«Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο»

«Μαθηματικές Σπουδές στα Μαθηματικά»

Διπλωματική Εργασία

«Βέλτιστη Στρατηγική Συνταξιοδοτικού Προγράμματος Καθορισμένων Εισφορών με Στοχαστικά Επιτόκια»

«ΞΑΝΘΗ ΣΑΓΙΑ»

Επιβλέπων καθηγητής: «ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΣΕΒΡΟΓΛΟΥ»

Πάτρα, «ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022»

«Βέλτιστη Στρατηγική Συνταξιοδοτικού Προγράμματος Καθορισμένων Εισφορών με Στοχαστικά Επιτόκια»

«ΞΑΝΘΗ ΣΑΓΙΑ»

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
«ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΣΕΒΡΟΓΛΟΥ»
«Αναπλ. Καθηγ. Παν/μο Πειραιώς»

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
« ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ»
«Αναπλ. Καθηγ. Παν/μο Πειραιώς»

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλαν στην εκπόνηση της.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή, κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντας μου στο συγκεκριμένο θέμα, την επιστημονική του καθοδήγηση, την επιμονή του, τη συμπαράσταση του και το αμείωτο ενδιαφέρον του από την αρχή μέχρι το τέλος.

Επίσης ευχαριστώ τον Καθηγητή, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη για τις εποικοδομητικές του υποδείξεις ως προς την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, στο σύζυγο μου Δημήτρη και στους δυο υπέροχους γιους μου Νικόλα και Δημήτρη για την συμπαράσταση, την κατανόηση και την υπομονή τους καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το ζήτημα της διαχείρισης των συνταξιοδοτικών ταμείων. Εστιάζουμε σε σχέδια καθορισμένων συνεισφορών όπου υπάρχει εγγύηση που δίνεται στις παροχές και η εγγύηση εξαρτάται από το επίπεδο του στοχαστικού επιτοκίου όταν ο εργαζόμενος συνταξιοδοτείται.

Αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη σύνθεση αυτού του είδους συνταξιοδοτικού ταμείου μπορεί να χωριστεί σε τρία διαφορετικά μέρη: ένα δάνειο το οποίο ανέρχεται στην παρούσα αξία των εισφορών, μια ενδεχόμενη απαίτηση που παραδίδει την εγγύηση και ένα αμοιβαίο κεφάλαιο αντιστάθμισης κινδύνου. Ως εφαρμογή του μοντέλου μας παρουσιάζεται το μοντέλο επιτοκίου του Vasicek δείχνοντας την αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

«Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund»

«XANTHI SAGIA»

Abstract

This paper deals with the pension fund management issue. We focus on defined - contribution plans where a guarantee is given on the benefits, and the guarantee depends on the level of the stochastic interest rate when the employee retires. It is particularly shown that the optimal composition of this kind of pension fund can be divided into three different parts: a loan which amounts to the present value of the contributions, a contingent claim delivering the guarantee and a hedging fund. A Vasicek interest rate model is considered as an illustration of our analysis.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Το Συνταξιοδοτικό ζήτημα έχει γίνει το πιο σημαντικό θέμα των τελευταίων χρόνων. Η σύνταξη θεωρείται σαν μια μορφή αναγκαστικής αποταμίευσης. Τα συστήματα συνταξιοδοτικού εισοδήματος θεωρείται ότι χωρίζονται σε τρεις πυλώνες

Στην εργασία αυτή δε θα εξετάσουμε το πρόβλημα διαχείρισης των συνταξιοδοτικών ταμείων αλλά θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο σχέδιο καθορισμένων συνεισφορών και θα προτείνουμε τη βέλτιστη στρατηγική συνταξιοδοτικών ταμείων από θεωρητική και από τεχνική άποψη.

Το θέμα της επιλογής χαρτοφυλακίου μελετήθηκε εκτενώς .Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα όλων των μελετών που έχουν γίνει πάνω σε αυτό το θέμα παρατηρούμε ότι η επένδυση των συνταξιοδοτικών ταμείων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον τύπο των σχεδίων και πως το πρόγραμμα καθορισμένων συνεισφορών δεν διαφέρει πολύ από μια ατομική απόφαση αποταμίευσης.

Στην πραγματικότητα σε μια τέλεια και χωρίς τριβές χρηματοπιστωτική αγορά είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι ο διευθυντής εργάζεται για τον συνεισφέροντα. Αυτό θα μπορούσε να γενικευθεί και σε ένα παγκόσμιο συνταξιοδοτικό ταμείο διαχείρισης αθροίζοντας τον στόχο για κάθε εργαζόμενο υπό ορισμένες συνθήκες.

Η εργασία μας διαρθρώνεται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στο συνταξιοδοτικό σύστημα στην Ελλάδα. Ποιος είναι ο ρόλος των συνταξιοδοτικών συστημάτων και ποιοι είναι οι τρείς πυλώνες στους οποίους χωρίζουμε τα συνταξιοδοτικά εισοδήματος . Αναφέρουμε τα κύρια χαρακτηριστικά του οικονομικού περιβάλλοντος, ποιο είναι το οικονομικό και το χρηματοοικονομικό υπόβαθρο καθώς και πως γίνεται η κατανομή των περιουσιακών στοιχείων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται βασικές μαθηματικές έννοιες της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Ο ορισμός των εννοιών πιθανότητα, κατανομή ή πυκνότητα τυχαίας μεταβλητής, σ-άλγεβρα, δεσμευμένη πιθανότητα, μέση τιμή, διακύμανση. Γίνεται μία εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες και συγκεκριμένα στην αριθμητική κίνηση Brown και στη γεωμετρική κίνηση Brown. καθώς και διάφορα παραδείγματα για την διευκόλυνση του αναγνώστη στην κατανόηση των κεφαλαίων που θα ακολουθήσουν.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στο μαθηματικό μοντέλο ανάλυσης, στη χρηματοπιστωτική αγορά καθώς και στο κριτήριο βελτιστοποίησης.

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

Ακολουθούν κάποια παραδείγματα:

ΔΕ	Διπλωματική Εργασία
ΕΑΠ	Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
ΘΕ	Θεματική Ενότητα
ΠΕ	Πτυχιακή Εργασία
ΠΣ	Πρόγραμμα Σπουδών
ΣΥΝ	Συντονιστής

.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΤΟ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

1.1 Ο ρόλος των συνταξιοδοτικών συστημάτων

Οι προοπτικές για τα παγκόσμια συνταξιοδοτικά συστήματα και τις μεταρρυθμίσεις τους, οι οποίες άρχισαν να εμφανίζονται αμέσως μετά από τις αρχές της δεκαετίας του 1990 έχουν μεταβληθεί εμφανώς με την πάροδο του χρόνου. Η πιο πρόσφατη επαναξιολόγηση τους βασίζεται στην έντονη επιρροή τους από τη συνεχιζόμενη παγκόσμια χρηματοοικονομική κρίση και τις επιπτώσεις της στις χρηματοδοτούμενες και μη χρηματοδοτούμενες συντάξεις. Μετά την πτώση του Σιδηρού Παραπετάσματος και στη συνέχεια τη μετακίνηση στην Κεντρική και Ανατολική Ευρώπη μεταβλήθηκε ουσιαστικά ο σχεδιασμός για τις οικονομίες της αγοράς αλλά και για το μέλλον των συνταξιοδοτικών συστημάτων, με βάση τον τρόπο προσέγγισης τους από τους ειδικούς αλλά και από τις κυβερνήσεις [6]. Οι σχεδιαστές του εμφανίστηκαν ευφυείς και αρκετά βέβαιοι όταν ξεπεράστηκε η αρχική κρίση, υποστηρίζοντας ότι είναι απαραίτητη η μεταφορά των κύριων τμημάτων των συνταξιοδοτικών εισοδημάτων από τον δημόσιο τομέα στον ιδιωτικό τομέα. Προτεραιότητά τους ουσιαστικά αποτελούσε η προσπάθεια να αντιμετωπιστούν η μη δημοσιονομική βιωσιμότητα και προβλεπόμενη περαιτέρω γήρανση του πληθυσμού, σε συνδυασμό, όμως, με την επιτάχυνση των οικονομικών [10].

Η ανάπτυξη της αγοράς αναμενόταν να πυροδοτήσει ουσιαστικά υψηλότερη οικονομική ανάπτυξη για τη συγχρηματοδότηση ορισμένων, με βάση το κόστος μετάβασης. Οι συγκεκριμένες φιλοδοξίες απορρέουν από διάφορες πηγές, με πιο χαρακτηριστικά την επιτυχημένη Χιλιανή μεταρρύθμιση του συνταξιοδοτικού συστήματος και παρόμοιες προσπάθειες μεταρρύθμισης στη Λατινική Αμερική. Στη συνέχεια σε δημοσίευση το 1994 της Παγκόσμιας Τράπεζας προτεινόταν ένα συνταξιοδοτικό σύστημα πολλαπλών πυλώνων με σημαντική μετατόπιση από το δημόσιο, με βάση την προσπάθεια να προωθηθούν όχι μη χρηματοδοτούμενα προγράμματα καθορισμένων παροχών αλλά ιδιωτικά διαχειριζόμενα και πλήρως χρηματοδοτούμενα καθορισμένα συστήματα συνεισφορών . Με τον τρόπο αυτό το ενδιαφέρον εστιάστηκε στην ανάδειξη του ρόλου της αγοράς και της χρηματοπιστωτικής διαμεσολάβησης αντί της δημόσιας παρέμβασης. Αυτό το όραμα πολιτικής επικράτησε σε πολλές κράτη στον διεθνή χώρο, καθώς μεταξύ 1988 και 2008, είκοσι εννέα κράτη ακολούθησαν το παράδειγμα της Χιλής, προωθώντας συστημικές μεταρρυθμίσεις και καθιερώνοντας βασικό πυλώνα κεφαλαιοποίησης συνταξιοδότησης [19].

Πριν την εμφάνιση της διεθνούς οικονομικής κρίσης, ακόμη περισσότερες χώρες ήταν έτοιμες για μεταρρυθμίσεις. Η παγκόσμια επαναξιολόγηση της προσέγγισης πολιτικής για τη μεταρρύθμιση του συνταξιοδοτικού συστήματος είναι σε γενικές γραμμές αποτέλεσμα των παρακάτω τριών αλλαγών :

- αντιληπτές και παράλληλα πραγματικές αλλαγές σε περιβάλλοντα παροχής δυνατοτήτων
- διαρκείς μεταρρυθμιστικές ανάγκες
- αναπροσαρμογή των στόχων

Αυτή η επαναξιολόγηση οδήγησε σε ανατροπές των μεταρρυθμίσεων σε λίγα κράτη, καθώς, επίσης, και σε προσωρινά ή μόνιμα μειωμένο χρηματοδοτούμενο πυλώνα συνεισφορών σε άλλα, αλλά όχι σε μία διεθνή απόρριψη της συγκεκριμένης προσέγγισης. Η επαναξιολόγηση ενίσχυσε ουσιαστικά την ώθηση για εναλλακτικές ή συμπληρωματικές προσεγγίσεις μεταρρύθμισης, όπως η μη χρηματοοικονομική καθορισμένη συνεισφορά (NDC) και τα προγράμματα αντιστοίχισης καθορισμένης συνεισφοράς (MDC). Παρόλο που αυτές οι συγκεκριμένες νέες προσεγγίσεις θα έπρεπε να συμβάλουν στην προώθηση των συνταξιοδοτικών συστημάτων προς μεγαλύτερη κάλυψη και βιωσιμότητα, παρουσιάζονται πολλά ζητήματα που εξακολουθούν να περιμένουν λύσεις, όπως η αντιμετώπιση της αβεβαιότητας σχετικά με την αύξηση της μακροζωίας [11].

Έχουν υπάρξει πολυάριθμες τυπολογίες συνταξιοδοτικών συστημάτων. Η ορολογία που χρησιμοποιείται σε αυτές τις κατηγορίες έχει γίνει πολύ συγκεχυμένη. Ίσως η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη τυπολογία είναι η ταξινόμηση των «τριών πυλώνων» της Παγκόσμιας

Τράπεζας [18], σύμφωνα με την οποία υποστηρίζεται ότι ένα σύστημα δημόσιας διαχείρισης με υποχρεωτική συμμετοχή και περιορισμένο στόχο μείωσης της φτώχειας μεταξύ των παλαιών [1ος πυλώνας], ένα σύστημα υποχρεωτικής αποταμίευσης με ιδιωτική διαχείριση [2ος πυλώνας], αλλά και η εθελοντική αποταμίευση [3ος πυλώνας]. Επόμενοι μελετητές αναλυτές διέθεσαν όλα τα δημόσια συνταξιοδοτικά προγράμματα στον πρώτο πυλώνα. Αυτό έχει συμπεριλάβει δημόσια συστήματα που σχετίζονται με τα κέρδη, τα οποία σίγουρα δεν επιβεβαιώνουν τον συσχετισμό τους με τον αρχικό ορισμό του πρώτου πυλώνα. Η πιο πρόσφατη προσθήκη θεωρείται ο «μηδενικός πυλώνας», ο οποίος περιλαμβάνει μη ανταποδοτικά συστήματα που στοχεύουν στην ανακούφιση της φτώχειας μεταξύ των μεγαλύτερων ανθρώπων [17].

Υπάρχουν 18 κράτη του ΟΟΣΑ, τα οποία αξιοποιούν το συγκεκριμένο συνταξιοδοτικού πρόγραμμα. Οι κατώτατες συντάξεις είναι παρόμοιες με τα στοχευμένα σχέδια, καθώς στοχεύουν επίσης στην πρόληψη της πιθανής πτώσης των συντάξεων κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο. Αλλά η θεσμική συγκρότηση και η επιλεξιμότητα παρουσιάζονται με διαφορετικό τρόπο, καθώς οι συνθήκες είναι διαφορετικές. Οι κατώτατες συντάξεις σε γενικές γραμμές αποτελούν μέρος των κανόνων της δεύτερης βαθμίδας, συνταξιοδοτικής διάταξης που σχετίζεται με τις αποδοχές, ενώ σαφής είναι η προσπάθεια στήριξης και διεύρυνσης των συνταξιοδοτικών προγραμμάτων σε διεθνές επίπεδο [16].

1.2 Το συνταξιοδοτικό σύστημα στην Ελλάδα

Η Ελληνική οικονομία κατάφερε να ανακάμψει με σταδιακό τρόπο από μια οικονομική ύφεση με πρωτόγνωρη διάρκεια και παράλληλα ένταση. Ανάμεσα στις μεγαλύτερες προκλήσεις για τις προοπτικές μακροχρόνιας ανάπτυξης, συμπεριλαμβάνονται [19]:

- ο περιορισμένος δημοσιονομικός χώρος
- η γήρανση του πληθυσμού
- το χαμηλό επίπεδο των επενδύσεων

- τα μεγάλα ποσοστά ανεργίας στην Ελλάδα

Ως προς την αγορά εργασίας, έμφαση δίνεται στο πολύ υψηλό ποσοστό ανεργίας, στη χαμηλή συμμετοχή αλλά και στη συρρίκνωση του εργατικού δυναμικού Παρά τη βελτίωση που έχει εμφανιστεί τις τελευταίες δεκαετίες, το ποσοστό αυτό θεωρεία αρκετά χαμηλό σε ομάδες πληθυσμού όπως οι γυναίκες με ποσοστό 60% και στη συνέχεια οι νέοι, ηλικίας έως 25 ετών (25%).Τα προβλήματα που καλείται να διαχειριστεί το Ασφαλιστικό Σύστημα στη χώρα μας είναι τα εξής:

- η αποδιοργάνωση η οποία μπορεί να αποδοθεί στην πολυδιάσπαση, καθώς, επίσης, την πολυνομία και την πολυπλοκότητα που διακρίνουν τον τρόπο λειτουργίας του ασφαλιστικού συστήματος

- έλλειψη ανταποδοτικότητας, καθώς οι εισφορές δεν μπορούν να συσχετισθούν με τις παροχές

- πολυδιάσπαση και σε αρκετές περιπτώσεις σπατάλη, καθώς το ασφαλιστικό σύστημα κατακερματίζεται σε διάφορες ομάδες, με αποτέλεσμα να οδηγείται σε αναποτελεσματικές επενδύσεις εξαιτίας του χαμηλού ύψους των αποθεματικών των διαφόρων κλάδων

- νομοθετική πολυπλοκότητα, η οποία οδηγεί συχνά στην εμφάνιση αδιαφάνειας αλλά και αδικίας, καθώς εργαζόμενοι που έχουν τον ίδιο μισθό, τα ίδια έτη υπηρεσίας και τις ίδιες εισφορές λαμβάνουν διαφορετικές συντάξεις

Λίγο πριν την εμφάνιση της οικονομικής κρίσης στη χώρα μας είχαν εμφανιστεί 175 ασφαλιστικά ταμεία , από τα 23 είναι κύριας ασφάλισης, ενώ 40 είναι επικουρικής ασφάλισης, 18 ταμεία ασθένειας, 32 ταμεία πρόνοιας, Αυτά τα ταμεία υπάγονται σε διαφορετικές αρχές και σε διαφορετικά υπουργεία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αποστασιοποίηση του κράτους, των εργοδοτών και των ασφαλισμένων, καθώς η κοινωνία δεν είχε την κατάλληλη ενημέρωση για τη διάσταση του προβλήματος της κοινωνικής ασφάλισης. Επίσης, σημαντικές θεωρούνται η εισφοροδιαφυγή και η εισφοροαποφυγή, καθώς εργοδότες και επιχειρήσεις σε αρκετές περιπτώσεις εισφοροδιαφεύγουν, αποσυνδέοντας με τον τρόπο αυτό τα κέρδη από τις υποχρεώσεις τους προς την κοινωνική ασφάλιση [19]

Παρά την πρόοδο, όμως, η οποία έχει συντελεστεί την τελευταία δεκαετία στη χώρα μας ως προς τον εξορθολογισμό του συνταξιοδοτικού συστήματος, εξακολουθούν να εμφανίζονται πολυάριθμες και σημαντικές προκλήσεις, κυρίως, ως προς τα χαμηλά κίνητρα των σημερινών νέων για ασφάλιση, σε συνδυασμό με τη μειωμένη εμπιστοσύνη τους ως προς τη λήψη αξιοπρεπούς σύνταξης μελλοντικά, Επίσης, σημαντικές προκλήσεις θεωρούνται η μικρή συμμετοχή του κεφαλαιοποιητικού χαρακτήρα στο συνολικό σύστημα, αλλά παράλληλα και το ιδιαίτερα υψηλό επίπεδο, που εμφανίζουν οι υποχρεωτικές εισφορές διανεμητικού χαρακτήρα. Σε αυτό το πλαίσιο, σημαντική θεωρείται η δημόσια διατύπωση ποικίλων προτάσεων μεταρρύθμισης με στόχο την επίτευξη της βελτίωσης των κινήτρων των νέων για ασφάλιση και ενίσχυσης της αποταμίευσης και των επενδύσεων στον τομέα της οικονομίας, ενδυναμώνοντας τον κεφαλαιοποιητικό χαρακτήρα ου συστήματος. Για τον λόγο αυτό σημαντικές μπορούν να θεωρηθούν οι προτάσεις για [20]

- Παραμετρικές αλλαγές στην Κύρια ασφάλιση, προκειμένου να ενισχυθεί ο ανταποδοτικός χαρακτήρας της (πρώτος πυλώνας)

- Δομική μεταρρύθμιση της Επικουρικής ασφάλισης, έτσι ώστε να μετατραπεί σε υποχρεωτικό κεφαλαιοποιητικό πυλώνα (δεύτερος πυλώνας)

- ενδυνάμωση του προαιρετικού κεφαλαιοποιητικού πυλώνα ασφάλισης, εισάγοντας φορολογικά κίνητρα (τρίτος πυλώνας)

Στα πλαίσια της δημοσιονομικής προσαρμογής, τα τελευταία χρόνια έχουν παρουσιαστεί σημαντικές παρεμβάσεις οι οποίες έχουν περιορίσει σε μεγάλο βαθμό τη δυναμική αύξησης της συνταξιοδοτικής δαπάνης, βελτιώνοντας με τον τρόπο αυτό τους δείκτες βιωσιμότητας του συστήματος, παρόλο που άσκησαν σημαντική επιρροή στην εμπιστοσύνη των πολιτών απέναντι στο σύστημα εξαιτίας της συχνής. σπασμωδικής λειτουργίας τους. Ταυτόχρονα, ο πληθυσμός στην στη χώρα μας θεωρείται ότι γηράσκει με πιο γρήγορους ρυθμούς από τον Ευρωπαϊκό μέσο όρο, και το ελληνικό συνταξιοδοτικό σύστημα θεωρείται ιδιαίτερα δαπανηρό ως προς τα υπόλοιπα ευρωπαϊκά κράτη, τόσο ως προς τις υποχρεωτικές εισφορές που καταβάλλονται από τους ασφαλισμένους, καθώς, επίσης, και ως προς τη δημόσια δαπάνη για παροχές. Τέλος, το συνταξιοδοτικό σύστημα σήμερα στην Ελλάδα βασίζεται σχεδόν αποκλειστικά σε έναν διανεμητικό πρώτο πυλώνα ασφάλισης, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί πιο ευάλωτος στη δημοσιονομική και δημογραφική πίεση, σε σχέση με συστήματα άλλων Ευρωπαϊκών κρατών, που καλούνται να τον συμπληρώσουν με κεφαλαιοποιητικούς πυλώνες [20].

1.3 Οικονομικό και χρηματοοικονομικό υπόβαθρο

Η έρευνα για τις συντάξεις έχει αποτελέσει ένα σημαντικό θέμα τα τελευταία χρόνια, ιδιαίτερα στον χρηματοοικονομικό τομέα. Η λειτουργία των συνταξιοδοτικών ταμείων θεωρείται ουσιαστικά μία μορφή αναγκαστικής αποταμίευσης. Σύμφωνα με τον Davis (1995) υπάρχει μια επισκόπηση των οικονομικών θεμάτων που μπορούν να συσχετισθούν με την ανάπτυξη των κεφαλαιοποιητικών συνταξιοδοτικών συστημάτων για τη συμπλήρωση της κοινωνικής ασφάλισης. Τα συστήματα συνταξιοδοτικού εισοδήματος γενικότερα θεωρούνται ότι στηρίζονται στους τρεις παρακάτω πυλώνες:

- εθνικά σχέδια κοινωνικής ασφάλισης,
- συμπληρωματικά συνταξιοδοτικά συστήματα και
- ιδιωτικά συνταξιοδοτικά ταμεία.

Οι οικονομικές αρχές γενικά χωρίζονται ως «Pay-as-you-go» και σε χρηματοδότηση. Ειδικότερα, το Pay-as-you-go σημαίνει ότι οι εισφορές των εργαζομένων χρησιμοποιούνται για την πληρωμή των διαφόρων συνταξιοδοτικών παροχών σε συνταξιούχους, ενώ η χρηματοδότηση σημαίνει ότι οι εισφορές που καταβάλλονται από τους συνεισφέροντες ενός συστήματος μπορούν να συσσωρευθούν και να επανεκτιμηθούν για τη δημιουργία κεφαλαίου που χρησιμοποιείται για την αγορά προσόδου όταν οι συνεισφέροντες συνταξιοδοτούνται. Όταν δημιουργείται, κατά συνέπεια, ένα κεφαλαιοποιητικό συνταξιοδοτικό πρόγραμμα, η πρώτη απόφαση είναι το είδος του προγράμματος που θα προσφέρει: καθορισμένο όφελος ή καθορισμένη συνεισφορά [4]

Ένα πρόγραμμα καθορισμένων παροχών αποτελεί ουσιαστικά ένα συνταξιοδοτικό σύστημα όπου οι παροχές καθορίζονται εκ των προτέρων από τον ανάδοχο. Στο πλαίσιο αυτό οι συνεισφορές ρυθμίζονται και στη συνέχεια προσαρμόζονται, προκειμένου να μπορεί να διασφαλιστεί ότι το καθεστώς παραμένει σε ισορροπία. Ένα πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών αποτελεί ουσιαστικά συνταξιοδοτικό σύστημα όπου μόνο οι εισφορές είναι σταθερές και, κατά συνέπεια, εξαρτώνται οι παροχές αποκλειστικά για τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων του ταμείου. Το μόνο πράγμα που μπορεί να καθορίσει ένας εργαζόμενος είναι να προχωρήσει με τον τρόπο αυτό σε λογικές υποθέσεις σχετικά με το ποσοστό αναπλήρωσης, δηλαδή το ποσοστό του εισοδήματός του/της που θα μπορεί να αντικατασταθεί από τη σύνταξη.

Ως προς την ιστορίας τους, τα προγράμματα καθορισμένων παροχών ήταν τα πιο δημοφιλή [9]. Παρόλα αυτά, όμως, τα περισσότερα από τα σχέδια που δημιουργήθηκαν τα τελευταία χρόνια έχουν βασιστεί σε καθορισμένες εισφορές, όπως Ατομικοί Λογαριασμοί Συνταξιοδότησης στις Η.Π.Α. κ αι Κατάλληλη Προσωπική Σύνταξη στο Η.Β. Μέχρι τώρα, το γαλλικό συνταξιοδοτικό σύστημα λειτουργούσε με τη μορφή του Pay-as-you-go. Παρόλο που τα πλεονεκτήματα αυτού του συστήματος θεωρούνταν σημαντικά στο παρελθόν, η δημογραφική και οικονομική κατάσταση έχει μεταβληθεί, με αποτέλεσμα να θεωρείται ότι η αποτελεσματικότητα του γαλλικού συστήματος συνταξιοδοτικών αποταμιεύσεων είναι τώρα υπό αμφισβήτηση. Πράγματι, η ηλικιακή δομή του πληθυσμού και η αναλογία του πληθυσμού σε ηλικία εργασίας προς το συνολικό πληθυσμό επιβεβαιώνουν τα όρια αυτού του συστήματος. Η αναλογία συνταξιούχων προς εργαζομένους ήταν περίπου 50% το 2020, ενώ υπολογίζεται ότι το 2040, ο αριθμός αυτός θα φτάσει στο 70%, αν υποθέσουμε ότι η ηλικία συνταξιοδότησης δεν μεταβάλλεται [4].

Σε σχετική τους περιγραφική έρευνα οι [4] παρουσίασαν επίσης ένα παράδειγμα μεθόδων λειτουργίας για τη διαχείριση συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένων εισφορών. Αρκετοί μελετητές αναφέρθηκαν στον τρόπο διαχείρισης του επενδυτικού κινδύνου για συνταξιοδοτικά συστήματα καθορισμένων εισφορών, ενώ ταυτόχρονα προτάθηκαν διάφοροι τρόποι για την επίτευξη αποτελεσματικών ελλείψεων επενδύσεων μειώνοντας με τον τρόπο το επίπεδο των μελλοντικών δεδουλευμένων οφελών, καθώς, επίσης, και ένα ντετερμινιστικό μοντέλο για την υλοποίηση ενός συμβιβασμού ανάμεσα στο καθορισμένο όφελος και στις αρχές της καθορισμένης συνεισφοράς. Σε γενικές γραμμές μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων είναι απαραίτητο να παρατηρηθεί ότι η πολιτική της επένδυσης των συνταξιοδοτικών ταμείων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον τύπο των διαφόρων σχεδίων. Πρέπει να επισημανθεί, επίσης, ότι στο πλαίσιο της διαδικασίας χρηματοδότησης καθορισμένων παροχών για το πρόγραμμα καθορισμένων συνεισφορών, η επενδυτική πολιτική δεν διαφέρει πολύ από μία ατομική απόφαση αποταμίευσης. Είναι σαφές ότι η πολιτική καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τον τύπο των διαφόρων σχεδίων, ενώ είναι απαραίτητη η μελέτη της συγκεκριμένης διαδικασίας [12]. Επίσης, οι [8] επισημαίνουν ως σημαντικότερο ζήτημα στη διαχείριση κινδύνου ενός συνταξιοδοτικού ταμείου την επιλογή ενός κοινού στόχου, καθώς τις περισσότερες φορές τα μεμονωμένα αυτά προβλήματα μπορεί να γενικευτούν στη διαχείριση ενός διεθνούς συνταξιοδοτικού ταμείου, αθροίζοντας με τον τρόπο αυτό την κατανομή-στόχο για κάθε εργαζόμενο υπό ορισμένες προϋποθέσεις.

1.4 Κατανομή περιουσιακών στοιχείων-διαχείριση του επιτοκίου

Επειδή θεωρείται ότι η περίοδος εισφορών σε ένα συνταξιοδοτικό ταμείο είναι πολύ μεγάλη και πιο συγκεκριμένα διαρκεί γενικά από 20 έως 40 έτη, η διαχείριση του σχεδίου της καθορισμένης εισφοράς μπορεί να θεωρηθεί ένα μακροπρόθεσμο επενδυτικό πρόβλημα. Σε γενικές γραμμές το ζήτημα των σταθερών επιτοκίων είναι πολύ δύσκολο να γίνει αποδεκτό στον τομέα των συνταξιοδοτικών αποταμιεύσεων. Σε θεωρητικό επίπεδο, η εισαγωγή στοχαστικών επιτοκίων στο μοντέλο της αγοράς αποτελεί τον μόνο τρόπο διαφοροποίησης των μετρητών από τα ομόλογα και εμφανής είναι η παροχή ορισμένων αποτελεσμάτων σχετικά με τη διαχείριση του κινδύνου επιτοκίου επενδύσεων σε μακροπρόθεσμη βάση. Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους διαχειριστές χαρτοφυλακίου συχνά ακολουθούν «παραδοσιακούς κανόνες» που μπορούν να ερμηνευθούν, μόνο εάν συμπεριληφθεί κάποια μεταβλητότητα στα επιτόκια.

Το κλασικό μοντέλο δυναμικής βελτιστοποίησης παρουσιάζεται από το [13], ενώ οι [1]έχουν αναλύσει τις αποτελεσματικές στρατηγικές δυναμικής μέσης διακύμανσης και έχουν παρουσιαστεί ρητά αποτελέσματα με το μοντέλο επιτοκίου Vasicek. Έτσι, το στατικό αποδοτικό μοντέλο που προτείνεται από τον Markowitz. Έχει διερευνήθει σε σχετική μελέτη [1] ένα παρόμοιο πρόβλημα από άποψη διαχείρισης κινδύνου. Στη συνέχεια αναλύθηκε ένα επενδυτικό πρόβλημα [7] που περιλαμβάνει το βραχυπρόθεσμο και μακροχρόνιο επιτόκιο και τη μερισματική απόδοση ως μεταβλητή κατάσταση, χρησιμοποιώντας διάφορα εμπειρικά δεδομένα. Τις περισσότερες φορές οι μετοχές αποτελούν την πιο ασφαλή και την υψηλότερης απόδοσης κατηγορία περιουσιακών στοιχείων μακροπρόθεσμα. Με τη χρησιμοποίηση ενός δυναμικού μοντέλου διαχείρισης μπορούν να υπάρξουν καλύτερες πληροφορίες για την εξέλιξη των στρατηγικών, επισημαίνοντας ουσιαστικά ότι το αμοιβαίο κεφάλαιο είναι απαραίτητο να επιδιώξει την ανάπτυξη στην αρχή της περιόδου εισφορών, επενδύοντας σχεδόν εξ ολοκλήρου σε μετοχές. Με την ολοκλήρωση αυτής της διαδικασίας, το χαρτοφυλάκιο προστατεύεται σταδιακά αυξάνοντας το ποσοστό των ομολόγων και των μετρητών. Αυτή, λοιπόν, η λεγόμενη «επενδυτική στρατηγική στον τρόπο ζωής», καταλήγει σε μια στρατηγική διαχείρισης και μπορεί να θεωρηθεί απόλυτα συνεπής με τον στόχο των συντελεστών. Οι

[6] σε σχετική μελέτη εξέτασαν την απόφαση επένδυσης, που αντιμετωπίζει επενδυτής συνταξιοδοτικού συστήματος καθορισμένης εισφοράς κοντά στη συνταξιοδότηση όταν χρησιμοποιεί είτε εμπειρικά δεδομένα ή σε κάποιες περιπτώσεις στοχαστική μοντελοποίηση για την εύρεση κατανομών των αποτελεσμάτων.

1.5 Μειονέκτημα προστασίας για τον συνεισφέροντα

Η νέα δημοτικότητα, η οποία αναπτύσσεται για τα προγράμματα καθορισμένης συνεισφοράς έχει δύο βασικούς λόγους. Αρχικά, ο υπάλληλος γνωρίζει σε όλες τις στιγμές την αξία του λογαριασμού συνταξιοδότησής του, ενώ το σχέδιό του μεταφέρεται πιο εύκολα από μια εταιρεία σε μια άλλη. Εξάλλου, υποστηρίζεται ότι ο χορηγός δεν χρειάζεται να φέρει κανέναν κίνδυνο που συνδέεται με το συνταξιοδοτικό σύστημα της επιχείρησης. Αντίθετα, όμως, ο συνεισφέρων παρουσιάζεται εκτεθειμένος με πιο άμεσο τρόπο στον οικονομικό κίνδυνο του προγράμματος. Για τον λόγο αυτό απαραίτητο είναι να συμπεριληφθούν (ορισμένα δικαιώματα αγοράς στο αμοιβαίο κεφάλαιο [4].

Στην πραγματικότητα, ένα σημαντικό ζήτημα κατά τη διάρκεια της προσπάθειας να μελετηθούν τα συνταξιοδοτικά αποταμιευτικά προϊόντα μπορεί να θεωρηθεί το ότι ο απώτερος στόχος ενός συνταξιοδοτικού ταμείου αφορά ουσιαστικά την προσπάθεια να χρηματοδοτήσει τη συνταξιοδότηση και την πρόσοδο που δίνεται από αυτό το ταμείο, αποτελώντας, κατά συνέπεια, την πιο σημαντική πηγή κερδών. Με ένα πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών, η πρόσοδος είναι γνωστή μόνο στην ημερομηνία συνταξιοδότησης και στη συνέχεια μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αξία. Αν και η πιθανότητα ενός τέτοιου δεν μπορεί να θεωρηθεί υψηλή, όμως, το ταμείο μπορεί να φτάσει σε ένα περιορισμένο επίπεδο, καθώς ο συνταξιούχος δεν μπορεί να καλύψει τις στοιχειώδεις ανάγκες του. Στο πλαίσιο αυτό η συγκεκριμένη μορφή προστασίας είναι τότε μία πολύ χρήσιμη καινοτομία για σχέδια καθορισμένων συνεισφορών. Επειδή, λοιπόν, η προστασία πρέπει να τεθεί στην πρόσοδο, η οποία αποτελεί βασικό ζήτημα για τον συνεισφέροντα, η εγγύηση καθορίζεται ουσιαστικά από το επιτόκιο που παρατηρείται κατά τη συνταξιοδότηση. Ο σχεδιασμός ενός τέτοιου προϊόντος αποταμίευσης είναι πράγματι προσαρμοσμένος στις προσδοκίες των συνεισφερόντων, αλλά είναι αρκετά δύσκολο να το διαχειριστεί: η σύνθεση του ταμείου και για τον λόγο αυτό έμφαση πρέπει να δοθεί στη διαρκή εξέλιξή τους για να εκπληρωθεί η εγγύηση και να υπάρξουν θετικές επιπτώσεις από τις αυξήσεις του χρηματιστηρίου [4]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ.

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερόμαστε στα βασικότερα κομμάτια των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε μια στοιχειώδη εισαγωγή τους. Μαζί με κάθε ορισμό θα δίνεται και ένα μικρό παράδειγμα έτσι ώστε να είναι ευκολότερη η κατανόηση των αντίστοιχων εννοιών και να γίνει κατανοητό πόσες πολλές εφαρμογές έχουν αυτές οι δύο επιστήμες ακόμα και στα προβλήματα της καθημερινότητας.

2.1 ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι ένα από τους κλάδους των Μαθηματικών που βοηθούν στην ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δεν την κάνει απλά ένα βοηθητικό εργαλείο. Το αντίθετο, θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε σαν ένα αυτοτελή κλάδο των Μαθηματικών, με τους δικούς του προβληματισμούς. Η θεωρία Πιθανοτήτων θα μπορούσε να χαρακτηριστεί σαν την ΄΄ κοινή λογική ΄΄ που ανάχθηκε σε αριθμητικούς υπολογισμούς προσπαθώντας να βοηθήσει τον κοινό νου να εκτιμήσει αυτό που καταλαβαίνει ενστικτωδώς αλλά δεν μπορεί να εξηγήσει.

2.1.1. σ-άλγεβρα

Χρησιμοποιώντας τη λέξη πιθανότητες θέλουμε να δείξουμε πόσο δύσκολο ή εύκολο είναι να συμβεί κάποιο γεγονός. Αυτό σημαίνει ότι η λέξη γεγονός θα πρέπει να οριστεί με κατάλληλο τρόπο.

Ορισμός 1 (σ-άλγεβρα). Έστω ένα τυχαίο μη κενό σύνολό Ω και οικογένεια Δ, υποσυνόλων του Ω, ώστε $\Delta \subset P(\Omega)$. Ονομάζουμε σ-άλγεβρα στον Ω όταν η Δ περιέχει
το $\emptyset$, και είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και τις αριθμήσιμες ενώσεις,
δηλαδή όταν:

- το κενό ανήκει στο Δ
- Αν $B \in \Delta$, τότε $B' \in \Delta$
- Αν μια τυχαία ακολουθία$\{B_n, n \geq 1\}$ στην Δ, τότε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Delta$

Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι ΄αν η Δ περιέχει το $\emptyset$' τότε η Δ θα περιέχει και το Ω αφού $\emptyset^c = \Omega$

Επίσης, η κλειστότητα ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις μπορεί να αντικατασταθεί με την κλειστότητα ως προς τις αριθμήσιμες τομές, αφού:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c.$$

Παράδειγμα 1. Έστω ένα τυχαίο μη κενό σύνολο Ω , και $\Delta_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ η μικρότερη σ-άλγεβρα και $\Delta_2 = P(\Omega)$ η μεγαλύτερη σ-άλγεβρα του Ω Προφανώς, μια (τυχούσα) σ-άλγεβρα Δ, επί του Ω, ικανοποιεί την: $\Delta_1 \subset \Delta \subset \Delta_2$.

Παράδειγμα 2. Έστω $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ και:

$\Delta = \{K \subset \mathbb{N}: K \text{ πεπερασμένο, ή } K^c \text{ πεπερασμένο}\}.$

Το Δ είναι «πεπερασμένο» όταν περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, ή είναι το $\emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $\emptyset \in \Delta$, ότι αν $K \in \Delta$, τότε $K^c \in \Delta$ και τέλος ότι αν $K, M \in \Delta$, τότε $K \cup M \in \Delta$. Όμως, η Δ δεν είναι σ-κλειστή, αφού π.χ.:

$$\cup_{n=1}^{\infty}\{2n\} = \{2,4,6,\dots\} \notin \Delta,$$

ενώ τα σύνολα $K_n = \{2n\} \in \Delta$ για κάθε $n = 1,\ 2,\ \dots$

2.1.2 Δειγματικός Χώρος

Σε ένα πείραμα τύχης τα αποτελέσματα του δεν μπορούμε να τα προβλέψουμε με βεβαιότητα εκ των προτέρων. Παρόλα αυτά όμως όλα αυτά τα δυνατά αποτελέσματα θα μπορούσαμε να τα βάλουμε σε ένα σύνολο. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και τον συμβολίζουμε με το γράμμα Ω.
Αυτό σημαίνει ότι αν σε ένα πείραμα τύχης τα δυνατά αποτελέσματα είναι $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\kappa$, ο δειγματικός χώρος θα είναι το σύνολο:
$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots , \omega_\kappa\}$.

Παράδειγμα 3. Έστω μία οικογένεια με 2 παιδιά. Να γραφεί χώρος που μας δίνει τα δυνατά αποτελέσματα ως προς το φύλο των 2 παιδιών

Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο θα πρέπει να κάνουμε ένα δενδροδιάγραμμα

Ω={ΚΑ,ΚΚ,ΑΚ,ΑΑ}

Παράδειγμα 4 Να δοθεί ο δειγματικός χώρος που περιγράφει τις ώρες ζωής μιας λάμπας.

Στην περίπτωση αυτή για να βρούμε το δειγματικό χώρο ,θεωρούμε χ την τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το χρόνο ζωής της λάμπας. Και προσέχοντας ότι η μεταβλητή αυτή είναι υποχρεωτικά μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Άρα: $\Omega=\{ \chi: 0\leq\chi\leq\infty \}$

2.1.3 Ενδεχόμενα

Κάθε υποσύνολο Β ενός δειγματικού χώρου (δηλ παίρνει τιμές μόνο μέσα από το δ.χ) ονομάζεται ενδεχόμενο ή γεγονός.
Αν ένα ενδεχόμενο είναι ολόκληρος ο δειγματικός χώρος τότε το ενδεχόμενο ονομάζεται σίγουρο ή βέβαιο.

Ένα ή περισσότερα ενδεχόμενα συνδέονται μεταξύ τους με :

- Την ένωση δηλαδή: το ενδεχόμενο να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα δύο ενδεχόμενα και συμβολίζεται με $\cup$
- Την τομή δηλαδή: το ενδεχόμενο να συμβούν ταυτόχρονα και τα δύο και συμβολίζεται με $\cap$

Επίσης θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε τις έννοιες του συμπληρωματικού ενδεχομένου αλλά και της διαφοράς δυο ενδεχομένων.

Ορισμός 2 Συμπληρωματικό ενός ενδεχομένου Γ ονομάζουμε το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που δεν περιέχει το Γ

Αν το σύνολό Ω περιέχει όλα τα στοιχεία από τη ρίψη ενός ζαριού και θεωρούμε ενδεχόμενο Α να φέρει το ζάρι μας αριθμό άρτιο μεγαλύτερο του 2 τότε το συμπληρωματικό του θα ήταν όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί που περιέχει το Ω, δηλαδή:

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ και $A=\{4,6\}$ τότε $A`=\{1,2,3,5,6\}$

Ορισμός 3: Η διαφορά ενός ενδεχομένου Γ από το Β είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Β χωρίς τα κοινά του με το Γ.

Παράδειγμα 5: Έστω ο δειγματικός χώρος που περιέχει τους ακεραίους από το 1 έως το 10. Θεωρούμε το ενδεχόμενο Β που περιέχει όσους αριθμούς το τετράγωνο τους είναι μικρότερο του 30 και Γ το ενδεχόμενο που περιέχει τους αριθμούς που είναι πρώτοι. Να βρεθεί η διαφορά Β-Γ

Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $B=\{1,2,3,4,5\}$ και $\Gamma=\{1,2,3,5\}$

Τότε η διαφορά $B-\Gamma=\{4\}$

Παράδειγμα 6 Έστω ότι ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και θεωρούμε τα παρακάτω ενδεχόμενα Α να φέρουμε άρτιο αριθμό, Β να φέρουμε περιττό αριθμό και Γ το ενδεχόμενο να φέρουμε 5:

- Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

Να βρεθούν τα ενδεχόμενα Α,Β,Γ και $A\cap B$, $A\cup B$, $B\cup\Gamma$ και $B\cap\Gamma$.

$A=\{2,4,6\}$
$B=\{1,3,5)$
$\Gamma=\{5\}$

$A \cap B = \emptyset$
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,\} = \Omega$

$B \cup \Gamma = \{1,3,5\} = B$
$B \cap \Gamma = \{5\} = \Gamma$

2.1.4 Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο δηλαδή η τομή τους δεν περιέχει κανένα στοιχείο , όπως στο προηγούμενο παράδειγμα $A \cap B = \emptyset$

Τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα καλούνται και ξένα ενδεχόμενα
.

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε το ενδεχόμενο Α σε μια οικογένεια το πρώτο παιδί να είναι κορίτσι και Β το πρώτο παιδί να το λένε Αλέξανδρο.

Τα δυο αυτά ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα, άρα $A \cap B = \emptyset$

2.2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Όπως γνωρίζουμε, αλλά αναφέραμε και πιο πάνω κάθε πείραμα τύχης κρύβει την αβεβαιότητα για τα ενδεχόμενα που θα εμφανιστούν σε κάθε εκτέλεση του. Και αυτό γιατί ποτέ δεν είμαστε σίγουροι αν θα πραγματοποιηθεί ή όχι κάθε ενδεχόμενο. Αντιστοιχίζοντας κάθε φορά σε καθένα από τα ενδεχόμενα Β έναν θετικό πραγματικό αριθμό που αναφέρεται στην ¨ελπίδα¨ μας για πραγματοποίηση, ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου Β τον αριθμό αυτό και το συμβολίζουμε με P(B)

2.2.1 Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω ένα πείραμα τύχης με ν στο πλήθος ισοπίθανα αποτελέσματα ενός ενδεχομένου το οποίο αποτελείται από κ στοιχεία. Στη περίπτωση αυτή η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου τείνει στο αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$.Έτσι θα ήταν εύστοχο να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Β το λόγο:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{πλήθος ευνοικών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατων περιπτώσεων}} = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}}$$

Αυτός είναι και ο **κλασικός** ορισμός της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $\mathrm{P}(\Omega) = \frac{\mathrm{N}(\Omega)}{\mathrm{N}(\Omega)} = 1$

2. $\mathrm{P}(\emptyset) = \frac{0}{\mathrm{N}(\Omega)} = 0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Λίγο νωρίτερα αναφέραμε τις έννοιες της ένωσης και της τομής δυο ή περισσοτέρων ενδεχομένων. Εύλογο θα ήταν το ερώτημα, πως θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα της ένωσης ή της τομής δυο ενδεχομένων ή ακόμα ποια είναι η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενός ενδεχομένου.

<u>Κάποιες από τις προτάσεις που ισχύουν και αφορούν τις πιθανότητες είναι οι παρακάτω:</u>

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Αν όμως Α, Β ξένα μεταξύ τους τότε:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ καθώς $P(A \cap B) = 0$
- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

<u>Παράδειγμα 7</u> Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Β και Γ ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(B)=0.5$, $P(\Gamma)=0,4$και $P(B \cap \Gamma)=0,2$.

Να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες:

1) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Β και Γ

2) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ

Λύση

1) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Β και Γ θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από αυτά , καθώς αυτές οι δυο είναι μεταξύ τους συμπληρωματικές.

$P(B \cup \Gamma)=P(B)+P(\Gamma)-P(B \cap \Gamma)$

$P(B \cup \Gamma)=0.5+0.4-0.2$

$P(B \cup \Gamma)=0.7$

Άρα για να υπολογίσουμε την $P(B \cup \Gamma)^c=1-P(B \cup \Gamma)$

αντικαθιστούμε $P(B \cup \Gamma)=0.7$ και βρίσκουμε ότι $P(B \cup \Gamma)^c=0.3$

2) Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ δηλαδή μας ενδιαφέρει η πιθανότητα του ενδεχομένου $(B-\Gamma) \cup (\Gamma-B)$. Όμως τα ενδεχόμενα Β-Γ και Γ-Β είναι ασυμβίβαστα αρά η τομή τους είναι το κενό.

$$\begin{aligned} P((B-\Gamma)U(\Gamma-B)) &= P(B-\Gamma)+P(\Gamma-B)) \\ &= P(B)-P(B \cap \Gamma)+P(\Gamma)-P(B \cap \Gamma) \\ &= P(B)+P(\Gamma)-2P(B \cap \Gamma) \\ &= 0{,}5+0{,}4-2 \cdot 0{,}2 \\ &= 0{,}5\ . \end{aligned}$$

2.2.2. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στην έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας. Μια από τις σημαντικότερες έννοιες καθώς με τη βοήθεια της δεσμευμένης πιθανότητας υπολογίζουμε πιθανότητες σε περίπτωση περιορισμένης πληροφόρησης ως προς το αποτέλεσμα του πειράματος .

Ορισμός 4: Έστω δυο ενδεχόμενα B και Γ ενός δειγματικού χώρου. Ορίζουμε σας δεσμευμένη πιθανότητα του Γ με δεδομένο το B το λόγο

$$P(B/\Gamma) = \frac{P(B\cap\Gamma)}{P(\Gamma)} \quad \text{όπου } P(\Gamma)>0$$

Παράδειγμα 8 Σε μία πόλη της Ελλάδος το 40% των πολιτών της είναι άνδρες ενώ το 60% είναι γυναίκες. Υποθέτουμε ότι το 50% των ανδρών γνωρίζουν αγγλικά ενώ το 30% των γυναικών γνωρίζουν αγγλικά. Να βρεθεί η πιθανότητα κάποιος που γνωρίζει αγγλικά να είναι άνδρας.

Συμβολίζουμε με: A τους άνδρες

Γ τις γυναίκες

K γνωρίζει αγγλικά

Άρα μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την $P(A/K) = \frac{P(A\cap K)}{P(K)}$ (1)

Γνωρίζουμε από τα δεδομένα του παραδείγματος ότι:

P (K/A)=0.5 P(K/Γ)=0.3 P(A)=0.4 P(Γ)=0.6

΄Αρα $P(A/K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)}$ εδώ προκύπτει το πρόβλημα υπολογισμού της $P(A \cap K)$ το οποίο θα το υπολογίσουμε από τη δεσμευμένη $P(K/A)$

$$P(K/A) = \frac{P(K \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(K \cap A) = P(K/A)P(A) = 0.5\ 0.4 = 0.2$$

Και τέλος θα υπολογίσουμε την P(K)

Όμως $P(K)=P(K \cap \Gamma)+P(K \cap A)= P(A)P(K/A)+P(\Gamma)P(K/\Gamma)=$

$$=0.2+0.6\ 0.3=0.38$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $P(A/K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)} = \frac{0.2}{0.38} = 0.52$

2.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Η Στατιστική είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που χαρακτηρίστηκε πρώτα σαν τεχνική και έπειτα σαν επιστήμη κι αυτό γιατί στηρίχτηκε σε εμπειρικά δεδομένα παρατήρησης και όχι σε μαθηματικά δεδομένα.

Ο κλάδος αυτός έχει τις βάσεις του πρώτα στη συλλογή έπειτα στην ταξινόμηση , μετά στην επεξεργασία και ανάλυση διάφορων δεδομένων για να καταλήξει στην παρουσίαση όσο το δυνατών ασφαλών συμπερασμάτων με αποτέλεσμα τη λήψη ορθών αποφάσεων. Η επιστήμη αυτή βρήκε ανταπόκριση και εφαρμογή σε επιχειρήσεις και στις θετικές και κοινωνικές επιστήμες.

Χρησιμοποιεί δυο είδη μεταβλητών για την επίλυση των προβλημάτων, τις συνεχείς μεταβλητές και τις διακριτές.

Ορισμός 5 : Καλούμε συνεχή τυχαία μεταβλητή Χ αν υπάρχει πραγματική μη αρνητική συνάρτηση,$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο $A \in \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$

$$P(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β με α < β να ισχύει

$$P(a < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Η f(x) καλείται πυκνότητα πιθανότητας ή απλώς πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής Χ.

Ορισμός 6: Καλούμε διακριτή τυχαία μεταβλητή Χ αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών$\{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$, δηλαδή

$P(X \in \{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = x_k) = 1$

Στην περίπτωση αυτή η

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa), \qquad \kappa = 0, 1, 2 \dots$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Χ και ισχύει

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1$$

2.3.1 Μέση τιμή και Διακύμανση

Μέση τιμή

Μια από τις σημαντικότερες έννοιες στην θεωρία πιθανοτήτων και στη Στατιστική είναι **η μέση τιμή** μιας τυχαίας μεταβλητής. Η μέση τιμή είναι ένα από τα μέτρα θέσης δηλαδή μας δείχνει τη σχετική θέση των αριθμών στους οποίους αναφέρεται.

Η μέση τιμή στη Στατιστική εμφανίζεται και σε άλλους τύπους και την υπολογίζουμε σε όλα τα είδη των κατανομών.

Γενικά, ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων δια του πλήθους αυτών. Είναι δηλαδή η μαθηματική πράξη ανεύρεσης της «μέσης απόστασης» ανάμεσα σε δύο ή περισσότερους αριθμούς. Η μέση τιμή συμβολίζεται με E(X)

Ορισμός 7: Θεωρούμε μια τυχαία διακριτή μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση:

$$E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa)$$

Ορισμός 8: Θεωρούμε μια τυχαία συνεχής μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας f(x). Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

<u>Παράδειγμα 9</u> : Σε ένα σχολείο με 120 μαθητές θα μετακινηθούν οι μαθητές με 3 λεωφορεία σε μια ημερήσια εκδρομή. Στο πρώτο λεωφορείο θα επιβιβαστούν 40 μαθητές, στο δεύτερο 52 και στο τρίτο 28. Μόλις φτάσουν στον προορισμό τους ένας μαθητής από αυτούς θα επιλεγεί τυχαία. Έστω X το πλήθος των ατόμων στο λεωφορείο του μαθητή που θα επιλεγεί. Να βρεθεί η E(X)

Αφού η επιλογή του μαθητή είναι τυχαία τότε:

$P(X=40)=\frac{40}{120}$ $\quad$ $P(X=52)=\frac{52}{120}$ και $P(X=28)=\frac{28}{120}$

Άρα $E(X)=40\ P(X=40)+52\ P(X=52)+28\ P(X=28)=$

$40\frac{40}{120}+52\frac{52}{120}+28\frac{28}{120}=$

$=42,33$

<u>Παράδειγμα 10</u> Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας της X:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$ Να βρεθεί η E(X)

$$E(X)=\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x2xdx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$$

Ιδιότητες μέσης τιμής

Παρακάτω δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της μέσης τιμής, που προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό της..

α) Αν c σταθερά, τότε η X έχει πεπερασμένη μέση τιμή, και E(c X)=c E(X).

β) Αν α, β σταθερές τότε E(αX+β)=α E(X)+β

Διακύμανση

Ένα από τα πιο γνωστά μέτρα διασποράς είναι **η διακύμανση.** Η διακύμανση είναι η αναμενόμενη τιμή της τετραγωνικής απόκλισης της τυχαίας μεταβλητής από τη μέση τιμή. Είναι ένα αξιόπιστο μέτρο διασποράς απλά παρουσιάζει και το μειονέκτημα ότι δεν εκφράζεται με τις μονάδες που εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε την ρίζα της διακύμανσης , η οποία ονομάζεται τυπική απόκλιση και έχει τις ίδιες μονάδες μετρήσεις με τις παρατηρήσεις.

Η διακύμανση δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{Var}(X)= E(X^2)-(E(X))^2$$

ενώ η τυπική απόκλιση $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Ιδιότητες της Διακύμανσης

Η διακύμανση είναι μη αρνητική επειδή τα τετράγωνα είναι θετικά ή μηδέν

$\mathrm{Var}(X) \geq 0$

1) Αν c σταθερά τότε: Var(c)=0

2) Αν c σταθερά τότε: $Var(cX)=c^2Var(X)$

3) Αν c, k σταθερά τότε: $Var(cX+k)=c^2Var(X)$

Στην περίπτωση 2 μεταβλητών X, Ψ τότε :

$$Var(X\pm\Psi)=Var(X)+Var(\Psi)\pm 2Cov(X,\Psi)$$

Όπου Cov(X,Ψ) η συνδιασπορά που θα αναλύσουμε πιο κάτω.

<u>Παράδειγμα 11: </u> Έστω μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$f(x) = \frac{2-|x-2|}{4}$ αν $x\in A=\{1,2,3\}$

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 =$

$= \left[\ 1^2\left(\frac{2-|1-2|}{4}\right) + 2^2\left(\frac{2-|2-2|}{4}\right) + 3^2\left(\frac{2-|3-2|}{4}\right)\right]-\left[1\left(\frac{2-|1-2|}{4}\right) + 2\left(\frac{2-|2-2|}{4}\right) + 3\left(\frac{2-|3-2|}{4}\right)\right]^2 \Leftrightarrow$

$Var(x) = \frac{1}{4} + 4\ \frac{2}{4} + 9\ \frac{1}{4} - (\frac{1}{4} + 2\ \frac{2}{4} + 3\ \frac{1}{4})^2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

Παράδειγμα 12: Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας της X:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases} \qquad \text{Να βρεθεί η Var(x)}$$

$$\text{Var(x)=E}(x^2)\text{-[E(x)]}^2 = \int_0^1 x^2 2xdx - \left(\int_0^1 x2xdx\right)^2 =$$

$$= \int_0^1 2x^3dx - ((\int_0^1 2x^2 dx)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Παράδειγμα 13: Να υπολογίσετε το Var(-5x+3) αν γνωρίζεται πως Var(2022-x)=4

Από τις ιδιότητες της διακύμανσης γνωρίζουμε πως:

Var (2022-x)=4⇔Var(-x)=4⇔Var(x)=4

Άρα Var(-5x+3) $=(-5)^2$Var(X)=25Var(X)=25 4=100

2.3.2 Συνδιακύμανση

Η συνδιακύμανση είναι η τιμή που μας δείχνει κατά πόσο δυο τυχαίες μεταβλητές διαφέρουν από κοινού σε σχέση με τα μέτρα τους.

Αυτό σημαίνει πως μπορούμε να βρούμε τι κάνει μια μεταβλητή σε σύγκριση με την άλλη μεταβλητή.

Δίνεται από τον τύπο $\mathrm{Cov}(X,\Psi) = \mathrm{E}(X\Psi) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(\Psi)$

ή $\mathrm{Cov}(X,\Psi) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(\psi_i - \overline{\psi})}{n}$

Αν η συνδιακύμανση

- Είναι μικρότερη του 0 τότε το X αυξάνεται ενώ το Ψ μειώνεται
- Είναι μεγαλύτερη του 0 τότε το X ελαττώνεται και το Ψ αυξάνεται
- Αν είναι ίση με το 0 τότε δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ τους.

Ιδιότητες της συνδιακύμανσης

Έστω X , Ψ τυχαίες μεταβλητές και α, β σταθερά . Τότε:

- Cov(a,X)=0
- Cov(X,X)=Var(x)
- Cov(X,Ψ)=Cov(Ψ,X)
- Cov(αX,β Ψ)=α βCov(X,Ψ)
- Cov(a+ X,β+Ψ)=Cov(X,Ψ)

2.4 Εισαγωγή στις Στοχαστικές διαδικασίες- Κίνηση Brown

Κάποιες εφαρμογές θεωρούν προτιμότερη τη χρήση μοντέλων για την εξέλιξη των μετοχών που στηρίζονται στην άποψη ότι η μεταβλητή του χρόνου είναι συνεχής. Αυτό συμβαίνει λόγω της συχνότητας και της μικρής χρονικής απόστασης των συναλλαγών. Η κίνηση Brown είναι η βάση αυτών των μοντέλων.

Θεωρούμε $X(t)$ μια κατάσταση του πειράματος τη στιγμή t όπου $t\geq 0$.Έστω ότι για κάθε t η $X(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που έχει οριστεί σε χώρο (Ω,F,P). Για συγκεκριμένο ω που ανήκει στο Ω θα έχουμε την συνάρτηση $X(\omega,t)=x(t)$ με $t\geq 0$ η οποία είναι μια πιθανή τροχιά από όλες τις τροχιές που μπορούν να προκύψουν στο χώρο πιθανοτήτων και τη οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{X(t): t\geq 0\}$

Ορισμός 9 Ονομάζουμε στοχαστική διαδικασία κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t): t\in T\}$ πάνω σε ένα κοινό χώρο πιθανότητας (Ω,F,P)

Το σύνολο των τιμών των τυχαίων μεταβλητών ονομάζεται χώρος καταστάσεων ενώ το T παραμετρικός χώρος.

Οι στοχαστικές διαδικασίες χωρίζονται ανάλογα με το αν οι χώροι S και T είναι συνεχή υποσύνολα ή όχι του R σε 4 κατηγορίες:

- Συνεχής με συνεχή παραμετρικό χώρο
- Συνεχής με διακριτό παραμετρικό χώρο
- Διακριτή με συνεχή παραμετρικό χώρο
- Διακριτή με διακριτό παραμετρικό χώρο

Θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου X_t με $t \geq 0$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0,t]$ που είναι το διάστημα του χρόνου σε n διαστήματα που το καθένα από αυτά έχει πλάτος $h = \frac{t}{n}$ όπου σε καθένα από αυτά θεωρούμε ότι η X_s αυξάνεται ή μειώνεται με τον εξής τρόπο:

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(\iota-1)h} + \sigma\sqrt{h} \text{ , με πιθ. p} \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h} \text{ , με πιθ. } 1-\rho \end{cases} \quad \text{όπου } p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{h}\right), i = 1,2,,,,,n$$

Οι στοχαστικές διαδικασίες που κινούνται πάνω ή κάτω ονομάζονται τυχαίοι περίπατοι.

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε πιο θα είναι το όριο της στοχαστικής διαδικασίας καθώς το n θα τείνει στο 0. Σε πεπερασμένο χρονικό η ανέλιξη θα έχει κάνει άπειρο πλήθος βημάτων

Για σταθερό t=nh έχουμε:

$$X_t = X_{nh} = \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\Psi_\iota - \sigma\sqrt{h}(n - \sum_{i=1}^{n}\Psi_\iota =$$

$$=2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\sum_{i=1}^{n}\Psi_\iota - n\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} =$$

$$=2\sigma\sqrt{tp(1-p)}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Psi_\iota - np}{\sqrt{np(1-p)}} + \sigma\sqrt{nt}(2p-1)$$

Και καθώς το n τείνει στο άπειρο :$\sigma\sqrt{t}Z + t\mu$

Γνωρίζουμε ότι $Z \sim N(0,1)$ άρα $X_t \sim N(t\mu, t^2)$

Καταλήγουμε ότι καθώς $h \to 0$ προκύπτουν προσαυξήσεις που χωρίζονται σε:

- Ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- Κανονικές προσαυξήσεις

Ορισμός 10: Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία B_t η οποία παίρνει τιμές στο R και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.Αν $t_0 < t_1 < \cdots .. < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0} \dots \dots B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες

2. Αν s,t≥0 τότε $B_{t+s} - B_s \sim N(0, t)$

3. Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1 δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση του t σχεδόν βέβαια

Παράδειγμα 15: Αν B_t είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown με B_0=0 τότε:

$$E[F(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi) \exp\left(-\frac{\psi^2}{2t}\right) dx$$

Έστω $B_t \sim N(0,t)$ και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών καταλήγουμε ότι $\ln S(t) = \mu t + \sigma B_t$, όπου η ισότητα ερμηνεύεται ως ισότητα σε κατανομή.

Άρα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση αυτή ως: $S(t) = S(0)\exp(\mu t + \sigma B_t)$

Όπου S(0) η τιμή της μετοχής της αρχική στιγμή.

Με τη βοήθεια της κατανομής Brown καταλήγουμε:

$$E[S_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma \chi\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dt =$$

$$= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} + \sigma x\right) dx = S_0 \exp(rt)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κίνηση Brown

- είναι συνεχής ως προς t, όχι όμως διαφορίσιμη ως προς t πουθενά σχεδόν βέβαια,
- η μεταβολή της είναι σχεδόν βέβαια άπειρη στο [0,t] για κάθε t, το οποίο δεν ισχύει για την τετραγωνική της μεταβολή στο ίδιο διάστημα.

2.5 Γεωμετρική κίνηση Brown

Η κίνηση Brown θα μπορούσαμε αν πούμε ότι δεν είναι ο κατάλληλος τρόπος για να περιγράψει κάποιος την αλλαγή στις τιμές των μετοχών ή των αγαθών κι αυτό γιατί μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές αλλά και μια τιμή μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί ανεξάρτητα από την τιμή. Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε ένα πολλαπλασιαστικό μοντέλο.

Έστω S_t μια τιμή η οποία θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυξάνεται ή μειώνεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h}e^{\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθ. } p \\ S_{(i-1)h}e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases} \qquad \text{όπου } p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)$$

- Κάθε ποσοστιαία μείωση ή αύξηση της $S_{ih}/S_{(i-1)h}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το παρελθόν
- Θέτοντας $X_t=\ln S_t$ τότε θα καταλήξουμε $X_{ih}=X_{(i-1)h}\pm\sigma h^{1/2}$ η ανέλιξη $X_t=\ln S_t$ είναι κίνηση Brown

Η ανέλιξη που έχει τις παραπάνω ιδιότητες καλείται γεωμετρική κίνηση Brown

Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι αν X_t~Brown(μ,$σ^2$) τότε

$$S_t = e^{x_t} \sim GBM(μ,σ^2)$$

Όπου η διαδρομή S_t είναι συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη

Αν η S_t~ GBM(μ,$σ^2$) τότε η lnS_t~N(tμ, t$σ^2$)

Για να υπολογίσουμε τις ροπές κ τάξης η διαδικασία είναι η εξής:

$$E\left(S_t^k\right) = E\left(e^{lnS_t}\right) = e^{kt\mu}E\left(e^{k\sigma\sqrt{t}Z}\right)$$

Όμως $E(e^{uZ}) = e^{\frac{1}{2}u^2}$, αρά $E\left(S_t^k\right) = e^{kt\mu+\frac{1}{2}\kappa^2 t\sigma^2}$

Καταλήγουμε $E(S_t)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t\sigma^2}$ $V(S_t)=E(S^2{}_t)-E(S_t)^2=e^{2t(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)}(e^{t\sigma^2}-1)$

<u>Παράδειγμα *16:*</u> Θεωρούμε μια στοχαστική ανέλιξη X_t με t≥0 που είναι κίνηση Brown όπου X_t~N(μ, $σ^2$) και X_0=0 . Ν α βρεθεί ποια είναι η κατανομή των μεταβλητών X_3, X_6-X_4 ,X_7-X_1. Ελέγξτε αν κάποιες από αυτές είναι ανεξάρτητες

Εφόσον X_t~N(μt, $σ^2$t) και $X_{t+ψ}$-$X_ψ$~N(μt, $σ^2$t)

Τότε καταλαβαίνουμε ότι X_3~N(3μ, $σ^2$3)

X_6-X_4 ~N(2μ,2$σ^2$)

X_7-X_1 ~N(6μ,6$σ^2$)

Η X_3 και η X_6-X_4 είναι ανεξάρτητες καθώς είναι προσαυξήσεις της κίνησης Brown

<u>Παράδειγμα 17:</u> Έστω X_t~BM(0,1) . Να δείξετε ότι $E(X_t X_s)=\min\{s,t\}$ με $s,t\geq 0$

Αν t>s Χρησιμοποιώντας ότι η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις τότε:

$E(X_tX_s)=E((X_t-X_s)X_s+X_s^2)= E((X_t-X_s)X_s)+E(X_s^2)=$

$E(X_t-X_s)E(X_s)+E(X_s^2)=0 + E(X_s^2)=V(X_s)$

Αν s>t τότε $E(X_tX_s)=t=V(X_t)$

2.6 Ολοκλήρωμα Ito

Η κίνηση Brown όπως γνωρίζουμε είναι μια συνάρτηση της οποίας η παράγωγος δεν ορίζεται πουθενά όμως ολοκληρώνεται.

Έστω μία συνάρτηση f: $(0,\infty)\rightarrow R$ που εξαρτάται από την κίνηση Brown και ορίζουμε το ολοκλήρωμα πάνω στις μεταβολές της.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t,\omega)\, dB_t(\omega)$$

όπου $dB_t(\omega)$ορίζουμε τη διαφορά $B_{t+dt} - B_t$ αλλά για μικρό dt

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι το όριο των αθροισμάτων των γινομένων των τιμών της f επί τη μεταβολή της κίνησης Brown μεταξύ των χρονικών στιγμών.

Αν η τυχαία συνάρτηση ισούται με 1 τότε το ολοκλήρωμα ισούται με B(b)-B(α

Ορισμός 11: Θεωρούμε τη διαμέριση $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ και τα t_iορίζονται από τη σχέση $t_i = \alpha + \frac{(b-a)i}{n}, i = 0,1,2,,,n$ και τη συνάρτηση

$$f(t,\omega) \cong \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega) 1_{[t_i,,t_{i+1})}(t)$$

Το ολοκλήρωμα Ito ορίζεται σαν όριο στο L^2 και δίνεται από:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t,\omega)\, dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega)\, [Bt_{i+1} - Bt_i](\omega)$$

Το ολοκλήρωμα Ito μας βοηθάει να υπολογίσουμε το εμβαδόν κάτω από τη στοχαστική ανέλιξη

Συμπέρασμα:

- Η συνάρτηση θα πρέπει να είναι πάντα προσαρμοσμένη στις πληροφορίες που αφορούν την κίνηση Brown
- Για να ορίζεται το ολοκλήρωμα μας θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και η ιδιότητα $E[\int_{\alpha}^{b} |f(t,\omega)|^2 dt] < \infty$
- Τέλος το όριο υπολογίζεται κατά την L^2

Ιδιότητες του ολοκληρώματος Ito

Το ολοκλήρωμα Ito έχει τις παρακάτω ιδιότητες (που δεν ισχύουν απαραίτητα σε περιπτώσεις που η δ_t είναι απαραίτητα απλή)

- Είναι γραμμικό δηλαδή ισχύει:

$$\int_0^t (\delta_\chi + \gamma_\chi)\, dW_x = \int_0^t \delta_\chi dW_x + \int_0^t \gamma_\chi\, dW_x$$

και $\int_0^t c\,\delta_\chi dW_x = c\int_0^t c\,\delta_\chi dW_x$ όπου c σταθερά και γ_t απλή ανέλιξη.

- Ισομετρία Ito.

Δηλαδή: $E(I_t^2) = E((\int_0^t \delta_\chi dW_x)^2) = E(\int_0^t \delta_\chi^2 dx)$

- Η στοχαστική ανέλιξη είναι martingale

$$I_t = \int_0^t \delta_\chi dW_x \text{ , } t \in [0,T]$$

Σαν συμπέρασμα όλων αυτών καταλήγουμε ότι:

- Η στοχαστική διαδικασία είναι μια martingale
- Η τετραγωνική μεταβολή της είναι $< I >_t = \int_0^t |W(s)^2 ds$

Το λήμμα του Ito

Έστω μια X_t μια διαδικασία που εκφράζετε από τη σχέση:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t \upsilon(s,\omega)dB_s$$

Και ορίζουμε μια συνάρτηση $g(t, X_t)$ $C^{1,2}$ και μια στοχαστική διαδικασία

$$Z_t = g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\upsilon^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)(s, X_s)ds + \int_0^t \upsilon\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dB_s$$

Με τη βοήθεια του τύπου του Taylor μέχρι 2^{η}ς τάξης

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Η διαχείριση συνταξιοδοτικών προγραμμάτων σε στοχαστικό περιβάλλον.

3.1 Η χρηματοπιστωτική αγορά

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται ένα οικονομικό μοντέλο το σύνολο των αποδεκτών στρατηγικών και τον τελικό στόχο του συνταξιοδοτικού ταμείου. Για υπολογιστική απλότητα, χρησιμοποιούμε ένα συνεχές χρονικό πλαίσιο. Θεωρούμε μια χρηματοπιστωτική αγορά χωρίς αρμπιτράζ ,χωρίς τριβές και συνεχώς ανοιχτή. Τα ποσά των συναλλαγών είναι τόσο μικρά που μπορούμε να τα θεωρήσουμε ότι δεν επηρεάζουν τις τιμές. Ας ξεκινήσουμε με ένα πλήρη χώρο πιθανοτήτων[Ω,F,P] στον οποίο δίνεται μια τυπική, δισδιάστατη κίνηση Brown $(W(t),W_r(t))$ $t\geq 0$

<u>Υπόθεση 1.</u>Το χρηματικό περιουσιακό στοιχείο δίνει ένα στιγμιαίο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r(t) στο οποίο η διάχυση είναι μια διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck (μοντέλο Vasicek)

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt - \sigma_r dW_r(t) \quad (1) \qquad r(0) = r_o$$

Με αρχική τιμή 1 η τιμή S_0 του ταμειακού περιουσιακού στοιχείου δίνεται στη συνέχεια με την ακόλουθη έκφραση:

$$s_o(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} \qquad (2)$$

Υπόθεση 2.Υπάρχουν ομόλογα μηδενικού τοκομεριδίου για οποιαδήποτε ημερομηνία λήξης T. Αν συμβολίσουμε B[t,T] η τιμή αυτού του δεσμού τη χρονική στιγμή t∈[0,s] η εξίσωση διάχυσης του B[t,T]είναι:

$$\frac{dB(t,s)}{B(t,s)} = r(t)dt + \sigma_B(s-t)(dW_r(t) + \lambda_r dt)\,, \qquad (3)$$

$$B(s.s) = 1$$

Όπου το λ θεωρείται σταθερό

Συμφώνα με το μοντέλο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου του Vasicek η μεταβλητότητα ενός ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου με διάρκεια τ δίνεται από

$$\sigma_B(\tau) = \frac{1-e^{-at}}{\alpha}\sigma_r \quad (4)$$

Εισάγουμε επίσης ένα κυλιόμενο ομόλογο προκειμένου να διατηρηθεί σταθερή η ωριμότητα K του ομολόγου. Η τιμή $B_\kappa(t)$ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι τότε:

$$\frac{dB_K(t)}{B_K(t)} = r(t)dt + \sigma_K(dW_r(t) + \lambda_r dt \quad (5)$$

$$\text{με } \sigma_\kappa = \frac{1-e^{-\alpha\kappa}}{\alpha}\sigma_r$$

Παρατήρηση 3: Στην πραγματικότητα δεν είναι ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε όλα τα ομόλογα μηδενικού κουπονιού στην αγορά. Ωστόσο δεδομένου ότι το μοντέλο των επιτοκίων είναι ένα μοντέλο ενός παράγοντα, χρειαζόμαστε μόνο ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου ανά πάσα στιγμή για να επαναλάβουμε τα άλλα και ειδικότερα επιλέγουμε το «κυλιόμενο ομόλογο». Δεδομένου ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο είναι πολύ χρήσιμο για τη διαχείριση κεφαλαίων θα παρουσιάζουμε κατά προτίμηση τα αποτελέσματα μας με αυτό το «ομόλογο» αντί για οποιαδήποτε άλλο ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου. Επιπλέον η σταθερή τοπική αστάθεια αυτού του ομολόγου απλοποιεί τους υπολογισμούς. Η ακόλουθη εξίσωση δίνει τη σχέση μεταξύ B[t,T] και $B_K(t)$ μέσω του ταμειακού περιουσιακού στοιχείου $S_B(t)$:

$$\frac{dB(t,s)}{B(t,s)} = \left(1 - \frac{\sigma_B(s-t)}{\sigma_\kappa}\right)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \frac{\sigma_B(s-t)}{\sigma_\kappa}\frac{dB_k(t)}{B_k(t)} \quad (6)$$

<u>Υπόθεση 2.4</u>. Η τιμή του χρηματιστηριακού δείκτη $S(t)$ τη στιγμή $t \geq 0$ ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_1(dW(t) + \lambda dt) + \sigma_2(dW_r(t) + \lambda_r dt) \quad (7)$$

όπου:

- οι δύο κινήσεις Brown $W(t)$ και $W_r(t)$ υποτίθεται ότι είναι ορθογώνιες,
- το ασφάλιστρο κινδύνου λ που σχετίζεται με το $W(t)$ θεωρείται σταθερό.

Εάν $\sigma_2 > 0$, η χρηματιστηριακή αγορά συσχετίζεται με την αγορά ομολόγων και ένα χαρτοφυλάκιο πλήρως επενδυμένο σε μετοχές θα είναι ακόμη και τόσο ευαίσθητο στο επιτόκιο.

Η εξίσωση διάχυσης του $S(t)$ μπορεί επίσης να γραφτεί με κλασσικό τρόπο:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_S(dW_r(t) + \lambda_S dt), \quad (8)$$

όπου $\sigma_S^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (9) και:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_S} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}, \quad (10)$$

είναι η συσχέτιση μεταξύ W_s και W_r. Φυσικά έχουμε:

$$\sigma_S\lambda_S = \sigma_1\lambda + \sigma_2\lambda_r. \quad (11)$$

Παρατήρηση 2.5

Στη συνέχεια, έχουμε να κάνουμε με μια χρηματοπιστωτική αγορά που αποτελείται από μετρητά, μετοχές και ομόλογα σταθερής διάρκειας K.

3.2. Δήλωση διαχείρισης συνταξιοδοτικών ταμείων

Αφού περιγραφούν τα περιουσιακά στοιχεία που διαθέτει ο διαχειριστής του ταμείου, διαμορφώνουμε τώρα τη διαχείριση των συνταξιοδοτικών ταμείων. Όπως εξηγήθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, δίνεται προσοχή σε ένα πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών που παρέχει εγγύηση για τα οφέλη. Μπορούμε τότε να υποθέσουμε χωρίς απώλεια γενικότητας ότι υπάρχει μόνο ένας συνεισφέρων στο ταμείο. Οι Verrall και Yakoubov (1999) έχουν καθορίσει μια διαδικασία βασισμένη σε δεδομένα για την ομαδοποίηση κατά ηλικία του αντισυμβαλλομένου στη γενική ασφάλιση χρησιμοποιώντας τη θεωρία ασαφών συνόλων. Η ημερομηνία εγγραφής στο αμοιβαίο κεφάλαιο είναι $t = 0$ και T είναι η ημερομηνία συνταξιοδότησης που είναι και ο ορίζοντας για τη διαχείριση του αμοιβαίου κεφαλαίου

3.2.1. Το ποσοστό συνεισφοράς $c(t), t \in [0, T]$.

Συνήθως, στα μοντέλα διαχείρισης χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής υποτίθεται ότι θα δώσει όλες τις αποταμιεύσεις του στο αμοιβαίο κεφάλαιο κατά την αρχική ημερομηνία. Δεν ισχύει πλέον για μέλος συνταξιοδοτικού ταμείου που συνεισφέρει καθ' όλη τη διάρκεια της

επαγγελματικής του ζωής. Εφόσον υιοθετείται μια διατύπωση συνεχούς χρόνου, θα εισαγάγουμε το επιτόκιο εισφοράς $c(t)$ που είναι η ροή χρημάτων ανά μονάδα χρόνου που επενδύεται στο αμοιβαίο κεφάλαιο την ημερομηνία t.

<u>Υπόθεση 2.6.</u> Το ποσοστό συνεισφοράς $c(t)$ είναι μια συνεχής και ντετερμινιστική διαδικασία. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη φόρμα στις εφαρμογές μας:

$$c(t) = c(0)e^{gt}, \quad (12) \qquad \text{για κάθε } t \in [0, T],$$

όπου το g είναι σταθερό.

Το ποσοστό εισφοράς, που δίνεται αντιπροσωπεύει την περίπτωση ενός υπαλλήλου που τοποθετεί ένα σταθερό μέρος του μισθού του στο ταμείο, μισθούς που αυξάνονται συνεχώς με το σταθερό ποσοστό g (π.χ. ο πληθωρισμός). Είναι φυσικά δυνατό να εξεταστούν άλλες διαδικασίες για το ποσοστό συνεισφοράς. Εστιάζουμε την προσοχή μας στην ντετερμινιστική περίπτωση σε αυτό το άρθρο. Μια τέτοια υπόθεση φαίνεται απολύτως αποδεκτή ως προσέγγιση στην πραγματικότητα, αλλά οι περιορισμοί της πρέπει να γίνουν αποδεκτοί. Σημειώστε ότι ορισμένα μη αντισταθμίσιμα στοιχεία του μισθολογικού κινδύνου δεν καλύπτονται από αυτό το μοντέλο.

3.2.2. Η εγγύηση $G(T)$.

Η εγγύηση που δίνεται στα μέλη του αμοιβαίου κεφαλαίου είναι ιδιαίτερα σημαντική στον σχεδιασμό της, διότι αποτελεί ένα είδος τίτλου παραγώγου και στη συνέχεια προκαλεί ορισμένους περιορισμούς στη διαχείριση κινδύνου του αμοιβαίου κεφαλαίου. Από μια πολύ γενική άποψη, το $G(T)$ είναι μια ενδεχόμενη αξίωση για την κατάσταση των αγορών την ημερομηνία T και ορίζεται ως μια τυχαία μεταβλητή που είναι $F(T)$-μετρήσιμη α.σ. Η πιο απλή εγγύηση που μπορούμε να συναντήσουμε σε ένα πρόγραμμα συνταξιοδότησης είναι η σταθερή όταν ο εργαζόμενος λαμβάνει ένα εφάπαξ ποσό κατά την ημερομηνία συνταξιοδότησης. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει προστασία έναντι πολύ κακής απόδοσης στο ταμείο και τα μέλη έχουν σίγουρα ένα ελάχιστο κεφάλαιο όταν συνταξιοδοτηθούν. Είναι ο συνετός κανόνας για το συνταξιοδοτικό ταμείο. Αυτός ο συνετός κανόνας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη διαχείριση των συνταξιοδοτικών ταμείων.
Όταν το ταμείο δίνει ισόβια πρόσοδο στα συνταξιούχοι μέλη του, η προστασία πρέπει να τίθεται στην πρόσοδο. Έστω $f(t)$, για κάθε $t \in [T, T']$ είναι αυτή η ελάχιστη πρόσοδος όπου T' είναι η ημερομηνία θανάτου. Ως προς την εισφορά, το όφελος είναι συνεχής ροή. Υποθέτουμε επίσης ότι οι προσόδους

και η ημερομηνία θανάτου είναι ντετερμινιστικές. Χρειαζόμαστε αυτή την υπόθεση για να πάρουμε την εξίσωση. (11), η οποία χρησιμεύει αργότερα για τον υπολογισμό μιας ελάχιστης συνεισφοράς για την παροχή εγγύησης στο τέλος της επενδυτικής περιόδου T. Το T' υποτίθεται ότι είναι 60 στην αριθμητική προσομοίωση.

Υπόθεση 2.7. Η αξία της εγγύησης δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$G(T) = \int_T^{T'} f(s)B(T,s)ds. \qquad (13)$$

Για σκοπούς εφαρμογής, θα χρειαστεί να καθορίσουμε τη συνάρτηση ελάχιστης πρόσοδος $f(t)$ και επιλέγουμε την ίδια μορφή με το ποσοστό εισφοράς, προκειμένου να λάβουμε υπόψη το αυξανόμενο κόστος ζωής καθώς το g αντιπροσωπεύει τον πληθωρισμό:

$f(t) = f(T)e^{g(t-T)}$, (14) για κάθε $t \in [T, T']$.

Εφόσον οι αποπληθωριστές $B(T,s)$ εξαρτώνται μόνο από το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο r_T που παρατηρείται κατά την ημερομηνία απόσυρσης, η εγγύηση $G(T)$ είναι συνάρτηση αυτού του επιτοκίου.

3.2.3. Η διαδικασία πλούτου $X(t)$, $t \in [0, T]$.

Ας εισαγάγουμε τις ακόλουθες διαδικασίες διαχείρισης χαρτοφυλακίου: $a_0(t)$, $a_S(t)$, $a_K(t)$ είναι, αντίστοιχα, ο πλούτος που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο χωρίς κινδύνους $S_0(t)$, ο χρηματιστηριακός δείκτης $S(t)$ και ο κυλιόμενος δεσμός $B_K(t)$. Φυσικά, πρέπει να επιβεβαιώσουμε αυτές τις διαδικασίες:

$a_0(t) + a_S(t) + a_K(t) = X(t)$, (15) για κάθε $t \in [0, T]$.

Από τον περιορισμό του προϋπολογισμού του ταμείου, μπορούμε να συμπεράνουμε την εξίσωση διάχυσης της διαδικασίας πλούτου $X(t)$ (βλ. Merton, 1971 για μια πλήρη έκθεση):

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + a_S(t)[\sigma_1(dW(t) + \lambda dt) + \sigma_2(dW_r(t) + \lambda_r dt)]$$
$$+a_K(t)\sigma_K(dW_r(t) + \lambda_r dt) + c(t)dt. \quad (16)$$

Η διαδικασία πλούτου πρέπει επίσης να σέβεται δύο άλλους περιορισμούς. Πρώτον, δεν υπάρχει αρχική συνεισφορά στο αμοιβαίο κεφάλαιο, ώστε να έχουμε $X(0) = 0$. Δεύτερον, στο τέλος της επενδυτικής περιόδου, το αμοιβαίο κεφάλαιο πρέπει τουλάχιστον να παραδώσει την εγγύηση:

$$X(T) \geq G(T). \quad (17)$$

3.2.4. Το κριτήριο βελτιστοποίησης

Το τελευταίο βήμα για να επιτευχθεί η περιγραφή του προβλήματος βελτιστοποίησης διαχείρισης κεφαλαίων είναι η επιλογή του κριτηρίου. Ακολουθώντας τον Merton (1971), χρησιμοποιούμε ένα κριτήριο αναμενόμενης χρησιμότητας. Το κριτήριο της μέσης διακύμανσης φαίνεται κατά την άποψή μας λιγότερο προσαρμοσμένο στο συνεχές χρονικό πλαίσιο αφού περιλαμβάνει μόνο την πρώτη και τη δεύτερη στιγμή της τελικής κατανομής πλούτου. Επιπλέον, η μεταβλητή του κράτους που εξετάζεται στο κριτήριο είναι το πλεόνασμα έναντι της εγγύησης και όχι ο παγκόσμιος πλούτος. Στην πραγματικότητα, ο περιορισμός στον τελικό πλούτο έχει ήδη αποκαλύψει μέρος των προτιμήσεων των συνεισφερόντων (δεν θέλουν να λάβουν λιγότερα από την εγγύηση) και δεν μπορεί να συνάδει με μια συνάρτηση χρησιμότητας που ορίζεται θεωρητικά για απαγορευμένα επίπεδα πλούτου. Τέλος, το κριτήριο που χρησιμοποιείται στο μοντέλο μας είναι το εξής:

$$\mathbb{E}\left[u\big(X(T) - G(T)\big)\right], \quad (18)$$

όπου η χρησιμότητα u είναι μια συνάρτηση CRRA (constant relative risk aversion, σταθερή σχετική αποστροφή κινδύνου):

$$u(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad (19)$$

για κάθε $x \geq 0$, με $\gamma < 1$ και $\gamma \neq 0$.

Παρατήρηση 2.8. Οι βοηθητικές λειτουργίες CRRA είναι πραγματικά βολικές για προβλήματα διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Χωρίς τον επιτοκιακό κίνδυνο, π.χ. η βέλτιστη στρατηγική για έναν επενδυτή που διαθέτει μια τέτοια χρησιμότητα θα είναι το χαρτοφυλάκιο «σταθερής μίξης» (το ποσοστό του πλούτου που επενδύεται σε κάθε περιουσιακό στοιχείο είναι σταθερό). Δυστυχώς, αυτός ο τύπος λειτουργίας προκαλεί ορισμένες ιδιότητες κλιμάκωσης στον πλούτο που δεν είναι πραγματικά προσαρμοσμένες στις συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις. Στην πραγματικότητα, δεν μπορεί κανείς πραγματικά να δεχτεί στρατηγικές ανεξάρτητες από το επίπεδο του ταμείου όταν τα μόνα εισοδήματα κατά τη διάρκεια της περιόδου συνταξιοδότησης εξαρτώνται από τον τελικό πλούτο του ταμείου. Η εισαγωγή της εγγύησης και η επιλογή του πλεονάσματος ως βάσης του κριτηρίου βελτιστοποίησης αποφεύγουν αυτήν την παγίδα.

Το πρόγραμμα που έχουμε τώρα να λύσουμε είναι τότε:

$$\begin{array}{ll} \max_{a_S, a_K} & \mathbb{E}\big[u\big(X(T) - G(T)\big)\big], \quad (20) \\ \text{εξίσωση (7),} & \\ X(0) = 0, & \\ X(T) \geq G(T). & \end{array}$$

3.3. Λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Σε σύγκριση με τα κλασικά προγράμματα βελτιστοποίησης, το πρόγραμμα (9) μπορεί να δημιουργήσει αρκετές δυσκολίες: το αμοιβαίο κεφάλαιο δεν είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, δηλαδή η αξία του χαρτοφυλακίου κάθε φορά δεν είναι ίση με τα κέρδη που προέκυψαν από τις επενδύσεις μέχρι εκείνη τη στιγμή, επειδή οι εισφορές είναι εισέρχονται συνεχώς στο ταμείο και επιπλέον υπάρχει εγγύηση για κάλυψη. Θα προχωρήσουμε με βήματα προκειμένου να απλοποιήσουμε σταδιακά το πρόγραμμά μας. Ωστόσο, πρέπει πρώτα να παρουσιάσουμε ορισμένα θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με τη γενικευμένη προς τα πίσω στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία είναι ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τα προβλήματα στοχαστικής βελτιστοποίησης. Αυτή η εξίσωση τίθεται καλά από τους Pardoux και Peng (1990). Σε γενικές γραμμές, μια λύση μιας αντίστροφης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από ένα ζεύγος προσαρμοσμένων διεργασιών (Y, Z) που ικανοποιεί:

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad (21) \qquad Y_T = \xi,$$

όπου το f ονομάζεται γεννήτρια και το ξ τερματική συνθήκη. Αυτός ο τύπος εξίσωσης εμφανίζεται σε πολυάριθμα προβλήματα στα οικονομικά. Σημειώστε ότι στο πρόβλημά μας, το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο $r(t)$ δεν δεσμεύεται.

Σημείωση 3.1. Ας εισαγάγουμε μια οικογένεια διεργασιών H ως τη λύση των ακόλουθων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dH_s^t}{H_s^t} = -r(s)ds - \lambda dW(s) - \lambda_r dW_r(s), \quad (22)$$

$$H_t^t = 1, 0 \leq t \leq s.$$

Κάθε διεργασία H ορίζεται με αρχική τιμή ίση με 1 και είναι πάντα αυστηρά θετική. Η διεργασία H^{-1} θεωρείται στη συνέχεια ως αριθμητικό χαρτοφυλάκιο. Το επόμενο θεώρημα, λόγω των El Karoui και Huang (1997, 1998), καθιερώνει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης για το πρόγραμμα βελτιστοποίησης (9) και δίνει ορισμένες ιδιότητες martingale υπό ορισμένες επαρκείς συνθήκες. Συμβολίζουμε $H_T^0 = H_T$.

Θεώρημα 3.2. Με την υπόθεση του χρηματοοικονομικού μοντέλου, υπάρχει μια μοναδική λύση για το πρόγραμμα (9). Επιπλέον, ο πλούτος του ταμείου πρέπει να επαληθεύει:

$$X(t) = \mathbb{E}\left[H_T^t X(T) - \int_t^T H_s^t c(s)ds \middle| \mathscr{F}(t)\right], \quad (23)$$

και ειδικά τη χρονική στιγμή 0 λόγω του ντετερμινιστικού ποσοστού εισφοράς:

$$\mathbb{E}[H_T X(T)] = \int_0^T c(t)B(0,t)dt. \qquad (24)$$

Φυσικά, οι εισφορές πρέπει να είναι αρκετές για να δώσουν τουλάχιστον την εγγύηση στο τέλος της επενδυτικής περιόδου.

Συμπέρασμα 3.3. Από την ανισότητα (17) και τη σχέση (24), η εγγύηση $G(T)$ και το ποσοστό εισφοράς $c(t)$ πρέπει να ικανοποιούν:

$$\mathbb{E}[H_T G(T)] \leq \int_0^T c(t)B(0,t)dt. \quad (25)$$

Ειδικά, για $G(T) = \int_T^{T'} f(t)B(T,t)dt$, τότε:

$$\int_T^{T'} f(t)B(0,t)dt \leq \int_0^T c(t)B(0,t)dt. \qquad (26)$$

Όσον αφορά τη συνεισφορά του μέλους του ταμείου, είναι απαραίτητο να τηρηθεί ο όρος (26). Αν υποθέσουμε ότι ο ετήσιος μισθός αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό συντελεστή $g = 2\%$ με την εισφορά και το επίδομα, η ελάχιστη εισφορά για να έχουμε πρώτη πρόσοδο ίση με το 60% του τελευταίου μισθού είναι 8.35% του τρέχοντος μισθού. Η διάρκεια των περιόδων εισφορών και συνταξιοδότησης είναι, αντίστοιχα, 40 και 20 έτη. Επιλέγουμε μια πραγματική συνεισφορά 15%, επομένως ο διαχειριστής μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα άφθονο μέρος της για να βελτιώσει το όφελος του μέλους. Η τελευταία αλλά όχι η ελάχιστη παράμετρος που πρέπει να ορίσουμε είναι η σχετική αποστροφή κινδύνου των επενδυτών. Αυτό θα είναι σχετικά χαμηλό γιατί υπάρχει οικονομικός κίνδυνος μόνο για το πλεόνασμα της εγγύησης, ένα μεγάλο μέρος της αποστροφής καλύπτεται πράγματι από τον περιορισμό στον τελικό πλούτο. Από πρακτική άποψη, αυτό το γεγονός φαίνεται καλά από τη μέθοδο διαχείρισης CPPI (βλ. Black and Perold, 1992). Αυτό χρησιμοποιείται για αυτοχρηματοδοτούμενα κεφάλαια με σταθερή εγγύηση: ανά πάσα στιγμή, ο πλούτος του αμοιβαίου κεφαλαίου πρέπει να είναι μεγαλύτερος από την παρούσα αξία της εγγύησης και ένα σταθερό ποσοστό του πλεονάσματος επενδύεται στο σημείο αναφοράς του αμοιβαίου κεφαλαίου (γενικά χρηματιστηριακός δείκτης). Αυτό το πλεόνασμα είναι πάντα υψηλού ισοζυγίου που μπορεί να ερμηνευθεί ως αποστροφή χαμηλού κινδύνου. Σε αυτήν την εφαρμογή, λαμβάνουμε $\gamma = -1$ που είναι ένας σχετικός συντελεστής αποστροφής κινδύνου 2. Το ποσοστό των μετοχών στο αμοιβαίο κεφάλαιο αντιστάθμισης είναι τότε $h_S = 69.82\%$ και το ποσοστό των ομολόγων μειώνεται από $h_K(0) = 86.06\%$ σε $h_K(T) = 35.15\%$. Αυτό το μέρος του συνταξιοδοτικού ταμείου στη συνέχεια εξισορροπείται και τα στοιχεία είναι συνεπή με την εμπειρία των διαχειριστών χαρτοφυλακίου. Η αναλογία των μετρητών στο αμοιβαίο κεφάλαιο αυξάνεται με το χρόνο t από 0 σε Τ, όπου Τ είναι η ημερομηνία της συνταξιοδότησης.

Όσον αφορά τη συνολική διαχείριση του αμοιβαίου κεφαλαίου, παρατηρούμε τη μέση εξέλιξη των ποσών που επενδύθηκαν σε κάθε περιουσιακό στοιχείο. Υπάρχουν πολλά σχόλια που θα μπορούσαμε να κάνουμε σχετικά. Πρώτον, το συνταξιοδοτικό ταμείο χρηματοδοτείται σχεδόν πάντα με το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, τόσο λόγω του ταμείου αντιστάθμισης κινδύνου, το οποίο είναι ισορροπημένο, όσο και λόγω του δανείου, το οποίο καλύπτεται εν μέρει από μετρητά. Επιπλέον, το αναπαραγόμενο χαρτοφυλάκιο της εγγύησης επενδύεται αποκλειστικά σε μακροπρόθεσμα ομόλογα στην αρχή της περιόδου εισφορών. Η θέση short σε μετρητά αρχίζει να μειώνεται 10 χρόνια πριν από την ημερομηνία συνταξιοδότησης και αλλάζει σε μια ταχέως αυξανόμενη θέση αγοράς 7 χρόνια αργότερα. Καθώς πλησιάζει η συνταξιοδότηση και ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, η αξία της εγγύησης γίνεται πιο αποτελεσματική και τα μετρητά αντικαθιστούν τα ομόλογα στην αναπαραγωγή της. Προσθέτοντας το μικρότερο ποσό δανείου και τη φθίνουσα μόχλευση στο ταμείο αντιστάθμισης κινδύνου, μπορούμε να εξηγήσουμε αυτό το αποτέλεσμα. Δεδομένου ότι τα αποθέματα υπάρχουν μόνο στο ταμείο αντιστάθμισης κινδύνου, η ποσότητά τους αυξάνεται ομαλά, η αναλογία τους στο συνταξιοδοτικό ταμείο μειώνεται. Αυτό το φαινόμενο είναι σύμφωνο με τη συμβατική σοφία. Τέλος, παρατηρούμε την επικράτηση των μακροπρόθεσμων ομολόγων στο χαρτοφυλάκιο την τελευταία περίοδο. Αυτό οφείλεται ουσιαστικά στην ολοένα και ακριβότερη εγγύηση και στο hedging fund που επενδύει σε μεγάλο βαθμό σε ομόλογα. Όταν ο χρόνος πλησιάζει στη συνταξιοδότηση, βρίσκουμε τη μετακίνηση της στρατηγικής σε μετρητά, αλλά η επενδυτική στρατηγική εξακολουθεί να διατηρεί μια διαφοροποιημένη στρατηγική μέχρι τη συνταξιοδότηση αντί να μεταβεί σε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο.

3.4. Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα:

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το ζήτημα της διαχείρισης των συνταξιοδοτικών ταμείων. Εστιάζουμε σε προγράμματα καθορισμένων εισφορών όπου παρέχεται εγγύηση για τις παροχές και η εγγύηση εξαρτάται από το επίπεδο του στοχαστικού επιτοκίου όταν ο εργαζόμενος συνταξιοδοτείται. Αναλύσαμε ένα επενδυτικό πρόβλημα για ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών με στοχαστικό μισθό υπό το μοντέλο συγγενικού επιτοκίου. Είναι αξιοσημείωτο ότι η βέλτιστη λύση με το εκτεταμένο πλαίσιο είναι πολύ δύσκολη. Ωστόσο, η παραπάνω μεθοδολογία δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο εκτεταμένο πλαίσιο, το οποίο θα οδηγήσει σε μια πιο εξελιγμένη μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση και δεν μπορεί να το αντιμετωπίσει επί του παρόντος. Αποδεικνύεται ιδιαίτερα ότι η βέλτιστη σύνθεση αυτού του είδους συνταξιοδοτικού ταμείου μπορεί να χωριστεί σε τρία διαφορετικά μέρη: ένα δάνειο που αντιστοιχεί στην παρούσα αξία των εισφορών, μια ενδεχόμενη απαίτηση που παρέχει την εγγύηση και ένα ταμείο αντιστάθμισης κινδύνου. Ένα μοντέλο επιτοκίου Vasicek θεωρείται ως παράδειγμα της ανάλυσης. Σε αυτή την εργασία παρουσιάσαμε μια ποσοτική μέθοδο διαχείρισης ενός συνταξιοδοτικού ταμείου καθορισμένων εισφορών. Εάν το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ενδιαφέρον από θεωρητικής σκοπιάς, οι στρατηγικές που προκύπτουν είναι επίσης πολύ χρήσιμες για την πρακτική διαχείριση του αμοιβαίου κεφαλαίου.

Πρώτα από όλα, αυτές οι στρατηγικές περιγράφονται από τον πλούτο που επενδύεται στις τρεις ακόλουθες κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων: μετρητά, μακροπρόθεσμα ομόλογα και μετοχές. Έτσι, τα αποτελέσματά μας είναι πραγματικά προσαρμοσμένα στη διαδικασία στρατηγικής κατανομής του ταμείου. Επιπλέον, η κατανομή εξελίσσεται με το χρόνο, αλλά και με δύο άλλους παράγοντες που μπορούν εύκολα να παρατηρηθούν: το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο και το επίπεδο του λογαριασμού ταμιευτηρίου του συνεισφέροντος. Ένα πρακτικό εργαλείο μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί εύκολα για να βοηθήσει τον διαχειριστή κεφαλαίων στην επιλογή της σύνθεσης του χαρτοφυλακίου του.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι η εισαγωγή ενός στοχαστικού επιτοκίου. Όταν το επιτόκιο υποτίθεται ότι είναι ντετερμινιστικό, τα μετρητά και τα ομόλογα είναι θεωρητικά ισοδύναμα και δεν υπάρχει νόημα να βρεθεί κατανομή μεταξύ αυτών των δύο περιουσιακών στοιχείων. Με ένα στοχαστικό επιτόκιο, το μοντέλο που παρουσιάσαμε προσφέρει μια καλύτερη ανάλυση της διαχείρισης του επιτοκιακού κινδύνου. Για οποιαδήποτε κίνηση του επιτοκίου, ο διαχειριστής ξέρει ακριβώς πώς να αντιδράσει και να εξισορροπήσει εκ νέου το χαρτοφυλάκιο (ακόμη και η θέση της μετοχής επηρεάζεται εάν η χρηματιστηριακή αγορά συσχετίζεται με το επιτόκιο).

Για να προχωρήσουμε περαιτέρω σε μια πρακτική χρήση του μοντέλου, υπάρχουν δύο βασικοί άξονες ανάπτυξης. Το πρώτο είναι μια γενίκευση του ταμείου σε ετερογενείς συνεισφέροντες. Αυτό το βήμα δεν φαίνεται πολύ δύσκολο γιατί χρειάζεται μόνο να συγκεντρώσει το χαρτοφυλάκιο που αντιστοιχεί σε κάθε συνεισφέροντα. Το δεύτερο είναι σχετικά λεπτό. Έχουμε παρουσιάσει στο αριθμητικό παράδειγμα μια θέση short σε μετρητά, αλλά συνήθως ένα αμοιβαίο κεφάλαιο δεν επιτρέπεται ποτέ να δανειστεί. Η αγορά ορισμένων προθεσμιακών συμβολαίων μπορεί να είναι μια λύση για τον διαχειριστή. Ωστόσο, εάν τέτοια προϊόντα είναι απαγορευμένα ή μη διαθέσιμα, το πρόγραμμα βελτιστοποίησης πρέπει να αλλάξει ώστε να περιλαμβάνει μη αρνητικούς περιορισμούς στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα: Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεση

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bajeux- Besnainou I. Portrait, R., 1998. Dynamic asset allocation in a mean-variance framework. Management Science.

[2] Bielecki T.R.,S.R., 1998. Risk-sensitive dynamic asset allocation. Asset and Liability Management 8, 129-138

[3] Black F., Peroid A., 1992. Theory of constant proportion portfolio insurance. Journal of Economic Dynamics and control 16, 403-426

[4] Boulier et al 2020 . Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund

[5] Booth P.M.,1995 The management of investment risk for defined contribution pension scheme. Transactions of 25th International Congress of Actuaries.

[6] Booth P.M.,Yakoubov,Y.Y.,2000. Investment policy for defined contribution pension schemes close to retirement: An analysis of the 'Life Cycle' concept. North American Actuarial Journal,

[7] Brennan M.J., Schwartz E. S., Lagnado R.,1997. Strategic asset allocation . Journal of Economic Dynamics and Control 21 (8-9),1377-1403.

[8] Clup C., Tanner K., Mensink R., 1997. Returns and Retirement, Risk 10 , No 10.

[9] Davis E.P.,1995, Pension Funds: Retirement-income Security and Capital Markets: An International Perspective. Oxford University Press, Oxford

[10] Hernanz V., Malherbert Franck and Michele Pellizzari , et al 2004. Take-up of Welfare Benefits in OECD Countries: A Review of the Evidence

[11]Karoui El, Huang S.J.,1997. A General Results of Existence and Uniqueness of Backward stochastic Differential Equations. Pitman Research Notes in Mathematical Series No. 364. Longman, New York, pp.26-36

[12] Khorasanee, M, Z., 1997 . Deterministic modeling of defined-contribution pension fund. North American Actuarial Journal 1 (4), 83-103

[13] Merton R.1971.Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. Journal of Economic Theory 3,373-41

[14] Pochart C, Taillard G.,Veitman, H.,1997. Defined contribution pension funds, Quants 27. Credit Commercial de France

[15] Ross S. M. (2007). Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά. Εκδόσεις: Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

[16] Tinios P.2011, Accounting Standards as Catalysts for Pension Reform: Greek Pensions and the Public/Private Boundary, Journal of European Social Policy Volume 21. Issue 2 , May 2011, pp 164-177

[17] Whitehouse E.R (2005a) Pension Policy Around the World:Vol.1,High-income OECD Countries. Social Protection Discussion Paper, World Bank, Washington, D.C

[18] World Bank (1994), averting the Old-Age Crisis: Policies to Protect the Old and promote Growth, Oxford University Press.

[19] Ζερβού Φ 2009. Η εξέλιξη και ο προβληματισμός για τη βιωσιμότητα του συνταξιοδοτικού συστήματος. Αρ. 58

[20] ΙΟΒΕ 2019 Συνταξιοδοτική Μεταρρύθμιση και Ανάπτυξη