



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Ακουστική διέγερση πολυστρωματικών μέσων
από σημειακές πηγές
*Acoustic excitation of layered media by point
sources*

Ελευθερία Καλαμαρά

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Λ. Τσίτσας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

Σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 και τα άρθρα 2, 4, 6 παράγραφος 3 του Ν. 1256/1982, δηλώνω ρητά πως η παρούσα διπλωματική εργασία έχει διεκπεραιωθεί με δική μου προσπάθεια και αποτελεί προϊόν προσωπικής μου ιδιοκτησίας, μη προσβάλλοντας πνευματικά δικαιώματα τρίτων. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης εκχωρώ στο ΕΑΠ την άδεια χρήσης αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημοσίου δανεισμού σε ηλεκτρονική μορφή για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας.

Ακουστική διέγερση πολυστρωματικών μέσων
από σημειακές πηγές
*Acoustic excitation of layered media by point
sources*

Ελευθερία Καλαμαρά

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής Συν- Επιβλέπων Καθηγητής

Νικόλαος Λ. Τσίτσας Βασίλειος Σεβρόγλου

Αν. Καθηγητής Καθηγητής

Τμήμα Πληροφορικής, ΑΠΘ Τμήμα Στατιστικής
& Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιά

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

Ελευθερία Καλαμαρά , Ακουστική διέγερση πολυστρωματικών μέσων
από σημειακές πηγές

<< Στην οικογένειά μου >>

Ευχαριστίες

Είμαι ιδιαίτερα χαρούμενη που είχα την τιμή να έχω ως συμβούλους καθηγητές επιστήμονες με αξιομνημόνευτο ερευνητικό υπόβαθρο και διεθνή αναγνώριση. Θα ήθελα λοιπόν να ευχαριστήσω ιδιαίτερα:

- Τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Νικόλαο Τσίτσα για την ευγένεια, την υπομονή και τον οικείο τρόπο προσέγγισης που επέδειξε, καθώς και για τη συμβουλευτική του καθοδήγηση, μεταδίδοντας μου πολύτιμες γνώσεις.
- Τον Καθηγητή κ. Βασίλειο Σεβρόγλου που ως συν επιβλέπων καθηγητής είχε σημαντική συμβολή στην ολοκλήρωση της εργασίας μου.
- Τον Μεταδιδακτορικό Ερευνητή κ. Ανδρέα Καλογερόπουλο για τη διάθεση του να συμβάλλει στην υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής, με παρεμβατικές προτάσεις και υποδείξεις που οδήγησαν στην πρόοδό της.
- Την αείμνηστη Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Φωτεινή Καριώτου για την αφοσίωση και την αγάπη της για τον τομέα των Θετικών Επιστημών και τη συμβουλευτική της καθοδήγηση για την επιλογή του θέματος της παρούσας εργασίας και του συμβούλου καθηγητή.

Επίσης, θερμά ευχαριστώ την οικογένεια και τους φίλους μου, καθώς ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή τους στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Είναι αξιοσημείωτη η κατανόηση που επέδειξαν και η ενθάρρυνση που μου παρείχαν, για την υλοποίηση του στόχου μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο τη μελέτη προβλημάτων σκέδασης. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε προβλήματα ακουστικής διάδοσης με χρήση των βαθμωτών εξισώσεων Helmholtz. Επίσης, μελετάμε προβλήματα συνοριακών τιμών σχετικά με τη διέγερση ομογενών και πολυστρωματικών σκεδαστών από σημειακές πηγές. Η διατύπωση και η διερεύνηση των μοντελοποιήσεων που διερευνούμε, βασίζεται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και την ασυμπτωτική ανάλυση.

Αρχικά, η μελέτη μας εστιάζεται στα ευθέα προβλήματα σκέδασης με μια εισαγωγή στις βασικές συνιστώσες της ακουστικής σκέδασης, όπως τον ορισμό προσπίπτοντος και σκεδασμένου κύματος, την ανάλυση της δομής του σκεδαστή και τα βασικά θεωρήματα σκέδασης. Έπειτα, αναλύουμε τα είδη του πυρήνα κάθε σκεδαστή και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για καθένα από αυτά. Τέλος, παρουσιάζουμε εφαρμογή της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων σε συνδυασμό με τους τύπους Bessel και Hankel για μικρά ορίσματα, για τον προσδιορισμό των συντελεστών χαμηλών συχνοτήτων ανάλογα με το είδος του πυρήνα του σκεδαστή.

Οι παραπάνω προσεγγίσεις αξιοποιούνται σε προβλήματα αντίστροφης σκέδασης. Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία, περιγράφουμε δύο μεθόδους αντίστροφης σκέδασης: τη μέθοδο μακρινού πεδίου και τη μέθοδο κοντινού πεδίου. Η πρώτη αναφέρεται στον καθορισμό των χαρακτηριστικών του σκεδαστή από τη γνώση του μακρινού πεδίου, ενώ η δεύτερη στον προσδιορισμό των συντεταγμένων του κέντρου και της ακτίνας του σφαιρικού σκεδαστή από τη γνώση του σκεδασμένου πεδίου σε πέντε γνωστές θέσεις της πηγής. Τέλος, ανάλογα με είδος του πυρήνα του σκεδαστή, αλλά και τη θέση της σημειακής πηγής, υπολογίζονται οι συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων, το μακρινό πεδίο και η ενεργειακή διατομή σκέδασης.

Λέξεις κλειδιά: Σκέδαση, Ακουστική, Σκεδαστές, Διατομή σκέδασης, Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης, Μέθοδος μακρινού πεδίου, Μέθοδος κοντινού πεδίου, Σημειακές Πηγές, Χαμηλές συχνότητες, Σφαιρικά Κύματα



Abstract

This thesis aims to study scattering problems. More specifically, we consider acoustic scattering problems modeled by the scalar Helmholtz equations. We also study boundary-value problems related to the excitation of homogeneous and multilayer scatterers from point sources. The formulation and investigation of the modeling schemes investigated are based on partial differential equations and asymptotic analysis.

Initially, our study focuses on the direct scattering problems with an introduction to the basic components of acoustic scattering, such as the definition of incident and scattered waves, the analysis of the scattering structure and the basic scattering theorems. We then discuss the types of the core of each scatterer and the corresponding boundary conditions corresponding to each of them. We apply low frequency theory in conjunction with the Bessel and Hankel formulas for small arguments to determine the low-frequency coefficients depending on the type of core of the scatterer.

Then, the above approaches are exploited in inverse scattering problems. We describe two inverse scattering methods: the far-field method and the near-field method. The first refers to determining the characteristics of the scatterer from knowledge of the far field, while the second refers to determining the coordinates of the center and radius of the spherical scatterer from knowledge of the scattered field at five known positions of the point source. Finally, depending on the type of the scatterer's core and the position of the point source, the low-frequency coefficients, the far field, and the scattering energy cross section are calculated.

Keywords: Scattering, Acoustics, Scatterers, Scattering Cross Section, Inverse Scattering Problems, Far-Field method, Near-Field method, Point Sources, Low Frequencies, Spherical Waves

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	2
Περίληψη	3
Abstract	4
Περιεχόμενα	5
Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων.....	7
Εισαγωγή.....	8
1. Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων.....	10
1.1 Προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων	10
1.1.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	10
1.1.2 Συνοριακές συνθήκες.....	14
1.1.3 Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld	15
1.1.4 Διατύπωση προβλημάτων σκέδασης	15
1.2 Ενέργεια.....	16
1.2.1 Ακουστική ένταση και συναρτήσεις ενέργειας	16
2. Θεωρία σκέδασης	19
2.1 Θεωρήματα σκέδασης για επίπεδα ακουστικά κύματα.....	19
2.2 Θεωρήματα σκέδασης για σφαιρικά κύματα.....	19
2.3 Πολυστρωματικός σκεδαστής και N πηγές	25
2.3.1 Δομή πολυστρωματικού σκεδαστή.....	25
2.3.2 Ακουστική ένταση και πολυστρωματικός σκεδαστής.....	26
2.3.3 Βασικές συνιστώσες του πολυστρωματικού σκεδαστή.....	27
2.3.1 Θεωρήματα για N πηγές.....	28
2.3 Σχέσεις σκέδασης.....	31
2.4 Ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης.....	34
2.4.1 Σφαιρικοί σκεδαστές - Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης	34
3. Θεωρία χαμηλών συχνοτήτων.....	38
3.1 Συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων αναλόγως με το είδος του σκεδαστή.....	38
3.1.1 Για μαλακή σφαίρα (Πρόβλημα Dirichlet)	38
3.1.2 Για σκληρή σφαίρα (Πρόβλημα Neumann):	38
3.1.3 Για ανθεκτική σφαίρα (Πρόβλημα Robin):.....	39
3.2 Μέθοδοι επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης	39
3.2.1 Μέθοδος μακρινού πεδίου. Μακρινό πεδίο (Far field).....	39
3.2.2 Μέθοδος κοντινού πεδίου	45
3.3 Πρόβλημα πολυστρωματικού σκεδαστή	47
4. Σκέδαση ακουστικών κυμάτων με περισσότερες από μία σημειακές πηγές	57
4.1 Σκέδαση ακουστικών κυμάτων με δύο πηγές σε τυχαίες θέσεις	57
5. Μελλοντικοί στόχοι- αντικείμενα μελέτης	64
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	65
Παράρτημα Α: Συναρτήσεις Bessel	69

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Εικόνα 1- Ακουστική σκέδαση.....	10
Εικόνα 2- Προσπίπτον και σκεδασμένο κύμα.....	13
Εικόνα 3- Δομή πολυστρωματικού σκεδαστή.....	25
Εικόνα 4- Ακουστικά πεδία σε πολυστρωματικό σκεδαστή.....	26
Εικόνα 5- Σχηματική αναπαράσταση της θέσης της σημειακής πηγής.....	35
Εικόνα 6- Εσωτερικός και εξωτερικός χώρος σκεδαστή.....	36

Εισαγωγή

Ενδιαφέρουσες επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές παρακινούν τη μελέτη των προβλημάτων σκέδασης, στα οποία ένας πολυστρωματικός σκεδαστής διεγείρεται από ένα σφαιρικό κύμα, που εκπέμπει μια σημειακή πηγή. Μια πολυστρωματική σφαίρα (σκεδαστής) αποτελεί ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 , το οποίο διεγείρεται από ένα χρονικά αρμονικό σφαιρικό ακουστικό κύμα, που δημιουργείται από μια σημειακή πηγή που βρίσκεται, είτε στο εσωτερικό, είτε στο εξωτερικό της σφαίρας. Ο πυρήνας της σφαίρας μπορεί να είναι ακουστικά μαλακός, σκληρός, ανθεκτικός ή διαπερατός.

Τα προβλήματα σκέδασης, που αφορούν τη διέγερση ενός πολυστρωματικού μέσου από ακουστικά κύματα προερχόμενα από σημειακές πηγές στο εσωτερικό ή εξωτερικό του, έχουν εφαρμογές στην ιατρική, σε εμφυτεύματα για την εξ' αποστάσεως ιατρική παρακολούθηση ασθενών [7] ή για τη διερεύνηση της δραστηριότητας του ανθρώπινου εγκεφάλου [8], [9]. Επιπλέον, τεχνολογικές εφαρμογές έχουμε σε σκεδαστές τύπου κεραίας που ακτινοβολούν σε σωματοποιημένο υπόβαθρο [56], καθώς και σε περιπτώσεις ακτινοβολίας από πολλαπλούς αισθητήρες σε δίκτυα 5G [55]. Τέλος, φυσικές εφαρμογές του φαινομένου συναντώνται στη διάδοση σεισμικών κυμάτων [10] και στην υποβρύχια ακουστική [11].

Η διέγερση του πολυστρωματικού μέσου μπορεί να οφείλεται σε παραπάνω από μία σημειακές πηγές. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση που έχουμε πλήθος N σημειακών πηγών, υπάρχουν σημαντικές εφαρμογές τόσο στην οπτική διάχυση, όπου μια προσπίπτουσα δέσμη φωτός αντικαθίσταται από πολλαπλές πηγές διαφορετικής ισχύος [54] όσο και στην ιατρική (διέγερση του εγκεφάλου από τους νευρώνες) [52], [53]. Επιπρόσθετες εφαρμογές έχουμε σε τεχνικές διάσπασης πεδίων, που βασίζονται σε αποσυνθέσεις ενός συνολικού πεδίου στις συνιστώσες του [57].

Η θεωρία ακουστικής σκέδασης εστιάζεται στις μεταβολές που επιφέρει σε ένα κυματικό πεδίο, η ύπαρξη ενός εμποδίου (σκεδαστής), στο χώρο διάδοσής του. Στην περίπτωση που γνωρίζουμε το προσπίπτον κυματικό πεδίο και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή και αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο, λέμε ότι έχουμε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Αναλόγως, αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης λογίζεται το πρόβλημα στο οποίο γνωρίζουμε το προσπίπτον και σκεδασμένο πεδίο και αναζητούμε τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

Εξετάζοντας το πρόβλημα της ακουστικής σκέδασης από τη μαθηματική του σκοπιά, διαπιστώνουμε πως είναι δυνατή η περιγραφή του με ένα εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz. Οι συνοριακές συνθήκες που το συνοδεύουν μεταβάλλονται ανάλογα με το είδος του σκεδαστή. Αυτός μπορεί να είναι μη διαπερατός, με τα ηχητικά κύματα να σταματούν στο εξωτερικό του σκεδαστή (συνθήκη Dirichlet, Neumann ή Robin για μαλακό, σκληρό ή ανθεκτικό σκεδαστή αντίστοιχα), ή διαπερατός με τα κύματα να εισχωρούν στο εσωτερικό του (συνθήκες διαπερατότητας). Σε κάθε περίπτωση το σκεδασμένο ακουστικό πεδίο ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld [19].

Η μελέτη προβλημάτων σκέδασης εστιάζεται στη συλλογή πληροφοριών για το πώς συμπεριφέρεται το σκεδασμένο πεδίο στο άπειρο, όπως και για το πόση ενέργεια του προσπίπτοντος πεδίου απορροφάται ή επανεκπέμπεται από το σκεδαστή. Σημαντικές πληροφορίες για τα παραπάνω ερωτήματα παίρνουμε από το πλάτος σκέδασης και την ενεργειακή διατομή σκέδασης, αντίστοιχα.

Επιπλέον, έχουμε διάκριση των ακουστικών κυμάτων σε επίπεδα και σφαιρικά. Ενώ υπάρχουν αρκετές μελέτες αναφορικά με τα επίπεδα προσπίπτοντα κύματα [19], [51], σχετικά περιορισμένο είναι το ερευνητικό ιστορικό για τα σφαιρικά. Το γεγονός αυτό εντείνει το επιστημονικό ενδιαφέρον για τη μελέτη τους και καθιστά πρόκληση την ανακάλυψη νέων στοιχείων που να διευρύνουν τις γνώσεις μας για αυτά

Για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης γίνεται χρήση προσεγγιστικών μεθόδων οι οποίες διακρίνονται σε αναλυτικές και αριθμητικές. Μια αναλυτική μέθοδος, την οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια, είναι η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων για μικρά ορίσματα του κυματικού αριθμού.

Αρχικά, δόθηκε έμφαση σε εφαρμογές για σφαιρικούς σκεδαστές και πιο συγκεκριμένα προβλήματα που βασίζονται στις δύο αναλυτικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων αντίστροφης σκέδασης. Οι Δάσσιος και Καμβυσσάς (1995) [1] εξέτασαν παρόμοια προβλήματα, όπου υπολογίζεται το σ (διατομή σκέδασης), που είναι άμεσα συνδεδεμένο με το μακρινό πεδίο, για διαφορετικές θέσεις της σημειακής πηγής.

Πιο αναλυτικά, στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία ακουστικής σκέδασης με την ανάλυση των βασικών εννοιών, των συνοριακών συνθηκών ανά περίπτωση και την προσθήκη της συνθήκης ακτινοβολίας Sommerfeld. Έπεται, δίνεται η διατύπωση του προβλήματος από τη μαθηματική του σκοπιά και η περιγραφή του μέσω ενεργειακών συναρτήσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετάμε τα θεωρήματα σκέδασης με πρώτα αυτά των επίπεδων κυμάτων και έπειτα αυτά των σφαιρικών. Ακολούθως, έχουμε την ανάλυση της δομής του πολυστρωματικού σκεδαστή και την παράθεση των θεωρημάτων για N πηγές. Διατυπώνονται οι σχέσεις σκέδασης και έχουμε τον διαχωρισμό των προβλημάτων σκέδασης σε ευθέα και αντίστροφα με την επισήμανση των χαρακτηριστικών που συνοδεύουν την καθεμία από τις παραπάνω κατηγορίες προβλημάτων αντίστοιχα.

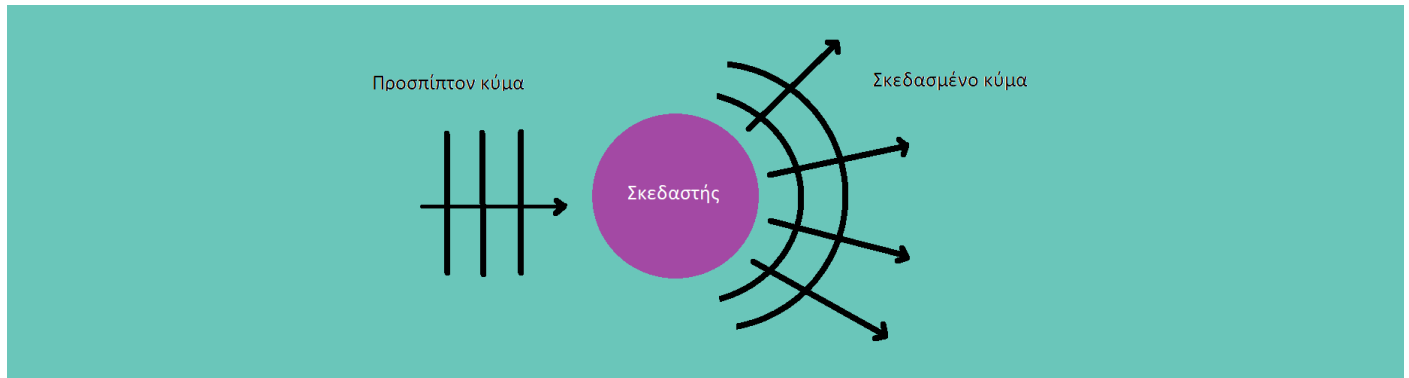
Στο Κεφάλαιο 3, αναλύουμε τις βασικές συνιστώσες της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων και παραθέτουμε τους συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων που προκύπτουν, αναλόγως το είδος του σκεδαστή. Στη συνέχεια, έχουμε την περιγραφή δύο μεθόδων επίλυσης προβλημάτων αντίστροφης σκέδασης: της μεθόδου μακρινού πεδίου και της μεθόδου κοντινού πεδίου. Τέλος, έχουμε τον υπολογισμό του μακρινού πεδίου και της διατομής σκέδασης στις χαμηλές συχνότητες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στα προβλήματα σκέδασης για περισσότερες από μία πηγές και έχουμε την αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος σκέδασης για δύο πηγές τοποθετημένες σε αυθαίρετες θέσεις. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, έχουμε μια ανασκόπηση της εργασίας και συσχέτιση της με το ήδη υπάρχον ερευνητικό έργο. Επιπλέον, παρατίθενται προτάσεις αναφορικά με τη συνέχισή της.

1. Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων

1.1 Προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων

1.1.1 Περιγραφή του προβλήματος



Εικόνα 1- Ακουστική σκέδαση

Θεωρούμε ως μέσο διάδοσης των ακουστικών κυμάτων ένα ομογενές, ιστροπικό, μη απορροφούν και μη φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 . Τα ακουστικά κύματα περιγράφονται από μεταβολές στο πεδίο υπερπίεσης $U(\mathbf{r}, t)$, με το \mathbf{r} να αναφέρεται στη θέση παρατήρησης και το t στο χρόνο.

Τα ακουστικά κύματα διαδίδονται με βάση τις ακόλουθες εξισώσεις, με τις οποίες επιτυγχάνεται η σύνδεση του πεδίου ακουστικής ταχύτητας \mathbf{V} με το πεδίο ακουστικής υπερπίεσης U στο μέσο διάδοσης:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

και

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t) + \delta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) \quad (1.2)$$

όπου συμβολίζεται με :

γ η μέση συμπιεστότητα

ρ η πυκνότητα της μάζας του ρευστού

δ οι απώλειες κατά την διάδοση των κυμάτων. Χαρακτηριστικά έχουμε, $\delta > 0$ όπου υπάρχουν απώλειες και $\delta = 0$, όπου δεν υπάρχουν.

Οι παραπάνω φυσικές παράμετροι ρ , γ και δ , χαρακτηρίζουν το μέσο διάδοσης.

Αναλόγως, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Περίπτωση $\delta > 0$, τότε έχουμε τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\gamma\rho} \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) + \frac{\delta}{\rho} \nabla^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.3)$$

η οποία προκύπτει από την παραγωγή της (1.1) ως προς το χρόνο t και τη χρήση της (1.2)

και σχετίζεται με τη διάδοση της $U(\mathbf{r}, t)$ (πεδίο πίεσης).

2. Περίπτωση $\delta = 0$, τότε έχουμε την κλασσική κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\gamma\rho} \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\mathbf{r}, t) = c^2 \Delta U(\mathbf{r}, t)$$

όπου

$$c = \sqrt{\frac{1}{\gamma\rho}}$$

με το $c > 0$ να αποτελεί τη φασική ταχύτητα, δηλαδή την ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα ακουστικά κύματα.

Προκύπτει από την παραπάνω με αντικατάσταση $\delta = 0$ (δεν έχουμε ιξώδες).

Στην περίπτωση αστρόβιλων μέσων ισχύει:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\gamma\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) + \frac{\delta}{\rho} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{\gamma\rho} \nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \frac{\delta}{\rho} \nabla^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.5)$$

η οποία προκύπτει με παραγωγή της (1.2) ως προς το χρόνο και χρήση της (1.1).

Στην περίπτωση αστρόβιλου μέσου ισχύει:

$$\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) = \nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \quad (1.6)$$

Επομένως έχουμε την ύπαρξη βαθμωτής συνάρτησης $\Phi(\mathbf{r}, t)$ (συνάρτηση δυναμικού πεδίου ταχύτητας) για την οποία θα ισχύει:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

Χαρακτηριστικά, η εξίσωση (1.5) ικανοποιείται τόσο από το δυναμικό της ταχύτητας Φ , όσο από την ταχύτητα \mathbf{V} και την υπερπίεση U .

Από τις (1.5), (1.6), διαπιστώνουμε πως ισχύει η παραπάνω εξίσωση και για την $\Phi(\mathbf{r}, t)$ δηλαδή:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\gamma\rho} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\delta}{\rho} \nabla^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.8)$$

Όμως, στα ακουστικά κύματα οι συναρτήσεις U , \mathbf{V} , Φ παρουσιάζουν αρμονική χρονική εξάρτηση, δηλαδή ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$U(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[u(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad (1.9)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{v}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad (1.10)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\varphi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad (1.11)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα και u, v, φ χρονικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Οπότε με αντικατάσταση της (1.9) στην (1.4) προκύπτει πως:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0$$

ή

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.12)$$

η οποία αποτελεί την εξίσωση Helmholtz.

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + k^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0$$

με

$$k^2 = \frac{\omega^2 \gamma \rho}{1 - i\omega \gamma \delta}$$

όπου k ορίζεται ως κυματάριθμος και η κυκλική συχνότητα ω η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογη με την περίοδο T . Χαρακτηριστικά η σχέση που συνδέει ω και T είναι:

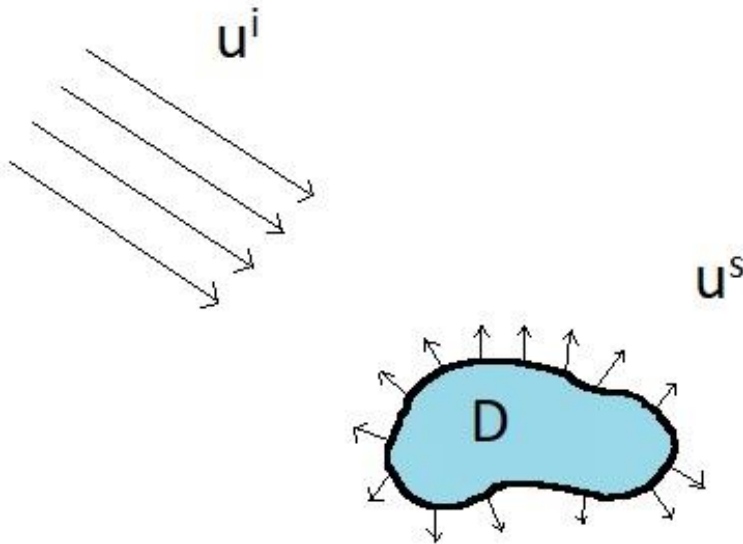
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Επιπλέον ορίζουμε το λ (μήκος κύματος) ως εξής:

$$\lambda = cT = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$u(\mathbf{r}) = \frac{ik^2}{\omega\gamma} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{i\omega\rho}{1-i\omega\gamma\delta} \varphi(\mathbf{r}) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1-i\omega\gamma\delta}{i\omega\rho} \nabla u(\mathbf{r}) \quad (1.14)$$



Εικόνα 2-Προσπίπτον και σκεδασμένο κύμα

Σκέδαση ακουστικών κυμάτων έχουμε όταν ένα ακουστικό κύμα u^i (προσπίπτον ακουστικό κύμα- incident acoustic wave) προσπίπτει σε ένα εμπόδιο D (σκεδαστής) και έχουμε τη δημιουργία ενός νέου κύματος u^s (σκεδασμένο ακουστικό κύμα- scattered wave). Οι παραπάνω συνιστώσες απεικονίζονται και σχηματικά στην

εικόνα 2. Τα δύο παραπάνω κύματα (προσπίπτον και σκεδασμένο) αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz:

$$\Delta u + ku^2 = 0 \quad (1.15)$$

Επίσης το ολικό ακουστικό πεδίο u^t στο εξωτερικό του σκεδαστή D είναι:

$$u^t = u^i + u^s \quad (1.16)$$

Έχοντας περιγράψει τις βασικές εξισώσεις που χαρακτηρίζουν την κίνηση ρευστού σε ένα αστρόβιλο μέσο διάδοσης και τη σύνδεση ανάμεσα στην ταχύτητα, στην υπερπίεση και στο δυναμικό ταχύτητας των μορίων του ρευστού, έχουμε ήδη κάνει μια εισαγωγή στη διάδοση ακουστικού κύματος. Χαρακτηριστικά, τα ακουστικά κύματα δημιουργούνται από διαταραχές της υπερπίεσης μέσα σε ένα υλικό μέσο. Ακολούθως, η μελέτη μας θα εστιαστεί στην επίδραση εμποδίων στην διάδοση ακουστικών κυμάτων. Τα εμπόδια ονομάζονται σκεδαστές και τα κύματα που προκύπτουν στη συνέχεια ονομάζονται σκεδασμένα ακουστικά κύματα και αποτελούν κύριο αντικείμενο μελέτης της θεωρίας της ακουστικής σκέδασης [21]-[28].

1.1.2 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνειά του ∂D , μεταβάλλονται ανάλογα με τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή D [19]. Πιο συγκεκριμένα, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Μαλακός σκεδαστής (soft boundary condition) :

$$u = 0 \text{ στο } \partial D \text{ (συνθήκη Dirichlet)} \quad (1.3)$$

- Σκληρός σκεδαστής (hard boundary condition):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ στο } \partial D \text{ (συνθήκη Neumann)}. \quad (1.4)$$

- Ανθεκτικός σκεδαστής (impedance boundary condition):

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik\lambda u = 0 \text{ στο } \partial D \text{ (συνθήκη Robin)}. \quad (1.5)$$

- Διαπερατός σκεδαστής (penetrable boundary condition)

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{k_0^2 \gamma_1}{k_1^2 \gamma_0} \frac{\partial u_1}{\partial n} \end{cases} \text{ στο } \partial D. \quad (1.6)$$

1.1.3 Συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

Για την καλή τοποθέτηση ενός προβλήματος είναι απαραίτητη η ύπαρξη μιας συνθήκης στο άπειρο, καθώς αυτό αποτελεί σύνορο του εξωτερικού προβλήματος. Η συνθήκη αυτή διασφαλίζει την ασυμπτωτική τάξη με την οποία εξασθενεί το σκεδασμένο πεδίο, όσο απομακρύνεται από το σκεδαστή, καθώς και την δράση του σκεδαστή ως πηγής, που επανεκπέμπει την ενέργεια που λαμβάνει από το προσπίπτον κύμα, μέσω του σκεδασμένου κύματος. Εκ τούτου, προκύπτει και ο όρος συνθήκη ακτινοβολίας (radiation condition) που συνοδεύει τη συνθήκη στο άπειρο [2]. Ευρείας χρήσης είναι η συνθήκη:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{r}) - iku^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r}\right), r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

όπου $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, η οποία είναι γνωστή ως η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και ικανοποιείται από το σκεδασμένο ακουστικό πεδίο.

1.1.4 Διατύπωση προβλημάτων σκέδασης

Ας δούμε λοιπόν συνοπτικά τη διατύπωση των προβλημάτων ακουστικής σκέδασης, αναλόγως το είδος του σκεδαστή:

Ζητείται η $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ για την οποία ισχύουν:

1. Μαλακός σκεδαστής (Πρόβλημα Dirichlet).

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$u = 0 \text{ στο } \partial D,$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{r}) - iku^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

- Σκληρός σκεδαστής (Πρόβλημα Neumann).

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ στο } \partial D,$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{r}) - iku^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

- Ανθεκτικός σκεδαστής (Πρόβλημα Robin).

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + i k u = 0 \text{ στο } \partial D,$$

$$u = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{r}) - i k u^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

- Διαπερατός σκεδαστής (Συνθήκες διαπερατότητας). Ζητείται ο ορισμός των συναρτήσεων $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και $u_1 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0, \text{ στο } D,$$

$$u_0 = u_1$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n}$$

$$u_0 = u^i + u^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u^s(\mathbf{r}) - i k u^s(\mathbf{r}) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$$

όπου ο δείκτης 0 αναφέρεται στο εξωτερικό και ο δείκτης 1 στο εσωτερικό του σκεδαστή. Όπως διαπιστώνουμε οι παραπάνω διατυπώσεις, προκύπτουν ως συνδυασμός των εξισώσεων Helmholtz και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών.

1.2 Ενέργεια

1.2.1 Ακουστική ένταση και συναρτήσεις ενέργειας

Ορισμός

Η κινητική ενέργεια ορίζεται ως:

$$\frac{\rho}{2} |\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)|^2$$

Αντίστοιχα η δυναμική ενέργεια:

$$\frac{\gamma}{2} |U(\mathbf{r}, t)|^2$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας του ακουστικού κύματος ορίζεται ως εξής:

$$W(\mathbf{r}, t) = \text{κινητική} + \text{δυναμική ενέργεια}$$

Δηλαδή:

$$W(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{\gamma}{2} |U(\mathbf{r}, t)|^2$$

ή

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2} |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\gamma}{2} |u(\mathbf{r})|^2$$

ή

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2} \left\{ |\nabla\varphi(\mathbf{r})|^2 + \frac{|k|^4}{\rho\gamma\omega^2} |\varphi(\mathbf{r})|^2 \right\}$$

ή

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\rho\gamma\omega^2}{|k|^4} + |u(\mathbf{r})|^2 \right\}$$

Μετράμε την πυκνότητα ενέργειας ως μονάδες ενέργειας ανά μονάδα όγκου.

Ορισμός

Ως ροή ισχύος ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$I(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}^+(\mathbf{r}, t)\}$$

ή

$$I(\mathbf{r}) = \text{Re}\{u(\mathbf{r})\nabla\varphi^+(\mathbf{r})\}$$

ή

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho} \text{Im}\{(1 - i\omega\delta\gamma)u^+(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r})\}$$

και αν $\delta=0$ τότε:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho} \text{Im}\{u^+(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r})\}$$

Θεώρημα (Νόμος διατήρησης της ενέργειας)

Οι συναρτήσεις πυκνότητα ενέργειας (W) και ροή ισχύος (I) συνδέονται ως εξής:

$$W_t(\mathbf{r}, t) + \nabla I(\mathbf{r}, t) = \delta \text{Re}[V(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla(\nabla \cdot \overline{V}(\mathbf{r}, t))]$$

Απόδειξη

$$W_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} V \cdot \bar{V} + \frac{\gamma}{2} P \cdot \bar{P} \right) = \frac{\rho}{2} (\bar{V} \cdot V_t + V \cdot \bar{V}_t) + \frac{\gamma}{2} (\bar{P} \cdot P_t + P \cdot \bar{P}_t)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση όπου:

$$P_t = -\frac{1}{\gamma} \nabla \cdot V$$

και

$$V_t = \frac{-\nabla P + \delta \nabla (\nabla \cdot V)}{\rho}$$

προκύπτει:

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{\delta}{2} [\bar{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot V) + V \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{V})] - \frac{1}{2} [\nabla \cdot (P \cdot \bar{V}) + \nabla \cdot (\bar{P} \cdot V)] \\ &= \delta \text{Re}[V \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{V})] - \text{Re}[\nabla \cdot (P \bar{V})] \end{aligned}$$

Ορισμός 1.1

Η ενεργειακή διατομή σκέδασης ορίζεται με βάση την παρακάτω σχέση:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}^s(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r})}$$

Επομένως το $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$ αποτελεί έκφραση του ποσού ενέργειας που σκεδάζεται προς τη διεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{r}}$, προς το ποσό ενέργειας το οποίο προσπίπτει στο σκεδαστή ως προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος $\hat{\mathbf{d}}$, καθώς η απόσταση από το σκεδαστή πλησιάζει στο άπειρο. Το $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$ μετριέται σε μονάδες εμβαδού.

2. Θεωρία σκέδασης

2.1 Θεωρήματα σκέδασης για επίπεδα ακουστικά κύματα

Θεώρημα 2.10 (Αμοιβαιότητα)

Έστω δύο επίπεδα ακουστικά κύματα $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}) = e^{ik\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}}$ και $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{q}}) = e^{ik\hat{\mathbf{q}}\mathbf{r}}$ που προσπίπτουν σε μαλακό σκεδαστή D , θα ισχύει ότι:

$$u^\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{q}}) = u^\infty(-\hat{\mathbf{q}}; -\hat{\mathbf{p}}).$$

Θεώρημα 2.11 (Γενικό)

Έστω δύο επίπεδα ακουστικά κύματα $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}) = e^{ik\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}}$ και $u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{q}}) = e^{ik\hat{\mathbf{q}}\mathbf{r}}$ που προσπίπτουν σε μαλακό σκεδαστή D και $u^\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}})$, $u^\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{q}})$ τα μακρινά τους πεδία αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι:

$$u^\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{q}}) + \overline{u^\infty(\hat{\mathbf{q}}; \hat{\mathbf{p}})} = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} u^\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{q}}) \overline{u^\infty(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}})} ds(\hat{\mathbf{r}}).$$

$$u^\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{q}}) = u^\infty(-\hat{\mathbf{q}}; -\hat{\mathbf{p}}).$$

Θεώρημα 2.12 (Οπτικό)

Έστω ότι έχουμε ένα μαλακό σκεδαστή. Τότε θα ισχύει:

$$\sigma^s = -\frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}[u^\infty(\hat{\mathbf{p}}; \hat{\mathbf{p}})].$$

2.2 Θεωρήματα σκέδασης για σφαιρικά κύματα

Τα θεωρήματα σκέδασης των σφαιρικών ακουστικών κυμάτων αποτελούν γενίκευση των αντίστοιχων θεωρημάτων για τα επίπεδα ακουστικά κύματα.

- Τα σφαιρικά ακουστικά κύματα που εκπέμπονται από μια σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση \mathbf{r}_0 έχουν τη μορφή:

$$u_\alpha^i(\mathbf{r}) = A \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\alpha|}}{|\mathbf{r}-\alpha|}, \quad \mathbf{r} \neq \alpha \quad (2.8)$$

όπου A είναι μια μιγαδική σταθερά κανονικοποίησης και k είναι ο κυματικός αριθμός των σφαιρικών κυμάτων. Τα κύματα αυτά ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz και ο συμβολισμός $u_\alpha^i(\mathbf{r})$ μας δηλώνει ότι εξαρτώνται από τη θέση της πηγής α .

- Η σχέση που συνδέει το προσπίπτον u_α^i , το σκεδασμένο u_α^s και το ολικό εξωτερικό ακουστικό πεδίου u_α^t είναι:

$$u_\alpha^t = u_\alpha^i + u_\alpha^s \quad (2.9)$$

Θεώρημα 2.1 (Αμοιβαιότητα)

Έστω ότι έχουμε δύο σημειακές πηγές στις θέσεις α και \mathbf{b} του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και για κάθε σκεδαστή D έχουμε ότι τα σκεδασμένα πεδία πληρούν την παρακάτω σχέση:

$$h(k\alpha)u_\alpha^s(\mathbf{b}) = h(k\mathbf{b})u_\mathbf{b}^s \quad (2.45)$$

Απόδειξη.

Για τα ολικά εξωτερικά πεδία ισχύουν:

$$\begin{aligned} u_\alpha^t &= u_\alpha^i + u_\alpha^s \\ u_\mathbf{b}^t &= u_\mathbf{b}^i + u_\mathbf{b}^s \end{aligned} \quad (2.46)$$

Εξαιτίας της διγραμμικότητας της $\{.,.\}_S$, όπου $S = \partial D$ ισχύει:

$$\{u_\alpha^t, u_\mathbf{b}^t\}_S = \{u_\alpha^i, u_\mathbf{b}^i\}_S + \{u_\alpha^i, u_\mathbf{b}^s\}_S + \{u_\alpha^s, u_\mathbf{b}^i\}_S + \{u_\alpha^s, u_\mathbf{b}^s\}_S.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβατικές και συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν για κάθε είδους σκεδαστή έχουμε ότι:

$$\{u_\alpha^t, u_\mathbf{b}^t\}_S = 0$$

Κάνοντας εφαρμογή του δεύτερου θεωρήματος Green έχοντας ως συναρτήσεις τις u_α^i και $u_\mathbf{b}^i$, οι οποίες είναι ομαλές και αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, έχουμε ότι:

$$\{u_\alpha^i, u_\mathbf{b}^i\}_S = 0$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$\{u_\alpha^s, u_\mathbf{b}^s\}_S = 0$$

Αναλόγως για τα προσπίπτοντα πεδία έχουμε:

$$u_\alpha^i(\mathbf{b}) = \frac{1}{ikh(k\alpha)} \frac{e^{ik|\mathbf{b}-\alpha|}}{|\mathbf{b}-\alpha|}$$

Με εναλλαγή των θέσεων πηγής παρατήρησης προκύπτει:

$$u_\mathbf{b}^i(\alpha) = \frac{1}{ikh(k\alpha)} \frac{e^{ik|\alpha-\mathbf{b}|}}{|\alpha-\mathbf{b}|}$$

Επομένως από τις δύο παραπάνω σχέσεις έπεται ότι:

$$h(k\alpha)u_{\alpha}^i(\mathbf{b}) = h(kb)u_b^i(\alpha) \quad (2.56)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2.45) και (2.56) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.46) προκύπτει ότι:

$$h(k\alpha)u_{\alpha}^t(\mathbf{b}) = h(kb)u_b^t(\alpha) \quad (1.57)$$

Επομένως έχουμε ότι η ίδια σχέση αμοιβαιότητας ικανοποιείται τόσο από το προσπίπτον όσο και από το σκεδασμένο και το ολικό ακουστικό πεδίο.

- Στην περίπτωση που η θέση των σημειακών πηγών είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας, άρα έχουμε $\alpha = b$, οι σχέσεις (2.45), (2.56), (2.57) μας δίνουν τις:

$$u_{\alpha}^s(\mathbf{b}) = u_b^s(\alpha)$$

$$u_{\alpha}^i(\mathbf{b}) = u_b^i(\alpha)$$

$$u_{\alpha}^t(\mathbf{b}) = u_b^t(\alpha)$$

Επομένως τα προσπίπτοντα, σκεδασμένα και ολικά ακουστικά πεδία μένουν ανεπηρέαστα από την εναλλαγή θέσης πηγής και παρατήρησης.

- Στη σχέση (2.45) για $\alpha \rightarrow \infty$ και $b \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι:

$$u^{\infty}(\hat{\mathbf{b}}; -\hat{\alpha}) = u^{\infty}(\hat{\alpha}; -\hat{\mathbf{b}}).$$

Οπότε, διαπιστώνουμε πως δεν προκύπτει σχέση αμοιβαιότητας για τα μακρινά πεδία των σφαιρικών ακουστικών κυμάτων, διότι καταλήξαμε σε επίπεδα κύματα αφότου πήραμε τα όρια των α , b στο ∞ .

Λήμμα 1.1

Θεωρούμε δύο σημειακές πηγές στις θέσεις α και b με προσπίπτοντα πεδία u_{α}^i , u_b^i και σκεδασμένα πεδία u_{α}^s και u_b^s αντίστοιχα και πλάτος σκέδασης g_b . Για μια σφαίρα με ακτίνα w που θα περιέχει τα α και b ισχύει:

$$\begin{aligned} & \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{S_w} \left[\overline{u_{\alpha}^i(\mathbf{r})} \frac{\partial u_b^s(\mathbf{r})}{\partial n} - u_b^s(\mathbf{r}) \frac{\partial \overline{u_{\alpha}^i(\mathbf{r})}}{\partial n} \right] ds(\mathbf{r}) \\ & = 2ae^{ika} \int_{S^2} g_b(\hat{r}) e^{ik\hat{r}a} ds(\hat{r}). \quad (12.2) \end{aligned}$$

Λήμμα 1.2

Θεωρούμε τα προσπίπτοντα ακουστικά κύματα u_α^i, u_b^i , παραγόμενα από σημειακές πηγές στις θέσεις a και b αντίστοιχα και έστω u_b^s το σκεδασμένο πεδίο της πηγής στη θέση b . Επιπλέον, θεωρούμε σφαίρα με κέντρο το a και ακτίνα ε , δηλαδή την $S_{a,\varepsilon} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3: |\mathbf{a} - \mathbf{r}| = \varepsilon\}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{0,a}} \left[\overline{u_\alpha^i(\mathbf{r})} \frac{\partial u_b^s(\mathbf{r})}{\partial n} - u_b^s(\mathbf{r}) \frac{\partial \overline{u_\alpha^i(\mathbf{r})}}{\partial n} \right] ds(\mathbf{r}) = 4\pi a e^{ika} u_b^s(\mathbf{a}). \quad (12.3)$$

Θεώρημα 2.2 (Γενικό θεώρημα σκέδασης για σφαιρικά κύματα)

Αν έχουμε δύο σημειακές πηγές τοποθετημένες στις θέσεις a και b εξωτερικά ενός σκεδαστή D με $S = \partial D$ έχουμε:

$$G_b(\alpha) + \overline{G_\alpha(\mathbf{b})} = \frac{1}{2\pi} \int_S g_b(\hat{\mathbf{r}}) \overline{g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) = T_{a,b} \quad (1.10)$$

Όπου: $T_{\alpha,b} = -\frac{ik}{4\pi} \{\overline{u_\alpha^t}, u_b^t\}_S$.

Οι τιμές του $T_{\alpha,b}$ εξαρτώνται από το είδος του σκεδαστή. Πιο συγκεκριμένα:

- $T_{\alpha,b} = 0$ (μαλακός και σκληρός σκεδαστής) (1.11)
- $T_{\alpha,b} = -\frac{k^2 \lambda}{2\pi} \int_S \overline{u_\alpha^t(\mathbf{r})} u_b^t(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r})$ (ανθεκτικός σκεδαστής) (1.12)
- $T_{\alpha,b} = -\frac{k}{2\pi} \text{Im}(\beta) \int_D \overline{\nabla u_\alpha^-(\mathbf{r})} \nabla u_b^-(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r})$ (διαπερατός σκεδαστής) (1.13)

Όπου σταθερά της συνθήκης διαπερατότητας

Απόδειξη.

Ισχύει ότι:

$$u_\alpha^t = u_\alpha^i + u_\alpha^s$$

Θέτοντας $a=b$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_S \left(\overline{u_\alpha^t} \frac{\partial u_b^t}{\partial n} - u_b^t \frac{\partial \overline{u_\alpha^t}}{\partial n} \right) ds &= \int_S \left(\overline{u_\alpha^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_\alpha^i}}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_S \left(\overline{u_\alpha^s} \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial \overline{u_\alpha^s}}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_S \left(\overline{u_\alpha^i} \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial \overline{u_\alpha^i}}{\partial n} \right) ds \\ &+ \int_S \left(\overline{u_\alpha^s} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_\alpha^s}}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

$$+ \int_S \left(\overline{u_\alpha^s} \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial \overline{u_\alpha^s}}{\partial n} \right) ds$$

Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών έχουμε:

$$\int_S \left(\overline{u_a^t} \frac{\partial u_b^t}{\partial n} - u_b^t \frac{\partial \overline{u_a^t}}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Και με εφαρμογή του Θεωρήματος Green με συναρτήσεις τις $\overline{u_a^i}$ και u_b^i στο Ω^- , έχουμε

$$\begin{aligned} \int_S \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds &= \int_\Omega \left(\overline{u_a^i} \Delta u_b^i - u_b^i \Delta \overline{u_a^i} \right) dv \\ &= \int_{\Omega^-} \left(\overline{u_a^i} (-k^2 u_b^i) - u_b^i (-k^2 \overline{u_a^i}) \right) dv = 0. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των επιφανειακών ολοκληρωμάτων των $\overline{u_a^i}$ και u_b^i :

Έστω ότι έχουμε δύο μικρές σφαίρες S_1 (ακτίνας ρ_1 και κέντρου a) και S_2 (ακτίνας ρ_2 και κέντρου b) οι οποίες δεν έχουν κοινά σημεία. Επιπλέον, θεωρούμε μια μεγαλύτερη σφαίρα S_W , με το κέντρο της να είναι η αρχή των αξόνων και που να περιβάλλει το σκεδαστή και τις S_1, S_2 . Εφαρμόζουμε τώρα το 2ο Θεώρημα Green για τις $\overline{u_a^i}$ και u_b^i (ομαλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz) και έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_S \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds &= \int_{S_W} \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds \\ &= - \int_{S_1} \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds \\ &= - \int_{S_2} \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds \end{aligned}$$

Τότε όταν $W \rightarrow \infty$ από τη (12-2) ισχύει ότι:

$$\int_{S_W} \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds = 2\alpha e^{ik\alpha} \int_{S^2} g_b(\hat{r}) e^{ik\hat{r}\alpha} ds(\hat{r}).$$

Και επειδή οι συναρτήσεις τις $\overline{u_a^i}$ και u_b^i είναι ομαλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, εσωτερικά της σφαίρας S_2 ισχύει:

$$\int_{S_2} \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds = 0$$

Όταν το $\rho_1 \rightarrow 0$ από τη (12-3) έχουμε:

$$\int_{S_1} \left(\overline{u_a^i} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_a^i}}{\partial n} \right) ds = 4\pi\alpha e^{ik\alpha} u_b^i(\alpha).$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\int_S \left(\overline{u_\alpha^i} \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial \overline{u_\alpha^i}}{\partial n} \right) ds = -\frac{4\pi}{ik} G_b(\hat{\alpha}),$$

Αναλόγως βρίσκουμε ότι

$$\int_S \left(\overline{u_\alpha^s} \frac{\partial u_b^i}{\partial n} - u_b^i \frac{\partial \overline{u_\alpha^s}}{\partial n} \right) ds = -\frac{4\pi}{ik} G_\alpha(\hat{\mathbf{b}}),$$

Και επειδή u_α^s και u_b^s αποτελούν ομαλές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz εξωτερικά του σκεδαστή με εφαρμογή του δεύτερου θεωρήματος Green προκύπτει:

$$\int_S \left(u_\alpha^s \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial u_\alpha^s}{\partial n} \right) ds = \int_{S_W} \left(\overline{u_\alpha^s} \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial \overline{u_\alpha^s}}{\partial n} \right) ds.$$

Για $W \rightarrow \infty$ και με χρήση της Έχουμε:

$$\int_{S_W} \left(\overline{u_\alpha^s} \frac{\partial u_b^s}{\partial n} - u_b^s \frac{\partial \overline{u_\alpha^s}}{\partial n} \right) ds = \frac{2i}{k} \int_{S^2} \overline{g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})} g_b(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}).$$

Θεωρούμε το σφαιρικό κύμα u_α^i που προέρχεται από μια σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{r}_0 . Ορίζουμε την ενεργειακή διατομή σκέδασης για το κύμα αυτό ως:

$$\sigma_0 = \frac{1}{k^2} \int_{S^2} |f(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0)|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.14)$$

Όπου f είναι το μακρινό πεδίο του προσπίπτοντος σφαιρικού ακουστικού κύματος. Η ενεργειακή διατομή σκέδασης αποτελεί μέτρο της επίδρασης του σκεδαστή στην ενέργεια του κύματος, εκφράζοντας το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια του προσπίπτοντος ακουστικού κύματος διαπερνά την μοναδιαία επιφάνεια που είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Θεώρημα 2.3 (Οπτικό)

Ένα σφαιρικό κύμα u_α^i που προέρχεται από μια σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση α έχει ενεργειακή διατομή σκέδασης:

$$\sigma_\alpha^s = \frac{1}{k^2} \int_{S^2} |g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.15)$$

Η ενεργειακή διατομή απορρόφησης ορίζεται ως:

$$\sigma_\alpha^\alpha = \frac{1}{k} \text{Im} \int_{S^2} u_\alpha^t \frac{\partial \overline{u_\alpha^t}}{\partial n} ds$$

Και η αποσβενυμένη ενεργειακή διατομή:

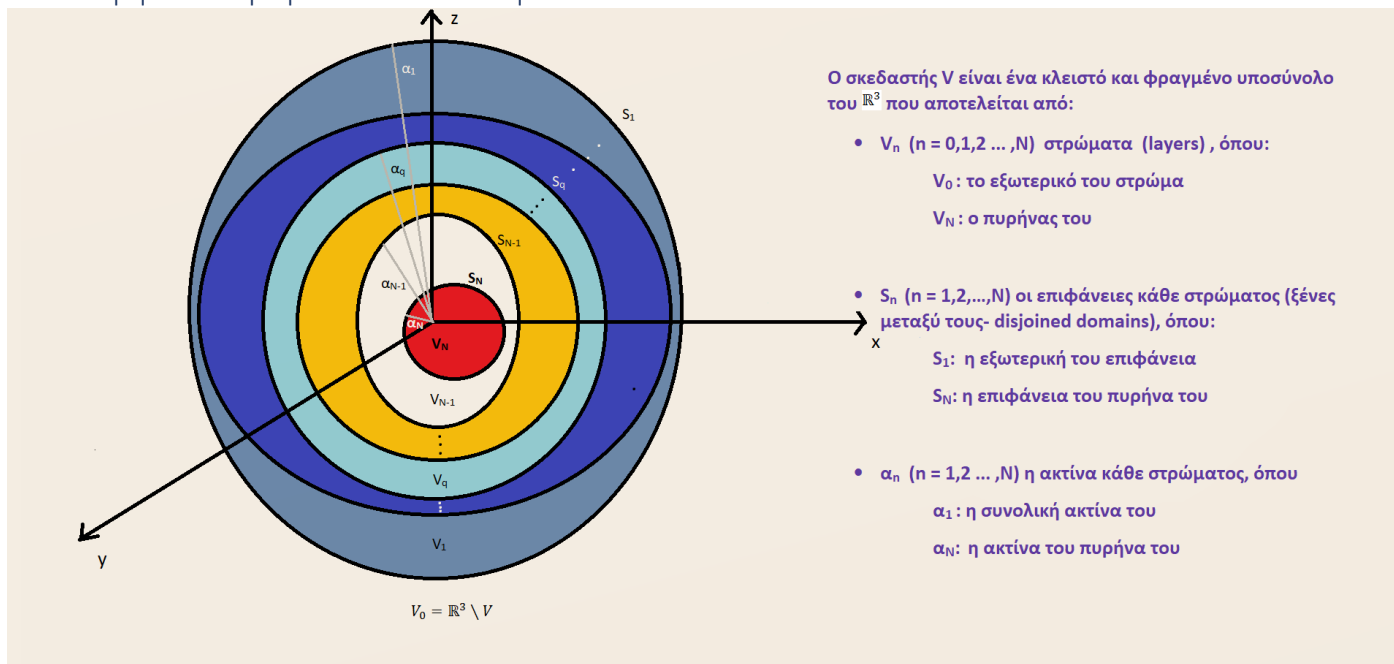
$$\sigma_{\alpha}^s = -\frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re}[G_{\alpha}(\alpha)].$$

Απόδειξη.

Αν εφαρμόσουμε το γενικό θεώρημα σκέδασης για $a=b$ και από τη σχέση (1.15), φθάνουμε στο ζητούμενο.

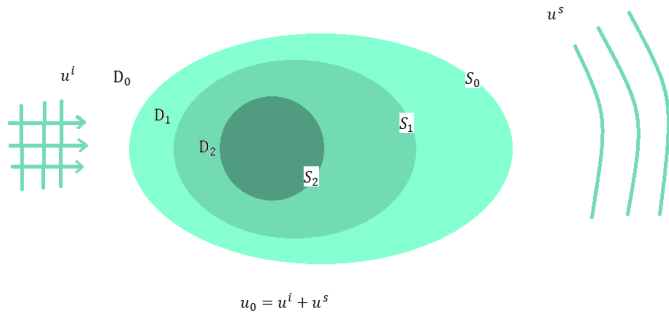
2.3 Πολυστρωματικός σκεδαστής και N πηγές

2.3.1 Δομή πολυστρωματικού σκεδαστή



Εικόνα 3-Δομή πολυστρωματικού σκεδαστή

Εξετάζουμε τώρα κάποια αρχικά δεδομένα, σχετικά με πολυστρωματικούς σκεδαστές. Έστω $V_0 = \mathbb{R}^3 \setminus V$, ο εξωτερικός χώρος ενός πολυστρωματικού σκεδαστή V . Ο σκεδαστής χωρίζεται από $P - 1$ το πλήθος επιφάνειες S_p σε P το πλήθος στρώματα V_p , $p = 1, \dots, P$ που χαρακτηρίζονται από ακτίνες r_1, \dots, r_P και φυσικές παραμέτρους $k_1, \dots, k_P, \rho_1, \dots, \rho_P, \gamma_1, \dots, \gamma_P$. Έστω V_p είναι ο πυρήνας του σκεδαστή που μπορεί να είναι ακουστικά μαλακός, σκληρός, ανθεκτικός ή διαπερατός. Θεωρούμε ότι διεγείρεται από N το πλήθος σημειακές πηγές αυθαίρετα καταναμημένες στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του. Κάθε μία από αυτές τις πηγές, βρίσκεται στην θέση $\mathbf{r}_{q,j}$, όπου V_q το στρώμα στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται η πηγή, και j η αρίθμηση της ως προς τις N_q το πλήθος πηγές που βρίσκονται στο στρώμα V_q με $N_1 + N_2 + \dots + N_Q = N$, όπου Q το πλήθος των στρωμάτων που περιέχουν πηγές με $Q \leq P + 1$ αφού μπορεί να υπάρχουν πηγές στο εξωτερικό του σκεδαστή.



Εικόνα 4- Ακουστικά πεδία σε πολυστρωματικό σκεδαστή

2.3.2 Ακουστική ένταση και πολυστρωματικός σκεδαστής

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbf{I}_{q,j}^q$ για την ακουστική ένταση (acoustic intensity) στο στρώμα V_q από την σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{q,j}^q(\mathbf{r}) &= u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{pr}}}(\mathbf{r}) + u_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{sec}}}(\mathbf{r}) \\ &+ u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{sec}}}(\mathbf{r}) + u_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{pr}}}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Επιπλέον, η επιμέρους πρωτογενής ακουστική ένταση που προκαλείται από το επιμέρους πρωτογενές ακουστικό πεδίο που δημιουργείται από μια σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r}) &= u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{pr}}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q \setminus \{\mathbf{r}_{q,j}\} \\ \mathbf{I}_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r}) &= u_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{sec}}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q \end{aligned}$$

Είναι χαρακτηριστικό, πως μέσα στο στρώμα V_q εξαιτίας του ότι τα πρωτεύοντα και δευτερεύοντα πεδία διαδίδονται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις, μπορεί να έχουμε και αλληλεπιδράσεις μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερεύοντος πεδίου της ίδιας σημειακής πηγής. Αυτή η αλληλεπίδραση δημιουργεί μια επιπλέον ακουστική ένταση την:

$$\mathbf{I}_{q,j}^{\text{ex}}(\mathbf{r}) = u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{sec}}}(\mathbf{r}) + u_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r})\nabla\overline{\varphi_{q,j}^{\text{pr}}}(\mathbf{r}).$$

Επομένως, η επιμέρους ακουστική ένταση στο στρώμα διέγερσης V_q εξαιτίας της σημειακής πηγής στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$ είναι η:

$$\mathbf{I}_{q,j}^q(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_{q,j}^{\text{ex}}(\mathbf{r})$$

Αντίστοιχα η έντασης διέγερσης του στρώματος V_q εξαιτίας της σημειακής πηγής q συμβολίζεται με \mathbf{I}_q^q και ισούται με :

$$\mathbf{I}_q^q(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_q^{\text{pr}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_q^{\text{ex}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q \setminus \{\mathbf{r}_{q,1}, \mathbf{r}_{q,2}, \dots, \mathbf{r}_{q,n_q}\}$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_q^{\text{p}}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{I}}_q^{\text{p}}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_q^{\text{pr}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_q^{\text{ex}}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_q^{\text{p}}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{I}_T^{\text{p}} = \mathbf{I}^{\text{p}} - \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{I}_{q,j}^{\text{p}}$$

$$\mathbf{I}_I^{\text{p}} = \mathbf{I}^{\text{p}} - \sum_{q=1}^Q \mathbf{I}_q^{\text{p}}$$

$$\mathbf{I}_D^{\text{p}} = \sum_{q=1}^Q \tilde{\mathbf{I}}_q^{\text{p}}$$

Εξ ορισμού σε κάθε στρώμα V_p ισχύει:

$$\mathbf{I}_T^{\text{p}} = \mathbf{I}_I^{\text{p}} + \mathbf{I}_D^{\text{p}}$$

2.3.3 Βασικές συνιστώσες του πολυστρωματικού σκεδαστή.

Για τον πολυστρωματικό σκεδαστή το πρωτεύον ακουστικό πεδίο υπερπίεσης που προκύπτει από μια σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$ δίδεται από τη σχέση:

$$u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r}) = A_{q,j} \left(\frac{e^{ik_q|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{q,j}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{q,j}|} \right), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{q,j}$$

Όπου $j = 1, \dots, n_q$ και $q = 1, \dots, Q$ η παραπάνω σχέση αποτελεί διαφοροποίηση της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Helmholtz, βλέπε [34].

Ακολουθώντας τη μέθοδο του Sommerfeld, όπως αναγράφεται στο [35], το ολικό πεδίο υπερπίεσης σε ένα στρώμα λόγω διέγερσης από μια σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{r}_{q,j} \in V_q$ δίδεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$u_{q,j}^q(\mathbf{r}) = u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r}) + u_{q,j}^{\text{seq}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q \setminus \{\mathbf{r}_{q,j}\}$$

Από εδώ και στο εξής με τον όρο επιμέρους πεδία (μεμονωμένα - individual fields), θα αναφερόμαστε στα πεδία που οφείλονται σε μια σημειακή πηγή. Χαρακτηριστικά ισχύει:

$$u_q^{\text{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} u_{q,j}^{\text{p}}(\mathbf{r})$$

που δηλώνει πως η ολική πίεση u_q^{p} του στρώματος V_p από την q σημειακή πηγή ισούται με το άθροισμα των ολικών επιμέρους ακουστικών πεδίων στο V_p , εξαιτίας όλων των σημειακών πηγών στο V_q^{ex} .

Επιπλέον, για τα στρώματα V_q που περιέχουν παραπάνω από μια σημειακές πηγές το πρωτεύον u_q^{pr} και δευτερεύον u_q^{sec} πεδίο προκύπτουν ως το άθροισμα όλων των επιμέρους πεδίων που οφείλονται σε κάθε μία από τις σημειακές πηγές επί του στρώματος V_q . Δηλαδή ισχύει:

$$u_q^{\text{pr}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} u_{q,j}^{\text{pr}}(\mathbf{r})$$

και

$$u_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} u_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r})$$

Τότε το ολικό ακουστικό πεδίο στο στρώμα V_q ορίζεται ως το άθροισμα των επιμέρους πρωτευόντων και δευτερευόντων πεδίων δηλαδή ισχύει:

$$u_q(\mathbf{r}) = u_q^{\text{pr}}(\mathbf{r}) + u_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q^{\text{ex}} \setminus \{\mathbf{r}_{q,1}, \dots, \mathbf{r}_{q,n_q}\}.$$

Επομένως το ολικό ακουστικό πεδίο u^{p} του V_p ορίζεται ως το άθροισμα όλων των επιμέρους πεδίων του. Δηλαδή έχουμε ότι:

$$u^{\text{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} u_{q,j}^{\text{p}}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q u_q^{\text{p}}(\mathbf{r})$$

2.3.1 Θεωρήματα για N πηγές

Ορισμός

Έστω ότι έχουμε ένα σκεδαστή, ο οποίος διεγείρεται από N σημειακές πηγές τοποθετημένες σε τυχαίες θέσεις \mathbf{r}^i με $i = 1, \dots, N$ εσωτερικά και εξωτερικά του. Αυτές οι σημειακές πηγές είναι διασκορπισμένες μέσα σε Q στρώματα διέγερσης V_q^{ex} , όπου $q=1, \dots, Q$ και $Q \leq P + 1$.

Για κάθε σημειακή πηγή έχουμε το πρωτεύον ακουστικό πεδίο:

$$u_q^{\text{pr}}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q^j) = A_{q,j} \frac{e^{ik_q |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q^j|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q^j|}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_q^j$$

όπου $j = 1, \dots, n_q$ και $q = 1, \dots, Q$.

Ορίζουμε ως $g_q^j(\hat{\mathbf{r}})$ το επιμέρους μακρινό πεδίο και περιγράφει την αντίδραση του σκεδαστή στο μακρινό πεδίο ως προς την κατεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{r}}$, λόγω της ακουστικής διέγερσης από τη σημειακή πηγή στη θέση \mathbf{r}_q^j του στρώματος V_q^{ex} . Έπειτα, ορίζουμε το q μακρινό πεδίο ακουστικής διέγερσης $g_q(\hat{\mathbf{r}})$ (q-excitation),

ως το άθροισμα των επιμέρους μακρινών πεδίων, που δημιουργούνται από όλες τις σημειακές πηγές που βρίσκονται στο στρώμα V_q^{ex}

$$g_q(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{j=1}^{n_q} g_q^j(\hat{\mathbf{r}}).$$

Το συνολικό μακρινό πεδίο $g(\hat{\mathbf{r}})$, από όλες τις σημειακές πηγές είναι ίσο με το άθροισμα όλων των επιμέρους q -διέγερσης μακρινών πεδίων. Επομένως έχουμε ότι ισχύει:

$$g(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{q=1}^Q g_q(\hat{\mathbf{r}}).$$

Παρόμοια, ορίζουμε την επιμέρους διατομή σκέδασης σ_q^j , την q -διέγερσης διατομή σκέδασης σ_q και την ολική διατομή σκέδασης (overall cross section) σ , ως τη διατομή σκέδασης εξαιτίας της σημειακής πηγής στη θέση $\mathbf{r}_q^j \in V_q^{\text{ex}}$, των σημειακών πηγών στο στρώμα V_q^{ex} και όλων των N σημειακών πηγών αντιστοίχως, ως εξής:

$$\sigma_q^j = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |g_q^j(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}),$$

$$\sigma_q = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |g_q(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}),$$

$$\sigma = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |g(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}),$$

με S^2 την μοναδιαία σφαίρα στον \mathbb{R}^3 .

Επιμέρους πεδία και διατομές σκέδασης σε αλληλεπίδραση (Interaction Cross Sections).

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια εισαγωγή στα επιμέρους πεδία και στις διατομές σκέδασης αλληλεπίδρασης (interaction cross sections). Αρχικά, να επισημάνουμε πως, κατά κανόνα, το άθροισμα των επιμέρους διατομών σκέδασης, λόγω της διέγερσης από όλες τις σημειακές πηγές, διαφέρει από τη συνολική διατομή σκέδασης. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση όπου δύο σημειακές πηγές παρουσιάζουν ορθογωνιότητα ως προς τα επιμέρους μακρινά τους πεδία (individual far fields).

Ορισμός 4.1

Ορίζουμε το επιμέρους πεδίο στο V_p ως προς μια πηγή (with respect to a source at) στη θέση $\mathbf{r}_q^j \in V_q^{\text{ex}}$ ως το άθροισμα των επιμέρους πεδίων που δημιουργούνται από τις πηγές στο V_q^{ex} εκτός του επιμέρους πεδίου στη θέση \mathbf{r}_q^j .

Ορισμός 4.2

Το q -διέγερσης επιμέρους ακουστικό πεδίο στο V_p ως προς μια πηγή στη θέση \mathbf{r}_q^j και το ολικό επιμέρους πεδίο στο ίδιο στρώμα ως προς μια πηγή στη θέση \mathbf{r}^j ορίζονται για $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_q^v$ και $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}^v$, όταν $v \neq j$ και για $\ell \in \{\text{pr, sec, t}\}$, ως εξής:

$$\tilde{u}_p^\ell(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q^j) = \sum_{v=1}^{n_q} u_p^\ell(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q^v)$$

και

$$\tilde{u}_p^\ell(\mathbf{r}; \mathbf{r}^j) = \sum_{v=1}^{n_q} u_p^\ell(\mathbf{r}; \mathbf{r}^v).$$

Είναι εφικτή η γενίκευση των παραπάνω σχέσεων και στην περίπτωση ύπαρξης περισσότερων από μιας πηγής. Χαρακτηριστικά, ορίζουμε το q -επιμέρους πεδίο στο V_p για $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_s^v$, με $s \neq q$ και $\ell \in \{\text{pr, sec, t}\}$ ως:

$$\tilde{u}_p^\ell(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q^1, \dots, \mathbf{r}_q^{n_q}) = \sum_{s=1}^Q u_p^\ell(\mathbf{r}; \mathbf{r}_s^1, \dots, \mathbf{r}_s^{n_s}).$$

Ορισμός 4.3

Ισχύει ότι

$$\tilde{\sigma}_q = \sigma_q - \sum_{j=1}^{n_q} \sigma_q^j \quad (1.29)$$

Ορισμός 4.4

$$\sigma^I = \sigma - \sum_{j=1}^Q \sigma_q \quad (1.30)$$

Ορισμός 4.5

$$\sigma^T = \sigma - \sum_{j=1}^Q \sum_{i=1}^{n_j} \sigma_q^j \quad (4.6).$$

$$\tilde{\sigma}_q = \frac{2}{k_0^2} \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{n_q-1} \sum_{v=j+1}^{n_q} \int_{S^2} g_q^j(\hat{\mathbf{r}}) \overline{g_q^v(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) \right],$$

$$\sigma^I = \frac{2}{k_0^2} \operatorname{Re} \left[\sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{s=q+1}^Q \int_{S^2} g_q(\hat{\mathbf{r}}) \overline{g_s(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) \right],$$

$$\sigma^T = \frac{2}{k_0^2} \operatorname{Re} \left[\sum_{v=1}^{N-1} \sum_{j=v+1}^N \int_{S^2} g^v(\hat{\mathbf{r}}) \overline{g^j(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) \right],$$

2.3 Σχέσεις σκέδασης

Θεώρημα 1.1

Οι διατομές σκέδασης αλληλεπίδρασης $\sigma^T, \sigma^I, \tilde{\sigma}_q$ συνδέονται ως εξής:

$$\sigma^T = \sigma^D + \sigma^I,$$

όπου

$$\sigma^D = \sum_{q=1}^Q \tilde{\sigma}_q \quad (1.70)$$

είναι η ευθύς διατομή σκέδασης (direct interaction cross section).

Απόδειξη.

Από τις (1.29), (4.6) έχουμε:

$$\sigma^T = \sigma - \sum_{q=1}^Q \sigma_q + \sigma^D,$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.30) έχουμε:

$$\sum_{q=1}^Q \sigma_q = \sigma - \sigma^I.$$

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 1.2

Το s - ακουστικό πεδίο διέγερσης του στρώματος V_q^{ex} και το q -- ακουστικό πεδίο διέγερσης του στρώματος V_s^{ex} συνδέονται ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{n_q} A_{q,j} u_s^q(\mathbf{r}_{q,j}) = \sum_{v=1}^{n_s} A_{s,v} u_{q,j}^s(\mathbf{r}_{s,v}).$$

Απόδειξη:

Προσαρμόζοντας το Θεώρημα 1 του [33] στην παρούσα εφαρμογή, διαπιστώνεται για κάθε ζεύγος σημειακών πηγών οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικά στρώματα ισχύει:

$$A_{q,j} u_s^q(\mathbf{r}_{q,j}) = A_{s,v} u_{q,j}^s(\mathbf{r}_{s,v})$$

η οποία ισχύει για όλες τις θέσεις $\mathbf{r}_{s,v}$. Προσδιορίζοντας το $\mathbf{r}_{q,j}$ και αθροίζοντας για $v = 1, \dots, n_s$, έχουμε:

$$A_{q,j} u_s^q(\mathbf{r}_{q,j}) = \sum_{v=1}^{n_s} A_{s,v} u_{q,j}^s(\mathbf{r}_{s,v}),$$

αν αθροίσουμε την παραπάνω σχέση για όλα τα $j = 1, \dots, n_q$ έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n_q} A_{q,j} u_s^q(\mathbf{r}_{q,j}) = \sum_{j=1}^{n_q} \sum_{v=1}^{n_s} A_{s,v} u_{q,j}^s(\mathbf{r}_{s,v})$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση

$$u_q^p(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} u_{q,j}^p(\mathbf{r})$$

η οποία δηλώνει πως η ολική πίεση u_q^p του στρώματος V_p από την q σημειακή πηγή ισούται με το άθροισμα των ολικών μεμονωμένων ακουστικών πεδίων στο V_p , εξαιτίας όλων των σημειακών πηγών στο V_q^{ex} φθάνουμε στο ζητούμενο.

Ο συντελεστής μακρινού πεδίου $g(\hat{\mathbf{r}})$ ορίζεται ως το άθροισμα των επιμέρους μακρινών πεδίων, οφειλόμενα σε όλες τις σημειακές πηγές που βρίσκονται στο στρώμα V_q^{ex} και σε όλες τις N πηγές

Θεώρημα 1.3

Στην περίπτωση διέγερσης ενός πολυστρωματικού σκεδαστή V από N σημειακές πηγές η ολική διατομή σκέδασης σ δίδεται από τον τύπο:

$$\sigma = 4\pi\zeta_0 \operatorname{Re} \left(\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \varphi_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,j}) \right) + \frac{\zeta_0}{\zeta_q} \sum_{q=1}^Q \sigma_q^{\text{pr}} \quad (1.79)$$

τα σ^D και σ^I σε αυτή την περίπτωση προσδιορίζονται ως εξής:

$$\sigma^D = 4\pi\zeta_0 \operatorname{Re} \left(\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \tilde{\varphi}_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,j}) \right) + \frac{\zeta_0}{\zeta_q} \sum_{q=1}^Q \tilde{\sigma}_q^{\text{pr}} \quad (1.80)$$

και

$$\sigma^I = 4\pi\zeta_0 \operatorname{Re} \left(\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \tilde{\varphi}_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,j}) \right) \quad (1.81)$$

όπου $\tilde{\varphi}_{q,j}^{\text{sec}}$ δηλώνει το άθροισμα όλων των επιμέρους δευτερευόντων πεδίων του V_q εκτός του πεδίου που προέρχεται από τη σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$. Αναλόγως, το $\tilde{\varphi}_q^{\text{sec}}$ δηλώνει το άθροισμα όλων των δευτερευόντων πεδίων στο V_q , εκτός των πεδίων που προέρχονται από τις πηγές του V_q .

Απόδειξη

Προσαρμόζοντας το Θεώρημα 2 του [33] στην παρούσα εφαρμογή διαπιστώνουμε πως για δύο σημειακές πηγές στις θέσεις $\mathbf{r}_{q,j} \in V_q$ και $\mathbf{r}_{s,v} \in V_s$ ισχύει:

$$\begin{aligned} & k_0^2 \zeta_0 \left(\overline{A_{q,j}} \varphi_{s,v}^q(\mathbf{r}_{q,j}) + A_{s,v} \overline{\varphi_{q,j}^s(\mathbf{r}_{s,v})} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})} g_{s,v}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (1.82) \end{aligned}$$

Αθροίζοντας ως προς v και μετά ως προς j και κάνοντας χρήση της

$$u_q^p(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} u_{q,j}^p(\mathbf{r})$$

βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} & k_0^2 \zeta_0 \left(\sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \varphi_{q,v}^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,j}) + A_{q,v} \overline{\varphi_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,v})} + \frac{2}{\zeta_q} \overline{A_{q,j}} A_{q,v} \operatorname{sinc}(k_q |\mathbf{r}_{q,j} - \mathbf{r}_{q,v}|) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})} g_{s,v}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (1.84) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$\sigma_{q,j} = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |g_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}})$$

Και παίρνοντας το άθροισμα της (1.84) για όλα τα n και για $j = 1, \dots, n_q$ έχουμε τη σχέση:

$$\sigma_q = 4\pi\zeta_0 \operatorname{Re}(\overline{A_{q,j}} \varphi_q^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,j})) + \frac{\zeta_0}{\zeta_q} \sigma_q^{\text{pr}}. \quad (1.85)$$

Παίρνοντας το άθροισμα στην (1.83) και για τους δύο εκθέτες q,s , με εφαρμογή της (1.85) για $V_q^{\text{ex}} \equiv V_s^{\text{ex}}$

Και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση

$$\sigma_q = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |g_q(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}})$$

φθάνουμε στη σχέση (1.79). Έπειτα προσαρμόζοντας το Θεώρημα 5 του [33] στην παρούσα εφαρμογή, έχουμε ότι:

$$\sigma_{q,j} = 4\pi\zeta_0 \operatorname{Re}(\overline{A_{q,j}} \varphi_{q,j}^{\text{sec}}(\mathbf{r}_{q,j})) + \frac{\zeta_0}{\zeta_q} \sigma_{q,j}^{\text{pr}}. \quad (1.86)$$

Η σχέση (1.80) προκύπτει από τις (1.85) και (1.86), λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς (1.29) και (1.70).

Αντίστοιχα, η (1.81) αποδεικνύεται από το άθροισμα της (1.85) για όλα τα $q = 1, \dots, Q$ σε συνδυασμό με χρήση των (1.79) και (1.30).

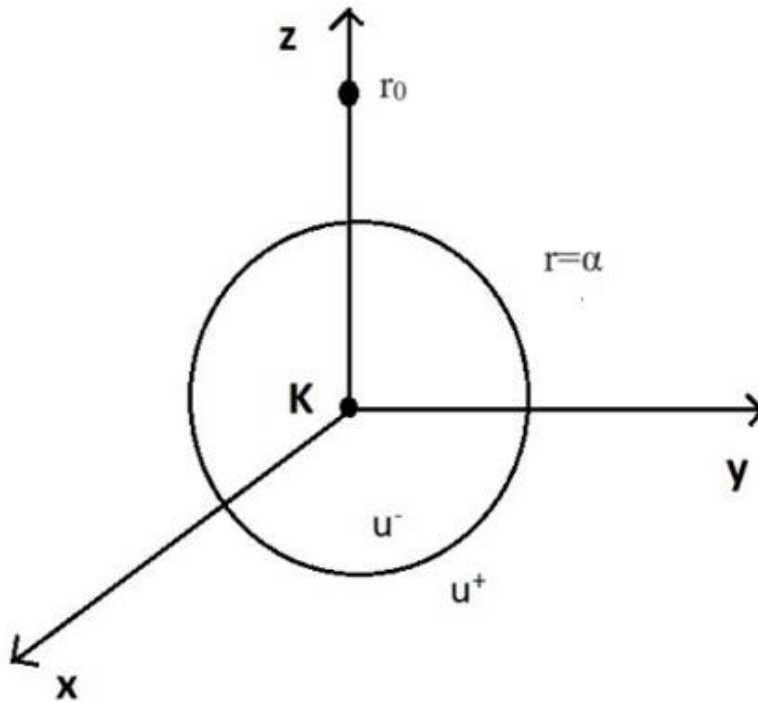
2.4 Ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης

Τα ευθέα προβλήματα σκέδασης (Direct scattering problems) αποτελούν προβλήματα στα οποία γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα και το σκεδαστή και αναζητούμε το σκεδασμένο κύμα. Με την επίλυση ευθέων προβλημάτων ακουστικής σκέδασης για τη διέγερση ενός ομογενούς σφαιρικού μέσου από μια σημειακή πηγή ασχολήθηκαν οι εργασίες

Τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης (Inverse scattering problems) είναι προβλήματα στα οποία έχοντας γνώση του προσπίπτοντος και του σκεδασμένου κύματος, αναζητούμε πληροφορίες για τη θέση, το σχήμα και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

2.4.1 Σφαιρικοί σκεδαστές - Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης

Ας θεωρήσουμε ένα σφαιρικό σκεδαστή με ακτίνα a και μια σημειακή πηγή στη θέση, που εκπέμπει ακουστικά κύματα. Επιπλέον, το σύστημα συντεταγμένων που θα θεωρήσουμε είναι της μορφής (r, θ, φ) με αρχή το σημείο K (κέντρο της σφαίρας), τοποθετώντας τη σημειακή πηγή στον z - άξονα (θέση r_0). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η σχηματική αναπαράσταση των παραπάνω δεδομένων.

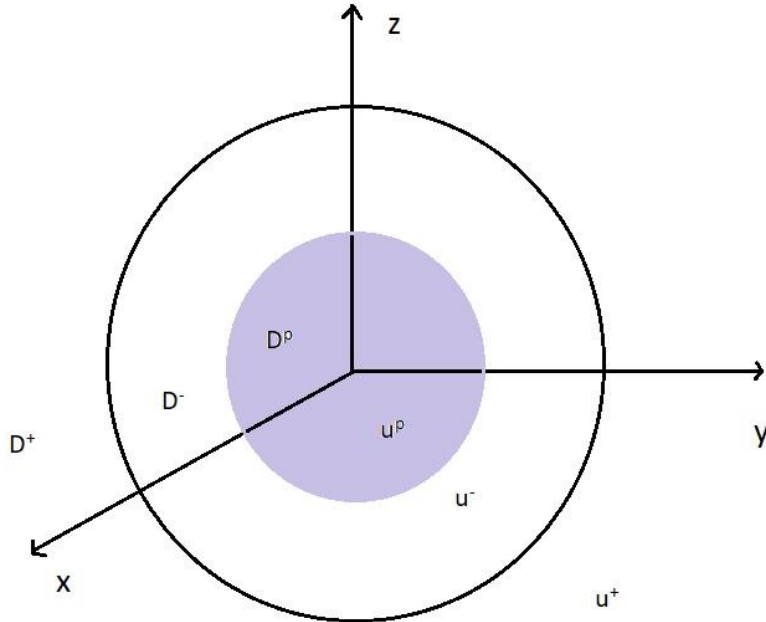


Εικόνα 5-Σχηματική αναπαράσταση της θέσης της σημειακής πηγής

Το προσπίπτον ακουστικό κύμα έχει το ανάπτυγμα:

$$u^i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} j_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad r < r_0$$

Όπου $H_n(w) = \frac{h_n(w)}{h_0(w)}$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και n τάξης, $j_n(w)$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, $P_n(\cos\theta)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. Σχετικά με αυτές τις συναρτήσεις περισσότερα στοιχεία μπορεί να βρει κανείς στο [36].



Εικόνα 6-Εσωτερικός και εξωτερικός χώρος σκεδαστή

Αναλόγως με το προσπίπτον προκύπτει και το ανάπτυγμα για το σκεδασμένο ακουστικό πεδίο, αν στον τύπο του πρώτου έχουμε αντικατάσταση των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel με σφαιρικές συναρτήσεις Hankel, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Επομένως, με την παραπάνω διαδικασία προκύπτει το ανάπτυγμα:

$$u^s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} A_n h_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad r \geq \alpha$$

όπου οι συντελεστές A_n για $n=0,1,2,\dots$ είναι υπό προσδιορισμό και ο υπολογισμός τους θα γίνει με βάση τις συνοριακές συνθήκες.

Σε περίπτωση διαπερατού σκεδαστή το ανάπτυγμα για το ολικό εσωτερικό πεδίο αποτελείται από συναρτήσεις Bessel. Χαρακτηριστικά, ισχύει:

$$u^-(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} B_n j_n(k^-r) P_n(\cos \theta), \quad r \leq \alpha$$

όπου k^- είναι ο κυματάρθμος στο εσωτερικό του σκεδαστή.

Σε περίπτωση σκεδαστή με δύο στρώματα το ανάπτυγμα του ολικού εσωτερικού πεδίου γίνεται:

$$u^-(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} [C_n j_n(k^-r) + D_n h_n(k^-r)] P_n(\cos \theta), \quad r \in D^-$$

Τα παραπάνω αναπτύγματα σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες μας βοηθούν στον προσδιορισμό των συντελεστών A_n, B_n, C_n, D_n δηλαδή στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης για σφαιρικά ακουστικά κύματα.

3. Θεωρία χαμηλών συχνοτήτων

Η θεωρία χαμηλών συχνοτήτων υπάγεται στις αναλυτικές μεθόδους προσεγγιστικής επίλυσης ενός προβλήματος σκέδασης. Έχει εφαρμογή σε προβλήματα μεγάλους μήκους κύματος. Χαρακτηριστικά, βασίζεται στην παραδοχή πως $ka \ll 1$, δηλαδή πως η ακτίνα a του σφαιρικού σκεδαστή, είναι σημαντικά μικρότερη από το μήκος κύματος k του πρωτεύοντος πεδίου (primary field).

Σε αυτή τη μεθοδολογία έχουμε αναγωγή της λύσης σε σειρά Taylor οι συντελεστές της οποίας ονομάζονται συντελεστές χαμηλής συχνότητας (low frequency coefficients). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, έχουμε μετατροπή του κυματικού προβλήματος σε μια ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού (προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace ή Poisson).

Στο [3] έχουμε την πρώτη επισήμανση τη σημαντικότητας της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων στην ανάπτυξη αλγορίθμων αντίστροφης σκέδασης για την ανίχνευση των χαρακτηριστικών ενός σφαιρικού σκεδαστή έχοντας γνώση των πεδίων που προσπίπτουν στη σημειακή πηγή. Χαρακτηριστικές εφαρμογές της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων για επίλυση προβλημάτων σκέδασης υπάρχουν στις εργασίες [49], [50].

3.1 Συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων αναλόγως με το είδος του σκεδαστή.

3.1.1 Για μαλακή σφαίρα (Πρόβλημα Dirichlet)

Στην επιφάνεια της σφαίρας $r=a$ η συνθήκη $u^t = 0$ γίνεται:

$$u^s(\alpha, \theta) = -u^i(\alpha, \theta)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} A_n h_n(kr) P_n(\cos \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} j_n(k\alpha) P_n(\cos \theta), \quad r \geq r_0$$

Από όπου προκύπτει για διεγερση από πηγή στην θέση $(0,0, r_0)$:

$$A_n = - \frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} \quad \text{για } n=0,1,2,\dots \quad (1.47)$$

3.1.2 Για σκληρή σφαίρα (Πρόβλημα Neumann):

Στην επιφάνεια της σφαίρας $r=a$ η συνθήκη $\frac{\partial u^t}{\partial n} = 0$ γίνεται:

$$\frac{\partial u^s(\alpha, \theta)}{\partial r} = - \frac{\partial u^i(\alpha, \theta)}{\partial r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k\alpha)}{h_0(k\alpha)} A_n h'_n(k\alpha) P_n(\cos\theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k\alpha)}{h_0(k\alpha)} j'_n(k\alpha) P_n(\cos\theta), \quad r \geq a$$

Από όπου προκύπτει:

$$A_n = - \frac{j'_n(k\alpha)}{h'_n(k\alpha)} \quad (1.48)$$

3.1.3 Για ανθεκτική σφαίρα (Πρόβλημα Robin):

Αναλόγως, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις του προσπίπτοντος και του σκεδασμένου ακουστικού κύματος τη συνοριακή συνθήκη του ανθεκτικού σκεδαστή (συνθήκη Robin) προκύπτει:

$$\frac{\partial u^s(r,\theta)}{\partial r} + \lambda u^s(r,\theta) = - \frac{\partial u^i(r,\theta)}{\partial r} - \lambda u^i(r,\theta), \quad r=a$$

Από τις (1.22), και την παραπάνω για $r=a$ έχουμε:

$$A_n k h'_n(k\alpha) + \lambda A_n h_n(k\alpha) = -k j'_n(k\alpha) - \lambda j_n(k\alpha)$$

Από όπου λύνοντας ως προς A_n έχουμε:

$$A_n = \frac{k j'_n(k\alpha) + \lambda j_n(k\alpha)}{k h'_n(k\alpha) + \lambda h_n(k\alpha)} \quad (1.49)$$

3.2 Μέθοδοι επίλυσης αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης

Δύο γεωμετρικοί μέθοδοι που έχουν εφαρμογή σε σφαιρικά αντικείμενα και χρησιμοποιούν σφαιρικά κύματα είναι:

3.2.1 Μέθοδος μακρινού πεδίου. Μακρινό πεδίο (Far field).

Προβλήματα αντίστροφης ακουστικής σκέδασης με χρήση της μεθόδου μακρινού πεδίου για σκεδαστές, που διεγείρονται από σημειακές πηγές στις χαμηλές συχνότητες έχουν παρουσιαστεί αναλυτικά στις εργασίες [1], [4] και [20].

Για το μακρινό πεδίο αντικαθιστούμε στον τύπο:

$$u^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = - \frac{ik}{4\pi} \int_{\partial D} \left[\frac{\partial u^t(\mathbf{r}')}{\partial n'} + ik(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{n}}') u^t(\mathbf{r}') \right] e^{-k\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}') \quad (1.16)$$

το ανάπτυγμα

$$e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} (-\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}')^m \quad (1.17)$$

και το ολικό εξωτερικό πεδίο από το ανάπτυγμα χαμηλών συχνοτήτων

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} u_m^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D^+ \quad (1.18)$$

και προκύπτει ότι:

$$u^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (-1)^{l+1} \int_s \left[\frac{\partial u_{m-1}^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} + ik(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{n}}') u_{m-1}^+(\hat{\mathbf{r}}') \right] (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}')^l ds(\mathbf{r}') \quad (1.19)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο τις συνοριακές συνθήκες (1.3)-(1.6) ανάλογα με το είδος του σκεδαστή, προκύπτει και ο τύπος για το πρόβλημα που μελετάται σε κάθε περίπτωση.

Μέθοδος μακρινού πεδίου (Far field)

3.2.1.1 για μικρή μαλακή σφαίρα

Σε αυτό το πρόβλημα, διενεργήθηκε εφαρμογή της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων, δηλαδή ισχύει ότι $ka \ll 1$, $ka \rightarrow 0$ με τον υπολογισμό των συντελεστών χαμηλών συχνοτήτων έως τη δεύτερη τάξη. Στη συνέχεια, είχαμε τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της f με χρήση του τύπου

$$f(\hat{\mathbf{r}}; r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n A_n H_n(kr_0) P_n(\cos\theta) \quad (1.20)$$

Και ακολούθως τον υπολογισμό της διατομής σκέδασης σ_0 :

$$\sigma_0 = 4\pi k^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |A_n H_n(kr_0)|^2 \quad (1.21)$$

Το προσπίπτον κυματικό πεδίο έχει το ανάπτυγμα

$$u_{\text{in}}(r, \theta; r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kr) H_n(kr_0) P_n(\cos\theta) \quad r < r_0 \quad (1.22)$$

Όπου $j_n(w)$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, $P_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre και $H_n(w) = \frac{h_n(w)}{h_0(w)}$ συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και n τάξης.

Παίρνοντας για $w \rightarrow 0$ έχουμε:

Όπου $H_0 = 1$, $H_1 = w^{-1} - i$,

$$H_n(w) \sim c_n w^{-n}$$

Αναλόγως, το σκεδασμένο κυματικό πεδίο, λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη ακτινοβολίας παίρνει τη μορφή:

$$u(r, \theta; r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n h_n(kr) H_n(kr_0) P_n(\cos\theta) \quad r \geq \alpha \quad (1.23)$$

όπου A_n είναι οι συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων και είναι εξαρτώμενοι από το είδος του σκεδαστή, r_0 είναι η θέση της σημειακής πηγής και α είναι η ακτίνα του σκεδαστή.

για ακουστικά μαλακή σφαίρα έχουμε:

$$A_n = -\frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} \quad (1.24)$$

όπου

$$f(\hat{\mathbf{r}}; r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n A_n H_n(kr_0) P_n(\cos\theta) \quad (1.25)$$

είναι το μακρινό πεδίο του προσπίπτοντος σφαιρικού ακουστικού κύματος

Έχω μελετήσει το πρόβλημα ακουστικής σκέδασης για μαλακή σφαίρα με προσέγγιση της λύσης στο οποίο όπως περιγράφεται στο [4] θεωρήσαμε τις παραμέτρους

$$\kappa = ika \quad \text{και} \quad \tau = \frac{\alpha}{r_0} \quad \text{με} \quad |\kappa| = ka \ll 1 \quad \text{και} \quad 0 < \tau < 1 \quad (1.26)$$

Από την (1.24) προέκυψε:

$$A_n \sim \frac{(k\alpha)^{2n+1}}{i(2n+1)c_n^2} \quad \text{καθώς} \quad k\alpha \rightarrow 0, \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Και οι εξής συντελεστές:

$$A_0 = -\kappa \left(1 - \kappa + \frac{2}{3}\kappa^2 \right) + O(\kappa^4) \quad (1.28)$$

$$A_1 = \frac{1}{3}\kappa^3 + O(\kappa^5) \quad (1.29)$$

$$A_2 = -\frac{1}{45}\kappa^5 + O(\kappa^7) \quad (1.30)$$

Στη συνέχεια, είχαμε τον υπολογισμό της f με περιθώριο σφάλματος $O(\kappa^4)$:

$$A_0 H_0 = A_0 \quad (1.31)$$

$$A_1 H_1(kr_0) = \left(\frac{1}{3}\kappa^3 + O(\kappa^5)\right) ((kr_0)^{-1} - i) = \frac{1}{3}i\kappa^2(\tau - \kappa) + O(\kappa^4) \quad (1.32)$$

Έπειτα θέτοντας $\tau = a/r_0$ προέκυψε ότι:

$$A_n H_n(kr_0) \sim \frac{(ka)^{n+1}\tau^n}{i(2n+1)c_n}, \text{ καθώς } ka \rightarrow 0 \quad (1.33)$$

Επομένως καταλήξαμε στην προσέγγιση

$$f(\hat{\mathbf{r}}; r_0) = -\kappa + \kappa^2 [1 + \tau P_1(\cos\theta)] - \kappa^3 \left[\frac{2}{3} + P_1(\cos\theta) + \frac{1}{3}\tau^2 P_2(\cos\theta) \right] + O(\kappa^4) \quad (1.34)$$

Τέλος από τον τύπο (1.21) υπολογίστηκε η

$$\sigma_0 = 4\pi\alpha^2 \left\{ 1 + \frac{1}{3}\kappa^2(1 - \tau^2) \right\} + O(\kappa^4) \quad (1.35)$$

3.2.1.2 για διαπερατή σφαίρα

Στην περίπτωση της διαπερατής σφαίρας S χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

V^+ : το εξωτερικό της σφαίρας, όπου έχουμε διάδοση του σκεδασμένου ακουστικού κύματος και αναπαριστάται με σφαιρικές συντεταγμένες από το παρακάτω σύνολο:

$$V^+ = \{(r, \theta, \varphi), r \in (\alpha, +\infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

V^- : το εσωτερικό της σφαίρας, που εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες μέσω του συνόλου:

$$V^- = \{(r, \theta, \varphi), r \in [0, \alpha], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

Το ολικό εσωτερικό ακουστικό πεδίο u^- για $r < \alpha$ δίδεται από τον τύπο:

$$u^-(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} B_n j_n(k^- r) P_n(\cos\theta), \quad r < \alpha \quad (11)$$

Με $k^- = \eta k$ τον κυματικό αριθμό στο εσωτερικό της σφαίρας

Το προσπίπτον ακουστικό πεδίο είναι:

$$u^i(r, \theta; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} j_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad r < \alpha \quad (12)$$

Το σκεδασμένο ακουστικό πεδίο ισούται με:

$$u^s(r, \theta; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} A_n h_n(kr) P_n(\cos\theta), \quad r \geq \alpha \quad (13)$$

Το ολικό εξωτερικό ακουστικό πεδίο u^+ για $r > \alpha$ δίδεται από τον τύπο:

$$u^+(r, \theta) = u^t = u^i + u^s \quad (14)$$

Από τις (12), (13) κάνοντας πράξεις προκύπτει ότι:

$$u^+(r, \theta; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} P_n(\cos\theta) [j_n(kr) + A_n h_n(kr)] \quad (15)$$

Όμως για διαπερατή σφαίρα έχουμε τις εξής συνθήκες διαπερατότητας:

$$\begin{cases} u^+(r, \theta) = u^-(r, \theta), & r \in S \\ \frac{\partial u^+(r, \theta)}{\partial r} = b \frac{\partial u^-(r, \theta)}{\partial r} \end{cases} \quad (17)$$

όπου $b = \frac{\rho^+}{\rho^-} (1 - i\omega\delta^-\gamma^-)$ είναι μια αδιάστατη σταθερά.

Ισοδύναμα από τη (14):

$$\begin{cases} u^i(r, \theta) + u^s(r, \theta) = u^-(r, \theta), & r \in S \\ \frac{\partial u^i(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial u^s(r, \theta)}{\partial r} = b \frac{\partial u^-(r, \theta)}{\partial r} \end{cases}$$

ισοδύναμα από τις (11), (15) το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} P_n(\cos\theta) [j_n(kr) + A_n h_n(kr) - C_n j_n(k^-r)] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} P_n(\cos\theta) [j_n(kr) + A_n h_n(kr) - C_n j_n(k^-r)] \right] = 0 \end{array} \right.$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς και εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες για $r=a$ οι (18), (19) απλοποιούνται στο:

$$\begin{cases} j_n(kr_0) + A_n h_n(kr_0) = C_n j_n(k^-r_0) \\ j'_n(kr_0) + A_n h'_n(kr_0) = bn C_n j'_n(k^-r_0) \end{cases}$$

Λύνοντας λοιπόν το παραπάνω σύστημα προκύπτει η λύση:

$$A_n = \frac{bn j_n(kr_0) j'_n(kr_0) - j'_n(kr_0) j_n(k^-r_0)}{j_n(k^-r_0) h'_n(kr_0) - bn j'_n(k^-r_0) h_n(kr_0)}$$

και

$$C_n = \frac{j_n(kr_0) h'_n(kr_0) - j'_n(kr_0) h_n(kr_0)}{j_n(k^-r_0) h'_n(kr_0) - bn j'_n(k^-r_0) h_n(kr_0)}$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια, τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα μικρών ορισμάτων των συναρτήσεων Bessel και Hankel, λαμβάνουμε τελικά ότι

$$A_n \sim -\frac{\ln(k\alpha)^{2n+1}}{c_{2n+1} c_{2n-1}}$$

Περίπτωση $b \rightarrow \infty$: προκύπτει εκφυλισμός του διαπερατού σκεδαστή σε μαλακό σκεδαστή και επομένως οι συντελεστές γίνονται:

$$A_n \rightarrow -\frac{j(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} \quad \text{και} \quad C_n \rightarrow 0$$

οπότε έχουμε τα ίδια αποτελέσματα με το μαλακό σκεδαστή όπως αναγράφηκαν παραπάνω.

Περίπτωση $\rho \rightarrow 0$: προκύπτει εκφυλισμός του διαπερατού σκεδαστή σε μαλακό σκεδαστή και επομένως οι συντελεστές γίνονται:

$$A_n \rightarrow -\frac{j'(k\alpha)}{h'_n(k\alpha)} \quad \text{και} \quad C_n \rightarrow 0$$

3.2.2 Μέθοδος κοντινού πεδίου

3.2.2.1 για μαλακό σκεδαστή στη θέση $r=r_0$ της πηγής.

Βασική ιδέα στην εφαρμογή της μεθόδου κοντινού πεδίου αποτελεί η τοποθέτηση της σημειακής πηγής σε γνωστές θέσεις, στη βάση ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$. Έπειτα, αξιοποιώντας τη γνώση του σκεδασμένου πεδίου από κάθε μία από αυτές τις σημειακές πηγές, προβαίνουμε στον εντοπισμό του σφαιρικού σκεδαστή, προσδιορίζοντας τη θέση και την ακτίνα του. Η γνώση που απαιτείται για την επιτυχή εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας είναι ένας ή δύο όροι του ασυμπτωτικού αναπτύγματος χαμηλών συχνοτήτων της διατομής σκέδασης. Παρόμοια προβλήματα μελέτησε ο Colton [5].

Αρχικά λοιπόν, κάνουμε χρήση του τύπου για τον προσδιορισμό του σκεδασμένου κυματικού πεδίου. Το σκεδασμένο πεδίο για μαλακό σκεδαστή στη θέση $r=r_0$ της πηγής είναι:

$$u_a^s = -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(kr_0)}{h_0(kr_0)} \frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} h_n(kr_0) = -\frac{1}{h_0(kr_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{[h_n(kr_0)]^2}{h_0(k\alpha)} j_n(k\alpha) \quad (1.36)$$

Όταν έχουμε μικρό σκεδαστή, με την προϋπόθεση ότι ισχύει $k\alpha \ll 1$, ισχύει ότι:

$$A_n \sim \frac{(k\alpha)^{2n+1}}{i(2n+1)c_n^2}, \quad k\alpha \rightarrow 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.37)$$

όπου $c_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$, $c_0 = 1$.

Θέτοντας $\kappa = ikr_0$ έχουμε:

$$A_0 = -\kappa \left(1 - \kappa + \frac{2}{3}\kappa^2 \right) + O(\kappa^4), \quad \kappa \rightarrow 0, \quad (1.38)$$

$$A_1 = -\frac{1}{3}\kappa^3 + O(\kappa^5), \quad \kappa \rightarrow 0, \quad (1.39)$$

$$A_2 = -\frac{1}{45}\kappa^5 + O(\kappa^7), \quad \kappa \rightarrow 0, \quad (1.40)$$

Εν συνεχεία, θέτοντας $\tau = a/r_0$, έχουμε:

$$A_n = \frac{j_n(k\alpha)}{h_n(k\alpha)} \sim \frac{(k\alpha)^{n+1}\tau^n}{i(2n+1)c_n}, \quad k\alpha \rightarrow 0 \quad (1.41)$$

Για το σκεδασμένο πεδίο στη θέση της πηγής έχουμε:

$$|u_a^s(\alpha)| \sim \frac{\tau}{1-\tau^2} \quad k\alpha \rightarrow 0 \quad (1.42)$$

και έπειτα με τη μέθοδο κοντινού σημείου τοποθετούμε την πηγή στα ακόλουθα σημεία

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \text{ και } (0,0,2)$$

και υπολογισμός του πρώτου όρου του αναπτύγματος σκεδασμένου πεδίου στις θέσεις αυτές. Θεωρώντας τις αντίστοιχες αποστάσεις από το κέντρο της σφαίρας, τότε έχουμε τις σχέσεις:

$$m_j = \frac{\tau_j}{1-\tau_j^2}, \quad \tau_j = \frac{r_0}{d_j'} \quad (1.43)$$

για $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Επιπρόσθετα, με χρήση του νόμου των συνημίτονων για τα d_0, d_3, d_4 ισχύει:

$$d_4^2 = 2 + 2d_3^2 - d_0^2 \quad (1.44)$$

Τελικώς, η ακτίνα a της σφαίρας προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των παραπάνω εξισώσεων. Επομένως, το κέντρο της υπολογίζεται από την τομή τεσσάρων σφαιρών με κέντρα τις θέσεις των πηγών και ακτίνες τις αντίστοιχες αποστάσεις.

3.2.2.2 για σκληρό σκεδαστή στη θέση $r=r_0$ της πηγής

Για σκληρό σκεδαστή ισχύει:

$$A_n = -\frac{j'_n(k\alpha)}{h'_n(k\alpha)} \sim \frac{in(k\alpha)^{2\alpha+1}}{(2n+1)(n+1)c_n^2}, \quad k\alpha \rightarrow 0, \text{ όταν } n \geq 1$$

Και

$$A_0^N \sim -\frac{1}{3}i(k\alpha)^3$$

Άρα, αναλόγως με την προηγούμενη, περίπτωση η πηγή βρίσκεται στη θέση:

$$u(\mathbf{r}_0) \sim kh(kr_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\tau^{2n}}{n+1} = kh(kr_0) \left[\frac{1}{1-\tau^2} + \frac{1}{\tau^2} \log(1-\tau^2) \right]$$

Δηλαδή:

$$|u(\mathbf{r}_0)| \sim \frac{1}{1 - \tau^2} + \frac{1}{\tau} \log(1 - \tau^2), \quad \kappa a \rightarrow 0$$

3.3 Πρόβλημα πολυστρωματικού σκεδαστή

Θεωρούμε έναν σφαιρικό, πολυστρωματικό σκεδαστή όπου κάθε στρώμα του V_p χαρακτηρίζεται από τις ακτίνες a_p, a_{p+1} με $a_p > a_{p+1}$ και τις αντίστοιχες φυσικές παραμέτρους k_p, ρ_p, γ_p . Επιλέγουμε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) με αρχή το κέντρο της σφαίρας. Τότε η σημειακή πηγή θα έχει διάνυσμα θέσης:

$$\mathbf{r}_{q,j} = r_{q,j} \hat{\mathbf{r}} + \theta_{q,j} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \varphi_{q,j} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Όπου $\mathbf{r}_{q,j} \in (a_{q+1}, a_q)$, $\theta_{q,j} \in [0, \pi]$ και $\varphi_{q,j} \in [0, 2\pi)$ για $j = 1, \dots, n_q$

Αν η σημειακή πηγή βρίσκεται στο στρώμα V_q για το πρωτεύον ακουστικό πεδίο με χρήση του θεωρήματος 6.4 του [18] προκύπτει πως το πρωτεύον ακουστικό πεδίο δίδεται από τον τύπο:

$$u_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m j_n(k_q r_{q,j}) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}_{q,j}) h_n(k_q r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), r > r_{q,j} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m h_n(k_q r_{q,j}) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_{q,j}) j_n(k_q r) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}), r < r_{q,j} \end{cases}$$

Αν $s \neq q$ τότε το δευτερεύον ακουστικό πεδίο στο V_s είναι:

$$u_{q,j}^s(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m h_n(k_q r_{q,j}) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}_{q,j}) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \left(c_{q,n}^p j_n(k_p r) + d_{q,j}^p h_n(k_q r_{q,j}) \right), \quad a_{q+1} < r < a_q$$

Το δευτερεύον πεδίο που δημιουργείται στο V_q στρώμα (στρώμα πηγής)

$$u_{q,j}^{sec}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m h_n(k_q r_{q,j}) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}_q) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \left(c_{q,n}^p j_n(k_p r) + d_{q,j}^p h_n(k_q r) \right), \quad a_{p+1} < r < a_p$$

Ανάλογα για το V_0 (εξωτερικός χώρος) πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Άρα θα πρέπει το ακουστικό πεδίο να αποτελείται από τις συναρτήσεις Hankel που συνδέονται με την ακτινοβολία κυμάτων, δηλαδή θα πρέπει να μηδενίζονται οι συντελεστές c , οπότε να έχουμε $c_{q,j}^0 = 0$.

Επομένως, η σχέση που εκφράζει το δευτερεύον πεδίο σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$u_{q,j}^0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m d_{q,j}^0 h_n(k_0 r) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}_q) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad r > a_1$$

Αν έχουμε διαπερατό πυρήνα V_p πρέπει να ισχύει $d_{q,j}^p=0$ και το δευτερεύον πεδίο στον πυρήνα θα είναι :

$$u_{q,j}^p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m h_n(k_q r_q) c_{q,n}^p j_n(k_p r) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}_q) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), 0 < r < a_p$$

\mathbf{T}_n^q (Transition matrices) από το στρώμα V_{q-1} στο V_q

$$\mathbf{T}_n^q = -ix_q^2 \begin{bmatrix} h'_n(x_q) j_n(y_q) - z_q h_n(x_q) j'_n(y_q) & h'_n(x_q) h_n(y_q) - z_q h_n(x_q) h'_n(y_q) \\ z_q j_n(x_q) j'_n(y_q) - j'_n(x_q) j_n(y_q) & z_q j_n(x_q) h'_n(y_q) - j'_n(x_q) h_n(y_q) \end{bmatrix}$$

όπου $z_q = k_q a_q$ και $w_q = (k_{q-1} \rho_q) / (k_q \rho_{q-1})$

Τότε λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες μετάβασης προκύπτουν οι παρακάτω μετασχηματισμοί για τους συντελεστές των ακουστικών πεδίων του V_{p-1} στο V_p .

$$\begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,p} \\ d_{q,j}^{n,p} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^q \begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,p-1} \\ d_{q,j}^{n,p-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Αναφορικά με το V_q το οποίο περιέχει την ακουστική πηγή έχουμε τις ακόλουθες μορφές:

Οι συντελεστές $c_{q,j}^{n,p}$ και $d_{q,j}^{n,p}$ είναι προς προσδιορισμό.

$$u^q(r; r_q) = 4\pi i k_q A \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m [j_n(k_q r_{q,j})], r > a_1$$

Αν θεωρήσουμε $c_q^{n,p} = (c_{q,1}^{n,p}, \dots, c_{q,n_q}^{n,p})$ και $d_q^{n,p} = (d_{q,1}^{n,p}, \dots, d_{q,n_q}^{n,p})$ τα διανύσματα που περιέχουν τους συντελεστές σκέδασης κάθε πεδίου.

Όπου Y_n^m, Y_n^{-m} σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.

Ολικό ακουστικό πεδίο

Περίπτωση $r > r_q$

$$u_{q,j}^q(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \left[h_n(k_q r_{q,j}) j_n(k_q r) + h_n(k_q r_{q,j}) \left(c_{q,j}^{n,p} j_n(k_p r) + d_{q,j}^{n,p} h_n(k_q r_{q,j}) \right) \right] Y_n^{-m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Περίπτωση $r < r_q$

$$u_{q,j}^q(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q) = 4\pi i k_q A_{q,j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \left[h_n(k_q r_{q,j}) j_n(k_q r) \right. \\ \left. + h_n(k_q r_{q,j}) \left(c_{q,j}^{n,p} j_n(k_p r) + d_{q,j}^{n,p} h_n(k_q r_{q,j}) \right) \right] Y_n^{-m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Με χρήση των συνοριακών συνθηκών έχουμε:

$$c_{q,j}^{n,p} j_n(k_q a_q) + \left(d_{q,j}^{n,p} + \frac{j_n(k_q r_q)}{h_n(k_q r_q)} \right) h_n(k_q r_q) = c_{q,j}^{n,p} j_n(k_{q-1} a_q) + d_{q,j}^{n,p} h_n(k_{q-1} a_q) \quad (2)$$

ή

$$j_n(k_q r_q) h'_n(k_q r_q) + h_n(k_q r_q) \left(c_{q,j}^{n,p} j'_n(k_q a_q) + d_{q,j}^{n,p} h'_n(k_q a_q) \right) \\ = \frac{k_{q-1} \rho_q}{k_q \rho_{q-1}} h_n(k_q r_q) \left[c_{q,j}^{n,p} j'_n(k_{q-1} a_q) + d_{q,j}^{n,p} h'_n(k_{q-1} a_q) \right] \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,p} \\ d_{q,j}^{n,p} + \frac{j_n(k_q r_q)}{h_n(k_q r_q)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow q)} \begin{bmatrix} 0 \\ d_{q,j}^{n,p} \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Με } \mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow q)} = \mathbf{T}_n^q \dots \mathbf{T}_n^2 \mathbf{T}_n^1$$

δηλαδή προσεγγίζουμε το στρώμα της πηγής V_q από τα εξωτερικά του στρώματα, δηλαδή τα V_1, \dots, V_{q-1} .

Αναλόγως για τα εσωτερικά του στρώματα, δηλαδή τα V_{q+1}, \dots, V_{p-1} έχουμε:

$$(c_{q,j}^{n,p} + 1) j_n(k_q \alpha_{q+1}) + d_{q,j}^{n,p} h_n(k_q \alpha_{q+1}) = c_{q,j}^{n,p} j_n(k_{q+1} \alpha_{q+1}) + d_{q,j}^{n,p} h_n(k_{q+1} \alpha_{q+1}) \quad (4)$$

ή

$$(c_{q,j}^{n,p} + 1) j'_n(k_q \alpha_{q+1}) + d_{q,j}^{n,p} h'_n(k_q \alpha_{q+1}) = \frac{k_{q+1} \rho_q}{k_q \rho_{q+1}} c_{q,j}^{n,p} j'_n(k_{q+1} \alpha_{q+1}) + d_{q,j}^{n,p} h'_n(k_{q+1} \alpha_{q+1}) \quad (5)$$

και από (1), (4), (5) προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,p-1} \\ d_{q,j}^{n,p-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^{(p-1 \rightarrow q+1)} \begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,q} + 1 \\ d_{q,j}^{n,q} \end{bmatrix} \quad (9)$$

με

$$\mathbf{T}_n^{(p-1 \rightarrow q+1)} = \mathbf{T}_n^{p-1} \dots \mathbf{T}_n^{q+2} \mathbf{T}_n^{q+1}$$

Βασικές ιδιότητες πινάκων μετάβασης:

$$\mathbf{T}_n^{(q \rightarrow p)} = I_2$$

$$\mathbf{T}_n^{(q^{-1} \rightarrow q)} = \mathbf{T}_n^q$$

$$\mathbf{T}_n^{(q \rightarrow x)} = \left[\mathbf{T}_n^{(x \rightarrow q)} \right]^{-1}$$

$$\mathbf{T}_n^{(q \rightarrow x)} = \mathbf{T}_n^{(p \rightarrow x)} \cdot \mathbf{T}_n^{(q \rightarrow p)}$$

με

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τώρα περιπτώσεις για τον πυρήνα του σκεδαστή.

Περίπτωση 1: Μαλακός πυρήνας

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τους συντελεστές:

$$c_{q,j}^{n,p-1} j_n(k_{p-1} \alpha_p) + d_{q,j}^{n,q} h_n(k_{p-1} \alpha_p) = 0 \text{ (συνθήκη Dirichlet) (6)}$$

Αναφορικά τώρα με τη θέση της σημειακής πηγής διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις :

Περίπτωση 1: Σημειακή πηγή στο V_0 (εξωτερικό χώρο του σκεδαστή). Έχουμε $q=0$ οπότε από τη (16) με αντικατάσταση

$$\mathbf{T}_n^{(-1 \rightarrow 0)} = I$$

Και

$$\mathbf{T}_n^{(2 \rightarrow 1)} = \mathbf{T}_n^1$$

Προκύπτει η επόμενη σχέση για τους συντελεστές του δευτερεύοντος πεδίου:

$$d_{0,n}^0 = - \frac{j_n(k_1 \alpha_2) \mathbf{T}_{11,n}^1 + h_n(k_1 \alpha_2) \mathbf{T}_{21,n}^1}{j_n(k_1 \alpha_2) \mathbf{T}_{12,n}^1 + h_n(k_1 \alpha_2) \mathbf{T}_{22,n}^1} \quad (3.1)$$

Ο οποίος μετασχηματίζεται σε :

$$d_{0,n}^0 \sim \frac{k_0^{2n+1} \alpha_1^{2n+1} \rho_0 [n(z_1^{2n+1} + 1) + 1] + \rho_1 n (1 - z_1^{2n+1})}{\rho_0 [n(z_1^{2n+1} + 1) + 1] (2n+1) c_{2n-1}^{2i} - \rho_1 (n+1) (-z_1^{2n+1} + 1)} \quad (3.2)$$

Ερμηνεία συμβολισμών:

$$z_j = \frac{a_j}{a_{j+1}}$$

$$\kappa = ik_0 a_1$$

$$d = \frac{r_1}{a_2}$$

$$\gamma_p = \frac{\rho_p}{\rho_0}$$

$$\tau_p = \frac{a_1}{r_p}$$

$$\eta_p = \frac{k_p}{k_0}$$

για $p = 0, 1, 2$

Περίπτωση 2: Σημειακή πηγή στο V_1 (πρώτο στρώμα). Έχουμε $q=1$ οπότε από τη (16) με αντικατάσταση

$$\mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow 1)} = \mathbf{T}_n^1 \text{ και } \mathbf{T}_n^{(p-1 \rightarrow 2)} = \mathbf{I} \text{ προκύπτει:}$$

$$d_{1,n}^0 = \frac{j_n(k_1 r_1) h_n(k_1 \alpha_2) - h_n(k_1 r_1) j_n(k_1 \alpha_2)}{h_n(k_1 r_1) [j_n(k_1 \alpha_2) \mathbf{T}_{12,n}^1 + h_n(k_1 \alpha_2) \mathbf{T}_{22,n}^1]} \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις Bessel και Hankel με τα αναπτύγματά τους και κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε ότι :

$$d_{1,n}^0 \sim k_0^{n+1} k_1^n \alpha_1^{2n+1} \frac{\rho_0 (2n+1) (1-z^{2n+1})}{i (2n+1)!! (2n-1)!! [(nz_1^{2n+1} + n+1) \rho_0 - (n+1) (1-z_1^{2n+1}) \rho_1]} \quad (3.4)$$

όπου

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)$$

και

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

Θα κάνουμε χρήση των εξής παραμέτρων του Παραρτήματος Β για μαλακό πυρήνα.

Από τις (3.2), (3.4) όταν το κ τείνει στο μηδέν έχουμε:

$$d_{q,0}^0 = M_{q,0}^1 \kappa + M_{q,0}^2 \kappa^2 + M_{q,0}^3 \kappa^3 + O(\kappa^4) \text{ για } q = 0, 1 \quad (3.6)$$

$$d_{0,n}^0 \sim \frac{(k_0 a_1)^{2n+1}}{i(2n-1)!!^2 (2n+1)} M_{0,n}, \quad n \geq 1.$$

Περίπτωση 1: Η σημειακή πηγή βρίσκεται στο χώρο V_0 . Τότε θέτοντας $q=0$ στην (3.6) έχουμε τους αντίστοιχους συντελεστές:

$$d_{0,1}^0 H_1(kr_0) \sim \frac{ik^2(\tau_0 - \kappa)}{3} \frac{z_1^3(1 - \gamma_1) + \gamma_1 + 2}{[1 + (n+1)\gamma_1]z_1^3 - (n+1)\gamma_1 + 2}$$

$$d_{0,2}^0 H_2(kr_0) \sim \frac{\kappa^3 \tau_0^2}{15} \frac{2\gamma_1(1 - z_1^5) + 2z_1^5 + 3}{3\gamma_1(z_1^5 - 1) + 2z_1^5 + 3}$$

$$d_{0,n}^0 H_n(kr_0) \sim \frac{(k_0 a_1)^{n+1} \tau_0^n}{i(2n+1)(2n-1)!!} M_{0,n}, \quad n \geq 2$$

Επομένως για το μακρινό πεδίο στις χαμηλές συχνότητες έχουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = & \frac{A}{r_0} \left[(M_{0,0}^1 \kappa + M_{0,0}^2 \kappa^2 + M_{0,0}^3 \kappa^3) \right. \\ & + \left(P_1(\cos\theta_0) P_1(\cos\theta) \right. \\ & + \left. \frac{P_1^1(\cos\theta_0) e^{-i\varphi_0} P_1^1(\cos\theta) e^{i\varphi} + P_1^1(\cos\theta_0) e^{i\varphi_0} P_1^1(\cos\theta) e^{-i\varphi}}{2} \right) \kappa^2 (\tau_0 - \kappa) M_{0,1} \\ & - \left(P_2(\cos\theta_0) P_2(\cos\theta) + \frac{P_2^1(\cos\theta_0) e^{i\varphi_0} P_2^1(\cos\theta) e^{-i\varphi} + P_2^1(\cos\theta_0) e^{-i\varphi_0} P_2^1(\cos\theta) e^{i\varphi}}{6} \right. \\ & + \left. \frac{P_2^2(\cos\theta_0) e^{-2i\varphi_0} P_2^2(\cos\theta) e^{2i\varphi} + P_2^2(\cos\theta_0) e^{2i\varphi_0} P_2^2(\cos\theta) e^{-2i\varphi}}{24} \right) \frac{1}{3} \kappa^3 \tau_0^2 M_{0,2} \left. \right] \\ & + O(\kappa^4) \end{aligned}$$

που η απλοποίησή της μας δίδει:

$$\begin{aligned}
g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = & \frac{A}{r_0} \left[M_{0,0}^1 \kappa + [M_{0,0}^2 + (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi)) \tau_0 M_{0,1}] \kappa^2 \right. \\
& + \left[M_{0,0}^3 - (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi)) \eta_0 M_{0,1} \right. \\
& - \left(\sin 2\theta_0 \sin 2\theta \cos(\varphi_0 - \varphi) + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta \cos 2(\varphi_0 - \varphi) \right. \\
& \left. \left. + \frac{(3\cos^2 \theta_0 - 1)(3\cos^2 \theta - 1)}{3} \right) \frac{\tau_0^2}{4} M_{0,2} \right] \kappa^3 + O(k^4)
\end{aligned}$$

Και η διατομή σκέδασης:

$$\sigma_0(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = \frac{4\pi|A|^2 \alpha_1^2}{r_0} \left[(M_{0,0}^1)^2 + (k_0 a_1)^2 \left((M_{0,0}^2)^2 - 2M_{0,0}^1 M_{0,0}^3 + (\tau_0 M_{0,1})^2 \right) \right] + O(k^4)$$

Περίπτωση 2: Η σημειακή πηγή βρίσκεται στο χώρο V1. Τότε θέτοντας $q=1$ στην (3.6) προσεγγίζουμε ασυμπτωτικά το πρόβλημα ως εξής:

$$d_{1,n}^0 \sim \frac{\eta_1^n (k_0 a_1)^{2n+1} (1 - d^{2n1})}{i[n(1 + z_1^{2n+1}) + 1 - \gamma_1(n+1)(1 - z_1^{2n+1})]}, \quad n \geq 1$$

$$d_{1,1}^0 H_1(k_1 r_1) = i\kappa^2 (\tau_1 - \eta_1 \kappa) M_{1,1} + O(k^4)$$

$$d_{1,2}^0 H_2(k_1 r_1) = \frac{\tau_1^2 \kappa^3 M_{1,2}}{3} + O(k^4)$$

Οπότε το μακρινό πεδίο στις χαμηλές συχνότητες γίνεται:

$$\begin{aligned}
g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = & \frac{A}{r_0} \left[M_{1,0}^1 \kappa + [M_{1,0}^2 + 3(\cos\theta_1 \cos\theta + \sin\theta_1 \sin\theta \cos(\varphi_1 - \varphi)) \tau_1 M_{1,1}] \kappa^2 \right. \\
& + \left[M_{1,0}^3 - 3(\cos\theta_1 \cos\theta + \sin\theta_1 \sin\theta \cos(\varphi_1 - \varphi)) \eta_1 M_{1,1} \right. \\
& - \left(\cos\theta_1 \sin\theta_1 \cos\theta \sin\theta \cos(\varphi_1 - \varphi) + \frac{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta \cos 2(\varphi_1 - \varphi)}{4} \right. \\
& \left. \left. + \frac{(3\cos^2 \theta_1 - 1)(3\cos^2 \theta - 1)}{12} \right) 5\tau_1^2 M_{1,2} \right] \kappa^3 + O(k^4)
\end{aligned}$$

Και διατομή σκέδασης:

$$\sigma_1(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_1) = \frac{4\pi|A|^2\alpha_1^2}{r_1} \left[(M_{1,0}^1)^2 + (k_0 a_1)^2 \left((M_{1,0}^2)^2 - 2M_{1,0}^1 M_{1,0}^3 + 3\tau_1^2 (M_{1,1})^2 \right) \right] + O(k^4)$$

Περίπτωση 2: Σκληρός πυρήνας

$$c_{q,j}^{n,p-1} j'_n(k_{p-1} \alpha_p) + d_{q,j}^{n,q} h'_n(k_{p-1} \alpha_p) = 0 \text{ (συνθήκη Neumann) (7)}$$

Βλέπε Παράρτημα Β για τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν το κάθε στρώμα.

Αναλόγως κι εδώ ισχύει:

$$d_{0,0}^0 = E_{0,0}^1 \kappa + E_{0,0}^2 \kappa^2 + E_{0,0}^3 \kappa^3 + O(\kappa^4) \text{ για } q = 0,1$$

Επομένως

$$d_{0,n}^0 \sim \frac{n(k_0 a_1)^{2n+1} E_{0,n}}{i(2n+1)(2n-1)!!^2}, \quad n \geq 1.$$

Περίπτωση 1: εξωτερική σημειακή πηγή στο V0. Τότε έχουμε:

$$d_{0,1}^0 H_1(k_0 r_0) \sim \frac{(\tau_0 \kappa^2 - \kappa^3) i E_{0,1}}{6}$$

$$d_{0,2}^0 H_2(k_0 r_0) \sim \frac{2\tau_0^2 \kappa^3 E_{0,2}}{9}$$

Όποτε για το μακρινό πεδίο έχουμε:

$$\begin{aligned} g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = & \frac{A}{r_0} \left[\frac{\tau_0}{2} E_{0,1} (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi)) \right. \\ & - \left[E_{0,0}^3 - \frac{E_{0,1}}{2} (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi)) \right. \\ & - \left(3\cos\theta_0 \sin\theta_0 \cos\theta \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi) + \frac{3\sin^2\theta_0 \sin^2\theta \cos 2(\varphi_0 - \varphi)}{4} \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{(3\cos^2\theta_0 - 1)(3\cos^2\theta - 1)}{4} \right) \frac{2\tau_0^2}{9} E_{0,2} \right] \right] \kappa^3 + O(k^4) \end{aligned}$$

Και η διατομή σκέδασης

$$\sigma_0(r) = \frac{\pi|A|^2 a_1^4 (k_0 \tau_0)^2}{3r_0^2} E_{0,1}^2 + O(k^4)$$

Περίπτωση 2: εσωτερική σημειακή πηγή στο V1. Τότε έχουμε:

$$d_{1,n}^0 \sim \frac{i\eta_1^n (k_0 a_1)^{2n+1} E_{1,n}}{(n+1)(2n-1)!!^2}, \quad n \geq 1$$

$$d_{1,1}^0 H_1(k_1 r_1) \sim \frac{(\eta_1 \kappa^3 - \tau_1 \kappa^2) i E_{1,1}}{2}$$

$$d_{1,2}^0 H_2(k_1 r_1) \sim -\frac{\tau_1^2 \kappa^3 E_{1,2}}{9}$$

Οπότε το μακρινό πεδίο είναι:

$$\begin{aligned} g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = & \frac{A}{r_1} \left[E_{1,0}^1 \kappa + \left(E_{1,0}^2 - \frac{3\tau_1 E_{1,1}}{2} (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi)) \right) \kappa^2 \right. \\ & + \left[E_{1,0}^3 + \frac{3\eta_1 E_{1,1}}{2} (\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi_0 - \varphi)) \right. \\ & + \left(\sin 2\theta_0 \sin 2\theta \cos(\varphi_0 - \varphi) + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta \cos 2(\varphi_0 - \varphi) \right. \\ & \left. \left. + \frac{(3\cos^2 \theta_0 - 1)(3\cos^2 \theta - 1)}{3} \right) \frac{5\tau_1^2}{12} E_{1,2} \right] \kappa^3 + O(\kappa^4) \end{aligned}$$

Και διατομή σκέδασης

$$\sigma_1(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\alpha_1^2 |A|^2}{r_1^2} \left[(E_{1,0}^1)^2 + (k_0 \alpha_1)^2 \left((E_{1,0}^2)^2 - 2E_{1,0}^1 E_{1,0}^3 + \frac{3}{4} \tau_1^2 (E_{1,1})^2 \right) \right] + O(\kappa^4)$$

Περίπτωση 2: Διαπερατός πυρήνας

$$\begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,p} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^p \begin{bmatrix} c_{q,j}^{n,p-1} \\ d_{q,j}^{n,p-1} \end{bmatrix}$$

Για τις περιπτώσεις μαλακού και σκληρό πυρήνα από τις (6), (7) έχουμε:

$$c_{q,j}^{n,p-1} f_n(k_{p-1} \alpha_p) + d_{q,j}^{n,q} g_n(k_{p-1} \alpha_p) = 0 (**)$$

Όπου αντίστοιχα οι f και g αντικαθίστανται από τα ακόλουθα:

$$f_n = j_n, g_n = h_n \text{ ή } f_n = j'_n, g_n = h'_n \text{ ή } f_n = j'_n + ik_{p-1}v_j, g_n = h'_n + ik_{p-1}vh_n$$

Έπειτα η (*) γίνεται:

$$c_{q,j}^q = d_{q,j}^0(\mathbf{T}_{12,n}^{(q \rightarrow p)})$$

$$d_{q,j}^q = d_{q,j}^0(\mathbf{T}_{22,n}^{(q \rightarrow p)}) - \frac{j_n(k_q r_q)}{h_n(k_q r_q)}$$

Από τις (9), (**) έχουμε ότι :

$$d_{q,j}^q = \frac{D}{Q} \quad (16)$$

Όπου

$$D = j_n(k_q r_q) \left[f_n(k_{p-1} \alpha_p) \mathbf{T}_{12,n}^{(q \rightarrow p)} + g_n(k_{p-1} \alpha_p) \mathbf{T}_{22,n}^{(q \rightarrow p)} \right]$$

$$- h_n(k_q r_q) \left[f_n(k_{p-1} \alpha_p) \mathbf{T}_{11,n}^{(q \rightarrow p)} + g_n(k_{p-1} \alpha_p) \mathbf{T}_{21,n}^{(q \rightarrow p)} \right]$$

Και

$$Q = h_n(k_q r_q) \left[f_n(k_{p-1} \alpha_p) (\mathbf{T}_n^{(p-1 \rightarrow q+1)} \mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow q)})_{12} + g_n(k_{p-1} \alpha_p) (\mathbf{T}_n^{(p-1 \rightarrow q+1)} \mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow q)})_{22} \right]$$

Η (16) μας δίνει τους συντελεστές του δευτερεύοντος πεδίου στο V_0 όταν ο σκεδαστής έχει μαλακό, σκληρό ή ανθεκτικό πυρήνα.

Ανάλογα, για το διαπερατό πυρήνα έχουμε τον αντίστοιχο συντελεστή:

$$d_{q,j}^q = \frac{K}{L}$$

Όπου

$$K = j_n(k_q r_q) (\mathbf{T}_n^p \mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow q)})_{22} - h_n(k_q r_q) (\mathbf{T}_n^p \mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow q)})_{21}$$

Μακρινό πεδίο ακουστικής διέγερσης από την σημειακή πηγή q .

$$g(\hat{\mathbf{r}}; r_q) = 4\pi i k_q A \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-1)^m (-i)^n d_{q,j}^0 h_n(k_q r_{q,j}) Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}_{q,j}) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

Ολική διατομή σκέδασης

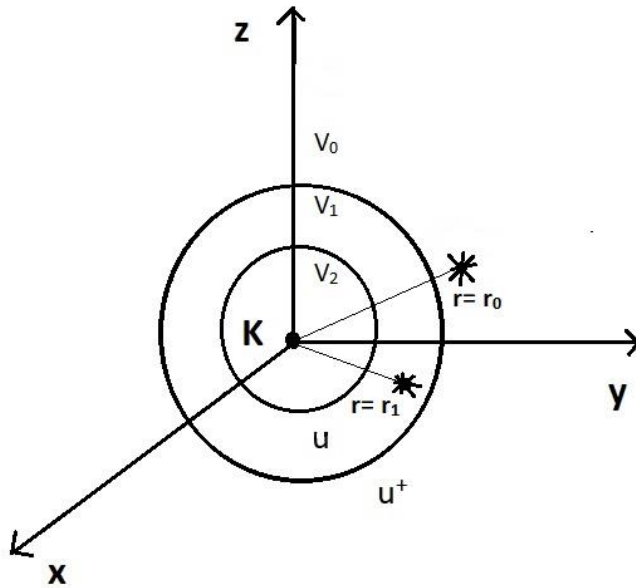
$$\sigma(r_q) = 4\pi |A|^2 \frac{k_q^2}{k_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} |h_n(k_q r_q) d_{q,j}^0|^2 |P_n^m(\cos \theta_q)|^2$$

Με P_n^m συνάρτηση Legendre.

4. Σκέδαση ακουστικών κυμάτων με περισσότερες από μία σημειακές πηγές

4.1 Σκέδαση ακουστικών κυμάτων με δύο πηγές σε τυχαίες θέσεις

Ας θεωρήσουμε πως έχουμε ένα σφαιρικό σκεδαστή με δύο στρώματα V_1, V_2 και αντίστοιχες ακτίνες a_1, a_2 . Έστω V_2 είναι ο πυρήνας του σκεδαστή ($0 \leq r \leq a_2$) και θεωρούμε ότι η σημειακές πηγές βρίσκονται στο $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ του στρώματος V_0 και $\mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ ανήκει στο V_1 στρώμα.



Καθεμία από τις παραπάνω σημειακές πηγές δημιουργεί πρωτεύοντα σφαιρικά ακουστικά πεδία. Αυτά, στη συνέχεια, ακτινοβολούνται στα στρώματα της σφαίρας και έχουμε τη δημιουργία των δευτερευόντων ακουστικών πεδίων. Το πρωτεύον σφαιρικό πεδίο που προκύπτει από τη σημειακή πηγή στη θέση r_1 θα είναι ίσο με:

$$u_1^{\text{pr}}(r, \theta) = \frac{1}{h_0(k_1 r_1)} \cdot \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(k_1 r_1) h_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), & r > r_1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n(k_1 r_1) j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), & r < r_1 \end{cases}$$

Αντίστοιχα για τη σημειακή πηγή στη θέση r_0 :

$$u_0^{\text{pr}}(r, \theta) = \frac{1}{h_0(k_0 r_0)} \cdot \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(k_0 r_0) h_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), & r > r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n(k_0 r_0) j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), & r < r_0 \end{cases}$$

Στο εξωτερικό (χώρος V_0), πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη Sommerfeld για το δευτερεύων ακουστικό πεδίο, δηλαδή να ισχύει: $A_{q,n}^0 = 0$, ώστε από τον τύπο να γίνεται απαλοιφή των συναρτήσεων Bessel και να έχουμε μόνο Hankel που χαρακτηρίζουν ακτινοβολία κυμάτων.

Επομένως τα δευτερεύοντα ακουστικά πεδία στο V_0 γίνονται:

$$u_{0,0}^{sec} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} B_{0,n}^0 h_n(k_0 r) P_n(\cos\theta)$$

$$u_{0,1}^{sec} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} B_{1,n}^0 h_n(k_0 r) P_n(\cos\theta)$$

Επιπλέον για το δευτερεύοντα πεδία στο V_1 ισχύουν:

$$u_{1,0}^{sec} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \left(A_{0,n}^1 j_n(k_1 r) + B_{0,n}^1 h_n(k_1 r) \right) P_n(\cos\theta)$$

$$u_{1,1}^{sec} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \left(A_{1,n}^1 j_n(k_1 r) + B_{1,n}^1 h_n(k_1 r) \right) P_n(\cos\theta)$$

Όπου $A_{q,n}^j, B_{q,n}^j$, είναι οι αδιάστατοι συντελεστές προς προσδιορισμό.

Στο συμβολισμό $u_{i,j}^{sec}$ το i αναφέρεται στο στρώμα παρατήρησης, ενώ το j στην πηγή που αντιστοιχεί το κάθε πεδίο.

Επίσης, στο στρώμα V_0 έχουμε:

$u_0^{pr} + u_{0,0}^{sec}$ από τη σημειακή πηγή r_0

$u_{0,1}^{sec}$ από τη σημειακή πηγή r_1

στο στρώμα V_1 έχουμε:

$u_{1,0}^{sec}$ από τη σημειακή πηγή r_0

$u_1^{pr} + u_{1,1}^{sec}$ από τη σημειακή πηγή r_1

$u_{n,m}$ όπου n ο αριθμός στρώματος και m η σημειακή πηγή. Πιο συγκεκριμένα $n=0,1$ (V_0, V_1 αντίστοιχα) και $m=0,1$ (για τις σημειακές πηγές r_0, r_1 αντίστοιχα).

Για τα ολικά ακουστικά πεδία έχουμε:

στο στρώμα V_0 :

$$u_0^t = u_0^{pr} + u_{0,0}^{sec} + u_{0,1}^{sec}$$

- για $r > r_0$

$$u_0^t = \frac{1}{h_0(k_0 r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(k_0 r_0) h_n(k_0 r) P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} B_{0,n}^0 h_n(k_0 r) P_n(\cos\theta) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} B_{1,n}^0 h_n(k_1 r) P_n(\cos\theta)$$

- για $r < r_0$

$$u_0^t = \frac{1}{h_0(k_0 r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n(k_0 r_0) j_n(k_0 r) P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} B_{0,n}^0 h_n(k_0 r) P_n(\cos\theta) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} B_{1,n}^0 h_n(k_1 r) P_n(\cos\theta)$$

στο στρώμα V_1 :

$$u_1^t = u_1^{pr} + u_{1,1}^{sec} + u_{1,0}^{sec}$$

- για $r > r_1$

$$u_1^t = \frac{1}{h_0(k_1 r_1)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(k_1 r_1) h_n(k_1 r) P_n(\cos\theta) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \left(A_{1,n}^1 j_n(k_1 r_1) + B_{1,n}^1 h_n(k_1 r) \right) P_n(\cos\theta) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \left(A_{0,n}^1 j_n(k_0 r_0) + B_{0,n}^1 h_n(k_0 r) \right) P_n(\cos\theta)$$

- για $r < r_1$

$$u_1^t = \frac{1}{h_0(k_1 r_1)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n(k_1 r_1) j_n(k_1 r) P_n(\cos\theta) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \left(A_{1,n}^1 j_n(k_1 r_1) + B_{1,n}^1 h_n(k_1 r) \right) P_n(\cos\theta) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \left(A_{0,n}^1 j_n(k_0 r_0) + B_{0,n}^1 h_n(k_0 r) \right) P_n(\cos\theta)$$

Στο στρώμα V_2 , δηλαδή στο στρώμα του πυρήνα, πρέπει αν αυτός είναι διαπερατός να ισχύει $B_{q,n}^1 = 0$, λόγω του ότι η σφαιρική Hankel τείνει στο άπειρο στο μηδέν. Επομένως, για το δευτερεύον ακουστικό πεδίο στο V_1 έχουμε:

$$u_{2,1}^{\text{sec}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} A_{1,n}^2 j_n(k_2 r) P_n(\cos\theta)$$

$$u_{2,0}^{\text{sec}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} A_{0,n}^2 j_n(k_2 r) P_n(\cos\theta)$$

Επειδή έχουμε διαπερατό σκεδαστή, πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες διαπερατότητας:

$$u_0^{\text{pr}} + u_{0,0}^{\text{sec}} + u_{0,1}^{\text{sec}} = u_1^{\text{pr}} + u_{1,1}^{\text{sec}} + u_{1,0}^{\text{sec}}, \quad r = a_1$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial u_0^{\text{pr}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{0,0}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{0,1}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial u_1^{\text{pr}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{1,1}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{1,0}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} \right), \quad r = a_1$$

$$u_1^{\text{pr}} + u_{1,1}^{\text{sec}} + u_{1,0}^{\text{sec}} = u_{2,0}^{\text{sec}} + u_{2,1}^{\text{sec}}, \quad r = a_2$$

$$\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial u_1^{\text{pr}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{1,1}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{1,0}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial u_{2,0}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial u_{2,1}^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial n} \right), \quad r = a_2$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στις σφαιρικές επιφάνειες S_j παίρνουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

$$\left[\begin{array}{c} \underbrace{\frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} A_{1,n}^1 + \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} A_{0,n}^1}_{A_n^1} \\ \underbrace{\frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} B_{1,n}^1 + \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} B_{0,n}^1}_{B_n^1} \end{array} \right] = \mathbf{T}_n^1 \left[\begin{array}{c} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ \underbrace{\frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} B_{0,n}^0 + \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} B_{1,n}^0}_{B_n^0} \end{array} \right] \quad (1.1)$$

Επομένως έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\left[\begin{array}{c} A_n^1 \\ \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + B_n^1 \end{array} \right] = \mathbf{T}_n^1 \left[\begin{array}{c} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ B_n^0 \end{array} \right] \quad (1.1)$$

$$\begin{bmatrix} A_n^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + A_n^1 \\ B_n^1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} A_n^1 \\ \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + B_n^1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^1 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ B_n^0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_n^1 \\ B_n^1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^1 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ B_n^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{bmatrix} A_n^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + A_n^1 \\ B_n^1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} A_n^1 \\ B_n^1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Επομένως προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_n^1 \\ B_n^1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^1 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ B_n^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_n^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} A_n^1 \\ B_n^1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.4)$$

Άρα έχουμε αντικαθιστώντας την (1.3) στην (1.4) ότι

$$\begin{bmatrix} A_n^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_n^2 \left(\mathbf{T}_n^1 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ B_n^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_n^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{T}_n^2 \mathbf{T}_n^1}_{\mathbf{T}_n^{(0 \rightarrow 2)}} \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} \\ B_n^0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_n^2 \begin{bmatrix} \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \\ -\frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Ο πίνακας μετάβασης \mathbf{T}_n^j από το V_{j-1} στο V_j είναι 2x2 και δεν εξαρτάται από τη θέση της σημειακής πηγής.

Χαρακτηριστικά είναι:

$$\mathbf{T}_n^j = -ix^2_j \begin{bmatrix} h'_n(x_j)j_n(y_j) - z_j h_n(x_j)j'_n(y_j) & h'_n(x_j)h_n(y_j) - z_j h_n(x_j)h'_n(y_j) \\ z_j j_n(x_j)j'_n(y_j) - j'_n(x_j)j_n(y_j) & z_j j_n(x_j)h'_n(y_j) - j'_n(x_j)h_n(y_j) \end{bmatrix}$$

Όπου

$$x_j = k_j a_j, \quad y_j = k_{j-1} a_j, \quad z_j = \frac{k_{j-1} \rho_j}{k_j \rho_{j-1}}$$

για $j = 1, 2$

Κάνουμε χρήση του συμβολισμού $\mathbf{T}_{n,kl}^j$ για $j=1,2$ και με τα k,l να δηλώνουν τον όρο που βρίσκεται στην k γραμμή και l στήλη του πίνακα μετάβασης. Χαρακτηριστικά βλέπουμε τον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{bmatrix} T_{n,11}^j & T_{n,12}^j \\ T_{n,21}^j & T_{n,22}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_n(x_j)j_n(y_j) - z_j h_n(x_j)j'_n(y_j) & h'_n(x_j)h_n(y_j) - z_j h_n(x_j)h'_n(y_j) \\ z_j j_n(x_j)j'_n(y_j) - j'_n(x_j)j_n(y_j) & z_j j_n(x_j)h'_n(y_j) - j'_n(x_j)h_n(y_j) \end{bmatrix}$$

Επομένως, με βάση τα παραπάνω η (1.5) γίνεται:

$$A_n^2 = \mathbf{T}_{n,11}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} + \mathbf{T}_{n,12}^{(0 \rightarrow 2)} B_n^0 + \mathbf{T}_{n,11}^2 \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} - \mathbf{T}_{n,12}^2 \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \quad (1.6)$$

$$0 = \mathbf{T}_{n,21}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} + \mathbf{T}_{n,22}^{(0 \rightarrow 2)} B_n^0 + \mathbf{T}_{n,21}^2 \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} - \mathbf{T}_{n,22}^2 \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} \quad (1.7)$$

Από την (1.7) προκύπτει ότι

$$\mathbf{T}_{n,22}^{(0 \rightarrow 2)} B_n^0 = -\mathbf{T}_{n,21}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} - \mathbf{T}_{n,21}^2 \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + \mathbf{T}_{n,22}^2 \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)}$$

Επομένως

$$B_n^0 = \frac{-\mathbf{T}_{n,21}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} - \mathbf{T}_{n,21}^2 \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + \mathbf{T}_{n,22}^2 \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)}}{\mathbf{T}_{n,22}^{(0 \rightarrow 2)}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.6) έχουμε:

$$A_n^2 = \mathbf{T}_{n,11}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} + \mathbf{T}_{n,12}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{-\mathbf{T}_{n,21}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} - \mathbf{T}_{n,21}^2 \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + \mathbf{T}_{n,22}^2 \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)}}{\mathbf{T}_{n,22}^{(0 \rightarrow 2)}}$$

ή

$$A_n^2 = \mathbf{T}_{n,11}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} + \frac{-\mathbf{T}_{n,12}^{(0 \rightarrow 2)} \mathbf{T}_{n,21}^{(0 \rightarrow 2)} \frac{h_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} - \mathbf{T}_{n,12}^{(0 \rightarrow 2)} \mathbf{T}_{n,21}^2 \frac{h_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)} + \mathbf{T}_{n,12}^{(0 \rightarrow 2)} \mathbf{T}_{n,22}^2 \frac{j_n(k_1 r_1)}{h_0(k_1 r_1)}}{\mathbf{T}_{n,22}^{(0 \rightarrow 2)}}$$

Αναλόγως το μακρινό πεδίο $g(\hat{r})$ προκύπτει συναρτήσει του B_n^0 με αντικατάσταση στον τύπο

$$u^s(\mathbf{r}) = h(kr)u^\infty(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

του Θεωρήματος 1.2.8 της σελίδας 61 του [2].

Επομένως προκύπτει:

$$g(\hat{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{j_n(k_0 r_0)}{h_0(k_0 r_0)} h_n(k_0 r) P_n(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{B_n^0 h_n(k_0 r)}{h_0(k_0 r)} P_n(\cos\theta)$$

5.Μελλοντικοί στόχοι- αντικείμενα μελέτης

Μελλοντικές κατευθύνσεις έρευνας αφορούν τη λύση προβλημάτων που οφείλονται σε διαφορετικές θέσης της πηγής, ανάλογα με το σκεδαστή. Χαρακτηριστικά, μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει προβλήματα σκέδασης στα οποία το προσπίπτον σφαιρικό κύμα εκπέμπεται από πηγή που βρίσκεται εξωτερικά του σκεδαστή. Παρόλα αυτά ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν προβλήματα σκέδασης στα οποία υπάρχει διέγερση του σκεδαστή από σφαιρικό κύμα που εκπέμπεται από πηγή που βρίσκεται στο εσωτερικό του. Έτσι, επόμενο στάδιο μελέτης αποτελούν τα προβλήματα σκέδασης ενός πολυστρωματικού σκεδαστή, στα οποία αυτός διεγείρεται ταυτόχρονα από πολλές σημειακές πηγές, τόσο στο εσωτερικό, όσο και στο εξωτερικό του.

Η εφαρμογή των παραπάνω προβλημάτων είναι επίσης ευρεία και έγκειται σε μεθόδους διάταξης του μικροφώνου για την ατμοσφαιρική ακουστική και την αναγνώριση ομιλίας [12],[13], σε τεχνικές θεραπείας του καρκίνου [14] καθώς και σε μεθόδους απεικόνισης σόναρ στην ωκεανογραφία [15]. Επιπλέον, χαρακτηριστικά προβλήματα διέγερσης πολυστρωματικών σφαιρών αναφέρονται στο [16]. Επιπρόσθετα, η σύνδεση κάθε ομάδας προβλημάτων με τα αντίστοιχα πεδία εφαρμογής των γνώσεων είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση της σημαντικότητας της μελέτης παρόμοιων προβλημάτων και της αναγκαιότητας στην άμεση αξιοποίηση των παραπάνω θεωρητικών γνώσεων προς όφελος της ανθρωπότητας.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] G. Dassios, G. Kamvyssas, Point source excitation in direct and inverse scattering: the soft and the hard small sphere. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1995;**55**:67–84
- [2] X. Αθανασιάδης, *Ειδικά θέματα Μαθηματικών - Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές*, (τόμος Α'), ΕΑΠ (2021).
- [3] C. Athanasiadis, & I. G. Stratis, Low acoustic scattering by an infinitely stratified scatterer. *Rendiconti di Matematica*, **15**, 133-52.
- [4] C. Athanasiadis, P. A. Martin, and I. G. Stratis, “On spherical-wave scattering by a spherical scatterer and related near-field inverse problems”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. **66**, pp. 539-549, 2001.
- [5] D. Colton, J. Coyle, and P. Monk, Recent developments in inverse acoustic scattering theory. *SIAM Rev.*, **42**, 369-414 (2000).
- [6] A. Kalogeropoulos and N. L. Tsitsas, Excitation of a Layered Sphere by Multiple Point-generated Primary Fields, *URSI GASS*, (2020).
- [7] J. Kim and Y. Rahmat-Samii, Implanted antennas inside a human body: Simulations, designs, and characterizations, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **52**:1934–1943 (2004).
- [8] G. Dassios and F. Kariotou, Magnetoencephalography in ellipsoid geometry, *J. Math. Phys.* **44**:220-241 (2003).
- [9] G. Dassios, On the hidden electromagnetic activity of the brain, *Mathematical Methods in Scattering Theory and Biomedical Engineering, Proceedings of the Seventh International Workshop* (World Scientific Publishing Co., 2006), 297-303.
- [10] K. Aki and P. G. Richards, *Quantitative Seismology. Theory and Methods*, Freeman, 1980.
- [11] A. E. Yagle and B. C. Levy, Application of the Schur algorithm to the inverse problem for a layered acoustic medium, *J. Acoust. Soc. Am.* 76:301–308 (1984).
- [12] T. F. Brooks and W. M. Humphreys Jr., “A Deconvolution Approach for the Mapping of Acoustic Sources (DAMAS) Determined from Phased Microphone Arrays,” *Journal of Sound and Vibration*, **294**, 2006, pp. 856–879.
- [13] G. Herold and E. Sarradj “Performance Analysis of Microphone Array Methods,” *Journal of Sound and Vibration*, **401**, 2017, pp. 152–168.

- [14] S. Mukherjee, S. Curto, N. Albin, B. Natarajan, and P. Prakash, "Multiple-antenna Microwave Ablation: Analysis of non-Parallel Antenna Implants," *Energybased Treatment of Tissue and Assessment VIII*, Ed. Thomas P. Ryan, *Proceedings of SPIE*, vol. **9326**, 2015.
- [15] A. Xenaki and Y. Pailhas, "Compressive Synthetic Aperture Sonar Imaging with Distributed Optimization," *Journal of Acoustical Society of America*, **146**, 2019, pp. 1839–1850.
- [16] N. L. Tsitsas and C. Athanasiadis, "Point-source excitation of a layered sphere: Direct and Far-Field Inverse Scattering Problems". *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **61**, 2008, pp. 549–580.
- [17] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, N. York, Dover 1965.
- [18] P. A. Martin, *Multiple Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [19] G. Dassios and R. Kleinman, *Low Frequency Scattering*. Oxford: Clarendon Press, 2000.
- [20] G. Dassios, M. Hadjinicolaou, and G. Kamvyssas, "Direct and Inverse Scattering for Point Source Fields. The Penetrable Small Sphere." *Zeitschrift fur Angewadte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, vol.79, pp. 303-316, 1999.
- [21] D. Colton, and R. Kress, *Integral equation methods in scattering theory*. Wiley- Interscience, New York, 1983.
- [22] R.E. Kleinmann, The Dirichlet problem for the Helmholtz equation. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*. 18,205-229, 1965.
- [23] R.E. Kleinmann, The Rayleigh region. *Proceedings of the IEEE*. 53, 848-856, 1965.
- [24] R.E. Kleinmann, *Low frequency methods in classical scattering theory*. The Technical University of Denmark, Lyngby, 1966.
- [25] R.E. Kleinmann, Far field scattering at low- frequencies. *Applied Scientific Research*. 18,1-8, 1967.
- [26] P. Prokopiou and N. L. Tsitsas, "Direct and inverse low frequency acoustic excitation of a layered sphere by an arbitrarily positioned point source," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 41, pp. 1040-1046, 2018.
- [27] P. Prokopiou and N. L. Tsitsas, "Low-frequency inverse-source algorithms for spherical media," in *Proceedings of the DIPED 2017: the 22nd International Seminar/ Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory*, Dnipropetrovsk, Ukraine, September 2017, pp. 20-24.
- [28] N. L. Tsitsas and P. A. Martin, Finding a source inside a sphere. *Inverse Problems*, 28, 2012.

- [29] A. Kalogeropoulos and N.L. Tsitsas, “Excitation of a Layered Medium by N Sources: Scattering relations, Interaction Cross Sections and their Physical Bounds,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 79, no. 2, pp. 335-356, 2020.
- [30] A. Kalogeropoulos and N.L. Tsitsas, “Inverse Problems Pertaining to a Layered Sphere Excited by N Point Sources”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pp. 1-27, 2023.
- [31] A. Kalogeropoulos and N.L. Tsitsas, “Excitation of a Layered Medium by N Internal Point Sources”, *Proceedings of the 14th International Conference on Numerical and Mathematical Aspects of Wave Propagation- WAVES 2019*, pp. 424-425, 2019.
- [32] P. Prokopiou and N. L. Tsitsas, “Excitation of a Layered Sphere by an Arbitrarily Positioned Point Source: Direct Problem,” in *Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES 2015)*, Karlsruhe, Germany, July 2015. pp. 320-321.
- [33] C. Athanasiadis and N. L. Tsitsas, “Scattering Theorems for Acoustic Excitation of a Layered Obstacle by an Interior Point Source,” *Studies in Applied Mathematics*, vol. 118, pp. 397-418, 2007.
- [34] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 3rd Edition, Springer, New York, 2013.
- [35] A. Sommerfeld, “*Partial Differential Equations in Physics*,” Academic Press, 1949.
- [36] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, Vol. I, II. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [37] C. J. S. Alves and P. M. C. Ribeiro, “Crack detection using spherical incident waves and near-field measurements.” *Boundary Elements XXI.*, Southampton:WIT Press, pp. 355-364,1999.
- [38] A. Charalambopoulos and G. Dassios,” Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid,” *IMA J. Appl. Math.*, **62**,117-136, 1999.
- [39] J. Coyle,” Locating the support of objects contained in a two-layered background medium in two dimensions. *Inverse Problems*, **16**,275-292, 2000.
- [40] G. Dassios and G. Kamvyssas, “The impedance scattering problem for a point-source field. The small resistive sphere. *Q. Jl Mech. Appl. Math.*, **50**, 321-332,1997.
- [41] P.A. Martin and F. J. Rizzo, Partitioning, boundary integral equations, and exact Green’s functions. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **38**, 3483-3495.
- [42] R. Potthast, “A fast new method to solve inverse scattering problems.” *Inverse Problems*,12, 731-742, 1996.

- [43] R. Potthast, "A point-source method for inverse acoustic and electromagnetic obstacle scattering problems," *IMA J. Appl. Math.*, **61**,119-140, 1998.
- [44] D. L. Sengupta, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. Amsterdam: North-Holland, pp. 353 -415, 1969.
- [45] F. Bowman, *Introduction to Bessel Functions*, Dover New York, 1958.
- [46] E. D. Rainville, *Special Functions*, MacMillan, New York, 1960.
- [47] A. D. Wheelon, *Tables of Summable Series and Integrals Involving Bessel Functions*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [48] V. Twersky, "Multiple scattering by arbitrary configurations in three dimensions," *J. Mathematical Phys.* **3**, 83-91, 1962.
- [49] Y. Arnaoudov, G. Dassios, V. Kostopoulos, "The soft and hard coated sphere within a point source wave field," *J. Acoust. Soc. Am.*, 104, 1929-1942, 1998.
- [50] Y. Arnaoudov, G. Dassios, M. Hadjinicolaou, The resistive coated sphere in the presence of a point generated wave field, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 22, 73-90,1999.
- [51] A. T. de Hoop, *Handbook of Radiation and Scattering of Waves*, Academic Press, London, 1995.
- [52] G. Dassios, A. S. Fokas, and F. Kariotou, "On the non- uniqueness of the inverse MEG problem," *Inverse Problems*, **21**, no.2, L1-L5, 2005.
- [53] G. Dassios and A. S. Fokas, "Electro-magneto- encephalography for a three-shell model: dipoles and beyond for the spherical geometry," *Inverse Problems*, **25**, no.3, 2009.
- [54] J. L. Hollmann and L. V. Wang, "Multiple-source optical diffusion approximation for a multilayer scattering medium," *Applied Optics*, **46**, 6004-6009,2007.
- [55] B. Xu, M. Gustafsson, S. Shi, K. Zhao, Z. Ying, and S. He, Radio Frequency Exposure Compliance on Electromagnetic Compatibility, **61**, 327-336, 2019.
- [56] K. L. Wong, *Design of nonplanar microstrip antennas and transmission lines*, Wiley, 1999.
- [57] G. Herold and E. Sarradj, "Performance Analysis of Microphone Array Methods," *Journal of Sound and Vibration*, **401**, 152-168, 2017.

Παράρτημα Α: Συναρτήσεις Bessel

Κυλινδρικές συναρτήσεις

Η παρακάτω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Bessel τάξης ν και αποτελεί μια από τις σημαντικότερες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

όπου $\nu \in \mathbb{R}$ σταθερά θετική ή μηδέν, δηλαδή $\nu \geq 0$.

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

Συναρτήσεις Bessel $J_0(x)$ και $J_1(x)$

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}$$

ή

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} \pm \dots$$

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!}$$

ή

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1! 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \frac{x^7}{2^7 3! 4!} \pm \dots$$

Και έχει γενικό τύπο:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Σχέσεις των συναρτήσεων Bessel και των παραγώγων τους

$$[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$[x^{-\nu}J_{\nu}(x)]' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x)$$

Για τις συναρτήσεις Hankel 1ου και 2ου είδους έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + iN_{\nu}(x)$$

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = J_{\nu}(x) - iN_{\nu}(x)$$

Όπου $N_{\nu}(x)$ είναι οι συναρτήσεις Neumann τάξης ν ή συναρτήσεις Bessel 2ου είδους.

Για μικρά ορίσματα ως προς x έχουμε τις εξής ασυμπτωτικές σχέσεις:

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O(x^{n+2}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$N_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} + O(1), & x \rightarrow 0, & n = 0, \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right) + O(x \ln x), & x \rightarrow 0, & n = 1, \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n + O(x^{2-n}), & x \rightarrow 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

Για μεγάλα ορίσματα, έχουμε:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$N_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow \infty$$

Σφαιρικές συναρτήσεις

Η εξίσωση

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0 \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots$$

Αποτελεί την σφαιρική εξίσωση Bessel n τάξης. Οι λύσεις της είναι οι συναρτήσεις j_n (σφαιρικές συναρτήσεις Bessel), n_n (σφαιρικές Neumann) και $h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$ (σφαιρικές Hankel) και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις που τις συνδέουν με τις αντίστοιχες κυλινδρικές Bessel, Neumann και Hankel:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x),$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x).$$

Για μικρά ορίσματα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$j_n(x) \sim \frac{x^n}{(2n+1)!!}, \quad x \rightarrow 0$$

$$n_n(x) \sim \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow 0,$$

Όπου $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$

Και $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$

Για μεγάλα ορίσματα έχουμε τις σχέσεις:

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x} \cos\left(x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$n_n(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{ix} i^{-n}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$h_n^{(2)}(x) \sim \frac{e^{-ix}}{-ix} i^n, \quad x \rightarrow \infty.$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε οι συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel τάξης μηδέν ορίζονται ως εξής:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

$$h_0^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{ix},$$

$$h_0^{(2)}(x) \sim \frac{e^{-ix}}{-ix}.$$

Παράρτημα Β: Συντελεστές χαμηλών συχνοτήτων στην ακουστική
Μαλακός πυρήνας

$$M^{1}_{0,0} = \frac{1}{-1 + \gamma_1(1 - z_1)}$$

$$M^{2}_{0,0} = \frac{\eta_1 \gamma_1}{[-1 + \gamma_1(1 - z_1)]^2}$$

$$M^{3}_{0,0} = \frac{\eta_1^2 \gamma_1 [-1 + (1 + 2z_1)\gamma_1]}{3z_1 [-1 + \gamma_1(1 - z_1)]^3}$$

$$M_{0,n} = \frac{[n(1 + z_1^{2n+1})] + n\gamma_1(1 - z_1^{2n+1})}{[n(1 + z_1^{2n+1})] - \gamma_1(n + 1)(1 - z_1^{2n+1})}$$

$$M^{1}_{1,0} = \frac{d - 1}{-1 + \gamma_1 - \gamma_1 z_1}$$

$$M^{2}_{1,0} = \frac{-\eta_1 d^2 (-z_1 \gamma_1 - 1 + \gamma_1) + \eta_1 d (\gamma_1 - 1) - \eta_1 z_1 \gamma_1}{z_1 (-1 + \gamma_1 - \gamma_1 z_1)^2}$$

.

$$M_{1,n} = \frac{1 - d^{2n+1}}{[n(1 + z_1^{2n+1})] - \gamma_1(n + 1)(1 - z_1^{2n+1})}$$

Σκληρός πυρήνας

$$E^{1}_{0,0} = 0$$

$$E^{2}_{0,0} = 0$$

$$E^{3}_{0,0} = \frac{\eta_1^2}{3\gamma_1 z_1^3}$$

$$E_{0,n} = \frac{\gamma_1 [n(1 + z_1^{2n+1}) + z_1^{2n+1}] + (1 - z_1^{2n+1})(n + 1)}{n(1 - z_1^{2n+1}) - \gamma_1 [n(1 + z_1^{2n+1}) + z_1^{2n+1}]}$$

$$E^{1}_{1,0} = -\frac{d}{\gamma_1 z_1}$$

$$E^{2}_{1,0} = \frac{\eta_1 d^2}{z_1^2 \gamma_1}$$

$$E^3_{1,0} = \frac{d\eta_1^2(\gamma_1 - 1) - 2\eta_1^2\gamma_1 d^3 + \eta_1^2\gamma_1}{3z_1^3\gamma_1^2}$$

$$E_{1,n} = \frac{-(n+1)d^{2n+1} + n}{n(1 - z_1^{2n+1}) - [z_1^{2n+1} + n(1 + z_1^{2n+1})\gamma_1]}$$