



«Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας»

**«Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά
(ΜΣΜΒ)»**

Διπλωματική Εργασία

**«Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα: θεωρία και εφαρμογές της στις
Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, τη Θεωρία Πιθανοτήτων και
την Πολυμεταβλητή Στατιστική»**

«Λάζος Δημήτριος»

Επιβλέπων καθηγητής: «Τρύφων Δάρας»

Πάτρα, Ιούνιος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία τους φοιτητή Λάζου Δημητρίου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

**«Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα: θεωρία και εφαρμογές της στις
Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, τη Θεωρία Πιθανοτήτων και
την Πολυμεταβλητή Στατιστική»**

«Λάζος Δημήτριος»

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

«Τρύφων Δάρας»

«Αναπληρωτής Καθηγητής, Πολυτεχνείο
Κρήτης»

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

«Νικόλαος Καραχάλιος»

«Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας»

Πάτρα, Ιούνιος 2026

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Τρύφωνα Δάρα, για την πολύτιμη καθοδήγηση, την υποστήριξη και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Οι συμβουλές και η αμέριστη βοήθειά του ήταν καθοριστικές για την ολοκλήρωσή της.

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία έχει ως κεντρικό θέμα τη θεωρία των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων, αναδεικνύοντάς τα ως ένα εξαιρετικά ευέλικτο και ενοποιητικό μαθηματικό εργαλείο. Αρχικά, αναλύεται το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο, συμπεριλαμβανομένης της γεωμετρικής ερμηνείας, του χαρακτηριστικού πολωνύμου και σημαντικών θεωρημάτων όπως το Cayley-Hamilton. Κεντρικό ρόλο παίζει η διαδικασία της διαγωνιοποίησης πινάκων, η οποία αποτελεί τον πυρήνα για την απλοποίηση πολύπλοκων γραμμικών μετασχηματισμών.

Στη συνέχεια, η μελέτη εξετάζει τα αποτελέσματα και τις εφαρμογές της θεωρίας σε τρία αλληλένδετα επιστημονικά πεδία:

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ): Αναδεικνύεται η χρήση της διαγωνιοποίησης για την αποσύζευξη και επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Αποδεικνύεται ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών επιτρέπει την ακριβή πρόβλεψη της μακροπρόθεσμης ευστάθειας ή αστάθειας του δυναμικού συστήματος, χωρίς να απαιτείται η πλήρης επίλυσή του.

Θεωρία Πιθανοτήτων (Μαρκοβιανές Αλυσίδες): Η φασματική ανάλυση εφαρμόζεται στη μελέτη στοχαστικών διαδικασιών. Τεκμηριώνεται ότι η κυρίαρχη ιδιοτιμή εγγυάται τη μετάβαση ενός τυχαίου συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας (στάσιμη κατανομή), ενώ το φασματικό χάσμα ποσοτικοποιεί την ταχύτητα αυτής της σύγκλισης. Αυτό βρίσκει πρακτική εφαρμογή σε σύγχρονα μοντέλα όπως ο αλγόριθμος PageRank της Google.

Πολυμεταβλητή Στατιστική: Η εργασία εξετάζει τις μεθόδους της Ανάλυσης Κύριων Συνιστωσών (PCA) και της Γραμμικής Διαχωριστικής Ανάλυσης (LDA) για τη μείωση της διαστασιμότητας των δεδομένων. Οι ιδιοτιμές λειτουργούν ως στατιστικό κριτήριο, αναγνωρίζοντας τους άξονες μέγιστης διασποράς στην PCA (ελαχιστοποιώντας την απώλεια πληροφορίας) και βελτιστοποιώντας τον διαχωρισμό ομάδων στην LDA.

Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι οι ιδιοτιμές αποτελούν το κοινό μαθηματικό «νήμα» που γεφυρώνει τη Φυσική, τη Στατιστική και την Πληροφορική, προσφέροντας πρακτικές λύσεις σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου.

Λέξεις – Κλειδιά

Ιδιοτιμές , Διαγωνιοποίηση Πινάκων , Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις , Μαρκοβιανές Αλυσίδες , Πολυμεταβλητή Στατιστική , Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA).

**«Eigenvalues and Eigenvectors: Theory and Applications in
Ordinary Differential Equations, Probability Theory, and
Multivariate Statistics»**

«Dimitrios Lazos»

Abstract

The present master's thesis focuses on the theory of eigenvalues and eigenvectors, highlighting them as an extremely versatile and unifying mathematical tool. Initially, the necessary theoretical background is analyzed, including the geometric interpretation, the characteristic polynomial, and important theorems such as the Cayley-Hamilton theorem. A central role is played by the process of matrix diagonalization, which constitutes the core for simplifying complex linear transformations.

Subsequently, the study examines the results and applications of the theory in three interconnected scientific fields:

Ordinary Differential Equations (ODEs): The use of diagonalization for uncoupling and solving systems of linear differential equations is highlighted. It is demonstrated that the sign of the real part of the eigenvalues allows for the accurate prediction of the long-term stability or instability of the dynamical system, without requiring its complete solution.

Probability Theory (Markov Chains): Spectral analysis is applied to the study of stochastic processes. It is documented that the dominant eigenvalue guarantees the transition of a random system to a state of equilibrium (stationary distribution), while the spectral gap quantifies the speed of this convergence. This finds practical application in modern models such as Google's PageRank algorithm.

Multivariate Statistics: The thesis examines the methods of Principal Component Analysis (PCA) and Linear Discriminant Analysis (LDA) for the dimensionality reduction of data. Eigenvalues function as a statistical criterion, identifying the axes of maximum variance in PCA (minimizing information loss) and optimizing group separation in LDA.

In conclusion, the results confirm that eigenvalues represent the common mathematical "thread" that bridges Physics, Statistics, and Computer Science, offering practical solutions to real-world problems.

Keywords

Eigenvalues , Matrix Diagonalization , Ordinary Differential Equations , Markov Chains , Multivariate Statistics , Principal Component Analysis (PCA).

Περιεχόμενα

Περίληψη	v
Abstract	viii
Περιεχόμενα	x
Εισαγωγή.....	1
1. Κεφάλαιο 1.Ιδιοτιμές &Ιδιοδιανύσματα	5
1.1 Θεωρητικό πλαίσιο και ορισμοί	5
1.1.1 Γεωμετρική ερμηνεία	5
1.2 Το Χαρακτηριστικό Πολύωνμο	7
1.3 Μεθοδολογία Προσδιορισμού Ιδιοτιμών & Ιδιοδιανυσμάτων	7
1.3.1 Υπολογισμός Ιδιοτιμών.	7
1.3.2 Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων	8
1.4. Παραδείγματα, Υπολογισμοί.....	8
1.5. Ιδιότητες των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων	9
1.5.1 Ιδιοτιμές και Ορίζουσα-Ιχνος.....	9
1.5.2. Ιδιοτιμές Τριγωνικών Πινάκων	9
1.5.3. Ιδιοτιμές Δυνάμεων Πίνακα	9
1.5.4 Γραμμική Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων	10
1.5.5 Ιδιοτιμές Ανάστροφου Πίνακα	10
1.6. Θεώρημα Cayley-Hamilton	10
1.6.1 Εφαρμογές Θεωρήματος.....	10
1.7 Ελάχιστο Πολύωνμο	11
1.8 Παραδείγματα Εφαρμογής	11
1.8.1 Παράδειγμα:Υπολογισμός Δυνάμεων Πίνακα μέσω Cayley-Hamilton	11
1.8.2 Παράδειγμα:Υπολογισμός Συναρτήσεων Πινάκων.	12
2. Κεφάλαιο 2. Διαγωνιοποίηση Πινάκων και Εφαρμογές	13
2.1 Ορισμοί και Θεμελιώδεις έννοιες	13
2.2 Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες Διαγωνιοποίησης	14
2.2.1. Θεμελιώδη Θεωρήματα Διαγωνιοποίησης	14
2.3. Διαδικασία Προσδιορισμού των Πινάκων P και D	15
2.4. Εφαρμογές της Διαγωνιοποίησης Πινάκων	16
2.4.1 Υπολογισμός Δυνάμεων Πινάκων (A^k).....	16
2.4.2 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων.....	16
2.4.3 Εξισώσεις Διαφορών και Μαρκοβιανές Αλυσίδες	17
2.4.4 Συμπληρωματικές Παρατηρήσεις και Εφαρμογές.....	17
2.5 Διαγωνιοποίηση Ειδικών Κατηγοριών.....	18
2.5.1. Πραγματικοί Συμμετρικοί Πίνακες.....	18
2.5.2. Ερμητιανοί Πίνακες	18
2.5.3. Ορθογώνιοι Πίνακες και Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση	18
2.6 Επίλυση Εξίσωσης $X^k = A$	19
2.7 Παραδείγματα και Εφαρμογές Κεφαλαίου 2	20
3. Κεφάλαιο 3.Εφαρμογές σε συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.)	22
3.1 Ομογενή Γραμμικά Συστήματα με Σταθερούς Συντελεστές	22
3.2 Επίλυση Μέσω Διαγωνιοποίησης	22
3.3 Πρακτικό Παράδειγμα Επίλυσης Συστήματος 2×2	23
3.4 Ευστάθεια Συστημάτων και Ιδιοτιμές	24

3.4.1 Κατηγορίες Ευστάθειας.....	24
3.5 Συστήματα Με Μιγαδικές Ιδιοτιμές.....	24
3.5.1 Παραδείγματα Συστήματος με Μιγαδικές Ιδιοτιμές.....	24
3.6 Μη Ομογενή Γραμμικά Συστήματα.....	25
3.7 Μετασχηματισμός Εξισώσεων Ανώτερης Τάξης Σε Συστήματα.....	26
3.8 Πολλαπλότητα Ιδιοτιμών και Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα.....	26
3.9 Λυμένα Παραδείγματα Συστημάτων ΣΔΕ.....	27
4. Κεφάλαιο 4. Εφαρμογές στη Θεωρία Πιθανοτήτων-Μαρκοβιανές Αλυσίδες.....	29
4.1 Εισαγωγή και Ορισμοί.....	29
4.2 Η Σημασία των Ιδιοτιμών στη Μακροπρόθεσμη Συμπεριφορά.....	29
4.3 Στάσιμη Κατανομή και Ιδιοδιανύσματα.....	30
4.4 Ταχύτητα Σύγκλισης και Φασματικό Χάσμα.....	30
4.5 Αριθμητικό Παράδειγμα:Μαρκοβιανή Αλυσίδα Δύο Καταστάσεων.....	30
4.6 Απορροφητικές Αλυσίδες και ο Θεμελιώδης Πίνακας.....	31
4.7 Ο Αλγόριθμος PageRank της Google.....	32
5. Κεφάλαιο 5. Εφαρμογές στην Πολυμεταβλητή Στατιστική.....	34
5.1 Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (Principal Component Analysis-PCA).....	34
5.1.1 Στατιστικό Υπόβαθρο και ο Πίνακας Συνδιακύμανσης.....	34
5.1.2 Μαθηματική Παραγωγή των Κύριων Συνιστωσών.....	35
5.1.3 Κριτήρια Επιλογής Πλήθους Συνιστωσών.....	36
5.1.4 Αριθμητικό Παράδειγμα Εφαρμογής της PCA.....	36
5.2 Γραμμική Διαχωριστική Ανάλυση.....	37
5.2.1 Προϋποθέσεις Εφαρμογής Μεθόδου.....	38
5.2.2 Γεωμετρική Ερμηνεία και Πλήθος Διαχωρικών Συναρτήσεων.....	38
5.2.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση: Πίνακες Διασποράς.....	39
5.2.4 Το Γενικευμένο Πρόβλημα Ιδιοτιμών στη ΓΔΑ.....	40
5.2.5 Αριθμητικό Παράδειγμα Εφαρμογής (Περίπτωση Δύο Ομάδων).....	40
6. Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις.....	44
6.1 Ανακεφαλαίωση και Ενοποιημένη Θεώρηση.....	44
6.2 Συνοπτική Αξιολόγηση των Επιμέρους Εφαρμογών.....	44
6.3 Προοπτικές και Μελλοντικές Επεκτάσεις.....	45
Βιβλιογραφία.....	47

Εισαγωγή

Η έννοια των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων αποτελεί έναν από τους κεντρικούς πυλώνες της Γραμμικής Άλγεβρας, με θεμελιώδη σημασία τόσο στην καθαρή μαθηματική θεωρία όσο και στις ποικίλες εφαρμογές της στις θετικές επιστήμες. Η διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών επιτρέπει την αποκάλυψη των εγγενών ιδιοτήτων ενός γραμμικού μετασχηματισμού, προσφέροντας μια απλούστερη και πιο κατανοητή αναπαράσταση πολύπλοκων μαθηματικών δομών.

Στο πρώτο στάδιο της παρούσας εργασίας, εξετάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, ξεκινώντας από τους βασικούς ορισμούς και τις ιδιότητες που διέπουν τους τετραγωνικούς πίνακες. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, καθώς και σε σημαντικά θεωρήματα όπως το θεώρημα *Cayley – Hamilton* και η έννοια του ελαχίστου πολωνύμου, τα οποία αποτελούν ισχυρά εργαλεία για τον υπολογισμό δυνάμεων πινάκων και την επίλυση προβλημάτων υψηλότερης τάξης.

Ωστόσο, η αξία της θεωρίας των ιδιοτιμών αναδεικνύεται πλήρως μέσα από τις εφαρμογές της. Η διπλωματική αυτή εργασία στοχεύει να αναδείξει τη σύνδεση της Γραμμικής Άλγεβρας με τρία διαφορετικά αλλά αλληλένδετα πεδία:

1. **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ):** Όπου η διαγωνιοποίηση πινάκων αποτελεί την κύρια μέθοδο για την επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, μετατρέποντας ένα συζευγμένο σύστημα σε ένα σύνολο ανεξάρτητων εξισώσεων.
2. **Θεωρία Πιθανοτήτων:** Με εστίαση στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες, όπου οι ιδιοτιμές καθορίζουν τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά και την κατάσταση ισορροπίας στοχαστικών συστημάτων.
3. **Πολυμεταβλητή Στατιστική:** Μέσω της Ανάλυσης Κύριων Συνιστωσών (PCA), όπου η εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα συνδιακύμανσης επιτρέπει τη μείωση της διαστασιμότητας των δεδομένων και την εξαγωγή της σημαντικότερης πληροφορίας.

Σκοπός της μελέτης είναι να προσφέρει μια ολοκληρωμένη εικόνα του πως μια αμιγώς αλγεβρική έννοια μετατρέπεται σε ένα ευέλικτο εργαλείο ανάλυσης και επίλυσης προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο.

Στόχοι της Εργασίας

1. Η παρουσίαση του αλγεβρικού και γεωμετρικού υπόβαθρου των ιδιοτιμών και της διαγωνιοποίησης πινάκων.

- Είναι σημαντικό γιατί αποτελεί τη βάση για να κατανοήσουμε πως ένας πολύπλοκος γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να απλοποιηθεί σε μια απλή βαθμωτή πράξη, διευκολύνοντας κάθε περαιτέρω υπολογισμό.

2. Η εφαρμογή της φασματικής ανάλυσης για την εύρεση γενικών λύσεων σε συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ).

- Είναι σημαντικό γιατί οι ιδιοτιμές καθορίζουν τη συμπεριφορά και την ευστάθεια των δυναμικών συστημάτων (π.χ. αν το σύστημα τείνει σε ισορροπία ή εκρήγνυται), κάτι κρίσιμο στη φυσική και τη μηχανική.

3. Η διερεύνηση της σύγκλισης Μαρκοβιανών Αλυσίδων μέσω της κυρίαρχης ιδιοτιμής του πίνακα μετάβασης.

- Είναι σημαντικό γιατί επιτρέπει την πρόβλεψη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς τυχαίων φαινομένων, γεγονός που βρίσκει εφαρμογή από τα οικονομικά μοντέλα μέχρι τον αλγόριθμο PageRank της Google.

4. Η ανάλυση της μεθόδου Κύριων Συνιστωσών (PCA) στην Πολυμεταβλητή Στατιστική για τη μείωση της διαστασιμότητας.

- Είναι σημαντικό γιατί βοηθά στον εντοπισμό των σημαντικότερων μεταβλητών σε ένα τεράστιο σύνολο δεδομένων, επιτρέποντας την οπτικοποίηση και την εξαγωγή συμπερασμάτων χωρίς απώλεια της ουσιαστικής πληροφορίας

Μεθοδολογία Ανάλυσης

1. Βιβλιογραφική ανασκόπηση και θεωρητική θεμελίωση → Συστηματική καταγραφή των ορισμών, των ιδιοτήτων και των βασικών θεωρημάτων (π.χ. Φασματικό Θεώρημα, Cayley-Hamilton) που διέπουν τις ιδιοτιμές.
2. Ανάλυση εφαρμογής στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ)
3. Διερεύνηση στοχαστικών μοντέλων στη Θεωρία Πιθανοτήτων
4. Εφαρμογή στην Πολυμεταβλητή Στατιστική (PCA και LDA)
5. Σύνθεση συμπερασμάτων και συγκριτική αξιολόγηση

Στο κύριο σώμα της εργασίας, έχει αναπτυχθεί το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο της Γραμμικής Άλγεβρας και οι εφαρμογές του. Συγκεκριμένα:

- **Κεφάλαιο 1: Θεωρία Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων** Πραγματοποιήθηκε ορισμός των εννοιών του ιδιοχώρου και του χαρακτηριστικού πολωνύμου. Η ανάλυση επικεντρώθηκε στην αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών, καθώς και στις ιδιότητες των πινάκων που καθορίζουν την ύπαρξη πραγματικών ή μιγαδικών λύσεων του χαρακτηριστικού πολωνύμου.
- **Κεφάλαιο 2: Διαγωνιοποίηση Πινάκων και Εφαρμογές της Διαγωνιοποίησης** Εξετάστηκαν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη διαγωνιοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα. Αναλύθηκε η διαδικασία εύρεσης του πίνακα ομοιότητας P και του διαγώνιου πίνακα D , όπου $A = PDP^{-1}$, καθώς και διάφορες εφαρμογές της διαγωνιοποίησης.
- **Κεφάλαιο 3: Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων** Αναδείχθηκε η χρήση της διαγωνιοποίησης για την αποσύζευξη και την εύρεση της γενικής λύσης σε συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Παράλληλα, εξετάστηκε εκτενώς η σύνδεση μεταξύ του προσήμου των ιδιοτιμών και της ευστάθειας ή αστάθειας των δυναμικών συστημάτων.
- **Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές στη Θεωρία Πιθανοτήτων - Μαρκοβιανές Αλυσίδες** Μελετήθηκε η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά στοχαστικών διαδικασιών. Αναλύθηκε ο ρόλος της κυρίαρχης ιδιοτιμής στην επίτευξη της στάσιμης κατανομής και η έννοια του φασματικού χάσματος, με πρακτική αναφορά στον αλγόριθμο PageRank της Google.

- **Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές στην Πολυμεταβλητή Στατιστική** Παρουσιάστηκαν μέθοδοι μείωσης της διαστατικότητας των δεδομένων, συγκεκριμένα η Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA) και η Γραμμική Διαχωριστική Ανάλυση (LDA). Εξηγήθηκε πως το πρόβλημα των ιδιοτιμών μεγιστοποιεί τη διασπορά και βελτιστοποιεί τον διαχωρισμό των δεδομένων.
- **Κεφάλαιο 6 : Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις** Συνοψίζονται τα βασικά ευρήματα της μελέτης και προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα, αποδεικνύοντας τον ενοποιητικό ρόλο των ιδιοτιμών σε πολλαπλά επιστημονικά πεδία.

Αναμενόμενα αποτελέσματα

1. **Συστηματική κατηγοριοποίηση των θεωρητικών εργαλείων** → Η δημιουργία ενός οδηγού που συνδέει συγκεκριμένες ιδιότητες πινάκων (π.χ. συμμετρία, οριστικότητα) με τη δυνατότητα διαγωνιοποίησής τους.
2. **Ανάδειξη της σχέσης ιδιοτιμών και ευστάθειας συστημάτων** → Η απόδειξη του πώς το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών επιτρέπει την πρόβλεψη της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος (ΣΔΕ) χωρίς την ανάγκη πλήρους επίλυσης.
3. **Μαθηματική τεκμηρίωση της σύγκλισης στοχαστικών διαδικασιών** → Η κατανόηση του πώς η φασματική ανάλυση ορίζει την ταχύτητα με την οποία μια Μαρκοβιανή αλυσίδα φτάνει στην κατάσταση ισορροπίας της.
4. **Αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου PCA** → Η ποσοτικοποίηση της πληροφορίας που διατηρείται κατά τη μείωση της διαστασιμότητας, αναδεικνύοντας τις ιδιοτιμές ως κριτήριο για την επιλογή των σημαντικότερων συνιστωσών.
5. **Ενοποιημένη θεώρηση των εφαρμογών της Γραμμικής Άλγεβρας** → Η εξαγωγή ενός τελικού συμπεράσματος που θα καταδεικνύει ότι οι ιδιοτιμές αποτελούν το κοινό μαθηματικό "νήμα" που συνδέει τη Φυσική, τη Στατιστική και την Πληροφορική.

1.Κεφάλαιο 1: Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

1.1 Θεωρητικό Πλαίσιο και Ορισμοί

Η μελέτη των γραμμικών απεικονίσεων και των πινάκων επικεντρώνεται συχνά στην εύρεση διανυσμάτων των οποίων η διεύθυνση παραμένει αμετάβλητη υπό την επίδραση ενός μετασχηματισμού. Οι έννοιες αυτές τυποποιούνται μέσω των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων, οι οποίες αποτελούν τη βάση για τη φασματική ανάλυση πινάκων.

Ορισμός: Ιδιοτιμή και Ιδιοδιάνυσμα Γραμμικής Απεικόνισης Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος F (όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και $f: X \rightarrow X$ μια γραμμική απεικόνιση. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in X$ καλείται **ιδιοδιάνυσμα** της f , εάν υπάρχει βαθμωτό $\lambda \in F$ τέτοιο ώστε :

$$f(v) = \lambda v$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα v .

Ορισμός : Ιδιοτιμή και Ιδιοδιάνυσμα Πίνακα Στην περίπτωση όπου η γραμμική απεικόνιση αναπαρίσταται από έναν τετραγωνικό πίνακα $A \in F^{n \times n}$, ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in F^n$ (ως διάνυσμα στήλη) καλείται ιδιοδιάνυσμα του A εάν ικανοποιεί τη σχέση:

$$Ax = \lambda x$$

για κάποιο $\lambda \in F$.

1.1.1 Γεωμετρική Ερμηνεία

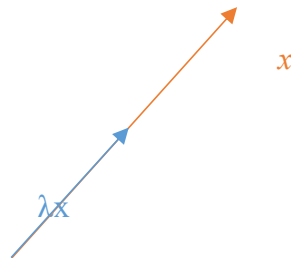
Η γεωμετρική σημασία της σχέσης $Ax = \lambda x$ είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική. Σε έναν τυπικό γραμμικό μετασχηματισμό, ένας πίνακας A ενεργεί πάνω σε ένα διάνυσμα x αλλάζοντας τόσο το μήκος όσο και την κατεύθυνσή του.

Ωστόσο, όταν το x είναι **ιδιοδιάνυσμα** του A , ο μετασχηματισμός ενεργεί με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα **να μην αλλάζει κατεύθυνση**. Η δράση του πίνακα περιορίζεται μόνο στη μεταβολή του μεγέθους του διανύσματος (scaling):

- Εάν $\lambda > 1$, το διάνυσμα επιμηκύνεται (stretching).
- Εάν $0 < \lambda < 1$, το διάνυσμα συρρικνώνεται (shrinking).
- Εάν $\lambda < 0$, το διάνυσμα αλλάζει φορά (αναστρέφεται), παραμένοντας όμως πάνω στην ίδια ευθεία (ιδιο-γραμμή).

Με άλλα λόγια, τα ιδιοδιανύσματα ορίζουν τους "φυσικούς άξονες" του μετασχηματισμού, πάνω στους οποίους η δράση του πίνακα A είναι μια απλή βαθμωτή πράξη πολλαπλασιασμού.

Σχήμα 1.1: Γεωμετρική απεικόνιση ιδιοδιανύσματος, ο πίνακας A μεταβάλλει μόνο το μέγεθος του διανύσματος x κατά έναν παράγοντα λ , διατηρώντας την κατεύθυνσή του σταθερή



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική απεικόνιση ιδιοδιανύσματος

Ορισμός : Ιδιόχωρος Για μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ του πίνακα A , το σύνολο όλων των διανυσμάτων x που επαληθεύουν τη σχέση $(A - \lambda I)x = 0$ ονομάζεται **ιδιόχωρος** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και συμβολίζεται ως V_λ . Ο V_λ αποτελεί τον πυρήνα του πίνακα $(A - \lambda I)$, δηλαδή:

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

Ο V_λ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X , ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην τιμή λ , καθώς και το μηδενικό διάνυσμα.

1.2 Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

Η διαδικασία προσδιορισμού των ιδιοτιμών ενός πίνακα A ανάγεται στην επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Η σχέση $Ax = \lambda x$ μπορεί να αναδιαταχθεί στη μορφή:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Προκειμένου να υπάρχει μη μηδενική λύση ($x \neq 0$) για το παραπάνω ομογενές σύστημα, θα πρέπει ο πίνακας $(A - \lambda I)$ να είναι μη αντιστρέψιμος, δηλαδή η ορίζουσά του να ισούται με μηδέν.

Ορισμός : Χαρακτηριστική Εξίσωση και Πολυώνυμο Η εξίσωση:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A . Το ανάπτυγμα της ορίζουσας παράγει ένα πολυώνυμο *βαθμού n ως προς λ* , το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Ορισμός : Φάσμα Πίνακα Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός πίνακα A ονομάζεται **φάσμα** του A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

1.3 Μεθοδολογία Προσδιορισμού Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων

Η διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in F^{n \times n}$ υλοποιείται σε δύο βασικά στάδια:

1.3.1 Υπολογισμός Ιδιοτιμών Όπως ορίστηκε προηγουμένως, οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Η διαδικασία περιλαμβάνει:

1. Το σχηματισμό του πίνακα $(A - \lambda I)$
2. Τον υπολογισμό της ορίζουσας $\det(A - \lambda I)$, η οποία οδηγεί σε ένα πολυώνυμο *βαθμού n ως προς λ* .
3. Την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $P(\lambda) = 0$.

Οι ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (όπου $k \leq n$) αποτελούν το φάσμα του πίνακα. Σημειώνεται ότι αν μια ρίζα έχει πολλαπλότητα $m > 1$, τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα m** .

1.3.2 Υπολογισμός Ιδιοδιανυσμάτων Αφού προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές, για κάθε μία από αυτές (λ_i) αναζητούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα επιλύοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(A - \lambda_i I)x = 0$$

Το σύστημα αυτό έχει πάντα μη μηδενικές λύσεις, καθώς η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών είναι μηδέν. Οι λύσεις του συστήματος προσδιορίζουν τον **ιδιόχωρο V_{λ_i}**

Η διάσταση του ιδιόχωρου V_{λ_i} ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και συμβολίζεται με g_i . Ισχύει πάντα ότι:

$$1 \leq \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} \leq \text{αλγεβρική πολλαπλότητα}$$

1.4 Παράδειγμα Υπολογισμού

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Εύρεση Ιδιοτιμών Σχηματίζουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$.

Βήμα 2: Εύρεση Ιδιοδιανυσμάτων Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$, λύνουμε το σύστημα $(A - 3I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 - 3 & 2 \\ 2 & 1 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Από την εξίσωση $-2x_1 + 2x_2 = 0$ προκύπτει $x_1 = x_2$. Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.5 Ιδιότητες των Ιδιοτιμών και των Ιδιοδιανυσμάτων

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες που διέπουν τις ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, οι οποίες διευκολύνουν τον υπολογισμό και την ανάλυση των γραμμικών συστημάτων.

1.5.1 Ιδιοτιμές και Ορίζουσα – Ίχνος Υπάρχει μια άμεση σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών ενός πίνακα και δύο βασικών μεγεθών του, της ορίζουσας και του ίχνους:

1. **Ορίζουσα:** Το γινόμενο όλων των ιδιοτιμών ενός πίνακα (λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητά τους) ισούται με την ορίζουσα του πίνακα:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Συνέπεια: Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι διάφορες του μηδενός.

2. **Ίχνος:** Το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με το ίχνος του (το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου):

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

1.5.2 Ιδιοτιμές Τριγωνικών Πινάκων Εάν ένας πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, κάτω τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

1.5.3 Ιδιοτιμές Δυνάμεων Πίνακα Εάν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x , τότε για κάθε φυσικό αριθμό k , ο αριθμός λ^k είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^k με το ίδιο ιδιοδιάνυσμα x :

$$A^k x = \lambda^k x$$

1.5.4 Γραμμική Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων Ένα θεμελιώδες θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας αναφέρει ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε **διαφορετικές** (διακεκριμένες) ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα. *Σημείωση:* Η ιδιότητα αυτή είναι καθοριστική για τη **διαγωνιοποίηση** πινάκων, η οποία θα εξεταστεί σε επόμενο κεφάλαιο και αποτελεί τη βάση για την επίλυση Συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων.

1.5.5 Ιδιοτιμές Ανάστροφου Πίνακα Οι πίνακες A και A^T (ανάστροφος) έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και, κατά συνέπεια, τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές, αν και δεν έχουν απαραίτητα τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

1.6 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Το θεώρημα των Cayley-Hamilton εγκαθιδρύει μια βαθιά σύνδεση μεταξύ ενός τετραγωνικού πίνακα και του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου. Σύμφωνα με το θεώρημα, κάθε τετραγωνικός πίνακας αποτελεί «ρίζα» του ίδιου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Θεώρημα Cayley-Hamilton: Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας και $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ το χαρακτηριστικό του πολυωνύμου, το οποίο έχει τη μορφή:

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

Τότε ισχύει ότι:

$$P(A) = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I = \mathbb{O}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας και $\mathbb{O}$ ο μηδενικός πίνακας διάστασης $n \times n$.

1.6.1 Εφαρμογές του Θεωρήματος

Το θεώρημα Cayley-Hamilton δεν έχει μόνο θεωρητική αξία, αλλά παρέχει πρακτικές μεθόδους για σημαντικούς υπολογισμούς:

1. Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα (A^{-1}) Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ($\det(A) \neq 0$), τότε ο A^{-1} μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο του A βαθμού $n-1$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $P(A) = 0$ με A^{-1} , προκύπτει:

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_1I)$$

2. Υπολογισμός Δυνάμεων Πίνακα (A^k) Κάθε δύναμη A^k του πίνακα A (για $k \geq n$) μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων $I, A, A^2, \dots, A_{n-1}$. Αυτό μειώνει δραστικά την πολυπλοκότητα των υπολογισμών σε μεγάλα συστήματα.

1.7 Ελάχιστο Πολυώνυμο

Ενώ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πάντα βαθμό n , υπάρχει ένα πολυώνυμο ελάχιστου δυνατού βαθμού το οποίο μηδενίζεται από τον πίνακα A .

Ορισμός : Ελάχιστο Πολυώνυμο Το ελάχιστο πολυώνυμο $m(\lambda)$ ενός πίνακα A είναι το μοναδικό monic πολυώνυμο (με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα) μικρότερου βαθμού για το οποίο ισχύει $m(A) = O$. (όπου "monic" σημαίνει πως ο συντελεστής του μεγαλύτερου όρου (π.χ. του λ^k) είναι ίσος με 1).

- **Ιδιότητα:** Το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί πάντα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- **Ιδιότητα:** Το $m(\lambda)$ και το $P(\lambda)$ έχουν τις ίδιες ακριβώς ρίζες (τις ιδιοτιμές), αλλά πιθανώς με διαφορετικές πολλαπλότητες.

1.8 Παραδείγματα Εφαρμογής

Για την πλήρη κατανόηση των εννοιών του πρώτου κεφαλαίου, παρατίθενται επιλεγμένα παραδείγματα που καλύπτουν τη χρήση του Θεωρήματος Caley-Hamilton για τον υπολογισμό δυνάμεων και συναρτήσεων πινάκων.

Παράδειγμα 1.8.1: Υπολογισμός δυνάμεων πίνακα μέσω Caley-Hamilton Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ από το προηγούμενο παράδειγμα, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Σύμφωνα με το θεώρημα Caley-Hamilton ισχύει:

$$A^2 - 2A - 3I = O \Rightarrow A^2 = 2A + 3I$$

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα A^4 , δεν χρειάζεται να κάνουμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς πινάκων, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γραμμική σχέση:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A + 3I)^2 = 4A^2 + 12A + 9I$$

Αντικαθιστώντας πάλι το A^2 :

$$A^4 = 4(2A + 3I) + 12A + 9I = 20A + 21I$$

Παράδειγμα 1.8.2: Υπολογισμός Συναρτήσεων Πινάκων Μια ιδιαίτερα χρήσιμη εφαρμογή στις Διαφορικές Εξισώσεις είναι ο υπολογισμός συναρτήσεων πινάκων, όπως η $q(A) = \sin(A)$. Αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$ τότε αναζητούμε ένα πολυώνυμο $r(x) = r_1 x + r_0$, το οποίο αποτελεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Hermite στις ιδιοτιμές του πίνακα A , τέτοιο ώστε:

$$r(\lambda_i) = q(\lambda_i)$$

Δηλαδή:

1. $r_1(3) + r_0 = \sin(3)$
2. $r_1(-1) + r_0 = \sin(-1)$

Λύνοντας το σύστημα ως προς r_1 και r_0 , προκύπτουν οι τιμές :

$$r_1 = \frac{\sin(3) + \sin(1)}{4} \text{ και } r_0 = \sin(3) - 3r_1$$

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα $\sin(A)$ ως:

$$\sin(A) = r_1 A + r_0 I$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Διαγωνιοποίηση Πινάκων και Εφαρμογές

Η διαγωνιοποίηση αποτελεί μία από τις σημαντικότερες διαδικασίες στη Γραμμική Άλγεβρα, καθώς επιτρέπει την απλούστερη δυνατή αναπαράσταση ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Μέσω της εύρεσης μιας κατάλληλης βάσης που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα, ένας πίνακας μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαγώνια μορφή, γεγονός που διευκολύνει δραστικά τους υπολογισμούς σε σύνθετα προβλήματα.

2.1 Ορισμοί και Θεμελιώδεις Έννοιες

Ορισμός : Όμοιοι Πίνακες Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in F^{n \times n}$. Οι πίνακες A και B ονομάζονται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in F^{n \times n}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση:

$$B = P^{-1}AP$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων. Δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και, κατά συνέπεια, τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες.

Ορισμός : Διαγωνιοποιήσιμος Πίνακας Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος** εάν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα D . Δηλαδή, εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P (ο οποίος ονομάζεται πίνακας αλλαγής βάσης ή modal matrix) τέτοιος ώστε:

$$D = P^{-1}AP$$

Στην περίπτωση αυτή, τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα D είναι οι ιδιοτιμές του A , ενώ οι στήλες του πίνακα P είναι τα αντίστοιχα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Ορισμός : Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα Για την πλήρη διερεύνηση της διαγωνιοποιεσιμότητας ενός πίνακα, απαιτείται η σύγκριση δύο μεγεθών για κάθε ιδιοτιμή λ_i :

1. **Αλγεβρική Πολλαπλότητα (m_i)**: Ο αριθμός των φορών που η ιδιοτιμή εμφανίζεται ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
2. **Γεωμετρική Πολλαπλότητα (g_i)**: Η διάσταση του αντίστοιχου ιδιόχωρου V_{λ_i} , δηλαδή ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην τιμή λ_i .

2.2 Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες Διαγωνιοποίησης

Σύμφωνα με τη θεωρία, ένας πίνακας $A \in F^{n \times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A αναλύεται πλήρως σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο σώμα F .
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A , η αλγεβρική πολλαπλότητα ισούται με τη γεωμετρική πολλαπλότητα ($m_i = g_i$)

2.2.1 Θεμελιώδη Θεωρήματα Διαγωνιοποίησης

Στη μελέτη της διαγωνιοποιεσιμότητας, η ύπαρξη διαφορετικών ιδιοτιμών απλοποιεί τη διαδικασία. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί την "επισημάνση" κλειδί για την ταχεία αναγνώριση διαγωνιοποιήσιμων πινάκων:

Θεώρημα (Διακεκριμένες Ιδιοτιμές): Εάν ένας πίνακας $A \in F^{n \times n}$ έχει n διακεκριμένες (διαφορετικές μεταξύ τους) ιδιοτιμές στο σώμα F , τότε ο πίνακας είναι **πάντα** διαγωνιοποιήσιμος. *Επεξήγηση*: Αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα, και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς, εξασφαλίζεται η ύπαρξη βάσης από n ιδιοδιανύσματα.

Θεώρημα (Γενικό Κριτήριο): Ένας πίνακας A μεγέθους $n \times n$ είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών του ισούται με τη διάσταση n του πίνακα.

2.3 Διαδικασία Προσδιορισμού των Πινάκων P και D

Για να διαγωνιοποιήσουμε έναν πίνακα A , ακολουθούμε μια τυποποιημένη αλγοριθμική πορεία:

Βήμα 1: Εύρεση των Ιδιοτιμών Επιλύουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ για να προσδιορίσουμε όλες τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ και τις αλγεβρικές τους πολλαπλότητες.

Βήμα 2: Εύρεση των Ιδιοδιανυσμάτων (Βάση Ιδιοχώρων) Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , επιλύουμε το ομογενές σύστημα:

$$(A - \lambda_i I)x = 0$$

Βρίσκουμε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο V_{λ_i} . Εάν ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος, το συνολικό πλήθος των διανυσμάτων βάσης από όλους τους ιδιοχώρους πρέπει να είναι ακριβώς n .

Βήμα 3: Κατασκευή του Πίνακα Μετασχηματισμού P Ορίζουμε ως P τον πίνακα που έχει ως στήλες τα n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα:

$$P = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$$

Προσοχή: Ο πίνακας P είναι εξ ορισμού αντιστρέψιμος, καθώς οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Βήμα 4: Κατασκευή του Διαγώνιου Πίνακα D Ο διαγώνιος πίνακας D σχηματίζεται τοποθετώντας τις ιδιοτιμές στην κύρια διαγώνιο. Η σειρά των ιδιοτιμών στον D πρέπει να αντιστοιχεί ακριβώς στη σειρά με την οποία τοποθετήθηκαν τα ιδιοδιανύσματα στον P :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Βήμα 5: Επαλήθευση Η ορθότητα της διαδικασίας επιβεβαιώνεται από τη σχέση:

$$AP = PD \quad \text{ή} \quad D = P^{-1}AP$$

2.4 Εφαρμογές της Διαγωνιοποίησης Πινάκων

Η διαγωνιοποίηση δεν αποτελεί απλώς μια θεωρητική άσκηση, αλλά ένα ισχυρό εργαλείο που επιτρέπει την απλοποίηση πολύπλοκων μαθηματικών προβλημάτων. Οι κυριότερες εφαρμογές της εντοπίζονται στον υπολογισμό δυνάμεων, την επίλυση εξισώσεων διαφορών και το σημαντικότερο, στην επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

2.4.1 Υπολογισμός Δυνάμεων Πινάκων (A^k) Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, εάν ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = PDP^{-1}$. Η ύψωση του πίνακα A σε μια δύναμη $k \in \mathbb{N}$ ανάγεται στην ύψωση του διαγώνιου πίνακα D :

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

Δεδομένου ότι ο D είναι διαγώνιος με στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, η δύναμη D^k υπολογίζεται άμεσα:

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2^k & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Αυτή η ιδιότητα μειώνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα από $k - 1$ πολλαπλασιασμούς πινάκων σε δύο μόνο πολλαπλασιασμούς (του P με τον D^k και το αποτέλεσμα με τον P^{-1}).

2.4.2 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων Μία από τις κρισιμότερες εφαρμογές της διαγωνιοποίησης στη Φυσική και τη Μηχανική είναι η επίλυση συστημάτων της μορφής:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

όπου $x(t)$ είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων. Εάν ο πίνακας A διαγωνιοποιείται ($A = PDP^{-1}$), το σύστημα μπορεί να "αποσυζευχθεί" (uncoupled) μέσω της αλλαγής μεταβλητής $x = Py$. Το νέο σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\dot{y}(t) = Dy(t)$$

Επειδή ο D είναι διαγώνιος, οι εξισώσεις γίνονται ανεξάρτητες μεταξύ τους ($\dot{y}_i = \lambda_i y_i$) και επιλύονται άμεσα ως $y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$. Η τελική λύση προκύπτει επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές:

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

2.4.3 Εξισώσεις Διαφορών και Μαρκοβιανές Αλυσίδες Στη Θεωρία Πιθανοτήτων, η εξέλιξη ενός συστήματος περιγράφεται συχνά από τη σχέση $x_{k+1} = Ax_k$. Η κατάσταση του συστήματος μετά από k βήματα δίνεται από τη σχέση $x_k = A^k x_0$. Η διαγωνιοποίηση επιτρέπει τη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς του συστήματος ($k \rightarrow \infty$) αναλύοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα μετάβασης A .

2.4.4 Συμπληρωματικές Παρατηρήσεις στις Εφαρμογές

Κατά την εφαρμογή της διαγωνιοποίησης στα ανωτέρω πεδία, κρίνεται σκόπιμο να επισημανθούν ορισμένα σημεία κλειδιά που συνδέουν την αλγεβρική θεωρία με την πρακτική ανάλυση:

1. **Θεμελιώδης Πίνακας Λύσεων στις ΣΔΕ:** Στην επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, η οντότητα $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$ ονομάζεται **θεμελιώδης πίνακας λύσεων**. Η διαγωνιοποίηση είναι αυτή που μας επιτρέπει να ορίσουμε το εκθετικό ενός πίνακα e^{At} με απλό τρόπο, υπολογίζοντας απλώς τα εκθετικά $e^{\lambda_i t}$ των ιδιοτιμών πάνω στη διαγώνιο του D .
2. **Ευστάθεια και Κατάσταση Ισορροπίας:** Στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες και τα δυναμικά συστήματα, οι ιδιοτιμές καθορίζουν τη σύγκλιση. Εάν η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα μετάβασης είναι $\lambda = 1$ και όλες οι υπόλοιπες έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη της μονάδας ($|\lambda_i| < 1$), τότε το σύστημα τείνει σε μια **σταθερή κατάσταση (steady state)**, η οποία ταυτίζεται με το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.
3. **Αποσύζευξη Συστημάτων:** Η διαδικασία $x = Py$ ουσιαστικά μεταφέρει το πρόβλημα από το αρχικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα νέο σύστημα, όπου οι

μεταβλητές δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Αυτή η "αποσύζευξη" είναι που καθιστά τα σύνθετα προβλήματα επιλύσιμα.

2.5 Διαγωνιοποίηση Ειδικών Κατηγοριών Πινάκων

Ορισμένες κατηγορίες πινάκων που εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές (ειδικά στη Στατιστική και τη Φυσική) παρουσιάζουν ιδιαίτερες ιδιότητες ως προς τη διαγωνιοποίησή τους.

2.5.1 Πραγματικοί Συμμετρικοί Πίνακες Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται συμμετρικός εάν $A = A^T$. Σύμφωνα με το **Φασματικό Θεώρημα**:

- Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας είναι **πάντα** διαγωνιοποιήσιμος.
- Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα είναι πάντα πραγματικοί αριθμοί.
- Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Στην περίπτωση αυτή, η διαγωνιοποίηση ονομάζεται **ορθογώνια διαγωνιοποίηση**, καθώς ο πίνακας P είναι ορθογώνιος ($P^{-1} = P^T$), γεγονός που απλοποιεί περαιτέρω τους υπολογισμούς:

$$D = P^T A P$$

2.5.2 Ερμητιανοί Πίνακες Στο σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, ο αντίστοιχος του συμμετρικού πίνακα είναι ο **Ερμητιανός (Hermitian)**, για τον οποίο ισχύει $A = A^*$ (όπου A^* ο συζυγής ανάστροφος). Οι Ερμητιανοί πίνακες είναι επίσης πάντα διαγωνιοποιήσιμοι με πραγματικές ιδιοτιμές, ιδιότητα που τους καθιστά θεμελιώδεις στην Κβαντομηχανική.

2.5.3 Ορθογώνιοι Πίνακες και Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση

Μια ιδιαίτερη και εξαιρετικά χρήσιμη περίπτωση διαγωνιοποίησης προκύπτει όταν ο πίνακας μετασχηματισμού P είναι **ορθογώνιος**.

Ορισμός: Ορθογώνιος Πίνακας Ένας τετράγωνος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται ορθογώνιος εάν οι στήλες του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτό ισοδυναμεί με τη σχέση:

$$P^T P = I \Rightarrow P^{-1} = P^T$$

Οι ορθογώνιοι πίνακες διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο, τα μήκη των διανυσμάτων και τις γωνίες μεταξύ τους, ιδιότητα που τους καθιστά ιδανικούς για μετασχηματισμούς συντεταγμένων χωρίς παραμόρφωση του χώρου.

Ορισμός: Ορθογώνια Διαγωνιοποίηση Ένας πίνακας A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος εάν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$D = P^T A P$$

Σύμφωνα με το **Φασματικό Θεώρημα**, ένας πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι **συμμετρικός** ($A = A^T$).

Σημασία στην Πολυμεταβλητή Στατιστική: Η ορθογώνια διαγωνιοποίηση είναι η μαθηματική βάση της **Ανάλυσης Κύριων Συνιστωσών (Principal Component Analysis - PCA)**. Στην PCA, ο πίνακας συνδιακύμανσης των δεδομένων (ο οποίος είναι πάντα συμμετρικός) διαγωνιοποιείται ορθογώνια. Οι ιδιοτιμές υποδεικνύουν τη διασπορά των δεδομένων σε κάθε άξονα, ενώ τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα ορίζουν τις νέες κατευθύνσεις (κύριες συνιστώσες) στις οποίες η πληροφορία είναι ασυσχέτιστη.

2.6 Επίλυση της Εξίσωσης $X^k = A$

Μια προχωρημένη εφαρμογή της διαγωνιοποίησης είναι ο προσδιορισμός της "ρίζας" ενός πίνακα.

Εάν ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος ($A = P D P^{-1}$), τότε μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα X τέτοιο ώστε $X^k = A$ ως εξής:

1. Διαγωνιοποιούμε τον πίνακα A .
2. Υπολογίζουμε τον πίνακα $D^{1/k}$, ο οποίος είναι διαγώνιος με στοιχεία τις k -οστές ρίζες των ιδιοτιμών του A :

$$D^{1/k} = \text{diag}(\sqrt[k]{\lambda_1}, \sqrt[k]{\lambda_2}, \dots, \sqrt[k]{\lambda_n})$$

3. Ο ζητούμενος πίνακας προκύπτει από τη σχέση:

$$X = PD^{1/k}P^{-1}$$

2.7 Παραδείγματα και Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται αναλυτικά λυμένες ασκήσεις που αφορούν τη διαγωνιοποίηση πινάκων και τη χρήση αυτής για τον υπολογισμό δυνάμεων.

Άσκηση 2.1: Έλεγχος Διαγωνιοποιησιμότητας και Εύρεση Πινάκων P και D . Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Εξετάστε αν ο πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Λύση:

1. **Εύρεση Ιδιοτιμών:** $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ (διπλή ρίζα). Η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι $m=2$.
2. **Εύρεση Ιδιοδιανυσμάτων:** Λύνουμε το σύστημα $(A - 3I)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Από την πρώτη γραμμή έχουμε $-2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Το x_1 παραμένει ελεύθερη μεταβλητή.
3. **Συμπέρασμα:** Ο ιδιόχωρος V_3 έχει μόνο ένα γραμμικώς ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα, το $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι $g = 1$. Επειδή $g < m$, ο πίνακας δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 2.2: Υπολογισμός της δύναμης A^k Έστω ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας B^{10} .

Λύση:

1. **Ιδιοτιμές:** Ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός, άρα οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Επειδή είναι διακεκριμένες, ο πίνακας διαγωνιοποιείται.
2. **Ιδιοδιανύσματα:**
 - ο Για $\lambda_1 = 1$: Βρίσκουμε το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ο Για $\lambda_2 = -1$: Βρίσκουμε το $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Σχηματισμός Πινάκων:** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. **Υπολογισμός B^{10} :**

$$B^{10} = PD^{10}P^{-1}$$

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \text{ Συνεπώς: } B^{10} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Εφαρμογές σε Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ)

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η αξιοποίηση της θεωρίας των ιδιοτιμών και της διαγωνιοποίησης για την επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η ικανότητα μετασχηματισμού ενός συστήματος συζευγμένων εξισώσεων σε ένα ισοδύναμο σύστημα ανεξάρτητων εξισώσεων αποτελεί τη βασική μέθοδο ανάλυσης δυναμικών συστημάτων.

3.1 Ομογενή Γραμμικά Συστήματα με Σταθερούς Συντελεστές

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

όπου:

- $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων συναρτήσεων.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος.
- $\dot{x}(t)$ είναι το διάνυσμα των παραγώγων ως προς τον χρόνο t .

3.2 Επίλυση μέσω Διαγωνιοποίησης

Εάν ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P (πίνακας ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε $A = PDP^{-1}$. Το σύστημα μπορεί να επιλυθεί ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. **Αλλαγή Μεταβλητής:** Εισάγουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών $y(t)$ τέτοιο ώστε $x(t) = Py(t)$.
2. **Αποσύζευξη (Uncoupling):** Αντικαθιστώντας στο αρχικό σύστημα, προκύπτει:

$$P\dot{y}(t) = APy(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = P^{-1}APy(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = Dy(t)$$

3. **Επίλυση Ανεξάρτητων Εξισώσεων:** Το νέο σύστημα είναι διαγώνιο:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Η λύση για κάθε συνιστώσα είναι $y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$.

4. **Επιστροφή στις Αρχικές Μεταβλητές:** Η γενική λύση του αρχικού συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = Py(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

όπου v_i είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

3.3 Πρακτικό Παράδειγμα Επίλυσης Συστήματος 2×2

Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Το σύστημα γράφεται σε μορφή πίνακα $\dot{x} = Ax$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Βήμα 1: Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα Όπως υπολογίστηκε σε προηγούμενη ενότητα, οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Γενική Λύση Η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τον γραμμικό συνδυασμό:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Αναλυτικές Εκφράσεις

$$x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

$$x_2(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}$$

3.4 Ευστάθεια Συστημάτων και Ιδιοτιμές

Η συμπεριφορά των λύσεων ενός συστήματος $\dot{x} = Ax$ καθώς ο χρόνος $t \rightarrow \infty$ εξαρτάται άμεσα από το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα A . Η ανάλυση αυτή είναι κρίσιμη, καθώς καθορίζει αν ένα σύστημα τείνει σε ισορροπία ή αποκλίνει.

3.4.1 Κατηγορίες Ευστάθειας

1. **Ασυμπτωτική Ευστάθεια:** Εάν όλες οι ιδιοτιμές έχουν **αρνητικό πραγματικό μέρος** ($Re(\lambda_i) < 0$), τότε όλες οι λύσεις $e^{\lambda_i t}$ φθίνουν εκθετικά και τείνουν στο μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση ισορροπίας ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.
2. **Αστάθεια:** Εάν έστω και μία ιδιοτιμή έχει **θετικό πραγματικό μέρος** ($Re(\lambda_i) > 0$), τότε η αντίστοιχη λύση $e^{\lambda_i t}$ αυξάνεται εκθετικά. Το σύστημα είναι ασταθές και απομακρύνεται από την ισορροπία.
3. **Οριακή Ευστάθεια:** Εάν οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές ($Re(\lambda_i) = 0$), οι λύσεις δεν αποκλίνουν αλλά ούτε συγκλίνουν στο μηδέν. Το σύστημα εκτελεί αμείωτες ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας.

3.5 Συστήματα με Μιγαδικές Ιδιοτιμές

Όταν ο πίνακας A έχει μιγαδικές ιδιοτιμές της μορφής $\lambda = \alpha \pm \beta i$, η λύση του συστήματος περιλαμβάνει τριγωνομετρικούς όρους (ημίτονα και συνημίτονα), υποδηλώνοντας ταλαντωτική συμπεριφορά:

- Ο πραγματικός όρος α (το $Re(\lambda)$) λειτουργεί ως **συντελεστής απόσβεσης**. Αν $\alpha < 0$, οι ταλαντώσεις σβήνουν, ενώ αν $\alpha > 0$, οι ταλαντώσεις ενισχύονται.
- Ο φανταστικός όρος β καθορίζει τη **συχνότητα** της ταλάντωσης.

Αυτή η μορφή λύσης είναι θεμελιώδης στη μελέτη φυσικών φαινομένων, όπως οι μηχανικές ταλαντώσεις και τα ηλεκτρικά κυκλώματα, όπου η διαγωνιοποίηση (έστω και στο μιγαδικό πεδίο) επιτρέπει την πλήρη περιγραφή της κίνησης.

3.5.1 Παράδειγμα Συστήματος με Μιγαδικές Ιδιοτιμές

Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει μια απλή ταλάντωση:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Εύρεση Ιδιοτιμών: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

2. Ανάλυση Ευστάθειας: Παρατηρούμε ότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι $\alpha = -1$. Επειδή $\alpha < 0$, το σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**. Αυτό σημαίνει ότι οι ταλαντώσεις του συστήματος θα εξασθενούν με την πάροδο του χρόνου και το σύστημα θα τείνει στο μηδέν (σημείο ισορροπίας).

3. Μορφή της Λύσης: Λόγω των μιγαδικών ιδιοτιμών, η λύση περιέχει τους όρους $e^{-t}\cos(t)$ και $e^{-t}\sin(t)$. Η παρουσία του e^{-t} επιβεβαιώνει την απόσβεση της ταλάντωσης.

3.6 Μη Ομογενή Γραμμικά Συστήματα

Στην περίπτωση που το σύστημα περιλαμβάνει έναν μη μηδενικό όρο $g(t)$, η γενική λύση αποτελείται από το άθροισμα της λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $x_h(t)$ και μιας ειδικής λύσης του μη ομογενούς $x_p(t)$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Για την εύρεση της ειδικής λύσης $x_p(t)$, χρησιμοποιούνται συνήθως δυο κυρίες μεθοδολογίες:

- Μέθοδος των Προσδιοριστέων Συντελεστών: Εφαρμόζεται όταν ο μη ομογενής όρος $g(t)$ αποτελείται από στοιχειώδεις συναρτήσεις (πολυνύμα, εκθετικά, ημίτονα/συνημίτονα).

- Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων: Αποτελεί μια γενικότερη προσέγγιση που βασίζεται στον θεμελιώδη πίνακα $\Phi(t)$ (όπου $\Phi'(t) = A\Phi(t)$) και δίνει την ειδική λύση μέσω του ολοκληρώματος:

$$x_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) g(t) dt$$

3.7 Μετασχηματισμός Εξισώσεων Ανώτερης Τάξης σε Συστήματα

Μια θεμελιώδης εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων είναι η δυνατότητα ανάγωγης μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n -οστής τάξης:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

σε εάν ισοδύναμο σύστημα n εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας ένα διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ ως εξής:

$$x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

Με αυτόν τον μετασχηματισμό, οι ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος (συνοδός πίνακας) ταυτίζονται με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αρχικής διαφορικής εξίσωσης.

3.8 Πολλαπλότητα Ιδιοτιμών και Γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα

Στις περιπτώσεις όπου ο πίνακας A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος (όταν η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής είναι μικρότερη από την αλγεβρική), η εύρεση των n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων απαιτεί τη χρήση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων.

- Ιδιοδιανύσματα: Αν μια ιδιοτιμή λ έχει πολλαπλότητα k , αναζητούμε λύσεις της μορφής $v e^{\lambda t}, (tv + u) e^{\lambda t}, \dots$, όπου τα διανύσματα u, v προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $(A - \lambda I)^k u = \vec{0}$.
- Κανονική Μορφή Jordan: Η διαδικασία αυτή συνδέεται με την κανονική μορφή Jordan, η οποία επιτρέπει τη μελέτη πινάκων που δεν επιδέχονται πλήρη διαγωνιοποίηση.

3.9 Λυμένα Παραδείγματα Συστημάτων ΣΔΕ

Παράδειγμα 1: Σύστημα με διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Λύση:

1. Εύρεση Ιδιοτιμών: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Οι ρίζες είναι

$$\lambda_1 = 3 \text{ και } \lambda_2 = -1.$$

2. Εύρεση Ιδιοδιανυσμάτων:

- Για $\lambda_1 = 3$: Προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- Για $\lambda_2 = -1$: Προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. Γενική Λύση:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Παράδειγμα 2: Σύστημα με μιγαδικές ιδιοτιμές

(Ταλαντωτική συμπεριφορά) Να λυθεί το σύστημα:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Λύση:

1. Ιδιοτιμές: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$

Επιλύουμε το σύστημα :

$$\begin{bmatrix} 1 - (-1 + 2i) & -4 \\ 1 & -1 - (-1 + 2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε : $u_1 = 2iu_2$. επιλέγοντας $u_2 = 1$, παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Αναπτύσσοντας τη λύση $e^{-t} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ και διαχωρίζοντας σε πραγματικό και φανταστικό μέρος έχουμε :

2. Μορφή Λύσης: Λόγω των μιγαδικών ιδιοτιμών, η λύση περιλαμβάνει τριγωνομετρικούς ορούς:

$$x(t) = e^{-t} \left[c_1 \begin{bmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix} \right]$$

Σχόλιο: Το αρνητικό πραγματικό μέρος (-1) υποδεικνύει ότι το σύστημα είναι ευσταθές και οι λύσεις συγκλίνουν στο μηδέν (spiral sink).

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός Εξίσωσης 2ης τάξης σε Σύστημα

Έστω η διαφορική εξίσωση $y'' - y' - 6y = 0$

Λύση: Θέτουμε $x_1 = y$ και $x_2 = y'$. Το σύστημα είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι λύσεις της $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ ($\lambda = 3, -2$), οι οποίες ταυτίζονται με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αρχικής ΣΔΕ.

Η σημασία των ιδιοτιμών στην ευστάθεια και τη δυναμική των συστημάτων ΣΔΕ επεκτείνεται και σε στοχαστικά συστήματα, όπως οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες, οι οποίες εξετάζονται στο Κεφάλαιο 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογές στη Θεωρία Πιθανοτήτων – Μαρκοβιανές Αλυσίδες

4.1 Εισαγωγή και Ορισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό, η μελέτη των ιδιοτιμών μεταφέρεται από το πεδίο των δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου (ΣΔΕ) στο πεδίο των στοχαστικών διαδικασιών διακριτού χρόνου. Η βασική δομή μελέτης εδώ είναι η Μαρκοβιανή Αλυσίδα (Μ.Α.), μια ανέλιξη όπου η εξέλιξη του συστήματος στο επόμενο χρονικό βήμα $(n + 1)$ εξαρτάται αποκλειστικά από την παρούσα κατάσταση και όχι από το ιστορικό των προηγούμενων μεταβάσεων (ιδιότητα Markov).

Έστω ένα σύστημα με ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j συμβολίζεται ως p_{ij} . Οι πιθανότητες αυτές οργανώνονται στον πίνακα μετάβασης P :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P είναι ένας στοχαστικός πίνακας, καθώς όλα τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με τη μονάδα ($\sum_j p_{ij} = 1$).

4.2 Η Σημασία των Ιδιοτιμών στη Μακροπρόθεσμη Συμπεριφορά

Η σύνδεση των Μαρκοβιανών Αλυσίδων με τη θεωρία των ιδιοτιμών γίνεται εμφανής όταν εξετάζουμε την κατάσταση του συστήματος μετά από k βήματα. Αν $v^{(0)}$ είναι το διάνυσμα της αρχικής κατανομής πιθανοτήτων, τότε η κατανομή μετά από k μεταβάσεις δίνεται από τη σχέση:

$$v^{(k)} = v^{(0)} P^k$$

Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2, η δύναμη ενός πίνακα $P^k, k \in \mathbb{N}$ εξαρτάται άμεσα από τις ιδιοτιμές του. Στην περίπτωση των στοχαστικών πινάκων, ισχύουν τα εξής θεμελιώδη:

- Η κυρίαρχη ιδιοτιμή: Κάθε στοχαστικός πίνακας έχει πάντα μια τουλάχιστον ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.
- Φασματική ακτίνα: Λόγω της στοχαστικής φύσης του πίνακα, όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές ικανοποιούν τη σχέση $|\lambda_i| \leq 1$.

4.3 Στάσιμη Κατανομή και Ιδιοδιανύσματα

Ένα από τα κεντρικά ζητούμενα στη Θεωρία Πιθανοτήτων είναι η εύρεση της στάσιμης κατανομής (steady state). Μια κατανομή π ονομάζεται **στάσιμη** αν:

$$\pi P = \pi$$

Από αλγεβρική σκοπιά, η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι η στάσιμη κατανομή π είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Για ανάγωγες (όταν υπάρχει τρόπος να μεταβούμε από οποιαδήποτε κατάσταση i σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση j , σε κάποιο αριθμό βημάτων) και απεριοδικές αλυσίδες (όταν δεν “κλειδώνουν” σε κύκλους), η ιδιοτιμή αυτή είναι μοναδική και το σύστημα συγκλίνει πάντα σε αυτή την κατάσταση ισορροπίας, ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση.

4.4 Ταχύτητα Σύγκλισης και Φασματικό Χάσμα

Η ταχύτητα με την οποία μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα προσεγγίζει τη στάσιμη κατάσταση καθορίζεται από τη δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή (κατά απόλυτη τιμή), λ_2 . Η διαφορά $1 - |\lambda_2|$ ονομάζεται φασματικό χάσμα (spectral gap). Όσο μεγαλύτερο είναι αυτό το χάσμα, τόσο ταχύτερα εξαφανίζονται οι επιδράσεις των αρχικών συνθηκών και το σύστημα σταθεροποιείται.

4.5 Αριθμητικό Παράδειγμα: Μαρκοβιανή Αλυσίδα δύο Καταστάσεων

Εξετάζουμε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα με δύο καταστάσεις και πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

1. Εύρεση Ιδιοτιμών:

Λύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det(P - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1/2 \\ 3/4 & \frac{1}{4} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (3/4)\lambda - 1/4 = 0$$

Οι ρίζες είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1/4$. Επιβεβαιώνεται ότι η κυρίαρχη ιδιοτιμή είναι η μονάδα.

2. Εύρεση Στάσιμης Κατανομής:

Από τη σχέση $\pi P = \pi$ και τη συνθήκη $\pi_1 + \pi_2 = 1$, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} (1/2)\pi_1 + (3/4)\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_1 = 0.6, \pi_2 = 0.4$$

Η στάσιμη κατανομή είναι $\pi = [0.6, 0.4]$, που σημαίνει ότι μακροπρόθεσμα το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση 1 στο 60% των περιπτώσεων.

4.6 Απορροφητικές Αλυσίδες και ο Θεμελιώδης Πίνακας

Μια αλυσίδα ονομάζεται απορροφητική αν διαθέτει τουλάχιστον μία κατάσταση που «παγιδεύει» το σύστημα ($p_{ii} = 1$) και από κάθε άλλη κατάσταση υπάρχει πιθανότητα να φτάσει τελικά στην απορροφητική κατάσταση. Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας P μπορεί να γραφεί στην κανονική μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

Εδώ, οι ιδιοτιμές του υποπίνακα Q (που αφορά τις μεταβατικές καταστάσεις) είναι όλες αυστηρά μικρότερες της μονάδας. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε τον Θεμελιώδη

Πίνακα $N = (I - Q)^{-1}$. Ο πίνακας αυτός είναι εξαιρετικά χρήσιμος, καθώς τα στοιχεία του υποδεικνύουν τον μέσο αριθμό βημάτων που θα περάσει το σύστημα σε κάθε κατάσταση πριν την τελική του απορρόφηση. Η αντιστρεψιμότητα του $(I - Q)$ είναι εγγυημένη από το γεγονός ότι το 1 δεν αποτελεί ιδιοτιμή του Q .

4.7 Ο Αλγόριθμος PageRank της Google

Μία από τις πιο εμβληματικές και σύγχρονες εφαρμογές των Μαρκοβιανών Αλυσίδων εντοπίζεται στην αξιολόγηση και κατάταξη ιστοσελίδων μέσω του αλγορίθμου PageRank. Στο μοντέλο αυτό, το διαδίκτυο προσεγγίζεται ως ένα τεράστιο κατευθυνόμενο γράφημα, όπου οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν τις ιστοσελίδες και οι ακμές τους υπερσυνδέσμους (hyperlinks) που τις συνδέουν. Η περιήγηση ενός χρήστη από σελίδα σε σελίδα αναπαριστάται ως μια τυχαία διαδρομή (random walk) στα πλαίσια μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας.

Αν υποθέσουμε ότι το δίκτυο αποτελείται από N σελίδες, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν τετραγωνικό πίνακα μετάβασης P διάστασης $N \times N$, όπου το κάθε στοιχείο p_{ij} εκφράζει την πιθανότητα μετάβασης από τη σελίδα i στη σελίδα j . Το ζητούμενο του αλγορίθμου είναι η εύρεση ενός μέτρου «σπουδαιότητας» για την κάθε ιστοσελίδα. Μαθηματικά, η μακροπρόθεσμη αυτή σπουδαιότητα ταυτίζεται με τη στάσιμη κατανομή π του συστήματος. Όπως αναλύθηκε προηγουμένως, η στάσιμη κατανομή ικανοποιεί τη θεμελιώδη εξίσωση $\pi P = \pi$. Επομένως, το διάνυσμα κατάταξης (PageRank vector) αποτελεί ουσιαστικά το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του στοχαστικού πίνακα P το οποίο αντιστοιχεί στην κυρίαρχη ιδιοτιμή $\lambda=1$.

Για να αντιμετωπιστούν πρακτικά προβλήματα της δομής του διαδικτύου —όπως σελίδες χωρίς εξωτερικούς συνδέσμους (dangling nodes) ή απομονωμένα υποδίκτυα— οι δημιουργοί του αλγορίθμου τροποποίησαν τον αρχικό πίνακα εισάγοντας τον συντελεστή απόσβεσης (damping factor) d , ο οποίος συνήθως λαμβάνει την τιμή 0.85. Η τροποποίηση αυτή οδηγεί στον λεγόμενο «Πίνακα της Google» (Google Matrix), ο οποίος εξασφαλίζει ότι η παραγόμενη Μαρκοβιανή Αλυσίδα είναι ανάγωγη και απεριοδική. Σύμφωνα με το θεώρημα Perron-Frobenius, αυτό εγγυάται την ύπαρξη ενός μοναδικού, αυστηρά θετικού ιδιοδιανύσματος για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$, αποδεικνύοντας περίτρανα πώς η επίλυση ενός

αλγεβρικού προβλήματος ιδιοτιμών μπορεί να οργανώσει την πληροφορία σε παγκόσμια κλίμακα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Εφαρμογές στην Πολυμεταβλητή Στατιστική

Η Πολυμεταβλητή Στατιστική Ανάλυση πραγματεύεται τη σύγχρονη μελέτη πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες συχνά παρουσιάζουν ισχυρές γραμμικές εξαρτήσεις μεταξύ τους. Η διαχείριση, η ερμηνεία και η οπτικοποίηση δεδομένων σε χώρους υψηλών διαστάσεων εισάγει σημαντικές υπολογιστικές δυσκολίες. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, η Γραμμική Άλγεβρα προσφέρει ισχυρά εργαλεία μέσω της φασματικής ανάλυσης πινάκων. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται δύο θεμελιώδεις τεχνικές μείωσης της διαστατικότητας που βασίζονται στο πρόβλημα ιδιοτιμών: η Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA) και η Γραμμική Διαχωριστική Ανάλυση (LDA).

5.1 Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (Principal Component Analysis - PCA)

Η Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA) αποτελεί μία από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους χωρίς επίβλεψη (unsupervised learning) για τη μείωση της διαστατικότητας ενός συνόλου δεδομένων, διατηρώντας παράλληλα το μέγιστο δυνατό ποσοστό της αρχικής πληροφορίας (διασποράς). Η βασική ιδέα συνίσταται στον μετασχηματισμό των αρχικών, πιθανώς συσχετισμένων, p μεταβλητών σε ένα νέο σύνολο p ασυσχέτιστων (ορθογώνιων) μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται Κύριες Συνιστώσες (Principal Components - PCs) και είναι διατεταγμένες με βάση τη φθίνουσα ικανότητά τους να εξηγούν τη συνολική μεταβλητότητα.

5.1.1 Στατιστικό Υπόβαθρο και ο Πίνακας Συνδιακύμανσης

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_p]^T \in \mathbb{R}^p$. Ορίζουμε ως Σ τον πληθυσμιακό πίνακα διασποράς-συνδιακύμανσης (covariance matrix) του διανύσματος $\mathbf{X}$:

$$\Sigma = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T]$$

Ο πίνακας $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ κατέχει δύο θεμελιώδεις ιδιότητες από τη Γραμμική Άλγεβρα:

1. Είναι **συμμετρικός** ($\Sigma^T = \Sigma$), καθώς η συνδιακύμανση των μεταβλητών X_i και X_j είναι ίση με τη συνδιακύμανση των X_j και X_i ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

2. Είναι **μη αρνητικά ορισμένος** (semi-positive definite), πράγμα που σημαίνει ότι για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, η διασπορά του γραμμικού συνδυασμού $\mathbf{a}^T \mathbf{X}$ είναι μη αρνητική: $\text{Var}(\mathbf{a}^T \mathbf{X}) = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} \geq 0$.

Σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα, κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Συνεπώς, ο Σ έχει πραγματικές ιδιοτιμές, οι οποίες μπορούν να διαταχθούν σε φθίνουσα σειρά:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$$

και ένα πλήρες σύστημα ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p\}$, τέτοια ώστε:

$$\Sigma \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

5.1.2 Μαθηματική Παραγωγή των Κύριων Συνιστωσών

Αναζητούμε έναν γραμμικό συνδυασμό των αρχικών μεταβλητών της μορφής $Y_1 = \mathbf{a}_1^T \mathbf{X}$, ο οποίος να παρουσιάζει τη μέγιστη δυνατή διασπορά. Η διασπορά του Y_1 ισούται με:

$$\text{Var}(Y_1) = \mathbf{a}_1^T \Sigma \mathbf{a}_1$$

Για να έχει το πρόβλημα μεγιστοποίησης μοναδική λύση, επιβάλλουμε τον περιορισμό κανονικοποίησης ότι το διάνυσμα των συντελεστών έχει μοναδιαίο μήκος: $\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 = 1$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$L(\mathbf{a}_1, \lambda) = \mathbf{a}_1^T \Sigma \mathbf{a}_1 - \lambda(\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 - 1)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το διάνυσμα $\mathbf{a}_1$ και εξισώνοντας με το μηδενικό διάνυσμα, προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}_1} = 2\Sigma \mathbf{a}_1 - 2\lambda \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \Sigma \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_1$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύει ότι το διάνυσμα $\mathbf{a}_1$ πρέπει να είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα συνδιακύμανσης Σ . Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathbf{a}_1^T$, λαμβάνουμε:

$$\mathbf{a}_1^T \Sigma \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \Rightarrow \text{Var}(Y_1) = \lambda$$

Εφόσον επιθυμούμε τη μεγιστοποίηση της διασποράς, επιλέγουμε τη μέγιστη ιδιοτιμή λ_1 . Συνεπώς, η πρώτη Κύρια Συνιστώσα είναι η $Y_1 = \mathbf{e}_1^T \mathbf{X}$, όπου $\mathbf{e}_1$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην κυρίαρχη ιδιοτιμή λ_1 , και ισχύει $\text{Var}(Y_1) = \lambda_1$.

Με επαγωγική διαδικασία, η k -οστή Κύρια Συνιστώσα ορίζεται ως $Y_k = \mathbf{e}_k^T \mathbf{X}$, όπου $\mathbf{e}_k$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k , υπό τον επιπλέον περιορισμό ότι είναι ασυσχέτιστη με όλες τις προηγούμενες συνιστώσες ($\text{Cov}(Y_k, Y_j) = 0$ για $j < k$).

5.1.3 Κριτήρια Επιλογής Πλήθους Συνιστωσών

Ένα κρίσιμο ζήτημα στην PCA είναι ο προσδιορισμός του αριθμού m ($m < p$) των κύριων συνιστωσών που πρέπει να διατηρηθούν. Η συνολική μεταβλητότητα του συστήματος ισούται με το ίχνος (trace) του πίνακα Σ , το οποίο βάσει των ιδιοτήτων των πινάκων ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του:

$$\text{Total Variance} = \text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^p \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

Το ποσοστό της συνολικής διασποράς που εξηγείται από τις πρώτες m συνιστώσες δίνεται από τον λόγο:

$$\text{Proportion of Variance} = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

Οι κυριότεροι κανόνες επιλογής του αριθμού των κύριων συνιστωσών είναι:

1. **Κριτήριο Kaiser:** Διατηρούνται μόνο οι συνιστώσες που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_i > 1$ (όταν η ανάλυση γίνεται στον πίνακα συσχέτισης).
2. **Ποσοστό Ερμηνευόμενης Διασποράς:** Επιλέγεται ένας αριθμός συνιστωσών ώστε να καλύπτεται ένα ικανοποιητικό ποσοστό της συνολικής πληροφορίας (συνήθως 70% – 90%).
3. **Διάγραμμα Λίθου (Scree Plot):** Γραφική παράσταση των ιδιοτιμών σε φθίνουσα σειρά, όπου αναζητείται το σημείο καμψής μετά το οποίο οι ιδιοτιμές παρουσιάζουν μικρή και σταθερή μείωση.

5.1.4 Αριθμητικό Παράδειγμα Εφαρμογής της PCA

Έστω ότι διαθέτουμε έναν δισδιάστατο πληθυσμό μεταβλητών ($p = 2$) με πίνακα διασποράς-συνδιακύμανσης:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Υπολογισμός των Ιδιοτιμών

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det(\Sigma - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2$$

Η συνολική διασπορά του συστήματος είναι $\text{tr}(\Sigma) = 3 + 3 = 6$. Η πρώτη Κύρια Συνιστώσα εξηγεί το $\frac{4}{6} \approx 66.67\%$ της συνολικής διασποράς, ενώ η δεύτερη το $\frac{2}{6} \approx 33.33\%$.

Βήμα 2: Εύρεση των Ιδιοδιανυσμάτων

Για την κυρίαρχη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$, επιλύουμε το ομογενές σύστημα $(\Sigma - 4I)\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -e_{11} + e_{12} = 0 \Rightarrow e_{11} = e_{12}$$

Απαιτώντας το ιδιοδιάνυσμα να είναι μοναδιαίο ($e_{11}^2 + e_{12}^2 = 1$), λαμβάνουμε:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Για τη δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$, επιλύουμε το σύστημα $(\Sigma - 2I)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_{21} + e_{22} = 0 \Rightarrow e_{21} = -e_{22}$$

Μετά την κανονικοποίηση, το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα είναι:

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Διαμόρφωση των Κύριων Συνιστωσών

Οι δύο Κύριες Συνιστώσες εκφράζονται ως:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \quad \text{και} \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_2$$

Γεωμετρικά, οι εξισώσεις αυτές αντιπροσωπεύουν μια στροφή του αρχικού συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία 45° , κατευθύνοντας τον άξονα Y_1 στη διεύθυνση της μέγιστης διασποράς των δεδομένων.

5.2 Γραμμική Διαχωριστική Ανάλυση (Linear Discriminant Analysis - LDA)

Η Γραμμική Διαχωριστική Ανάλυση (Γ.Δ.Α.) αποτελεί μια θεμελιώδη πολυμεταβλητή στατιστική μέθοδο με διττό αντικείμενο: αφενός την ερμηνεία και ανάλυση των διαφορών ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες προκαθορισμένες ομάδες παρατηρήσεων και αφετέρου την ανάπτυξη κανόνων για τη βέλτιστη ταξινόμηση νέων δεδομένων στις ομάδες αυτές. Από μαθηματική σκοπιά, η μέθοδος λειτουργεί ως τεχνική μείωσης της διαστατικότητας,

καθώς προβάλλει έναν αρχικό p -διάστατο χώρο μεταβλητών σε έναν νέο χώρο σημαντικά μικρότερης διάστασης, όπου ο διαχωρισμός των ομάδων μεγιστοποιείται.

Αντίθετα με την Ανάλυση Συστάδων (Cluster Analysis) όπου οι ομάδες είναι άγνωστες εξ αρχής, η Γ.Δ.Α. προϋποθέτει την εκ των προτέρων γνώση της κατηγορικής δομής του δείγματος. Επίσης, διαφοροποιείται από την Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA), καθώς η PCA αναζητά άξονες μέγιστης συνολικής διασποράς χωρίς να λαμβάνει υπόψη την ύπαρξη ομάδων, ενώ η Γ.Δ.Α. επικεντρώνεται αποκλειστικά στη μεγιστοποίηση της μεταβλητότητας μεταξύ των ομάδων σε σχέση με τη μεταβλητότητα εντός αυτών.

5.2.1 Προϋποθέσεις Εφαρμογής της Μεθόδου

Για την εξασφάλιση της στατιστικής εγκυρότητας των αποτελεσμάτων της Γ.Δ.Α., πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

1. **Κλίμακα Μέτρησης:** Οι διαχωριστικές (ανεξάρτητες) μεταβλητές πρέπει να είναι συνεχείς (κλίμακας διαστήματος ή λόγου).
2. **Πολυμεταβλητή Κανονικότητα:** Τα δεδομένα κάθε ομάδας πρέπει να προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή.
3. **Ομοσκεδαστικότητα (Ισότητα Πινάκων Συνδιακύμανσης):** Οι επιμέρους πίνακες διασποράς-συνδιακύμανσης των ομάδων πρέπει να είναι ίσοι μεταξύ τους. Η υπόθεση αυτή ελέγχεται συνήθως μέσω της στατιστικής δοκιμασίας Box's M.
4. **Απουσία Πολυσυγγραμμικότητας:** Οι ανεξάρτητες μεταβλητές δεν πρέπει να εμφανίζουν ισχυρή γραμμική συσχέτιση ή να αποτελούν γραμμικούς συνδυασμούς άλλων μεταβλητών.
5. **Ανεξαρτησία Παρατηρήσεων:** Το δείγμα πρέπει να είναι τυχαίο και οι παρατηρήσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους.

5.2.2 Γεωμετρική Ερμηνεία και Πλήθος Διαχωριστικών Συναρτήσεων

Οι διαχωριστικές συναρτήσεις ορίζουν έναν νέο Ευκλείδειο χώρο, στον οποίο κάθε ομάδα αντιπροσωπεύεται από το κέντρο βάρους της (κεντροειδές - centroid). Η θέση και η διαφοροποίηση των ομάδων μελετάται μέσω των αποστάσεων των κεντροειδών τους.

Ο μέγιστος αριθμός γραμμικών διαχωριστικών συναρτήσεων g που μπορούν να κατασκευαστούν σε ένα πρόβλημα καθορίζεται από τη σχέση:

$$g = \min(k - 1, p)$$

όπου k είναι το πλήθος των διακριτών ομάδων και p ο αριθμός των διαχωριστικών μεταβλητών. Σημειώνεται ότι στην ειδική περίπτωση των δύο ομάδων ($k = 2$), απαιτείται ακριβώς μία διαχωριστική συνάρτηση ($g = 1$), η οποία προβάλλει τα πολυδιάστατα δεδομένα σε μία μόνο ευθεία.

5.2.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση: Οι Πίνακες Διασποράς

Για την ποσοτικοποίηση των διαφορών ανάμεσα στις ομάδες, εισάγονται τρεις θεμελιώδεις πίνακες διασποράς-συνδιακύμανσης:

1. Συνολικός Πίνακας Διασποράς (T): Αποτυπώνει τη συνολική μεταβλητότητα των δεδομένων χωρίς να λαμβάνει υπόψη τον διαχωρισμό σε ομάδες:

$$T = (t_{ij})_{i,j=1}^p$$

$$t_{ij} = \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^{n_l} (X_{ilm} - \bar{X}_{i..}) (X_{jlm} - \bar{X}_{j..})$$

όπου $\bar{X}_{i..}$ είναι η συνολική μέση τιμή της μεταβλητής X_i στο πλήρες δείγμα και n_l το μέγεθος της l -οστής ομάδας.

2. Πίνακας Διασποράς Εντός των Ομάδων (W - Within-groups scatter matrix): Μετρά τη μεταβλητότητα των παρατηρήσεων γύρω από τα κέντρα βάρους των δικών τους ομάδων:

$$W = (w_{ij})_{i,j=1}^p$$

$$w_{ij} = \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^{n_l} (X_{ilm} - \bar{X}_{il.}) (X_{jlm} - \bar{X}_{jl.})$$

όπου $\bar{X}_{il.}$ είναι η μέση τιμή της μεταβλητής X_i αποκλειστικά εντός της l -οστής ομάδας.

3. Πίνακας Διασποράς Μεταξύ των Ομάδων (B - Between-groups scatter matrix): Αντιπροσωπεύει τη διασπορά των ίδιων των κεντροειδών των ομάδων γύρω από το συνολικό κέντρο βάρους. Ορίζεται ως η διαφορά των δύο προηγούμενων πινάκων:

$$B = T - W$$

Αν οι ομάδες δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, οι πίνακες W και T τείνουν να ταυτίζονται. Αντιθέτως, όσο πιο διακριτές είναι οι ομάδες, τόσο αυξάνεται η βαρύτητα του πίνακα B έναντι του W .

5.2.4 Το Γενικευμένο Πρόβλημα Ιδιοτιμών στη Γ.Δ.Α.

Η κατασκευή των διαχωριστικών συναρτήσεων βασίζεται στο κριτήριο του Fisher, το οποίο απαιτεί τη μεγιστοποίηση του λόγου της μεταβλητότητας μεταξύ των ομάδων προς τη μεταβλητότητα εντός των ομάδων. Μαθηματικά, αυτό μεταφράζεται στη μεγιστοποίηση της ποσότητας:

$$J(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^T B \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T W \mathbf{v}}$$

Η μεγιστοποίηση του λόγου Rayleigh $J(\mathbf{v})$ επιτυγχάνεται μέσω του **γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών (generalized eigenvalue problem)**:

$$B\mathbf{v} = \lambda W\mathbf{v}$$

Εφόσον ο πίνακας W είναι θετικά ορισμένος (και συνεπώς αντιστρέψιμος), το πρόβλημα ανάγεται στο κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών του πίνακα $W^{-1}B$:

$$(W^{-1}B)\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Από την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_g$:

- **Η σημασία των Ιδιοτιμών (λ):** Κάθε ιδιοτιμή αντανακλά τη διαχωριστική ισχύ του αντίστοιχου άξονα. Μεγάλες τιμές του λ υποδηλώνουν ισχυρή διαχωριστική ικανότητα της συνάρτησης.
- **Η σημασία των Ιδιοδιανυσμάτων ($\mathbf{v}$):** Τα ιδιοδιανύσματα καθορίζουν τις διευθύνσεις των νέων ορθογώνιων αξόνων προβολής.

Οι τελικές κανονικές διαχωριστικές συναρτήσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$f(m) = u_0 + u_1 X_1(m) + u_2 X_2(m) + \dots + u_p X_p(m)$$

όπου οι συντελεστές u_i προκύπτουν από την κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{v}$, έτσι ώστε οι τιμές (scores) των συναρτήσεων να έχουν μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση μονάδα εντός των ομάδων. Η κανονικοποίηση αυτή επιτρέπει την απρόσκοπτη σύγκριση των δεδομένων, ανεξάρτητα από τις αρχικές μονάδες μέτρησης των μεταβλητών.

5.2.5 Αριθμητικό Παράδειγμα Εφαρμογής (Περίπτωση Δύο Ομάδων)

Για την πλήρη κατανόηση του μαθηματικού μηχανισμού της Γραμμικής Διαχωριστικής Ανάλυσης, εξετάζουμε ένα απλοποιημένο πρόβλημα δύο ομάδων (ω_1, ω_2) με δύο διαχωριστικές μεταβλητές (X_1, X_2). Έστω ότι διαθέτουμε ένα δείγμα τεσσάρων

παρατηρήσεων ($n = 4$), μοιρασμένο ισομερώς στις δύο ομάδες ($n_1 = 2, n_2 = 2$), με τα ακόλουθα διανύσματα δεδομένων:

$$\text{Ομάδα } \omega_1: \mathbf{x}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ομάδα } \omega_2: \mathbf{x}_{21} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{22} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Υπολογισμός των Κεντροειδών (Μέσων Διανυσμάτων)

Αρχικά, υπολογίζουμε τα διανύσματα των μέσων τιμών για κάθε ομάδα, καθώς και το συνολικό μέσο διάνυσμα του δείγματος:

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{12}) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{21} + \mathbf{x}_{22}) = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{12} + \mathbf{x}_{21} + \mathbf{x}_{22}) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Κατασκευή του Πίνακα Διασποράς Εντός των Ομάδων (W)

Ο πίνακας W προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους πινάκων διασποράς των δύο ομάδων ($W = W_1 + W_2$), όπου:

$$W_1 = \sum_{m=1}^2 (\mathbf{x}_{1m} - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x}_{1m} - \boldsymbol{\mu}_1)^T = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \sum_{m=1}^2 (\mathbf{x}_{2m} - \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_{2m} - \boldsymbol{\mu}_2)^T = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, ο πίνακας διασποράς εντός των ομάδων είναι:

$$W = W_1 + W_2 = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.5 & 1 + 0.5 \\ 1 + 0.5 & 2 + 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Κατασκευή του Πίνακα Διασποράς Μεταξύ των Ομάδων (B)

Ο πίνακας B υπολογίζεται με βάση την απόσταση των κεντροειδών από τη συνολική μέση τιμή:

$$B = \sum_{l=1}^2 n_l (\boldsymbol{\mu}_l - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}_l - \boldsymbol{\mu})^T$$

$$B = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4: Επίλυση του Προβλήματος Ιδιοτιμών για τον Πίνακα $W^{-1}B$

Η ορίζουσα του W είναι $\det(W) = (1)(2.5) - (1.5)(1.5) = 0.25$. Επομένως, ο αντίστροφος είναι:

$$W^{-1} = \frac{1}{0.25} \begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια, σχηματίζουμε τον πίνακα $W^{-1}B$:

$$W^{-1}B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\det(W^{-1}B - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 28 - \lambda & 14 \\ -16 & -8 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 20\lambda = 0$$

Λόγω του ότι $k = 2$, προκύπτει ακριβώς μία μη μηδενική ιδιοτιμή (όπως ορίζει η θεωρία $g = \min(2 - 1, 2) = 1$):

$$\lambda_1 = 20, \quad \lambda_2 = 0$$

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 20$ αντιπροσωπεύει τη διαχωριστική ισχύ του άξονα. Για να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, επιλύουμε το σύστημα $(W^{-1}B - 20I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -16 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 8v_1 + 14v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -1.75v_2$$

Θέτοντας $v_2 = -4$ για την απαλοιφή των κλασμάτων, λαμβάνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Βήμα 5: Κανονικοποίηση και Κατασκευή της Διαχωριστικής Συνάρτησης

Κανονικοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα ως προς τον πίνακα διασποράς εντός των ομάδων, απαιτώντας η διασπορά των scores να ισούται με τη μονάδα ($\mathbf{v}_1^T W \mathbf{v}_1 = 1$):

$$\mathbf{v}_1^T W \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 7 - 2 = 5$$

Εφόσον η τρέχουσα διασπορά είναι 5, το κανονικοποιημένο διάνυσμα των συντελεστών $\mathbf{u}$ προκύπτει διαιρώντας με $\sqrt{5}$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{5} \\ -4/\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.13 \\ -1.79 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, η γραμμική διαχωριστική συνάρτηση Fisher διαμορφώνεται ως εξής:

$$f(\mathbf{x}) = 3.13X_1 - 1.79X_2$$

Βήμα 6: Κανόνας Ταξινόμησης Νέων Παρατηρήσεων

Για να ορίσουμε το κρίσιμο σημείο απόφασης (cut-off point f_0), υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα κεντροειδή των δύο ομάδων:

$$f(\mu_1) = 3.13(1.5) - 1.79(3) = -0.675$$

$$f(\mu_2) = 3.13(3.5) - 1.79(4) = 3.795$$

Το βέλτιστο όριο διαχωρισμού είναι ο μέσος όρος των δύο αυτών τιμών:

$$f_0 = \frac{f(\mu_1) + f(\mu_2)}{2} = \frac{-0.675 + 3.795}{2} = 1.56$$

Κατά συνέπεια, ο τελικός στατιστικός κανόνας ταξινόμησης για οποιαδήποτε νέα παρατήρηση $\mathbf{x}_{\text{new}}$ ορίζεται ως:

$$\text{Αν } f(\mathbf{x}_{\text{new}}) < 1.56 \Rightarrow \mathbf{x}_{\text{new}} \in \omega_1$$

$$\text{Αν } f(\mathbf{x}_{\text{new}}) \geq 1.56 \Rightarrow \mathbf{x}_{\text{new}} \in \omega_2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

6.1 Ανακεφαλαίωση και Ενοποιημένη Θεώρηση

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία είχε ως κεντρικό άξονα τη μελέτη των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων, όχι απλώς ως αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών, αλλά ως ενός ενοποιημένου και εξαιρετικά ευέλικτου μαθηματικού εργαλείου με βαθιές εφαρμογές σε διαφορετικούς κλάδους. Μέσα από τη συστηματική καταγραφή της θεωρίας και την ανάλυση συγκεκριμένων αριθμητικών μοντέλων, αναδείχθηκε ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών αποτελεί το κοινό μαθηματικό «νήμα» που συνδέει τη δυναμική συμπεριφορά των διαφορικών εξισώσεων, τη στοχαστική εξέλιξη των πιθανολογικών διαδικασιών και τη γεωμετρική δομή των πολυμεταβλητών στατιστικών δεδομένων.

Η διαδικασία της διαγωνιοποίησης και της φασματικής ανάλυσης αποδείχθηκε ότι δεν αποτελεί μια απλή υπολογιστική διευκόλυνση, αλλά μια θεμελιώδη μέθοδο αποκάλυψης των εγγενών ιδιοτήτων ενός γραμμικού μετασχηματισμού, μεταφέροντας πολύπλοκα προβλήματα από τους αρχικούς άξονες συντεταγμένων στους «φυσικούς άξονες» του εκάστοτε συστήματος.

6.2 Συνοπτική Αξιολόγηση των Επιμέρους Εφαρμογών

1. **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ):** Στο πεδίο των γραμμικών δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, η ύπαρξη μιας βάσης ιδιοδιανυσμάτων επέτρεψε την πλήρη αποσύνδεση (uncoupling) των συστημάτων, μετατρέποντας ένα πλέγμα αλληλεξαρτώμενων διαφορικών εξισώσεων σε ένα σύνολο ανεξάρτητων μονοδιάστατων εξισώσεων. Επιπλέον, τεκμηριώθηκε ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών και η παρουσία φανταστικών όρων καθορίζουν πλήρως την ασυμπτωτική ευστάθεια, την αστάθεια ή την ταλαντωτική

- συμπεριφορά του συστήματος, προσφέροντας ποιοτική πληροφορία για τη μακροπρόθεσμη εξέλιξή του χωρίς την ανάγκη αναλυτικής επίλυσης.
2. **Θεωρία Πιθανοτήτων (Μαρκοβιανές Αλυσίδες):** Η μεταφορά της φασματικής θεωρίας σε στοχαστικούς πίνακες διακριτού χρόνου επέτρεψε την πρόβλεψη της οριακής κατάστασης τυχαίων φαινομένων. Η κυρίαρχη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ εξασφαλίζει τη μαθηματική ύπαρξη και τη μοναδικότητα της στάσιμης κατανομής (ως αριστερό ιδιοδιάνυσμα). Παράλληλα, το φασματικό χάσμα (spectral gap), το οποίο ορίζεται από τη δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή, αναδείχθηκε ως ο απόλυτος δείκτης για την ποσοτικοποίηση της ταχύτητας σύγκλισης του συστήματος προς την ισορροπία, εύρημα με τεράστια πρακτική αξία σε σύγχρονες εφαρμογές όπως ο αλγόριθμος PageRank της Google.
3. **Πολυμεταβλητή Στατιστική:** Στην ανάλυση δεδομένων υψηλής διαστατικότητας, οι ιδιοτιμές προσέφεραν ένα σαφές γεωμετρικό κριτήριο για τη μείωση του όγκου των δεδομένων με τη μικρότερη δυνατή απώλεια πληροφορίας. Μέσα από την Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA), η ορθογώνια διαγωνιοποίηση του πίνακα συνδιακύμανσης οδήγησε στη δημιουργία ασυσχέτιστων μεταβλητών διατεταγμένων βάσει της διασποράς τους. Αντίστοιχα, στη Γραμμική Διαχωριστική Ανάλυση (LDA), η επίλυση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών επέτρεψε τη μεγιστοποίηση της μεταβλητότητας μεταξύ των ομάδων, επιβεβαιώνοντας ότι η φασματική ανάλυση αποτελεί τη βάση για τη σύγχρονη στατιστική μοντελοποίηση και τη μηχανική μάθηση.

6.3 Προοπτικές και Μελλοντικές Ερευνητικές Επεκτάσεις

Η μελέτη που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα εργασία ανοίγει τον δρόμο για περαιτέρω ερευνητική εμβάθυνση σε πιο προχωρημένα πεδία των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών:

- **Γραμμικοί Τελεστές σε Χώρους Άπειρης Διάστασης:** Η επέκταση της θεωρίας ιδιοτιμών από πεπερασμένους πίνακες σε γραμμικούς τελεστές (π.χ. σε χώρους Hilbert ή Banach) αποτελεί το αντικείμενο της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Η μελέτη του φάσματος διαφορικών τελεστών (προβλήματα Sturm-Liouville) είναι απαραίτητη για την επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) που

περιγράφουν φυσικά φαινόμενα, όπως η διάδοση της θερμότητας, η κυματική κίνηση και οι εξισώσεις της Κβαντομηχανικής.

- **Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα:** Ενώ η παρούσα εργασία περιορίστηκε σε γραμμικά συστήματα, η θεωρία των ιδιοτιμών αποτελεί το θεμέλιο για τη μελέτη των μη γραμμικών συστημάτων. Μέσω της γραμμικοποίησης γύρω από τα κρίσιμα σημεία ισορροπίας (χρήση του πίνακα Jacobi), οι ιδιοτιμές επιτρέπουν την τοπική ποιοτική ανάλυση της ευστάθειας και τη μελέτη των διακλαδώσεων (bifurcations) σε χαοτικά συστήματα.
- **Ανάλυση Τανυστών (Tensor Decomposition):** Στη σύγχρονη επιστήμη δεδομένων, τα δεδομένα συχνά οργανώνονται σε πολυδιάστατους πίνακες (τανυστές). Η επέκταση της PCA και της φασματικής ανάλυσης σε τανυστές (όπως η μέθοδος Higher-Order SVD) αποτελεί ένα εξαιρετικά ενεργό ερευνητικό πεδίο για τη διαχείριση Big Data και την αναγνώριση προτύπων.

Συμπερασματικά, η θεωρία των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων, αν και ξεκινά ως ένα εισαγωγικό κεφάλαιο της Γραμμικής Άλγεβρας, αναδεικνύεται σε ένα από τα πιο ισχυρά, διαχρονικά και διεπιστημονικά εργαλεία των μαθηματικών επιστημών, γεφυρώνοντας την καθαρή θεωρητική σκέψη με τις πιο απαιτητικές τεχνολογικές εφαρμογές του πραγματικού κόσμου.

Βιβλιογραφία

Anton, H., & Rorres, C. (χ.χ.). *Στοιχειώδης Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right* (3rd ed.). Springer.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (1999). *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. (Επιμέλεια: Θ. Γραμμένος). Αθήνα: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.

Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis* (6th ed.). Pearson.

Jolliffe, I. T. (2002). *Principal Component Analysis* (2nd ed.). Springer.

Norris, J. R. (1998). *Markov Chains*. Cambridge University Press.

Page, L., Brin, S., Motwani, R., & Winograd, T. (1999). *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web*. Technical Report, Stanford InfoLab.

Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models* (11th ed.). Academic Press.

Strang, G. (χ.χ.). *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. (Μετάφραση: Α. Φελλούρης). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (ΠΕΚ).

Mardia, K. V., Kent, J. T., & Bibby, J. M. (1979). *Multivariate Analysis*. Academic Press.

Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* (3rd ed.). Academic Press.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.