ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ».

ΠΑΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ

Α΄ Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Ματζάκος
Β΄ Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Φωτεινή Καριώτου

ΠΑΤΡΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ, 2022

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ».

ΠΑΥΛΟΣ ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ

Επιτροπή επίβλεψης Διπλωματικής εργασίας

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Ματζάκος, Επίκουρος καθηγητής

Συνεπιβλέπουσα καθηγήτρια: Καριώτου Φωτεινή, Επίκουρη καθηγήτρια

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρουσίαση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος αποτελεί πρόκληση στο εκπαιδευτικό έργο του καθηγητή αλλά δημιουργεί και προβληματισμό για την αποτελεσματικότητα της κατανόησης της έννοιας του από τους μαθητές. Το ορισμένο ολοκλήρωμα σαν έννοια φαντάζει δυσνόητο στους μαθητές με συνέπεια την ελλιπή κατανόηση της έννοιας. Μεγάλος όγκος ερευνών θεωρεί απαραίτητο τον εμπλουτισμό των προγραμμάτων σπουδών με υλικό υποστήριξης για την καλύτερη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών. Θα μπορούσε μέσα στο υλικό αυτό να συμπεριληφθεί και η ιστορία των μαθηματικών τόσο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όσο και για την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών; Με την ιστορία των μαθηματικών, στην παρούσα εργασία, γίνεται προσπάθεια να υπάρξει κινητοποίηση από τον μαθητή και ο ίδιος να εργαστεί με τον ίδιο τρόπο όπως ο Αρχιμήδης, ο Leibniz, ο Riemann και να λύσει προβλήματα προσέγγισης εμβαδού ή και υπολογισμού με τη βοήθεια της εξάντλησης ή του ορισμένου ολοκληρώματος. Παροτρύνοντας τους μαθητές να αναλάβουν το ρόλο του ερευνητή το ενδιαφέρον τους αυξήθηκε με αποτέλεσμα να ακολουθήσουν τη διαδρομή και όχι την έννοια. Μεγάλο ποσοστό των μαθητών μένει ικανοποιημένο από την διδακτική παρέμβαση και μάλιστα σχεδόν όλοι δηλώνουν τουλάχιστον ευχαριστημένοι από τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας του αθροίσματος Riemann και του ορισμένου ολοκληρώματος. Εύχονται και επιθυμούν να ενσωματωθεί η ιστορία στη διδακτέα ύλη για την καλύτερη αποσαφήνιση των μαθηματικών εννοιών. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε πως μέσω της ιστορίας των μαθηματικών αυξάνεται το κίνητρο των μαθητών καθώς καλλιεργείται μια θετική στάση απέναντι στη μάθηση από τους ίδιους, αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη, εξηγούνται καλύτερα κάποιες δυσκολίες των μαθηματικών, αλλά και δίνεται η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να αποκτήσουν έναν καλό οδηγό για την διδασκαλία τους.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Ιστορία των Μαθηματικών, Μέθοδος εξάντλησης, άθροισμα Riemann, ορισμένο ολοκλήρωμα.

ABSTRACT

The concept of the definite integral is a challenge in the teacher's educational work, but it also raises concerns about the effectiveness of the students' understanding of this concept. Students have difficulty understanding the concept of the define integral and as a result they gain an unsatisfying knowledge. Many surveys underline the necessity to enrich the curricula with support material for a better approach to mathematical concepts. Could the history of mathematics be included in this material both for the comprehension of mathematical concepts and for the guidance of teachers? In this paper we attempt, through the history of mathematics, to motivate students to work and think in the same way as Archimedes, Leibniz, Riemann did, and to solve problems of area approximation or calculation with the method of exhaustion or the definite integral. This survey showed that the students' interest increased due to the fact that they took on the role of the researcher and as a result, they followed the path rather than the concept. A large percentage of the students seems to be satisfied with the teaching intervention and, in fact, the vast majority of them declare that they are at least satisfied with the presentation of the concept of the Riemann sum and the definite integral. They hope that history will be integrated into the curriculum for better clarification of mathematical concepts. In conclusion, through the history of mathematics, the motivation for students increases as a positive attitude towards learning is cultivated by the student, mathematical thinking is developed, some difficulties of mathematics are better explained, but also teachers are given the opportunity to acquire a good guide for their teaching.

KEYWORDS: History of Mathematics, The method of exhaustion ,Riemann sum, definite integral

Πίνακας περιεχομένων

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να διερευνήσει σε ποιο βαθμό μπορεί η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών να συμβάλλει στην κατανόηση, από την πλευρά των μαθητών, θεμελιωδών εννοιών τους και ποια η συμβολή των ιστορικών προβλημάτων στην εννοιολογική κατανόηση αυτών. Σημαντικό κριτήριο για την επιλογή του θέματος αποτέλεσε η εμπειρία του ερευνητή ως διδάσκοντα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η εμπειρική διαπίστωση ότι οι μαθητές χρειάζονται ενίσχυση των γνώσεών τους, ώστε να είναι σε θέση να παρακολουθήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, ήταν η αφορμή για να πραγματοποιηθεί μια προσπάθεια ενίσχυσης των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών.

Η διαδικασία της μάθησης και της εμπέδωσης των εννοιών από μαθητές αποτελεί ένα διεπιστημονικό πεδίο. Πληθώρα ερευνών από Εκπαιδευτικούς, Ψυχολόγους και άλλους επιστήμονες έχουν επιχειρήσει τη διερεύνηση της μαθησιακής διαδικασίας προτείνοντας διάφορους τρόπους για την κατανόηση και την εμπέδωση των εννοιών από τους μαθητές. Ένας μεγάλος όγκος ερευνών συμφωνεί πως για να κατανοηθούν οι έννοιες των μαθηματικών θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να εξοπλιστούν με υλικό προγράμματος σπουδών, το οποίο θα τους παρέχει την απαραίτητη καθοδήγηση (Beaton et al., 1996· Burstein, 1993· Nathan et al., 2002· Porter,1989· Remillard, 2000· Romberg, 1992· Zaslavsky, 2005). Θα μπορούσε μέσα στο υλικό αυτό να συμπεριληφθεί και η ιστορία των μαθηματικών τόσο για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όσο και για την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών.

Η συγκεκριμένη έρευνα εστιάζει στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ξεκινώντας με την προσέγγιση του εμβαδού και τη χρήση της μεθόδου της εξάντλησης και συνεχίζει με το άθροισμα Riemann και τον ορισμό χρησιμοποιώντας το όριο. Η συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών είναι δεδομένη, καθώς και η χρήση βοηθητικών λογισμικών για την παρουσίαση εικόνων και αναπαραστάσεων. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο με την βοήθεια του αθροίσματος Riemann προσπαθώντας να υπολογιστεί το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου x^2. Μέσα από διαδικασίες καθαρά υπολογιστικές δίνεται ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος με το όριο του αθροίσματος Riemann.

Ακολουθεί ο ορισμός του εμβαδού χωρίου. Το αποτέλεσμα είναι πως ένα μεγάλο μέρος των μαθητών δεν έχει κατανοήσει τον ορισμό σύμφωνα με την έρευνα των Rasslan και Tall (2002), αφού κανένας από τους μαθητές δεν αποδίδει σωστά τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Η προσπάθεια της εργασίας αποσκοπεί στο να υπερπηδήσει ο μαθητής τα εμπόδια που αναφέρει ο Brousseau (2006), τα οποία αποτελούν λόγο παρανόησης και λαθών από τη μεριά του. Τα εμπόδια αυτά είναι: ψυχολογικά, επιστημολογικά και διδακτικά.

Η διπλωματική εργασία αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος μελετάται από την βιβλιογραφία ο ρόλος της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία και στη συνέχεια γίνεται μια ιστορική αναδρομή της εξέλιξης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας και στο τρίτο μέρος τα αποτελέσματα της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται απόψεις και θέσεις ερευνητών και επιστημόνων, μέσα από την διεθνή βιβλιογραφία, για την χρήση της ιστορίας στην μάθηση καθώς και τρόποι με τους οποίους επιτυγχάνεται η ενσωμάτωση της ιστορίας στην διδασκαλία. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη της έννοιας του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος από την αρχαιότητα με την προσέγγιση του εμβαδού παραβολικού χωρίου, ως και το $19^{ο}$ αιώνα με τον αυστηρό ορισμό της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο αρχικά παρουσιάζονται η μεθοδολογία της έρευνας, οι στόχοι αλλά και τα ερευνητικά ερωτήματα. Τέλος παρουσιάζεται ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης και των ερωτηματολογίων που μοιράστηκαν στους μαθητές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται η διαδικασία και τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας.

Στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται οι δυσκολίες στην εκπόνηση της έρευνας.

Στο έβδομο κεφάλαιο γίνονται προτάσεις για περεταίρω έρευνα.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της βιβλιογραφίας, ενώ στο παράρτημα επισυνάπτεται το $1^{ο}$ Φυλλάδιο διαγνωστικού χαρακτήρα, το power point που χρησιμοποιήθηκε για την παρουσίαση της μεθόδου εξάντλησης, το φύλλο εργασίας που μοιράστηκε αμέσως μετά και τέλος το ερωτηματολόγιο της συνέντευξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η δυνατότητα αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση έχει γίνει αντικείμενο πολλών ερευνών τον τελευταίο μισό αιώνα. Από τα συμπεράσματα αυτών των ερευνών διαφαίνεται ότι ο ρόλος της είναι σημαντικός τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση των Μαθηματικών μέσα στη σχολική τάξη. Η προσπάθεια της ανάδειξης και της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών τεκμηριώνεται μέσα από μια ευρεία βιβλιογραφία(Γαγάτσης & Μακρίδης, 2002):

1. Ο μαθητής με τη βοήθεια της Ιστορίας των Μαθηματικών αντιλαμβάνεται ότι οι όλες μαθηματικές έννοιες που συναντά είναι αποτελέσματα διαρκών και επίπονων διαδικασιών. Μάλιστα, εφόσον οι μαθητές τίθενται στη θέση του ερευνητή αυξάνεται το ενδιαφέρον τους και παροτρύνονται να ακολουθήσουν τη διαδρομή και όχι το αντικείμενο-έννοια(Grugnetti&Rogers, 2000a).
2. Η σημαντικότητα της ιστορικής ανασκόπησης μιας έννοιας τονίζεται επίσης, από τον Struve(Struve, 1989). Ο ίδιος εξετάζει την σχέση μεταξύ των μαθηματικών θεωριών και της διδασκαλίας αυτών. Η εν λόγω διερευνητική σχέση καταλήγει στην σημαντικότητα που προαναφέρθηκε.
3. Η Menghini προτάσσει την ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών, εστιάζοντας στο βαρυσήμαντο ρόλο της, σχετικά με την αποσαφήνιση των μαθηματικών εννοιών αλλά και τα οφέλη της διεπιστημονικότητας από την ιστορία.
4. Εξετάζοντας τις σχέσεις της ιστορίας, της διδακτικής και της επιστημολογίας ο Speranza (Speranza, 1989) καταλήγει στα παρακάτω συμπεράσματα:

Η Φιλοσοφία και η Ιστορία των Μαθηματικών

- δύνανται να συνιστούν εναλλακτικές θεωρίες,
- επιβάλλεται να αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της εκπαίδευσης των διδασκόντων,
- προσδίδουν στους μαθητές ιστορική συναίσθηση,
- τεκμηριώνουν την εισαγωγή των μεθοδολογιών και των εποπτικών οργάνων,
- αποτελούν εργαλεία για την προώθηση ενός «στοχασμού».

5. Ο Jahnke (Jahnke, 2001) ασχολείται με τη σύνδεση της συστηματικής σκέψης με τα Μαθηματικά και εστιάζει στον τρόπο που είναι προσανατολισμένα τα σχολικά εγχειρίδια των εκπαιδευτικών προγραμμάτων της Γερμανίας. Η συστηματική σκέψη δεν διαδραματίζει κανένα ρόλο στο υπάρχον πρόγραμμα της παραπάνω χώρας. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και στα ελληνικά προγράμματα. Οι διδάσκοντες είναι επιφορτισμένοι με την διδακτέα ύλη, αφού επιβάλλεται να την εξαντλήσουν σε αυστηρά χρονικά περιθώρια. Αποτέλεσμα αυτού, είναι η προσκόλληση τους στη ροή του σχολικού εγχειριδίου, χωρίς τη χρήση των ιστορικών αναφορών που παρατίθενται αποσπασματικά στην αρχή του μαθήματος ή στο τέλος του κεφαλαίου.
6. Τέλος ο Wheeler (Wheeler, 1984) αναφέρεται στην αναγκαιότητα της ύπαρξης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση και τη διαφοροποιεί από αυτήν του μαθήματος της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Όλα τα παραπάνω, αποτελούν την αρχή της αναζήτησης της χρησιμότητας της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Οι προσπάθειες που γίνονται μέχρι και σήμερα, όσον αφορά τα οφέλη της Ιστορίας των Μαθηματικών, έχουν εντατικοποιηθεί, με αποτέλεσμα την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Ένα από αυτά είναι ότι η ιστορία μπορεί να αποτελέσει το κίνητρο ενασχόλησης με μια μαθηματική έννοια από ένα μαθητή (Farmaki & Paschos, 2007). Τον τρόπο με τον οποίο η ιστορία αποτελεί το κίνητρο για έναν μαθητή έχουν μελετήσει οι Bakker & Gravemeijer, (Bakker & Gravemeijer, 2006) όπως επίσης και Tzanakis & Thomaidis (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Συνεπώς, η ιστορία δύναται να διαδραματίσει το ρόλο του γνωστικού εργαλείου στη διδασκαλία των μαθηματικών (Bakker, 2004· Helfgott, 2004).

1.1. Ο ρόλος της ιστορίας στη διδασκαλία και τη μάθηση

«Νομίζω ότι όποιος και όποια θέλει να προοδεύσει στα μαθηματικά πρέπει να μελετήσει τους κλασσικούς των Μαθηματικών.»

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Νορβηγός Μαθηματικός

Η ιστορία αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι κάθε ατόμου, λαού, χώρας, πολιτισμού αλλά και ολόκληρης της υφηλίου και είναι αυτή που συντελεί στην αναγνώριση αλλά και την καταξίωση του καθενός από τα παραπάνω.

Η πρώτη αναφορά για τη συσχέτιση μεταξύ του μαθήματος των μαθηματικών και της ιστορίας φαίνεται να είναι η πρόταση που συντάχθηκε από τον Πορτογάλο José Monteiro Da Rocha, καθηγητή του Πανεπιστημίου της Coimbra, η οποία αναφέρει ότι οι φοιτητές πρέπει να μελετήσουν πρώτα την ιστορία της μαθηματικής επιστήμης και μετά να ξεκινήσουν τα Μαθηματικά (Fasanelli, 2000). Ο Lagrange το 1970 σε διαλέξεις του προς υποψηφίους εκπαιδευτικούς, προτείνει να κάνουν χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και ειδικότερα το πώς οι μαθηματικοί του παρελθόντος κατάφεραν μέσα από προσπάθειες και από λάθη και αδιέξοδα, να επιτύχουν τους στόχους τους. Η παρότρυνση αυτή δεν είναι μόνο θέμα περιέργειας, αλλά και καθοδήγησης για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, σε προβληματισμούς που πρόκειται να συναντήσουν στην πορεία της διδασκαλίας τους (Lagrange, 1901).

Τα παιδιά οφείλουν να ακολουθούν το δρόμο που χάραξαν οι πρόγονοι τους, μια διαδικασία, η οποία για τον Poincare (1854-1912), επιτάσσεται στο εκπαιδευτικό έργο. Χρησιμοποιώντας τα ιστορικά προβλήματα στη διδασκαλία, δημιουργείται ένα κλίμα ευχάριστο και διαφορετικό από την καθημερινότητα. Επιπλέον, με αυτόν τον τρόπο, οι εκπαιδευτικοί γίνονται μεσολαβητές για την μετάδοση των ιστορικών ιδεών και της μαθηματικής γνώσης (Furinghetti, 1997).

Τα τελευταία χρόνια εμφανίζονται όλο και περισσότερες αναφορές σχετικά με το ρόλο της ιστορίας στην διδασκαλία αλλά και στη μάθηση. Τα σχολικά βιβλία και ιδιαίτερα των μαθηματικών, στο τέλος κάθε κεφαλαίου συνήθως, παρουσιάζουν και το αντίστοιχο ιστορικό σημείωμα, αναφερόμενο πάντα στην εξέλιξη της έννοιας που διαπραγματεύτηκε το κεφάλαιο.

Πολλοί ερευνητές αλλά και εκπαιδευτικοί θεωρούν πως η αποκάλυψη των προσωπικοτήτων των μαθηματικών του παρελθόντος αλλά και των ιστορικών προβλημάτων δύνανται να ενεργοποιήσουν και να διατηρήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών (Stander, 1989). Στην αύξηση των κινήτρων και στην ανάπτυξη μιας θετικής στάσης απέναντι στη μάθηση συμβάλει σε μεγάλο βαθμό και η ιστορία κατά τονPo-Hung(Liu, 2003). Ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών , τα «κάνουν» βαρετά, κάτι που διαπιστώνεται από πολλές έρευνες, οι οποίες δείχνουν την αυξανόμενη αρνητική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά.

Η ιστορία ως παιδαγωγικό εργαλείο μπορεί να δώσει νέες προοπτικές και γνώσεις στο υλικό και ακόμη μπορεί να χρησιμεύσει ως οδηγός για τις δυσκολίες που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές κατά την εκμάθηση ενός συγκεκριμένου μαθηματικού θέματος. Μάλιστα, είναι πολύ σημαντικό, το γεγονός ότι δεν υπάρχει έρευνα που να μην υποστηρίζει τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην τάξη (Jankvist U.T., 2009). Χαρακτηριστικό παράδειγμα η σάτιρα του Guedji(Guedji, 1998) για την ανυπαρξία στη διδασκαλία του ιστορικού πλαισίου. Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν γινόταν ποτέ συζήτηση για ανθρώπους. Σπανίως εμφανιζόταν ένα όνομα: Θαλής, Πυθαγόρας, Riemann κ.α. Ήταν απλά ένα όνομα, όπως λόγου χάρη ένα όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν αναφερόταν πουθενά το που και το πότε. Οι αποδείξεις και οι τύποι απλά σημειώνονταν στον πίνακα. Σαν να ήταν μόνιμα εκεί και δεν είχαν δημιουργηθεί από κανένα, όπως για παράδειγμα τα βουνά και τα ποτάμια Αλλά και αυτά ακόμη έχουν κάποια αρχή. Το ερώτημα που τίθεται είναι γιατί η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στην διδασκαλία τους;

1.2. Οφέλη από την χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Πληθώρα ερευνών αλλά και εργασιών έχουν ασχοληθεί με την ενσωμάτωση ή μη της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία, από τις οποίες η πλειοψηφία αυτών συμπεραίνει την αναγκαιότητα της χρήσης της ιστορίας στην εκπαιδευτική παρουσίαση μαθηματικών εννοιών (Beaton et al., 1996; Burstein, 1993· Nathan et al., 2002· Porter,1989· Remillard, 2000· Romberg, 1992·Zaslavsky, 2005). Το IREM (Instituts de Recherchesur l ‘Enseignement des Mathématiques) διαμορφώνει την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στα τέλη της δεκαετίας του’70. Παράλληλα δημιουργείται μια διεθνή κοινότητα με την ονομασία Commission inter-IREM «ÉpistémologieetHistoire des Mathématiques», η οποία ισχυρίζεται ότι η ιστορία των μαθηματικών έχει τρεις λειτουργίες κατά την διδασκαλία:

- Αντιπροσωπευτική (Fonctionvicariante): Οι μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών έχουν αποκτηθεί από την σχολική και πανεπιστημιακή παιδεία, οι οποίες επιτρέπουν την επίλυση ασκήσεων σε διαγωνισμούς ή προκαλούν το ενδιαφέρον σε επιστημονικό επίπεδο. Οι μαθηματικές γνώσεις των καθηγητών έχουν καθαρά σχολικό χαρακτήρα και σπανίζει το φαινόμενο της εφαρμογής αυτών των γνώσεων. Με την ιστορία των μαθηματικών επιτρέπεται να δούμε τα μαθηματικά ως δραστηριότητα και όχι ως σχολική καθημερινότητα.
- Εξωτική (Fonctiondépaysant): Το κύριο ενδιαφέρον της Ιστορίας των μαθηματικών είναι η έκπληξη που προκαλείται από το αυτονόητο. Συχνά κατά τη διδασκαλία είναι απαραίτητο να γίνουν κατανοητές κάποιες έννοιες χωρίς την γνώση ή την απορία της προέλευσής τους. Η διαβεβαίωση της επινόησης αυτών των εννοιών δίνεται από την ιστορία, η οποία αποτελεί μια υπενθύμιση ότι όλα αυτά δεν προϋπήρχαν.
- Πολιτιστική (Fonctionculturelle): Με την παρότρυνση της ιστορίας γίνεται η ένταξη του μαθηματικού προϊόντος στην τεχνολογική και επιστημονική κουλτούρα της εποχής, στην ιστορία των κοινωνιών και των ιδεών. Μ' αυτό τον τρόπο, καλούνται οι εκπαιδευτικοί να μελετήσουν την ιστορία της εκπαίδευσης με ανησυχίες που ξεπερνούν τα στερεότυπα (Barbin, 1997).

Τα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο είναι ένα σύνολο «αλγορίθμων» και διαφόρων τεχνικών που θα πρέπει να μεταφερθούν αυτούσια στους μαθητές. Η παραπάνω άποψη έχει αντικατασταθεί με την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της καθημερινότητας και πραγματικότητας των παιδιών και έτσι πρέπει να διδάσκονται (Κοτοπούλης, 2009).

Η λίστα του Fauvel (Fauvel, 1991), η οποία απαριθμεί τους λόγους ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών με την διδασκαλία, αποτελεί την επιχειρηματολογία του συγγραφέα για την στάση του. Ο ίδιος πιστεύει πως με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών:

1) η διδασκαλία γίνεται ευκολότερη,

2) τα μαθηματικά δεν τρομάζουν ή πανικοβάλλουν τους μαθητές,

3) αυξάνεται το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση,

4) η αντίληψη των μαθητών για τα μαθηματικά διαφοροποιείται,

5) η παρουσίαση των εννοιών της διδακτέας ύλης εξομαλύνεται με τη γνώση της ιστορικής εξέλιξης αυτών,

6) διευρύνεται το πεδίο της διδασκαλίας με χρήση διαθεματικών εργασιών,

7) κατανοούν σε μεγαλύτερο βαθμό τις έννοιες, αφού παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη αυτών,

8) γίνεται σαφής ο ρόλος των μαθηματικών στην κοινωνία,

9)δημιουργούνται ευκαιρίες για έρευνα,

10) αναπτύσσονται δεξιότητες, όπως η χρήση του διαδικτύου, της βιβλιοθήκης ή ακόμη και η συγγραφή δοκιμίων,

11) γίνεται σύγκριση μεταξύ των αρχαίων και νέων τεχνικών αναδεικνύοντας τις αξίες τους,

12) τα μαθηματικά γίνονται πιο ανθρώπινα,

13)συμβάλλει στη διατήρηση του ενθουσιασμού για την επιστήμη των μαθηματικών από τους μαθητές,

14) οι δυσκολίες και τα προβλήματα του παρελθόντος γίνονται αντιληπτά από τους μαθητές με αποτέλεσμα να ξεπερνιούνται τα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές σήμερα και

15) επιτυγχάνεται η ενθάρρυνση αλλά και η παρότρυνση των μαθητών αφού καταλαβαίνουν ότι τα ίδια εμπόδια αντιμετώπισαν και άλλοι στο παρελθόν.

Από τη λίστα του Fauvel ((Fauvel, 1991)) και τα επιχειρήματα άλλων μελετητών ο Liu (Liu, 2003) προτείνει πέντε λόγους χρήσης της Ιστορίας στα σχολικά προγράμματα:

- Η ιστορία μπορεί να αυξήσει τα κίνητρα των μαθητών αλλά και να δημιουργήσει μια θετική στάση απέναντι στη μάθηση,

- Τα εμπόδια του παρελθόντος κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών, μπορούν να βοηθήσουν στην επεξήγηση των δυσκολιών που συναντώνται από τους σημερινούς μαθητές,
- Τα ιστορικά προβλήματα μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών,
- Η ιστορία αποκαλύπτει τις ανθρωπιστικές πτυχές της μαθηματικής γνώσης,
- Η ιστορία δίνει στους εκπαιδευτικούς έναν οδηγό διδασκαλίας.

Τέλος ο Fried(Fried, 2001) ισχυρίζεται τρείς απλούς αλλά και βασικούς λόγους για την χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία:

- Η ιστορία των μαθηματικών εξανθρωπίζει τα μαθηματικά,
- κάνει τα μαθηματικά περισσότερο ενδιαφέροντα, πιο κατανοητά και προσιτά και
- ενισχύει τη διορατικότητα μέσα από τις έννοιες, τα προβλήματα και την επίλυση αυτών.

Συμπεριλαμβάνοντας όλα τα παραπάνω, αναφέρονται και τέσσερεις λόγοι που συμβάλλουν στη χρήση της Ιστορίας (Παναγιώτου, 2002):

1. Βελτίωση του ποιοτικού και μαθησιακού επιπέδου της διδασκαλίας:
   a. Συντελεί στην κατανόηση των μαθησιακών δυσκολιών που παρουσιάζονται από τους μαθητές:

      Η διαδικασία της μάθησης δεν είναι πάντα συνεχής και ομοιόμορφη. Άλλες φορές επιτυγχάνεται με μικρά βήματα και άλλες φορές αλματωδώς. Κάποιες από τις έννοιες έρχονται ως αποτέλεσμα της φυσικής ροής των όσων διδάσκονται, ενώ κάποιες άλλες απαιτούν γνωστικά άλματα. Τις περισσότερες φορές, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σε παρόμοιες περιπτώσεις, δεν είναι άμεσα εμφανείς. Ωστόσο, έχει σημειωθεί ότι τα άλματα που επιβάλλεται να κάνουν οι μαθητές για να ξεπεράσουν τις δυσκολίες αυτές, συμπίπτουν με αυτά που συνέβησαν στο παρελθόν, κατά την εξέλιξη των Μαθηματικών. Για το λόγο αυτό ο ενήμερος εκπαιδευτικός, που είναι γνώστης των προβλημάτων που προέκυψαν στην Ιστορία των Μαθηματικών, μπορεί να παρακολουθήσει και να πραγματευθεί με αποδοτικότερο τρόπο τις δυσκολίες κατανόησης των μαθητών. Υπό αυτή την οπτική γωνία, η ιστορία μπορεί να επιτελέσει

σημαντικό χρηστικό παιδαγωγικό εργαλείο, σε περίπτωση που τα άλματα που πρέπει να κάνουν οι μαθητές είναι τέτοια, που τους δυσκολεύουν να κατανοήσουν τη νέα γνώση που καλούνται να αντιμετωπίσουν.

b. Δείχνοντας την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών και των αποδείξεων, συντελεί στην καλύτερη κατανόησή τους από τους μαθητές:

Βλέποντας ο μαθητής την ιστορική αναδρομή διαπιστώνει και ο ίδιος ότι και οι μεγάλοι μαθηματικοί κάνανε πρώτα λάθη και μετά πετύχανε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Στην σχολική τάξη η αποτυχία στιγματίζεται, ενώ η επιτυχία επιβραβεύεται. Σχεδόν σε όλα τα σχολικά βιβλία παρουσιάζεται η έννοια με τη μορφή Ορισμός-Θεώρημα-Πόρισμα, χωρίς την παρουσίαση όλων των λαθών και προσπαθειών που έγιναν μέχρι να δοθεί η σωστή απόδειξη ή ορισμός για την έννοια αυτή. Μπορεί ο τρόπος παρουσίασης αυτός να είναι λιτός, κομψός και να κερδίζει χρόνο ο εκπαιδευτικός, αλλά ο μαθητής δεν αντιλαμβάνεται πώς προέκυψαν οι έννοιες αυτές που βρίσκονται στο βιβλίο του. Η απογοήτευση και η εγκατάλειψη των προσπαθειών με την πρώτη δυσκολία που θα συναντήσει ο μαθητής είναι δεδομένη, διότι έρχεται αντιμέτωπος με παράλογες, γι’ αυτόν, έννοιες. Με τη χρήση όμως της ιστορίας, διευκολύνουμε τους μαθητές να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες. Οι εκπαιδευτικοί μπορούνε να δημιουργήσουν ένα κλίμα έρευνας, έτσι ώστε οι μαθητές, να εισέλθουν σε μονοπάτια που δεν αποκαλύπτονται από τα σχολικά βιβλία. Μελετώντας ακόμη και ξεχασμένα θέματα ή μεθόδους, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει συνεχής πρόοδος και εξέλιξη στα Μαθηματικά. Επιπλέον αξιολογούμε καλύτερα τις σημερινές τεχνικές, αναγνωρίζοντας τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες τους.

c. Εκπαίδευση δημιουργίας προβλημάτων:

Τα σχολικά βιβλία οδηγούν τους μαθητές με «παρωπίδες», μαθαίνοντας τους μόνο ένα τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων. Παρατηρούμε ότι στα περισσότερα σχολικά συγγράμματα, ζητείται η απόδειξηότι ισχύει η εκτέλεση μιας ακολουθίας πράξεων. Ωστόσο, λείπουν από τις περισσότερες τάξεις, με εξαίρεση ίσως των τελευταίων, τα προβλήματα του τύπου «αποδείξτε ότι δεν ισχύει…» ή «είναι αδύνατο». Επίσης τα ανοικτού τύπου προβλήματα, διαδραματίζουν το ρόλο του κομπάρσου, ενώ πρωταγωνιστούν αυτά που δέχονται μόνο θετική απάντηση. Η αντιμετώπιση αυτή από τα εγχειρίδια, δεν βοηθά τον μαθητή σχετικά με το πώς πρέπει να σκέφτεται και να αντιμετωπίζει τα προβλήματα, ανεξαρτήτου φύσεως. Την δημιουργία μιας κουλτούρας κατάλληλης για την εισαγωγή προβλημάτων, μπορεί να μας προσφέρει η Ιστορία. Με τη βοήθειά της λοιπόν, μπορούμε να εισάγουμε προβλήματα διερευνητικής φύσης (όπου κατά την επίλυσή τους προωθούνται σημαντικά τα Μαθηματικά) ή άλυτα προβλήματα (όπου καταρρίπτεται η αποδοχή του καθηγητή ως αυθεντία που γνωρίζει τα πάντα και το γεγονός ότι τα Μαθηματικά είναι τελειωμένο και στερεότυπο θέμα). Η Ιστορία με αυτό τον τρόπο διεγείρει τις δεξιότητες της μαθηματικής επικοινωνίας, ενισχύει την εκτίμηση των μαθητών για τα μαθηματικά και τέλος δημιουργεί κατάλληλες συνθήκες για την κατανόηση των μαθηματικών(Tzanakis&Arcavi, 2000).

2. Ανάδειξη της ανθρώπινης πλευράς των Μαθηματικών.

   a. Δυναμική και ανθρώπινη δραστηριότητα

   Τα μαθηματικά ως επιστήμη αποτελούν τον προπομπό σημαντικών επιστημονικών εξελίξεων. Ένα πολύ μικρό βήμα μπροστά για τα Μαθηματικά, προκαλεί συνήθως χείμαρρο εξελίξεων για τις υπόλοιπες θετικές επιστήμες. Φυσικό επακόλουθο αυτού, είναι να επηρεάζεται και η ίδια η κοινωνία αφού οι ανάγκες για εξέλιξη έχουν αφετηρία και τερματισμό την ίδια. Τα μαθηματικά επομένως, αποτελούν μια δυναμική και ανθρώπινη δραστηριότητα που επηρεάζεται από πολιτιστικούς και κοινωνικούς παράγοντες και αποκτούν μορφή σύμφωνα με τις πνευματικές και υλικές ανάγκες της εποχής. Η εξέλιξη των μαθηματικών με βάση τις κοινωνικές συνθήκες είναι δεδομένη. Η διαπολιτισμική παρουσίαση μιας έννοιας μέσω της ιστορικής ανάλυσης, δίνει πληροφορίες για την ανάπτυξή της μέσα σε διαφορετικούς πολιτισμούς. Η διδασκαλία η οποία βασίζεται σε μια ιστορικά ενσωματωμένη αντίληψη, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν το κοινωνικό, πολιτικό, πολιτισμικό και οικονομικό πλαίσιο της μαθηματικής ανάπτυξης καθώς και τους ρόλους που έχουν διαδραματίσει οι διάφοροι πολιτισμοί στην εξέλιξη των μαθηματικών(Barbin, 1997· Ernest, 1998· Swetz, 1995· Thomaidis, 1991).

Η ενασχόληση των μαθητών με την ιστορία, τους βοηθά να κατανοήσουν την επίδραση των κοινωνικών κανόνων και των διαφορετικών πολιτισμικών πρακτικών στην ανάπτυξη των μαθηματικών, καθώς και την επίδραση των μαθηματικών στον τρόπο που σκέπτονται και ενεργούν οι άνθρωποι στην καθημερινότητα (Wilson&Chauvot, 2000).

b. Η ενσωμάτωση της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών.

Μέσω της ιστορίας αναγνωρίζονται οι δεσμοί που συνδέουν τις διάφορες μαθηματικές περιοχές με τα μαθηματικά και άλλων επιστημονικών αντικειμένων (Furinghetti&Somaglia, 1998· Grugnetti&Rogers, 2000b).

c. Βιογραφίες των Μαθηματικών επιστημόνων.

Η ιστορία φέρνει στο φως πολλές προσπάθειες, αποτυχημένες και επιτυχημένες, για την επίλυση προβλημάτων και υπογραμμίζει τον ανθρώπινο παράγοντα. Μέσα από τη μελέτης, τόσο της ζωής, όσο και των έργων ενός διάσημου επιστήμονα, διαπιστώνουμε τους λόγους και τις ανησυχίες του, για τους οποίους οδηγήθηκε στην ενασχόλησή με συγκεκριμένους τομείς της επιστήμης. Έτσι, μέσα από αυτές τις δυσκολίες, γίνεται αντιληπτό ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλά μια επιστήμη που κάποιοι την κατανοούν και κάποιοι άλλοι όχι. Δίνονται στους μαθητές κίνητρα για την ενασχόλησή τους με δυσκολότερες έννοιες, χωρίς να παραιτούνται με την πρώτη δυσκολία που θα συναντήσουν. Επιπλέον πολλές φορές με τις βιογραφίες παρατηρούνται και έχθρες ή ίντριγκες ανάμεσα σε μεγάλους μαθηματικούς (για παράδειγμα, Kronecker-Cantor, Cardan-Tartaglia, Newton-Leibniz) που δημιουργήθηκαν κατά καιρούς. Οι διαμάχες αυτές όμως, οδήγησαν τις περισσότερες φορές, σε πολύ μεγάλα μαθηματικά επιτεύγματα.

Το ερώτημα που τίθεται είναι ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να παρατίθενται τα βιογραφικά σημειώματα, έτσι ώστε να μπορεί ο μαθητής να πάρει τα μέγιστα των θετικών στοιχείων που προαναφέραμε. Ο Jankvist(Jankvist U. T., 2009)υποστηρίζει πως ένα ολοκληρωμένο project, το οποίο ξεδιπλώνεται σε διαδοχικές φάσεις, είναι καλύτερο από μια απλή παρουσίαση βιογραφικών σημειωμάτων.

3. Αύξηση του ενδιαφέροντος για μάθηση.

Κίνητρο για μάθηση των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει η ιστορία. Ξεκινώντας ο μαθητής με το ίδιο πρόβλημα που απασχόλησε τους επιστήμονες, παρατηρώντας τις μεθόδους και τις αποδείξεις που επιχείρησαν για να το λύσουν αισθάνεται πιο φιλικά, και οικεία, με αποτέλεσμα να αυξάνεται το ενδιαφέρον του. O Ponza (Ponza, 1998)αναφέρει περιπτώσεις κατά τις οποίες η Ιστορία των Μαθηματικών κίνησε το ενδιαφέρον μαθητών, που όχι απλά ήταν αδιάφοροι, αλλά είχαν και προβλήματα συμπεριφοράς. Είναι αποδεκτό από όλους τους ερευνητές ότι η εξελικτική φύση των μαθηματικών και ο τρόπος που αυτή επεκτείνεται σε συνάρτηση με την πολιτισμική ανάπτυξη, είναι αρκετή για να αποσπάσει το ενδιαφέρον των μαθηματικών.

4. Καθοδήγηση του εκπαιδευτικού έργου.

Η ιστορία αποτελεί για την Furinghetti (Furinghetti, 1997)ένα καλό όχημα για συλλογισμούς πάνω στα εκπαιδευτικά προβλήματα και στη γνώση, για δουλειά πάνω στις απόψεις των μαθητών για τα μαθηματικά. Εφοδιάζει τους εκπαιδευτικούς με ένα χρήσιμο εργαλείο πρόβλεψης.

Οι μαθητές συναντούν εμπόδια σε διάφορα επίπεδα τα οποία είναι όμοια με εκείνα του παρελθόντος (Φιλίππου & Χρίστου, 2001).Ανατρέχοντας στο ιστορικό ανάλογο προβληματισμό, αρκετές φορές, προσφέρονται λύσεις, αρκετά απλές, ξεφεύγοντας από το πολυσύνθετο του σημερινού τρόπου σκέψης. Οι μαχόμενοι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αφιερώσουν χρόνο και κόπο για τη γνώση της ιστορίας των μαθηματικών. Με τη γνώση αυτή οι δάσκαλοι θα βοηθηθούν στην αλλαγή του τρόπου με τον οποίο αξιολογούν τους μαθητές τους (Barbin, 1997). Θα πρέπει οι μαθητές να αντιμετωπίζονται ως σκεπτόμενα άτομα που εκδηλώνουν ενδιαφέρον και έχουν πρωταγωνιστικό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης. Οι πρακτικές και οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών μπορούν να αλλάξουν, επιδρώντας τελικά στη μάθηση των διδασκομένων (Fauvel & van Maanen, 2002), αν και μια αλλαγή στις πεποιθήσεις, δεν σημαίνει αλλαγή στη διδασκαλία (Carpenteretal., 1997).

Πολλοί, λοιπόν, ερευνητές εισηγούνται ανεπιφύλαχτα την χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία, για πολλούς λόγους.

1.3. Εμπόδια στη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Στον αντίποδα της ενσωμάτωσης της ιστορίας βρίσκονται πολλοί επιστήμονες, οι οποίοι τεκμηριώνουν την άποψή τους με εξίσου πολλά επιχειρήματα. Οι Tzanakis και Arcavi (Tzanakis & Arcavi, 2000) χωρίζουν τα εμπόδια αυτά σε δύο κατηγορίες:

1. Επιστημολογικής και φιλοσοφικής φύσεως με κυριότερα:

    1.α. Η ιστορία δεν εντάσσεται στο μάθημα των μαθηματικών. Πολλοί ισχυρίζονται ότι, πρώτα πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά και στη συνέχεια η ιστορία σε ξεχωριστό μάθημα.

    1.β. Για τους περισσότερους μαθητές η ιστορία δεν είναι και το καλύτερο μάθημα. Εκφράζουν έντονα τη δυσαρέσκειά τους προς το μάθημα της ιστορίας, θεωρώντας πολύ βαρετή τη διαδικασία. Ο κίνδυνος του να περάσει το ίδιο συναίσθημα και για τα μαθηματικά είναι μεγάλος.

    1.γ. Η ιστορική μαθηματική προσέγγιση σε ένα πλαίσιο κενό, είναι πιθανό να προκαλέσει σύγχυση παρά διαφώτιση, αφού οι μαθητές δεν έχουν ολοκληρωμένη άποψη για την ιστορική πλαισίωση και το παρελθόν (Russetal., 1991).

    1.δ. Αφού στο παρελθόν λύθηκαν όλα τα δύσκολα προβλήματα, δεν υπάρχει λόγος για την επαναφορά τους στο σήμερα. Θα ήταν χάσιμο χρόνου και επιπλέον θα δυσκόλευε τους μαθητές στην κατανόηση της επίλυσης (leGoff, 1996).

2. Πρακτικής φύσεως

    2.α. Περιορισμός του διαθέσιμου διδακτικού χρόνου, αφού θα πρέπει να αναφερθεί και η ιστορική αναδρομή της έννοιας.

    2.β. Η υποδομές των τάξεων δεν διαθέτουν αρκετές πηγές και διδακτικό υλικό, ενώ συνάμα η έλλειψη πόρων δεν λύνει το προηγούμενο πρόβλημα.

    2.γ. Η πλειάδα των εκπαιδευτικών είναι ελλιπής, αφενός διότι δεν έχουν εμπειρία και αφετέρου δεν διαθέτουν την κατάλληλη επιμόρφωση καθώς και το απαραίτητο διδακτικό υλικό.

    2.δ. Έλλειψη βαθμολόγησης της ιστορίας συνεπάγεται και την αδιαφορία του μαθητή απέναντί της.

    2.ε. Τα οφέλη της ιστορίας των μαθηματικών δεν έχουν δημοσιοποιηθεί λόγω έλλειψης επιστημονικών ευρημάτων.

2.στ. Η γενικευμένη έλλειψη πηγών που παρατηρείται στις περισσότερες τάξεις (Fauvel, 1991).

1.4. Τρόποι ενσωμάτωσης της Ιστορίας

Τα οφέλη που προαναφέρθηκαν, αποτελούν από μόνα τους ικανή αλλά όχι αναγκαία εκδοχή της ενσωμάτωσης της Ιστορίας στην διδακτική των Μαθηματικών. Αναγκαία συνθήκη είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί αυτή η ενσωμάτωση.

Το μοντέλο της Furinghetti (Furinghetti, 1997) προτείνει έξι επίπεδα για την ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία:

1. γνώση των πηγών
2. επιλογή θεμάτων που πληρούν τις προϋποθέσεις της τάξης
3. διερεύνηση και ανάλυση των αναγκών της τάξης
4. σχεδιασμός της δραστηριότητας στην τάξη με βάση την καταλληλόλητα των μέσων, τους στόχους και το πλαίσιο της δραστηριότητας
5. πραγματοποίηση του έργου, και
6. αξιολόγηση της διεργασίας

Εξετάζοντας τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία κάποιοι ερευνητές υποστηρίζουν την εξής άποψη:

Από την Ιστορία πηγάζουν πιθανοί τρόποι εισαγωγής ενός μαθηματικού αντικειμένου με φυσικό τρόπο. Προτάσσουν την αξιοποίηση των ιστορικών πηγών για μια μια διαισθητική προσέγγιση στη διδασκαλία (Avital, 1995· Davitt, 2000· Tzanakis & Thomaidis, 2000). Ο Avital (Avital, 1995) πιστεύει πως η διδασκαλία στην οποία έχουμε μετάβαση από ειδικά παραδείγματα σε θεωρητικές προσεγγίσεις, βοηθά τους μαθητές να μεταπηδήσουν σε υψηλότερο επίπεδο.

Η χρήση ιστορικών κειμένων, σε διδακτικές παρεμβάσεις, από έγκυρες πηγές ως βασικό υλικό διδασκαλίας, βοηθά τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τα Μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα (Barbin, 1997· Furinghetti, 1997· Tzanakis & Arcavi, 2000).

Οι Barbin και Menghini (Barbin & Menghini, 2000) προτείνουν έναν άλλο τρόπο ενσωμάτωσης της Ιστορίας. Αφού, η ιστορία δεν αποτελεί καθ' εαυτό διδακτικό στόχο αλλά δρομολόγιο για την επίτευξή του, δεν θεωρούν απαραίτητο η ιστορία να διαφαίνεται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών, με αυτόν τον τρόπο, στη διδασκαλία, θέτει ως προτεραιότητα την ανακατασκευή, όπου η Ιστορία υπεισέρχεται σιωπηρά, και γίνεται χρήση εννοιών, μεθόδων και συμβολισμών, που πρωτοεμφανίστηκαν μεταγενέστερα από το θέμα που εξετάζεται. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό, ότι όλα τα παραπάνω, συμβαίνουν για την επίτευξη του στόχου, που δεν είναι άλλος παρά η κατανόηση των Μαθηματικών στη σύγχρονη μορφή τους (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προτρέπουν τους μαθητές τους στην αναζήτηση πληροφοριών από βιβλιοθήκες ή και από το διαδίκτυο, στην μελέτη, στην έρευνα και στην τεκμηρίωση των ευρημάτων τους, έτσι ώστε να αναπτύξουν περισσότερες ερευνητικές πρακτικές (Fauvel & vanMaanen, 2002). Οι δραστηριότητες που εμπνέονται από την ιστορία κάνουν τους μαθητές αρχαιολόγους των μαθηματικών(Swetz, 1995).

Τα γενέθλια ενός μαθηματικού μπορούν να σταθούν αφορμή για έρευνα της ζωής και του έργου του από τους μαθητές, ακόμη και αν δεν σχετίζεται με το θέμα του μαθήματος. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η γένεση των μαθηματικών εννοιών είναι μια ανθρώπινη και συνεχώς εξελισσόμενη δραστηριότητα. Επίσης μπορούν να αποκτήσουν άποψη για τις πολιτικές, οικονομικές, κοινωνικές και πολιτισμικές συνθήκες που επικρατούσαν κατά τη διάρκεια της ζωής τους και κατά συνέπεια κατά τη γέννηση των ιδεών αυτών(Barbin, 1997· Swetz, 1995).

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή παραθέτονται οι κατηγορίες του τρόπου χρήσης της ιστορίας σύμφωνα με τον Jankvist (Jankvist U. T., 2009):

1) Άμεση παροχή πληροφοριών που βασίζονται στην ιστορία:
    a) Αποσπασματικά πραγματικά στοιχεία (Δίνονται κάποιες αυτούσιες πληροφορίες όπως παραθέτονται μέσα στη διδακτέα ενότητα, χωρίς όμως από μόνες τους να αποτελούν αυτοτελή διδακτέα ενότητα)
    b) Βιβλία αμιγώς ιστορικά ή μαθήματα για την Ιστορία των Μαθηματικών

2) Εφαρμόζοντας μια μαθησιακή και διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην Ιστορία:
   a) Η ιστορική – γενετική αρχή (historical – genetic principle) η οποία αποβλέπει στην μετάβαση των μαθητών από βασικές, σε περισσότερο σύνθετες γνώσεις, ομοιοτρόπως της προόδου της ανθρωπότητας στην ιστορία των μαθηματικών.
   b) Η ψυχολογική – γενετική αρχή (psychological – genetic principle) η οποία υποστηρίζει ότι οι μαθητές κάνοντας χρήση των δυνατοτήτων και των εμπειριών τους μπορούν να ανακαλύψουν ξανά ή να επαναεφεύρουν μαθηματικές έννοιες.
3) Αναπτύσσοντας βαθύτερη μαθηματική επίγνωση σε σχέση με το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο συναντώνται. Η επίγνωση αυτή χωρίζεται στη μελέτη δύο περιπτώσεων:
   - εγγενούς φύσεως (intrinsicnature): περιλαμβάνουν θεμελιώδης πτυχές όπως τα σχετικά κίνητρα και τα γενικά εννοιολογικά πλαίσια που παρέχονται.
   - εξωγενούς φύσεως (extrinsicnature): η αντιμετώπιση των μαθηματικών ως αρχή ξεκομμένη από τις πολιτισμικές, κοινωνικές ανησυχίες και επιρροές.

Μετά την παρουσίαση της κατηγοριοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών θα πρέπει να γίνει αναφορά και για το επόμενο στάδιο της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδασκαλία. Ο Jankvist (Jankvist U. T., 2009) υποστηρίζει τη χρήση της ιστορικής πληροφορίας με μια από τις παρακάτω τρεις προσεγγίσεις (δεδομένου ότι έχουμε αποδεχτεί το σημαντικό ρόλο της Ιστορίας για τη διδασκαλία):

- διαφωτιστική (illuminationapproach): με τη μορφή ιστορικών σημειωμάτων, που μπορεί να περιέχουν ημερομηνίες, βιογραφίες, ανέκδοτα, σημαντικά προβλήματα κλπ συμπληρώνει τη διδασκαλία η ιστορική πληροφορία. Επίσης δύναται να αποτελέσει τον επίλογο ή ακόμη και τον πρόλογο ενός κεφαλαίου. Ένα ιστορικό πρόβλημα μπορεί να αποτελέσει την εκκίνηση του κεφαλαίου, ενώ μια σύνοψη των ιστορικών στοιχείων που συνδέονται με την ενότητα μπορεί να «κλείσει» το κεφάλαιο.

- θεματική (modulesapproach): συνοπτικά περιλαμβάνει ιστορικό υλικό(όπως σημαντικά προβλήματα), το οποίο είναι συνδεδεμένο με το περιεχόμενο, που ωστόσο, δεν βρίσκεται στην «τυπική ύλη». Αναλυτικότερα το υλικό αυτό, θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο μιας εργασίας(κατασκευή ιστορικής μηχανής) μεγάλης χρονικής διάρκειας (Tzanakis & Arcavi, 2000).
- ιστορικοκεντρική (history based approach): βασίζεται στην ιστορική εξέλιξη των εννοιών που περιέχονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, π.χ. φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί κλπ.

Το γαστρονομικό ανάλογο των Siu και Tzanakis(Siu&Tzanakis, 2004)αναφέρει πως τα ιστορικά σημειώματα που χρησιμοποιούν τα σχολικά βιβλία μπορούν να λειτουργήσουν ως «ορεκτικό», αντιστοιχιζόμενα με την υποκίνηση, και ως «επιδόρπιο» αν αντιστοιχηθούν με τον εμπλουτισμό του μαθήματος. Προφανώς, η υποκίνηση και ο εμπλουτισμός του μαθήματος αποτελούν τον κύριο στόχο των ιστορικών σημειωμάτων που βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια. Ιδία άποψη έχουν και τα αναλυτικά προγράμματα, καθώς με την ένταξη της ιστορίας, προσπαθούν να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και την αγάπη τους γι’ αυτά.

1.5. Ιστορία των Μαθηματικών στην παρούσα διδακτική παρέμβαση

Στην παρούσα εργασία, εστιάζεται η διδασκαλία της έννοιας του αθροίσματος Riemann και κατ’ επέκταση η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Προκειμένου να γίνει λόγος για άθροισμα Riemann, πρέπει να προηγηθεί η μέθοδος της εξάντλησης του Αρχιμήδη και του εμβαδού που περικλείεται από ένα παραβολικό χωρίο και μια ευθεία.

Η επιστημονική κοινότητα και ένα μεγάλο μέρος εκπαιδευτικών οι οποίοι δεν ακολουθούν αυστηρά το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, αλλά διαμορφώνουν και πραγματοποιούν καινοτόμες μορφές διδασκαλίας, υποστηρίζουν και αποδέχονται τη μεγάλη σημασία της ιστορίας των μαθηματικών. Σκοπός της παρούσας έρευνας, είναι να δείξει ότι η ιστορική προσέγγιση της έννοιας, προσεγγίζει τους μαθητές και τους κάνει περισσότερο δεκτικούς με τα μαθηματικά.

Οι ιστορικές πτυχές των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται στην παρέμβαση αυτή είναι η Μέθοδος της Εξάντλησης και το Άθροισμα Riemann, αφού ανακαλυφθεί εκ νέου από τους μαθητές η ιδέα του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του απειροελάχιστου. Προβλήματα που απασχόλησαν, από την αρχαιότητα, τους μαθηματικούς δίνονται προς διερεύνηση στους μαθητές και με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού της τάξης, εφαρμόζουν τις μεθόδους που οι προγενέστεροι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν. Έτσι αρχικά προσεγγίζουν με την μέθοδο της εξάντλησης το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου, στη συνέχεια με τη βοήθεια του φύλλου εργασίας ανακαλύπτουν την έννοια του απειροστού και τέλος, καταλήγουν στο όριο του αθροίσματος Riemann, δηλαδή στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1. Ιστορική εξέλιξη του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια ιστορική αναδρομή της εξέλιξης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Ξεκινώντας από την αρχαία Ελληνική περίοδο του Αρχιμήδη και την μέθοδο της εξάντλησης, περνώντας στον μεσαίωνα και την Ευρώπη όπου συναντάμε νέες μεθόδους ολοκλήρωσης και έννοιες όπως τα αδιαίρετα του Γαλιλαίου και του Cavalieri. Κλείνοντας φτάνουμε στον 18ο – 19ο αιώνας με τη συμβολή των Euler, Lagrange, Legendre, Lacroix και Poisson στην ανάπτυξη του ολοκληρώματος και την αυστηρή θεμελίωσή του από τον Cauchy.

2.1.1. Αρχαία Περίοδος-Έλληνες: οι απαρχές του ολοκληρωτικού λογισμού

Η μέθοδος της εξάντλησης

Ο Boyer (Carl. B. Boyer, 1959) ισχυρίζεται ότι τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού σχετίζονται άμεσα με τις λογικές δυσκολίες των μαθηματικών της αρχαίας Ελλάδας στην προσπάθειά τους να εκφράσουν τις συλλήψεις των λόγων των γραμμών, που αναγνώριζαν κατά ακαθόριστο τρόπο ως συνεχείς σε αντίθεση με τους αριθμούς τους οποίους θεωρούσαν διακριτούς. Η μη ικανοποιητική σύλληψη του απειροστού ήταν συνέπεια της παραπάνω προσπάθειας. Ωστόσο η αυστηρότητα της σκέψης τους συνετέλεσε στην απομάκρυνση της έννοιας του απείρως μικρού από τις γεωμετρικές αποδείξεις και την εισαγωγή της μεθόδου της εξάντλησης στην απόδειξη. Η μέθοδος της εξάντλησης αποδίδεται στον Εύδοξο και αποτελεί μια γενίκευση της θεωρίας αναλογιών του ιδίου. Ένα ασύμμετρο μήκος προσδιορίζεται από ασύμμετρα μήκη εκατέρωθεν αυτού, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο άγνωστα μεγέθη καθορίζονται από αυθαίρετα στενές προσεγγίσεις με τη χρήση γνωστών μεγεθών (Stillwell, 1989).

Στο βιβλίο του Ευκλείδη XII και συγκεκριμένα στην πρόταση X.1 διατυπώνεται η μέθοδος της εξάντλησης ως εξής: «*Εστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά* *μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς, θα απομείνει μέγεθος μικρότερο του μικρότερου από τα δύο δοθέντα αρχικά μεγέθη».*

Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης των Συρακουσών υπήρξε αδιαμφισβήτητα η μεγαλύτερη φυσιογνωμία των Μαθηματικών της αρχαιότητας, και βάζοντας το θεμέλιο λίθο στο οικοδόμημα του Λογισμού του Απείρου άνοιξε το δρόμο στους Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz και Newton για την ανάδυση των εννοιών της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Στις αποδείξεις των θεωρημάτων του ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την αποδεικτική μέθοδο της εξάντλησης προσπαθώντας να συνδυάσει κατά κάποιο τρόπο τη μέθοδο της εξάντλησης με απειροστικές θεωρήσεις τις οποίες είχαν ήδη διακρίνει η Πλατωνική και η Δημοκρίτεια σχολή. Στην εισαγωγή του έργου του: «Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Έφοδος», ο Αρχιμήδης παραθέτει κάποια λήμματα τα οποία είναι προτάσεις από τις πραγματείες *Τετραγωνισμός Παραβολής*, *Επιπέδων Ισορροπιών* Α΄ και *περί Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων*.

Πρόταση 1 (Εμβαδόν παραβολικού χωρίου)

Έστω το παραβολικό τμήμα ΑΒΓ, το οποίο περιέχεται μεταξύ της παραβολής ΑΒΓ και της ευθείας ΑΓ, Δ το μέσο της και έστω ότι άγονται η ΔΒΕ παράλληλη προς τη διάμετρο, καθώς και οι ΑΒ και ΒΓ. Λέγω ότι το τμήμα ΑΒΓ ισούται με τα τέσσερα τρίτα του τριγώνου ΑΒΓ (Σχήμα 1). Στο έργο αυτό παρουσιάζεται ο μηχανικός τρόπος εύρεσης του αποτελέσματος, που αν και συνιστά πολύ πειστικό επιχείρημα, εντούτοις επιβάλλεται να συμπληρωθεί με την αυστηρή απόδειξη με τη μέθοδο της εξάντλησης, κάτι που αναγνώριζε και έθετε ως απολύτως αναγκαίο ο ίδιος ο Αρχιμήδης (το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται στην πραγματεία του είναι η γεωμετρική απόδειξη δια της μεθόδου της εξάντλησης αποτελεί το αντικείμενο της πραγματείας του, Τετραγωνισμός της παραβολής).

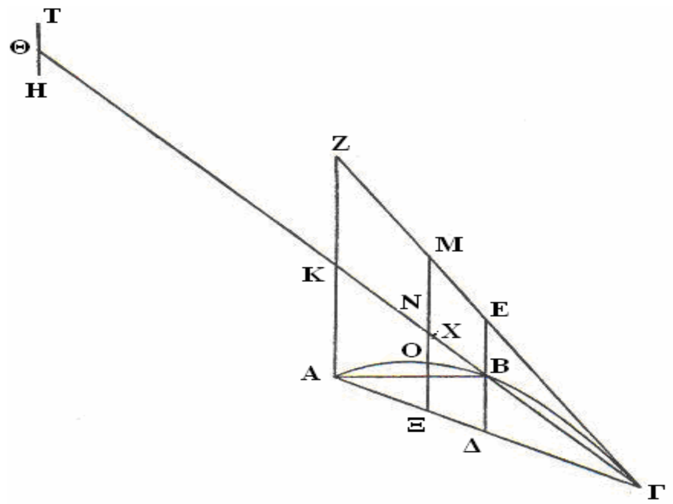
Ο Vander Waerden (vanderWaerden, 2000) αναφέρει πως η ιδέα του ότι το παραβολικό χωρίο είναι άθροισμα μιας απειρίας ευθυγράμμων τμημάτων είναι παραπλήσια με αυτήν του Leibniz, ο οποίος θεώρησε το ολοκλήρωμα $\int ydx$ως το άθροισμα μιας απειρίας όρων ydx. Όμως ο Αρχιμήδης, σε αντίθεση με τον Leibniz, συνειδητοποιεί ότι πρόκειται για μια εσφαλμένη ιδέα και ότι η ευρετική παραγωγή απαιτεί μια αυστηρή απόδειξη.

Θεωρούμε Ζ το σημείο τομής της εφαπτομένης στην παραβολή στο σημείο Γ με την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την ΔΒΕ (Σχ. 1).Έστω Κ το σημείο τομής των ΓΒ και ΑΖ και Θ το σημείο στην προέκταση της ΓΚ τέτοιο ώστε $K\Theta = K\Gamma$.Έτσι θεωρώντας τη ΓΘ ως μοχλό με σημείο στήριξης το Κ και φέροντας από τυχαίο σημείο Ο της παραβολής την ΜΞ παράλληλη προς την ΕΔ προκύπτουν τα ακόλουθα:

ΒΔ = ΒΕ (η σχέση αυτή αποτελεί την πρόταση 2 του έργου του Αρχιμήδη, *Τετραγωνισμός παραβολής*, όπου παρατίθεται από τον ίδιον άνευ απόδειξης, εφόσον έχει αποδειχθεί στα *Κωνικά* των Ευκλείδη και Αρισταίου), επομένως ισχύουν

ΝΞ = ΝΜ (διότι ΒΔ = ΒΕ καιΔΕ // ΜΞ) (1)ΚΑ = ΚΖ (διότι ΒΔ = ΒΕ και ΖΑ // ΔΕ) (2)

.



Σχήμα 1.*Μηχανική απόδειξη Αρχιμήδη*
https://mestreacasa.gva.es/c/document_library/get_file?folderId=500010125735&name=DLFE-474882.pdf *σελ.16*

$$\frac{M\Xi}{O\Xi} = \frac{\Gamma A}{\Xi A} = \frac{\Gamma K}{NK} = \frac{\Theta K}{NK}$$

Αφού ΜΝ = ΝΞ, τότε το κέντρο βάρους της ΜΞ είναι το Ν. Εξαρτώντας από το άκρο Θ του μοχλού ένα τμήμα ΤΗ =ΟΞ, ώστε το Θ να αποτελεί το κέντρο βάρους του ΤΗ και ΘΤ = ΗΘ, τότε, με βάση τον νόμο του μοχλού, έπεται ότι τα ΤΗ και ΜΞ θα ισορροπούν, εφόσον, λόγω της προηγούμενης αναλογίας και της προαναφερθείσης ισότητας, ισχύει:

$$\frac{\text{ΜΞ}}{\text{ΤΗ}} = \frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΝΚ}}$$

.

Μ' αυτόν τον τρόπο το κέντρο βάρους του συστήματος των δύο βαρών είναι το Κ. Τα ίδια ισχύουν και για οποιοδήποτε άλλο τμήμα το οποίο άγεται εντός του τριγώνου ΑΓΖ παράλληλα προς τη ΔΕ. Αφού το τρίγωνο ΑΓΖ συνίσταται από τις αγόμενες στο εσωτερικό του ευθείες και το παραβολικό χωρίο ΑΒΓ από όλες τις ευθείες στο εσωτερικό του, όπως η ΞΟ, τότε το τρίγωνο ΑΓΖ, στη θέση που βρίσκεται, θα ισορροπήσει με το παραβολικό χωρίο, όταν αυτό τοποθετηθεί έτσι ώστε το κέντρο βάρους του να συμπίπτει με το Θ και το Κ θα αποτελεί το κέντρο βάρους του συστήματος των δύο μεγεθών. Αν Χ είναι το σημείο της ΚΓ για το οποίο είναι ΚΓ = 3ΚΧ, τότε το Χ θα είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΓΖ. Αφού το τρίγωνο ΑΓΖ ισορροπεί στη θέση που βρίσκεται ως προς το Κ, το παραβολικό τμήμα ΑΒΓ είναι τοποθετημένο με κέντρο βάρους το Θ και το κέντρο βάρους του τριγώνου ΖΑΓ είναι το Χ, τότε ο λόγος του τριγώνου ΑΓΖ προς το χωρίο ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο$\frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΚΧ}}$

Όμως, ΚΘ = 3ΚΧ (εφόσον ΚΓ = 3ΧΚ και ΚΓ = ΚΘ),
άρα το εμβαδό του τριγώνου ΑΓΖ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου ΑΒΓ, έστω Π, δηλαδή(ΑΓΖ) = 3Π.
όμως (ΑΓΖ) = 4(ΑΒΓ), αφού ΖΚ = ΚΑ και ΑΔ = ΔΓ (οπότε από την VI.4 ισχύει$\frac{B\Delta}{AK} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$άρα$\frac{\Delta B}{ZA} = \frac{1}{4}$), επομένως

$$\Pi = \frac{4}{3}(\text{ΑΓΖ}).$$

Ο Αρχιμήδης ισχυρίζεται ότι αυτό δεν συνιστά απόδειξη, αλλά δίνει την εντύπωση ότι το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι αληθές. Παραδέχεται ότι χρειάζεται να δοθεί η γεωμετρική απόδειξη την οποία, όπως αναφέρει, έχει βρει και δημοσιεύσει (αλλά δυστυχώς δεν έχει σωθεί).Στην απόδειξη της πιο πάνω πρότασης του Αρχιμήδη γίνεται χρήση η εισαγωγή της έννοιας των αδιαιρέτων ποσοτήτων θεωρώντας ότι κάθε επιφάνεια αποτελείται από γραμμές. Χωρίς να είναι γνωστό με ποιο συλλογισμό ο Αρχιμήδης έκανε μια τέτοια υπόθεση, αφού δεν χρησιμοποίησε την έννοια ενός απείρου αριθμού στοιχείων που αποτελούσαν μια επιφάνεια. Θεωρώντας τα στοιχεία αυτά ως μαθηματικά άτομα (όχι σαν τρόπο έκφρασης αλλά ως συλλογή στοιχείων που θα μπορούσε κανείς να ζυγίσει με μηχανικό τρόπο), εισήγαγε μια μηχανική μορφή υπολογισμού με την οποία μέσα από την αρχή της ισορροπίας των σωμάτων, μπορούσε να συγκρίνει ανόμοια σχήματα. Οι απειροστικές θεωρήσεις του Αρχιμήδη, όπως και ο ίδιος γνώριζε, δεν είχαν μια αυστηρά θεωρητική βάση. Παρόλα αυτά ανακάλυψε πολλές αλήθειες και επέτυχε έναν αξιοσημείωτο αριθμό αποτελεσμάτων. Η σημαντικότερη όμως προσφορά του είναι η πρόβλεψη της ιδέας των αδιαιρέτων ποσοτήτων, η οποία καλλιεργήθηκε τον 14ο αιώνα και στη συνέχεια αναπτύχθηκε περισσότερο τον 17ο αιώνα, δίνοντας ένα ισχυρό κίνητρο για την ανάπτυξη της Ανάλυσης.

2.1.2. Μεσαιωνική Περίοδος

Στη Μεσαιωνική περίοδο οι έννοιες του απειροστού καθώς και του απείρως μεγάλου συζητήθηκαν παρατεταμένα στο πλαίσιο της Σχολαστικής φιλοσοφίας και της Θεολογίας. Την εποχή αυτή οι περισσότεροι είναι επηρεασμένοι από τις θρησκευτικές πεποιθήσεις της εποχής με εξαίρεση κάποιους τολμηρούς οι οποίοι προσπαθούν να συνδυάσουν το κοινωνικό πνεύμα της εποχής με την επιστήμη. Το πρόβλημα των συνεχών μεγεθών και κατά συνέπεια των απειροελάχιστων ποσοτήτων δεν απασχόλησε διόλου τους Ινδούς επιστήμονες, όπως και το πρόβλημα του μη μετρήσιμου είχε ελάχιστη σημασία. Η συνέχεια των γεωμετρικών μεγεθών και οι διακριτοί αριθμοί δεν αναγνωρίστηκαν από αυτούς. Σε μια θεωρητική μελέτη ο Brahmagupta (598-670μ.Χ) το 628μ.Χ προτάσσει τους αρχικούς κανόνες για υπολογισμούς με το μηδέν θεωρώντας το ως μια απειροελάχιστη ποσότητα. Το πρόβλημα του ορίου ενώ εφαρμόστηκε σε κάποιες εργασίες δεν δηλώθηκε ποτέ ρητά ως πρόβλημα προς επίλυση. Σ' αυτόν τον προβληματισμό οι σκέψεις των Ινδών βασίζονται στις θεωρίες των Ελλήνων καθώς οι τελευταίοι ξεκίνησαν να διερευνούν την έννοια της απειροελάχιστης ποσότητας και με ποιο τρόπο θα μπορούσε κανείς να την προσεγγίσει. Παρόμοιες προσπάθειες για τις προαναφερθέντες έννοιες γίνονται και από τους Άραβες επιστήμονες με εξέχουσα προσωπικότητα τον Alhazen (ή Ibnal-Hitham) (965-1040) ο οποίος έκανε χρήση την έννοια του απειροελάχιστου για να μετρήσει το παραβολικό χωρίο και ήταν ένας από τους επιστήμονες που προσπάθησαν να οργανώσουν τις θεωρίες των Ελλήνων (Boyer, 1949).

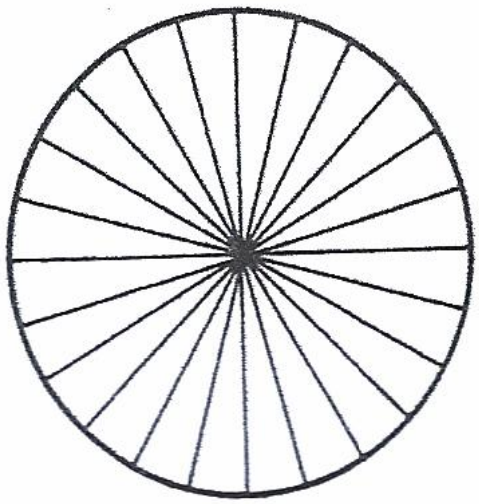
Κατά τον 12^{ο} με 13^{ο} αιώνα μεταφράζονται τα Ελληνικά κείμενα στα λατινικά τα οποία όμως κατακρίνονται λόγω των θεολογικών και μεταφυσικών ιδεών που δέσποζαν στις ανθρώπινες αντιλήψεις εκείνης της εποχής. Οι μαθηματικές δραστηριότητες της εποχής ήταν βασισμένες στην γεωμετρία των Ελλήνων (Boyer, 1949)

Στα τέλη του Μεσαίωνα η ιδέα του αδιαιρέτου λαμβάνει ποικίλες μορφές και τύπους από τους Walter Burley (1275-1344/5) και Robert Grossetest (1175-1253). Η θεώρηση του αδιαίρετου έρχεται σε αντιπαράθεση με την έννοια της ασυμμετρίας ένα επιχείρημα που υποστηρίζεται από τον Αλβέρτο της Σαξονίας (1320-1390) τον Γουλιέλμο του Όκκαμ (1287-1347), και από άλλους. Ο Bradwardine (1300-1349) στη συνέχεια θεώρησε ότι η έννοια του απείρως μικρού μεγέθους είναι ένα συνεχές μέγεθος που συντίθεται από απειροελάχιστες ποσότητες του ίδιου τύπου. Ο ίδιος ασχολήθηκε με τη μέση ταχύτητα, στο έργο του Tractatus de proportionibus(1328), όπου για να την μελετήσει αναγκάστηκε να κάνει χρήση εννοιών της εποχής του, όμως ήταν απαραίτητη και η έννοια του ορίου όπως είναι γνωστή σήμερα. Στην πραγματικότητα οι φιλόσοφοι του Μεσαίωνα ασχολούνται με την έννοια του αδιαίρετου υπό το πρίσμα της απεριόριστης διαιρετότητας και όχι των απείρως μεγάλων μεγεθών.

Kepler (1571-1630)

Ο Kepler ήταν από τους πρώτους επιστήμονες της εποχής του, που εγκατέλειψε την αποδεικτική διαδικασία του Αρχιμήδη και χρησιμοποίησε ταadιαίρετα στο να υπολογίσει εμβαδά και όγκους. Σπούδασε αστρονομία, θεολογία και μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Tübingen κατά την περίοδο 1589-1594. Υπήρξε ένας από τους ηγέτες της «εξέγερσης» ενάντια στην κυριαρχία της εκκλησίας, που για αιώνες στεκόταν εμπόδιο στη γόνιμη επιστημονική πρόοδο. Ο Kepler με το έργο του συνέβαλε στη δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού. Επηρεασμένος από τον δάσκαλό του καρδινάλιο Nicolaus von Cusa (1401-1464) τον οποίο αποκαλεί ο θεϊκός Cusanus, διατυπώνει το 1615 τις απόψεις του στο έργο του *«Καινούρια στερεομετρία των κρασοβάρελων»*, όπου υπάρχει μια αξιοθαύμαστη συλλογή μεθόδων απειροστών για τον υπολογισμό όγκων εκ περιστροφής. Επειδή γινόταν διακίνηση μεγάλων ποσοτήτων κρασιού στην Αυστρία μέσω του Δούναβη υπαγορεύτηκε το παραπάνω έργο για τον καθορισμό καλύτερων αναλογιών στα βαρέλια. Το έργο αυτό αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος περιέχονται στερεομετρικά προβλήματα στη φιλοσοφία του Αρχιμήδη, μαζί με 92 στερεά που δεν μελέτησε ο Συρακούσιος. Στο δεύτερο μέρος ασχολείται αποκλειστικά με τη μέτρηση των βαρελιών οίνου ενώ το τρίτο μέρος περιέχει γενικές εφαρμογές. Σε όλο το έργο του ο Kepler κάνει χρήση ελεύθερα τα απειροστά και εισάγει την έννοια και τη λέξη του απείρου στην καθομιλούμενη. Το βιβλίο αυτό αποτελείται από τρία μέρη. Στο έργο του αυτό, ο Kepler χρησιμοποιεί ελεύθερα τα απειροστά και εισάγει στην καθημερινή γλώσσα τη λέξη και την έννοια του απείρου (Φίλη Χ., 2010).

Ανοίγει έτσι ένα τεράστιο πεδίο διαλογισμού γύρω από τη φύση των απειροστών. Κάθε κύκλος αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό τριγώνων, με κοινή κορυφή το κέντρο του κύκλου και με άπειρα μικρές βάσεις στην περιφέρειά του.



Σχήμα 2. *Κάθε κύκλος αποτελείται από άπειρο πλήθος τριγώνων*

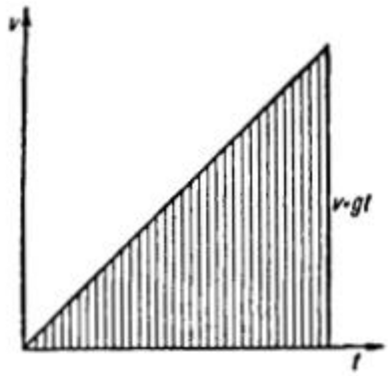
Παρατηρώντας ότι (σχ.2) τα ύψη των απείρως λεπτών τριγώνων είναι ίσα με την ακτίνα ρ του κύκλου υπολόγισε το εμβαδόν του κύκλου. Ονόμασε τις απείρως μικρές βάσεις, που βρίσκονται στην περιφέρεια β_1,β_2, β_3,……,β_νκαι άθροισε τα εμβαδά των τριγώνων, που ισούται με το εμβαδόν του κύκλου:

$$\frac{1}{2}\beta_1\cdot\rho+\frac{1}{2}\beta_2\cdot\rho+\frac{1}{2}\beta_3\cdot\rho+\cdots\frac{1}{2}\beta_\nu\cdot\rho+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\rho(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots\beta_\nu+\cdots)$$

Εφόσον το άθροισμα των β είναι η περιφέρεια C το εμβαδόν Ε του κύκλου θα δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\cdot C\cdot\rho$,το γνωστό θεώρημα που ο Αρχιμήδης είχε αποδείξει αναλυτικότερα. Ανάλογα υπολόγισε και το εμβαδόν της έλλειψης, κάτι που διασωζόταν από τον Αρχιμήδη (C. B. Boyer & Merzbach, 1997). Στις αποδείξεις του δεν διέκρινε διαφορά μεταξύ πολυγώνου και κύκλου εισάγοντας με αυτόν τον τρόπο αόριστα την έννοια της συνέχειας. Για τον Kepler οι επιφάνειες και οι όγκοι υπολογίζονται με τη βοήθεια των απείρων ίδιας διάστασης. Εφάρμοσε μια γενική μέθοδο με την οποία υπολόγιζε προσεγγιστικά εμβαδά και όγκους με κατάλληλες σχεδιασμένες τομές. Όσες φορές υπεισέρχονταν στους υπολογισμούς του τα αδιαίρετα, πρότεινε μια δική του θεωρία γεωμετρικών σχημάτων, όπου τα σχήματα αυτά θεωρούνται ότι συντίθενται από έναν μη πεπερασμένο αριθμό αδιαίρετων μονάδων. Δηλαδή οι γραμμές, οι επιφάνειες και τα στερεά ήταν ένα άθροισμα σημείων, γραμμών και επιφανειών αντίστοιχα. Κατ’ αυτό τον τρόπο ταύτιζε το απειροστό εμβαδόν με μια γραμμή και ολόκληρο το εμβαδόν με άθροισμα γραμμών. Με αντίστοιχο τρόπο υπολόγισε και τον όγκο της σφαίρας θεωρώντας ότι αποτελείται από άπειρους κώνους με κορυφή το κέντρο της σφαίρας και βάσεις πολύ μικρά μεγέθη πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας τα οποία και την κάλυπταν. Τον κάθε κώνο τον θεώρησε σαν άθροισμα πολύ λεπτών κυκλικών δίσκων υπολογίζοντας έτσι τον όγκο τους.

Galileo-Galilei (1564-1642)

Ο Galileo-Galilei (Γαλιλαίος),γεννήθηκε στην Πίζα της Ιταλίας. Ξεκινάει τις σπουδές στην Ιατρική το 1581 αλλά πολύ γρήγορα γοητεύεται από τα μαθηματικά και ιδιαίτερα από τη περιγραφή με μαθηματικό τρόπο φυσικών φαινομένων που είχε στα κείμενά του ο Αριστοτέλης. Αυτό που δεν τόλμησαν οι Έλληνες το επιχειρεί αυτός θέτοντας σε κίνηση τη στατική και συνδέοντας το χρόνο με το διάστημα. Δημιουργεί έτσι μια νέα επιστήμη, την Μηχανική (Γιαννακούλιας, 2007).Ο Γαλιλαίος γνώριζε τις γεωμετρικές μεθόδους των αρχαίων Ελλήνων όπως και τις μετατροπές αυτών από τους Kepler και Valerio. Στην ομοιόμορφη κίνηση θεωρεί σταθερή ταχύτητα και ίση με την επιτάχυνση g, ενώs=υt=gt την απόσταση που διανύεται στο χρονικό διάστημα από t=0 έως t.Ισχυρίζεται ότι η απόσταση sπαριστάνεται από το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση t και ύψος το μέτρο της ταχύτητας που είναι ίσο με g.Υποστήριξε ότι το ορθογώνιο του σχήματος είναι ίσο με το άθροισμα των ορθογώνιων στηλών που καθεμιά από αυτές είναι ίση με τη ταχύτητα του στη μονάδα του χρόνου.



Σχήμα 3. *Το άθροισμα των γραμμών κάτω από τη γραμμή υ=gt είναι το s.*

Στην ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση, υπέθεσε ότι ανάλογη του χρόνου είναι η ταχύτητα υ, δηλαδή υ=gt. Το άθροισμα των εμβαδών όλων των καθέτων γραμμών κάτω από τη γραμμή υ=gt, για τον Γαλιλαίο ισούται με το διάστημα που διανύθηκε. Κάθε τέτοια γραμμή θεωρήθηκε, αφ' ενός σαν στιγμιαία ταχύτητα σε μία χρονική στιγμή, και αφ' ετέρου σαν μία ελάχιστη(απειροστή) απόσταση που διανύεται, αν πολλαπλασιαστεί με ένα πολύ μικρό διάστημα. Δηλαδή:

$$s = \frac{1}{2} \cdot t \cdot gt = \frac{1}{2} t^2 g,$$

που δεν είναι τίποτα άλλο από το γνωστό μας ολοκλήρωμα$\int_0^t gxdx$. Η ιδέα ότι η ταχύτητα είναι υ=gt είναι η παράγωγος του $s(t) = \frac{1}{2}t^2g$ μπορεί να «διαβαστεί» μέσα από τις γραμμές από τον Γαλιλαίο. Έτσι η σχέση που υπάρχει μεταξύ ολοκληρώματος και παραγώγου φαίνεται να έχει γίνει αντιληπτή για πρώτη φορά, μέσα όμως από μία θολή εικόνα των πραγμάτων (Γιαννακούλιας, 2007).

Αδιαίρετα του Cavalieri (1598-1647)

Για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων ο Cavalieri χρησιμοποιούσε συστηματικά τις απειροστικές τεχνικές, οι οποίες έγιναν γνωστές από τα δύο βιβλία του, το «Γεωμετρία μέσω μιας μέχρι τώρα άγνωστης μεθόδου, των αδιαιρέτων των συνεχών» (*«Geometriaindivisibilibuscontinuorunnovaquadamrationepromota»*) γραμμένο το 1635 και το «Έξι γεωμετρικές ασκήσεις» (*«Exercitationesgeometricalsex»)* το1647. Ο ίδιος μελέτησε τη Στερεομετρία του Kepler και μετά την παρότρυνση του Γαλιλαίου αποφάσισε καταγράψει τις σκέψεις του οργανωμένα σε ένα βιβλίο. Η θεωρία των αδιαιρέτων (άτμητων) έχει ταυτισθεί με το όνομα του, την οποία διατύπωσε επίσημα το 1635 στο πρώτο του βιβλίο αλλά και στο δεύτερο. Η θεωρία του αυτή αποτελεί την αρχή της δημιουργίας του απειροστικού λογισμού από τους μεταγενέστερους επιστήμονες.

Ενώ ο Γαλιλαίος κατέστησε δεδομένη τη χρήση των αδιαίρετων στη φυσική, ο Cavalieri προχώρησε πιο πέρα καθιστώντας τα αδιαίρετα βάση μιας γεωμετρικής απόδειξης η οποία θα γινόταν ιδιαίτερα ελκυστική μέθοδος. Ορισμό του αδιαίρετου δεν παρουσιάζει πουθενά, απλά κάνει χρήση τον όρο για τον χαρακτηρισμό των απειροστών στοιχείων που αναφέρει στη μέθοδό του. Κάθε αδιαίρετο παράγει με την κίνησή του το επόμενο ανώτερης διάστασης συνεχές. Το σημείο κινούμενο παράγει μια γραμμή και αυτή κινούμενη παράγει το επίπεδο το οποίο, με τη σειρά του, κινούμενο παράγει ένα στερεό. Οπότε ένα άπειρο πλήθος παράλληλων γραμμών που απέχουν εξίσου μεταξύ τους απαρτίζουν το επίπεδο, ενώ το στερεό απαρτίζεται από άπειρο πλήθος παράλληλων επιπέδων που ισαπέχουν. Για τον Cavalieri λοιπόν το εμβαδόν υπολογίζεται με ένα άπειρο πλήθος γραμμών παράλληλων και ισαπεχόντων ενώ ο όγκος από ένα πλήθος άπειρων παράλληλων επιπέδων που απέχουν εξίσου μεταξύ τους. Το σημείο, η γραμμή και το επίπεδο είναι το αδιαίρετο της γραμμής, του επιπέδου και του στερεού αντίστοιχα (Γιαννακούλιας, 2007). Ο Cavalieri σε αντίθεση με τον Αρχιμήδη δεν ένιωσε ποτέ τύψεις για τα κενά της λογικής που βρισκόταν πίσω από αυτές τις διαδικασίες. Το ότι απουσιάζει από τα επιχειρήματα του Cavalieri το άπειρο οφείλεται στο ότι επικεντρώθηκε στην αντιστοιχία μεταξύ των αδιαίρετων δυο συγκεκριμένων σχημάτων και όχι στο σύνολο των αδιαίρετων που αποτελούσαν τα σχήματα(Γιαννακούλιας,2007). Είναι ο μόνος που επιχειρεί να συνεχίσει τη θεωρία των μεγεθών του Ευδόξου σε ποσότητες με άπειρα στοιχεία, δίχως να τον ενδιαφέρει η σύσταση του συνεχούς, αντιστοιχώντας έτσι τη νέα εποχή με την αρχαιοελληνική παράδοση. Λόγω της Γεωμετρίας του θα παρουσιαστούν αρκετές μελέτες που θα προετοιμάσουν το έδαφος για την εισαγωγή του απειροστικού λογισμού στα μαθηματικά. Τα αδιαίρετα έγιναν απειροστά, που για τον Caychy δεν είναι τίποτα άλλο από μια ποσότητα με όριο το μηδέν. Πάνω στο όριο όπως είναι γνωστό θα θεμελιωθεί ο απειροστικός λογισμός (Φίλη Χ., 2010).

2.1.3. Μέθοδοι ολοκλήρωσης στην Ευρώπη

Isaac Newton(1642-1727)

Γεννημένος το 1642, σπούδασε στο Trinity College και στο Cambridge. Εκτός από τις πολλές ανακαλύψεις που έκανε θεωρείται και θεμελιωτής του Διαφορικού Λογισμού. Ως μαθητής του Barrow(1630-1677) εμπνεύστηκε από τις μεθόδους του δασκάλου του που αναφέρονταν στην χάραξη της εφαπτομένης σε καμπύλες και στον υπολογισμό εμβαδού, με αποτέλεσμα να ασχοληθεί εκτενώς με τον Διαφορικό αλλά και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό (Γεωμετρία του Ευκλείδη και του Descartes). Έτσι ασχολήθηκε με προβλήματα τετραγωνισμού, δηλαδή προβλήματα υπολογισμού εμβαδών επιφανειών που οριοθετούνται από καμπύλες. Οι διάδοχοι του Newton εφοδιασμένοι και με τον ορισμό της συνάρτησης δίνουν τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής του x ως προς το y με το τύπο:

$$\Delta y = \frac{f(x + \Delta x)}{f(x)}.$$

Μια προσέγγιση αρκετά χαλαρή η οποία εξελίχθηκε στον λόγο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, στον οποίο το Δy και Δxπαρόλο που ελαττώνονται απεριόριστα δε γίνονται $\frac{0}{0}$, αλλά η οριακή τιμή αυτού. Ο συμβολισμός που χρησιμοποίησε ο Newton ήταν $\dot{y}$.

Στη πρώτη του εργασία (De analysi per aequationesnumeroterminoruminfinitas) η οποία γράφτηκε το 1669 και δημοσιεύθηκε το 1712 αρχίζει με την πρόταση: «Το εμβαδόν μιας καμπύλης με εξίσωση

$$y = \alpha x^{\frac{m}{n}}$$

εκφράζεται από τον τύπο

$$E = \frac{n}{m+n} \alpha x^{\frac{m+n}{n}}.»$$

Ο Newton υποστήριξε αυτό το αποτέλεσμα ακόμα και στην περίπτωση που m+n = 0, κάτι που οδήγησε και στην λανθασμένη γραφή

$$\int \frac{dx}{x} = \infty$$

Όταν το δεύτερο μέλος της εξίσωσης περιέχει δυνάμεις με όρους πολυωνύμων ή κλάσματα, ο Newton για την επίτευξη του τετραγωνισμού κατέφευγε στην μέθοδο ανάπτυξης της σειράς. Με αυτό τον τρόπο κατάφερε να τετραγωνίσει την υπερβολή ενώ παράλληλα ασχολήθηκε και με την ευθειοποίηση της περιφέρειας.

Αν η εξίσωση από την οποία παριστάνεται είναι η

$$x^2 - x + y^2 = 0$$

μπορούμε να εκφράσουμε το τόξο του ολοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x - x^2}} = \int \frac{\sqrt{x - x^2}}{x - x^2} dx$$

Τα συμπεράσματα αυτά περιέχονται στο βιβλίο Μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών (Methodusfluxionumetsereriuminfinitorum), το οποίο γράφτηκε από τον Newton το 1742 (Loria, 1992).

Leibniz (1646-1716)

Γεννήθηκε στη Λειψία της Γερμανίας το 1646 και αναφέρεται ότι διάβασε το έργο του Newton χωρίς όμως να το κατανοήσει. Το 1676 στέλνει δυο επιστολές στον

Newton σχετικά με τα προβλήματα τετραγωνισμού και τις άπειρες σειρές λαμβάνοντας ευγενική απάντηση με απόκρυψη βασικών εννοιών.

Ο Leibniz ισχυρίζεται ότι «όταν τα δεδομένα προσεγγίζουν το ένα το άλλο απεριόριστα και καταλήγουν να συμπίπτουν τότε κατ' ανάγκην και τα αποτελέσματα πράττουν το ίδιο» και το στηρίζει σε μια γενικότερη αρχή την οποία διατυπώνει ως εξής «τα εύτακτα δεδομένα αντιστοιχούν σε εύτακτα ζητούμενα». Επιπλέον εμβάθυνε στον τετραγωνισμό και τους τρόπους υπολογισμού του εμβαδού των επίπεδων καμπυλών γράφοντας τη σχέση $N \cdot dx = y \cdot ds$όπου N το μήκος της καθέτου στο σημείο, στο οποίο το απειροστό τόξο ds έχει έδρα. Έτσι εισάγει το συμβολισμό του ολοκληρώματος $\int y$. Την ποσότητα αυτή συμβόλιζε Omny (όλα τα y) ο δάσκαλος του Cavalieri.Συμπέρανε άμεσα ότι

$$\int x = \frac{x^2}{2}\ , \qquad \int x^2 = \frac{x^3}{3}\ , \qquad \int \frac{a}{b} y = \frac{a}{b} \int y \quad (a, b\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma)$$

Κάποιες φορές οι προσπάθειές του για τον συμβολισμό του συλλογισμού του ήταν επιτυχείς και κάποιες όχι. Το αρχικό σύμβολο x/d που είναι διαφορά μεταξύ δύο γειτονικών x το αντικατέστησε με το σύμβολο dx. Ασχολήθηκε με το αν το $d\left(\frac{x}{y}\right)$ είναι ίσο με το $\frac{dx}{dy}$ και το$d(x \cdot y)$ είναι ίσο με το $dx \cdot dy$ και έτσι οδηγήθηκε στην σχέση $y \cdot dx = d(xy) - xdy$.

2.1.4. 18ος – 19ος αιώνας: Η συμβολή των Euler, Lagrange, Legendre, Lacroix καιPoisson στην ανάπτυξη του ολοκληρώματος και η αυστηρή θεμελίωσή του απότον Cauchy

Η πορεία προς τον νέο ορισμό του ολοκληρώματος από τον Cauchy.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα αποτελεί την τελευταία βασική έννοια που όρισε ο Cauchy. Ο Γάλλος μαθηματικός ορίζει αυτό ως το όριο των αθροισμάτων και αποδεικνύει την ύπαρξη του ορισμένου ολοκληρώματος συνεχούς συνάρτησης κάτι που αποτελεί κομβικό σημείο στην θεωρία του. Σε όλη τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα λιγοστοί μαθηματικοί διερωτήθηκαν για την ύπαρξη της αντιπαραγώγου μιας συγκεκριμένης συνάρτησης. Τα γεωμετρικά και φυσικά προβλήματα που απαιτούσαν τη χρήση ολοκληρωμάτων διασφάλιζε την ύπαρξη τους και η αδυναμία του αναπτύγματος σε σειρά της συνάρτησης που έπρεπε να ολοκληρωθεί ή της αντιπαραγώγου οδηγούσε σε χειρισμούς προσέγγισης μέσω της μεθόδου, η οποία είναι γνωστή σήμερα ως αθροίσματα Cauchy-Riemann. Δεν είχε διανοηθεί κανείς πριν τον Cauchy να κάνει χρήση αυτά τα αθροίσματα έτσι ώστε να ορίσει το ολοκλήρωμα. Η συνεισφορά αυτού του ερευνητή κατέστη εφικτή λόγω της χρήσης των αθροισμάτων στην κατεύθυνση του υπολογισμού των ολοκληρωμάτων σε σχέση με την εξέλιξη των μεθόδων αναφορικά μα τα αθροίσματα σειρών (Phillips, 1984). Η προϋπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας της συνάρτησης για την απόδειξη της ύπαρξης του ολοκληρώματος δεν κατέστη διακριτή από τον Cauchy αφού ο ίδιος δεν διέκρινε μεταξύ συνέχειας και ομοιόμορφης συνέχειας, και είχε το ίδιο πρόβλημα με τη διάκριση της σύγκλισης και της ομοιόμορφης σύγκλισης (Grabiner, 1981). Πρώτος αυτός απέδειξε το Θεμελιώδη θεώρημα του απειροστικού λογισμού το οποίο μας λέει ότι το ολοκλήρωμα είναι το αντίστροφο της παραγώγου. Με βάση τις προσεγγίσεις που έκανε για την τιμή ορισμένων ολοκληρωμάτων ανέπτυξε και τις τεχνικές ολοκλήρωσης. Ουσιαστικά είχε ελάχιστα εργαλεία στα χέρια του αφού οι παλαιότεροι χρονολογικά επιστήμονες είχαν παραμελήσει το ολοκλήρωμα και έδειχναν μεγάλο ενδιαφέρον στον διαφορικό λογισμό και στη θεμελίωσή του. Το 18^{ο} αιώνα το ολοκλήρωμα οριζόταν ως η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης με αποτέλεσμα το αόριστο ολοκλήρωμα να θεμελιώνεται περισσότερο από το ορισμένο. Η σχέση που αναφερόταν στο ορισμένο ολοκλήρωμα ήταν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha), \acute{o}\pi o \upsilon \ \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Ο ορισμός του Leibnizγια το ολοκλήρωμα περιθωριοποιείται από τους περισσότερους μαθηματικούς λόγω των προβληματικών εννοιών του απείρου και των απειροστών. Σε αντίθεση με τον παραπάνω ορισμό μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής όπως οι Bernoulli, Euler, Lagrance καιLaplace εστίαζαν στην εύρεση της αντιπαραγώγου διότι έβλεπαν την ολοκλήρωση σαν την αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Η ευελιξία του ορισμού αυτού επέτρεπε τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων πολλών συναρτήσεων, που εκφραζόταν αλγεβρικά. Με την προσέγγιση των τιμών των ορισμένων ολοκληρωμάτων μέσω αθροισμάτων ασχολήθηκε μεγάλο μέρος των μαθηματικών κάτι που διαπιστώνεται από τον μεγάλο όγκο των έργων τους. Πολλές φορές για τις παραπάνω προσεγγίσεις διαμέσου αθροισμάτων αναζητούνταν τα φράγματα των σφαλμάτων. Ορμώμενος από τα έργα αυτά ο Cauchy χρησιμοποίησε τις ανισοτικές σχέσεις που περιείχαν τα παραπάνω έργα (Grabiner, 1981). Από την μελέτη των προσεγγίσεων οδηγήθηκε στην εξέταση της σύγκλισης, αφού η προσέγγιση των απείρων σειρών παρέπεμψε στη διερεύνηση της ταχύτητας σύγκλισης, των φραγμάτων των σφαλμάτων.

Σχετικά με την έννοια του ολοκληρώματος, οι Poisson, Lacroix, Legendre και Euler επιχείρησαν να ανακαλύψουν φράγματα των σφαλμάτων, μέσω αθροισμάτων, στις προσεγγίσεις των τιμών των ολοκληρωμάτων καθώς και να δείξουν ότι σε μερικές περιπτώσεις το σφάλμα ήταν δυνατό να γίνει μικρότερο από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα. Ο Cauchy μετέτρεψε όλα αυτά τα έργα με τις προσεγγίσεις σε μια αυστηρή θεωρία.Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως όριο αθροίσματος έναντι της θεώρησής του ωςαντιπαραγώγου αποτελεί μια θέση ή οποία φαντάζει τετριμμένη για το σύγχρονο μαθηματικό. Ο ορισμός στον οποίο κατάληξε ο Cauchy αποτελεί πανάκεια για έναν λογισμό με αυστηρότητα, αφού δεν υπάρχει πάντοτε η αντιπαράγωγος συνάρτηση, ενώ θα στήριζε την απόδειξη ότι υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που είναι συνεχής. Η αδυναμία απόδειξης της ύπαρξης του ορίου των προσεγγιστικών αθροισμάτων αποτελεί πηγή αποριών σχετικά με τα κριτήρια επιλογής του ορισμού από τον Cauchy.Σύμφωνα με τον Lebesgue αυτά είχαν άμεση σχέση με το πεδίο της παιδαγωγικής, λόγω της συσχέτισης μεταξύ του παιδαγωγικού τρόπου προσέγγισης μιας μη ευθύγραμμης επιφάνειας με ορθογώνια και του ορισμού του Cauchy (Grabiner, 1981). Ενώ ο Lebesgue στηρίζει την άποψη της θεώρησης του ολοκληρώματος ως αθροίσματα δια των τετραγωνισμών, οι Lagrange καιEuler υποστηρίζουν την αντιπαράγωγο ως αρκετά βολικό εργαλείο για τη χρήση σε διδακτικά εγχειρίδια και σε διαλέξεις αφού είναι ευκολονόητος και εύληπτος.

Σε μια σειρά διαλέξεων ο Cauchy παρουσίασε τη θεωρία του ορισμένου ολοκληρώματος ωθώντας πολλούς συναδέλφους του στην προσεκτική εξέταση των θεμελίων. Ο Iushkevich (Iushkevich, 1974) ισχυρίστηκε πως ο Γάλλος μαθηματικός επέλεξε την θεωρία του ολοκληρώματος παραδίδοντας μαθήματα στην

EcolePolytechnique με μοναδικό κριτήριο τις ερευνητικές του ανάγκες. Κάτι που δικαιολογείται απόλυτα αφού υπήρχαν περιπτώσεις που το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν υπό καμπύλη είχε νόημα παρόλο που το ζητούμενο εμβαδόν δεν αποτελούσε την διαφορά της παράγουσας στα άκρα.

Μια συνάρτηση ορισμένη σε πεπερασμένο κλειστό διάστημα μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημίτονων. Την πρόταση αυτή διατύπωσε ο Fourier σε μια εργασία του που αφορούσε τη διάχυση της θερμότητας και μάλιστα παρέθεσε συναρτήσεις κατά τμήματα συνεχείς τα γραφήματα των οποίων εσώκλειαν επιφάνειες. Με την εργασία αυτή ξεκαθαρίστηκε η δυνατότητα ύπαρξης του ορισμένου ολοκληρώματος μιας αναπαραστάσιμης συνάρτησης μέσω σειρών με τριγωνομετρικούς όρους, αν και η συνάρτηση που παριστά το ολοκλήρωμα δεν είναι παντού παραγωγίσιμη. Ο Fourier μέσω τυποποιημένης πρακτικής υπολόγισε εμβαδά δύσκολων προς υπολογισμό ολοκληρωμάτων ως αθροίσματα. Επίσης με ορισμένα ολοκληρώματα συναρτήσεων οι οποίες ήταν ασυνεχείς ή απειρίζονταν σε κάποια σημεία διαπραγματεύτηκε και ο Legendre. Εύκολα εφαρμόσιμος σε όλες αυτές τις περιπτώσεις ήταν ο ορισμός του Cauchy σε αντίθεση με τον έως τότε αποδεκτό ορισμό του ολοκληρώματος ως αντιπαράγωγο. Εκτός από τα μεμονωμένα μη παραγωγίσιμα σημεία μιας συνάρτησης στα οποία καταδεικνύονταν η ανεπάρκεια του ορισμού του ολοκληρώματος ως αντιπαραγώγου παρατηρήθηκε το ίδιο και στην μιγαδική ολοκλήρωση. ΟCauchy το 1814 ασχολήθηκε με το θέμα αυτό δίνοντας μια παραλλαγή των εξισώσεων Cauchy – Riemann, αναδεικνύοντας το εσφαλμένο της αποδείξεως θεωρημάτων στους μιγαδικούς. Στους μιγαδικούς απέρριπτε τη χρήση αναγωγής στους πραγματικούς και αναλογικών επιχειρημάτων αποκαλώντας την τακτική αυτή ως «ένα είδος επαγωγής» απαιτώντας την αυστηρότητα στην ανάλυση. Δηλώνει κατηγορηματικά ότι το ολοκλήρωμα μεταξύ δυο σημείων μιας συνάρτησης είναι η διαφορά των τιμών της αντιπαραγώγου στα σημεία αυτά: «*...μόνοστην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς μεταξύ των εν προκειμένω ορίων*» (Grabiner, 1981). Ο Cauchyλόγω της αυστηρότητας που εφάρμοσε εδραίωσε τα προγενέστερα συμπεράσματα σε ένα στερεό θεμέλιο και άνοιξε ένα νέο πεδίο για πολλά συμπεράσματα που μερικά απ' αυτά δε θα μπορούσαν να διατυπωθούν πριν το έργο του (Γιαννακούλιας, 2007).

Η συμβολή του Dirichlet

Ο LejeuneDirichlet (1805-1859)είναι ο πρώτος που προκάλεσε την προσοχή των μεταγενέστερών του, για να παρακινηθούν και να επεκτείνουν την έννοια του ολοκληρώματος, ώστε να συμπεριληφθούν στις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και αυτές που είχαν άπειρο πλήθος ασυνεχειών. Την εποχή εκείνη είχαν δημιουργηθεί κάποια ερωτηματικά σχετικά με την εργασία του Fourier ως προς την εγκυρότητα των συμπερασμάτων της εργασίας. Ένα από τα ερωτηματικά αυτά αναφερόταν στον προσδιορισμό της κλάσης των συναρτήσεων f, που το ανάπτυγμα της σειράς Fourier συγκλίνει προς την f(x) για όλα τα x στο πεδίο ορισμού τους. Ο ίδιος οFourier υποστήριζε, χωρίς απόδειξη, ότι η σειρά για κάθε συνάρτηση f συγκλίνει (Γιαννακούλιας, 2007). Μια σειρά Fourier δεν συγκλίνει πάντα στην τιμή μιας συνάρτησης από την οποία προέρχεται. Ο Dirichlet εξασφάλισε συνθήκες ικανές για την εγγύηση της σύγκλισης της. Απέδειξε ότι αν η συνάρτηση f(x)που ορίζεται στο[-π,π]είναι συνεχής και φραγμένη σε αυτό, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών και επιπλέον παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διαφορετικές τιμές σε αυτό, τότε η σειρά Fourier συγκλίνει για κάθε x στο(-π,π) στην οριακή τιμή

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}[f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)]$$

Προφανώς το όριο αυτό είναι ίσο με f(x) αν η f είναι συνεχής στο x. Με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση είναι γεωμετρικά περιοδική έξω από το διάστημα, το παραπάνω αποτέλεσμα για τον Fourier παραμένει ίδιο και στα άκρα. Ο Dirichlet επέλεξε τις συνθήκες του με τέτοιο τρόπο ώστε να δύναται να ολοκληρώσει γινόμενα της δοθείσας συνάρτησης με τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε ορισμένα διαστήματα. Ακόμη και νέος ορισμός του Cauchy για το ορισμένο ολοκλήρωμα εγγυόταν μόνο την ύπαρξη ολοκληρώματος για συναρτήσεις με πεπερασμένες μόνο κατά το πλήθος ασυνέχειες. Ο Dirichlet κατανόησε τη δυσκολία της επέκτασης του παραπάνω ορισμού σε συναρτήσεις με άπειρες ασυνέχειες σε ένα δοθέν διάστημα. Μάλιστα παρουσίασε ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία δεν ικανοποιούσε τις συνθήκες του (Katz, 2013). Η συνάρτηση ήταν η

$$D(x)=\begin{cases} c & \alpha\nu\ x\in\mathbb{Q} \\ d\neq c & \alpha\nu\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

η οποία έμεινε γνωστή ως συνάρτηση του Dirichlet. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής για καμία τιμή του x. Προηγουμένως είχε δώσει έναν καινούριο ορισμό συνάρτησης:

«Αν μία μεταβλητή y σχετίζεται με μία μεταβλητή x έτσι ώστε οποιαδήποτε αριθμητική τιμή και αν πάρει το x, το y παίρνει μία μοναδική τιμή, σύμφωνα με έναν κανόνα, τότε το y είναι μία συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής».

Αν και οι έννοιες του συνόλου και του πραγματικού αριθμού δεν είχαν ακόμη καθιερωθεί (C. B. Boyer & Merzbach, 1997), ο παραπάνω ορισμός πλησιάζει αρκετά στη σύγχρονη άποψη της αντιστοίχισης ανάμεσα σε δύο σύνολα αριθμών. Συγκεκριμένα ο Dirichlet υποστήριξε πως δεν ήταν αναγκαίο να διατυπωθεί κάποια αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση (Γιαννακούλιας, 2007). Σύμφωνα πάντα με τον ίδιο η συνάρτηση D ήταν αδύνατο να σχεδιαστεί, και αυτό είχε ως αποτέλεσμα η γεωμετρία να προσπεραστεί από την ανάλυση. Το εμβαδόν που ορίζεται από την καμπύλη και κάτω είναι απροσδιόριστο, και έτσι αφού οι συντελεστές Fourier παίρνονταν με ολοκλήρωση (δηλαδή υπολογίζοντας το εμβαδόν) δε θα ήταν εφικτός ο υπολογισμός των όρων της σειράς Fourier της συνάρτησης D. Η συνάρτηση D υπήρξε στόχος αντιπαράθεσης όσων αφορά την ολοκληρωσιμότητά της (κατά τον Cauchy) διότι ήταν το πρώτο παράδειγμα ασυνεχούς συνάρτησης, σε ένα άπειρο πλήθος διαφόρων σημείων. Ο βασικός στόχος του Dirichlet, ο οποίος ήταν τόσο η επέκταση του ολοκληρώματος Cauchy σε μία κλάση συναρτήσεων με άπειρο πλήθος ασυνεχειών όσο και η διεύρυνση της κλάσης που είχαν αναπαράσταση με σειρές Fourier δεν ολοκληρώθηκε από τον ίδιο αλλά από τον μαθητή του, το Riemann (Γιαννακούλιας, 2007).

Riemann (1826-1866)

Ο Georg Friedrich Bernhard Riemannγεννήθηκε στην πόλη Breselenz της Γερμανίας το 1826. Από μαθητής γυμνασίου ακόμη έδειξε το μαθηματικό του ταλέντο διαβάζοντας με μεγάλη ευχέρεια τη θεωρία αριθμών του Legendre και το λογισμό του Euler. Αν και ξεκινάει τις σπουδές του στη φιλοσοφία και τη θεολογία το 1846, αλλάζει κατεύθυνση και εγγράφεται στο Μαθηματικό τμήμα του ίδιου πανεπιστημίου στο Göttingen. Το αμέσως επόμενο έτος μεταβαίνει σε ξακουστό πανεπιστήμιο του Βερολίνου με φημισμένους εκπαιδευτικούς όπως οι Steiner, Jacobi, και Dirichlet. Μελετώντας αρχικά Αρχιμήδη, Ευκλείδη, Newtonκαι Leibnizπαρακολουθούσε μαθήματα διαφορικών εξισώσεων, θεωρίας αριθμών και ολοκληρωτικού Λογισμού, αφορούσαν κυρίως το ορισμένο ολοκλήρωμα, από τον Dirichlet. Το 1854, στο πανεπιστήμιο του Gottingen, υπέβαλλε τρεις διατριβές για υφηγεσία σχετικά με τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, τις τριγωνομετρικές σειρές και τις μιγαδικές συναρτήσεις. Ο τίτλος της διατριβής του, που αφορούσε τις τριγωνομετρικές σειρές ήταν:*«ÜberdieDarstellbarkeiteinerFunctiondurcheinetrigonometrischeReihe»*(Σχετικά με την αναπαράσταση μιας συνάρτησης με τριγωνομετρικές σειρές). Στόχος αυτής η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την αναπαράσταση μιας συνάρτησης από μια σειρά Fourier. Ο Riemann αρχικά θέτει το ερώτημα: «Τι καταλαβαίνει κανείς από το $\int_a^b f(x)dx$;»και συνεχίζει απαντώντας:Θεωρούμε μια ακολουθία τιμών $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$μεταξύ*των α και b με αύξουσα σειρά* και για συντομία θέτουμε$\delta_i = x_i - x_{i-1}$καθώςκαι τα γνήσια θετικά κλάσματα μεε_i.Τότε προφανώς η τιμή του αθροίσματος :

$$S = \delta_1 f(\alpha + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

θα εξαρτάται από την επιλογή των διαστημάτων δ_iκαι τις ποσότητες ε_i.Αν το Sέχει την ιδιότητα, για κάθε επιλογή τωνδ_iκαι ε_iνα τείνει σε ένα σταθερό όριο Β καθώς τα δ_iγίνονται απείρως μικρά, τότε αυτή η τιμή (Β) ονομάζεται$\int_a^b f(x)dx$□

Αν δεν έχει αυτή την ιδιότητα τότε το$\int_a^b f(x)dx$ δεν έχει νόημα.Έτσι ο Riemann επιλέγει ένα αυθαίρετο σημείο $\overline{x_i} = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$στο i-οστό υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ της διαμέρισης του, i=1,2,…,n και ορίζει το ολοκλήρωμα ως:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) \qquad (1)$$

όπου το δ υποδηλώνει το μέγιστο των μηκών δ_iτων υποδιαστημάτωντης διαμέρισης [α,b]. Αυτή είναι μία άμεση γενίκευση του ορισμού του Cauchy,

$$\int_a^b f(\mathrm{x})dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x_{i-1}})(\mathrm{x_i}-\mathrm{x_{i-1}})$$

.

Ο Riemann έχει απλώς αλλάξει το αρχικό σημείο x_{i-1}του Cauchy με ένα αυθαίρετο σημείο $\overline{\mathrm{x_i}}$ του $[\mathrm{x_{i-1}}, \mathrm{x_i}]$, και ισχυρίζεται πως όταν υπάρχει το ολοκλήρωμα τα αθροίσματα τα οποία σχετίζονται με αυτόν τον τρόπο με μία διαμέριση προσεγγίζουν μία σταθερή τιμή (το ολοκλήρωμα)καθώς η νόρμα δ τείνει στο μηδέν, χωρίς να επηρεάζεται από την επιλογή των σημείων $\overline{\mathrm{x_i}}$.

Το επόμενο ερώτημα που θέτει: Πότε μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη και πότε δεν είναι;(Riemann, 2000).Ξεκινά θεωρώντας φραγμένη συνάρτηση f καιμία διαμέριση P του [α,b], επιλέγει την ολική ταλάντωση

$$D(P) = D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n$$

της f(x) σε σχέση με την P, όπου $\delta_\iota = x_i - x_{i-1}$ και το D_i εκφράζει τη διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και μικρότερης τιμής της f(x) στο υποδιάστημα$[x_{i-1}, x_i]$. Αποδεχόμενος την πληρότητα των πραγματικών αριθμών, θεωρεί ότι το ολοκλήρωμα (1) υπάρχει αν και μόνο αν $\mathrm{D(P)} \to 0$όταν $\delta \to 0$

$$\lim_{\delta\to 0}(D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n) = 0 \qquad (2)$$

Μετά ο Riemann ορίζει Δ=Δ(d) τη μεγαλύτερη τιμή της ολικής ταλάντωσης D(P) για όλες τις διαμερίσεις P με νόρμα $\delta \le d$. Τότε η Δ(d) είναι προφανώς μία φθίνουσα συνάρτηση του d, και η είναι ολοκληρώσιμη στο[α,b] αν και μόνο αν

$$\lim_{d\to 0}\Delta(d) = 0\,.$$

Δεδομένου σ>0 και μίας διαμέρισης P συμβολίζει με $s = S(\sigma, P)$το άθροισμα των μηκών δ_i αυτών των υποδιαστημάτων της P για τα οποία η ταλάντωση D_i είναι μεγαλύτερη του σ. Και στη συνέχει δίνει την ακόλουθη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ολοκληρώματος μια φραγμένης συνάρτησης:

Αν η f(x) είναι φραγμένη για x $\in$[α,b], τότε το$\int_a^b \mathrm{f(x)dx}$ υπάρχει αν και μόνο αν δοθέντος $\sigma > 0$, προκύπτει ότι η s(σ,P) πλησιάζει πολύ κοντά στο μηδέν καθώς η νόρμα της διαμέρισης P πλησιάζει το μηδέν. Δηλαδή αν δοθεί$\sigma > 0$και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\mathrm{d} > 0$ έτσι ώστε για κάθε διαμέριση Pμε νόρμα $\delta < d$, το άθροισμα s των μηκών αυτών των υποδιαστημάτων της P, στα οποία η ταλάντωση της f είναι μεγαλύτερη του σ, είναι μικρότερο του ε. Για να δούμε ότι αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία για την ολοκληρωσιμότητά της f παρατηρούμε ότι:

$$\sigma s < D_1\delta_1 + D_2\delta_{2+\dots+}D_n\delta_n \leq \Delta(d)$$

αν $\delta < D$ γιατί D_i> σαν $\varepsilon > 0$στα υποδιαστήματα που έχουν συνολικό μήκος s. Γι' αυτό:

$$s(\sigma, P) < \frac{\Delta(d)}{\sigma},$$

το οποίο προσεγγίζει το μηδέν καθώς $d \to 0$, με το σ σταθερό, υποθέτοντας ότι το$\int_a^b f(x)\,dx$υπάρχει. Για το αν είναι ικανή η συνθήκη αυτή: έστω ότι δίνονται $\sigma > 0$, και $\varepsilon > 0$, και διαλέγουμε $d > 0$ όπως παραπάνω. Αν η νόρμα δ είναι μικρότερη του d, τότε αυτά τα υποδιαστήματα στα οποία η ταλάντωση της f(x) είναι μεγαλύτερη του σ, συνεισφέρουν στην D(P) ένα ποσοστό λιγότερο από την D_ε (γιατί τα μήκη τους δίνουν άθροισμα $s < \varepsilon$), όπου D είναι η ταλάντωση της f(x) στο [α,b]. Τα υποδιαστήματα που υπολείπονται συνεισφέρουν στην D(P) ένα ποσό $\sigma(b - \alpha)$.

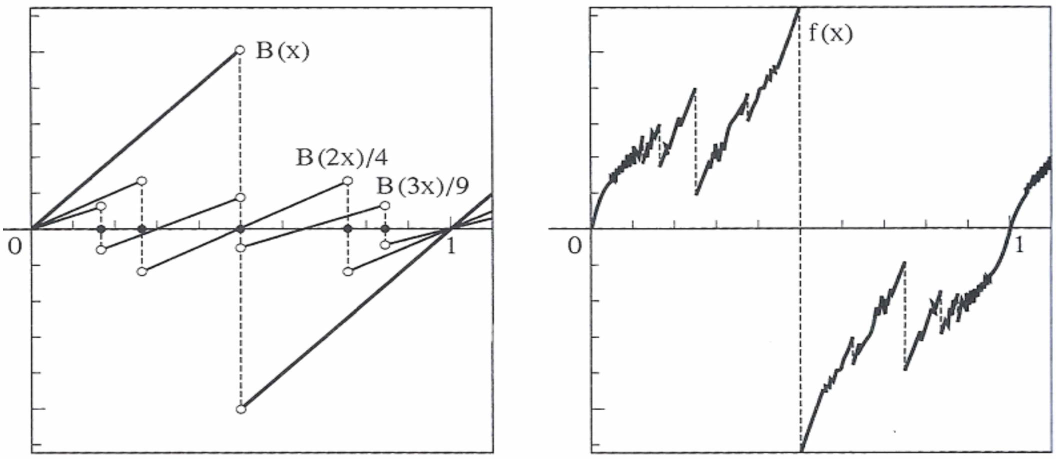
Έτσι$\mathrm{D(P)} < \mathrm{D}\varepsilon + \sigma(\mathrm{b} - \alpha)$, οπότε η D(P) μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε παίρνοντας το ε και το σαρκετά μικρά. Έτσι η συνθήκη (2) ικανοποιείται, άρα το ολοκλήρωμα$\int_\alpha^b f(x)$υπάρχει.

Αν μια συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο [α,b] το θεώρημα του Riemann υποδηλώνει ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει. Σε αυτή την περίπτωση, δοθέντος σ>0, υπάρχει$d > 0$ τέτοιο ώστε η ταλάντωση της f(x) να είναι μικρότερη του σ σε κάθε υποδιάστημα με μήκος μικρότερο του d. Γι' αυτό $s(\sigma, P) = 0$ αν η νόρμα της διαμέρισης P είναι μικρότερη του d (Edwards, 1979).

Λόγω του παραπάνω κριτηρίου κάποιες συναρτήσεις που είναι «πολύ ασυνεχείς» ανήκουν στη κλάση των συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες. Το 1854 για να αποδείξει την εγκυρότητα της θεωρίας του πρότεινε το ακόλουθο παράδειγμα ασυνεχής συνάρτησης σε κάθε διάστημα μεν, ολοκληρώσιμης δε.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(kx)}{k^2} \quad με \;\; B(x) = \begin{cases} x - [x]\,, αν\ x \neq \dfrac{k}{2} \\ 0\ ,\ αν\ x = \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος του x (Σχήμα 4).



Σχήμα 4. *«Πολύ ασυνεχείς» συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες.* Microsoft Word - dipl-Kyriakopoulou konstantina.doc (uoa.gr) **σελ.263**

Για $x = \frac{p}{2n}$, όπου p ακέραιος , πρώτος προς το 2n, η f(x) είναι ασυνεχής και παρουσιάζει άλμα με τιμή ίση με$\frac{p^2}{8n^2}$.Στις άλλες περιπτώσεις η fείναι συνεχής. Η fείναι ολοκληρώσιμη και η $g(x) = \int_a^x f(t)dt$παρουσιάζει συνέχεια σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία ασυνέχειάς της, τα οποία είναι άπειρα στο πλήθος σε κάθε διάστημα, οσοδήποτε μικρό (Hairer-Wanner, 2000).

Ο ορισμός του Riemann για το ολοκλήρωμα, βασίστηκε στην πραγματική επινόηση του Cauchy για τα προσεγγιστικά αθροίσματα σχετικά με τις διαμερίσεις του διαστήματος ολοκλήρωσης σε υποδιαστήματα και ήταν ο πιο γενικός που θα μπορούσε να βρεθεί. Παρόλα αυτά στα τέλη του 19ου αιώνα ο ορισμός αυτός αναδιατυπώθηκε με διαφορετικούς τρόπους οι οποίοι εξηγούσαν με μεγαλύτερη σαφήνεια την έννοια του ολοκληρώματος και άνοιξαν το δρόμο για αξιοσημείωτες πρόσθετες γενικεύσεις στην ανατολή του εικοστού αιώνα.Περί τα μέσα του 1870 διάφοροι και ανεξάρτητοι μεταξύ τους συγγραφείς εισήγαγαν τα άνω και κάτω αθροίσματα, γνωστά ως αθροίσματα Riemann, που αναφέρονταν σε φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα [a,b].

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})και\ L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})$$

Όπου P είναι μια διαμέριση του [a,b] σε nυποδιαστήματα, δηλ

$$P\ =\{\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b\}$$

και

$$M_i=sup\{f(t): t_{i-1}\le t\le t_i\}$$

και

$$m_i=inf\{f(t): t_{i-1}\le t\le t_i\}.$$

Τα οποία αθροίσματα αποκαλούνται σήμερα και ως αθροίσματα Darboux (Edwards, 1979).

Λήμμα:
Αν P΄ είναι μία λεπτότερη διαμέριση της P (δηλαδή κάθε σημείο της P ανήκει στην P΄, άρα P ⊂ P΄), τότε

$$L(f,P)\le L(f,P΄)\le U(f,P΄)\le U(f,P).$$

Με τη βοήθεια του λήμματος είναι σχετικά εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το κάτω $L(f,P)$ και το άνω φράγμα $U(f,P)$ προσεγγίζουν τα όρια L και U αντίστοιχα, καθώς η νόρμα δ→ 0, ανεξάρτητα από την ολοκληρωσιμότητα της φραγμένης συνάρτησης f. Για τον VitoVoltera (1860-1940) το L και το U συμβολίζουν το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα αντίστοιχα. Εισάγει το 1880 τους αντίστοιχους συμβολισμούς:

$$U=\int_{a}^{-b} f(x)dx$$

και

$$L=\int_{-a}^{b} f(x)dx$$

.

Ο Giuseppe Peano(1858-1932) παρατήρησε ότι τα L και Uθα μπορούσαν εύκολα να οριστούν ως το ελάχιστο κάτω και το μέγιστο άνω φράγμα για το κάτω και άνω άθροισμα Riemann, αντίστοιχα, για κάθε διαμέριση P του διαστήματος [α,b],

$$\int_{a}^{-b} f(x)dx = inf_P U(f,P) \kappa\alpha\iota \int_{-a}^{b} f(x)dx = sup_P L(f,P).$$

Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το άνω και το κάτω ολοκλήρωμα είναι ίσα, δηλαδή

$$\int_{a}^{-b} f(x)dx = \int_{-a}^{b} f(x)dx = l$$

Ο κοινός αριθμός $\int_{a}^{-b} f(x)dx = \int_{-a}^{b} f(x)dx$ είναι το ολοκλήρωμα (Riemann) και συμβολίζεται με $\int_{a}^{b} f(x)dx$ (Edwards, 1979).

Η έννοια του ολοκληρώματος μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα είχε σχεδόν πάντα ως κίνητρο την έννοια του εμβαδού και ήταν τελείως διαισθητική και δεν θεμελιώνονταν σε κανένα αυστηρό ορισμό. Ο Peanoτο 1887 σε βιβλίο που εκδίδει δίνει τον πρώτο επίσημο ορισμό του εμβαδού ξεκινώντας με τη μέθοδο της εξάντλησης. Ήταν πάντα φανερό ότι το εμβαδόν ενός επίπεδου συνόλου S, είναι το κάτω φράγμα όλων των πολυγώνων που περιέχουν το S και το άνω φράγμα των εμβαδών όλων των πολυγώνων που περιέχονται στο S (φυσικά το εμβαδόν του πολυγώνου λαμβάνεται με την ανάλυσή του σε τρίγωνα). Όρισε το εσωτερικό εμβαδόν$\alpha_\iota(S)$, ως το ελάχιστο άνω φράγμα των εμβαδών όλων των πολυγώνων που περιέχονται στο S, και το εξωτερικό εμβαδόν$a_0(S)$, ως το μέγιστο κάτω φράγμα των εμβαδών των πολυγώνων που περιέχουν το S.

Είναι προφανές ότι $a_\iota(S) \leq a_0(S)$, αλλά μπορεί να μην ισχύει η ισότητα. Για παράδειγμα αν το S αποτελείται από τα σημεία (x,y) στο μοναδιαίο τετράγωνο με $0 \leq x, y \leq 1$ έτσι ώστε οι αριθμοί x και y να είναι και οι δύο άρρητοι, τότε$a_0(S) = 1$, το εμβαδόν του ορθογωνίου, ενώ $a_\iota(S)$ =0 αφού μόνο εκφυλισμένα πολύγωνα εμπεριέχονται στο S. Με τον ορισμό αυτόν για το εσωτερικό και εξωτερικό εμβαδόν ήταν εύκολο να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = a_i(O_f) \quad \kappa\alpha\iota \quad \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = a_0(O_f) \quad (3)$$

για κάθε μη αρνητική συνάρτηση f στο $[\alpha, b]$. Στην περίπτωση όπου $a_\iota(S) = a_0(S)$, η κοινή τιμή είναι το εμβαδόν α(S) του S. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε η (3) δίνει:

$$\int_a^b f(x)dx = a(O_f).$$

Έτσι η έννοια του ολοκληρώματος κάνοντας έναν πλήρη κύκλο, επιστρέφει στο αρχικό της κίνητρο (Edwards, 1979).
Το τελευταίο επιστημονικό βήμα για την αποκατάσταση του πρωταγωνιστικού ρόλου της ολοκλήρωσης στην Πραγματική και γενικότερα στη Μαθηματική Ανάλυση (που όπως είδαμε χρειάστηκε όλο τον 19ο αιώνα και μέρος του 20ου) πραγματοποιήθηκε από το Γάλλο Henri Lebesque (1857-1941) που αποτελεί τη σύγχρονη θεωρία ολοκλήρωσης (κατά Lebesque) και μέτρου.

2.2.Παρανοήσεις στα Μαθηματικά

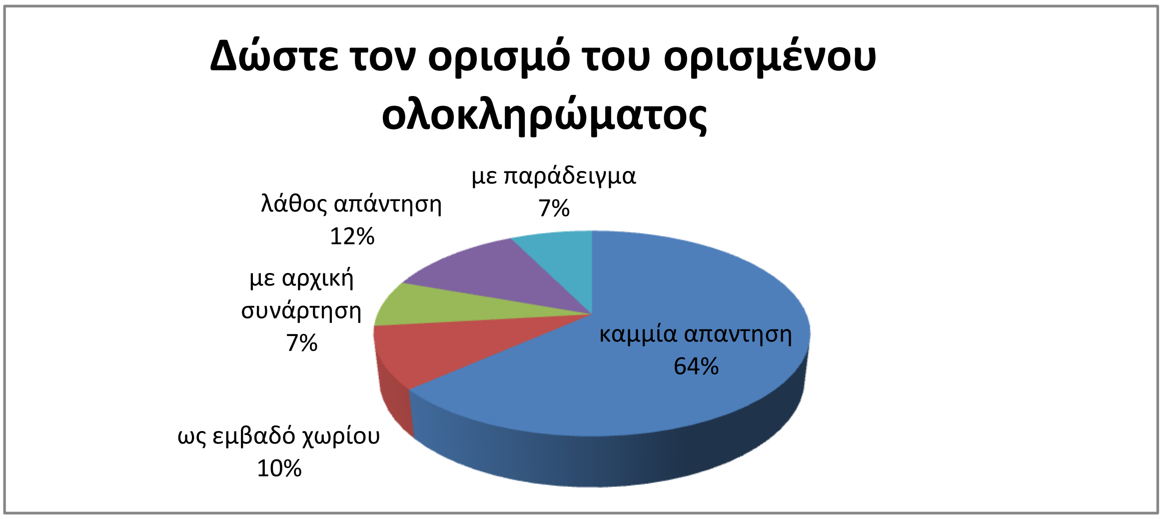
Ο Brousseau (Brousseau, 2006) ισχυρίζεται ότι τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών παρουσιάζονται λόγω τριών διαφορετικών τύπων εμποδίων: των γενετικών-ψυχολογικών εμποδίων που σχετίζονται με τον ίδιο τον μαθητή, των επιστημολογικών εμποδίων τα οποία σχετίζονται με την εξέλιξη της ίδια της επιστήμης και τέλος των διδακτικών εμποδίων που δημιουργούνται από τον τρόπο διδασκαλίας. Ως εμπόδιο μπορεί να χαρακτηριστεί και το γεγονός ότι οι μαθητές δεν λαμβάνουν απεικονίσεις κατά την διαδικασία μάθησης. Στο άρθρο των Areaya και Sidelil (Areaya & Sidelil, 2012) αναφέρεται η «έννοια της εικόνας» η οποία περιγράφει τη γνώση για κατασκευές που διαθέτει ένα συγκεκριμένο άτομο ανάλογα με τις μαθηματικές έννοιες. Η έννοια αυτή περιλαμβάνει όλες τις διανοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες ενώ δύναται να κατασκευαστεί με την πάροδο του χρόνου μέσω των εμπειριών και των ερεθισμάτων. Για κάθε ορισμό ο οποιοσδήποτε μαθητής δημιουργεί στο μυαλό του μια εικόνα την οποία επαναφέρει στη μνήμη του κάθε φορά που θέλει να δώσει τον ορισμό ή να επιλύσει άσκηση κάνοντας χρήση αυτόν. Εννοείται πως η εικόνα αυτή έχει γίνει κατανοητή από τον μαθητή και τον καθιστά ικανό να τη χρησιμοποιήσει. Όταν λοιπόν η αναζήτηση μιας εικόνας, που αντικατοπτρίζει την έννοια την οποία μελετά το άτομο, αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία, τότε το άτομο δεν μπορεί να ακολουθήσει μια άλλη φιλοσοφία ώστε να αφομοιώσει τον ορισμό και έτσι δημιουργούνται παρανοήσεις.

Ένα γενικό πρόβλημα-εμπόδιο που αντιμετωπίζουν όλοι οι μαθητές όλων των τάξεων στα μαθηματικά είναι ο συσχετισμός της γραφικής επίλυσης με την αλγεβρική επίλυση μιας άσκησης. Πολλές φορές κάνουν χρήση τον έναν ή τον άλλο τρόπο χωρίς να μπορούν να αναπτύξουν και τους δύο αν τους ζητηθεί. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν φταίει μόνο ο μαθητής διότι τα σχολικά βιβλία αλλά και οι καθηγητές προσαρμόζουν με τέτοιο τρόπο τη διδασκαλία τους χωρίς να δίνουν το περιθώριο της μεταπήδησης από τον έναν στον άλλο τρόπο. Επιπλέον, τα μαθηματικά σχετίζονται άρρηκτα και διαχρονικά με την ύπαρξη των μαθηματικών προβλημάτων. Οι περισσότεροι άνθρωποι αισθάνονται κάτι αρνητικό με το που ακούν τη λέξη πρόβλημα καθώς για αυτούς σημαίνει μία κατάσταση που χρήζει αντιμετώπισης και επιδέχεται λύση ή όχι. Πολύ περισσότερο όταν συνοδεύεται και από την λέξη «μαθηματικό» (πρόβλημα) που για πολλούς ανθρώπους σημαίνει δυσνόητες αλληλουχίες και πράξεις. Τα ίδια συναισθήματα διακατέχουν και τους μαθητές στην αντιμετώπιση ενός μαθηματικού προβλήματος. Κατά γενική ομολογία το μαθηματικό πρόβλημα αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στην μάθηση και την κατανόηση των μαθηματικών. Ο Ούγγρος μαθηματικός Pólya διατύπωσε τις πρώτες στρατηγικές επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, τις λεγόμενες ευρετικές, στις οποίες περιλαμβάνονται οι οπτικές αναπαραστάσεις που είναι, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι συλλογισμοί απλούστευσης, οι πρόσθετες παραδοχές κ.ά.

Οι μαθητές οποιουδήποτε γνωστικού και νοητικού επιπέδου κρίνουν την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος, ειδικά όταν αυτό απαιτεί αλγοριθμική προσέγγιση, βαρετή. Στην παρούσα έρευνα προσεγγίζονται κάποια προβλήματα του Ολοκηρωτικού Λογισμού ιστορικά ώστε να γίνουν περισσότερο ξεκάθαρα στους μαθητές. Θα πρέπει οι μαθητές να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν τι, γιατί και με ποιο τρόπο το αναζητούν ενώ ταυτόχρονα θα αποτελούσε μεγάλη ικανοποίηση για κάθε εκπαιδευτικό η κατανόηση της επίλυσης και ο σκοπός του προβλήματος από τους μαθητές.

2.3. Δυσκολίες αντιμετώπισης του ορισμένου ολοκληρώματος

Έχουν γίνει πολλές έρευνες για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σήμερα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτή των Rasslan και Tall (Rasslan &Tall, 2002), στην οποία ζητήθηκε από 41 μαθητές να δώσουν τον ορισμό της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος αφού είχαν διδαχθεί την έννοια. Οι απαντήσεις των μαθητών φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα. Το αξιοσημείωτο είναι ότι κανένας μαθητής δεν έδωσε σωστή απάντη



Εικόνα 1: Έρευνα Rasslan & Tall (2002)

Αναλυτικότερα :

- 26 μαθητές δεν έδωσαν απάντηση
- 4 το περιέγραψαν ως εμβαδό χωρίου
- 3 με την βοήθεια της αρχικής συνάρτησης
- 5 έδωσαν λάθος απάντηση
- 3 με παράδειγμα

Κανένας από τους μαθητές δεν είπε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι το όριο του αθροίσματος Riemann.Ο ολοκληρωτικός λογισμός στα σχολικά βιβλία παρουσιάζεται δίνοντας πρώτα τον ορισμό της αρχικής ή παράγουσας συνάρτησης μετά με το αόριστο ολοκλήρωμα και τις τεχνικές ολοκλήρωσης, συνεχίζει με τις διαφορικές εξισώσεις και κατόπιν εισάγει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι το αόριστο ολοκλήρωμα και οι διαφορικές εξισώσεις είναι κάθε χρόνο εκτός τόσο εξεταστέας όσο και διδακτέας ύλης. Παρόλο αυτά οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν τις περισσότερες φορές και το αόριστο ολοκλήρωμα θέλοντας να καλύψουν όλες τις τεχνικές ολοκλήρωσης και θεωρώντας, όχι αδίκως, ότι επιτυγχάνεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο η διαδικαστική εκμάθηση του υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Τα προβλήματα που αναφέρονται στο ορισμένο ολοκλήρωμα δεν εμφανίζονται ούτε στο σχολικό βιβλίο αλλά ούτε και στα θέματα των πανελλαδικών. Αποτελούν και αυτά μη εξεταστέα ύλη για τους τελειόφοιτους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος από τους μαθητές παρουσιάζεται, από τους διδάσκοντες αλλά και από τα σχολικά εγχειρίδια, ως διαδικαστική μέθοδος. Αποτέλεσμα αυτού να περιορίζεται η έννοια του Λογισμού που αναπτύχθηκε από την ιδέα του απειροελάχιστου. Με αυτό τον τρόπο δυσκολεύονται, ίσως και να αδυνατούν, να λύσουν προβλήματα ολοκληρωτικού λογισμού. Η έννοια του απειροελάχιστου και του ορίου παράγουν αρκετές γνωστικές δυσκολίες, όπως τη σύγκρουση όρων ορολογίας (π.χ. «προσέγγιση», «αυθαίρετα μικρό», «φτάνω στο άπειρο») και την αδυναμία εκτίμησης συμβαίνει στο άπειρο Tall, & Rashidi (Tall&Rashidi, 1993). Αναλυτικά οι δυσκολίες, κατά τον Tall (Tall, 1992), που συναντούν οι μαθητές στον λογισμό μπορούν να δηλωθούν ως: α) λανθασμένη ερμηνεία των εννοιών απείρως μικρές προσαυξήσεις ποσοτήτων Δxκαι Δy, β)δυσκολίες μετάφρασης του πραγματικού κόσμου με χρήση κατάλληλων αναπαραστάσεων, μέσα από τη διατύπωση του λογισμού, που περιορίζουν διανοητικά την απεικόνιση μιας συνάρτησης και γ) έλλειψη αλγεβρικού χειρισμού που κάνει την απλή εφαρμογή της διαδικαστικής μεθόδου να υπερισχύει της εννοιολογικής κατανόησης. Προτείνονται διάφορες προσεγγίσεις για να βοηθηθούν οι εκπαιδευόμενοι στα πρώτα μαθήματα του λογισμού. Ως διορθωτικές κινήσεις προτάσσονται τα παρακάτω: α) να αποφεύγεται η έγκαιρη αναφορά στη γλώσσα του ορίου, της παραγώγου ή του ολοκληρώματος β)παρέχοντας στους μαθητές τις ιδιότητες της συνέχειας και της έννοιας του απειροελάχιστου ως μια έννοια για τους εκπαιδευόμενους, γ) δίνοντας έμφαση στην διαδικαστική πτυχή και δ) χρησιμοποιώντας επίσημα ορισμούς, αξιώματα κτλ.(Tall, 1992). Μια από τις προοπτικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι η Ιστορία και η Παιδαγωγική στα Μαθηματικά(Fried, 2001; Jankvist U. T., 2009; Katz, 2013).Η χρήση της ιστορικής προοπτικής για την ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών έχει εξαπλωθεί τα τελευταία χρόνια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μεθοδολογία της έρευνας

3.1. Χρησιμότητα της έρευνας

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος όπως παρουσιάζεται και διδάσκεται στο σχολείο είναι η πρώτη επαφή των μαθητών της Γ΄ Λυκείου με τον ολοκληρωτικό λογισμό, δεδομένου ότι δεν διδάσκονται το αόριστο ολοκλήρωμα. Επιπλέον ως υποψήφιοι φοιτητές θετικών σχολών, θα πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος αλλά και το άθροισμα Riemann όπως και το εμβαδό χωρίου. Η δυσκολία στην κατανόηση των παραπάνω εννοιών, δημιουργεί πολλά προβλήματα στην επίλυση των ασκήσεων του ολοκληρωτικού λογισμού και γι’ αυτό καθίσταται αναγκαία η διδασκαλία τους με διαφορετικούς τρόπους. Τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών κάνουν λόγο για την ανάγκη ανάπτυξης της κριτικής σκέψης των διδασκομένων (Θωμαΐδης etal., 1989). Ένας από τους τρόπους που μπορεί να επιτευχθεί ο παραπάνω στόχος, είναι η σωστή αξιοποίηση και η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών.

Από την άλλη πλευρά η σύνδεση της αφηρημένης θεωρίας με πραγματικά παραδείγματα, που προκύπτουν και από την διανόησή μας, είναι ένα καίριο ζήτημα που απασχολεί μεγάλο μέρος συγγραφέων μαθηματικών βιβλίων (Θωμαΐδης etal., 1989). Για την αποφυγή αποτροπής των μαθητών για τα μαθηματικά, γίνεται χρήση ιστορικών προβλημάτων και δραστηριοτήτων. Ο σκοπός της ενσωμάτωσης της ιστορίας είναι να γίνει πιο προσιτό και ευχάριστο το μάθημα των μαθηματικών, δημιουργώντας ένα ευδιάθετο κλίμα για τους μαθητές. Η κριτική σκέψη «ακονίζεται» εφόσον ο μαθητής δημιουργεί μια απεικόνιση με τον ίδιο τρόπο που ασχολήθηκε ο άνθρωπος χρόνια πριν. Επιπλέον η θεωρία γίνεται ευκολότερα κατανοητή, όταν μελετάται σύμφωνα με την ιστορική εξέλιξη. Με την ιστορία των μαθηματικών, στην παρούσα εργασία, γίνεται προσπάθεια να υπάρξει κινητοποίηση από τον μαθητή και ο ίδιος να εργαστεί με τον ίδιο τρόπο όπως ο Αρχιμήδης, ο Leibniz, oRiemann και να λύσει προβλήματα προσέγγισης εμβαδού ή και υπολογισμού με τη βοήθεια της εξάντλησης ή του ορισμένου ολοκληρώματος. Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας με αποδεικτικές διαδικασίες και αυστηρούς ορισμούς, οδηγεί στην αντίληψη των φορμαλιστικών μαθηματικών και της μη δημιουργικής σκέψης. Ωστόσο, γίνεται προσπάθεια αντικατάστασης της πεποίθησης αυτής μέσω μιας διδακτικής παρέμβασης με ιστορική αναδρομή και όχι με τον κλασικό τρόπο διδασκαλίας.

3.2. Στόχος Έρευνας - Ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της εργασίας αυτής είναι η διερεύνηση της επίδρασης της διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών στην εννοιολογική κατανόηση του αθροίσματος Riemann και του ορίου αυτού (ορισμένο ολοκλήρωμα) από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος διδάσκεται για πρώτη φορά στους μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου, χωρίς να γίνεται αναφορά στο αόριστο ολοκλήρωμα παρά μόνο στην παράγωγο συνάρτηση. Μοναδικό προτεινόμενο εγχειρίδιο είναι το σχολικό βιβλίο, που χρησιμοποιείται ως βάση για την προετοιμασία των μαθητών. Τα τελευταία χρόνια, από την σύνθεση των θεμάτων στις πανελλήνιες εξετάσεις, παρατηρείται, σε μικρό βαθμό, μια διαφοροποιημένη θεματολογία από τα προηγούμενα χρόνια, που ήταν τυποποιημένη κατά κάποιο τρόπο. Απαιτείται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, για την επίτευξη ενός ικανοποιητικού βαθμού στο μάθημα των Μαθηματικών. Εξαιτίας αυτού του στόχου, οι μαθητές προσπαθούν, πολλές φορές, να επιλύουν ασκήσεις διαδικαστικά με αποτέλεσμα να δημιουργείται σύγχυση στο μυαλό τους. Υπολογίζουν εύκολα την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος αλλά δεν γνωρίζουν αν αυτό αποτελεί εμβαδό ή είναι ένας πραγματικός αριθμός. Χαρακτηριστικό παράδειγμα το θέμα Δ3 των πανελλαδικών εξετάσεων του 2022, όπου αποδεικνυόταν με την παρατήρηση ότι η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος του Δ2 ερωτήματος ήταν θετικός αριθμός αφού εξέφραζε εμβαδό χωρίου.

Με στόχο να περιοριστούν, σε μεγάλο βαθμό, όσο το δυνατόν περισσότερες ασάφειες δημιουργούνται στους μαθητές με την εισαγωγή της έννοιας του αθροίσματος Riemann αλλά και του ορισμένου ολοκληρώματος, καθώς και η ενσωμάτωση της ιστορίας στην διδασκαλία τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Σε ποιο βαθμό η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος από τους μαθητές της Γ Λυκείου;

2. Ποια η συμβολή των ιστορικών προβλημάτων στην εννοιολογική κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος;

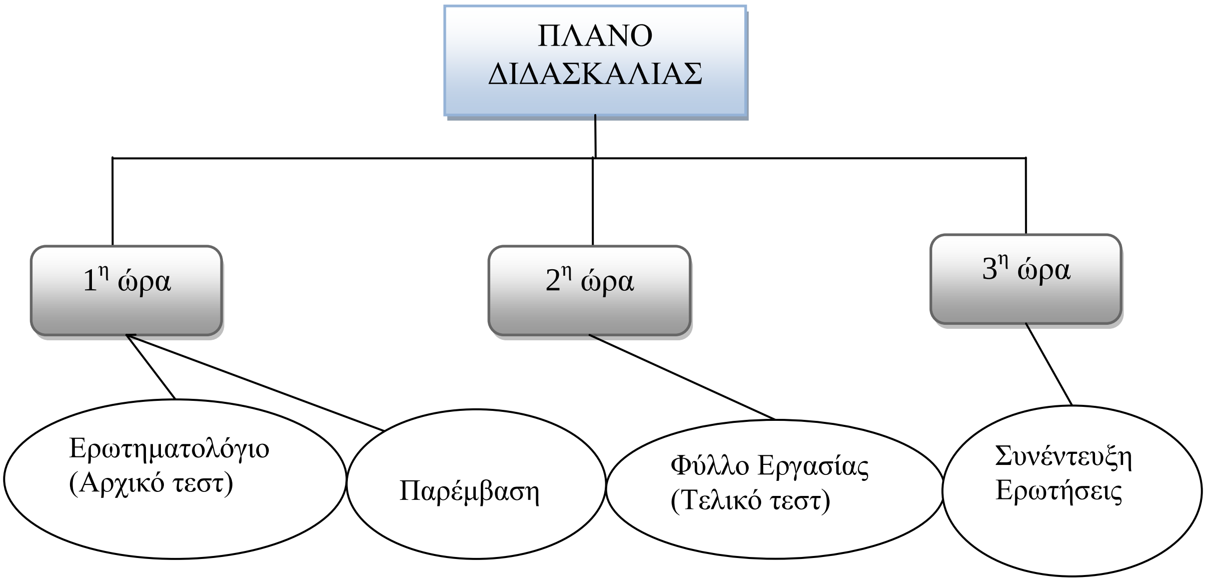
3.3. Συμμετέχοντες στην έρευνα

Η διδακτική παρέμβαση έλαβε χώρα στο Γενικό Λύκειο Άργους Ορεστικού, στα μέσα Μαΐου, σε τάξη 14 μαθητών, από τους οποίους 5 κατατάσσονται στην κατεύθυνση Οικονομίας-Πληροφορικής και οι υπόλοιποι στην Θετική κατεύθυνση. Όλοι είχαν ήδη διδαχθεί την εξεταστέα ύλη και επομένως είχαν εξοικειωθεί με τους όρους του αθροίσματος Riemannκαι του ορισμένου ολοκληρώματος. Ο αριθμός των μαθητών που παρακολούθησαν την παρέμβαση ήταν μεγάλος, δεδομένου του χρονικού διαστήματος που πραγματοποιήθηκε η παρέμβαση, αφού λίγο πριν τη λήξη των μαθημάτων του σχολικού έτους η προσέλευση των μαθητών δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική. Μετά από αίτηση στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση για την πραγμάτωση της διδακτικής παρέμβασης και την άδεια που δόθηκε, ακολούθησε συνεννόηση με τους διδάσκοντες εκπαιδευτικούς και αποφασίστηκε η παραπάνω χρονική στιγμή για την διεξαγωγή της παρέμβασης. Αν και υπήρξε αίτημα να γίνει νωρίτερα, το αίτημα αυτό δεν πραγματοποιήθηκε διότι οι υπεύθυνοι εκπαιδευτικοί επιθυμούσαν να τελειώσουν πρώτα την ύλη και μετά να γίνει η παρέμβαση. Το επίπεδο των μαθητών, με βάση την ανάλυση των πρώτων ερωτήσεων που τους δόθηκαν, χαρακτηρίζεται μέτριο, αφού οι μισοί σχεδόν μαθητές δεν έχουν κατανοήσει τις έννοιες ή δεν τους έχουν κεντρίσει το ενδιαφέρον ακόμη. Βλέπουν με μεγάλη επιφύλαξη την παρέμβαση και απορούν αν αξίζει να σπαταλήσουν τόσο χρόνο «άδικα». Οι υπόλοιποι μισοί δείχνουν ενδιαφέρον από την αρχή και μάλιστα είναι και ευδιάθετοι. Διαφαίνεται ότι έχουν διαβάσει τη θεωρία και γνωρίζουν να λύνουν διαδικαστικά ορισμένα ολοκληρώματα.

3.4. Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

Η διαδικασία διήρκησε 3 διδακτικές ώρες, οι δύο πρώτες καλύφθηκαν με την παρέμβαση αλλά και την επίλυση των ασκήσεων που διανεμήθηκαν στους μαθητές, μετά το τέλος της διδακτικής-ιστορικής παρέμβασης. Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την αναγνώριση, την αξιολόγηση και τη διατύπωση του προβλήματος που θεωρείται κρίσιμο σε μία καθημερινή κατάσταση διδασκαλίας. Το πρόβλημα που προσπαθεί να ερμηνευθεί εδώ, είναι ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του αθροίσματος Riemann και κατ' επέκταση του ορισμένου ολοκληρώματος με τον συνήθη τρόπο διδασκαλίας που πραγματοποιείται στο Σχολείο. Το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί, στη διδασκαλία του λογισμού, τείνουν να εστιάζουν μόνο στη διαδικαστική ικανότητα είναι αναμφισβήτητο. Για το λόγο αυτό στην αρχή της πρώτης διδακτικής ώρας μοιράστηκε ένα ερωτηματολόγιο (παράρτημα- φυλλάδιο $1^{ο}$) που αποσκοπούσε στην διερεύνηση τόσο της έννοιας του αθροίσματος Riemann και του ορισμένου ολοκληρώματος όσο και στην σχέση των μαθητών με την Ιστορία των Μαθηματικών.

Αμέσως μετά ξεκίνησε η ιστορική παρέμβαση η οποία αναφερόταν στην μέθοδο της εξάντλησης και τους υπολογισμούς που έκανε ο Αρχιμήδης για την προσέγγιση του εμβαδού παραβολικού χωρίου, αφού παρουσιάστηκαν επιγραμματικά τα βιογραφικά σημειώματα των βασικότερων επιστημόνων στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος από την αρχαιότητα μέχρι και τον $19^{ο}$ αιώνα.. Δεν χρησιμοποιήθηκαν αυστηρές αποδείξεις για να μην κουράσουν και απογοητεύσουν τους μαθητές. Τέλος δόθηκε ένα ημιπαραβολικό χωρίο και ζητήθηκε από τους μαθητές έχοντας και ιστορικό υπόβαθρο να προσεγγίσουν το εμβαδό του δοσμένου χωρίου με τη μέθοδο της εξάντλησης. Για οικονομία χρόνου στους υπολογισμούς έγινε χρήση του λογισμικού geogebra, όπως φαίνεται στο παράρτημα. Στη συνέχεια, δόθηκε προς λύση από τους μαθητές, η ίδια άσκηση με τα άνω και κάτω αθροίσματα, προσπαθώντας να εξαντλήσουν το εμβαδό του χωρίου με ορθογώνια αυτή τη φορά. Στόχος ήταν να δημιουργήσουν μόνοι τους οι μαθητές τον ορισμό του εμβαδού του χωρίου. Η αμέσως επόμενη δραστηριότητα σκοπεύει να διορθώσει την λανθασμένη εντύπωση ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι θετικός αριθμός αφού εκφράζει εμβαδό. Κλείνοντας δίνεται πρόβλημα ρεαλιστικό και ζητείται με καθοδήγηση η επίλυσή του, κάνοντας χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος, χωρίς να απαιτείται μόνο η στερεότυπη διαδικαστική προσπάθεια.



Πίνακας 1 *Πλάνο διδασκαλίας*

Την τρίτη ώρα, δίνεται χρόνος για να τελειώσουν και την 3η εργασία και κατόπιν ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο της συνέντευξης στον υπολειπόμενο χρόνο. Να σημειωθεί, σ' αυτό το σημείο, ότι δεν επαρκούσε ο χρόνος που διέθεταν οι μαθητές για συνέντευξη, παρότι είχε δοθεί άδεια για κάτι τέτοιο. Αφού δεν ήταν δυνατόν να συνεντευξιαστούν, μοιράστηκε το φύλλο με το πλάνο των ερωτήσεων που δυνητικά θα γινόταν στην συνέντευξη.

Για την επίτευξη της Διδακτικής Παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν

- Δύο ερωτηματολόγια:
  - το πρώτο μοιράστηκε στην αρχή της παρέμβασης, με σκοπό τη διερεύνηση τόσο της έννοιας του αθροίσματος Riemann και του ορισμένου ολοκληρώματος όσο και στην σχέση των μαθητών με την Ιστορία των Μαθηματικών (βλ. Παράρτημα φυλλάδιο 1ο) και
  - το δεύτερο στο τέλος της παρέμβασης αντί της συνέντευξης με στόχο τον έλεγχο τόσο της επαφής των μαθητών με την ιστορία όσο και την τυχόν αλλαγή της διάθεσης τους.

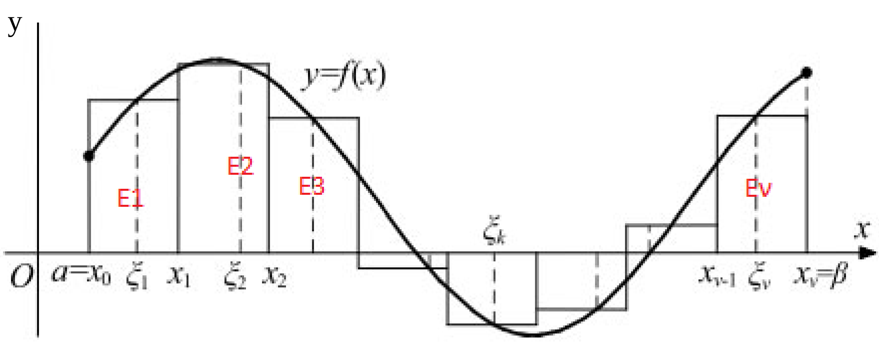
- Ένα αρχείο powerpoint για την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών και την διδακτική παρέμβαση.
- Τρία αρχεία geogebraπου λειτούργησαν επικουρικά για τις τρεις πρώτες εργασίες του φύλλου εργασιών.
- Ένας προτζέκτορας όπου έγινε η παρουσίαση του PowerPoint και αργότερα των αρχείων geogebra που είχαμε ετοιμάσει.
- Ένα φύλλο εργασίας με τέσσερις εργασίες.

Το πρώτο ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε σύμφωνα με τις έρευνες που έχουν γίνει και διαπιστώνουν σύγχυση από τους μαθητές σε κάποιες έννοιες αλλά και στην διερεύνηση της σχέσης τους με την ιστορία των μαθηματικών. Το φύλλο εργασίας που μοιράστηκε αποσκοπεί στην διαπίστωση της κατανόησης της μεθόδου της εξάντλησης αλλά και στο έναυσμα για την εισαγωγή των εννοιών του πάνω και κάτω αθροίσματος και τελικά στο όριο αυτών, δηλαδή τον ορισμό του εμβαδού. Επίσης, έχει ως στόχο να ξεκαθαρίσει ότι το εμβαδό και το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν είναι ίδιες έννοιες πάντα. Μπορεί ένα ορισμένο ολοκλήρωμα να είναι και μηδέν. Το τελευταίο ερωτηματολόγιο- συνέντευξη δημιουργήθηκε για να δώσει απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί σ’ αυτή την εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1. Ανάλυση της διαδικασίας της διδακτικής παρέμβασης

Κατά το ξεκίνημα της διδακτικής παρέμβασης μοιράστηκε το ερωτηματολόγιο (Παράρτημα, Φυλλάδιο1^{ο}) για τη διερεύνηση τόσο της έννοιας του αθροίσματος Riemann και του ορισμένου ολοκληρώματος όσο και στην σχέση των μαθητών με την Ιστορία των Μαθηματικών.
Συγκεκριμένα η πρώτη ερώτηση: «*Περιγράψτε το ορισμένο ολοκλήρωμα και αναφέρεται αν γνωρίζετε την χρήση του σε άλλες επιστημονικές εφαρμογές*», ζητά από τους μαθητές να δώσουν τον ορισμό ή να περιγράψουν το άθροισμα Riemann. Ότι ακριβώς διερεύνησαν οι Rasslan καιTall (Rasslan & Tall, 2002) στη δική τους εργασία. Στη δεύτερη ερώτηση: «*Γνωρίζεται ή έχετε ακούσει την μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδη-Ευδόξου; (Απαντήστε μονολεκτικά με ναι ή όχι)*» προσδιορίζεται η σχέση και η γνώση των μαθητών σχετικά με την βασική ιδέα της εξάντλησης από τον Αρχιμήδη. Εξετάζεται, επίσης, αν κατά την διδασκαλία της έννοιας του αθροίσματος Riemann αναφέρθηκε έστω και φευγαλέα η μέθοδος της



Σχήμα 5. : *Ερώτηση 3 Φυλλάδιο 1^{ο} (Σχολικό βιβλίο)*

εξάντλησης. Στην τρίτη ερώτηση δίνεται σχήμα του σχολικού βιβλίου:

και ζητείται από τους μαθητές:

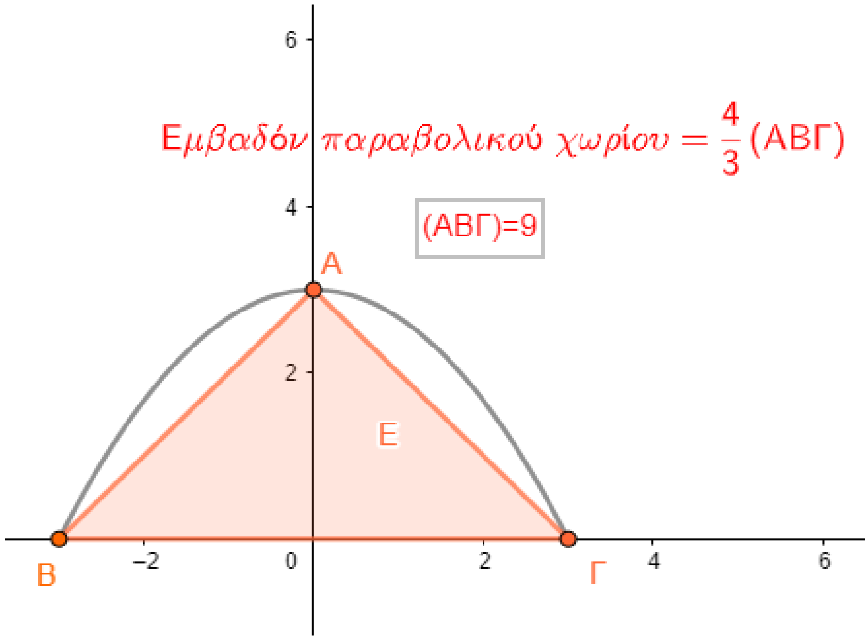
a. «*Τι υπολογίζουμε με το γινόμενο* $(x_1 - x_0) \cdot f(\xi_1)$»;
b. «*Αν υποθέσουμε ότι το διάστημα* $[\alpha, \beta]$ *χωρίστηκε σε ίσα υποδιαστήματα, μπορείτε να βρείτε το πλήθος των υποδιαστημάτων αυτών;*».
c. «*Ποιο το άθροισμα Riemann σύμφωνα με αυτά που έχετε διδαχθεί στο σχολείο;*».
d. «*Το ολοκλήρωμα*$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ *εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της* f *τον άξονα* $x'x$ *και τις ευθείες* $x = \alpha$ *και* $x = \beta$*; Δικαιολογήστε την απάντησή σας*».
e. «Το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός; (Βασιστείτε στο παραπάνω σχήμα)».

Στο (α) αναμένεται να γράψουν ότι ο τύπος που τους δίνεται εκφράζει το εμβαδόν του E_1 ορθογωνίου αφού το $f(\xi_1)$ εκφράζει το ύψος του ορθογωνίου με βάση $(x_1 - x_o = \alpha)$ και στο (b) ότι το πλήθος των υποδιαστημάτων είναι ν. Διερευνάται η έλλειψη του αλγεβρικού χειρισμού που κάνει την απλή εφαρμογή της διαδικαστικής μεθόδου να υπερβαίνει την εννοιολογική κατανόηση (Tall, 1992). Στο (c) ερώτημα ζητείται να απαντηθεί το άθροισμα Riemann που προκύπτει από το σχήμα με στόχο να διαπιστωθεί η εννοιολογική κατανόηση του αθροίσματος Riemann. Στο (d) υποερώτημα ζητείται να δικαιολογήσουν αν το ορισμένο ολοκλήρωμα και το εμβαδό του χωρίου που περιγράφεται είναι ίσα, ενώ στο τέλος (e) οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν, με την βοήθεια του σχήματος, αν το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι θετικός αριθμός. Τα δύο αυτά υποερωτήματα ελέγχουν την κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος και του εμβαδού του χωρίου, δύο έννοιες οι οποίες συγχέονται από τους μαθητές. Στο τελευταίο δε υποερώτημα στηριζόμενοι στο σχήμα οι μαθητές, θα ελέγξουν με τη βοήθεια των εμβαδών, το πρόσημο του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στην τέταρτη ερώτηση δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ ορισμένη στο [0,2] με τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις του εμβαδού του χωρίου, μια με τα κάτω αθροίσματα, η δεύτερη με τα πάνω αθροίσματα και η τρίτη με τραπέζια. Το διάστημα που ορίζεται είναι χωρισμένο σε τέσσερα υποδιαστήματα. Στόχος της ερώτησης είναι να κατανοήσουν πως το εμβαδό προσεγγίζεται καλύτερα με τα τραπέζια αλλά και να διαπιστώσουν πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι προσέγγισης πέρα από τα ορθογώνια ή τα τρίγωνα.

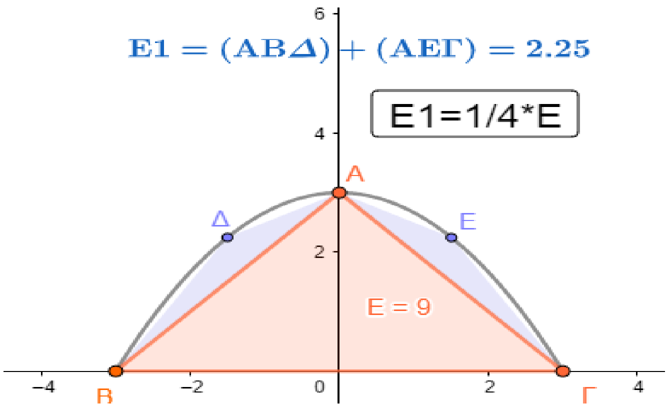
Συνεχίζοντας την πρώτη ώρα με τη βοήθεια ενός προτζέκτορα παρουσιάστηκε η διδακτική παρέμβαση (βλ. Παράρτημα ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ) με τη βοήθεια ενός αρχείου powerpoint, το οποίο κάνει μια μικρή ιστορική αναδρομή για την προσέγγιση εμβαδού από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, αναφέροντας τους σπουδαιότερους επιστήμονες της εποχής τους που διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Στη συνέχεια ακολούθησε η μέθοδος της εξάντλησης με απλά και κατανοητά σχήματα και σχέσεις χωρίς αποδείξεις, που θα αποτελούσαν τροχοπέδη, τόσο στην επίτευξη του στόχου, που δεν είναι άλλος παρά η παρότρυνση των μαθητών για την έννοια της προσέγγισης εμβαδού του παραβολικού χωρίου, όσο και στην ιστορική αναδρομή που τις περισσότερες φορές γίνεται κουραστική προς τους μαθητές και ειδικά στους τελειόφοιτους. Παράλληλα με το powerpoint χρησιμοποιήθηκε και ένα αρχείο geogebra χωρισμένο σε τέσσερα βήματα για την καλύτερη αλλά και αναλυτικότερη παρουσίαση της μεθόδου εξάντλησης. Με το δυναμικό αρχείο έγινε μεγέθυνση στα δυο τελευταία βήματα για να διαπιστωθεί ότι πάντα το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων θα υπολείπεται του πραγματικού εμβαδού του παραβολικού χωρίου.

Ξεκινώντας τη διδασκαλία ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ). Να σημειωθεί, πως δόθηκε χωριστά σαν σχήμα στον πίνακα. Χαμογελώντας, όλοι οι μαθητές, ανεξαιρέτως, υπολόγισαν σωστά το εμβαδό του τριγώνου. Στη συνέχεια δόθηκε το παραβολικό χωρίο στο οποίο ήταν εγγεγραμμένο το τρίγωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα 6. Ζητήθηκε από τους μαθητές να προσεγγίσουν το εμβαδό του παραβολικού χωρίου με τους ήδη γνωστούς τύπους υπολογισμού εμβαδών επίπεδων σχημάτων. Αυτή τη φορά, οι μαθητές άρχισαν να χαμογελούν αμήχανα, αφού δεν είχαν κάτι να πουν. Εξηγήθηκε ότι την ίδια αμηχανία είχαν και οι μαθηματικοί της αρχαιότητας που ασχολήθηκαν με το εμβαδό του παραβολικού χωρίου. Μέχρι που ο Αρχιμήδης με την βοήθεια του Εύδοξου, σκέφτηκε την μέθοδο της εξάντλησης. Προσπάθησε δηλαδή να εξαντλήσει το σχήμα με τρίγωνα των οποίων τα εμβαδά μπορούσαν να υπολογισθούν.



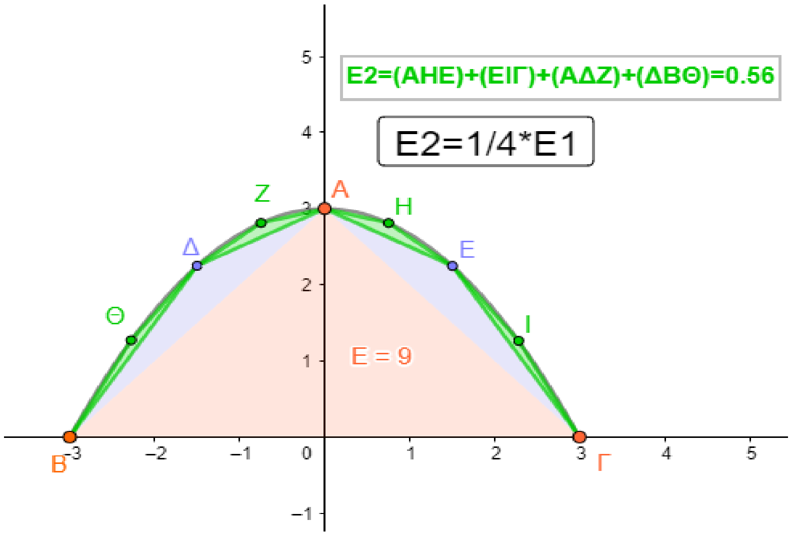
Σχήμα 6. *Βήμα 1ο, Τετραγωνισμός παραβολής*

Η πρώτη παρατήρηση που έκανε ο Αρχιμήδης με τη βοήθεια της μηχανικής ήταν ότι το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ) είναι τα τρία τέταρτα του εμβαδού του παραβολικού χωρίου. Κάτι που και για τον ίδιο δεν αποτελεί απόδειξη, δίνει την εντύπωση ότι το συμπέρασμα είναι αληθές. Τη γεωμετρική απόδειξη, αναφέρει ο ίδιος, την έχει δημοσιεύσει αλλά δεν έχει σωθεί.



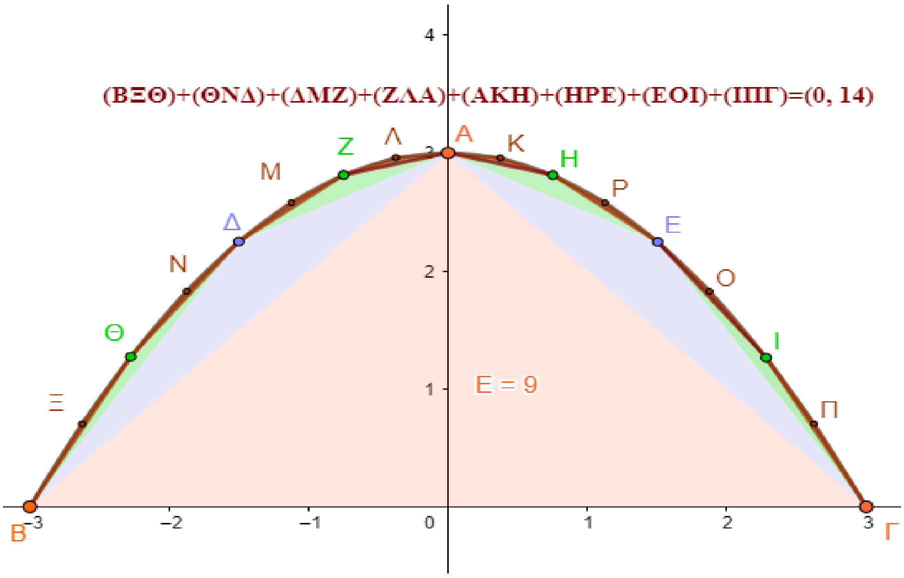
Σχήμα 7. *Βήμα 2ο Τετραγωνισμός παραβολής*

Στα δύο παραβολικά χωρία που απέμειναν, εγγράφει δύο τρίγωνα τα ΑΒΔ και ΑΕΓ . Το άθροισμα των δύο εμβαδών των τριγώνων είναι ίσο με το ¼ του (ΑΒΓ). Όπως και πριν, το εμβαδό κάθε νέου τριγώνου είναι τα ¾ του παραβολικού χωρίου στο οποίο είναι εγγεγραμμένο.



Σχήμα 8. *Βήμα 3ο Τετραγωνισμός παραβολής*

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εγγράφονται στα 4 παραβολικά χωρία που απέμειναν ισάριθμα τρίγωνα ΒΘΔ, ΔΖΑ, ΑΗΕ, ΕΙΓ . Για το καθένα από αυτά ισχύει ότι και πριν,(δηλαδή το εμβαδό του ΒΘΔ είναι τα ¾ του παραβολικού χωρίου ΒΘΔ) και επιπλέον το άθροισμα των εμβαδών τους είναι ίσο με το ¼ του Ε1=2,25.



Σχήμα 9. *Βήμα 4ο Τετραγωνισμός παραβολής*

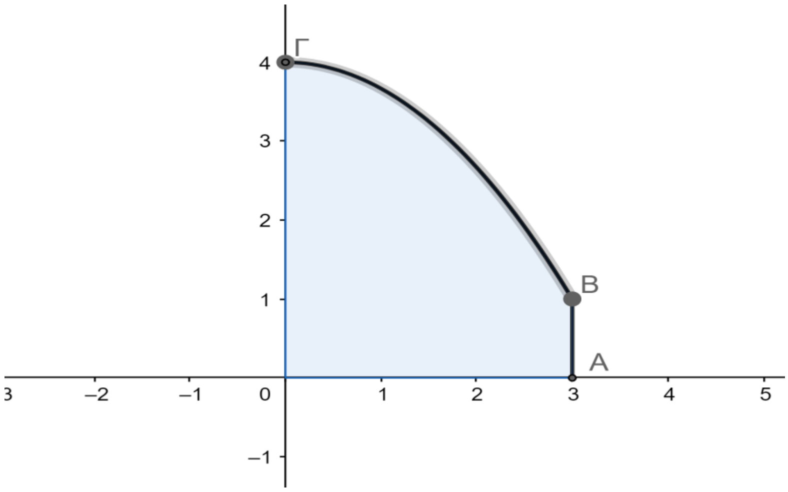
Ομοίως εγγράφονται οκτώ (8) τρίγωνα στα εναπομείναντα παραβολικά χώρια με άθροισμα εμβαδών ίσο με το ¼ του Ε2=0,56. Ο Αρχιμήδης ακολούθησε την ίδια διαδικασία ακόμη μια φορά, εγγράφοντας 16 τρίγωνα αποδεικνύοντας στο τέλος Εμβαδόν παραβολικού χωρίου ΒΑΓ=Ε+Ε1+Ε2+Ε3+Ε4+1/3Ε4 (όπου Ε4 το άθροισμα των εμβαδών των δεκαέξι τριγώνων).Μάλιστα, μια μαθήτρια ρώτησε πως μπόρεσε και πήρε άλλα 16 τρίγωνα, ενώ φαίνεται από το σχήμα ότι εξαντλήθηκε το χωρίο. Κάνοντας χρήση του λογισμικού geogebraκαι με τη βοήθεια της μεγέθυνσης φάνηκε ότι δεν είχε εξαντληθεί το χωρίο και ούτε θα επιτυγχάνονταν κάτι τέτοιο, ακόμη και μετά την εγγραφή των 16 τριγώνων που πήρε ο Αρχιμήδης. Το ίδιο παραδέχτηκε και η ίδια και φάνηκε μάλιστα ότι το κατανόησε από το χαμόγελο στο πρόσωπό της. Κλείνοντας, ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδό του παραβολικού χωρίου με τη χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος δεδομένου ότι ο τύπος της συνάρτησης (παραβολής) είναι:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3.$$

Όλοι οι μαθητές με άνεση υπολόγισαν σχετικά εύκολα ότι $\int_{-3}^{3} f(x)dx$=12.

Μετά από αυτό μοιράστηκε το φύλλο εργασίας (Παράρτημα, Φύλλο Εργασίας) με πρώτη άσκηση:

«Στο διπλανό σχήμα μπορείτε να προτείνετε τρόπο ή τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαμε με την μέθοδο της εξάντλησης να προσεγγίσουμε το παραπάνω γραμμοσκιασμένο εμβαδό; (ημιπαραβολικό χωρίο)

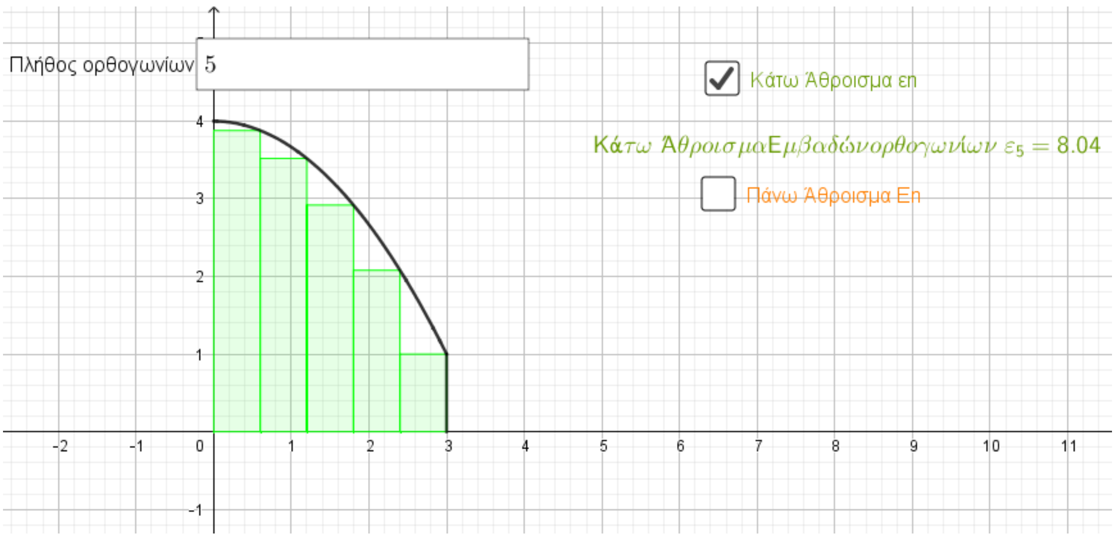


Σχήμα 10. *Εργασία 1 Φύλλο εργασίας*

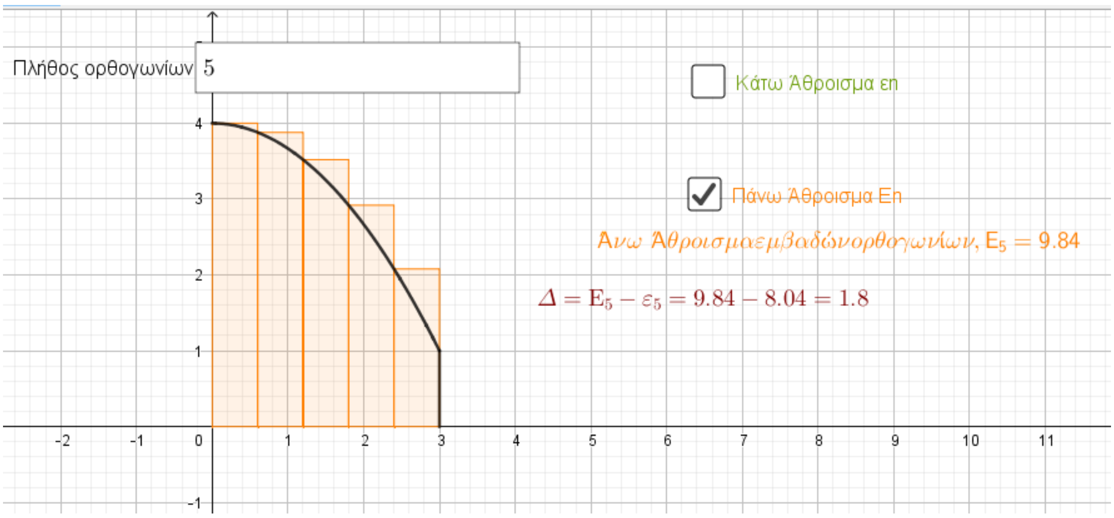
Αφού κάνετε μια προσέγγιση του εμβαδού υπολογίστε με την βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος και το πραγματικό εμβαδό. (Δίνεται ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4\,, \gamma\iota\alpha\ 0 \leq x \leq 3$)».

Δίνεται στους μαθητές ένα ημιπαραβολικό χωρίο και ζητείται να εφαρμόσουν τη μέθοδο της εξάντλησης σε αυτό το χωρίο. Ο λόγος αυτής είναι η διαπίστωση της εμπέδωσης της μεθόδου αλλά και η σύγκριση με το πραγματικό εμβαδό που ζητείται με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος. Για τη συντόμευση των πράξεων χρησιμοποιείται αρχείο geogebra που προβάλλεται από τον projectorόποτε χρειαστεί, ακόμη και για επιβεβαίωση.

Στη δεύτερη εργασία ζητείται από τους μαθητές, βήμα-βήμα, για το προηγούμενο ημιπαραβολικό χωρίο, να «εξαντλήσουν» αυτό με ορθογώνια πλέον, δημιουργώντας το κάτω και πάνω άθροισμα ξεκινώντας με μια διαμέριση και με καθοδηγητικές ερωτήσεις να φτάσουν στο άθροισμα Riemann και τελικά στο όριο αυτού για τον υπολογισμό του εμβαδού αλλά και για την εισαγωγή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος (επισημαίνεται ότι παράλληλα προβάλλεται το αρχείο του geogebra για τη διευκόλυνση των μαθητών, σχ.11 και σχ.12).

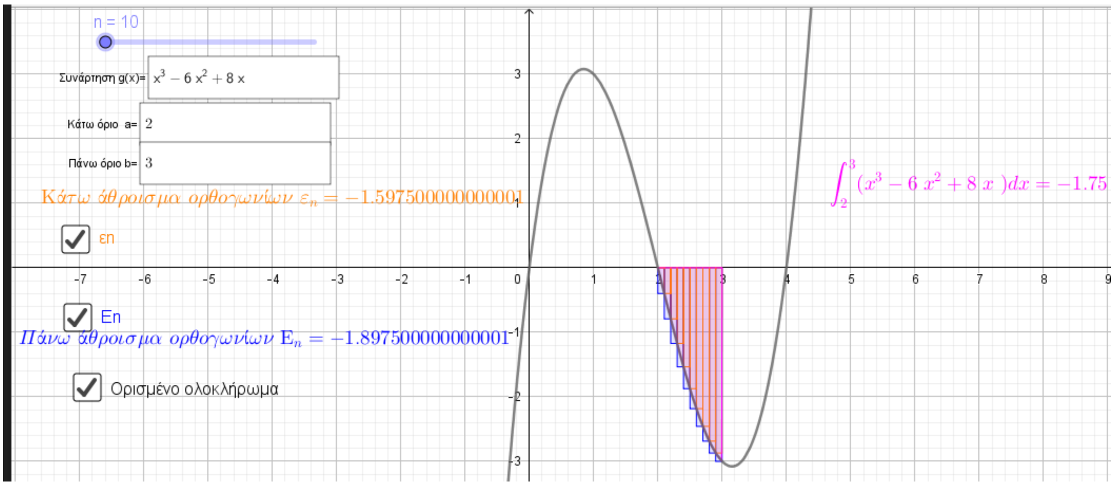


Σχήμα 11. *Άθροισμα των κάτω ορθογωνίων για n=5*



Σχήμα 12. *Άθροισμα των άνω ορθογωνίων για n=5*

Στην τρίτη εργασία ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τα ερωτήματα αυτά για να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό διορθώθηκε η σύγχυση τους σχετικά με την έννοια του αθροίσματος Riemannκαι του εμβαδού ενός χωρίου (π.χ. μπορεί ένα άθροισμα να είναι αρνητικός αριθμός ή μηδέν;). Μετά τις απαντήσεις οι μαθητές διαπιστώνουν την ορθότητα ή μη των απαντήσεών τους με τη βοήθεια του geogebra (σχ.13). Στόχος της εργασίας αυτής η αποσαφήνιση των εννοιών του ορισμένου ολοκληρώματος και του εμβαδού χωρίου. Μπορεί η τιμή ενός ολοκληρώματος να είναι 0 ή αρνητική αλλά του εμβαδού όχι.



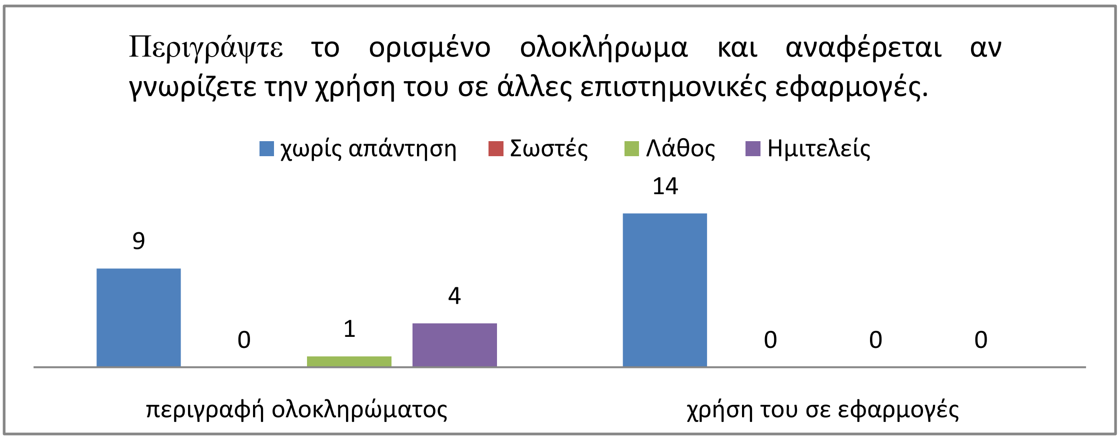
Σχήμα 13. *Εργασία 3 Φύλλο εργασίας(υποστηρικτικό)*

Στην τέταρτη εργασία δίνεται μια πιο ρεαλιστική άσκηση, για να φανεί η χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος στον πραγματικό κόσμο. Να σημειωθεί ότι με τη βοήθεια του σχήματος αλλά και με τον τρόπο παρουσίασης της λύσης γίνεται προσπάθεια να ανακαλύψουν τη λύση οι μαθητές. Σκοπός της εργασίας αυτής η συσχέτιση του ορισμένου ολοκληρώματος με άλλες επιστημονικές εφαρμογές.

Μετά το τέλος των εργασιών ζητήθηκε από τους μαθητές, όσοι επιθυμούσανε, να συνεντευξιαστούν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της επόμενης βδομάδας, δυστυχώς όμως δεν υπήρξε διάθεση για συνέντευξη λόγω του φόρτου διαβάσματος για τις πανελλαδικές εξετάσεις τους. Για το λόγο αυτό μοιράστηκε ένα ακόμη φυλλάδιο (Παράρτημα, Φυλλάδιο 3) για να απαντήσουν οι μαθητές, το οποίο δεν ήταν τίποτε άλλο παρά οι ερωτήσεις για την συνέντευξη που θα πραγματοποιούνταν, σε κανονικές συνθήκες. Αυτή η προσπάθεια έγινε αφού δεν υπήρχε καμιά πιθανότητα συνέντευξης, η οποία σε συνδυασμό με την εκφραστικότητα των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, έδωσε την δυνατότητα να εξαχθούν συμπεράσματα που θα βοηθήσουν στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων της εργασίας αυτής. Στο σημείο αυτό, να τονισθεί πως οι μαθητές συμπλήρωσαν με προθυμία το φυλλάδιο γράφοντας μόνο το όνομά τους.

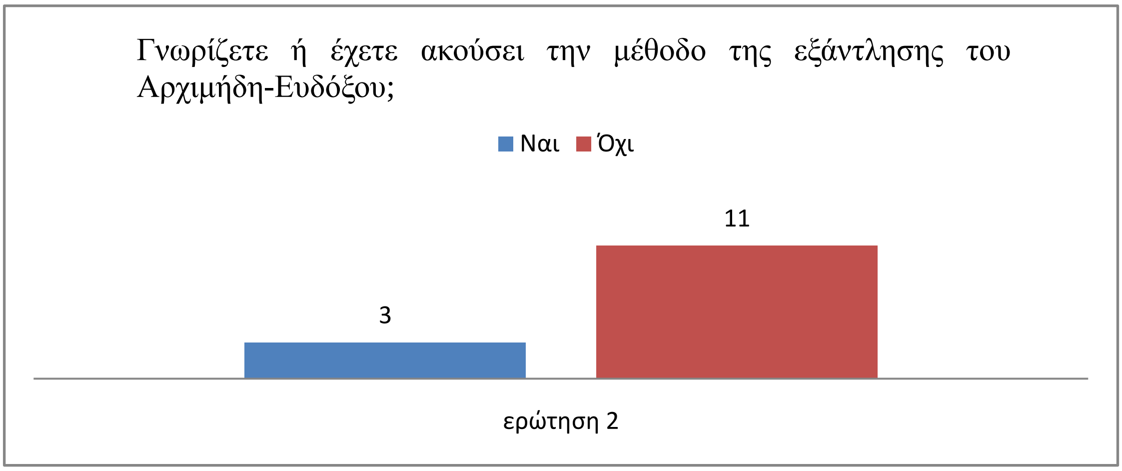
4.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων που αφορά την διδακτική παρέμβαση

Από τις απαντήσεις των μαθητών του 1ου φυλλαδίου-ερωτηματολογίου εξάγονται οι παρακάτω παρατηρήσεις: Οι 9 στους 14 μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, οι 5 στους 14 συγχέουν τον ορισμό με το εμβαδό του χωρίου και όλοι ανεξαιρέτως δε γνωρίζουν τη χρήση του σε άλλες επιστημονικές εφαρμογές (Σχήμα 14). Ένας μόνο μαθητής, δίνει τον σωστό ορισμό με τη χρήση του ορίου αλλά δηλώνει πως εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον x΄x και τις x=α x=β, δηλαδή περίπου το ίδιο αποτέλεσμα με την έρευνα των Rasslan και Tall. Να τονισθεί ότι κανένας από τους μαθητές δεν

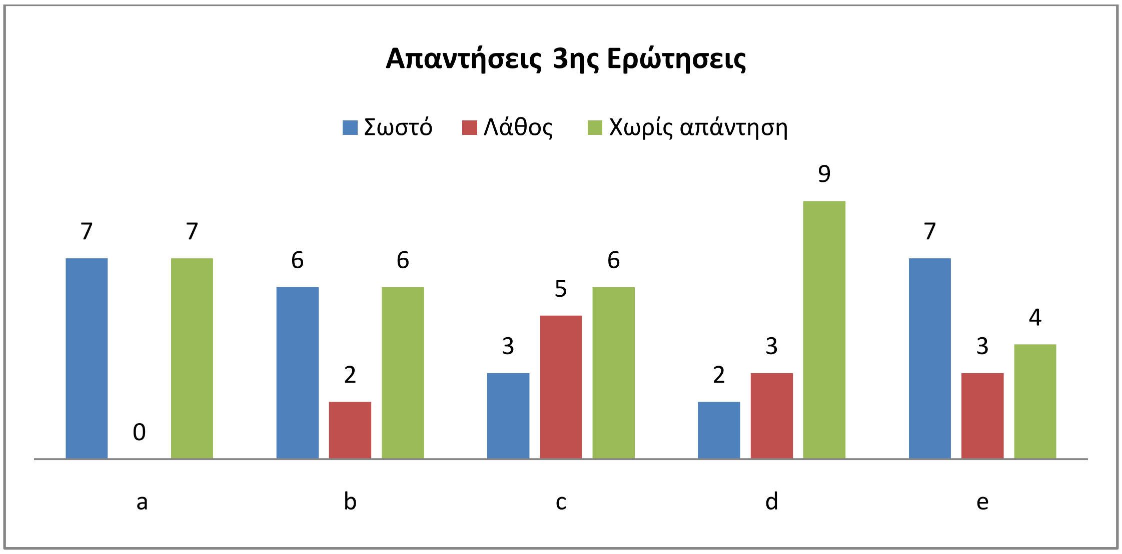


Σχήμα 14: *Οι απαντήσεις του 1ου ερωτήματος*

γνωρίζει τη χρήση του σε άλλες επιστημονικές εφαρμογές. Μόνο οι 3 στους 14 μαθητές έχουν ακούσει τη μέθοδο της εξάντλησης ενώ οι υπόλοιποι 11 μαθητές δε γνωρίζουν τη μέθοδο ούτε έχουν ακούσει κάτι γι' αυτή (Σχήμα 15). Σημειώνεται ότι η μέθοδος της εξάντλησης παρουσιάζεται και στο σχολικό εγχειρίδιο σαν ιστορικό σημείωμα, για το οποίο δυστυχώς δεν γίνεται καμία αναφορά από τον εκπαιδευτικό λόγω πίεσης χρόνου ίσως. Από την άλλη η απροθυμία για τέτοιες αναδρομές (εκτός ύλης) των τελειόφοιτων είναι δεδομένη, αφού εστιάζουν μόνο σε ότι θα χρειαστούν για τις πανελλαδικές εξετάσεις τους.



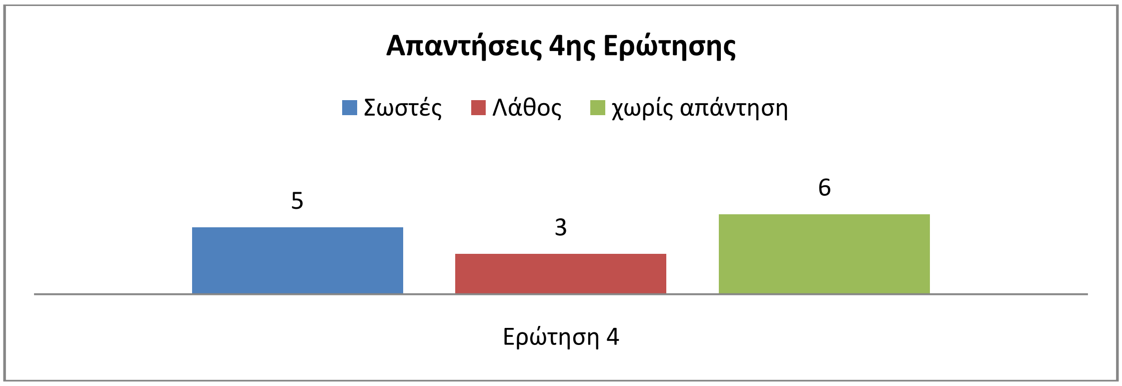
Σχήμα 15. *Οι απαντήσεις του 2ου ερωτήματος*



Σχήμα 16. *Οι απαντήσεις του 3ου ερωτήματος*

Όπως φαίνεται στο σχήμα (Σχήμα 16), στην ερώτηση 3, στο πρώτο ερώτημα απάντησαν οι μισοί (7) μαθητές σωστά ενώ οι υπόλοιποι (7) δεν απάντησαν καθόλου. Δεν αναγνωρίζουν ότι το γινόμενο $(x_1-x_0)f(\xi_1)$ εκφράζει το εμβαδό του πρώτου ορθογωνίου. Στο δεύτερο υποερώτημα, 6 μαθητές στους 14 απαντούν σωστά, ενώ δύο μόλις μαθητές απαντούν λάθος και οι υπόλοιποι (6) δεν απαντούν καθόλου. Στο τρίτο υποερώτημα, μόλις 3 μαθητές στους 14, δίνουν σωστή απάντηση, ενώ 5στους

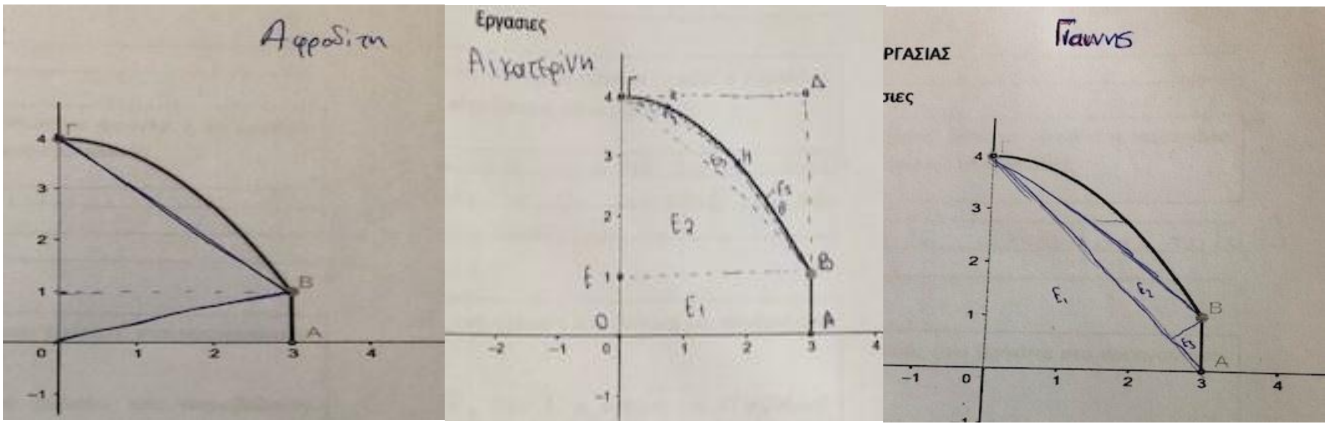
14, δίνουν λανθασμένη απάντηση και οι υπόλοιποι (6) δεν απαντούν καθόλου. Στο τέταρτο υποερώτημα, δύο στους 14, δίνουν σωστή απάντηση με μόνο έναν μαθητή να δικαιολογεί την απάντησή του, 3 στους 14 απαντούν λανθασμένα και 9 από το σύνολο των μαθητών δεν απαντούν καθόλου. Και στο τελευταίο υποερώτημα, 7 μαθητές απαντούν σωστά και οι υπόλοιποι (7) λάθος ή δε δίνουν καμία απάντηση (Σχήμα 16).



Σχήμα 17. *Οι απαντήσεις του 4ου ερωτήματος*

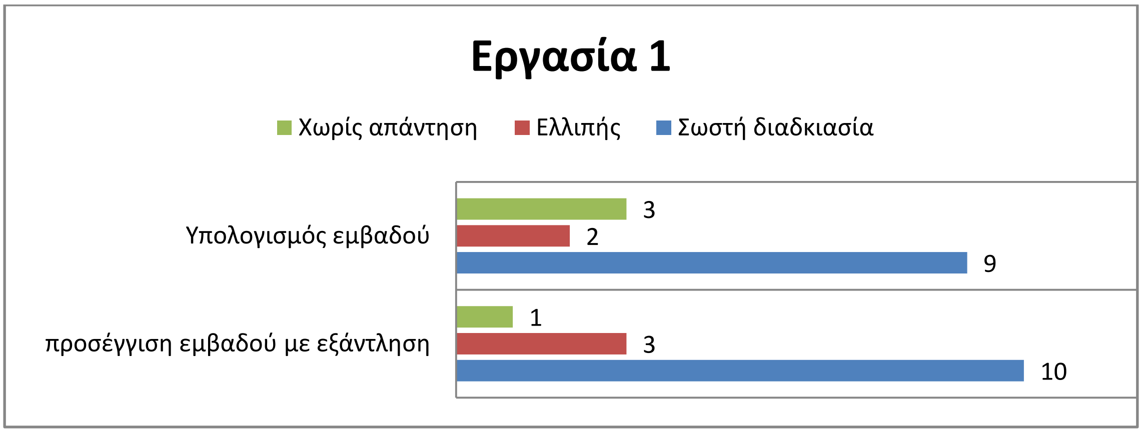
Στην τελευταία ερώτηση (4^{η}), 5 μαθητές απαντούν σωστά και οι υπόλοιποι λάθος ή καθόλου, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 17). Η πλειοψηφία των μαθητών δεν μπορούν να εκτιμήσουν την καλύτερη προσέγγιση πράγμα που δηλώνει την άγνοια της μεθόδου της εξάντλησης αλλά και του αθροίσματος Riemann. Δεν έχουν κατανοήσει την έννοια την προσέγγιση του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου ή ακόμη περισσότερο δεν μπορούν να γενικεύσουν την μέθοδο της εξάντλησης σε καμπυλόγραμμο χωρίο.

Για το φύλλο εργασίας που πραγματοποιήθηκε σε μια διδακτική ώρα παρατηρούνται τα εξής: Σχεδόν όλοι οι μαθητές χωρίζουν το ημιπαραβολικό χωρίο σε ένα τραπέζιο και σε ένα παραβολικό χωρίο, και συζητούν μεταξύ τους, στην τάξη, την διαδικασία της εξάντλησης στο παραβολικό χωρίο που απομένει αφού υπολογίσουν το εμβαδόν του τραπεζίου. Η Αφροδίτη, χωρίζει όπως φαίνεται στο σχήμα σε δύο τρίγωνα των οποίων τα εμβαδά τα υπολογίζει και στη συνέχεια αναφέρεται στην μέθοδο της εξάντλησης για το παραβολικό χωρίο, που ορίζεται από το τμήμα της παραβολής και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Η Αικατερίνη χωρίζει σε ένα ορθογώνιο και στη συνέχεια αναφέρεται στο παραβολικό χωρίο ΒΕΓ, για το οποίο εφαρμόζει τη μέθοδο της εξάντλησης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο Γιάννης πάλι χωρίζει σε τρία τρίγωνα, όπως φαίνεται στην εικόνα, το επίπεδο χωρίο ΟΑΒΓ και συνεχίζει τη μέθοδο της εξάντλησης στο ίδιο παραβολικό χωρίο που κατέληξαν και οι συμμαθήτριες του (εικ. 2).



Εικόνα 2 Απαντήσεις μαθητών στην Εργασία 1-Φύλλο εργασίας

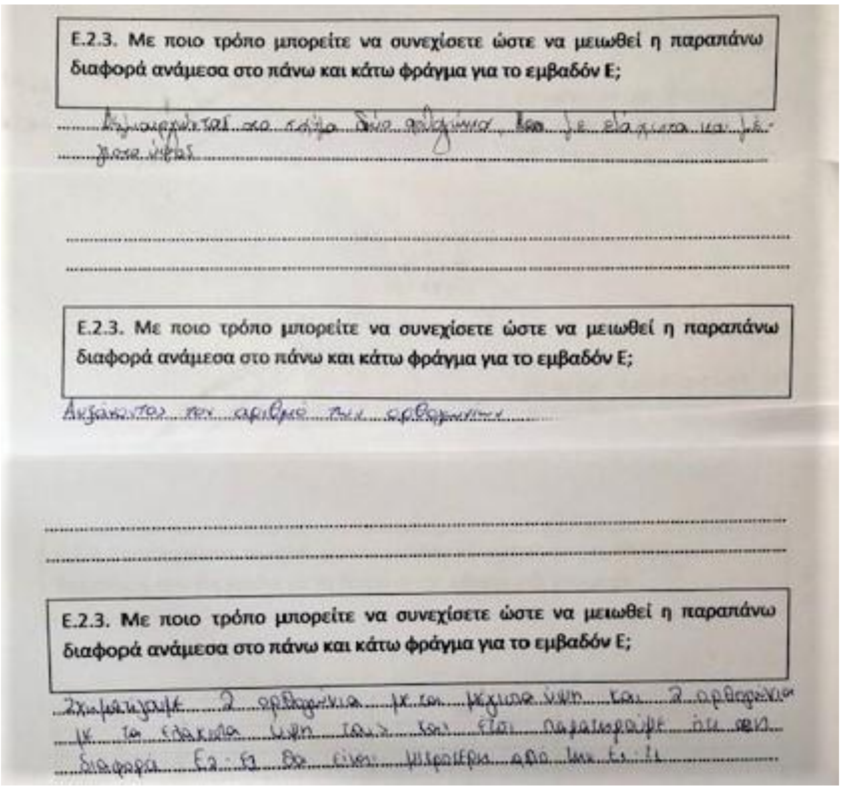
Μετά την παρέμβαση λοιπόν, οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν την μέθοδο της εξάντλησης χωρίς πολλές αποδείξεις και αυστηρότητες. Διαφαίνεται και στα πρόσωπα των μαθητών, τα οποία είναι χαμογελαστά με μάτια ορθάνοικτα εκδηλώνοντας το ενδιαφέρον τους. Όσο αφορά το υπολογιστικό κομμάτι της εργασίας 1, μόνο 4 μαθητές δεν μπορούν να υπολογίσουν με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος το εμβαδόν του χωρίου που δίνεται (Σχήμα 18). Επιβεβαιώνεται έτσι, ότι η κατανόηση του ολοκληρώματος παρουσιάζεται από τους εκπαιδευτικούς και τα σχολικά βοηθήματα ως διαδικαστική μέθοδος με περιορισμούς στην έννοια του λογισμού που αναπτύχθηκε από την έννοια του απειροελάχιστου (Tall, 1993). Συνοπτικά, από τα δεδομένα, διαφαίνεται η κατανόηση της μεθόδου της εξάντλησης από την πλειοψηφία των μαθητών. Αυτό οφείλεται και στην ιστορική αναδρομή που έγινε και ζητήθηκε ένας τρόπος προσέγγισης του εμβαδού που περικλείεται από ένα παραβολικό χωρίο και μια ευθεία. Γνωρίζοντας οι μαθητές, το αρχικό πρόβλημα που απασχόλησε τους επιστήμονες, έδειξαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τον τρόπο προσέγγισης. Διαπίστωσαν και οι ίδιοι πως δεν επιλύονταν όλα τα προβλήματα που δημιουργούνταν άμεσα. Άλλωστε το εμβαδό του παραβολικού χωρίου ξεκίνησε από τα χρόνια του Αρχιμήδη (προσέγγιση) και ολοκληρώθηκε το $19^{ο}$ αιώνα (υπολογισμός με αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις).



Σχήμα 18. Απαντήσεις 1ης εργασίας

Σε όλη τη διάρκεια της δεύτερης εργασίας παρατηρείται η αμείωτη συμμετοχή 9 μαθητών, η μερική συμμετοχή 2 μαθητών και η αδιαφορία των 3 υπολοίπων. Από τα γραπτά τους γίνεται αντιληπτό ότι ανακαλύπτουν βήμα-βήμα την έννοια του αθροίσματος Riemann αλλά και τον υπολογισμό του εμβαδού Ε που ζητείται.

Η εργασία 2 ξεκινά με την πρώτη ερώτηση που εισαγάγει την προσέγγιση με ορθογώνια. Ζητείται από τους μαθητές να βρουν δύο ορθογώνια με την ίδια βάση έτσι ώστε το ένα από αυτά να έχει μεγαλύτερο εμβαδό από το παραβολικό χωρίο ενώ το άλλο μικρότερο. Εννέα μαθητές σχηματίζουν τα ορθογώνια εύκολα και υπολογίζουν και τα εμβαδά αυτών. Προφανώς συμπληρώνουν με άνεση και την επόμενη ερώτηση υπολογίζοντας την διαφορά των δύο εμβαδών που βρήκαν. Η Δήμητρα παρατηρεί ότι η διαφορά αυτή είναι ίση με το εμβαδό του χωρίου που υπολογίσαμε στην προηγούμενη ερώτηση. Με αφορμή αυτής της παρατήρησης θα μπορούσανε να διαπιστώσουμε ότι αν από το εμβαδό του πάνω ορθογωνίου αφαιρέσουμε το εμβαδό του ημιπαραβολικού χωρίου βρίσκονται 3τ.μονάδες, όσο και το εμβαδό του κάτω ορθογωνίου. Η Αφροδίτη παίρνοντας το λόγο αναφέρει πως η διαφορά ανάμεσα στα δύο εμβαδά είναι πολύ μεγάλη. Με αφορμή αυτού, τίθεται ερώτηση προς όλη την τάξη σχετικά με το ποια διαφορά θα ήταν ικανοποιητική. Ο Νίκος ισχυρίζεται πως θα πρέπει η διαφορά να γίνει μικρή. Η Ανδρομάχη αναφέρει με ενθουσιασμό πως όσο πιο μικρή είναι η διαφορά, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση. Συνεχίζοντας στο ερώτημα Ε.2.3, ζητείται ο τρόπος με τον οποίο θα επιτευχθούν όσα προαναφέρθηκαν. Η Δήμητρα γράφει χαρακτηριστικά στο φύλλο εργασίας της: «Δημιουργούμε στο σχήμα δύο ορθογώνια με ελάχιστο και μέγιστο ύψος», η Ανδρομάχη πιο γενικά αναφέρει: «αυξάνοντας τον αριθμό των ορθογωνίων» και η Αικατερίνη ισχυρίζεται: «Σχηματίζουμε 2 ορθογώνια με τα μέγιστα ύψη και 2 ορθογώνια με τα ελάχιστα ύψη και έτσι παρατηρούμε ότι η διαφορά E_2-$ε_2$θα είναι μικρότερη από την E_1-$ε_1$» (Εικόνα 3).

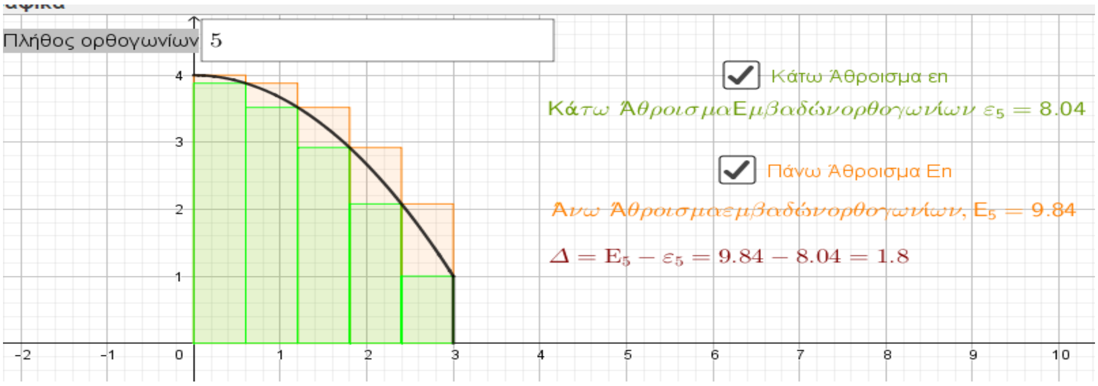

Ε.2.3. Με ποιο τρόπο μπορείτε να συνεχίσετε ώστε να μειωθεί η παραπάνω διαφορά ανάμεσα στο πάνω και κάτω φράγμα για το εμβαδόν Ε;

Ε.2.3. Με ποιο τρόπο μπορείτε να συνεχίσετε ώστε να μειωθεί η παραπάνω διαφορά ανάμεσα στο πάνω και κάτω φράγμα για το εμβαδόν Ε;

Ε.2.3. Με ποιο τρόπο μπορείτε να συνεχίσετε ώστε να μειωθεί η παραπάνω διαφορά ανάμεσα στο πάνω και κάτω φράγμα για το εμβαδόν Ε;

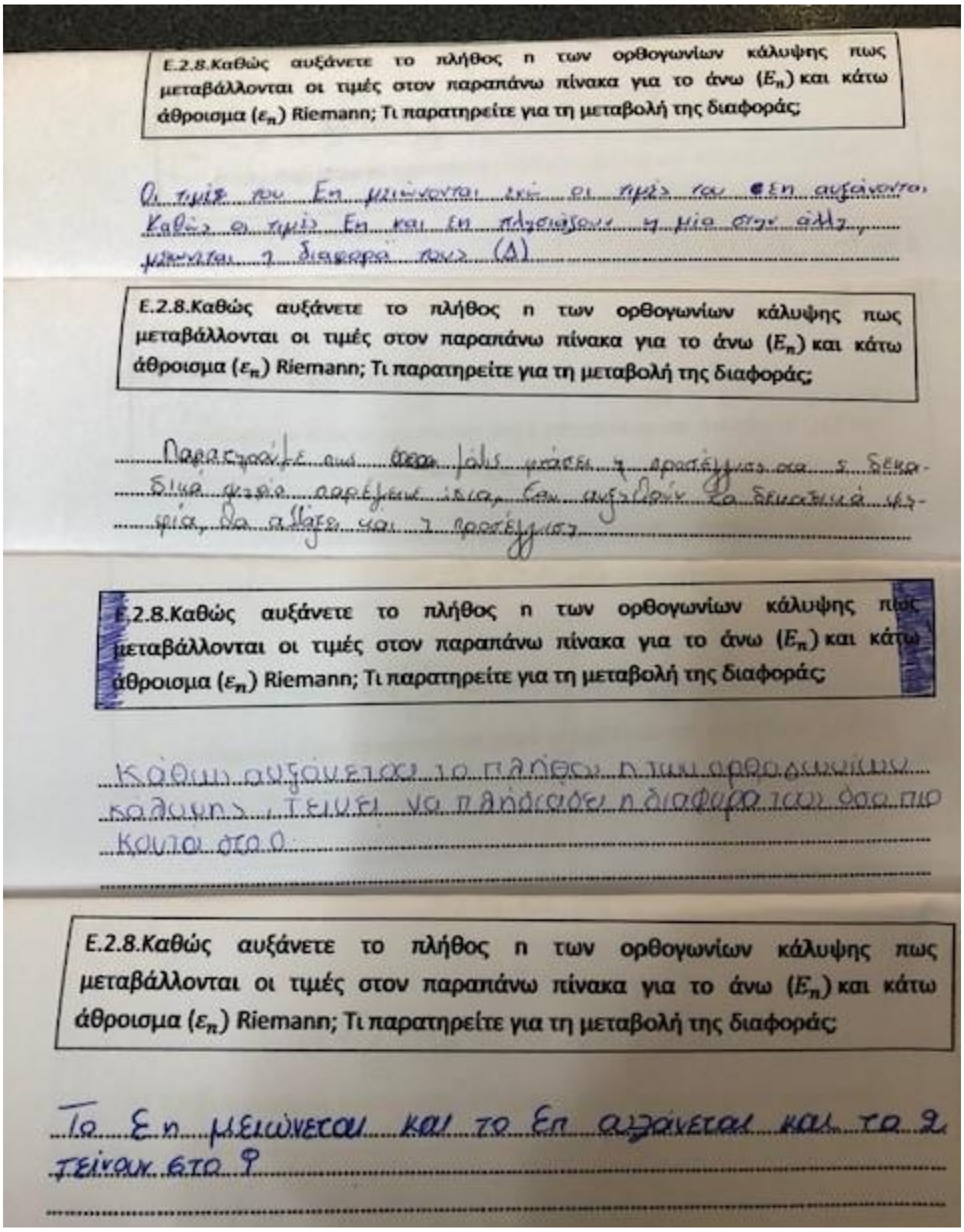
Εικόνα 3: Απαντήσεις μαθητών στην Ε2.3 Εργασίας 2

Συνεχίζοντας τη διαδικασία οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν ότι όσα περισσότερα ορθογώνια χρησιμοποιούνται, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση που αναζητείται. Έτσι τα επόμενα ερωτήματα δεν δυσκολεύονται να τα απαντήσουν. Οι απαντήσεις των ερωτήσεων Ε.2.6. και Ε.2.7 της εργασίας 2 συμπληρώθηκαν με τη βοήθεια του λογισμικού geogebra (σχήμα 19) και τη συμμετοχή των μαθητών (Οι μαθητές καθοδηγούσαν τον εκπαιδευτικό για την τιμή που θα πρέπει να βάλουμε στο πλήθος των ορθογωνίων). Κατά την συμπλήρωση του πίνακα όταν το n γίνεται πολύ μεγάλο και συγκεκριμένα στις δύο τελευταίες γραμμές τα E_n, ε_n και Δ γίνονται ίσα. Η ερώτηση της Βασιλικής είναι: «Οπότε, όσο και να συνεχίσουμε να αυξάνουμε το πλήθος n των ορθογωνίων κάλυψης θα βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τα αθροίσματα και άρα το Δ δεν θα μικραίνει άλλο;» Η Δήμητρα παίρνοντας το λόγο λέει πως δεν είναι λογικό αυτό, αφού μέχρι τώρα είδαμε ότι όσο αυξανόταν το πλήθος κάλυψης των ορθογωνίων η διαφορά ελαττωνόταν. Η εξήγηση που δόθηκε είναι ότι το λογισμικό είχε κάνει τους υπολογισμούς με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων γι' αυτό και η ισότητα που παρατηρήθηκε.



Σχήμα 19. *Βοηθητικό αρχείο geogebra για την εργασία 2*

Στην ερώτηση Ε.2.8 και οι 9 μαθητές παρατηρούν εύκολα ότι τα αθροίσματα τείνουν στο 9 και η διαφορά στο 0. Οι απαντήσεις τους είναι όλες στο ίδιο μοτίβο (εικόνα 4).



E.2.8.Καθώς αυξάνετε το πλήθος n των ορθογωνίων κάλυψης πως μεταβάλλονται οι τιμές στον παραπάνω πίνακα για το άνω (E_n) και κάτω άθροισμα (ε_n) Riemann; Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή της διαφοράς;

Οι τιμές του Εn μειώνονται ενώ οι τιμές του εn αυξάνονται. Καθώς οι τιμές Εn και εn πλησιάζουν η μία στην άλλη, μειώνεται η διαφορά τους (Δ)

E.2.8.Καθώς αυξάνετε το πλήθος n των ορθογωνίων κάλυψης πως μεταβάλλονται οι τιμές στον παραπάνω πίνακα για το άνω (E_n) και κάτω άθροισμα (ε_n) Riemann; Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή της διαφοράς;

Παρατηρούμε ότι όσο μόλις μικραίνει η προσέγγιση στα 5 δεκαδικά ψηφία παραμένουν ίδια, εάν αυξηθούν τα δεκαδικά ψηφία, θα αλλάξει και η προσέγγιση

E.2.8.Καθώς αυξάνετε το πλήθος n των ορθογωνίων κάλυψης πως μεταβάλλονται οι τιμές στον παραπάνω πίνακα για το άνω (E_n) και κάτω άθροισμα (ε_n) Riemann; Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή της διαφοράς;

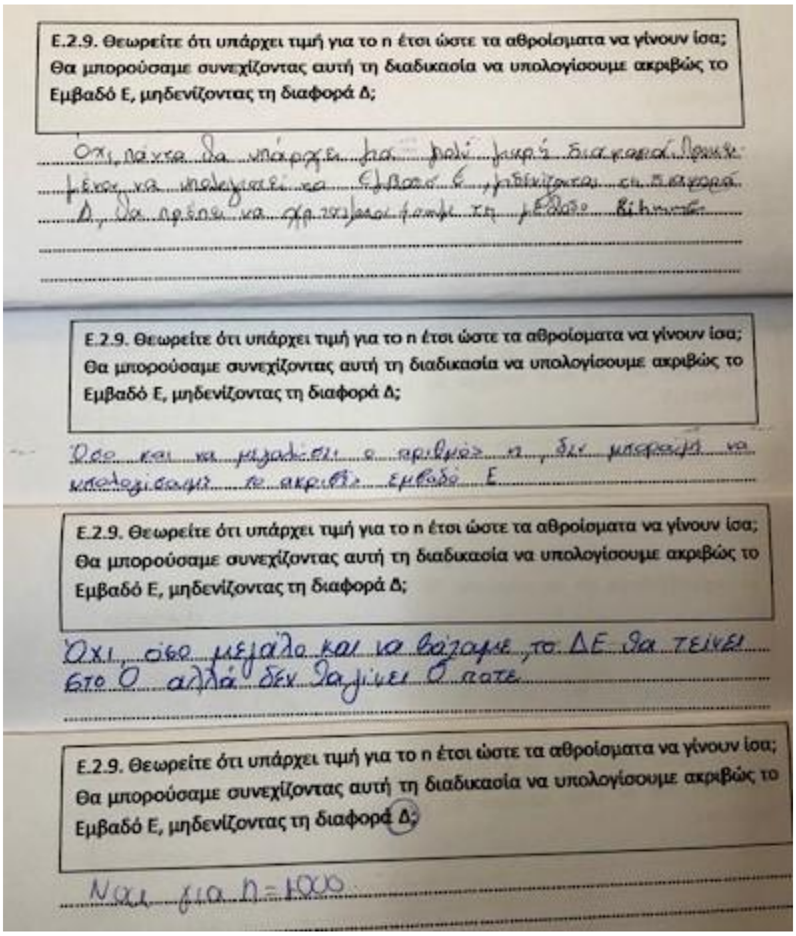
Καθώς αυξάνεται το πλήθος n των ορθογωνίων κάλυψης, τείνει να πλησιάσει η διαφορά τους όσο πιο κοντά στο 0

E.2.8.Καθώς αυξάνετε το πλήθος n των ορθογωνίων κάλυψης πως μεταβάλλονται οι τιμές στον παραπάνω πίνακα για το άνω (E_n) και κάτω άθροισμα (ε_n) Riemann; Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή της διαφοράς;

Το Εn μειώνεται και το εn αυξάνεται και τα 2 τείνουν στο 9

Εικόνα 4*Απαντήσεις στην 2.8 ερώτηση της εργασίας 2*

Για το αν υπάρχει τιμή του n για την οποία μπορεί τα αθροίσματα να είναι ίσα οι 8 μαθητές απαντούν σωστά ότι δεν θα υπολογιστεί ποτέ με ακρίβεια το εμβαδό παρά μόνο θα προσεγγίζεται κάθε φορά που αυξάνεται το nακριβέστερα. Η Μαρία μόνο επηρεασμένη από τον πίνακα ισχυρίζεται ότι για n =1000 θα μηδενιστεί η διαφορά. (Εικόνα 5). Βέβαια οι 5 μαθητές συνεχίζουν να είναι αδιάφοροι παρά τις προσπάθειες που γίνονται για την συμμετοχή τους.



Ε.2.9. Θεωρείτε ότι υπάρχει τιμή για το n έτσι ώστε τα αθροίσματα να γίνουν ίσα; Θα μπορούσαμε συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία να υπολογίσουμε ακριβώς το Εμβαδό Ε, μηδενίζοντας τη διαφορά Δ;

Όχι, πάντα θα υπάρχει μια πολύ μικρή διαφορά. Προκειμένου να υπολογίσει το Εμβαδό Ε, μηδενίζοντας τη διαφορά Δ, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο [illegible]

Ε.2.9. Θεωρείτε ότι υπάρχει τιμή για το n έτσι ώστε τα αθροίσματα να γίνουν ίσα; Θα μπορούσαμε συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία να υπολογίσουμε ακριβώς το Εμβαδό Ε, μηδενίζοντας τη διαφορά Δ;

Όσο και να μεγαλώσει ο αριθμός n, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ακριβές εμβαδό Ε

Ε.2.9. Θεωρείτε ότι υπάρχει τιμή για το n έτσι ώστε τα αθροίσματα να γίνουν ίσα; Θα μπορούσαμε συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία να υπολογίσουμε ακριβώς το Εμβαδό Ε, μηδενίζοντας τη διαφορά Δ;

Όχι, όσο μεγάλο και να βάλουμε, το ΔΕ θα τείνει στο 0 αλλά δεν θα γίνει 0 ποτέ

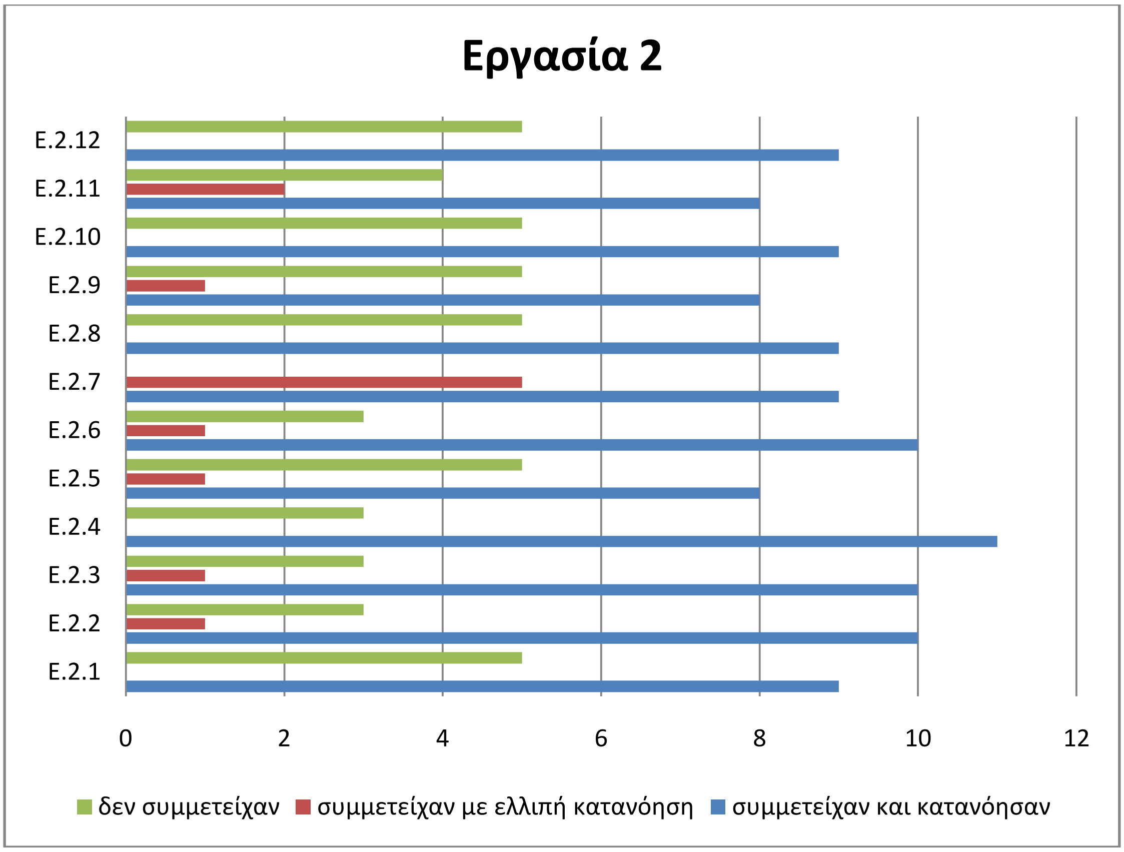
Ε.2.9. Θεωρείτε ότι υπάρχει τιμή για το n έτσι ώστε τα αθροίσματα να γίνουν ίσα; Θα μπορούσαμε συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία να υπολογίσουμε ακριβώς το Εμβαδό Ε, μηδενίζοντας τη διαφορά Δ;

Ναι για n=1000

Εικόνα 5: Απαντήσεις στην ερώτηση 2.9

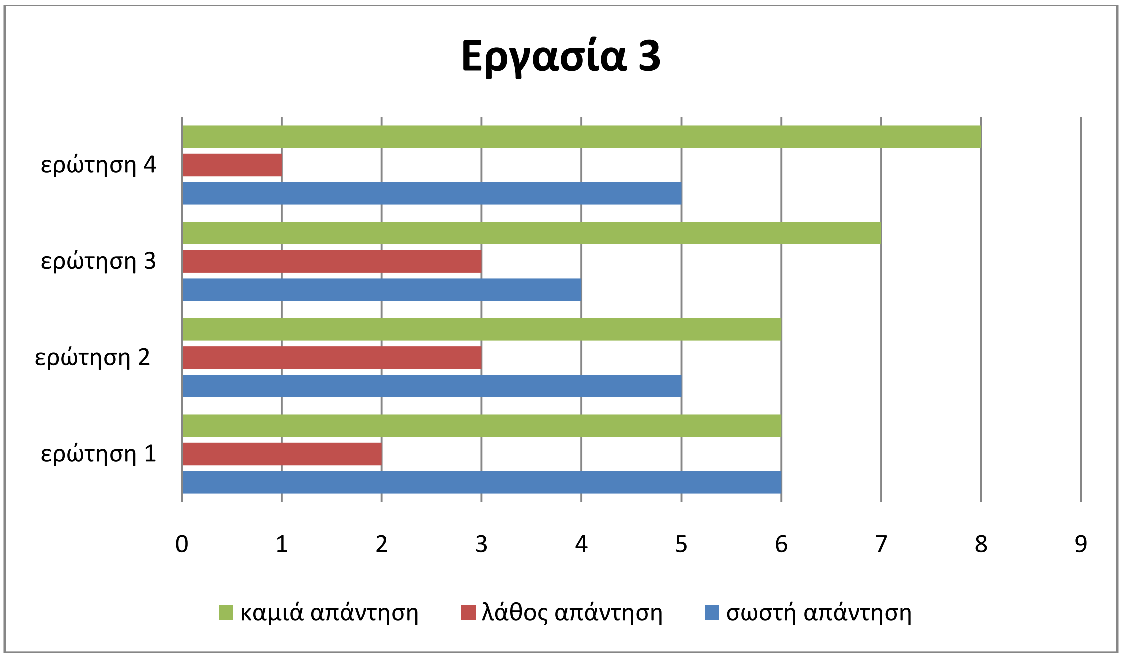
Στην ερώτηση 2.10 συμφωνούν όλοι οι συμμετέχοντες ότι η όλη διαδικασία μέχρι τώρα μπορεί να αποτελέσει μια προσέγγιση του εμβαδού αλλά όχι υπολογισμού. Μάλιστα ο Γιάννης δικαιολογεί την απόφαση αυτή με τον αρχικό υπολογισμό του ολοκληρώματος, ο οποίος έγινε στην εργασία 1.

Στην ερώτηση 2.11,και οι 9 μαθητές συμπληρώνουν με άνεση την σωστή απάντηση λόγω των συζητήσεων που έγιναν στις προηγούμενες ερωτήσεις. Έτσι στην ερώτηση 2.12 πέρα από το κριτήριο παρεμβολής που κάνουν χρήση ορίζουν και το εμβαδόν του χωρίου με το όριο του αθροίσματος Riemann (Σχήμα 20).



Σχήμα 20. *Συγκεντρωτικά αποτελέσματα Εργασία 2*

Στην τρίτη εργασία και συγκεκριμένα στην πρώτη ερώτηση, 6 μαθητές στους 14 δεν ασχολήθηκαν καθόλου ενώ από τους υπόλοιπους 8, απαντούν σωστά οι 6 για το πρόσημο του αθροίσματος και δύο λάθος, αφού αναγράφουν: $\int_0^4 f(x)dx = 0$. Στη δεύτερη ερώτηση, 3 στους 8 που ασχολήθηκαν φαίνεται να μην κατανοούν την σχέση διάταξης που δίνεται και δίνουν λάθος απάντηση. Συνολικά οι 5 στους 14 μαθητές δίνουν σωστή απάντηση.



Σχήμα 21. *Απαντήσεις στην εργασία 3-Φύλλο εργασίας*

Στην τρίτη ερώτηση οι περισσότεροι μαθητές απαντούν λάθος ή δεν απαντούν καθόλου. Μόνο 4 μαθητές απαντούν σωστά με τις εξής δικαιολογήσεις:

- η Κατερίνα γράφει: «κατά μέτρο είναι ίσα αλλά το $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ θα είναι αρνητικό και το Ε θα είναι θετικό»
- ο Γιάννης: « αντίθετοι αριθμοί»
- ο Νίκος: «$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = -E(\Omega)$»
- η Ανδρομάχη: «$\int_{\alpha}^{b} g(x)dx = |E|$»
- η Μαρία: « το ολοκλήρωμα και το Ε, $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = E(\Omega)$».
- η Βασιλική: «το Ε είναι θετικός αριθμός ενώ το $\int_{\alpha}^{b} g(x)dx$ αρνητικός, με ίσες απόλυτες τιμές».

Για την τέταρτη ερώτηση της 3^{ης} εργασίας σωστά απαντούν οι 5 μαθητές, ένας λανθασμένα και οι υπόλοιποι δεν δίνουν απάντηση. Οι απαντήσεις αναλυτικά είναι:

- η Μαρία γράφει: «$\int_0^4 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx - \int_2^4 g(x)dx$»
- ο Γιάννης: « 0, Ε=2 $\int_0^2 g(x)dx$»
- η Κατερίνα: «$\int_0^4 g(x)dx = 0, \quad E = E_1 + E_2 = 2E_1 = 2 \cdot 4$=8τ.μ.»

- ο Νίκος: «$\int_0^4 g(x)dx = 0$, Ε(Ω)= $\int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 -g(x)dx$».
- η Αφροδίτη : « θα είναι μηδέν».

Στην τελευταία εργασία που αναφέρεται σε πραγματικό πρόβλημα οι 7 στους 14 ασχολούνται με το πρόβλημα με 5 τελικά να καταφέρνουν να λύσουν το πρόβλημα ενώ οι δύο συμπληρώνουν τα μισά. Οι υπόλοιποι 7 δεν ασχολούνται καθόλου με το πρόβλημα. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι το πρόβλημα συζητήθηκε λίγο μέσα στη τάξη διότι «χτύπησε» το κουδούνι και ήταν η ώρα του διαλείμματος. Μέσα στη τάξη γίνεται διάλογος και τα παιδιά είναι ελεύθερα να εκφράσουν απορίες. Το πρόβλημα πάντα δυσαρεστεί τους μαθητές, πράγμα που επισημαίνεται και στις διάφορες έρευνες.

4.3. Ανάλυση του Ερωτηματολογίου

Στην πρώτη ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να καταγράψουν τα συναισθήματα που τους διακατείχαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Τα κυρίαρχα αισθήματα των μαθητών ήταν: ευχαρίστηση, ενθουσιασμός, καλή διάθεση, αλλά και απογοήτευση. Μόνο ένας μαθητής γράφει απογοήτευση και είναι ένας απ’ αυτούς που δεν μπόρεσαν να παρακολουθήσουν τη διαδικασία όλη. Οι υπόλοιποι δηλώνουν: «ωραία, ευχάριστα, ήταν ενδιαφέρον, πολύ καλά και ευδιάθετα». Στη δεύτερη ερώτηση αν είναι ευχαριστημένος από τη διδακτική παρέμβαση, οι 6 μαθητές δηλώνουν πως είναι απλά ευχαριστημένοι, 5 πως είναι αρκετά ευχαριστημένοι και 2 πάρα πολύ (ενθουσιασμένοι θα λέγαμε) και ένας δεν είναι ευχαριστημένος. Όταν ρωτήθηκε τι θα μπορούσε να του αλλάξει αυτή τη διάθεση είπε πως ο όγκος των πληροφοριών ήταν δυσανάλογος του χρόνου που διήρκησε η παρέμβαση. Στην τρίτη ερώτηση που διαπιστώνεται η σχέση των μαθητών με την ιστορία των μαθηματικών ελάχιστοι μαθητές γνωρίζουν Μαθηματικούς από το παρελθόν. Μόνο 4 μαθητές κάνουν χρήση το όνομα του Πυθαγόρα και του Πυθαγορείου θεωρήματος, ενώ ένα μόνο αναφέρει ότι σήμερα γνώρισε τον Αρχιμήδη. Επίσης από μαθητή γίνεται και η αναφορά του Fermat. Οι υπόλοιποι 8 μαθητές δεν αναφέρουν κανένα προγενέστερο μαθηματικό. Στην τέταρτη ερώτηση ζητείται η γνώμη των μαθητών για την ενσωμάτωση της ιστορίας στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών. Οι 12 στους 14 συμφωνούν στη χρήση της ιστορίας, ενώ μόλις δύο αρνούνται τον τρόπο προσέγγισης των εννοιών με τη βοήθεια της ιστορίας. Χαρακτηριστικά η Κατερίνα γράφει πως «θα ήταν πολύ ενδιαφέρον και θα έκανε το μάθημα πολύ πιο ωραίο», άποψη την οποία υποστηρίζουν ένθερμα και άλλοι πέντε μαθητές. Ένας μαθητής δηλώνει πως είναι θετικός στη χρήση της ιστορίας αρκεί να έχει μικρή διάρκεια η ιστορική αναδρομή. Στη συνέχεια η μέθοδος του Αρχιμήδη φαίνεται ενδιαφέρον στα μάτια όλων των παιδιών πλην όμως κουραστική και χρονοβόρα για μερικά απ' αυτά. Το σίγουρο είναι πως θεωρείται ενδιαφέρον για την πλειονότητα των μαθητών. Για όλους τους μαθητές ήταν άγνωστο το ότι ο Αρχιμήδης προσέγγισε με αυτόν τον τρόπο το εμβαδό του παραβολικού χωρίου. Τέσσερις μαθητές δεν βοηθήθηκαν από τη μέθοδο της εξάντλησης για την κατανόηση της προσέγγισης του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου (τρείς από αυτούς δεν συμμετείχαν καθόλου στην όλη διαδικασία). Για τους υπόλοιπους ήταν αρκετά βοηθητική η διαδικασία για την εμπέδωση του τρόπου προσέγγισης του εμβαδού παραβολικού χωρίου. Όλοι συμφωνούν στον επικουρικό ρόλο που διαδραμάτισε η μέθοδος της εξάντλησης στους μετέπειτα επιστήμονες για τα άνω και κάτω αθροίσματα των ορθογωνίων.

Ως προς την επιλογή τους, για τον τρόπο προσέγγισης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, προτιμούν τα αθροίσματα Riemann, οι μισοί μαθητές ενώ οι άλλοι μισοί δεν απαντούν καθόλου ή δεν έχουν καταλάβει την ερώτηση. Η επίλυση ενός πραγματικού προβλήματος με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος ενθουσίασε τους περισσότερους μαθητές, με την εξαίρεση δύο μαθητών, οι οποίοι δηλώνουν λίγο ευχαριστημένοι αλλά και μπερδεμένοι ταυτόχρονα. Το σύνολο των μαθητών της τάξης απαντώντας στο προτελευταίο ερώτημα προτιμά να συμπεριλαμβάνονται προβλήματα καθημερινότητας στις εργασίες-ασκήσεις, θεωρώντας πως μ' αυτόν τον τρόπο γίνεται πιο ενδιαφέρον το μάθημα αλλά και πρωτότυπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1. Συμπεράσματα-Συζητήσεις

Στην έρευνα αυτή διερευνήθηκε πως η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και ποια η συμβολή των ιστορικών προβλημάτων στην εννοιολογική κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα εξετάστηκε αν οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου προσανατολισμού θετικών σπουδών, οικονομίας και πληροφορικής μπορούν να συνδέσουν την ιστορική αναδρομή με την κατανόηση της έννοιας του αθροίσματος Riemann και στη συνέχεια του ορισμένου ολοκληρώματος.

Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας διαπιστώνεται από το πρώτο ερώτημα, του ερωτηματολογίου που μοιράστηκε, πως όλοι οι μαθητές στην αρχή δεν αποδίδουν σωστά τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος παρόλο που τον έχουν διδαχθεί σύμφωνα με τις οδηγίες του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών. Συγκεκριμένα οι 9 στους 14 μαθητές δεν δίνουν κανένα ορισμό και οι υπόλοιποι συγχέουν τον ορισμό με το εμβαδό του χωρίου ή δίνουν λάθος απάντηση. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουν στην έρευνά τους και οι Rasslan και Tall(Rasslan&Tall, 2002). Στο δεύτερο ερώτημα για τους 11 από τους 14 είναι άγνωστη η μέθοδος της εξάντλησης του Αρχιμήδη, η οποία θεωρείται από πολλούς ιστορικούς ο θεμέλιος λίθος του απειροστικού λογισμού. Μόνο 3 μαθητές γνωρίζουν ή τουλάχιστον έχουν ακούσει για τη συγκεκριμένη μέθοδο. Στο τρίτο ερώτημα οι μισοί από τους μαθητές δεν αναγνωρίζουν τι παριστάνει το γινόμενο $(x_1 - x_0) \cdot f(\xi_1)$ σε σχήμα που υπάρχει ήδη στο σχολικό βιβλίο, ενώ οι υπόλοιποι απαντούν σωστά. Στο ερώτημα αν μπορούν να βρουν το πλήθος των ίσων υποδιαστημάτων στα οποία είναι χωρισμένο το σχήμα που τους δόθηκε οι 6 μαθητές βρίσκουν σωστά το πλήθος, άλλοι τόσοι δεν δίνουν απάντηση, ενώ δύο απαντούν λάθος. Επιπροσθέτως 3 από τους μαθητές απαντούν σωστά επειδή έχουν κατανοήσει το άθροισμα Riemann, 6 δεν απαντούν και 5 δίνουν λανθασμένη απάντηση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι 2 στους 14 μαθητές κατανοούν τον διαχωρισμό ανάμεσα στο ορισμένο ολοκλήρωμα και το εμβαδόν του χωρίου, 3 απαντούν λάθος και 9 δεν δίνουν καμία απάντηση. Κλείνοντας την τρίτη ερώτηση και αφού βασίστηκαν στο δοσμένο σχήμα 7 μαθητές δίνουν σωστή απάντηση για το πρόσημο του ορισμένου ολοκληρώματος. Από τους 7 οι 5 μόνο αιτιολογούν την άποψή τους ενώ οι δύο αδυνατούν να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Οι 3 απαντούν λανθασμένα και 4 δεν απαντούν καθόλου. Τέλος στο τέταρτο ερώτημα που αφορά την επιλογή της καλύτερης προσέγγισης του εμβαδού ενός χωρίου 5 μαθητές διαλέγουν και αιτιολογούν σωστά, 6 δεν απαντούν κάτι ενώ 3 δίνουν εσφαλμένη απάντηση. Συμπερασματικά από το ερωτηματολόγιο που μοιράστηκε, αρχικά διαπιστώνεται πως το σύνολο των μαθητών δεν έχει κατανοήσει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος καθώς και τη χρήση του σε άλλες επιστημονικές εφαρμογές. Για τη μέθοδο της εξάντλησης, ενώ γίνεται αναφορά στο σχολικό βιβλίο στο τέλος του 3^{ου} κεφαλαίου οι περισσότεροι μαθητές δηλώνουν άγνοια. Επίσης, γίνεται αντιληπτό ότι η πλειονότητα των μαθητών δεν έχουν εμπεδώσει την έννοια του αθροίσματος Riemann όπως και το ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν παριστάνει πάντοτε εμβαδόν χωρίου. Τέλος, η πλειοψηφία των μαθητών δεν μπορεί να εκτιμήσει την καλύτερη προσέγγιση του εμβαδού ενός καμπυλόγραμμου χωρίου πράγμα που δηλώνει την άγνοια της μεθόδου της εξάντλησης.

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα: «Σε ποιο βαθμό η γνώση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να συμβάλλει στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα στην κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος» κατά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον στην ιστορική προσέγγιση που αφορούσε τη μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδη. Με σχετική ευκολία οι περισσότεροι από τους μαθητές ανακάλυψαν τον σωστό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος που τους δόθηκε στη συνέχεια. Εφάρμοσαν τη μέθοδο και προσέγγισαν το εμβαδόν του ζητούμενου παραβολικού χωρίου. Στηριζόμενοι σ' αυτό, βιωματικά, ανακάλυψαν τα αθροίσματα Riemann βήμα-βήμα. Ξεκίνησαν την προσέγγιση του εμβαδού με ένα άνω και κάτω ορθογώνιο όπου διαπίστωσαν μεγάλη απόκλιση από την πραγματική τιμή του εμβαδού. Στην ερώτηση πώς θα επιτευχθεί μικρότερη απόκλιση οι υποκείμενοι απάντησαν με την αύξηση του πλήθους των ορθογωνίων. Κατανόησαν ότι με πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων δε θα μπορούσαν να υπολογίσουν την πραγματική τιμή του εμβαδού παρά μόνο ότι θα ελαχιστοποιούσαν την απόκλιση. Στο τέλος παρατήρησαν ότι ο μόνος τρόπος για να υπολογιστεί το εμβαδόν ήταν να κάνουν χρήση του ορίου για τα αθροίσματα των άνω και κάτω ορθογωνίων. Έτσι κατέληξαν στον ορισμό του εμβαδού που δεν είναι τίποτα άλλο από το όριο των αθροισμάτων Riemann. Παροτρύνοντας τους μαθητές να αναλάβουν το ρόλο του ερευνητή το ενδιαφέρον τους αυξήθηκε με αποτέλεσμα να ακολουθήσουν τη διαδρομή και όχι την έννοια (Grugnetti & Rogers, 2000). Από την εμπειρία των εκπαιδευτικών στην τάξη, ειδικά στην εισαγωγή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, μέσω των αθροισμάτων Riemann ακολουθώντας το σχολικό βοήθημα, διαπιστώνεται η σύγχυση των μαθητών, η δυσαρέσκειά τους, αφού δεν καταλαβαίνουν και η αδιαφορία τους. Οι διδάσκοντες είναι επιφορτισμένοι με την διδακτέα ύλη, αφού επιβάλλεται να την εξαντλήσουν σε αυστηρά χρονικά περιθώρια. Αποτέλεσμα αυτού είναι η προσκόλλησή τους στη ροή του σχολικού βιβλίου χωρίς καμία αναφορά στα ιστορικά σημειώματα που παρατίθενται στην αρχή ή το τέλος του εκάστοτε κεφαλαίου. Έτσι πολλοί εκπαιδευτικοί δεν ασχολούνται, σκοπίμως, με τη διδασκαλία της έννοιας αφού τη θεωρούν δύσκολη, ακατανόητη και ένα θέμα που δεν πρόκειται να ζητηθεί στις πανελλήνιες εξετάσεις. Αρκούνται, όχι άδικα, στην εμπέδωση του διαδικαστικού τρόπου υπολογισμού δίχως να ενδιαφέρονται για την κατανόηση της έννοιας. Τελειώνοντας την παρέμβαση τέσσερις μαθήτριες σχολίασαν με μεγάλο ενθουσιασμό την ομορφιά των μαθηματικών που βίωσαν και ότι θα επιθυμούσαν να ενσωματώνονταν στη διδασκαλία σύντομες ιστορικές αναδρομές για την πληρέστερη κατανόηση των εννοιών. Ακριβώς, όπως προτάσσει η Menghini (Barbin & Menghini, 2000) να ενσωματωθεί η ιστορία στη διδακτέα ύλη για την καλύτερη αποσαφήνιση των μαθηματικών εννοιών. Η ικανοποίηση ήταν μεγάλη καθώς μεγάλο ποσοστό μαθητών έμεινε ευχαριστημένο και πάνω από όλα κατανόησε πολλά περισσότερα από αυτά που είχε μάθει μέχρι τώρα. Δικαιώνονται τα επιχειρήματα του Liu(Liu, 2003), ο οποίος υποστηρίζει ότι μέσω της ιστορίας των μαθηματικών αυξάνεται το κίνητρο καθώς καλλιεργείται και μια θετική στάση απέναντι στη μάθηση από τους διδασκόμενους. Ακόμη υποστηρίζει πως αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη, εξηγούνται καλύτερα κάποιες δυσκολίες των μαθηματικών, αλλά και δίνεται η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να αποκτήσουν έναν καλό οδηγό για την διδασκαλία τους. Η μάθηση άλλοτε πραγματοποιείται με μικρά συνεχή βήματα και άλλοτε με άλματα με αποτέλεσμα να χαρακτηρίζεται ως μη ομοιόμορφη συνεχής διαδικασία. Ό,τι άλματα έκαναν οι επιστήμονες για την εξέλιξη της επιστήμης τα ίδια θα πρέπει να κάνουν και οι μαθητές (Παναγιώτου, 2002). Ο ενθουσιασμός γίνεται ακόμη μεγαλύτερος όταν επιλύονται προβλήματα της καθημερινότητας προσδίδοντας στα μαθηματικά πιο ανθρώπινο πρόσωπο.

Κατά τον Brousseau (2006) παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών παρουσιάζονται λόγω τριών τύπων εμποδίων : α) γενετικά- ψυχολογικά, β) επιστημολογικά και γ) διδακτικά. Με τον ενθουσιασμό και την γενικότερη ικανοποίησή των μαθητών από την ιστορική αναδρομή που έγινε στην αρχή της διδακτικής παρέμβασης αλλά και με την χρήση αρκετών εικόνων-αναπαραστάσεων (με τη βοήθεια λογισμικών) κατά την διδασκαλία της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και με τον καθοδηγητικό ρόλο του εκπαιδευτικού στην τάξη τα παραπάνω εμπόδια ξεπεράστηκαν σε μεγάλο βαθμό. Οι παρανοήσεις των μαθητών που είχαν ήδη παρουσιαστεί διευκρινίστηκαν όπως και τα λάθη που δημιουργήθηκαν διορθώθηκαν.

Επειδή το δείγμα της έρευνας αυτής είναι μικρό, 14 μαθητές της Γ Λυκείου, δεν θεωρείται αντιπροσωπευτικό αν και αποτελείται από μαθητές και των δύο κατευθύνσεων και με διακυμάνσεις στην επίδοσή τους. Με την έρευνα αυτή η συμβολή της ιστορίας θεωρείται ότι διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές και συντελεί, ως ένα μικρό λιθαράκι, στην εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών στο εκπαιδευτικό σύστημα. Ο βαθμός με τον οποίο συμβάλει η ιστορία στην κατανόηση των εννοιών είναι ικανοποιητικός δεδομένου ότι σε μια παράγραφο του σχολικού βιβλίου που θεωρείται ότι περιέχει από τις δυσκολότερες έννοιες όσο αναφορά την κατανόησή της από τους μαθητές με την παρέμβασή επετεύχθη το κέντρισμα του ενδιαφέροντος των μισών μαθητών. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, το ενδιαφέρον αυτό παρέμεινε αμείωτο και μάλιστα αυξήθηκε η συμμετοχή τους κατά περίπου 20%. Αξιοσημείωτο είναι πως το 70% των μαθητών, σχεδόν από την αρχή της διδακτικής παρέμβασης, συμμετέχουν ενεργά μέχρι το πέρας αυτής. Να σημειωθεί επιπλέον ότι οι μαθητές κατά πλειονότητα έφυγαν χαρούμενοι χωρίς δυσαρέσκειες ή γκρίνιες.

Επίσης το πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής (μέθοδος εξάντλησης) καθώς και το πρόβλημα προσέγγισης του εμβαδού του ημιπαραβολικού χωρίου που δόθηκε συνέβαλαν τόσο στην ανακάλυψη των αθροισμάτων όσο και στην κατανόηση αυτών από τους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.1. Δυσκολίες στην εκπόνηση της έρευνας

Το κυριότερο εμπόδιο που αντιμετωπίστηκε στην έρευνα αυτή είναι το μέγεθος του δείγματος, το οποίο είναι μικρό (14 μαθητές) σχετικά με το αναμενόμενο. Το πλήθος των μαθητών και των δύο κατευθύνσεων ήταν 35. Γνωρίζουμε όμως ότι η Γ' Λυκείου είναι η πλέον ακριβοθώρητη τάξη από την έναρξη των σχολείων μετά το Πάσχα και μέχρι τις Πανελλήνιες εξετάσεις. Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τον ίδιο τους τον εαυτό, με το άγχος που τους κατακλύζει στην προσπάθειά τους να πετύχουν την εισαγωγή τους σε ένα Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα. Θεωρούν χάσιμο χρόνο, δεν έχουν να κερδίσουν τίποτα για την επίτευξη του στόχου τους, σε οποιαδήποτε νέα καινοτομία που θα τους ανακοινωθεί ή στην παρακολούθηση κάποιων παρεμβάσεων. Οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης που ίσως τους παρουσιαστούν δε θα μπορέσουν να απορροφηθούν αν δεν είναι ίδιοι με αυτούς που γνωρίζουν. Ωστόσο, το θετικό με το δείγμα όπως προαναφέρθηκε είναι το γεγονός ότι αποτελούνταν από μαθητές όλων των επιδόσεων και το σημαντικότερο, δε θεώρησαν ότι έχασαν χρόνο ούτε όμως και δεν κατανόησαν και τίποτα. Δεύτερο εμπόδιο αποτέλεσε η έλλειψη χρόνου. Θα ήταν ενδεχομένως πιο αποτελεσματικό, η συγκεκριμένη παρέμβαση να διαρκέσει 4 ώρες για να επιτευχθεί καλύτερα και λεπτομερώς η διδασκαλία αλλά περισσότερο για να υπάρχει η δυνατότητα συνέντευξης από τους μαθητές. Ο μεγάλος όγκος πληροφοριών σε μικρό χρονικό διάστημα δρα ανασταλτικά σε μερικούς μαθητές με αποτέλεσμα την αναγκαστική παραίτησή τους από τη συνέχεια της διδασκαλίας. Παρόλο αυτά, έγινε μια φιλότιμη προσπάθεια για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων και η συγκεκριμένη εργασία σε συνδυασμό με άλλες μελλοντικές εργασίες μπορεί να συντελέσει στην τεκμηρίωση της χρήσης της ιστορίας στη διδασκαλία και της κατανόησης των εννοιών λόγω της ενσωμάτωσης της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ7

7.1. Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Προκειμένου να ληφθούν πιο ολοκληρωμένα αποτελέσματα, θα ήταν χρήσιμο μια παρόμοια έρευνα να επεκταθεί σε μεγαλύτερο δείγμα και να διατεθεί περισσότερος χρόνος τόσο για την παρέμβαση όσο και για την συνέντευξη. Για την επίτευξη αυτού του στόχου θα πρέπει η διαδικασία της έρευνας να πραγματοποιηθεί κατά το χρονικό διάστημα πριν από τις διακοπές του Πάσχα. Επίσης θα ήταν σκόπιμο να μπορούσαν οι εκπαιδευτικοί να εντοπίζουν και να σημειώνουν τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση αυτής της παραγράφου. Με την αντιπαραβολή και την σύνθεση των απόψεων των εκπαιδευτικών με αυτές των μαθητών σε μια εικόνα πιο ολοκληρωμένη θα είναι ευκολότερη η ανάλυση των εμποδίων.

Μια ακόμη πρόταση για μελλοντική προέκταση αυτής της εργασίας θα μπορούσε να αποτελέσει η διερεύνηση του ίδιου θέματος με συνδυασμό της ιστορίας των μαθηματικών και τη χρήση λογισμικών από τους μαθητές. Με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού της τάξης και τη μελέτη της μεθόδου εξάντλησης οι μαθητές θα μπορούσαν να κατασκευάσουν σε λογισμικό τη λύση του προβλήματος που θα τους ζητηθεί και θα αφορά το εμβαδό του παραβολικού χωρίου. Με ανάλογο τρόπο θα κατασκεύαζαν τα άνω και κάτω αθροίσματα Riemann για οποιαδήποτε γνωστή συνεχή συνάρτηση υπολογίζοντας προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος σε δεδομένο διάστημα. Θέτοντας τον μαθητή στη θέση του ερευνητή αυξάνεται το ενδιαφέρον του και η διάθεση για μάθηση. Επιπλέον εμπλουτίζεται με αυτό τον τρόπο το πλαίσιο των εικόνων που αποτελεί βασικό παράγοντα για την κατανόηση της εκάστοτε έννοιας. Τέλος η συμμετοχή του εκπαιδευτικού περιορίζεται με αποτέλεσμα λιγότερες παρανοήσεις από τους μαθητές.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η επέκταση της έρευνας αυτής σε πρωτοετείς φοιτητές των Πολυτεχνικών σχολών. Η διερεύνηση της κατανόησης του ορισμένου ολοκληρώματος που παρέχεται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση αλλά και η ευχέρεια χρήσης του ορισμένου ολοκληρώματος στην επίλυση προβλημάτων της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα για κάποιους άλλους ερευνητές. Πιο συγκεκριμένα, ο λόγος που γίνεται αναφορά στις πολυτεχνικές σχολές είναι διότι εκεί συναντώνται κυρίως εφαρμογές που απαιτούν την πλήρη κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Θα ήταν χρήσιμο, λοιπόν, να προσδιοριστεί το πόσο ομαλά πραγματοποιείται το πέρασμα των φοιτητών από την Δευτεροβάθμια στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, όσον αφορά την έννοια του ολοκληρώματος, αλλά και αν χρήζει αναδιαμόρφωση το πρόγραμμα σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης ή αν καλύπτει όλες τις απαιτήσεις της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης για την έννοια αυτή. Οι προβληματισμοί αυτοί θα μπορούσαν να διερευνηθούν σε επόμενη διεργασία.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Areaya, S., &Sidelil, A. (2012). Students' Difficulties and Misconceptions in Learning Concepts of Limit, Continuity and Derivative. *The Ethiopian Journal of Education*. https://www.researchgate.net/publication/349413111

Avital, S. (1995). History of mathematics can help improve instruction and learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Hohansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 3–23). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools* [Ph.D. thesis]. The FreudenthalInistitute.

Bakker, A., &Gravemeijer, K. P. E. (2006). *An historical phenomenology of mean and median*. 62,149-168.

Barbin, E. (1997). *Histoire et enseignement des mathematiques: Pourquoi? Comment?*

Barbin, E., &Menghini, M. (2000). On potentialities, limits, and risks. In J. Fauvel& J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study* (pp. 86–90).

Burstein, L. (Ed.). (1993). The IEA study of mathematics III: Student growth and classroom processes. Oxford: Pergamon Press.

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. DoverPublications.

Boyer, C. B., &Merzbach, U. C. (1997). *Ιστορία των Μαθηματικών* (Β. απόδοση στα ελληνικά: Κουσουλάκου& Γ. επιστημονική επιμέλεια: Πνευματικός, Eds.; 2nd ed.). ΕκδόσειςΓ.Α.Πνευματικού.

Boyer, Carl. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Publications.

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1997). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, *97*(1), 3–20.

Davitt, R. M. (2000). *The evolutionary character of mathematics*. Mathematics Teacher.

Edwards, C. H. (1979). The Historical Development of the Calculus. In *The Historical Development of the Calculus*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6230-5

Ernest, P. (1998). A Postmodern Perspective on Research in Mathematics Education. In *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 71–85).

Farmaki, V., &Paschos, T. (2007). *Employing genetic "moments" in the history of mathematics in classroom activities*. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9056-y

Fasanelli, F. (2000). Chapter 1, The political context. In John Fauvel& Jan van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. (pp. 1–38).

Fauvel, J. (1991). *Using History in Mathematics Education*.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2002). *HISTORY IN MATHEMATICS EDUCATION*.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science and Education*, *10*(4), 391–408. https://doi.org/10.1023/A:1011205014608

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *Learning of Mathematics*, 55–61.

Furinghetti, F., &Somaglia, A. (1998). *History of mathematics in school across disciplines*. https://www.researchgate.net/publication/284892426

Grabiner, J. v. (1981). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Dover Publications.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000a). Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues. In *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 39–62). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Grugnetti, L., & Rogers, L. (2000b). Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues. In *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 39–62). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Guedji, D. (1998). *Le theoreme du perroquet* (Ελληνικήέκδοση: Το θεώρηματουπαπαγάλου&Μ. Μετάφραση: T, Eds.; Editions du Seuil). ΕκδόσειςΠΟΛΙΣ, 1999.

Helfgott, M. (2004). Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education), 147–164.

Iushkevich, A. P. (1974). On the Origins of Cauchy's Concept of the Definite Integral. *Trudy InstitutaIstoriiEstestvoznaniya, AkademiaNauk SSSR 1*.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal and Ordinal Infinities: An Epistemological and Didactic View. In *Mathematics* (Vol. 48, Issue 2). https://about.jstor.org/terms

Jankvist U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" on using history in mathematics education. Jankvist U. T. *Educational Studies in Mathematics 7*, 235–261.

Katz, J. V. (2013). *Ιστορία των μαθηματικών* (Κ. Απόδοση στα ελληνικά : Χατζηκυριάκου & Γ. επιστημονική επιμέλεια: Χριστιανίδης, Eds.). ΠανεπιστημιακέςΕκδόσειςΚρήτης.

Lagrange, J. L. (1901). Lectures on Elementary Mathematics. *Chicago the Open Court Publishing Company*.

le Goff, J. P. (1996). Cubic equations at secondary school level: following in Euler's footsteps. In E. Barbin& R. Douady (Eds.), *Teaching mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practise.* (Vol. 1, pp. 1–34). Topiques Editions.

Liu, P.-Hung. (2003). *Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching The development and study of lesson plans for cultivating humanistic literacy in mathematic View project*. https://www.researchgate.net/publication/281223989

Loria, G. (1992). *Η Ιστορία των Μαθηματικών.* (Παπαζήση, Ed.; Δεύτερος τόμος).

Nathan, M. J., Long, S. D., & Alibali, M. W. (2002). The symbol precedence view of mathematical development: a corpus analysis of the rhetorical structure of textbooks. Discourse Processes, 33(1), 1-21.

Phillips, E. R. (1984). *An Introduction to Analysis and Integration Theory*. Dover Publications.

Ponza, M. v. (1998). A Role for the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: An Argentinian Experience. *Mathematics in School, 27*, 10–13.

Porter, A. (1989). A curriculum out of balance: The case of elementary school mathematics. Educational Researcher, 18(5), 9-15.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). *Definitions and Images for the Definite Integral Concept*.

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourthgrade teachers' use of a new mathematics text. Elementary School Journal, 100, 331-350.

Riemann, B. (2000). *Ueber die Darstellbarkeiteiner Function durcheinetrigonometrischeReihe*.

Romberg, T. A. (1992). Problematic features of the school mathematics curriculum. In P. W. Jackson (Ed.), Handbook of research on curriculum (pp. 749-788). New York: Macmillan.

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Arcavi, A., Barbin, E. ., Brown, G., & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics.*, *11*(2), 7–16.

Siu, M. K., &Tzanakis, C. (2004). The role of the History of Mathematics in Mathematics Education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*.

Speranza, F. (1989). History, Epistemology, Didactics: some noteworthy cases. In L. Bazzini& H. G. Steiner (Eds.), *proceedings of the first Italian - German bilateral 103 symposium on Didactics of Mathematics.* (pp. 95–107).

Stander, Derek. (1989). *The Use of the History of Mathematics in Teaching." In Mathematics Teaching: The State of the Art* (P. Ernest, Ed.). Falmer Press.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its History*. Springer – Verlag.

Struve, H. (1989). The relevance of investigations of the historical development of mathematical theories for the teaching of these theories. . In L. Bazzini& H. G. Steiner (Eds.), *Proceedings of the first Italian - German bilateral symposium on Didactics of Mathematics.* (pp. 37–50).

Swetz, F. (1995). To Know and to Teach: Mathematical Pedagogy from a Historical Context. In *Educational Studies in Mathematics* (Vol. 29, Issue 1). http://www.jstor.org/about/terms.html.

Tall, D. (1992). *Current difficulties in the teaching of mathematical analysis at university*. 37–42.

Tall, D., & Rashidi, Razali. M. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, *24*, 209–222.

Thomaidis, Y. (1991). Historical Digressions in Greek Geometry Lessons. *For the Learning of Mathematics*, *11*, 37–43.

Tzanakis, C., &Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in Mathematics Education* (pp. 201–240).

Tzanakis, C., &Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *Learning of Mathematics*, 44–55.

vanderWaerden, B. L. (2000). *Η αφύπνιση της επιστήμης* (Γ. Απόδοση στα ελληνικά: Χριστιανίδης, Ed.). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Wheeler, D. (1984). *HistoryAidPedagogy?* (pp. 2–4).

Wilson, P. S., &Chauvot, J. B. (2000). Sound Off!: Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics. *The Mathematics Teacher*, *93*(8).

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. Educational Studies in Mathematics, 60, 297-321.

Γαγάτσης, Η., & Μακρίδης, Γρ. (2002). Σχέσεις ανάμεσα στην Ιστορία των Μαθηματικών και στη Διδακτική των Μαθηματικών. *19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού*.

Γιαννακούλιας, Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός, Η ιστορική εξέλιξη από τον 5ο π.Χ έως και τον 19ο αιώνα*. εκδόσεις Συμμετρία.

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν., &Τοκμακίδης, Τ. (1989). *Οι σχέσεις Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών*.

Κοτοπούλης, Θ. Β. (2009). *Η διδαδκαλία των μαθηματικών στο σχολείο* (1st ed.).

Παναγιώτου, Ε. (2002). Ο ρόλος της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας - Τα Μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού*.

Φίλη Χ. (2010). *Οι Αρχαιοελληνικές Καταβολές των Σύγχρονων Μαθηματικών*. εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών*. Κείμενα παιδείας, Εκδόσεις Ατραπός.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1ο

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΟΝΟΜΑ: ……………………………………

Ερώτηση 1

Περιγράψτε το ορισμένο ολοκλήρωμα και αναφέρεται αν γνωρίζετε την χρήση του σε άλλες επιστημονικές εφαρμογές.

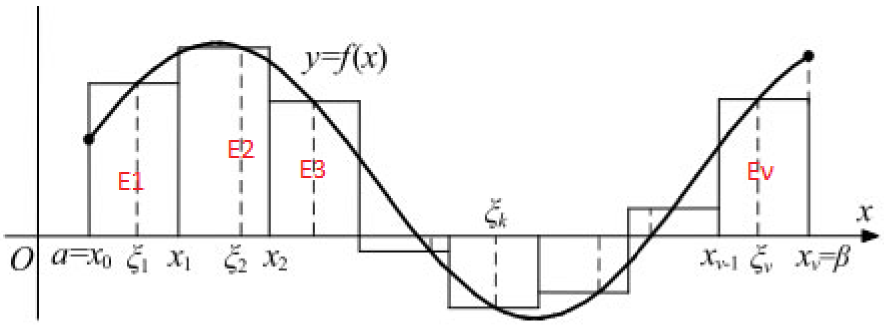
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 2

Γνωρίζεται ή έχετε ακούσει την μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδη-Ευδόξου; (Απαντήστε μονολεκτικά με ναι ή όχι)

…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..

Ερώτηση 3



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

a. Τι υπολογίζουμε με το γινόμενο$(x_1 - x_0) \cdot f(\xi_1)$;
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………..

b. Αν υποθέσουμε ότι το διάστημα $[\alpha, \beta]$ χωρίστηκε σε ίσα υποδιαστήματα, μπορείτε να βρείτε το πλήθος των υποδιαστημάτων αυτών;
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

c. Ποιο το **άθροισμα Riemann** σύμφωνα με αυτά που έχετε διδαχθεί στο σχολείο;…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

d. Το ολοκλήρωμα$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

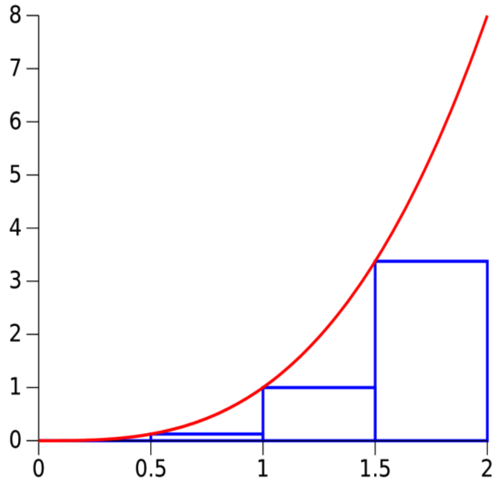
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

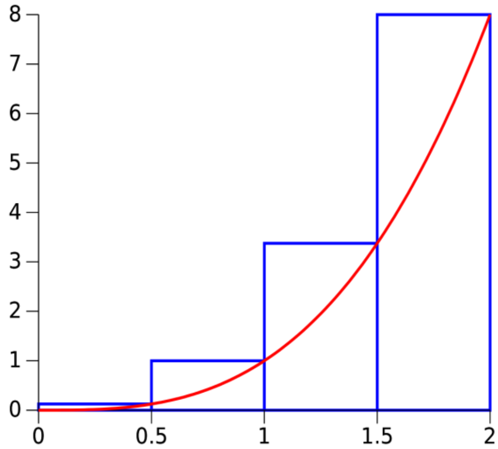
Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός; (Βασιστείτε στο παραπάνω σχήμα).

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Ερώτηση 4

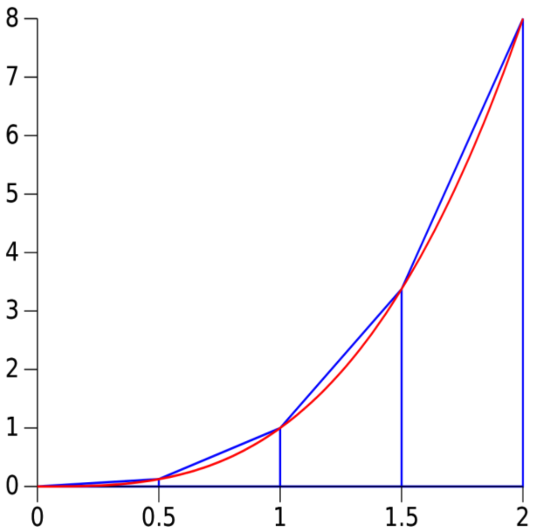
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x\epsilon[0,2]$. Στα παρακάτω σχήματα χωρίσαμε το διάστημα [0,2] σε τέσσερα υποδιαστήματα. Για να προσεγγίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται κάτω από την γραφική παράσταση και τον άξονα $x'x$σε ποιο από τα τρία σχήματα θεωρείτε πως θα είχαμε την καλύτερη προσέγγιση του εμβαδού αυτούκαι γιατί;





Σχ.1 Κάτω άθροισμα Riemannγια τηνx^3 υποδιαιρέσεις.

Σχ.2 Πάνω άθροισμα Riemannμε τέσσερις για τηνx^3με τέσσεριςυποδιαιρέσεις.



Σχ.3 Τραπεζοειδές άθροισμα Riemann x^3 πάνω από [0,2] χρησιμοποιώντας 4 υποδιαιρέσεις

…………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ 1. Powerpoint (1η ώρα) Διδακτική παρέμβαση

Διαφάνεια 1

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

1η Διδακτική παρέμβαση
Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

Επιμέλεια Αντωνιάδης Παύλος

1

Διαφάνεια 2

Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.)

Ο μέγιστος για πολλούς, ειδήμονες και μη, επιστήμονες και μέλος της τριάδας των κορυφαίων μαθηματικών όλων των εποχών (μαζί με τους Newton και Gauss).
Τα μαθηματικά, η φυσική, η αστρονομία και η μηχανική ήταν οι επιστήμες οι οποίες απετέλεσαν το κατεξοχήν αντικείμενο μελέτης και έρευνας για τον Αρχιμήδη, ο οποίος είναι ο αδιαφιλονίκητος θεμελιωτής αυτών. Η μεγαλοφυΐα του έδωσε λύσεις σε πολλά από τα δυσκολότερα προβλήματα στους κλάδους της γεωμετρίας, της ανάλυσης, της άλγεβρας και της θεωρίας των αριθμών.
Σύμφωνα με τον Dirk J.Struik: «*Οι πιο σημαντικές συνεισφορές του Αρχιμήδη στα μαθηματικά ανήκουν στον τομέα τον οποίον αποκαλούμε σήμερα ολοκληρωτικό λογισμό*».

2

Διαφάνεια 3

Μεσαίωνας

Μεταξύ των πρώτων μαθηματικών του 17ου αιώνα που επιχείρησαν να εγκαταλείψουν την αποδεικτική μέθοδο των αρχαίων ελλήνων και να εισάγουν την ελεύθερη χρήση των απειροστών, για τον υπολογισμό των εμβαδών και όγκων, ήταν ο Johannes **Kepler** (1571-1630).

Το όνομα του **Cavalieri** (1598-1647) έχει ταυτισθεί με τη θεωρία των αδιαιρέτων. Η θεωρία των αδιαιρέτων μπορεί να θεωρηθεί ως η αρχή της τελικής φάσης η οποία οδήγησε στη δημιουργία του απειροστικού λογισμού από τους Newton (1642-1726) και Leibniz (1646-1716).

3

Διαφάνεια 4

19ος αιώνας και η αυστηροποίηση του λογισμού

Ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) ήταν ο πιο παραγωγικός μαθηματικός του 19ου αιώνα. Ο Cauchy ανέπτυξε τον απειροστικό λογισμό με βάση την έννοια του ορίου, έτσι όπως συνήθως κάνουμε σήμερα.

Ο Cauchy όρισε το ολοκλήρωμα ανεξάρτητα από την παράγωγο.

4

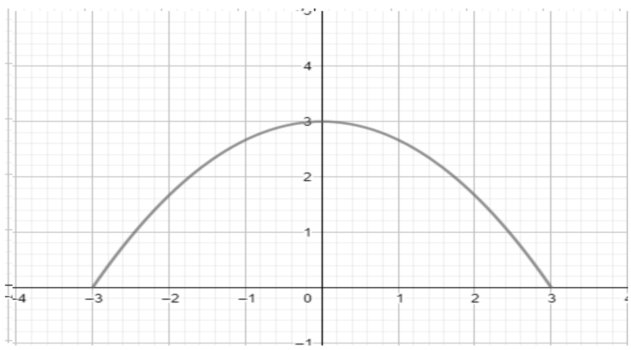
Διαφάνεια 5

Bernhard Riemann(1826-1866)

Ο ορισμός του Riemann για το ολοκλήρωμα, ήταν ο πιο γενικός που θα μπορούσε να βασιστεί άμεσα στην αυθεντική επινόηση του Cauchy για τα προσεγγιστικά αθροίσματα που σχετίζονται με διαμερίσεις του διαστήματος ολοκλήρωσης σε υποδιαστήματα. Παρόλα αυτά τις τελευταίες τρεις δεκαετίες του δέκατου ένατου αιώνα, αυτός ο ορισμός αναδιατυπώθηκε με διάφορους τρόπους, οι οποίοι εξηγούσαν καλύτερα την έννοια του ολοκληρώματος και άνοιξαν το δρόμο για σημαντικές πρόσθετες γενικεύσεις στις αρχές του εικοστού αιώνα.

5

Διαφάνεια 6

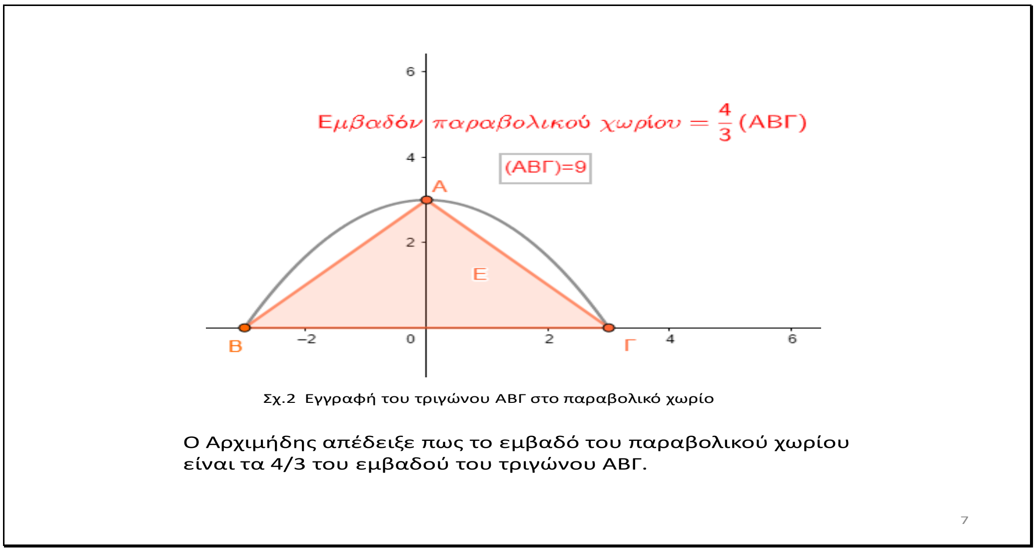


Σχ.1 Παραβολή $-1/3\ x^2 + 3$

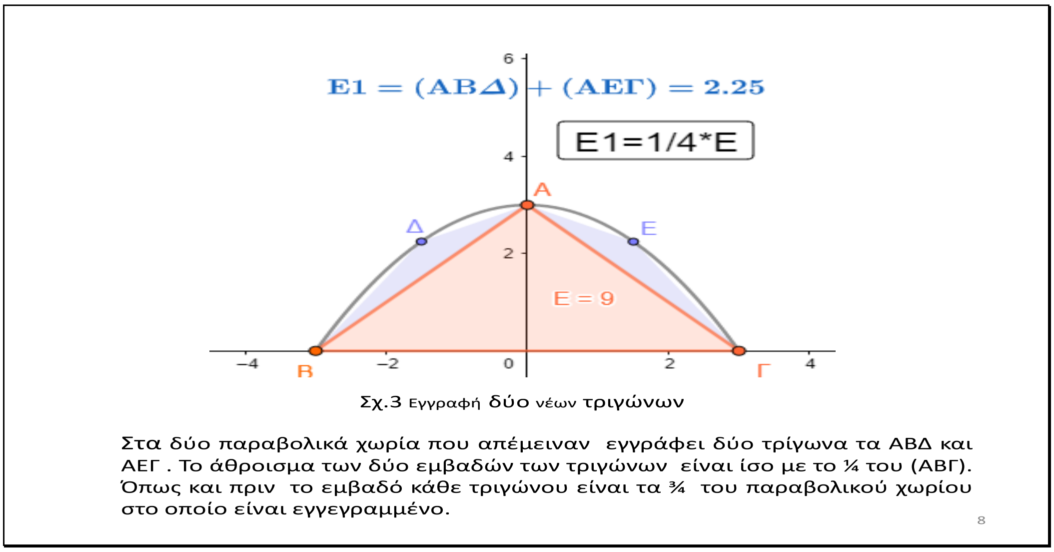
Ζητείτε να υπολογιστεί το Εμβαδό του παραβολικού χωρίου χωρίς την χρήση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.

6

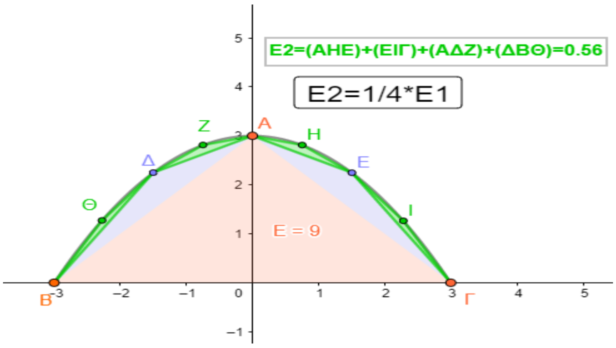
Διαφάνεια 7



Διαφάνεια 8



Διαφάνεια 9

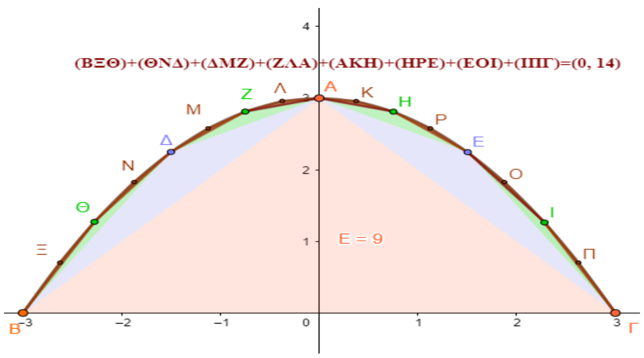


Σχ.4 Εγγραφή τεσσάρων τριγώνων στα εναπομείναντα παραβολικά χωρία

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εγγράφουμε στα 4 παραβολικά χωρία που απέμειναν ισάριθμα τρίγωνα ΒΘΔ, ΔΖΑ, ΑΗΕ, ΕΙΓ . Για το καθένα από αυτά ισχύει ότι και πριν,(δηλαδή;) και επιπλέον το άθροισμα των εμβαδών τους είναι ίσο με το ¼ του Ε1=2,25.

9

Διαφάνεια 10

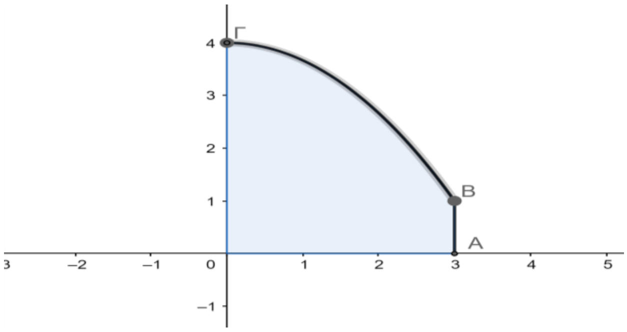


Σχ.5 Εγγραφή οκτώ τριγώνων στα παραβολικά χωρία που δεν έχουν σκιαγραφηθεί.

Ομοίως εγγράφουμε οκτώ (8) τρίγωνα στα εναπομείναντα παραβολικά χώρια με άθροισμα εμβαδών ίσο με το ¼ του Ε2=0,56. Ο Αρχιμήδης ακολούθησε την ίδια διαδικασία ακόμη μια φορά, εγγράφοντας 16 τρίγωνα αποδεικνύοντας στο τέλος Εμβαδόν παραβολικού χωρίου= Ε+Ε1+Ε2+Ε3+Ε4+1/3Ε4 (οπου Ε4 το άθροισμα των εμβαδών των δεκαέξι τριγώνων).

10

Διαφάνεια 11

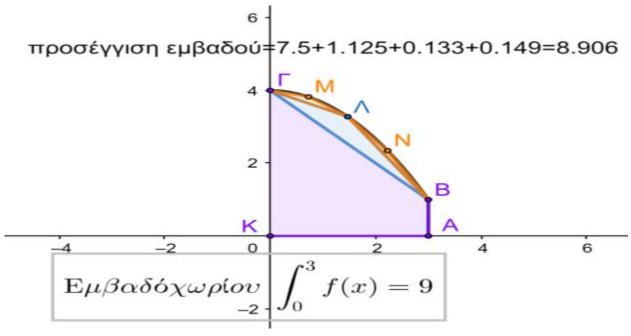


Σχ.6 Παραβολικό χωρίο

Μπορείτε να προτείνετε τρόπο ή τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαμε με την μέθοδο της εξάντλησης να προσεγγίζαμε το παραπάνω γραμμοσκιασμένο εμβαδό;

11

Διαφάνεια 12

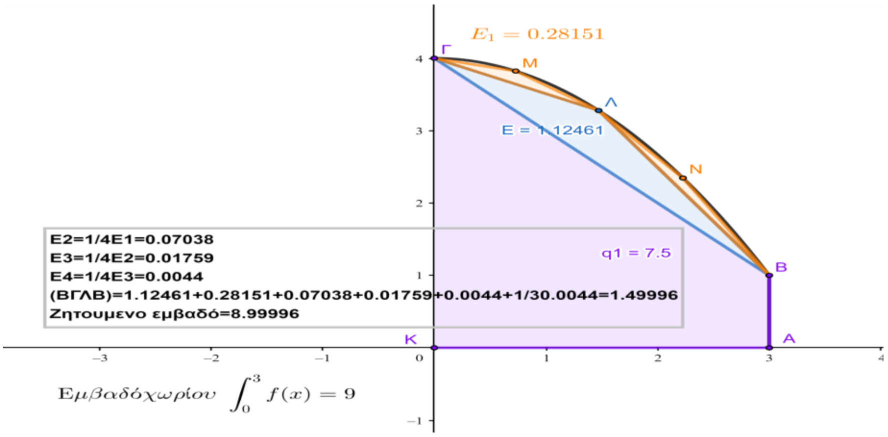


Σχ. 7 Προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού με την μέθοδο της εξάντλησης (δύο βήματα)

Ο ένας τρόπος είναι να χωρίσουμε το εμβαδό σε ένα τραπέζιο και στη συνέχεια στο ΒΓΛΒ παραβολικό χωρίο να εφαρμόσουμε την μέθοδο της εξάντλησης. Στο σχήμα έχουμε εφαρμόσει δύο από τα τέσσερα βήματα και η προσέγγιση του εμβαδού είναι ικανοποιητική όπως φαίνεται παραπάνω.

12

Διαφάνεια 13



Σχ. 8 Προσέγγιση με τη μέθοδο της εξάντλησης του ζητούμενου χωρίου

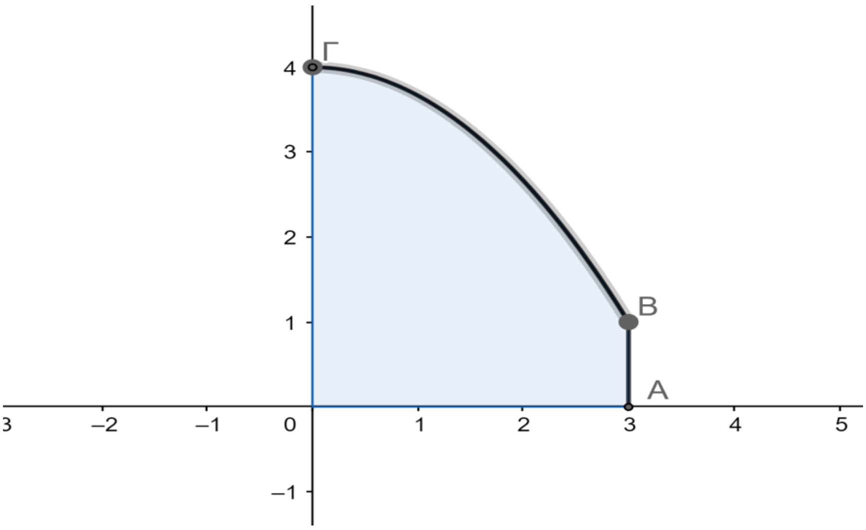
Η προσέγγιση έγινε με πέντε δεκαδικά ψηφία και στο σχήμα δεν έγιναν τα επόμενα δύο βήματα , αφού θα ήταν απαραίτητη η μεγέθυνση του σχήματος .

13

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Εργασία 1

Στο διπλανό σχήμα μπορείτε να προτείνετε τρόπο ή τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαμε με την μέθοδο της εξάντλησης να προσεγγίσουμε το παραπάνω γραμμοσκιασμένο εμβαδό; (ημιπαραβολικό χωρίο)



Αφού κάνετε μια προσέγγιση του εμβαδού υπολογίστε με την βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος και το πραγματικό εμβαδό.(Δίνεται ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4\,, για\ 0 \leq x \leq 3$)

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Εργασία 2

Ε2.1. Στο προηγούμενο σχήμα, θα μπορούσατε να βρείτε ένα προφανές ορθογώνιο που να έχει εμβαδό μικρότερο από το παραβολικό χωρίο και ένα άλλο ορθογώνιο με ίδια βάση και εμβαδόν μεγαλύτερο από το παραβολικό χωρίο;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Ε.2.2. Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:

a. $\ldots\ldots < E < \ldots$,όπου Ε το εμβαδό του παραβολικού χωρίου.
b. Η διαφορά ανάμεσα στα εμβαδά του άνω και του κάτω ορθογωνίου είναι: Δ= E_1-ε_1=………………

Ε.2.3. Με ποιο τρόπο μπορείτε να συνεχίσετε ώστε να μειωθεί η παραπάνω διαφορά ανάμεσα στο πάνω και κάτω φράγμα για το εμβαδόν Ε;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ε.2.4.Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:

a. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. < E <\ldots\ldots$, όπου Ε το εμβαδό του παραβολικού χωρίου.
b. Η διαφορά ανάμεσα στα εμβαδά των άνω και των κάτω ορθογωνίων είναι: Δ= $E_2 - \varepsilon_2$=………………

Ε.2.5. Πως θα μπορούσαμε να πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδόν Ε;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Ε.2.6. Στο πρόγραμμα θέτουμε όπου n=1000. Συμπληρώστε και πάλι τα παρακάτω:

a. …………….<Ε<……………, όπου Ε το εμβαδό του παραβολικού χωρίου.
b. Η διαφορά ανάμεσα στα εμβαδά του άνω και του κάτω ορθογωνίου είναι: Δ= $E_{1000} - \varepsilon_{1000}$=………………

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Ε.2.7. Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω πίνακα με τους αριθμούς που βρήκατε ή που θα βρείτε με τη βοήθεια της εφαρμογής geogebra

n	En	εn	Δ=En-εn
1			
2			
5			
112			
798			
1453			
2517			
11256			
281065			

Ε.2.8.Καθώς αυξάνετε το πλήθος πτων ορθογωνίων κάλυψης πως μεταβάλλονται οι τιμές στον παραπάνω πίνακα για το άνω (E_n) και κάτω άθροισμα (ε_n)Riemann; Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή της διαφοράς;

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………..

Ε.2.9. Θεωρείτε ότι υπάρχει τιμή για το n έτσι ώστε τα αθροίσματα να γίνουν ίσα; Θα μπορούσαμε συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία να υπολογίσουμε ακριβώς το Εμβαδό Ε, μηδενίζοντας τη διαφορά Δ;

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ε.2.10. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να αποτελέσει ένα τρόπο <u>προσέγγισης</u> εμβαδού;

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Ε.2.11. Παρατηρώντας τα E_nκαι ε_n για μεγάλες τιμές του n τι θα μπορούσαμε να πούμε για τις τιμές των παρακάτω ορίων :

$$\lim_{n\to\infty} E_n \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n$$

όπου:

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x \;\kappa\alpha\iota\; \varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x$$

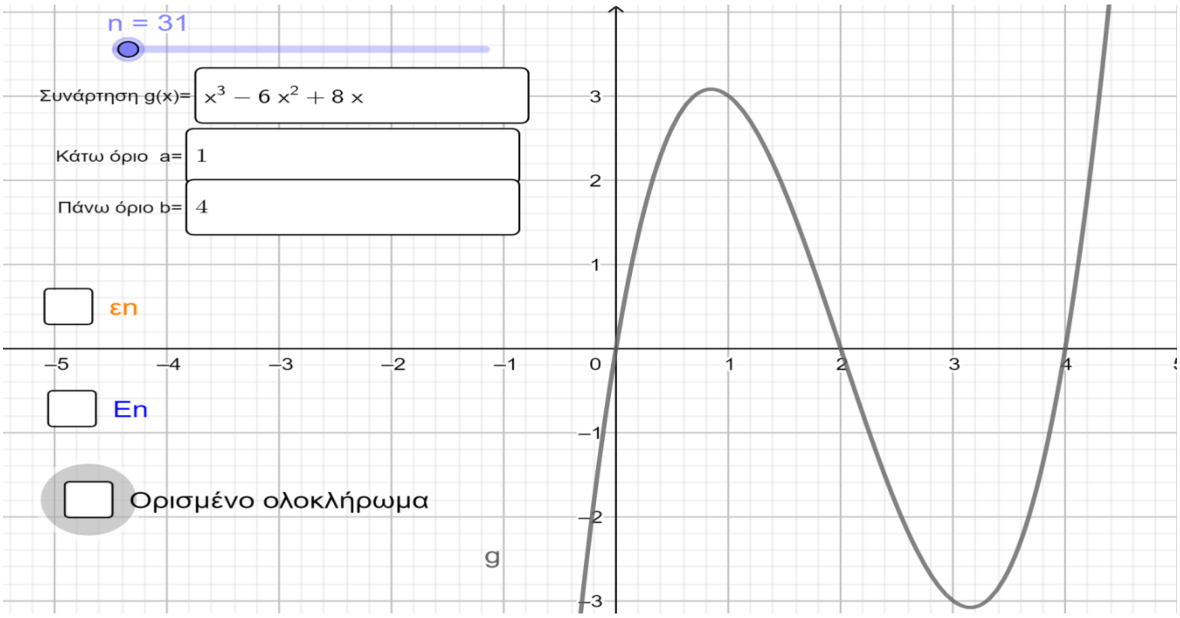
με f(x_i)το μέγιστο και το ελάχιστο ύψος αντίστοιχα σε κάθε ορθογώνιο.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Ε.2.12. Αφού ισχύει ότι $\varepsilon_n < E < E_n$, και σύμφωνα με την παραπάνω απάντησή σας με ποιο κριτήριο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν Ε.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Εργασία 3.



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε γράψει μια συνάρτηση και με τη βοήθεια λογισμικού, αφού ορίσουμε τα όρια a, b και κάνοντας κλικ στο κουτάκι εn αλλά και στο En, υπολογίζει το κάτω άθροισμα και το πάνω άθροισμα των ορθογωνίων. Όπου n ο αριθμός των ορθογωνίων.

Θέστε a=2και b=3

Τι παρατηρείτε για τα αθροίσματα (άνω και κάτω);

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Ισχύει και εδώ ότι $\varepsilon_n < E < E_n$, όπου Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη $Cgx'x$ και τις ευθείς$x = 2$ και$x = 3$;

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b g(x)dx$ τι σχέση θα έχει με το Ε (όπου Ε το εμβαδό του περιγράφεται στην παραπάνω ερώτηση);

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

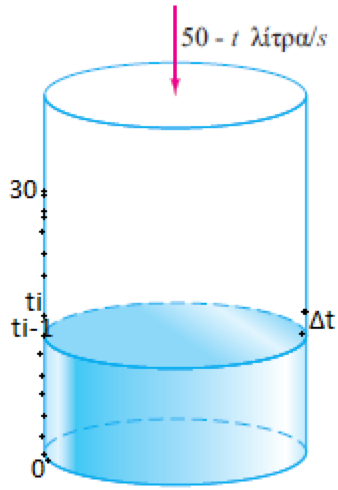
…………………………………………………………………………………..

Για $a = 0$ και $b = 4$ μπορείτε να μαντέψετε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^4 g(x)dx$; Σ' αυτή την περίπτωση πόσο θα είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg, τον x'x και τις ευθείες $x = 0$ $και$ $x = 4$;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Εργασία 4

Υποθέστε ότι ρέει νερό στην αρχικά άδεια δεξαμενή του διπλανού σχήματος. Ο ρυθμός της ροής του νερού στην δεξαμενή την χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) είναι 50 − t λίτρα (L) ανά δευτερόλεπτο. Πόσο νερό έχει η δεξαμενή μετά τα πρώτα 30s;



Λύση (Συμπληρώνουμε τα κενά)

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα Q του νερού που ρέει στην δεξαμενή κατά το διάστημα [0, 30]. Σκεφτείτε μια υποδιαίρεση του διαστήματος σε n υποδιαστήματα, όλατου ίδιου πλάτους Δt = …………….

Στη συνέχεια επιλέξτε ένα σημείο t_i^*στο i διάστημα είναι πολύ μικρό, τότε ο ρυθμός της ροής του νερού μεταξύ του της στιγμής t_{i-1} και t_i είναι προσεγγιστικά……………λίτρα ανά δευτερόλεπτο.

Έτσι το ποσό Q_i του νερού σε λίτρα που ρέει μέσα στην δεξαμενή στο υποδιάστημα αυτό προσδιορίζεται προσεγγιστικά πολλαπλασιάζοντας τον ρυθμό ροής σε λίτρα ανά δευτερόλεπτο με την διάρκεια της ροής σε δευτερόλεπτα:

[……….. λίτρα/δευτερόλεπτα]·[……….δευτερόλεπτα]και
Επομένως $\Delta Q_i \approx (\dots\dots\dots\dots)$ ·Δt (λίτρα)

Συνολικά λοιπόν θα έχουμε

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} (\dots . - \quad) \cdot \Delta t$$

Ποιο άθροισμα Riemannαναγνωρίζετε στην παραπάνω σχέση και για ποια συνάρτηση;

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Γράψτε τη λύση με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος και υπολογίστε τη συνολική ποσότητα νερού σε λίτρα που θα πέσει στη δεξαμενή στα 30 πρώτα δευτερόλεπτα.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗ-ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Πως ένιωσες κατά την διδακτική παρέμβαση;
2. Είσαι ευχαριστημένος από τις διδακτικές παρεμβάσεις;
3. Γνωρίζεις κάποιον άλλον Μαθηματικό και με ποια προβλήματα ασχολήθηκε στο παρελθόν;
4. Θα ήθελες σε κάθε εισαγωγή μιας νέας έννοιας στα Μαθηματικά να γινόταν μια ιστορική αναδρομή για τους προβληματισμούς που προηγήθηκαν είτε κατά την αρχαιότητα είτε μεταγενέστερα μέχρι την εδραίωση του ορισμού της έννοιας αυτής;
5. Βρήκες ενδιαφέρον την μέθοδο της εξάντλησης από τον Αρχιμήδη;
6. Γνώριζες ότι ο Αρχιμήδης προσέγγισε με αυτό τον τρόπο το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου;
7. Σε βοήθησε η μέθοδος της εξάντλησης να καταλάβεις το σκεπτικό της προσέγγισης του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου;
8. Θεωρείς πως η μέθοδος της εξάντλησης βοήθησε τους μετέπειτα επιστήμονες για την προσέγγιση του εμβαδού με το άνω και κάτω άθροισμα των ορθογωνίων;
9. Εσένα προσωπικά σε βοήθησε η ιστορική αναδρομή που κάναμε για να κατανοήσεις καλύτερα την έννοια του αθροίσματος Riemann και του ορισμένου ολοκληρώματος;
10. Συγκρίνοντας τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος που έχεις δει μέχρι τώρα, ποιον από όλους αυτούς θα προτιμούσες;
11. Πόσο ευχαριστημένος είσαι που λύσαμε ένα πραγματικό πρόβλημα με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος;
12. Θα προτιμούσες στις εργασίες-ασκήσεις να συμπεριλαμβάνονται περισσότερα προβλήματα που αναφέρονται στην καθημερινότητα;
13. Η επίλυση τέτοιων προβλημάτων σε ποιο βαθμό απαντά στο συνηθισμένο ερώτημα του μαθητή: «τι χρειάζονται τα μαθηματικά στην καθημερινότητά μας;»