειψη χρόνου και σε παρόμοιο ποσοστό τα σχολικά εγχειρίδια, το 16.5% την έλλειψη κατανόησης από τους μαθητές, και σε παρόμοιο ποσοστό ίσο με 1.1%. Αναφέρθηκε η έλλειψη δασκάλων με ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, η έλλειψη κατάλληλης εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και η μη συνάφεια πολλών μαθηματικών θεμάτων με φαινόμενα πραγματικό. Τέλος, δύο συμμετέχοντες ανέφεραν όλους του προηγούμενους λόγους ως πρόβλημα εφαρμογής της μοντελοποίησης και ένας ότι δεν υφίσταται κανένα είδους πρόβλημα. Η τελευταία ερώτηση αυτής της σειράς ερωτήσεων εξέταζε κατά πόσο οι συμμετέχοντες στην έρευνα θεωρούν πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, το 72.2% απάντησε θετικά, το 24.4% απάντησε «Ίσως» και το 3.3% απάντησε αρνητικά.

**Πίνακας 7.** Εμπόδια εφαρμογής της μοντελοποίησης

		<b>N</b>	<b>N%</b>
Η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχετε στη διάθεση σας;	Όχι	2	2,4%
	Ίσως	33	38,8%
	Ναι	50	58,8%
Σας φαίνεται δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης;	Καθόλου	15	16,5%
	Λίγο	43	47,3%
	Αρκετά	29	31,9%
	Πολύ	3	3,3%
	Πάρα πολύ	1	1,1%
Ποιο θεωρείτε πως είναι το βασικότερο πρόβλημα στην εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης;	Δεν θεωρώ ότι υπάρχει πρόβλημα	1	1,1%
	Η έλλειψη Δασκάλων με ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά	1	1,1%
	Η έλλειψη εμπειρίας	36	39,6%
	Η έλλειψη κατάλληλης εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών	1	1,1%
	Η έλλειψη κατανόησης από τους μαθητές	15	16,5%
	Η έλλειψη χρόνου	17	18,7%
	Η μη συνάφεια πολλών μαθηματικών θεμάτων με φαινόμενα πραγματικό	1	1,1%
	Όλα τα παραπάνω	2	2,2%
	Τα σχολικά εγχειρίδια	17	18,7%
	Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;	Όχι	3
	Ίσως	22	24,4%
	Ναι	65	72,2%

### 6.2.3. Οφέλη από την εφαρμογή της μοντελοποίησης

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα 8, το 59.3% των συμμετεχόντων συμφώνησε στο ότι η μοντελοποίηση συνδέει τις μαθηματικές αναπαραστάσεις, το 56% ότι ευνοεί το πνεύμα συνεργασίας των μαθητών και το 84.6% ότι ενισχύει τη δημιουργική προσπάθεια για την μάθηση νέων εννοιών. Επίσης αναφέρθηκε ότι (ατομικές απόψεις) αποτελεί τρόπο πρόβλεψης συμπεριφοράς πολύπλοκων συστημάτων, δύναται να εφοδιάσει τους μαθητές με επιπλέον ικανότητες που θα μπορούσαν αργότερα να θέσουν σε εφαρμογή ακολουθώντας μια επαγγελματική πορεία σε κλάδους θεωρητικής ή εφαρμοσμένης πληροφορικής οι οποίοι επαγγελματικά βρίσκονται σε ολοένα αυξανόμενη ζήτηση, ότι

ευνοεί την κατανόηση της συνεργασίας και άλλων θετικών επιστημών, ότι μπορεί να υπάρχουν παρανοήσεις κατά την εφαρμογή της και ότι σχετίζει καθημερινά φαινόμενα με το αντικείμενο διδασκαλίας. Στην συνέχεια το 75.6% συμφώνησε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες, το 20% απάντησε «Ίσως» και το 4.4% διαφώνησε. Τέλος, στην ερώτηση εάν η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά, το 79.8% απάντησε θετικά, το 20.2% απάντησε «Ίσως» και κανένας συμμετέχοντας δεν απάντησε αρνητικά.

**Πίνακας 8.** Οφέλη εφαρμογής της μοντελοποίησης

		N	N%
Συνδέει τις μαθηματικές αναπαραστάσεις	Όχι	37	40,7%
	Ναι	54	59,3%
Ευνοεί το πνεύμα συνεργασίας των μαθητών	Όχι	40	44,0%
	Ναι	51	56,0%
Ενισχύει τη δημιουργική προσπάθεια για την μάθηση νέων εννοιών	Όχι	14	15,4%
	Ναι	77	84,6%
Πιστεύετε πως η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες;	Όχι δεν το πιστεύω	4	4,4%
	Ίσως	18	20,0%
	Ναι το πιστεύω	68	75,6%
Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;	Όχι	0	0,0%
	Ίσως	18	20,2%
	Ναι	71	79,8%

#### 6.2.4. Προβλήματα από την εφαρμογή της μοντελοποίησης

Τα πιθανά προβλήματα κατά την εφαρμογή της μοντελοποίησης παρουσιάζονται στον πίνακα 8. Σύμφωνα με αυτά, το 90.1% διαφώνησε στο ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών και μαθητριών για τα μαθηματικά, το 8.8% απάντησε «Αρκετά» και μόνο ένας συμμετέχοντας απάντησε θετικά επιλέγοντας την κατηγορία «Πολύ». Στην συνέχεια το 42.9% απάντησε ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης σε Αρκετό βαθμό, το 24.2% «Πολύ» το 22% «Λίγο» το 8.8% «Πάρα πολύ» και το 2.2% «Καθόλου»

**Πίνακας 9.** Προβλήματα εφαρμογής της μοντελοποίησης

	Καθόλου		Λίγο		Αρκετά		Πολύ		Πάρα πολύ	
	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%	N	N%
Πιστεύετε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών και μαθητριών για τα μαθηματικά;	61	67,0%	21	23,1%	8	8,8%	1	1,1%	0	0,0%
Σε ποιο βαθμό θεωρείτε πως οι μαθητές και οι μαθήτριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης;	2	2,2%	20	22,0%	39	42,9%	22	24,2%	8	8,8%

**6.2.5. Εργαλεία εφαρμογής της μοντελοποίησης**

Οι τελευταίες δύο ερωτήσεις του ερωτηματολογίου εξέταζαν την ομαδικότητα και τα ψηφιακά μέσα ως εργαλεία εφαρμογής της μοντελοποίησης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα το 41.8% δεν χρησιμοποιεί τα ψηφιακά μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών και των μαθητριών τους, το 31.9% τα χρησιμοποιεί αρκετά και το 26.4% Πολύ ή Πάρα πολύ. Τέλος, το 62.6% δήλωσε ότι οι μαθητές τους εργάζονται ομαδικά Σπάνια ή Ποτέ και το 37.4% Συχνά ή Πολύ συχνά.

**Πίνακας 10.** Εργαλεία εφαρμογής της μοντελοποίησης

		N	N%
Σε ποιο βαθμό χρησιμοποιείτε τα ψηφιακά μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών και των μαθητριών σας;	Καθόλου	6	6,6%
	Λίγο	32	35,2%
	Αρκετά	29	31,9%
	Πολύ	13	14,3%
	Πάρα πολύ	11	12,1%
Πόσο συχνά κατά τη διάρκεια του μαθήματος σας, οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονται ομαδικά;	Ποτέ	11	12,1%
	Σπάνια	46	50,5%
	Συχνά	30	33,0%
	Πολύ συχνά	4	4,4%

**6.3 Επίδραση δημογραφικών παραγόντων**

Στην συνέχεια εξετάστηκαν οι επιδράσεις των δημογραφικών παραγόντων στο σύνολο των ερωτήσεων με την βοήθεια της εξέτασης των μέσων τιμών και ποιο συγκεκριμένα με το t-test ανεξαρτήτων δειγμάτων (Independent samples t-test) και της ανάλυσης της διασποράς

με ένα παράγοντα (one-way ANOVA). Τα στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 11 και το σύνολο των αποτελεσμάτων στο παράρτημα της εργασίας. Σύμφωνα με τον πίνακα 11 διαπιστώθηκε ότι:

- Οι άνδρες εκπαιδευτικοί ( $M=2.40$ ,  $SD=0.798$ ,  $p=0.040$ ) και οι εκπαιδευτικοί που δεν έχουν μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών ( $M=2.59$ ,  $SD=0.972$ ,  $p=0.007$ ) συμφώνησαν περισσότερο ότι τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με προβλήματα (ερώτηση 5).
- Εκπαιδευτικοί μικρότερης ηλικίας (έως 26 ετών και μεταξύ 26 και 35) συμφωνούν περισσότερο με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους (ερώτηση 17) και ότι η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά (ερώτηση 26), ( $M=4.33$ ,  $SD=1.380$ ,  $p=0.026$ ).
- Οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο συμφωνούν περισσότερο ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (ερώτηση 3), ( $M=3.71$ ,  $SD=0.966$ ,  $p=0.003$ ) και οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε σχολείο και φροντιστήριο με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (ερώτηση 2), ( $M=1.67$ ,  $SD=0.577$ ,  $p=0.05$ ).
- Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν σε μαθητές γυμνασίου και δημοτικού και οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μόνο σε μαθητές Λυκείου ( $M=2.80$ ,  $SD=0.418$ ,  $p<0.001$ ) συμφωνούν περισσότερο στο ότι η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών (ερώτηση 24). Αντίθετα οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν και στις 3 βαθμίδες σημείωσαν την χαμηλότερη μέση βαθμολογία.
- Εκπαιδευτικοί με περισσότερα από 25 έτη προϋπηρεσίας συμφωνούν περισσότερο με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (ερώτηση 8) ( $M=4.25$ ,  $SD=0.699$ ,  $p=0.018$ ), με 6-15 έτη στην την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (ερώτηση 9), ( $M=4.04$ ,  $SD=0.824$ ,  $p=0.037$ ) και από 16-25 έτη στο ότι η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά (ερώτηση 26), ( $M=2.88$ ,  $SD=0.326$ ,  $p=0.011$ ).
- Οι κάτοχοι μεταπτυχιακού συμφωνούν περισσότερο στο ότι η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών (ερώτηση 24), ( $M=2.70$ ,  $SD=0.399$ ,  $p=0.021$ ) και πως η μοντελοποίηση



μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά (ερώτηση 26), ( $M=2.80$ ,  $SD=0.405$ ,  $p=0.034$ ).

- Οι κάτοχοι διδακτορικού συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (ερώτηση 9), ( $M=4$ ,  $SD=0.957$ ,  $p=0.035$ ).
- Οι κάτοχοι δεύτερου πτυχίου συμφωνούν σε μικρότερο βαθμό με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους (ερώτηση 17), ( $M=3.25$ ,  $SD=0.551$ ,  $p=0.033$ ), και ότι η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχετε στη διάθεση σας (ερώτηση 18), ενώ συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό ότι η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης είναι δύσκολη (ερώτηση 21), ( $M=2.50$ ,  $SD=0.577$ ,  $p=0.018$ ).

**Πίνακας 11.** Στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα εξέτασης μέσω τιμών

	Ηλικία	Διδάσκω σε	Βαθμίδα εκπαίδευσης	Προϋπηρεσία
Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;		0,003		
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;		0,050		0,018
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;				0,037
Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;	0,026			
Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;			0,000	
Ευνοεί το πνεύμα συνεργασίας των μαθητών				
Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;	0,025			0,011
Σε ποιο βαθμό χρησιμοποιείτε τα ψηφιακά μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών και των μαθητριών σας;				
	<b>Φύλο</b>	<b>MSc</b>	<b>PhD</b>	<b>2ο Πτυχίο</b>
Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με προβλήματα;	0,040	0,007		
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;			0,035	
Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;				0,033
Η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχετε στη διάθεση σας;				0,011
Σας φαίνεται δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης;				0,018
Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;		0,021		

## 6.4 Ερευνητικά συμπεράσματα

1. Ποιες είναι οι δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης;

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι κυριότερες δυσκολίες που συναντούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι η έλλειψη εμπειρίας των εκπαιδευτικών. Στην ερώτηση για το ποιο είναι το βασικότερο πρόβλημα στην εφαρμογή της μοντελοποίησης, το μεγαλύτερο ποσοστό απάντησε πως είναι η έλλειψη εμπειρίας. Αυτό φαίνεται αν λάβουμε υπόψη μας τις απαντήσεις των ερωτήσεων που σχετίζονται με την εμπειρία. Πιο συγκεκριμένα, στο ερώτημα για το ποιο θεωρούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών πως είναι το βασικότερο πρόβλημα στην εφαρμογή της μοντελοποίησης, το 39.6% απάντησε πως είναι η έλλειψη εμπειρίας. Ακόμα, στο ερώτημα αν οι εκπαιδευτικοί θεωρούν την εμπειρία απαραίτητη προϋπόθεση για να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση, πλειοψηφία των συμμετεχόντων, δηλαδή το 72.2%, απάντησε θετικά. Επίσης αναφέρθηκε η έλλειψη χρόνου από ένα ποσοστό 18.7%, τα σχολικά εγχειρίδια από το ίδιο ποσοστό, και η έλλειψη κατανόησης από τους μαθητές από το 16.5%. Παρόλα αυτά οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι δεν τους φαίνεται δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης.

2. Ποιες οι πρακτικές που ακολουθούν κατά την εκπαιδευτική πράξη σχετικά με την μοντελοποίηση;

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα αν και έδειξαν ότι γνωρίζουν σχετικά με την μοντελοποίηση και συμφωνούν με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την αυτήν στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής, δεν έχουν παρακολουθήσει κάποιο σεμινάριο ή άλλη μορφή εκπαίδευσης σχετικά με τη μοντελοποίηση. Το ποσοστό αυτό φτάνει το 70.3%. Επίσης αναφέρουν ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών και τα σχολικά εγχειρίδια δεν προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μόνο το 4.4% θεωρεί πως τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών

ευνοούν κατά πολύ την εφαρμογή της διαδικασίας αυτής και αντίστοιχα μόνο το 3.3% πιστεύει πως τα σχολικά εγχειρίδια δίνουν τη δυνατότητα στους καθηγητές μαθηματικών να ασχοληθούν με τη μοντελοποίηση. Επίσης, σύμφωνα με τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών ο βαθμός χρήσης ψηφιακών μέσων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι μέτριος καθώς ένα 26.4% κάνει συχνή χρήση αυτών, ενώ οι ομαδικές εργασίες των μαθητών και των μαθητριών είναι σπάνιες με ποσοστό που φτάνει το 50.5%.

3. Ποια η επίδραση των ατομικών χαρακτηριστικών των συμμετεχόντων στην έρευνα στις απόψεις αυτές;

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκαν ελάχιστες περιπτώσεις επίδρασης των δημογραφικών χαρακτηριστικών στις απόψεις των συμμετεχόντων στην έρευνα. Επίσης δεν παρατηρήθηκε κάποιο μοτίβο απαντήσεων ή κάποια συγκεκριμένη συμπεριφορά. Παρόλα αυτά θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι εκπαιδευτικοί που έχουν μεγαλύτερη εμπειρία και μεγάλο εύρος διδασκαλίας (Δημοτικό, & Γυμνάσιο & Λύκειο) βλέπουν λιγότερα εμπόδια στην εφαρμογή της μοντελοποίησης στην εκπαίδευση και εκπαιδευτικοί μικρότερης ηλικίας ότι έχουν μεγαλύτερες προσδοκίες των αποτελεσμάτων της από την εφαρμογή της.

## 7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

### 7.1 Συμπεράσματα

Τα πρωτογενή δεδομένα τα οποία αναλύονται στην παρούσα έρευνα έρχονται να τεκμηριώσουν το βασικό ερευνητικό ερώτημα, το οποίο συνδέει τον κλάδο των καθηγητών μαθηματικών με την διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι, το περιβάλλον μέσα στο οποίο διεξήχθη η μελέτη ήταν από τις 26 Ιανουαρίου μέχρι και τις 16 Φεβρουαρίου του 2022.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης εξάγονται σημαντικά συμπεράσματα τα οποία δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας μιας συνολικής τεκμηριωμένης άποψης αναφορικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα από την προώθηση και εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Το ερωτηματολόγιο της μελέτης στηρίχθηκε, κατά μείζονα λόγο, σε ερωτήσεις κλειστού τύπου και σε κλίμακα Likert. Με αυτό τον τρόπο, υπήρξε η δυνατότητα καταγραφής του βαθμού σπουδαιότητας ή ακόμη και συμφωνίας στις τάξεις του υπό μελέτη δείγματος. Η υλοποίηση της μελέτης ακολούθησε όλα τα απαραίτητα στάδια και αποφάσεις μέχρι τη στιγμή της διανομής του ερωτηματολογίου στους καθηγητές μαθηματικών. Ουσιαστικά, τέθηκαν οι επιθυμητές πληροφορίες που επιθυμούσαμε να έχουμε, καθορίστηκε ο τύπος, η διατύπωση και η σειρά των ερωτήσεων και τέλος έγινε ο απαραίτητος προέλεγχος πριν την τελική διανομή του ερωτηματολογίου στον πληθυσμό μελέτης. Η μελέτη στηρίχθηκε σε τέσσερις βασικούς πυλώνες, από τους οποίους ο ένας αφορά τα δημογραφικά χαρακτηριστικά των ερωτώμενων.

Ο δεύτερο πυλώνας, ο οποίος στηρίχθηκε σε δώδεκα ερωτήσεις γίνεται προσπάθεια ανίχνευσης και αξιολόγησης των τάσεων αναφορικά με την άποψη των καθηγητών μαθηματικών σε σχέση με τη μαθηματική μοντελοποίηση. Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα του δεύτερου πυλώνα, στη βάση της κλίμακας Likert, οι ερωτώμενοι θεωρούν ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών προσφέρουν από λίγο έως και αρκετά τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να αξιοποιήσουν δραστηριότητες στα πλαίσια της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ουσιαστικά, ένας στους δύο έχει αρνητική άποψη για τη σύνδεση που προσφέρουν τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών με τη μαθηματική μοντελοποίηση. Η ίδια τάση επικρατεί στους κόλπους των ερωτώμενων σε σχέση με τα προγράμματα σπουδών και την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η πλειονότητα, θεωρεί ότι τα υπάρχοντα προγράμματα βοηθούν από λίγο έως και καθόλου την εκπαιδευτική κοινότητα και το 36.3% έχει μια πιο μετριοπαθή άποψη για τη σχέση των προγραμμάτων σπουδών και της αξιοποίησης προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής μοντελοποίησης. Αναφορικά με τα προγράμματα σπουδών, η τρίτη κατά σειρά ερώτηση καταγράφει μία θετική εικόνα όσον αφορά στη σχέση των προγραμμάτων σπουδών και τη δυνατότητα αξιοποίησης ασκήσεων. Περίπου ένας στους τέσσερις εκπαιδευτικούς θεωρεί ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών δίνουν τη δυνατότητα στους καθηγητές μαθηματικών να αξιοποιήσουν τις ασκήσεις τους σε σχέση με τη μαθηματική μοντελοποίηση, σε αντίθεση με λιγότερο από το μόλις 20% το οποίο έχει διαφορετική άποψη.

Παράλληλα, στα πλαίσια του δεύτερου πυλώνα, υπάρχει μια ομάδα ερωτήσεων οι οποίες αφορούν την αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων. Στη συγκεκριμένη υπό ενότητα του

δεύτερου πυλώνα οι καθηγητές μαθηματικών αξιολόγησαν τρεις βασικούς άξονες της μελέτης σε σχέση με τα σχολικά εγχειρίδια. Ο πρώτος έχει να κάνει με τη σύνδεση δραστηριοτήτων και ευκαιριών στους μαθητές, ο δεύτερος με την ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα και ο τρίτος με τη δυνατότητα ενασχόλησης των μαθητών με ασκήσεις. Στις δύο από τις τρεις μεταβλητές οι καθηγητές εξέφρασαν αρνητική άποψη. Πιο συγκεκριμένα, περίπου επτά στους δέκα, θεωρούν ότι τα σχολικά εγχειρίδια δεν προσφέρουν τα αναμενόμενα στους μαθητές ώστε αυτοί να ασχοληθούν με δραστηριότητες, ενώ το 56% δήλωσε ότι τα υπάρχοντα σχολικά εγχειρίδια δίνουν ελάχιστες έως και καθόλου ευκαιρίες στους μαθητές ώστε να ασχοληθούν με προβλήματα. Στο τρίτο ερώτημα της συγκεκριμένης συστάδας ερωτήσεων υπάρχει σαφέστατη διαφοροποίηση της άποψης των καθηγητών μαθηματικών σε σχέση με τα δύο προηγούμενα ερωτήματα. Πιο συγκεκριμένα, οι ένας στους δύο θεωρεί ότι τα υπάρχοντα εγχειρίδια δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν με ασκήσεις, ενώ μόλις το 13,2% θεωρεί ότι οι ευκαιρίες που παρέχονται είναι περιορισμένες.

Στην επόμενη ενότητα, του δεύτερου πυλώνα της μελέτης, αξιολογήθηκαν τρεις συγκεκριμένες και βασικές απόψεις των εκπαιδευτικών μαθηματικών στη βάση της κλίμακας Likert. Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις κατέγραψαν θετικό πρόσημο μίας και οι μέσοι υπολογιζόμενοι μέσοι όροι (means) βρίσκονται πάνω από τη μέση τιμή της κλίμακας μέτρησης. Ουσιαστικά οι καθηγητές μαθηματικών συμφωνούν από αρκετά έως και πάρα πολύ με την αξιοποίηση ασκήσεων στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης, με την αξιοποίηση δραστηριοτήτων στα πλαίσια της μαθηματικής μοντελοποίησης καθώς και με την αξιοποίηση προβλημάτων.

Όσον αφορά στο κατά πόσο οι καθηγητές μαθηματικών συμφωνούν ή όχι με την ενασχόληση των μαθητών με την μαθηματική μοντελοποίηση, στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η πλειονότητα, το 57.2% έχει θετική άποψη, ενώ επιφυλάξεις εκφράζει μόλις το 1.1%. Παράλληλα, σε συνέχεια του προηγούμενου ερωτήματος δόθηκε σαφέστατη θετική απάντηση στο κατά πόσο η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τη μαθητική κοινότητα να κατανοήσει καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες.

Στην τελευταία ερώτηση του δεύτερου πυλώνα της μελέτης έγινε από πλευράς καθηγητών μαθηματικών, η αξιολόγηση της μεταβλητής η οποία επικεντρώθηκε στο κατά πόσο η μαθηματική μοντελοποίηση μειώνει ή όχι το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

Η συντριπτική πλειονότητα, του υπό μελέτη δείγματος, το 90.1% θεωρεί ότι η μαθηματική μοντελοποίηση δε μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

Στον τρίτο πυλώνα της μελέτης, η έρευνα κινήθηκε στα ίδια πλαίσια με το δεύτερο σε σχέση με τη δομή και το είδος των μεταβλητών. Ο τρίτος πυλώνας εξάγει σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης και των δυσκολιών, οι οποίες απορρέουν από αυτήν, στους κόλπους της εκπαιδευτικής κοινότητας.

Οι καθηγητές μαθηματικών κρατούν μία σαφέστατη απόσταση από τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών διότι, σε υψηλά ποσοστά, 80.2%, θεωρούν ότι προσφέρουν από λίγο έως και καθόλου τη δυνατότητα σε αυτούς να ασχοληθούν με τη μαθηματική μοντελοποίηση. Παράλληλα, την ίδια υψηλή άποψη εκφράζουν στο ερώτημα εάν τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στη μαθητική κοινότητα ευκαιρίες να ασχοληθούν με τη μαθηματική μοντελοποίηση.

Παράλληλα, ένα υψηλό ποσοστό των ερωτώμενων, θεωρεί ότι η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες διδακτικές ώρες από αυτές που ισχύουν μέχρι και σήμερα και έχουν στη διάθεσή τους οι καθηγητές μαθηματικών.

Στον τρίτο πυλώνα της μελέτης, αποτυπώθηκε η τάση σε σχέση με το κατά πόσο η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης με παρεμβάσεις αποτελεί δύσκολη διαδικασία. Οι καθηγητές μαθηματικών έδειξαν μέσα από τις απαντήσεις ότι δε θεωρούν ότι η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης εμφανίζει κάποια ιδιαίτερη δυσκολία.

Όσον αφορά στη σχέση κατανόησης των μαθητών και της μαθηματικής μοντελοποίησης, αυτό δεν αναφέρθηκε ως πρόβλημα καθώς μόνο το 16.5% το θεωρεί ως πρόβλημα.

Στον τρίτο πυλώνα της μελέτης μέσω της κλειστού τύπου ερώτησης, η οποία έδινε και τη δυνατότητα επιλογής «άλλο», ανιχνεύτηκαν και καταγράφηκαν τα βασικότερα προβλήματα των καθηγητών μαθηματικών σε σχέση με την εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης. Ουσιαστικά, το βασικότερο θέμα είναι η έλλειψη εμπειρίας στον κλάδο των καθηγητών μαθηματικών, ενώ η έλλειψη χρόνου και τα σχολικά εγχειρίδια καταγράφονται ως τα δύο επόμενα επικρατέστερα προβλήματα.

Στα πλαίσια του τρίτου πυλώνα οι καθηγητές μαθηματικών διατύπωσαν μία ξεκάθαρη άποψη σχετικά με το κατά πόσο η διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης χρειάζεται

να ακολουθείται από την απαραίτητη εμπειρία. Οι επτά στους δέκα εκπαιδευτικοί θεωρεί ότι η εμπειρία είναι μία προσωπική δεξιότητα η οποία είναι απαραίτητη για την ποιοτική και αποτελεσματική διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Ένα ακόμη σημαντικό δεδομένο αποτυπώνεται, το οποίο έχει να κάνει με τη σχέση των καθηγητών μαθηματικών με τις νέες τεχνολογίες και το επίπεδο χρήση τους κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι απαντήσεις δείχνουν ότι η πλειονότητα δεν αρέσκεται στο να χρησιμοποιεί νέες τεχνολογίες, αφού μόλις το 26.4% δήλωσε ότι χρησιμοποιεί, με συχνότητα πολύ έως και πάρα πολύ, ψηφιακά μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Η τελευταία ερώτηση του τρίτου πυλώνα αφορούσε στο κατά πόσο οι μαθητές εργάζονται ομαδικά κατά τη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών. Το 50.5%, στο σύνολο του υπό μελέτη δείγματος των N=91 εκπαιδευτικών μαθηματικών, απάντησε ότι η ομαδική εργασία πραγματοποιείται σπάνια, ενώ το 33% δήλωσε συχνά.

Στον τέταρτο πυλώνα της μελέτης, το ερευνητικό κομμάτι προσέγγισε τις απόψεις των ερωτώμενων με μία σειρά από κλειστού τύπου ερωτήσεων οι οποίες ανιχνεύουν τη γενική και ειδική εικόνα των καθηγητών μαθηματικών καθώς και το βαθμό γνώσης τους σε σχέση με τη μαθηματική μοντελοποίηση.

Το 78.9%, στο σύνολο του υπό μελέτη δείγματος, θεωρεί ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των μαθηματικών προβλημάτων και της μαθηματικής δραστηριότητας. Αντίθετα, στο ίδιο ερώτημα, μόλις το 16.7% θεωρεί ότι η διαφορά είναι μικρή.

Η επόμενη ερώτηση έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον διότι έρχεται να καταγράψει την άποψη των εκπαιδευτικών μαθηματικών σε σχέση με τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές και τη σύνδεσή τους με τις πραγματικές καταστάσεις. Περίπου, οι ένας στους δύο, το 45.1% θεωρεί ότι τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές πρέπει να ανταποκρίνονται με την πραγματικότητα ενώ μόλις το 22% θεωρεί ότι η ταύτιση των προβλημάτων με την πραγματικότητα δεν είναι κάτι σημαντικό.

Όσον αφορά σε μία πιο ειδική αναφορά σχετικά με τη σύνδεση των προβλημάτων που καλούνται να λύσουν οι μαθητές με τις πραγματικές καταστάσεις, το 46.2% θεωρεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια οφείλουν, από πολύ έως και πάρα πολύ, να συμπεριλαμβάνουν προβλήματα τα οποία να ανταποκρίνονται στις πραγματικές καταστάσεις.

Η σημασία της ανάπτυξης δεξιοτήτων έρευνας στη μαθητική κοινότητα είναι ένα ακόμη εξαιρετικά σημαντικό δεδομένο το οποίο, οι ερωτώμενοι έρχονται να επικροτήσουν. Πιο συγκεκριμένα, το 71.5% των ερωτώμενων θεωρεί ότι, η ανάπτυξη δεξιοτήτων έρευνας των μαθητών είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ενίσχυση της μαθηματικής τους ικανότητας.

Επίσης, η μαθηματική μοντελοποίηση φαίνεται να είναι αρκετά γνωστή στους κόλπους των καθηγητών μαθηματικών, μια και το 86.8% δήλωσε ότι τη γνωρίζει και ξέρει ακριβώς τι προσφέρει. Παράλληλα οι καθηγητές είχαν τη δυνατότητα, με ερώτηση κλειστού τύπου πολλαπλών επιλογών, να δηλώσουν τι πιστεύουν για την μαθηματική μοντελοποίηση. Η πλειονότητα θεωρεί ότι η μαθηματική μοντελοποίηση συνδέει τις μαθητικές αναπαραστάσεις, ενώ οι οκτώ στους δέκα ερωτώμενους θεωρεί ότι ενισχύει τη δημιουργική προσπάθεια για μάθηση νέων εννοιών. Τέλος, το μεγαλύτερο μέρος του υπό μελέτη δείγματος, απάντησε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση ευνοεί το πνεύμα συνεργασίας των μαθητών.

Αρκετές θετικές κρίσεις λαμβάνει η μαθηματική μοντελοποίηση σε σχέση με το εάν μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός των μαθηματικών. Το 79.8% θεωρεί πως αυτό είναι εφικτό, ενώ μόλις το 20.2% δεν είναι σίγουρο εάν αυτό μπορεί να συμβεί.

Η τελευταία ερώτηση, στο πλαίσιο του τέταρτου πυλώνα της μελέτης, αφορά το κατά πόσο οι ερωτώμενοι, εκπαιδευτικοί μαθηματικών, έχουν παρακολουθήσει κάποιο σεμιναριακό κύκλο ή κάποια άλλη μορφή εκπαίδευσης σχετικά με θέματα μαθηματικής μοντελοποίησης. Η πλειονότητα, το 70.3%, δήλωσε ότι δεν έχει παρακολουθήσει κάποιο εκπαιδευτικό πρόγραμμα σχετικά με θέματα μαθηματικής μοντελοποίησης.

Στο πλαίσιο της στατιστικής ανάλυσης των αποτελεσμάτων, πραγματοποιήθηκε μια σειρά από εξετάσεις μέσω των τιμών στο σύνολο των ερωτήσεων. Η εξέταση μέσω των τιμών προσπάθησε να βρει δημογραφικούς – ποιοτικούς παράγοντες των οποίων οι κατηγορίες διαφέρουν στατιστικά σημαντικά ως προς την εξεταζόμενη μεταβλητή. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτή της εξέτασης διαπιστώθηκαν ελάχιστες περιπτώσεις επίδρασης των δημογραφικών χαρακτηριστικών στις απόψεις των συμμετεχόντων στην έρευνα. Επίσης δεν παρατηρήθηκε κάποιο συνέχεια των απαντήσεων ή κάποια συγκεκριμένη συμπεριφορά που να προδίδει ένα συγκεκριμένο μοτίβο (pattern). Μπορεί όμως να υποστηριχθεί ότι εκπαιδευτικοί που έχουν μεγαλύτερη εμπειρία και μεγάλο εύρος διδασκαλίας δηλαδή διδάσκουν και το δημοτικό και στο γυμνάσιο και στο λύκειο βλέπουν λιγότερα εμπόδια



στην εφαρμογή της μοντελοποίησης στην εκπαίδευση και εκπαιδευτικοί μικρότερης ηλικίας ότι έχουν μεγαλύτερες προσδοκίες των αποτελεσμάτων της από την εφαρμογή της.

Πιο συγκεκριμένα οι στατιστικά σημαντικές διαφορές έδειξαν ότι οι άνδρες εκπαιδευτικοί και οι εκπαιδευτικοί που δεν έχουν μεταπτυχιακό τίτλο σπουδών συμφωνούν περισσότερο ότι τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με προβλήματα. Οι εκπαιδευτικοί μικρότερης ηλικίας συμφωνούν περισσότερο με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους και ότι η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο συμφωνούν περισσότερο ότι τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης και οι εκπαιδευτικοί που εργάζονται σε σχολείο και φροντιστήριο με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν σε μαθητές γυμνασίου και δημοτικού και οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν μόνο σε μαθητές Λυκείου συμφωνούν περισσότερο στο ότι η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Αντίθετα οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν και στις 3 βαθμίδες σημείωσαν την χαμηλότερη μέση βαθμολογία. Εκπαιδευτικοί με μεγάλη εργασιακή εμπειρία συμφωνούν περισσότερο με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης και με μικρότερη στην αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης και με μέτρια ότι η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά. Οι κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών συμφωνούν περισσότερο στο ότι η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά. Οι κάτοχοι διδακτορικού συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι κάτοχοι δεύτερου πτυχίου συμφωνούν σε μικρότερο βαθμό με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους και ότι η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχετε

στη διάθεση σας ενώ συμφωνούν σε μεγαλύτερο βαθμό ότι η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης είναι δύσκολη.

## 7.2 Συζήτηση

Στη βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε, τα συμπεράσματα είναι παρόμοια. Στην έρευνα Asempara (2016) βλέπουμε ότι οι εκπαιδευτικοί μαθηματικών δίνουν παρόμοιες απαντήσεις με την παρούσα έρευνα όσο αφορά τις γνώσεις τους πάνω στη μαθηματική μοντελοποίηση. Φαίνεται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των καθηγητών γνωρίζουν την έννοια της μοντελοποίησης. Στην έρευνα του Ärleback (2009) παρατηρείται πως οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να διαχωρίσουν απόλυτα τη διαδικασία της μοντελοποίησης από την διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Αντίθετα, στην έρευνα που πραγματοποιήσαμε, το ποσοστό των καθηγητών που θεωρούν ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθηματικών προβλημάτων και δραστηριοτήτων είναι αρκετά μεγάλο συγκριτικά με αυτό που δεν πιστεύουν ότι υπάρχει κάποια διαφορά.. Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα της έρευνας του Gould (2013) στην οποία παρατηρείται πως οι συμμετέχοντες αδυνατούν να αναγνωρίσουν τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Επιπλέον, από την έρευνα του Lingefjärd (2000) στην οποία συμμετείχαν Σουηδοί καθηγητές μαθηματικών παρατηρήθηκε πως δεν ήταν εύκολο για αυτούς να ακολουθήσουν τα βήματα που απαιτούνται για την εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης στη σχολική τάξη. Ακόμα μια έρευνα που αξίζει να σημειωθεί είναι αυτή του Bautista, Wilkerson, Tobin και Brizuela (2014). Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που διεξάγαμε, η παραπάνω έρευνα έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν τη μοντελοποίηση μια αφηρημένη διαδικασία που έχει στόχο την πρόβλεψη. Στην παρούσα έρευνα κυρίως στόχος της μαθηματικής μοντελοποίησης φαίνεται να είναι η ενίσχυση δημιουργικών προσπαθειών για την εκμάθηση νέων εννοιών, η σύνδεση της με μαθηματικές αναπαραστάσεις και η ενίσχυση του πνεύματος συνεργασίας.

Εστιάζοντας στις περισσότερες προηγούμενες έρευνες φαίνεται πως οι συμμετέχοντες αδυνατούν να κατανοήσουν τα κύρια στοιχεία της μαθηματικής μοντελοποίησης, παρ' όλο που η πλειοψηφία αυτών δηλώνει ότι γνωρίζουν την έννοιά της. Αυτό είναι πιθανόν να συμβαίνει γιατί δεν εντάσσεται στα προγράμματα σπουδών αρκετών χωρών. Μη προσπαθώντας λοιπόν να την εφαρμόσουν, οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να κατανοήσουν πλήρως τη πραγματική της έννοια. Παρ' όλα αυτά τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει

προσπάθειες ένταξης της μοντελοποίησης στα προγράμματα σπουδών σε πολλές χώρες με αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να δείχνουν περισσότερο ενδιαφέρον για τη διαδικασία αυτή.

Παρόμοια αποτελέσματα με την παρούσα έρευνα παρουσίασε και αυτή της Doerr (2007), η οποία έδειξε πως οι ικανότητες των μαθητών και των μαθητριών ενισχύεται όταν αναπτύσσουν δεξιότητες έρευνας. Το ίδιο παρατήρησαν και οι Yu και Chang (2011) όταν μέσα από την έρευνά τους υποστήριξαν ότι η μαθηματική μοντελοποίηση αναδεικνύει τις δεξιότητες έρευνας των μαθητών.

Σχετικά με την πρόθεση των εκπαιδευτικών να εφαρμόσουν τη μαθηματική μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται πως υπάρχουν αρκετά προβλήματα που συναντούν. Παρεμφερή είναι τα αποτελέσματα της έρευνας του Sturgill (2019), στην οποία φαίνεται η δυσκολία των καθηγητών μαθηματικών να εφαρμόσουν τη μοντελοποίηση κατά την εκπαιδευτική διαδικασία εξαιτίας της έλλειψης εμπειρίας. Σε μερικές άλλες έρευνες των Kaiser και Maaß (2007) και Yu και Chang (2011) βασικό εμπόδιο στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι η έλλειψη χρόνου, καθώς οι ώρες που έχουν στη διάθεσή τους οι καθηγητές δεν επαρκούν.

Μέσα από την ερευνητική διαδικασία που πραγματοποιήθηκε, φάνηκε πως οι εκπαιδευτικοί συμφώνησαν με το γεγονός ότι τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές, χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις. Αντίθετη ήταν η άποψη των εκπαιδευτικών στην έρευνα του Gould (2013), στην οποία οι εκπαιδευτικοί δεν είχαν συνειδητοποιήσει ότι τα προβλήματα μοντελοποίησης πρέπει να στηρίζονται σε πραγματικά προβλήματα.

Αναφορικά με τα οφέλη της διδασκαλίας της μοντελοποίησης, η πλειοψηφία των ερωτηθέντων τα αναγνωρίζουν. Για παράδειγμα, στην ερώτηση αν πιστεύουν πως η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες, το 75,6% απάντησε ότι το πιστεύει και το 20% ότι ίσως το πιστεύει. Επίσης, στην ερώτηση αν πιστεύουν πως η μαθηματική μοντελοποίηση μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, η πλειοψηφία απάντησε καθόλου και λίγοι ήταν αυτοί που θεωρούν πως μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών σε ένα μικρό βαθμό. Συμπεραίνεται λοιπόν, πως οι συμμετέχοντες κρατούν μια θετική στάση απέναντι στη μοντελοποίηση καθώς θεωρούν πως είναι βοηθητική προς τους διδασκόμενους. Σε παρόμοιες έρευνες, όπως αυτές του Kaiser και Maaß (2007) και του Årlebäck (2009), η

στάση των εκπαιδευτικών είναι παρόμοια. Αναγνωρίζουν τα οφέλη της μοντελοποίησης και υποστηρίζουν πως παρακινεί τους μαθητές να ασχοληθούν περισσότερο με τα μαθηματικά και να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες.

Αυτή η θετική στάση απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση δείχνει ότι σιγά σιγά οι εκπαιδευτικοί συνειδητοποιούν την αξία της και προσπαθούν να την εφαρμόσουν. Έτσι, ο μαθητής γίνεται αποδέκτης των ωφελειών της διαδικασίας αυτής και ο τρόπος διδασκαλίας παίρνει άλλη μορφή.

Τέλος, όσο αφορά τις πρακτικές που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικοί σχετικά με τη διδασκαλία της μοντελοποίησης παρατηρούμε πως δεν εφαρμόζουν κάποιες βασικές διαδικασίες. Για παράδειγμα, δεν κάνουν συχνή χρήση των τεχνολογικών μέσων καθώς το ποσοστό που τα χρησιμοποιεί πολύ και πάρα πολύ είναι αρκετά χαμηλό. Επίσης, οι μαθητές εργάζονται ομαδικά σπάνια. Από την άλλη μεριά, σε άλλες έρευνες όπως αυτή του Asempera (2016), η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών κατά τη διάρκεια του μαθήματος είναι αρκετά συχνή και οι μαθητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με αυτούς κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Επιπλέον, η ομαδική εργασία στο μάθημα των μαθηματικών πραγματοποιείται περισσότερο απ' ό τι στα ελληνικά σχολεία.

### **7.3 Προτάσεις ένταξης της μαθηματικής μοντελοποίησης στα ελληνικά σχολεία**

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις αδυναμίες εφαρμογής της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική διαδικασία βάση των συμπερασμάτων της έρευνας, προτείνονται οι εξής λύσεις. Αρχικά, καλό θα ήταν να ενταχθούν σε μεγαλύτερο βαθμό τα ψηφιακά μέσα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αποτελούν εξαιρετικά σημαντικά εργαλεία στην εποχή μας με σκοπό να διευκολύνουν και να κάνουν περισσότερο ενδιαφέρουσα την διδασκαλία. Σήμερα, όλοι οι καθηγητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν ηλεκτρονικούς υπολογιστές ή tablet, καθώς τα σχολεία πλέον διαθέτουν ψηφιακό εξοπλισμό και πρόσβαση στο διαδίκτυο. Μέσω των εκπαιδευτικών λογισμικών οι εκπαιδευτικοί μπορούν να διδάξουν μαθηματικές έννοιες και αυτές να γίνουν ευκολότερα κατανοητές από τους μαθητές.

Επιπλέον, η ομαδική εργασία θα μπορούσε να είναι συχνότερη, καθώς παρατηρήθηκε πως οι μαθητές συνεργάζονται με τους συμμαθητές τους σπάνια. Η αλληλεπίδραση με άλλα άτομα πάνω σε μαθηματικές έννοιες είναι σημαντικός παράγοντας ενίσχυσης της

μαθηματικής μοντελοποίησης, γιατί οι διδασκόμενοι ανταλλάσσουν ιδέες και ενισχύουν την κριτική τους ικανότητα.

Ακόμα μια πρόταση προκειμένου να ενταχθεί περισσότερο η μαθηματική μοντελοποίηση στα σχολεία είναι η εκπαίδευση των καθηγητών πάνω σε αυτή. Παρατηρήθηκε πως ένα μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών δεν έχει παρακολουθήσει κάποια μορφή εκπαίδευσης σχετικά με τη μοντελοποίηση. Η παρακολούθηση μερικών σεμιναρίων για παράδειγμα, είναι ένας καλός τρόπος εκμάθησης της διαδικασίας και αφομοίωσης της στην εκπαιδευτική διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Με αυτό τον τρόπο οι εκπαιδευτικοί ενημερώνονται για την έννοια, την εφαρμογή και φυσικά τη σπουδαιότητα της μοντελοποίησης.

Τέλος, προκειμένου να ενταχθεί η μοντελοποίηση στη διδασκαλία των μαθηματικών θα μπορούσε να αυξηθούν οι ώρες διδασκαλίας που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί στο εβδομαδιαίο πρόγραμμα. Μέσα από την έρευνα που διεξήχθη, είναι φανερό πως οι καθηγητές μαθηματικών χρειάζονται περισσότερες ώρες από αυτές που προβλέπονται στον πρόγραμμα σπουδών.

#### **7.4 Περιορισμοί**

Η συγκεκριμένη έρευνα περιορίστηκε σε ένα δείγμα 110 εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν μαθηματικά στον δημόσιο και ιδιωτικό τομέα. Από αυτούς εξαιρέθηκαν 19 εκπαιδευτικοί μόνο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ώστε να μελετηθούν οι εκπαιδευτικοί που διαθέτουν πτυχίο μαθηματικών. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε σε περίοδο πανδημίας, συνεπώς ήταν δύσκολο να διενεργηθεί συμπληρωματική έρευνα με συνεντεύξεις ώστε να υπάρξει μια εκτενέστερη εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Γι' αυτό το λόγο οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να λάβουν μέρος στην έρευνα μέσω των ερωτηματολογίων, τα οποία στάλθηκαν σε αυτούς ηλεκτρονικά στα email τους και στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης. Αυτό εμπεριέχει τον κίνδυνο οι συμμετέχοντες να απαντήσουν τυχαία ή με βάση την επιθυμητή κοινωνική οπτική. Επιπλέον, η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε είναι κυρίως αγγλική και ελληνική και δεν επεκτάθηκε σε άρθρα σε άλλες γλώσσες καθώς η μετάφρασή τους ήταν αδύνατη.

## 7.5 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η διερεύνηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης καθώς και οι πρακτικές ένταξης της στη διδασκαλία αποτελεί αναμφίβολα ένα σημαντικό θέμα συζήτησης στον επιστημονικό χώρο. Παρ' όλα αυτά μπορούν να υπάρξουν προεκτάσεις με σκοπό περαιτέρω έρευνα πάνω στο συγκεκριμένο θέμα.

Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσε να μελετηθεί εκτενέστερα η στάση των μαθητών απέναντι στη μαθηματική μοντελοποίηση. Θα ήταν αρκετά ενδιαφέρον να γινόταν μια ποσοτική αλλά και ποιοτική μελέτη ώστε να διερευνηθούν οι απόψεις των διδασκόμενων για τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης στη σχολική τάξη. Στη ποιοτική μελέτη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ερευνητικό εργαλείο η συνέντευξη, η οποία θα αποτύπωνε την γνώμη των μαθητών πάνω στο ζήτημα αυτό. Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας μελέτης θα προσέφεραν ακόμα περισσότερες πληροφορίες και θα ανέλυαν το θέμα από την οπτική γωνία των μαθητών και όχι μόνο των εκπαιδευτικών.

## Βιβλιογραφικές αναφορές

Αποστολοπούλου, Δ. (2012). *Οι θεωρίες μάθησης και η ενσωμάτωσή τους στο εκπαιδευτικό λογισμικό*. Ανακτήθηκε 2 Φεβρουαρίου, 2022, από [https://nemertes.library.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/5309/3/Nimertis\\_Apostolopoulou%28math%29.pdf](https://nemertes.library.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/5309/3/Nimertis_Apostolopoulou%28math%29.pdf)

Κασιμάτη, Α. (2011). *Εισαγωγή στη διδακτική μεθοδολογία-Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Ανακτήθηκε 2 Φεβρουαρίου, 2022, από [http://reader.ekt.gr/bookReader/show/index.php?lib=EDULLL&item=1095&bitstream=1095\\_01#page/1/mode/2up](http://reader.ekt.gr/bookReader/show/index.php?lib=EDULLL&item=1095&bitstream=1095_01#page/1/mode/2up)

Κλαουδάτος, Ν. (1992). *Η μοντελοποίηση στη διδακτική πράξη. (Η διδασκαλία των μαθηματικών σε πραγματικά πλαίσια)*. Ανακτήθηκε 7 Ιανουαρίου, 2022, από <https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/2440?lang=el#page/1/mode/2up>

Κομηνέας, Σ. & Χαρμανδάρης, Ε. (2015). *Μαθηματική Μοντελοποίηση, μια σπουδή στις Φυσικές Επιστήμες*, Πανεπιστήμιο Κρήτης. Ανακτήθηκε 20 Μαρτίου, 2022, από <http://beta.kallipos.gr/jspui/handle/11419/6325>

Λεωνίδης, Θ. (2016). *Η εξέλιξη της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Ευρώπη (περιπτώσεις της Γαλλίας, Γερμανίας και Ιταλίας) και στην Ελλάδα από ιδρύσεως της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΟΚ) ως σήμερα*. Ανακτήθηκε 25 Νοεμβρίου, 2021, από <https://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/19433/6/LeonidisTheodorosMsc2016.pdf>

Φεσάκης, Γ., Δημητρακοπούλου, Α., & Καλαβάσης, Φ. (2001). *Δραστηριότητες μοντελοποίησης με χρήση Η/Υ στη Β'θμια εκπαίδευση: διερεύνηση και πειραματική εφαρμογή σε μαθητές Γ'λυκείου. Διερεύνηση και πειραματική εφαρμογή σε μαθητές Γ'Λυκείου*.

Ang K. C. (2010). *Mathematical modelling in the Singapore curriculum: Opportunities and challenges*. In *Educational interfaces between mathematics and industry: Proceedings of the EIMI 2010 Conference* (pp. 53-62). Ανακτήθηκε 25 Νοεμβρίου, 2021, από [https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/14942/1/ATCM-2010\\_AngKC\\_a.pdf](https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/14942/1/ATCM-2010_AngKC_a.pdf)

Ärlebäck, J. B. (2009). *Mathematical modelling in upper secondary mathematics education in Sweden. A curricula and design study*. Linköpings universitet. Ανακτήθηκε 25 Νοεμβρίου, 2021, από

<https://www.researchgate.net/publication/279479166> Mathematical modelling in upper secondary mathematics education in Sweden

Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Educational Research*, 3(12), 973-980.

Asempapa, R. S. (2016). *Developing an instrument to assess teachers' knowledge of the nature of mathematical modeling and their attitude toward such modeling* (Doctoral dissertation), Ohio University. Ανακτήθηκε 27 Νοεμβρίου, 2021, από [https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws\\_olink/r/1501/10?clear=10&p10\\_accession\\_num=ohiou1458581416](https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_olink/r/1501/10?clear=10&p10_accession_num=ohiou1458581416)

Bahmaei, F. (2014). Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(9), 3-13.

Bautista, A., Wilkerson-Jerde, M. H., Tobin, R. G., & Brizuela, B. M. (2014). *Mathematics Teachers' Ideas about Mathematical Models: A Diverse Landscape*. *PNA*, 9(1), 1-28.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction.

Blum, W. (2011). *Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research*. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 15-30.

Blum, W. (2015). *Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?*. In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96).

Blum, W., & Niss, M. (1991). *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction*. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.

Boaler, J. (2001). *Mathematical modelling and new theories of learning*. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, 20(3), 121-128.

Brown, J. P., & Stillman, G. A. (2017). *Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world'*. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 353-373.



- Chang, Y. P., Krawitz, J., Schukajlow, S., & Yang, K. L. (2020). *Comparing German and Taiwanese secondary school students' knowledge in solving mathematical modelling tasks requiring their assumptions*. *ZDM*, 52(1), 59-72.
- Cross, M., & Moscardini, A. O. (1985). *Learning the art of mathematical modelling*. John Wiley & Sons, Inc..
- Doerr, H. M. (2007). *What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?*. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 69-78). Springer, Boston, MA.
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). *A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data*. *Journal for research in mathematics education*, 34(2), 110-136.
- Duval, R. (2006). *Μια γνωστική ανάλυση των προβλημάτων κατανόησης στην εκμάθηση των μαθηματικών*. *Εκπαιδευτικές σπουδές στα μαθηματικά*, 61 (1), 103-131.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2004). *Mathematical Modelling with Young Children*. International Group for the Psychology of Mathematics Education. Ανακτήθηκε 25 Νοεμβρίου, 2021, από <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489737.pdf>
- Ferri, R. B. (2013). *Mathematical modelling in European education*. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2).
- Ferri, R. B., & Blum, W. (2009). *Mathematical modelling in teacher education—experiences from a modelling seminar*. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 2046-2055).
- Field, A. (2013) *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics: And Sex and Drugs and Rock "N" Roll, 4th Edition*, Sage, Los Angeles, London, New Delhi.
- Frejd, P. (2015). *Mathematical modellers' opinions on mathematical modelling in upper secondary education*. In *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 327-337). Springer, Cham.
- Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (Vol. 10). Springer Science & Business Media. Ανακτήθηκε 5 Δεκεμβρίου, 2021, από [https://books.google.gr/books?hl=el&lr=&id=XICuY-BFaHYC&oi=fnd&pg=PR11&dq=Galbraith,+P.+L.,+Henn,+H.+W.,+%26+Niss,+M.+\(Eds.\).+\(2007\).+Modelling+and+applications+in+mathematics+education:+The+14th+ICMI](https://books.google.gr/books?hl=el&lr=&id=XICuY-BFaHYC&oi=fnd&pg=PR11&dq=Galbraith,+P.+L.,+Henn,+H.+W.,+%26+Niss,+M.+(Eds.).+(2007).+Modelling+and+applications+in+mathematics+education:+The+14th+ICMI)

[+study&ots=hnEupZCjkj&sig=rQHh3MsYUtGfJpY5Rrxt7f62r5c&redir\\_esc=y#v=onepage&q=Galbraith%2C%20P.%20L.%2C%20Henn%2C%20H.%20W.%2C%20%26%20Niess%2C%20M.%20\(Eds.\).%20\(2007\).%20Modelling%20and%20applications%20in%20mathematics%20education%3A%20The%2014th%20ICMI%20study&f=false](https://www.proquest.com/openview/0f7c1ee289d3cd68066aeb3b41194406/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750)

Garfunkel, S. A., Montgomery, M., Bliss, K., Fowler, K., Galluzzo, B., Giordano, F., ... & Zbiek, R. (2016). *GAIMME: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education*. Consortium for Mathematics and Its Applications.

Gould, H. (2013). *Teachers' conceptions of mathematical modeling*. Columbia University. Ανακτήθηκε 25 Νοεμβρίου, 2021, από <https://www.proquest.com/openview/0f7c1ee289d3cd68066aeb3b41194406/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750>

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. S. (2018). *Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software*. *Zdm*, 50(1), 233-244.

Hertleif, C. (2017). *Dynamic geometry software in mathematical modelling: About the role of programme-related self-efficacy and attitudes towards learning with the software*. In Proceedings of the 13th international conference on technology in mathematics teaching (pp. 124-133).

Jaworski, B. (2006). *Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching*. *Journal of mathematics teacher education*, 9(2), 187-211.

Jensen, T. H. (2007). *Assessing mathematical modelling competency*. *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, 141-148.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). *Modelling in lower secondary mathematics classroom—problems and opportunities*. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). Springer, Boston, MA.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). *Mathematical modelling as bridge between school and university*. *ZDM*, 38(2), 196-208.

Kang, O., & Noh, J. (2012, July). *Teaching mathematical modelling in school mathematics*. In *12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 8-15)

- Kuntze, S., Siller, H. S., & Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling—an empirical study with Austrian teachers. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 317-326). Springer, Dordrecht.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York: Basic Books.
- Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). A developmental approach for supporting the epistemology of modeling. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 153-160). Springer, Boston, MA.
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Routledge.
- Lingefjärd, T. (2000). Mathematical modeling by prospective teachers using technology. Electronically published doctoral dissertation, University of Georgia.
- Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education—Necessity or unnecessarily. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 333-340). Springer, Boston, MA.
- Mason, J., & Davis, J. (1991). *Modelling with mathematics in primary and secondary schools*. Deakin University.
- Mousoulides, N., Pittalis, M., Christou, C., & Sriraman, B. (2013). Tracing students' modeling processes in school. In *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 119-129). Springer, Dordrecht.
- Ng, K. E. D. (2013). Teacher readiness in mathematical modelling: Are there differences between pre-service and in-service teachers?. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 339-348). Springer, Dordrecht.
- Owens, D., T. (1995). Cooperative learning in secondary mathematics: research and theory. *Secondary schools and cooperative learning: Theories, models and strategies*, 153-184.
- Sekerák, J. (2010). Phases of mathematical modelling and competence of high school students. *The teaching of Mathematics*, (25), 105-112.

- Sturgill, R. S. A. D. J. (2019). Mathematical modeling: Issues and challenges in mathematics education and teaching. *Editorial Team, 11(5)*, 71.
- Tan, L. S., & Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling—A case study. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 373-383). Springer, Dordrecht.
- Voskoglou, M. G. (2006). The use of mathematical modelling as a tool for learning mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 16*, 53-60.
- Yu, S. Y., & Chang, C. K. (2011). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modelling teaching?. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 147-156.

## Παράρτημα Α: Ερωτηματολόγιο έρευνας

Συνοδευτική επιστολή

Αγαπητές και αγαπητοί συνάδελφοι,

Το παρόν ερωτηματολόγιο αποτελεί μέρος της έρευνας στο πλαίσιο της διπλωματικής μου εργασίας που εκπονώ στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικών» του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Σκοπός της μελέτης είναι η αποτύπωση των απόψεων των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική μοντελοποίηση.

Το παρόν ερωτηματολόγιο είναι αυστηρά προσωπικό και ανώνυμο και τα δεδομένα θα χρησιμοποιηθούν καθαρά για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας. Η διάρκεια συμπλήρωσής του δεν ξεπερνά τα 10 λεπτά και η αποστολή του δηλώνει την αποδοχή σας να λάβετε μέρος στην έρευνα. Δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις.

Για οποιαδήποτε απορία ή διευκρίνιση παρακαλώ επικοινωνήστε μαζί μου στο παρακάτω email: [std142641@ac.eap.gr](mailto:std142641@ac.eap.gr)

Παρακαλώ εάν είναι δυνατόν προωθήστε το σε φίλους και συνεργάτες του κλάδου.

Ακολουθεί ο σύνδεσμος μέσω του οποίου μπορείτε να συμπληρώσετε το ερωτηματολόγιο.

[https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdC3394B4L4\\_aM9CrsVPuIWx2dj9uo-jNqCsthIi4jcvTPgCw/viewform?usp=sf\\_link](https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdC3394B4L4_aM9CrsVPuIWx2dj9uo-jNqCsthIi4jcvTPgCw/viewform?usp=sf_link)

Σας ευχαριστώ εκ των προτέρων για τη συνεργασία σας.

Μαρία Μαθιουλάκη

Μαθηματικός ΠΕ03

### **Ερωτηματολόγιο σχετικά με τη διερεύνηση των δυσκολιών και των πρακτικών που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης**

Το ερωτηματολόγιο αυτό αποτελεί ερευνητικό εργαλείο για την πραγματοποίηση της διπλωματικής εργασίας μου στο μεταπτυχιακό προγράμματος σπουδών «Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά» του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Είναι ανώνυμο και τα αποτελέσματα θα χρησιμοποιηθούν για εκπαιδευτικούς και ερευνητικούς σκοπούς. Διαρκεί λίγα μόνο λεπτά.

Ευχαριστώ πολύ για τη συμμετοχή σας.

1. Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν δραστηριότητες στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;
  - Καθόλου
  - Λίγο
  - Αρκετά
  - Πολύ
  - Πάρα πολύ
  
2. Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν προβλήματα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;
  - Καθόλου
  - Λίγο
  - Αρκετά
  - Πολύ
  - Πάρα πολύ

3. Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;
- Καθόλου
  - Λίγο
  - Αρκετά
  - Πολύ
  - Πάρα πολύ
4. Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με δραστηριότητες;
- Καθόλου
  - Λίγο
  - Αρκετά
  - Πολύ
  - Πάρα πολύ
5. Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με προβλήματα;
- Καθόλου
  - Λίγο
  - Αρκετά
  - Πολύ
  - Πάρα πολύ
6. Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με ασκήσεις;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

7. Συμφωνείτε με την αξιοποίηση δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;

- Δεν συμφωνώ
- Συμφωνώ λίγο
- Συμφωνώ αρκετά
- Συμφωνώ πολύ
- Συμφωνώ πάρα πολύ

8. Συμφωνείτε με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;

- Δεν συμφωνώ
- Συμφωνώ λίγο
- Συμφωνώ αρκετά
- Συμφωνώ πολύ
- Συμφωνώ πάρα πολύ

9. Συμφωνείτε με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;

- Δεν συμφωνώ
- Συμφωνώ λίγο
- Συμφωνώ αρκετά



- Συμφωνώ πολύ
- Συμφωνώ πάρα πολύ

10. Θεωρείτε ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθηματικών προβλημάτων και μαθηματικών δραστηριοτήτων;

- Όχι δεν υπάρχει
- Ίσως υπάρχει μια μικρή διαφορά
- Ναι υπάρχει
- Δεν γνωρίζω

11. Θεωρείτε πως τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

12. Τα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

13. Η ικανότητα ενός/μιας μαθητή/μαθήτριας στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

14. Έχετε ακούσει τον όρο μαθηματική μοντελοποίηση;

- Ναι και γνωρίζω τι είναι
- Ναι αλλά δεν γνωρίζω τι είναι
- Όχι και δεν γνωρίζω τι είναι

15. Τα υπάρχοντα προγράμματα σπουδών μαθηματικών προσφέρουν στους/στις εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

16. Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά

- Πολύ
- Πάρα πολύ

17. Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

18. Η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες διδακτικές ώρες από αυτές που έχετε στη διάθεσή σας;

- Όχι
- Ίσως
- Ναι
- Δεν γνωρίζω

19. Πιστεύετε πως η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες;

- Όχι δεν το πιστεύω
- Ίσως
- Ναι το πιστεύω
- Δεν γνωρίζω

20. Πιστεύετε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών και μαθητριών για τα μαθηματικά;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

21. Σας φαίνεται δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

22. Σε ποιο βαθμό θεωρείτε πως οι μαθητές και οι μαθήτριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

23. Ποιο θεωρείτε πως είναι το βασικότερο πρόβλημα στην εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης;

- Η έλλειψη χρόνου

- Η έλλειψη εμπειρίας
- Τα σχολικά εγχειρίδια
- Η έλλειψη κατανόησης από τους μαθητές
- Δεν θεωρώ ότι υπάρχει πρόβλημα
- Άλλο

24. Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;

- Όχι
- Ίσως
- Ναι
- Δεν γνωρίζω

25. Πιστεύετε πως η μαθηματική μοντελοποίηση (επιλέξτε την απάντηση ή τις απαντήσεις με τις οποίες συμφωνείτε):

- Συνδέει τις μαθηματικές αναπαραστάσεις
- Ευνοεί το πνεύμα συνεργασίας των μαθητών
- Ενισχύει τη δημιουργική προσπάθεια για την μάθηση νέων εννοιών
- Άλλο

26. Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;

- Όχι
- Ίσως
- Ναι
- Δεν γνωρίζω

27. Σε ποιο βαθμό χρησιμοποιείτε τα ψηφιακά μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών και των μαθητριών σας;

- Καθόλου
- Λίγο
- Αρκετά
- Πολύ
- Πάρα πολύ

28. Πόσο συχνά κατά τη διάρκεια του μαθήματος σας, οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονται ομαδικά;

- Ποτέ
- Σπάνια
- Συχνά
- Πολύ συχνά

29. Έχετε παρακολουθήσει κάποιο σεμινάριο ή άλλη μορφή εκπαίδευσης σχετικά με τη μοντελοποίηση;

- Ναι
- Όχι

30. Φύλο

- Άνδρας
- Γυναίκα

31. Ηλικία

- <26
- 26-35
- 36-45
- 46-55
- 56-65
- >65

32. Σπουδές (Επιλέξτε όσα από τα παρακάτω διαθέτετε)

- Πτυχίο
- 2ο Πτυχίο
- Μεταπτυχιακό
- Διδακτορικό

33. Διδάσκω σε:

- Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο
- Φροντιστήριο

34. Διδάσκω σε μαθητές και μαθήτριες

- Δημοτικού
- Γυμνασίου
- Λυκείου

35. Χρόνια προϋπηρεσίας

- 1-5 έτη

- 6-15 έτη
- 16-25 έτη
- >25 έτη



## Παράρτημα Β

Στατιστικά σημαντικές μέσες τιμές

με προβλήματα;		
Mean		
Φύλο	Άνδρας	2,40
	Γυναίκα	2,77
Μεταπτυχιακό	Όχι	2,59
	Ναι	2,57

	Ηλικία				
	<26	26-35	36-45	46-55	56-65
	Mean	Mean	Mean	Mean	Mean
Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;	4,33	4,03	3,37	3,39	3,50
Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;	3,00	2,76	2,95	2,86	2,50

### Case Summaries

Mean	Μεταπτυχιακό		
	Όχι	Ναι	Total
με προβλήματα;	2,59	2,57	2,58
Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;	2,68	2,70	2,69
Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;	2,80	2,80	2,80

### Case Summaries

Mean	Διδακτορικό		
	Όχι	Ναι	Total
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	3,94	4,00	3,95

### Case Summaries

Mean	2ο Πτυχίο		
	Όχι	Ναι	Total
Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;	3,69	3,25	3,67
Η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχετε στη διάθεση σας;	2,58	2,00	2,56
Σας φαίνεται δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης;	2,24	2,50	2,25

### Case Summaries

Mean	Διδάσκω σε:			
	Δημόσιο ή			Total
	Δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο	ιδιωτικό σχολείο, Φροντιστήριο	Φροντιστήριο	
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	4,12	4,33	3,69	3,96
ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	3,71	3,00	3,03	3,42

### Case Summaries

Mean	Διδάσκω σε μαθητές και μαθήτριες
------	----------------------------------

	Γυμνασίου,		Δημοτικού,	Γυμνασίου,		Total
	Γυμνασίου	Λυκείου	Γυμνασίου	Λυκείου	Λυκείου	
Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;	2,81	2,56	1,00	2,83	2,79	2,69

### Case Summaries

Mean

	Χρόνια προϋπηρεσίας				
	1-5 έτη	6-15 έτη	16-25 έτη	>25 έτη	Total
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	3,57	4,15	4,11	4,25	3,96
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	3,43	4,04	4,00	3,87	3,81
Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;	2,86	2,77	2,88	2,38	2,80

Αποτελέσματα εξέτασης μέσων τιμών	Ηλικία		Διδάσκω σε		Βαθμίδα εκπαίδευσης		Προϋπηρεσία		Φύλο		MSc		PhD		2ο Πτυχίο			
	F	p	F	p	F	p	F	p	t	p	t	p	t	p	t	p		
δραστηριότητες στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	0,701	0,593	1,383	0,256	0,669	0,616	0,338	0,798	-0,074	0,942	0,697	0,488	0,880	0,381	0,043	0,966		
προβλήματα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	1,144	0,341	1,938	0,150	1,828	0,131	1,949	0,128	-0,077	0,939	1,326	0,188	-	0,424	0,673	0,7054	0,482	
ασκήσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	1,273	0,287	6,265	0,003	2,290	0,066	0,625	0,601	-0,135	0,893	-	0,220	-	0,069	0,3528	0,725		
με δραστηριότητες;	0,049	0,995	2,560	0,083	2,403	0,056	0,145	0,933	-0,229	0,819	0,674	0,502	0,229	0,819	-	0,5524	0,582	
με προβλήματα;	1,400	0,241	1,950	0,148	0,866	0,488	0,884	0,453	-2,087	0,040	0,792	0,431	0,091	0,928	-0,398	0,692		
με ασκήσεις;	0,464	0,762	2,027	0,138	0,393	0,813	0,417	0,741	0,555	0,580	-	0,410	-	0,064	0,7407	0,461		
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση δραστηριοτήτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	0,777	0,543	0,109	0,897	0,337	0,852	0,879	0,455	10416,000	0,300	2,742	0,007	-	0,300	-	0,1211	0,904	
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση προβλημάτων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	1,374	0,250	3,108	0,050	1,351	0,258	3,519	0,018	0,762	0,448	0,498	0,619	1,013	0,314	-	0,1062	0,916	
Συμφωνείτε με την αξιοποίηση ασκήσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	0,847	0,500	2,780	0,067	2,168	0,079	2,945	0,037	0,182	0,856	-	0,671	-	0,651	0,517	0,1439	0,886	
Θεωρείτε ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθηματικών προβλημάτων και μαθηματικών δραστηριοτήτων;	0,392	0,814	0,968	0,384	0,482	0,749	0,678	0,568	-0,788	0,433	-	0,400	-	0,695	0,489	-0,984	0,328	
Θεωρείτε πως τα προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις;	1,700	0,157	1,291	0,280	1,331	0,265	0,607	0,612	-1,397	0,166	0,220	0,826	-	1,000	0,320	0,2203	0,826	
Τα προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια χρειάζεται να ανταποκρίνονται σε πραγματικές καταστάσεις;	1,375	0,249	1,288	0,281	0,754	0,558	0,751	0,525	-1,221	0,225	0,336	0,737	-	1,537	0,128	0,3364	0,737	
Η ικανότητα ενός/μιας μαθητή/μαθήτριας στα μαθηματικά ενισχύεται όταν αναπτύσσει δεξιότητες έρευνας;	0,298	0,879	0,213	0,809	0,655	0,625	0,469	0,705	-0,359	0,720	1,773	0,080	-	0,610	0,544	-	0,6166	0,539

Έχετε ακούσει τον όρο μαθηματική μοντελοποίηση;	0,467	0,760	0,848	0,432	0,675	0,611	0,318	0,812	0,979	0,330	-	0,462	0,749	0,456	-	0,462
Έχετε παρακολουθήσει κάποιο σεμινάριο ή άλλη μορφή εκπαίδευσης σχετικά με τη μοντελοποίηση;	0,680	0,608	1,075	0,346	0,153	0,961	0,968	0,412	-0,430	0,669	0,207	0,837	0,938	0,351	0,2069	0,837
...προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης;	1,389	0,245	1,371	0,259	0,813	0,520	2,077	0,109	-0,287	0,775	0,806	0,422	1,343	0,183	0,8062	0,422
Τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν στους μαθητές και τις μαθήτριες ευκαιρίες να ασχοληθούν με την μαθηματική μοντελοποίηση;	0,655	0,625	0,044	0,957	1,709	0,155	0,467	0,706	-0,215	0,830	0,968	0,336	2,147	0,035	16,412	0,104
Συμφωνείτε με την ενασχόληση των μαθητών και των μαθητριών με την μαθηματική μοντελοποίηση στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσής τους;	2,918	0,026	0,838	0,436	0,482	0,749	0,996	0,398	-1,228	0,223	0,910	0,365	1,225	0,224	12,609	0,211
Η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης απαιτεί περισσότερες ώρες από αυτές που έχετε στη διάθεσή σας;	0,144	0,965	0,149	0,862	1,468	0,220	0,982	0,406	0,284	0,777	1,495	0,139	0,909	0,366	21,718	0,033
Σας φαίνεται δύσκολη η προσέγγιση της διδασκαλίας με παρεμβάσεις μαθηματικής μοντελοποίησης;	0,965	0,431	0,160	0,852	0,285	0,887	1,236	0,302	1,067	0,289	-	0,536	0,031	0,975	26,096	0,011
Ποιο θεωρείτε πως είναι το βασικότερο πρόβλημα στην εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης;	1,373	0,250	2,705	0,072	1,284	0,283	0,148	0,930	-0,517	0,606	0,347	0,730	1,211	0,229	24,043	0,018
Θεωρείτε πως η εμπειρία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστεί η μοντελοποίηση κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών;	0,999	0,413	1,989	0,143	8,134	0,000	0,370	0,775	-0,941	0,349	-	0,307	0,122	0,903	0,7231	0,472
Συνδέει τις μαθηματικές αναπαραστάσεις	1,957	0,108	1,068	0,348	2,346	0,061	2,105	0,105	-0,376	0,708	-	0,520	0,469	0,640	17,015	0,092
Ευνοεί το πνεύμα συνεργασίας των μαθητών	0,652	0,627	0,069	0,933	0,337	0,852	0,551	0,649	0,276	0,783	2,354	0,021	1,412	0,161	18,247	0,071
Ενισχύει τη δημιουργική προσπάθεια για την μάθηση νέων εννοιών	0,207	0,934	0,288	0,751	2,057	0,093	0,245	0,864	0,710	0,480	0,540	0,591	0,133	0,895	0,8662	0,389

Πιστεύετε πως η μαθηματική μοντελοποίηση βοηθάει τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν καλύτερα μαθηματικές έννοιες;	1,116	0,355	0,475	0,623	0,376	0,825	1,007	0,394											
Θεωρείτε πως η μοντελοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες επιστήμες εκτός από τα μαθηματικά;	2,935	0,025	0,399	0,672	0,591	0,670	3,976	0,011											
Πιστεύετε ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μειώνει το ενδιαφέρον των μαθητών και μαθητριών για τα μαθηματικά;	0,647	0,631	1,244	0,293	0,149	0,963	1,394	0,250											
Σε ποιο βαθμό θεωρείτε πως οι μαθητές και οι μαθήτριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης;	0,783	0,539	1,117	0,332	0,880	0,480	0,036	0,991											
Σε ποιο βαθμό χρησιμοποιείτε τα ψηφιακά μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών και των μαθητριών σας;	0,853	0,495	2,877	0,062	0,223	0,925	0,050	0,985											
Πόσο συχνά κατά τη διάρκεια του μαθήματος σας, οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονται ομαδικά;	0,201	0,937	0,021	0,979	0,194	0,941	0,512	0,675											
									11233,000	-	0,264	0,821	0,414	0,267	0,790	12,609	-	0,211	

