Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Ακολουθίες και Σειρές Πραγματικών Συναρτήσεων

Αφροδίτη Δημάκη

Επιβλέπων καθηγητής: Ανδρέας Μπούκας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Ακολουθίες και Σειρές Πραγματικών Συναρτήσεων

Αφροδίτη Δημάκη

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ανδρέας Μπούκας
Μέλος Σ.Ε.Π - Ε.Α.Π.

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Μπραζιτίκος Σιλουανός

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία, εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος ‘Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά’ της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοιχτού Πανεπιστημίου.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους εκείνους που συνέβαλαν και με στήριξαν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου και κατά την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μπούκα Ανδρέα για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια της διπλωματικής μου διατριβής. Η υποστήριξη και οι επιστημονικές συμβουλές που μου παρείχε, αποτέλεσαν καθοριστικό παράγοντα για την ολοκλήρωσή της.

Επίσης, ευχαριστώ τον συνεπιβλέποντα καθηγητή Σιλουανό Μπραζιτίκο για τη συμμετοχή του.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν στην προσπάθεια μου, τον σύντροφό μου, τους εκλεκτούς φίλους και συμφοιτητές μου και φυσικά την οικογένειά μου.

Περίληψη

Augustin-Louis Cauchy
1789-1857

Το 1821 ο Augustin-Louis Cauchy δημοσίευσε μια απόδειξη όπου υποστήριξε ότι 'το όριο κάθε συγκλίνουσας σειράς συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση', για το οποίο ο Niels Henrik Abel το 1826 βρήκε αντιπαραδείγματα στο πλαίσιο των σειρών Fourier, υποστηρίζοντας ότι η απόδειξη του Cauchy είναι λανθασμένη. Εντελώς καθορισμένες έννοιες της σύγκλισης δεν υπήρχαν εκείνη την εποχή, και ο Cauchy χειριζόταν τη σύγκλιση χρησιμοποιώντας μεθόδους απειροστών μεταβολών. Ο όρος ομοιόμορφη σύγκλιση πιθανότατα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Christoph Gudermann, σε μια εργασία του το 1838 σχετικά με τις ελλειπτικές συναρτήσεις, παρόλα αυτά δεν έδωσε έναν επίσημο ορισμό, ούτε χρησιμοποίησε την ιδιότητα σε καμία από τις αποδείξεις του. Αργότερα, ο μαθητής του Gudermann, Karl Weierstrass, ο οποίος παρακολούθησε το μάθημά του για τις ελλειπτικές συναρτήσεις το 1839-1840, επινόησε τον όρο 'ομοιόμορφα συγκλίνουσες' (Γερμανικά: gleichmäßig konvergent) τον οποίο χρησιμοποίησε στην εργασία του *"Zur Theorie der Potenzreihen"* το 1841, που δημοσιεύτηκε το 1894. Ανεξάρτητα, παρόμοιες έννοιες διατυπώθηκαν από τους Philipp Ludwig von Seidel και George Gabriel Stokes. Ο G. H. Hardy συγκρίνει τους τρεις ορισμούς στην εργασία του "*Sir George Stokes and the concept of uniform convergence*" και παρατηρεί: 'Η ανακάλυψη του Weierstrass ήταν η παλαιότερη, και μόνος του συνειδητοποίησε πλήρως την εκτεταμένη σημασία της ως μία από τις θεμελιώδεις ιδέες της Ανάλυσης'. [1]

Karl Weierstrass
1815-1897

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη ακολουθιών και σειρών πραγματικών συναρτήσεων με έμφαση στις συνθήκες που επιτρέπουν την εναλλαγή των βασικών οριακών πράξεων της Ανάλυσης, δηλαδή της άπειρης άθροισης, της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης. Η εργασία χωρίζεται σε πέντε κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Πραγματικής Ανάλυσης, που είναι απαραίτητες για την μελέτη των επόμενων κεφαλαίων.

Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελείται απο δύο ενότητες, τη θεωρία για την κατά σημείο σύγκλιση ακολουθιών, όπου πέρα από τη θεωρία και τις αποδείξεις, αναφέρονται παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, ώστε να τονιστεί η σημασία της ιδιότητας της ομοιόμορφης σύγκλισης, η οποία αποτελεί την δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία για την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων, καθώς και το κριτήριο του Cauchy και το Weierstrass M-Test.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξηγείται πως αρκετές ιδιότητες των ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων, όπως η συνέχεια, η ολοκλήρωση και η παραγώγιση, με κάποιες πρόσθετες υποθέσεις, μεταφέρονται στην οριακή συνάρτηση, εάν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

[1] Η ιστορική παράγραφος προέρχεται από το Wikipedia: `https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence#History`.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται κάποια αντιπαραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των θεωρημάτων που αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, όταν οι υποθέσεις των θεωρημάτων αυτών αποτυγχάνουν.

Abstract

Augustin-Louis Cauchy

1789-1857

In 1821 Augustin-Louis Cauchy published proof that "a convergent sum of continuous functions is always continuous", to which Niels Henrik Abel in 1826 found purported counterexamples in the context of the Fourier series, arguing that Cauchy's proof is incorrect. Completely standard notions of convergence did not exist at the time, and Cauchy handled convergence using infinitesimal methods. The term uniform convergence was probably first used by Christoph Gudermann, in an 1838 paper on elliptic functions, nevertheless, he did not give a formal definition, nor use the property in any of his proofs. Later Gudermann's pupil Karl Weierstrass who attended his course on elliptic functions in 1839-1840, coined the term "uniformly convergent" (German: gleichmäßig konvergent) which he used in his 1841 paper *"Zur Theorie der Potenzreihen"*, published in 1894. Independently, similar concepts were articulated by Philipp Ludwig von Seidel and George Gabriel Stokes. G. H. Hardy compares the three definitions in his paper *"Sir George Stokes and the concept of uniform convergence"* and remarks: "Weierstrass's discovery was the earliest, and he alone fully realized its far-reaching importance as one of the fundamental ideas of Analysis." [1]

Karl Weierstrass

1815-1897

The purpose of this thesis is to study sequences and series of real functions with an emphasis on the conditions that allow the interchange of the basic limit operations of Analysis, i.e., infinite sum, differantiation, and integration. The work is divided into five chapters.

The first chapter presents basic concepts of Real Analysis, which are necessary for the study of the subsequent chapters.

The second chapter consists of two sections, the theory of pointwise convergence, where in addition to theory and proofs, examples and counterexamples are given, to emphasize the importance of the property of uniform convergence, which is the second section of the chapter.

The third chapter presents the theory of pointwise and uniform convergence of series of functions as well as the Cauchy criterion and the Weierstrass M-Test.

The fourth chapter explains that several properties of sequences and series of functions, such as continuity, integration, and differantiation, with some additional assumptions, are transferred to the limit function if the convergence is uniform.

Finally, in the fifth chapter, some counterexamples are given for a better understanding of the theorems mentioned in the previous chapters, when the hypotheses of these theorems fail.

[1]The historical paragraph comes from Wikipedia: `https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence#History`.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ορισμός μετρικού χώρου και σύγκλισης ακολουθίας σε μετρικό χώρο

1.1 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 1.1.1 (Μετρική). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο.* ***Μετρική*** *στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ που ικανοποίει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν d είναι μια μετρική στο X, τότε το ζεύγος (X, d) καλείται ***μετρικός χώρος****. Τα στοιχεία του X λέγονται και σημεία. Επίσης, την τιμή $d(x, y)$ στο ζευγάρι (x, y) τήν ονομάζουμε* ***απόσταση*** *των x, y.*

Πιο απλά λέμε ότι μετρικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο X και ένας συγκεκριμένος τρόπος μέτρησης αποστάσεων ανάμεσα στα στοιχεία του. Μετρικός χώρος είναι δύο πράγματα μαζί: ένα μη κενό σύνολο X και μια μετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει πως όταν έχουμε ένα σύνολο X δε μπορούμε να μιλάμε για μετρικό χώρο X παρά μόνον όταν είναι ήδη καθορισμένη και εννοείται από τα συμφραζόμενα μια συγκεκριμένη μετρική d στο σύνολο X. Έχουμε συνηθίσει να μελετάμε τα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ και να μετράμε αποστάσεις στα σύνολα αυτά με τον Ευκλείδιο τρόπο. Όμως, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να μετράμε αποστάσεις και στα σύνολα $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$,αλλά και σε πολλά άλλα ενδιαφέροντα σύνολα όπως θα δούμε παρακάτω.

Παράδειγμα 1.1.1. Η συνήθης μετρική στον $\mathbb{R}$ ορίζεται η

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι σχεδόν προφανείς, θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(y, z).$$

Παράδειγμα 1.1.2. Η Ευκλειδεία μετρική στον $\mathbb{R}^n$, τον χώρο των διατεταγμένων n-άδων $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ πραγματικών αριθμών ορίζεται ως εξής: αν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Η συνάρτηση μετράει τη 'συνήθη' (Ευκλείδεια) απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον επίπεδο, $n-$διάστατο χώρο κάνοντας επανειλημμένη χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι προφανείς. Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια τής ανισότητας Minkowski.

Παράδειγμα 1.1.3. Κάθε μη κενό σύνολο X μπορεί να γίνει μετρικός χώρος κατά «τετριμμένο τρόπο», ορίζοντας τη διακριτή μετρική $d_\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d_\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Ο χώρος (X, d_δ) λέγεται διακριτός μετρικός χώρος. Εύκολα βλέπουμε ότι η διακριτή μετρική ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) μιας μετρικής. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί και την ιδιότητα της τριγωνικής ανισότητας. Έχουμε,

- αν $d_\delta(x, y) = 0$, τότε η ανισότητα $d_\delta(x, y) \leq d_\delta(x, z) + d_\delta(z, y)$ ισχύει, διότι $d_\delta(x, z) \geq 0$ και $d_\delta(z, y) \geq 0$.
- αν $d_\delta(x, y) = 1$, τότε $x \neq y$, οπότε τουλάχιστον ένα από τα x, y είναι διαφορετικό του z. Επομένως, ένας τουλάχιστον από $d_\delta(x, z)$, $d_\delta(z, y)$ ισούται με 1 (και ο άλλος είναι ≥ 0). Άρα $d_\delta(x, y) = 1 \leq d_\delta(x, z) + d_\delta(z, y)$.

Ορισμός 1.1.2 (Σχετική μετρική)**.** *Έστω (X, d) ένας μέτρικος χώρος. Αν A είναι οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο X, η απεικόνιση $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με*

$$d_A(x, y) = d(x, y) \qquad x, y \in A$$

*είναι μετρική στο σύνολο A. Είναι ο περιορισμός της d στο $A \times A$. Η d_A είναι η **σχετική μετρική** που επάγεται από τη d στο A.*

Παράδειγμα 1.1.4. Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής σε αυτό.

Ορισμός 1.1.3 (Διάμετρος)**.** *(i) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Ο (X, d) λέγεται **φραγμένος** αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει $d(x, y) \leq C$. Ισοδύναμα, αν*

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in X\} < \infty.$$

*Στην περίπτωση αυτή, η **διάμετρος** του X είναι ο αριθμός:*

$$\mathrm{diam(X)} := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$$

(ii) Ένα μη κενό υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) λέγεται ***φράγμενο*** *αν ο μετρικός χώρος (A, d_A) είναι φραγμένος. Ισοδύναμα, αν*

$$\sup\{d_A(x, y) : x, y \in A\} < \infty$$

Στην περίπτωση αυτή, η ***διάμετρος*** *του A είναι ο αριθμός:*

$$\text{diam}(A) := \sup\{d_A(x, y) : x, y \in A\}$$

Συμφωνούμε ότι το κενό σύνολο (ως υποσύνολο οποιουδήποτε μετρικού χώρου) έχει μηδενική διάμετρο.

1.2 Χώροι με νόρμα

Ορισμός 1.2.1 (Νόρμα)**.** *Έστω X ενάς πραγματικός γραμμικός χώρος.* ***Νόρμα*** *στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = \vec{0}$ (μη αρνητική).

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in X$ (θετικά ομογενής).

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.

Παρατήρηση. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ικανοποίουνται οι ιδιότητες του Ορισμού 1.1.1.

1.2.1 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε τις παρακάτω νόρμες:

1. Την supremum-νόρμα

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i|, i = 1, \cdots, m\}.$$

Η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 1.2.1. Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι προφανείς, θα αποδείξουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Έχουμε,

$$\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$$

για κάποιο $i_0 \in 1, \ldots, n$. Για το συγκεκριμένο i_0,

$$|x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |xi_0| + |y_{i_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Συνεπώς,

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ συμβολίζεται με ℓ_∞^m.

2. Την 1-νόρμα
$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|.$$
Όλες οι ιδιότητες αυτής της νόρμας προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής. Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m .

3. Την Ευκλείδεια νόρμα
$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Οι ιδιότητες της νόρμας και σε αυτή την περίπτωση είναι τετριμμένες εκτός της τριγωνικής ανισότητας, για την απόδειξη της οποίας απαιτείται η ανισότητα Cauchy-Schwarz. Έχουμε,
$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 + \sum_{i=0}^{m} 2x_i y_i + \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \\
&\le \|x\|_2^2 + 2\sum_{i=0}^{m} |x_i y_i| + \|y\|_2^2 \\
&\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$
όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Συνεπώς,
$$\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2.$$
Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ λέγεται Ευκλείδειος χώρος και συμβολίζεται με ℓ_2^m.

4. Γενικότερα, την p-νόρμα, $1 < p < \infty$, όπου
$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Minkowski,
$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p} \\
&\le \|x\|_p + \|y\|_p.
\end{aligned}$$
Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ συμβολίζεται με l_p^m.

Παρατήρηση. Οι επαγόμενες μετρικές $d_p(x,y) = \|x-y\|_p$ στον $\mathbb{R}^m$ έχουν την εξής μορφή: αν $x = (x_1, \ldots, x_m)$ και $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

και

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

1.2.2 Χώροι ακολουθιών

1. Ο χώρος $\ell_\infty \equiv \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\ell_\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } M \equiv M(x) > 0 : \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ ισχύει } |x(n)| \leq M\}$$

είναι πραγματικός γραμμκός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum-νόρμα $\|\cdot\| : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα:

(α′) Είναι $\|x\|_\infty \geq 0$ για κάθε $x \in \ell_\infty$. Αν $\|x\|_\infty = 0$, τότε $|x(n)| \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x(n) = 0$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$. Οπότε, $x = 0$.

(β′) Ισχύει $\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x(n)| = |\lambda| \sup_n |x(n)| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ′) Έστω $x, y \in \ell_\infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$|x(n) + y(n)| \leq |x(n)| + |y(n)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς n συμπεραίνουμε ότι

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x(n) + y(n)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

2. Ο χώρος $c_0 \equiv c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος (και μάλιστα υποχώρος του ℓ_∞ αφού κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία είναι φραγμένη) με τις κατα σημείο πράξεις. Στον c_0 θεωρούμε την supremum-νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

3. Ο χώρος $\ell_1 \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών, δηλαδή

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0. Πράγματι, αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$, τότε $\lim\limits_{n \to \infty} x(n) = 0$. Ορίζουμε τη νόρμα $\|x\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

4. Πιο γενικά, αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\ell_p \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$. Στον ℓ_p ορίζουμε την p-νόρμα

$$\|x\|_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

5. Έστω ο χώρος $c_{00} \equiv c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή $x \in c_{00}$ αν και μόνο αν υπάρχει $n_0 \equiv n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $n \geq n_0(x)$. Στο χώρο αυτό μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε από τις p-νόρμες, $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.3 Χώροι συναρτήσεων

1. Ο χώρος $C([a, b])$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $[a, b]$ είναι το σύνολο

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{συνεχής}\}$$

το οποίο είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον χώρο $C([a, b])$ ορίζουμε τις παρακάτω νόρμες:

(α′) την supremum-νόρμα

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Παρατηρούμε ότι το sup υπάρχει, αφού η $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max αφού κάθε συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή.

(β′) την 1-νόρμα

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

(γ′) και γενικότερα, την p-νόρμα για κάθε $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Παρατήρηση. Οι επαγόμενες μετρικές $d_p(f, g) = \|f - g\|_p$ στον $C([a, b])$ έχουν την εξής μορφή: αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

και

$$d_\infty(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}.$$

2. Στον χώρο $C^1([a, b])$ των συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο θεωρούμε την νόρμα

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Παρατήρηση. Η $\|f\|' = \|f'\|_\infty$ δεν είναι νόρμα (και δεν επάγει μετρική) στον $C^1([a, b])$, διότι δεν ικανοποιούνται οι ιδιότητες του Ορισμού 1.2.1 και συγκεκριμένα η ιδιότητα (i). Αρκεί να πάρουμε μια σταθερή συνάρτηση $\neq 0$.

1.3 Σύγκλιση ακολουθιών

1.3.1 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. **Ακολουθία** στον X είναι κάθε συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to X$. Γράφουμε $x_n := x(n)$ για τον n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n) ή $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$.

Ορισμός 1.3.1 (Σύγκλιση ακολουθίας). *Μια ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X, d) συγκλίνει στο $x \in X$ ως προς τη μετρική d (ή είναι d-συγκλίνουσα) αν*

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \text{ ώστε αν } n \geq n_0 \text{ να ισχύει } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Για να το δηλώσουμε αυτό θα γράφουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ ή απλώς $x_n \to x$. Το x λέγεται d-όριο (ή απλώς όριο) της ακολουθίας.

Πρόταση 1.3.1. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d) και έστω $x \in X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{d} x$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(d(x_n, x))_n$ πραγματικών αριθμών είναι μηδενική.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $(d(x_n, x))_n$ στο $\mathbb{R}$ είναι μηδενική αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n, x) = |d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$. Όμως αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{d} x$. □

Πρόταση 1.3.2. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d). Αν υπάρχει το όριο της (x_n), τότε αυτό είναι και μοναδικό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x_n \xrightarrow{d} x$ και $x_n \xrightarrow{d} y$, όπου $x, y \in X$. Θα δείξουμε ότι $x = y$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y). \tag{1.1}$$

Για τυχαίο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την (1.1) προκύπτει ότι

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, έπεται ότι $d(x, y) = 0$, άρα $x = y$. □

Πρόταση 1.3.3. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν (x_n), (y_n) ακολουθίες στον X και $x, y \in X$ με $x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$, τότε $d(x_n, y_n) \xrightarrow{d} d(x, y)$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1.3.1. *Εστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν οι ανισότητες:*

(i) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.

(ii) $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$ *για κάθε* $x, y, z, w \in X$.

Απόδειξη Λήμματος. (i) Έστω $x, y, z \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής έχουμε

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y),$$
$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x).$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y).$$

(ii) Έστω $x, y, z, w \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq |d(x,y) - d(y,z)| + |d(y,z) - d(z,w)|.$$

Από το (i) έχουμε

$$|d(x,y) - d(y,z)| + |d(y,z) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w).$$

□

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης. Από το (ii) του Λήμματος 1.3.1 έχουμε

$$|d(x_n, y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, αφού $x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$. □

1.3.2 Βασικές ακολουθίες και φραγμένες ακολουθίες

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) πραγματικών αριθμών γενικεύεται και αυτός άμεσα στα πλαίσια των μετρικών χώρων.

Ορισμός 1.3.2 (Βασική ακολουθία)**.** *Μία ακολουθία (x_n) σε ένα μετρικό χώρο (X,d) λέγεται* ***βασική*** *(ή* ***Cauchy****) , αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $m, n \geq n_0$.*

Πρόταση 1.3.4. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) μια συγκλίνουσα ακολουθία στον χώρο (X,d), τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{d} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Έστω $m, n \geq n_0$. Τότε,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Ορισμός 1.3.3 (Φραγμένη ακολουθία)**.** *Έστω (x_n) μια ακολουθία στον μετρικό χώρο (X,d). Λέμε ότι η (x_n) είναι* ***φραγμένη*** *αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $d(x_m, x_n) \leq C$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.*

Πρόταση 1.3.5. *Έστω (X,d) ένας μετρικός χωρος. Τότε, κάθε βασική ακολουθία στον X είναι φραγμένη.Ειδικότερα, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X,d). Τότε, υπάρχει $n_0 > 1$ τέτοιο ώστε αν $m,n \geq n_0$ να ισχύει $d(x_n,x_m) < 1$. Ειδικότερα, $d(x_n,x_{n_0}) < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Θέτουμε

$$M = \max\{d(x_1,x_{n_0}),\ldots,d(x_{n_0-1},x_{n_0}),1\} > 0.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$d(x_n,x_{n_0}) \leq M.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n_0}) + d(x_m,x_{n_0}) \leq 2M,$$

οπότε

$$\sup\{d(x_m,x_n) : m,n \in \mathbb{N}\} \leq 2M.$$

Συνεπώς η (x_n) είναι φραγμένη.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό έχουμε ότι αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα στον X, τότε είναι Cauchy. Άρα από τον πρώτο ισχυρισμό έπεται ότι είναι φραγμένη. □

1.3.3 Υπακολουθίες

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) μία ακολουθία στον X. Αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η (x_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** της (x_n).

Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως στην περίπτωση των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, ότι αν $x_n \xrightarrow{d} x$ τότε για κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ισχύει $x_{k_n} \xrightarrow{d} x$. Ένα άλλο αποτέλεσμα που μεταφέρεται από το πλαίσιο των πραγματικών αριθμών σε αυτό των μετρικών χώρων είναι το εξής:

Πρόταση 1.3.6. *Έστω (X,d) ένας μέτρικος χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αν η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X και $x_{k_n} \xrightarrow{d} x$, όπου (x_{k_n}) μια υπακολοθία της (x_n). Θα δείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n,m \geq n_1.$$

Επιπλέον $x_{k_n} \xrightarrow{d} x$, άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$d(x_{k_n},x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n \geq n_2$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$. Παρατηρούμε ότι αν $n \geq n_0$ τότε $k_n \geq n \geq n_0$, οπότε $n,k_n \geq n_1$ και $n \geq n_2$. Συνεπώς,

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{k_n}) + d(x_{k_n},x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{d} x$. □

Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου οποιασδήποτε διάστασης.

Θεώρημα 1.3.1 (Bolzano-Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $x_n = (x_n(1), \dots, x_n(m))$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε η $(x_n(1))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο $\mathbb{R}$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x_1$$

Η υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) έχει λοιπόν συγκλίνουσα πρώτη συντεταγμένη. Η $(x_{k_n}(2))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}(2))$:

$$x_{k_{\lambda_n}}(2) \to x_2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$x_{k_{\lambda_n}}(1) \to x_1,$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x_1$ και η $(x_{k_{\lambda_n}}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$. Άρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της που κάθε συντεταγμένη της είναι συγκλίνουσα. Έχουμε δείξει ότι η σύγκλιση ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη, συνεπώς η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. □

Σε τυχόντα μετρικό χώρο το Θεώρημα 1.3.1 δεν ισχύει κατ΄ ανάγκην, όπως φαίνεται και από τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3.1. Θεωρούμε το χώρο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από την supremum νόρμα. Αν $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$ τότε

$$d_\infty(x, y) = \sup |x_n - y_n| : n = 1, 2, \dots.$$

Σε αυτό το χώρο θεωρούμε την ακολουθία (e_n) όπου

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

η οποία είναι φραγμένη αφού $d_\infty(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_\infty = 1$ αν $n \neq m$. Η ίδια ισότητα δείχνει ότι η (e_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αν είχε, οι όροι της υπακολουθίας θα έπρεπε τελικά να απέχουν απόσταση μικρότερη από 1.

Παράδειγμα 1.3.2. Θεωρούμε τη διακριτή μετρική d_δ σε ένα άπειρο σύνολο, για παράδειγμα το $\mathbb{N}$. Η ακολουθία $x_n = n$ στον $(\mathbb{N}, d_\delta)$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς της τοπολογίας μετρικών χώρων.

1.4 Τοπολογία μετρικών χώρων

1.4.1 Ανοιχτά και κλειστά σύνολα

Ορισμός 1.4.1. *Έστω (X, d) μέτρικος χώρος και $x_0 \in X$.*

(α΄) *Η **ανοιχτή** d-**μπάλα** με κέντρο x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο*

$$B_d(x_o, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_o) < \varepsilon\}.$$

(β΄) *Η **κλειστή** d-**μπάλα** με κέντρο x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο*

$$\widehat{B}_d(x_o, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_o) \leq \varepsilon\}.$$

(γ΄) *Η d-**σφαίρα** με κέντρο x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο*

$$S_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) = \varepsilon\}.$$

Ορισμός 1.4.2 (Εσωτερικό σημείο). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in A$ λέγεται **εσωτερικό σημείο** (interior point) του A αν υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$.*

Ορισμός 1.4.3 (Ανοιχτό σύνολο). *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και έστω $G \subseteq X$. Το G λέγεται d-**ανοιχτό** (open) αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq G$. Δηλαδή, αν κάθε σημείο του G είναι εσωτερικό του σημείο.*

Ορισμός 1.4.4 (Κλειστό σύνολο). *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F είναι d-**κλειστό** (closed) αν το συμπληρωμά του $F^c \equiv X \setminus F$ είναι d-ανοιχτό.*

1.4.2 Εσωτερικό και κλειστή θήκη

Ορισμός 1.4.5 (Εσωτερικό συνόλου). *Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d). Το **εσωτερικό** (interior) του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A και συμβολίζεται με $intA$ ή A^0. Δηλαδή:*

$$A^0 \equiv intA = \{x \in A \,|\, \exists\, \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Ορισμός 1.4.6 (Σημείο επαφής). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται **σημείο επαφής** (contact point) του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ (δηλαδή αν κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει στοιχεία του A).*

Ορισμός 1.4.7 (Κλειστή θήκη). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Η **κλειστή θήκη** (closure) $\bar{A}$ ή $cl(A)$ του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του, δηλαδή:*

$$\bar{A} \equiv cl(A) = \{x \in X : \text{για κάθε}\, \varepsilon > 0, A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

1.4.3 Σημεία συσσώρευσης και σύνορο

Ορισμός 1.4.8 (Σημείο συσσώρευσης). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ είναι* ***σημείο συσσώρευσης*** *(accumulation point) του A αν σε κάθε ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A διαφορετικό του x. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A συμβολίζεται A' και λέγεται παράγωγο σύνολο του A.

Ορισμός 1.4.9 (Σύνορο). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται συνοριακό σημείο του A (boundary point) του A αν σε κάθε ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A αλλά και σημείο του A^c. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A λέγεται* ***σύνορο*** *(boundary) του A και συμβολίζεται με $bd(A)$ ή $\partial(A)$.*

1.5 Συμπάγεια

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να εισάγουμε την έννοια του συμπαγούς μετρικού χώρου. Ο πλέον εύληπτος είναι αυτός της ακολουθιακής συμπάγειας, ο οποίος γενικεύει την «ιδιότητα Bolzano-Weierstrass» των κλειστών διαστημάτων $[a, b]$ της πραγματικής ευθείας στο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.5.1 (Ακολουθιακά συμπαγής χώρος). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται* ***ακολουθιακά συμπαγής*** *(sequentially compact) αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.*

Ορισμός 1.5.2 (Κάλυμμα). *Έστω X τυχόν μη κενό σύνολο και $A \subseteq X$. Μια οικογένεια $(U_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται* ***κάλυμμα*** *του A αν*

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Αν για κάποιο $J \subseteq I$ ισχύει $A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, τότε λέμε ότι η $(U_i)_{i \in J}$ είναι υποκάλυμμα του $(U_i)_{i \in I}$ για το A.

Ορισμός 1.5.3 (Ανοικτό κάλυμμα). *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $(U_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Η $(U_i)_{i \in I}$ λέγεται* ***ανοικτό κάλυμμα*** *του X, αν $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Γενικότερα, αν $A \subseteq X$, η $(U_i)_{i \in I}$ λέγεται ανοικτό κάλυμμα του A, αν $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.*

Ένας διαφορετικός αλλά ισοδύναμος ορισμός της συμπάγειας, ο οποίος μπορεί να δοθεί και στο γενικότερο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων και βασίζεται στην ιδέα ότι οι συμπαγείς μετρικοί χώροι έχουν από πολλές απόψεις τη «δομή ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου» είναι ο εξής:

Ορισμός 1.5.4 (Συμπάγεια)**.** *Εστω (X,d) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται* ***συμπαγής*** *(compact) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Με άλλα λόγια, αν ισχύει το εξής:*

Για κάθε οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$.

Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K από ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $(V_{i_j})_j^m = 1$, ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}$.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες συναρτήσεων

2.1 Κατά σημείο σύγκλιση

Ορισμός 2.1.1. *Έστω X σύνολο, (Y,d) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to Y$ $(n = 1,2,\dots)$. Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει* ***κατά σημείο*** *(pointwise) στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Γράφουμε τότε ότι $f_n \xrightarrow{pw} f$ ή $f_n \to f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (x_n) μια ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t, x_n)$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) = d(t,x)$ για $t \in X$. Από το (i) του Λήμματος 1.3.1 έχουμε ότι για κάθε $x \in X$

$$f_n(t) = d(t,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} d(t,x) = f(t).$$

Δηλαδή, η $f_n \to f$ κατά σημείο.

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in X$. Καθώς το $n \to \infty$, η $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Άρα η f_n συγκλίνει κατα σημείο στην f στον X.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω $f_n : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ για κάθε $x > 1$, τότε $f_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$,για κάθε $x > 1$. Δηλαδή η $f_n \to 0$ κατά σημείο, όπου 0 η σταθερή συνάρτηση 0.

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$ και αν $x > 0$, τότε $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \to 0$ καθώς $n \to +\infty$. Άρα $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 2.1.5. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αν $x = 1$, τότε $f_n(1) = 1 \to 1$ και αν $0 \leq x < 1$, τότε $f_n(x) = x^n \to 0$ καθώς $n \to +\infty$. Συνεπώς η $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{nx^2}, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$ και αν $0 < x \leq 1$, τότε αν το n είναι αρκετά μεγάλο ισχύει ότι: $\frac{1}{n} < x$, άρα $f_n(x) = \frac{1}{nx^2} \to 0$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Τέλος, θα δώσουμε και ένα παράδειγμα που δεν προκύπτει κατά σημείο σύγκλιση.

Παράδειγμα 2.1.7. Έστω $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \cos(xn)$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$. Είναι $f_n(\pi) = (-1)^n$, οπότε η ακολουθία αριθμών $(f_n(\pi))$ δεν συγκλίνει. Άρα η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμία συνάρτηση κατά σημείο στο $[0, 2\pi]$.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω X σύνολο, $f, g : X \to \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και $g_n \to g$ κατά σημείο, τότε: (i) για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύει $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά σημείο, και (ii) $f_n g_n \to fg$ κατά σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, τότε:

$$(tf_n + sg_n)(x) = tf_n(x) + sg_n(x) \to tf(x) + sg(x) = (tf + sg)(x)$$

και

$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \to f(x) g(x) = (fg)(x),$$

από τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. □

Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, την ολοκλήρωση, την παραγώγιση και την εναλλαγή ορίων, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω.

Ερώτηση 2.1.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

Η απάντηση είναι αρνητική.

Σχόλιο 2.1.1. Στο βιβλίο του *Cours d' Analyse*, ([6] σελ. 90), ο Cauchy αναφέρει ότι το όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι αυτό δεν είναι γενικά αληθές. Αυτή είναι και η αιτία της γέννεσης της έννοιας της ομοιόμορφης σύγκλισης από τον Weierstrass. Δεν είναι σίγουρο αν ο Cauchy μιλώντας για σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων εννοούσε την ομοιόμορφη σύγκλιση, πάντως και ο ίδιος αργότερα αναγνώρισε ότι το θεώρημά του δεν μπορεί να γίνει αποδεκτό χωρίς περιορισμό.

Παράδειγμα 2.1.8. Θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Από το παράδειγμα 2.1.5 ισχύει ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Παράδειγμα 2.1.9. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{k} : k = 1, 2, \dots\}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: με κέντρο καθένα από τα σημεία $1/k, k = 1, \dots, n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{k,n} = [\frac{1}{k} - \frac{1}{3n(n+1)}, \frac{1}{k} + \frac{1}{3n(n+1)}]$ και ορίζουμε την f_n να είναι "τριγωνική" σε κάθε $I_{k,n}$ ώστε στο σημείο $1/k$ να παίρνει την τιμή 1 και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \cup_{k=1}^n I_{k,n}$. Τότε, κάθε f_n είναι συνεχής και συγκλίνει (κατά σημείο) στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του A.

Ερώτηση 2.1.2. Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι σωστό ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι ισχύει

$$\int_b^a f_n(x)dx \to \int_b^a f(x)dx;$$

Η απάντηση είναι αρνητική.

Παράδειγμα 2.1.10. Θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x - \frac{1}{n}), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \nrightarrow 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Παράδειγμα 2.1.11. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. Αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$ και αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \to 0$. Στην περίπτωση που $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2(1-x)}{n^2} \to 1 - x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \to 0$ όταν $n \to +\infty$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 n^2 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-x)x^n dx = n^2 \int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx \\ &= n^2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{n^2+3n+2} \to 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ερώτηση 2.1.3. Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I, ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f_n' \to f'$ κατά σημείο;

Η απάντηση είναι αρνητική.

Παράδειγμα 2.1.12. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων (f_n), όπου η $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Τότε αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$ και αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\frac{x}{\frac{1}{n}+x} \to 0.$$

Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως, $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ και για $x = 0$ έχουμε $f_n'(0) = 1 \to 1$, ενώ για $x > 0$ ισχύει ότι $f_n'(x) \to 0$. Δηλαδή, η (f_n') δεν συγκλίνει κατά σημείο στην $f' \equiv 0$.

Παράδειγμα 2.1.13. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{n}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Όμως, η ακολουθία $f_n' : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμιά τιμή του $x \in (0, \pi)$. Πράγματι, αν υπάρχει $x \in (0, \pi)$ ώστε $\cos(nx) \to a \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \to a$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $a = 4a^3 - 3a$. Συνεπώς, $a = 0$ ή $a^2 = 1$. Αν $a = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \to 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \to -1$, άτοπο. Αν $a^2 = 1$, από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ έχουμε ότι $\sin(nx) \to 0$. Τότε, από την

$$\sin(n+1)x = \sin(nx)\cos x + \sin x \cos(nx)$$

παίρνουμε

$$\sin x \cos(nx) \to 0$$

και επειδή $\sin x \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$ έπεται ότι $\cos(nx) \to 0$, άτοπο.

Παράδειγμα 2.1.14. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{1+\frac{1}{n}}, & 0 \leq t < 1 \\ -(-t)^{1+\frac{1}{n}}, & -1 < t < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f_n(t) \to t$ για κάθε $t \in (-1, 1)$, αλλά $f_n'(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $f'(0) = 1$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) \neq f(0)$. Δηλαδή στην κατά σημείο σύγκλιση **δεν ισχύει** η εναλλαγή των ορίων

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t).$$

Παράδειγμα 2.1.15. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = (1-t)^n$. Έχουμε $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} f_n(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(t).$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, η οποία συγκλίνει στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που να μην έχει καν όριο στο σημείο 0.

Παράδειγμα 2.1.16. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \sin(\pi/t), & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sin(\pi/t), & 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

και το όριο της f στο 0 δεν υπάρχει.

2.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 2.2.1. *Έστω X σύνολο, (Y,d) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα (uniformly) στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, για κάθε $x \in X$. Γράφουμε τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα (στο X) ή $f_n \xrightarrow{uni} f$.*

Σχόλιο 2.2.1 (Γεωμετρική ερμηνεία)**.** Υποθέτουμε ότι το X είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η ανισότητα $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ σημαίνει ότι το γράφημα της f_n βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $f - \varepsilon$ και το γράφημα της $f + \varepsilon$, δηλαδή μέσα στη ζώνη που δημιουργείται γύρω από το γράφημα της f και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ε. Δηλαδή, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X αν για κάθε $\varepsilon > 0$, από έναν δείκτη και πέρα, τα γραφήματα όλων των f_n βρίσκονται ολόκληρα μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

Σχόλιο 2.2.2 (Σύγκριση με την κατά σημείο σύγκλιση)**.** Παρατηρούμε ότι, αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 , το οποίο εξαρτάται από το ε, ώστε $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$ και για όλα τα $x \in X$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο X τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει n_0 , το οποίο εξαρτάται από το ε και από το x, ώστε $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Με άλλα λόγια, στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από το ε αλλά είναι ‘ομοιόμορφη” ως προς $x \in X$. Υπάρχει κάποιο n_0 που “δουλεύει” για όλα τα $x \in X$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για διαφορετικά x χρειάζεται ίσως να επιλέξουμε διαφορετικά n_0 (για το ίδιο $\varepsilon > 0$) ώστε να ικανοποιείται η $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) μια ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t, x_n)$ είδαμε στο Παράδειγμα 2.1.1 ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) = d(t, x)$ για $t \in X$. Παρατηρούμε ότι $|f_n(t) - f(t)| = |d(t, x_n) - d(t, x)| \leq d(x_n, x)$ για κάθε $t \in X$. Συνεπώς,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in X\} \leq d(x_n, x) \to 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Παράδειγμα 2.2.2. Έστω $X \neq \emptyset$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ έχουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι $f_n - f \equiv \frac{1}{n}$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Παράδειγμα 2.2.3. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Ελέγχουμε εύκολα ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \frac{n}{x + n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$. Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

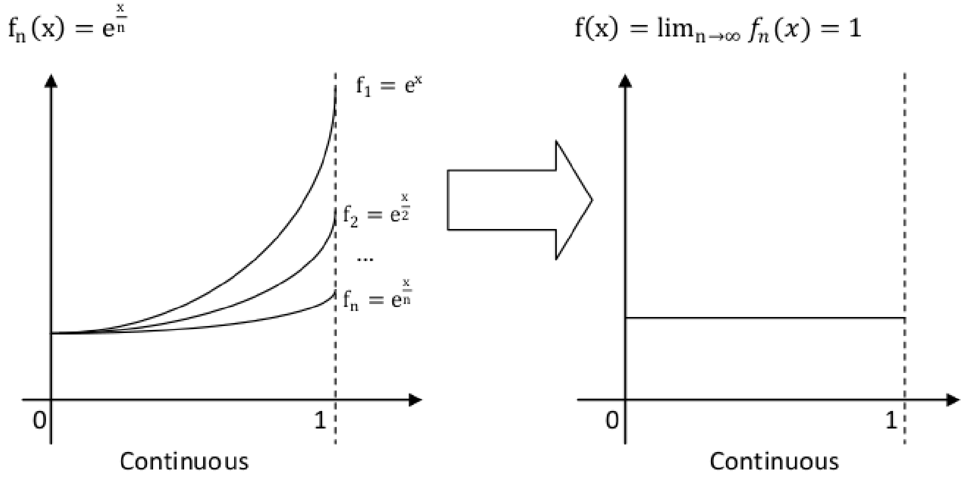
Παράδειγμα 2.2.4. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$ στο $[0, 1]$. Το όριο της είναι $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Συνεπώς,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|e^{\frac{x}{n}} - 1\right| = \sup_{x\in[0,1]} (e^{\frac{x}{n}} - 1) = e^{\frac{1}{n}} - 1$$

Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) = 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$.

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $f_n, f : (X, d) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, τότε $f_n \to f$ κατά σημείο στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Όμως,

$$|f_n(x) - f(x)| < \|f_n - f\|_\infty.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| < \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon,$$

δηλαδή $f_n(x) \to f(x)$. □

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται ομοιόμορφα φραγμένη στο X αν υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in X \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις f_n.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω X σύνολο, $f, g : X \to \mathbb{R}$ και $(f_n), (g_n)$ ακολουθίες συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$ και $t, s \in \mathbb{R}$.*

(i) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο X, τότε $tf_n + sg_n \to tf + sg$ ομοιόμορφα στο X.

(ii) Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \to fg$ στο X.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|(tf_n + sg_n) - (tf + sg)\|_\infty &= \|t(f_n - f) + s(g_n - g)\|_\infty \\ &\leq |t|\|f_n - f\|_\infty + |s|\|g_n - g\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

(ii) Αφού οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, έχουμε $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq M$. Δηλαδή, $\|f\|_\infty \leq M$. Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n g_n - fg_n + fg_n - fg\|_\infty \\ &\leq \|(f_n - f)g_n\|_\infty + \|(g_n - g)f\|_\infty \\ &\leq M\|f_n - f\|_\infty + M\|g_n - g\|_\infty \to 0,\end{aligned}$$

διότι,

$$\begin{aligned}\|(f_n - f)g_n\|_\infty &= \sup\{|f_n(x) - f(x)||g_n(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup M \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \\ &\leq M\|f_n - f\|_\infty\end{aligned}$$

(όμοια βλέπουμε ότι $\|f(g_n - g)\|_\infty \leq M\|g_n - g\|_\infty$).

□

Θα δούμε τώρα ικανές ή/και αναγκαίες συνθήκες για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n).

Θεώρημα 2.2.1 (Κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάντηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.
Συνεπώς, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Σταθεροποιούμε $x \in X$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \qquad (*)$$

Άρα η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x. Όριζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο.

Καθώς το $m \to \infty$ στην $(*)$ παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως) για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon,$$

δηλαδή $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □

Πρόταση 2.2.3. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $(x_k) \subseteq X$ με $x_k \to x_0$ ισχύει $f_n(x_k) \to f(x_0)$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$|f_n(x_k) - f(x_0)| \leq |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_k) - f(x_0)|.$$

Από την ομοιόμορφη σύκλιση της (f_n) στην f έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0, (και την υπόθεση ότι $x_n \to x$) έχουμε $|f(x_k) - f(x_0)| \to 0$. Έπεται ότι $|f_n(x_k) - f(x_0)| \to 0$. □

Θεώρημα 2.2.2 (Dini). *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στον X.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $f = 0$ (διαφορετικά, θεωρούμε την $g_n = f_n - f$ η οποία είναι μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $g_n \to 0$ κατά σημείο). Επίσης υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι φθίνουσα (διαφορετικά θεωρούμε την $-f_n$). Συνεπώς, $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$B_n(\varepsilon) = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Η $(B_n(\varepsilon))$ είναι αύξουσα ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του X (διότι κάθε f_n είναι συνεχής και $f_n \geq f_{n+1}$). Επίσης, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)$. Πράγματι, αν $x \in X$, από την $f_n(x) \to 0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) < \varepsilon$, δηλαδή $x \in B_n(\varepsilon)$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{k} B_{n_j}(\varepsilon) = B_{n_0}(\varepsilon)$, όπου $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $B_n(\varepsilon) = X$, δηλαδή $0 \leq f_n(x) < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. □

Παράδειγμα 2.2.5. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) έτσι ώστε $p_n \to \sqrt{x}$ στο $C[0, 1]$.

Ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία των πολυώνυμων με $p_1(x) = 0$ και $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}[x - p_n(x)^2]$. Εύκολα βλέπουμε ότι όλα αυτά τα πολυώνυμα είναι θετικά στο $[0, 1]$.

Ισχυριζόμαστε ότι για όλα τα $n \geq 1$ και για όλα τα $x \in [0, 1]$, ισχύει $p_n(x) \leq \sqrt{x}$. Πράγματι, αυτό είναι προφανές για $n = 1$, οπότε υποθέτουμε ότι ισχύει για n. Αφού $p_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$, όταν $x \in [0, 1]$, έχουμε ότι $\frac{1}{2}[\sqrt{x} + p_n(x)] \leq 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= p_n(x) + \frac{1}{2}[x - p_n(x)^2] \\ &= p_n(x) + \frac{1}{2}[\sqrt{x} - p_n(x)][\sqrt{x} + p_n(x)] \\ &\leq p_n(x) + [\sqrt{x} - p_n(x)] \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

το οποίο θεμελειώνει τον ισχυρισμό.

Από τον ισχυρισμό $x - p_n(x)^2 \geq 0$ έτσι ώστε $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$. Έτσι για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε ότι η $(p_n(x))$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ που είναι φραγμένη από πάνω από την $\sqrt{x}$. Άρα υπάρχει ένα t στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $p_n(x) \to t \leq \sqrt{x}$. Επομένως,

$$t = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}[x - p_n(x)^2] = t + \frac{1}{2}[x - t^2]$$

συνεπάγεται ότι $t = \sqrt{x}$. Έτσι η ακολουθία (p_n) είναι αύξουσα και συγκλίνει κατά σημείο στη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0, 1]$. Από το Θεώρημα 2.2.2, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Κεφάλαιο 3

Σειρές συναρτήσεων

Ορισμός 3.0.1. *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : X \to \mathbb{R}$ με*

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to s$ κατά σημείο στο X, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στην s στο X και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Αν, επιπλέον, $s_n \to s$ ομοιόμορφα στο X, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στην s στο X.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, η σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων ανάγεται στη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων, της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων.

Παράδειγμα 3.0.1. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Έχουμε

$$f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(-1, 1)$ η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εξετάζουμε αν η σύγκλιση της σειράς είναι *ομοιόμορφη* στο (-1,1).

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

και

$$s_n(x) - s(x) = -\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$ άρα

$$\sup\{|s_n(x) - s(x)| : x \in (-1, 1)\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η σύγκλιση της (s_n) στην s δεν είναι ομοιόμορφη.

Πρόταση 3.0.1. *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο X, τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο X.*

Απόδειξη. Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \to s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \to s$ κατά σημείο. □

Πρόταση 3.0.2. *Έστω $f_k, g_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = t$ ομοιόμορφα στο X, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (af_k + bg_k) = as + bt$ ομοιόμορφα στο X. Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Άμεση από τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες συναρτήσεων. □

Πρόταση 3.0.3 (Κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο X αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$,*

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon$$

.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy στην ακολουθία συναρτήσεων (s_n). Παρατηρούμε ότι, αν $n > m$ τότε $s_n - s_m = f_{m+1} + \cdots + f_n$. □

Θεώρημα 3.0.1 (Weierstrass M-Test). *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sup\{|f_k(x)| : x \in X\} \leq M_k, \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

δηλαδή ότι ο M_k είναι άνω φράγμα της $|f_k|$, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$$

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$$

Συνεπώς η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο στο X. Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$|s(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

Από την $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ έχουμε

$$\|s - s_n\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι ομοιόμορφη. □

Παράδειγμα 3.0.2. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^2}$, οπότε

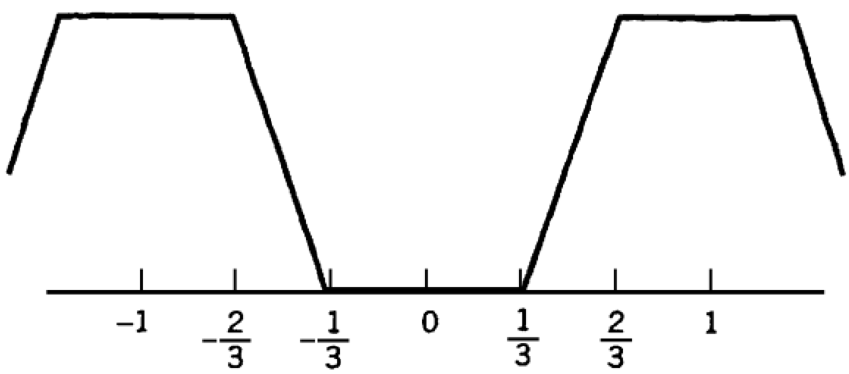
$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.0.3. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $x \in [-1, 1]$. Ισχύει ότι $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και για κάθε k. Άφου η σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ συγκλινει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 3.0.4 (Καμπύλη πλήρωσης χώρου (Space-filling curve))**.** Έστω φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνεχής, άρτια συνάρτηση με περιόδο 2 που δίνεται από

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/3, \\ 3t - 1, & 1/3 < t < 2/3, \\ 1, & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της φ.

Για $t \in [0, 1]$, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k}t)}{2^{k+1}} \quad \text{και} \quad g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k+1}t)}{2^{k+1}}.$$

Αφού $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ και είναι συνεχής, από το Θεώρημα 3.0.1 (Weierstrass M-Test) οι f και g συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, άρα είναι συνεχείς στο $[0, 1]$ και επιπλέον, $0 \leq f(t) \leq 1$ και $0 \leq g(t) \leq 1$. Θα δείξουμε τώρα ότι ένα τυχαίο σημείο (x_0, y_0) στο $[0, 1] \times [0, 1]$ είναι η εικόνα του $t_0 \in [0, 1]$ μέσω της (f, g). Πράγματι, έστω x_0 και y_0 έχουν τις δυαδικές ($=$ βάση 2) παραστάσεις:

$$x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots \quad \text{και} \quad y_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \cdots,$$

όπου κάθε $a_k = 0$ ή 1. Θα δείξουμε ότι $x_0 = f(t_0)$ και $y_0 = g(t_0)$, όπου t_0 έχει την τριαδική (= βάση 3) παράσταση:

$$t_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_k}{3^{k+1}} = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \frac{2a_2}{3^3} + \frac{2a_3}{3^4} + \cdots .$$

Σημείωνουμε ότι το t_0 δίνει έναν αριθμόν στο $[0,1]$. Ακόμη

- αν $a_0 = 0$, τότε $0 \le t_0 \le 1/3$ έτσι ώστε $\varphi(t_0) = 0$, και
- αν $a_0 = 1$, τότε $2/3 \le t_0 \le 1$ έτσι ώστε $\varphi(t_0) = 1$.

Επομένως και στις δύο περιπτώσεις $\varphi(a_0) = a_0$. Ομοίως, φαίνεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$3^n t_0 = 2m_n + \frac{2a_n}{3} + \frac{2a_{n+1}}{3^2} + \cdots ,$$

που προκύπτει δίοτι η φ έχει περίοδο 2 με $\varphi(3^n t_0) = a_n$. Τέλος, συμπεραίνουμε ότι

$$f(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k} t_0)}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^{k+1}} = x_0,$$

και

$$g(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k+1} t_0)}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}} = y_0.$$

Επομένως $x_0 = f(t_0)$ και $y_0 = g(t_0)$ όπως ισχυριστήκαμε.

Κεφάλαιο 4

Εναλλαγές ορίων

Στην ενότητα 2.1 είδαμε ότι η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, την ολοκλήρωση και την παραγώγιση. Θα δούμε τώρα, ότι αν υποθέσουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στη θέση της κατά σημείο σύγκλισης τότε έχουμε ισχυρά θετικά αποτελέσματα για την συνέχεια, την ολοκλήρωση και την παραγώγιση.

Θεώρημα 4.0.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, και

(ii) κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0.

Τότε, η f είναι και αυτή συνεχής στο x_0. Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0} - f\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα η f έιναι συνεχής στο x_0. □

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση, τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα 4.0.2. *Έστω f_n ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Αυτό είναι δυνατό, διότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Αφού η f_n είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) = \sum_{k=0}^{m-1}(M_k(f_n) - m_k(f_n))(x_{k+1} - x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $M_k = \sup\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ και $m_k = \inf\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$. Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Έπεται ότι

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_{k+1} - x_k) \leq \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων είναι τώρα άμεση συνέπεια της $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\
&\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx \\
&= (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα. □

Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0, \pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους: έχουμε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$, αλλά η ακολουθία $f_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0, \pi)$. Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 4.0.3. *Έστω $f_n, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγος της, f_n', είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, και

(ii) υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η $(f_n(x_0))$ να είναι συγκλίνουσα σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.

Τότε, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f' \equiv g$.

Απόδειξη. Από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)ds, \qquad x \in [a, b].$$

Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(s)ds \to \int_{x_0}^{x} g(s)dx, \qquad x \in [a, b].$$

Συνεπώς,

$$f_n(x) \to \xi + \int_{x_0}^{x} g(s)ds,$$

όπου ξ το όριο της $f_n(x_0)$. Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^{x} g(s)ds.$$

Από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Μένει να δείξουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)ds - \xi - \int_{x_0}^{x} g(s)ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(s) - g(s))ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |x - x_0| \|f_n' - g\|_\infty \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a| \|f_n' - g\|_\infty. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a| \|f_n' - g\|_\infty \to 0.$ □

Αν κάνουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι η (f_n) συγκλινει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ τότε το προηγούμενο θεώρημα παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 4.0.4. *Αν $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g.*

Απόδειξη. Αφού η $f_n' \to g$ ομοιόμορφα, τότε για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\int_{a}^{x} f_n'(t)dt \to \int_{a}^{x} g(t)dt.$$

Από το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_{a}^{x} f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(a) \to f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_{a}^{x} g(t)dt.$$

Όμως η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς το άοριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. □

Θεώρημα 4.0.5. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, και

(ii) κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0.

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.Ειδικότερα, αν η κάθε f_k είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.0.1 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \ldots + f_n$. □

Θεώρημα 4.0.6. *Έστω (f_k) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann- ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη f στο $[a,b]$. Τότε, η f είναι Riemann- ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.0.2 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \ldots + f_n$. □

Θεώρημα 4.0.7. *Έστω $f_k, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η παράγωγος της f_k', είναι συνεχής $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a,b]$, και

(ii) υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$.

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' \equiv g$. Δηλαδή,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.0.3 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \ldots + f_n$. □

Κεφάλαιο 5

Αντιπαραδείγματα

Για την καλύτερη κατανόηση των θεωρημάτων που αναφέραμε στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι χρήσιμο να δούμε γιατί καθεμία από τις υποθέσεις των θεωρημάτων είναι απαραίτητη βρίσκοντας αντιπαραδείγματα όταν οι υποθέσεις αποτυγχάνουν. Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε τις αντίστοιχες ψευδείς δηλώσεις και θα εξηγήσουμε με παραδείγματα γιατί δεν ισχύουν.

► Μία σειρά συναρτήσεων συγκλίνει σε έναν μετρικό χώρο X και ο γενικός όρος της σειράς συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν στον X, αλλά η σειρά δεν συκλίνει ομοιόμορφα στον X.

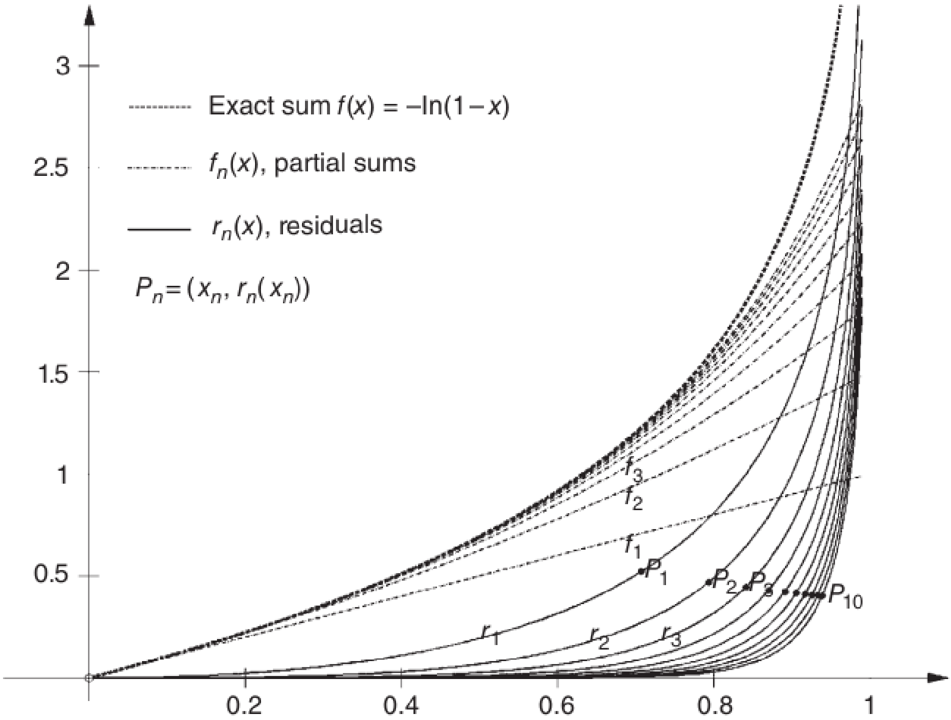
Παράδειγμα 5.0.1. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ στο $X = [0, 1)$. Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in X$, επειδή $0 \leq \frac{x^n}{n} \leq x^n$ για κάθε n, και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ συγκλίνει για $|x| < 1$.
Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\ln(1+x)$ είναι $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ που συγκλίνει στο $(-1, 1]$. Αντικαθιστώντας το x με $-x$, παίρνουμε $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ που συγκλινει στο $[-1, 1)$, και, ειδικότερα, στο $X = [0, 1)$. Επιπλέον, ο γενικός όρος $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 στο $X = [0, 1)$, διότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ και ισχύει ότι $|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in X$. Επομένως, πληρούνται οι συνθήκες της πρότασης. Ωστόσο, η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον X που αποδεικνύεται από το κριτήριο Cauchy της ομοιόμορφης σύγλισης. Στην πραγματικότητα, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n, p \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k}\right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} > p\frac{x^{n+p}}{n+p}.$$

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $p_n = n$ και $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in X$ και παίρνουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p_n} \frac{x_n^k}{k}\right| > n\frac{(1/\sqrt[n]{2})^{2n}}{2n} = \frac{1}{8} \nrightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty.$$

Συνεπώς δεν ικανοποιείται το Κριτήριο Cauchy και, επομένως, η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.



Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Παράδειγμα 5.0.2. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ορισμένη στο $X = (-1,1)$. Πρώτον, η σειρά συγκλινει για κάθε $x \in X$, διότι $0 \leq \left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq |x|^n$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ συγκλίνει για $|x| < 1$. Δεύτερον, ισχύει η ανισότητα $|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $x \in X$. Αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, συνεπάγεται ότι η $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει στο 0 στο X. Επομένως, πληρούνται οι συνθήκες της πρότασης. Για να αναλύσουμε τη φύση της σύγκλισης της σειράς, θα υπολογίσουμε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p_n} \frac{x_n^k}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $p_n = n$ και $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \in X$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p_n} \frac{x_n^k}{\sqrt{k}}\right| > n\frac{(1/\sqrt[n]{3})^{2n}}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{9\sqrt{2}}\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Συνεπώς το κριτήριο του Cauchy δεν ικανοποιείται, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Παρατήρηση 1. Το αντίστροφο είναι αληθές: *Αν μια σειρά συκλίνει ομοιόμορφα σε έναν μετρικό χώρο X, τότε κάθε όρος της συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδεν στον X.*

► Μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σε έναν μετρικό χώρο X και υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει ομοιόμορφα στον X, αλλά η αρχική ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον X.

Παράδειγμα 5.0.3. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n}, & n = 2k-1 \\ \frac{1}{n}, & n = 2k \end{cases}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \mathbb{R}$. Για οποιοδήποτε σταθερό $x \in \mathbb{R}$, έχουμε δύο επίμερους όρια:

- αν $n = 2k-1$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k-1}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x}{2k-1} = 0$ και
- αν $k = 2n$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2k} = 0.$

Συνεπώς η ακολουθία συγκλίνει στο 0 στον $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{k\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Σημειώνουμε επίσης ότι η υπακολουθία $f_{2k}(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{R}$, αφού ισχύει ταυτοχρόνως ο ίδιος υπολογισμός $|f_{2k}(x) - f(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Ή ισοδύναμα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ τέτοιο ώστε για κάθε $k > K_\varepsilon$ και ταυτοχρόνως για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι $|f_{2k}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Δηλαδή, ικανοποιείται ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης για την $f_{2k}(x)$. Ωστόσο, η ακολουθία $f_n(x)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{R}$. Πράγματι, για μεγάλο δείκτη N υπάρχει δείκτης $n_N = 2N-1 > N$ και πραγματικός αριθμός $x_N = 2N-1$ έτσι ώστε

$$|f_{2N-1}(x_N) - f(x_N)| = \frac{2N-1}{2N-1} = 1 \nrightarrow 0, \quad \text{καθώς } N \to \infty.$$

Επομένως, η σύγκλιση της $f_n(x)$ δεν είναι ομοιόμορφη στον $\mathbb{R}$.

► Μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων σε έναν μετρικό χώρο X συγκλίνει στον X σε μια συνάρτηση, η οποία δεν είναι φραγμένη στον X.

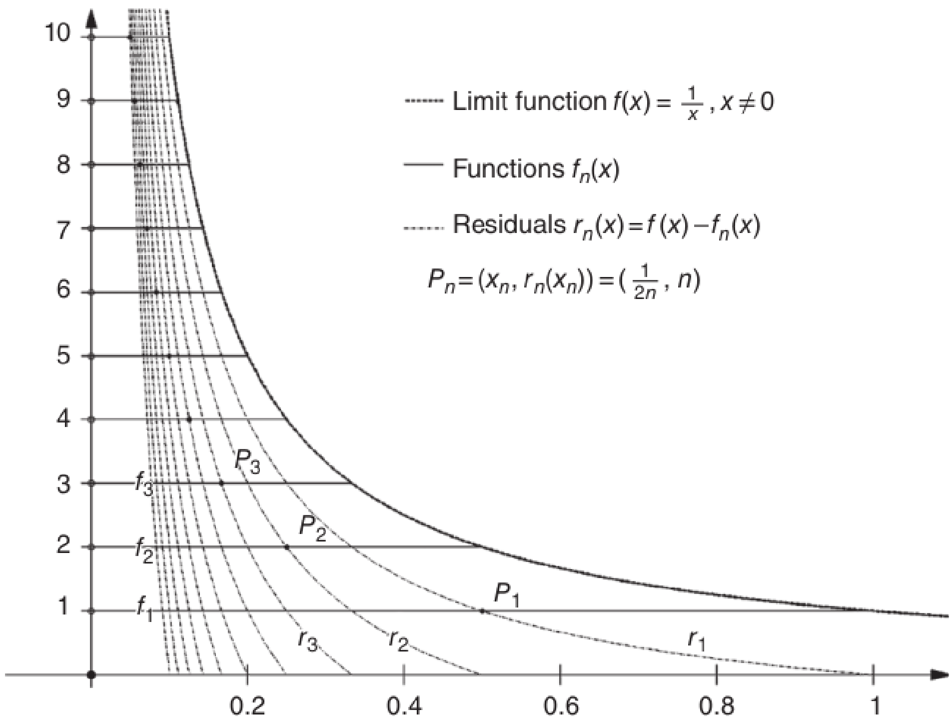
Παράδειγμα 5.0.4. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \min(n, \frac{1}{x}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

που καθεμία είναι φραγμένη στο $[0,1]$, διότι $0 \leq f_n(x) \leq n$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αφού για οποιοδήποτε σταθερό $x \in (0,1]$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 > \frac{1}{x}$, για όλα τα $n > n_0$ έχουμε $f_n(x) = \frac{1}{x}$ και συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in (0,1]$. Για $x = 0$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. Συνεπώς, η οριακή συνάρτηση είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

η οποία δεν είναι φραγμένη στο $[0,1]$. Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, αφού για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε το σημείο $x_n = \frac{1}{2n} \in (0,1]$, έτσι ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |n - 2n| = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.



Σχήμα 5.2: Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n = \begin{cases} \min(n, \frac{1}{x}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Παρατήρηση 2. Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις στο παραπάνω αντιπαράδειγμα δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $[0, 1]$. Πράγματι, για οποιοδήποτε $M > 0$ υπάρχει $n > M$ και $x_n = \frac{1}{n} \in (0, 1]$ έτσι ώστε $f_n(x_n) = n > M$. Αυτός είναι ο λόγος που η οριακή συνάρτηση δεν είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 3. Η αντίστοιχη γενική πρόταση θα ισχύει αν προσθέσουμε την έννοια του ομοιόμορφου φράγματος της $f_n(x)$ στον X: *Μια ακολουθία ομοιόμορφα φραγμένων συναρτήσεων σε έναν μετρικό χώρο X συγκλίνει σε φραγμένη συνάρτηση $f(x)$ στον X.*

Παρατήρηση 4. Για φραγμένες συναρτήσεις, η ομοιόμορφη σύγκλιση σε έναν μετρικό χώρο X συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Επομένως, η επιπλέον συνθήκη της ομοιόμορφης συγκλισης της $f_n(x)$ στον X είναι επαρκής για να γίνει η γενική πρόταση αληθής: *Αν μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων σε έναν μετρικό χώρο X συγκλίνει ομοιόμορφα στον X, τότε η οριακή συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη στον X.*

Παρατήρηση 5. Η γενική πρόταση με το αντίθετο συμπέρασμα: *Αν μια ακολουθία μη ομοιόμορφα φραγμένων συναρτήσεων συγκλίνει σε έναν μετρικό χώρο X, τότε η οριακή συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στον X*, είναι επίσης ψευδής όπως θα δούμε στο παράδειγμα 5.0.5.

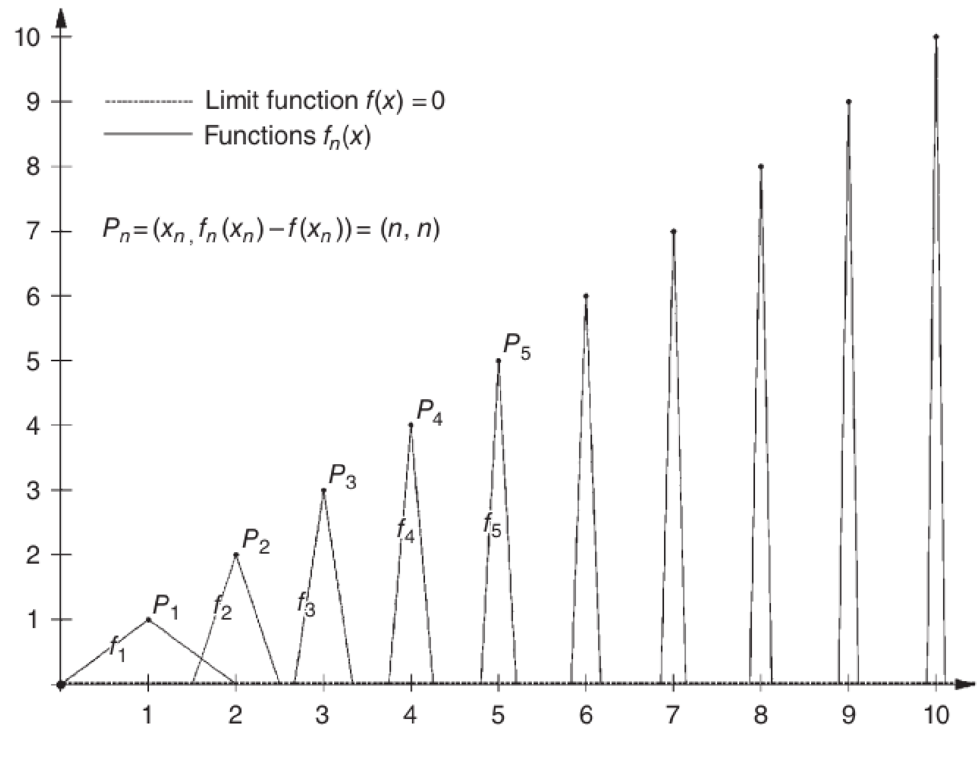
► Μια ακολουθία συναρτήσεων δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε έναν μετρικό χώρο X, αλλά συγκλίνει στον X σε μια συνάρτηση, η οποία είναι φραγμένη στον X.

Παράδειγμα 5.0.5. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x + n - n^3, & x \in [n - \frac{1}{n}, n] \\ -n^2x + n + n^3, & x \in [n, n + \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

στο $X = [0, +\infty)$. Όπως στο παράδειγμα 5.0.4, καθεμία από τις συναρτήσεις είναι φραγμένη, διότι $0 \leq f_n(x) \leq n$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ για κάθε n, αλλά η ακολουθία δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, +\infty)$, αφού για οποιοδήποτε $M > 0$ υπάρχει $n > M$ και $x_n = n \in [0, +\infty)$ έτσι ώστε $f_n(x_n) = n > M$. Θα βρούμε την οριακή συνάρτηση. Για οποιοδήποτε σταθερό $x \in [0, +\infty)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 > x + 1$, έτσι για όλα τα $n > n_0$ έχουμε $n - \frac{1}{n} > n - 1 > x$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Επομένως, η οριακή συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$.

Σημείωνουμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα (όπως στο παράδειγμα 5.0.4). Πράγματι, επιλέγοντας για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ το σημείο $x_n = n \in [0, +\infty)$, έχουμε $|f_n(x_n) - f_n(x)| = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.



Σχήμα 5.3: Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n = \begin{cases} n^2x + n - n^3, & x \in [n - \frac{1}{n}, n] \\ -n^2x + n + n^3, & x \in [n, n + \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$.

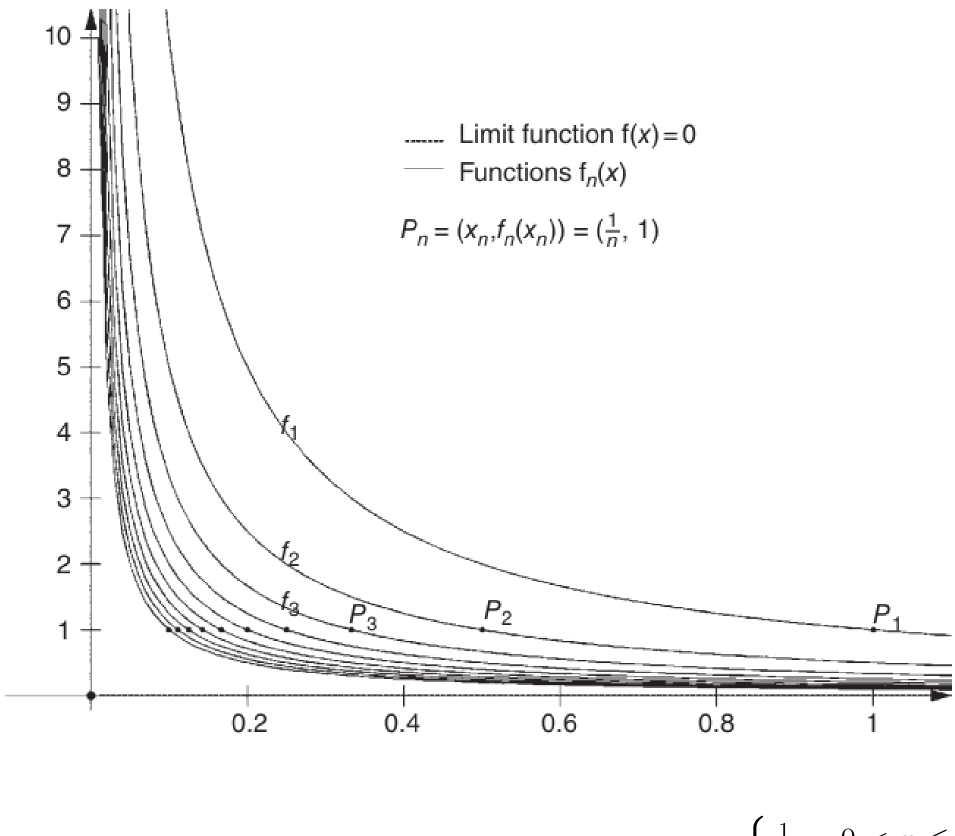
Παρατήρηση 6. Στα παραδείγματα 5.0.4 και 5.0.5, αν και οι ακολουθίες των συναρτήσεων δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένες, καθεμία από τις συναρτήσεις είναι φραγμένη στον X. Ανάλογα παραδείγματα μπορούν να κατασκευαστούν για ακολουθίες μη φραγμένων συναρτήσεων στον X.

► Μια ακολουθία μη φραγμένων και ασυνεχών συναρτήσεων στον μετρικό χώρο X συγκλίνει σε μια συνάρτηση στον X, η οποία είναι φραγμένη και συνεχής.

Παράδειγμα 5.0.6. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{nx}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

στο $X = [0,1]$. Κάθε μία από τις συναρτήσεις είναι μη φραγμένη στο $[0,1]$, αφού για οποιοδήποτε $M > 0$ υπάρχει $x_n = \frac{1}{n(M+1)} \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f_n(x_n) = M+1 > M$. Επισής, κάθε συνάρτηση f_n είναι ασυνεχής στο $x = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{nx} = +\infty$. Ωστόσο, η ακολουθία συγκλίνει στη φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f(x) \equiv 0$. Πράγματι, για $x = 0$, έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, και για οποιοδήποτε σταθερό $x \in (0,1]$, παίρνουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nx} = 0$. Σημειώνουμε, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, αφού για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει το σημείο $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 \nrightarrow 0$ για $n \to +\infty$.



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{nx}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Παρατήρηση. Αν στο παράδειγμα αυτό εξαιρέσουμε την υπόθεση της ασυνέχειας, τότε η ίδια ακολουθία ορισμένη στον $X = (0,1]$ αποτελεί ένα αντίστοιχο παράδειγμα της πρότασης: *Μια ακολουθία μη φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στον μετρικό χώρο X συγκλίνει σε μια συνάρτηση στον X, η οποία είναι φραγμένη και συνεχής.*

► Μια ακολουθία ομοιόμορφα φραγμένων συναρτήσεων σε έναν μετρικό χώρο X συγκλίνει στον X, αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στον X.

Παράδειγμα 5.0.7. Θεωρούμε την ακολουθία

$$f_n(x) = \begin{cases} nx\sin(\frac{1}{nx}), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

που είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $X = [0,1]$. Πράγματι, εφόσον $|f_n(x)| = \left|\frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}}\right| \leq 1$, για κάθε $x \neq 0$, τότε άμεσα έχουμε ότι $|f_n(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Επιπλέον, για $x = 0$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ και για $x \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Επομένως, το όριο της $f_n(x)$ υπάρχει και $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έτσι, οι συνθήκες της πρότασης πληρούνται, αλλά η σύγκλιση στο $[0,1]$ δεν είναι ομοιόμορφη: επιλέγουμε $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$, παίρνουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|n \cdot \frac{1}{n}\sin 1 - 1\right| = 1 - \sin 1 \nrightarrow 0$$

για κάθε $n \to \infty$.

► Μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$, οι οποίες είναι μονότονες για κάθε $x \in X$, συγκλίνει σε ένα συμπαγές σύνολο X σε μια συνεχή συνάρτηση, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Παράδειγμα 5.0.8. Θεωρούμε την ακολουθία

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & x = 0, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

στο συμπαγές σύνολο $X = [0,1]$. Για οποιοδήποτε σταθερό $x \in X$, η ακολουθία είναι μονότονη στο n: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Συγκλίνει στο $[0,1]$ στη συνεχή συνάρτηση $f(x) \equiv 0$:

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

για οποιοδήποτε δεδομένο $x \in (0,1)$ υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $N_x > \frac{1}{x}$, και τότε για κάθε $n \geq N_x$ έχουμε $x > \frac{1}{N_x} \geq \frac{1}{n}$, και επομένως, $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq N_x$, το οποίο συνεπάγεται ότι $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$, επιλέγουμε $x_n = \frac{1}{2n} \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \subset [0,1]$ για οποιοδήποτε δεδομένο $n \in \mathbb{N}$ και προκύπτει ότι $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 \nrightarrow 0$, καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση 7. Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις στην παραπάνω ακολουθία έχουν ασυνέχεια άλματος στα σημείο $x = 0$ και $x = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{x\to 0_+} f_n(x) = 1 \neq 0 = f_n(0), \quad \lim_{x\to \frac{1}{n}_-} f_n(x) = 1 \neq 0 = f_n\left(\frac{1}{n}\right), \text{ για κάθε } n.$$

Έτσι, αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι μια ασθενής εκδοχή του θεωρήματος 2.2.2 (θεώρημα του Dini) με την παραλειπόμενη συνθήκη της συνέχειας της $f_n(x)$ στο X δεν είναι αληθής.

► Μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$, οι οποίες είναι μονότονες στο n για οποιοδήποτε σταθερό $x \in X$, συγκλίνει σε ένα συμπαγές σύνολο X, αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο X.

Παράδειγμα 5.0.9. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = x^n$ στον $X = [0, 1]$. Πράγματι, αφού $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$ και $\lim_{n\to\infty} f(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, η ακολουθία συγκλίνει στο $[0, 1]$ στη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Κάθε συνάρτηση $f_n(x) = x^n$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και μονότονη στο n: $f_{n+1}(x) = x^{n+1} \leq x^n = f_n(x)$. Όμως η οριακή συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο 1. Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$ διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0, 1) \subset [0, 1]$ έτσι ώστε

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - 0 \nrightarrow 0,$$

καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση 8. Σημειώνουμε ότι η οριακή συνάρτηση $f(x)$ σε αυτό το παράδειγμα έχει ασυνέχεια άλματος στο σημείο $x = 1$. Έτσι, φαίνεται ότι δεν μπορούμε να παραλείψουμε τη συνθήκη της συνέχειας της οριακής συνάρτησης $f(x)$ στο X, στις συνθήκες του θεωρήματος 2.2.2 (θεώρημα του Dini).

► Μια σειρά ασυνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα σε έναν μετρικό χώρο X, και το άθροισμα της σειράς είναι επίσης ασυνεχής συνάρτηση στον X.

Παράδειγμα 5.0.10. Θεωρούμε τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sgn } x^1}{n(n+1)}$ στον $X = \mathbb{R}$. Όλοι οι όροι της σειράς έχουν ασυνέχεια (ένα άλμα) στο $x = 0$, και το άθροισμα αυτής της τηλεσκοπικής σειράς είναι $\text{sgn } x$ που έχει ασυνέχεια άλματος στο 0. Πράγματι, τα μερικά αθροίσματα της τηλεσκοπικής σειράς μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \\ &= \text{sgn } x \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{sgn } x, \end{aligned}$$

και επομένως, το άθροισμα $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{sgn } x = \text{sgn } x$. Σημειώνουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ από το Weierstrass M-Test, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες εκτιμήσεις $|u_n(x)| = \left|\frac{\text{sgn } x}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ και η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

[1] Η συνάρτηση προσήμου ενός πραγματικού αριθμού x είναι μια τμηματική συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

► Μια ακολουθία $f_n(x)$ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε έναν μετρικό χώρο X συγκλίνει στον X σε μια συνάρτηση $f(x)$, αλλά η οριακή συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στον X ή $f'(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

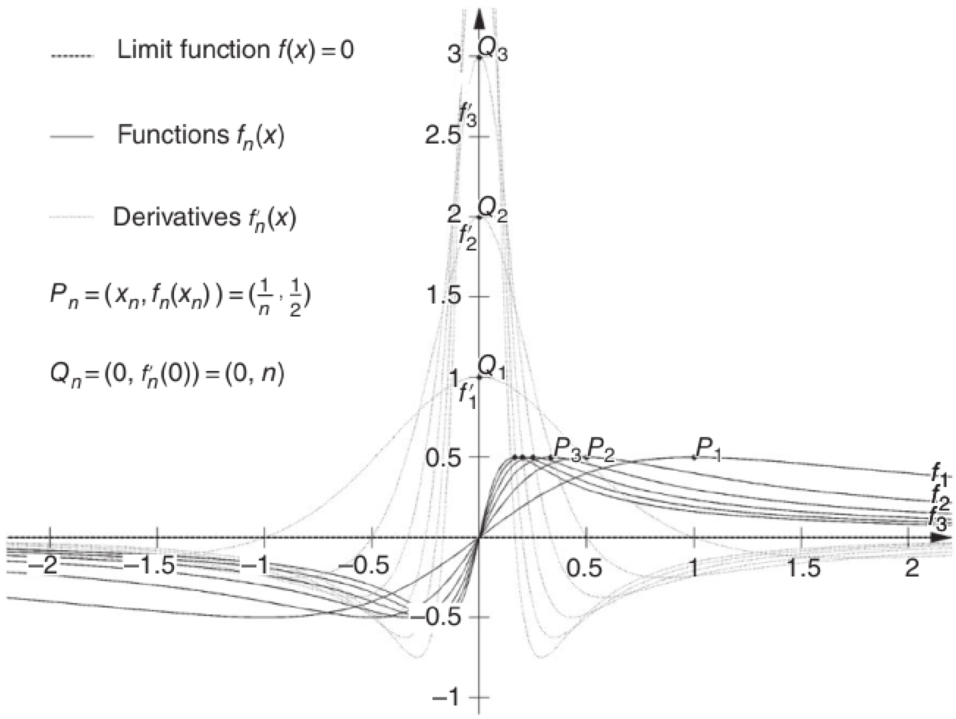
Παράδειγμα 5.0.11. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, καθεμία από τις συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμη στο $X = \mathbb{R}$: $f'_n(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για οποιοδήποτε σταθερό $x \in \mathbb{R}^*$, αυτή η ακολουθία συγκλίνει στο 0 , δηλαδή, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Επομένως, $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά $f'_n(0) = n$ και $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(0) = \infty$. Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση της $f_n(x)$ δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$ (ή σε οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το 0), διότι για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n = \frac{1}{n} \in X$ έτσι ώστε

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Παράδειγμα 5.0.12. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ στο $X = [0, 1]$. Η ακολουθία συγκλίνει στο X στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases},$$

η οποία είναι ασυνεχής και επομένως μη παραγωγίσιμη στο 0, αν και η παράγωγος κάθε συνάρτησης $f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$: $f'_n(x) = \frac{-n}{(1+nx)^2}$. Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = \frac{1}{n} \in X$ έτσι ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$, καθώς $n \to \infty$.



Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

► Μια σειρά $\sum u_n(x)$ παραγωγίσιμων συναρτήσεων συγκλίνει σε έναν μετρικό χώρο X, αλλά αυτή η σειρά δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη όρο προς όρο στον X.

Παράδειγμα 5.0.13. Θεωρούμε τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$ με $X = \mathbb{R}$. Τα μερικά αθροίσματα αυτής της τηλεσκοπικής σειράς μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}[e^{-(k-1)^2x^2} - e^{-k^2x^2}] \\ &= 1 - e^{-x^2} + e^{-x^2} - e^{-2^2x^2} + \cdots + e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2} = 1 - e^{-n^2x^2}. \end{aligned}$$

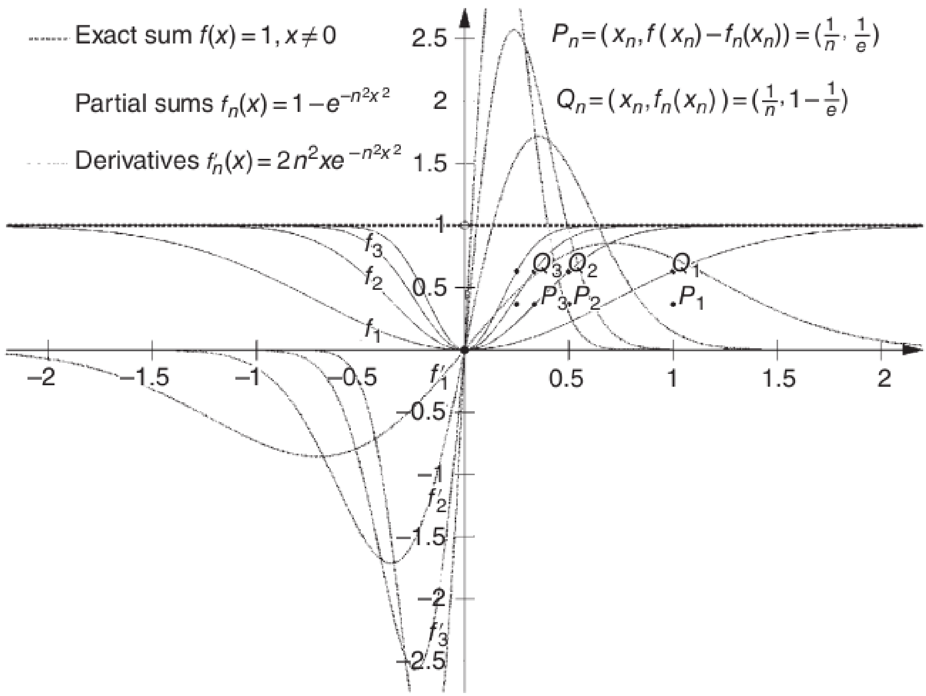
Επομένως, το άθροισμα της σειράς είναι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$. Αν και η σειρά είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ και κάθε συνάρτηση $u_n(x) = e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}$ είναι απείρως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η $f(x)$ είναι ασυνεχής και επομένως, μη παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$ (ή σε οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το 0). Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n = \frac{1}{n}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} |r_n(x_n)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_n)\right| = |f_n(x_n) - f(x_n)| \\ &= |1 - e^{-n^2\frac{1}{n^2}} - 1| = e^{-1} \nrightarrow 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty. \end{aligned}$$



Σχήμα 5.6: Γραφική παράσταση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$.

Παράδειγμα 5.0.14. Θεωρούμε την τηλεσκοπική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^4x^4}-\frac{nx}{1+n^4x^4}\right).$$

Τα μερικά αθροίσματα της είναι:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(k-1)x}{1+(k-1)^4x^4}-\frac{kx}{1+k^4x^4}\right)\\ &= -\frac{x}{1+x^4}+\frac{x}{1+x^4}-\frac{2x}{1+2^4x^4}+\cdots-\frac{nx}{1+n^4x^4}=-\frac{nx}{1+n^4x^4}, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει στο μηδέν για οποιαδήποτε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Επομένως, $f'(x) = 0$ για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$, αλλά η σειρά των παραγώγων δεν συγκλίνει στο 0: τα μερικά αθροίσματά της μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\\ &= -\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{(k-1)(1-3(k-1)^4x^4)}{(1+(k-1)^4x^4)^2}-\frac{k(1-3k^4x^4)}{(1+k^4x^4)^2}\right]\\ &= -\frac{n(1-3n^4x^4)}{(1+n^4x^4)^2}, \end{aligned}$$

και για $x = 0$ έχουμε $f_n'(0) = -n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$. Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση των σειρών δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$ (και σε οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το 0): για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = \frac{1}{n}$ έτσι ώστε

$$|r_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, \quad \text{καθώς } n \to 0.$$

Παρατήρηση 9. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα, η σύγκλιση μιας ακολουθίας και μιας σειράς δεν είναι ομοιόμορφη. Σημειώνουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση εξακολουθεί να μην εγγυάται την παραγωγισιμότητα της οριακής συνάρτησης ή, αν υπάρχει η παράγωγος, τη δυνατότητα παραγώγισης εντός του ορίου ή όρου προς όρου.

► Μια ακολουθία $f_n(x)$ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε έναν μετρικό χώρο X συγκλίνει στον X σε μια συνάρτηση $f(x)$ και $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, για κάθε $x \in X$, ωστόσο, η σύγκλιση της $f_n'(x)$ στην $f'(x)$ δεν είναι ομοιόμορφη στον X.

Παράδειγμα 5.0.15. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$, $X = [0,1]$. Αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Αν $x \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n} = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t^2x^2)}{2t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{2tx^2}{2(1+t^2x^2)} = 0 \end{aligned}$$

(αντικαταστήσαμε την διακριτή μεταβλητή n με την συνεχή μεταβλητή t και στη συνέχεια εφαρμόσαμε τον κανόνα του l'Hospital). Έτσι, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$. Για τις παραγώγους, έχουμε: $f_n'(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $f'(x) = 0$, και $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f'(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Επομένως, οι συνθήκες της πρότασης ικανοποιούνται, ωστόσο, η σύγκλιση των παραγώγων δεν είναι ομοιόμορφη: για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$ έτσι ώστε

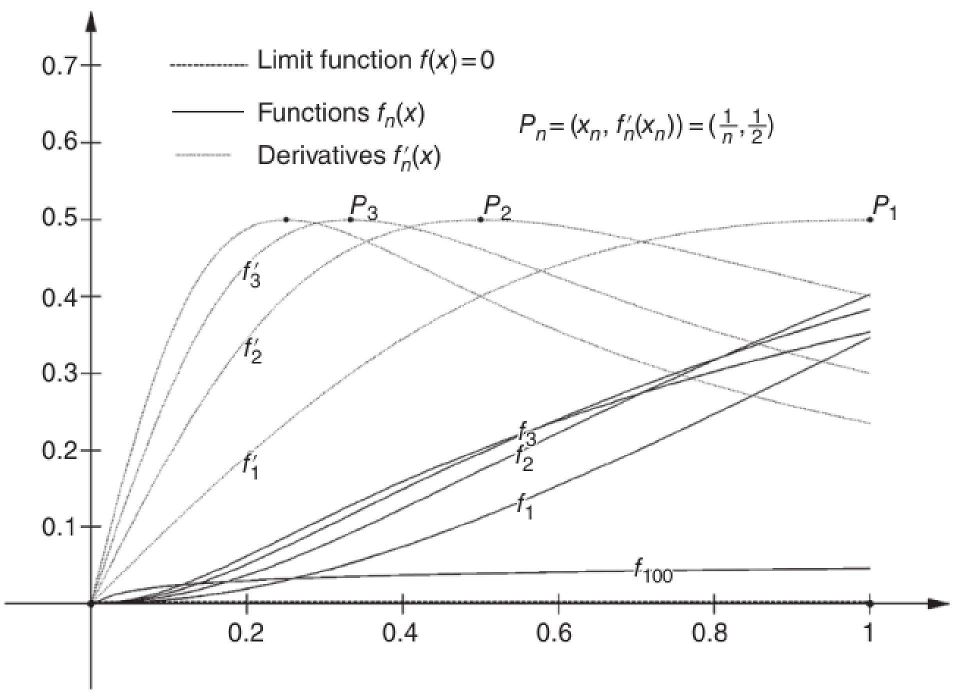
$$|f_n'(x_n) - f'(x_n)| = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Θα δείξουμε σε αυτό το παράδειγμα ότι η σύγκλιση της $f_n(x)$ στην $f(x)$ είναι ομοιόμορφη στο X:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) \leq \frac{1}{2n}\ln(1+n^2) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ωστόσο, είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ένα άλλο παράδειγμα όπου η σύγκλιση της αρχικής ακολουθίας δεν είναι ομοιόμορφη. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την ίδια ακολουθία συναρτήσεων στο $X = \mathbb{R}$, τότε όλες οι παραπάνω ιδιότητες είναι αληθείς, $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά η αρχική ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο X: επιλέγοντας $x_n = e^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2e^n) > \frac{1}{2n}\ln e^n = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$



Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n(x) = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$.

► Μια σειρά $\sum u_n(x)$ παραγωγίσιμων συναρτήσεων συγκλίνει στο X και παραγωγίζεται όρο προς όρο στον X, ωστόσο, η σειρά $\sum u_n'(x)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Παράδειγμα 5.0.16. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$ στο $X = [0,1)$. Για τα μερικά αθροίσματα της τηλεσκοπικής σειράς, έχουμε

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}x^k - \frac{1}{k+1}x^{k+1}\right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1} = x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Τότε, $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ και

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = x$$

για $x \in (0,1)$. Έτσι, το άθροισμα της σειράς είναι $f(x) = x$ για $x \in [0,1)$. Σημειώνουμε ότι ταυτόχρονα για όλα τα $x \in [0,1)$, ισχύει ο ακόλουθος υπολογισμός για την σειρά:

$$|r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+1}x^{n+1} < \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

που σημαίνει ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

Η σειρά των παραγώγων $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1} - x^n)$ είναι επίσης τηλεσκοπική με μερικά αθροίσματα

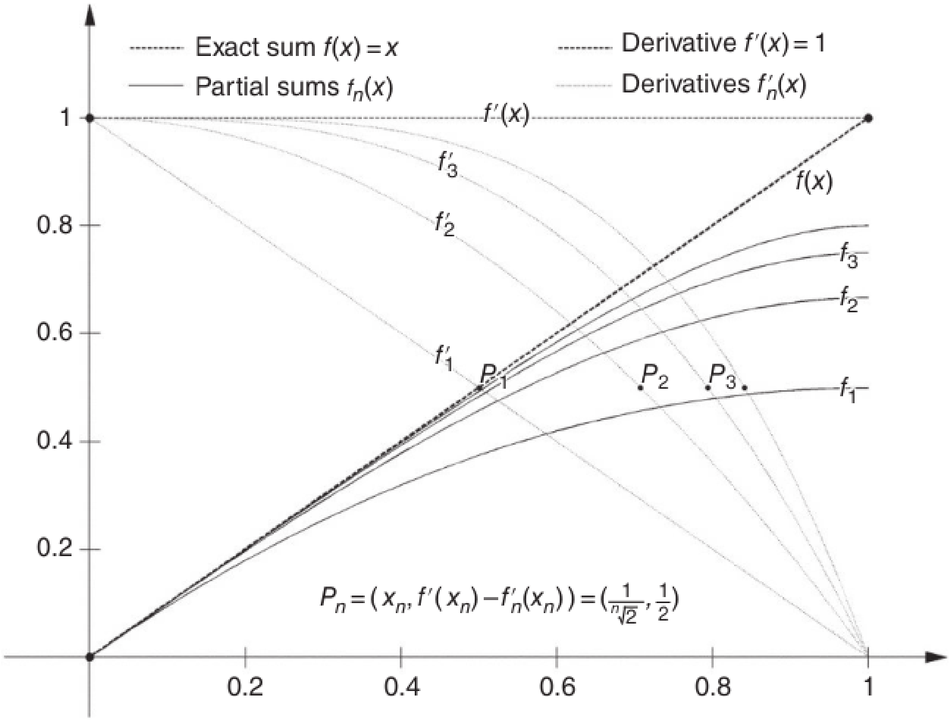
$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = 1 - x + x - x^2 + \cdots + x^{n-1} - x^n = 1 - x^n.$$

Για $x \in [0,1)$, προκύπτει ότι $\lim f_n'(x) = \lim(1 - x^n) = 1$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\right)' = 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1} - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad \text{για κάθε } x \in [0,1). \end{aligned}$$

Την ίδια στιγμή, η σειρά των παραγώγων δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$ έτσι ώστε

$$|f_n'(x_n) - f'(x_n)| = |1 - x_n^n - 1| = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$



Σχήμα 5.8: Γραφική παράσταση της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$.

Παρατήρηση 10. Στα παραδείγματα που δίνονται, φαίνεται ότι η συνθήκη της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας (σειρά) παραγώγων είναι επαρκής, αλλά όχι απαραίτητη για την παραγώγιση κάτω από το πρόσημο του ορίου (ή παραγώγηση της σειράς όρο προς όρο). Συμβαίνει ότι η συνθήκη της ομοιόμορφης σύγκλισης της αρχικής ακολουθίας (σειρά) δεν είναι επίσης απαραίτητη.

► Μια σειρά $\sum u_n(x)$ συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα σε έναν μετρικό χώρο X, αλλά το άθροισμα της σειράς δεν είναι παραγωγίσιμο σε ένα άπειρο αριθμό σημείων στον X.

Παράδειγμα 5.0.17. Θεωρούμε όλα τα ρητά σημεία στο διάστημα $[0,1]$ και τοποθετούμε σε μορφή αριθμητικής ακολουθίας r_n, $n=1,2,\ldots$ (αυτό μπορεί να συμβεί, αφού το σύνολο όλων των ρητών αριθμών οποιουδήποτε διαστήματος είναι μετρήσιμο). Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)$ ως εξής: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$, $x\in[0,1]$. Αφού $x, r_n\in[0,1]$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε $|x-r_n|\leq 1$, δηλαδή, $|u_n(x)|=\frac{|x-r_n|}{3^n}\leq\frac{1}{3^n}$. Η αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, συνεπώς, η σειρά της $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.0.1 (Weierstrass M-Test). Επιπλέον, η συνέχεια των συναρτήσεων $\frac{|x-r_n|}{3^n}$ στο $[0,1]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μας εξασφαλίζει την συνέχεια της $f(x)$ στο $[0,1]$.

Καθεμία από τις $u_n(x)=\frac{x-r_n}{3^n}$ είναι παραγωγίσιμη σε οποιοδήποτε $x\neq r_n$,

$$u'_n(x)=\frac{1}{3^n}\begin{cases}-1, & x<r_n,\\ 1, & x>r_n\end{cases}$$

και έχει πλευρικές παραγώγους στο σημείο $x=r_n$: $u'_n(r_{n_-})=-\frac{1}{3^n}$, $u'_n(r_{n_+})=\frac{1}{3^n}$. Αφού $|u'_n(x_-)|=|u'_n(x_+)|=\frac{1}{3^n}$ για οποιοδήποτε x και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_-)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_+)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (και, ειδικότερα στο $[0,1]$).

Θα αποδείξουμε ότι η $f(x)$ έχει πλευρικές παραγώγους σε κάθε σημείο x_0 στο $[0,1]$. Για τυχαίο σταθερό σημείο $x \in [0,1]$, επιλέγουμε $h > 0$ έτσι ώστε $x+h \in [0,1]$ και θεωρούμε τη σειρά

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+h-r_n|-|x-r_n|}{h3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h).\end{aligned}$$

Για οποιοδήποτε $h \in (0, 1-x)$, ισχύει ο ακόλουθος υπολογισμός:

$$|v_n(h)| = \frac{||x+h-r_n|-|x-r_n||}{h3^n} \leq \frac{|x+h-r_n-(x-r_n)|}{h3^n} = \frac{1}{3^n},$$

και αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, από το Θεώρημα 3.0.1 (Weierstrass M-Test) συνεπάγεται η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)$ στο $(0, 1-x)$. Επίσης, για οποιοδήποτε σταθερό σημείο n έχουμε $\lim\limits_{h\to 0_+} v_n(h) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{u_n(x+h)-u_n(x)}{h} = u_n'(x_+)$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_+)$ συγκλίνει. Επομένως, το όριο της σειράς υπάρχει και μπορεί να υπολογιστεί όρο προς όρο:

$$\begin{aligned}f'(x_+) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)\\ = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{h\to 0_+} v_n(h) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_+).\end{aligned}$$

Όμοια, $f'(x_-) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_-)$ για οποιοδήποτε $x \in (0,1]$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε άρρητο σημείο x στο $[0,1]$: αφού $x \neq r_n$, κάθε $u_n(x) = \frac{|x-r_n|}{3^n}$ είναι παραγωγίσιμη στο x, το οποίο σημαίνει ότι $u_n'(x_+) = u_n'(x_-)$, συνεπώς, $f'(x_+) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_+) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_-) = f'(x_-)$, δηλαδή, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη. Τέλος, θα δείξουμε ότι $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα ρητό σημείο x στο $[0,1]$. Για ένα ρητό σημείο x_o, υπάρχει k έτσι ώστε $x_0 = r_k$. Η συνάρτηση $u_k(x) = \frac{x-r_k}{3^k}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = r_k$, επειδή οι πλευρικές παράγωγοι είναι διαφορετικές: $u_k'(r_{k_-}) = -\frac{1}{3^k} \neq \frac{1}{3^k} = u_k'(r_{k_+})$. Έτσι, σε οποιοδήποτε ρητό σημείο, ένας από τους όρους της σειράς δεν είναι παραγωγίσιμος, και όλοι οι υπόλοιποι είναι παραγωγίσιμοι:

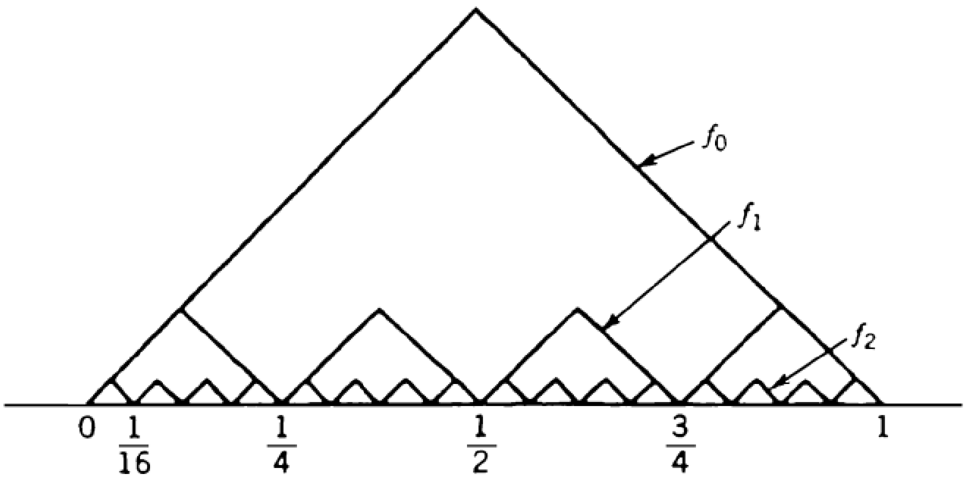
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1, n\neq k}^{\infty} u_n(x) + u_k(x) \equiv g_k(x) + u_k(x).$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συλλογισμό όπως παραπάνω για ένα άρρητο σημείο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = r_k$. Επομένως, η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = r_k$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων και μη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Παρατήρηση 11. Αυτό το παράδειγμα μπορεί επίσης να διατυπωθεί με τη μορφή: *Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα, αλλά μπορεί να είναι μη παραγωγίσιμη σε άπειρα πολλά σημεία αυτού του διαστήματος.*

► Μια σειρά $\sum u_n(x)$ συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα σε έναν μετρικό χώρο X, αλλά παρόλα αυτά το άθροισμα αυτής της σειράς δεν είναι παραγωγίσιμο σε κανένα σημείο του X.

Παράδειγμα 5.0.18. Έστω η $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως $f_0(x) := \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x-k| : k \in \mathbb{Z}\}$, έτσι ώστε η f_0 να είναι μια συνεχής συνάρτηση 'πριονωτή' της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από γραμμές με κλίση ± 1 στα διαστήματα $[k/2, (k+1)/2]$, $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, έστω $f_m(x) := (1/4^m) f_0(4^m x)$, έτσι ώστε η f_m είναι επίσης μια συνεχής 'πριονωτή' συνάρτηση της οποίας το γράφημα αποτελείται από γραμμές με κλίση ± 1 και $0 \leq f_m(x) \leq 1/(2 \cdot 4^m)$.



Σχήμα 5.9: Οι γραφικές παραστάσεις των f_0, f_1 και f_2.

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) := \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$. Από το Θεώρημα 3.0.1 (Weierstrass M-Test) έπεται ότι η σείρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, άρα η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο στον $\mathbb{R}$.

Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $h_n := \pm 1/4^{n+1}$, όπου το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε και οι δύο $4^n x$ και $4^n(x+h_n)$ να ανήκουν στο ίδιο διαστημα $[k/2, (k+1)/2]$. Αφού η f_0 έχει κλίση ± 1 στο διάστημα αυτό, τότε

$$\varepsilon_n := \frac{f_n(x+h_n) - f_n(x)}{h_n} = \frac{f_0(4^n x + 4^n h_n) - f_0(4^n x)}{4^n h_n} = \pm 1$$

Αν $m < n$, τότε η γραφική παράσταση της f_m έχει επίσης κλίση ± 1 στο διάστημα $[x, x+h_n]$ και έτσι

$$\varepsilon_m := \frac{f_m(x+h_n) - f_m(x)}{h_n} = \pm 1, \quad \text{για} \quad m < n.$$

Αν $m > n$, τότε ο $4^m(x+h_n) - 4^m x = \pm 4^{m-n-1}$ είναι ακέραιος και καθώς η f_0 έχει περίοδο ίση με 1, προκύπτει ότι

$$f_m(x+h_n) - f_m(x) = 0.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{f_m(x+h_n)-f_m(x)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m,$$

όπου το πηλίκο διαφοράς $\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}$ είναι περιττός ακέραιος αν ο n είναι άρτιος, και άρτιος ακέραιος αν ο n είναι περιττός. Επομένως, το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

δεν υπάρχει, έτσι η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο σημείο $x \in \mathbb{R}$.

► Μια ακολουθία $f_n(x)$ Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$ συγκλίνει στο $[a, b]$ σε μια συνάρτηση $f(x)$, αλλά η οριακή συνάρτηση δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Παράδειγμα 5.0.19. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία ρητών στο $[0, 1]$ ώστε να σχηματίσουμε την ακολουθία r_n, $n = 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_n(x)$ στο $[0, 1]$ ως εξής:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \ldots, r_n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Καθεμία από τις $f_n(x)$ είναι φραγμένη στο $[0, 1]$ και έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών (στα σημεία $r_1, \ldots, r_n$), το οποίο συνεπάγεται ότι $f_n(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Αφού $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ $\quad (f_{n+1}(r_{n+1}) = 1 > 0 = f_n(r_{n+1}))$ και $f_{n+1}(x) = f_n(x)$, για κάθε $x \neq r_{n_1}$, η ακολουθία $f_n(x)$ είναι αύξουσα ως προς το n και άνω φραγμένη από το 1,συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει για οποιοδήποτε $x \in [0, 1]$. Από τη μορφή της $f_n(x)$, προκύπτει ότι η οριακή συνάρτηση είναι η συνάρτηση του Dirichlet στο $[0, 1]$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

η οποία δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.
Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση της $f_n(x)$ στην $D(x)$ δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$: για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = r_{n+1} \in Q \cap [0, 1]$ έτσι ώστε $|f_n(r_{n+1}) - D(r_{n+1})| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

► Μια ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει στο $[a, b]$ σε μια συνάρτηση $f(x)$, και καθεμία από τις συναρτήσεις $f_n(x)$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αλλά η $f(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Παράδειγμα 5.0.20. Οι συναρτήσεις

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

στο $[0, 1]$ είναι κλιμακωτές Dirichlet συναρτήσεις: $f_n(x) = \frac{1}{n}D(x)$ και επομένως, δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[0, 1]$. Την ίδια στιγμή, η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει στην $f(x) \equiv 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, η οποία είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Επιπλέον, η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη λόγω του ακόλουθου υπολογισμού που πραγματοποιήθηκε ταυτόχρονα για όλα τα $x \in [0, 1]$: $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

► Μια ακολουθία από συνεχείς συναρτήσεις $f_n(x)$ συγκλίνει στο $[a, b]$ στη συνάρτηση $f(x)$, αλλά $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$.

Παράδειγμα 5.0.21. Θεωρούμε την ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ στο $[0, 1]$. Αυτή η ακολουθία συγκλίνει $f(x) \equiv 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, επειδή

- για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0$, για κάθε n, και
- για $x \neq 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα l'Hospital για να πάρουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{tx}{e^{tx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{tx^2}} = 0.$$

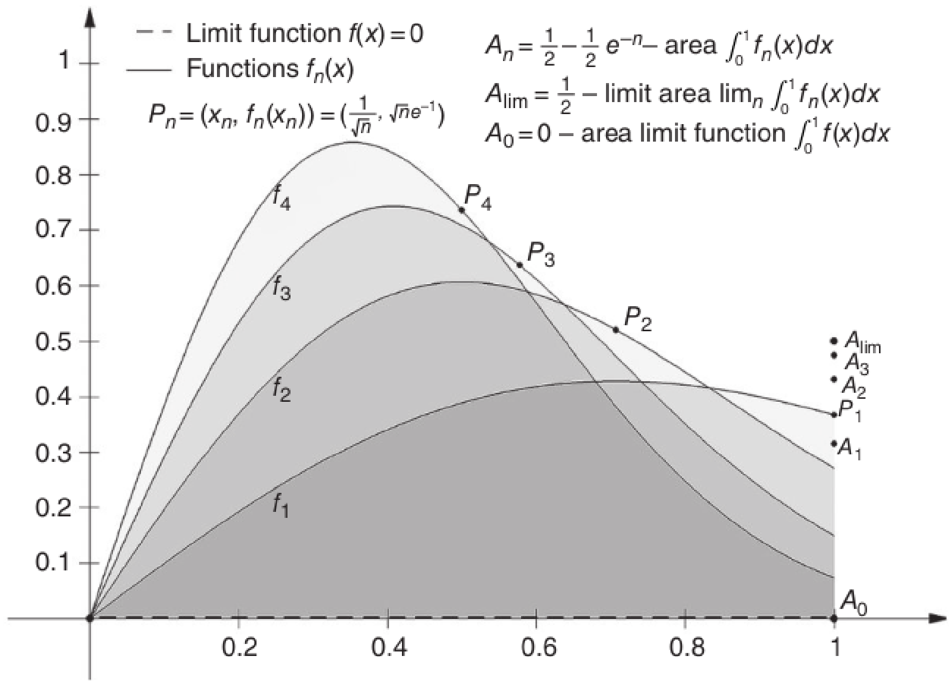
Επομένως, $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Κάθε μία από τις $f_n(x)$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη (αφού είναι συνεχής) και $\int_0^1 f_n(x)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n}$. Ωστόσο,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Θα ελέγξουμε τώρα τον τύπο της σύγκλισης. Επιλέγοντας $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, 1]$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = n\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\frac{1}{n}} = \sqrt{n}e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

που σημαίνει ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$.



Σχήμα 5.10: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

Παράδειγμα 5.0.22. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$ στο $[0,1]$. Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και η ακολουθία συγκλίνει στην $f(x) \equiv 0$, για κάθε $x \in [0,1]$, η οποία συνεπάγεται ότι $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Το ολοκλήρωμα καθεμία από τις $f_n(x)$ είναι εύκολο να υπολογιστεί $\int_0^1 f_n(x)dx = [\arctan nx^2]_0^1 = \arctan n$, αλλά το αντίστοιχο όριο είναι διαφορετικό από το 0:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} (\arctan n) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση της $f_n(x)$ δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$: για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1]$ για να πάρουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{2n\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

► Μια σειρά συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει στο $[a,b]$, αλλά δεν μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 5.0.23. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2e^{-n^2x^2} - (n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}]$$

στο $[0,1]$. Τα μερικά αθροίσματα αυτής της τηλεσκοπικής σειράς μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 2x\sum_{k=1}^{n}[k^2e^{-k^2x^2} - (k-1)^2e^{-(k-1)^2x^2}] \\ &= 2x[e^{-x^2} + 2^2e^{-2^2x^2} - e^{-x^2} + \cdots + n^2e^{-n^2x^2} - (n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}] \\ &= 2xn^2e^{-n^2x^2}. \end{aligned}$$

Ωστόσο, το άθροισμα της σειράς $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για οποιοδήποτε $x \in [0,1]$, και συνεπώς, $\int_0^1 f(x) = 0$.

Την ίδια στιγμή,

$$\int_0^1 u_n(x)dx = [(-e^{-n^2x^2} + e^{-(n-1)^2x^2})]_0^1 = -e^{-n^2} + e^{-(n-1)^2}$$

και η αριθμητική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-n^2} + e^{-(n-1)^2})$$

είναι τηλεσκοπική με μερικά αθροίσματα

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}(-e^{-k^2} + e^{-(k-1)^2}) \\ &= -e^{-1} + 1 - e^{-2^2} + e^{-1} + \cdots + e^{-n^2} + e^{-(n-1)^2} = 1 - e^{-n^2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-n^2}+e^{-(n-1)^2})\\ &= \lim_{n\to\infty} s_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση της σειράς δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = \frac{1}{n}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}|r_n(x_n)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_n)\right| = |f_n(x_n) - f(x_n)|\\ &= 2\frac{1}{n}n^2 e^{-n^2\frac{1}{n}} = 2ne^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.0.24. Θεωρούμε την τηλεσκοπική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[nx(1-x^2)^n - (n-1)x(1-x^2)^{n-1}]$$

στο $[0,1]$. Τα μερικά αθροίσματά της είναι

$$\begin{aligned}f_n(x) &= x(1-x^2) + 2x(1-x^2)^2 - x(1-x^2)\cdots + nx(1-x^2)^n\\ &\quad - (n-1)x(1-x^2)^{n-1} = nx(1-x^2)^n.\end{aligned}$$

Για $x = 0$ και 1, έχουμε $f_n(x) = 0$, και για $x \in (0,1)$ μπορούμε να λύσουμε την απροσδιόριστη μορφή με τον εξής τρόπο:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{t\to+\infty} x\frac{t}{(1-x^2)^{-t}} = x\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{-(1-x^2)^{-t}\ln(1-x^2)} = 0$$

(εδώ αντικαταστήσαμε τη διακριτή μεταβλητή n με τη συνεχή μεταβλητή t και στη συνέχεια εφαρμόσαμε τον κανόνα του l'Hospital). Επομένως, το άθροισμα της σειράς είναι $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για οποιοδήποτε $x \in [0,1]$ και επομένως, $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Την ίδια στιγμή,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x)dx &= \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}(1-x^2)^{n+1} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}(1-x^2)^n\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

και η αριθμητική σειρά που προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)$$

είναι τηλεσκοπική. Τα μερικά αθροίσματά της είναι

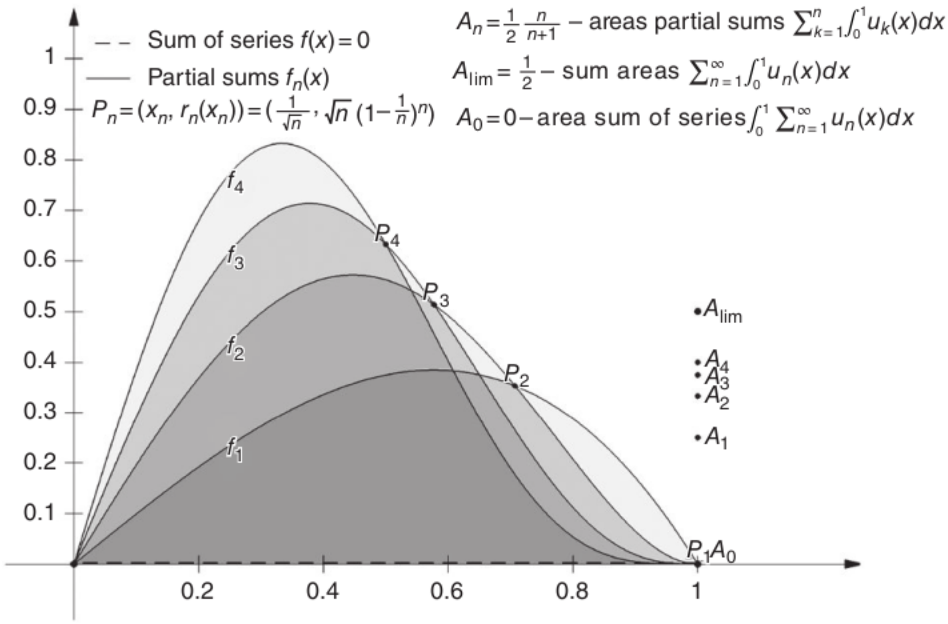
$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1},$$

και επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n$$
$$= \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx.$$

Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση της σειράς δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ έτσι ώστε

$$|r_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| = |\sqrt{n}(1-\frac{1}{n})^n| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$



Σχήμα 5.11: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $\sum_{n=1}^{\infty}[nx(1-x^2)^n - (n-1)x(1-x^2)^{n-1}]$.

Παρατήρηση 12. Σε όλα τα παραδείγματα, η αδυναμία εναλλαγής των πράξεων της ολοκλήρωσης και του ορίου ή του άπειρου αθροίσματος οφείλεται στην μη ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας, της συνάρτησης, ή της σειράς.

► Μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x)$ συγκλίνει στο $[a,b]$ σε μια συνάρτηση $f(x)$ και $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 5.0.25. Θεωρούμε την ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = nx(1-x)^n$ στο $[0,1]$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει στην $f(x) \equiv 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. Πράγματι, για $x = 0$ και $x = 1$ έχουμε $f_n(0) = f_n(1) = 0$, για κάθε n, και για $x \in (0,1)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hospital και να πάρουμε:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{t\to\infty}\left(x\frac{t}{(1-x)^{-t}}\right) = x\lim_{t\to\infty}\frac{1}{-(1-x)^{-t}\ln(1-x)} = 0.$$

Επομένως, $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Από την άλλη, κάθε $f_n(x)$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη (αφού είναι συνεχής) και

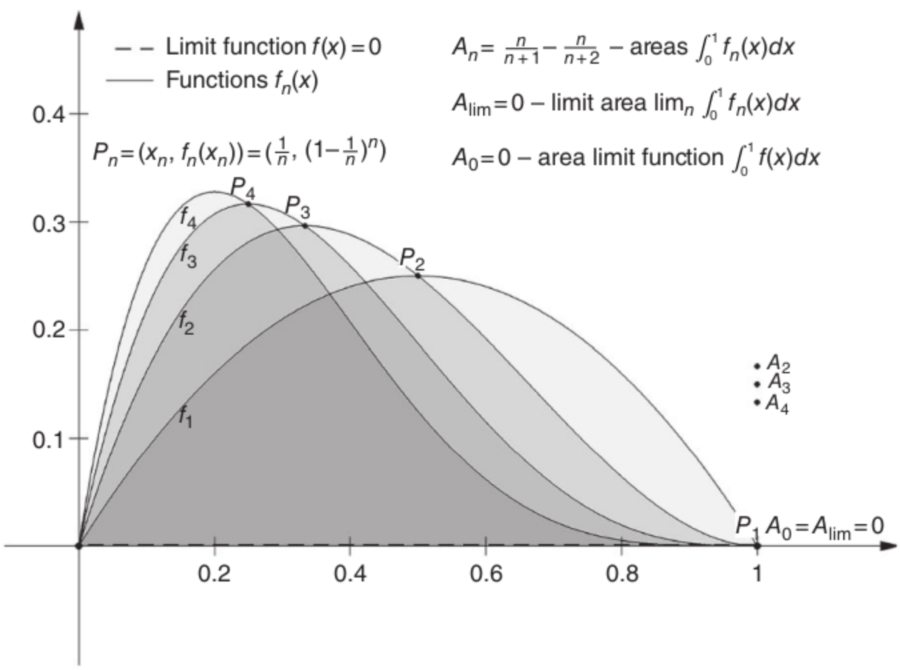
$$\int_0^1 f_n(x)dx = \left[\left(-\frac{n}{n+1}(1-x)^{n+1} + \frac{n}{n+2}(1-x)^{n+2}\right)\right]_0^1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0\\ &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

Έτσι, ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες. Παρόλα αυτά, η σύγκλιση της $f_n(x)$ δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$: επιλέγοντας $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε ότι

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = n \cdot \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} \neq 0, \qquad \text{καθώς} \quad n \to \infty.$$



Σχήμα 5.12: Γραφική παράσταση της ακολουθίας $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

► Μια σειρά συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει στο $[a,b]$, και μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο, αλλά η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 5.0.26. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}$$

στο $[0,1]$. Είναι μια τηλεσκοπική σειρά με μερικά αθροίσματα

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}}\right) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Για $x = 0$, όλα αυτά τα αθροίσματα είναι 0, και συνεπώς, $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Για $x \in (0,1]$, το συνολικό άθροισμα της σειράς βρίσκεται στη μορφή $f(x) = \lim_{n\to}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1-x$. Έτσι, το άθροισμα της σειράς είναι $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1-x, & x \in (0,1] \end{cases}$, και επομένως, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ (η τιμή της συνάρτησης σε ένα μεμονωμένο σημείο δεν επηρρεάζει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος).

Από την άλλη,

$$\int_0^1 u_n(x)dx = \left[\frac{2n+1}{2n+2}x^{\frac{2n+2}{2n+1}} - \frac{2n-1}{2n}x^{\frac{2n}{2n-1}}\right]_0^1 = \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n}$$

και η αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n}\right)$ είναι τηλεσκοπική με μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx,$$

δηλαδή η αρχική σειρά μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο. Ωστόσο, η σύγκλιση της σειράς δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = 2^{-(2n+1)} \in [0,1]$ έτσι ώστε

$$|r_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|x_n^{\frac{1}{2n+1}} - x_n - 1 + x_n\right| = 1 - \left(2^{-(2n+1)}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0,$$

καθώς $n \to \infty$.

Παράδειγμα 5.0.27. Θεωρούμε την τηλεσκοπική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

στο $[0,1]$. Τα μερικά αθροίσματά της είναι $f_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x}$. Για $x = 0$, έχουμε $f_n(0) = 0$, για κάθε n, και για $x \in (0,1]$ παίρνουμε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Ωστόσο, το άθροισμα της σειράς είναι $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \in (0,1] \end{cases}$, και συνεπώς

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$$

(και πάλι χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ότι η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από την τιμή μιας συνάρτησης σε ένα μόνο σημείο).

Από την άλλη,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x)dx &= \left[\left(\frac{1}{n}\ln(1+nx) - \frac{1}{n+1}\ln(1+(n+1)x)\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n}\ln(1+n) - \frac{1}{n+1}\ln(1+(n+1)).\end{aligned}$$

Η τηλεσκοπική σειρά που προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\ln(1+n) - \frac{1}{n+1}\ln(2+n)\right)$$

εχεί τα μερικά αθροίσματα

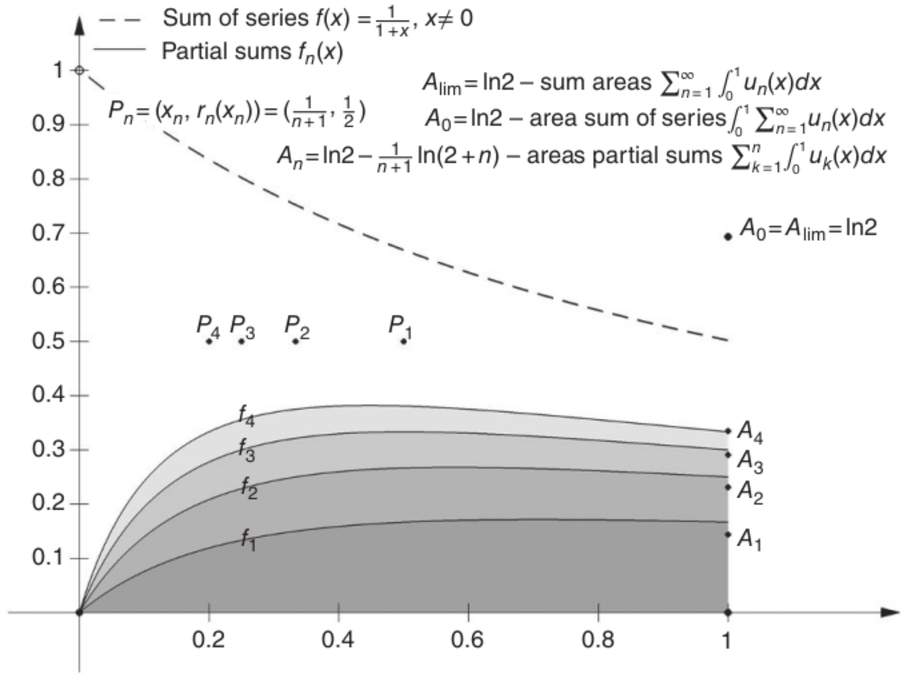
$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\ln(1+k) - \frac{1}{k+1}\ln(2+k)\right) = \ln 2 - \frac{1}{n+1}\ln(2+n).$$

και επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln 2 - \frac{1}{n+1}\ln(2+n)\right)\\ &= \ln 2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

Έτσι, η αρχική σειρά μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο, αλλα δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$: για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπάρχει $x_n = \frac{1}{n+1}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}|r_n(x_n)| &= |f_n(x_n) - f(x_n)|\\ &= \left|\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x_n} + \frac{1}{1+(n+1)x_n}\right|\\ &= \frac{1}{2} \nrightarrow 0, \quad \text{καθώς } n\to\infty.\end{aligned}$$



Σχήμα 5.13: Γραφική παράσταση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}\right)$

Παράρτημα Α΄

Πρόταση Α΄.0.1 (Ανισότητα Cauchy–Schwarz)**.** *Έστω* $x_1, \ldots, x_m$ *και* $y_1, \ldots, y_m$ *πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Πρόταση Α΄.0.2 (Ανισότητα Hölder)**.** *Αν* $x_1, \ldots, x_m$ *και* $y_1, \ldots, y_m$ *είναι πραγματικοί αριθμοί και* $p, q > 1$ *ώστε*[2] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

Σημείωση. Η ανισότητα Hölder αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Cauchy-Schwarz: η δεύτερη είναι ειδική περίπτωση της πρώτης για $p = q = 2$.

Πρόταση Α΄.0.3 (Ανισότητα Minkowski)**.** *Αν* $x_1, \ldots, x_m$ *και* $y_1, \ldots, y_m$ *είναι πραγματικοί αριθμοί και* $p > 1$*, τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

[2] Οι p και q λέγονται συζυγείς εκθέτες.

Βιβλιογραφία

[1] Βαλέττας, Π. (2009), *Πραγματική Ανάλυση*, Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

[2] Μήτσης, Θ., *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Ηράκλειο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών.

[3] Παπαδημητράκης, Μ., *Ανάλυση, Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής*, Ηράκλειο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών.

[4] Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2011), *Introduction to Real Analysis* John Wiley & Sons, (4th ed.).

[5] Bourchtein, A. & Bourchtein, L. (2017), *Counterexamples on Uniform Convergence: Sequences, Series, Functions, and Integrals*, John Wiley & Sons, (1st ed.).

[6] Bradley, R. E. & Sandifer, C. E. (2010), *Cauchy's Cours d'analyse: An Annotated Translation*, Springer Science & Business Media.

[7] Carothers, N.L. (2000) *Real Analysis*, Cambridge University Press (1st ed.).

[8] Jahnke, H. N. (2004), *A History of Analysis*, American Mathematical Society.

[9] Rudin W., (1976) *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (3rd ed.).