



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

**Τεχνικές συναρτήσεων Green για προβλήματα μερικών
διαφορικών εξισώσεων και αριθμητικές υλοποιήσεις**

Ιωάννης Γ. Στεφανόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: **Νικόλαος Α. Τσίτσας**

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Στεφανόπουλου Ιωάννη που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



«Τεχνικές συναρτήσεων Green για προβλήματα μερικών
διαφορικών εξισώσεων και αριθμητικές υλοποιήσεις»

Ιωάννης Γ. Στεφανόπουλος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Τσίτσας

Καθηγητής

Τμήμα Πληροφορικής

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο

Θεσσαλονίκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Καραχάλιος

Καθηγητής

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2026

Ευχαριστίες

Θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Τσίτσα για την καθοδήγηση, την στήριξη και τις εύστοχες παρατηρήσεις καθώς και την κατανόηση που έδειξε κατά την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και στον συν-επιβλέποντα καθηγητή κ. Νικόλαο Καραχάλιο.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους του καθηγητές του προγράμματος σπουδών ΜΣΜ του ΕΑΠ για την άριστη συνεργασία που είχαμε σε όλες τις ενότητες καθώς και την γενναιόδωρη και απλόχερη μεταλαμπάδευση των γνώσεων τους.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την σύζυγό μου, για την συμπαράσταση και την υπομονή που έδειξε σε όλη την διάρκεια αυτού του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στα παιδιά μου, που ήταν το κίνητρο για αυτό το ταξίδι της γνώσης.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας είναι η συστηματική μελέτη των συναρτήσεων Green στο πλαίσιο προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες, με έμφαση τόσο στη θεωρητική θεμελίωση όσο και στις αριθμητικές υλοποιήσεις και εφαρμογές τους σε επιλεγμένα φυσικά συστήματα.

Οι συναρτήσεις Green αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση συνοριακών προβλημάτων, καθώς επιτρέπουν την αναπαράσταση της λύσης μιας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης μέσω ολοκληρωτικού τύπου, ο οποίος εξαρτάται από την πηγή και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι απαραίτητες μαθηματικές έννοιες, με έμφαση στη θεωρία των κατανομών, τη συνάρτηση δέλτα του Dirac και την έννοια των ασθενών λύσεων, οι οποίες αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία για τη διατύπωση και κατανόηση των συναρτήσεων Green.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι ταυτότητες Green, οι οποίες προκύπτουν από το θεώρημα απόκλισης του Gauss και συνδέουν τις λύσεις διαφορικών εξισώσεων με τα δεδομένα στο σύνορο του χωρίου. Παρουσιάζονται οι αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων και εξετάζεται η σημασία τους για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται ο ορισμός της συνάρτησης Green για γραμμικούς ελλειπτικούς τελεστές και μελετώνται αναλυτικά τα συνοριακά προβλήματα Dirichlet και Neumann. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις ιδιότητες συμμετρίας και κανονικότητας της συνάρτησης Green, καθώς και στη σχέση της με προβλήματα τύπου Sturm--Liouville.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές της θεωρίας σε φυσικά συστήματα, όπως προβλήματα θερμικής διάχυσης, ηλεκτρικά κυκλώματα και μηχανικά συστήματα, με κατάλληλη μαθηματική διατύπωση των αντίστοιχων μοντέλων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές αριθμητικές τεχνικές για την προσεγγιστική υλοποίηση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων μέσω συναρτήσεων Green, καθώς και συγκρίσεις με άλλες κλασικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων, αναδεικνύοντας τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς κάθε προσέγγισης.

Λέξεις-κλειδιά: Συναρτήσεις Green, μερικές διαφορικές εξισώσεις, συνοριακά προβλήματα, πρόβλημα Dirichlet, πρόβλημα Neumann, θεωρία κατανομών, συνάρτηση δέλτα του Dirac, ελλειπτικοί τελεστές, αριθμητικές μέθοδοι.

Abstract

The aim of the present Master's thesis is the systematic study of Green's function techniques in the context of partial differential equations with boundary conditions, with emphasis on both their theoretical foundations and their numerical implementations in selected physical systems.

Green's functions constitute a powerful analytical framework for solving boundary value problems, since they allow the representation of the solution of a nonhomogeneous differential equation through integral formulas involving the source term and the boundary conditions of the problem.

In the first chapter, the necessary mathematical preliminaries are presented, with particular emphasis on distribution theory, the Dirac delta distribution, and the concept of weak solutions. These notions provide the rigorous mathematical framework required for the formulation and analysis of Green's functions.

The second chapter is devoted to Green's identities, which are derived from the divergence theorem and establish fundamental relationships between differential operators and boundary data. Detailed proofs are presented, and the role of these identities in the existence and uniqueness theory of solutions is examined.

In the third chapter, Green's functions for linear elliptic operators are introduced, and the classical Dirichlet and Neumann boundary value problems are studied in detail. Particular emphasis is placed on the symmetry and regularity properties of Green's functions, as well as on their relation to Sturm–Liouville theory.

The fourth chapter presents applications of the theory to selected physical systems, including heat transfer problems, electrical circuits, and mechanical models, formulated within an appropriate mathematical framework. These examples illustrate the natural appearance of Green's functions in the modeling and analysis of applied problems.

Finally, the fifth chapter focuses on basic numerical techniques for the approximation and implementation of Green's function representations, together with comparisons with other classical methods for solving partial differential equations, such as eigenfunction expansions and Fourier methods. The advantages and limitations of the Green's function approach are discussed, highlighting its effectiveness as a unifying analytical and computational method for linear boundary value problems.

Keywords: Green's functions, partial differential equations, boundary value problems, Dirichlet problem, Neumann problem, distribution theory, Dirac delta distribution, elliptic operators, numerical methods.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	iv
Περίληψη	v
Abstract	vi
1 Βασικές μαθηματικές έννοιες	1
1.1 Χώροι δοκιμαστικών συναρτήσεων και κατανομές	1
1.2 Η «συνάρτηση» δέλτα του Dirac	2
1.3 Ασθενείς λύσεις και γραμμικοί διαφορικοί τελεστές	4
2 Ταυτότητες Green και τύποι αναπαράστασης	7
2.1 Ταυτότητες Green	7
2.1.1 Πρώτη ταυτότητα Green	7
2.1.2 Δεύτερη ταυτότητα Green	7
2.1.3 Τρίτη ταυτότητα Green	8
2.1.4 Σχόλια και εφαρμογές	8
2.2 Αναπαράσταση λύσεων μέσω συναρτήσεων Green	9
2.2.1 Ολοκληρωτική αναπαράσταση	9
2.2.2 Πρόβλημα Dirichlet	9
2.2.3 Πρόβλημα Neumann	10
2.2.4 Συμμετρία της συνάρτησης Green	10
2.2.5 Φυσική ερμηνεία	11
2.2.6 Σχόλια	11
2.3 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Neumann και Robin	11
2.3.1 Συνθήκες Dirichlet	12
2.3.2 Συνθήκες Neumann	12
2.3.3 Συνθήκες Robin	13

2.3.4	Σχέση με τις συναρτήσεις Green	14
2.3.5	Σχόλια	14
3	Κατασκευή συναρτήσεων Green	15
3.1	Συναρτήσεις Green για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις	15
3.1.1	Γενική μορφή προβλήματος	15
3.1.2	Ορισμός της συνάρτησης Green	15
3.1.3	Κατασκευή της Green	16
3.1.4	Συνθήκη συνέχειας	16
3.1.5	Ασυνέχεια της παραγώγου	17
3.1.6	Αναπαράσταση της λύσης	18
3.1.7	Παράδειγμα	18
3.1.8	Συμμετρία της Green	19
3.1.9	Σχόλια	19
3.2	Συναρτήσεις Green για ελλειπτικούς τελεστές	19
3.2.1	Ελλειπτικοί τελεστές	20
3.2.2	Ο τελεστής Laplace	20
3.2.3	Θεμελιώδης λύση του Laplace	21
3.2.4	Κατασκευή της συνάρτησης Green	21
3.2.5	Αναπαράσταση λύσεων	22
3.2.6	Ιδιότητες της συνάρτησης Green	22
3.2.7	Φυσική ερμηνεία	23
3.2.8	Σχόλια	23
3.3	Σχέση με προβλήματα Sturm--Liouville	23
3.3.1	Γενική μορφή προβλήματος Sturm--Liouville	24
3.3.2	Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις	24
3.3.3	Σύνδεση με τις συναρτήσεις Green	24
3.3.4	Ανάπτυξη της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων	25
3.3.5	Παράδειγμα	25
3.3.6	Φυσική σημασία	26

3.3.7	Σχόλια	26
4	Εφαρμογές σε φυσικά συστήματα	27
4.1	Προβλήματα θερμικής διάχυσης	27
4.1.1	Μόνιμη θερμική κατάσταση	27
4.1.2	Συνοριακές συνθήκες	27
4.1.3	Αναπαράσταση μέσω συνάρτησης Green	28
4.1.4	Φυσική ερμηνεία	29
4.1.5	Χρονικά εξαρτώμενη θερμική διάχυση	29
4.1.6	Σχόλια	29
4.2	Ηλεκτρικά κυκλώματα	30
4.2.1	Κυκλώματα πρώτης τάξης	30
4.2.2	Αναπαράσταση της λύσης	30
4.2.3	Κυκλώματα δεύτερης τάξης	31
4.2.4	Φυσική ερμηνεία	32
4.2.5	Σχέση με τη θεωρία συστημάτων	32
4.2.6	Σχόλια	32
4.3	Μηχανικά συστήματα	32
4.3.1	Μοντέλο αρμονικού ταλαντωτή	33
4.3.2	Συνάρτηση Green του συστήματος	33
4.3.3	Αναπαράσταση της λύσης	34
4.3.4	Περιπτώσεις απόσβεσης	34
4.3.5	Εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής	35
4.3.6	Φυσική ερμηνεία	35
4.3.7	Σχέση με ιδιοτιμές και ιδιομορφές	35
4.3.8	Σχόλια	36
4.4	Στοιχεία ακουστικής σκέδασης	36
4.4.1	Η εξίσωση Helmholtz	36
4.4.2	Σκεδαζόμενο πεδίο	37
4.4.3	Συνθήκες στο σύνορο	37

4.4.4	Συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz	38
4.4.5	Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld	38
4.4.6	Ολοκληρωτική αναπαράσταση	38
4.4.7	Φυσική ερμηνεία	38
4.4.8	Εφαρμογές	39
4.4.9	Σχόλια	39
5	Αριθμητικές υλοποιήσεις σε φυσικά συστήματα	40
5.1	Σκοπός και μεθοδολογία αριθμητικής προσέγγισης	40
5.1.1	Διακριτοποίηση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων	40
5.1.2	Αριθμητική ολοκλήρωση	41
5.1.3	Γραφική αναπαράσταση	41
5.1.4	Εφαρμογές	41
5.1.5	Σχόλια	42
5.2	Εφαρμογή 1: Μονοδιάστατο πρόβλημα Poisson	42
5.2.1	Κώδικας Octave	43
5.2.2	Γραφικές Αναπαραστάσεις	47
5.2.3	Σχόλια	50
5.3	Εφαρμογή 2: Δισδιάστατο πρόβλημα Poisson	50
5.3.1	Συνάρτηση Green	51
5.3.2	Κώδικας Octave	52
5.3.3	Γραφικές αναπαραστάσεις	55
5.3.4	Σχόλια	57
5.4	Εφαρμογή 3: Απόκριση κυκλώματος RC	58
5.4.1	Μαθηματική διατύπωση	58
5.4.2	Συνάρτηση Green	58
5.4.3	Ολοκληρωτική αναπαράσταση	59
5.4.4	Αριθμητική προσέγγιση	59
5.4.5	Κώδικας Octave	59
5.4.6	Γραφικές αναπαραστάσεις	61

5.4.7	Σχόλια	63
5.5	Εφαρμογή 4: Μηχανικός ταλαντωτής με απόσβεση	63
5.5.1	Μαθηματική διατύπωση	63
5.5.2	Συνάρτηση Green	64
5.5.3	Ολοκληρωτική αναπαράσταση	64
5.5.4	Αριθμητική προσέγγιση	65
5.5.5	Κώδικας Octave	65
5.5.6	Γραφικές αναπαραστάσεις	67
5.5.7	Σχόλια	69
5.6	Εφαρμογή 5: Διάδοση θερμότητας σε μονοδιάστατη ράβδο	69
5.6.1	Μαθηματική διατύπωση	69
5.6.2	Συνάρτηση Green	70
5.6.3	Αριθμητική προσέγγιση	70
5.6.4	Κώδικας Octave	70
5.6.5	Γραφικές αναπαραστάσεις	73
5.6.6	Σχόλια	75
5.7	Εφαρμογή 6: Ακουστική διάδοση κύματος	75
5.7.1	Μαθηματική διατύπωση	75
5.7.2	Φυσική ερμηνεία	76
5.7.3	Αριθμητική προσέγγιση	76
5.7.4	Κώδικας Octave	76
5.7.5	Γραφικές αναπαραστάσεις	78
5.7.6	Σχόλια	80
5.8	Εφαρμογή 7: Δισδιάστατη ακουστική σκέδαση από κυκλικό σκεδαστή	80
5.8.1	Συνάρτηση Green της δισδιάστατης εξίσωσης Helmholtz	81
5.8.2	Συνοριακή συνθήκη	81
5.8.3	Ανάπτυξη σε κυλινδρικές αρμονικές	82
5.8.4	Κώδικας Octave	83
5.8.5	Γραφικές αναπαραστάσεις	86

5.8.6	Σχόλια	89
5.9	Σύγκριση με άλλες μεθόδους	89
5.9.1	Μέθοδος συναρτήσεων Green	89
5.9.2	Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών	90
5.9.3	Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων	90
5.9.4	Μέθοδος συνοριακών στοιχείων	91
5.9.5	Μέθοδος διαχωρισμού μεταβλητών	91
5.9.6	Συγκριτική αξιολόγηση	91
5.9.7	Συμπεράσματα	92
Συμπεράσματα		93

1 Βασικές μαθηματικές έννοιες

1.1 Χώροι δοκιμαστικών συναρτήσεων και κατανομές

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας των κατανομών, οι οποίες αποτελούν θεμελιώδεις εργαλείο για τη μελέτη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και για τον αυστηρό ορισμό των συναρτήσεων Green. Η ανάγκη εισαγωγής της θεωρίας αυτής προκύπτει από το γεγονός ότι πολλές συναρτήσεις που εμφανίζονται φυσικά σε εφαρμογές --- όπως η συνάρτηση δέλτα του Dirac --- δεν μπορούν να ερμηνευθούν ως κλασικές συναρτήσεις, αλλά αποκτούν νόημα μόνο ως γενικευμένα αντικείμενα.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο. Ο χώρος των δοκιμαστικών συναρτήσεων, που συμβολίζεται με $D(\Omega)$, ορίζεται ως το σύνολο όλων των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα στο Ω . Δηλαδή,

$$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega).$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι μηδενικές εκτός ενός συμπαγούς υποσυνόλου του Ω , γεγονός που εξασφαλίζει την καλή συμπεριφορά τους ως προς την ολοκλήρωση και την παραγωγή.

Μια κατανομή στο Ω ορίζεται ως μια γραμμική και συνεχής απεικόνιση

$$T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Η γραμμικότητα σημαίνει ότι για κάθε $\phi, \psi \in D(\Omega)$ και κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi),$$

ενώ η συνέχεια ορίζεται ως προς την κατάλληλη τοπολογία στον χώρο $D(\Omega)$.

Στην πράξη, η συνέχεια εξασφαλίζει ότι αν μια ακολουθία δοκιμαστικών συναρτήσεων συγκλίνει κατάλληλα στο μηδέν, τότε και οι τιμές της κατανομής σε αυτές συγκλίνουν στο μηδέν.

Κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ορίζει φυσικά μια κατανομή T_f μέσω του τύπου

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Με τον τρόπο αυτό, ο χώρος των κατανομών περιέχει ως υποσύνολο τις κλασικές συναρτή-

σεις, αλλά είναι σημαντικά ευρύτερος. Αυτό επιτρέπει την ενοποιημένη αντιμετώπιση τόσο κανονικών συναρτήσεων όσο και γενικευμένων αντικειμένων.

Ιδιαίτερης σημασίας είναι ο ορισμός της παραγώγου μιας κατανομής. Έστω T κατανομή στο Ω . Η μερική παράγωγος $\partial^\alpha T$, για πολυδείκτη α , ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Ο ορισμός αυτός γενικεύει την έννοια της κλασικής παραγώγου και επιτρέπει τον υπολογισμό παραγώγων ακόμη και για συναρτήσεις που δεν είναι διαφορίσιμες με την κλασική έννοια.

Η θεωρία των κατανομών παίζει καθοριστικό ρόλο στη μελέτη διαφορικών εξισώσεων με πηγές, καθώς επιτρέπει τη διατύπωση εξισώσεων της μορφής

$$Lu = f,$$

όπου ο τελεστής L είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής και το δεξί μέλος f μπορεί να είναι κατανομή.

Στο πλαίσιο αυτό, οι συναρτήσεις Green ορίζονται ως λύσεις εξισώσεων με πηγή τη συνάρτηση δέλτα, γεγονός που καθιστά τη θεωρία των κατανομών αναπόσπαστο μέρος της ανάλυσης που θα ακολουθήσει.

Η εισαγωγή των κατανομών και των χώρων δοκιμαστικών συναρτήσεων στο παρόν κεφάλαιο στοχεύει στη δημιουργία ενός αυστηρού μαθηματικού πλαισίου, μέσα στο οποίο θα μελετηθούν οι συναρτήσεις Green στα επόμενα κεφάλαια. Ιδιαίτερα, η χρήση των κατανομών επιτρέπει τη σαφή διατύπωση των συνοριακών προβλημάτων και την κατανόηση της έννοιας της θεμελιώδους λύσης, η οποία αποτελεί τη βάση για την κατασκευή των συναρτήσεων Green.

1.2 Η «συνάρτηση» δέλτα του Dirac

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac αποτελεί ένα από τα κλασικότερα παραδείγματα κατανομών και παίζει θεμελιώδη ρόλο στη θεωρία των συναρτήσεων Green. Παρότι δεν μπορεί να οριστεί ως κλασική συνάρτηση, η συνάρτηση δέλτα αποκτά αυστηρό μαθηματικό νόημα στο πλαίσιο της θεωρίας των κατανομών, όπου ερμηνεύεται ως γραμμική απεικόνιση επί κατάλληλων χώρων δοκιμαστικών συναρτήσεων.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο. Η συνάρτηση δέλτα του Dirac με σημείο $x_0 \in \Omega$, που συμβολίζεται με δ_{x_0} , ορίζεται ως η κατανομή

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0), \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Ο ορισμός αυτός εκφράζει την ιδιότητα επιλογής (*sifting property*), σύμφωνα με την οποία η δέλτα «εξάγει» την τιμή της δοκιμαστικής συνάρτησης στο σημείο x_0 . Ιδιαίτερα, όταν $x_0 = 0$, γράφουμε απλώς δ .

Η δέλτα δεν είναι συνάρτηση με την κλασική έννοια, καθώς δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως στοιχείο κανενός χώρου $L^p(\Omega)$. Ωστόσο, μπορεί να προσεγγιστεί, υπό την έννοια των κατανομών, ως όριο κατάλληλων οικογενειών συναρτήσεων.

Συγκεκριμένα, αν $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ είναι μια οικογένεια συναρτήσεων με τις ιδιότητες

$$\rho_\varepsilon \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \text{supp}(\rho_\varepsilon) \rightarrow \{0\},$$

τότε ισχύει

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \delta$$

στον χώρο των κατανομών.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η έννοια της παραγώγου της δέλτα. Για κάθε πολυδείκτη α , η μερική παράγωγος $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(x_0), \quad \forall \phi \in D(\Omega),$$

όπου

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της παραγώγου κατανομής και αποτελεί βασικό εργαλείο στην ανάλυση διαφορικών εξισώσεων με σημειακές πηγές.

Η δέλτα του Dirac εμφανίζεται φυσικά στη μελέτη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ως μαθηματικό μοντέλο σημειακής διέγερσης. Στο πλαίσιο αυτό, η εξίσωση

$$Lu = \delta_{x_0},$$

όπου L είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής, ορίζει τη θεμελιώδη λύση του τελεστή L . Η έννοια αυτή αποτελεί τη βάση για την κατασκευή της συνάρτησης Green, η οποία επιτρέπει την αναπαράσταση της λύσης ενός γενικού μη ομογενούς προβλήματος μέσω ολοκληρωτικού τύπου.

Στην περίπτωση πολυδιάστατων προβλημάτων, η δέλτα γενικεύεται φυσικά στο $\mathbb{R}^n$, διατηρώ-

ντας την ιδιότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0),$$

για κάθε $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Η γενίκευση αυτή είναι καθοριστική για τη μελέτη ελλειπτικών, παραβολικών και υπερβολικών εξισώσεων σε περισσότερες από μία διαστάσεις.

1.3 Ασθενείς λύσεις και γραμμικοί διαφορικοί τελεστές

Στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων, η έννοια της κλασικής λύσης δεν είναι πάντοτε επαρκής. Σε πολλές περιπτώσεις, οι λύσεις ενδέχεται να παρουσιάζουν ασυνέχειες, ιδιομορφίες ή να μην είναι αρκετά ομαλές ώστε να επιτρέπεται ο κλασικός υπολογισμός όλων των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση. Για τον λόγο αυτό εισάγεται η έννοια των ασθενών λύσεων, η οποία βασίζεται στη θεωρία των κατανομών και επιτρέπει τη γενικευμένη διατύπωση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής τάξης m ορίζεται γενικά από τη σχέση

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u,$$

όπου:

- $a_\alpha(x)$ είναι κατάλληλες συναρτήσεις συντελεστών,
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ είναι πολυδείκτης,
-

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

- και

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Η γραμμικότητα του τελεστή σημαίνει ότι για κάθε συναρτήσεις u, v και κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv.$$

Κλασικό παράδειγμα γραμμικού διαφορικού τελεστή αποτελεί ο τελεστής Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

ο οποίος εμφανίζεται σε προβλήματα θερμότητας, ηλεκτροστατικής και κυματικής διάδοσης.

Στην κλασική θεωρία, μια συνάρτηση u θεωρείται λύση της εξίσωσης

$$Lu = f$$

αν όλες οι παράγωγοι που εμφανίζονται στον τελεστή L υπάρχουν με την κλασική έννοια και η εξίσωση ικανοποιείται σημειακά. Ωστόσο, πολλές φυσικές εφαρμογές οδηγούν σε προβλήματα όπου τέτοιες λύσεις δεν υπάρχουν.

Για παράδειγμα, προβλήματα με σημειακές πηγές, ασυνεχείς συντελεστές ή συνοριακές ιδιομορφίες συχνά παράγουν λύσεις που δεν είναι επαρκώς ομαλές. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιείται η έννοια της ασθενούς λύσης.

Έστω η εξίσωση

$$Lu = f$$

σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση ή κατανομή u ονομάζεται ασθενής λύση αν η εξίσωση ικανοποιείται υπό την έννοια των κατανομών, δηλαδή αν για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση $\phi \in D(\Omega)$ ισχύει κατάλληλη ολοκληρωτική σχέση.

Στην απλούστερη περίπτωση, για την εξίσωση

$$-\Delta u = f,$$

η ασθενής μορφή γράφεται ως

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Η μορφή αυτή προκύπτει μέσω ολοκλήρωσης κατά μέρη και επιτρέπει τη μελέτη λύσεων που δεν διαθέτουν κλασικές δεύτερες παραγώγους.

Ιδιαίτερα σημαντικό παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση

$$-u'' = \delta,$$

όπου δ είναι η δέλτα του Dirac. Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί στο πλαίσιο κλασικών συναρτήσεων, αλλά αποκτά πλήρες νόημα μέσω της θεωρίας κατανομών και των ασθενών λύσεων.

Η έννοια των ασθενών λύσεων αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο στη σύγχρονη θεωρία των μερι-

κών διαφορικών εξισώσεων και συνδέεται άμεσα με τη θεωρία των συναρτήσεων Green. Μέσω αυτής καθίσταται δυνατή η αυστηρή διατύπωση συνοριακών προβλημάτων, η κατασκευή θεμελιωδών λύσεων και η ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων προσέγγισης λύσεων.

2 Ταυτότητες Green και τύποι αναπαράστασης

2.1 Ταυτότητες Green

Οι ταυτότητες Green αποτελούν θεμελιώδες εργαλείο στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων και παίζουν κεντρικό ρόλο στην κατασκευή συναρτήσεων Green, στη διατύπωση ασθενών λύσεων και στη μελέτη συνοριακών προβλημάτων. Οι ταυτότητες αυτές συνδέουν ολοκληρώματα στο εσωτερικό ενός χωρίου με ολοκληρώματα στο σύνορό του και προκύπτουν από το θεώρημα απόκλισης του Gauss.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο με επαρκώς ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, και έστω $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Συμβολίζουμε με n το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$.

2.1.1 Πρώτη ταυτότητα Green

Η πρώτη ταυτότητα Green δίνεται από τη σχέση

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS.$$

Η ταυτότητα αυτή προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης στο διανυσματικό πεδίο $u \nabla v$.

Πράγματι, ισχύει

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v.$$

Ολοκληρώνοντας στο Ω και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss, λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS,$$

οπότε προκύπτει αμέσως η πρώτη ταυτότητα Green.

Η ταυτότητα αυτή χρησιμοποιείται εκτενώς στη διατύπωση ασθενών μορφών διαφορικών εξισώσεων, καθώς επιτρέπει τη μεταφορά παραγώγων από τη μία συνάρτηση στην άλλη μέσω ολοκλήρωσης κατά μέρη.

2.1.2 Δεύτερη ταυτότητα Green

Εφαρμόζοντας την πρώτη ταυτότητα Green στα ζεύγη (u, v) και (v, u) και αφαιρώντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει η δεύτερη ταυτότητα Green:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Η δεύτερη ταυτότητα Green αποτελεί βασικό εργαλείο στη θεωρία συνοριακών προβλημάτων, καθώς συνδέει τις τιμές των συναρτήσεων στο εσωτερικό του χωρίου με τις τιμές και τις κανονικές παραγώγους τους στο σύνορο.

Επιπλέον, η ταυτότητα αυτή χρησιμοποιείται για:

- την απόδειξη μοναδικότητας λύσεων,
- την κατασκευή συναρτήσεων Green,
- τη διατύπωση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων λύσεων,
- και τη μελέτη ελλειπτικών συνοριακών προβλημάτων.

2.1.3 Τρίτη ταυτότητα Green

Ιδιαίτερα σημαντική είναι και η λεγόμενη τρίτη ταυτότητα Green, η οποία προκύπτει μέσω εφαρμογής της δεύτερης ταυτότητας Green σε κατάλληλη συνάρτηση Green ή θεμελιώδη λύση.

Έστω $G(x, \xi)$ συνάρτηση Green για τον τελεστή Laplace. Τότε, για κατάλληλα ομαλή συνάρτηση u , ισχύει η αναπαράσταση

$$u(x) = \int_{\partial \Omega} \left[G(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_{\xi}} - u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_{\xi}} \right] dS(\xi) + \int_{\Omega} G(x, \xi) \Delta u(\xi) \, d\xi.$$

Η σχέση αυτή επιτρέπει την αναπαράσταση της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης μέσω ολοκληρωμάτων όγκου και επιφανείας και αποτελεί τη βάση της θεωρίας των συναρτήσεων Green.

2.1.4 Σχόλια και εφαρμογές

Οι ταυτότητες Green αποτελούν βασικό συνδετικό κρίκο μεταξύ της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων και της ολοκληρωτικής ανάλυσης. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατή η μετατροπή διαφορικών προβλημάτων σε ολοκληρωτικά προβλήματα, γεγονός που επιτρέπει τόσο θεωρητικές όσο και αριθμητικές προσεγγίσεις.

Στα επόμενα κεφάλαια, οι ταυτότητες Green θα χρησιμοποιηθούν για:

- την κατασκευή συναρτήσεων Green,
- τη μελέτη συνοριακών προβλημάτων Dirichlet και Neumann,
- και την ανάπτυξη αριθμητικών τεχνικών προσέγγισης λύσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

2.2 Αναπαράσταση λύσεων μέσω συναρτήσεων Green

Οι συναρτήσεις Green αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την επίλυση γραμμικών συνοριακών προβλημάτων. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι η λύση μιας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ολοκληρωτικού τύπου που περιλαμβάνει τη συνάρτηση Green του αντίστοιχου διαφορικού τελεστή.

Έστω το συνοριακό πρόβλημα

$$Lu = f \quad \text{στο } \Omega,$$

όπου L είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής και f δοσμένη συνάρτηση ή κατανομή. Στόχος είναι η κατασκευή μιας συνάρτησης $G(x, \xi)$, η οποία να ικανοποιεί

$$L_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

όπου δ είναι η δέλτα του Dirac και ο δείκτης x υποδηλώνει ότι ο τελεστής δρα ως προς τη μεταβλητή x .

Η συνάρτηση $G(x, \xi)$ ονομάζεται συνάρτηση Green του τελεστή L και εξαρτάται τόσο από τον τελεστή όσο και από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

2.2.1 Ολοκληρωτική αναπαράσταση

Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταυτότητα Green και την ιδιότητα της δέλτα του Dirac, προκύπτει ότι η λύση του προβλήματος μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \text{συνοριακοί όροι}.$$

Η ακριβής μορφή των συνοριακών όρων εξαρτάται από το είδος των συνοριακών συνθηκών.

Η σχέση αυτή μετατρέπει το αρχικό διαφορικό πρόβλημα σε ολοκληρωτικό πρόβλημα. Η μετάβαση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς σε πολλές περιπτώσεις η ολοκληρωτική μορφή είναι ευκολότερο να αναλυθεί ή να προσεγγιστεί αριθμητικά.

2.2.2 Πρόβλημα Dirichlet

Έστω το πρόβλημα Dirichlet για τον τελεστή Laplace:

$$\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega,$$

με συνοριακή συνθήκη

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green ικανοποιεί

$$\Delta_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

και επιπλέον

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Στην περίπτωση αυτή, οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται και η λύση παίρνει τη μορφή

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η λύση προκύπτει ως υπέρθεση των αποκρίσεων του συστήματος σε σημειακές πηγές.

2.2.3 Πρόβλημα Neumann

Στο πρόβλημα Neumann επιβάλλεται συνθήκη στην κανονική παράγωγο:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η συνάρτηση Green προσαρμόζεται κατάλληλα ώστε να ικανοποιεί αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται επιπλέον όροι στην ολοκληρωτική αναπαράσταση και απαιτούνται συνθήκες συμβατότητας για την ύπαρξη λύσης.

Τα προβλήματα Neumann εμφανίζονται συχνά σε εφαρμογές όπου είναι γνωστή η ροή μέσω του συνόρου, όπως σε προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας και ηλεκτροστατικής.

2.2.4 Συμμετρία της συνάρτησης Green

Σε πολλές περιπτώσεις, ιδιαίτερα για αυτοσυζυγείς τελεστές, η συνάρτηση Green ικανοποιεί τη σχέση συμμετρίας

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τη δεύτερη ταυτότητα Green και παίζει σημαντικό ρόλο τόσο στη θεωρητική ανάλυση όσο και στις αριθμητικές εφαρμογές.

2.2.5 Φυσική ερμηνεία

Η συνάρτηση Green μπορεί να ερμηνευθεί ως η απόκριση του συστήματος σε σημειακή διέγερση. Η δέλτα του Dirac μοντελοποιεί μια ιδανική σημειακή πηγή και η συνάρτηση Green περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η επίδραση αυτής της πηγής διαδίδεται στο χωρίο.

Η ερμηνεία αυτή καθιστά τις συναρτήσεις Green ιδιαίτερα σημαντικές στη φυσική και στη μηχανική, καθώς εμφανίζονται φυσικά σε προβλήματα:

- ηλεκτροστατικής,
- θερμικής διάχυσης,
- ακουστικής,
- κυματικής διάδοσης,
- και κβαντομηχανικής.

2.2.6 Σχόλια

Η μέθοδος των συναρτήσεων Green παρέχει μια ενιαία προσέγγιση για τη μελέτη μεγάλου πλήθους γραμμικών συνοριακών προβλημάτων. Επιπλέον, η ολοκληρωτική μορφή των λύσεων αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη αριθμητικών τεχνικών, όπως η μέθοδος συνοριακών στοιχείων (*Boundary Element Method*).

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετηθεί αναλυτικά η κατασκευή συναρτήσεων Green για συγκεκριμένες κατηγορίες διαφορικών τελεστών και συνοριακών προβλημάτων.

2.3 Συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Neumann και Robin

Οι συνοριακές συνθήκες αποτελούν αναπόσπαστο μέρος ενός συνοριακού προβλήματος και καθορίζουν τη συμπεριφορά της λύσης στο σύνορο του χωρίου. Η μορφή των συνοριακών συνθηκών επηρεάζει άμεσα τόσο την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης όσο και τη μορφή της αντίστοιχης συνάρτησης Green.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο με επαρκώς ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, και έστω η διαφορική εξίσωση

$$Lu = f \quad \text{στο } \Omega,$$

όπου L είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής.

Οι συνηθέστερες κατηγορίες συνοριακών συνθηκών είναι οι συνθήκες Dirichlet, Neumann και Robin.

2.3.1 Συνθήκες Dirichlet

Στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet επιβάλλεται η τιμή της λύσης πάνω στο σύνορο:

$$u = g \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

όπου g δοσμένη συνάρτηση.

Οι συνθήκες αυτές εμφανίζονται συχνά σε φυσικά προβλήματα όπου η κατάσταση στο σύνορο είναι γνωστή εκ των προτέρων. Για παράδειγμα:

- σε προβλήματα θερμότητας καθορίζεται η θερμοκρασία στο σύνορο,
- στην ηλεκτροστατική καθορίζεται το ηλεκτρικό δυναμικό,
- σε προβλήματα μεμβρανών καθορίζεται η μετατόπιση στα άκρα.

Στην περίπτωση ομογενών συνθηκών Dirichlet έχουμε

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green μηδενίζεται επίσης στο σύνορο:

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Οι συνθήκες Dirichlet οδηγούν συνήθως σε μοναδική λύση, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις για τον τελεστή L .

2.3.2 Συνθήκες Neumann

Στις συνοριακές συνθήκες Neumann επιβάλλεται η κανονική παράγωγος της λύσης:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

όπου

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$$

και n είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο.

Οι συνθήκες αυτές περιγράφουν φυσικά προβλήματα όπου είναι γνωστή η ροή μέσω του συνόρου. Παραδείγματα αποτελούν:

- η θερμική ροή σε προβλήματα αγωγιμότητας,
- η ροή ηλεκτρικού πεδίου,
- και προβλήματα διάχυσης μάζας.

Στην ομογενή περίπτωση έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η συνθήκη αυτή εκφράζει ότι δεν υπάρχει ροή μέσω του συνόρου.

Για προβλήματα Neumann, η ύπαρξη λύσης δεν είναι πάντοτε εξασφαλισμένη. Για παράδειγμα, στην εξίσωση Poisson

$$-\Delta u = f,$$

απαιτείται η συνθήκη συμβατότητας

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

Επιπλέον, η λύση είναι γενικά μοναδική με πρόσθεση κάποιας σταθεράς, καθώς η πρόσθεση σταθεράς δεν επηρεάζει ούτε τον διαφορικό τελεστή ούτε την κανονική παράγωγο στο σύνορο.

2.3.3 Συνθήκες Robin

Οι συνοριακές συνθήκες Robin αποτελούν συνδυασμό των συνθηκών Dirichlet και Neumann και γράφονται στη γενική μορφή

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

όπου α και β είναι δοσμένες συναρτήσεις ή σταθερές.

Οι συνθήκες Robin εμφανίζονται σε προβλήματα όπου η κατάσταση στο σύνορο εξαρτάται τόσο από την τιμή της λύσης όσο και από τη ροή της. Τέτοιες συνθήκες συναντώνται:

- στη μεταφορά θερμότητας μέσω ροής ρευστού,
- σε προβλήματα ακουστικής σκέδασης,
- και σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik\lambda u = 0,$$

η οποία εμφανίζεται σε προβλήματα κυματικής διάδοσης και σκέδασης.

2.3.4 Σχέση με τις συναρτήσεις Green

Η μορφή των συνοριακών συνθηκών καθορίζει τη μορφή της αντίστοιχης συνάρτησης Green. Για κάθε είδος συνοριακού προβλήματος κατασκευάζεται διαφορετική συνάρτηση Green, ώστε να ικανοποιούνται οι αντίστοιχες συνθήκες στο σύνορο.

Για παράδειγμα:

- στις συνθήκες Dirichlet η συνάρτηση Green μηδενίζεται στο σύνορο,
- στις συνθήκες Neumann επιβάλλεται συνθήκη στην κανονική παράγωγο της Green,
- ενώ στις συνθήκες Robin επιβάλλεται γραμμικός συνδυασμός τιμής και κανονικής παραγώγου.

Η σωστή επιλογή συνοριακών συνθηκών είναι καθοριστική τόσο για τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος όσο και για τη φυσική ερμηνεία της λύσης.

2.3.5 Σχόλια

Οι συνοριακές συνθήκες αποτελούν βασικό στοιχείο της θεωρίας των μερικών διαφορικών εξισώσεων και παίζουν καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των συναρτήσεων Green. Η κατανόηση των διαφορών μεταξύ των συνθηκών Dirichlet, Neumann και Robin είναι απαραίτητη τόσο για τη θεωρητική ανάλυση όσο και για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων επίλυσης συνοριακών προβλημάτων.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξεταστεί η κατασκευή συναρτήσεων Green για συγκεκριμένες κατηγορίες διαφορικών τελεστών και συνοριακών προβλημάτων.

3 Κατασκευή συναρτήσεων Green

3.1 Συναρτήσεις Green για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Οι συναρτήσεις Green για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις αποτελούν μία από τις απλούστερες αλλά και σημαντικότερες εφαρμογές της γενικής θεωρίας. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατή η αναπαράσταση της λύσης ενός μη ομογενούς συνοριακού προβλήματος υπό μορφή ολοκληρωτικού τύπου.

Στην παρούσα ενότητα μελετάται η κατασκευή της συνάρτησης Green για γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με συνοριακές συνθήκες.

3.1.1 Γενική μορφή προβλήματος

Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$Lu(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

όπου ο διαφορικός τελεστής L έχει τη μορφή

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x),$$

με p, q συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$.

Συμπληρωματικά επιβάλλονται συνοριακές συνθήκες, για παράδειγμα συνθήκες Dirichlet:

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

Στόχος είναι η εύρεση της λύσης $u(x)$ μέσω της αντίστοιχης συνάρτησης Green.

3.1.2 Ορισμός της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης

$$L_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

μαζί με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί η άγνωστη συνάρτηση u .

Η μεταβλητή ξ παριστάνει το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η σημειακή διέγερση, ενώ ο τελεστής L δρα ως προς τη μεταβλητή x .

3.1.3 Κατασκευή της Green

Για $x \neq \xi$, η δέλτα του Dirac μηδενίζεται και επομένως ισχύει

$$L_x G(x, \xi) = 0.$$

Άρα η Green κατασκευάζεται από λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης

$$Lu = 0.$$

Έστω $u_1(x)$ και $u_2(x)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Η Green γράφεται τμηματικά στη μορφή

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A(\xi)u_1(x), & a < x < \xi, \\ B(\xi)u_2(x), & \xi < x < b. \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις $A(\xi)$ και $B(\xi)$ προσδιορίζονται από:

- τη συνέχεια της Green στο σημείο $x = \xi$,
- την ασυνέχεια της παραγώγου της,
- και τις συνοριακές συνθήκες.

3.1.4 Συνθήκη συνέχειας

Η συνάρτηση Green είναι συνεχής στο σημείο $x = \xi$, δηλαδή

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi).$$

Η ιδιότητα αυτή συνδέεται άμεσα με την παρουσία της δέλτα του Dirac στο δεξί μέλος της εξίσωσης που ορίζει τη συνάρτηση Green. Για $x \neq \xi$, η συνάρτηση Green ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση και επομένως είναι ομαλή στα δύο υποδιαστήματα $x < \xi$ και $x > \xi$.

Στο σημείο $x = \xi$ βρίσκεται η σημειακή πηγή που περιγράφεται από τη δέλτα του Dirac. Η παρουσία της πηγής αυτής δεν προκαλεί ασυνέχεια στην ίδια τη συνάρτηση Green, αλλά εκδηλώνεται μέσω μιας ασυνέχειας στην πρώτη παράγωγό της. Για τον λόγο αυτό απαιτείται η συνθήκη συνέχειας ενώ οι παράγωγοι της Green από αριστερά και από δεξιά δεν είναι γενικά ίσες.

Η διαφορά των δύο αυτών παραγώγων προσδιορίζεται με ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσω-

σης σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το σημείο $x = \xi$. Καθώς το μήκος του διαστήματος τείνει στο μηδέν, οι κανονικοί όροι της εξίσωσης μηδενίζονται, ενώ η ολοκλήρωση της δέλτα του Dirac δίνει μοναδιαία συνεισφορά. Έτσι προκύπτει η χαρακτηριστική συνθήκη άλματος της παραγώγου, η οποία εξετάζεται στην επόμενη υποενότητα.

Επομένως, η συνάρτηση Green παραμένει συνεχής στο σημείο της σημειακής διέγερσης, αλλά παρουσιάζει αλλαγή στην κλίση της. Η συμπεριφορά αυτή αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα των συναρτήσεων Green για διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

3.1.5 Ασυνέχεια της παραγώγου

Για να προσδιοριστεί η συμπεριφορά της παραγώγου της συνάρτησης Green στο σημείο $x = \xi$, θεωρούμε ένα μικρό διάστημα $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ γύρω από το σημείο της σημειακής πηγής, όπου $\varepsilon > 0$.

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση που ορίζει τη συνάρτηση Green,

$$L_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

στο διάστημα αυτό. Για τον τελεστή δεύτερης τάξης

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + q(x),$$

προκύπτει

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + p(x) \frac{\partial G}{\partial x} + q(x) G \right] dx = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x - \xi) dx.$$

Λόγω της χαρακτηριστικής ιδιότητας της δέλτα του Dirac, εφόσον το σημείο ξ περιέχεται στο διάστημα ολοκλήρωσης, ισχύει

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta(x - \xi) dx = 1.$$

Ο όρος που περιέχει τη δεύτερη παράγωγο της Green μπορεί να ολοκληρωθεί άμεσα:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx = \frac{\partial G}{\partial x}(\xi + \varepsilon, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi - \varepsilon, \xi).$$

Οι υπόλοιποι όροι,

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} p(x) \frac{\partial G}{\partial x} dx$$

και

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)G(x, \xi) dx,$$

τείνουν στο μηδέν καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, υπό τις κατάλληλες υποθέσεις κανονικότητας για τις συναρτήσεις p , q και G .

Επομένως, παίρνοντας το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, η μοναδιαία συνεισφορά της δέλτα του Dirac πρέπει να αντισταθμιστεί από το άλμα της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης Green. Έτσι προκύπτει

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) = 1$$

όπου ξ^- και ξ^+ συμβολίζουν την προσέγγιση του σημείου ξ από αριστερά και από δεξιά, αντίστοιχα.

Η σχέση αυτή εκφράζει ότι, ενώ η συνάρτηση Green παραμένει συνεχής στο $x = \xi$, η πρώτη παράγωγός της παρουσιάζει πεπερασμένο άλμα. Το άλμα αυτό αποτελεί άμεση συνέπεια της μοναδιαίας σημειακής πηγής που περιγράφεται από τη δέλτα του Dirac.

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) = 1.$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το άλμα της παραγώγου λόγω της παρουσίας της σημειακής πηγής.

3.1.6 Αναπαράσταση της λύσης

Αφού κατασκευαστεί η Green, η λύση του προβλήματος γράφεται ως

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η συνολική λύση προκύπτει ως υπέρθεση των αποκρίσεων του συστήματος σε στοιχειώδεις σημειακές πηγές.

3.1.7 Παράδειγμα

Εξετάζουμε το πρόβλημα

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$u'' = 0,$$

της οποίας δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = 1 - x.$$

Η Green προκύπτει στη μορφή

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & x < \xi, \\ \xi(1 - x), & x > \xi. \end{cases}$$

Άρα η λύση δίνεται από

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Το παράδειγμα αυτό αποτελεί μία από τις βασικότερες εφαρμογές της μεθόδου των συναρτήσεων Green.

3.1.8 Συμμετρία της Green

Για αυτοσυζυγή προβλήματα, η συνάρτηση Green ικανοποιεί συνήθως τη σχέση

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Η ιδιότητα αυτή συνδέεται με τη συμμετρία του διαφορικού τελεστή και παίζει σημαντικό ρόλο τόσο στη θεωρητική ανάλυση όσο και στις αριθμητικές εφαρμογές.

3.1.9 Σχόλια

Οι συναρτήσεις Green για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις παρέχουν το βασικό υπόβαθρο για τη γενίκευση της θεωρίας σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Οι έννοιες της σημειακής πηγής, της ολοκληρωτικής αναπαράστασης και της συμμετρίας της Green εμφανίζονται και σε πολυδιάστατα προβλήματα, τα οποία θα μελετηθούν στις επόμενες ενότητες.

3.2 Συναρτήσεις Green για ελλειπτικούς τελεστές

Στην παρούσα ενότητα μελετώνται συναρτήσεις Green που αντιστοιχούν σε ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές, με ιδιαίτερη έμφαση στον τελεστή Laplace. Οι ελλειπτικοί τελεστές εμφα-

νίζονται σε πλήθος φυσικών προβλημάτων, όπως η ηλεκτροστατική, η θεωρία δυναμικού, η θερμική αγωγιμότητα και η μηχανική συνεχών μέσων.

Η θεωρία των συναρτήσεων Green για ελλειπτικά προβλήματα αποτελεί βασικό εργαλείο για την αναπαράσταση λύσεων συνοριακών προβλημάτων και συνδέεται άμεσα με τις ταυτότητες Green που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.2.1 Ελλειπτικοί τελεστές

Ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης γράφεται γενικά στη μορφή

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

Ο τελεστής ονομάζεται ελλειπτικός αν ο πίνακας

$$A(x) = (a_{ij}(x))$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, δηλαδή αν υπάρχει σταθερά $\lambda > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει σημαντικές ιδιότητες κανονικότητας και μοναδικότητας για τις λύσεις των αντίστοιχων συνοριακών προβλημάτων.

3.2.2 Ο τελεστής Laplace

Ο σημαντικότερος ελλειπτικός τελεστής είναι ο τελεστής Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Οι εξισώσεις

$$\Delta u = 0$$

και

$$-\Delta u = f$$

ονομάζονται αντίστοιχα εξίσωση Laplace και εξίσωση Poisson.

Οι εξισώσεις αυτές εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα φυσικής:

- στην ηλεκτροστατική,
- στη θερμική αγωγιμότητα,
- στη θεωρία βαρύτητας,
- και στη ροή ιδανικών ρευστών.

3.2.3 Θεμελιώδης λύση του Laplace

Για την κατασκευή της συνάρτησης Green είναι απαραίτητη η έννοια της θεμελιώδους λύσης.

Η θεμελιώδης λύση $\Phi(x, \xi)$ του τελεστή Laplace ορίζεται ως λύση της εξίσωσης

$$-\Delta_x \Phi(x, \xi) = \delta(x - \xi).$$

Η μορφή της εξαρτάται από τη διάσταση του χώρου.

Για $n = 3$ ισχύει

$$\Phi(x, \xi) = \frac{1}{4\pi|x - \xi|}.$$

Για $n = 2$ προκύπτει

$$\Phi(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - \xi|.$$

Η θεμελιώδης λύση παρουσιάζει ιδιομορφία στο σημείο $x = \xi$, γεγονός που αντανακλά τη σημειακή φύση της πηγής.

3.2.4 Κατασκευή της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green για ένα συνοριακό πρόβλημα κατασκευάζεται συνήθως ως

$$G(x, \xi) = \Phi(x, \xi) + H(x, \xi),$$

όπου:

- $\Phi(x, \xi)$ είναι η θεμελιώδης λύση,
- και $H(x, \xi)$ είναι κατάλληλη αρμονική συνάρτηση που επιλέγεται ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα Dirichlet απαιτείται

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Η συνάρτηση $H(x, \xi)$ διορθώνει τη θεμελιώδη λύση ώστε η συνολική Green να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη.

3.2.5 Αναπαράσταση λύσεων

Έστω το πρόβλημα Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega,$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Αν $G(x, \xi)$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση Green, τότε η λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τη λύση ως υπέρθεση αποκρίσεων σε σημειακές πηγές.

3.2.6 Ιδιότητες της συνάρτησης Green

Οι συναρτήσεις Green για ελλειπτικούς τελεστές διαθέτουν σημαντικές ιδιότητες.

Συμμετρία

Για αυτοσυζυγείς τελεστές ισχύει συνήθως

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από τη δεύτερη ταυτότητα Green.

Ιδιομορφία

Η Green παρουσιάζει ιδιομορφία στο σημείο

$$x = \xi,$$

λόγω της παρουσίας της δέλτα του Dirac.

Κανονικότητα

Για $x \neq \xi$, η συνάρτηση Green είναι ομαλή ως προς τις μεταβλητές της και ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση.

3.2.7 Φυσική ερμηνεία

Η συνάρτηση Green μπορεί να θεωρηθεί ως η απόκριση του συστήματος σε μοναδιαία σημειακή πηγή.

Στην ηλεκτροστατική, για παράδειγμα, η Green αντιστοιχεί στο δυναμικό που δημιουργείται από μοναδιαίο σημειακό φορτίο.

Αντίστοιχα:

- στη θερμική αγωγιμότητα περιγράφει τη διάδοση θερμότητας από σημειακή πηγή,
- στην ακουστική περιγράφει τη διάδοση ηχητικού κύματος,
- ενώ στη θεωρία πεδίου συνδέεται με τη διάδοση αλληλεπιδράσεων.

3.2.8 Σχόλια

Οι συναρτήσεις Green για ελλειπτικούς τελεστές αποτελούν θεμελιώδες εργαλείο της μαθηματικής φυσικής και της θεωρίας μερικών διαφορικών εξισώσεων. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατή η μετατροπή σύνθετων συνοριακών προβλημάτων σε ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, γεγονός που διευκολύνει τόσο τη θεωρητική ανάλυση όσο και την αριθμητική προσέγγιση.

Στην επόμενη ενότητα θα εξεταστεί η σχέση των συναρτήσεων Green με τα προβλήματα Sturm--Liouville και η σύνδεσή τους με ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις.

3.3 Σχέση με προβλήματα Sturm--Liouville

Τα προβλήματα Sturm--Liouville αποτελούν μία από τις σημαντικότερες κατηγορίες συνοριακών προβλημάτων στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων και συνδέονται άμεσα με τις συναρτήσεις Green, τη θεωρία ιδιοτιμών και την ανάπτυξη συναρτήσεων σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων.

Η θεωρία Sturm--Liouville εμφανίζεται φυσικά σε πολλά προβλήματα μαθηματικής φυσικής, όπως:

- στη διάδοση θερμότητας,
- στις ταλαντώσεις χορδών και μεμβρανών,
- στην κβαντομηχανική,
- και στη θεωρία κυμάτων.

3.3.1 Γενική μορφή προβλήματος Sturm--Liouville

Ένα πρόβλημα Sturm--Liouville γράφεται γενικά στη μορφή

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda w(x)u, \quad a < x < b,$$

όπου:

- $p(x) > 0$,
- $w(x) > 0$,
- $q(x)$ συνεχής συνάρτηση,
- και λ παράμετρος ιδιοτιμής.

Συμπληρωματικά επιβάλλονται συνοριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος, συνήθως τύπου Dirichlet, Neumann ή Robin.

Ο τελεστής

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u$$

είναι αυτοσυζυγής υπό κατάλληλες υποθέσεις.

3.3.2 Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις

Οι τιμές λ για τις οποίες το πρόβλημα διαθέτει μη τετριμμένη λύση ονομάζονται ιδιοτιμές, ενώ οι αντίστοιχες λύσεις ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις.

Οι ιδιοσυναρτήσεις παρουσιάζουν σημαντικές ιδιότητες:

- είναι ορθογώνιες ως προς το βάρος $w(x)$,
- σχηματίζουν πλήρες σύστημα συναρτήσεων,
- και επιτρέπουν ανάπτυξη γενικών λύσεων σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων.

Η ιδιότητα ορθογωνιότητας γράφεται στη μορφή

$$\int_a^b u_m(x) u_n(x) w(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

3.3.3 Σύνδεση με τις συναρτήσεις Green

Οι συναρτήσεις Green για προβλήματα Sturm--Liouville κατασκευάζονται από λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και ικανοποιούν τις ίδιες συνοριακές συνθήκες.

Για τον τελεστή

$$Lu = f,$$

η αντίστοιχη Green ικανοποιεί

$$L_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi).$$

Η λύση του προβλήματος γράφεται στη μορφή

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Η μορφή αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς επιτρέπει τη σύνδεση της θεωρίας ιδιοτιμών με ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις λύσεων.

3.3.4 Ανάπτυξη της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των προβλημάτων Sturm--Liouville είναι ότι η συνάρτηση Green μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.

Αν $\{u_n\}$ είναι το σύνολο ιδιοσυναρτήσεων και $\{\lambda_n\}$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές, τότε η Green γράφεται τυπικά ως

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Η ανάπτυξη αυτή δείχνει ότι η Green ενσωματώνει πλήρως το φασματικό περιεχόμενο του τελεστή.

3.3.5 Παράδειγμα

Εξετάζουμε το πρόβλημα

$$-u'' = \lambda u, \quad 0 < x < \pi,$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

Η συνάρτηση Green μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της σειράς

$$G(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx) \sin(n\xi)}{n^2}.$$

Η ανάπτυξη αυτή συνδέει άμεσα τη θεωρία των συναρτήσεων Green με τις αναπτύξεις Fourier.

3.3.6 Φυσική σημασία

Τα προβλήματα Sturm--Liouville εμφανίζονται φυσικά σε προβλήματα διαχωρισμού μεταβλητών.

Για παράδειγμα:

- στις ταλαντώσεις χορδής οι ιδιοσυναρτήσεις περιγράφουν τρόπους ταλάντωσης,
- στη θερμική εξίσωση περιγράφουν τρόπους διάχυσης,
- και στην κβαντομηχανική αντιστοιχούν σε επιτρεπτές καταστάσεις του συστήματος.

Οι συναρτήσεις Green επιτρέπουν τη σύνθεση της συνολικής λύσης από τις επιμέρους ιδιοκαταστάσεις.

3.3.7 Σχόλια

Η θεωρία Sturm--Liouville παρέχει το θεωρητικό υπόβαθρο για τη φασματική ανάλυση διαφορικών τελεστών και συνδέεται βαθιά με τις συναρτήσεις Green. Η ανάπτυξη της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων αποτελεί βασικό εργαλείο τόσο στη θεωρητική ανάλυση όσο και στις αριθμητικές εφαρμογές.

Στα επόμενα κεφάλαια οι ιδέες αυτές θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη εφαρμογών σε φυσικά συστήματα και για την ανάπτυξη αριθμητικών τεχνικών επίλυσης προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων.

4 Εφαρμογές σε φυσικά συστήματα

4.1 Προβλήματα θερμικής διάχυσης

Η θερμική διάχυση αποτελεί μία από τις βασικότερες εφαρμογές των μερικών διαφορικών εξισώσεων και της θεωρίας των συναρτήσεων Green. Στα προβλήματα αυτά η άγνωστη συνάρτηση u παριστάνει συνήθως τη θερμοκρασία ενός σώματος ή ενός μέσου, ενώ η εξίσωση περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η θερμότητα κατανέμεται ή διαδίδεται στον χώρο.

4.1.1 Μόνιμη θερμική κατάσταση

Στην περίπτωση μόνιμης θερμικής κατάστασης, η θερμοκρασία δεν εξαρτάται από τον χρόνο. Τότε το πρόβλημα οδηγεί συχνά στην εξίσωση Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega,$$

όπου:

- $u(x)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο x ,
- $f(x)$ εκφράζει την εσωτερική παραγωγή θερμότητας,
- και $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι το χωρίο στο οποίο μελετάται το φαινόμενο.

Αν δεν υπάρχουν εσωτερικές πηγές θερμότητας, δηλαδή αν $f = 0$, τότε προκύπτει η εξίσωση Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{στο } \Omega.$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει καταστάσεις θερμικής ισορροπίας.

4.1.2 Συνοριακές συνθήκες

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος καθορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες στο $\partial\Omega$.

Σε συνθήκες Dirichlet καθορίζεται η θερμοκρασία στο σύνορο:

$$u = g \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Αυτό αντιστοιχεί, για παράδειγμα, σε σώμα του οποίου η επιφάνεια διατηρείται σε προκαθορισμένη θερμοκρασία.

Σε συνθήκες Neumann καθορίζεται η θερμική ροή μέσω του συνόρου:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η ομογενής συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega$$

εκφράζει θερμικά μονωμένο σύνορο, δηλαδή μηδενική ροή θερμότητας προς το περιβάλλον.

Σε συνθήκες Robin έχουμε συνδυασμό θερμοκρασίας και θερμικής ροής:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Οι συνθήκες Robin χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον.

4.1.3 Αναπαράσταση μέσω συνάρτησης Green

Έστω το πρόβλημα

$$-\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega,$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Αν $G(x, \xi)$ είναι η αντίστοιχη συνάρτηση Green, δηλαδή αν ικανοποιεί

$$-\Delta_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

και

$$G(x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

τότε η λύση γράφεται ως

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η θερμοκρασία στο σημείο x προκύπτει ως άθροισμα των επιδράσεων όλων των σημειακών πηγών θερμότητας στο χωρίο.

4.1.4 Φυσική ερμηνεία

Η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ εκφράζει τη θερμοκρασιακή απόκριση στο σημείο x που προκαλείται από μοναδιαία σημειακή πηγή θερμότητας στο σημείο ξ .

Με άλλα λόγια, αν σε ένα σημείο ξ του σώματος παραχθεί θερμότητα, τότε η συνάρτηση Green περιγράφει πώς αυτή η θερμική επίδραση διαδίδεται στο υπόλοιπο χωρίο.

Έτσι, για γενική κατανομή πηγών f , η λύση προκύπτει από την υπέρθεση όλων των επιμέρους σημειακών αποκρίσεων.

4.1.5 Χρονικά εξαρτώμενη θερμική διάχυση

Στην περίπτωση όπου η θερμοκρασία εξαρτάται από τον χρόνο, το φαινόμενο περιγράφεται από την εξίσωση θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

όπου $\kappa > 0$ είναι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης.

Για το πρόβλημα αυτό η συνάρτηση Green εξαρτάται τόσο από τον χώρο όσο και από τον χρόνο και γράφεται συνήθως ως $G(x, t; \xi, \tau)$.

Η συνάρτηση αυτή περιγράφει την επίδραση μιας σημειακής πηγής που δρα στο σημείο ξ και στον χρόνο τ πάνω στη θερμοκρασία στο σημείο x και στον χρόνο t .

Η αντίστοιχη αναπαράσταση έχει τη μορφή

$$u(x, t) = \int_{\Omega} G(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

όπου u_0 είναι η αρχική θερμοκρασιακή κατανομή.

4.1.6 Σχόλια

Τα προβλήματα θερμικής διάχυσης δείχνουν με σαφή τρόπο τη χρησιμότητα των συναρτήσεων Green στη μαθηματική φυσική. Η μέθοδος επιτρέπει την αναπαράσταση της θερμοκρασίας ως ολοκληρωτική υπέρθεση σημειακών αποκρίσεων και παρέχει ένα ισχυρό θεωρητικό εργαλείο για την ανάλυση τόσο μόνιμων όσο και χρονικά εξαρτωμένων προβλημάτων.

Επιπλέον, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν μέσω συναρτήσεων Green αποτελούν φυσική βάση για αριθμητικές μεθόδους, καθώς η λύση μπορεί να προσεγγιστεί μέσω διακριτοποίησης των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων.

4.2 Ηλεκτρικά κυκλώματα

Οι συναρτήσεις Green εμφανίζονται φυσικά και στη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ιδιαίτερα στη μελέτη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατή η αναπαράσταση της απόκρισης ενός κυκλώματος σε εξωτερική διέγερση και η ανάλυση της χρονικής εξέλιξης των ηλεκτρικών μεγεθών.

Στα γραμμικά κυκλώματα, οι νόμοι του Kirchhoff οδηγούν συχνά σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green.

4.2.1 Κυκλώματα πρώτης τάξης

Εξετάζουμε αρχικά ένα απλό κύκλωμα RC, το οποίο αποτελείται από αντίσταση R και πυκνωτή C .

Η τάση $u(t)$ στον πυκνωτή ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$RC \frac{du}{dt} + u = f(t),$$

όπου:

- $u(t)$ είναι η τάση στον πυκνωτή,
- $f(t)$ είναι εξωτερική διέγερση,
- R η αντίσταση,
- και C η χωρητικότητα.

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης

$$RC \frac{\partial G}{\partial t} + G = \delta(t - \tau),$$

μαζί με κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Η Green εκφράζει την απόκριση του κυκλώματος σε στιγμιαία μοναδιαία διέγερση τη χρονική στιγμή τ .

4.2.2 Αναπαράσταση της λύσης

Η λύση του προβλήματος μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$u(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η συνολική απόκριση του κυκλώματος προκύπτει ως υπέρθεση απο-

κρίσεων σε στοιχειώδεις χρονικές διεγέρσεις.

Για το κύκλωμα RC προκύπτει

$$G(t, \tau) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} H(t - \tau),$$

όπου H είναι η συνάρτηση Heaviside.

Η εκθετική μορφή της Green περιγράφει τη χαρακτηριστική εκφόρτιση του πυκνωτή.

4.2.3 Κυκλώματα δεύτερης τάξης

Σε κυκλώματα RLC εμφανίζονται διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Για παράδειγμα, σε ένα σειριακό κύκλωμα RLC η ένταση ρεύματος ή η τάση ικανοποιεί εξίσωση της μορφής

$$L \frac{d^2 u}{dt^2} + R \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} u = f(t),$$

όπου:

- L είναι η αυτεπαγωγή,
- R η αντίσταση,
- και C η χωρητικότητα.

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green ικανοποιεί

$$L \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + R \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{C} G = \delta(t - \tau).$$

Η μορφή της Green εξαρτάται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0.$$

Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων, το κύκλωμα μπορεί να εμφανίζει:

- υπέρβαση απόκρισης (overshoot response),
- κρίσιμη απόσβεση,
- ή ταλαντωτική συμπεριφορά.

4.2.4 Φυσική ερμηνεία

Η συνάρτηση Green στα ηλεκτρικά κυκλώματα μπορεί να θεωρηθεί ως η χρονική απόκριση του συστήματος σε στιγμιαία διέγερση.

Η δέλτα του Dirac μοντελοποιεί έναν ιδανικό στιγμιαίο παλμό τάσης ή ρεύματος, ενώ η Green περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το κύκλωμα αποκρίνεται σε αυτή τη διέγερση.

Στην πράξη:

- η μορφή της Green περιγράφει τη μεταβατική συμπεριφορά του κυκλώματος,
- ενώ η ολοκληρωτική αναπαράσταση επιτρέπει τον υπολογισμό της απόκρισης για οποιοδήποτε σήμα εισόδου.

4.2.5 Σχέση με τη θεωρία συστημάτων

Στη θεωρία γραμμικών συστημάτων, η συνάρτηση Green ταυτίζεται ουσιαστικά με την κρουστική απόκριση (*impulse response*) του συστήματος.

Η έξοδος του κυκλώματος μπορεί να γραφεί ως συνέλιξη:

$$u(t) = \int_0^t G(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Η μορφή αυτή χρησιμοποιείται εκτενώς:

- στην επεξεργασία σημάτων,
- στη θεωρία ελέγχου,
- και στην ανάλυση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

4.2.6 Σχόλια

Τα ηλεκτρικά κυκλώματα αποτελούν χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής των συναρτήσεων Green σε δυναμικά συστήματα. Η μέθοδος παρέχει φυσική ερμηνεία της χρονικής απόκρισης και επιτρέπει την αναλυτική αντιμετώπιση γραμμικών κυκλωμάτων μέσω ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων.

Παράλληλα, οι ίδιες μαθηματικές ιδέες εμφανίζονται και σε άλλα προβλήματα φυσικής, όπως στην ακουστική, στη μηχανική ταλαντώσεων και στη θεωρία κυμάτων.

4.3 Μηχανικά συστήματα

Οι συναρτήσεις Green εμφανίζονται εκτενώς στη μελέτη μηχανικών συστημάτων και ιδιαίτερα σε προβλήματα ταλαντώσεων, ελαστικότητας και κυματικής διάδοσης. Μέσω αυτών καθίστα-

ται δυνατή η περιγραφή της απόκρισης ενός μηχανικού συστήματος σε εξωτερικές δυνάμεις και η αναπαράσταση της κίνησης μέσω ολοκληρωτικών τύπων.

Στα περισσότερα γραμμικά μηχανικά μοντέλα, οι νόμοι της μηχανικής οδηγούν σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green.

4.3.1 Μοντέλο αρμονικού ταλαντωτή

Ένα από τα βασικότερα παραδείγματα είναι ο αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση. Η εξίσωση κίνησης γράφεται στη μορφή

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = f(t),$$

όπου:

- $u(t)$ είναι η μετατόπιση,
- m η μάζα,
- c ο συντελεστής απόσβεσης,
- k η σταθερά επαναφοράς,
- και $f(t)$ η εξωτερική δύναμη.

Η εξίσωση αυτή περιγράφει πλήθος φυσικών συστημάτων, όπως:

- ελατήρια,
- μηχανικές ταλαντώσεις,
- αναρτήσεις οχημάτων,
- και δομικές ταλαντώσεις κατασκευών.

4.3.2 Συνάρτηση Green του συστήματος

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης

$$m \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + c \frac{\partial G}{\partial t} + kG = \delta(t - \tau),$$

μαζί με κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Η Green εκφράζει τη μετατόπιση του συστήματος τη χρονική στιγμή t , όταν ασκείται μοναδιαία στιγμιαία δύναμη τη χρονική στιγμή τ .

4.3.3 Αναπαράσταση της λύσης

Η λύση του προβλήματος μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$u(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η συνολική κίνηση του συστήματος προκύπτει ως υπέρθεση αποκρίσεων σε στοιχειώδεις διεγέρσεις.

Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν η εξωτερική δύναμη έχει πολύπλοκη χρονική μορφή.

4.3.4 Περιπτώσεις απόσβεσης

Η μορφή της συνάρτησης Green εξαρτάται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$mr^2 + cr + k = 0.$$

Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων εμφανίζονται τρεις βασικές περιπτώσεις:

Ασθενής ή Υποκρίσιμη Απόσβεση (Underdamping)

Όταν

$$c^2 < 4mk,$$

το σύστημα εμφανίζει ταλαντωτική συμπεριφορά με εκθετική απόσβεση.

Η Green περιέχει ημιτονοειδείς όρους και περιγράφει φθίνουσες ταλαντώσεις.

Κρίσιμη απόσβεση (Critical Damping)

Όταν

$$c^2 = 4mk,$$

το σύστημα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ταλαντώσεις και με τον ταχύτερο δυνατό τρόπο.

Ισχυρή Απόσβεση ή Υπεραπόσβεση (Overdamping)

Όταν

$$c^2 > 4mk,$$

η απόκριση είναι αργή και δεν εμφανίζονται ταλαντώσεις.

4.3.5 Εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής

Οι συναρτήσεις Green εμφανίζονται επίσης σε προβλήματα συνεχών μέσων.

Για παράδειγμα, οι εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδής περιγράφονται από την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(x, t),$$

όπου:

- $u(x, t)$ είναι η μετατόπιση της χορδής,
- c η ταχύτητα διάδοσης κύματος,
- και $f(x, t)$ εξωτερική διέγερση.

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green περιγράφει τη διάδοση διαταραχών στο μέσο.

4.3.6 Φυσική ερμηνεία

Στα μηχανικά συστήματα, η συνάρτηση Green μπορεί να θεωρηθεί ως η απόκριση του συστήματος σε στιγμιαία μοναδιαία δύναμη.

Η μορφή της Green αποκαλύπτει:

- τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος,
- την παρουσία ή μη ταλαντώσεων,
- και τον ρυθμό απόσβεσης της κίνησης.

Στην περίπτωση συνεχών μέσων, η Green περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι διαταραχές διαδίδονται στον χώρο και στον χρόνο.

4.3.7 Σχέση με ιδιοτιμές και ιδιομορφές

Πολλά μηχανικά προβλήματα οδηγούν φυσικά σε προβλήματα Sturm--Liouville.

Οι ιδιοσυναρτήσεις αντιστοιχούν σε φυσικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος, ενώ οι ιδιοτιμές σχετίζονται με τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες.

Η συνάρτηση Green μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων:

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Η αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιείται εκτενώς στη μηχανική ταλαντώσεων και στη θεωρία ελαστικότητας.

4.3.8 Σχόλια

Τα μηχανικά συστήματα αποτελούν χαρακτηριστική εφαρμογή της θεωρίας των συναρτήσεων Green. Μέσω αυτών καθίσταται δυνατή η αναλυτική περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς σύνθετων συστημάτων και η μελέτη της διάδοσης μηχανικών διαταραχών.

Επιπλέον, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν μέσω συναρτήσεων Green παρέχουν φυσική βάση για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων προσομοίωσης και υπολογισμού μηχανικών αποκρίσεων.

4.4 Στοιχεία ακουστικής σκέδασης

Η θεωρία ακουστικής σκέδασης αποτελεί μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές των συναρτήσεων Green και των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στα προβλήματα αυτά μελετάται η αλληλεπίδραση ακουστικών κυμάτων με εμπόδια ή ανομοιογένειες του μέσου διάδοσης.

Οι συναρτήσεις Green χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση του σκεδαζόμενου πεδίου, τη διατύπωση ολοκληρωτικών εξισώσεων και την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων επίλυσης προβλημάτων σκέδασης.

4.4.1 Η εξίσωση Helmholtz

Η διάδοση χρονικά αρμονικών ακουστικών κυμάτων περιγράφεται από την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = f,$$

όπου:

- $u(x)$ είναι το ακουστικό πεδίο,
- $k > 0$ ο κυματικός αριθμός,
- και $f(x)$ η πηγή του κύματος.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την κυματική εξίσωση μέσω χρονικής εξάρτησης της μορφής $e^{-i\omega t}$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα.

4.4.2 Σκεδαζόμενο πεδίο

Σε προβλήματα σκέδασης το συνολικό πεδίο γράφεται συνήθως ως

$$u = u^{inc} + u^{sc},$$

όπου:

- u^{inc} είναι το προσπίπτον κύμα,
- και u^{sc} το σκεδαζόμενο πεδίο.

Το σκεδαζόμενο πεδίο δημιουργείται λόγω της παρουσίας του σκεδαστή και ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο εξωτερικό χωρίο.

4.4.3 Συνθήκες στο σύνορο

Η μορφή της συνοριακής συνθήκης εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

Σκληρός σκεδαστής

Για ακουστικά σκληρό σκεδαστή επιβάλλεται συνθήκη Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η συνθήκη αυτή εκφράζει ότι δεν υπάρχει κανονική ταχύτητα στο σύνορο.

Μαλακός σκεδαστής

Για ακουστικά μαλακό σκεδαστή επιβάλλεται συνθήκη Dirichlet:

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Η συνθήκη αυτή εκφράζει ότι η ακουστική πίεση μηδενίζεται στο σύνορο του σκεδαστή.

Ανθεκτικός σκεδαστής

Σε πιο γενικά προβλήματα χρησιμοποιούνται συνθήκες Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik\lambda u = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega,$$

όπου λ είναι παράμετρος επιφανειακής εμπίεσης.

Οι συνθήκες αυτές χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση μερικώς απορροφητικών επιφανειών.

4.4.4 Συνάρτηση Green της εξίσωσης Helmholtz

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz στον τρισδιάστατο χώρο είναι

$$G(x, \xi) = \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}.$$

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί

$$\Delta_x G + k^2 G = -\delta(x - \xi).$$

Η Green περιγράφει τη διάδοση σφαιρικού κύματος από σημειακή πηγή.

4.4.5 Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

Για να εξασφαλιστεί η φυσική συμπεριφορά του σκεδαζόμενου πεδίου σε άπειρη απόσταση, επιβάλλεται η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - iku^{sc} \right) = 0,$$

όπου

$$r = |x|.$$

Η συνθήκη αυτή εκφράζει ότι το σκεδαζόμενο κύμα διαδίδεται αποσβεννύμενο προς τα έξω και δεν εισέρχεται από το άπειρο.

4.4.6 Ολοκληρωτική αναπαράσταση

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green και τη δεύτερη ταυτότητα Green, το σκεδαζόμενο πεδίο μπορεί να γραφεί ως

$$u^{sc}(x) = \int_{\partial\Omega} \left[G(x, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} \right] dS(\xi).$$

Η σχέση αυτή μετατρέπει το πρόβλημα σκέδασης σε ολοκληρωτική εξίσωση στο σύνορο του σκεδαστή.

4.4.7 Φυσική ερμηνεία

Η ακουστική σκέδαση περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ένα προσπίπτον κύμα αλληλεπιδρά με ένα αντικείμενο και μεταβάλλεται λόγω ανάκλασης, απορρόφησης ή διάχυσης.

Η συνάρτηση Green περιγράφει τη διάδοση της ακουστικής επίδρασης από σημειακή πηγή και

επιτρέπει την κατασκευή του συνολικού πεδίου μέσω υπέρθεσης σημειακών αποκρίσεων.

4.4.8 Εφαρμογές

Η θεωρία ακουστικής σκέδασης έχει πολλές εφαρμογές:

- στον σχεδιασμό ηχομονωτικών υλικών,
- στην υποβρύχια ακουστική,
- στα συστήματα sonar,
- στην ιατρική απεικόνιση υπερήχων,
- και στη μη καταστροφική ανίχνευση υλικών.

Οι συναρτήσεις Green χρησιμοποιούνται επίσης σε αριθμητικές τεχνικές, όπως:

- η μέθοδος συνοριακών στοιχείων,
- και οι ολοκληρωτικές μέθοδοι σκέδασης.

4.4.9 Σχόλια

Η ακουστική σκέδαση αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής των συναρτήσεων Green σε προβλήματα κυματικής διάδοσης. Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν μέσω των συναρτήσεων Green επιτρέπουν τόσο τη θεωρητική ανάλυση όσο και την ανάπτυξη αποδοτικών αριθμητικών μεθόδων.

Η θεωρία αυτή συνδέεται άμεσα με τα προβλήματα σκέδασης που μελετώνται στη μαθηματική φυσική και αποτελεί ενεργό πεδίο σύγχρονης έρευνας.

5 Αριθμητικές υλοποιήσεις σε φυσικά συστήματα

5.1 Σκοπός και μεθοδολογία αριθμητικής προσέγγισης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές αριθμητικές υλοποιήσεις προβλημάτων που σχετίζονται με συναρτήσεις Green και γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Στόχος είναι η σύνδεση της θεωρητικής ανάλυσης που προηγήθηκε με πρακτικές μεθόδους υπολογισμού και οπτικοποίησης λύσεων φυσικών προβλημάτων.

Οι συναρτήσεις Green παρέχουν αναλυτικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων, οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορούν να υπολογιστούν κλειστά ή απαιτούν αριθμητική προσέγγιση. Για τον λόγο αυτό, οι ολοκληρωτικές μορφές των λύσεων διακριτοποιούνται και υπολογίζονται προσεγγιστικά με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το λογισμικό GNU Octave για:

- την αριθμητική προσέγγιση ολοκληρωμάτων,
- την υλοποίηση συναρτήσεων Green,
- τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων,
- και την παραγωγή γραφικών παραστάσεων των αποτελεσμάτων.

Η χρήση του Octave επιλέχθηκε λόγω της δυνατότητάς του να υποστηρίζει μαθηματικούς υπολογισμούς, επεξεργασία πινάκων και οπτικοποίηση δεδομένων με τρόπο παρόμοιο με το MATLAB.

5.1.1 Διακριτοποίηση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων

Η βασική ιδέα της αριθμητικής προσέγγισης είναι η αντικατάσταση ολοκληρωμάτων από πεπερασμένα αθροίσματα.

Για παράδειγμα, αν η λύση ενός προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

τότε το διάστημα $[a, b]$ χωρίζεται σε N υποδιαστήματα και το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται από άθροισμα της μορφής

$$u(x_i) \approx \sum_{j=1}^N G(x_i, \xi_j) f(\xi_j) \Delta\xi.$$

Η διαδικασία αυτή μετατρέπει το συνεχές πρόβλημα σε πεπερασμένο αριθμητικό πρόβλημα, το οποίο μπορεί να επιλυθεί υπολογιστικά.

5.1.2 Αριθμητική ολοκλήρωση

Για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιούνται βασικές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης, όπως:

- η μέθοδος ορθογωνίων,
- η μέθοδος τραπεζίου,
- και ο κανόνας Simpson.

Οι μέθοδοι αυτές επιτρέπουν τον υπολογισμό ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων με ικανοποιητική ακρίβεια, ιδιαίτερα όταν η συνάρτηση Green και η πηγή είναι επαρκώς ομαλές.

5.1.3 Γραφική αναπαράσταση

Ένα σημαντικό μέρος της αριθμητικής διαδικασίας είναι η γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων. Μέσω των γραφημάτων καθίσταται δυνατή η κατανόηση:

- της συμπεριφοράς των λύσεων,
- της επίδρασης των συνοριακών συνθηκών,
- της διάδοσης θερμότητας ή κυμάτων,
- και της δυναμικής απόκρισης φυσικών συστημάτων.

Στην εργασία θα παρουσιαστούν:

- δισδιάστατες γραφικές παραστάσεις,
- τρισδιάστατες επιφάνειες συναρτήσεων Green,
- και συγκριτικά γραφήματα διαφορετικών φυσικών παραμέτρων.

5.1.4 Εφαρμογές

Οι αριθμητικές υλοποιήσεις που θα παρουσιαστούν αφορούν:

- προβλήματα θερμικής διάχυσης,
- ηλεκτρικά κυκλώματα,
- μηχανικά ταλαντωτικά συστήματα,
- και βασικά προβλήματα ακουστικής διάδοσης.

Κάθε εφαρμογή θα συνοδεύεται από:

- τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος,
- την αντίστοιχη συνάρτηση Green,
- την αριθμητική προσέγγιση,
- και γραφικές παραστάσεις που παράχθηκαν στο GNU Octave.

5.1.5 Σχόλια

Η αριθμητική προσέγγιση των συναρτήσεων Green αποτελεί σημαντικό εργαλείο στη σύγχρονη εφαρμοσμένη μαθηματική ανάλυση. Παρότι πολλές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις μπορούν να γραφούν αναλυτικά, η πρακτική επίλυση πραγματικών προβλημάτων απαιτεί συνήθως αριθμητικές μεθόδους και υπολογιστικά εργαλεία.

Η συνδυασμένη χρήση θεωρητικής ανάλυσης και αριθμητικής υλοποίησης επιτρέπει την πληρέστερη κατανόηση της συμπεριφοράς των φυσικών συστημάτων και αναδεικνύει τη χρησιμότητα των συναρτήσεων Green σε εφαρμογές της επιστήμης και της μηχανικής.

5.2 Εφαρμογή 1: Μονοδιάστατο πρόβλημα Poisson

Στην ενότητα αυτή μελετάται αριθμητικά το μονοδιάστατο πρόβλημα Poisson με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Το παράδειγμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, καθώς επιτρέπει την άμεση εφαρμογή της συνάρτησης Green και την οπτικοποίηση της λύσης μέσω του GNU Octave.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green είναι

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & 0 \leq x < \xi \leq 1, \\ \xi(1 - x), & 0 \leq \xi < x \leq 1. \end{cases}$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος δίνεται από την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Για την αριθμητική υλοποίηση διακριτοποιούμε το διάστημα $[0, 1]$ χρησιμοποιώντας τέσσερα διαφορετικά μεγέθη βήματος. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα αρχικό βήμα h και στη συνέχεια τα διαδοχικά μικρότερα βήματα

$$h, \quad \frac{h}{2}, \quad \frac{h}{4}, \quad \frac{h}{8}.$$

Στην παρούσα εφαρμογή επιλέγεται αρχικά $h = 0.1$, οπότε εξετάζονται οι τέσσερις περιπτώσεις

$$h = 0.1, \quad h = 0.05, \quad h = 0.025, \quad h = 0.0125.$$

Για κάθε τιμή του βήματος κατασκευάζεται το αντίστοιχο διακριτό πλέγμα και υπολογίζεται η αριθμητική λύση μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης με τη συνάρτηση Green

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται αριθμητικά με τον κανόνα τραπεζίου. Με τον τρόπο αυτό, για κάθε σημείο x_i του πλέγματος υπολογίζεται προσεγγιστικά η τιμή της λύσης από τις τιμές της συνάρτησης Green και της πηγής στα διακριτά σημεία ξ_j .

Ως ενδεικτική πηγή επιλέγουμε

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

Για τη συγκεκριμένη επιλογή, η ακριβής αναλυτική λύση του προβλήματος είναι

$$u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}.$$

Η ύπαρξη γνωστής αναλυτικής λύσης επιτρέπει την άμεση σύγκριση με τις αριθμητικές λύσεις που προκύπτουν για τα τέσσερα διαφορετικά βήματα. Για κάθε περίπτωση υπολογίζεται επίσης το μέγιστο απόλυτο σφάλμα

$$E_{\max} = \max_i |u_{\text{num}}(x_i) - u_{\text{exact}}(x_i)|.$$

Με τη διαδοχική μείωση του βήματος εξετάζεται η σύγκλιση της αριθμητικής προσέγγισης προς την ακριβή λύση και η επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

5.2.1 Κώδικας Octave

```
clear all;
```

```
close all;
clc;

% Αρχικό βήμα
h0 = 0.1;

% Τέσσερα διαφορετικά βήματα
h_values = [h0, h0/2, h0/4, h0/8];

% ΓΡΑΦΗΜΑ 1: Συνάρτηση πηγής

x_plot = linspace(0,1,200);
f_plot = sin(pi*x_plot);

figure(1);
plot(x_plot,f_plot,'LineWidth',2);
grid on;

xlabel('x');
ylabel('f(x)');
title('Πηγή f(x)=sin(\pi x)');
print('source_function.png','-dpng');

% ΓΡΑΦΗΜΑ 2: Συνάρτηση Green

xG = linspace(0,1,100);
xiG = xG;
NG = length(xG);
G_plot = zeros(NG,NG);

for i = 1:NG
    for j = 1:NG
        if xG(i) < xiG(j)
            G_plot(i,j) = xG(i)*(1-xiG(j));
        else
            G_plot(i,j) = xiG(j)*(1-xG(i));
        end
    end
end
end
```

```
figure(2);

mesh(xG,xiG,G_plot');

xlabel('x');
ylabel('\xi');
zlabel('G(x,\xi)');

title('Συνάρτηση Green για το μονοδιάστατο πρόβλημα Poisson');
print('green_surface.png','-dpng');

% ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΑ 4 ΒΗΜΑΤΑ

for k = 1:length(h_values)
    h = h_values(k);
    x = 0:h:1;
    xi = x;
    N = length(x);
    f = sin(pi*xi);
    G = zeros(N,N);

    % Κατασκευή της συνάρτησης Green
    for i = 1:N
        for j = 1:N
            if x(i) < xi(j)
                G(i,j) = x(i)*(1-xi(j));
            else
                G(i,j) = xi(j)*(1-x(i));
            end
        end
    end

    % Αριθμητική ολοκλήρωση
    u_num = zeros(1,N);
    for i = 1:N
        integrand = G(i,:) .* f;
        u_num(i) = trapz(xi,integrand);
    end
end
```

```
% Αναλυτική λύση
u_exact = sin(pi*x)/(pi^2);

% Μέγιστο απόλυτο σφάλμα
error_max = max(abs(u_num-u_exact));
fprintf('-----\n');
fprintf('Βήμα h = %.5f\n',h);
fprintf('Αριθμός σημείων = %d\n',N);
fprintf('Μέγιστο απόλυτο σφάλμα = %.10e\n',error_max);

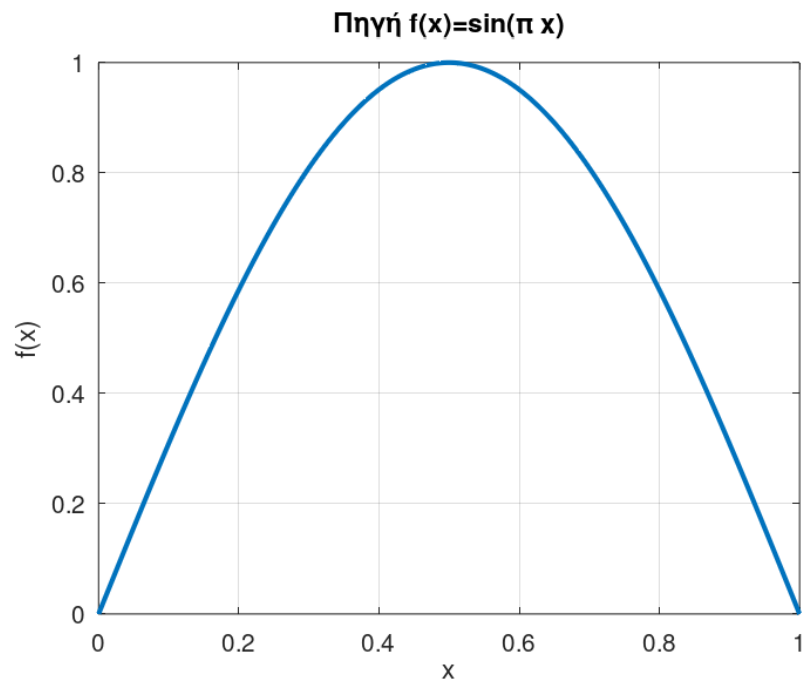
% Γραφική παράσταση
figure(k+2);
plot(x,u_num,'-','LineWidth',1.5);
hold on;
plot(x,u_exact,'--','LineWidth',2);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('u(x)');
title(sprintf('Λύση προβλήματος Poisson για h = %.4f',h));
legend('Αριθμητική λύση μέσω Green', ...
       'Αναλυτική λύση', ...
       'Location','south');
hold off;

% Αποθήκευση γραφημάτων
if k == 1
    print('poisson_h.png','-dpng');
elseif k == 2
    print('poisson_h2.png','-dpng');
elseif k == 3
    print('poisson_h4.png','-dpng');
elseif k == 4
    print('poisson_h8.png','-dpng');
end
end
```

5.2.2 Γραφικές Αναπαραστάσεις

Στο Σχήμα 5.1 παρουσιάζεται η συνάρτηση πηγής

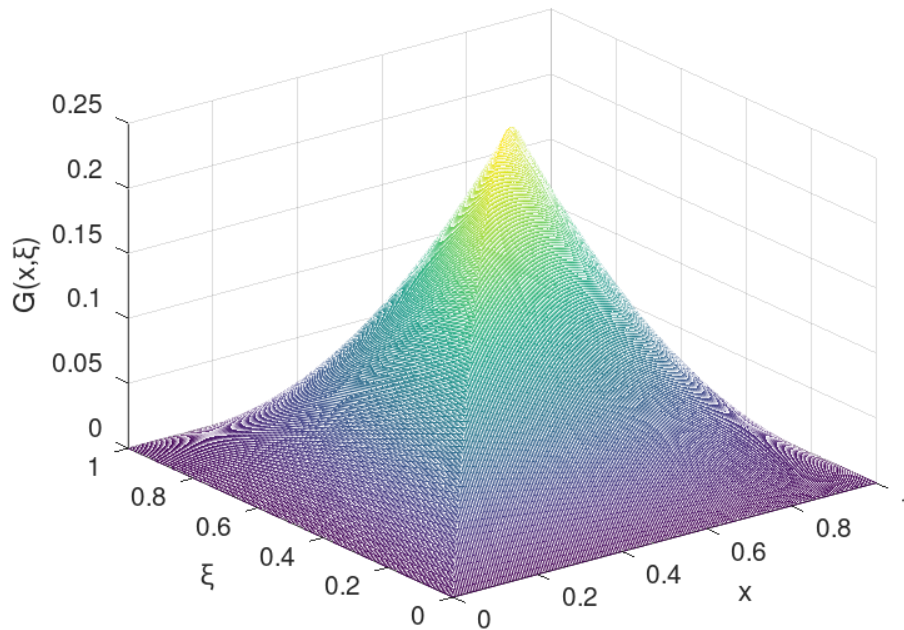
$$f(x) = \sin(\pi x).$$



Σχήμα 5.1: Η συνάρτηση πηγής $f(x) = \sin(\pi x)$.

Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η επιφάνεια της συνάρτησης Green $G(x, \xi)$ για το μονοδιάστατο πρόβλημα Poisson.

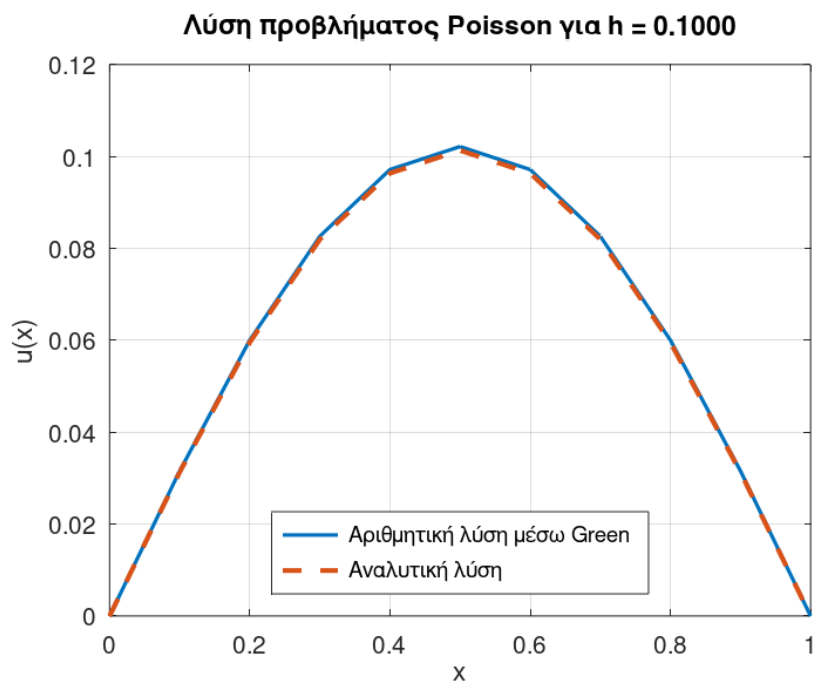
Συνάρτηση Green για το 1D πρόβλημα Poisson



Σχήμα 5.2: Τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης Green $G(x, \xi)$.

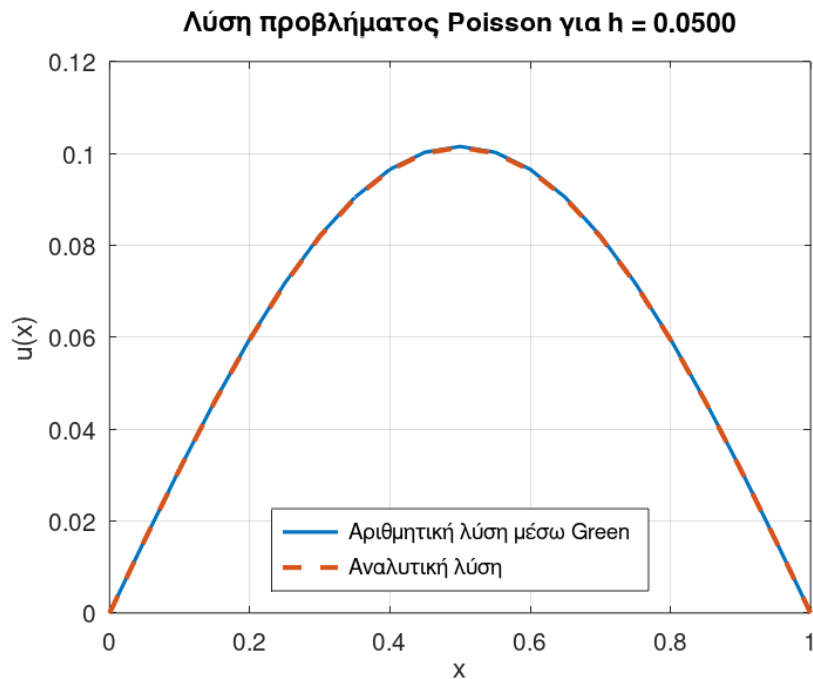
Στη συνέχεια παρουσιάζεται η σύγκριση της αριθμητικής λύσης μέσω της συνάρτησης Green με την ακριβή αναλυτική λύση για τέσσερα διαφορετικά μεγέθη βήματος.

Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζεται η περίπτωση $h = 0.1$.



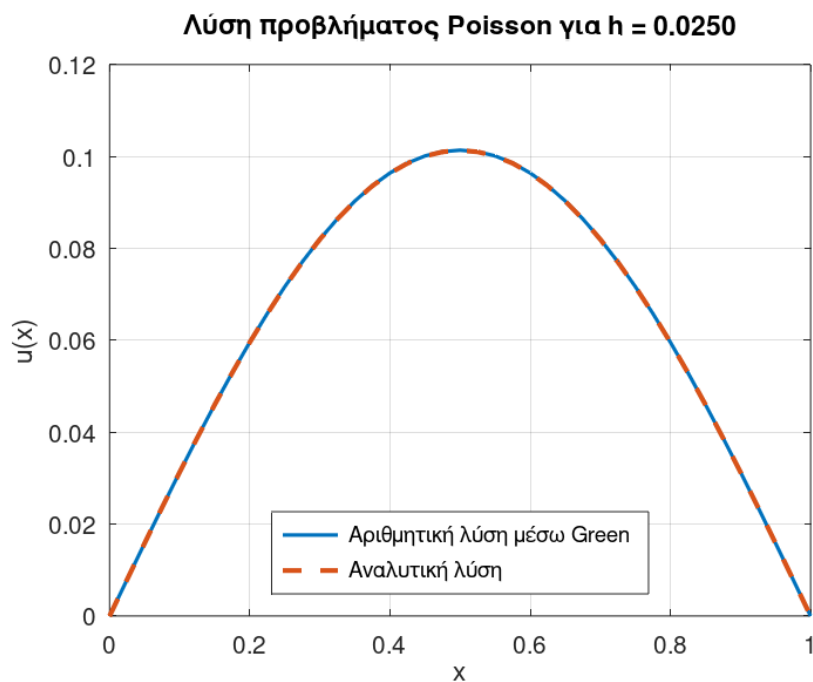
Σχήμα 5.3: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για $h = 0.1$.

Στο Σχήμα 5.4 παρουσιάζεται η περίπτωση $h = 0.05$.



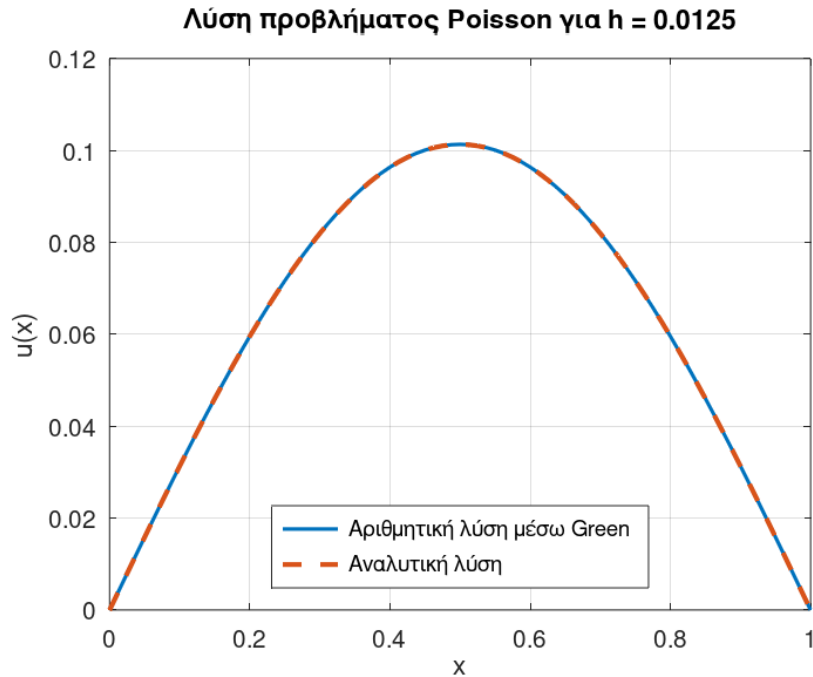
Σχήμα 5.4: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για $h = 0.05$.

Στο Σχήμα 5.5 παρουσιάζεται η περίπτωση $h = 0.025$.



Σχήμα 5.5: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για $h = 0.025$.

Στο Σχήμα 5.6 παρουσιάζεται η περίπτωση $h = 0.0125$.



Σχήμα 5.6: Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για $h = 0.0125$.

5.2.3 Σχόλια

Το πρώτο γράφημα παρουσιάζει τη συνάρτηση πηγής $f(x) = \sin(\pi x)$, ενώ το δεύτερο απεικονίζει τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ ως τρισδιάστατη επιφάνεια. Η μορφή της επιφάνειας δείχνει την αλλαγή του ορισμού της Green κατά μήκος της γραμμής $x = \xi$. Η συνάρτηση παραμένει συνεχής στο σημείο αυτό, ενώ η παράγωγός της ως προς x παρουσιάζει άλμα.

Στα επόμενα τέσσερα γραφήματα συγκρίνεται η αριθμητική λύση που υπολογίζεται μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της συνάρτησης Green με την ακριβή αναλυτική λύση για διαδοχικά μικρότερα βήματα $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ και $h = 0.0125$.

Παρατηρείται ότι, καθώς το μέγεθος του βήματος μειώνεται, το διακριτό πλέγμα γίνεται πυκνότερο και η αριθμητική προσέγγιση βελτιώνεται. Η αριθμητική καμπύλη προσεγγίζει σταδιακά την αναλυτική λύση, γεγονός που επιβεβαιώνει τη σύγκλιση της αριθμητικής ολοκλήρωσης μέσω της συνάρτησης Green.

Η σύγκριση των τεσσάρων περιπτώσεων δείχνει επομένως ότι η μείωση του βήματος διακριτοποίησης οδηγεί σε μεγαλύτερη ακρίβεια, με τίμημα την αύξηση του αριθμού των σημείων και συνεπώς του υπολογιστικού κόστους.

5.3 Εφαρμογή 2: Δισδιάστατο πρόβλημα Poisson

Στην ενότητα αυτή μελετάται ένα δισδιάστατο πρόβλημα Poisson σε τετραγωνικό χωρίο με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Η εφαρμογή αυτή αποτελεί φυσική επέκταση του

μονοδιάστατου προβλήματος που εξετάστηκε προηγουμένως και επιτρέπει τη μελέτη της συνάρτησης Green σε δύο χωρικές διαστάσεις.

Θεωρούμε το χωρίο

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

και το πρόβλημα

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

όπου

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Στο σύνορο του χωρίου επιβάλλονται ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Ως συνάρτηση πηγής επιλέγεται

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Για τη συγκεκριμένη επιλογή, η ακριβής αναλυτική λύση είναι

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Πράγματι, υπολογίζοντας τον τελεστή Laplace προκύπτει

$$-\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) = f(x, y).$$

Η γνώση της ακριβούς λύσης επιτρέπει την άμεση σύγκριση με την αριθμητική προσέγγιση και τον υπολογισμό του αντίστοιχου σφάλματος.

5.3.1 Συνάρτηση Green

Για το τετραγωνικό χωρίο $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet, η συνάρτηση Green μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ανάπτυξης σε ιδιοσυναρτήσεις ως

$$G(x, y; \xi, \eta) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x) \sin(m\pi \xi) \sin(n\pi y) \sin(n\pi \eta)}{\pi^2(m^2 + n^2)}.$$

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Στην αριθμητική υλοποίηση η άπειρη διπλή σειρά της συνάρτησης Green προσεγγίζεται με πεπερασμένο αριθμό όρων. Θεωρώντας M όρους ως προς κάθε δείκτη, χρησιμοποιείται η προσέγγιση

$$G_M(x, y; \xi, \eta) = 4 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{\sin(m\pi x) \sin(m\pi \xi) \sin(n\pi y) \sin(n\pi \eta)}{\pi^2(m^2 + n^2)}.$$

Στη συνέχεια, το διπλό ολοκλήρωμα προσεγγίζεται αριθμητικά πάνω σε διακριτό πλέγμα του χωρίου.

5.3.2 Κώδικας Octave

```
clear all;
close all;
clc;

% Αριθμός σημείων πλέγματος
N = 41;

% Αριθμός όρων της σειράς Green
M = 20;

x = linspace(0,1,N);
y = linspace(0,1,N);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Πηγή

F = 2*pi^2*sin(pi*X).*sin(pi*Y);

% Αναλυτική λύση
```

```
U_exact = sin(pi*X).*sin(pi*Y);

% Αριθμητική λύση μέσω ανάπτυξης Green

U_num = zeros(N,N);
for m = 1:M
    for n = 1:M
        % Ιδιοσυνάρτηση ως προς τις μεταβλητές της πηγής
        Phi_source = sin(m*pi*X).*sin(n*pi*Y);
        % Ολοκλήρωμα της πηγής με την ιδιοσυνάρτηση
        integrand = F .* Phi_source;
        temp = trapz(x,integrand,2);
        integral_mn = trapz(y,temp);
        % Συντελεστής που προκύπτει από τη Green
        coefficient = ...
            4*integral_mn / (pi^2*(m^2+n^2));
        % Προσθήκη του αντίστοιχου όρου στη λύση
        U_num = U_num + ...
            coefficient ...
            .*sin(m*pi*X) ...
            .*sin(n*pi*Y);
    end
end

% Σφάλμα

E = abs(U_num-U_exact);
error_max = max(E(:));
fprintf('Μέγιστο απόλυτο σφάλμα = %.10e\n',error_max);

% Γράφημα 1: Πηγή

figure(1);
surf(X,Y,F);

grid on;

xlabel('x');
```

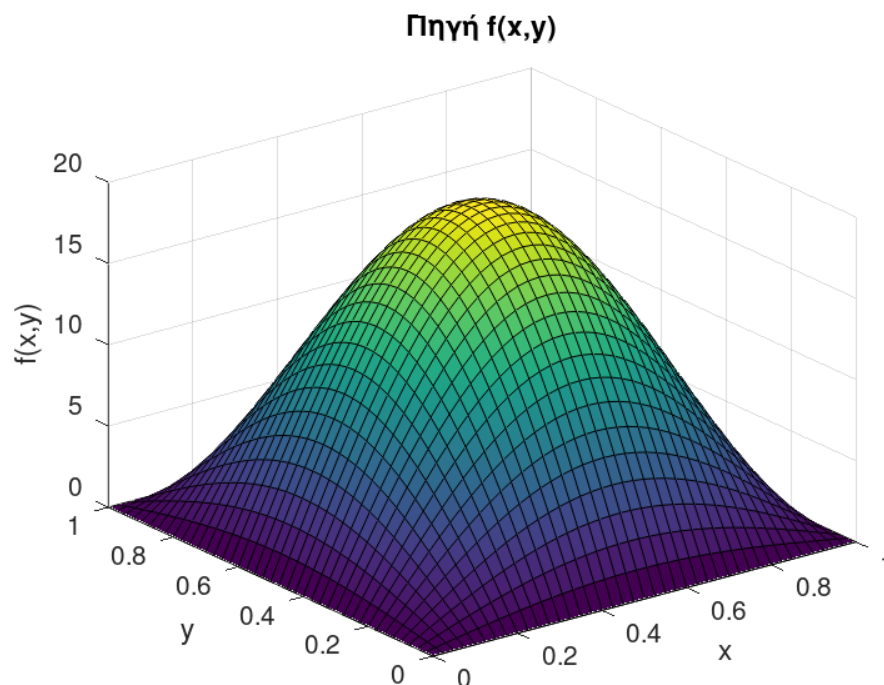
```
ylabel('y');  
zlabel('f(x,y)');  
  
title('Πηγή του δισδιάστατου προβλήματος Poisson');  
print('poisson2d_source.png','-dpng','-r300');  
% Γράφημα 2: Αριθμητική λύση μέσω Green  
  
figure(2);  
surf(X,Y,U_num);  
  
grid on;  
  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('u_{num}(x,y)');  
  
title('Αριθμητική λύση μέσω συνάρτησης Green');  
print('poisson2d_numerical.png','-dpng','-r300');  
  
% Γράφημα 3: Αναλυτική λύση  
  
figure(3);  
surf(X,Y,U_exact);  
  
grid on;  
  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('u(x,y)');  
  
title('Αναλυτική λύση του δισδιάστατου προβλήματος Poisson');  
print('poisson2d_exact.png','-dpng','-r300');  
  
% Γράφημα 4: Απόλυτο σφάλμα  
  
figure(4);  
surf(X,Y,E);  
  
grid on;
```

```
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('|u_{num}-u_{exact}|');

title('Απόλυτο σφάλμα της αριθμητικής λύσης');
print('poisson2d_error.png', '-dpng', '-r300');
```

5.3.3 Γραφικές αναπαραστάσεις

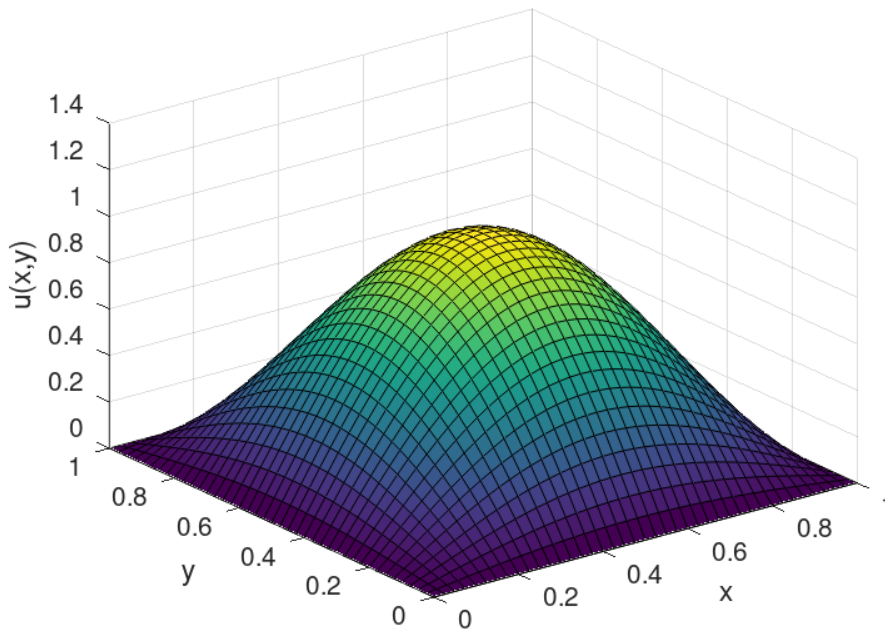
Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζεται η δισδιάστατη συνάρτηση πηγής.



Σχήμα 5.7: Τρισδιάστατη απεικόνιση της πηγής $f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Στο Σχήμα 5.8 παρουσιάζεται η αριθμητική λύση που υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης Green για $M=20$.

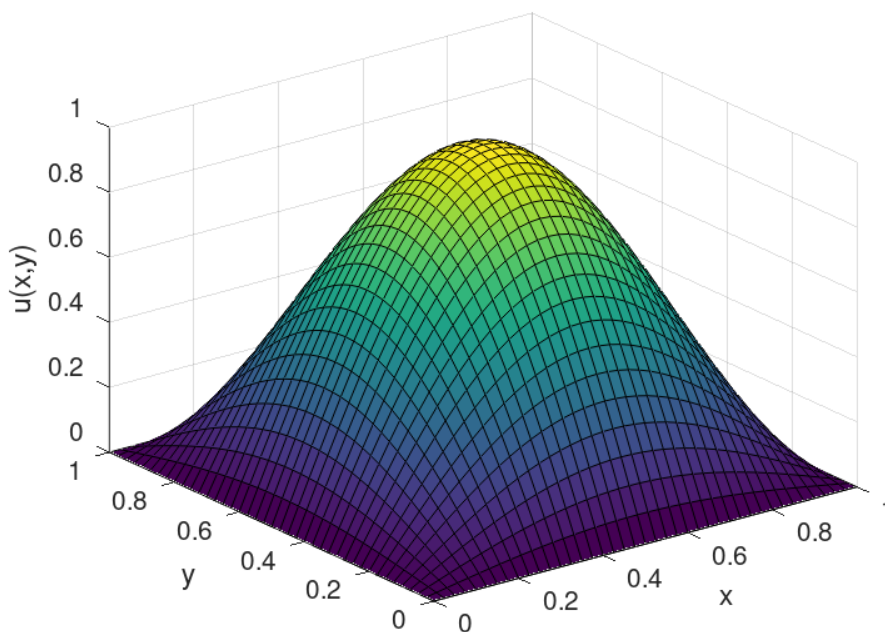
Αριθμητική λύση μέσω συνάρτησης Green



Σχήμα 5.8: Αριθμητική λύση του δισδιάστατου προβλήματος Poisson μέσω της συνάρτησης Green.

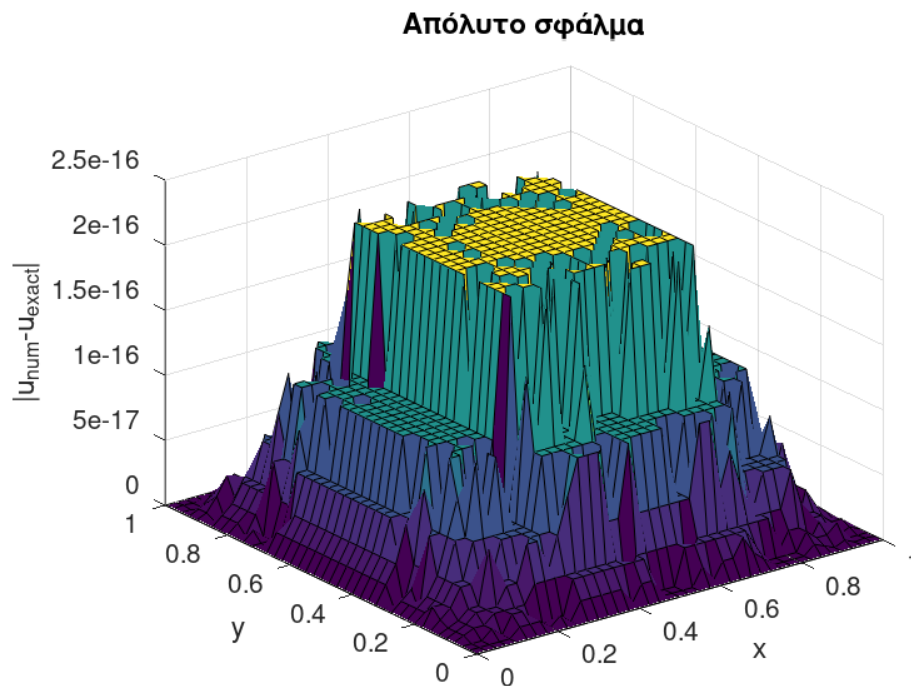
Στο Σχήμα 5.9 παρουσιάζεται η αντίστοιχη αναλυτική λύση.

Αναλυτική λύση



Σχήμα 5.9: Αναλυτική λύση $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Τέλος, στο Σχήμα 5.10 παρουσιάζεται το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης.



Σχήμα 5.10: Απόλυτο σφάλμα $|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}|$.

5.3.4 Σχόλια

Η συνάρτηση πηγής παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο κέντρο του τετραγωνικού χωρίου και μηδενίζεται στα όριά του. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζει και η αναλυτική λύση, η οποία ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Η αριθμητική λύση που προκύπτει μέσω της πεπερασμένης ανάπτυξης της συνάρτησης Green παρουσιάζει πολύ καλή σύγκλιση με την αναλυτική λύση. Η μορφή των δύο επιφανειών είναι ουσιαστικά ίδια, ενώ οι αποκλίσεις μπορούν να μελετηθούν μέσω της επιφάνειας του απόλυτου σφάλματος.

Το αριθμητικό σφάλμα εξαρτάται τόσο από την πυκνότητα του χωρικού πλέγματος όσο και από τον αριθμό M των όρων που διατηρούνται στην ανάπτυξη της συνάρτησης Green. Η αύξηση των παραμέτρων αυτών οδηγεί γενικά σε ακριβέστερη προσέγγιση, αλλά ταυτόχρονα αυξάνει το απαιτούμενο υπολογιστικό κόστος.

Η εφαρμογή αυτή δείχνει ότι η θεωρία των συναρτήσεων Green μπορεί να επεκταθεί φυσικά από μονοδιάστατα σε πολυδιάστατα προβλήματα και να χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε χωρία δύο διαστάσεων.

5.4 Εφαρμογή 3: Απόκριση κυκλώματος RC

Στην ενότητα αυτή μελετάται η χρονική απόκριση ενός κυκλώματος RC μέσω συναρτήσεων Green. Τα ηλεκτρικά κυκλώματα αποτελούν χαρακτηριστικό παράδειγμα γραμμικών δυναμικών συστημάτων και μπορούν να περιγραφούν με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Η χρήση συναρτήσεων Green επιτρέπει την αναπαράσταση της εξόδου του κυκλώματος ως ολοκλήρωμα που εξαρτάται από την εξωτερική διέγερση και από τη χαρακτηριστική απόκριση του συστήματος.

5.4.1 Μαθηματική διατύπωση

Θεωρούμε ένα απλό κύκλωμα RC, το οποίο αποτελείται από:

- αντίσταση R ,
- πυκνωτή C ,
- και εξωτερική τάση εισόδου $f(t)$.

Η τάση $u(t)$ στον πυκνωτή ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$RC \frac{du}{dt} + u = f(t),$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

5.4.2 Συνάρτηση Green

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green ικανοποιεί

$$RC \frac{\partial G}{\partial t} + G = \delta(t - \tau),$$

με συνθήκη αιτιότητας

$$G(t, \tau) = 0, \quad t < \tau.$$

Η λύση της εξίσωσης είναι

$$G(t, \tau) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} H(t - \tau),$$

όπου H είναι η συνάρτηση Heaviside.

Η Green εκφράζει την απόκριση του κυκλώματος σε στιγμιαία μοναδιαία διέγερση.

5.4.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση

Η λύση του προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Στην παρούσα εφαρμογή επιλέγεται ως εξωτερική διέγερση η συνάρτηση

$$f(t) = \sin(2\pi t).$$

Η μορφή αυτή επιτρέπει τη μελέτη της χρονικής συμπεριφοράς του κυκλώματος υπό περιοδική διέγερση.

5.4.4 Αριθμητική προσέγγιση

Για την αριθμητική υλοποίηση, το χρονικό διάστημα διακριτοποιείται σε N σημεία και το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται μέσω πεπερασμένου αθροίσματος:

$$u(t_i) \approx \sum_{j=1}^i G(t_i, \tau_j) f(\tau_j) \Delta\tau.$$

Η διαδικασία αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της απόκρισης του κυκλώματος σε κάθε χρονική στιγμή.

5.4.5 Κώδικας Octave

```
clear all;  
close all;  
clc;
```

```
R = 1;  
C = 0.5;
```

```
T = 5;  
N = 400;
```

```
t = linspace(0, T, N);  
dt = t(2) - t(1);
```

```
% Είσοδος
f = sin(2*pi*t);

% Πίνακας Green
G = zeros(N,N);

for i = 1:N
    for j = 1:N
        if t(i) >= t(j)
            G(i,j) = (1/(R*C)) ...
                * exp(-(t(i)-t(j))/(R*C));
        end
    end
end

% Κανόνας τραπεζίου
w = ones(1,N)*dt;
w(1) = dt/2;
w(end) = dt/2;

% Αριθμητική λύση
u = zeros(1,N);

for i = 1:N
    u(i) = sum(G(i,1:i).*f(1:i).*w(1:i));
end

figure(1);
plot(t,f,'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
title('Εξωτερική διέγερση');

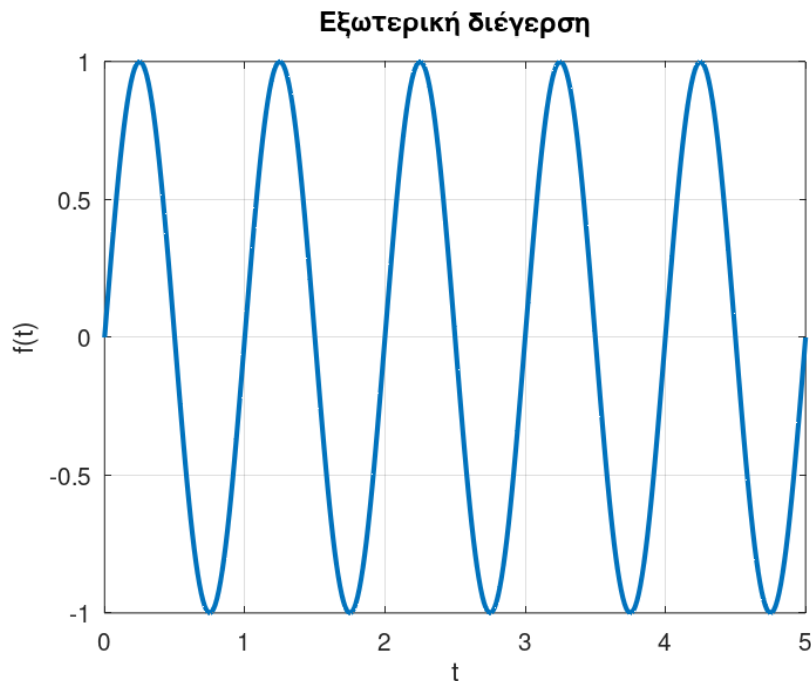
figure(2);
plot(t,u,'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('t');
```

```
ylabel('u(t)');
title('Απόκριση κυκλώματος RC');

figure(3);
mesh(t,t,G');
xlabel('t');
ylabel('\tau');
zlabel('G(t,\tau)');
title('Συνάρτηση Green κυκλώματος RC');
```

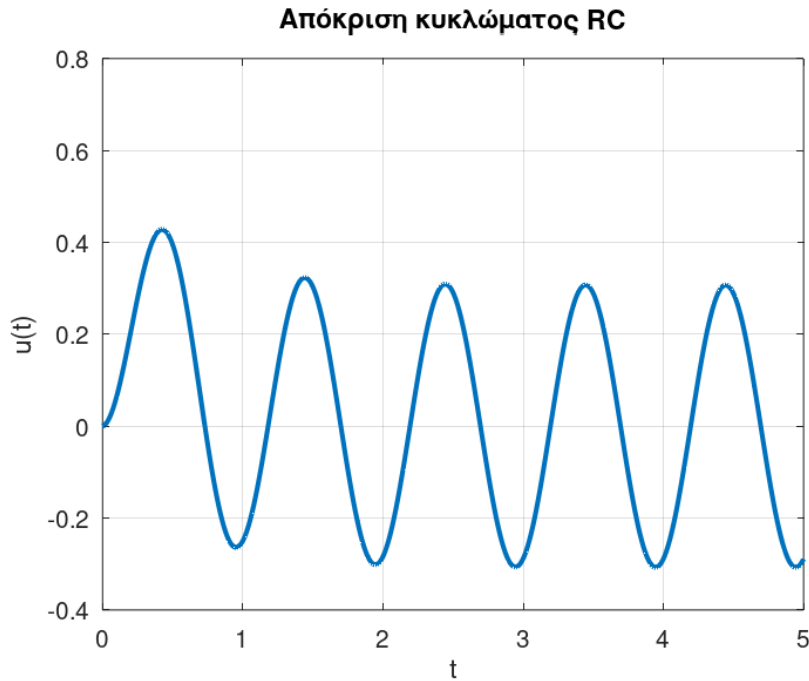
5.4.6 Γραφικές αναπαραστάσεις

Στο Σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η εξωτερική διέγερση του κυκλώματος.



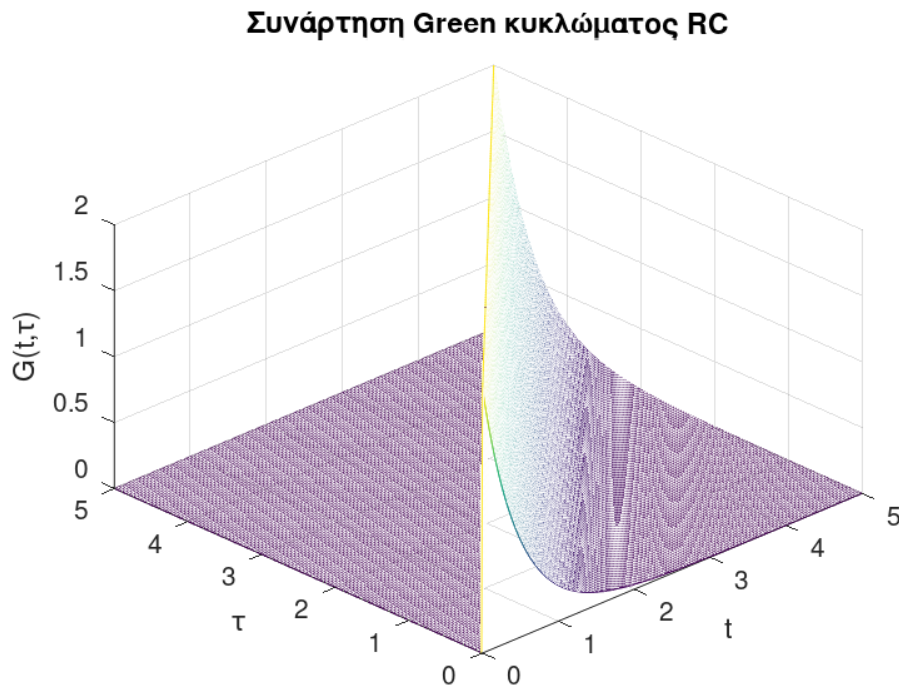
Σχήμα 5.11: Εξωτερική διέγερση $f(t) = \sin(2\pi t)$.

Στο Σχήμα 5.12 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση του κυκλώματος RC.



Σχήμα 5.12: Αριθμητική απόκριση του κυκλώματος RC.

Στο Σχήμα 5.13 παρουσιάζεται η συνάρτηση Green του κυκλώματος.



Σχήμα 5.13: Τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης Green του κυκλώματος RC.

5.4.7 Σχόλια

Το κύκλωμα RC λειτουργεί ως φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων, γεγονός που φαίνεται καθαρά από τη μορφή της απόκρισης. Η έξοδος παρουσιάζει εξομάλυνση σε σχέση με την είσοδο και εμφανίζει χρονική καθυστέρηση λόγω της φόρτισης και εκφόρτισης του πυκνωτή.

Η συνάρτηση Green παρουσιάζει εκθετική απόσβεση ως προς τη μεταβλητή $t - \tau$, γεγονός που αντανakλά τη φυσική συμπεριφορά του κυκλώματος. Η αιτιότητα εκφράζεται από το ότι η Green μηδενίζεται για $t < \tau$, δηλαδή το σύστημα δεν μπορεί να ανταποκριθεί πριν εφαρμοστεί η διέγερση.

Η εφαρμογή αυτή δείχνει πώς οι συναρτήσεις Green μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση δυναμικών συστημάτων και την αριθμητική προσομοίωση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

5.5 Εφαρμογή 4: Μηχανικός ταλαντωτής με απόσβεση

Στην ενότητα αυτή μελετάται η δυναμική συμπεριφορά ενός μηχανικού ταλαντωτή με απόσβεση μέσω συναρτήσεων Green. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί βασικό μοντέλο στη μηχανική και εμφανίζεται σε πλήθος εφαρμογών, όπως:

- μηχανικές ταλαντώσεις,
- αναρτήσεις οχημάτων,
- σεισμικές ταλαντώσεις κατασκευών,
- και συστήματα ελέγχου.

Η χρήση συναρτήσεων Green επιτρέπει την αναπαράσταση της απόκρισης του συστήματος σε εξωτερικές δυνάμεις και τη μελέτη της επίδρασης της απόσβεσης στη χρονική εξέλιξη της κίνησης.

5.5.1 Μαθηματική διατύπωση

Θεωρούμε το σύστημα

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = f(t),$$

όπου:

- $u(t)$ είναι η μετατόπιση,
- m η μάζα,
- c ο συντελεστής απόσβεσης,
- k η σταθερά επαναφοράς,
- και $f(t)$ η εξωτερική δύναμη.

Θεωρούμε επίσης αρχικές συνθήκες ηρεμίας:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

5.5.2 Συνάρτηση Green

Η αντίστοιχη συνάρτηση Green ικανοποιεί

$$m \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + c \frac{\partial G}{\partial t} + kG = \delta(t - \tau),$$

μαζί με συνθήκη αιτιότητας:

$$G(t, \tau) = 0, \quad t < \tau.$$

Στην περίπτωση ασθενούς ή υποκρίσιμης απόσβεσης, δηλαδή όταν

$$c^2 < 4mk,$$

η Green γράφεται στη μορφή

$$G(t, \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) H(t-\tau),$$

όπου

$$\gamma = \frac{c}{2m},$$

και

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}.$$

Η συνάρτηση αυτή περιγράφει φθίνουσες ταλαντώσεις λόγω της απόσβεσης.

5.5.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση

Η λύση του προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Ως εξωτερική διέγερση επιλέγεται η συνάρτηση

$$f(t) = \sin(2\pi t).$$

Η επιλογή αυτή επιτρέπει τη μελέτη της περιοδικής απόκρισης του συστήματος.

5.5.4 Αριθμητική προσέγγιση

Το χρονικό διάστημα διακριτοποιείται σε N σημεία και το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται μέσω πεπερασμένου αθροίσματος:

$$u(t_i) \approx \sum_{j=1}^i G(t_i, \tau_j) f(\tau_j) \Delta\tau.$$

Η διαδικασία αυτή επιτρέπει τον αριθμητικό υπολογισμό της απόκρισης του ταλαντωτή.

5.5.5 Κώδικας Octave

```
clear all;
close all;
clc;

% Παράμετροι συστήματος
m = 1;
c = 0.4;
k = 4;

gamma = c / (2*m);
omega_d = sqrt(k/m - gamma^2);

% Χρονικό διάστημα
T = 20;
N = 800;

t = linspace(0, T, N);
dt = t(2) - t(1);

% Εξωτερική διέγερση
f = sin(2*pi*t);

% Πίνακας Green
```

```
G = zeros(N,N);

for i = 1:N
    for j = 1:N
        if t(i) >= t(j)

            tau = t(i)-t(j);

            G(i,j) = (1/(m*omega_d)) ...
                * exp(-gamma*tau) ...
                * sin(omega_d*tau);
        end
    end
end

% Κανόνας τραπεζίου
w = ones(1,N)*dt;
w(1) = dt/2;
w(end) = dt/2;

% Αριθμητική λύση
u = zeros(1,N);

for i = 1:N
    u(i) = sum(G(i,1:i).*f(1:i).*w(1:i));
end

figure(1);
plot(t,f,'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
title('Εξωτερική δύναμη');
ylim([-1.2 1.2]);

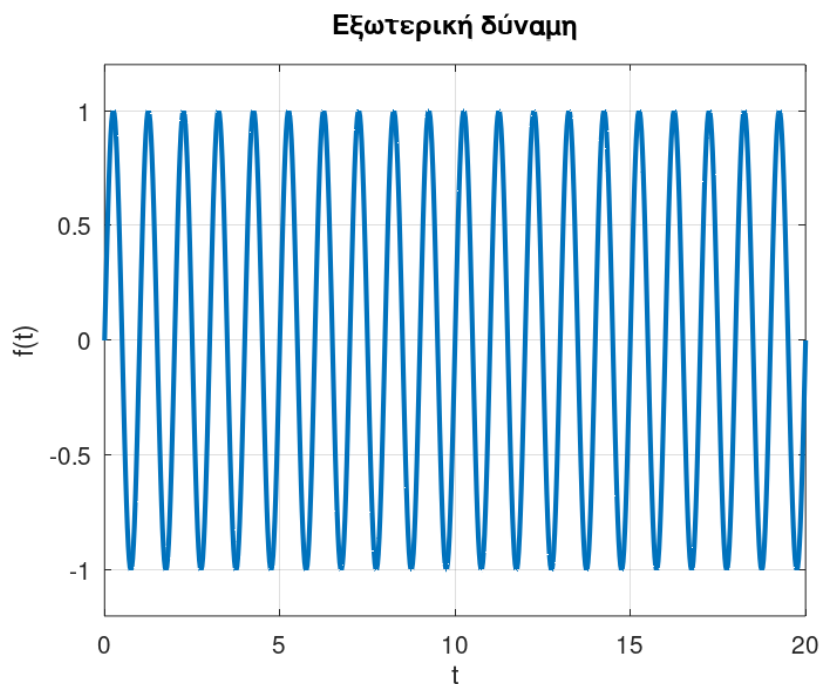
figure(2);
plot(t,u,'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('t');
```

```
ylabel('u(t)');
title('Απόκριση ταλαντωτή με απόσβεση');

figure(3);
mesh(t,t,G');
xlabel('t');
ylabel('\tau');
zlabel('G(t,\tau)');
title('Συνάρτηση Green μηχανικού ταλαντωτή');
```

5.5.6 Γραφικές αναπαραστάσεις

Στο Σχήμα 5.14 παρουσιάζεται η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα.



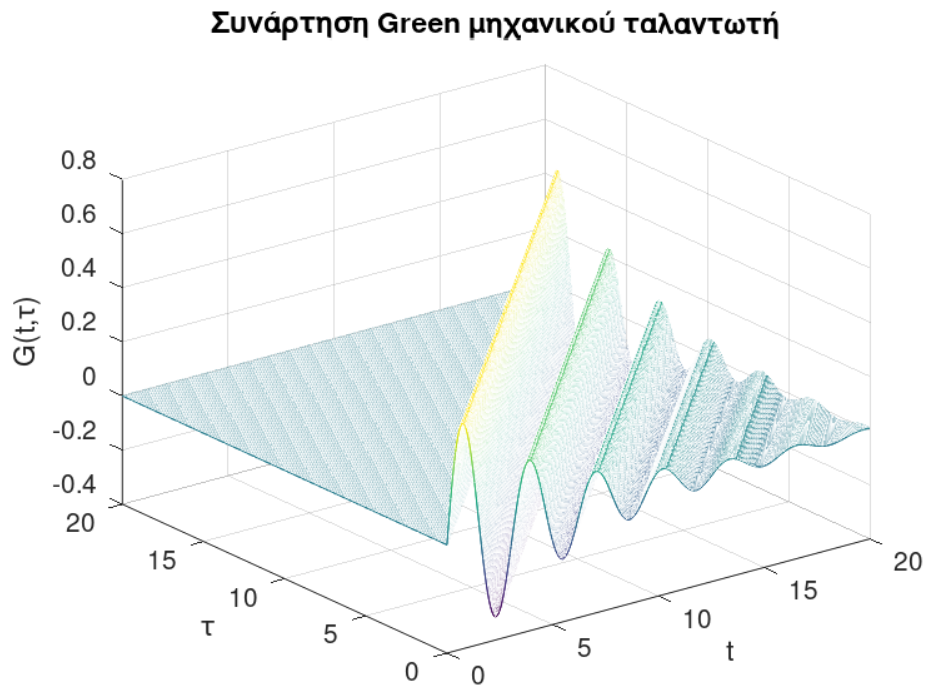
Σχήμα 5.14: Εξωτερική διέγερση $f(t) = \sin(2\pi t)$.

Στο Σχήμα 5.15 παρουσιάζεται η αριθμητική απόκριση του μηχανικού ταλαντωτή.



Σχήμα 5.15: Απόκριση μηχανικού ταλαντωτή με απόσβεση.

Στο Σχήμα 5.16 παρουσιάζεται η τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης Green.



Σχήμα 5.16: Συνάρτηση Green μηχανικού ταλαντωτή με απόσβεση.

5.5.7 Σχόλια

Η αριθμητική λύση παρουσιάζει χαρακτηριστική ταλαντωτική συμπεριφορά με σταδιακή απόσβεση. Η παρουσία του εκθετικού παράγοντα στη συνάρτηση Green οδηγεί στη μείωση του πλάτους των ταλαντώσεων με την πάροδο του χρόνου.

Η μορφή της Green αποτυπώνει τη φυσική συμπεριφορά του συστήματος:

- ο ημιτονοειδής όρος περιγράφει την ταλάντωση,
- ενώ ο εκθετικός όρος εκφράζει την απόσβεση ενέργειας.

Η εφαρμογή αυτή δείχνει πώς οι συναρτήσεις Green μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη δυναμικών μηχανικών συστημάτων και την προσομοίωση της χρονικής εξέλιξης ταλαντώσεων μέσω αριθμητικών μεθόδων.

5.6 Εφαρμογή 5: Διάδοση θερμότητας σε μονοδιάστατη ράβδο

Στην ενότητα αυτή μελετάται η διάδοση θερμότητας σε μονοδιάστατη ράβδο μέσω της συνάρτησης Green της εξίσωσης θερμότητας. Το παράδειγμα αυτό αποτελεί χαρακτηριστική εφαρμογή παραβολικής μερικής διαφορικής εξίσωσης και δείχνει πώς μια αρχική θερμοκρασιακή κατανομή εξελίσσεται στον χρόνο.

5.6.1 Μαθηματική διατύπωση

Θεωρούμε μια ράβδο μήκους $L = 1$ και τη θερμοκρασία $u(x, t)$ στο σημείο x και στον χρόνο t . Η εξίσωση θερμότητας γράφεται ως

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

όπου $\kappa > 0$ είναι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης.

Θεωρούμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

και αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Ως αρχική θερμοκρασιακή κατανομή επιλέγεται μια καμπύλη τύπου Gaussian:

$$u_0(x) = \exp(-100(x - 0.5)^2).$$

Η επιλογή αυτή παριστάνει συγκέντρωση θερμότητας κοντά στο κέντρο της ράβδου.

5.6.2 Συνάρτηση Green

Για τη μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας στο διάστημα $(0, 1)$ με ομογενείς συνθήκες Dirichlet, η συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί μέσω σειράς ιδιοσυναρτήσεων:

$$G(x, t; \xi, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \sin(n\pi \xi) e^{-\kappa n^2 \pi^2 t}.$$

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u(x, t) = \int_0^1 G(x, t; \xi, 0) u_0(\xi) d\xi.$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η θερμοκρασία σε κάθε σημείο και χρόνο προκύπτει ως υπέρθεση των επιδράσεων όλων των σημείων της αρχικής θερμοκρασιακής κατανομής.

5.6.3 Αριθμητική προσέγγιση

Για την αριθμητική υλοποίηση, το διάστημα $[0, 1]$ διακριτοποιείται σε N σημεία και η σειρά της συνάρτησης Green προσεγγίζεται με πεπερασμένο αριθμό όρων M :

$$G_M(x, t; \xi, 0) = 2 \sum_{n=1}^M \sin(n\pi x) \sin(n\pi \xi) e^{-\kappa n^2 \pi^2 t}.$$

Στη συνέχεια, το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται αριθμητικά με τον κανόνα τραπεζίου:

$$u(x_i, t) \approx \sum_{j=1}^N G_M(x_i, t; \xi_j, 0) u_0(\xi_j) \Delta \xi.$$

5.6.4 Κώδικας Octave

```
clear all;  
close all;  
clc;  
  
% Παράμετροι προβλήματος  
L = 1;  
kappa = 0.02;  
N = 200;  
M = 80;
```

```
x = linspace(0,L,N);

t_values = [0, 0.05, 0.15, 0.30, 0.60];

% Αρχική κατανομή θερμοκρασίας
u0 = exp(-100*(x-0.5).^2);

% Βάρη κανόνα τραπεζίου
dx = x(2)-x(1);

w = ones(1,N)*dx;
w(1) = dx/2;
w(end) = dx/2;

% Συνάρτηση Green

function G = compute_green(t,x,L,M,kappa)
    n = (1:M)';
    phi = sqrt(2/L) * sin(n*pi*x/L);
    exp_decay = exp(-kappa*(n*pi/L).^2*t);
    G = phi' * diag(exp_decay) * phi;
end

% Υπολογισμός λύσης για επιλεγμένους χρόνους

U = zeros(length(t_values),N);
for k = 1:length(t_values)
    if t_values(k) == 0
        % Στον αρχικό χρόνο η λύση είναι η αρχική κατανομή
        U(k,:) = u0;
    else
        G = compute_green(t_values(k),x,L,M,kappa);
        U(k,:) = G * (u0' .* w');
    end
end

% Γράφημα 1: Αρχική κατανομή
```

```
figure(1);
plot(x,u0,'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('u_0(x)');
title('Αρχική κατανομή θερμοκρασίας');

% Γράφημα 2: Εξέλιξη θερμοκρασίας

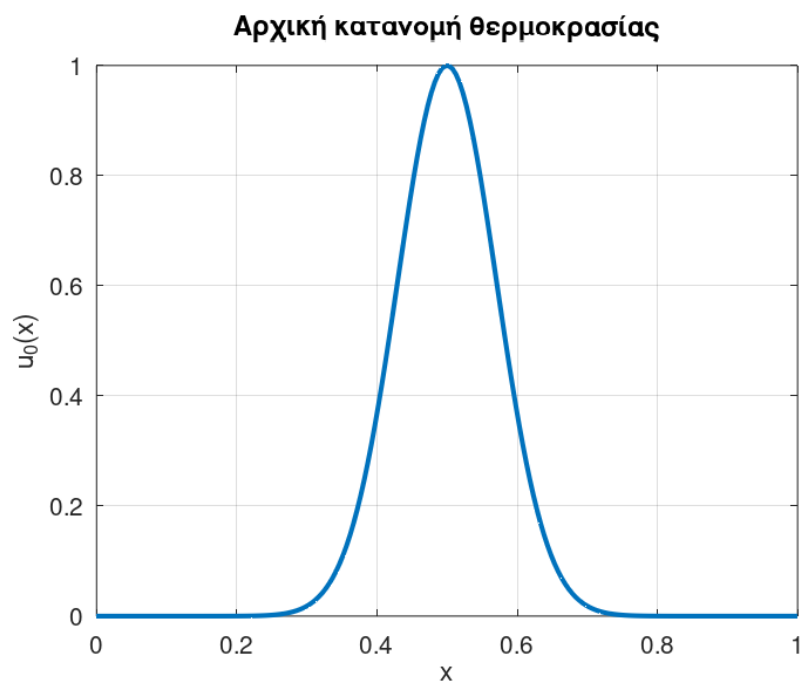
figure(2);
hold on;
for k = 1:length(t_values)
    plot(x,U(k,:), 'LineWidth',2);
end
grid on;
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
title('Εξέλιξη θερμοκρασίας σε ράβδο');
legend('t=0', ...
       't=0.05', ...
       't=0.15', ...
       't=0.30', ...
       't=0.60');
hold off;

% Γράφημα 3: Τρισδιάστατη επιφάνεια
Nt = 80;
time_grid = linspace(0,0.6,Nt);
U_surf = zeros(Nt,N);
for k = 1:Nt
    if time_grid(k) == 0
        U_surf(k,:) = u0;
    else
        G = compute_green(time_grid(k),x,L,M,kappa);
        U_surf(k,:) = G * (u0' .* w');
    end
end
figure(3);
```

```
mesh(x,time_grid,U_surf);  
grid on;  
xlabel('x');  
ylabel('t');  
zlabel('u(x,t)');  
title('Επιφάνεια διάχυσης θερμότητας');
```

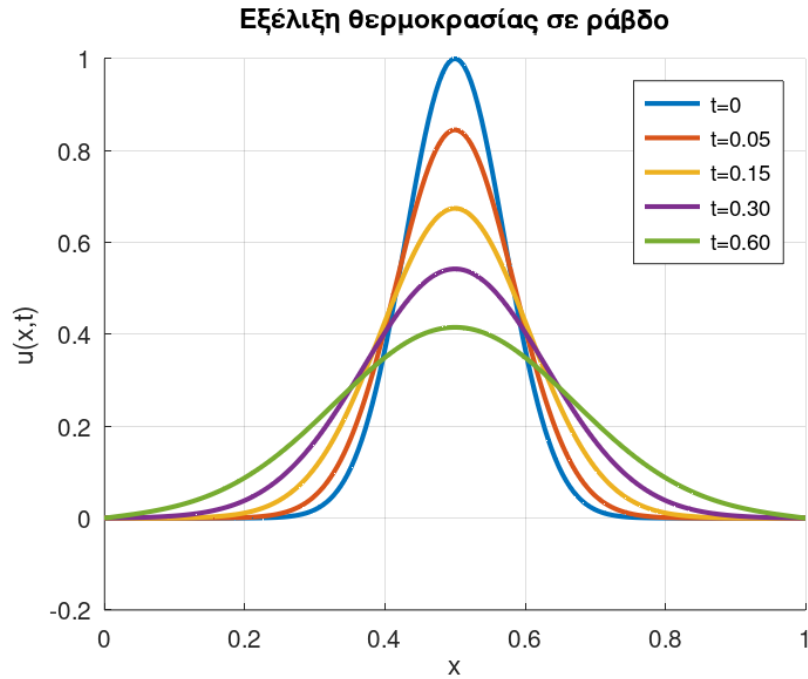
5.6.5 Γραφικές αναπαραστάσεις

Στο Σχήμα 5.17 παρουσιάζεται η αρχική θερμοκρασιακή κατανομή της ράβδου.



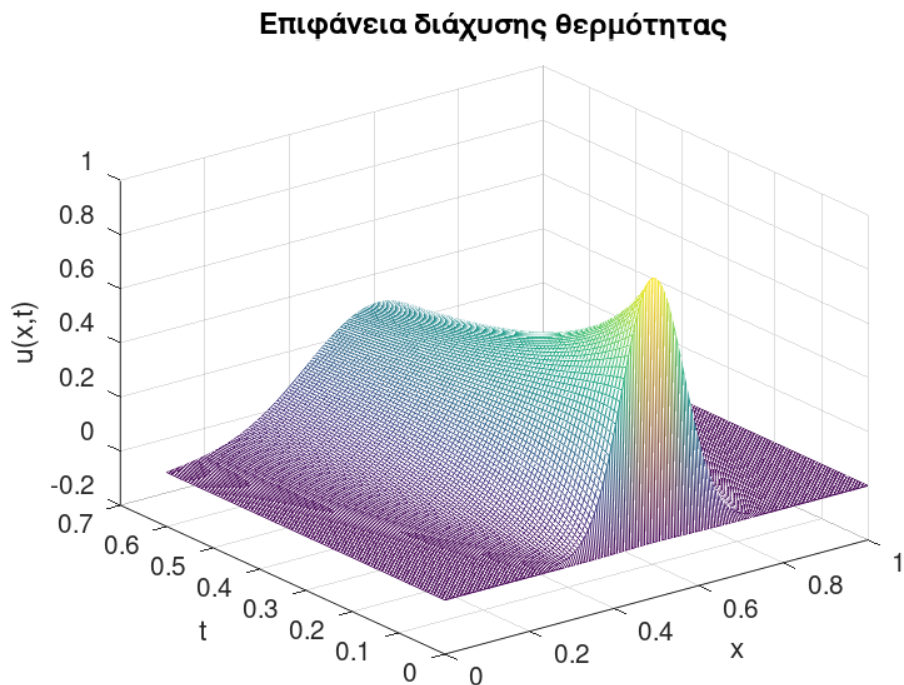
Σχήμα 5.17: Αρχική θερμοκρασιακή κατανομή $u_0(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$.

Στο Σχήμα 5.18 παρουσιάζεται η εξέλιξη της θερμοκρασίας για διαφορετικές χρονικές στιγμές.



Σχήμα 5.18: Εξέλιξη της θερμοκρασίας σε μονοδιάστατη ράβδο για διαφορετικούς χρόνους.

Στο Σχήμα 5.19 παρουσιάζεται η τρισδιάστατη επιφάνεια της λύσης $u(x, t)$.



Σχήμα 5.19: Τρισδιάστατη απεικόνιση της διάδοσης θερμότητας στη ράβδο.

5.6.6 Σχόλια

Το πρώτο γράφημα δείχνει ότι η αρχική θερμοκρασία είναι συγκεντρωμένη κοντά στο κέντρο της ράβδου. Καθώς ο χρόνος αυξάνεται, η θερμότητα διαχέεται προς τα άκρα και η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας μειώνεται.

Η ομογενής συνθήκη Dirichlet στα άκρα της ράβδου σημαίνει ότι η θερμοκρασία διατηρείται μηδενική στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η θερμότητα να απομακρύνεται σταδιακά από το εσωτερικό της ράβδου.

Η τρισδιάστατη απεικόνιση δείχνει καθαρά την παραβολική φύση του προβλήματος: η αρχική συγκέντρωση θερμότητας εξομαλύνεται με την πάροδο του χρόνου. Η εφαρμογή αυτή αναδεικνύει τη χρησιμότητα των συναρτήσεων Green στην αριθμητική μελέτη χρονικά εξαρτώμενων προβλημάτων διάχυσης.

5.7 Εφαρμογή 6: Ακουστική διάδοση κύματος

Στην ενότητα αυτή μελετάται η ακουστική διάδοση κύματος μέσω της συνάρτησης Green της εξίσωσης Helmholtz. Η εφαρμογή αυτή συνδέεται άμεσα με τη θεωρία ακουστικών κυμάτων και σκέδασης, όπου το ακουστικό πεδίο περιγράφεται από γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Η αριθμητική υλοποίηση έχει ως στόχο την απεικόνιση της συμπεριφοράς της συνάρτησης Green για διαφορετικές τιμές του κυματικού αριθμού k και την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ένα ακουστικό κύμα διαδίδεται από σημειακή πηγή.

5.7.1 Μαθηματική διατύπωση

Για χρονικά αρμονικά ακουστικά κύματα, το ακουστικό πεδίο u ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

όπου $k > 0$ είναι ο κυματικός αριθμός.

Στον τρισδιάστατο χώρο, η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz δίνεται από

$$G(x, \xi) = \frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}.$$

Η συνάρτηση αυτή περιγράφει σφαιρικό κύμα που εκπέμπεται από σημειακή πηγή στο σημείο ξ .

Θέτοντας

$$r = |x - \xi|,$$

η συνάρτηση Green γράφεται ως

$$G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

Επειδή η $G(r)$ είναι μιγαδική συνάρτηση, στην αριθμητική υλοποίηση εξετάζονται:

- το πραγματικό μέρος $\text{Re}(G)$,
- το φανταστικό μέρος $\text{Im}(G)$,
- και το μέτρο $|G|$.

5.7.2 Φυσική ερμηνεία

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης Green περιγράφουν την ταλαντωτική φύση του ακουστικού κύματος. Ο παράγοντας e^{ikr} εκφράζει τη φάση του κύματος, ενώ ο παράγοντας $\frac{1}{4\pi r}$ εκφράζει τη μείωση του πλάτους λόγω της σφαιρικής διάδοσης στον χώρο.

Καθώς η απόσταση r από την πηγή αυξάνεται, το πλάτος του κύματος μειώνεται, ενώ η συχνότητα των ταλαντώσεων καθορίζεται από τον κυματικό αριθμό k .

5.7.3 Αριθμητική προσέγγιση

Για την αριθμητική υλοποίηση επιλέγεται ένα διάστημα τιμών της απόστασης

$$r \in [0.05, 10],$$

ώστε να αποφευχθεί η ιδιομορφία της Green στο $r = 0$.

Η συνάρτηση Green υπολογίζεται για διαφορετικές τιμές του κυματικού αριθμού k , ώστε να φανεί η επίδραση της συχνότητας στη μορφή του κύματος.

5.7.4 Κώδικας Octave

```
clear all;  
close all;  
clc;  
  
% Διάστημα αποστάσεων από την πηγή  
N = 1000;  
r = linspace(0.05, 10, N);
```

```
% Κυματικοί αριθμοί
k_values = [1, 2, 4];

% Υπολογισμός Green για μία τιμή k
k = 2;
G = exp(1i*k*r)/(4*pi*r);

figure(1);
plot(r,real(G),'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('r');
ylabel('Re(G)');
title('Πραγματικό μέρος της συνάρτησης Green Helmholtz');
print('acoustic_real.png','-dpng','-r300');

figure(2);
plot(r,imag(G),'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('r');
ylabel('Im(G)');
title('Φανταστικό μέρος της συνάρτησης Green Helmholtz');
print('acoustic_imag.png','-dpng','-r300');

figure(3);
plot(r,abs(G),'LineWidth',2);
grid on;
xlabel('r');
ylabel('|G|');
title('Μέτρο της συνάρτησης Green Helmholtz');
print('acoustic_abs.png','-dpng','-r300');

% Σύγκριση για διαφορετικές τιμές k
figure(4);
hold on;

for j = 1:length(k_values)
    k = k_values(j);
    G = exp(1i*k*r)/(4*pi*r);
    plot(r,real(G),'LineWidth',2);
```

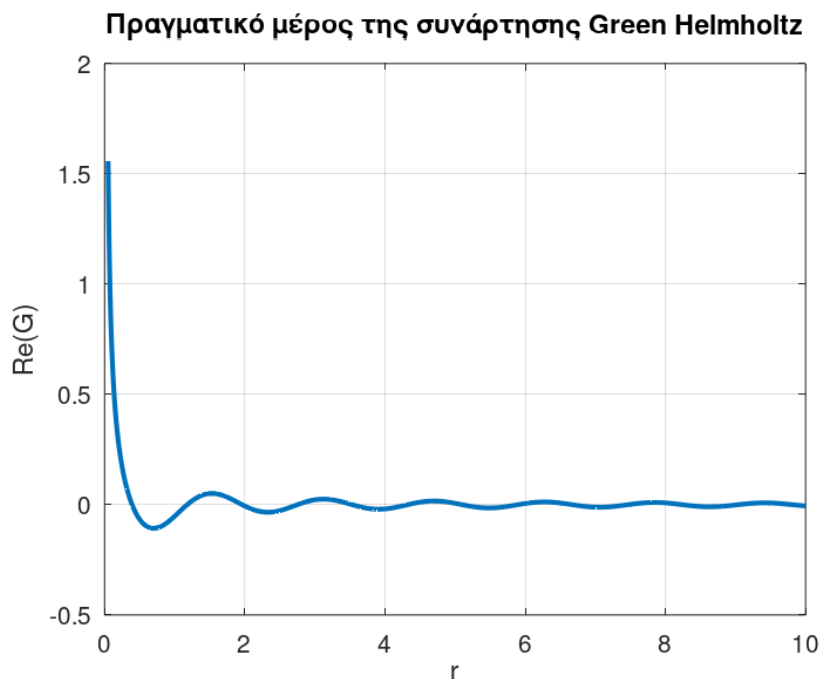
```
end

grid on;
xlabel('r');
ylabel('Re(G)');
title('Επίδραση του κυματικού αριθμού k');
legend('k=1','k=2','k=4');
print('acoustic_k_comparison.png','-dpng','-r300');

for j = 1:length(k_values)
    k = k_values(j);
    G = exp(1i*k*r)/(4*pi*r);
    plot(r,real(G),'LineWidth',2);
end
```

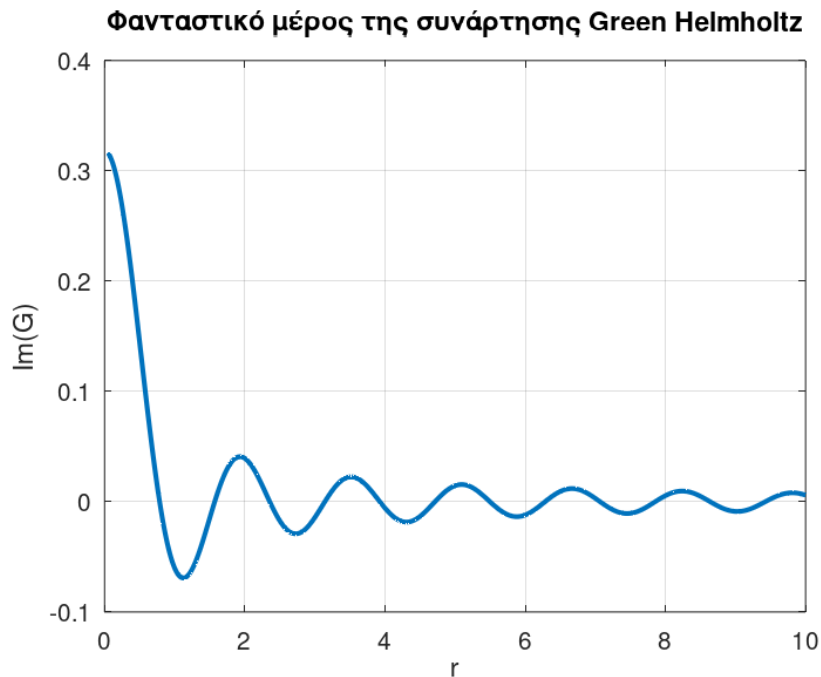
5.7.5 Γραφικές αναπαραστάσεις

Στο Σχήμα 5.20 παρουσιάζεται το πραγματικό μέρος της συνάρτησης Green για την εξίσωση Helmholtz.



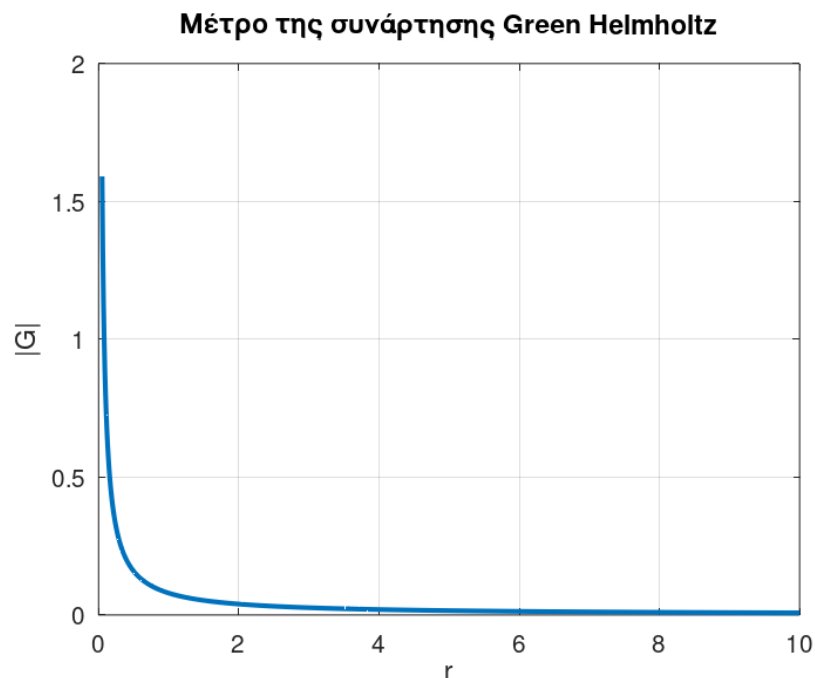
Σχήμα 5.20: Πραγματικό μέρος της συνάρτησης Green της εξίσωσης Helmholtz.

Στο Σχήμα 5.21 παρουσιάζεται το φανταστικό μέρος της συνάρτησης Green.



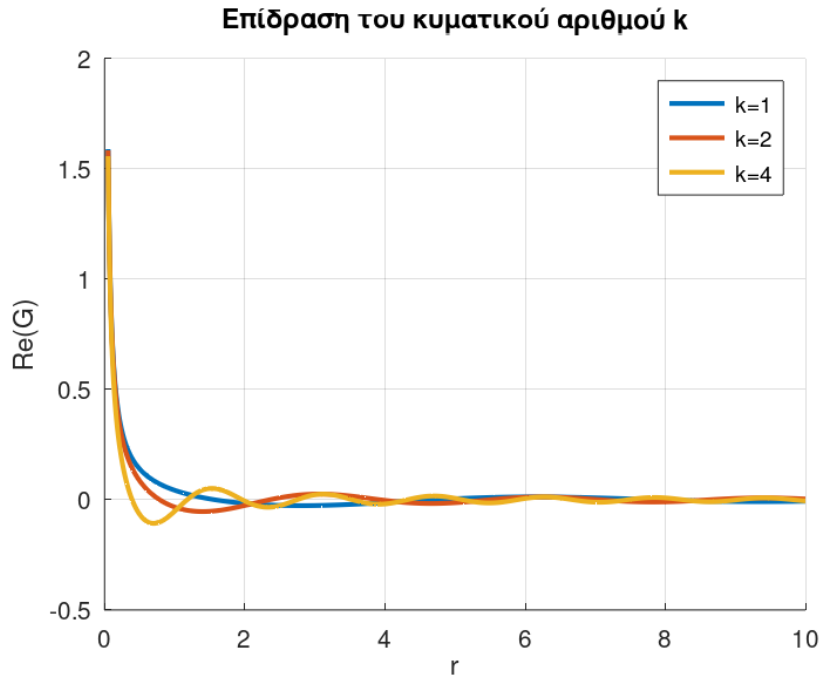
Σχήμα 5.21: Φανταστικό μέρος της συνάρτησης Green της εξίσωσης Helmholtz.

Στο Σχήμα 5.22 παρουσιάζεται το μέτρο της συνάρτησης Green.



Σχήμα 5.22: Μέτρο της συνάρτησης Green της εξίσωσης Helmholtz.

Στο Σχήμα 5.23 παρουσιάζεται η επίδραση διαφορετικών τιμών του κυματικού αριθμού k στο πραγματικό μέρος της συνάρτησης Green.



Σχήμα 5.23: Σύγκριση του πραγματικού μέρους της Green για διαφορετικές τιμές του κυματικού αριθμού k .

5.7.6 Σχόλια

Τα γραφήματα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους δείχνουν την ταλαντωτική φύση της συνάρτησης Green για την εξίσωση Helmholtz. Η ταλάντωση αυτή συνδέεται με τη διάδοση ακουστικών κυμάτων από σημειακή πηγή.

Το μέτρο της Green μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση r , γεγονός που οφείλεται στον παράγοντα $\frac{1}{4\pi r}$.

Η σύγκριση για διαφορετικές τιμές του κυματικού αριθμού δείχνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το k , τόσο πιο γρήγορες είναι οι ταλαντώσεις της συνάρτησης Green. Αυτό αντιστοιχεί φυσικά σε κύματα μικρότερου μήκους κύματος.

Η εφαρμογή αυτή αναδεικνύει τη χρησιμότητα των συναρτήσεων Green στην ανάλυση κυματικών φαινομένων και ειδικότερα στη μελέτη ακουστικής διάδοσης και σκέδασης.

5.8 Εφαρμογή 7: Δισδιάστατη ακουστική σκέδαση από κυκλικό σκεδαστή

Στην ενότητα αυτή μελετάται η σκέδαση ενός επίπεδου ακουστικού κύματος από κυκλικό εμπόδιο σε δύο χωρικές διαστάσεις. Το πρόβλημα αποτελεί χαρακτηριστική εφαρμογή της εξίσωσης Helmholtz και της αντίστοιχης συνάρτησης Green και επιτρέπει την οπτικοποίηση του προσπίπτοντος, του σκεδαζόμενου και του συνολικού ακουστικού πεδίου.

Θεωρούμε έναν κυκλικό σκεδαστή ακτίνας a , με κέντρο την αρχή των αξόνων. Στο εξωτερικό

του κυκλικού χωρίου το ακουστικό πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

όπου $k > 0$ είναι ο κυματικός αριθμός.

Το συνολικό πεδίο γράφεται ως άθροισμα του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου πεδίου,

$$u = u^{inc} + u^{sc}.$$

Ως προσπίπτον κύμα θεωρούμε επίπεδο κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα x ,

$$u^{inc}(x, y) = e^{ikx}.$$

Σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) η σχέση αυτή γράφεται

$$u^{inc}(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta}.$$

5.8.1 Συνάρτηση Green της δισδιάστατης εξίσωσης Helmholtz

Η εξερχόμενη θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις δίνεται από

$$G(x, \xi) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - \xi|),$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί

$$(\Delta_x + k^2)G(x, \xi) = -\delta(x - \xi),$$

και εκφράζει ένα εξερχόμενο κυλινδρικό κύμα που παράγεται από σημειακή πηγή.

5.8.2 Συνοριακή συνθήκη

Θεωρούμε ακουστικά μαλακό (*sound-soft*) κυκλικό σκεδαστή. Στην περίπτωση αυτή η ακουστική πίεση μηδενίζεται στο σύνορο του εμποδίου:

$$u = 0, \quad r = a.$$

Επομένως,

$$u^{sc}(a, \theta) = -u^{inc}(a, \theta).$$

Το σκεδαζόμενο πεδίο πρέπει επιπλέον να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld, ώστε να αντιστοιχεί σε κύμα που διαδίδεται προς το άπειρο.

5.8.3 Ανάπτυξη σε κυλινδρικές αρμονικές

Το προσπίπτον επίπεδο κύμα αναπτύσσεται σε σειρά Bessel ως

$$u^{inc}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta},$$

όπου J_n είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξης n .

Το σκεδαζόμενο πεδίο αναζητείται στη μορφή

$$u^{sc}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}.$$

Από τη συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο $r = a$ προκύπτουν οι συντελεστές

$$A_n = -i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}.$$

Επομένως,

$$u^{sc}(r, \theta) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}.$$

Στην αριθμητική υλοποίηση η άπειρη σειρά προσεγγίζεται με πεπερασμένο αριθμό όρων,

$$-N_m \leq n \leq N_m.$$

Η συνολική λύση υπολογίζεται από

$$u(r, \theta) = u^{inc}(r, \theta) + u^{sc}(r, \theta).$$

Στο εσωτερικό του κυκλικού σκεδαστή το πεδίο δεν υπολογίζεται, καθώς το πρόβλημα αφορά το εξωτερικό χωρίο.

5.8.4 Κώδικας Octave

```
clear all;
close all;
clc;

% Παράμετροι προβλήματος

a = 1;           % Ακτίνα κυκλικού σκεδαστή
k = 4;           % Κυματικός αριθμός
Nm = 20;         % Αριθμός όρων προς κάθε κατεύθυνση

% Χωρικό πλέγμα
N = 250;

x = linspace(-4,4,N);
y = linspace(-4,4,N);

[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Πολικές συντεταγμένες
R = sqrt(X.^2 + Y.^2);
Theta = atan2(Y,X);

% Προσπίπτον κύμα

U_inc = exp(1i*k*X);

% Σκεδαζόμενο πεδίο

U_sc = zeros(size(X));

for n = -Nm:Nm

    % Συντελεστής της σειράς
    An = -(1i^n) ...
        * besselj(n,k*a) ...
        / besselh(n,1,k*a);
```

```
% Συνεισφορά του όρου n
term = An ...
      .* besselh(n,1,k*R) ...
      .* exp(1i*n*Theta);

U_sc = U_sc + term;

end

% Συνολικό πεδίο

U_total = U_inc + U_sc;

% Αφαίρεση εσωτερικού του σκεδαστή

mask = (R <= a);

U_inc_plot = U_inc;
U_sc_plot = U_sc;
U_total_plot = U_total;

U_inc_plot(mask) = NaN;
U_sc_plot(mask) = NaN;
U_total_plot(mask) = NaN;

% Γράφημα 1: Προσπίπτον πεδίο

figure(1);

surf(X,Y,real(U_inc));
view(2);

grid on;
axis equal;
axis tight;

xlabel('x');
```

```
ylabel('y');

title('Πραγματικό μέρος του προσπίπτοντος κύματος');

colorbar;

print('scattering2d_incident.png','-dpng','-r300');

% Γράφημα 2: Σκεδαζόμενο πεδίο

figure(2);

surf(X,Y,real(U_sc_plot));
view(2);

grid on;
axis equal;
axis tight;

xlabel('x');
ylabel('y');

title('Πραγματικό μέρος του σκεδαζόμενου πεδίου');

colorbar;

print('scattering2d_scattered.png','-dpng','-r300');

% Γράφημα 3: Συνολικό πεδίο

figure(3);

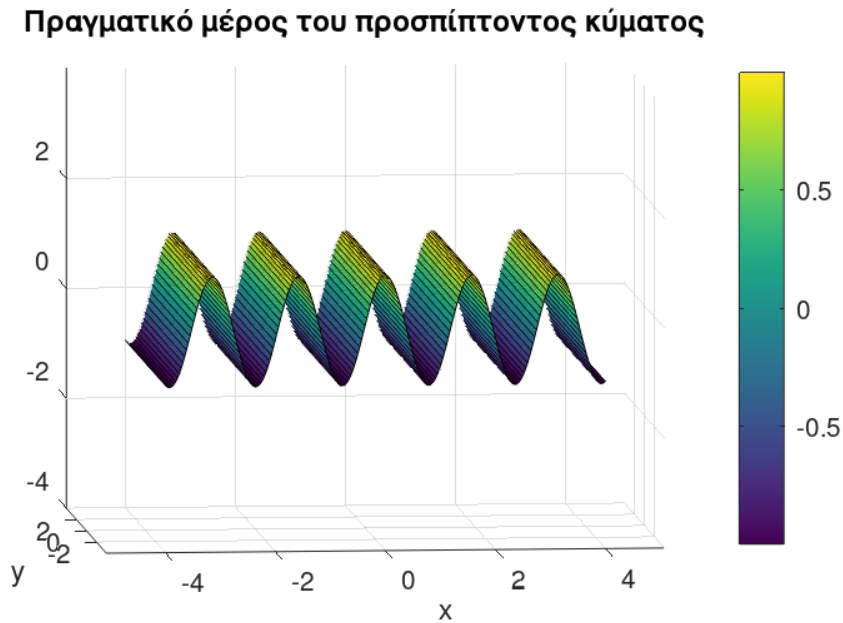
surf(X,Y,real(U_total_plot));
view(2);

grid on;
axis equal;
axis tight;
```

```
xlabel('x');  
ylabel('y');  
  
title('Πραγματικό μέρος του συνολικού ακουστικού πεδίου');  
  
colorbar;  
  
print('scattering2d_total.png','-dpng','-r300');  
  
% Γράφημα 4: Μέτρο συνολικού πεδίου  
  
figure(4);  
  
surf(X,Y,abs(U_total_plot));  
view(2);  
  
grid on;  
axis equal;  
axis tight;  
  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
  
title('Μέτρο του συνολικού ακουστικού πεδίου');  
  
colorbar;  
  
print('scattering2d_total_abs.png','-dpng','-r300');
```

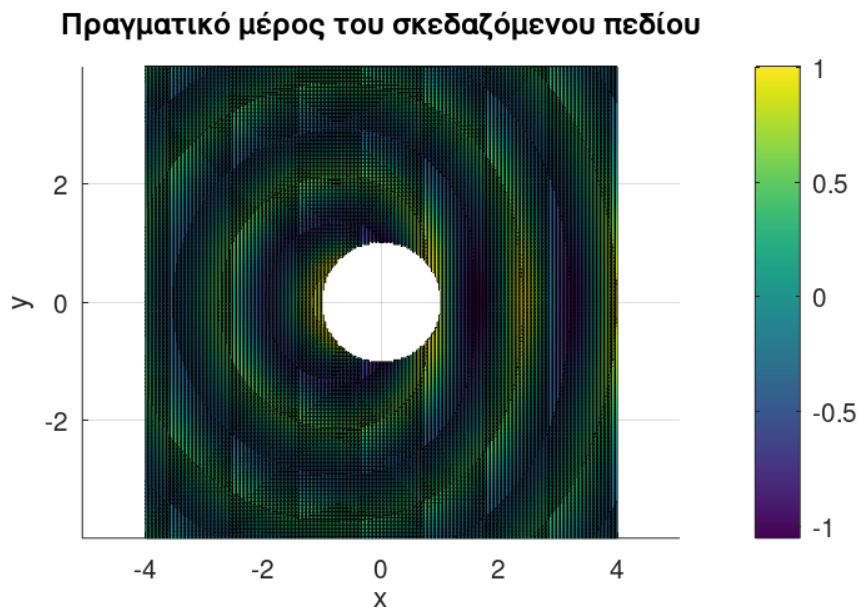
5.8.5 Γραφικές αναπαραστάσεις

Στο Σχήμα 5.24 παρουσιάζεται το πραγματικό μέρος του προσπίπτοντος επίπεδου κύματος.



Σχήμα 5.24: Πραγματικό μέρος του προσπίπτοντος επίπεδου ακουστικού κύματος.

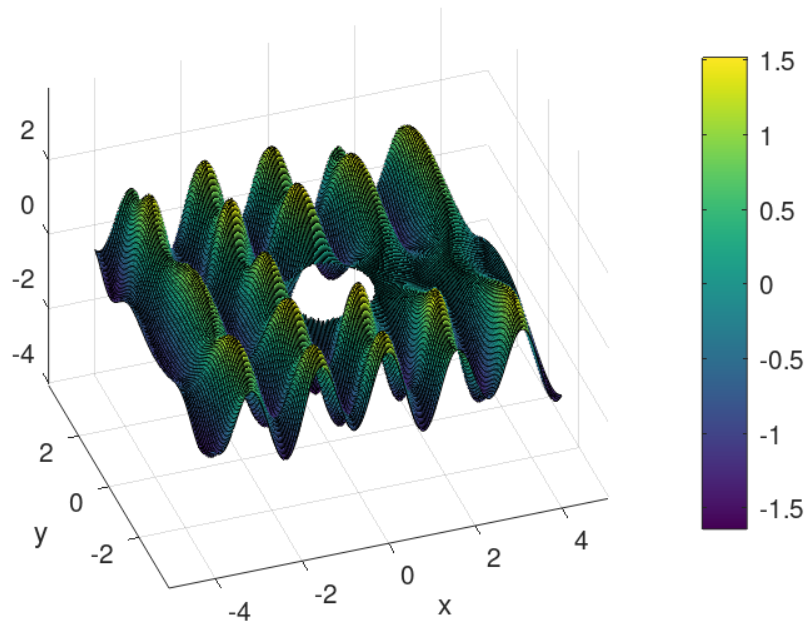
Στο Σχήμα 5.25 παρουσιάζεται το πραγματικό μέρος του σκεδαζόμενου πεδίου.



Σχήμα 5.25: Πραγματικό μέρος του σκεδαζόμενου ακουστικού πεδίου.

Στο Σχήμα 5.26 παρουσιάζεται το πραγματικό μέρος του συνολικού ακουστικού πεδίου.

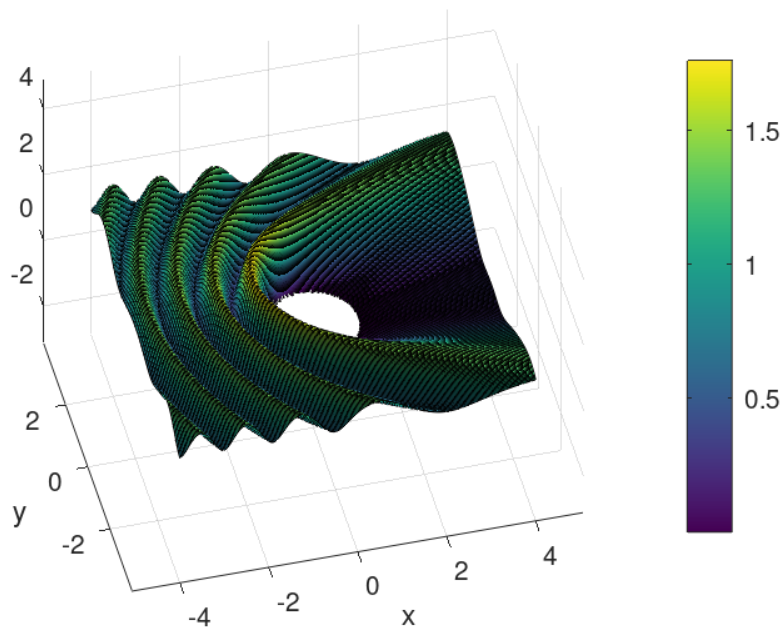
Πραγματικό μέρος του συνολικού ακουστικού πεδίου



Σχήμα 5.26: Πραγματικό μέρος του συνολικού ακουστικού πεδίου γύρω από τον κυκλικό σκεδαστή.

Τέλος, στο Σχήμα 5.27 παρουσιάζεται το μέτρο του συνολικού πεδίου.

Μέτρο του συνολικού ακουστικού πεδίου



Σχήμα 5.27: Μέτρο του συνολικού ακουστικού πεδίου γύρω από τον κυκλικό σκεδαστή.

5.8.6 Σχόλια

Το πρώτο γράφημα απεικονίζει το προσπίπτον επίπεδο κύμα πριν ληφθεί υπόψη η επίδραση του κυκλικού εμποδίου. Τα μέτωπα κύματος εμφανίζονται περίπου παράλληλα και διαδίδονται κατά τη διεύθυνση του άξονα x .

Στο δεύτερο γράφημα παρουσιάζεται αποκλειστικά το σκεδαζόμενο πεδίο. Η παρουσία του κυκλικού εμποδίου δημιουργεί κυλινδρικές κυματικές συνιστώσες, οι οποίες διαδίδονται προς το εξωτερικό του σκεδαστή.

Στο τρίτο γράφημα παρουσιάζεται το συνολικό πεδίο

$$u = u^{inc} + u^{sc}.$$

Η υπέρθεση του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου κύματος δημιουργεί περιοχές ενισχυτικής και καταστροφικής συμβολής. Η επίδραση του σκεδαστή γίνεται ιδιαίτερα εμφανής στην περιοχή γύρω από το κυκλικό εμπόδιο.

Το τέταρτο γράφημα παρουσιάζει το μέτρο του συνολικού ακουστικού πεδίου. Οι μεταβολές του μέτρου αποτυπώνουν τη χωρική κατανομή της έντασης της κυματικής απόκρισης και αναδεικνύουν τη διαμόρφωση του πεδίου εξαιτίας της σκέδασης.

Η εφαρμογή αυτή δείχνει τη φυσική σύνδεση μεταξύ της δισδιάστατης συνάρτησης Green της εξίσωσης Helmholtz, των συναρτήσεων Bessel και Hankel και της θεωρίας ακουστικής σκέδασης. Παράλληλα, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης των συναρτήσεων Green σε εξωτερικά προβλήματα κυματικής διάδοσης.

5.9 Σύγκριση με άλλες μεθόδους

Στο προηγούμενο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν αριθμητικές εφαρμογές των συναρτήσεων Green σε προβλήματα θερμικής διάχυσης, ηλεκτρικών κυκλωμάτων, μηχανικών ταλαντώσεων και ακουστικής διάδοσης. Η μέθοδος των συναρτήσεων Green αποτελεί ένα ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, δεν είναι όμως η μοναδική διαθέσιμη προσέγγιση.

Στην ενότητα αυτή γίνεται σύντομη σύγκριση της μεθόδου των συναρτήσεων Green με άλλες ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων μερικών και συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

5.9.1 Μέθοδος συναρτήσεων Green

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η αναπαράσταση της λύσης μέσω ολοκληρωτικού τύπου της μορφής

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

όπου η συνάρτηση Green ενσωματώνει πλήρως τόσο τον διαφορικό τελεστή όσο και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι, μόλις κατασκευαστεί η συνάρτηση Green, η λύση για οποιαδήποτε πηγή f προκύπτει άμεσα μέσω ολοκλήρωσης.

5.9.2 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference Method -- FDM) βασίζεται στην αντικατάσταση των παραγώγων από πεπερασμένες διαφορές.

Για παράδειγμα,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Με τον τρόπο αυτό η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα απλή στην υλοποίηση και εφαρμόζεται εύκολα σε προβλήματα απλής γεωμετρίας. Ωστόσο, η ακρίβειά της εξαρτάται σημαντικά από το μέγεθος του πλέγματος και μπορεί να απαιτεί μεγάλο αριθμό κόμβων για την επίτευξη ικανοποιητικών αποτελεσμάτων.

5.9.3 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method -- FEM) αποτελεί μία από τις σημαντικότερες αριθμητικές τεχνικές για την επίλυση συνοριακών προβλημάτων.

Η βασική ιδέα είναι η διαίρεση του χωρίου σε μικρά πεπερασμένα στοιχεία και η προσέγγιση της λύσης μέσω κατάλληλων συναρτήσεων βάσης.

Η FEM παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα:

- μπορεί να εφαρμοστεί σε πολύπλοκες γεωμετρίες,
- επιτρέπει τοπική προσαρμογή του πλέγματος,
- παρουσιάζει μεγάλη ακρίβεια σε πολύπλοκα προβλήματα μηχανικής.

Από την άλλη πλευρά, απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος και πιο σύνθετη υλοποίηση σε σχέση με τις συναρτήσεις Green.

5.9.4 Μέθοδος συνοριακών στοιχείων

Η μέθοδος συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Method -- BEM) βασίζεται άμεσα στις συναρτήσεις Green και στις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων.

Σε αντίθεση με τις περισσότερες αριθμητικές μεθόδους, όπου διακριτοποιείται ολόκληρο το χωρίο, στη BEM διακριτοποιείται μόνο το σύνορο.

Το γεγονός αυτό μειώνει σημαντικά τον αριθμό αγνώστων, ιδιαίτερα σε προβλήματα τριών διαστάσεων.

Η μέθοδος εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα:

- ηλεκτροστατικής,
- ακουστικής σκέδασης,
- ελαστικότητας,
- και δυναμικής ρευστών.

Ωστόσο, η κατασκευή της κατάλληλης συνάρτησης Green αποτελεί συχνά το δυσκολότερο στάδιο της μεθόδου.

5.9.5 Μέθοδος διαχωρισμού μεταβλητών

Η μέθοδος διαχωρισμού μεταβλητών αποτελεί μία από τις κλασικότερες αναλυτικές τεχνικές επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Η βασική ιδέα είναι η αναζήτηση λύσεων της μορφής

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

οπότε το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Η μέθοδος εφαρμόζεται επιτυχώς σε προβλήματα με απλές γεωμετρίες και ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Ωστόσο, η εφαρμογή της γίνεται ιδιαίτερα δύσκολη σε πολύπλοκα χωρία ή σε γενικές συνοριακές συνθήκες.

5.9.6 Συγκριτική αξιολόγηση

Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζεται συνοπτική σύγκριση των βασικών μεθόδων.

Πίνακας 5.1: Σύγκριση βασικών μεθόδων επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.

Μέθοδος	Τύπος	Κύρια χαρακτηριστικά
Συναρτήσεις Green	Αναλυτική	Ακριβής αναπαράσταση της λύσης, ιδανική για γραμμικά προβλήματα.
Πεπερασμένες διαφο- ρές	Αριθμητική	Απλή υλοποίηση, κατάλληλη για απλά πλέγματα.
Πεπερασμένα στοιχεία	Αριθμητική	Υψηλή ακρίβεια σε πολύπλοκες γεωμετρίες.
Συνοριακά στοιχεία	Αριθμητική	Διακριτοποίηση μόνο του συνόρου, βασίζεται στις συναρτήσεις Green.
Διαχωρισμός μεταβλη- τών	Αναλυτική	Αποτελεσματική σε προβλήματα με απλή γεωμετρία και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

5.9.7 Συμπεράσματα

Από τη σύγκριση προκύπτει ότι δεν υπάρχει μία μέθοδος η οποία να υπερτερεί σε όλες τις κατηγορίες προβλημάτων. Η επιλογή εξαρτάται από τη φύση της διαφορικής εξίσωσης, τη γεωμετρία του χωρίου, τις συνοριακές συνθήκες και τις απαιτήσεις ακρίβειας.

Οι συναρτήσεις Green παρουσιάζουν ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον, καθώς παρέχουν άμεση ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης και συνδέονται στενά με τη θεωρία των γραμμικών τελεστών και των συνοριακών προβλημάτων. Παράλληλα, αποτελούν τη μαθηματική βάση προηγμένων αριθμητικών τεχνικών, όπως η μέθοδος συνοριακών στοιχείων.

Οι αριθμητικές εφαρμογές που παρουσιάστηκαν στο παρόν κεφάλαιο έδειξαν ότι οι συναρτήσεις Green μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά τόσο για την κατανόηση της φυσικής συμπεριφοράς διαφόρων συστημάτων όσο και για την ανάπτυξη αποδοτικών υπολογιστικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκαν συστηματικά οι συναρτήσεις Green ως βασικό εργαλείο για την επίλυση γραμμικών συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες. Η θεωρία των συναρτήσεων Green αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της εφαρμοσμένης μαθηματικής ανάλυσης, καθώς συνδυάζει τη θεωρητική αυστηρότητα με την άμεση εφαρμογή σε προβλήματα της φυσικής, της μηχανικής και της μηχανικής των υπολογιστών.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι απαραίτητες μαθηματικές έννοιες που αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο της εργασίας. Εξετάστηκαν οι χώροι δοκιμαστικών συναρτήσεων, η θεωρία των κατανομών, η συνάρτηση δέλτα του Dirac και η έννοια των ασθενών λύσεων. Οι έννοιες αυτές επέτρεψαν την αυστηρή μαθηματική διατύπωση προβλημάτων στα οποία οι κλασικές συναρτήσεις δεν επαρκούν για την περιγραφή των λύσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύχθηκαν οι ταυτότητες Green και παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο συνδέουν ολοκληρώματα στο εσωτερικό ενός χωρίου με ολοκληρώματα στο σύνορό του. Παράλληλα, μελετήθηκαν οι βασικές συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Neumann και Robin και αναδείχθηκε ο καθοριστικός τους ρόλος στη διαμόρφωση της αντίστοιχης συνάρτησης Green.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η θεωρία κατασκευής των συναρτήσεων Green για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και για ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στις ιδιότητες συμμετρίας, στη θεμελιώδη λύση του τελεστή Laplace και στη στενή σχέση των συναρτήσεων Green με τα προβλήματα Sturm--Liouville και τη φασματική θεωρία γραμμικών τελεστών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν χαρακτηριστικές εφαρμογές της θεωρίας σε φυσικά συστήματα. Εξετάστηκαν προβλήματα θερμικής διάχυσης, ηλεκτρικών κυκλωμάτων, μηχανικών ταλαντώσεων και ακουστικής διάδοσης κυμάτων, αναδεικνύοντας ότι οι ίδιες μαθηματικές αρχές μπορούν να περιγράψουν φαινόμενα διαφορετικής φυσικής προέλευσης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο υλοποιήθηκαν αριθμητικές εφαρμογές με χρήση του λογισμικού GNU Octave. Η χρήση υπολογιστικών εργαλείων επέτρεψε την αριθμητική προσέγγιση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων μέσω συναρτήσεων Green, καθώς και την παραγωγή γραφικών παραστάσεων για την οπτικοποίηση και τη μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων.

Οι εφαρμογές περιλάμβαναν το μονοδιάστατο και το δισδιάστατο πρόβλημα Poisson, την απόκριση κυκλώματος RC, τον μηχανικό ταλαντωτή με απόσβεση, τη διάδοση θερμότητας σε μονοδιάστατη ράβδο, την ακουστική διάδοση κυμάτων μέσω της συνάρτησης Green της εξίσωσης Helmholtz, καθώς και τη δισδιάστατη ακουστική σκέδαση από κυκλικό σκεδαστή.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσίασαν καλή συμφωνία με τις αντίστοιχες θεωρητικές προβλέψεις και ανέδειξαν τη χρησιμότητα των συναρτήσεων Green τόσο στην αναλυτική περιγραφή όσο και στην αριθμητική μελέτη γραμμικών διαφορικών προβλημάτων.

Η εργασία ανέδειξε ότι οι συναρτήσεις Green αποτελούν ένα ενιαίο θεωρητικό πλαίσιο για την επίλυση μεγάλου εύρους γραμμικών συνοριακών προβλημάτων. Η δυνατότητα μετατροπής μιας διαφορικής εξίσωσης σε ολοκληρωτική αναπαράσταση επιτρέπει όχι μόνο την αναλυτική μελέτη των λύσεων αλλά και την ανάπτυξη αποδοτικών αριθμητικών αλγορίθμων.

Παράλληλα, η σύγκριση με άλλες μεθόδους επίλυσης, όπως οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων στοιχείων και συνοριακών στοιχείων, έδειξε ότι καθεμία διαθέτει διαφορετικά πλεονεκτήματα και περιορισμούς. Οι συναρτήσεις Green υπερέχουν κυρίως στην αναλυτική περιγραφή γραμμικών προβλημάτων και αποτελούν τη θεωρητική βάση προηγμένων αριθμητικών τεχνικών, όπως η μέθοδος συνοριακών στοιχείων.

Η μελέτη αυτή επιβεβαιώνει ότι οι συναρτήσεις Green εξακολουθούν να αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της σύγχρονης εφαρμοσμένης μαθηματικής ανάλυσης. Η σύνδεση της θεωρίας με αριθμητικές υλοποιήσεις καθιστά τη μέθοδο ιδιαίτερα χρήσιμη τόσο στην επιστημονική έρευνα όσο και στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων μηχανικής και φυσικής.

Ως πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα μπορούν να αναφερθούν η μελέτη μη γραμμικών προβλημάτων, η ανάπτυξη συναρτήσεων Green για προβλήματα με μεταβαλλόμενους συντελεστές, η εφαρμογή της μεθόδου σε τρισδιάστατα προβλήματα σκέδασης, καθώς και η αξιοποίηση σύγχρονων υπολογιστικών τεχνικών υψηλής απόδοσης για την αριθμητική υλοποίηση πολύπλοκων ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων. Επιπλέον, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση των συναρτήσεων Green με σύγχρονες μεθόδους υπολογιστικής φυσικής και μηχανικής, καθώς και με εφαρμογές στην ακουστική, στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, στη βιοϊατρική μηχανική και στην επεξεργασία σημάτων.

Συνολικά, η παρούσα εργασία επιβεβαιώνει ότι οι συναρτήσεις Green αποτελούν ένα ιδιαίτερα ισχυρό θεωρητικό και υπολογιστικό εργαλείο, το οποίο συνδυάζει τη μαθηματική αυστηρότητα με την πρακτική εφαρμογή σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών και τεχνολογικών προβλημάτων.

Βιβλιογραφία

- [1] Dean G. Duffy, *Green's Functions with Applications*, Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [2] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., American Mathematical Society, 2010.
- [3] Richard Haberman, *Applied Partial Differential Equations*, 5th ed., Pearson, 2013.
- [4] Ivar Stakgold and Michael J. Holst, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 2011.
- [5] Gerald B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd ed., Princeton University Press, 1995.
- [6] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [7] F. G. Friedlander and Mark S. Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1998.
- [8] David Colton and Rainer Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 4th ed., Springer, 2019.
- [9] Rainer Kress, *Linear Integral Equations*, 3rd ed., Springer, 2014.
- [10] Frank Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer, 1998.
- [11] Randall J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2007.
- [12] Στέφανος Λ. Τραχανάς, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις: Σειρές Fourier και προβλήματα συνοριακών τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004.
- [13] Ευριπίδης Παπαμίχος, *Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με εφαρμογές στη μηχανική*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2004.