



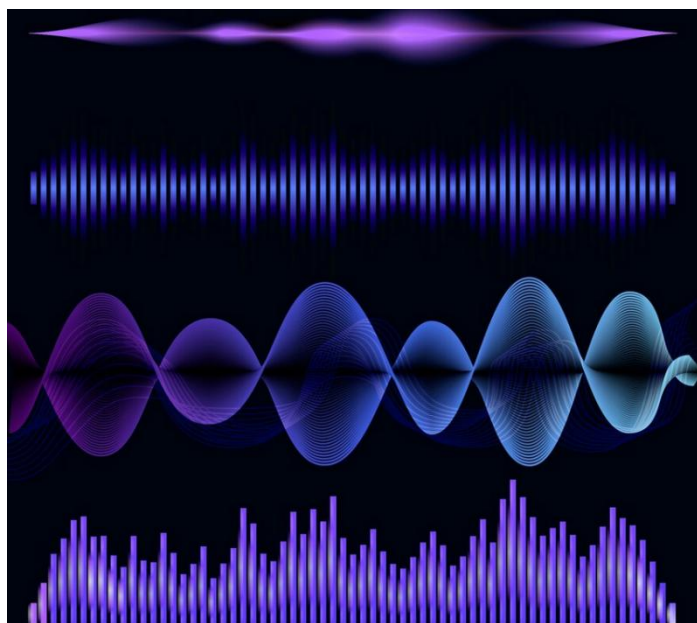
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μαθηματική Μοντελοποίηση Ακουστικών Κυμάτων
Μουσικών Οργάνων**



Αρετή Δήμητρα Πουρνάρα

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Τσίτσας

ΑΘΗΝΑ
Μάρτιος, 2025

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Αρετή-Δήμητρας Πουρνάρα που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Η συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Μαθηματική Μοντελοποίηση Ακουστικών Κυμάτων Μουσικών Οργάνων

Αρετή Δήμητρα Πουρνάρα

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλεπων Καθηγητής:
Νικόλαος Τσίτσας
Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Συν-επιβλέπων Καθηγητής:
Νικόλαος Καραχάλιος
Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Τσίτσα για την υποστήριξη και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, πάντα με μεγάλη προθυμία και πολλή ευγένεια.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω το μπαμπά μου, που είναι πάντα δίπλα μου για να με υποστηρίξει, να με καθοδηγήσει, να με εμπνεύσει σε κάθε μου πόνημα.

Η παρούσα εργασία είναι αφιερωμένη στον παππού μου Παύλο, στο μπαμπά μου, στον παππού μου Δημήτρη και στη γιαγιά μου Μαργαρίτα.

Περίληψη

Το θέμα της παρούσας εργασίας είναι η μαθηματική μοντελοποίηση των ακουστικών κυμάτων που προκύπτουν από τα μουσικά όργανα.

Ο πρώτος στόχος της εργασίας είναι η εύρεση εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση του κάθε μουσικού οργάνου και του τρόπου που παράγεται ο ήχος από αυτό. Ο δεύτερος στόχος είναι η πραγματοποίηση προσομοιώσεων τμημάτων των μουσικών οργάνων, μέσω της χρήσης του λογισμικού Mathematica. Ο τρίτος στόχος της εργασίας είναι η συσχέτιση των χαρακτηριστικών της δόνησης των τμημάτων των μουσικών οργάνων με τα χαρακτηριστικά του παραγόμενου ηχητικού κύματος, αλλά και η σύγκριση των αποτελεσμάτων που υπολογίζονται μέσω σχέσεων της βιβλιογραφίας, με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις. Ο τελευταίος στόχος επιτυγχάνεται πραγματοποιώντας ηχογραφήσεις μουσικών οργάνων σε στούντιο μουσικής.

Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στην εργασία. Στα κεφάλαια 2 και 3 της εργασίας περιγράφονται τα μουσικά όργανα που θα μοντελοποιηθούν και επιπλέον παρουσιάζονται βασικές μαθηματικές έννοιες και μέθοδοι που θα αξιοποιηθούν κατά τη μοντελοποίηση. Στα κεφάλαια 4,5 και 6 πραγματοποιείται η μαθηματική μοντελοποίηση των πιατινιών, των κυλινδρικών τυμπάνων και της ακουστικής κιθάρας, άρα και του ακουστικού μπάσου,. Στα κεφάλαια αυτά παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τα συγκεκριμένα μουσικά όργανα, καθώς και οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων αυτών.

Στο κεφάλαιο 7 πραγματοποιείται μια απλοποιημένη μαθηματική μοντελοποίηση των πιατινιών, των μεμβρανών των κυλινδρικών τυμπάνων και των χορδών ακουστικής κιθάρας. Σε αυτό το τμήμα της εργασίας παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την δόνηση των παραπάνω τμημάτων των μουσικών οργάνων, καθώς και οι μέθοδοι επίλυσής τους. Παράλληλα, πραγματοποιούνται προσομοιώσεις μέσω του λογισμικού Mathematica.

Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ενός ακουστικού κύματος και υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που προκύπτουν μέσω της απλοποιημένης μαθηματικής μοντελοποίησης των πιατινιών, των μεμβρανών των κυλινδρικών τυμπάνων και των χορδών ακουστικής κιθάρας.

Στο κεφάλαιο 9 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των ακουστικών κυμάτων που προκύπτουν μέσω πειραματικών μετρήσεων, οι οποίες πραγματοποιούνται σε στούντιο μουσικής. Στο κεφάλαιο 10 γίνεται σύγκριση των θεωρητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων και παρατίθενται προτάσεις για μελλοντική εργασία.

Λέξεις-Κλειδιά:

Μουσικά όργανα, Ακουστικά κύματα, Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, Mathematica

Abstract

The subject of this thesis is the mathematical modeling of acoustic waves resulting from musical instruments.

The first objective of the thesis is to find equations that describe the movement of each musical instrument and the way its sound is produced. The second objective is to perform simulations of parts of the musical instruments, through the use of the Mathematica software. The third objective of the thesis is to correlate the characteristics of the vibration of the parts of the musical instruments with the characteristics of the produced sound wave, as well as to compare the results calculated through the relations in the bibliography, with the results stemming from experimental measurements. The last objective is achieved by recording musical instruments in a music studio.

Chapter 1 provides an introduction to the work. Chapters 2 and 3 of the thesis describe the musical instruments that will be modeled and also present basic mathematical concepts and methods that will be utilized during the modeling. In chapters 4,5 and 6, the mathematical modeling of cymbals, cylindrical drums and the acoustic guitar, and therefore the acoustic bass, is presented. In these chapters, the equations that describe the specific musical instruments are presented, as well as the methods for solving these equations.

In chapter 7, a simplified mathematical modeling of cymbals, cylindrical drum membranes and acoustic guitar strings is applied. In this part of the work, the equations that describe the vibration of the above parts of the musical instruments are presented, as well as the methods for solving them. At the same time, simulations are carried out using the Mathematica software.

In chapter 8, the characteristics of an acoustic wave are presented and the characteristics of the waves that arise through simplified mathematical modeling of cymbals, cylindrical drum membranes and acoustic guitar strings are calculated.

In chapter 9, the characteristics of the acoustic waves that arise through experimental measurements are presented. These measurements are taken in a music studio. In chapter 10, a comparison of theoretical and experimental results is made and suggestions for future work are listed.

Keywords:

Musical instruments, Acoustic waves, Finite difference method, Finite element method, Mathematica

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες.....	iv
Περίληψη.....	v
Abstract.....	vi
Περιεχόμενα.....	vii
Κατάλογος Εικόνων-Σχημάτων.....	ix
Κατάλογος Πινάκων.....	xii
Κεφάλαιο 1- Εισαγωγή.....	1
Κεφάλαιο 2- Παρουσίαση Μουσικών Οργάνων.....	2
2.1 Τύμπανα.....	2
2.2 Ακουστική Κιθάρα.....	4
2.3 Ακουστικό Μπάσο.....	7
Κεφάλαιο 3- Μαθηματικές Μέθοδοι.....	8
3.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FDM).....	8
3.1.1 Σειρές Taylor.....	9
3.1.2 Μη πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.....	10
3.1.3 Πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.....	10
3.1.4 Επέκταση σχέσεων της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών από 1D σε 2D.....	10
3.2 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM).....	12
3.2.1 Στοιχεία Raviart-Thomas.....	12
3.3 Μέθοδος πλασματικού τομέα.....	13
3.3.1 Πεπερασμένα στοιχεία Lagrange.....	14
3.4 Φασματική Μέθοδος Επίλυσης.....	15
Κεφάλαιο 4- Μοντελοποίηση Πιατινιών.....	18
4.1 Εισαγωγή.....	18
4.2 Μη γραμμική εξίσωση δόνησης ενός ρηχού σφαιρικού κελύφους.....	18
4.3 Συνοριακές συνθήκες στην περιφέρεια του κελύφους.....	20
4.4 Συνοριακές συνθήκες στο κέντρο του κελύφους, όταν αυτό θεωρείται πακτωμένο.....	20
4.5 Συνοριακές συνθήκες στο κέντρο του κελύφους, όταν αυτό υποστηρίζεται από σύνθετη αντίσταση.....	21
4.6 Επίλυση με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.....	22
4.7 Συναρτήσεις διέγερσης κελύφους.....	27
4.8 Μοντελοποίηση σφύρας/μπαγκέτας κρουστών.....	28
4.8.1 Φυσικό μοντέλο ενός κεφαλιού σφύρας και η σύζευξή του με ένα κύμβαλο.....	28
4.8.2 Εφαρμογή μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.....	29
4.8.3 Φυσικό μοντέλο ενός ραβδιού σφύρας και η σύζευξή του με την κεφαλή της σφύρας.....	29
4.8.4. Εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων διαφορών.....	30
Κεφάλαιο 5- Μοντελοποίηση Ταμπούρου-Τομ-Κάσας.....	31
5.1 Εισαγωγή.....	31
5.2 Γεωμετρία.....	31
5.3 Διάδοση ακουστικών κυμάτων.....	32
5.4 Συνοριακές συνθήκες κοιλότητας.....	33
5.5 Συνοριακές συνθήκες απορρόφησης.....	33
5.6 Μεμβράνες.....	34
5.7 Χορδιέρα.....	35
5.8 Διέγερση.....	36
5.9 Κατανομημένη σύζευξη.....	37
5.10 Σχήματα πεπερασμένων διαφορών.....	38
5.11 Σχήματα για τα εξαρτήματα του τυμπάνου.....	38
5.12 Τερματισμός συνόρων.....	41
5.13 Σύζευξη και παρεμβολή.....	42
Κεφάλαιο 6- Μοντελοποίηση Ακουστικής Κιθάρας-Ακουστικού Μπάσου.....	44
6.1 Εισαγωγή-Περιγραφή κιθάρας.....	44
6.2 Περιγραφή μοντέλου.....	44
6.2.1 Γεωμετρία κιθάρας.....	45
6.2.2 Χορδή.....	46
6.2.3 Ηχείο.....	47
6.2.4 Ακουστικό πεδίο.....	48
6.2.5 Ενεργειακή αποσύνθεση.....	48

6.3 Αριθμητική ανάλυση	49
6.3.1 Μεταβολική Διατύπωση.....	50
6.3.2 Διακριτοποίηση χώρου.....	52
6.3.3 Διακριτοποίηση χρόνου.....	55
Κεφάλαιο 7- Απλοποιημένη Μοντελοποίηση Τμημάτων των Μουσικών Οργάνων και Προσομοίωση με τη χρήση του Λογισμικού Mathematica.....	59
7.1 Πιατίνα.....	59
7.1.1 Εξίσωση κύματος.....	59
7.1.2 Συνοριακές Συνθήκες.....	59
7.1.3 Αρχικές Συνθήκες.....	59
7.1.4 Λύση.....	60
7.2 Μεμβράνες Τυμπάνων.....	66
7.2.1 Μεμβράνες τυμπάνων με απόσβεση.....	66
7.2.2 Μεμβράνες τυμπάνων χωρίς απόσβεση.....	72
7.3 Χορδές κιθάρας/μπάσου.....	76
Κεφάλαιο 8- Ήχος-Ακουστικά κύματα- Παραγόμενες Κυματομορφές και Συχνότητες Μουσικών Οργάνων.....	83
8.1 Παραγωγή ήχου.....	83
8.2 Χαρακτηριστικά ηχητικού κύματος.....	83
8.3 Υπολογισμός χαρακτηριστικών των ακουστικών κυμάτων.....	85
8.3.1 Πιατίνα.....	85
8.3.2 Μεμβράνες.....	86
8.3.3 Χορδές.....	87
Κεφάλαιο 9- Πειραματικές Μετρήσεις.....	89
9.1 Σκοπός.....	89
9.2 Πιατίνα.....	89
9.2.1 Πειραματική διαδικασία.....	89
9.2.2 Μετρήσεις.....	91
9.2.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	98
9.3 Κυλινδρικά Τύμπανα.....	99
9.3.1 Πειραματική διαδικασία.....	99
9.3.2 Μετρήσεις.....	101
9.3.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	106
9.4 Χορδή κιθάρας.....	108
9.4.1 Πειραματική διαδικασία.....	108
9.4.2 Μετρήσεις.....	109
9.4.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	119
Κεφάλαιο 10- Σύγκριση Αποτελεσμάτων και Προτάσεις για Μελλοντική Εργασία.....	121
10.1 Σύγκριση θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων.....	121
10.1.1 Πιατίνα.....	121
10.1.2 Τύμπανα.....	121
10.1.3 Χορδές κιθάρας.....	122
10.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία.....	122
Βιβλιογραφικές Αναφορές	123
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : "Κώδικας Mathematica"	126
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : "Εξίσωση πλάκας Kirchhoff-Love"	133

Κατάλογος Εικόνων-Σχημάτων

Εικόνα 2.1 .Τυπικό σετ τυμπάνων και τα εξαρτήματά του.....	3
Εικόνα 2.2 Ανατομία μπαγκέτας.....	3
Εικόνα 2.3: Τα μέρη της ακουστικής κιθάρας.....	5
Εικόνα 2.4: Τα μέρη στο εσωτερικό της ακουστικής κιθάρας.....	7
Εικόνα 2.5: Το ακουστικό μπάσο.....	7
Σχήμα 3.1: Πλέγμα για τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.....	11
Σχήμα 4.1: Γεωμετρία ρηχού σφαιρικού κελύφους : 3D σχέδιο και διατομή.....	18
Σχήμα 4.2: Ροδέλα κυμβάλου μοντελοποιημένη ως μηχανική αντίσταση.....	21
Σχήμα 4.3: Πλέγμα στο χώρο $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ και η ολική αρίθμηση κόμβου n για $N_r=5$ και $N_\theta=6$	22
Σχήμα 4.4: Ράβδος σφύρας μοντελοποιημένη ως δοκός Euler-Bernoulli και κεφαλή σφύρας μοντελοποιημένη ως ελαστικό σώμα ενός βαθμού ελευθερίας.....	28
Σχήμα 4.5: Σύζευξη ραβδιού σφύρας, κεφαλής σφύρας και κύμβαλου.....	29
Σχήμα 5.1: Γεωμετρία τυμπάνου συμπεριλαμβανομένης της υπολογιστικής περιοχής.....	32
Σχήμα 5.2: Υπολογιστικό πλέγμα για το ακουστικό πεδίο, καθώς και για τις μεμβράνες. Οι αποστάσεις του πλέγματος είναι διακριτές.....	39
Σχήμα 5.3: Υπολογιστικό πλέγμα για την ηχηρή μεμβράνη, καθώς και 1D πλέγματα για ένα σύνολο συρμάτων της χορδιέρας.....	40
Σχήμα 5.4: Κάτοψη υπολογιστικού πλέγματος για το ακουστικό πεδίο με το όριο του κελύφους ∂V_{sh} , να υποδεικνύεται ως μαύρος κύκλος. Τα σημεία στα οποία πρέπει να πραγματοποιηθεί εξειδικευμένη ενημέρωση υποδεικνύονται με ανοιχτούς κύκλους.....	41
Σχήμα 6.1: Γεωμετρική περιγραφή της κιθάρας.....	45
Σχήμα 6.2: Πλέγμα για τα $(u_{sh}$ και $q_h)$: (a) Πλέγμα του $[0, l_s]$, (b) Βαθμοί ελευθερίας του u_s ,(c) Βαθμοί ελευθερίας του q	53
Σχήμα 6.3: Πλέγμα για τα $(u_{ph}$ και $\underline{\mathcal{M}}_h)$: (a) Πλέγμα του ω , (b) Βαθμοί ελευθερίας του u_{ph} , (c) Βαθμοί ελευθερίας του $\underline{\mathcal{M}}_h$	53
Σχήμα 6.4: Πλέγμα για τα $(p_h$ και $\underline{v}_{\alpha h})$: (a) Πλέγμα του C , (b) Βαθμοί ελευθερίας του p_h , (c) Βαθμοί ελευθερίας του $\underline{v}_{\alpha h}$	54
Σχήμα 6.5: Πλέγμα του λ_h : (a) Πλέγμα του Γ ,(b) Βαθμοί ελευθερίας του λ_h	54
Εικόνα 7.1: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0s$	61
Εικόνα 7.2: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0.2s$	62
Εικόνα 7.3: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0.3s$	62
Εικόνα 7.4: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0.7s$	63
Εικόνα 7.5: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=1s$	63
Εικόνα 7.6: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=1.5s$	64
Εικόνα 7.7: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=2.8s$	64
Εικόνα 7.8: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=3.9s$	65
Εικόνα 7.9: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=4.5s$	65
Εικόνα 7.10: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=4.7s$	66
Εικόνα 7.11: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=0s$	68
Εικόνα 7.12: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=0.4s$	68
Εικόνα 7.13: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=0.5s$	69
Εικόνα 7.14: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=1s$	69
Εικόνα 7.15: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=3s$	70
Εικόνα 7.16: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=7s$	70
Εικόνα 7.17: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=8.8s$	71
Εικόνα 7.18: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=8.9s$	71
Εικόνα 7.19: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=9s$	72
Εικόνα 7.20 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0s$	74
Εικόνα 7.21 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0.261274s$	74
Εικόνα 7.22 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0.522548s$	75
Εικόνα 7.23 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0.783822s$	75
Εικόνα 7.24 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=1.0451s$	76

Εικόνα 7.25 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0s$	79
Εικόνα 7.26 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.1s$	80
Εικόνα 7.27 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.2s$	80
Εικόνα 7.28 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.5s$	81
Εικόνα 7.29 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.8s$	81
Εικόνα 7.30 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.9s$	82
Εικόνα 7.31 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=1.1s$	82
Εικόνα 9.1 : 1ο σετ πιατινιών.....	89
Εικόνα 9.2 : 2ο σετ πιατινιών.....	90
Εικόνα 9.3: Μικροφωνισμός και διέγερση πιατινιών.....	90
Εικόνα 9.4 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (1).....	91
Εικόνα 9.5 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (2).....	91
Εικόνα 9.6 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (3).....	92
Εικόνα 9.7 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (4).....	92
Εικόνα 9.8: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (5).....	93
Εικόνα 9.9: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (6).....	93
Εικόνα 9.10: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (7).....	93
Εικόνα 9.11: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (8).....	94
Εικόνα 9.12: Συχνότητες από το Κύμβαλο (1).....	94
Εικόνα 9.13: Συχνότητες από το Κύμβαλο (2).....	95
Εικόνα 9.14: Συχνότητες από το Κύμβαλο (3).....	95
Εικόνα 9.15: Συχνότητες από το Κύμβαλο (4).....	96
Εικόνα 9.16: Συχνότητες από το Κύμβαλο (5).....	96
Εικόνα 9.17: Συχνότητες από το Κύμβαλο (6).....	97
Εικόνα 9.18: Συχνότητες από το Κύμβαλο (7).....	97
Εικόνα 9.19: Συχνότητες από το Κύμβαλο (8).....	98
Εικόνα 9.20: Σετ τυμπάνων.....	100
Εικόνα 9.21: Μικροφωνισμός τυμπάνων.....	100
Εικόνα 9.22: (a) τάση τυμπάνου (1) , (b) τάση τυμπάνου (2) , (c) τάση τυμπάνου (3), (d) τάση τυμπάνου (4).....	101
Εικόνα 9.23: Κυματομορφή από το Τύμπανο (1) με αλληλεπίδραση χορδών-μεμβράνης.....	102
Εικόνα 9.24: Κυματομορφή από το Τύμπανο (1) χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-μεμβράνης.....	102
Εικόνα 9.25: Κυματομορφή από το Τύμπανο (2).....	103
Εικόνα 9.26: Κυματομορφή από το Τύμπανο (3).....	103
Εικόνα 9.27: Κυματομορφή από το Τύμπανο (4).....	103
Εικόνα 9.28: Κυματομορφή από το Τύμπανο (5).....	104
Εικόνα 9.29: Συχνότητες από το Τύμπανο (1), με αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης.....	104
Εικόνα 9.30: Συχνότητες από το Τύμπανο (1), χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης.....	105
Εικόνα 9.31: Συχνότητες από το Τύμπανο (2).....	105
Εικόνα 9.32: Συχνότητες από το Τύμπανο (3).....	105
Εικόνα 9.33: Συχνότητες από το Τύμπανο (4).....	105
Εικόνα 9.34: Συχνότητες από το Τύμπανο (5).....	106
Εικόνα 9.35 : Η ακουστική κιθάρα που χρησιμοποιήθηκε κατά τις πειραματικές μετρήσεις.....	109
Εικόνα 9.36: Κυματομορφή από τη Χορδή (1).....	109
Εικόνα 9.37: Κυματομορφή από τη Χορδή (2).....	110
Εικόνα 9.38: Κυματομορφή από τη Χορδή (3).....	110
Εικόνα 9.39: Κυματομορφή από τη Χορδή (4).....	111
Εικόνα 9.40: Κυματομορφή από τη Χορδή (5).....	111
Εικόνα 9.41: Κυματομορφή από τη Χορδή (6).....	112
Εικόνα 9.42: Κυματομορφή από τη Χορδή (7).....	112
Εικόνα 9.43: Κυματομορφή από τη Χορδή (8).....	113
Εικόνα 9.44: Κυματομορφή από τη Χορδή (9).....	113
Εικόνα 9.45: Κυματομορφή από τη Χορδή (10).....	114
Εικόνα 9.46: Συχνότητες από τη Χορδή (1).....	114
Εικόνα 9.47: Συχνότητες από τη Χορδή (2).....	115
Εικόνα 9.48: Συχνότητες από τη Χορδή (3).....	115
Εικόνα 9.49: Συχνότητες από τη Χορδή (4).....	116
Εικόνα 9.50: Συχνότητες από τη Χορδή (5).....	116
Εικόνα 9.51: Συχνότητες από τη Χορδή (6).....	117

Εικόνα 9.52: Συχνότητες από τη Χορδή (7).....	117
Εικόνα 9.53: Συχνότητες από τη Χορδή (8).....	118
Εικόνα 9.54: Συχνότητες από τη Χορδή (9).....	118
Εικόνα 9.55: Συχνότητες από τη Χορδή (10).....	119

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 8.1 : Τιμές φυσικών χαρακτηριστικών πιατινιού.....	85
Πίνακας 8.2 : Ιδιοτιμές $\lambda_{m,n}$	85
Πίνακας 8.3 : Παραγόμενες συχνότητες πιατινιού.....	86
Πίνακας 8.4 : Τιμές συχνότητας, περιόδου και μήκους κύματος πιατινιού.....	86
Πίνακας 8.5 : Παραγόμενες συχνότητες μεμβράνης τυμπάνου.....	87
Πίνακας 8.6 : Τιμές συχνότητας, περιόδου και μήκους κύματος μεμβράνης τυμπάνου.....	87
Πίνακας 8.7 : Παραγόμενες συχνότητες χορδής.....	88
Πίνακας 8.8 : Τιμές συχνότητας, περιόδου και μήκους κύματος χορδής.....	88
Πίνακας 9.1 : Πειραματικά παραγόμενες συχνότητες πιατινιών.....	99
Πίνακας 9.2 : Πειραματικά παραγόμενες συχνότητες κυλινδρικών τυμπάνων.....	107
Πίνακας 9.3 : Πειραματικά παραγόμενες συχνότητες χορδών ακουστικής κιθάρας.....	120

Κεφάλαιο 1- Εισαγωγή

Εισαγωγή

Η μουσική είναι ένας από τους συνδετικούς κρίκους του κόσμου των συναισθημάτων και του υλικού κόσμου. Ο σκοπός του μουσικού είναι να πραγματοποιήσει μια μετάφραση, από τη γλώσσα των συναισθημάτων, στη γλώσσα του σώματος. Έτσι λοιπόν, το παίξιμο ενός μουσικού οργάνου είναι μια μεταφορά ενέργειας. Η ενέργεια ενός συναισθήματος μεταφέρεται στο σώμα του παίκτη του μουσικού οργάνου, και μέσω του παιξίματός του, αυτή μεταφέρεται στο μουσικό όργανο. Με κινήσεις και χτυπήματα που διέπονται από συγκεκριμένα φυσικά χαρακτηριστικά, όπως είναι η ορμή, η κινητική και δυναμική ενέργεια, το σχήμα και η δομή του αντικειμένου διέγερσης που χρησιμοποιεί ο μουσικός κατά το παίξιμο κ.α., ασκούνται οι διεγείρουσες δυνάμεις στα μουσικά όργανα. Αυτά με τη σειρά τους αρχίζουν να δονούνται. Η δόνηση αυτή προκαλεί μια αντίστοιχη δόνηση των μορίων του αέρα που περιβάλλει το μουσικό όργανο, δημιουργώντας ακουστικά κύματα, τα οποία αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος ως ήχο. Η μαθηματική μοντελοποίηση των ακουστικών κυμάτων των μουσικών οργάνων μας επιτρέπει να κατανοήσουμε και να περιγράψουμε τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κατά το παίξιμο ενός μουσικού οργάνου, και μέσω αυτών σταδιακά μπορούμε να προσεγγίσουμε το μηχανισμό της έκφρασης ενός συναισθήματος, μέσω της μουσικής.

Στην παρούσα εργασία επιδιώκεται η μαθηματική μοντελοποίηση των κυμβάλων, των τυμπάνων, της ακουστικής κιθάρας και του ακουστικού μπάσου. Μέσω βιβλιογραφικής ανασκόπησης παρουσιάζονται οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση και τον τρόπο παραγωγής ακουστικών κυμάτων από τα μουσικά όργανα, καθώς και οι μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων αυτών. Παράλληλα, πραγματοποιούνται προσομοιώσεις τμημάτων των μουσικών οργάνων με τη χρήση του λογισμικού Mathematica, εφαρμόζοντας απλοποιημένες μοντελοποιήσεις της κίνησης των τμημάτων αυτών. Στη συνέχεια, αξιοποιώντας τις εξισώσεις των απλοποιημένων μοντελοποιήσεων, υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά του παραγόμενου ακουστικού κύματος και πιο συγκεκριμένα η συχνότητα, η περίοδος και το μήκος κύματος αυτού. Προκειμένου να αξιολογηθούν τα θεωρητικά αποτελέσματα, πραγματοποιούνται πειραματικές μετρήσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν την ηχογράφηση των μουσικών οργάνων σε στούντιο μουσικής, μέσω της οποίας λαμβάνεται η μορφή και συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του παραγόμενου ακουστικού κύματος.

Κεφάλαιο 2- Παρουσίαση Μουσικών Οργάνων

Τα ακουστικά όργανα (φλάουτο, congas, φωνή) ήταν τα πρώτα μουσικά όργανα που παίχτηκαν από τον άνθρωπο. Παράγουν μουσικούς ήχους χρησιμοποιώντας κάποια δύναμη που κάνει το μουσικό όργανο να δονείται. Τα ηλεκτρικά όργανα όπως η ηλεκτρική κιθάρα, το συνθεσάιζερ και τα μικρόφωνα απαιτούν ηλεκτρισμό για να λειτουργήσουν. Πρέπει να ενισχυθούν μέσω εξοπλισμού και πρέπει να μεταφερθεί το σήμα τους από το όργανο για να παράγουν τους τελικούς ήχους που ακούγονται. Τα ψηφιακά όργανα (tablet, MIDI controllers) βασίζονται σε υπολογιστική ή επεξεργαστική ισχύ για την παραγωγή μουσικών ήχων από ψηφιακό σήμα. Τα ακουστικά όργανα γίνονται εύκολα αντιληπτά από το ανθρώπινο αυτί ενώ το σήμα των ηλεκτρικών και ψηφιακών οργάνων πρέπει να μετατραπεί από την ηλεκτρική του μορφή για να ακουστεί από τον άνθρωπο. Κάθε ακουστικό, ηλεκτρικό και ψηφιακό όργανο έχει ένα μοναδικό τρόπο δημιουργίας μουσικής και ξεχωριστού ήχου.

Τα μουσικά όργανα που χρησιμοποιούνται στα περισσότερα είδη μουσικής είναι τα τύμπανα, η κιθάρα και το μπάσο. Τα τύμπανα (ή αλλιώς drums) ανήκουν στην κατηγορία των κρουστών οργάνων, ενώ η κιθάρα και το μπάσο ανήκουν στα έγχορδα όργανα. Στην παρούσα ενότητα περιγράφονται τα τύμπανα, η ακουστική κιθάρα και το ακουστικό μπάσο.

2.1 Τύμπανα

Τα τύμπανα είναι κρουστά όργανα που παράγουν ήχο όταν ένας παίκτης χτυπά το δέρμα (drumhead) του τυμπάνου—μια τεντωμένη μεμβράνη που συνδέεται με το πλαίσιο ή αλλιώς το κέλυφος του τυμπάνου. Αυτό κάνει τα τύμπανα έναν τύπο μεμβρανόφωνου. Οι μεμβράνες των τυμπάνων που χρησιμοποιούνται είναι σχεδόν πάντα κατασκευασμένες από σύνθετα πλαστικά υλικά. Οι τυμπανιστές παίζουν ντραμς με τα χέρια ή με αντικείμενα όπως καλάμια, συρμάτινες «σκούπες», μπαγκέτες και πεντάλ ποδιών. Ένα σύνηθες σετ τυμπάνων αποτελείται από τα εξής:

i)Κάσα (Kick)

Αυτό το μεγάλο τύμπανο που παράγει βαθύ ήχο, στηρίζεται στο πάτωμα. Ο ντράμερ το παίζει με πεντάλ ποδιού. Οι κάσες που χρησιμοποιούνται συνήθως έχουν 22 ίντσες διάμετρο(55,88 cm) και 16 ίντσες βάθος(40,64cm).

ii)Ταμπούρο (Snare drum)

Το ταμπούρο είναι ένα κυλινδρικό τύμπανο που διαθέτει μεταλλικά σύρματα (χορδιέρα) που εφάπτονται στην κάτω μεμβράνη του. Ο ντράμερ συνήθως παίζει το ταμπούρο χρησιμοποιώντας μπαγκέτες. Τα ταμπούρα που χρησιμοποιούνται συνήθως έχουν 14 ίντσες διάμετρο(35,56 cm) και 5 ή 6 ίντσες βάθος(12,7cm ή 15,24cm).

iii)Τομ

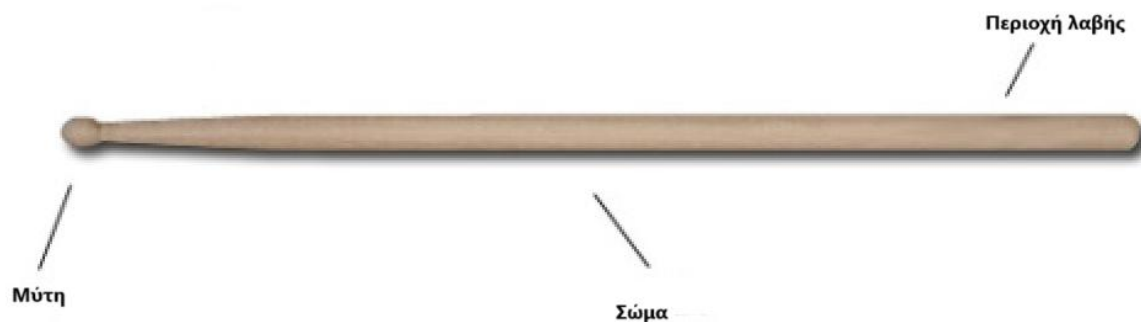
Τα τόμ είναι επίσης κυλινδρικά τύμπανα, τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το ύψος και τη διάμετρο. Κυμαίνονται σε διάμετρο από 6-20 ίντσες(15,24-50,8cm). Τα βάθη ποικίλλουν αρκετά σε σχέση με τη διάμετρο του τυμπάνου.

iv) Κύμβαλα(Πιατίνια)

Τα σετ τυμπάνων περιλαμβάνουν επίσης κύμβαλα όπως το hi-hat, το ride και το crash. Αυτά τα όργανα είναι ιδιόφωνα, που παράγουν ήχο μέσω δόνησης ολόκληρου του οργάνου. Η πιο συνηθισμένη διάμετρος του hi-hat είναι 14 ίντσες (35,56 cm), του ride 20 ίντσες (50,8cm) και τα δύο πιατίνια που συνήθως χρησιμοποιούνται έχουν διαμέτρους 16 ίντσες(40,64cm) και 18 ίντσες(45,72cm).



Εικόνα 2.1: Τυπικό σετ τυμπάνων και τα εξαρτήματά του



Εικόνα 2.2: Ανατομία μπαγκέτας

Οι μπαγκέτες που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως κατασκευασμένες από ένα κομμάτι ξύλου, συνήθως άσπρης καρυδιάς Αμερικής. Τα μεγέθη των μπαγκετών ποικίλουν, όμως συνηθέστερα χρησιμοποιούνται μπαγκέτες "5A" μήκους 16 ιντσών (40,64cm) και πάχους 0,565 ιντσών (1,4351cm).

2.2 Ακουστική Κιθάρα

Η ακουστική κιθάρα είναι ένα μουσικό όργανο που έχει ποικίλα μεγέθη και σχήματα και παράγει ήχο μέσω έξι δονούμενων χορδών. Οι χορδές μπορεί να είναι κατασκευασμένες από ατσάλι, από νάυλον ή από ατσάλι τυλιγμένο με νάυλον. Το σώμα της ακουστικής κιθάρας είναι ξύλινο και κοίλο, πράγμα που σημαίνει ότι όταν υπάρχει τράβηγμα ή χτύπημα στις χορδές, οι ήχοι αντηχούν στην κορυφή ή στο ηχείο για να δημιουργήσουν στη συνέχεια έναν ακουστικό ήχο. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος της κιθάρας, τόσο πιο χαμηλές συχνότητες έχει ο παραγόμενος ήχος. Η ακουστική κιθάρα αποτελείται από τα εξής μέρη:

i) Λαιμός

Ο λαιμός της κιθάρας προεξέχει από το κύριο σώμα κιθάρας και περιλαμβάνει την ταστιέρα, τα τάστα, την κεφαλή και τη βέργα (που εμποδίζει το λαιμό να λυγίσει λόγω της τάσης των χορδών).

ii) Ταστιέρα

Η ταστιέρα είναι συγκολλημένη στο μπροστινό μέρος του λαιμού και είναι κατασκευασμένη από διάφορα είδη ξύλου, όπως ο έβενος, η τριανταφυλλιά και ο σφένδαμος.

iii) Τάστα

Τα τάστα κιθάρας είναι ανυψωμένα μέρη στην ταστιέρα της κιθάρας που εκτείνονται σε όλο το πλάτος του λαιμού και είναι γενικά κατασκευασμένα από μέταλλο.

iv) Καβαλάρης ή ζυγός

Το λεπτό κομμάτι υλικού που στηρίζει τις χορδές στο άκρο του λαιμού της κιθάρας που βρίσκεται πιο κοντά στην κεφαλή της κιθάρας ονομάζεται καβαλάρης. Αυτό το σημαντικό κομμάτι, συνήθως κατασκευασμένο από έβανο, ελεφαντόδοντο, ορείχαλκο ή συνθετικά υλικά, συγκρατεί τις χορδές στο σωστό ύψος από την ταστιέρα και έχει εγκοπές για να οριστεί η απόσταση μεταξύ τους.

v) Κεφαλή

Στο πάνω μέρος του λαιμού βρίσκεται η κεφαλή της κιθάρας, η οποία συγκρατεί τα κλειδιά που επιτρέπουν στην κιθάρα να κουρδιστεί.

vi) Κλειδιά κουρδίσματος

Κάθε κλειδί περιστρέφει ένα «καπάκι» για να τυλιχτεί η χορδή γύρω του μέσω ενός γραναζιού, αυξάνοντας ή μειώνοντας την τάση στη χορδή για ανύψωση και μείωση του τόνου.

vii) Ηχητική οπή

Ολόκληρη η επιφάνεια του σώματος της κιθάρας εκπέμπει ήχο, με την οπή να επιτρέπει στο ηχείο να δονείται ελεύθερα και να λειτουργεί ως ένα είδος βαλβίδας διαφυγής για τον δονούμενο αέρα. Η ηχητική οπή συνήθως βρίσκεται στο κέντρο του σώματος της κιθάρας και είναι κυκλική.

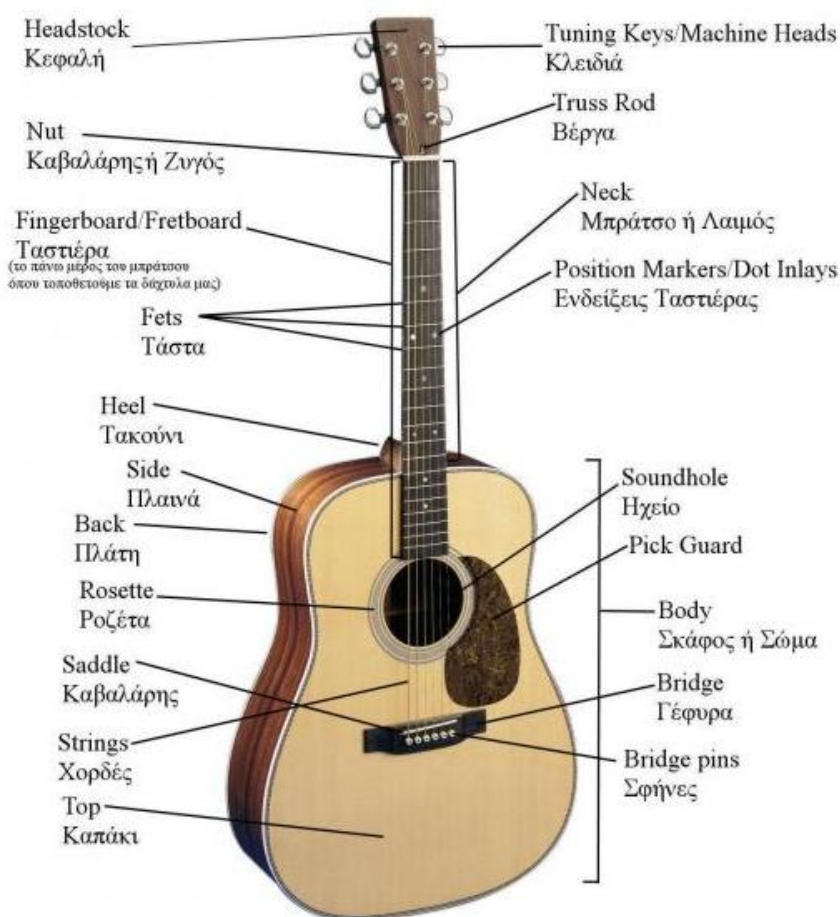
viii) Προστατευτικό για πένα

Το μέρος αυτό της κιθάρας προστατεύει το σώμα της από γρατσουνιές ή ζημιές από την πένα. Τα προστατευτικά μπορούν να κατασκευαστούν από οποιοδήποτε αριθμό υλικών, όπως πλαστικό, μέταλλο ή ξύλο. Είναι πολύ λεπτό για να μην μειώνει τις δονήσεις του ηχείου.

ix) Γέφυρα

Η γέφυρα της κιθάρας στηρίζει τις χορδές και μεταδίδει τη δόνηση τους στο ηχείο. Οι χορδές παράγουν από μόνες τους έναν πολύ χαμηλό ήχο επειδή εκτοπίζουν μόνο έναν μικροσκοπικό όγκο αέρα καθώς δονούνται. Επομένως, η δόνηση των χορδών πρέπει να διοχετεύεται σε μια μεγαλύτερη επιφάνεια συντονισμού και μια γέφυρα είναι ο συνήθης τρόπος για να επιτευχθεί αυτό στα έγχορδα όργανα. Οι γέφυρες μπορεί να αποτελούνται από ένα μόνο υλικό, συνήθως ξύλο για ακουστικές κιθάρες, ή μπορεί να είναι κατασκευασμένες από πολλά μέρη και να περιλαμβάνουν άλλα υλικά όπως πλαστικό ή κόκκαλο.

Τα Μέρη της Ακουστικής Κιθάρας



Εικόνα 2.3: Τα μέρη της ακουστικής κιθάρας

Στο εσωτερικό της η ακουστική κιθάρα αποτελείται από τα εξής μέρη:

i) Βραχίονας X (X-Brace)

Αυτός είναι ο κύριος βραχίονας που σχηματίζει ένα μοτίβο X ακριβώς κάτω από την ηχητική οπή. Οι μοίρες του σχήματος X συμβάλλουν στην ισορροπία μεταξύ των

πρίμων και των μπάσων τόνων. Ένα πιο «κλειστό» Χ αυξάνει τις ψηλές συχνότητες και ένα πιο «ανοιχτό» αυξάνει τις μπάσες συχνότητες.

jj) Ηχητική οπή (Soundhole)

Το μέγεθος της ηχητικής οπής συμβάλλει επίσης στον τόνο. Όσο μεγαλύτερη είναι η οπή ήχου τόσο περισσότερα είναι τα πρίμα.

iii) Κομμάτι λαιμού (Neck Block)

Στο σημείο αυτό τοποθετείται ο λαιμός.

iv) Κομμάτι «ουράς» (Tail Block)

Ο κύριος σκοπός του είναι η ενίσχυση στο κάτω μέρος της κιθάρας.

v) Επένδυση (Lining)

Ο κύριος σκοπός της επένδυσης είναι να διευρύνει την περιοχή κόλλησης για την προσάρτηση του ηχείου και της πλάτης στα πλάγια. Οι περισσότερες επενδύσεις έχουν πολλές μικρές τομές για τη διευκόλυνση της κάμψης.

vi) Μπάρες τόνου (Tone Bars)

Ενισχύουν το κάτω τμήμα του σώματος της κιθάρας και εξισορροπούν τους πρίμους και τους μπάσους τόνους.

vii) Βραχίονες πρίμων (Treble Braces)

Οι βραχίονες αυτοί ενισχύουν την κορυφή του σώματος και αυξάνουν τις πρίμες συχνότητες.

viii) Σταυρωτή αντηρίδα (Cross Strut)

Η αντηρίδα αυτή ενισχύει τον πάνω χώρο ,κάτω από την ταστιέρα. Έχει μεγάλο πάχος λόγω της υψηλής τάσης που ασκεί ο λαιμός στην κορυφή σε αυτή την περιοχή.

ix) Ηχείο (Soundboard)

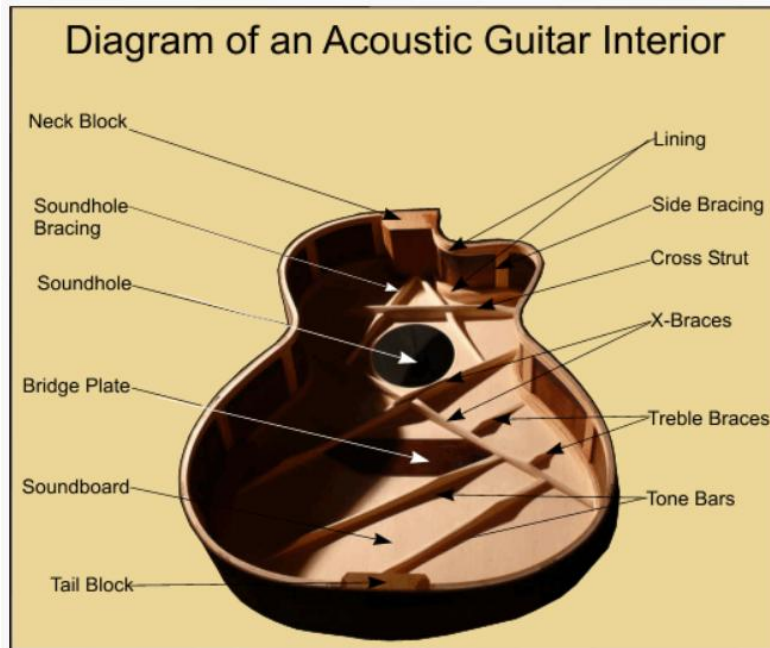
Αυτή είναι η κύρια δονούμενη πλάκα μιας ακουστικής κιθάρας και παράγει το μεγαλύτερο μέρος του ήχου.

x) Πλάκα γέφυρας (Bridge Plate)

Η πλάκα της γέφυρας ενισχύει την περιοχή κάτω από τη γέφυρα και παρέχει μια σκληρή επιφάνεια, έτσι ώστε οι σφαιρικές άκρες των χορδών να μην φθείρονται μέσω της σχετικά μαλακής κορυφής.

xi) Πλαϊνοί βραχίονες (Side Bracing)

Προσθέτουν δύναμη στα πλάγια και μπορούν να ενισχύσουν τον παραγόμενο τόνο.



Εικόνα 2.4: Τα μέρη στο εσωτερικό της ακουστικής κιθάρας

2.3 Ακουστικό Μπάσο

Το ακουστικό μπάσο κατασκευάζεται όπως η ακουστική κιθάρα, μεταξύ τους όμως εμφανίζονται μερικές διαφορές. Τα ακουστικά μπάσα είναι σχεδόν πάντα μεγαλύτερα από τις ακουστικές κιθάρες. Ένα τυπικό μπάσο μεγάλης κλίμακας έχει λαιμό περίπου 34 ίντσες (86 cm) σε μήκος. Τα μπάσα μικρής κλίμακας μπορούν να έχουν μήκος λαιμού περίπου 30 ίντσες ή (76cm) σε μήκος. Ο λαιμός μιας κιθάρας, από την άλλη πλευρά, είναι συνήθως περίπου 25 ίντσες (64cm) μήκος. Οι χορδές του ακουστικού μπάσου είναι επίσης πιο χοντρές και μακρύτερες από τις χορδές κιθάρας. Στο ακουστικό μπάσο συνήθως υπάρχουν 4 χορδές, ενώ οι ακουστικές κιθάρες συνήθως έχουν έξι χορδές.



Εικόνα 2.5: Το ακουστικό μπάσο

Κεφάλαιο 3- Μαθηματικές Μέθοδοι

3.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FDM)

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FDM) είναι μια αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέσω της προσέγγισης των παραγώγων με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών.

Η αρχή των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών είναι κοντά στα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Συνίσταται στην προσέγγιση του διαφορικού τελεστή με την αντικατάσταση των παραγώγων στην εξίσωση χρησιμοποιώντας διαφορικά πηλίκια. Ο τομέας διαιρείται στο χώρο και στο χρόνο και οι προσεγγίσεις της λύσης υπολογίζονται στο χώρο ή στο χρόνο, σε διακριτά σημεία του τομέα, ή αλλιώς στα σημεία πλέγματος. Με αυτό τον τρόπο, οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών μετατρέπουν τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ή τις μερικές διαφορικές εξισώσεις σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που μπορούν να λυθούν με τεχνικές της γραμμικής άλγεβρας.

Το σφάλμα μεταξύ της αριθμητικής λύσης και της ακριβούς λύσης καθορίζεται από το σφάλμα που προκύπτει μεταβαίνοντας από έναν διαφορικό τελεστή σε έναν τελεστή διαφοράς. Αυτό το σφάλμα ονομάζεται σφάλμα διακριτοποίησης ή σφάλμα αποκοπής. Ο όρος σφάλμα αποκοπής αντανάκλα το γεγονός ότι στην προσέγγιση χρησιμοποιείται ένα πεπερασμένο μέρος μιας σειράς Taylor.

Για αρχή, για λόγους απλότητας, θα εξετάσουμε μόνο τη μονοδιάστατη περίπτωση. Η κύρια ιδέα πίσω από κάθε σχήμα πεπερασμένων διαφορών σχετίζεται με τον ορισμό της παραγώγου μιας ομαλής συνάρτησης u σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

Άρα για μικρό h έχουμε :

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad (3.1)$$

και στο γεγονός ότι όταν το h τείνει στο 0, χωρίς να εξαφανίζεται, το πηλίκιο στη δεξιά πλευρά παρέχει μια «καλή» προσέγγιση της παραγώγου. Με άλλα λόγια, το h θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό για να έχουμε μια καλή προσέγγιση. Μένει να υποδείξουμε ποια ακριβώς είναι μια καλή προσέγγιση. Στην πραγματικότητα, η προσέγγιση είναι καλή όταν το σφάλμα που προκύπτει σε αυτήν την προσέγγιση (δηλαδή κατά την αντικατάσταση της παραγώγου από το διαφορικό πηλίκιο) τείνει προς το μηδέν όταν το h τείνει στο μηδέν. Εάν η συνάρτηση u είναι αρκετά ομαλή στη γειτονιά του x , είναι δυνατό να ποσοτικοποιηθεί αυτό το σφάλμα χρησιμοποιώντας ένα ανάπτυγμα Taylor.

Η σχέση (3.1) εκφράζει την προς τα εμπρός πεπερασμένη διαφορά. Αν στη σχέση (3.1) αντικαταστήσουμε το h με $-h$, έχουμε:

$$u'(x) \approx \frac{u(x-h)-u(x)}{-h} = \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \quad (3.2)$$

Η σχέση (3.2) εκφράζει την προς τα πίσω πεπερασμένη διαφορά. Προσθέτοντας τις σχέσεις (3.1) και (3.2), έχουμε:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \quad (3.3)$$

Η σχέση (3.3) εκφράζει την κεντρική πεπερασμένη διαφορά.

3.1.1 Σειρές Taylor

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση u είναι C^2 συνεχής σε μια γειτονική περιοχή του x . Για οποιοδήποτε $h>0$ έχουμε :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x+h_1) \quad (3.4)$$

όπου h_1 είναι ένας αριθμός μεταξύ του 0 και του h (δηλαδή το $x+h_1$ είναι σημείο του διαστήματος $(x, x+h)$). Για την αντιμετώπιση προβλημάτων, είναι βολικό να διατηρηθούν μόνο οι δύο πρώτοι όροι της προηγούμενης έκφρασης:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h^2)$$

Ο όρος $O(h^2)$ υποδηλώνει ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι ανάλογο του h^2 . Από την εξίσωση (3.4), συμπεραίνουμε πως υπάρχει μια σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε για ένα αρκετά μικρό $h>0$ ισχύει :

$$\left| \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch \quad , C = \sup_{y \in [x, x+h_0]} \frac{|u''(y)|}{2} \quad (3.5)$$

για $h \leq h_0$ (για δεδομένο $h_0 > 0$). Το σφάλμα που προκύπτει με την αντικατάσταση της παραγώγου $u'(x)$ από το διαφορικό πηλίκο είναι της τάξης h . Το διαφορικό πηλίκο της σχέσης (3.4) είναι η προσέγγιση του $u'(x)$ με προς τα εμπρός διαφορά. Από τα αναπτύγματα Taylor, αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις το h με Δx και τους όρους $u(x+h)$, $u(x)$ και $u(x-h)$ με u_{i+1} , u_i και u_{i-1} αντίστοιχα, προκύπτουν οι παρακάτω φόρμουλες διαφορών για τις πρώτες παραγώγους:

Προς τα εμπρός διαφορά:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{(u_{i+1}-u_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i - \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i - \dots - \text{όροι μεγαλύτερης τάξης} \quad (3.6)$$

Προς τα πίσω διαφορά:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{(u_i-u_{i-1})}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i - \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i - \dots - \text{όροι μεγαλύτερης τάξης} \quad (3.7)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (3.6) και (3.7) έχουμε:

Κεντρική διαφορά:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad (3.8)$$

Με βάση τη φύση των εξισώσεων που διατυπώνονται για τον τομέα του προβλήματος, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών ταξινομείται σε μη πεπλεγμένες (explicit) και πεπλεγμένες (implicit) μεθόδους πεπερασμένων διαφορών.

3.1.2 Μη πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Κατά την επίλυση μιας εξίσωσης, εάν η εξαρτημένη μεταβλητή σε επίπεδο χρόνου λαμβάνεται απευθείας από γνωστές τιμές, χρησιμοποιείται η μη πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Για παράδειγμα, θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+1} = x_n + f(y_n)$$

Σε αυτή την εξίσωση, η τιμή του y στο χρονικό σημείο $(n+1)$ εξαρτάται από τη μεταβλητή x τη στιγμή n και τη συνάρτηση του y στο χρονικό βήμα n . Αυτή η εξίσωση υποδηλώνει ότι ο υπολογισμός πραγματοποιείται για να ληφθεί η τιμή προς τα εμπρός στο χρόνο χρησιμοποιώντας ποσότητες από προηγούμενα χρονικά βήματα. Το σχήμα πεπερασμένων διαφορών αυτού του τύπου λέγεται ότι είναι μη πεπλεγμένο.

Ωστόσο, σε ορισμένες εκφράσεις, το αποτέλεσμα σε ένα βήμα προς τα εμπρός εξαρτάται από τον εαυτό του. Η μέθοδος των πεπλεγμένων πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται σε μια τέτοια επίλυση προβλημάτων.

3.1.3 Πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Εάν ο άγνωστος σε επίπεδο μελλοντικού χρόνου εκφράζεται με όρους μεταβλητών σε αυτό το χρονικό επίπεδο και μεταβλητών σε παρελθόντες, παρόντες και μελλοντικούς χρόνους, σχηματίζεται η πεπλεγμένη μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Για παράδειγμα, θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+1} = x_n + f(y_{n+1})$$

Εδώ, το y στο $(n+1)$ -οστό χρονικό βήμα εξαρτάται από την τιμή x στο n -οστό χρονικό βήμα και τη συνάρτηση της $f(y)$ στην $(n+1)$ -οστή στιγμή. Αυτό απαιτεί μια πεπλεγμένη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών[1].

3.1.4 Επέκταση σχέσεων της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών από 1D σε 2D

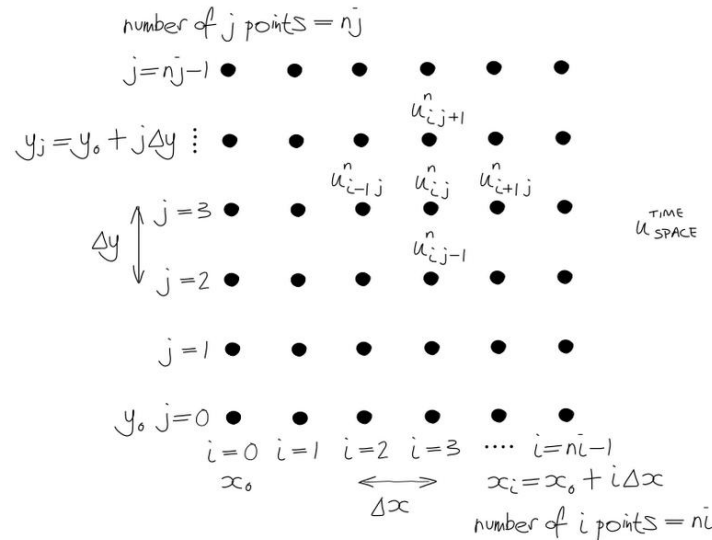
Για να επεκτείνουμε τις σχέσεις της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών στις 2 διαστάσεις, εφαρμόζουμε τον ορισμό της μερικής παραγώγου σε σχέση με τη μια μεταβλητή, κρατώντας σταθερή την άλλη μεταβλητή.

Θεωρούμε ένα 2D πλέγμα ως εξής:

Για i μεταξύ του 0 και του n_i-1 και για j μεταξύ του 0 και του n_j-1 έχουμε (Σχήμα 3.1) :

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y$$



Σχήμα 3.1: Πλέγμα για τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών[2].

Για το σημείο $(i+1, j+1)$ του πλέγματος, έχουμε τη σειρά Taylor στις δύο διαστάσεις:

$$u_{i+1, j+1} = u_{i, j} + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) u \Big|_{i, j} + \frac{1}{2} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u \Big|_{i, j} + \frac{1}{6} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 u \Big|_{i, j} + \dots + \text{όροι υψηλότερης τάξης} \quad (3.9)$$

- Προς τα εμπρός διαφορά

Πρώτη παράγωγος στη x -διεύθυνση:

1. $\Delta y = 0$
2. Οι όροι που είναι τάξης μεγαλύτερης από 1 είναι 0.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i, j} = \frac{(u_{i+1, j} - u_{i, j})}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.10)$$

- Κεντρική διαφορά

Ο τύπος της 1ης παραγώγου της κεντρικής διαφοράς προκύπτει ως εξής:

Εφαρμόζουμε ένα προς τα εμπρός βήμα Taylor, ένα προς τα πίσω βήμα Taylor, αφαιρούμε τις δύο σχέσεις που προκύπτουν, αναδιατάσσουμε την παράγωγο και προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i, j} = \frac{(u_{i+1, j} - u_{i-1, j})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.11)$$

Ο τύπος της 2ης παραγώγου της κεντρικής διαφοράς προκύπτει ως εξής:

Εφαρμόζουμε ένα προς τα εμπρός βήμα Taylor, ένα προς τα πίσω βήμα Taylor, προσθέτουμε τις δύο σχέσεις που προκύπτουν, αναδιατάσσουμε την παράγωγο και προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i, j} = \frac{(u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.12)$$

3.2 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) είναι μια αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται για την εύρεση κατά προσέγγιση λύσεων σε προβλήματα συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις. Είναι μια μέθοδος που υποδιαιρεί ένα μεγάλο σύστημα σε μικρότερα, απλούστερα μέρη που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Αυτά τα πεπερασμένα στοιχεία στη συνέχεια συναρμολογούνται σε ένα μεγαλύτερο σύστημα που μοντελοποιεί ολόκληρο το πρόβλημα.

Πιο συγκεκριμένα, στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, οι συναρτήσεις μετατρέπονται από έναν χώρο άπειρων διαστάσεων σε άλλες, σε έναν χώρο πεπερασμένων διαστάσεων. Ο χώρος πεπερασμένων διαστάσεων μετατρέπεται σε συνήθη διανύσματα σε ένα διανυσματικό χώρο που μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε τον τομέα σε μικρά στοιχεία (π.χ. τρίγωνα) και να βρούμε μια πολυωνμική προσέγγιση στις εξαρτημένες μεταβλητές (άγνωστες συναρτήσεις) σε κάθε στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε αυτές τις συναρτήσεις, μετατρέπονται σε συνήθη διανύσματα. Η προσέγγιση συνδυάζει διακριτές προσεγγίσεις για να αποκτηθεί μια συνολική λύση. Τα δημοφιλή πολυώνυμα με τρίγωνα περιλαμβάνουν γραμμικούς και τετραγωνικούς τύπους. Η μαθηματική διαδικασία της FEM είναι ο πολλαπλασιασμός της μερικής διαφορικής εξίσωσης με μια κατάλληλη συνάρτηση δοκιμής για να δημιουργηθεί ένα υπόλοιπο ή ένα σφάλμα με τη μορφή ενός βαθμωτού γινομένου που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Στη συνέχεια, ενσωματώνουμε το εσωτερικό γινόμενο και το ρυθμίζουμε να είναι ίσο μηδέν, το οποίο ονομάζεται ασθενής μορφή (ή μεταβολική σύνθεση) [3].

Έτσι λοιπόν, τρία στοιχεία-κλειδιά της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι τα εξής [4] :

- Η διακριτοποίηση τομέα, η οποία είναι μια διαδικασία που περιλαμβάνει την κατανομή του φυσικού τομέα σε ένα σύνολο απλών στοιχείων.
- Επιλογή συνάρτησης βάσης, που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση της λύσης σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο.
- Το υπόλοιπο, το οποίο είναι η διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της κατά προσέγγιση συνάρτησης.

3.2.1 Στοιχεία Raviart-Thomas

Τα πεπερασμένα τετραεδρικά στοιχεία εδρών(ή αλλιώς τα στοιχεία Raviart-Thomas) είναι ένα διακριτό υποσύνολο του χώρου $H(\text{div}, \Omega)$.

Ο χώρος $H(\text{div}, \Omega)$ ορίζεται ως εξής:

$$H(\text{div}, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\} \quad (3.13)$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι μια ανοιχτή κυρτή καμπύλη με πολυγωνικό σύνορο και ο $L^2(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert. Στο χώρο $L^2(\Omega)$ το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:

$$\langle \varphi | \psi \rangle \equiv \int \bar{\psi} \varphi dx \quad (3.14)$$

Όπως υπονοεί και το όνομα των πεπερασμένων τετραεδρικών στοιχείων, πρόκειται για διανυσματικές συναρτήσεις οι οποίες στην 1η τάξη τους είναι ορισμένες πάνω στις τέσσερις έδρες του τετραεδρικού στοιχείου. Σε αντιπαράθεση με την κατασκευή των συναρτήσεων ακμής από πολυώνυμα με συντελεστές τις κλίσεις των διακριτών συναρτήσεων του $H(grad, \Omega)$ χώρου, οι συναρτήσεις έδρας κατασκευάζονται από πολυώνυμα των στροφών των διακριτών συναρτήσεων του $H(curl, \Omega)$, δηλαδή των στροφών των συναρτήσεων ακμής [5].

Οι χώροι $H(grad, \Omega)$ και $H(curl, \Omega)$ ορίζονται ως εξής:

$$H(grad, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\} \quad (3.15)$$

$$H(curl, \Omega) = \{E \in L^2(\Omega) : \nabla \times E \in L^2(\Omega)\} \quad (3.16)$$

3.3 Μέθοδος πλασματικού τομέα

Η αλληλεπίδραση ρευστού-δομής (FSI) είναι ένα κρίσιμο ερευνητικό πεδίο στις τρέχουσες εφαρμογές μηχανικής. Η κίνηση των σωματιδίων στη ροή διάτμησης είναι αντιπροσωπευτική και έχει εκτεταμένες εφαρμογές στην επεξεργασία ιλύος, στον διαχωρισμό κολλοειδών και στη βιολογική κυτταρική κίνηση

Η μέθοδος της πλασματικής περιοχής είναι μια αποτελεσματική προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων FSI, η οποία επεκτείνει το πλασματικό ρευστό σε στερεά σωματίδια και επιβάλλει περιορισμούς στις κινήσεις τους στο ρευστό. Προτάθηκε αρχικά από τον Saul'ev το 1963. Η μέθοδος του πλασματικού τομέα είναι μια μέθοδος για την εύρεση της λύσης μερικών διαφορικών εξισώσεων σε έναν πολύπλοκο τομέα D , αντικαθιστώντας ένα δεδομένο πρόβλημα που τίθεται σε έναν τομέα D , με ένα νέο πρόβλημα που τοποθετείται σε έναν απλό τομέα Ω που περιέχει τον τομέα D . Μια γενική διατύπωση είναι η εξής [6],[7]:

Θεωρούμε πως σε μια περιοχή $D \subset \mathbb{R}^n$ θέλουμε να βρούμε τη λύση $u(x)$ της εξίσωσης :

$$Lu = -\varphi(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \quad (3.17)$$

με συνοριακές συνθήκες :

$$Lu = g(x), \quad x \in \partial D \quad (3.18)$$

Όπως προαναφέρθηκε, η βασική ιδέα στη μέθοδο πλασματικού τομέα είναι η αντικατάσταση ενός προβλήματος τοποθετημένου σε έναν τομέα D , με ένα νέο πρόβλημα τοποθετημένο σε έναν απλό τομέα Ω που περιέχει το D ($D \subset \Omega$). Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε n -διάστατο παραλληλότοπο ως Ω .

Το πρόβλημα στο διευρυμένο τομέα Ω για τη νέα λύση $u_\varepsilon(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u_\varepsilon &= -\varphi^\varepsilon(x), \quad x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \\ l_\varepsilon u_\varepsilon &= g^\varepsilon(x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.19)$$

Είναι απαραίτητο να θέσουμε το πρόβλημα στην εκτεταμένη περιοχή, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(x), \quad x \in D \quad (3.20)$$

3.3.1 Πεπερασμένα Στοιχεία Lagrange

Ένα υπολογιστικό αντικείμενο που μπορεί να αναπαραστήσει στοιχεία του απλούστερου χώρου πεπερασμένων στοιχείων, που ονομάζεται χώρος πεπερασμένων στοιχείων Lagrange. Αυτοί είναι διανυσματικοί χώροι συναρτήσεων σε ένα χωρικό πεδίο. Το στοιχείο Lagrange, ή το κομβικό στοιχείο, ορίστηκε για πρώτη φορά με τη χρήση πολωνύμων παρεμβολής Lagrange στην εισαγωγή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων από τον Courant.

● Ορισμός πεπερασμένου στοιχείου Clariet

Θεωρούμε [8] :

1. Τον τομέα στοιχείων $K \subset \mathbb{R}^n$ να είναι κάποιο οριοθετημένο κλειστό σύνολο με τμηματικά ομαλό όριο
2. Ο χώρος των συναρτήσεων σχήματος P είναι ένας πεπερασμένος διαστατικός χώρος συναρτήσεων στο K
3. Το σύνολο των κομβικών μεταβλητών $N=(N_0, \dots, N_k)$ είναι η βάση του δυϊκού χώρου P' .

Τότε το (K, P, N) ονομάζεται πεπερασμένο στοιχείο.

Στην παρούσα παράγραφο, το K θα είναι ένα πολύγωνο όπως τρίγωνο, τετράγωνο, τετράεδρο ή κύβος, και το P θα είναι ένας χώρος πολωνύμων. Εδώ, το P' είναι ο δυϊκός χώρος στο P , που ορίζεται ως ο χώρος των γραμμικών συναρτήσεων από το P στο \mathbb{R} .

● Ορισμός κομβικής(τοπικής) βάσης

Έστω (K, P, N) πεπερασμένο στοιχείο. Η κομβική βάση είναι η βάση $\{\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ του P που είναι δυϊκή στο N , δηλαδή:

$$N_i(\varphi_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq k \quad (3.21)$$

● Το μονοδιάστατο στοιχείο Lagrange

Το μονοδιάστατο στοιχείο Lagrange (K, P, N) k βαθμού ορίζεται με:

1. K είναι το διάστημα $[a, b]$, για $-\infty < a < b < \infty$
2. P είναι ο $(k+1)$ -διάστατος χώρος πολωνύμων k βαθμού στο K
3. $N=N_0, \dots, N_k$, με:

$$N_i(v) = v(x_i), \quad x_i = a + \frac{(b-a)i}{k}, \quad \forall v \in P, i = 0, \dots, k \quad (3.22)$$

● Ορισμός στοιχείων Lagrange σε τρίγωνο

Το τριγωνικό στοιχείο Lagrange k βαθμού (K, P, N) , το οποίο συμβολίζεται P_k , ορίζεται ως εξής:

1. K είναι ένα (μη-εκφυλισμένο) τρίγωνο με κορυφές z_1, z_2, z_3
2. P είναι ο χώρος πολωνύμων k βαθμού στο K
3. $N = \{N_{i,j} : 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq i\}$, που ορίζεται ως $N_{i,j}(v) = v(x_{i,j})$ όπου:

$$x_{i,j} = z_1 + (z_2 - z_1) \frac{i}{k} + (z_3 - z_1) \frac{j}{k} \quad (3.23)$$

Στη μία διάσταση [9]:

$\mathbb{P}_k(K)$ είναι ο διανυσματικός χώρος πολωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού $k \in \mathbb{N}$ στο $K \subset \mathbb{R}^d$.

Έστω $\mathbb{P}_k([a,b])$ ο χώρος των πολωνύμων $p = \sum_{i=0}^k \alpha_i x^i$ βαθμού μικρότερου ή ίσου με k στο διάστημα $[a,b]$, όπου $c_i x^i$ είναι το μονώνυμο i τάξης, με c_i πραγματικό αριθμό.

Μία φυσική βάση $\mathbb{P}_k([a,b])$ αποτελείται από ένα σύνολο μονωνύμων $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$. Τα στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα αλλά στο πλαίσιο των πεπερασμένων στοιχείων μπορούμε να επιλέξουμε μια άλλη βάση που είναι η βάση Lagrange $\{L_i^k\}_{0 \leq i \leq k}$ βαθμού k , η οποία ορίζεται σε ένα σύνολο $k+1$ σημείων $\{\xi_i\}_{0 \leq i \leq k}$ τα οποία ονομάζονται κόμβοι Lagrange (ή στοιχεία Lagrange).

Για τα πολώνυμα Laplace k βαθμού που σχετίζονται με τον κόμβο ξ_m , ισχύει :

$$\mathcal{L}_m^k(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq m}^k (x - \xi_i)}{\prod_{i=0, i \neq m}^k (\xi_m - \xi_i)} \quad \text{και} \quad \sum_{i=0}^k \mathcal{L}_i^k(x) = 1 \quad (3.24)$$

με κομβική βάση (όπως αναφέραμε και παραπάνω με διαφορετικό συμβολισμό) :

$$\mathcal{L}_i^k(\xi_j) = \delta_{i,j} \quad , 0 \leq i, j \leq k \quad (3.25)$$

3.4 Φασματική μέθοδος επίλυσης

Οι φασματικές μέθοδοι είναι ισχυρές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε αντίθεση με τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών, οι φασματικές μέθοδοι είναι καθολικές μέθοδοι, όπου ο υπολογισμός σε οποιοδήποτε δεδομένο σημείο εξαρτάται όχι μόνο από πληροφορίες σε γειτονικά σημεία, αλλά από πληροφορίες από ολόκληρο τον τομέα. Οι φασματικές μέθοδοι συγκλίνουν εκθετικά, γεγονός που τις καθιστά πιο ακριβείς από τις τοπικές μεθόδους. Οι καθολικές μέθοδοι είναι προτιμότερες από τις τοπικές μεθόδους όταν η λύση ποικίλλει σημαντικά σε χρόνο ή χώρο, όταν απαιτείται πολύ υψηλή χωρική ανάλυση και επίσης όταν απαιτείται μακροχρόνια ολοκλήρωση.

Στις φασματικές μεθόδους, η λύση προσεγγίζεται ως επέκταση ως προς τις συναρτήσεις φασματικής βάσης. Εδώ, οι βασικές συναρτήσεις είναι απείρως διαφοροποιήσιμες καθολικές (μη τοπικές) συναρτήσεις που ορίζονται σε έναν

ολόκληρο τομέα, π.χ. τριγωνομετρικές συναρτήσεις, πολυώνυμα Chebyshev, πολυώνυμα Legendre και ούτω καθεξής, κάνοντας τις φασματικές μεθόδους διαφορετικές από τις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων διαφορών [10],[11].

Οι διαφορές μεταξύ των φασματικών μεθόδων και της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών είναι οι εξής:

Οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών λαμβάνονται με προσέγγιση μιας συνάρτησης $u(x)$ από έναν τοπικό πολυωνυμικό παρεμβολέα και οι παράγωγοι του $u(x)$ προσεγγίζονται στη συνέχεια παραγωγίζοντας αυτό το τοπικό πολυώνυμο. Εδώ η λέξη “τοπικό” αναφέρεται στη χρήση κοντινών σημείων πλέγματος για την προσέγγιση της συνάρτησης ή της παραγώγου της σε ένα δεδομένο σημείο. Για αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις, η χρήση τοπικών πολυωνυμικών παρεμβολέων που βασίζονται σε μικρό αριθμό σημείων πλέγματος παρεμβολής είναι πολύ λογική. Πράγματι, φαίνεται να μην έχει νόημα να συμπεριληφθούν τιμές συναρτήσεων πολύ μακριά από το σημείο ενδιαφέροντος για την προσέγγιση της παραγώγου. Ωστόσο, η χρήση τοπικών πολυωνύμων χαμηλού βαθμού για την προσέγγιση λύσεων που περιέχουν πολύ σημαντικές χωρικές ή χρονικές διακυμάνσεις απαιτεί ένα πολύ λεπτό πλέγμα προκειμένου να επιλυθεί με ακρίβεια η συνάρτηση. Σαφώς, η χρήση λεπτών πλεγμάτων απαιτεί σημαντικούς υπολογιστικούς πόρους σε προσομοιώσεις που ενδιαφέρουν την επιστήμη και τη μηχανική. Ενόψει τέτοιων περιορισμών αναζητούμε εναλλακτικά σχήματα που θα επιτρέπουν πιο χονδροειδή πλέγματα και επομένως λιγότερους υπολογιστικούς πόρους. Οι φασματικές μέθοδοι είναι τέτοιες μέθοδοι. Χρησιμοποιούν όλες τις διαθέσιμες τιμές συνάρτησης για να δημιουργήσουν τις απαραίτητες προσεγγίσεις.

Σε όλες τις φασματικές μεθόδους έχουμε συναρτήσεις δοκιμής (φ_n), οι οποίες είναι μια πλήρης οικογένεια (βάση) ομαλών καθολικών συναρτήσεων[12].

Η κατηγοριοποίηση των φασματικών μεθόδων με κριτήριο τις ελεγχουσυναρτήσεις x_n :

- Μέθοδος Galerkin

Ελεγχουσυναρτήσεις = Συναρτήσεις δοκιμής : $x_n = \varphi_n$ και κάθε φ_n ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $B\varphi_n(y)=0$

- Μέθοδος tau

Ελεγχουσυναρτήσεις = (οι περισσότερες) συναρτήσεις δοκιμής: $x_n = \varphi_n$ αλλά οι φ_n δεν ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Οι τελευταίες επιβάλλονται από ένα επιπλέον σύνολο εξισώσεων.

- Μέθοδος collocation ή ψευδοφασματική μέθοδος

Με τον όρο συναρτήσεις δοκιμής εννοούμε τις συναρτήσεις δέλτα σε ειδικά σημεία, που ονομάζονται σημεία collocation: $x_n = \delta(x-x_n)$

Οι συναρτήσεις δοκιμής επιλέγονται ω εξής:

1. Αν έχουμε περιοδικό πρόβλημα : $\varphi_n =$ τριγωνομετρικά πολυώνυμα (σειρές Fourier)
2. Αν έχουμε μη-περιοδικό πρόβλημα : $\varphi_n =$ ορθογώνια πολυώνυμα
3. Εάν το πρόβλημα ορίζεται σε φραγμένο πεδίο αλλά δεν είναι περιοδικό, τότε η συνήθης επιλογή των συναρτήσεων βάσης είναι τα πολυώνυμα Chebyshev ή Legendre που ορίζονται στο διάστημα $x \in [-1,1]$. Εάν ο τομέας είναι ημι-φραγμένος, δηλαδή $x \in [0,\infty)$, χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα Laguerre και αν

ο τομέας δεν είναι φραγμένος, δηλαδή $x \in (-\infty, \infty)$, χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα Hermite. Τα δύο τελευταία πολυώνυμα χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα στην κινητική θεωρία[11]. Για παραδείγματα εφαρμογής φασματικών μεθόδων στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, παραπέμπουμε στην πηγή [12].

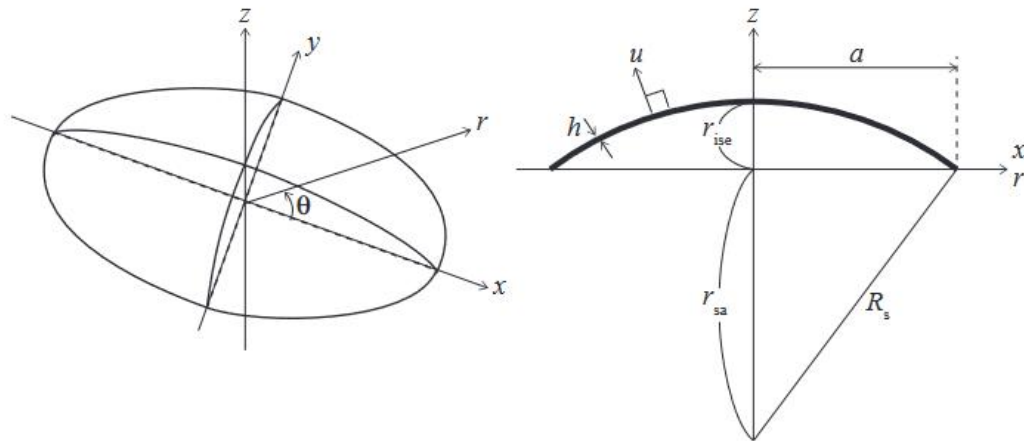
Κεφάλαιο 4- Μοντελοποίηση Πιατινιών

4.1 Εισαγωγή

Τα κύμβαλα ή αλλιώς πιατίνια ανήκουν στην κατηγορία των ιδιόφωνων κρουστών οργάνων. Μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν ως «μη γραμμικά κρουστά όργανα». Αυτός ο χαρακτηρισμός οφείλεται στο γεγονός πως οι κατασκευές με λεπτή γεωμετρία, όπως είναι δοκοί, καμάρες, πλάκες και κελύφη (στα οποία συγκαταλέγονται τα κύμβαλα), μπορούν να εμφανίσουν δονητικές μετατοπίσεις, των οποίων το πλάτος είναι της τάξης μεγέθους του πάχους τους. Το χαρακτηριστικό αυτό δημιουργεί γεωμετρική μη γραμμικότητα κι έτσι εμφανίζονται μη γραμμικές συμπεριφορές, όπως φαινόμενα άλματος και ανταλλαγές ενέργειας μεταξύ των διαμορφώσεων. Συνεπώς, τα φαινόμενα που εμφανίζονται σε τέτοιου είδους κατασκευές θα πρέπει να περιγράφονται από ένα μοντέλο το οποίο περιέχει μη γραμμικούς όρους [13],[14].

4.2 Μη γραμμική εξίσωση δόνησης ενός ρηχού σφαιρικού κελύφους

Το σώμα ενός πιατινιού μοντελοποιείται ως ένα ρηχό σφαιρικό κέλυφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Γεωμετρία ρηχού σφαιρικού κελύφους : 3D σχέδιο και διατομή [15]

Το κέλυφος αυτό έχει πάχος h , ακτίνα καμπυλότητας R_s , εξωτερική ακτίνα a και είναι κατασκευασμένο από ομογενές ισοτροπικό υλικό πυκνότητας ρ .

Οι παραδοχές που θα χρησιμοποιηθούν κατά την κατασκευή του μοντέλου είναι οι εξής [13],[16]:

- Το κέλυφος είναι λεπτό: $\frac{h}{a} \ll 1$ και $\frac{h}{R_s} \ll 1$
- Το κέλυφος είναι ρηχό: $\frac{a}{R_s} \ll 1$
- Οι εγκάρσιες κανονικές τάσεις παραμελούνται σε σχέση με τις άλλες τάσεις.

- Χρησιμοποιούνται οι υποθέσεις Kirchhoff-Love:
 - 1) Διατομές κάθετες στην μέση επιφάνεια του κελύφους παραμένουν επίπεδες και κάθετες στην μέση επιφάνεια κατά την παραμόρφωση ενώ το μήκος τους δεν αλλάζει.
 - 2) Η πίεση με κάθετη διεύθυνση στην μέση επιφάνεια του κελύφους είναι μικρή και επομένως η παραμόρφωση κατά την διεύθυνση αυτή μπορεί να αγνοηθεί.
- Οι περιστροφές των κάθετων διατομών προς τη μέση επιφάνεια είναι ήπιες, έτσι ώστε το ημίτονο και το συνημίτονό τους να είναι γραμμικά (υπόθεση ήπιων περιστροφών).
- Μόνο οι μη γραμμικοί όροι της χαμηλότερης τάξης περιλαμβάνονται στις παραστάσεις της πίεσης.
- Το υλικό είναι γραμμικό ελαστικό, ομοιογενές και ισότροπο.
- Η ενδοεπίπεδη και η περιστροφική αδράνεια παραμελούνται.
- Δεν υπάρχει εξωτερική πίεση μεμβράνης, η οποία επιτρέπει τη χρήση μιας τασικής συνάρτησης του Airy φ .

Μια μη γραμμική εξίσωση κίνησης για τη δονητική μετατόπιση u στην κάθετη διεύθυνση ενός ρηχού σφαιρικού κελύφους, η οποία βασίζεται στο σύστημα von Karman, εκφράζεται ως [15],[17]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -D \nabla^4 u + L(\varphi, u) - \frac{1}{R_s} \nabla^2 \varphi - 2\sigma_0 \rho h \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \alpha^2 \rho h \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon f \quad (4.1)$$

$$\nabla^4 \varphi = -\frac{Eh}{2} L(u, u) + \frac{Eh}{R_s} \nabla^2 u \quad (4.2)$$

όπου $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ είναι η καμπτική ακαμψία, ν είναι ο λόγος του Poisson, φ είναι η τασική συνάρτηση του Airy, $f=f(t)$ είναι η διεγείρουσα δύναμη, ρ είναι η πυκνότητα του υλικού, E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young, σ_0 και σ_1 είναι παράμετροι απώλειας (η σ_1 προκαλεί απώλεια εξαρτώμενη από τη συχνότητα ενώ η σ_0 απώλεια ανεξάρτητη της συχνότητας) και $\varepsilon=\varepsilon(r, \theta)$ είναι χωρική κατανομή της δύναμης. Η $f(t)$ θα μπορούσε να προκύψει από τη σύζευξη με ένα μοντέλο που περιγράφει ένα σώμα που χτυπάει το κύμβαλο, όπως για παράδειγμα το χτύπημα του κυμβάλου με ξύλινη μπαγκέτα. Η ε συνήθως περιλαμβάνει μια μυτερή κορυφή. Το σύστημα (4.1)-(4.2) θεωρείται πως ορίζεται για $r \in [0, a]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ και $t \geq 0$.

Ο τελεστής ∇^2 (ή αλλιώς Δ) συμβολίζει τον τελεστή Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες για μια συνάρτηση $\varphi(r, \theta, t)$, ενώ ο τελεστής ∇^4 συμβολίζει τη διπλή εφαρμογή του τελεστή Laplace, ο οποίος καλείται τελεστής bi-Laplace ή διαρμονικός τελεστής.

Ο μη γραμμικός τελεστής $L(\varphi, u)$ για δύο συναρτήσεις $\varphi(r, \theta, t)$ και $u(r, \theta, t)$ ορίζεται ως:

$$L(\varphi, u) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

Όταν οι δονήσεις του κυμβάλου έχουν μικρό πλάτος, δηλαδή όταν οι παράμετροι που αφορούν τον τελεστή L γίνονται αμελητέες, το σύστημα αποσυνδέεται και αξιοποιείται η γραμμική εξίσωση δονήσεων λεπτής πλάκας, η οποία είναι της μορφής

$\ddot{w} + Tw = 0$, όπου w είναι η εγκάρσια μετατόπιση της λεπτής ρηχής κατασκευής και T ένας γραμμικός τελεστής [14].

Στις εξισώσεις (4.1) και (4.2) εισάγουμε τις εξής αδιάστατες μεταβλητές:

$$\tilde{r} = \frac{r}{a}, \quad \tilde{\theta} = \theta, \quad \tilde{u} = \frac{u}{h \sqrt{6(1-v^2)}}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{D} \quad (4.3)$$

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση της κίνησης απλοποιείται και γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -\kappa^2 \{ \nabla^4 \tilde{u} - L(\tilde{\varphi}, \tilde{u}) + q \nabla^2 \tilde{\varphi} \} - 2\sigma_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + 2\sigma_1 \nabla \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + b \varepsilon f \quad (4.4)$$

$$\nabla^4 \tilde{\varphi} = -L(\tilde{u}, \tilde{u}) + 2q \nabla^2 \tilde{u} \quad (4.5)$$

όπου

$$\kappa^2 = \frac{D}{\rho h a^4}, \quad q = \frac{\alpha^2 \sqrt{6(1-v^2)}}{h R_s}, \quad b = \frac{\sqrt{6(1-v^2)}}{\rho h^2} \quad (4.6)$$

4.3 Συνοριακές συνθήκες στην περιφέρεια του κελύφους

Το περιφερειακό τμήμα του κύκλου, δηλαδή το τμήμα στο οποίο ισχύει ότι $r=a$, είναι ελεύθερο. Αν θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ (όπου αρχίζει να αποκτά κάμψη το κέλυφος) η διατμητική τάση είναι 0, προκύπτουν οι εξής συνοριακές συνθήκες σε σφαιρικές συντεταγμένες [15]:

$$-D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.7)$$

$$D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v-3}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2-v}{r^2} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.8)$$

$$\varphi|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.9)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (4.7), (4.8) και (4.9) εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές της σχέσης (4.3), κι έτσι οι συνοριακές συνθήκες γίνονται :

$$\frac{-D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{v}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{v}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right) \Big|_{\tilde{r}=1} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{D}{a^3} \left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{v-3}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{2-v}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{\theta}^2} \right) \Big|_{\tilde{r}=1} = 0 \quad (4.11)$$

$$\tilde{\varphi}|_{\tilde{r}=1} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=1} = 0 \quad (4.12)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις είναι εμφανής η επίδραση του λόγου του Poisson ν .

4.4 Συνοριακές συνθήκες στο κέντρο του κελύφους, όταν αυτό θεωρείται πακτωμένο

Αν το κέντρο του κελύφους είναι προσαρτημένο σε μια κατασκευή στήριξης, τότε είναι απαραίτητη η εισαγωγή συνοριακών συνθηκών κοντά στο κέντρο του κελύφους, όπου $r=0$. Μια απλή υπόθεση είναι πως το κέλυφος είναι πακτωμένο σε έναν

εσωτερικό κυκλικό δίσκο ακτίνας $c \ll l$ [15],[17]. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν οι εξής συνοριακές συνθήκες στο κέντρο του κελύφους :

$$u|_{r=c} = \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=c} = 0 \quad (4.13)$$

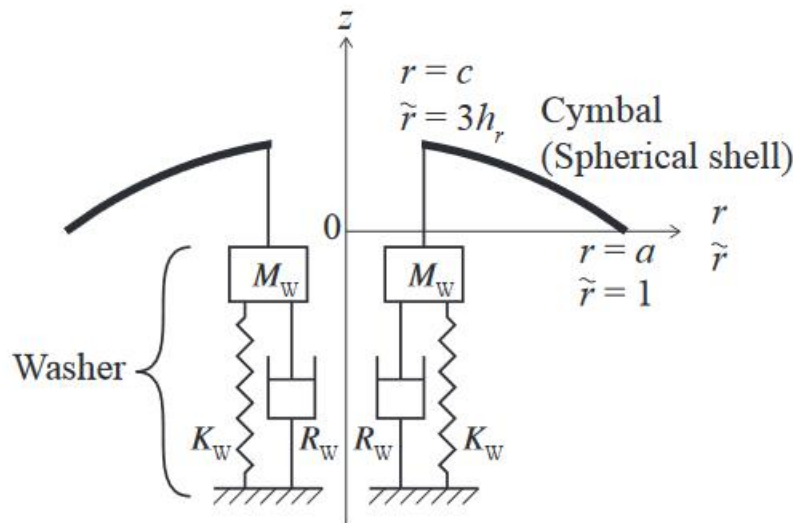
$$\varphi|_{r=c} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=c} = 0 \quad (4.14)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (4.13) και (4.14) είναι ικανοποιητικές για τις περιπτώσεις όπου η κατασκευή στήριξης του κυμβάλου δεν επιτρέπει την δονητική μετατόπιση στο κέντρο του, όπως συμβαίνει στα κύμβαλα hi-hat.

Παρ'όλα αυτά, υπάρχουν κύμβαλα, όπως είναι για παράδειγμα το ride, στα οποία η δομή στήριξης επιτρέπει περιστροφικές κινήσεις ή την παρουσία κάποιων κλίσεων στο κύμβαλο. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να εισαχθούν διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

4.5 Συνοριακές συνθήκες στο κέντρο του κελύφους , όταν αυτό υποστηρίζεται από σύνθετη αντίσταση

Θεωρούμε κύμβαλο το οποίο στο κέντρο του έχει μια κατασκευή στήριξης η οποία περιλαμβάνει μια κατανεμημένη σύνδεση σε μια δακτυλιοειδή δομή στήριξης, όπως είναι μια ροδέλα για πιατίνια. Θεωρούμε πως η ροδέλα έχει ακτίνα ίση με $r=c$ η οποία μοντελοποιείται ως η μηχανική αντίσταση ενός συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας, που συνδέεται με το σφαιρικό κέλυφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2[15].



Σχήμα 4.2: Ροδέλα κυμβάλου μοντελοποιημένη ως μηχανική αντίσταση [15].

Λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τη μηχανική αντίσταση στην κάθετη διεύθυνση του σφαιρικού κελύφους, μπορεί να εφαρμοστεί η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (4.8) για να εκφράσει την εξισορρόπηση της διατμητικής τάσης με τη μηχανική αντίσταση. Έτσι προκύπτουν οι εξής συνοριακές συνθήκες:

$$D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{r=c} = 0 \quad (4.15)$$

$$-D\left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v-3}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2-v}{r^2}\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial\theta^2}\right)\Big|_{r=c} = M_w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R_w \frac{\partial u}{\partial t} + K_w u \quad (4.16)$$

όπου M_w είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους, R_w ο συντελεστής αντίστασης ανά μονάδα μήκους και K_w η σταθερά ελατηρίου ανά μονάδα μήκους. Αν στις εξισώσεις (4.15) και (4.16) εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές της σχέσης (4.3) έχουμε :

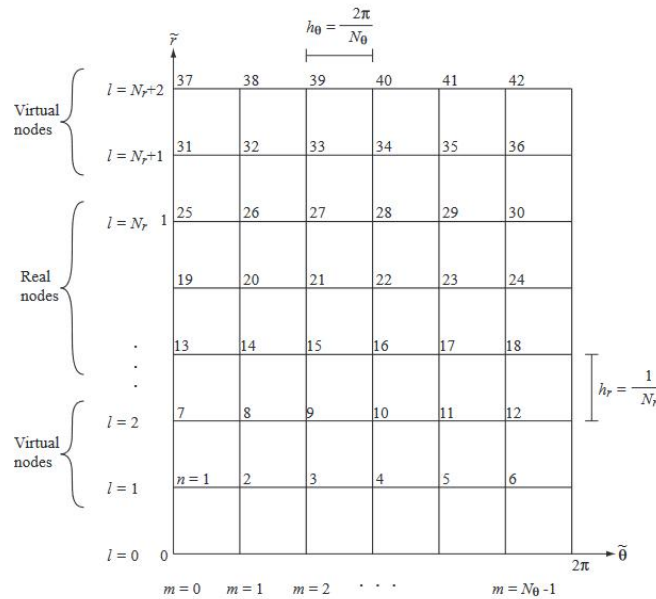
$$\frac{D}{a^2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{v}{\tilde{r}^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{v}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2}\right)\Big|_{\tilde{r}=3h_r} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{D}{a^3}\left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{v-3}{\tilde{r}^3}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{2-v}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}\partial\tilde{\theta}^2}\right)\Big|_{\tilde{r}=3h_r} = M_w \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + R_w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + K_w \tilde{u} \quad (4.18)$$

4.6 Επίλυση με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Ο χρόνος και ο χώρος διακριτοποιούνται έτσι ώστε οι συνεχείς μεταβλητές $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, t)$ να προσεγγίζονται με τις διακριτές αντίστοιχές τους (lh_r, mh_θ, nh_t) , όπου (l, m, n) είναι ακέραιοι δείκτες και (h_r, h_θ, h_t) είναι τα βήματα. Έτσι, ο χώρος $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ υποδιαιρείται σε πλέγμα με ίσα διαστήματα. Λαμβάνουμε N_r για την κατεύθυνση \tilde{r} και N_θ για την κατεύθυνση $\tilde{\theta}$, τέτοια ώστε $h_r = \frac{1}{N_r}$ και $h_\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$, κι έτσι προκύπτει ότι $(l, m) \in [0, N_r] \times [0, N_\theta]$. Το h_t είναι ένα χρονικό βήμα (και $f_s = \frac{1}{h_t}$ είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας, που συνήθως επιλέγεται a priori ως ρυθμός ήχου όπως 32, 44,1 ή 48 kHz)

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.3 φαίνεται η μορφή του πλέγματος για $N_r=5$ και $N_\theta=6$. Στο συγκεκριμένο πλέγμα, ο αριθμός του δείκτη $l=3$ στην κατεύθυνση \tilde{r} αντιστοιχεί στην εσωτερική περιφέρεια της ακτίνας $r=c$ και ο αριθμός $l=N_r$ αντιστοιχεί στην περιφέρεια $r=a$ [15],[17],[18].



Σχήμα 4.3: Πλέγμα στο χώρο $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ και η ολική αρίθμηση κόμβου n για $N_r=5$ και $N_\theta=6$ [15].

Χρησιμοποιώντας αυτό το πλέγμα, η μη γραμμική εξίσωση κίνησης του κελύφους που δίνεται από τις εξισώσεις (4.4) και (4.5), μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά του χωρικού διαφορικού ως εξής:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\kappa^2 \left[D_{\nabla^4} u - L(\varphi, u) + q D_{\nabla^2} \varphi \right] - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 D_{\nabla^2} \frac{\partial u}{\partial t} + b \varepsilon f \quad (4.19)$$

$$D_{\nabla^4} \varphi = -L(u, u) + 2q D_{\nabla^2} u \quad (4.20)$$

όπου u είναι ένα διάνυσμα που αποτελείται από τη δονητική μετατόπιση \tilde{u}_n στην ολική αρίθμηση κόμβου n , και φ είναι ένα διάνυσμα που αποτελείται από μια τιμή της τασικής συνάρτησης του Airy $\tilde{\varphi}_n$. Οι συμβολισμοί D_{∇^2} και D_{∇^4} εκφράζουν διαφορικούς πίνακες εφαρμόζοντας ∇^2 και ∇^4 αντίστοιχα.

Στην κατεύθυνση \tilde{r} , οι τιμές του δείκτη $l=3,4,\dots, N_r$ αντιστοιχούν στους πραγματικούς κόμβους, οι οποίοι αφορούν τη δονητική μετατόπιση \tilde{u} στο κέλυφος. Υπάρχουν επίσης οι εικονικοί κόμβοι, οι οποίοι βρίσκονται εκτός του τομέα ορισμού του σχήματος και αντιστοιχούν στις τιμές του δείκτη $l=1,2, N_r+1$ και N_r+2 . Οι κόμβοι αυτοί χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των κεντρικών διαφορών στα όρια, δηλαδή στα $l=3$ και $l=N_r$.

Για το χρονικό διαφορικό θα εφαρμοστεί μια μέθοδος πεπλεγμένων διαφορών, η οποία εξαρτάται από την ελεύθερη παράμετρο g , η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντισταθμίσει τα αποτελέσματα της αριθμητικής διασποράς. Ως αποτέλεσμα, για διακριτό χρόνο k , προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις οι οποίες περιγράφουν την ανάπτυξη του διανύσματος δονητικής μετατόπισης u_k για το χρόνο k [15],[17]:

$$Au_{k+1} = Bu_k + Cu_{k-1} + \kappa^2 h_t^2 L(\varphi_k, u_k) - \kappa^2 h_t^2 q D_{\nabla^2} \varphi_k + h_t^2 b \varepsilon f_k \quad (4.21)$$

$$D_{\nabla^4} \varphi_k = -L(u_k, u_k) + 2q D_{\nabla^2} u_k \quad (4.22)$$

όπου

$$A = (1 + \sigma_0 h_t)I + g\kappa^2 h_t^2 D_{\nabla^4} - \sigma_1 h_t D_{\nabla^2}$$

$$B = 2I + \kappa^2 h_t^2 (2g - 1) D_{\nabla^4}$$

$$C = (\sigma_0 h_t - 1)I - g\kappa^2 h_t^2 D_{\nabla^4} - \sigma_1 h_t D_{\nabla^2}$$

Οι συνοριακές συνθήκες για την περιφέρεια του κελύφους που δίνονται από τις σχέσεις (4.10),(4.11) και (4.12) μπορούν να προσεγγιστούν χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά του χωρικού διαφορικού. Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις (4.23), (4.24),(4.25) και (4.26), οι οποίες περιγράφουν την εξέλιξη του u_k και του φ_k για χρόνο $k+1$:

$$\frac{-D}{\alpha^2} [D_{rr} + v D_r^{(R)} + v D_{\theta\theta}^{(RR)}] u_{k+1} \Big|_{l=N_r} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{D}{\alpha^3} [D_{rrr} + D_{rr}^{(R)} - D_r^{(RR)} + (v - 3) D_{\theta\theta}^{(RRR)} + (2 - v) D_{r\theta\theta}^{(RR)}] u_{k+1} \Big|_{l=N_r} = 0 \quad (4.24)$$

$$I \varphi_{k+1} \Big|_{l=N_r} = 0 \quad (4.25)$$

$$D_r \varphi_{k+1}|_{l=N_r} = 0 \quad (4.26)$$

Οι συνοριακές συνθήκες για το κέντρο του κελύφους, μπορούν να προσεγγιστούν εφαρμόζοντας την κεντρική διαφορά του χωρικού διαφορικού στις εξισώσεις (4.17) και (4.18) :

$$\frac{D}{\alpha^2} [D_{rr} + \nu D_r^{(R)} + \nu D_{\theta\theta}^{(RR)}] u_{k+1} \Big|_{l=3} = 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{-D}{\alpha^3} [D_{rrr} + D_{rr}^{(R)} - D_r^{(RR)} + (\nu - 3) D_{\theta\theta}^{(RRR)} + (2 - \nu) D_{r\theta\theta}^{(RR)}] u \Big|_{l=3} = M_w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{l=3} + \\ R_w \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{l=3} + K_w u \Big|_{l=3} \quad (4.28) \end{aligned}$$

$$I \varphi_{k+1} \Big|_{l=3} = 0 \quad (4.29)$$

$$D_r \varphi_{k+1} \Big|_{l=3} = 0 \quad (4.30)$$

Στην εξίσωση (4.28) εμφανίζεται το χρονικό διαφορικό, επομένως θα εφαρμοστεί μέθοδος πεπλεγμένων διαφορών με ελεύθερη παράμετρο φ [19]. Έτσι, προκύπτει η εξίσωση (4.31) για τον υπολογισμό των u_k και φ_k στο κέντρο του κελύφους.

$$A_w u_{k+1} \Big|_{l=3} = B_w u_k \Big|_{l=3} + C_w u_{k-1} \Big|_{l=3} \quad (4.31)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_w = M_w + \frac{h_t}{2} R_w + \frac{1 - \varphi}{2} h_t^2 K_w \\ B_w = 2M_w - \varphi h_t^2 K_w + h_t^2 \frac{-D}{\alpha^3} [D_{rrr} + D_{rr}^{(R)} - D_r^{(RR)} + (\nu - 3) D_{\theta\theta}^{(RRR)} \\ + (2 - \nu) D_{r\theta\theta}^{(RR)}] \Big|_{l=3} \end{aligned}$$

$$C_w = -M_w + \frac{h_t}{2} R_w - \frac{1 - \varphi}{2} h_t^2 K_w$$

Οι διαφορικοί πίνακες που χρησιμοποιούνται στις παραπάνω σχέσεις είναι οι εξής:
Οι αναπαραστάσεις πινάκων της συνήθους κεντρικής διαφοράς για την προσέγγιση της 1-D χωρικής διαφοράς είναι:

$$D_r^{(1)} = \frac{1}{2h_r} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{rr}^{(1)} = \frac{1}{h_r^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D_{rrr}^{(1)} = \frac{1}{h_r^3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & & & & \\ 2 & 0 & -2 & 1 & & & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & & \\ & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & & & & & -1 & 2 & 0 & -2 \\ & & & & & & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{rrrr}^{(1)} = \frac{1}{h_r^4} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

όπου $D_r^{(1)}$ είναι μια προσέγγιση του $\partial/\partial\tilde{r}$, $D_{rr}^{(1)}$ μια προσέγγιση του $\partial^2/\partial\tilde{r}^2$ κ.ο.κ. Για την κατεύθυνση $\tilde{\theta}$, αν και οι παραστάσεις του πίνακα μπορούν να γραφτούν με τον

ίδιο τρόπο, πρέπει να ληφθεί υπόψη η περιοδικότητα προς αυτή την κατεύθυνση. Επομένως έχουμε:

$$D_{\theta}^{(1)} = \frac{1}{2h_{\theta}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{h_{\theta}^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D_{\theta\theta\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{h_{\theta}^4} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & & & & 1 & -4 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & & & & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

Παρουσιάζονται επίσης ο $N_{\theta} \times N_{\theta}$ ταυτοτικός πίνακας I_{θ} και ο πίνακας R , για τον οποίο έχουμε: $R = \text{diag} \left[\frac{1}{r_l} \right]$, $l=1,2,\dots,N_r+2$.

Οι διαφορικοί πίνακες που παρουσιάζονται στις σχέσεις (4.19) και (4.20) κατασκευάζονται ως εξής:

$$D_{\nabla 2} = D_{rr}^{(1)} \otimes I_{\theta} + \left[R D_r^{(1)} \right] \otimes I_{\theta} + R^2 \otimes D_{\theta\theta}^{(1)}$$

$$D_{\nabla 4} = D_{rrrr}^{(1)} \otimes I_{\theta} + 2 \left[R^2 D_{rr}^{(1)} \right] \otimes D_{\theta\theta}^{(1)} + R^2 \otimes D_{\theta\theta\theta}^{(1)} + 4R^4 \otimes D_{\theta\theta}^{(1)} + [R^3 D_r^{(1)}] \otimes I_{\theta}$$

όπου το σύμβολο \otimes είναι το γινόμενο Kronecker δύο πινάκων.

Οι διαφορικοί πίνακες που χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών και αυτοί που εμφανίζονται στον μη γραμμικό τελεστή $L(\varphi, u)$ δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} D_r &= D_r^{(1)} \otimes I_{\theta} \\ D_{rr} &= D_{rr}^{(1)} \otimes I_{\theta} \\ D_{rrr} &= D_{rrr}^{(1)} \otimes I_{\theta} \\ D_r^{(R)} &= [R D_r^{(1)}] \otimes I_{\theta} \\ D_r^{(RR)} &= [R^2 D_r^{(1)}] \otimes I_{\theta} \\ D_{rr}^{(R)} &= [R D_{rr}^{(1)}] \otimes I_{\theta} \\ D_{\theta}^{(RR)} &= R^2 \otimes D_{\theta}^{(1)} \\ D_{\theta\theta}^{(R)} &= R \otimes D_{\theta\theta}^{(1)} \\ D_{\theta\theta}^{(RR)} &= R^2 \otimes D_{\theta\theta}^{(1)} \\ D_{\theta\theta}^{(RRR)} &= R^3 \otimes D_{\theta\theta}^{(1)} \\ D_{r\theta}^{(R)} &= [R D_r^{(1)}] \otimes D_{\theta}^{(1)} \\ D_{r\theta\theta}^{(RR)} &= [R^2 D_r^{(1)}] \otimes D_{\theta\theta}^{(1)} \end{aligned}$$

4.7 Συναρτήσεις διέγερσης κελύφους

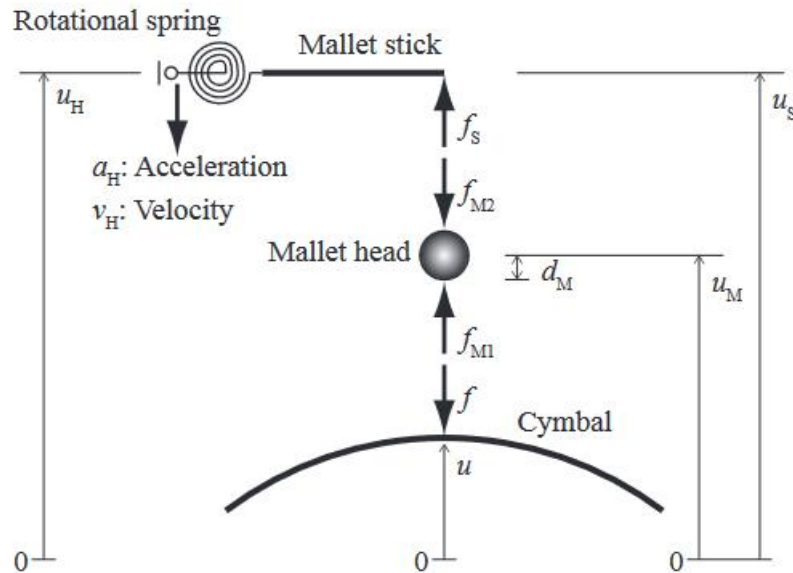
Η διέγερση των κρουστικών οργάνων πραγματοποιείται συνήθως μέσω ενός κρουστικού μηχανισμού (για παράδειγμα μέσω μιας μπαγκέτας). Σε ένα πλήρες μοντέλο, η μπαγκέτα θα πρέπει να μοντελοποιηθεί χωριστά και η αλληλεπίδρασή της με το σύστημα κελύφους θα δημιουργήσει τον όρο που εμπλέκεται στην εξίσωση (4.4). Δεδομένου, ωστόσο, ότι οι χρόνοι αλληλεπίδρασης είναι εξαιρετικά σύντομοι (της τάξης μεταξύ 1 και 20 ms), μια χρήσιμη συντόμηση σύνθεσης είναι να προσδιοριστεί η f ως δεδομένη συνάρτηση. Ένα παραμετροποιημένο σύνολο είναι το εξής:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{f_{\max}}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(t - t_0)}{t_{exc}} \right) \right), & t_0 \leq t \leq t_0 + t_{exc} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου f_{\max} είναι η μέγιστη τιμή της δύναμης f , η οποία ασκείται για χρονική διάρκεια t_{exc} και εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t=t_0$. Γενικά, η f_{\max} αυξάνεται και η t_{exc} μειώνεται όσο αυξάνεται η δύναμη της κρούσης.

Για τη χωρική κατανομή, δεδομένου ότι το πλέγμα είναι συνήθως αρκετά χονδροειδές, είναι πιθανώς ικανοποιητική η χρήση μιας παλμικής συνάρτησης πλέγματος της μορφής:

όπου K_M είναι ο συντελεστής ακαμψίας της σφύρας, u είναι η αρχική θέση του κέντρου βάρους της σφύρας, u_M είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη θέση του κέντρου βάρους της σφύρας, d_M είναι η ακτίνα της κεφαλής της σφύρας, $[\cdot]^+$ είναι ένας τελεστής που παίρνει μόνο θετικές τιμές και α είναι ένας μη γραμμικός εκθέτης ακαμψίας.



Σχήμα 4.5: Σύζευξη ραβδιού σφύρας, κεφαλής σφύρας και κύμβαλου [15].

Η αντίθετη δύναμη f που εφαρμόζεται στο κύμβαλο είναι:

$$f = f_{M1}. \quad (4.34)$$

4.8.2 Εφαρμογή μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Για τη χρονική διαφορά της σχέσης (4.32), εφαρμόζεται μια προσέγγιση του σχήματος κεντρικών διαφορών. Έτσι προκύπτει η σχέση (4.35), η οποία περιγράφει την εξέλιξη του $u_{M,k}$ με χρόνο k :

$$u_{M,k+1} = 2u_{M,k} + h_t^2 \frac{K_M}{M_M} [\{u_k - (u_{M,k} - d_M)\}^+]^\alpha - u_{M,k-1} - h_t^2 f_{M2,k} \quad (4.35)$$

4.8.3 Φυσικό μοντέλο ενός ραβδιού σφύρας και η σύζευξή του με την κεφαλή της σφύρας

Το ραβδί της σφύρας μοντελοποιείται ως δοκός Euler-Bernoulli που υποστηρίζεται στη μία άκρη από ένα περιστροφικό ελατήριο με σταθερά περιστροφικού ελατηρίου K_R . Για την εγκάρσια μετατόπιση δόνησης ζ_s της δοκού, με το μήκος της να είναι κατά μήκος του άξονα x , προκύπτει η εξής εξίσωση [15]:

$$\rho_S S_S \frac{\partial^2 \zeta_S}{\partial t^2} = -E_S I_S \frac{\partial^4 \zeta_S}{\partial x^4} - R_S \frac{\partial \zeta_S}{\partial t} + \varepsilon_S f_S \quad (4.36)$$

όπου ρ_S είναι η πυκνότητα του υλικού της ράβδου, S_S η επιφάνεια διατομής, E_S είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young, I_S είναι η ροπή αδράνειας δεύτερης τάξεως της διατομής, R_S είναι ο συντελεστής αντίστασης ανά μονάδα μήκους, f_S είναι η δύναμη διέγερσης και ε_S είναι η χωρική κατανομή της δύναμης.

Έστω ότι u_S είναι η τιμή της ζ_S στην άκρη της δοκού, στο σημείο όπου είναι προσαρτημένη η κεφαλή της σφύρας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Αν υποθέσουμε τον απλούστερο τύπο σύνδεσης μεταξύ του ραβδιού και της κεφαλής της σφύρας, προκύπτουν οι εξής συνθήκες:

$$u_M = u_S \quad (4.37)$$

$$f_{M2} = -f_S \quad (4.38)$$

4.8.4. Εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων διαφορών

Στην εξίσωση (4.36), αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων στο διαφορικό χώρο, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση κίνησης του συστήματος πολλαπλών βαθμών ελευθερίας:

$$M_S \frac{\partial^2 \delta_S}{\partial t^2} + R_S \frac{\partial \delta_S}{\partial t} + K_S \delta_S = \varepsilon_S f_S \quad (4.39)$$

όπου M_S είναι ο πίνακας μάζας, R_S είναι ο πίνακας του συντελεστή αντίστασης ανά μονάδας μήκους, K_S είναι ο πίνακας ακαμψίας και δ_S είναι ένα διάνυσμα που αποτελείται από τις δονητικές τιμές στους κόμβους [21].

Στο διαφορικό του χρόνου εφαρμόζεται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών με ελεύθερη παράμετρο φ . Έτσι προκύπτει η σχέση (4.40) η οποία περιγράφει την εξέλιξη της $\delta_{S,k}$ για χρόνο k .

$$A_S \delta_{S,k+1} = B_S \delta_{S,k} + C_S \delta_{S,k-1} + h_t^2 \varepsilon_S f_{S,k} \quad (4.40)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_S &= M_S + \frac{h_t}{2} R_S + \frac{1-\varphi}{2} h_t^2 K_S \\ B_S &= 2M_S - \varphi h_t^2 K_S \\ C_S &= -M_S + \frac{h_t}{2} R_S - \frac{1-\varphi}{2} h_t^2 K_S \end{aligned}$$

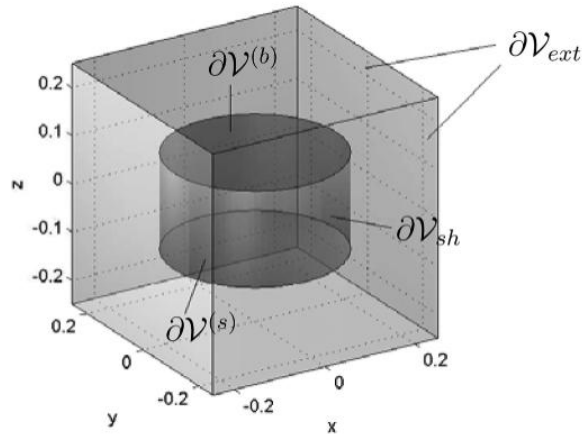
Κεφάλαιο 5- Μοντελοποίηση Ταμπούρου-Τομ-Κάσας

5.1 Εισαγωγή

Τα τύμπανα με δύο μεμβράνες, όπως είναι το τομ, το ταμπούρο και η κάσα, είναι τα πιο συνηθισμένα κρουστά στη Δυτική μουσική. Αυτά τα όργανα μπορεί να έχουν σημαντικές φυσικές διαστάσεις. Για παράδειγμα, η ακτίνα των μεμβρανών της κάσας μπορεί να φτάσει το μισό μέτρο. Δεδομένου του μεγέθους, της χαμηλής τάσης στην οποία γενικά κουρδίζονται οι μεμβράνες και του πλάτους των δονήσεων, είναι απίθανο ένα γραμμικό μοντέλο να καταγράφει τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του ήχου αυτών των οργάνων. Φαινόμενα ολίσθησης τόνου και αύξηση της ενέργειας υψηλής συχνότητας έχουν παρατηρηθεί σε υψηλά πλάτη διέγερσης για την κάσα και για τα τομ. Αυτά τα φαινόμενα συχνά σχετίζονται με την παρουσία μη γραμμικοτήτων στο σύστημα [22], [23].

5.2 Γεωμετρία

Στην εργασία αυτή θα θεωρήσουμε ότι το ταμπούρο, τα τομ και η κάσα είναι τύμπανα με κλειστή κοιλότητα. Έτσι, το υπό εξέταση μοντέλο τυμπάνου μπορεί σχηματικά να χωριστεί σε πολλά αλληλεπιδρώντα στοιχεία: δύο μεμβράνες, ένα άκαμπτο κυλινδρικό κέλυφος που τις συνδέει και το ακουστικό πεδίο στο οποίο είναι ενσωματωμένο το σύστημα. Η μια μεμβράνη (batter head) του τυμπάνου είναι εκείνη στην οποία επιδρά η διεγείρουσα δύναμη, ενώ η άλλη χαρακτηρίζεται ως η ηχηρή μεμβράνη (resonant head), η οποία βρίσκεται στο κάτω μέρος του τυμπάνου και τίθεται σε κίνηση από τον αέρα μέσα στην κοιλότητα. Στην περίπτωση του ταμπούρου, στην ηχηρή μεμβράνη είναι προσαρτημένη η χορδιέρα, η οποία αποτελείται από σφιχτά τυλιγμένα ελικοειδή σύρματα τα οποία αλληλεπιδρούν με τη μεμβράνη. Θεωρούμε ότι το τύμπανο βρίσκεται σε ένα πεπερασμένο κύβο, δηλαδή σε ένα πεπερασμένο υπολογιστικό χώρο V , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Ο κύβος αυτός δεν χρησιμοποιείται για την προσομοίωση ενός πραγματικού τρισδιάστατου δωματίου, αλλά για την εξομοίωση της συμπεριφοράς ενός άπειρου χώρου εφαρμόζοντας συνθήκες απορρόφησης στα όρια ∂V_{ext} [22], [23].



Σχήμα 5.1: Γεωμετρία τυμπάνου συμπεριλαμβανομένης της υπολογιστικής περιοχής [22]

Στο Σχήμα 5.1 έχουμε ότι ∂V_{ext} είναι το σύνορο του πεπερασμένου υπολογιστικού χώρου, το οποίο αποτελείται από έξι όψεις κανονικών παραλληλεπιπέδων, ∂V_{sh} είναι το σύνορο της κυλινδρικής κοιλότητας του τυμπάνου, $\partial V^{(b)}$ και $\partial V^{(s)}$ είναι τα σύνορα του κυλινδρικού τυμπάνου που ορίζουν η πάνω μεμβράνη και η κάτω μεμβράνη του τυμπάνου αντίστοιχα.

Η κοιλότητα του τυμπάνου ορίζεται σε μια κυλινδρική περιοχή V_{int} ως εξής:

$$V_{int} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq \frac{L}{2}\} \quad (5.1)$$

όπου R είναι η ακτίνα του τυμπάνου και L είναι το ύψος της κοιλότητας (σε m) [22].

Ο πεπερασμένος υπολογιστικός χώρος V_{ext} ορίζεται ως :

$$V_{ext} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | |x|, |y| \leq \frac{L_{xy}}{2}, |z| \leq \frac{L_z}{2}\} \quad (5.2)$$

όπου L_{xy} και L_z είναι μήκη (σε m) τα οποία συνήθως επιλέγονται να μην είναι μεγαλύτερα των R και L .

Το σύνορο της κοιλότητας ∂V_{int} μπορεί να αποσυντεθεί ως $\partial V_{int} = \partial V^{(b)} \cup \partial V^{(s)} \cup \partial V_{sh}$, όπου:

$$\partial V^{(b)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2, z = \frac{L}{2}\} \quad (5.3a)$$

$$\partial V^{(s)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2, z = -\frac{L}{2}\} \quad (5.3b)$$

$$\partial V_{sh} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2, |z| \leq \frac{L}{2}\} \quad (5.3c)$$

5.3 Διάδοση ακουστικών κυμάτων

Το ακουστικό πεδίο, τόσο εσωτερικά της κυλινδρικής κοιλότητας του τυμπάνου, όσο και εξωτερικά, δηλαδή στο χώρο V_{ext} , περιγράφεται από την εξίσωση του 3D ακουστικού κύματος [22] :

$$\Psi_{tt} = c^2 \Delta_{3D} \Psi \quad (5.4)$$

Στην εξίσωση (5.4) έχουμε ότι c είναι η ταχύτητα του ηχητικού κύματος στον αέρα (σε m/s) και Δ_{3D} είναι ο 3D τελεστής Laplace, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\Delta_{3D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.5)$$

Επιπλέον, στην εξίσωση (5.4) έχουμε ότι $\Psi = \Psi(x, y, t)$ είναι το δυναμικό της ταχύτητας του ακουστικού πεδίου, τόσο εσωτερικά όσο και εξωτερικά του τυμπάνου. Η εξίσωση κύματος γραμμένη ως προς το δυναμικό ταχύτητας είναι μια πιο θεμελιώδης μορφή από αυτή που γράφεται με όρους πίεσης, και η προκύπτουσα σύζευξη με τις μεμβράνες που προκύπτει είναι πιο απλοποιημένη [22].

Η ακουστική πίεση p και η ταχύτητα του σωματιδίου v συσχετίζονται με το Ψ μέσω των σχέσεων:

$$p = \rho \Psi_t, \quad v = -\nabla \Psi \quad (5.6)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα και ∇ είναι ο 3D τελεστής κλίσης. Στην παρούσα ενότητα θεωρούμε ότι $c=340\text{m/s}$ και $\rho=1,2\text{ kg/m}^3$.

5.4 Συνοριακές συνθήκες κοιλότητας

Η κοιλότητα του τυμπάνου διαμορφώνεται ως ένα απόλυτα άκαμπτο κέλυφος S που περικλείει τον αέρα μεταξύ των δύο μεμβρανών. Είναι μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R , μεταξύ $z = z_s$ και $z = z_b$. Οι συνθήκες Neumann εφαρμόζονται στο δυναμικό ταχύτητας πάνω από την επιφάνεια του κελύφους :

$$n_{sh} \nabla \Psi = 0 \quad \text{στο } \partial V_{sh} \quad (5.7)$$

όπου n_{sh} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην κυλινδρική επιφάνεια. Η συνθήκη (5.7) πρέπει να εφαρμοστεί και εσωτερικά και εξωτερικά της κοιλότητας [23].

5.5 Συνοριακές συνθήκες απορρόφησης

Απαιτείται μια συνθήκη απορρόφησης στο εξωτερικό όριο V_{ext} . Ένας πιθανός τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι μέσω στρώματος τέλει προσαρμογής, μια τυπική προσέγγιση που προέρχεται από τον ηλεκτρομαγνητισμό. Στην παρούσα εργασία, ωστόσο, για να μειώσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα, επιλέξαμε να υιοθετήσουμε τις εξισώσεις Engquist-Majda, μια οικογένεια συνθηκών απορρόφησης με αυξανόμενη τάξη ακρίβειας, οι οποίες είναι στη μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων [23]. Οι δύο πρώτες τέτοιες συνθήκες μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\Psi_t + c \Psi_n = 0 \quad (5.8a)$$

$$\Psi_{tt} + c \Psi_{nt} - \frac{c^2}{2} (\Psi_{s_1 s_1} + \Psi_{s_2 s_2}) = 0 \quad (5.8b)$$

όπου ο δείκτης n δηλώνει μια χωρική παράγωγο προς τα έξω κάθετη προς το σύνορο και οι δείκτες s_1 και s_2 δηλώνουν εφαπτομενικές χωρικές παραγώγους.

5.6 Μεμβράνες

Στην παρούσα εργασία, η δόνηση των μεμβρανών θα θεωρηθεί ότι είναι πλήρως εγκάρσια, δηλαδή η μετατόπιση $w(x,y,z)$ της κάθε μεμβράνης είναι κάθετη στην επιφάνεια, στη θέση (x,y,z) και στο χρόνο t . Συνήθως, τα χτυπήματα στην άνω μεμβράνη του τυμπάνου μπορούν να προκαλέσουν μετατοπίσεις πολλών χιλιοστών, τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από το πάχος της ίδιας της μεμβράνης. Το γεγονός αυτό καθιστά τα μη γραμμικά φαινόμενα σημαντικά σε αυτές τις συνθήκες, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των χορδών [23].

Οι κινήσεις των δύο μεμβρανών, στην περίπτωση του ταμπούρου, περιγράφονται από τις εξισώσεις [22],[24]:

$$\rho^{(b)} H^{(b)} w_{tt}^{(b)} = T^{(b)} \Delta^{(2)} w^{(b)} + \dots + f^{(b)} + f^{(exc)} \quad (5.9a)$$

$$\rho^{(s)} H^{(s)} w_{tt}^{(s)} = T^{(s)} \Delta^{(2)} w^{(s)} + \dots + f^{(s)} + f^{(snare)} \quad (5.9b)$$

όπου $w^{(b,s)} = w^{(b,s)}(x,y,z)$ είναι εγκάρσια μετατόπιση κάθε μεμβράνης (σε m), $\rho^{(b,s)}$ είναι η πυκνότητα (σε kg/m³), $H^{(b,s)}$ είναι το πάχος (σε m) και $T^{(b,s)}$ είναι η τάση ανά μονάδα μήκους (σε kg/s²), η οποία θεωρείται ομοιόμορφα κατανομημένη στην επιφάνεια κάθε μεμβράνης. Όλες αυτές οι παράμετροι μπορούν να είναι διακριτές για τις δύο μεμβράνες [22],[23]. $\Delta^{(2)}$ είναι ο τελεστής Laplace, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\Delta^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.10)$$

Οι πρόσθετοι όροι f προκύπτουν από τη σύζευξη. $f^{(b,s)}$ είναι οι πιέσεις που οφείλονται στο ακουστικό πεδίο στην μεμβράνη στην οποία επιδρά η διεγείρουσα δύναμη και στην ηχηρή μεμβράνη αντίστοιχα. Ο όρος $f^{(exc)}$ προκύπτει από τη διεγείρουσα δύναμη και ο όρος $f^{(snare)}$ από την αλληλεπίδραση της ηχηρής μεμβράνης με τη χορδίερα. Στην περίπτωση των τομ και της κάσας, μπορεί να παραληφθεί ο όρος $f^{(snare)}$, καθώς τα συγκεκριμένα τύμπανα δεν διαθέτουν χορδίερα.

Τα αποσιωπητικά στη σχέση (5.10) υποδεικνύουν άλλους όρους υψηλότερης τάξης που θα μπορούσαν να ενσωματωθούν, με μικρή αύξηση στην πολυπλοκότητα προγραμματισμού ή στο υπολογιστικό κόστος. Για παράδειγμα, για την πάνω μεμβράνη του τυμπάνου στη σχέση (5.9a), θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν οι όροι:

$$-D^{(b)} \Delta^{(2)} \Delta^{(2)} w^{(b)} - \sigma_0^{(b)} w_t^{(b)} + \sigma_1^{(b)} \Delta^{(2)} w_t^{(b)} + \frac{6D^{(b)}}{\pi R^2 (H^{(b)})^2} \left(\int_{\partial V^{(b)}} |\nabla w^{(b)}|^2 \right) \Delta^{(2)} w^{(b)} \quad (5.11)$$

Στον πρώτο όρο $D^{(b)} = \frac{E(H^{(b)})^3}{12[1-(\nu^{(b)})^2]}$, $E^{(b)}$ είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young

και $\nu^{(b)}$ είναι ο λόγος του Poisson. Ο όρος $D^{(b)}$ αντιπροσωπεύει τις επιπτώσεις τις ακαμψίας. Ο δεύτερος και ο τρίτος όρος, οι οποίο περιλαμβάνουν τους συντελεστές $\sigma_0^{(b)}$ και $\sigma_1^{(b)}$, επιτρέπουν τη μοντελοποίηση των απωλειών εσωτερικής μεμβράνης που εξαρτώνται από τη συχνότητα. Ο τελευταίος όρος προκύπτει από ένα απλό μοντέλο μέσου όρου μη γραμμικής δόνησης μεμβράνης και αφορά το φαινόμενο ολίσθησης τόνου σε μεγάλα πλάτη. Μια παρόμοια εξίσωση μπορεί να εφαρμοστεί για την ηχηρή μεμβράνη.

Ο τερματισμός των μεμβρανών στο όριο του κελύφους θεωρείται ότι είναι σταθερός [22]:

$$w^{(b,s)} = 0, x^2 + y^2 = R^2 \quad (5.12)$$

Εάν περιλαμβάνονται όροι ακαμψίας, πρέπει να παρέχονται συνοριακές συνθήκες Neumann (πάκτωσης ή περιστροφής) και για τις δύο μεμβράνες.

5.7 Χορδιέρα

Τα ελικοειδή σύρματα από τα οποία αποτελείται η χορδιέρα, σε αντίθεση με τα ευθεία σύρματα, εμφανίζουν συμπεριφορά χορδών (δηλαδή, συνεκτική διάδοση κυμάτων) σε χαμηλές συχνότητες. Έτσι, μια καλή πρώτη προσέγγιση είναι η 1D εξίσωση κύματος, που περιγράφει την κίνηση των συρμάτων προς μια κατεύθυνση κάθετη προς τη μεμβράνη [22] :

$$\rho^{(i)} A^{(i)} m_{tt}^{(i)} = T^{(i)} m_{\xi^{(i)}\xi^{(i)}}^{(i)} + f^{(i)}, i = 1, \dots, N^{(snare)} \quad (5.13)$$

όπου $\rho^{(i)}$, $A^{(i)}$ και $T^{(i)}$ είναι η πυκνότητα μάζα (σε kg/m³), το εμβαδόν διατομής (σε m²) και η τάση ενός σύρματος (σε N) αντίστοιχα. Η τάση μπορεί να θεωρηθεί ίδια για όλα τα σύρματα της χορδιέρας. Επιπλέον, $m^{(i)}$ είναι η μετατόπιση του i -οστού σύρματος (εκ των οποίων υπάρχουν $N^{(snare)}$ σύρματα). $f^{(i)}$ είναι η δύναμη ανά μονάδα μήκους που ασκείται στο i -οστό σύρμα εξαιτίας τη αλληλεπίδρασης του με την ηχηρή μεμβράνη.

Οι παραπάνω εξισώσεις κύματος ορίζονται σε σχέση με τις χωρικές συντεταγμένες $\xi^{(i)} \in [0, L^{(i)}]$, όπου $L^{(i)}$ είναι το μήκος του i -οστού σύρματος (σε m).

Όσον αφορά τις συντεταγμένες x και y στην ίδια τη μεμβράνη, υποθέτοντας ότι τα σύρματα είναι παράλληλα και ευθυγραμμισμένα με την κατεύθυνση y και απέχουν μεταξύ τους κατά ϵ m, το i -οστό σύρμα εκτείνεται κατά μήκος των συντεταγμένων [22]:

$$x^{(i)} = \frac{(2i - N^{(snare)} - 1)\epsilon}{2} \quad (5.14a)$$

$$y^{(i)} = y^{(i)}(\xi^{(i)}) = -\frac{L^{(i)}}{2} + \xi^{(i)} \quad (5.14b)$$

Τα άκρα των συρμάτων θεωρούνται προσαρτημένα στην ίδια τη μεμβράνη (μια μικρή απλοποίηση από την πραγματική κατάσταση, στην οποία τα άκρα των συρμάτων συνδέονται σε μια μικρή άκαμπτη ράβδο, η οποία λειτουργεί ως γέφυρα). Οι όροι τερματισμού είναι έτσι[22] :

$$m^{(i)}(0) = w^{(s)}(x^{(i)}, y^{(i)}(0)) \quad (5.15)$$

$$m^{(i)}(L^{(i)}) = w^{(s)}(x^{(i)}, y^{(i)}(L^{(i)})) \quad (5.16)$$

5.8 Διέγερση

Για μεμονωμένα χτυπήματα χορδών ή μεμβρανών, το σύνηθες μοντέλο που χρησιμοποιείται περιλαμβάνει μια μη γραμμική σύγκρουση με ένα σύστημα μάζας/ελατηρίου. Στην περίπτωση αυτή, ο όρος $f^{(exc)}$ στην εξίσωση (5.9α) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f^{(exc)} = -F^{(m)}(t)\varphi(x, y) \quad (5.17)$$

όπου $F^{(m)}$ είναι η δύναμη στην μπαγκέτα και $\varphi(x, y)$ είναι η κατανομή, η οποία θεωρείται σταθερή, και αντιπροσωπεύει τη χωρική έκταση της περιοχής επαφής της σύγκρουσης με τη μεμβράνη.

Η δυναμική της μπαγκέτας, με μια αρχική ταχύτητα, μπορεί να γραφεί ως:

$$F^{(m)} = M^{(m)} \frac{dw^{(m)}}{dt^2} \quad (5.18)$$

$$= K^{(m)} \left(\left[\int_{\partial V^{(b)}} w^{(b)} \varphi dA - w^{(m)} \right]^+ \right)^{\alpha^{(m)}} \quad (5.19)$$

όπου $w^{(m)}(t)$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του άκρου της μπαγκέτας πάνω από τη μεμβράνη, και $M^{(m)}$, $K^{(m)}$ και $\alpha^{(m)}$ είναι η μάζα, η σταθερά ακαμψίας και ο μη γραμμικός εκθέτης ακαμψίας που σχετίζεται με τη μπαγκέτα, αντίστοιχα. Ο συμβολισμός $[\cdot]^+$ υποδηλώνει το «θετικό μέρος του».

Για μεμονωμένα χτυπήματα, μια μεγάλη απλοποίηση, είναι να προσδιοριστεί η $F^{(m)}$ ως σύντομος παλμός, διάρκειας της τάξης του χιλιοστού του δευτερολέπτου. Μια απλή επιλογή είναι συνάρτηση της μορφής:

$$F^{(m)}(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \right), & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.20)$$

Η διάρκεια του παλμού T_0 και το πλάτος F_0 μπορούν να παραμετροποιηθούν χονδρικά ως προς την αρχική ταχύτητα κρούσης: Το F_0 αυξάνεται και η T_0 μειώνεται όσο αυξάνεται η αρχική ταχύτητα κρούσης.

5.9 Κατανεμημένη σύζευξη

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται οι σχέσεις σύζευξης μεταξύ των εξαρτημάτων του τυμπάνου, δηλαδή του ακουστικού πεδίου, των δύο μεμβρανών και στην περίπτωση του ταμπούρου, της χορδιέρας.

Κατ'αρχάς, η πίεση που ασκείται στις μεμβράνες πρέπει να είναι ίση με την πίεση του ακουστικού πεδίου πάνω και κάτω από τις επιφάνειες [23]. Οι όροι σύζευξης $f^{(b)}$ και $f^{(s)}$ στην Εξίσωση (5.9) μπορεί να γραφεί ως προς το δυναμικό ταχύτητας Ψ ως:

$$f^{(b)} = \rho \left(\lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}} \Psi_t - \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^+} \Psi_t \right) \Big|_{\partial V^{(b)}} \quad (5.21a)$$

$$f^{(s)} = \rho \left(\lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}} \Psi_t - \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^+} \Psi_t \right) \Big|_{\partial V^{(s)}} \quad (5.21b)$$

Οι άλλες απαιτούμενες συνθήκες συσχετίζουν τις ταχύτητες της μεμβράνης με την κλίση του ακουστικού πεδίου στην κατεύθυνση z :

$$w_t^{(b)} = - \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}} \Psi_z \Big|_{\partial V^{(b)}} = - \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^+} \Psi_z \Big|_{\partial V^{(b)}} \quad (5.22a)$$

$$w_t^{(s)} = - \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}} \Psi_z \Big|_{\partial V^{(s)}} = - \lim_{z \rightarrow \frac{L}{2}^+} \Psi_z \Big|_{\partial V^{(s)}} \quad (5.22b)$$

Συνοψίζοντας: η πίεση που ασκείται σε μια μεμβράνη είναι η διαφορά των πιέσεων που ασκούνται και στις δύο πλευρές και η ταχύτητα των σωματιδίων του ακουστικού πεδίου κάθετη σε μια μεμβράνη πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της μεμβράνης, και στις δύο πλευρές της μεμβράνης.

Στην περίπτωση του ταμπούρου, η σύζευξη μεταξύ της ηχηρής μεμβράνης και των χορδών περιλαμβάνει κατανεμημένες μερικές συγκρούσεις. Για την i -οστή χορδή έχουμε:

$$f^{(i)} = -K^{(i)}([m^{(i)} - w^{(s)}(x^{(i)}, y^{(i)})]^+)^{a^{(i)}} \quad (5.23)$$

όπου $K^{(i)}$ και $a^{(i)}$ είναι ένας συντελεστής συμπίεσης και ένας μη γραμμικός εκθέτης για την i -οστή χορδή, αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες $x^{(i)}, y^{(i)}$ κατά μήκος της μεμβράνης, είναι οι συντεταγμένες που δίνονται στις εξισώσεις (5.14a και 5.14b) [22]. Έτσι, η συνολική δύναμη που ασκείται στην ηχηρή μεμβράνη, $f^{(snare)}$ είναι :

$$f^{(snare)} = - \sum_{i=1}^{N^{(snare)}} f^{(i)} \delta(x(\xi^{(i)}), y(\xi^{(i)})) \quad (5.24)$$

όπου $\delta(x^{(i)}, y^{(i)})$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο μιας 1D συνάρτησης δέλτα Dirac με τη γραμμική περιοχή της μεμβράνης με την οποία η i -οστή χορδή βρίσκεται σε μερική επαφή.

5.10 Σχήματα πεπερασμένων διαφορών

Στην παρούσα ενότητα δίνεται έμφαση στη σύνθεση ήχου και στη λειτουργία με λογικό ρυθμό δειγματοληψίας ήχου f_s (όπως 44,1 kHz). Επιπλέον, ενώ το πρόβλημα ορίζεται σε μια κυλινδρική γεωμετρία και φαίνεται λογικό να συμπεράνουμε ότι η χρήση ακτινικών συντεταγμένων είναι καλή επιλογή, τουλάχιστον για τα στοιχεία της μεμβράνης και το ακουστικό πεδίο, τα σχήματα σε ακτινικές συντεταγμένες παρουσιάζουν εξαιρετικά κακή συμπεριφορά στον τομέα συχνότητας, συμπεριλαμβανομένης της μεγάλης αριθμητικής διασποράς και του περιορισμού της ζώνης των αποκρίσεων σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων (στην περίπτωση του ταμπούρου, έως τα 3 kHz, ακόμα κι αν το σχήμα λειτουργεί στα 44,1 kHz).

Το φαινόμενο περιορισμού της ζώνης είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην περίπτωση της μη γραμμικής σύζευξης χορδών/μεμβράνης, η οποία γενικά εισάγει ενέργεια υψηλής συχνότητας, την οποία η μεμβράνη πρέπει να μπορεί να υποστηρίξει (και επομένως, να εκπέμπει). Έτσι, είναι πιο χρήσιμο να χρησιμοποιούνται σχήματα σε πολλαπλά καρτεσιανά πλέγματα, ακόμη και αν εμφανίζονται πρόσθετα ζητήματα που σχετίζονται με τον τερματισμό του πλέγματος σε μια κυλινδρική γεωμετρία (όπως ο ακανόνιστος τερματισμός συνόρων).

Τα σχήματα για όλα τα στοιχεία του τυμπάνου που παρουσιάζονται σε αυτήν την ενότητα θα λειτουργούν με ομοιόμορφο ρυθμό δειγματοληψίας f_s , και για τα οποία $t_s = 1/f_s$ είναι το χρονικό βήμα.

Οι δευτερες παράγωγοι $g_{tt} = (\cdot, \cdot, t)$ ορίζονται ως εξής:

$$\frac{1}{t_s^2} (g^{n+1} - 2g^n + g^{n-1}) \cong g_{tt} \quad (5.25)$$

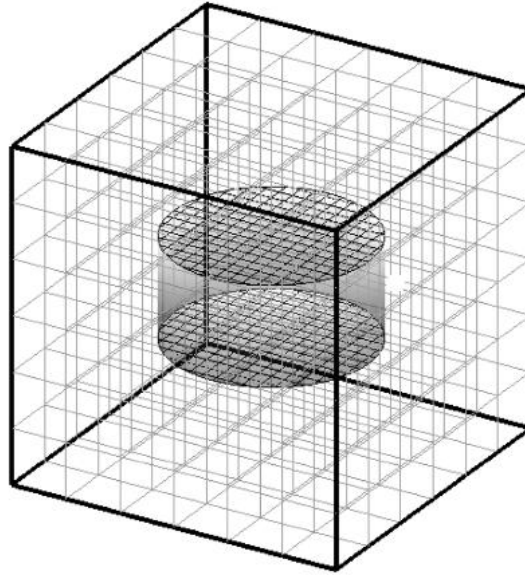
όπου g^n είναι μια προσεγγιστική συνάρτηση πλέγματος για τη $g(\cdot, \cdot, t)$ για το χρόνο nt_s , όπου n ακέραιος αριθμός.

5.11 Σχήματα για τα εξαρτήματα του τυμπάνου

Ένα απλό σχήμα πεπερασμένων διαφορών για πεδίου χρόνου για το 3D κύμα της εξίσωσης (5.4) είναι το εξής:

$$\Psi_{l,m,p}^{n+1} = (2 + c^2 t_s^2 \delta^{(3)}) \Psi_{l,m,p}^n - \Psi_{l,m,p}^{n-1} \quad (5.26)$$

όπου $\Psi_{l,m,p}^n$ είναι μια προσέγγιση του $\Psi(x,y,z,t)$ στους χρόνους $t=nt_s$, με t_s το χρονικό βήμα, και l, m και p είναι οι δείκτες που αντιστοιχούν σε σημεία του πλέγματος, τα οποία διαχωρίζονται το ένα από το άλλο με απόσταση πλέγματος h , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2 [22].



Σχήμα 5.2: Υπολογιστικό πλέγμα για το ακουστικό πεδίο, καθώς και για τις μεμβράνες. Οι αποστάσεις του πλέγματος είναι διακριτές [22].

Μια προσέγγιση επτά σημείων στην τρισδιάστατη Λαπλασιανή, $\delta^{(3)}$, δίνεται από τη σχέση (5.27).

$$\delta^{(3)}\Psi_{l,m,p}^n = \frac{1}{h^2}(\Psi_{l+1,m,p}^n + \Psi_{l-1,m,p}^n + \Psi_{l,m+1,p}^n + \Psi_{l,m-1,p}^n + \Psi_{l,m,p+1}^n + \Psi_{l,m,p-1}^n - 6\Psi_{l,m,p}^n) \quad (5.27)$$

Μια απαραίτητη συνθήκη σταθερότητας για την εξίσωση (5.26) είναι η εξής:

$$h \geq h_{\min} = \sqrt{3}ct_s \quad (5.28)$$

Για την ελάχιστη αριθμητική διασπορά, είναι προτιμότερο να επιλέγεται το h (για δεδομένο χρονικό βήμα t_s) όσο το δυνατόν πιο κοντά στο h_{\min} . Επιπλέον, είναι χρήσιμο να επιλέξουμε την απόσταση του πλέγματος έτσι ώστε οι μεμβράνες (σε ύψη $z = \pm L/2$) να βρίσκονται ακριβώς στο μισό της διαδρομής μεταξύ γειτονικών σημείων πλέγματος, και επομένως ένας επιπλέον περιορισμός είναι ότι ο L/h να είναι ακέραιος αριθμός. Αυτό οδηγεί σε μικρή απόκλιση του h από το h_{\min} .

Τα σχήματα για τις μεμβράνες, όπως ορίζονται στην εξίσωση (5.9) είναι παρόμοια. Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι οι διάφοροι πρόσθετοι όροι που δίνονται στην εξίσωση (5.11), παραμελούνται. Τότε, στην περίπτωση του ταμπούρου, έχουμε:

$$(w^{(b)})_{l,m}^{n+1} = \left(2 + (c^{(b)})^2 t_s^2 \delta^{(2,b)}\right) (w^{(b)})_{l,m}^n - (w^{(b)})_{l,m}^{n-1} + \frac{t_s^2}{\rho^{(b)}H^{(b)}} ((f^{(b)})^n + (f^{(exc)})^n) \quad (5.29a)$$

$$(w^{(s)})_{l,m}^{n+1} = \left(2 + (c^{(s)})^2 t_s^2 \delta^{(2,s)}\right) (w^{(s)})_{l,m}^n - (w^{(s)})_{l,m}^{n-1} + \frac{t_s^2}{\rho^{(s)}H^{(s)}} ((f^{(s)})^n + (f^{(snare)})^n) \quad (5.29b)$$

όπου $(w^{(b)})_{l,m}^n$ είναι μια προσέγγιση της $(w^{(b,s)})(x,y,t)$ στις συντεταγμένες $x=h^{(b,s)}l$, $y=h^{(b,s)}m$ και σε χρόνο $t=nt_s$. Οι ταχύτητες των κυμάτων $c^{(b,s)}$ ορίζονται ως $c^{(b,s)} = \sqrt{\frac{T^{(b,s)}}{\rho^{(b,s)}H^{(b,s)}}}$. Ο όρος $f^{(snare)}$ της εξίσωσης (5.29b) μπορεί να παραληφθεί για την περίπτωση του τομ ή της κάσας, εφόσον δεν διαθέτουν χορδιέρα.

Οι όροι $\delta^{(2,b)}$ και $\delta^{(2,s)}$ είναι προσεγγίσεις 5 σημείων της 2D Λαπλασιανής και ορίζονται ως εξής:

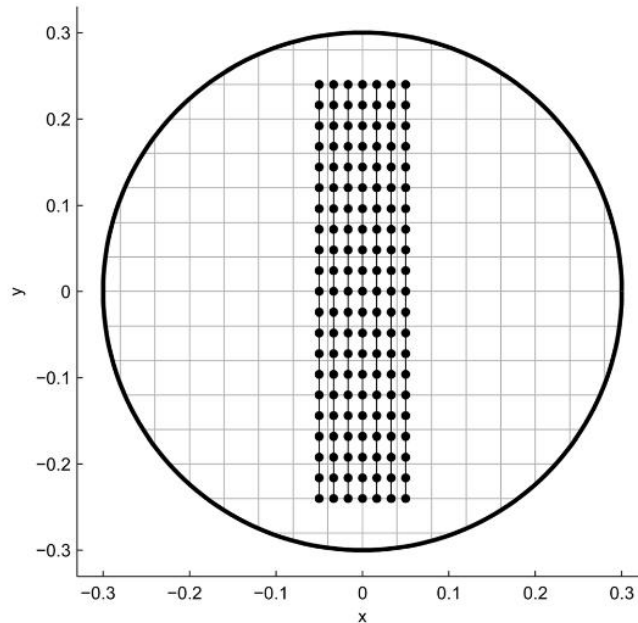
$$\delta^{(2,q)}(w^{(q)})_{l,m}^n = \frac{1}{(h^{(q)})^2} ((w^{(q)})_{l+1,m}^n + (w^{(q)})_{l-1,m}^n + (w^{(q)})_{l,m+1}^n + (w^{(q)})_{l,m-1}^n - 4(w^{(q)})_{l,m}^n) \quad (5.30)$$

όπου το q είναι b ή s . Στην εξίσωση (5.30) τα διαστήματα του πλέγματος $h^{(b)}$ και $h^{(s)}$ είναι διακριτά για τις δύο μεμβράνες.

Μια απαραίτητη συνθήκη σταθερότητας για την εξίσωση (5.29) είναι η εξής:

$$h^{(b,s)} \geq h_{min}^{(b,s)} = \sqrt{2}c^{(b,s)}t_s \quad (5.31)$$

Η συνθήκη (5.31) θα πρέπει να ικανοποιείται όσο το δυνατόν πιο κοντά στην ισότητα για ελάχιστη αριθμητική διασπορά και μέγιστο εύρος ζώνης. Εάν οι όροι ακαμψίας [βλ. εξίσωση (5.11)] περιλαμβάνονται, το όριο παραπάνω πρέπει να τροποποιηθεί.



Σχήμα 5.3: Υπολογιστικό πλέγμα για την ηχηρή μεμβράνη, καθώς και 1D πλέγματα για ένα σύνολο συρμάτων της χορδιέρας [22].

Ομοίως, για τη χορδιέρα (εξίσωση (5.13)), μπορούν να γραφούν τα σχήματα:

$$(m^{(i)})_l^{n+1} = 2m((m^{(i)})_l^n - (m^{(i)})_{l-1}^{n-1} + (c^{(i)})^2 t_s^2 \delta^{(1,i)}(m^{(i)})_l^n + \frac{t_s^2}{\rho^{(i)}A^{(i)}}(f^{(i)})^n), \quad i = 1, \dots, N^{(snare)} \quad (5.32)$$

όπου $(m^{(i)})_l^n$ είναι μια προσέγγιση του $m^{(i)}(\xi^{(i)}, t)$ για $\xi^{(i)} = lh^{(i)}$, $t = nt_s$ και $c^{(i)} = \sqrt{\frac{T^{(i)}}{\rho^{(i)} A^{(i)}}}$. Ο τελεστής $\delta^{(i,1)}$ ορίζεται ως εξής:

$$\delta^{(i,1)}(m^{(i)})_l^n = \frac{1}{(h^{(i)})^2} ((m^{(i)})_{l+1}^n - 2(m^{(i)})_l^n + (m^{(i)})_{l-1}^n) \quad (5.33)$$

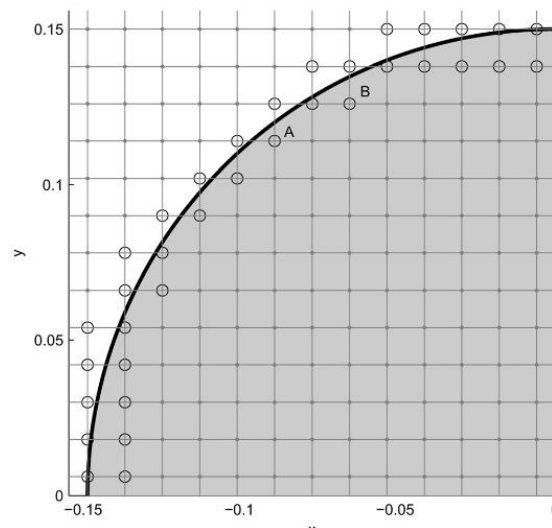
Μια απαραίτητη συνθήκη σταθερότητας για την εξίσωση (5.32) είναι η εξής:

$$h^{(i)} \geq h_{min}^{(i)} = c^{(i)} t_s \quad (5.34)$$

5.12 Τερματισμός συνόρων

Ο τερματισμός των συνόρων του σχήματος για την εξίσωση (5.26), για την εξίσωση 3D κύματος στο όριο του κελύφους ∂V_{sh} μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω μιας απλής προσέγγισης «σκάλας», όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.

Σε σημεία δίπλα στο σύνορο ∂V_{sh} , η απλούστερη προσέγγιση στη συνθήκη Neumann, εξ. (5.7), είναι να αντικατοπτρίζονται οι τιμές που απαιτούνται στην άλλη πλευρά του ορίου πίσω στο κεντρικό ενημερωμένο σημείο χωρίς αντιστροφή πρόσημου. Αναφερόμενοι στο Σχήμα 5.4, η ενημέρωση στο σημείο με την ένδειξη A απαιτεί δύο τέτοιες εικονικές τιμές (δηλαδή, τιμές εκτός του εσωτερικού της κοιλότητας του τυμπάνου σε αυτήν την περίπτωση) και εκείνη στο σημείο B απαιτεί μία εικονική τιμή.



Σχήμα 5.4: Κάτοψη υπολογιστικού πλέγματος για το ακουστικό πεδίο με το όριο του κελύφους ∂V_{sh} , να υποδεικνύεται ως μαύρος κύκλος. Τα σημεία στα οποία πρέπει να πραγματοποιηθεί εξειδικευμένη ενημέρωση υποδεικνύονται με ανοιχτούς κύκλους [22].

Στο σημείο Α η Λαπλασιανή μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

$$\delta^{(3)}\Psi_{l,m,p}^n = \frac{1}{h^2} (\Psi_{l+1,m,p}^n + \Psi_{l,m-1,p}^n + \Psi_{l,m,p+1}^n + \Psi_{l,m,p-1}^n - 4\Psi_{l,m,p}^n) \quad (5.35)$$

και στο σημείο Β:

$$\delta^{(3)}\Psi_{l,m,p}^n = \frac{1}{h^2} (\Psi_{l+1,m,p}^n + \Psi_{l,m-1,p}^n + \Psi_{l-1,m,p+1}^n + \Psi_{l,m,p+1}^n + \Psi_{l,m,p-1}^n - 5\Psi_{l,m,p}^n) \quad (5.36)$$

Οι αριθμητικές συνοριακές συνθήκες στο ∂V_{ext} , στις οποίες εφαρμόζεται μια οριακή συνθήκη απορρόφησης, μπορούν επίσης να επιτευχθούν εύκολα. Για την συνθήκη της εξίσωσης (5.8a), για παράδειγμα, σε ένα σημείο στην επάνω όψη του ∂V_{ext} , μια πιθανή ενημέρωση, που λαμβάνεται μέσω κεντραρισμένης διακριτοποίησης και εισαγωγής στην Εξ. (5.26), είναι :

$$\Psi_{l,m,p}^{n+1} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda} \left(\left(\frac{2}{\lambda^2} - 6 \right) \Psi_{l,m,p}^n + \Psi_{l,m,p}^n + \Psi_{l-1,m,p}^n + \Psi_{l,m+1,p}^n + \Psi_{l,m-1,p}^n + 2\Psi_{l,m,p-1}^n - \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi_{l,m,p}^{n-1} \right) \quad (5.37)$$

όπου $\lambda = \frac{ct_s}{h}$.

Οι αριθμητικές σταθερές συνοριακές συνθήκες για τις μεμβράνες, όπως δίνονται στην εξίσωση (5.12) μπορούν να υλοποιηθούν, στην απλούστερη περίπτωση, ορίζοντας τις τιμές πλέγματος σε σημεία εκτός του $\partial V^{(b,s)}$ να είναι μηδέν, ή, για μεγαλύτερη ακρίβεια, ορίζοντάς τες μέσω παρεμβολής.

5.13 Σύζευξη και παρεμβολή

Δεδομένου ότι τα διάφορα πλέγματα που υιοθετούνται για τις μεμβράνες, το ακουστικό πεδίο, τη χορδιέρα και για το δυναμικό ταχύτητας έχουν διαφορετικές αποστάσεις, είναι επίσης απαραίτητη η παρεμβολή [23].

Λαμβάνοντας υπόψη πρώτα τη σύζευξη μεταξύ της άνω μεμβράνης και του ακουστικού πεδίου, τα οποία ορίζονται σε πλέγματα με διαστήματα $h^{(b)}$ και h , είναι απαραίτητο να οριστούν δύο παρεμβολείς $I^{h \rightarrow h^{(b)}}$ και $I^{h^{(b)} \rightarrow h}$, οι οποίοι δρουν από ένα δισδιάστατο υποσύνολο των τιμών του ακουστικού πεδίου στη μεμβράνη και αντίστροφα. Μια απλή επιλογή και στις δύο περιπτώσεις είναι η διγραμμική παρεμβολή. Η σύζευξη της εξίσωσης (5.21a) μπορεί να διακριτοποιηθεί ως εξής:

$$(f^{(b)})^n = \rho I^{h \rightarrow h^{(b)}} \frac{\Psi_{\cdot, p^{(b)}}^{n+1} - \Psi_{\cdot, p^{(b)}}^{n-1}}{2t_s} - \rho I^{h^{(b)} \rightarrow h} \frac{\Psi_{\cdot, p^{(b)}+1}^{n+1} - \Psi_{\cdot, p^{(b)}+1}^{n-1}}{2t_s} \quad (5.38)$$

όπου οι όροι $\Psi_{\cdot, p^{(b)}}^n$ και $\Psi_{\cdot, p^{(b)}+1}^n$ υποδεικνύουν τα σημεία πλέγματος για το ακουστικό πεδίο ακριβώς δίπλα στη μεμβράνη, κάτω και πάνω, αντίστοιχα. Το σύμβολο "." στους παραπάνω όρους αναπαριστά τους δείκτες l, m των σημείων του πλέγματος.

Το σχήμα ενημέρωσης του $\Psi_{l,m,p}^n$ της εξίσωσης (5.26) στα $p=p^{(b)}$ και $p=p^{(b)}+1$ απαιτεί πρόσβαση στις τιμές της συνάρτησης του πλέγματος στην άλλη πλευρά της

μεμβράνης. Συμβολίζουμε αυτές τις τιμές του πλέγματος ως $\Psi_{\cdot, p^{(b)}}^{*,n}$ και $\Psi_{\cdot, p^{(b)+1}}^{*,n}$. Οι συνθήκες της σύζευξης στην εξίσωση (5.22a) μπορούν να διακριτοποιηθούν ως εξής:

$$I^{h^{(b)} \rightarrow h} \frac{(w^{(b)})^{n+1} - (w^{(b)})^{n-1}}{2t_s} = - \frac{(\Psi_{\cdot, p^{(b)+1}}^{*,n} - \Psi_{\cdot, p^{(b)}}^{*,n})}{h} = - \frac{(\Psi_{\cdot, p^{(b)+1}}^n - \Psi_{\cdot, p^{(b)}}^n)}{h} \quad (5.39)$$

Κατά την εφαρμογή, οι συνθήκες της εξίσωσης (5.39) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση στις εικονικές τιμές του πλέγματος ως $\Psi_{\cdot, p^{(b)}}^{*,n}$ και $\Psi_{\cdot, p^{(b)+1}}^{*,n}$, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν απευθείας στις εξισώσεις (5.26) και (5.29), οδηγώντας σε μια σαφή φόρμα ενημέρωσης.

Οι συνθήκες σύζευξης για τα σύρματα (χορδές) της χορδιέρας απαιτούν επίσης παρεμβολή. Θεωρώντας ότι $I^{h^{(s)} \rightarrow h^{(i)}}$ είναι μια παρεμβολή (πιθανώς διγραμμική) από τις τιμές στο πλέγμα για την άνω μεμβράνη στις αντίστοιχες θέσεις κατά μήκος της i -οστής χορδής, τότε συνθήκη τη εξίσωσης (5.23) μπορεί να διακριτοποιηθεί ως εξής:

$$(f^{(i)})^n = -K^{(i)} \left([(m^{(i)})^n - I^{h^{(s)} \rightarrow h^{(i)}}(w^{(s)})^n]^+ \right)^{a^{(i)}} \quad (5.40)$$

Εξάγοντας το $I^{h^{(i)} \rightarrow h^{(s)}}$ από την i -οστή χορδή στις τοποθεσίες του πλέγματος στην ηχηρή μεμβράνη (ίσως διγραμμικά), έτσι ώστε οι τιμές να κατανέμονται σε παρακείμενες θέσεις πλέγματος στο πλέγμα μεμβράνης, τότε η συνθήκη της εξίσωσης (5.24) μπορεί να διακριτοποιηθεί ως εξής:

$$(f^{(snare)})^n = - \sum_{i=1}^{N^{(snare)}} I^{h^{(i)} \rightarrow h^{(s)}} (f^{(i)})^n \quad (5.41)$$

Οι συνθήκες σύζευξης της χορδιέρας είναι μη γραμμικές. Ως εκ τούτου, θα πρέπει να περιμένουμε κάποιον κίνδυνο αστάθειας, ειδικά εάν οι συντελεστές ακαμψίας $K^{(i)}$ για τις χορδές είναι μεγάλοι. Μια καλή λύση περιλαμβάνει ημιέμμεσα σχήματα που εφαρμόζονται στην εξίσωση (5.40).

Κεφάλαιο 6- Μοντελοποίηση Ακουστικής Κιθάρας-Ακουστικού Μπάσου

6.1 Εισαγωγή-Περιγραφή κιθάρας

Το παρόν κεφάλαιο αφορά την αριθμητική ανάλυση μιας φυσικής μοντελοποίησης της ακουστικής κιθάρας, άρα και του ακουστικού μπάσου. Η διαφορά των δύο αυτών μουσικών οργάνων είναι ο αριθμός, η διάμετρος και το μήκος των χορδών που χρησιμοποιούνται, όπως και το μέγεθος των εξαρτημάτων των οργάνων.

Το σώμα της κιθάρας αποτελείται από το ηχείο, τα πλαϊνά, το πίσω τμήμα και το λαιμό. Οι 6 χορδές συνδέονται από τη μία πλευρά στο λαιμό και από την άλλη πλευρά στη γέφυρα. Το ίδιο το ηχείο είναι ένα λεπτό ξύλινο στρώμα που περιέχει μια ηχητική οπή και ενισχύεται με αντηρίδες (κομμάτια σκληρού ξύλου κολλημένα στην εσωτερική του όψη που έχουν μεγάλη επίδραση στο σχήμα των δομικών χαρακτηριστικών του ηχείου και στην απόδοση ακουστικής εκπομπής της κιθάρας). Η απόδοση ακουστικής εκπομπής ορίζεται ως ο λόγος της ηχητικής ισχύος που εκπέμπεται προς την επιφανειακή δονητική ισχύ ενός εμβόλου με ισοδύναμη επιφάνεια.

Το μοντέλο της παρούσας εργασίας περιλαμβάνει την εγκάρσια μετατόπιση της χορδής που διεγείρεται από έναν παλμό δύναμης, την καμπτική κίνηση του ηχείου και την ηχητική εκπομπή. Η κιθάρα θεωρείται ως ένα σύνολο απλών δομών που συνδέονται μεταξύ τους. Η χορδή συνδέεται με την ηχητική πλάκα μέσω της γέφυρας. Το ηχείο έχει μοντελοποιηθεί ως μια ορθότροπη ετερογενής αποσβεσμένη πλάκα Kirchhoff-Love, με ηχητική τρύπα, πακτωμένη στα σύνορά της. Τα άλλα μέρη του σώματος (πίσω τμήμα, λαιμός, πλαϊνά...) θεωρείται ότι είναι απόλυτα άκαμπτα. Η πλάκα εκπέμπει τόσο μέσα στην κοιλότητα όσο και στο εξωτερικό ελεύθερο πεδίο.

Έτσι, πραγματοποιείται η προσομοίωση του τρισδιάστατου πεδίου ηχητικής πίεσης μιας κιθάρας στο πεδίο του χρόνου. Σε μια κιθάρα, τα ελαστικά κύματα στις χορδές και στην ηχητική πλάκα, και τα ακουστικά κύματα τόσο στον εξωτερικό αέρα όσο και στην κοιλότητα, εξελίσσονται συνεχώς με το χρόνο. Τόσο τα ρευστά όσο και τα δομικά κύματα αλληλεπιδρούν συνεχώς, έτσι ώστε το σύστημα που αποτελείται από το όργανο, την κοιλότητα και τον περιβάλλοντα αέρα να θεωρούνται ως ένα σύνολο.

Η εξίσωση της πλάκας λύνεται με συγκεκριμένη φασματική μέθοδο. Μια μέθοδος εικονικού τομέα χρησιμοποιείται για την επίλυση της αλληλεπίδρασης ρευστού-δομής. Τέλος, χρησιμοποιείται ένα κλασσικό σχήμα κεντρικών πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης για τη χορδή και για το ακουστικό πεδίο, δηλαδή για τη χρονική διακριτοποίηση [25],[26].

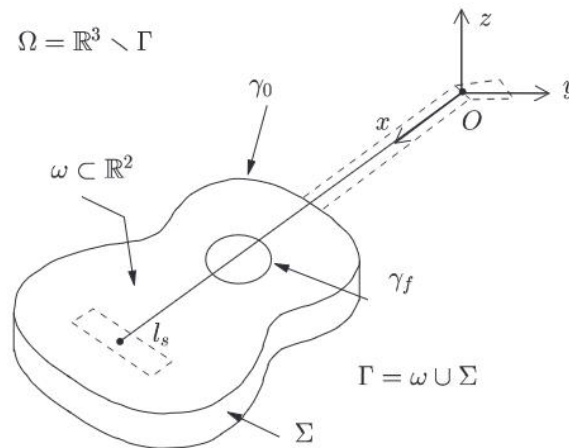
6.2 Περιγραφή μοντέλου

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η μοντελοποίηση της κιθάρας, λαμβάνονται οι παρακάτω παραδοχές [26]:

- Τα πλάτη των δονήσεων είναι μικρά, γεγονός που δικαιολογεί ένα γραμμικό μοντέλο.
- Το σώμα δεν έχει πάχος και ο λαιμός είναι παραμελείται.
- Μόνο το ηχείο δονείται, ενώ το υπόλοιπο σώμα θεωρείται πως είναι απολύτως άκαμπτο.
- Το ηχείο μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας μια εξίσωση καμπτικής πλάκας Kirchhoff-Love (η κίνηση που είναι παράλληλη στο σώμα παραμελείται). Οι αντηρίδες και η γέφυρα θεωρούνται ως ετερογένειες.
- Λαμβάνεται υπόψη μόνο η εγκάρσια δόνηση της χορδής: η εντός επιπέδου μετατόπιση της χορδής (παράλληλη με το ηχείο) παραμελείται.
- Η χορδή διεγείρεται με μια εξιδανικευμένη δύναμη «τραβήγματος».
- Τα εσωτερικά φαινόμενα απόσβεσης στην πλάκα και στη χορδή μοντελοποιούνται με όρους διάχυσης ιξωδοελαστικού τύπου

6.2.1 Γεωμετρία κιθάρας

Το σώμα της κιθάρας οριοθετείται από μια επιφάνεια που συμβολίζεται με Γ και χωρίζεται σε δύο μέρη: $\Gamma = \omega \cup \Sigma$, όπου ω είναι η πάνω πλάκα του οργάνου και Σ είναι η υπόλοιπη επιφάνεια (δηλαδή τα πλαϊνά και η πλάτη). Το σύνολο του ω με τη σειρά του χωρίζεται σε δύο μέρη: γ_0 είναι το εξωτερικό σύνορο της επάνω πλάκας και γ_f είναι το εσωτερικό σύνορο, κατά μήκος της ηχητικής οπής. Ο περιβάλλον αέρας καταλαμβάνει την περιοχή $\Omega = \mathbb{R}^3 / \Gamma$. Το Ω αντιστοιχεί στην εσωτερική κοιλότητα και την εξωτερική περιοχή, που επικοινωνούν μέσω της ηχητικής οπής. Η χορδή μήκους l_s είναι σταθερά στερεωμένη στο λαιμό σε ένα σημείο που συμβολίζεται ως O , που επιλέγεται ως η αρχή του συστήματος συντεταγμένων.



Σχήμα 6.1: Γεωμετρική περιγραφή της κιθάρας [25].

Άγνωστα μεγέθη: Το μοντέλο περιλαμβάνει τα ακόλουθα άγνωστα μεγέθη, τα οποία εξαρτώνται από τον χρόνο:

- Η κατακόρυφη μετατόπιση της χορδής $u_s(x, t)$, $x \in [0, l_s]$
- Η κατακόρυφη μετατόπιση του ηχείου $u_p(x, y, t)$, $(x, y) \in \omega$
- Η ακουστική πίεση $p(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in \Omega$
- Το πεδίο της ακουστικής ταχύτητας $\underline{v}_a(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in \Omega$

Σύμβολα: Μια απλή υπογραμμισμένη ποσότητα (π.χ. : $\underline{\theta}$) συμβολίζει ένα διάνυσμα στο \mathbb{R}^2 , μια διπλά υπογραμμισμένη ποσότητα (π.χ. $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$) συμβολίζει έναν τανυστή δεύτερης τάξης στο \mathbb{R}^2 και μια απλή έντονα υπογραμμισμένη ποσότητα (π.χ. $\underline{\underline{N}}$) συμβολίζει ένα διάνυσμα στο \mathbb{R}^3 . Το \underline{div} υποδηλώνει τον συνήθη τελεστή απόκλισης για διανύσματα και $\underline{\nabla}$ υποδηλώνει τον συνήθη τελεστή κλίσης για βαθμωτά μεγέθη. Το \underline{Div} συμβολίζει τον τελεστή απόκλισης για τανυστές που ορίζεται ως:

$$\underline{Div} \underline{\underline{\mathcal{M}}} = \begin{pmatrix} \partial_1 \mathcal{M}_{11} + \partial_2 \mathcal{M}_{12} \\ \partial_1 \mathcal{M}_{21} + \partial_2 \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix}$$

Το $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta})$ συμβολίζει τον επίπεδο γραμμικοποιημένο τανυστή παραμόρφωσης του διανυσματικού πεδίου $\underline{\theta}$ που ορίζεται ως:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{\theta}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta \theta_\alpha + \partial_\alpha \theta_\beta), \forall \alpha, \beta \in \{1, 2\}$$

6.2.2 Χορδή

Η χορδή θεωρείται ότι έχει ομοιόμορφη πυκνότητα ρ_s , ομοιόμορφη τάση T_s και καμία ακαμψία. Στη συνέχεια, θα ληφθεί υπόψη μόνο η κάθετη καμπτική κίνηση του ηχείου. Επομένως, είναι επίσης φυσικό να λαμβάνεται υπόψη μόνο η κατακόρυφη πόλωση της χορδής. Η κίνηση της χορδής περιγράφεται έτσι από την εγκάρσια μετατόπισή της ,κάθετη στο ηχείο, η οποία συμβολίζεται ως $u_s(x, t)$, $x \in [0, l_s]$.

Η εξίσωση χορδών είναι μια κλασική 1D εξίσωση αποσβεσμένου κύματος :

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - T \left(1 + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + \rho_s R_s \frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s(x, t), \text{ στο } [0, l_s] \quad (6.1)$$

Η εσωτερική απόσβεση μοντελοποιείται με δύο όρους: έναν ιξωδοελαστικό όρο με συντελεστή η_s του οποίου ο βασικός σκοπός είναι να εισάγει μια εξαρτώμενη από τη συχνότητα απόσβεση στη χορδή και έναν ρευστό όρο με συντελεστή R_s που έχει σκοπό να εισάγει μια σταθερή εσωτερική απόσβεση για χαμηλές συχνότητες.

Η χορδή είναι στερεωμένη στο ένα άκρο στο λαιμό της κιθάρας, ο οποίος θεωρείται ότι είναι απολύτως άκαμπος. Έτσι έχουμε:

$$u_s(0, t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (6.2)$$

Στη γέφυρα ,θεωρείται ότι η μετατόπιση της χορδής δίνεται από τη μετατόπιση της πλάκας στο σημείο επαφής μεταξύ χορδής και γέφυρας, το οποίο συμβολίζεται ως (x_0, y_0) :

$$u_s(l_s, t) = u_p(x_0, y_0, t), \quad \forall t > 0 \quad (6.3)$$

Το τράβηγμα της χορδής υποτίθεται ότι είναι επιβεβλημένη δύναμη :

$$f_s(x, t) = g(x)h(t) \quad (6.4)$$

όπου το $h(t)$ αντιπροσωπεύει μια απλή εξιδανικευμένη εκδοχή του μηχανισμού που διέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ χορδής και δακτύλου. Ο παίκτης τραβάει τη χορδή

για σχεδόν 15 ms και την απελευθερώνει για 0,4 ms. Αυτή η δύναμη κατανέμεται σε ένα μικρό τμήμα της χορδής μέσω της ομαλής θετικής συνάρτησης g , η οποία κανονικοποιείται έτσι ώστε $\int_0^{l_s} g(x)dx = 1$.

6.2.3 Ηχείο

Το ηχείο είναι ένα λεπτό, ορθότροπο ξύλινο στρώμα, με ηχητική οπή. Το πάχος είναι σχετικά μικρό (περίπου 3 mm) σε σύγκριση με τις διαστάσεις του ηχείου (περίπου 50 cm μήκος). Όσον αφορά το φασματικό περιεχόμενο, η μελέτη μας περιορίζεται στο εύρος ζώνης 0–3000 Hz.

Επειδή το σύστημα αντηρίδων και η γέφυρα θεωρούνται ως ετερογένειες του ηχείου, οι ακόλουθες φυσικές παράμετροι που χαρακτηρίζουν την επάνω πλάκα είναι μεταβλητές συναρτήσεις του χώρου: έχουμε την πυκνότητα $\rho_p(x, y)$, το πάχος $a(x, y)$ και τον τανυστή ακαμψίας για ορθότροπο υλικό $C(x, y)$. Στην παρούσα εργασία η χωρική εξάρτηση αυτών των παραμέτρων θα παραλειφθεί, προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί.

Η εντός επιπέδου κίνηση του ηχείου παραμελείται σε σύγκριση με την καμπτική του κίνηση. Η κίνηση του ηχείου με αντηρίδες περιγράφεται επομένως πλήρως από την εγκάρσια μετατόπιση της επάνω πλάκας, που συμβολίζεται $u_p(x, y, t)$, όπου $(x, y) \in \omega$. Αυτή η κίνηση διέπεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\alpha \rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \left(1 + \eta_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{div} \underline{\underline{Div}} \alpha^3 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Xi}} (\underline{\underline{\nabla}} u_p) + \alpha \rho_p R_p \frac{\partial u_p}{\partial t} = F - [p]_\omega \text{ στο } \omega \quad (6.5)$$

Όσον αφορά τη χορδή, η εσωτερική απόσβεση στην πλάκα διαμορφώνεται με δύο όρους: έναν ιξωδοελαστικό όρο με συντελεστή η_p και έναν όρο ρευστού με συντελεστή R_p . Στην εξίσωση (6.5) $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}(x, y)$ είναι ο τανυστής ακαμψίας για ορθότροπα υλικά, ο οποίος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\underline{\underline{C}} = c_{11} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}_{12} & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{33} \end{pmatrix} = c_{11} \underline{\underline{\tilde{C}}}$$

όπου c_{11} είναι ένας ελαστικός συντελεστής σε Pa και οι \tilde{c}_{12} , \tilde{c}_{22} και \tilde{c}_{33} , είναι αδιάστατοι συντελεστές. Ο $\underline{\underline{C}}$ θεωρείται ότι ικανοποιεί τη σχέση: $0 < c^- |\underline{\underline{\mathcal{M}}}|^2 \leq \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \underline{\underline{\mathcal{M}}} \leq c^+ |\underline{\underline{\mathcal{M}}}|^2$

Η επάνω πλάκα είναι πακτωμένη στο γ_0 :

$$u_p = 0 \text{ και } \partial_n u_p = 0 \text{ στο } \gamma_0 \quad (6.6)$$

ενώ στο σύνορο κατά μήκος της ηχητικής οπής γ_f η επάνω πλάκα είναι ελεύθερη :

$$(\underline{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}} = 0, \text{ στο } \gamma_f \quad (6.7)$$

$$(\underline{\underline{Div}} \underline{\underline{\mathcal{M}}}) \cdot \underline{\underline{n}} + \partial_\tau \left[(\underline{\underline{\mathcal{M}}} \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] = 0, \text{ στο } \gamma_f \quad (6.8)$$

όπου $\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \alpha^3 \underline{\underline{C}}_\xi (\underline{\underline{\nabla}} u_p)$ είναι η στιγμική κάμψης, $\underline{\underline{n}}$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα κατά μήκος του συνόρου γ_f και $\underline{\underline{\tau}}$ το εφαπτομενικό διάνυσμα κατά μήκος του συνόρου γ_f . Οι δύο συνθήκες των εξισώσεων (6.7) και (6.8) εκφράζουν ότι η δύναμη και η ροπή εξαφανίζονται στο ελεύθερο σύνορο.

Ο όρος πυκνότητας δύναμης που ασκείται στην πλάκα από τον περιβάλλοντα αέρα είναι $[p]_\omega = p_e - p_i$, που είναι το άλμα πίεσης κατά μήκος του ηχείου. Το F υποδηλώνει την πυκνότητα της δύναμης που ασκεί η χορδή στη γέφυρα και θεωρείται ότι είναι η κάθετη συνιστώσα της τάσης της χορδής σε αυτό το σημείο. Αυτή η δύναμη ασκείται στο σημείο επαφής (x_0, y_0) μεταξύ χορδής και γέφυρας, κι έχουμε:

$$F(x, y, t) \approx -T \partial_x u_s(l_s, t) \delta_{x_0, y_0}(x, y) \quad (6.9)$$

6.2.4 Ακουστικό πεδίο

Το ακουστικό πεδίο διέπεται από τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις του Euler:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c_\alpha^2 \rho_\alpha \operatorname{div}(\underline{\underline{v}}_\alpha) \text{ στο } \Omega \quad (6.10a)$$

$$\rho_\alpha \frac{\partial \underline{\underline{v}}_\alpha}{\partial t} = -\underline{\underline{\nabla}} p \text{ στο } \Omega \quad (6.10b)$$

όπου c_α είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, ρ_α είναι η πυκνότητα του αέρα, p είναι η ηχητική πίεση στο Ω και $\underline{\underline{v}}_\alpha$ η ακουστική ταχύτητα στο Ω . Ο όρος $\mu_\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha c_\alpha^2}$ είναι η διαπερατότητα του αέρα. Οι εξισώσεις (6.10a) και (6.10b) συμπληρώνονται από μια συνθήκη συνέχειας για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην επιφάνεια ω της πλάκας:

$$\underline{\underline{v}}_\alpha(x, y, 0, t) \cdot \underline{\underline{e}}_z = \partial_t u_p(x, y, t), \quad \forall (x, y) \in v, \forall t > 0 \quad (6.11)$$

Επιπλέον, καθώς το σώμα της κιθάρας θεωρείται ότι είναι απόλυτα άκαμπτο, έχουμε:

$$\underline{\underline{v}}_\alpha(x, y, z, t) \cdot \underline{\underline{N}}_\Gamma = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma, \forall t > 0 \quad (6.12)$$

όπου το $\underline{\underline{N}}_\Gamma$ συμβολίζει το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα προς το σύνορο Σ .

6.2.5 Ενεργειακή αποσύνθεση

Το σύστημα των συζευγμένων εξισώσεων (6.1) έως (6.12) εκπληρώνει μια ιδιότητα ενεργειακής αποσύνθεσης στην περίπτωση ελεύθερων ταλαντώσεων. Οι ενέργειες της χορδής E^s , της πλάκας E^p και του ακουστικού πεδίου E^a δίνονται από τις εξισώσεις:

$$E^s(t) = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \rho_s \left| \frac{\partial u_s}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_s} T \left| \frac{\partial u_s}{\partial x} \right|^2 dx \quad (6.13a)$$

$$E^p(t) = \frac{1}{2} \int \int_{\omega} \rho_p a \left| \frac{\partial u_p}{\partial x} \right|^2 dx dy + \frac{1}{2} \int \int_{\omega} \alpha^3 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\nabla}} u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\nabla}} u_p) dx dy \quad (6.13b)$$

$$E^a(t) = \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \rho_a \left| \underline{\underline{v}} \right|^2 dx dy dz + \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \frac{1}{c_a^2 \rho_a} |p|^2 dx dy dz \quad (6.13c)$$

Η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι $E = E^s + E^p + E^a$ και πληροί την ακόλουθη ιδιότητα ταυτότητας:

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_0^{l_s} f_s \frac{du_s}{dx} dx - \int_0^{l_s} \eta_s T |\partial_{x,t} u_s|^2 dx - \int_0^{l_s} \rho_s R_s |\partial_t u_s|^2 dx - \int \int_{\omega} \eta_p \alpha^3 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\nabla}} \partial_t u_p) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\nabla}} \partial_t u_p) dx dy - \int \int_{\omega} \alpha \rho_p R_p |\partial_t u_p|^2 dx dy \quad (6.14)$$

Εκτός από τη φυσική της σημασία, αυτή η ιδιότητα εγγυάται την καλή τοποθέτηση του συνεχούς μοντέλου και θα αξιοποιηθεί για τη διασφάλιση της σταθερότητας του αριθμητικού σχήματος.

6.3 Αριθμητική ανάλυση

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι κύριες δυσκολίες που πρέπει να αντιμετωπίσουμε για να λύσουμε αριθμητικά τις παραπάνω εξισώσεις .

Η τρισδιάστατη φύση του υπολογιστικού τομέα για την ηχητική ακτινοβολία δημιουργεί πρόβλημα λόγω μεγάλου μεγέθους. Αυτός ο τομέας είναι απεριόριστος, επομένως είναι απαραίτητο να περιοριστεί σε ένα πρόβλημα πεπερασμένου μεγέθους, προκειμένου να γίνει υπολογισίμο. Η γεωμετρία του οργάνου είναι σύνθετη και περιλαμβάνει συνοριακές συνθήκες τρίτης τάξης (εξίσωση (6.8)). Επιπλέον, η χωροχρονική διακριτοποίηση της εξίσωσης Kirchhoff-Love (Παράρτημα Β) απαιτεί μια προσαρμοσμένη μέθοδο ανάλυσης, επειδή αυτή η εξίσωση περιλαμβάνει έναν χωρικό τελεστή τέταρτης τάξης και είναι εγγενώς διασκορπιστικός. Τέλος, πρέπει να εξαχθεί ένα σχήμα σταθερής επίλυσης.

Το πρόβλημα αρχικά ξαναγράφεται ως ισοδύναμη διατύπωση μεταβλητών, η οποία είναι το πρώτο βήμα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Μια μεταβολική διατύπωση αντιστοιχεί στην αρχή της μεθόδου εικονικού έργου, η οποία σχετίζεται φυσικά με τη συνεχή ενεργειακή ταυτότητα (εξίσωση (6.14)). Η προσαρμοσμένη προσέγγιση χώρου της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος οδηγεί σε μια διακριτή ενεργειακή ταυτότητα, η οποία είναι μια βολική προσέγγιση για την εξαγωγή της σταθερότητας του σχήματος επίλυσης.

Οι κύριες πτυχές της αριθμητικής ανάλυσης είναι οι ακόλουθες:

- i. Η εξίσωση της πλάκας λύνεται με μια μέθοδο τροπικής αποσύνθεσης.
- ii. Το πρόβλημα αλληλεπίδρασης ρευστού-δομής επιλύεται με τη χρήση της μεθόδου πλασματικού πεδίου.
- iii. Μία από τις κύριες πρωτοτυπίες της μεθόδου είναι μια σταθερή σύζευξη μεταξύ μιας συνεχούς και μιας διακριτής ανάλυσης χρόνου.

Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, η απόσβεση στην πλάκα περιγράφεται με έναν μόνο όρο απόσβεσης ρευστού και δεν υπάρχει απόσβεση στη χορδή. Δεν προσθέτει

δυσκολία στους υπολογισμούς να ληφθούν υπόψη οι άλλοι όροι απόσβεσης που παρουσιάζονται στις εξισώσεις (6.1) και (6.5).

6.3.1 Μεταβολική διατύπωση

A. Η πλάκα

Μια πολύ γνωστή δυσκολία για την επίλυση του προβλήματος του Kirchhoff-Love οφείλεται στην παρουσία ενός χωρικού τελεστή τέταρτης τάξης. Αυτός ο τελεστής θα απαιτούσε a priori τη χρήση εξελιγμένων πεπερασμένων στοιχείων της κλάσης C^1 , με συνέχεια της κάθετης παραγώγου κατά μήκος κάθε ακμής του τριγωνισμού της πλάκας. Για να παρακαμφθεί αυτή τη δυσκολία, ο χωρικός τελεστής χωρίζεται σε δύο τελεστές δεύτερης τάξης.

Εισάγουμε την ταχύτητα $v_p = \partial_t u_p$ και τη στιγμή κάμψης $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\nabla}} u_p)$, που οδηγεί στο εξής ισοδύναμο πρόβλημα δεύτερης τάξης στο χώρο και πρώτης τάξης στο χρόνο

$$\alpha_p \partial_t v_p + \operatorname{div} \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{M}} + \alpha_p R_p v_p = F - [p]_\omega, \text{ στο } \omega \quad (6.15a)$$

$$\partial_t \underline{\underline{M}} - \alpha^3 \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\nabla}} v_p) = 0, \text{ στο } \omega \quad (6.15b)$$

$$v_p = \partial_n v_p = 0, \text{ στο } \gamma_0 \quad (6.15c)$$

στο οποίο προστίθενται οι συνθήκες στο ελεύθερο σύνορο που δίνονται από την εξίσωση (6.8).

Η μεταβολική διατύπωση των εξισώσεων (6.15) προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (6.15a) με μια ελεγχουσυνάρτηση $v_p^*: \omega \rightarrow \mathbb{R}$ και πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (6.15b) με μια ελεγχουσυνάρτηση $\underline{\underline{M}}^*: \omega \rightarrow \mathbb{R}^4$. Χρησιμοποιώντας επιμέρους ολοκλήρωση στο ω οδηγούμαστε στην ακόλουθη μικτή διατύπωση:

Βρείτε $v_p: \omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $\underline{\underline{M}}: \omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε:

$$\frac{d}{dt} \int_\omega \alpha_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} v_p^* - \int_{\gamma_f} \partial_\tau \left[(\underline{\underline{M}} \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] v_p^* + \int_\omega \alpha_p R_p v_p v_p^* = -$$

$$T \partial_x u_s(l_s, t) v_p^*(x_0, y_0) - \int_\omega [p]_\omega v_p^*, \quad \forall v_p^* \quad (6.16a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_\omega \alpha^{-3} \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{M}}^* + \int_\omega \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{M}}^* \cdot \underline{\underline{\nabla}} v_p + \int_{\gamma_f} \partial_\tau \left[(\underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] v_p = 0, \quad \forall \underline{\underline{M}}^* \quad (6.16b)$$

Το κύριο ενδιαφέρον αυτής της διατύπωσης είναι ότι μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας τυπικά πεπερασμένα στοιχεία Lagrange.

B. Η αλληλεπίδραση ρευστού-δομής

Χρησιμοποιούμε μια μέθοδο πλασματικού πεδίου, η οποία διατηρεί την αποτελεσματικότητα της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών από την άποψη του χρόνου υπολογισμού και την καλή προσέγγιση του σχήματος της κιθάρας. Η κύρια ιδέα του είναι να επαναδιατυπώσει το πρόβλημα σε έναν τομέα απλής γεωμετρίας που αγνοεί το όργανο. Η αλληλεπίδραση ρευστού-δομής λαμβάνεται στη συνέχεια

υπόψη μέσω της εισαγωγής της νέας άγνωστης μεταβλητής $\lambda = [p]_\Gamma = p_e - p_i$, η οποία ορίζεται στο Γ και υποδηλώνει το άλμα πίεσης κατά μήκος των συνόρων του οργάνου. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (6.10a) με μια ελεγχοσυνάρτηση $p^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και την εξίσωση (6.10b) με μια ελεγχοσυνάρτηση $\underline{v}_\alpha^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο Green, προκύπτουν οι εξισώσεις (6.17a) και (6.17b).

Απομένει να ληφθούν υπόψη οι συνοριακές συνθήκες που δίνονται από την εξίσωση (6.11) και (6.12) στην επιφάνεια του οργάνου, που γίνεται με την εξίσωση (6.17c). Έτσι, οδηγούμαστε στο εξής πρόβλημα:

Βρείτε $p(t): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{v}_\alpha^*(t): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\lambda(t): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\rho_\alpha c_\alpha^2} p p^* + \int_{\mathbb{R}^3} p^* \operatorname{div} \underline{v}_\alpha = 0, \forall p^* \quad (6.17a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\alpha \underline{v}_\alpha \underline{v}_\alpha^* - \int_{\mathbb{R}^3} p \operatorname{div} \underline{v}_\alpha^* - \int_\Gamma (\underline{v}_\alpha^* \cdot \underline{N}) \lambda = 0, \forall \underline{v}_\alpha^* \quad (6.17b)$$

$$\int_\omega v_p \lambda^* - \int_\Gamma (\underline{v}_\alpha^* \cdot \underline{N}) \lambda^* = 0, \forall \lambda^* \quad (6.17c)$$

Στις εξισώσεις (6.17), τα \underline{v}_α και p ορίζονται στον πλήρη τομέα \mathbb{R}^3 , και όχι μόνο στον τομέα $\Omega = \mathbb{R}^3 / \Gamma$. Στη συνέχεια θα είναι δυνατή η χρήση ενός κανονικού πλέγματος για την προσέγγιση του ακουστικού πεδίου. Αποδεικνύεται ότι αυτή η επιλογή οδηγεί στην πραγματικότητα σε ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών, το οποίο είναι το κύριο ενδιαφέρον της μεθόδου του πλασματικού πεδίου. Επιπλέον, η γεωμετρία του οργάνου είναι καλά προσαρμοσμένη, αφού βασίζεται σε ένα τριγωνικό πλέγμα της επιφάνειάς του για την προσέγγιση του λ , το οποίο είναι εύκολο να κατασκευαστεί.

Γ. Η χορδή

Επειδή η ταχύτητα πλάκας v_p έχει εισαχθεί για να λυθεί το πρόβλημα Kirchhoff-Love (εξίσωση (6.15)) πρέπει να διαφοροποιηθεί χρονικά η συνοριακή συνθήκη στη γέφυρα που δίνεται από την εξίσωση (6.3). Αυτό οδηγεί στην εισαγωγή της ταχύτητας χορδής $v_s = \partial_t u_s$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι προκειμένου να διατηρηθεί η ενεργειακή ταυτότητα (εξίσωση (6.14)) πρέπει επίσης να εισαχθεί ο περιορισμός $q = T \partial_x u_s$ που εμφανίζεται, ειδικότερα, στην έκφραση της δύναμης που ασκεί η χορδή στην πλάκα (εξίσωση (6.8)). Λαμβάνεται το ακόλουθο πρόβλημα πρώτης τάξης στο χώρο και πρώτης τάξης στο χρόνο:

$$\begin{aligned} \rho_s \partial_t v_s - \partial_x q &= f_s, \text{ στο } [0, l_s] \\ \partial_t q - T \partial_x v_s &= 0, \text{ στο } [0, l_s] \\ v_s(0, t) &= 0, \forall t \\ v_s(l_s, t) &= v_p(x_0, y_0), \forall t \end{aligned} \quad (6.18)$$

Η μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης (6.18) λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με μια ελεγχοσυνάρτηση $v_s^*: [0, l_s] \rightarrow \mathbb{R}$, τη δεύτερη εξίσωση με μια ελεγχοσυνάρτηση $q^*: [0, l_s] \rightarrow \mathbb{R}$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη. Έτσι, οδηγούμαστε στο ακόλουθο πρόβλημα:

Βρείτε $v_s: [0, l_s] \rightarrow \mathbb{R}$ και $q: [0, l_s] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{l_s} \rho_s v_s v_s^* - \int_0^{l_s} \partial_x q v_s^* = \int_0^{l_s} f_s v_s^* , \forall v_s^* \quad (6.19a)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{l_s} \frac{1}{T} q q^* + \int_0^{l_s} \partial_x q^* v_s - q^*(l_s, t) v_p(x_0, y_0) = 0 , \forall q^* \quad (6.19b)$$

Δ. Μεταβολική διατύπωση του πλήρους προβλήματος

Λαμβάνοντας υπόψη τους πρόσθετους αγνώστους λ και q , που εισήχθησαν για να λυθεί η ακουστική εξίσωση και η εξίσωση χορδών, αντίστοιχα, πρέπει να αντικατασταθούν ο όρος $T \partial_x v_s(l_s, t)$ με $q(l_s, t)$ και ο όρος $[p]_\omega$ με $\lambda|_\omega$ στην εξίσωση (6.16a). Τότε η εξίσωση (6.16a) αντικαθίσταται από την εξίσωση:

$$\frac{d}{dt} \int_\omega \alpha \rho_p v_p v_p^* - \int_\omega \underline{\underline{Div}} \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} v_p^* - \int_{\gamma_f} \partial_\tau \left[\left(\underline{\underline{M}} \underline{\underline{n}} \right) \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] v_p^* + \int_\omega \alpha \rho_p R_p v_p v_p^* = -$$

$$q(l_s, t) v_p^*(x_0, y_0) - \int_\omega \lambda|_\omega v_p^* , \forall v_p^*: \omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.20)$$

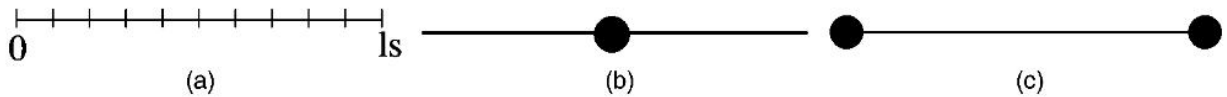
Τέλος, η μεταβολική διατύπωση του πλήρους προβλήματος δίνεται από το σύνολο των εξισώσεων (6.16b), (6.17), (6.19) και (6.20).

6.3.2 Διακριτοποίηση χώρου

Σε αυτή τη διατύπωση μεταβλητών, οι άγνωστοι $(v_s, q, v_p, \underline{\underline{M}}, p, \underline{\underline{\nu}}_\alpha, \lambda)$ και οι ελεγχουσυναρτήσεις $(v_s^*, q^*, v_p^*, \underline{\underline{M}}^*, p^*, \underline{\underline{\nu}}_\alpha^*, \lambda^*)$ επιλέγονται σε κατάλληλους χώρους έτσι ώστε να ορίζονται όλα τα ολοκληρώματα. Το q πρέπει να επιλεγεί σε ένα χώρο συνεχών συναρτήσεων λόγω του όρου $\partial_x q$ στις εξισώσεις (6.19). Για παρόμοιους λόγους, τα $v_p, \underline{\underline{M}}$ και λ πρέπει επίσης να επιλέγονται σε ένα χώρο συνεχών συναρτήσεων. Τέλος, το $\underline{\underline{\nu}}_\alpha$ βρίσκεται σε ένα χώρο διανυσματικού πεδίου με συνέχεια της κάθετης συνιστώσας σε όλη την επιφάνεια, λόγω του όρου $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{\nu}}_\alpha$ στην εξίσωση (6.17).

Οι χώροι πεπερασμένων διαστάσεων που επιλέχθηκαν για την προσέγγιση της μεταβολικής διατύπωσης (6.16b), (6.17), (6.19), (6.20) και πληρούν τις κατάλληλες συνθήκες συνέχειας περιγράφονται παρακάτω. Στα παρακάτω το P_k δηλώνει τις πολυωνυμικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών βαθμού μικρότερου ή ίσου του k .

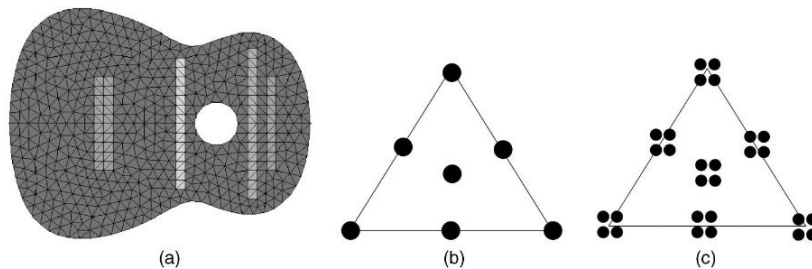
Οι συνεχείς μεταβλητές v_s και q προσδιορίζονται από τις διακριτές μεταβλητές στο χώρο, οι οποίες συμβολίζονται ως v_{sh} και q_h , αντίστοιχα. Κατασκευάζεται ένα κανονικό πλέγμα της χορδής, που αποτελείται από μικρά τμήματα μήκους h_c (Σχήμα 6.2). Η v_{sh} είναι μια τμηματική σταθερά και επομένως καθορίζεται εξ ολοκλήρου από τις τιμές της στο κέντρο κάθε τμήματος, οι οποίες ονομάζονται βαθμοί ελευθερίας. Με άλλα λόγια, το v_{sh} διακριτοποιείται χρησιμοποιώντας ασυνεχή πεπερασμένα στοιχεία P_0 . Η q_h είναι μια συνεχής τμηματικά γραμμική συνάρτηση και επομένως καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε κάθε κόμβο του πλέγματος (P_1 συνεχή πεπερασμένα στοιχεία). Οι βαθμοί ελευθερίας των v_{sh} και q_h παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.2b και 6.2c αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2: Πλέγμα για τα (u_s, q) : (a) Πλέγμα του $[0, 1s]$, (b) Βαθμοί ελευθερίας του u_s , (c) Βαθμοί ελευθερίας του q [25].

Θεωρώντας ένα τριγωνικό πλέγμα του ηχείου, ω , με το μικρότερο μήκος πλευράς να συμβολίζεται με h_p (Σχήμα 6.3a), οι μεταβλητές u_p και $\underline{\underline{M}}$ διακριτοποιούνται μέσω P_2 όμοιων-συνεχών πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή η συγκεκριμένη επιλογή μειώνει την αριθμητική διασπορά και οδηγεί στην απαιτούμενη εκτίμηση των ιδιοσυχνοτήτων του ηχείου. Όσον αφορά τη σύνθεση ήχου, είναι σημαντικός στόχος η προσομοίωση των ιδιοσυχνοτήτων του ηχείου με επαρκή ακρίβεια, εν όψει της ικανότητας το ανθρώπινο αντί να ανιχνεύσει μικρές διακυμάνσεις συχνότητας. Σε αυτό το πλαίσιο, μια τάξη μεγέθους 1% φαίνεται ένας λογικός στόχος. Ένα άλλο πλεονέκτημα της χρήσης στοιχείων P_2 έγκειται στην εξάλειψη του αγνώστου $\underline{\underline{M}}_h$ στο τελικό σχήμα.

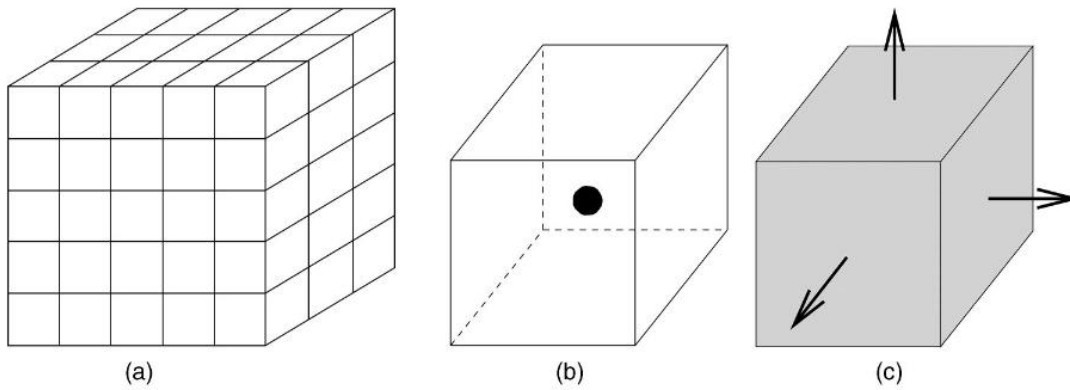
Οι διακριτές μεταβλητές u_{p_h} και $\underline{\underline{M}}_h$ καθορίζονται από τις τιμές τους στην κορυφή, στο βαρύκεντρο κάθε τριγώνου και στο κέντρο κάθε πλευράς. Οι βαθμοί ελευθερίας για u_{p_h} και $\underline{\underline{M}}_h$ παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.3b και 6.3c αντίστοιχα.



Σχήμα 6.3: Πλέγμα για τα $(u_{p_h}, \underline{\underline{M}}_h)$: (a) Πλέγμα του ω , (b) Βαθμοί ελευθερίας του u_{p_h} , (c) Βαθμοί ελευθερίας του $\underline{\underline{M}}_h$ [25].

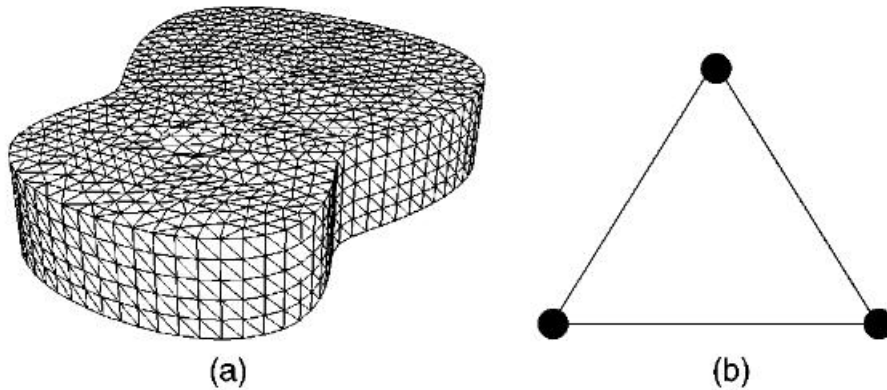
Για την προσομοίωση του ελεύθερου χώρου, οι υπολογισμοί περιορίζονται σε ένα πλαίσιο πεπερασμένου μεγέθους που συμβολίζεται με C , με τη βοήθεια συνοριακών συνθηκών απορρόφησης υψηλότερης τάξης που ορίζονται στις επιφάνειες αυτού του κύβου. Δίνεται ένα κανονικό πλέγμα του C , κατασκευασμένο από μικρούς κύβους με μήκος πλευράς που συμβολίζεται με h_a (Σχήμα 6.4a) και το p διακριτοποιείται μέσω P_0 -ασυνεχών πεπερασμένων στοιχείων.

Το πεδίο p_h καθορίζεται λοιπόν από τις τιμές του στο κέντρο κάθε κύβου. Η προσέγγιση του $\underline{\underline{v}}_\alpha$ πραγματοποιείται με το χώρο πεπερασμένων στοιχείων πρώτης τάξης Raviart–Thomas. Κάθε στοιχείο του $\underline{\underline{v}}_{\alpha_h}$ είναι γραμμικό στη μία κατεύθυνση και σταθερό στις άλλες δύο κατευθύνσεις. Το $\underline{\underline{v}}_{\alpha_h}$ καθορίζεται εξ ολοκλήρου από την τιμή της κάθετης συνιστώσας του σε κάθε όψη των κύβων. Οι βαθμοί ελευθερίας των p_h και $\underline{\underline{v}}_{\alpha_h}$ παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.4b και 6.4c αντίστοιχα.



Σχήμα 6.4: Πλέγμα για τα $(p_h \text{ και } \underline{v}_{\alpha_h})$: (a) Πλέγμα του C , (b) Βαθμοί ελευθερίας του p_h , (c) Βαθμοί ελευθερίας του \underline{v}_{α_h} [25].

Τέλος, δίνεται ένα τριγωνικό πλέγμα στην επιφάνεια της κιθάρας Γ , με το μικρότερο μήκος πλευράς να συμβολίζεται με h_λ (Σχήμα 6.5a). Το άλμα πίεσης λ διακριτοποιείται μέσω συνεχών πεπερασμένων στοιχείων P_I . Η προσέγγισή του λ_h καθορίζεται από τις τιμές στην κορυφή κάθε τριγώνου. Οι βαθμοί ελευθερίας του λ_h παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.5b.



Σχήμα 6.5: Πλέγμα του λ_h : (a) Πλέγμα του Γ , (b) Βαθμοί ελευθερίας του λ_h [25].

Η διακριτοποίηση χώρου του προβλήματος στη συνέχεια λαμβάνεται με αντικατάσταση των $(v_{sh}, q_h, v_{ph}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h, p_h, \underline{v}_{\alpha_h}, \lambda_h)$ στα $(v_s, q, v_p, \underline{\underline{\mathcal{M}}}, p, \underline{v}_\alpha, \lambda)$ και των $(v_{sh}^*, q_h, v_{ph}^*, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h^*, p_h^*, \underline{v}_{\alpha_h}^*, \lambda_h^*)$ στα $(v_s^*, q^*, v_p^*, \underline{\underline{\mathcal{M}}}^*, p^*, \underline{v}_\alpha^*, \lambda^*)$ στη μεταβολική διατύπωση (6.16b), (6.17), (6.19), (6.20). Το προκύπτον διαφορικό σύστημα μπορεί να γραφτεί με την ακόλουθη μορφή πίνακα:

$$M_h^p \frac{dv_{ph}}{dt} - H_h^T \underline{\underline{\mathcal{M}}}_h + R_p M_h^p v_{ph} = -J_h q_h - (B_{\omega_h})^T \lambda_h \quad (6.21a)$$

$$M_h^{\underline{\underline{\mathcal{M}}}} \frac{d\underline{\underline{\mathcal{M}}}_h}{dt} + H_h v_{ph} = 0 \quad (6.21b)$$

$$M_h^s \frac{dv_{sh}}{dt} - D_h q_h = f_{sh} \quad (6.21c)$$

$$M_h^q \frac{dq_h}{dt} + D_h^T v_{sh} - J_h^T v_{ph} = 0 \quad (6.21d)$$

$$M_h^{\alpha} \frac{dv_{\alpha h}}{dt} - G_h p_h - (B_{\Gamma h})^T \lambda_h = 0 \quad (6.21e)$$

$$M_h^{p\alpha} \frac{dp_h}{dt} + G_h^T \underline{v}_{\alpha h} = 0 \quad (6.21f)$$

$$B_{\omega h} v_{p_h} - B_{\Gamma h} \underline{v}_{\alpha h} = 0 \quad (6.21g)$$

όπου το A_h^T συμβολίζει τη μετάθεση ενός πίνακα A_h . Οι $M_h^{\mathcal{M}}, M_h^s, M_h^q, M_h^{\alpha}, M_h^{p\alpha}$ είναι πίνακες μάζας. Η f_{s_h} είναι ένα διάνυσμα που προσεγγίζει τη δύναμη τραβήγματος που ασκείται στη χορδή. Οι $D_h, J_h, H_h, G_h, B_{\omega h}$ και $B_{\Gamma h}$ είναι πίνακες που αντιπροσωπεύουν τους διακριτούς τελεστές που προσεγγίζουν τους συνεχείς τελεστές της μεταβολικής διατύπωσης (6.16b), (6.17), (6.19), (6.20). Ο G_h για παράδειγμα, είναι η προσέγγιση του τρισδιάστατου τελεστή κλίσης $\underline{\nabla}$.

6.3.3 Διακριτοποίηση χρόνου

Για τη διακριτοποίηση χρόνου, χρησιμοποιείται ένα κλασσικό ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης για τη χορδή και το ακουστικό πεδίο. Για την εξίσωση πλάκας, φαίνεται ότι η επιλογή ενός ρητού σχήματος πεπερασμένων διαφορών στο χρόνο επιβάλλει την επιλογή ενός μικρού χρονικού βήματος Δt λόγω μιας περιοριστικής συνθήκης σταθερότητας της μορφής $\Delta t \leq C h_p^2$, όπου C είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους της πλάκας. Για το ρητό σχήμα επιλέγουμε Δt ανάλογο του h_p^2 . Για το λόγο αυτό, η εξίσωση της πλάκας θα λυθεί αναλυτικά στο χρόνο, η οποία επιτρέπει σε κάποιον να επιλέξει Δt χωρίς να υποβαθμίσει την ακρίβεια του ημιδιακριτοποιημένου χωρικού σχήματος.

Σε ένα πρώτο βήμα, το μέγεθος του συστήματος πλάκας μειώνεται εξαλείφοντας τη ροπή κάμψης $\underline{\underline{M}}_h$ στις εξισώσεις (6.21a) και (6.21b), η οποία οδηγεί στα εξής:

$$M_h^p \frac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + R_p M_h^p \frac{dv_{p_h}}{dt} + K_h v_{p_h} = -J_h \frac{dq_h}{dt} - (B_{\omega h})^T \frac{d\lambda_h}{dt}, \quad \forall t \geq 0 \quad (6.22)$$

όπου K_h είναι ο πίνακας που ορίζεται ως:

$$K_h = H_h (M_h^{\mathcal{M}})^{-1} H_h^T \quad (6.23)$$

Ο πίνακας $M_h^{\mathcal{M}}$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο τετραγωνισμού έτσι ώστε να μειώνεται σε διαγώνιο 4×4 πίνακα, χωρίς απώλεια ακρίβειας. Αυτή η τεχνική μας επιτρέπει να μετατρέψουμε τον πίνακα $M_h^{\mathcal{M}}$ και συνεπώς να υπολογίσουμε με ευκολία τον πίνακα K_h .

Για την επίλυση της εξίσωσης (6.22), πρέπει να κάνουμε δειγματοληψία της εξίσωσης. Για δεδομένο χρονικό βήμα Δt , τα v_{p_h} και $\dot{v}_{p_h} = \frac{dv_{p_h}}{dt}$ υπολογίζονται στις διαδοχικές χρονικές στιγμές $t^{n+\frac{1}{2}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t$. Η εξίσωση (6.22) επιλύεται σε κάθε διάστημα $[t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}]$. Εφόσον οι εξισώσεις χορδής και ακουστικής του προβλήματος λύνονται μέσω πεπερασμένων διαφορών με το χρονικό βήμα Δt , το δεξί μέλος είναι

σταθερό σε αυτό το διάστημα. Η ακόλουθη εξίσωση λύνεται έτσι σε κάθε χρονικό βήμα:

$$M_h^p \frac{d^2 v_{p_h}}{dt^2} + R_p M_h^p \frac{dv_{p_h}}{dt} + K_h v_{p_h} = -J_h \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t} - (B_{\omega_h})^T \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \forall t \in [t^{n-\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}].$$

$$v_{p_h}(t^{n-\frac{1}{2}}) = v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad v_{p_h}(t^{n+\frac{1}{2}}) = v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} \quad (6.24)$$

Η επίλυση της εξίσωσης (6.24) βασίζεται στον υπολογισμό των ιδιοτρόπων του θετικά ορισμένου πίνακα K_h και στη συνήθη θεωρία διαφορικών εξισώσεων. Σε περίπτωση απουσίας απόσβεσης, η λύση δίνεται από την εξίσωση:

$$v_{p_h}^{n+\frac{1}{2}} = \left[\cos(\sqrt{K_h}\Delta t) v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\sin(\sqrt{K_h}\Delta t)}{\sqrt{K_h}} v_{p_h}^{n-\frac{1}{2}} \right] + \frac{1-\cos(\sqrt{K_h}\Delta t)}{\sqrt{K_h}} \left(J_h \frac{q_h^{n+1} - q_h^{n-1}}{2\Delta t} - (B_{\omega_h})^T \frac{\lambda_h^{n+\frac{1}{2}} - \lambda_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) \quad (6.25)$$

Μια αντίστοιχη εξίσωση ισχύει για το $v_{p_h}(t^{n-\frac{1}{2}})$.

Η εισαγωγή των όρων απόσβεσης οδηγεί στην πραγματικότητα σε εκθετικά αποσβεσμένες ημιτονοειδείς λύσεις για κάθε τροπικό στοιχείο. Είναι γνωστό ότι οι ρευστοί και ιξωδοελαστικοί όροι που εισάγονται στο μοντέλο (οι R_p και η_p στην εξίσωση (6.5)) οδηγούν σε έναν παράγοντα απόσβεσης $\alpha_n = \frac{R_p + \eta_p \omega_n^2}{2}$ για το n -οστό ιδιοτρόπο του K_h με παλμό ω_n .

Σε αυτό το στάδιο, παρατηρούμε ότι είναι δυνατό να επιλέξουμε οποιαδήποτε άλλη εξάρτηση από τη συχνότητα για τους συντελεστές απόσβεσης, χωρίς να απαιτείται να έχει τοπική έκφραση στο πεδίο χρόνου. Αυτό είναι ένα ενδιαφέρον της φασματικής μεθόδου που επιτρέπει σε κάποιον να μοντελοποιήσει την εσωτερική απόσβεση στην πλάκα με τέτοια ευελιξία. Λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές του λόγου απόσβεσης για ξύλινη πλάκα στην περιοχή [0–3 kHz] που αντιστοιχεί στην περίπτωσή μας, έχει επιλεγεί ένας γραμμικός νόμος, της μορφής:

$$\alpha_n = \frac{R_p + \eta_p \omega_n}{2} \quad (6.26)$$

Πρέπει τώρα να γράψουμε ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών για τη χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων (6.21c) και (6.21g). Το κρίσιμο σημείο είναι να προτείνουμε μια σταθερή σύζευξη μεταξύ δύο ριζικά διαφορετικών τεχνικών χρονικής ανάλυσης: μιας συνεχούς για την εξίσωση της πλάκας και μιας διακριτής για τις εξισώσεις χορδής και αέρα.

Το σχήμα επιλέγεται προκειμένου να ληφθεί μια διακριτή ενεργειακή ταυτότητα παρόμοια με την εξίσωση (6.14). Επιπλέον, αναζητούμε ένα σχήμα στο οποίο σχεδόν όλοι οι υπολογισμοί είναι σαφείς (δηλαδή, χωρίς αντιστροφή πίνακα), ιδιαίτερα για το τρισδιάστατο μέρος. Οι δύο αυτοί λόγοι μας οδηγούν στον υπολογισμό των μεταβλητών v_{p_h} , p_h και λ_h στο χρόνο $t^{n+\frac{1}{2}}$, ενώ οι q_h και \underline{v}_{α_h} υπολογίζονται στο

χρόνο t_n , και στην διακριτοποίηση της εξίσωσης (6.21g) που πλέον διαφοροποιείται χρονικά. Έτσι, λαμβάνεται το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} M_h^s \frac{v_{sh}^{n+\frac{1}{2}} - v_{sh}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_h q_h^n &= f_{sh}^n \\ M_h^q \frac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} + D_h^\top v_{sh}^{n+\frac{1}{2}} - J_h^\top v_{ph}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ M_h^a \frac{v_{ah}^{n+1} - v_{ah}^n}{\Delta t} - G_h p_h^{n+\frac{1}{2}} - (B_{\Gamma h})^\top \lambda_h^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ M_h^{p_a} \frac{p_h^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_h^\top v_{ah}^n &= 0 \\ B_{\omega h} \frac{v_{ph}^{n+\frac{1}{2}} - v_{ph}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_{\Gamma h} \frac{v_{ah}^{n+1} - v_{ah}^{n-1}}{\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος που αποτελείται από τις εξισώσεις (6.25) και (6.27) επιβάλλει, την αντιστροφή των πινάκων μάζας M_h^s, M_h^q, M_h^a και $M_h^{p_a}$. Για να αποφευχθεί αυτή η αντιστροφή σε κάθε χρονικό βήμα, αυτοί οι πίνακες ανάγονται σε διαγώνιους πίνακες χρησιμοποιώντας την τεχνική της εξίσωσης (6.23).

Αναζητούμε για $(v_{sh}^{n+\frac{1}{2}}, q_h^{n+1}, v_{ph}^{n+\frac{1}{2}}, v_{ah}^{n+1}, p_h^{n+\frac{1}{2}}, \lambda_h^{n+\frac{1}{2}})$, έχοντας γνωστούς όλους τους άλλους όρους. Είναι εύκολο να αποδειχθεί πως αν είναι γνωστό το $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, οι υπόλοιποι υπολογισμοί είναι σαφείς. Για τον υπολογισμό του $\lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$, πρέπει να αντιστρέψουμε τον πίνακα C_λ , όπου:

$$C_\lambda = \frac{2B_{\omega h}}{\Delta t} \left[I + J_h \left(\frac{1 - \cos(\sqrt{K_h} \Delta t)}{\sqrt{K_h}} \right) J_h^\top \right]^{-1} B_{\omega h}^\top + \Delta t B_{\Gamma h} (M_h^a)^{-1} B_{\Gamma h}^\top \quad (6.28)$$

Το C_λ είναι συμμετρικό και θετικό χωρίς καμία προϋπόθεση στο χρονικό βήμα. Επιπλέον, αυτός ο πίνακας είναι καθορισμένος, υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η ακόλουθη συμβατότητα μεταξύ του πλέγματος του C και του πλέγματος του Γ :

$$\frac{h_\lambda}{h_a} \geq \alpha \quad (6.29)$$

όπου α είναι μια σταθερά. Αυτή η συνθήκη συμβατότητας, η οποία δεν αποδεικνύεται εδώ, είναι συνέπεια της μεθόδου του εικονικού τομέα. Στην πράξη, το α είναι περίπου ίσο με 1,1.

Η σταθερότητα του σχήματος που δίνεται από τις εξισώσεις (6.25) και (6.27) διασφαλίζεται με τη βοήθεια μιας ενεργειακής ταυτότητας παρόμοιας με την εξίσωση (6.14). Οι λεπτομέρειες της απόδειξης ξεφεύγουν από το σκοπό αυτής της εργασίας. Αυτό οδηγεί στις ακόλουθες προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται για τη διασφάλιση της σταθερότητας:

$$(i) \sqrt{\frac{T}{\rho_s h_c} \Delta t} \leq 1 \quad (6.30)$$

$$(ii) c_a \frac{\Delta t}{h_a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αυτές οι δύο συνθήκες είναι βέλτιστες, με την έννοια ότι είναι πανομοιότυπες με τις συνήθεις συνθήκες σταθερότητας που λαμβάνονται για την τυπική διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών της μη συζευγμένης εξίσωσης 1D και 3D κύματος. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει την στιβαρότητα του σχήματος ζεύξης [25],[26].

Κεφάλαιο 7- Απλοποιημένη Μοντελοποίηση Τμημάτων Των Μουσικών Οργάνων και Προσομοίωση με τη χρήση του Λογισμικού Mathematica

7.1 Πιατίνια (cymbals)

7.1.1 Εξίσωση Κύματος

Μια απλοποιημένη μοντελοποίηση της κίνησης των πιατινιών ξεκινάει με την εξίσωση κύματος σε πολικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + S = \frac{1}{w^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.1)$$

Ο όρος S αντιπροσωπεύει την πηγή του παλμού , από όπου προέρχεται το κύμα. Οι σταθερές r_0 και θ_0 είναι οι συντεταγμένες της πηγής της εξίσωσης του κύματος και το t_0 είναι η χρονική στιγμή στην οποία ξεκινάει το κύμα. Η σταθερά S_0 αντιπροσωπεύει το μέγεθος της σημειακής πηγής. Ισχύει η σχέση[27]:

$$S = S_0 \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r} \delta(\theta - \theta_0) \delta(t - t_0) \quad (7.2)$$

7.1.2 Συνοριακές Συνθήκες

Για την εξωτερική ακτίνα του πιατινιού εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες Robin, καθώς στην εξωτερική ακτίνα r_2 θεωρούμε πως το πιατίνι είναι ελεύθερο, ενώ σε μια εσωτερική ακτίνα r_1 , εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet, καθώς θεωρούμε πως το πιατίνι είναι τοποθετημένο σε μια βάση, επομένως μέχρι και την εσωτερική ακτίνα r_1 θεωρείται πακτωμένο[27].

$$u(r_1, \theta, t) = 0 \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u(r_2, \theta, t) + H_1 u(r_2, \theta, t) = 0 \quad (7.4)$$

7.1.3 Αρχικές Συνθήκες

Θέτουμε τις αρχικές συνθήκες ίσες με 0, για $t=0$, έτσι ώστε η επιφάνεια του πιατινιού να είναι επίπεδη την αρχική χρονική στιγμή.

$$u(r, \theta, 0) = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, \theta, 0) = 0 \quad (7.6)$$

7.1.4 Λύση

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι η εξής [27] :

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \hat{u}_0(r, \theta, t) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n(r, \theta, t) \quad (7.7)$$

όπου:

$$\hat{u}_n(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{n,m}(\theta, t) \frac{J_n(\lambda_{n,m}r)}{\|N_{n,m}\|^2} \quad (7.8)$$

$$\mu\epsilon : \|N_{n,m}\|^2 = \int_{r_1}^{r_2} R_{n,m}^2(r) r dr \quad (7.9)$$

$\lambda_{n,m}$ είναι οι ιδιοτιμές m όρων για κάθε διαφορετικό n , ο οποίες είναι οι θετικές πραγματικές ρίζες της εξίσωσης:

$$J_n(\lambda r_1) \left[-\lambda Y_{n+1}(\lambda r_2) + \left(H_1 + \frac{n}{r_2} \right) Y_n(\lambda r_2) \right] - Y_n(\lambda r_1) \left[-\lambda J_{n+1}(\lambda r_2) + \left(H_1 - \frac{n}{r_2} \right) J_n(\lambda r_2) \right] = 0 \quad (7.10)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες και δίνονται από τη σχέση [27]:

$$R_{n,m} = \frac{J_n(\lambda_{n,m}r)}{J_n(\lambda_{n,m}r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_{n,m}r)}{Y_n(\lambda_{n,m}r_1)} \quad (7.11)$$

Έχουμε επίσης ότι:

$$\bar{u}_{n,m}(\theta, t) = \frac{w^2 S_0 J_n(\lambda_{n,m}r_0) \cos[n(\theta - \theta_0)]}{2\pi b} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[b(t-t_0)] H_1(t-t_0) \quad (7.12)$$

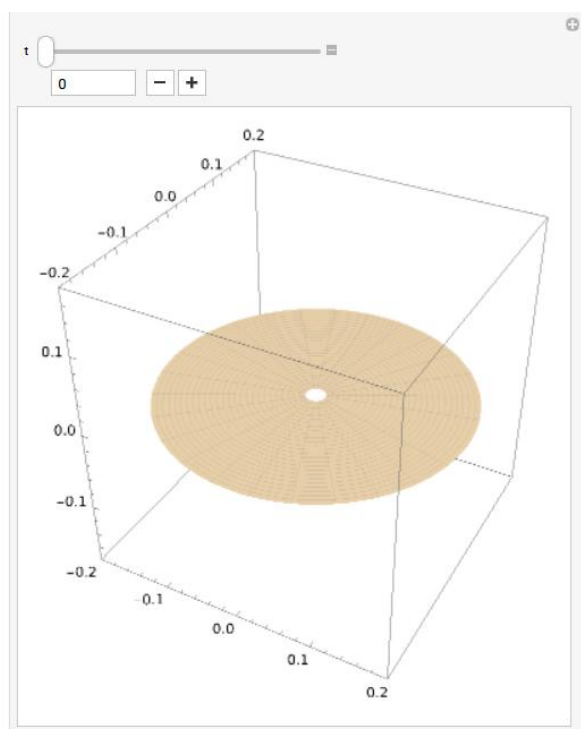
$$\acute{o}που \ b^2 = w^2 \lambda_{n,m}^2 - \gamma^2 . \quad (7.13)$$

Οι τιμές των παραμέτρων που επιλέχθηκαν για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης είναι οι εξής [28]:

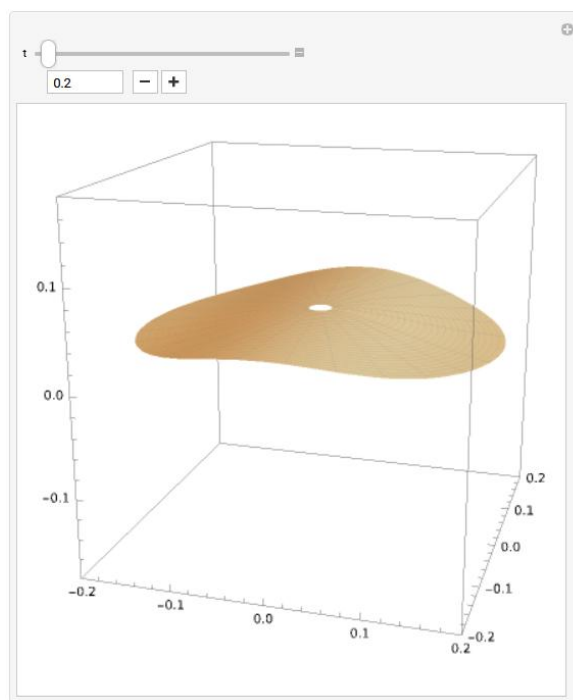
H_1	2
γ	1
w	1
r_0	0.13
S_0	0.5
t_0	0
θ_0	0
r_1	0.0127
r_2	0.2

Ο κώδικας της επίλυσης παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

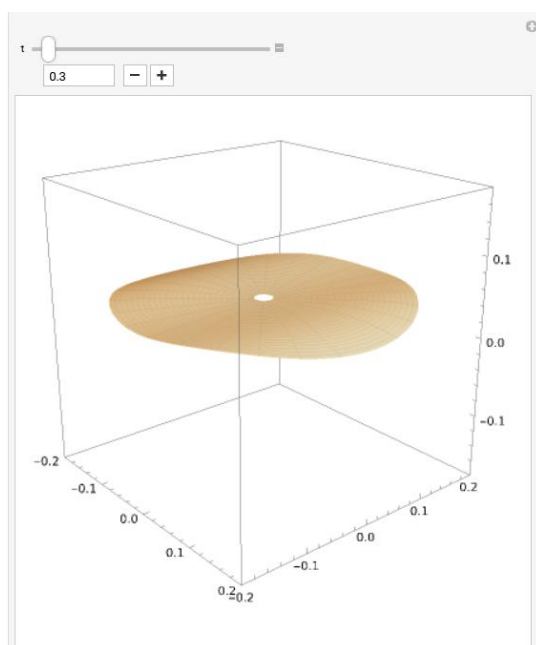
Η μορφή του πιατινιού σε διάφορες χρονικές στιγμές παρουσιάζεται στις παρακάτω εικόνες.



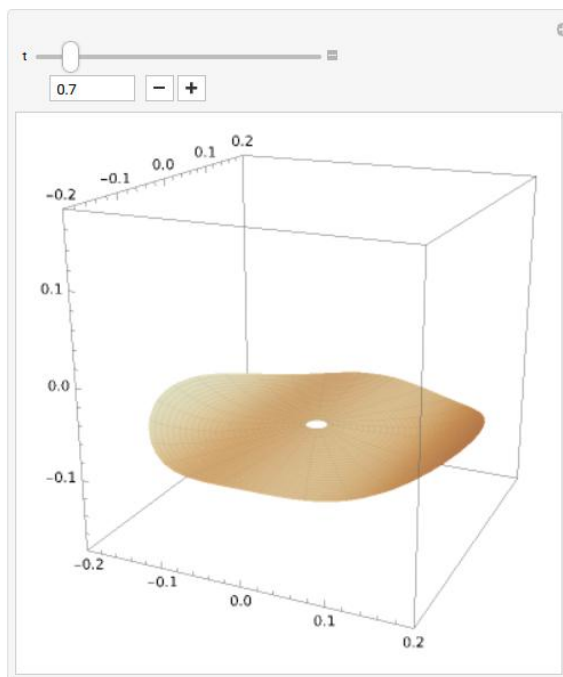
Εικόνα 7.1: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0s$



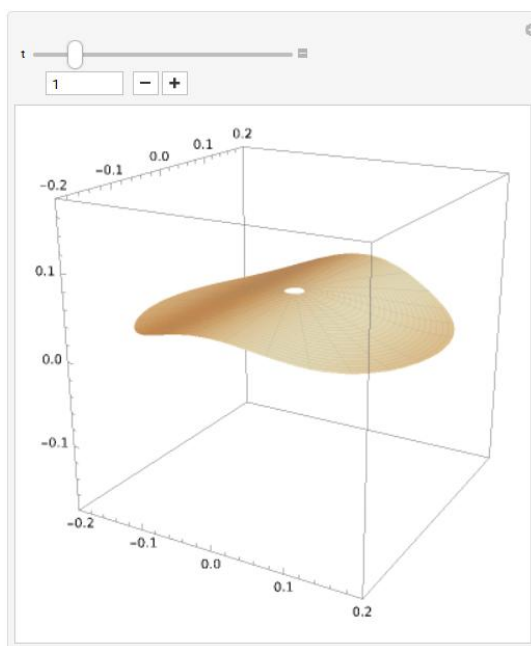
Εικόνα 7.2: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0.2s$



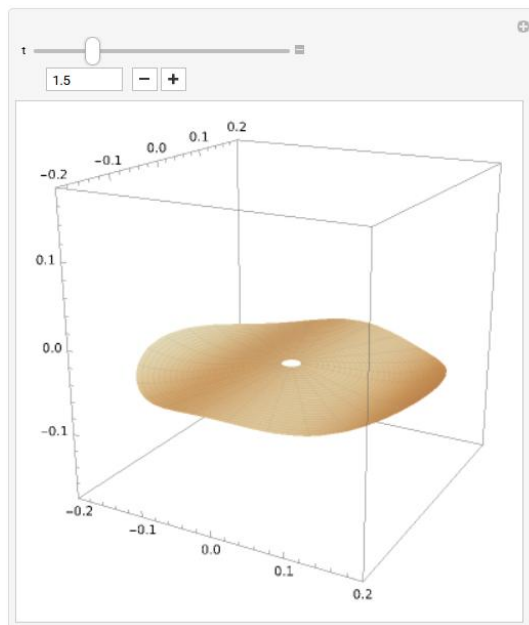
Εικόνα 7.3: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0.3s$



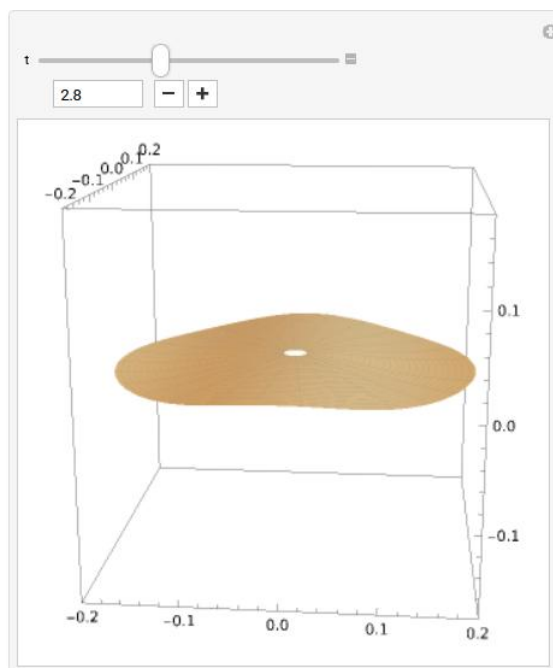
Εικόνα 7.4: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=0.7s$



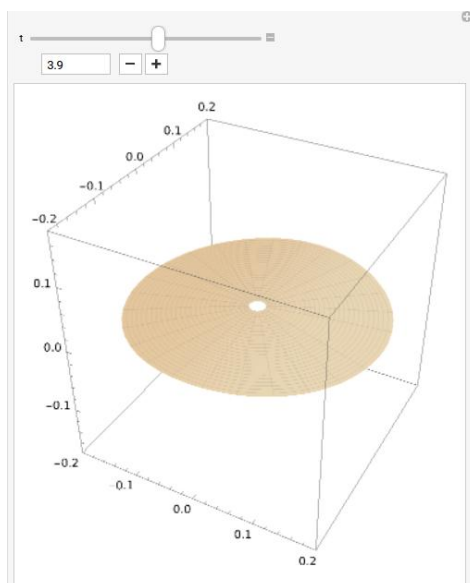
Εικόνα 7.5: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=1s$



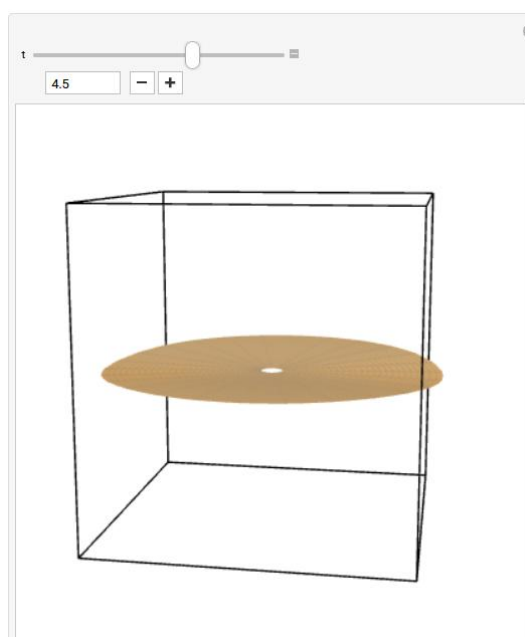
Εικόνα 7.6: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=1.5s$



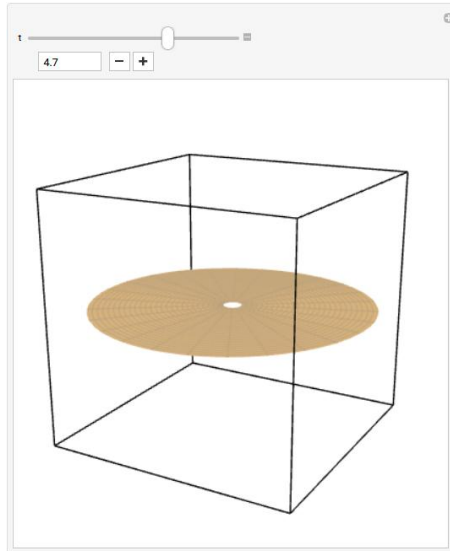
Εικόνα 7.7: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=2.8s$



Εικόνα 7.8: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=3.9s$



Εικόνα 7.9: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=4.5s$



Εικόνα 7.10: Στιγμιότυπο πιατινιού για $t=4.7s$

7.2 Μεμβράνες τυμπάνων (drumheads)

7.2.1 Μεμβράνες τυμπάνων με απόσβεση

Η δόνηση μιας αποσβεσμένης κυκλικής μεμβράνης διέπεται από την ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης[29]:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} \right) \quad (7.14)$$

όπου u είναι το πλάτος της δόνησης της μεμβράνης, r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες της μεμβράνης, α είναι ο συντελεστής απόσβεσης και c είναι η ταχύτητα κύματος στη μεμβράνη.

Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής:

$$u(r, \theta, t = 0) = \frac{A}{2\pi\sigma} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(r \cos \theta - r_0 \cos \theta_0)^2 + (r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0)^2] \right) \quad (7.15)$$

$$\frac{du}{dt}(r, \theta, t = 0) = 0 \quad (7.16)$$

Η συνοριακή συνθήκη είναι η εξής:

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad (7.17)$$

όπου A και σ είναι σταθερές, R είναι η ακτίνα της μεμβράνης του τυμπάνου, r_0 και θ_0 είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου όπου ο τυμπανιστής χτυπάει τη μεμβράνη, με $0 \leq r \leq R$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε $\theta_0 = 0$ και $A=100$. Για να γίνει το πλάτος της δόνησης πιο τοπικό στο σημείο πρόσκρουσης, επιλέγουμε $\sigma=0.05$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών για να επιλύσουμε την εξίσωση (7.1), η οποία ικανοποιεί τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες, λαμβάνουμε τη γενική λύση[29] :

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_0(k_{0n}r) \alpha_{0n} \cos(\sqrt{\omega_{mn}^2 - \alpha^2}t) \exp(-\alpha t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_m\left(k_{mn} \frac{r}{R}\right) (\alpha_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)) \cos(\sqrt{\omega_{mn}^2 - \alpha^2}t) \exp(-\alpha t) \right] \quad (7.18)$$

με:

$$\alpha_{mn} = \frac{2}{\pi R^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{R}\right) u(r, \theta, 0) \cos(m\theta) d\theta dr$$

$$b_{mn} = \frac{2}{\pi [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r J_m\left(\alpha_{mn} \frac{r}{R}\right) u(r, \theta, 0) \sin(m\theta) d\theta dr \quad (7.19)$$

όπου:

$$\omega_{mn} = c \frac{\alpha_{mn}}{R} \quad \text{και} \quad k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$$

ω_{mn} είναι η γωνιακή ταχύτητα της δονούμενης μεμβράνης και α_{mn} είναι η n -οστή ρίζα της συνάρτησης Bessel τάξης m .

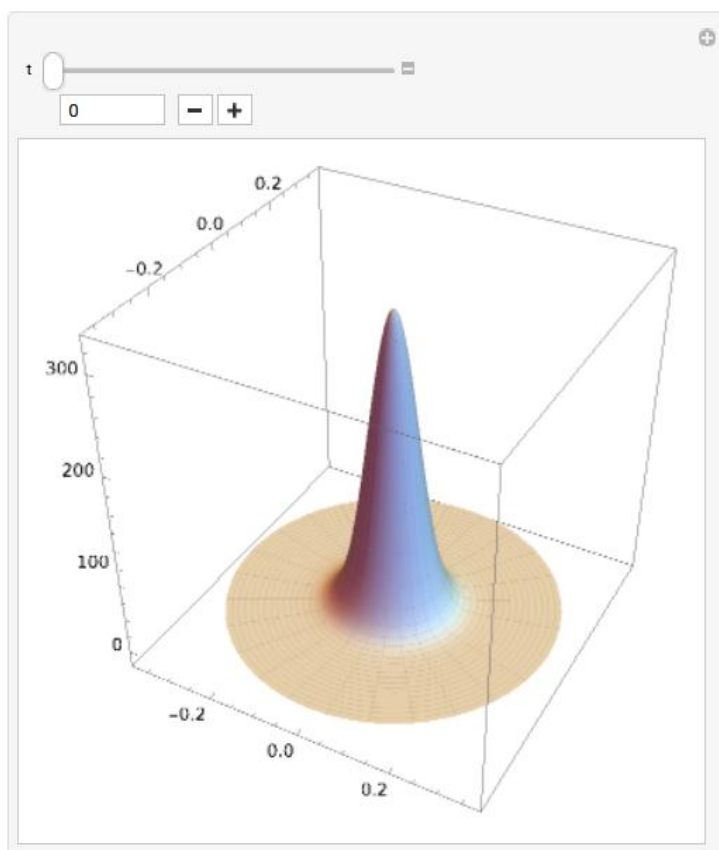
Η ταχύτητα c του κύματος στη μεμβράνη, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

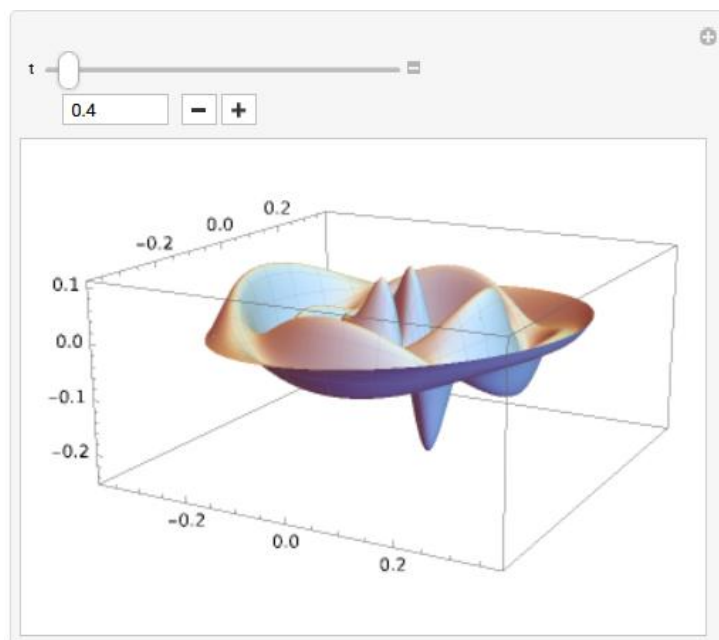
όπου $T=1577$ N/m είναι η τάση της μεμβράνης και ρ είναι η γραμμική πυκνότητα μάζας, δηλαδή η πυκνότητα $\rho=2600$ kg/m³ πολλαπλασιασμένη με το πάχος της μεμβράνης $h=0.175$ mm. Τότε η ταχύτητα του κύματος στη μεμβράνη υπολογίζεται ίση με $c=58.87$ m/s.

Ο κώδικας της επίλυσης παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

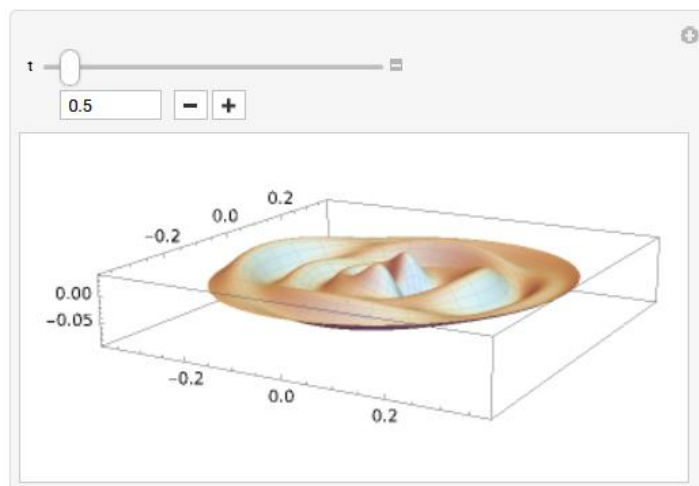
Η μορφή τη μεμβράνης σε διάφορες χρονικές στιγμές παρουσιάζεται στις παρακάτω εικόνες.



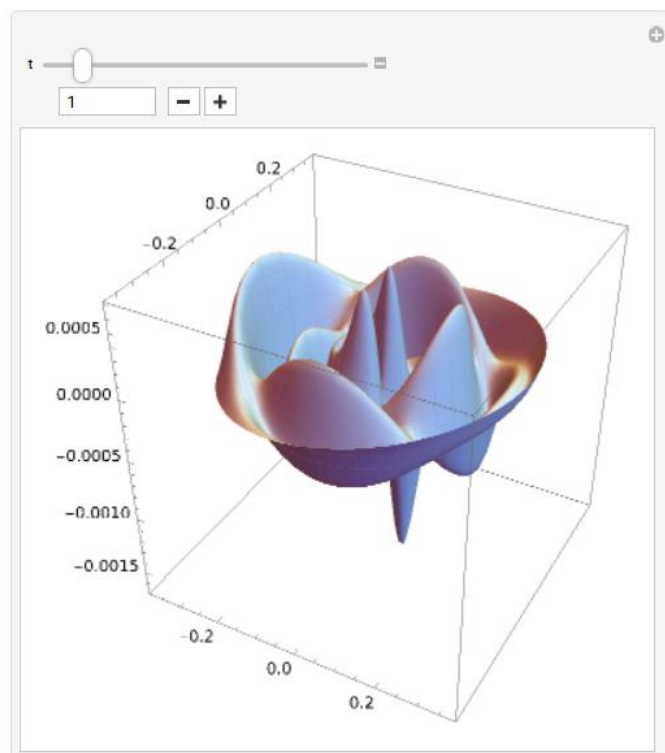
Εικόνα 7.11: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=0s$



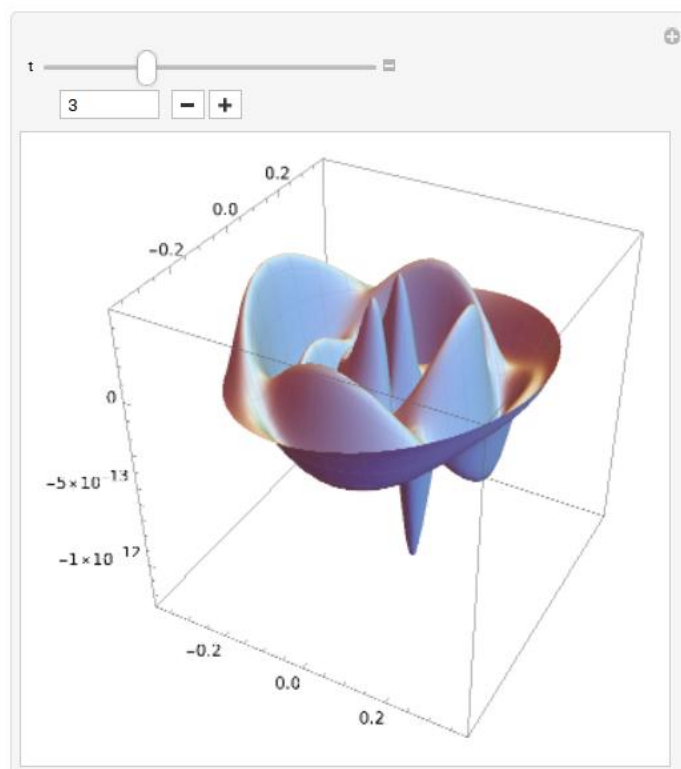
Εικόνα 7.12: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=0.4s$



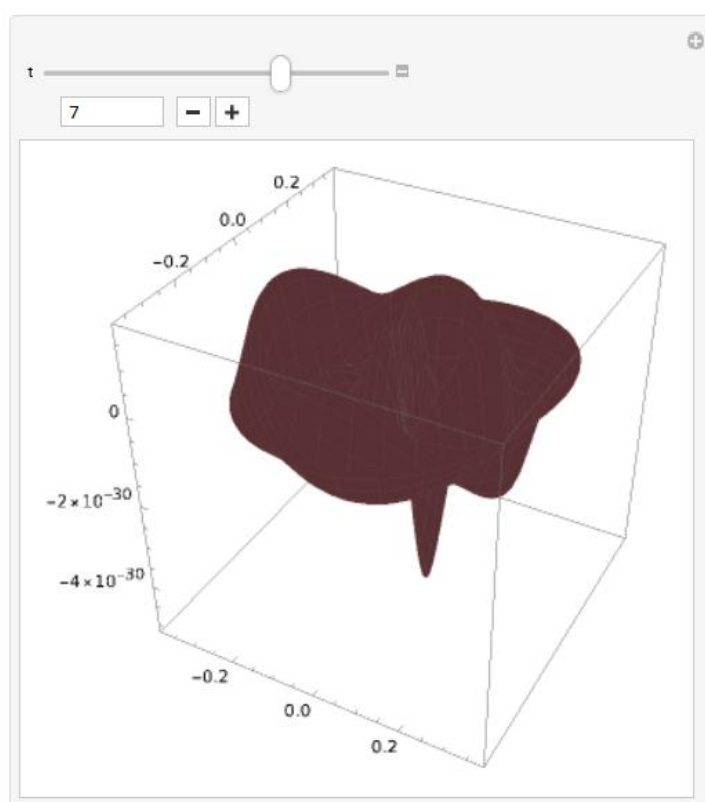
Εικόνα 7.13: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=0.5s$



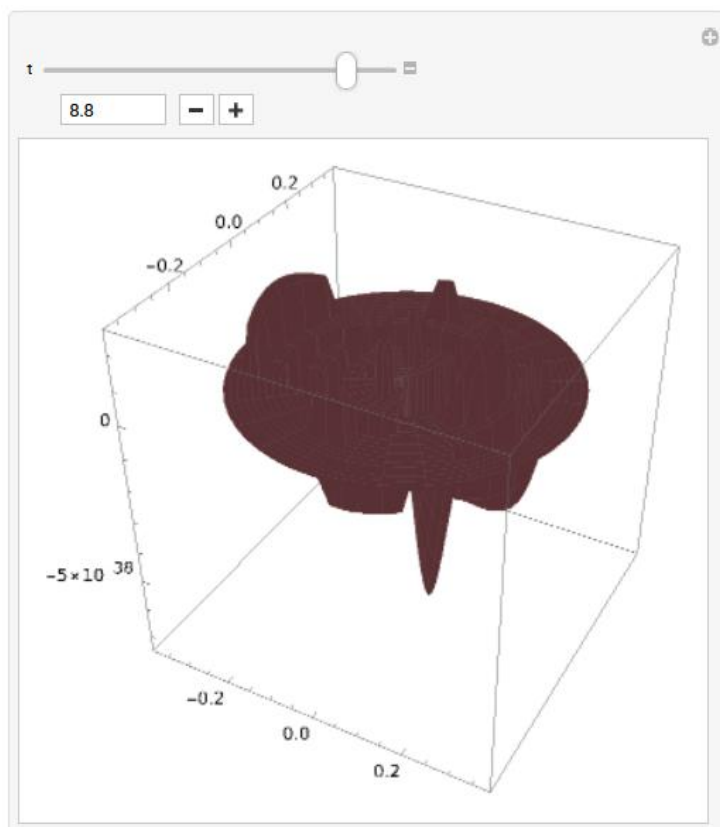
Εικόνα 7.14: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=1s$



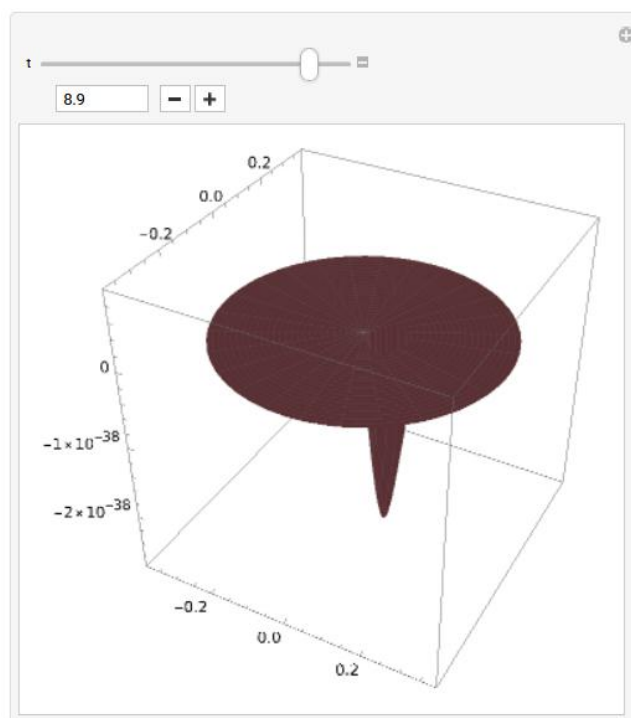
Εικόνα 7.15: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=3s$



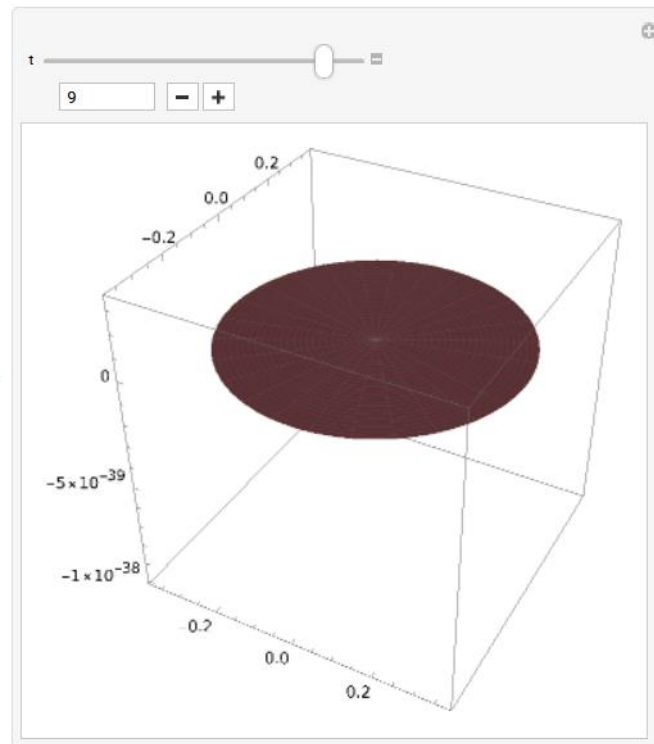
Εικόνα 7.16: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=7s$



Εικόνα 7.17: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=8.8$ s



Εικόνα 7.18: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=8.9$ s

Εικόνα 7.19: Στιγμιότυπο μεμβράνης με απόσβεση για $t=9s$

7.2.2 Μεμβράνες τυμπάνων χωρίς απόσβεση

Η εξίσωση του κύματος σε πολικές συντεταγμένες είναι [30]:

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right) \quad (7.20)$$

Θεωρώντας ακτινική συμμετρία στις αρχικές συνθήκες, η u είναι ανεξάρτητη από το θ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) \quad (7.21)$$

με συνοριακές συνθήκες $u(c, t) = 0$ για $t > 0$ και αρχικές συνθήκες : $u(r, 0) = f(r)$, $u_t(r, 0) = g(r)$, $0 \leq r < c$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = (\alpha_n)^2$, όπου $\alpha_n = \frac{j_n}{c}$, $n=1,2,3,\dots$, και j_n είναι η n -οστή ρίζα της συνάρτησης Bessel μηδενικής τάξης. Με εφαρμογή της αρχής της υπέρθεσης, η λύση λαμβάνει τη μορφή [30]:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{a_{jn}}{c}\right) + B_n \sin\left(\frac{a_{jn}t}{c}\right) \right) J_0\left(\frac{j_n r}{c}\right) \quad (7.22)$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{j_n r}{c}\right) = f(r), \quad 0 \leq r < c \quad (7.23)$$

$$u_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jn}}{c} B_n J_0\left(\frac{j_n r}{c}\right) = g(r), \quad 0 \leq r < c \quad (7.24)$$

Οι συντελεστές των παραπάνω εξισώσεων υπολογίζονται αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων $J_0\left(\frac{j_n r}{c}\right)$ στο διάστημα $0 < r < c$ σε σχέση με τη συνάρτηση βάρους $p(r) = r$. Έχουμε :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{c^2 J_1^2(j_n)} \int_0^c r J_0\left(\frac{j_n r}{c}\right) f(r) dr \\ B_n &= \frac{2}{a_{jn} c J_1^2(j_n)} \int_0^c r J_0\left(\frac{j_n r}{c}\right) g(r) dr \end{aligned} \quad (7.25)$$

Για την προσομοίωση με τη χρήση του Mathematica , έχουμε :

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 < r < c, \quad t > 0 \quad (7.26)$$

$$u(c, t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.27)$$

$$u(r, 0) = 0 \quad (7.28)$$

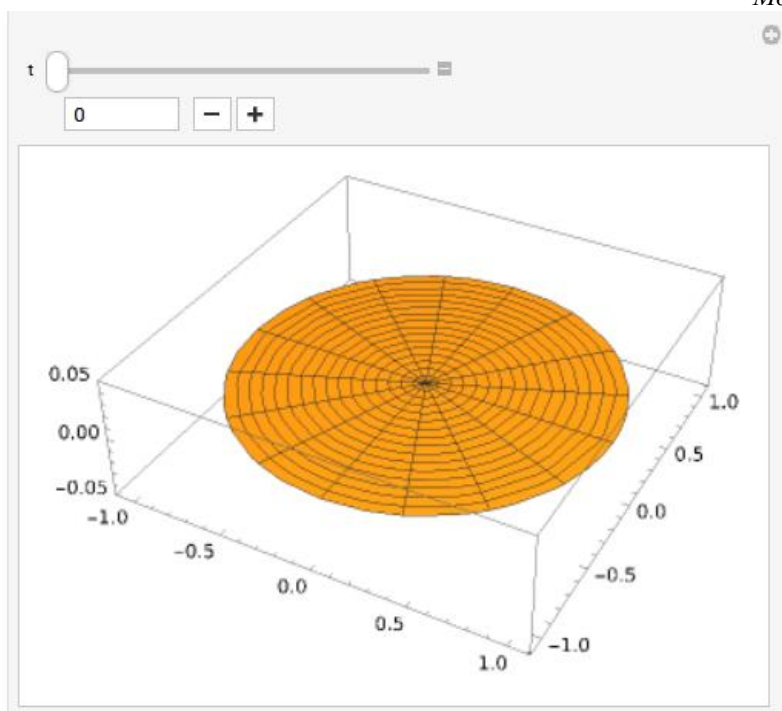
$$u_t(r, 0) = g(r), \quad 0 \leq r < 1 \quad (7.29)$$

όπου $g(r) = -v_0$ για $0 \leq r < b$ και $g(r) = 0$ για $b \leq r < 1$.

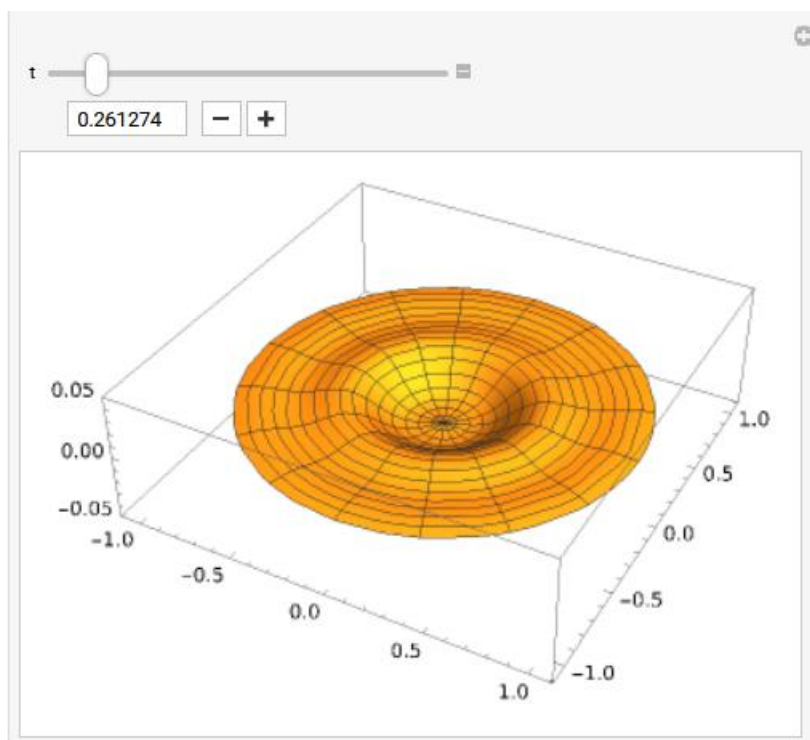
Ο λόγος που επιλέγονται οι παραπάνω αρχικές συνθήκες είναι ότι η μεμβράνη τίθεται σε κίνηση από τη θέση ισορροπίας της χτυπώντας την στο κέντρο [30].

Ο κώδικας της επίλυσης παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

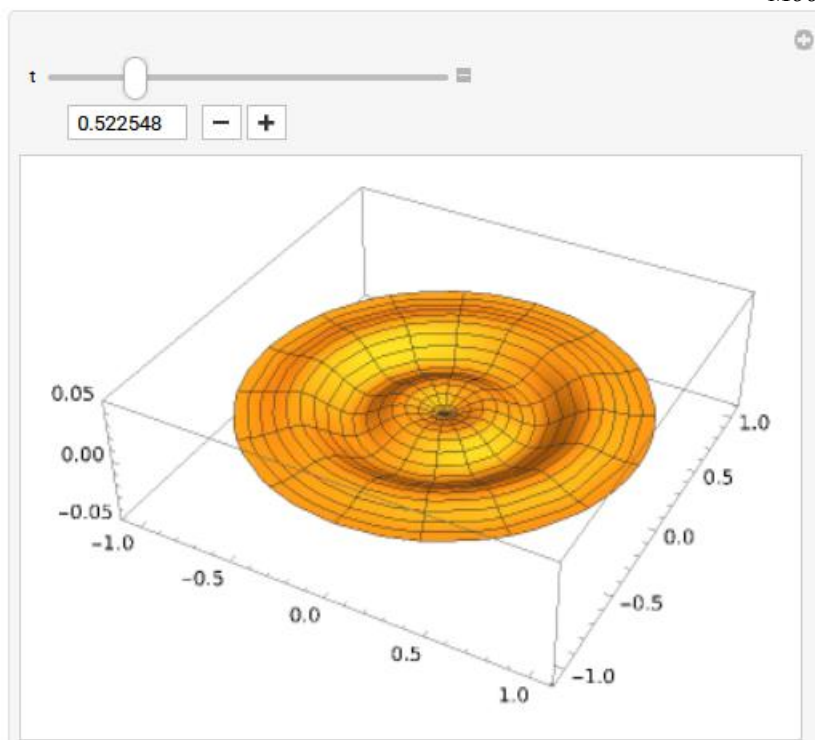
Η μορφή τη μεμβράνης σε διάφορες χρονικές στιγμές παρουσιάζεται στις παρακάτω εικόνες.



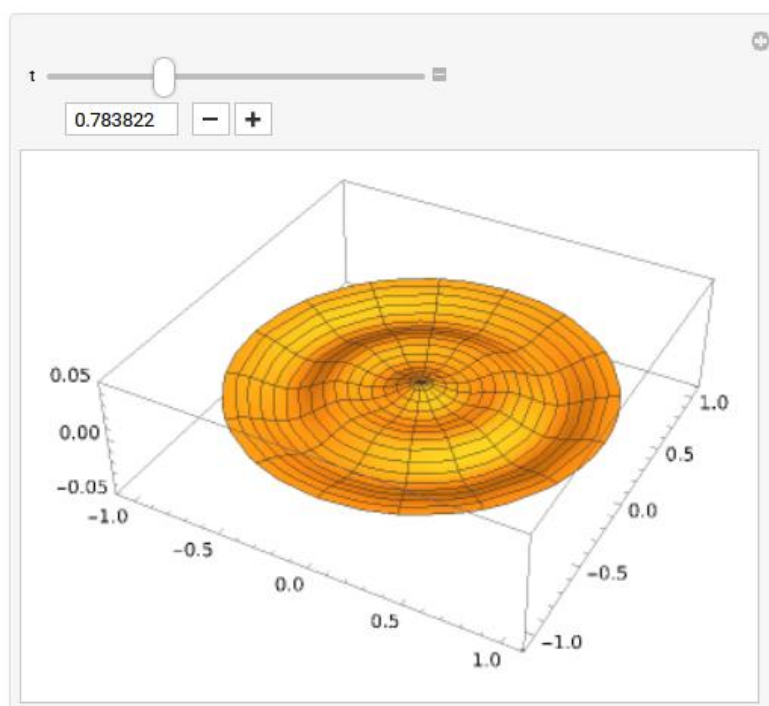
Εικόνα 7.20 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0$ s



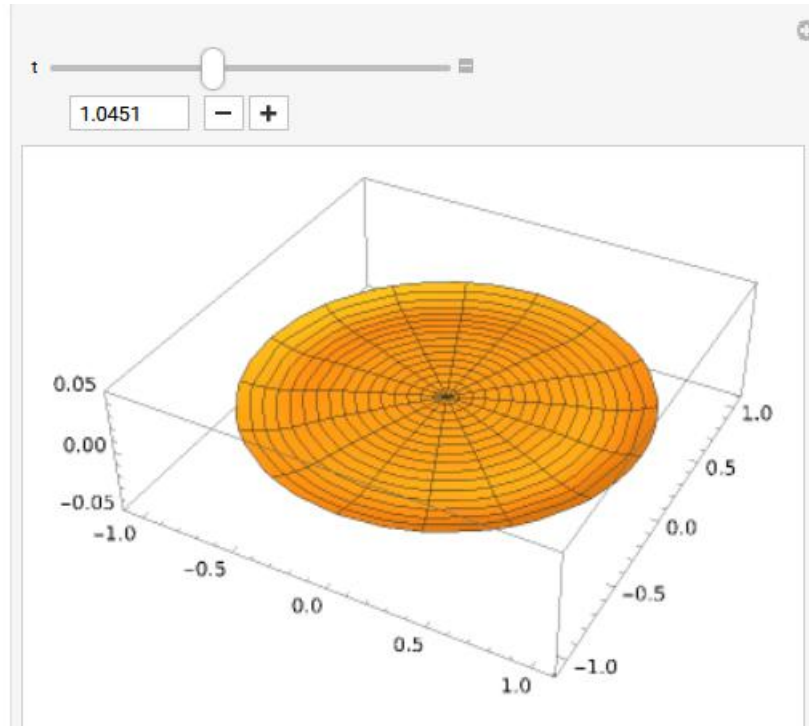
Εικόνα 7.21 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0.261274$ s



Εικόνα 7.22 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0.522548s$



Εικόνα 7.23 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=0.783822s$



Εικόνα 7.24 : Στιγμιότυπο μεμβράνης χωρίς απόσβεση για $t=1.0451s$

7.3 Χορδές κιθάρας/μπάσου (guitar/bass strings)

Στην παρούσα ενότητα θα πραγματοποιηθεί η προσομοίωση χορδής με απόσβεση, η οποία υφίσταται τράβηγμα.

Η εξίσωση της κίνησης σφιχτής χορδής με σταθερή τάση και πυκνότητα η οποία περιλαμβάνει κατανεμημένη απόσβεση, είναι η εξής[31]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (7.30)$$

όπου β είναι η κατανεμημένη σταθερά απόσβεσης ιξώδους, με μονάδες μέτρησης $\frac{Ns}{m^2}$.

Οι συνοριακές συνθήκες, εφόσον οι χορδή είναι πακτωμένη στα άκρα της είναι:

$$u(0,t)=u(L,t)=0 \quad (7.31)$$

Αναζητούμε λύση της μορφής:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (7.32)$$

όπου L είναι το μήκος της χορδής, σε m.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (7.32) στην εξίσωση (7.30), έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{\eta}_n + \frac{\beta}{\rho} \dot{\eta}_n + c^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \eta_n \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{\rho} f(x, t) \quad (7.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (7.33) με $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $(0, L)$, για $n=m$, έχουμε:

$$\ddot{\eta}_n + \frac{\beta}{\rho} \dot{\eta}_n + c^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \eta_n = \frac{2}{\rho L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (7.34)$$

Σε κανονική μορφή, η εξίσωση (7.33) γίνεται :

$$\ddot{\eta}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = \frac{2}{\rho L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (7.35)$$

$$\text{όπου } \omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (7.36) \text{ και } \zeta_n = \frac{\beta}{2\rho\omega_n} = \frac{\beta L}{2n\pi\sqrt{\tau\rho}} \quad (7.37)$$

ω_n είναι οι φυσικές συχνότητες που προκύπτουν.

Η συχνότητα της ταλάντωσης επηρεάζεται από την απόσβεση και αναφέρεται ως η αποσβεσμένη φυσική συχνότητα ταλάντωσης και δίνεται από τη σχέση :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (7.38)$$

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε για την προσομοίωση της χορδής αφορούν τη χορδή “Ρε” της ακουστικής κιθάρας, και είναι τα εξής :

$$\begin{aligned} \tau &= 69.39 \text{ N} \\ \rho &= 0.0019206 \text{ kg/m}^3 \\ c &= 190 \text{ m/s} \\ H &= 0.001 \text{ m} \\ L &= 0.648 \text{ m} \\ \beta &= 0.177 \text{ Ns/m}^2. \end{aligned}$$

Θεωρούμε πως στη χορδή ασκείται σημειακή δύναμη τραβήγματος στο σημείο $x=\alpha$ και τότε έχουμε:

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - \alpha) \delta(t - \alpha) \quad (7.39)$$

Η εξίσωση (7.39) περιγράφει μια παλμική δύναμη μεγέθους F_0 (με μονάδες μέτρησης Ns), που εφαρμόζεται σε σημείο $x = \alpha$.

Η συνάρτηση δέλτα (συνάρτηση Dirac) συσχετίζεται με τη συνάρτηση Heaviside ως εξής:

$$\delta(x - \alpha) = \frac{d}{dx} U(x - \alpha) \quad (7.40)$$

Μια παρόμοια σχέση ισχύει για τη $\delta(t - \alpha)$:

$$\delta(t - \alpha) = \frac{d}{dt} U(t - \alpha) \quad (7.41)$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση και ορθογωνιότητα, η εξίσωση (7.35) γίνεται :

$$\ddot{\eta}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = \frac{2}{\rho L} \int_0^L F_0 \delta(x - \alpha) \delta(t - \alpha) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (7.42)$$

Πραγματοποιώντας το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\ddot{\eta}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = \frac{2}{\rho L} F_0 \sin\left(\frac{n\pi \alpha}{L}\right) \delta(t - \alpha) \quad (7.43)$$

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (7.13) και λύνουμε ως προς $\eta_n(s)$:

$$\eta_n(s) = \frac{\frac{2F_0}{\rho L} \sin\left(\frac{n\pi \alpha}{L}\right) e^{-as}}{(s + \zeta_n \omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{(s + \zeta_n \omega_n) \eta_n(0)}{(s + \zeta_n \omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\dot{\eta}_n(0) + \zeta_n \omega_n \eta_n(0)}{(s + \zeta_n \omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (7.44)$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$\eta_n(t) = \frac{2F_0}{\rho L \omega_d} \sin\left(\frac{n\pi \alpha}{L}\right) e^{-\zeta_n \omega_n (t - \alpha)} \sin[\omega_d (t - \alpha)] U(t - \alpha) + e^{-\zeta_n \omega_n t} \left(\eta_n(0) \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{\eta}_n(0) + \zeta_n \omega_n \eta_n(0)}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \quad (7.45)$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \begin{cases} \frac{2Hx}{L}, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 2H \left(1 - \frac{x}{L}\right), & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} \quad (7.46)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (7.46) με $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, για $m=n$ έχουμε:

$$\eta_n(0) = \frac{8H}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (7.47)$$

Η παλμική δύναμη ασκείται τη χρονική στιγμή $t=\alpha$.

Η αρχική ταχύτητα είναι 0, επομένως:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \Rightarrow \eta_n(0) = 0 \quad (7.48)$$

Τότε προκύπτει η σχέση:

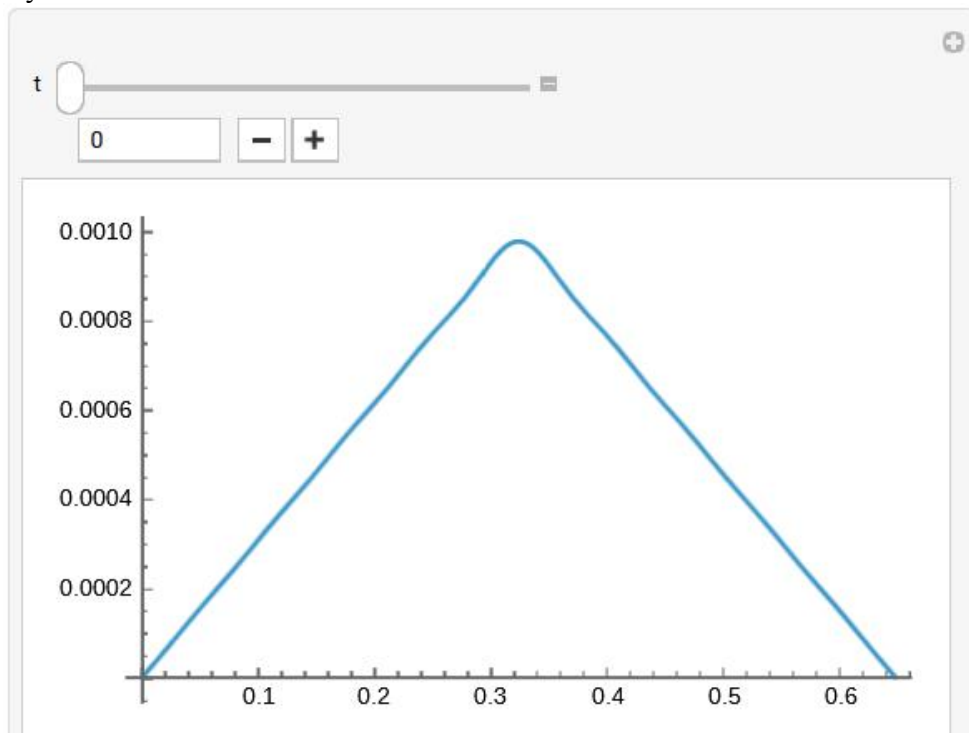
$$\eta_n(t) = \frac{2F_0}{\rho L \omega_d} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) e^{-\zeta_n \omega_n(t-\alpha)} \sin[\omega_d(t-\alpha)] U(t-\alpha) + \frac{8H}{n^2 \pi^2} e^{-\zeta_n \omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta_n}{\sqrt{1-\zeta_n^2}} \sin(\omega_d t) \right) \quad (7.49)$$

Έτσι, η συνολική λύση είναι [31]:

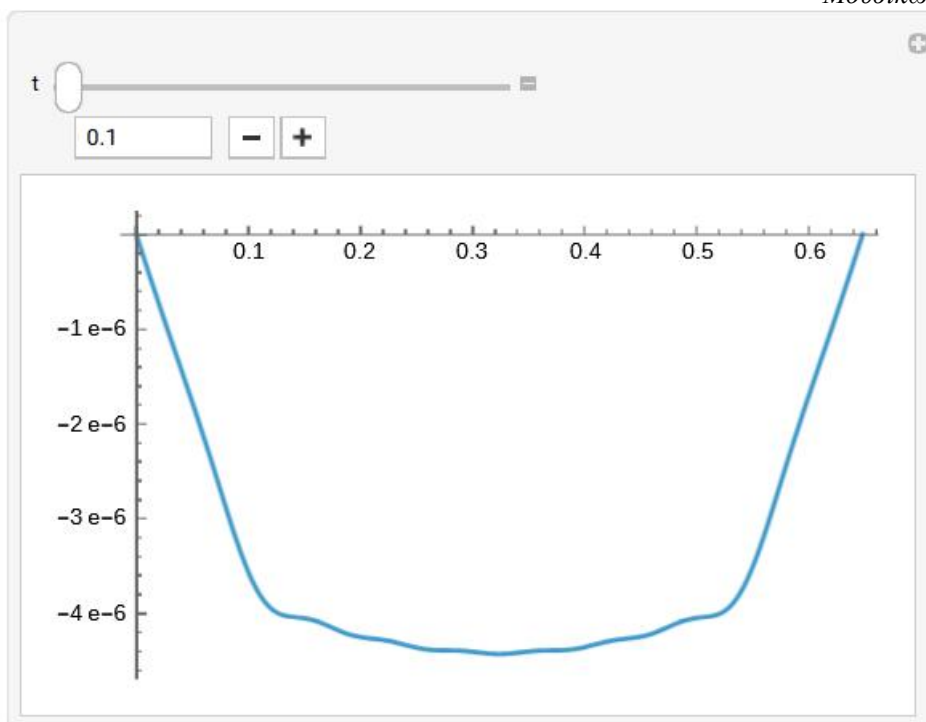
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2F_0}{\rho L \omega_d} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) e^{-\zeta_n \omega_n(t-\alpha)} \sin[\omega_d(t-\alpha)] U(t-\alpha) + \frac{8H \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \pi^2} e^{-\zeta_n \omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta_n}{\sqrt{1-\zeta_n^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (7.50)$$

Ο κώδικας της επίλυσης παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

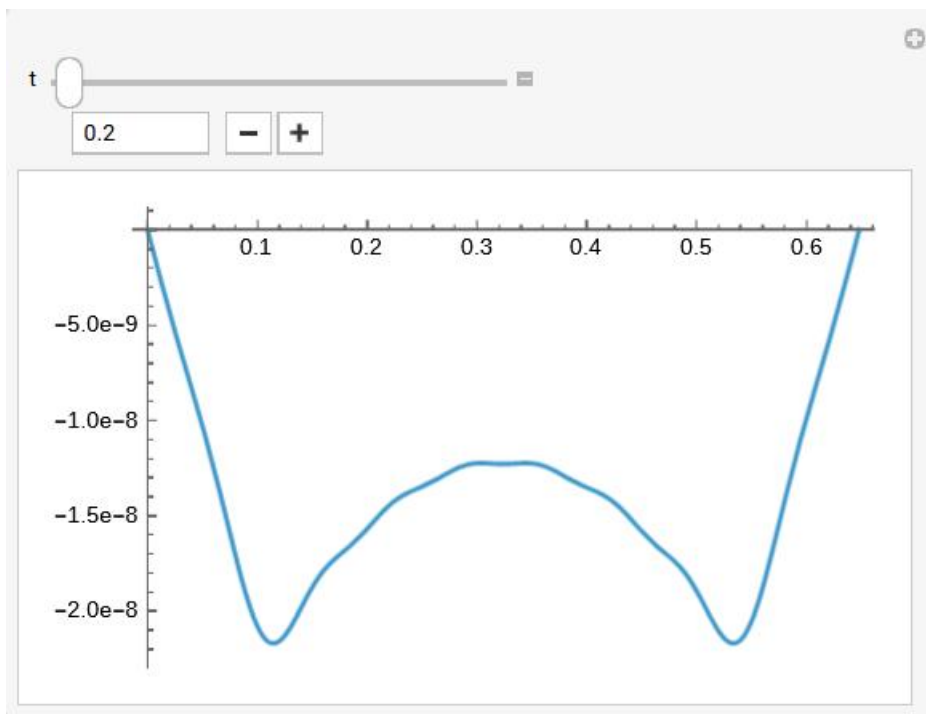
Η μορφή της χορδής σε διάφορες χρονικές στιγμές παρουσιάζεται στις παρακάτω εικόνες.



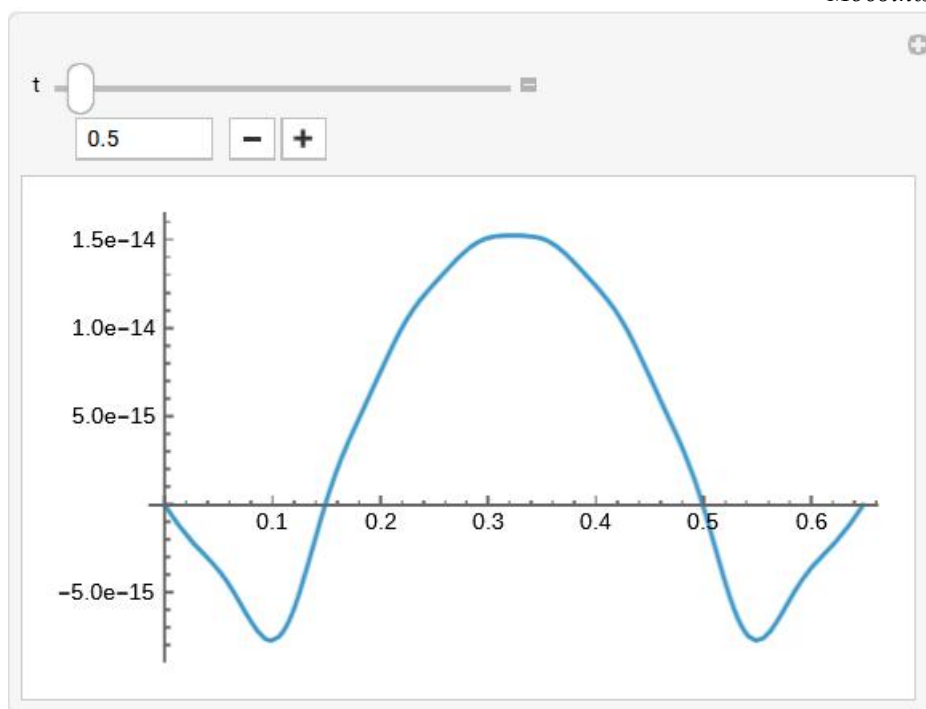
Εικόνα 7.25 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0s$



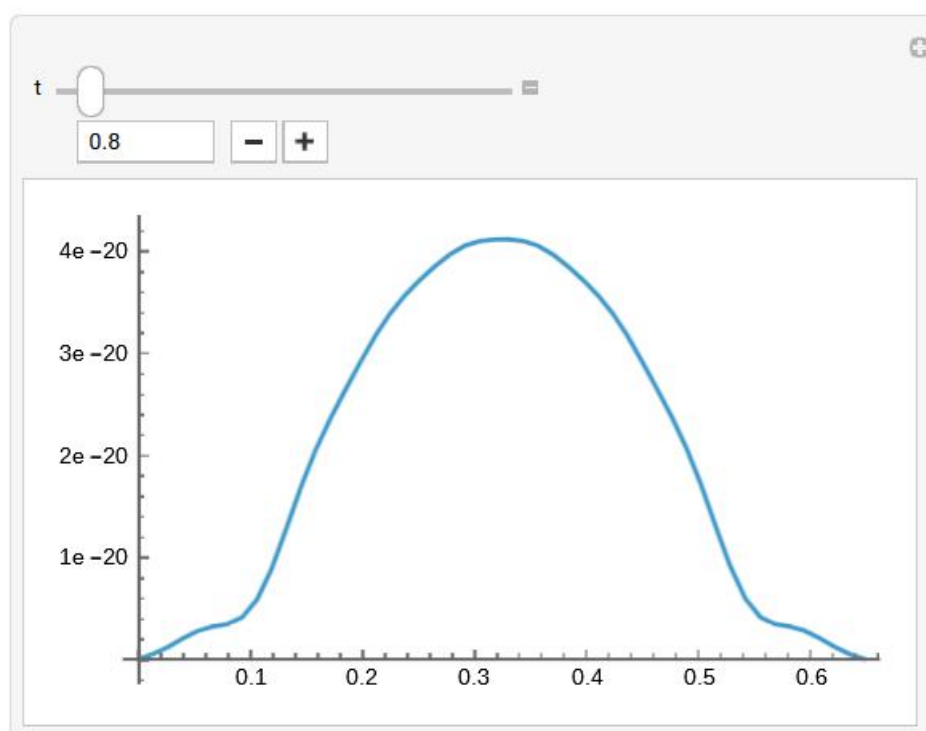
Εικόνα 7.26 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.1s$



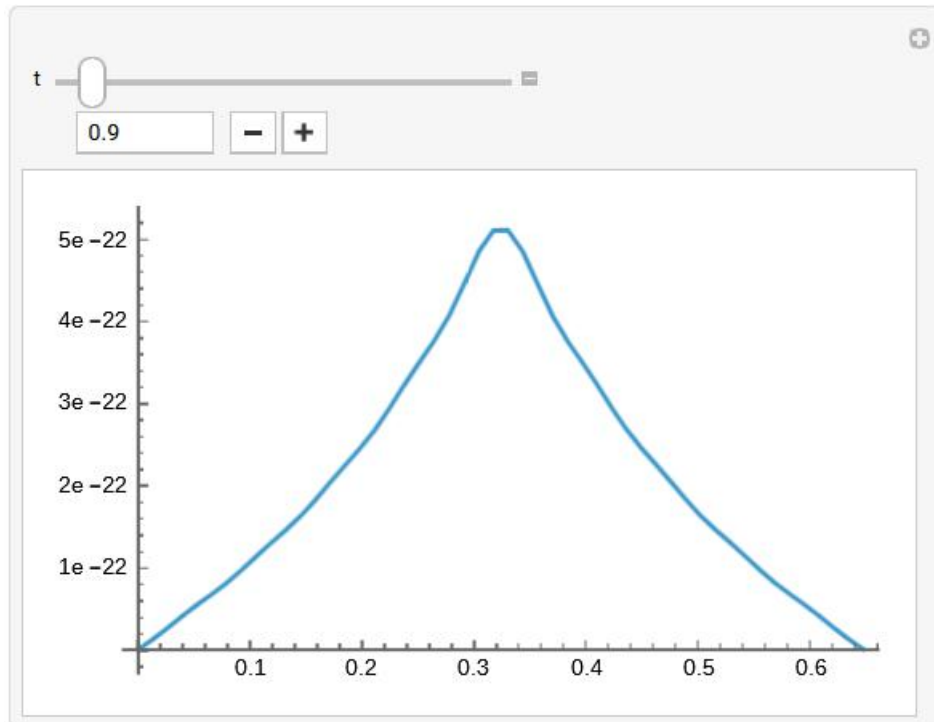
Εικόνα 7.27 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.2s$



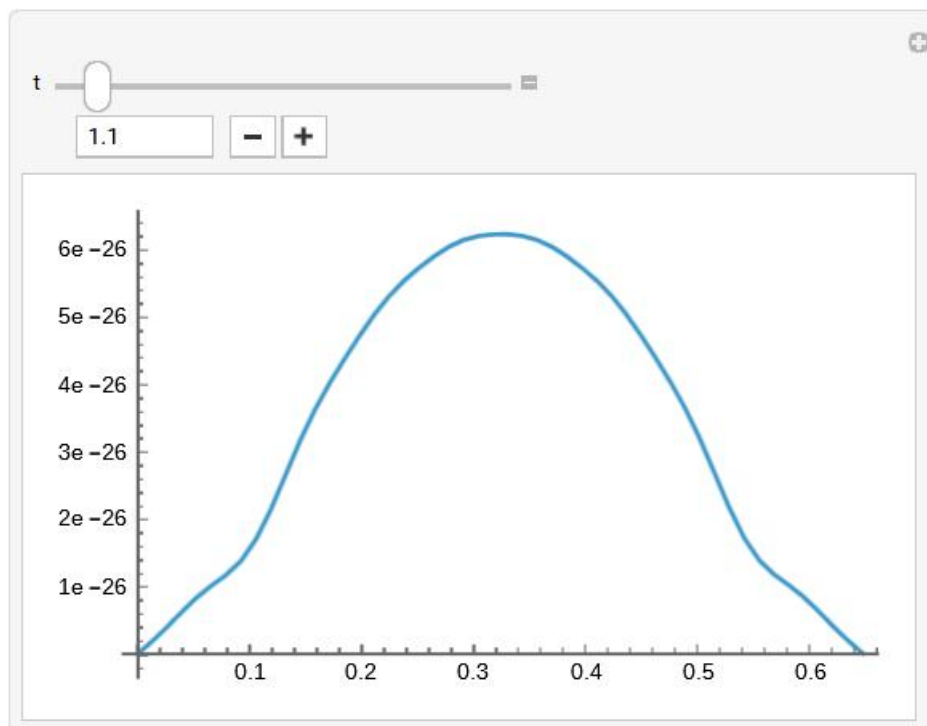
Εικόνα 7.28 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.5s$



Εικόνα 7.29 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.8s$



Εικόνα 7.30 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=0.9s$



Εικόνα 7.31 : Στιγμιότυπο χορδής για $t=1.1s$

Κεφάλαιο 8- Ήχος- Ακουστικά Κύματα-Παραγόμενες Κυματομορφές και Συχνότητες Μουσικών Οργάνων

Θα αξιοποιήσουμε τις απλοποιημένες μοντελοποιήσεις των πιατινιών, μεμβρανών και χορδών , προκειμένου να συσχετίσουμε τις δονήσεις τους με τα παραγόμενα ακουστικά κύματα και τις παραγόμενες κυματομορφές.

8.1 Παραγωγή ήχου

Όταν παίζεται μια κιθάρα, ένα μπάσο ή ένα κρουστό μουσικό όργανο, υπάρχει μια μεταφορά ενέργειας από τον παίκτη στο όργανο. Η κινητική ενέργεια που έχει το χέρι του παίκτη ή η μπαγκέτα του τυμπανιστή μεταφέρεται στη χορδή , στη μεμβράνη του τυμπάνου ή στο πιατίνι, μετατοπίζοντάς τα από τη θέση ηρεμίας τους. Τα δονούμενα τμήματα αυτών των μουσικών οργάνων αλληλεπιδρούν με τον περιβάλλοντα αέρα, προκαλώντας δόνηση στα μόρια του αέρα, μετατρέποντας την κινητική ενέργεια σε ακουστική ενέργεια, ή αλλιώς σε “ήχο”.

Η δονητική κίνηση της χορδής, της μεμβράνης και του πιατινιού προκαλούν την εμφάνιση τοπικών αλλαγών στην πίεση του αέρα, η οποία είναι πιο γνωστή ως ένταση/πίεση ήχου. Αυτή η ένταση/πίεση του ήχου στη συνέχεια διαδίδεται και αλλάζει μέσω του αέρα, ως αυτό που γνωρίζουμε ως ήχος, και τελικά φτάνει στα αυτιά μας. Το υπόλοιπο όργανο βοηθά στην ενίσχυση αυτού του ήχου/σήματος είτε ηλεκτρικά , εάν αναφερόμαστε σε ηλεκτρικά μουσικά όργανα, είτε ακουστικά μέσω του σώματος του οργάνου ή της ηχητικής οπής.

Η μετατόπιση των μορίων του αέρα είναι ένα μέτρο της έντασης ενός ηχητικού κύματος. Μια ελαφριά χορδή κιθάρας δονείται μόνο λίγο, οπότε η μετατόπιση θα ήταν μικροσκοπική. Εάν ο παίκτης τραβήξει τη χορδή κατά μια ίντσα προς τα πίσω και την αφήσει, η μετατόπιση της χορδής θα είναι πολύ μεγαλύτερη, γεγονός που θα δημιουργούσε ένα πολύ δυνατότερο ηχητικό κύμα[32],[33].

8.2 Χαρακτηριστικά ηχητικού κύματος

● Πλάτος

Οι κυματομορφές είναι αφηρημένες αναπαραστάσεις ηχητικών κυμάτων. Ενώ ένα πραγματικό ηχητικό κύμα μπορεί να εκτοπίσει ένα μόριο αέρα κατά 4nm, τείνουμε να χρησιμοποιούμε αφηρημένες μετρήσεις όταν ασχολούμαστε με κυματομορφές.

Το πλάτος μετρά το πόσο μετατοπίζεται ένα μόριο από τη θέση ηρεμίας του.

Το πλάτος επίσης μπορεί να θεωρηθεί ως ένταση του ήχου. Όσο περισσότερο μετατοπίζονται τα μόρια του αέρα, τόσο πιο δυνατός μας φαίνεται ο ήχος.

● Τόνος

Ο τόνος μια δονούμενης χορδής, μεμβράνης ή πιατινιού καθορίζεται από τα χαρακτηριστικά του δονούμενου τμήματος. Για παράδειγμα, ο τόνος μια χορδής καθορίζεται από την τάση/ακαμψία, τη μάζα και το μήκος της χορδής. Ο τόνος σχετίζεται με κάτι που ονομάζεται φυσική συχνότητα (συχνά αναφέρεται ως η θεμελιώδης συχνότητα), η οποία είναι η προτιμώμενη συχνότητα δόνησης ή αλλιώς η συχνότητα στην οποία ένα σύστημα ταλαντώνεται εύκολα. Η φυσική σχέση βασίζεται σε ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου για μια συντονισμένη ταλάντωση.

● Συχνότητα

Η συχνότητα είναι ένα μέτρο του πόσες φορές επαναλαμβάνεται η κυματομορφή σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Η κοινή μονάδα μέτρησης για τη συχνότητα είναι το Hertz, με συντομογραφία "Hz", που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των επαναλήψεων ανά δευτερόλεπτο. Η συχνότητα είναι παρόμοια με τον τόνο. Όσο πιο γρήγορα επαναλαμβάνεται ένα κύμα, τόσο υψηλότερος είναι ο τόνος της νότας. Τα ηχητικά κύματα χαμηλότερης συχνότητας έχουν μεγαλύτερα μήκη κύματος και χαμηλότερο τόνο. Τα ηχητικά κύματα υψηλότερης συχνότητας έχουν μικρότερα μήκη κύματος και υψηλότερο τόνο.

● Αρμονικές

Οι αρμονικές είναι επιπρόσθετες συχνότητες, πέρα από τη φυσική συχνότητα, οι οποίες προκύπτουν από συγκεκριμένες κυματομορφές. Οι αρμονικές συχνότητες είναι πάντα κάποιο πολλαπλάσιο της φυσικής συχνότητας. Όλες οι κυματομορφές, εκτός από την ημιτονοειδή κυματομορφή η οποία είναι η θεμελιώδης, εμφανίζουν αρμονικές συχνότητες.

● Περίοδος

Το χρονικό διάστημα μεταξύ της εκπομπής δύο παλμών δίνεται από την περίοδο, η οποία είναι αντίστροφη προς τη συχνότητα. Αυτό το χαρακτηριστικό εξαρτάται μόνο από την περίοδο ταλάντωσης της πηγής εκπομπής του κύματος. Η μονάδα SI είναι το δευτερόλεπτο (s). Η περίοδος T υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$T = \frac{1}{f} \quad (8.1)$$

όπου f είναι η συχνότητα (σε Hz).

● Μήκος κύματος

Μήκος κύματος είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων με την ίδια απόσταση από τις θέσεις ισορροπίας και την ίδια ταλαντωτική κίνηση. Εξαρτάται από τα μέσα στα οποία διαδίδεται το κύμα. Η μονάδα SI είναι το μέτρο (m).

Το μήκος κύματος λ συνδέεται με τη συχνότητα f και την ταχύτητα c του κύματος ως εξής [32],[33]:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (8.2)$$

8.3 Υπολογισμός χαρακτηριστικών των ακουστικών κυμάτων

8.3.1 Πιατίνια

Στην περίπτωση των πιατινιών, προκειμένου να υπολογιστούν οι συχνότητες, θα χρησιμοποιηθούν παράμετροι από την βιβλιογραφία. Η επιλογή αυτή γίνεται καθώς κατά την απλοποιημένη μοντελοποίηση των πιατινιών χρησιμοποιήσαμε αυθαίρετες παραμέτρους H , w και γ , οι οποίες δεν έχουν φυσική σημασία. Επομένως, ενώ η προσομοίωση της κίνησης των πιατινιών εμφανίζει παρόμοια χαρακτηριστικά με την πραγματικότητα, τα χαρακτηριστικά των ακουστικών κυμάτων που προκύπτουν θα εμφανίζουν απόκλιση.

Οι συχνότητες των ακουστικών κυμάτων θα υπολογιστούν με βάση τις εξής παραμέτρους [28]:

Χαρακτηριστικά Πιατινιού	Τιμή
Εσωτερική ακτίνα r_1 (m)	0.0127
Εξωτερική ακτίνα r_2 (m)	0.15
Πάχος h (m)	0.0022
Μέτρο ελαστικότητας του Young E (GPa)	193
Λόγος του Poisson ν	0.29
Πυκνότητα ρ (kg/m ³)	8000

Πίνακας 8.1 : Τιμές φυσικών χαρακτηριστικών πιατινιού

Σύμφωνα με την πηγή [28], οι ιδιοτιμές $\lambda_{m,n}$ που υπολογίζονται για διάφορες τιμές m και n , είναι οι εξής:

m	n	$\lambda_{m,n}$
1	0	4.93
1	1	5.17
1	2	6.04
1	3	7.29

Πίνακας 8.2 : Ιδιοτιμές $\lambda_{m,n}$

Οι φυσικές συχνότητες των ηχητικών κυμάτων που προκύπτουν κατά την κίνηση των πιατινιών δίνονται από τη σχέση:

$$\omega_{m,n} = \frac{\lambda_{m,n}^2}{r_2^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad , \quad (8.3)$$

με μονάδες μέτρησης rad/s.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ είναι η καμπτική ακαμψία.}$$

Για να μετατρέψουμε τα rad/s σε Hz, χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$1\text{Hz}=2\pi \text{ rad/s.}$$

Ο κώδικας των υπολογισμών των συχνοτήτων παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.
Με βάση τις ιδιοτιμές τη βιβλιογραφίας ,οι φυσικές συχνότητες που προκύπτουν είναι:

n	m	$\omega_{n,m}$ (rad/s)	f (Hz)
0	1	3520.89	560.368
1	1	3872.04	616.255
2	1	5284.85	841.111
3	1	7698.64	1225.28

Πίνακας 8.3 : Παραγόμενες συχνότητες πιατινιού

Η ταχύτητα κύματος το οποίο διαδίδεται σε ένα πιατίνι υπολογίζεται από τον τύπο [34] :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.4)$$

Με βάση τα χαρακτηριστικά των πιατινιών που αναφέρθηκαν παραπάνω, η ταχύτητα του κύματος υπολογίζεται ίση με $c=4912 \text{ m/s}$.

Έτσι, προκύπτουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά του ακουστικού κύματος:

Συχνότητα f (Hz)	Περίοδος T(s)	Μήκος κύματος λ(m)
560.368	0.00178	8.766
616.255	0.00162	7.971
841.111	0.00119	5.834
1225.28	0.00082	4.009

Πίνακας 8.4 : Τιμές συχνότητας, περιόδου και μήκους κύματος πιατινιού

8.3.2 Μεμβράνες

Για τον υπολογισμό των παραγόμενων συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τα χαρακτηριστικά μεμβρανών που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 7, δηλαδή στην απλοποιημένη μοντελοποίηση των μεμβρανών.

Σύμφωνα με την πηγή [29], οι συχνότητες που παράγονται από τη δόνηση των μεμβρανών υπολογίζονται από τη σχέση:

$$fr_{m,n} = \sqrt{\omega_{m,n}^2 - a^2} \quad , \quad (8.5)$$

με μονάδες μέτρησης rad/s.

Οι παραγόμενες συχνότητες σε Hz υπολογίζονται από τη σχέση:

$$freq_{m,n} = \frac{fr_{m,n}}{2\pi} \quad (8.6)$$

Οι συχνότητες που προκύπτουν παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

m	n	$\omega_{n,m}$ (rad/s)	fr (rad/s)	freq(Hz)
1	1	644.493	644.415	102.562
1	2	1180.020	1179.980	187.800
2	1	863.812	863.754	137.471
2	2	1415.78	863.754	225.323

Πίνακας 8.5 : Παραγόμενες συχνότητες μεμβράνης τυμπάνου

Η ταχύτητα του κύματος στις μεμβράνες υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho h}} \quad (8.7)$$

Με βάση τα χαρακτηριστικά που χρησιμοποιήσαμε κατά την απλοποιημένη μοντελοποίηση των μεμβρανών, η ταχύτητα υπολογίζεται ίση με $c=58.87$ m/s.

Έτσι, προκύπτουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά του ακουστικού κύματος:

Συχνότητα freq(Hz)	Περίοδος T(s)	Μήκος κύματος λ(m)
102.562	0.0098	0.5740
187.800	0.0053	0.3135
137.471	0.0073	0.4282
225.323	0.0044	0.2613

Πίνακας 8.6 : Τιμές συχνότητας, περιόδου και μήκους κύματος μεμβράνης τυμπάνου

8.3.3 Χορδές

Για τον υπολογισμό των παραγόμενων συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τα χαρακτηριστικά της “Ρε” χορδής ακουστικής κιθάρας που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 7, δηλαδή στην απλοποιημένη μοντελοποίηση των χορδών. Σύμφωνα με την πηγή [31], οι φυσικές συχνότητες που παράγονται από τη δόνηση των χορδών υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (8.8)$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης επηρεάζεται από την απόσβεση και αναφέρεται ως η αποσβεσμένη φυσική συχνότητα ταλάντωσης και δίνεται από τη σχέση :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (8.9)$$

$$\text{όπου } \zeta_n = \frac{\beta}{2\rho\omega_n} = \frac{\beta L}{2\pi\sqrt{\tau\rho}} \quad (8.10)$$

Οι συχνότητες υπολογίζονται σε Hz μέσω της σχέσης:

$$f_n = \frac{\omega_d}{2\pi} \quad (8.11)$$

Ο κώδικας των υπολογισμών των συχνοτήτων παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α. Οι συχνότητες που προκύπτουν παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

n	ζ_n	ω_n	ω_d	f_n
1	0.0500036	920.367	921.52	146.664
2	0.0250018	1842.46	1843.04	293.329
3	0.0166679	2764.18	2764.56	439.993
4	0.0125009	3685.79	3686.08	586.658
5	0.0100007	4607.37	4607.6	733.322
6	0.00833394	5528.93	5529.12	879.987
7	0.00714338	6450.48	6450.64	1026.65
8	0.00625045	7372.02	7372.16	1173.32
9	0.00555596	8293.55	8293.68	1319.98
10	0.00500036	9215.09	9215.2	1466.64

Πίνακας 8.7 : Παραγόμενες συχνότητες χορδής

Με βάση τα χαρακτηριστικά που χρησιμοποιήσαμε κατά την απλοποιημένη μοντελοποίηση των μεμβρανών, η ταχύτητα του κύματος είναι ίση με $c=190$ m/s. Έτσι, προκύπτουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά του ακουστικού κύματος:

Συχνότητα f(Hz)	Περίοδος T(s)	Μήκος κύματος λ(m)
146.664	0.00681828	1.29547
293.329	0.00340914	0.647737
439.993	0.00227276	0.431825
586.658	0.00170457	0.323868
733.322	0.00136366	0.259095
879.987	0.00113638	0.215912
1026.65	0.00097404	0.185068
1173.32	0.000852285	0.161934
1319.98	0.000757587	0.143942
1466.64	0.000681828	0.129547

Πίνακας 8.8 : Τιμές συχνότητας, περιόδου και μήκους κύματος χορδής

Κεφάλαιο 9-Πειραματικές Μετρήσεις

9.1 Σκοπός

Σκοπός της πειραματικής διαδικασίας είναι να υπολογιστούν πειραματικά τα χαρακτηριστικά των ακουστικών κυμάτων που προκύπτουν από τα μουσικά όργανα. Τα χαρακτηριστικά αυτά θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά που υπολογίστηκαν θεωρητικά, μέσω σχέσεων που ανακτήθηκαν από τη βιβλιογραφία.

9.2 Πιατίνια

9.2.1 Πειραματική διαδικασία

Κατά την πειραματική διαδικασία πραγματοποιούνται ηχογραφήσεις διάφορων πιατινιών σε στούντιο μουσικής. Για την ηχογράφιση χρησιμοποιείται το μικρόφωνο Shure SM57, καθώς και το λογισμικό Studio One. Για την λήψη των μετρήσεων, για κάθε πιατίνι ηχογραφήθηκε ένα μονό χτύπημα, χρησιμοποιώντας μπαγκέτα μεγέθους 5A. Τα πιατίνια τα οποία ηχογραφήθηκαν είναι τα εξής:

1^ο σετ πιατινιών:

- **Κύμβαλο (1):** Hi-hat Zultan Rock Beat με διάμετρο 14" (36cm)
- **Κύμβαλο (2):** Πιατίνι (Crash) Zultan aja series με διάμετρο 16"
- **Κύμβαλο (3):** Πιατίνι (Crash) Zultan aja series με διάμετρο 17"
- **Κύμβαλο (4):** Ride Zultan Rock Beat με διάμετρο 20" (50cm)

Το παραπάνω σετ πιατινιών είναι κατασκευασμένο από B20 μπρούτζο και τα πιατίνια έχουν μέσο πάχος 2mm. Το 1^ο σετ των πιατινιών παρουσιάζεται στην Εικόνα 9.1.



Εικόνα 9.1 : 1^ο σετ πιατινιών

2^ο σετ πιατινιών:

- **Κύμβαλο (5):** Hi-hat Zultan Raw series με διάμετρο 15" (38cm)
- **Κύμβαλο (6):** Πιατίνι (Crash) Zultan Raw series με διάμετρο 17" (43cm)
- **Κύμβαλο (7):** Πιατίνι (Crash) Zultan Raw series με διάμετρο 18" (45cm)
- **Κύμβαλο (8):** Ride Zultan Raw series με διάμετρο 21" (53cm)

Το παραπάνω σετ πιατινιών είναι κατασκευασμένο από B20 μπρούτζο και τα πιατίνια έχουν μέσο πάχος 3mm. Επιπλέον, σε αντίθεση με το 1^ο σετ που χρησιμοποιήθηκε, κατά την κατασκευή του το 2^ο σετ πιατινιών δεν υφίσταται περαιτέρω επεξεργασία μετά τη σφυρηλάτησή του. Το 2^ο σετ των πιατινιών παρουσιάζεται στην Εικόνα 9.2.



Εικόνα 9.2 : 2ο σετ πιατινιών

Κατά την ηχογράφηση το μικρόφωνο τοποθετήθηκε κατά μέσο όρο 5cm πάνω από τα πιατίνια και η διεγείρουσα δύναμη ασκήθηκε στην περιφέρεια των πιατινιών, όπως φαίνεται στις Εικόνες 9.3a, 9.3b και 9.3c.



(a)



(b)



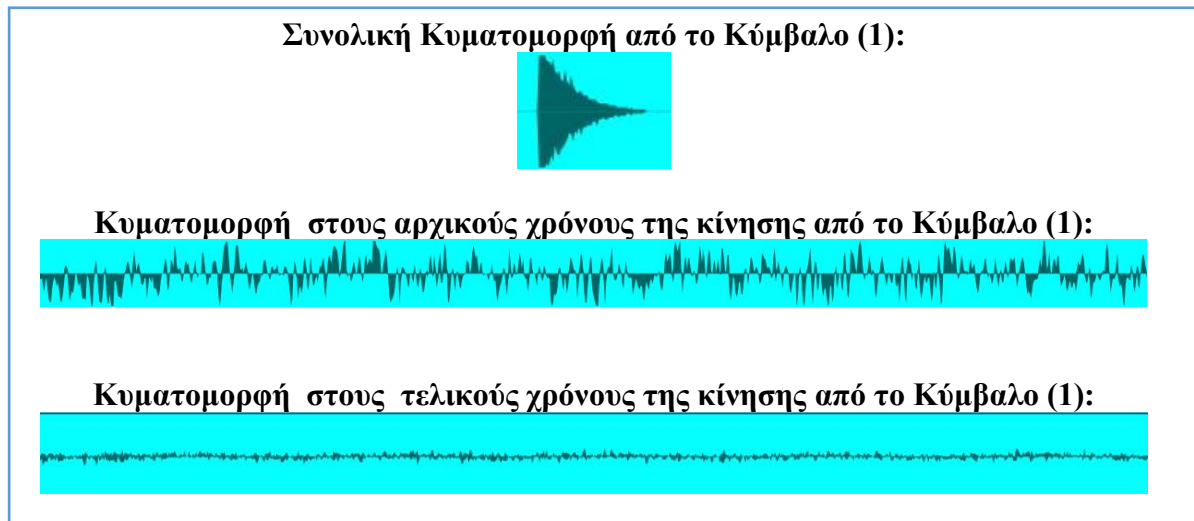
(c)

Εικόνα 9.3: Μικροφωνισμός και διέγερση πιατινιών

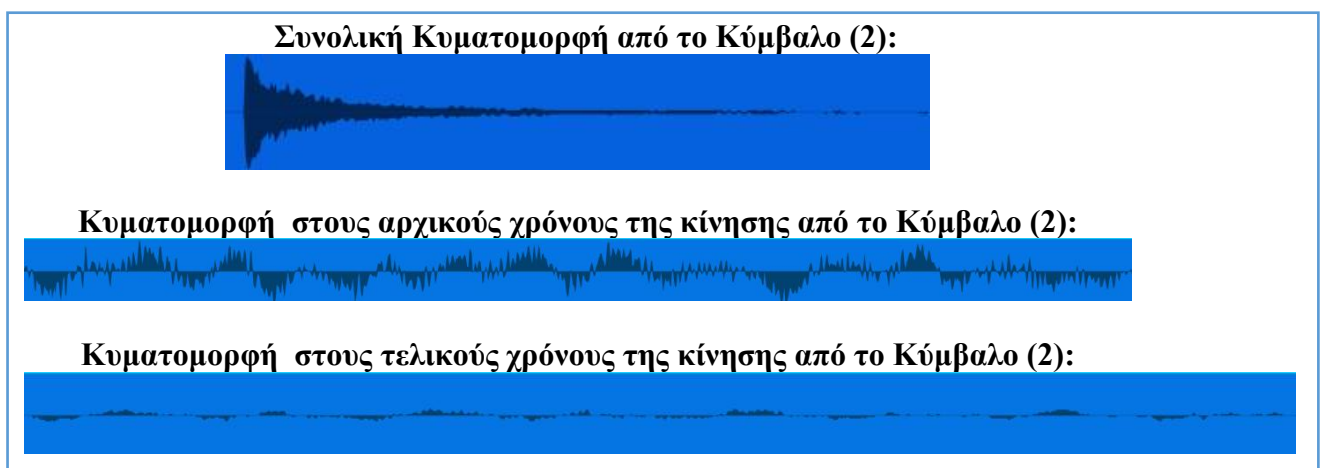
9.2.2 Μετρήσεις

● Κυματομορφές

Οι κυματομορφές που προέκυψαν κατά την ηχογράφηση των πιατινιών παρουσιάζονται παρακάτω:



Εικόνα 9.4 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (1)



Εικόνα 9.5 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (2)

Συνολική Κυματομορφή από το Κύμβαλο (3):



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (3):



Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (3):



Εικόνα 9.6 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (3)

Συνολική Κυματομορφή από το Κύμβαλο (4):



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (4):

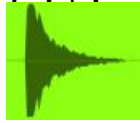


Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (4):



Εικόνα 9.7 : Κυματομορφή από το Κύμβαλο (4)

Συνολική Κυματομορφή απο το Κύμβαλο (5):



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (5):

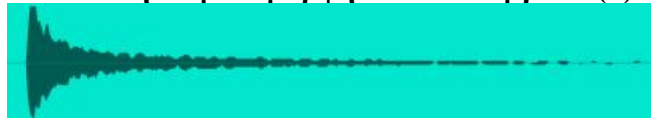


Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (5):



Εικόνα 9.8: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (5)

Συνολική Κυματομορφή από το Κύμβαλο (6):



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (6):

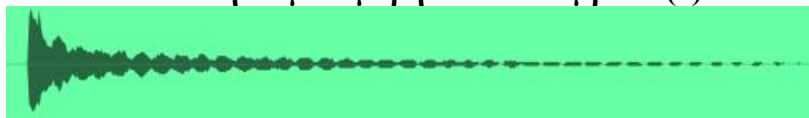


Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (6):



Εικόνα 9.9: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (6)

Συνολική Κυματομορφή από το Κύμβαλο (7):



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (7):



Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Κύμβαλο (7):



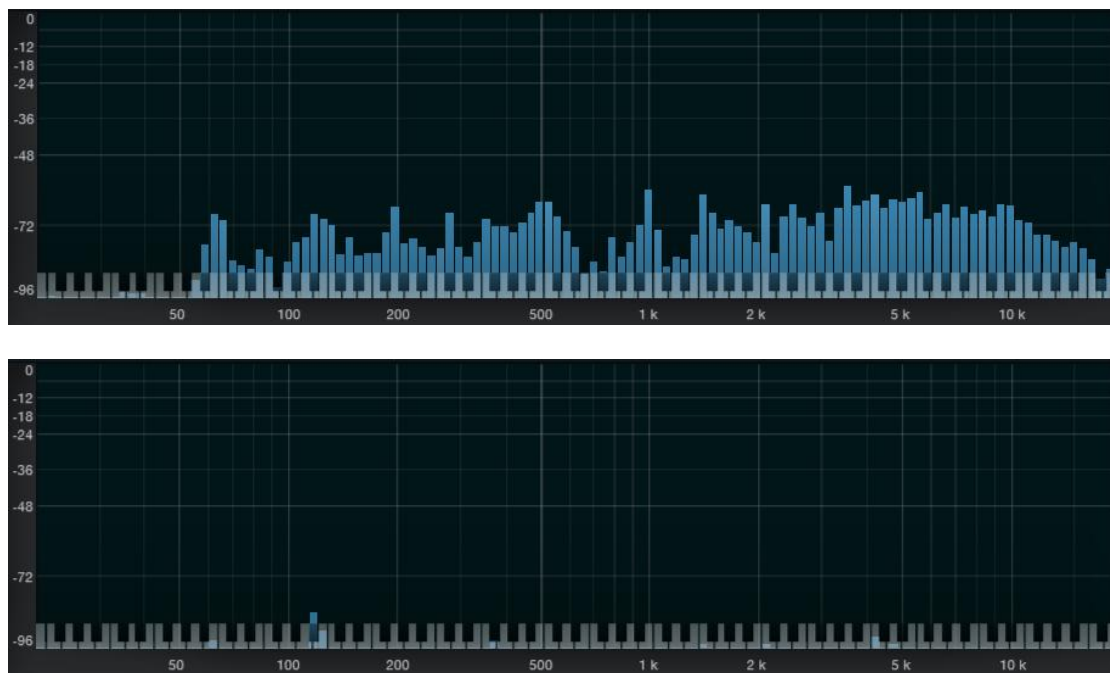
Εικόνα 9.10: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (7)



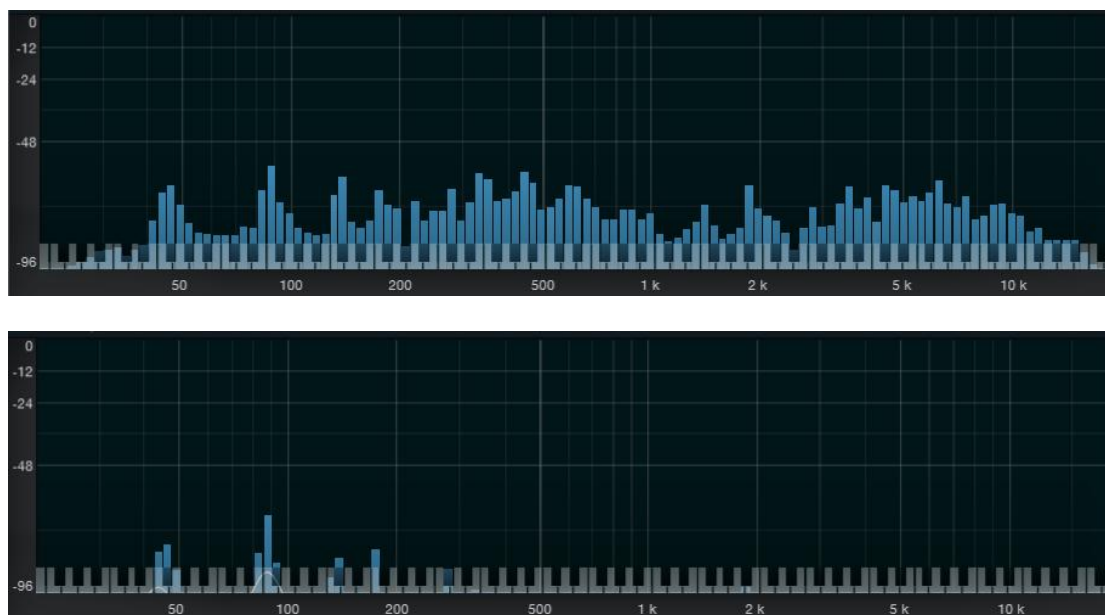
Εικόνα 9.11: Κυματομορφή από το Κύμβαλο (8)

● Συχνότητες

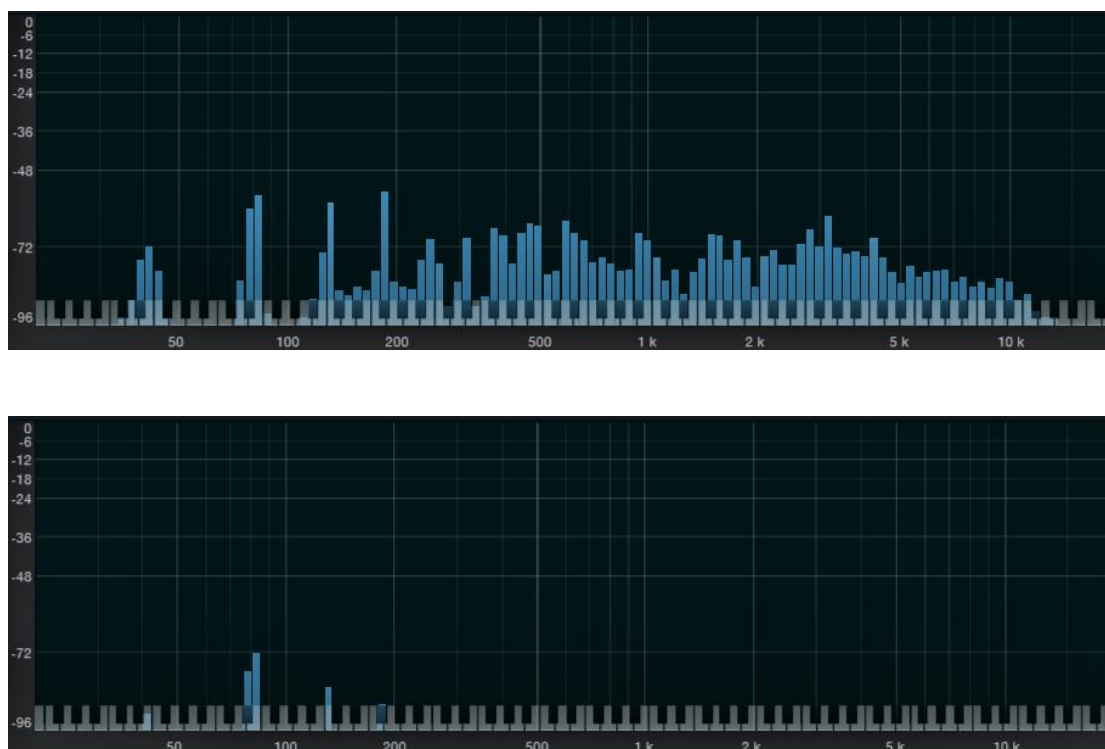
Οι συχνότητες που προκύπτουν από το κάθε κύμβαλο, εμφανίζονται στις Εικόνες 9.12 έως 9.19.



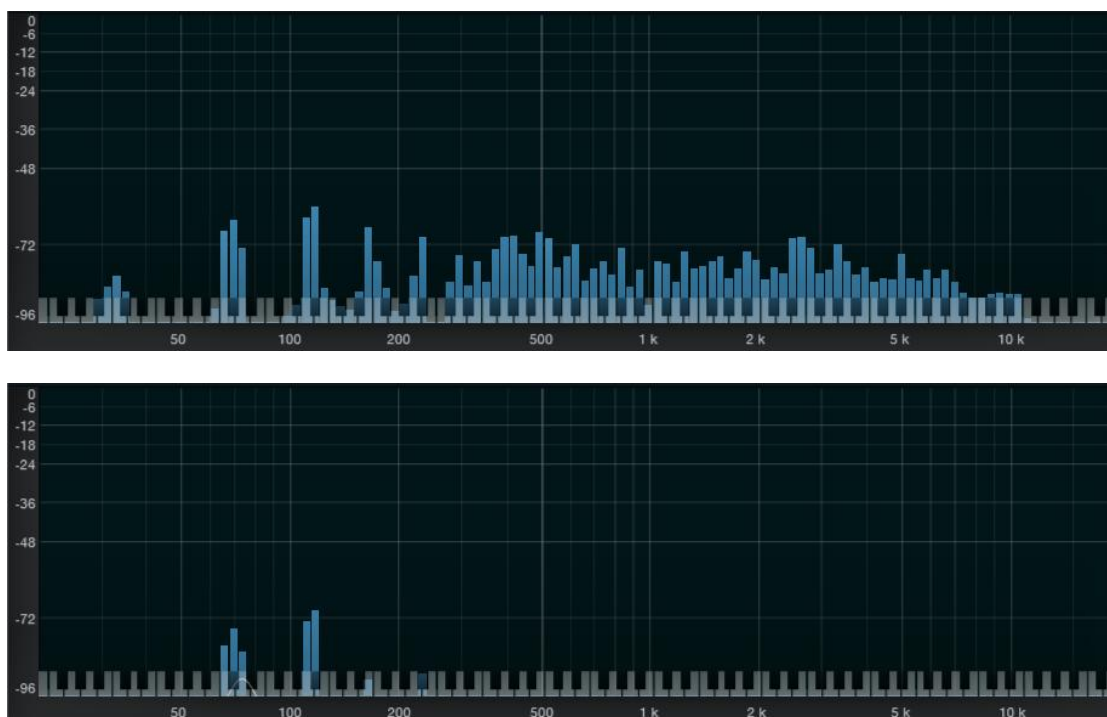
Εικόνα 9.12: Συχνότητες από το Κύμβαλο (1)



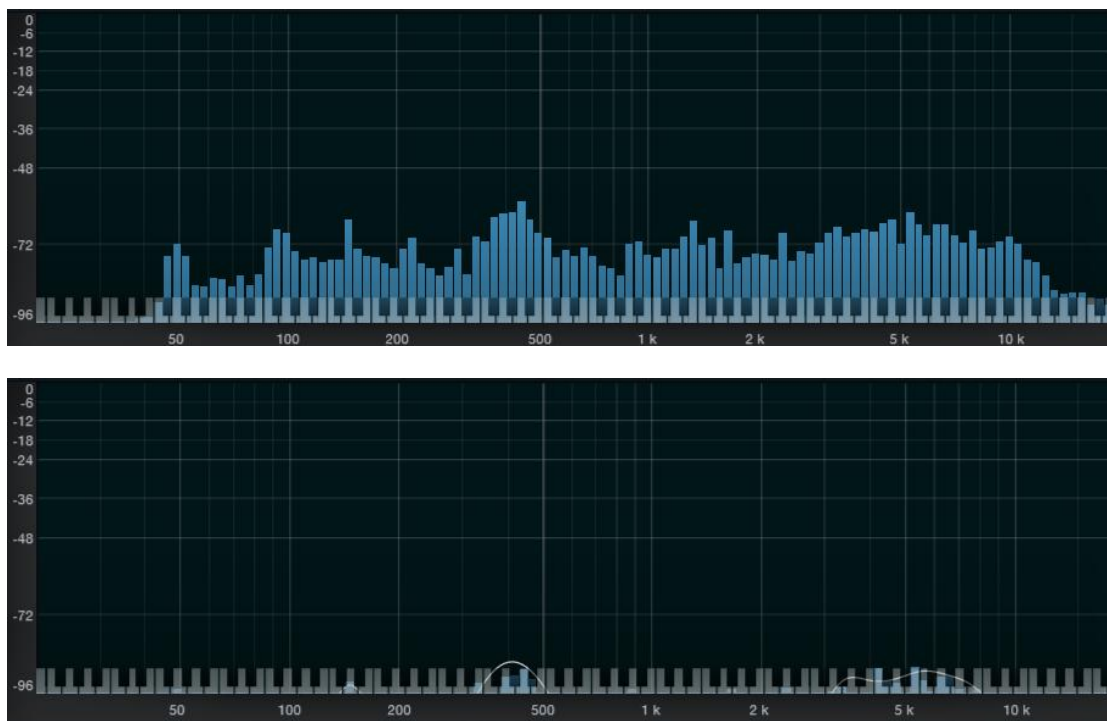
Εικόνα 9.13: Συχνότητες από το Κύμβαλο (2)



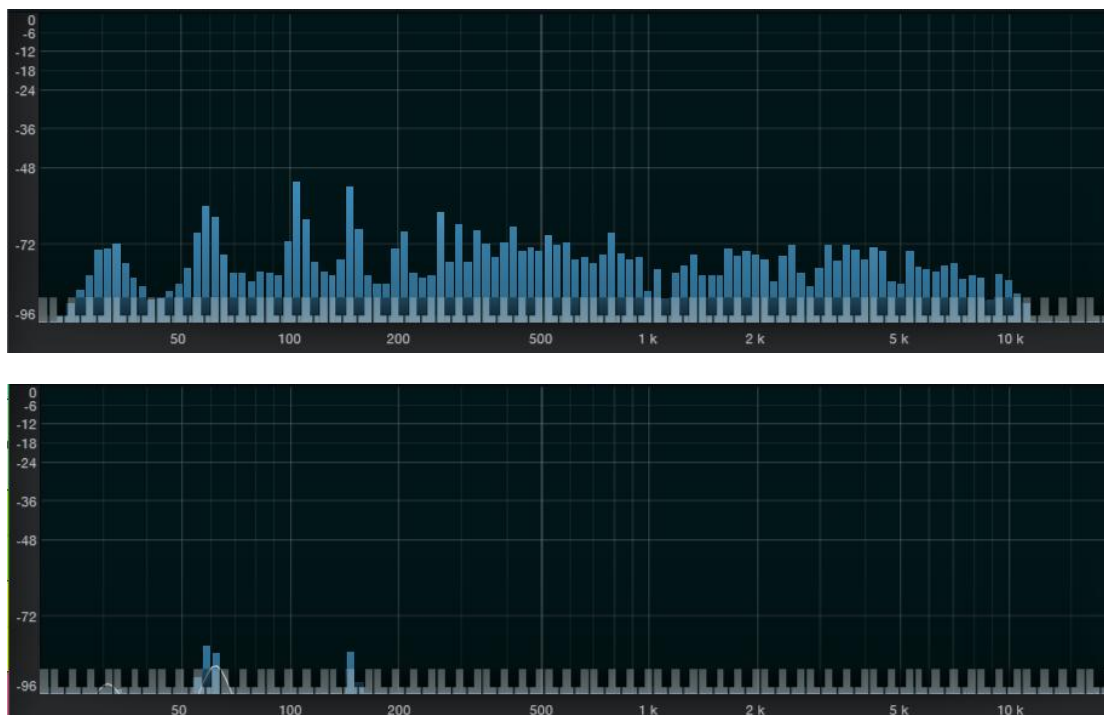
Εικόνα 9.14: Συχνότητες από το Κύμβαλο (3)



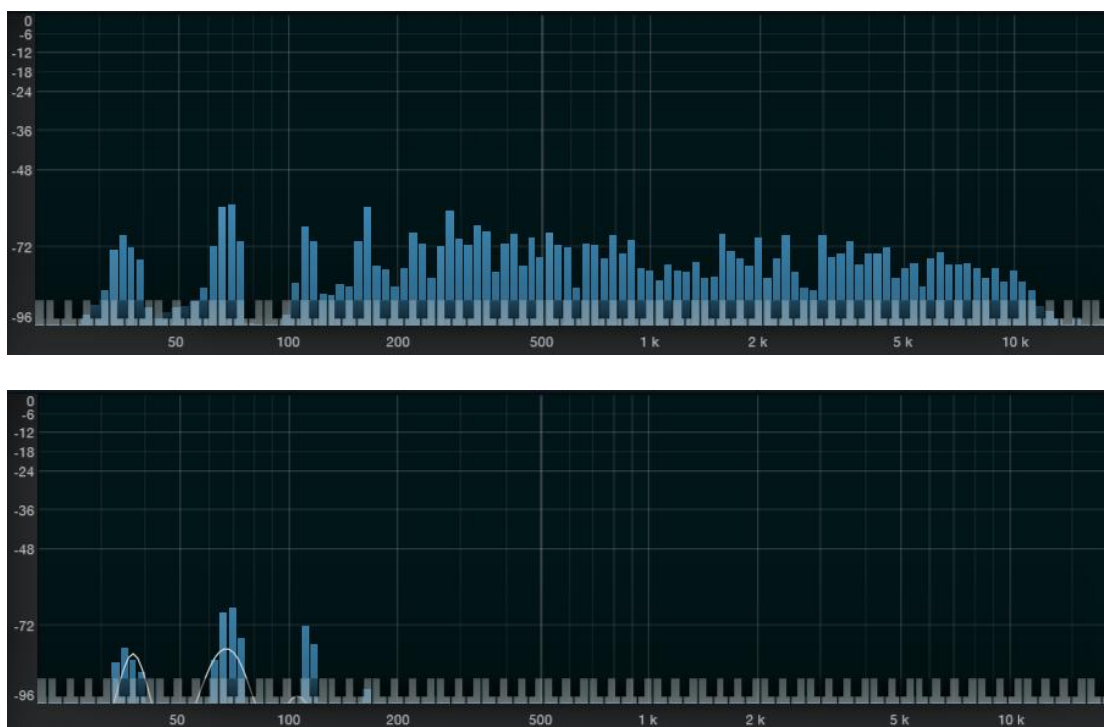
Εικόνα 9.15: Συχνότητες από το Κύμβαλο (4)



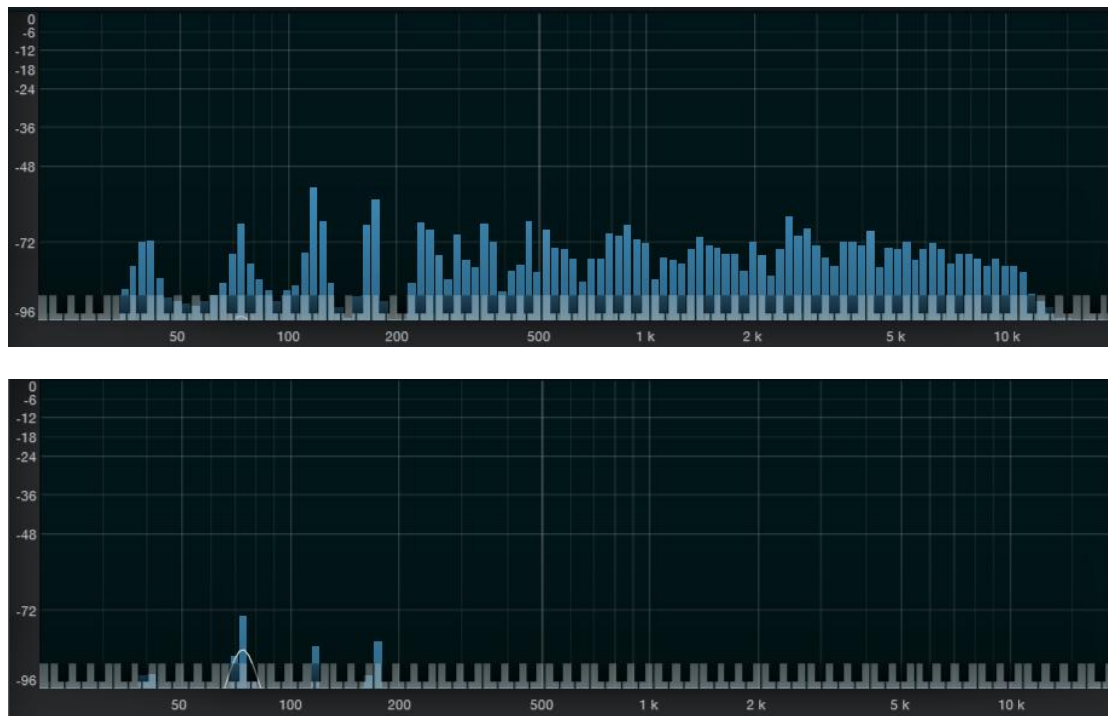
Εικόνα 9.16: Συχνότητες από το Κύμβαλο (5)



Εικόνα 9.17: Συχνότητες από το Κύμβαλο (6)



Εικόνα 9.18: Συχνότητες από το Κύμβαλο (7)



Εικόνα 9.19: Συχνότητες από το Κύμβαλο (8)

● Διάρκεια δόνησης πιατινιών

Η διάρκεια της δόνησης υπολογίζεται ως η διαφορά της χρονικής στιγμής που ασκείται η διεγείρουσα δύναμη στο κύμβαλο, έως τη χρονική στιγμή στην οποία η κυματομορφή του κυμβάλου γίνεται επίπεδη.

Οι διάρκειες των δονήσεων των πιατινιών είναι οι εξής:

- Κύμβαλο (1) :** 3.346s
- Κύμβαλο (2) :** 11.187s
- Κύμβαλο (3) :** 23.885s
- Κύμβαλο (4) :** 44.792s
- Κύμβαλο (5) :** 2.919s
- Κύμβαλο (6) :** 18.580s
- Κύμβαλο (7) :** 23.468s
- Κύμβαλο (8) :** 32.034s

9.2.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

- Σε όλα τα κύμβαλα η κυματομορφή έχει τη μορφή κύματος με απόσβεση. Οι κυματομορφές θυμίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης ημιτόνου.

- Οι συχνότητες των ακουστικών κυμάτων που παράγονται από τα πιατίνια βρίσκονται σε ένα εύρος από 21Hz έως 19331Hz. Ο λόγος που δεν προκύπτει μια, αλλά πολλές συχνότητες, είναι πως τα ακουστικά κύματα που παράγονται έχουν περίπλοκη μορφή. Έτσι, πέρα από τη φυσική συχνότητα κάθε πιατινιού, προκύπτουν και οι αρμονικές συχνότητες. Μέσω των κυματομορφών παρατηρούμε επίσης πως κατά την αποσβεσμένη δόνηση των πιατινιών, για κάθε πιατίι υπάρχουν συγκεκριμένες συχνότητες οι οποίες παραμένουν έως το τέλος της δόνησης. Τα παραπάνω παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 9.1.

Κύμβαλο	Εύρος Συχνοτήτων (Hz)	Συχνότητες που παραμένουν κατά την δόνηση (Hz)
Κύμβαλο (1)	55-19331	117 και 122
Κύμβαλο (2)	24-17222	45-50 , 75-96, 131, 185
Κύμβαλο (3)	34-12902	76-80 , 131
Κύμβαλο (4)	30-11494	67-76 , 107-120
Κύμβαλο (5)	40-19331	320-538
Κύμβαλο (6)	21-11494	53-64 , 147
Κύμβαλο (7)	27-12902	32-38 , 60-76 , 107-120
Κύμβαλο (8)	34-12902	41 , 74, 117 , 175

Πίνακας 9.1 : Πειραματικά παραγόμενες συχνότητες πιατινιών

Μέσω των μετρήσεων παρατηρούμε πως τα πιατίνια τύπου hi-hat , τα οποία αφορούν δύο κύμβαλα που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, εμφανίζουν τα μεγαλύτερα εύρη παραγόμενων συχνοτήτων. Επιπλέον, μέσω της σύγκρισης των συχνοτήτων των κυμβάλων (3) και (6), τα οποία έχουν ίση διάμετρο, συμπεραίνουμε πως το πάχος των κυμβάλων επηρεάζει τις παραγόμενες συχνότητες. Όσο μεγαλύτερο είναι το πάχος του κυμβάλου, τόσο μικρότερο είναι το εύρος των συχνοτήτων του ακουστικού κύματος. Μέσω της σύγκρισης των συχνοτήτων των κυμβάλων (6) , (7) και (8) παρατηρούμε πως όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του πιατινιού, τόσο υψηλότερες συχνότητες παράγονται.

- Συγκρίνοντας τους χρόνους απόσβεσης της δόνησης, συμπεραίνουμε πως όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος του κυμβάλου και όσο μικρότερο είναι το πάχος του, τόσο μικρότερη είναι η απόσβεση του παραγόμενου ακουστικού κύματος

9.3 Κυλινδρικά τύμπανα

9.3.1 Πειραματική διαδικασία

Κατά την πειραματική διαδικασία πραγματοποιούνται ηχογραφήσεις διάφορων κυλινδρικών τυμπάνων σε στούντιο μουσικής. Για την ηχογράφηση χρησιμοποιείται το μικρόφωνο Shure SM57 , καθώς και το λογισμικό Studio One. Για την λήψη των μετρήσεων, για κάθε τύμπανο ηχογραφήθηκε ένα μονό χτύπημα στην πάνω μεμβράνη, χρησιμοποιώντας μπαγκέτα μεγέθους 5A , με εξαίρεση την κάσα, για την

οποία ηχογραφήθηκε ένα μονό χτύπημα χρησιμοποιώντας το πετάλι κάσας. Τα τύμπανα τα οποία ηχογραφήθηκαν είναι τα εξής:

Σετ τυμπάνων:

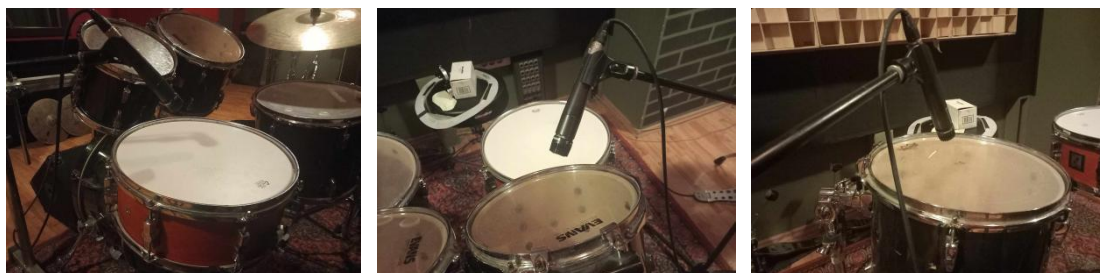
- **Τύμπανο (1):** Ταμπούρο Sonor Force 2003 1990 με διάμετρο 14" ,ύψος 8" και πάχος 6mm.
- **Τύμπανο (2):** Τομ Pearl Export ELX series με διάμετρο 10" , ύψος 8" και πάχος 7.5mm
- **Τύμπανο (3):** Τομ Pearl Export ELX series με διάμετρο 12" , ύψος 9" και πάχος 7.5mm
- **Τύμπανο (4):** Βαθύ Pearl Export ELX series με διάμετρο 14" , ύψος 11" και πάχος 7.5mm
- **Τύμπανο (5):** Κάσα Pearl Export ELX series με διάμετρο 22" , μήκος 14" και πάχος 7.5mm

Τα τύμπανα Pearl είναι κατασκευασμένα από λεύκα/ Ασιατικό μαόνι, ενώ το ταμπούρο Sonor είναι κατασκευασμένο από σφένδαμο. Το σετ των τυμπάνων που χρησιμοποιήθηκε παρουσιάζεται στην Εικόνα 9.20



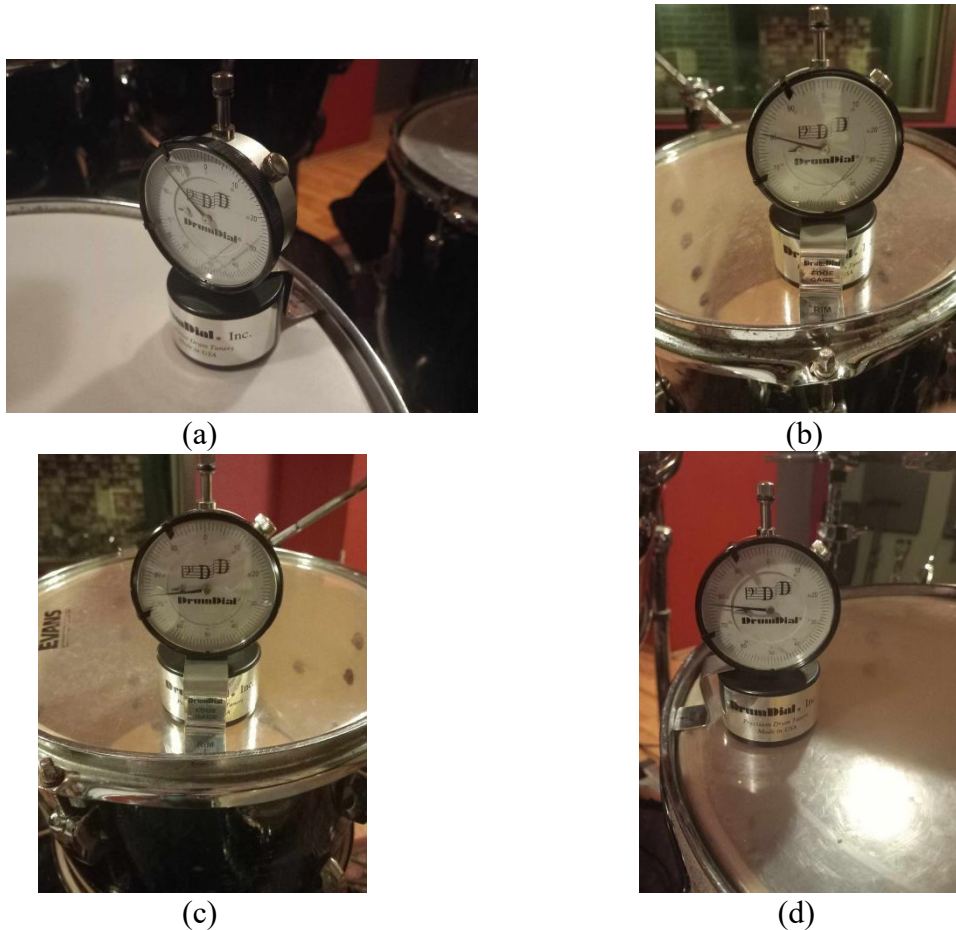
Εικόνα 9.20: Σετ τυμπάνων

Κατά την ηχογράφιση το μικρόφωνο τοποθετήθηκε κατά μέσο όρο 8cm πάνω από την πάνω μεμβράνη των τυμπάνων και η διεγείρουσα δύναμη ασκήθηκε στο κέντρο των μεμβρανών.



Εικόνα 9.21: Μικροφωνισμός τυμπάνων

Για τη σύγκριση της τάσης των μεμβρανών, χρησιμοποιείται ένα κουρδιστήρι τυμπάνων Drum Dial. Μεγαλύτερη τάση εμφανίζεται στο τύμπανο (1), μετά στο τύμπανο (2), μετά στο τύμπανο (3) , ύστερα στο τύμπανο (4) και η μικρότερη τάση εμφανίζεται στις μεμβράνες του τυμπάνου (5), όπως φαίνεται στην Εικόνα 9.22.



Εικόνα 9.22: (a) τάση τυμπάνου (1) , (b) τάση τυμπάνου (2) , (c) τάση τυμπάνου (3), (d) τάση τυμπάνου (4)

9.3.2 Μετρήσεις

● Κυματομορφές

Οι κυματομορφές που προέκυψαν κατά την ηχογράφηση των τυμπάνων παρουσιάζονται παρακάτω:

Συνολική Κυματομορφή από το Τύμπανο (1), με τις χορδές να αλληλεπιδρούν στην κάτω μεμβράνη:



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Τύμπανο (1), με τις χορδές να αλληλεπιδρούν στην κάτω μεμβράνη:



Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Τύμπανο (1), με τις χορδές να αλληλεπιδρούν στην κάτω μεμβράνη:



Εικόνα 9.23: Κυματομορφή από το Τύμπανο (1) με αλληλεπίδραση χορδών-μεμβράνης

Συνολική Κυματομορφή από το Τύμπανο (1), χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης:



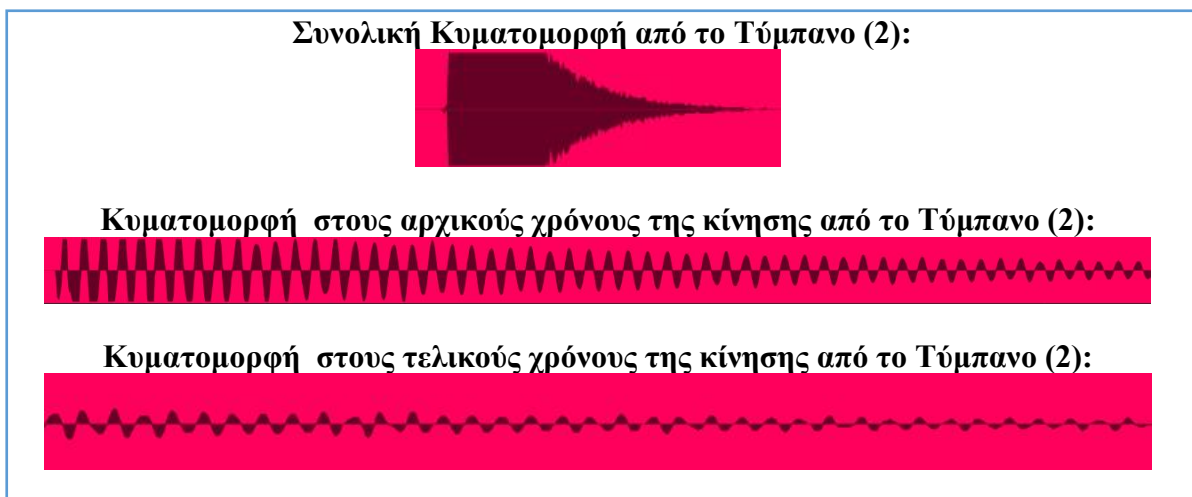
Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από το Τύμπανο (1), χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης:



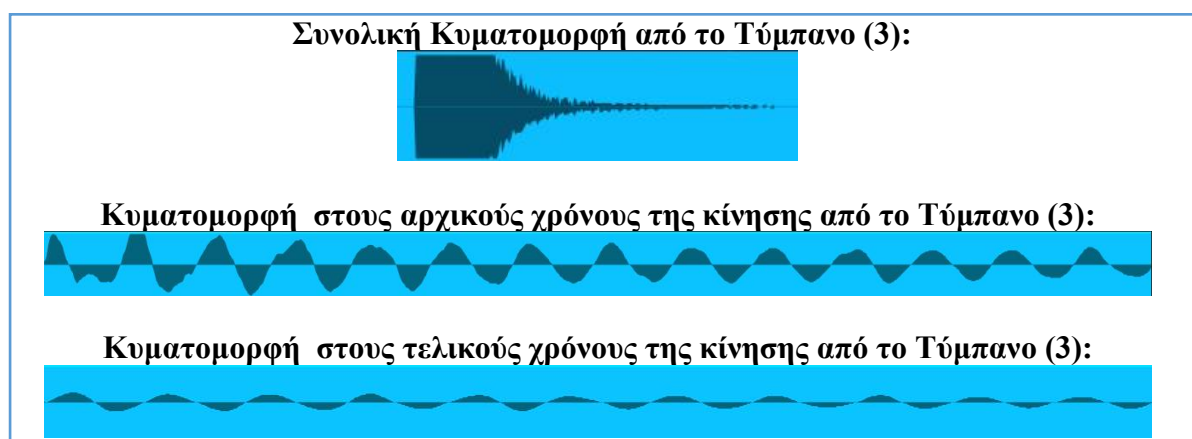
Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από το Τύμπανο (1), χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης:



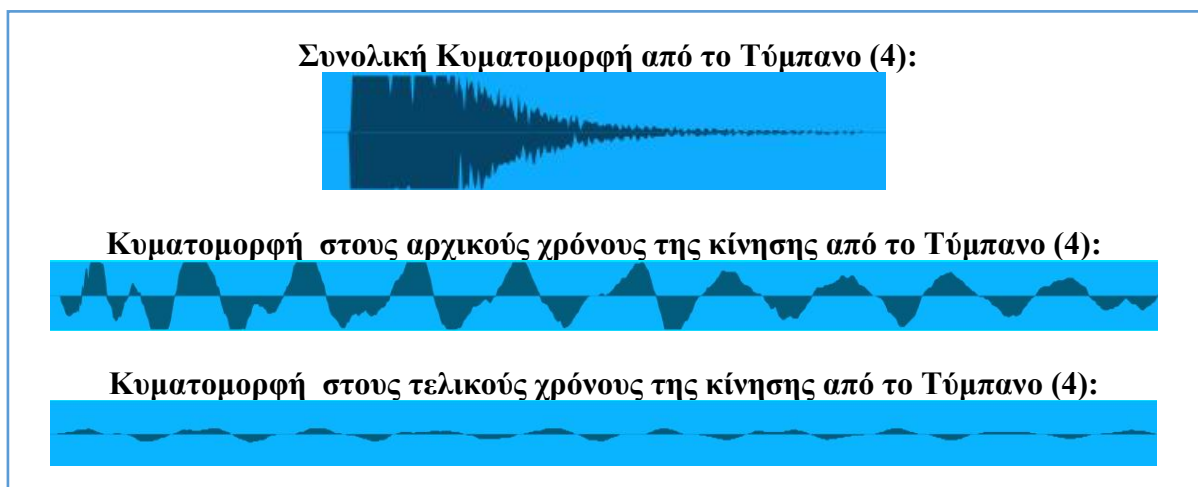
Εικόνα 9.24: Κυματομορφή από το Τύμπανο (1) χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-μεμβράνης



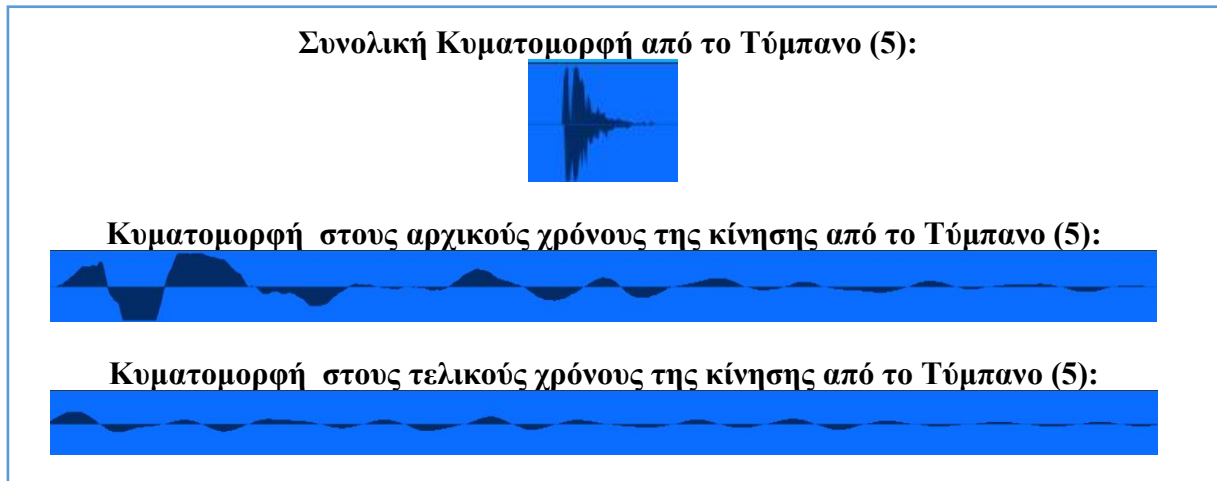
Εικόνα 9.25: Κυματομορφή από το Τύμπανο (2)



Εικόνα 9.26: Κυματομορφή από το Τύμπανο (3)



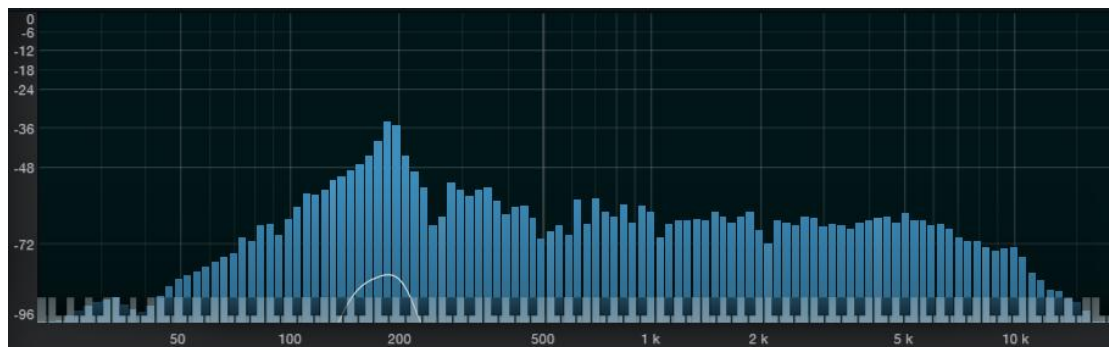
Εικόνα 9.27: Κυματομορφή από το Τύμπανο (4)



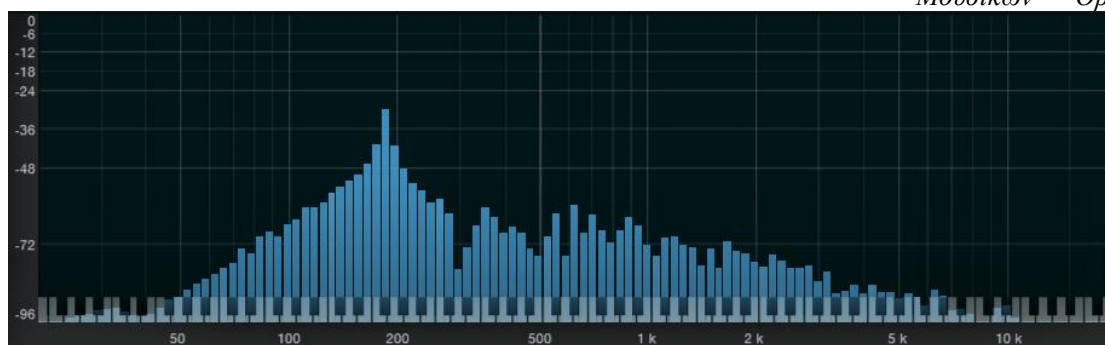
Εικόνα 9.28: Κυματομορφή από το Τύμπανο (5)

● Συχνότητες

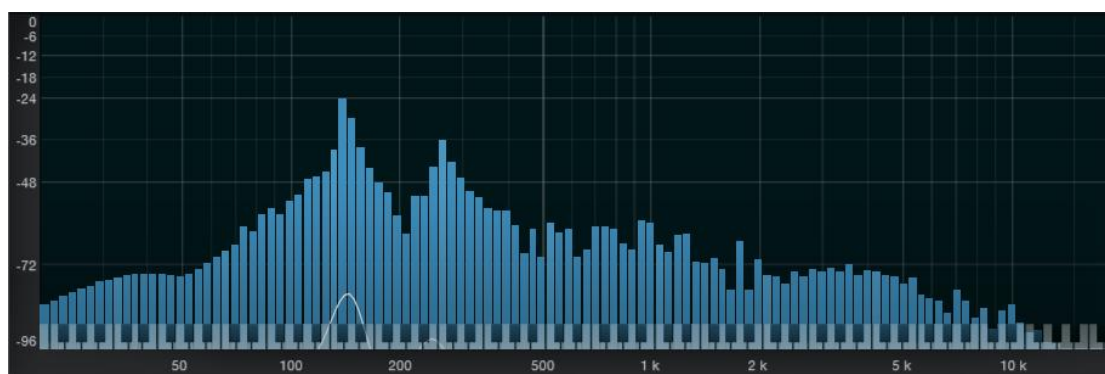
Οι συχνότητες που προκύπτουν από το κάθε τύμπανο, εμφανίζονται στις Εικόνες 9.29 έως 9.34.



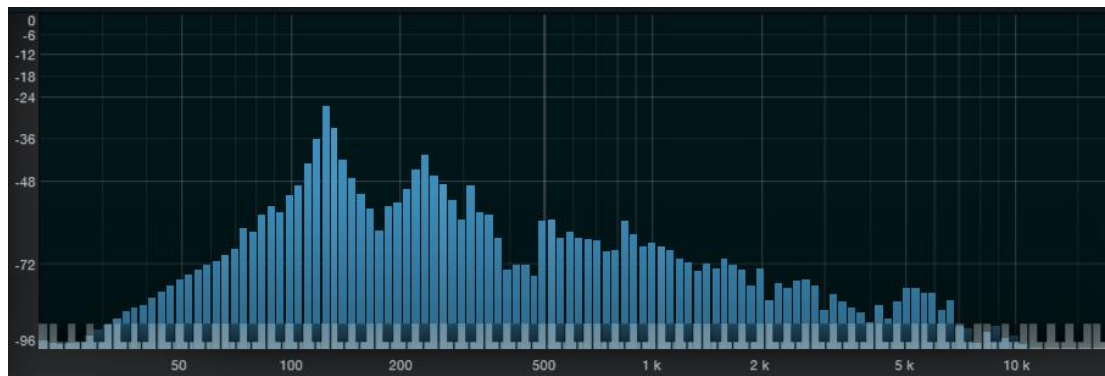
Εικόνα 9.29: Συχνότητες από το Τύμπανο (1), με αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης



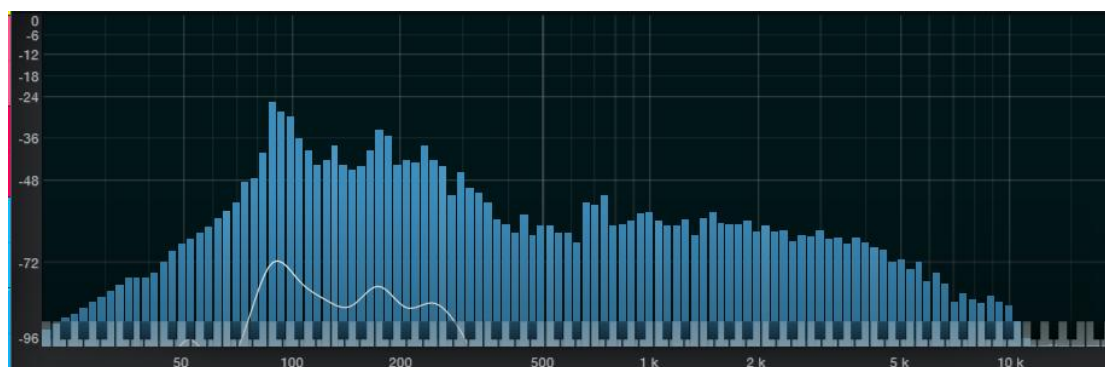
Εικόνα 9.30: Συχνότητες από το Τύμπανο (1), χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης



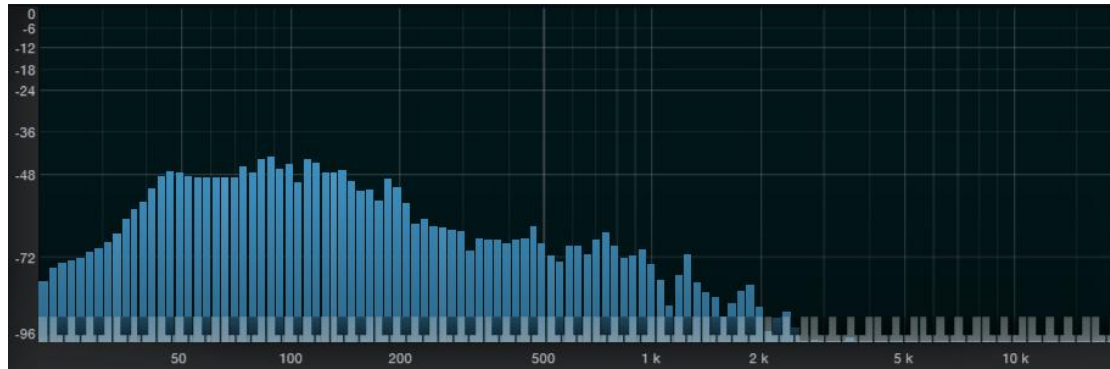
Εικόνα 9.31: Συχνότητες από το Τύμπανο (2)



Εικόνα 9.32: Συχνότητες από το Τύμπανο (3)



Εικόνα 9.33: Συχνότητες από το Τύμπανο (4)



Εικόνα 9.34: Συχνότητες από το Τύμπανο (5)

● Διάρκεια δόνησης τυμπάνων

Η διάρκεια της δόνησης υπολογίζεται ως η διαφορά της χρονικής στιγμής που ασκείται η διεγείρουσα δύναμη στην πάνω μεμβράνη του τυμπάνου, έως τη χρονική στιγμή στην οποία η κυματομορφή του τυμπάνου γίνεται επίπεδη.

Οι διάρκειες των δονήσεων των τυμπάνων είναι οι εξής:

Τύμπανο (1), με αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης : 0.348s

Τύμπανο (1), χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης : 0.810s

Τύμπανο (2) : 1.572s

Τύμπανο (3) : 1.929s

Τύμπανο (4) : 2.503s

Τύμπανο (5) : 0.386s

9.3.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

- Σε όλα τα τύμπανα η κυματομορφή έχει τη μορφή κύματος με απόσβεση. Οι κυματομορφές θυμίζουν τη μορφή της συμβολής διαφορετικών γραφικών παραστάσεων ημιτόνου.
- Παρατηρούμε πως από κάθε τύμπανο παράγονται πολλές διαφορετικές συχνότητες. Ο λόγος που δεν προκύπτει μια, αλλά πολλές συχνότητες, είναι πως τα ακουστικά κύματα που παράγονται έχουν περίπλοκη μορφή. Έτσι, πέρα από τη φυσική συχνότητα κάθε τυμπάνου, προκύπτουν και οι αρμονικές συχνότητες. Το εύρος των συχνοτήτων, όπως και η κυρίαρχη συχνότητα κάθε τυμπάνου, παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.2.

Τύμπανο	Εύρος συχνοτήτων(Hz)	Κυρίαρχη συχνότητα (Hz)
Τύμπανο (1) με αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης	24-16255	190
Τύμπανο (1) χωρίς αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης	24-10849	185
Τύμπανο (2)	10-12902	139
Τύμπανο (3)	10-10849	123.5
Τύμπανο (4)	10-12177	87.5
Τύμπανο (5)	10-3620	85

Πίνακας 9.2 : Πειραματικά παραγόμενες συχνότητες κυλινδρικών τυμπάνων

Μέσω των μετρήσεων παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η διάμετρος και το ύψος/μήκος των τυμπάνων, τόσο το εύρος συχνοτήτων μετακινείται προς χαμηλότερες συχνότητες. Επιπλέον, παρατηρούμε πως όσο μικρότερη τάση χαρακτηρίζει τις μεμβράνες των τυμπάνων, τόσο χαμηλότερες είναι οι συχνότητες που εμφανίζονται. Το μεγαλύτερο εύρος παραγόμενων συχνοτήτων εμφανίζεται στο τύμπανο (1), όταν υπάρχει αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης, ενώ το μικρότερο εύρος παραγόμενων συχνοτήτων εμφανίζεται στο τύμπανο (5).

Επιπλέον, μέσω των μετρήσεων στο τύμπανο (1) παρατηρούμε πως όταν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης, μειώνεται το εύρος των παραγόμενων συχνοτήτων του ακουστικού κύματος. Η κατώτερη συχνότητα δεν επηρεάζεται, όμως όταν δεν έχουμε αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης, δεν εμφανίζονται οι υψηλότερες συχνότητες που προκύπτουν όταν έχουμε αλληλεπίδραση χορδών-κάτω μεμβράνης.

- Όσον αφορά στους χρόνους απόσβεσης, μέσω των μετρήσεων προκύπτει ότι η απόσβεση του παραγόμενου κύματος μειώνεται όσο μεγαλώνει η διάμετρος και το ύψος/μήκος του τυμπάνου, και όσο μειώνεται η τάση των μεμβρανών.

Εξαίρεση στο παραπάνω συμπέρασμα αποτελεί η περίπτωση του τυμπάνου (5), δηλαδή της κάσας, η οποία μπορεί να αποδοθεί στους εξής λόγους:

- 1) Η κάσα στην ηχητική μεμβράνη, δηλαδή στη μεμβράνη στην οποία δεν ασκείται η διεγείρουσα δύναμη, διαθέτει μια οπή, η οποία χρησιμοποιείται για να παράγονται χαμηλότερες συχνότητες.
- 2) Μέσα στο τύμπανο της κάσας τοποθετούνται υλικά προκειμένου να υπάρχει μεγαλύτερη απόσβεση των ηχητικών κυμάτων που παράγονται.
- 3) Η διέγερση της μεμβράνης της κάσας έγινε με διαφορετικό μηχανισμό από ότι στα υπόλοιπα τύμπανα.

9.4 Χορδή Κιθάρας

9.4.1 Πειραματική διαδικασία

Κατά την πειραματική διαδικασία πραγματοποιούνται ηχογραφήσεις διάφορων χορδών ακουστικής κιθάρας. Για την ηχογράφηση χρησιμοποιείται το μικρόφωνο Shure Beta 5A, καθώς και το λογισμικό Studio One. Για την λήψη των μετρήσεων, για κάθε χορδή ηχογραφήθηκε ένα μονό τράβηγμα της χορδής, στο μισό του μήκους της. Για την ηχογράφηση χρησιμοποιήθηκε μια ακουστική κιθάρα Fender, με τις εξής χορδές:

- **Χορδή (1):** Ατσάλινη χορδή “E2”, μήκους 85cm και διαμέτρου 1.1684mm
- **Χορδή (2):** Ατσάλινη χορδή “A2”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.9144mm
- **Χορδή (3):** Ατσάλινη χορδή “D3”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.6604mm
- **Χορδή (4):** Ατσάλινη χορδή “G3”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.4318mm
- **Χορδή (5):** Ατσάλινη χορδή “B3”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.3302mm
- **Χορδή (6):** Ατσάλινη χορδή “A2”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.7620mm
- **Χορδή (7):** Ατσάλινη χορδή “D3”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.5334mm
- **Χορδή (8):** Ατσάλινη χορδή “G3”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.3810mm
- **Χορδή (9):** Ατσάλινη χορδή “B3”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.2540mm
- **Χορδή (10):** Ατσάλινη χορδή “E4”, μήκους 85cm και διαμέτρου 0.2032mm

Οι τάσεις που χαρακτηρίζουν την κάθε χορδή είναι οι εξής:

- **Χορδή (1):** 16.8 lbs
- **Χορδή (2):** 19.1 lbs
- **Χορδή (3):** 18.4 lbs
- **Χορδή (4):** 16.6 lbs
- **Χορδή (5):** 15.4 lbs
- **Χορδή (6):** 15.5 lbs
- **Χορδή (7):** 12.8 lbs
- **Χορδή (8):** 12.8 lbs
- **Χορδή (9):** 19.5 lbs
- **Χορδή (10):** 10.4 lbs

Η κιθάρα που χρησιμοποιήθηκε παρουσιάζεται στην Εικόνα 9.35.

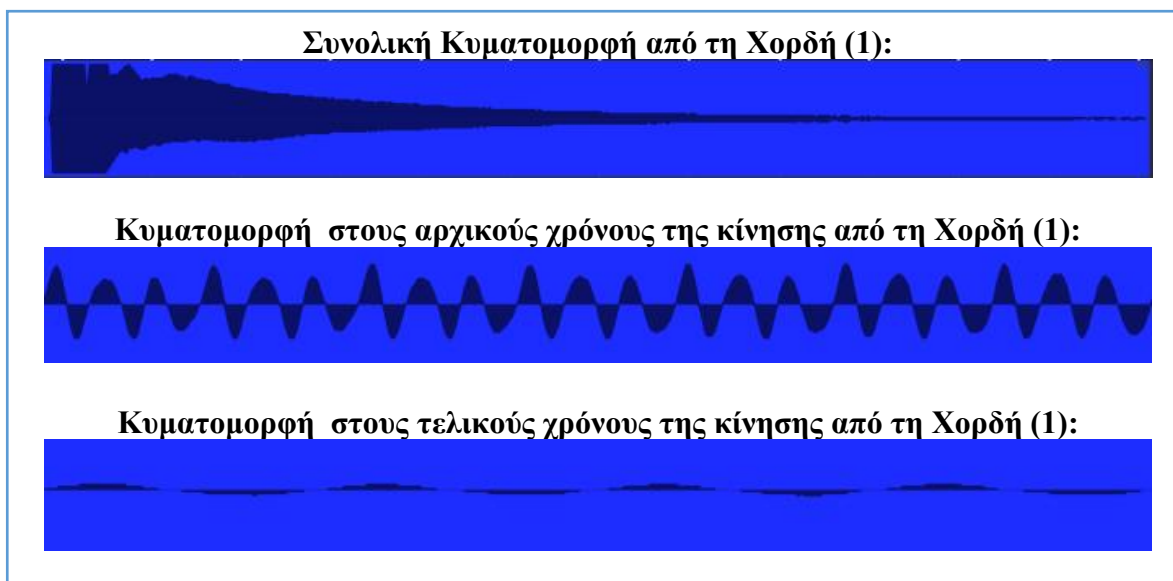


Εικόνα 9.35 : Η ακουστική κιθάρα που χρησιμοποιήθηκε κατά τις πειραματικές μετρήσεις

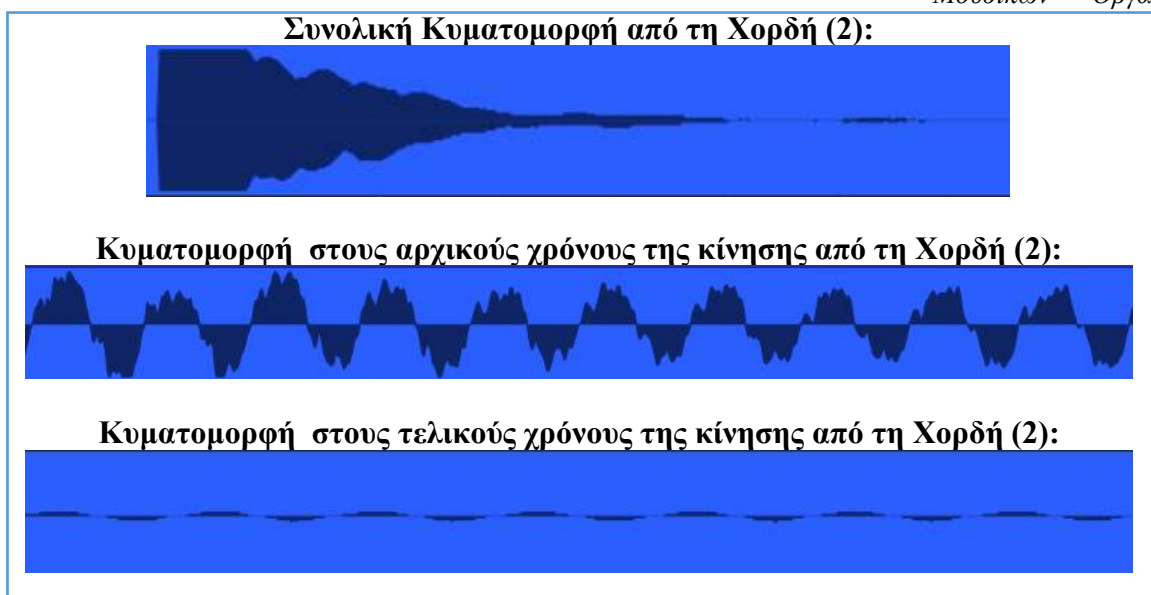
9.4.2 Μετρήσεις

- **Κυματομορφές**

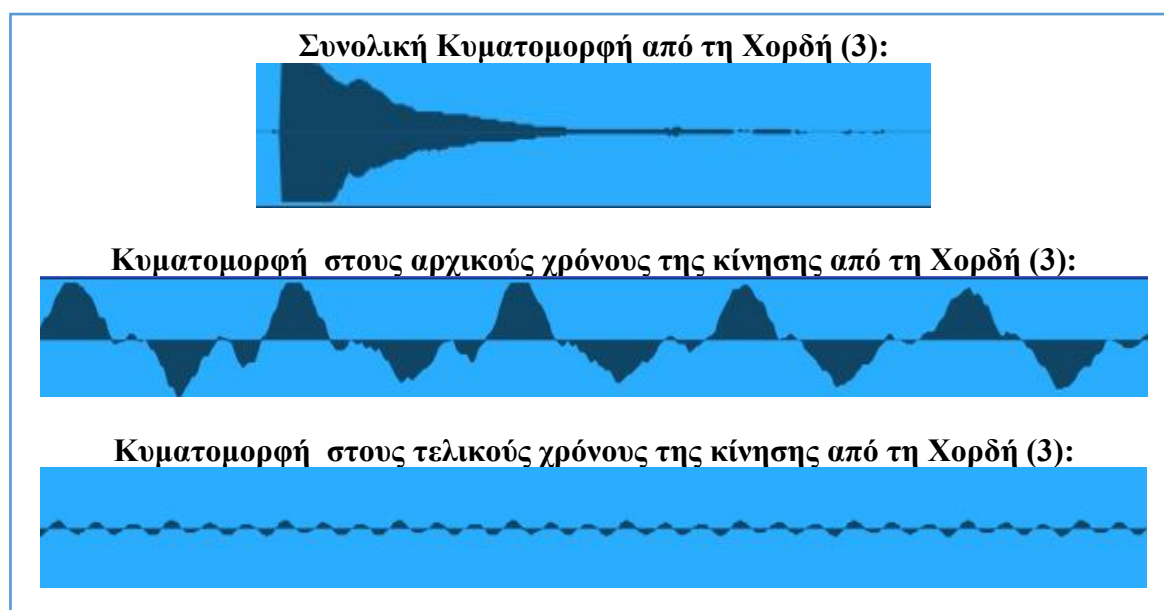
Οι κυματομορφές που προέκυψαν κατά την ηχογράφηση της ακουστικής κιθάρας παρουσιάζονται παρακάτω:



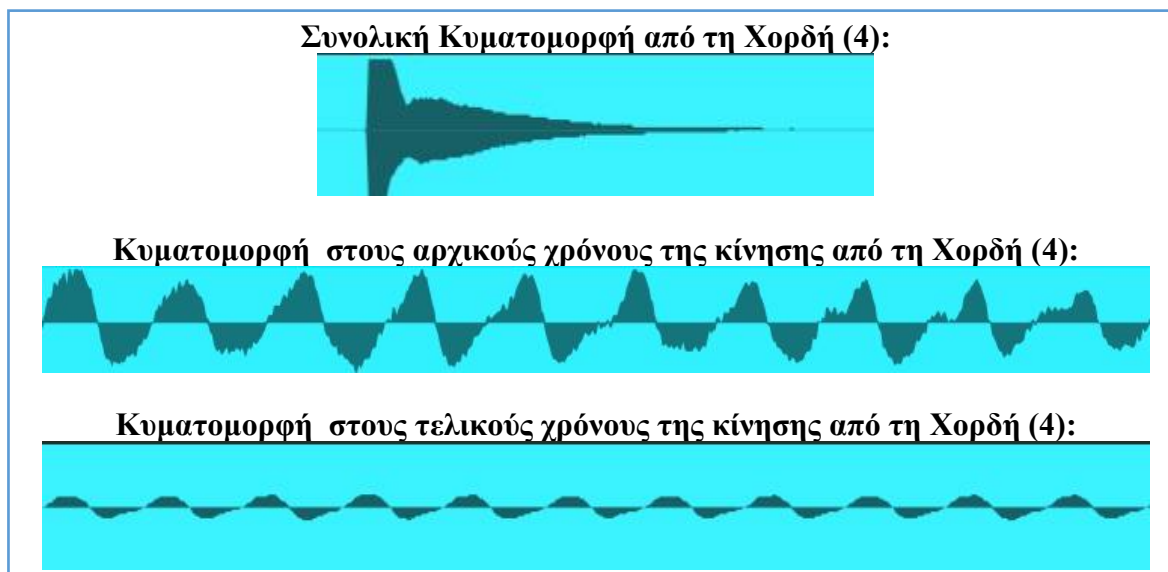
Εικόνα 9.36: Κυματομορφή από τη Χορδή (1)



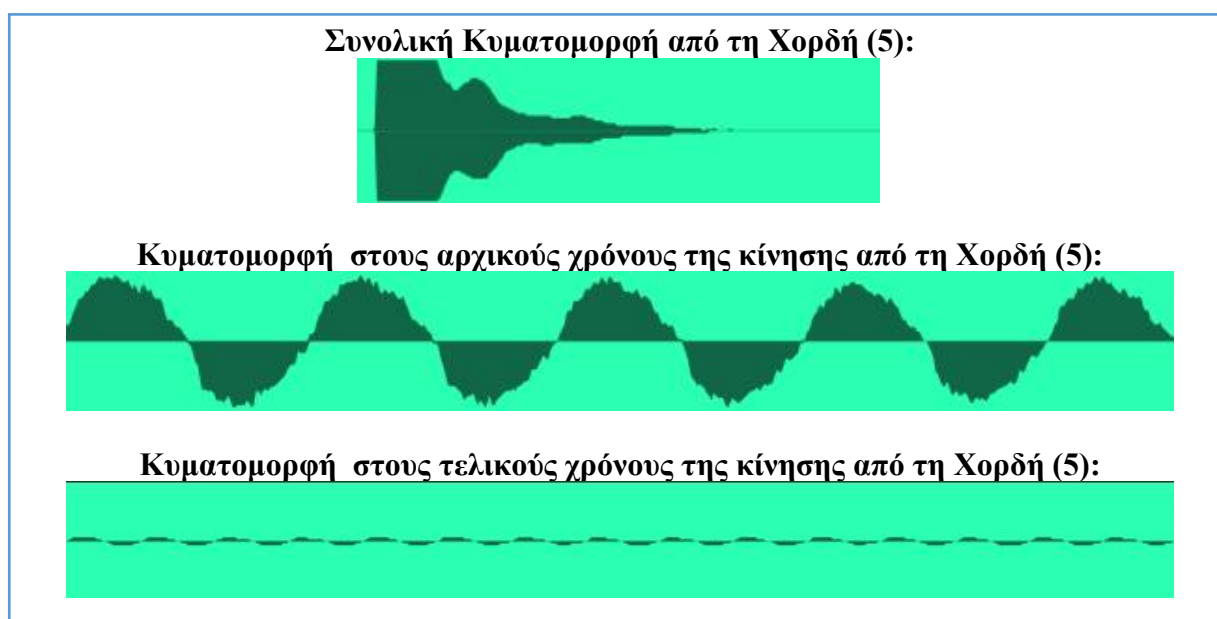
Εικόνα 9.37: Κυματομορφή από τη Χορδή (2)



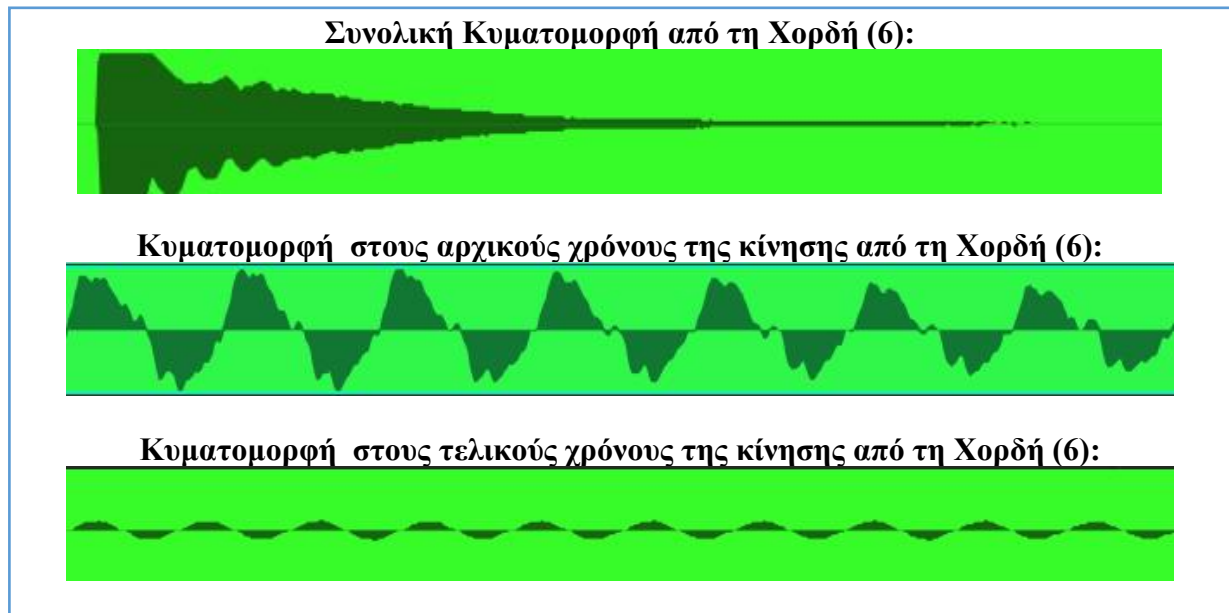
Εικόνα 9.38: Κυματομορφή από τη Χορδή (3)



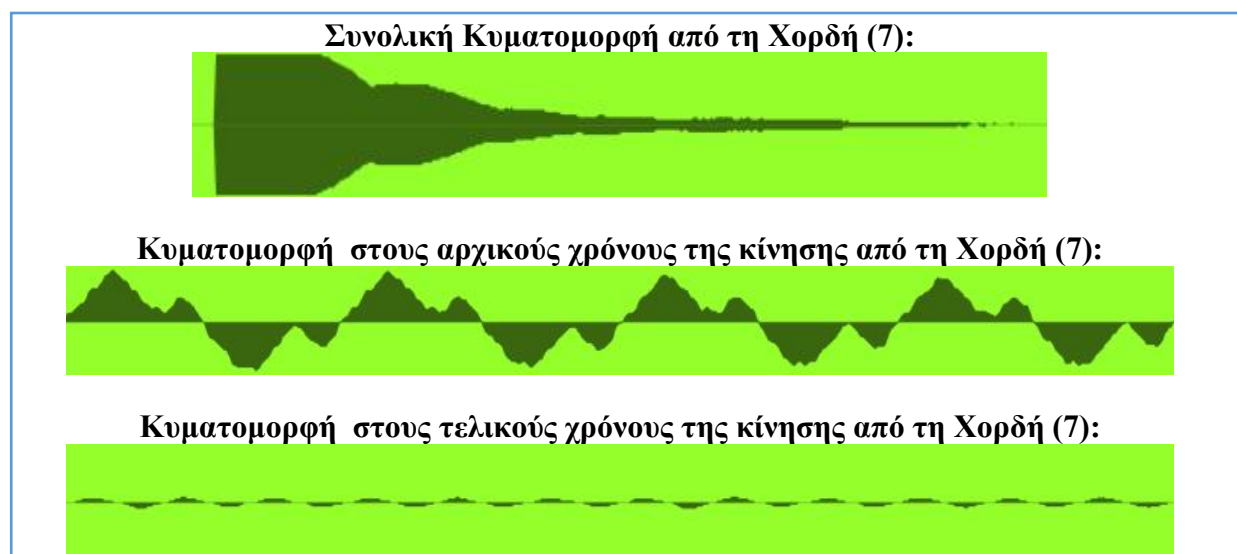
Εικόνα 9.39: Κυματομορφή από τη Χορδή (4)



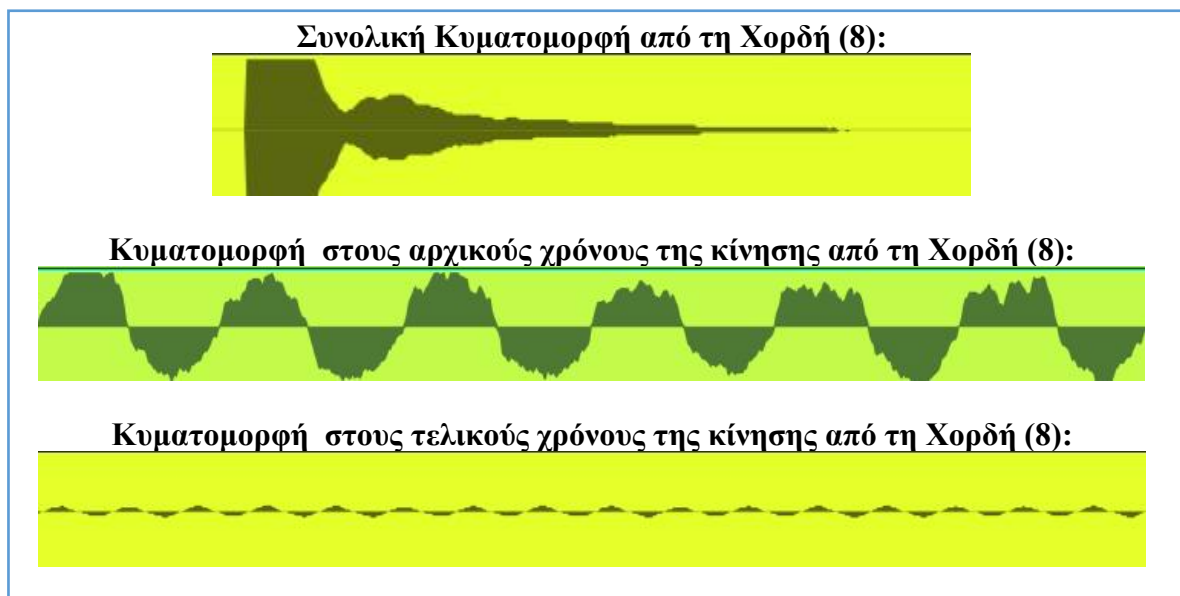
Εικόνα 9.40: Κυματομορφή από τη Χορδή (5)



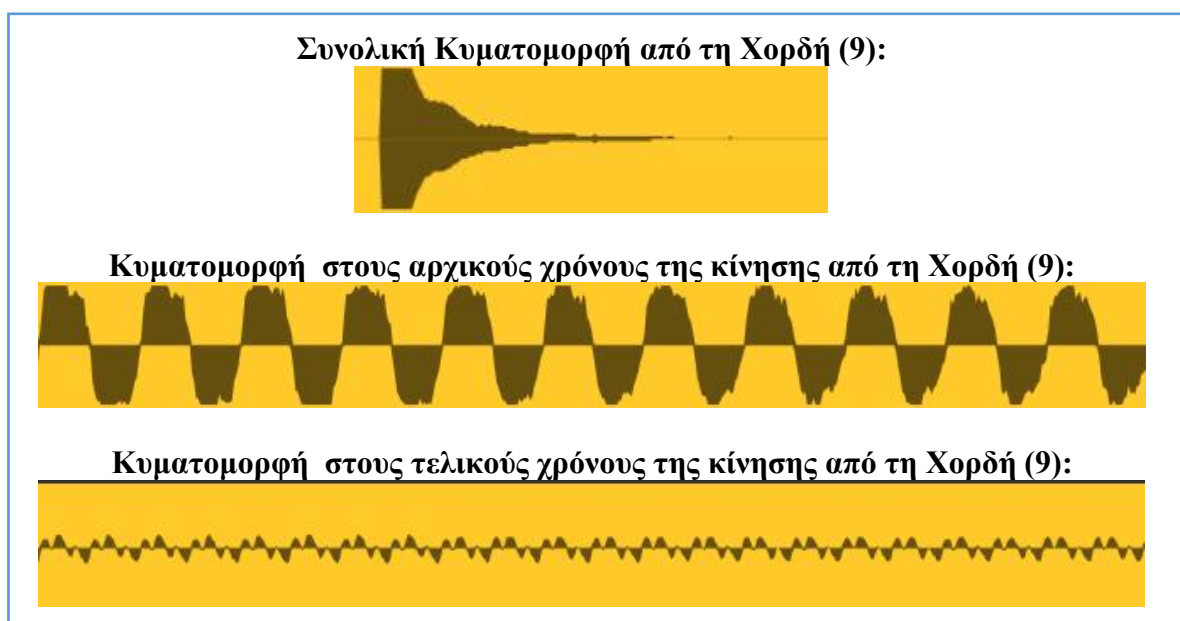
Εικόνα 9.41: Κυματομορφή από τη Χορδή (6)



Εικόνα 9.42: Κυματομορφή από τη Χορδή (7)



Εικόνα 9.43: Κυματομορφή από τη Χορδή (8)



Εικόνα 9.44: Κυματομορφή από τη Χορδή (9)

Συνολική Κυματομορφή από τη Χορδή (10):



Κυματομορφή στους αρχικούς χρόνους της κίνησης από τη Χορδή (10):



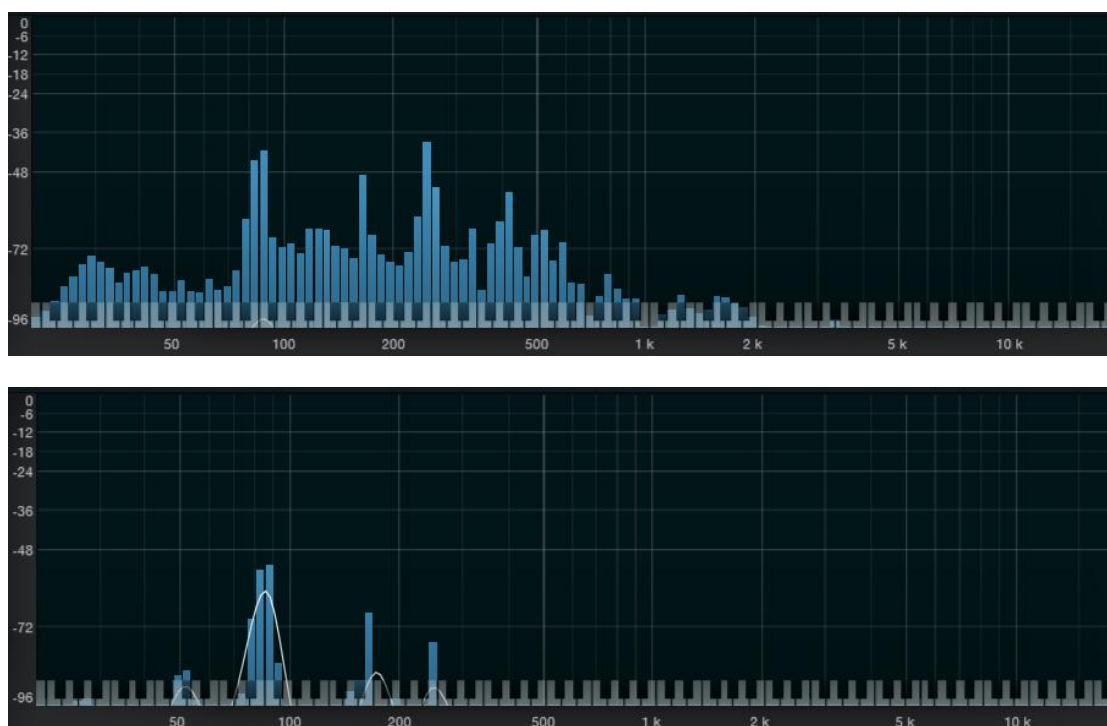
Κυματομορφή στους τελικούς χρόνους της κίνησης από τη Χορδή (10):



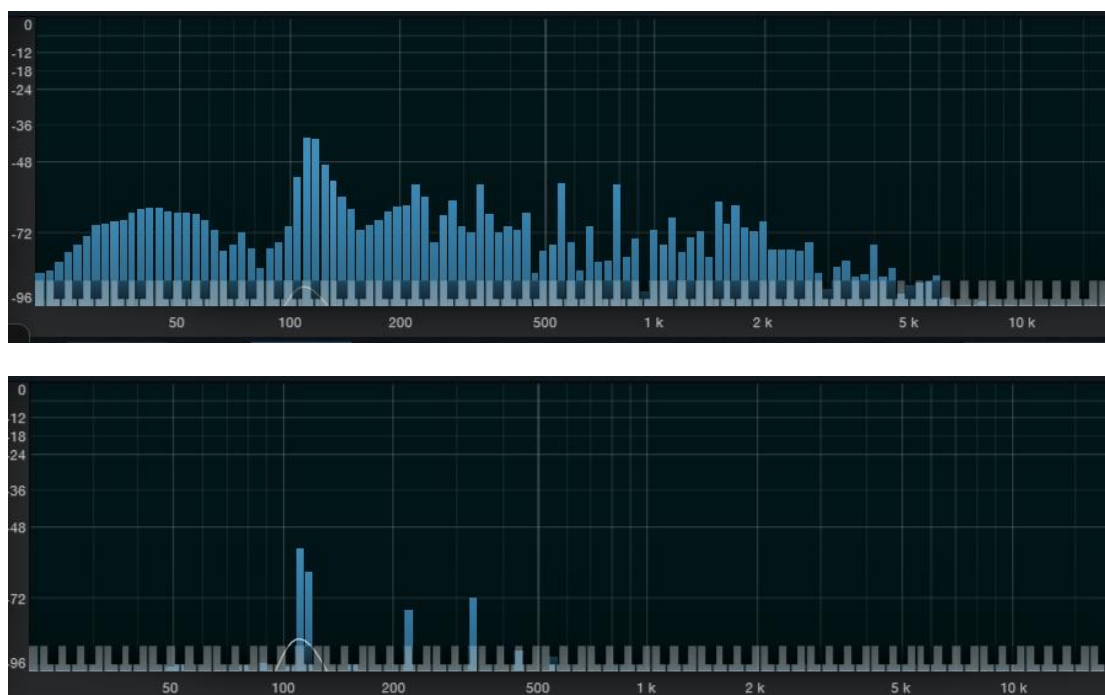
Εικόνα 9.45: Κυματομορφή από τη Χορδή (10)

● **Συχνότητες**

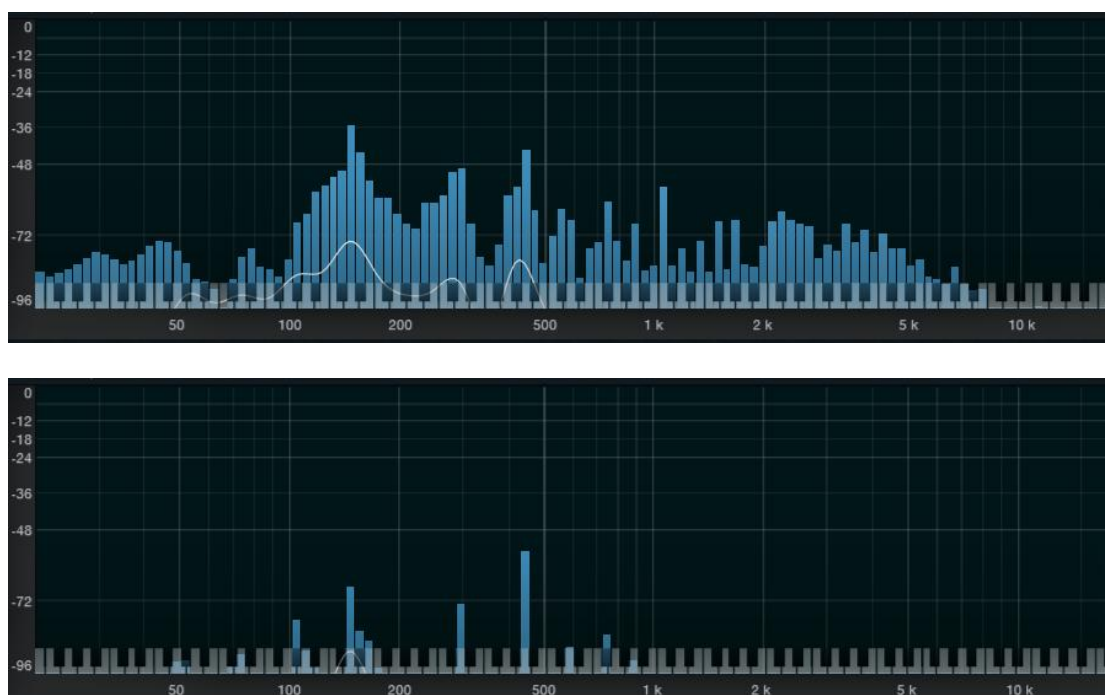
Οι συχνότητες που προκύπτουν από την κάθε χορδή, εμφανίζονται στις Εικόνες 9.46 έως 9.55. Στις εικόνες αυτές παρουσιάζονται οι συχνότητες που παράγονται κατά τη διέγερση της χορδής, καθώς και οι συχνότητες που χαρακτηρίζουν τη δόνηση της χορδής στο υπόλοιπο χρονικό διάστημα.



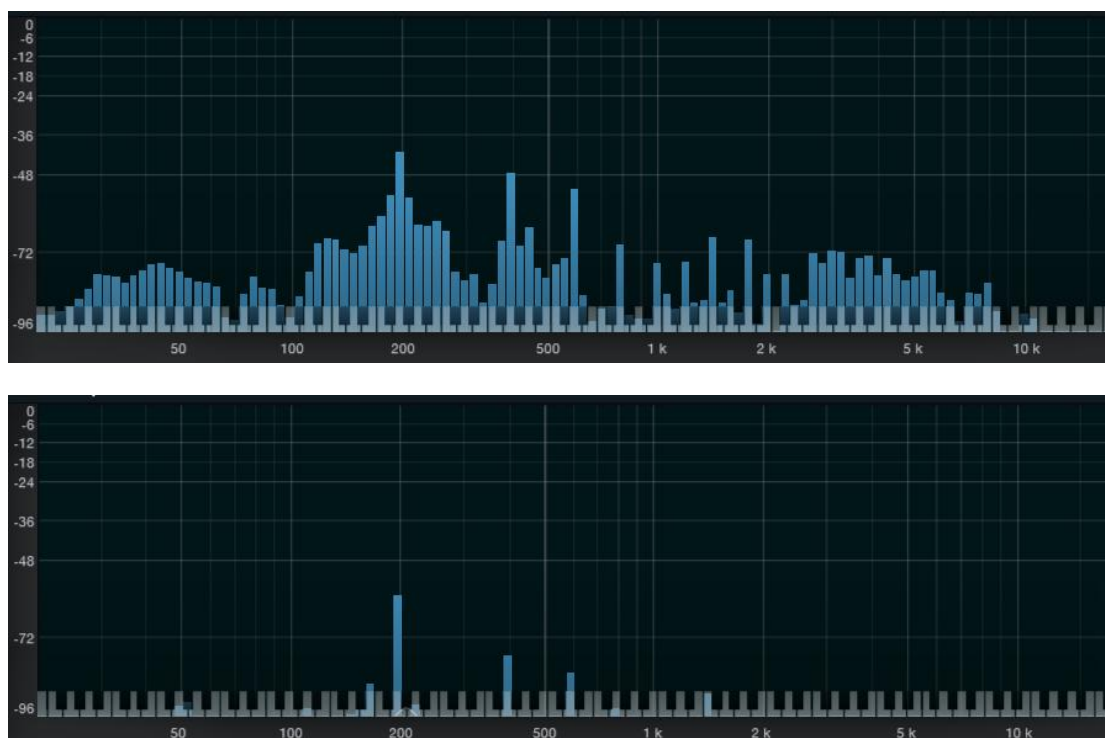
Εικόνα 9.46: Συχνότητες από τη Χορδή (1)



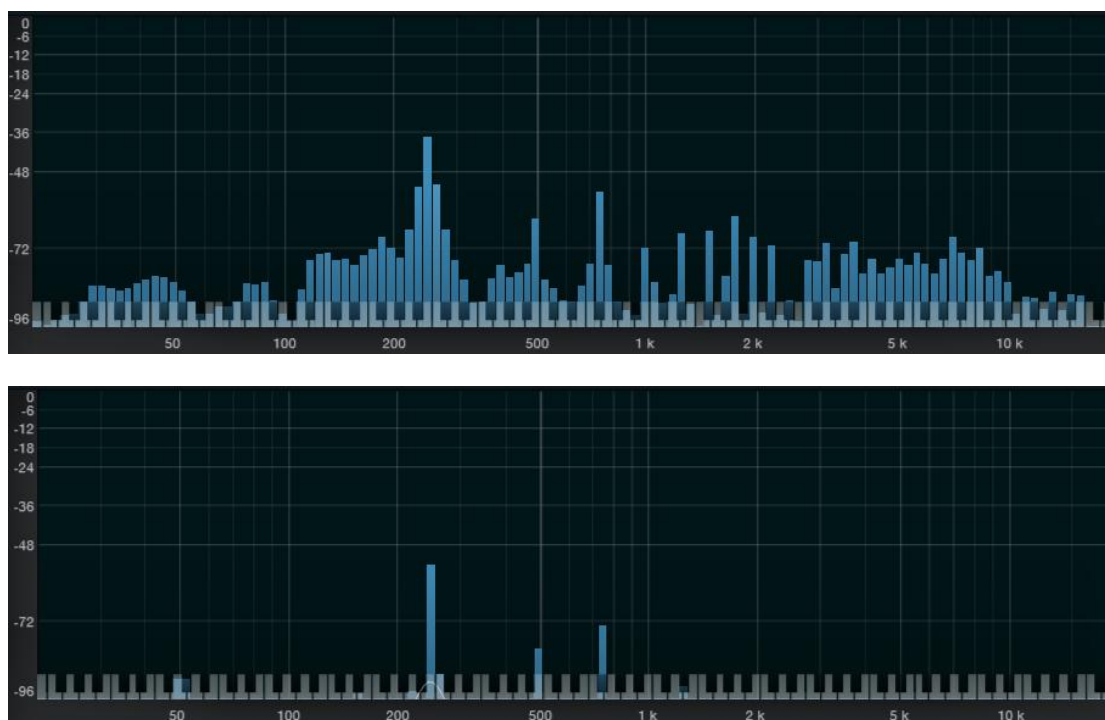
Εικόνα 9.47: Συχνότητες από τη Χορδή (2)



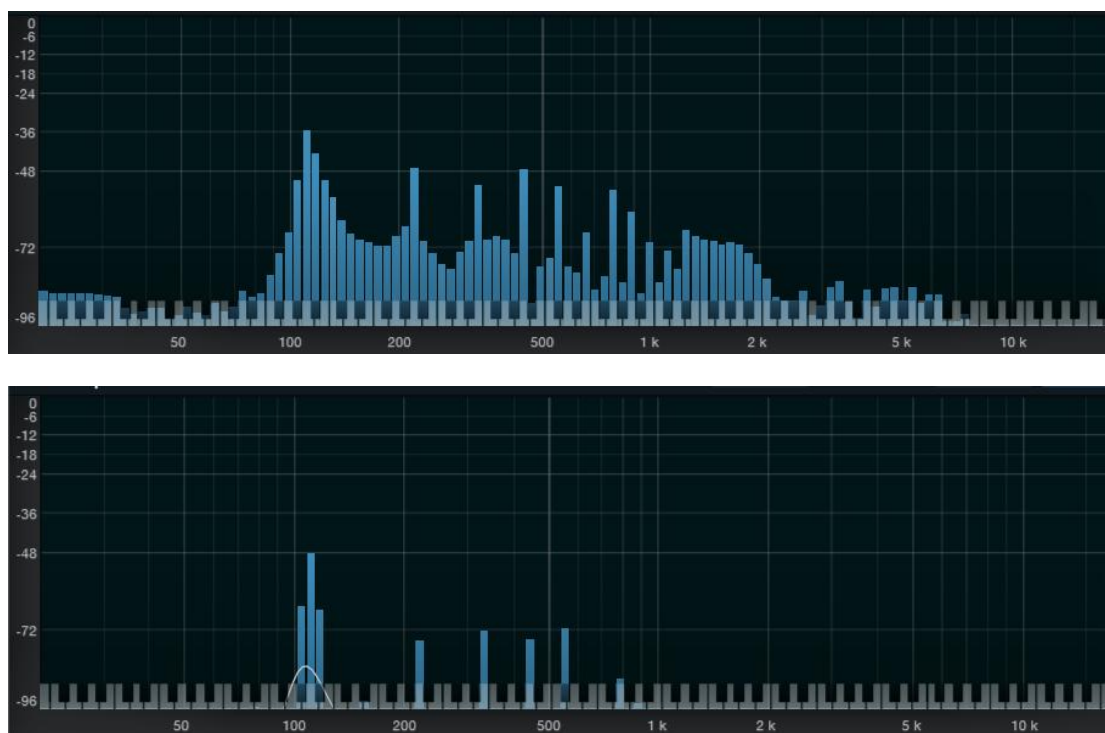
Εικόνα 9.48: Συχνότητες από τη Χορδή (3)



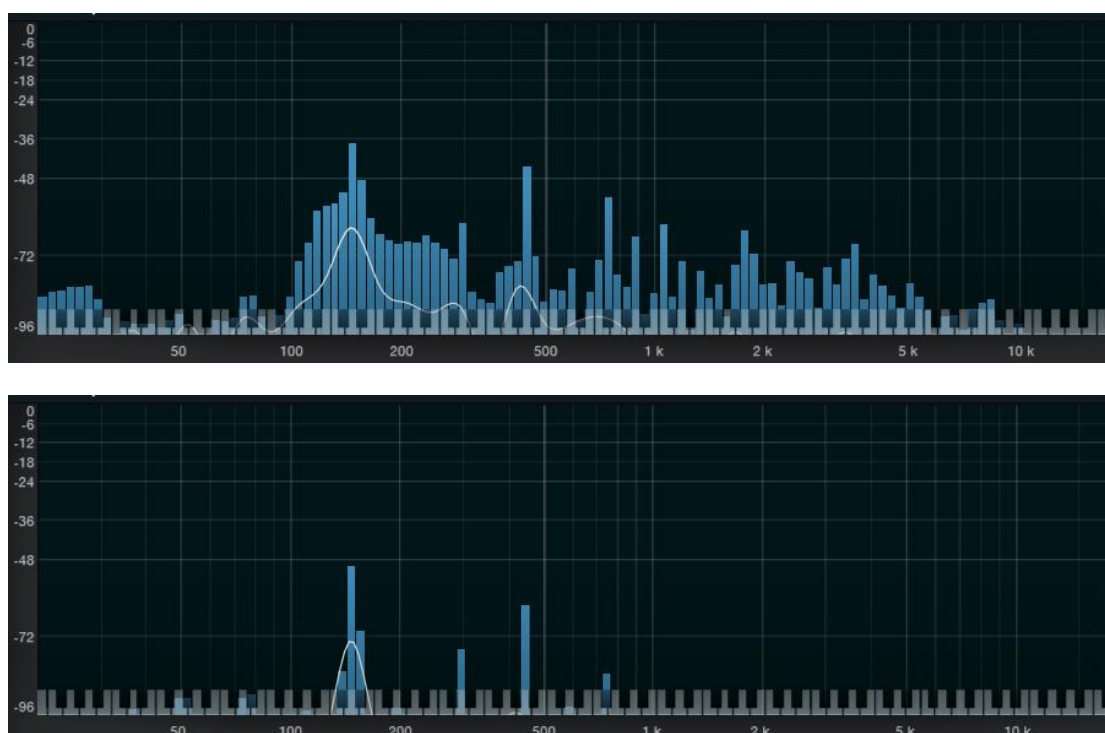
Εικόνα 9.49: Συχνότητες από τη Χορδή (4)



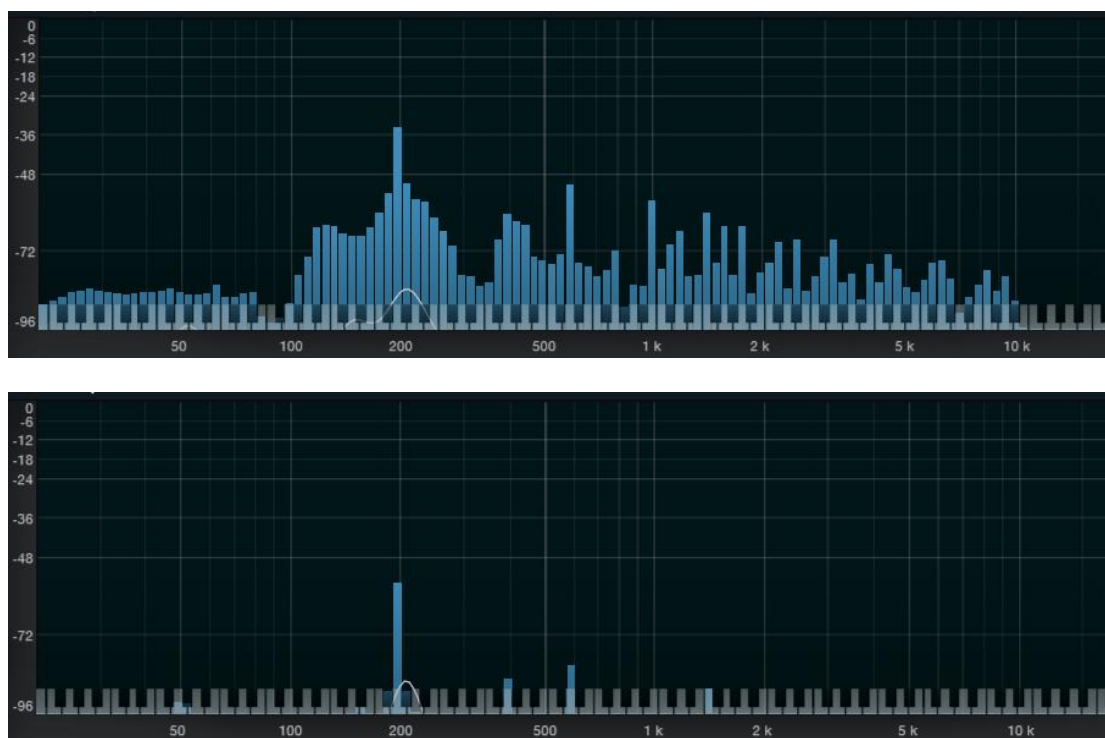
Εικόνα 9.50: Συχνότητες από τη Χορδή (5)



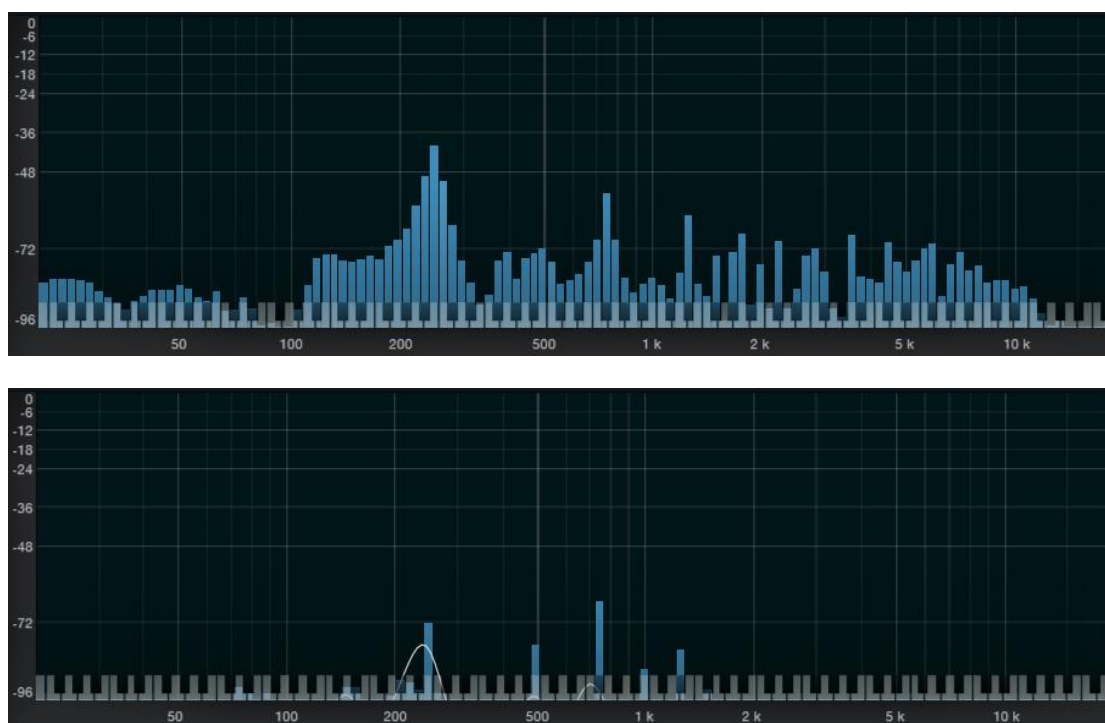
Εικόνα 9.51: Συχνότητες από τη Χορδή (6)



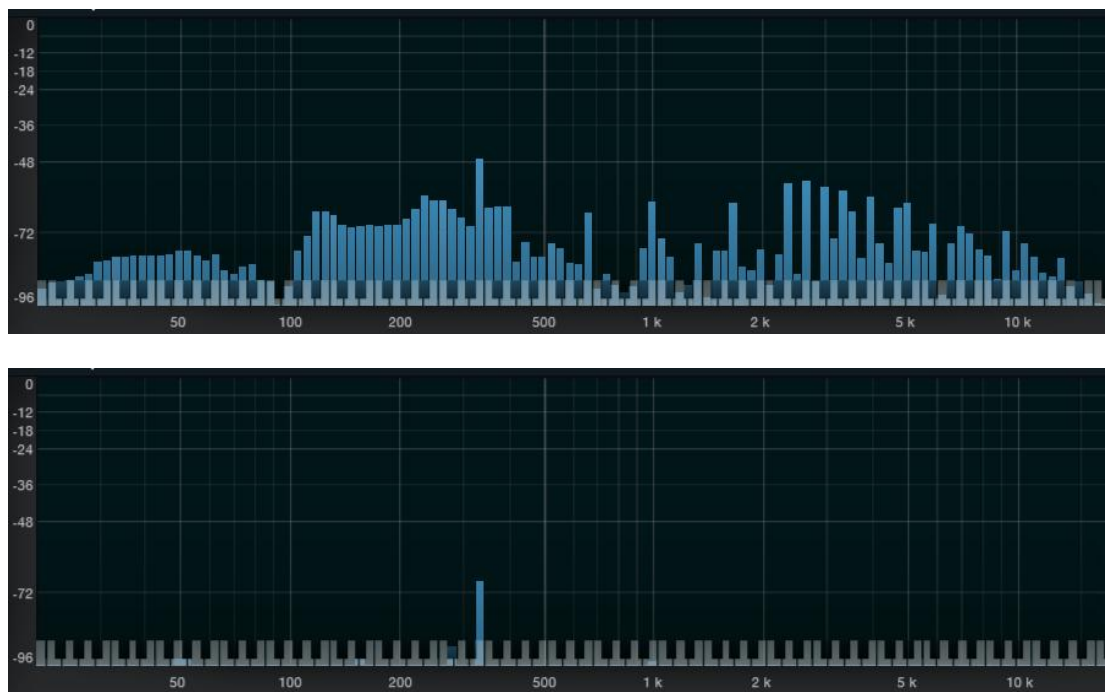
Εικόνα 9.52: Συχνότητες από τη Χορδή (7)



Εικόνα 9.53: Συχνότητες από τη Χορδή (8)



Εικόνα 9.54: Συχνότητες από τη Χορδή (9)



Εικόνα 9.55: Συχνότητες από τη Χορδή (10)

● Διάρκεια δόνησης τυμπάνων

Η διάρκεια της δόνησης υπολογίζεται ως η διαφορά της χρονικής στιγμής που ασκείται η διεγείρουσα δύναμη στη χορδή, έως τη χρονική στιγμή στην οποία η κυματομορφή γίνεται επίπεδη.

Οι διάρκειες των δονήσεων των χορδών είναι οι εξής:

Χορδή (1): 24.303s

Χορδή (2) : 16.225s

Χορδή (3): 13.345s

Χορδή (4) 10.225s

Χορδή (5) : 7.240s

Χορδή (6) : 15.929s

Χορδή (7) : 13.630s

Χορδή (8) : 10.181s

Χορδή (9) : 5.912s

Χορδή (10) : 4.926s

9.3.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

- Σε όλες τις χορδές η κυματομορφή έχει τη μορφή κύματος με απόσβεση. Η κυματομορφές θυμίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης ημιτόνου. Πιο συγκεκριμένα, οι κυματομορφές έχουν τη μορφή συμβολής διαφορετικών γραφικών παραστάσεων ημιτόνων.

- Παρατηρούμε πως από κάθε χορδή τη στιγμή της διέγερσης παράγονται πολλές διαφορετικές συχνότητες, Κατά την υπόλοιπη κίνηση των χορδών είναι παρούσες συγκεκριμένες συχνότητες. Αυτό συμβαίνει γιατί, πέρα από τη φυσική συχνότητα κάθε χορδής, παράγονται και οι αρμονικές συχνότητες.

Στον Πίνακα 9.3 παρουσιάζεται το εύρος των συχνοτήτων που χαρακτηρίζει τη στιγμή της διέγερσης κάθε χορδής, οι συχνότητες που εμφανίζονται κατά την υπόλοιπη κίνηση της χορδής, όπως και η κυρίαρχη συχνότητα της κυματομορφής.

Χορδή	Εύρος συχνοτήτων διέγερσης (Hz)	Συχνότητες κατά την κίνηση (Hz)	Κυρίαρχη συχνότητα (Hz)
Χορδή (1)	10-2153	85, 165 ,247	85
Χορδή (2)	10-6451	113, 220, 330	113
Χορδή (3)	10-8127	147, 289 , 450 , 740	147
Χορδή (4)	10-10240	196 , 387, 577	196
Χορδή (5)	10-16255	247, 494 , 740	247
Χορδή (6)	10-6451	110 , 220 , 325, 450	110
Χορδή (7)	10-8611	147, 294, 450, 740	147
Χορδή (8)	10-10240	196, 397, 587	196
Χορδή (9)	10-11494	247 , 494, 740, 1244	247
Χορδή (10)	10-16255	329	329

Πίνακας 9.3 : Πειραματικά παραγόμενες συχνότητες χορδών ακουστικής κιθάρας

Μέσω των μετρήσεων παρατηρούμε πως τη χρονική στιγμή που ασκείται η διεγείρουσα δύναμη στις χορδές, μικρότερο εύρος παραγόμενων συχνοτήτων παρουσιάζει η Χορδή (1), ενώ μεγαλύτερο εύρος παρουσιάζει η Χορδή (10).

Στις υπόλοιπες χρονικές στιγμές της κίνησης κάθε χορδής εμφανίζονται συγκεκριμένες συχνότητες, οι οποίες περιλαμβάνουν τη φυσική συχνότητα της χορδής και τις αρμονικές συχνότητες. Για κάθε χορδή η φυσική συχνότητα του ακουστικού κύματος είναι η κυρίαρχη συχνότητα που εμφανίζεται κατά τη δόνηση της χορδής. Παρατηρούμε πως οι αρμονικές συχνότητες είναι πολλαπλάσια της φυσικής συχνότητας.

Παρατηρούμε πως όσο μειώνεται το πάχος της χορδής, τόσο υψηλότερες είναι οι παραγόμενες συχνότητες του ακουστικού κύματος. Επιπλέον, συγκρίνοντας τα ζεύγη χορδών Χορδή (2)-Χορδή (6) , Χορδή (3)-Χορδή (7), Χορδή (4)-Χορδή (8), Χορδή (5)-Χορδή (9) , παρατηρούμε ότι το ακουστικό κύμα των χορδών οι οποίες είναι κουρδισμένες στην ίδια νότα, εμφανίζουν την ίδια φυσική συχνότητα.

- Όσον αφορά στους χρόνους απόσβεσης, παρατηρούμε πως όσο μειώνεται το πάχος των χορδών τόσο αυξάνεται η απόσβεση του ακουστικού κύματος.

Κεφάλαιο 10- Σύγκριση Αποτελεσμάτων και Προτάσεις για Μελλοντική Εργασία

10.1 Σύγκριση θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων

10.1.1 Πιατίνια

- Συγκρίνοντας τις συχνότητες των θεωρητικών και πειραματικών τιμών των συχνοτήτων που υπολογίστηκαν για τα πιατίνια, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικά υπολογιζόμενες τιμές συχνοτήτων εμπεριέχονται στο εύρος των πειραματικά υπολογιζόμενων συχνοτήτων.
- Ο χρόνος απόσβεσης των πιατινιών που υπολογίστηκε θεωρητικά έχει τιμή 0.009s , ενώ οι χρόνοι απόσβεσης των πιατινιών που υπολογίζονται πειραματικά είναι από 2.919s και πάνω. Η απόκλιση αυτή μπορεί να προκύπτει λόγω των παραδοχών που λήφθηκαν και λόγω των διαφορετικών φυσικών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την προσομοίωση των πιατινιών με τη χρήση του λογισμικού Mathematica. Για παράδειγμα, κατά τη θεωρητική μοντελοποίηση δεν λήφθηκε υπόψιν το ακριβές σχήμα και το πάχος ενός πιατινιού ή η ακριβής αλληλεπίδραση του πιατινιού με το μηχανισμό στήριξης, όπως επίσης και οι ακριβείς διαστάσεις ενός πιατινιού.

10.1.2 Τύμπανα

- Συγκρίνοντας τις συχνότητες των θεωρητικών και πειραματικών τιμών των συχνοτήτων που υπολογίστηκαν για τα τύμπανα, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικά υπολογιζόμενες τιμές συχνοτήτων εμπεριέχονται στο εύρος των πειραματικά υπολογιζόμενων συχνοτήτων. Για το συγκεκριμένο τύμπανο που μοντελοποιήθηκε θεωρητικά, παρατηρούμε πως οι θεωρητικά υπολογιζόμενες συχνότητες είναι πολύ κοντά με την πειραματικά υπολογιζόμενη κυρίαρχη συχνότητα των τυμπάνων (1) ,(2) και (3).
- Ο χρόνος απόσβεσης των μεμβρανών που υπολογίστηκε θεωρητικά είναι 9s , ενώ ο πειραματικά υπολογιζόμενος χρόνος απόσβεσης κυμαίνεται από 0.348s έως 2.503s. Η απόκλιση αυτή μπορεί να οφείλεται στις παραδοχές που λήφθηκαν κατά την απλοποιημένη μοντελοποίηση των μεμβρανών των τυμπάνων. Τέτοιες παραδοχές είναι για παράδειγμα η παράβλεψη της αλληλεπίδρασης των μεμβρανών με το υπόλοιπο σώμα των τυμπάνων. Επιπλέον, η απόκλιση μπορεί να οφείλεται λόγω διαφορετικών φυσικών παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την προσομοίωση των τυμπάνων με τη χρήση του λογισμικού Mathematica, όπως είναι για παράδειγμα η διαφορετική τιμή απόσβεσης σε σχέση με την πραγματική, η διαφορετική τιμή διεγείρουσας δύναμης και η παράλειψη των χαρακτηριστικών του υπόλοιπου τυμπάνου, όπως είναι το ύψος του. Ένας ακόμα

λόγος που μπορεί να προκύπτει η απόκλιση είναι ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε κατά ηχογράφηση των τυμπάνων. Πιθανότατα, με τη χρήση ενός πιο ευαίσθητου μικροφώνου, να μπορούσε να εντοπιστεί δόνηση του τυμπάνου για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

10.1.3 Χορδές κιθάρας

- Οι θεωρητικοί υπολογισμοί των συχνοτήτων των ακουστικών κυμάτων από τις χορδές κιθάρας αφορούν τη χορδή “Ρε”. Έτσι, η σύγκριση των θεωρητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων θα γίνει χρησιμοποιώντας τις πειραματικές μετρήσεις των χορδών (3) και (7). Συγκρίνοντας τις θεωρητικές και πειραματικές τιμές των συχνοτήτων που υπολογίστηκαν για τις συγκεκριμένες χορδές, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικά υπολογιζόμενες τιμές της φυσικής συχνότητας, αλλά και των αρμονικών συχνοτήτων, ταυτίζονται με τις αντίστοιχες πειραματικά υπολογιζόμενες συχνότητες.
- Ο θεωρητικά υπολογιζόμενος χρόνος απόσβεσης της χορδής “Ρε” υπολογίστηκε ίσος με 14.7s, ενώ ο πειραματικά υπολογιζόμενος χρόνος απόσβεσης ήταν ίσος με 13.345s για τη Χορδή (3) και 13.630s για τη Χορδή (7). Η απόκλιση μεταξύ των θεωρητικών και των πειραματικών χρόνων απόσβεσης είναι αμελητέα.

10.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Ακολούθως παρουσιάζονται προτάσεις μελετών που θα μπορούσαν να διεξαχθούν, με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας.

- Δημιουργία κώδικα και προσομοίωση των μουσικών οργάνων με χρήση των ακριβών εξισώσεων που χαρακτηρίζουν τη δομή και την κίνησή τους.
- Μελέτη της επίδρασης των υπόλοιπων φυσικών χαρακτηριστικών των μουσικών οργάνων στα παραγόμενα ακουστικά κύματα.
- Μαθηματική μοντελοποίηση περισσότερων μουσικών οργάνων.
- Ενεργειακή μελέτη της κίνησης των μουσικών οργάνων και των παραγόμενων ακουστικών κυμάτων.
- Μελέτη τη επίδρασης των χαρακτηριστικών του παιξίματος του παίκτη των μουσικών οργάνων στα παραγόμενα ακουστικά κύματα. Θα μπορούσε να μελετηθεί η δύναμη, η ορμή και η ενέργεια που χαρακτηρίζουν το χτύπημα, το αντικείμενο που χρησιμοποιεί ο παίκτης για να ασκήσει τη διεγείρουσα δύναμη, μέχρι και το συναίσθημα που προσπαθεί να εκφράσει κατά το παίξιμο.
- Μελέτη της επιρροής των συνθηκών του περιβάλλοντος στα ακουστικά κύματα, όπως είναι η θερμοκρασία, η πίεση, οι διαστάσεις του δωματίου στο οποίο αυτά παράγονται.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] Cadence CFD Solutions. (n.d.). *Solve Problems With No Time Step Restriction Using the Implicit Finite Difference Method*. Ανακτήθηκε 10 Ιανουαρίου, 2025, από Implicit0explicit =<https://resources.system-analysis.cadence.com/blog/msa2023-solve-problems-with-no-time-step-restriction-using-the-implicit-finite-difference-method>
- [2] *Finite Difference Formulas in 2D*. (n.d.). Ανακτήθηκε 4 Ιανουαρίου, 2025, από http://www.thevisualroom.com/finite_difference_formulas_in_2D.html
- [3] Mohamed F. El-Amin. (2023). Introduction. In Mohamed F. El-Amin (Ed.), *Numerical Modeling of Nanoparticle Transport in Porous Media* (pp. xix–lx). Elsevier.
- [4] *Finite Element Method*. (n.d.). Ανακτήθηκε 4 Ιανουαρίου, 2025, από <https://www.studysmarter.co.uk/explanations/engineering/solid-mechanics/finite-element-method/>
- [5] Βασίλειος Ν. Σαλονικιός, *Ανάπτυξη Υπολογιστικών Τεχνικών με τη Χρήση Διατητώσεων Μεικτών Πεπερασμένων Στοιχείων στο Σύστημα των Εξισώσεων του Maxwell για Προβλήματα Ηλεκτρομαγνητικής Διάδοσης*, (ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2024)
- [6] Liang, Y., Wang, C., & Sun, P. (2023). *An Interface-Fitted Fictitious Domain Finite Element Method for the Simulation of Neutrally Buoyant Particles in Plane Shear Flow*. *Fluids*, 8(8), 229. <https://doi.org/10.3390/fluids8080229>
- [7] *Fictitious domain method*. (n.d.). Ανακτήθηκε 5 Ιανουαρίου, 2025, από https://en.wikipedia.org/wiki/Fictitious_domain_method
- [8] David A. Ham, & Colin J. Cotter. (2014). *Finite element spaces: local to global*. Imperial College London. https://finite-element.github.io/L2_fespaces.html
- [9] *Simplicial Lagrange Finite Elements*. (n.d.). Ανακτήθηκε 4 Ιανουαρίου, 2025, από https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4220/2018h/ch4.pdf
- [10] Kang, S., Suh, Y.K. (2008). *Spectral Methods*. In: Li, D. (eds) *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-48998-8_1442
- [11] Sigal Gottlieb and David Gottlieb (2009) *Spectral methods*. *Scholarpedia*, 4(9):7504., revision #91796

- [12] Eric Gourgoulhon. (2002). *Introduction to spectral methods*. In 4th EU Network Meeting, Palma de Mallorca. Laboratoire de l'Univers et de ses Théories (LUTH) CNRS / Observatoire de Paris Meudon, France.
- [13] Thomas, O., Touzé, C., & Chaigne, A. (2005). *Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: Modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance*. International Journal of Solids and Structures, 42(11–12), 3339–3373. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.10.028>
- [14] Chaigne, A., Touzé, C., & Thomas, O. (2005). *Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals*. In *Acoustical Science and Technology* (Vol. 26, Issue 5, pp. 403–409). <https://doi.org/10.1250/ast.26.403>
- [15] Samejima, T. (2021). *Nonlinear physical modeling sound synthesis of cymbals involving dynamics of washers and sticks/mallets*. *Acoustical Science and Technology*, 42(6), 314–325. <https://doi.org/10.1250/ast.42.314>
- [16] Παπαϊωάννου Γεώργιος, “ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΚΕΛΥΦΩΤΩΝ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΔΙΑΠΡΟΗΣ ILYUSHIN”, (ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2009)
- [17] Bilbao, S. (2010). *Percussion synthesis based on models of nonlinear shell vibration*. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 18(4), 872–880. <https://doi.org/10.1109/TASL.2009.2029710>
- [18] Ducceschi, M., Touzé, C., & Bilbao, S. (2013). *SOUND SYNTHESIS OF GONGS OBTAINED FROM NONLINEAR THIN PLATES VIBRATIONS: COMPARISON BETWEEN A MODAL APPROACH AND A FINITE DIFFERENCE SCHEME*. SMAC Stockholm Music Acoustics Conference 2013, SOUND SYNTHESIS OF GONGS OBTAINED FROM NONLINEAR THIN PLATES VIBRATIONS: COMPARISON BETWEEN A MODAL APPROACH AND A FINITE DIFFERENCE SCHEME. <https://ensta-paris.hal.science/hal-01138174v1>
- [19] Bilbao, S. D. . (2009). *Numerical sound synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. John Wiley & Sons.
- [20] Augustus, J., & Joel Augustus Laird, B. (2001). *Title: The physical modelling of drums using digital waveguides THE PHYSICAL MODELLING OF DRUMS USING DIGITAL WAVEGUIDES*. <http://research-information.bristol.ac.uk>
- [21] Sakai, S., & Samejima, T. (2023). *Vibro-acoustic analysis of cellos using the finite and boundary element methods and its application to studies on the effects of endpin properties*. *Acoustical Science and Technology*, 44(3), 259–268. <https://doi.org/10.1250/ast.44.259>

- [22] Bilbao, S. (2012). *Time domain simulation and sound synthesis for the snare drum. The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1), 914–925. <https://doi.org/10.1121/1.3651240>
- [23] Torin, A., & Bilbao, S. (n.d.). *Numerical Experiments with Non-linear Double Membrane Drums*.
- [24] Torin, A. & Newton, ; A, & Newton, M. (2014). *Nonlinear Effects in Drum Membranes*. <http://www.ness-music.eu/publications>
- [25] Derveaux, G., Chaigne, A., Joly, P., & Bécache, E. (2003). *Time-domain simulation of a guitar: Model and method. The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(6), 3368–3383. <https://doi.org/10.1121/1.1629302>
- [26] Bécache, E., Chaigne, A., Derveaux, G., & Joly, P. (2005). *Numerical simulation of a guitar. Computers & Structures*, 83(3), 107–126. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.04.018>
- [27] Child, J., & Lillie, B. (2023). *Modeling a Cymbal as an Annular Plate. In JAEM (Vol. 10)*. <https://www.soundpure.com/a/expert-advice/drums/cymbal>
- [28] Anđelić, N., Braut, S., & Pavlović, A. (2018). *Variation of natural frequencies by circular saw blade rotation. Tehnicki Vjesnik*, 25(1), 10–17. <https://doi.org/10.17559/TV-20160210110559>
- [29] Hon Kin. (1998, June). *Sound Simulation of a Drumhead. The Hong Kong University of Science & Technology Department of Mathematics Scientific Computation Projects*. <https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/drum/>
- [30] Dennis W. Brewer. (n.d.). *Vibrating Circular Membrane*. Ανακτήθηκε 19 Φεβρουαρίου, 2025, από <https://demonstrations.wolfram.com/VibratingCircularMembrane/>
- [31] Daniel. S. Stutts. (2000). *Modal Analysis of a Tight String*. In Presented to ME211. University of Missouri-Rolla.
- [32] Dan - Fret Success.com. (2018, October 20). *How do Guitar Strings Produce Their Sound?* <https://medium.com/@fretsuccess/how-do-guitar-strings-produce-their-sound-471cf870ebe>
- [33] Josh Comeau. (n.d.). *Let's Learn About Waveforms*. The Pudding. Ανακτήθηκε 26 Φεβρουαρίου, 2025, από <https://pudding.cool/2018/02/waveforms/>
- [34] Kyle Forinash and Wolfgang Christian. (n.d.). *Speed of a Wave. LibreTexts Physics*. Ανακτήθηκε 27 Φεβρουαρίου, 2025, από [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Waves_and_Acoustics/Waves%3A_An_Interactive_Tutorial_\(Forinash_and_Christian\)/1%3A_Basic_Properties/1.2%3A_Speed_of_a_Wave](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Waves_and_Acoustics/Waves%3A_An_Interactive_Tutorial_(Forinash_and_Christian)/1%3A_Basic_Properties/1.2%3A_Speed_of_a_Wave)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Κώδικας Mathematica

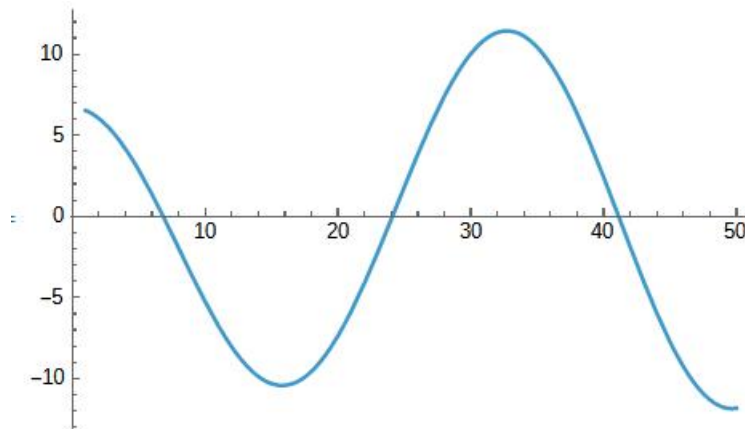
1)Κώδικας Mathematica για την προσομοίωση των πιατινιών

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
w=1;γ=1;r1=0.0127;r2=0.2;H1=2;S0=0.5;t0=0;r0=0.13;θ0=0;
```

Για $n=0$, $m=1$ και $m=2$

```
Plot[BesselJ[0,λ*r1]*(λ*BesselY[0+1,λ*r2]+(H1+0/r2)*BesselY[0,λ*r2])-  
BesselY[0,λ*r1]*(-λ*BesselJ[0+1,λ*r2]+(H1-  
0/r2)*BesselJ[0,λ*r2]),{λ,1,50}]
```

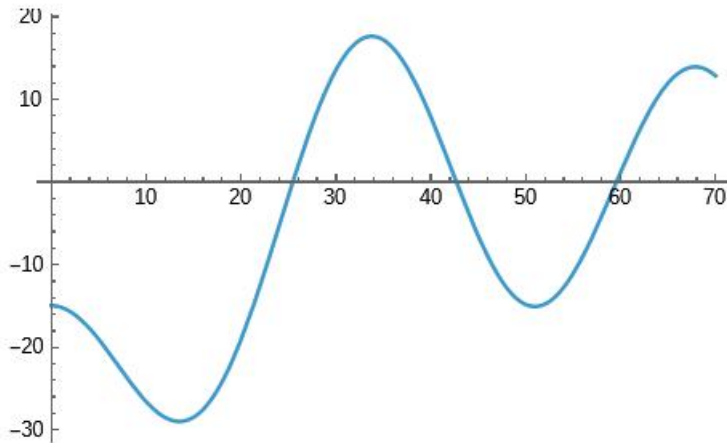


```
FindRoot[BesselJ[0,λ*r1]*(λ*BesselY[0+1,λ*r2]+(H1+0/r2)*BesselY[0,λ*r  
2))-BesselY[0,λ*r1]*(-λ*BesselJ[0+1,λ*r2]+(H1-  
0/r2)*BesselJ[0,λ*r2])==0,{λ,9}]  
{λ->6.84276}
```

```
FindRoot[BesselJ[0,λ*r1]*(-  
λ*BesselY[0+1,λ*r2]+(H1+0/r2)*BesselY[0,λ*r2])-BesselY[0,λ*r1]*(-  
λ*BesselJ[0+1,λ*r2]+(H1-0/r2)*BesselJ[0,λ*r2])==0,{λ,30}]  
{λ->24.1071}
```

Για $n=1$, $m=1$ και $m=2$

```
Plot[BesselJ[1,λ*r1]*(-  
λ*BesselY[1+1,λ*r2]+(H1+1/r2)*BesselY[1,λ*r2])-BesselY[1,λ*r1]*(-  
λ*BesselJ[1+1,λ*r2]+(H1-1/r2)*BesselJ[1,λ*r2]),{λ,0,70}]
```

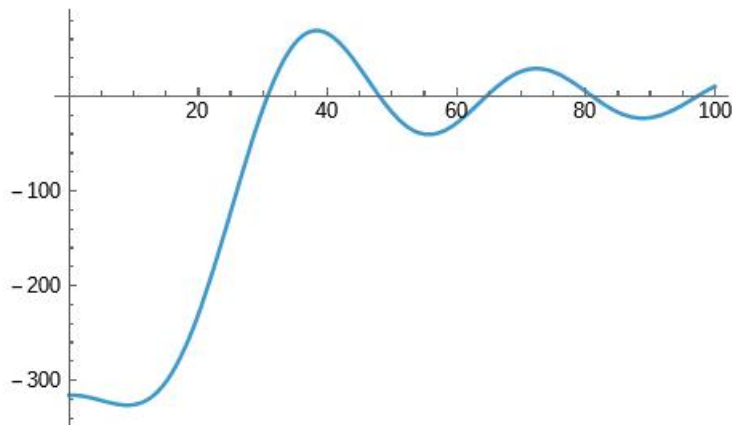



```
FindRoot[BesselJ[1, λ*r1]*(-
λ*BesselY[1+1, λ*r2]+(H1+1/r2)*BesselY[1, λ*r2])-BesselY[1, λ*r1]*(-
λ*BesselJ[1+1, λ*r2]+(H1-1/r2)*BesselJ[1, λ*r2])==0, {λ, 30}]
{λ->25.4616}
```

```
FindRoot[BesselJ[1, λ*r1]*(-
λ*BesselY[1+1, λ*r2]+(H1+1/r2)*BesselY[1, λ*r2])-BesselY[1, λ*r1]*(-
λ*BesselJ[1+1, λ*r2]+(H1-1/r2)*BesselJ[1, λ*r2])==0, {λ, 40}]
{λ->42.6915}
```

Για $n=2$, $m=1$ και $m=2$

```
Plot[BesselJ[2, λ*r1]*(-
λ*BesselY[2+1, λ*r2]+(H1+2/r2)*BesselY[2, λ*r2])-BesselY[2, λ*r1]*(-
λ*BesselJ[2+1, λ*r2]+(H1-2/r2)*BesselJ[2, λ*r2]), {λ, 0, 100}]
```

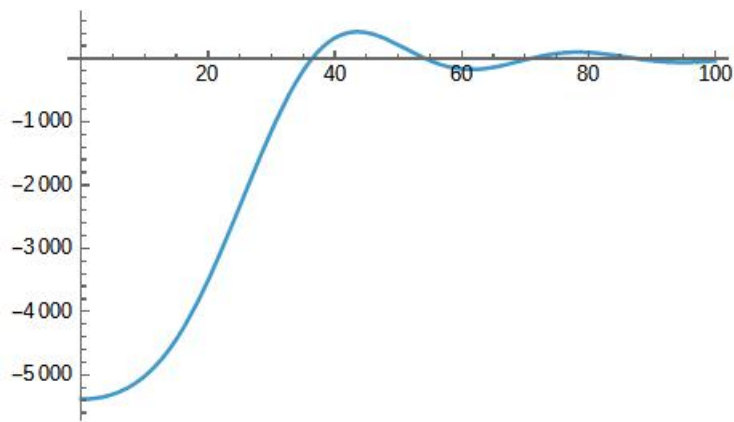


```
FindRoot[BesselJ[2, λ*r1]*(-
λ*BesselY[2+1, λ*r2]+(H1+2/r2)*BesselY[2, λ*r2])-BesselY[2, λ*r1]*(-
λ*BesselJ[2+1, λ*r2]+(H1-2/r2)*BesselJ[2, λ*r2])==0, {λ, 20}]
{λ->30.749}
```

```
FindRoot[BesselJ[2, λ*r1]*(-
λ*BesselY[2+1, λ*r2]+(H1+2/r2)*BesselY[2, λ*r2])-BesselY[2, λ*r1]*(-
λ*BesselJ[2+1, λ*r2]+(H1-2/r2)*BesselJ[2, λ*r2])==0, {λ, 50}]
{λ->48.0667}
```

Για $n=3$, $m=1$ και $m=2$

```
Plot[BesselJ[3,λ*r1]*(-
λ*BesselY[3+1,λ*r2]+(H1+3/r2)*BesselY[3,λ*r2])-BesselY[3,λ*r1]*(-
λ*BesselJ[3+1,λ*r2]+(H1-3/r2)*BesselJ[3,λ*r2]),{λ,0,100}]
```



```
FindRoot[BesselJ[3,λ*r1]*(-
λ*BesselY[3+1,λ*r2]+(H1+3/r2)*BesselY[3,λ*r2])-BesselY[3,λ*r1]*(-
λ*BesselJ[3+1,λ*r2]+(H1-3/r2)*BesselJ[3,λ*r2]),{λ,39}]
{λ->36.4515}
```

```
FindRoot[BesselJ[3,λ*r1]*(-
λ*BesselY[3+1,λ*r2]+(H1+3/r2)*BesselY[3,λ*r2])-BesselY[3,λ*r1]*(-
λ*BesselJ[3+1,λ*r2]+(H1-3/r2)*BesselJ[3,λ*r2]),{λ,50}]
{λ->54.2281}
```

```
Element[k,Integers]; Element[m,Integers];
Mat={{6.84276,24.1071},{25.4616,42.6915},{30.749,48.0667},{36.4515,54.
2281}};
λ[k_,m_]:=Mat[[k]][[m]]
```

Ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις

```
R[i_,k_,m_,r_]:=BesselJ[i,λ[k,m]*r]/BesselJ[i,λ[k,m]*r1]-
BesselY[i,λ[k,m]*r]/BesselY[i,λ[k,m]*r1]
```

```
b[k_,m_]:=Sqrt[(λ[k,m])^2-1]
```

$\bar{u} = z$

```
z[i_,k_,m_,θ_,t_]:=((S0*BesselJ[i,λ[k,m]*r0]*Cos[i*(θ-
θ0)])/(2*Pi*b[k,m]))*Exp[-(t-t0)]*Sin[b[k,m]*(t-t0)]*H1*(t-t0)
```

```
u[x_,y_,t_]=TransformedField["Cartesian" ->
"Polars", (1/(2*Pi))* (z[0,1,1,θ,t]*BesselJ[0,λ[1,1]*r]/(Integrate[ ((R[0,
1,1,r])^2)*r,{r,r1,r2}])+z[0,1,2,θ,t]*BesselJ[0,λ[1,2]*r]/(Integrate[
((R[0,1,2,r])^2)*r,{r,r1,r2}]))+(1/Pi)*(z[1,2,1,θ,t]*BesselJ[1,λ[2,1]
*r]/(Integrate[ ((R[1,2,1,r])^2)*r,{r,r1,r2}])+z[1,2,2,θ,t]*BesselJ[1,
λ[2,2]*r]/(Integrate[ ((R[1,2,2,r])^2)*r,{r,r1,r2}])+z[2,3,1,θ,t]*Bess
elJ[2,λ[3,1]*r]/(Integrate[ ((R[2,3,1,r])^2)*r,{r,r1,r2}])+z[2,3,2,θ,t]
*BesselJ[2,λ[3,2]*r]/(Integrate[ ((R[2,3,2,r])^2)*r,{r,r1,r2}])+z[3,4,
1,θ,t]*BesselJ[3,λ[4,1]*r]/(Integrate[ ((R[3,4,1,r])^2)*r,{r,r1,r2}]))+
```

```
z[3,4,2,θ,t]*BesselJ[3,λ[4,2]*r]/(Integrate[(R[3,4,2,r])^2*r,{r,r1,
r2}]),{r,θ} -> {x,y}]
```

```
Manipulate[ParametricPlot3D[{x*Cos[y],x*Sin[y],u[x,y,t]},{x,r1,
r2},{y, 0, 2 *Pi},PlotPoints -> 50, BoxRatios -> {0.16, 0.16, 0.16},
PlotRange -> {-0.2, 0.2}, Mesh -> 25,
MeshStyle -> Directive[Gray, Opacity[0.2]], PlotPoints -> 75,
PlotStyle -> Directive[LightBlue]],{t,0,7,0.1}]
```

2) Κώδικας Mathematica για την προσομοίωση των μεμβρανών των τυμπάνων με απόσβεση

```
ClearAll["Global`*"]
A=100;σ=0.05;θ0=0;c=1340;α=400;R=0.35;r0=0;

u[r_,θ_,0]=Simplify[(A/(2*Pi*σ))*Exp[(-1/(2*σ^2))*(r*Cos[θ]-
r0*Cos[θ0])^2+(r*Sin[θ]-r0*Sin[θ0])^2]]]
318.31 e-200. r2

a[m_,n_]:=N[BesselJZero[m,n]]

Element[m,Integers];Element[n,Integers];

b[m_,n_]=(2/(Pi*(N[BesselJ[m+1,a[m,n]]]^2))*Integrate[Integrate[r*N[
BesselJ[m,a[m,n]*r/R]]*u[r,θ,0]*Sin[m*θ],{θ,0,2*Pi}},{r,0,R}]


$$2 \int_0^{0.35} \frac{63662. e^{-200. r^2} r BesselJ[m, 2.85714 r BesselJZero[m, n]] \sin[m\pi]^2}{m} dr$$


$$\pi BesselJ[1. + m, BesselJZero[m, n]]^2$$

```

Χρησιμοποιούμε τον τραπεζοειδή κανόνα για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που προκύπτει παραπάνω για dr.

```
f[m_,n_,r_]:= (63662*Exp[-
200*r^2]*r*BesselJ[m,2.85714*r*a[m,n]]*(Sin[m*Pi])^2)/m

k=3;

Tn[m_,n_] = 0.5*((R - 0)/k)*(f[m,n,0] + f[m,n,R] + Sum[2*f[m,n,0 +
(i*(R - 0))/k], {i, 1, k- 1}]);

Do[Print[Evaluate[Tn[m,n]]], {m,1,4},{n,1,4}]
```

0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.
0.

Επομένως $b_{mn}=0$.

$w[m_, n_] := c * (N[a[m, n]]) / R$
 $z[m_, n_] := N[a[m, n]] / R$

$u[r_, \theta, t_] = 0.5 * \text{Sum}[N[\text{BesselJ}[0, z[0, n] * r]] * a[0, n] * \text{Cos}[\text{Sqrt}[(w[m, n])^2 - \alpha^2 * t]] * \text{Exp}[-\alpha * t], \{n, 1, 2\}] + \text{Sum}[N[\text{BesselJ}[m, z[m, n] * r / R]] * a[m, n] * \text{Cos}[m * \theta * \text{Cos}[\text{Sqrt}[(w[m, n])^2 - \alpha^2 * t]]] * \text{Exp}[-\alpha * t], \{m, 1, 2\}, \{n, 1, 2\}]$

$$= 3.83171 e^{-400 t} \text{BesselJ}[1., 31.2792 r] \text{Cos}\left[\sqrt{2.15208 \times 10^8 - 160000 t}\right] \text{Cos}[\theta] + 7.01559 e^{-400 t} \text{BesselJ}[1., 57.2701 r] \text{Cos}\left[\sqrt{7.21442 \times 10^8 - 160000 t}\right] \text{Cos}[\theta] + 5.13562 e^{-400 t} \text{BesselJ}[2., 41.9234 r] \text{Cos}\left[\sqrt{3.86598 \times 10^8 - 160000 t}\right] \text{Cos}[2 \theta] + 8.41724 e^{-400 t} \text{BesselJ}[2., 68.7122 r] \text{Cos}\left[\sqrt{1.03852 \times 10^9 - 160000 t}\right] \text{Cos}[2 \theta] + 0.5 \left(2.40483 e^{-400 t} \text{BesselJ}[0., 6.87093 r] \text{Cos}\left[\sqrt{-160000 t + 1.4658 \times 10^7 \text{BesselJZero}[m, 1.]^2}\right] + 5.52008 e^{-400 t} \text{BesselJ}[0., 15.7717 r] \text{Cos}\left[\sqrt{-160000 t + 1.4658 \times 10^7 \text{BesselJZero}[m, 2.]^2}\right] \right)$$

$u1[r_, \theta, t_] = \text{Sum}[\%, \{m, 1, 2\}]$

```
0.5 (2.40483 e-400 t BesselJ[0., 6.87093 r] Cos[ $\sqrt{2.15208 \times 10^8 - 160\,000 t}$ ] + 5.52008 e-400 t
BesselJ[0., 15.7717 r] Cos[ $\sqrt{7.21442 \times 10^8 - 160\,000 t}$ ]) + 0.5 (2.40483 e-400 t
BesselJ[0., 6.87093 r] Cos[ $\sqrt{3.86598 \times 10^8 - 160\,000 t}$ ] + 5.52008 e-400 t BesselJ[0.,
15.7717 r] Cos[ $\sqrt{1.03852 \times 10^9 - 160\,000 t}$ ]) + 7.66341 e-400 t BesselJ[1., 31.2792 r]
Cos[ $\sqrt{2.15208 \times 10^8 - 160\,000 t}$ ] Cos[ $\theta$ ] + 14.0312 e-400 t BesselJ[1., 57.2701 r]
Cos[ $\sqrt{7.21442 \times 10^8 - 160\,000 t}$ ] Cos[ $\theta$ ] + 10.2712 e-400 t BesselJ[2., 41.9234 r]
Cos[ $\sqrt{3.86598 \times 10^8 - 160\,000 t}$ ] Cos[2  $\theta$ ] + 16.8345 e-400 t BesselJ[2., 68.7122 r]
Cos[ $\sqrt{1.03852 \times 10^9 - 160\,000 t}$ ] Cos[2  $\theta$ ]
```

```
u1[r_,  $\theta$ _, 0] = Simplify[(A/(2*Pi* $\sigma$ ))*Exp[(-1/(2* $\sigma^2$ ))*((r*Cos[ $\theta$ ] -
r0*Cos[ $\theta$ 0])^2 + (r*Sin[ $\theta$ ] - r0*Sin[ $\theta$ 0])^2)]]
318.31 e-200. r2
```

```
Manipulate[ParametricPlot3D[{r*Cos[ $\theta$ ], r*Sin[ $\theta$ ], u1[r,  $\theta$ , t]}, {r, 0, R}, { $\theta$ ,
0, 2 *Pi}], {t, 0, 0.225, 0.01}]
```

3) Κώδικας Mathematica για την προσομοίωση των μεμβρανών των τυμπάνων χωρίς απόσβεση

```
ClearAll["Global`*"]

a = 1; c = 1; v0 = 1; b = .1; ncoeffs = 5;

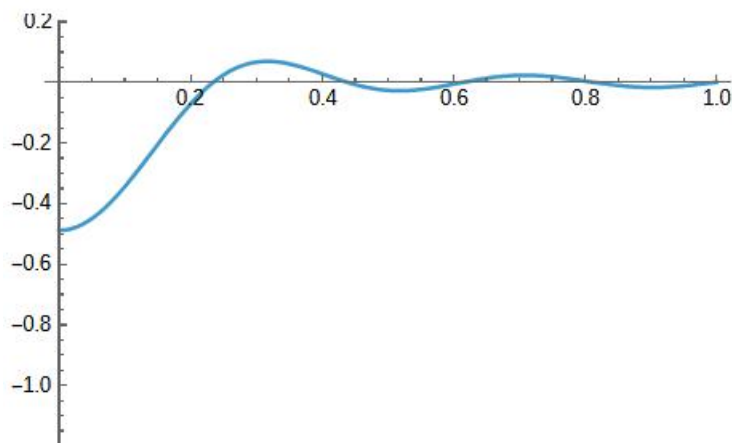
Bcoeffs = Table[(2/(a*BesselJZero[1, n]*c*BesselJ[1, BesselJZero[0,
n]]^2))*NIntegrate[r*(-v0)*BesselJ[0, BesselJZero[0, n]*r/c], {r, 0,
b}], {n, 1, ncoeffs}]

{-0.00961353, -0.0118482, -0.0121293, -0.0116112, -0.0106175}

j = Table[N[BesselJZero[0, n]], {n, 1, ncoeffs}]

{2.40483, 5.52008, 8.65373, 11.7915, 14.9309}

Plot[Bcoeffs . Table[(a*j[[n]]/c)*BesselJ[0, j[[n]]*r/c], {n, 1,
ncoeffs}], {r, 0, c}, PlotRange -> {-1.2, .2}]
```



```
Manipulate[RevolutionPlot3D[ Bcoeffs .  
Table[Sin[a*j[[n]]*t/c]*BesselJ[0, j[[n]]*r/c], {n, 1, ncoeffs}], {r,  
0, c}, {phi, 0, 2*Pi}, PlotRange -> {All, All, {-0.05, .05}}, {t, 0,  
2*Pi*c/(a*j[[1]])}]
```

4) Κώδικας Mathematica για την προσομοίωση χορδής

```
ClearAll["Global`*"]  
ρ=0.0019206; τ=69.39;c=190;H=0.001;L=0.648; β=0.177;F0=0.1; α=0;  
  
ωn:=(n*Pi/L)*Sqrt[ τ / ρ ]  
  
ζn:=β *L/(2*n*Pi*Sqrt[ τ * ρ ])  
  
ωd:=ωn*Sqrt[1- ζn^2]  
  
u[x_, t_]:=Sum[((2*F0)/(ρ *L*ωd))*Sin[n*Pi*α /L]*Exp[-ζn*ωn*(t-α)]*Sin[ωd*(t-  
α)]*HeavisideTheta[t-α]+((8*H*Ssin[n*Pi/2])/(n^2*Pi^2))*Exp[-  
ζn*ωn*t]*(Cos[ωd*t]+(ζn/Sqrt[1-ζn^2])*Sin[ωd*t])*Sin[n*Pi*x/L], {n, 1, 10}]  
  
Manipulate[Plot[u[x, t], {x, 0, L}, PlotStyle -> Thick, PlotRange->All], {t, 0,  
16, 0.1}]
```

5) Κώδικας Mathematica για τον υπολογισμό των συχνοτήτων των πιατινιών

```
ClearAll["Global`*"]  
  
ρ=8000;h=0.0022;r2=0.15;v=0.29;E=1930000000000;  
d=(E*h^3)/(12*(1-v^2))  
  
186.98  
  
λ={{4.93},{5.17},{6.04},{7.29}};  
  
ω[k_]:=(((Part[λ,k,1])^2)/(r2^2))*Sqrt[d/(ρ*h)]  
  
Do[Print[ω[k]],{k,1,4}]  
3520.89  
3872.04  
5284.85  
7698.64  
  
f[k_]:=ω[k]/(2*Pi)  
Do[Print[f[k]],{k,1,4}]  
560.368  
616.255  
841.111  
1225.28
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Εξίσωση πλάκας Kirchhoff-Love

1. Εξίσωση ορθοτροπικής πλάκας

Παρουσιάζουμε εδώ την εξίσωση πλάκας Kirchhoff-Love σε ορισμένες ειδικές καρτεσιανές περιπτώσεις. Η εξίσωση (6.5) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή (χωρίς όρους απόσβεσης):

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{xx} \\ \mathcal{M}_{yy} \\ \mathcal{M}_{xy} \end{pmatrix} = \alpha^3 \begin{pmatrix} D_1 & \frac{D_2}{2} & 0 \\ \frac{D_2}{2} & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_4}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{xx} u_p \\ \partial_{yy} u_p \\ \partial_{xy} u_p \end{pmatrix},$$

$$\alpha \rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{xy}}{\partial x \partial y} = F - [p]_\omega \text{ στο } \omega$$

όπου D_1, D_2, D_3 και D_4 είναι οι τέσσερις σταθερές ακαμψίας της πλάκας.

2. Εξίσωση ομογενούς ισοτροπικής πλάκας

Στην ομοιογενή ισότροπη περίπτωση έχουμε: $D_1 = D_3 = \left(\frac{D_2}{2} + \frac{D_4}{2}\right) = \frac{E}{12(1-\nu^2)}$ όπου E και ν είναι ο συντελεστής Young και ο λόγος Poisson, αντίστοιχα. Ο τελεστής της πλάκας Kirchhoff-Love γίνεται τότε ένας συνηθισμένος δι-Λαπλάσιανος. Η εξίσωση (6.5) γίνεται:

$$\alpha \rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} + D_1 \alpha^3 \left(1 + \eta_p \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta^2 u_p + \alpha \rho_p R_p \frac{\partial u_p}{\partial t} = F - [p]_\omega \text{ στο } \omega.$$

3. Συνθήκη ελεύθερου συνόρου

Δίνουμε τώρα την έκφραση των συνθηκών ελεύθερων συνόρων στην περίπτωση μιας πλάκας με ευθεία άκρη. Για παράδειγμα, εάν ο άξονας y είναι ένα ελεύθερο σύνορο της πλάκας, οι δύο συνθήκες που δίνονται από τις εξισώσεις (6.7) και (6.8) μπορούν να γραφούν :

$$\mathcal{M}_{xx} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathcal{M}_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{κατά μήκος της πλευράς } x=0.$$

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης