ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά

Ρεαλιστική Μαθηματική εκπαίδευση (RME)
Η σύγχρονη πλατφόρμα για την διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών: μια θέαση στην Μαθηματική Ανάλυση υπό το πρίσμα των νέων τεχνολογιών ,από το ¨πρόβλημα¨ στην ¨μοντελοποίηση¨ σε (C.A.S.) περιβάλλοντα.

Χαρίλαος Γιαννόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: Ευγένιος Αυγερινός

ΠΑΤΡΑ
ΙΟΥΛΙΟΣ, 2022

Αφιερώνω αυτή την εργασία στον πατέρα μου, τον άνθρωπο που πίστευε πάντα σε μένα

Ευχαριστίες :

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους επιβλέποντες καθηγητές Κύριο Ευγένιο Αυγερινό και κύριο Σπυρίδωνα Δουκάκη για την αμέριστη συμπαράσταση τους κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας καθώς και όλο το εκπαιδευτικό προσωπικό του Ανοικτού Ελληνικού Πανεπιστήμιου που μου άνοιξε νέους ορίζοντες .

Περίληψη

Το σκεπτικό αυτής της εργασίας προέκυψε από τη διαπίστωση ότι οι συμβατικές προσεγγίσεις διδακτικού σχεδιασμού για την εισαγωγή εννοιών του Λογισμού, οι οποίες βασίζονται στη λογική αλληλουχία και τη δόμηση των εννοιών, δεν παρακολουθούσαν ή δεν αντιμετώπιζαν επαρκώς τους τρόπους σκέψης των μαθητών.

Η θεωρία του διδακτικού σχεδιασμού της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (RME) υπό το πρίσμα των νέων τεχνολογιών προσέφερε μια πολλά υποσχόμενη προσέγγιση για το σχεδιασμό μαθησιακών ακολουθιών στην μαθηματική ανάλυση που βασίζονται σε πραγματικές έρευνες των τρόπων σκέψης των μαθητών.

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθούν οι απόπειρες μοντελοποίησης δυο ομάδων των πέντε μαθητών της Γ' Λυκείου σε μια πειραματική διδασκαλία ελάχιστα παρεμβατική. Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου έχοντας ως μόνα δεδομένα την ταχύτητα του αυτοκίνητου κάποιες χρονικές στιγμές .

Τα ερευνητικά δεδομένα ήταν η ηχογράφηση και η μαγνητοσκόπηση μιας διδασκαλίας δύο ενιαίων διδακτικών ωρών. Η ανάλυση των δεδομένων ήταν ποιοτική και βασίστηκε στον κύκλο μοντελοποίησης και το πρόγραμμα Atlas.ti οπού εφαρμοστήκαν οι ανάλογοι κωδικοί . Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν πέντε διαδικασίες μοντελοποίησης που είτε απορρίφθηκαν είτε εξελίχθηκαν στη συνέχεια από τους συμμετέχοντες. Επιπλέον κατασκευάστηκαν και τα διαγράμματα δραστηριοτήτων μοντελοποίησης (Ärlebäck, 2009) ώστε να έχουμε και μια οπτική επόπτευση των προσπαθειών των μαθητών στις απόπειρες μοντελοποίησης.

Λέξεις Κλειδιά: κύκλος μοντελοποίησης, ανοικτό πρόβλημα, ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, μαθηματική μοντελοποίηση ,διαγράμματα δραστηριοτήτων μοντελοποίησης.

Abstract

The rationale for this paper emerged from the finding that conventional instructional design approaches to introducing calculus concepts, which are based on logical sequencing and concept structuring, did not track or adequately address students' ways of thinking.

Realistic Mathematics Education (RME) instructional design theory in light of new technologies offered a promising approach to designing learning sequences in mathematical analysis based on real-world investigations of students' thinking styles.

The present study attempted to study the modelling attempts of two groups of five third grade students in a minimally intrusive experimental teaching. The problem given to the students involved the calculation of the total length of a race car's route given only the speed of the car at certain times .

The research data were the recording and taping of a lesson of two single teaching hours. The data analysis was qualitative and based on the modeling cycle and the Atlas.ti program where the corresponding codes were applied. Five modelling procedures emerged from the results that were either rejected or subsequently evolved by the participants. In addition, the modelling activities diagrams (Ärlebäck, 2009) were constructed in order to have a visual supervision of the students' efforts in the modelling attempts.

Keywords: modeling cycle, open problem, realistic mathematical education, mathematical modeling, modeling activities diagrams.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο:
Σύντομη επισκόπηση της ιστορίας της Μαθηματικής εκπαίδευσης

1.1 Εισαγωγή :

Πεποίθηση μας είναι ότι η ανησυχία για το μέλλον της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι αδύνατη χωρίς μια ενδελεχή κατανόηση του τι συμβαίνει στο παρόν, το οποίο με τη σειρά του είναι αδύνατο χωρίς κατανόηση και κατά συνέπεια της μελέτης του παρελθόντος.

Άποψή μας είναι ότι ο τρόπος με τον οποίο αναπτύχθηκε η μαθηματική εκπαίδευση είναι σημαντικός για τους σύγχρονους εκπαιδευτικούς, αλλά είναι εξίσου σημαντικός και για τους ερευνητές της ιστορίας της εκπαίδευσης, μέρος της οποίας αποτελεί η μαθηματική εκπαίδευση. Ακόμη ευρύτερα, για τους ερευνητές της πολιτισμικής ιστορίας και ακόμη της κοινωνικής ιστορίας στο σύνολό της, η εκτίμηση της ιστορικής εξέλιξης της μαθηματικής εκπαίδευσης θα είναι επίσης χρήσιμη. Θα πρέπει να εκτιμηθεί και η μαθηματική εκπαίδευση ως πολιτισμικό προϊόν και να τονιστεί ότι επί του παρόντος οι γνώσεις μας (και συνεπώς η κατανόησή μας) είναι περιορισμένες. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η διάδοση της γνώσης παρεμποδίζεται από γλωσσικά εμπόδια - σημαντικά και ουσιαστικά μελέτες παραμένουν ανεξερεύνητες ακόμη και από εκείνους που θα ήταν δεκτικοί σε αυτές και θα τις έβρισκαν ενδιαφέρουσες. Σε άλλες περιπτώσεις, απλώς δεν υπάρχουν μελέτες - δεν θα ήταν λάθος να πούμε ότι τα εκπαιδευτικά έγγραφα που βρίσκονται σε αρχεία σχεδόν σε κάθε χώρα και κυρίως στην Ελλάδα δεν έχουν ερευνηθεί επαρκώς. Θα πρέπει να πούμε αμέσως ότι, συζητώντας την ιστορία της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, επικεντρωνόμαστε κυρίως σε αυτό που τους τελευταίους αιώνες ονομάστηκε προπανεπιστημιακή εκπαίδευση.

1.2 Οι απαρχές της μαθηματικής εκπαίδευσης

Οι ρίζες της μαθηματικής εκπαίδευσης χρονολογούνται από τις απαρχές της ανθρωπότητας. Η πρώτη γνωστή συστηματική διδασκαλία των μαθηματικών ξεκίνησε την Τρίτη Χιλιετία σε πολιτείες της Μεσοποταμίας, όπου οι σχολές γραφέων – edubba, τα σπίτια των πινακίδων – προετοίμαζαν τους γραμματείς που έπρεπε να εργαστούν για την κρατική διοίκηση και έπρεπε να μάθουν τις τεχνικές γραφής και λογιστικής. Πήλινες πινακίδες από την αρχαία Βαβυλωνία (περ. 1900 π.Χ. έως 1600 π.Χ.), για παράδειγμα, δείχνουν ότι οι μαθητές στη σχολή γραφέων αναμενόταν να λύσουν προβλήματα που αφορούσαν τετραγωνικά πολυώνυμα (Hoyrup, 1994) Αλλά κανένα διαθέσιμο στοιχείο δεν δείχνει πόση άσκηση και πρακτική είτε έλαβαν είτε οι εκπαιδευτές τους πίστευαν ότι χρειάζονταν. Παρόμοιες διαδικασίες παρατηρούνται στην Αρχαία Αίγυπτο (Karp & Schubring, 2014). Έτσι, για μεγάλο χρονικό διάστημα, ο στόχος της διδασκαλίας ήταν η επαγγελματική κατάρτιση. Τα μαθηματικά έγιναν αντικείμενο γενικής παιδείας για πρώτη φορά στις πόλεις-κράτη της Ελλάδας, όταν εμφανίστηκε μια νέα τάξη ελεύθερων πολιτών που κυβερνούσαν το κράτος τους. Αυτή η μορφή γενικής εκπαίδευσης άσκησε δύο διακριτά πρότυπα:

(1) Τη ρητορική και τη διαλεκτική ως προσόντα για πολιτική δραστηριότητα και

(2) Τα μαθηματικά ως ένα συγκεκριμένο εκπαιδευτικό συμπλήρωμα.

Ένα πρώιμο παράδειγμα μαθηματικής εκπαίδευσης έχουμε στο Μένων του Πλάτωνα ένα κείμενο που αφηγείται πώς, τον πέμπτο αιώνα π.Χ., ο Σωκράτης βοήθησε ένα σκλάβο να ανακαλύψει ότι ο διπλασιασμός της πλευράς ενός τετραγώνου προφανώς τετραγωνίζει το εμβαδόν του. Ο Πλάτωνας, ωστόσο, δεν λέει πόσο καλά τα πήγε το αγόρι με παρόμοια προβλήματα γεωμετρίας όταν ο δάσκαλός του δεν ήταν πλέον κοντά. Αρχαίοι πολιτισμοί όπως των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων μας άφησαν έγγραφα που αποδεικνύουν την άρρηκτη σύνδεση μεταξύ της ανάπτυξης των μαθηματικού πολιτισμού και της ανησυχίας για τη μετάδοση και την διάχυση αυτού του πολιτισμού (Karp & Schubring, 2014). Στο αχανές τοπίο των κοινωνικών, οικονομικών, και πολιτικών γεγονότων που συνόδευσαν την εξέλιξη της διδασκαλίας των μαθηματικών, βάζουμε δύο σημαντικές εξελίξεις που την επηρέασαν.

Πρώτον, η εφεύρεση της τυπογραφίας τον 15ο αιώνα δημιούργησε τη δυνατότητα για καθολικό αλφαβητισμό και την δυνατότητα να μεταδίδονται εύκολα οι μαθηματικές γνώσεις σε μεγάλο αριθμό ανθρώπων (kilpatrick, 2020). Με την πάροδο των αιώνων, αυτό οδήγησε στην δεύτερη εξέλιξη, τη δημιουργία σχολείων για την εκπαίδευση των μαζών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα, τα μαθηματικά -που ήταν ένα απόκρυφο αντικείμενο πριν από 600 χρόνια- έγιναν ένα αντικείμενο που σπουδάζουν σχεδόν όλοι οι μαθητές στον κόσμο. Για πολλούς αιώνες οι ρόλοι των καθηγητών μαθηματικών και των ερευνητών στα μαθηματικά ήταν σε μεγάλο βαθμό επικαλυπτόμενοι. Σιγά σιγά, όταν τα μαθηματικά θέματα έφτασαν σε προχωρημένο στάδιο μακριά από το στοιχειώδες επίπεδο, αυτή η επικάλυψη συνέβη μόνο στην περίπτωση των πανεπιστημιακών καθηγητών που πραγματοποιούσαν έρευνα στο πλαίσιο του επαγγέλματός τους. Στα πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια σχολεία, ωστόσο, ο διαχωρισμός μεταξύ διδασκαλίας και έρευνας στα μαθηματικά έγινε εμφανής. Μεταξύ άλλων, αυτό οδήγησε σε μια διαφοροποιημένη παραγωγή στην μαθηματική βιβλιογραφία: από τη μία πλευρά, τα εγχειρίδια που απευθύνονταν ειδικά στη σχολική διδασκαλία και από την άλλη πλευρά, υπήρχε μια παραγωγή υλικού που ανέφερε νέα αποτελέσματα από τη μαθηματική έρευνα. Σύμφωνα με τον Struik (1987), η διαδικασία της επαγγελματισμού των ερευνητών στα μαθηματικά επιταχύνθηκε σημαντικά από τα ερεθίσματα που δόθηκαν στην επιστημονική έρευνα στα χρόνια της Βιομηχανικής Επανάστασης, η οποία δημιούργησε "νέες κοινωνικές τάξεις με μια νέα αντίληψη για τη ζωή, που ενδιαφέρονταν για την επιστήμη και την τεχνική εκπαίδευση"(Struik, 1987) .Οι νέες δημοκρατικές ιδέες που δημιουργήθηκαν από τη Γαλλική Επανάσταση "εισέβαλαν στην ακαδημαϊκή ζωή- η κριτική ξεσηκώθηκε ενάντια σε απαρχαιωμένες μορφές σκέψης- τα σχολεία και τα πανεπιστήμια έπρεπε να μεταρρυθμιστούν και να αναζωογονηθούν" (Furinghetti et al., 2012) .Η μαθηματική εκπαίδευση είναι ένα μακροχρόνιο πεδίο πρακτικής- η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση, ένα σχετικά πρόσφατο εγχείρημα.

1.3 Ο 19ος αιώνας

Τον 19ο αιώνα "η κύρια απασχόληση των μαθηματικών δεν συνίστατο πλέον στην ιδιότητα του μέλους μιας ακαδημαϊκής σχολής- συνήθως εργάζονταν σε πανεπιστήμια ή τεχνικές σχολές και ήταν καθηγητές καθώς και ερευνητές" (Struik, 1987). Γύρω στα μέσα του 19ου αιώνα το επάγγελμα του καθηγητή μαθηματικών στην πρωτοβάθμια ή δευτεροβάθμια εκπαίδευση έπαιρνε νέα μορφή, σε συνδυασμό όχι μόνο με τον εκσυγχρονισμό των παλαιών εθνών, αλλά και με την ανάδυση νέων κοινωνικών δομών που εκδηλώνονταν με νέες ενώσεις και συνδικάτα, πολιτικά και κοινωνικά κινήματα και πρωτοβουλίες αλληλεγγύης. Η μετάδοση των μαθηματικών γνώσεων δεν ήταν πλέον μια ιδιωτική υπόθεση που αφηνόταν στις οικογένειες ή στους θρησκευτικούς φορείς, αλλά γινόταν μια δημόσια επιχείρηση υπό την ευθύνη του κράτους. Τα επόμενα χρόνια έλαβε χώρα η καθιέρωση σύγχρονων εθνικών συστημάτων διδασκαλίας στις νέες και στις παλαιές χώρες. Σε αυτή τη διαδικασία το κύριο μέλημα έγινε η ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών, η παραγωγή κατάλληλων σχολικών βιβλίων και τα προβλήματα που σχετίζονται με την εκπαίδευση και την πρόσληψη εκπαιδευτικών. Σύντομα η ανάγκη προβληματισμού για τα προβλήματα που ενυπήρχαν στην όλη κατασκευή έδωσε ώθηση στη δημιουργία ειδικών περιοδικών και ενώσεων. Σε αυτό το πλαίσιο ξεκίνησε η μετάβαση από τα "μαθηματικά και την εκπαίδευση" στη "μαθηματική εκπαίδευση". Οι μαθηματικοί, όπως όλοι οι επιστήμονες, αισθάνονταν πάντα την ανάγκη να επικοινωνούν τα αποτελέσματά τους. Για το σκοπό αυτό, για μεγάλο χρονικό διάστημα χρησιμοποιούσαν κυρίως την ιδιωτική επικοινωνία, αλλά μετά την καθιέρωση των ακαδημιών και μαθηματικών κοινοτήτων και εταιρειών άρχισαν να γράφουν πρακτικά και εκθέσεις. Μετά τις αλλαγές του πολιτιστικού και του κοινωνικού περιβάλλοντος που προκάλεσαν η βιομηχανική και η γαλλική επανάσταση, τα μέσα επικοινωνίας εκσυγχρονίστηκαν και εμφανίστηκαν τα πρώτα περιοδικά αφιερωμένα ειδικά στα μαθηματικά. Αρχικά αυτά ήταν εφήμερα ή, όπως τα γαλλικά Annales de Mathématiques Pures et Appliquées διήρκεσαν για λίγα δεκαετίες (1810-1832). Σύντομα, όμως, δημοσιεύθηκαν σημαντικά περιοδικά, ορισμένα από τα οποία εξακολουθούν να υπάρχουν ακόμα και τώρα , το 1826, για παράδειγμα, το Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, που ιδρύθηκε από τον August Leopold Crelle, και το 1836 εμφανίστηκε για πρώτη φορά το Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, που ιδρύθηκε από τον Joseph Liouville.(kilpatrick, 2020). Αυτά τα περιοδικά, καθώς και άλλα του ίδιου είδους που ήταν διαθέσιμα εκείνη την εποχή, περιείχαν όχι μόνο πρωτότυπα δοκίμια, αλλά και μαθηματικά απομνημονεύματα που αποσπάστηκαν από διακεκριμένα έργα και περιλήψεις σημαντικών εργασιών. Με τον τρόπο αυτό συνέβαλαν στην πρόοδο των μαθηματικών παράγωντας νέα αποτελέσματα και σημαντικά έργα που δεν ήταν εύκολα προσβάσιμα σε όλους τους αναγνώστες τους (μεταξύ αυτών αρχάριους ερευνητές). Ήταν κυρίως αφιερωμένα στην έρευνα και είχαν διεθνές αναγνωστικό κοινό. Στο πανόραμα των περιοδικών ποικίλης φύσης που εμφανίστηκαν τον 19ο αιώνα είναι δύσκολο να εντοπιστούν περιοδικά που ασχολούνταν ειδικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πράγματι, ένα σημάδι ότι η προσοχή θα δινόταν στα μαθηματικά δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ήταν η παρουσία της λέξης "στοιχειώδης" στο τίτλο - αν και η έννοια του όρου αυτού διέφερε στα διάφορα περιοδικά. Παραδείγματα του είδους ήταν τρία οι γαλλικές εκδόσεις

● Journal de Mathématiques Élémentaires (εκδότης Henri Vuibert, ιδρύθηκε το 1876),

● Journal de Mathématiques Élémentaires (εκδότης de Longchamps, ιδρύθηκε το 1882),
● L'Éducation Mathématique (συντάκτες Jean Griess και Henri Vuibert, ιδρύθηκε το 1898), και η ιταλική έκδοση
● Rivista di Matematica Elementare (εκδότης Giovanni Massa, ιδρύθηκε το 1874). Μερικές φορές οι ιδρυτές και εκδότες αυτών των περιοδικών ήταν δάσκαλοι, και πράγματι οι περισσότεροι από τους συντάκτες του ιταλικού Rivista di Matematica Elementare ήταν καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι ημερομηνίες ίδρυσης δείχνουν ότι τα περιοδικά που σχετίζονται με τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση γεννήθηκαν αργότερα από τα ερευνητικά περιοδικά. (Furinghetti et al., 2012).

Στις δεκαετίες εκατέρωθεν του 1900 οι σημαντικότερες εθνικές ενώσεις των καθηγητών μαθηματικών ιδρύθηκαν. Αυτές οι ενώσεις, και τα περιοδικά τους, συνέβαλαν στην προώθηση επικοινωνία και να διαμορφώσουν την ταυτότητα των καθηγητών μαθηματικών. Ειδικότερα, ο ρόλος των ενώσεων ήταν καθοριστικός στην τόνωση και καθοδήγηση των μεταρρυθμίσεων που έλαβαν χώρα κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Οι μεταρρυθμίσεις αυτές λειτούργησαν προς την κατεύθυνση της επικαιροποίησης των σχολικών μαθηματικών σύμφωνα με τις νέες τάσεις στην έρευνα και για να καταστούν τα προγράμματα σπουδών κατάλληλα σε μια εποχή βιομηχανικής και τεχνολογικής καινοτομίας. Είναι αλήθεια ότι το πνεύμα των μεταρρυθμίσεων συχνά ενσαρκωνόταν από ισχυρές προσωπικότητες όπως όπως ο John Perry στο Ηνωμένο Βασίλειο, ο Felix Klein στη Γερμανία και ο Charles Émile Ernest ,Carlo Bourlet στη Γαλλία (Nabonnand, 2007), αλλά τα προγράμματα των μεταρρυθμίσεων συζητήθηκαν, επεξεργάστηκαν και διαδόθηκαν με τις ενώσεις των εκπαιδευτικών ως σημαντικοί παράγοντες. Στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής ιδρύθηκε το 1888 η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία (AMS). Στο Ηνωμένο Βασίλειο, το Association for the Improvement of Geometrical Teaching (AIGT) και, αργότερα, το Mathematical Association, γεννήθηκαν με στόχο την υποστήριξη μεταρρυθμίσεων στη γεωμετρική διδακτέα ύλη. Στην Ελβετία, εισήχθησαν νέα προγράμματα με επίκεντρο την εισαγωγή της γραφικής αναπαράστασης των συναρτήσεων μετά από πρόταση της ένωσης καθηγητών μαθηματικών.. Σε ορισμένες περιπτώσεις, σημαντικός ρόλος των ενώσεων ήταν η υπεράσπιση διδασκαλίας των μαθηματικών όταν αυτή βρισκόταν στο περιθώριο. Για παράδειγμα, στην Ιταλία ο σύλλογος Mathesis που αποτελούνταν από καθηγητές μαθηματικών, ιδρύθηκε το 1895, είχε ως στόχο την υποστήριξη της διδασκαλίας των μαθηματικών ενάντια σε μια παρακμή που είχε αρχίσει τη δεκαετία του 1890. Η Ελληνική μαθηματική Εταιρεία (ΕΜΕ) ιδρύθηκε το 1918 στην Αθήνα με πρώτο γενικό γραμματέα το Νείλο Σακελλαρίου, ο οποίος ήταν πρόεδρος της ΕΜΕ από το 1929 ως το θάνατό του, στις 16 Μαρτίου 1955. Η λειτουργία της βασίζεται στην εθελοντική προσφορά και μέλη της μπορούν να είναι πτυχιούχοι μαθηματικοί. Η ΕΜΕ διαθέτει σήμερα 35 τοπικά παραρτήματα κατανεμημένα σε ολόκληρο τον ελληνικό χώρο, τα οποία αναπτύσσουν τη δικιά τους δραστηριότητα. Σκοπός της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας είναι η προαγωγή και η διάδοση των διαφόρων κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης και εκπαίδευσης (Πηγή hms.gr).

Οι περισσότερες από τις ενώσεις είναι ακόμη ζωντανές και σε καλή κατάσταση- νέες έχουν ιδρυθεί. Πολλές εκδίδουν περιοδικά, δελτία και ενημερωτικά δελτία, καθώς και οργανώνουν εθνικές συναντήσεις και άλλες δραστηριότητες. Συχνά, σε αυτές τις πρωτοβουλίες συμμετείχαν τόσο δάσκαλοι όσο και επαγγελματίες μαθηματικοί. Υπήρχαν επίσης πρωτοβουλίες που πραγματοποιήθηκαν μόνο από καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σε άλλες περιπτώσεις, για παράδειγμα στη Γαλλία, οι ακαδημαϊκοί μαθηματικοί οδήγησαν αυτές τις πρωτοβουλίες και ηγήθηκαν μεταρρυθμιστικών κινημάτων. Το πρόβλημα της σχέσης μεταξύ των δύο κοινοτήτων (μαθηματικοί και καθηγητές μαθηματικών) και η ανάγκη να μοιραστούν ευθύνης και εξουσίας είναι πάντα παρόν στο παρασκήνιο της ανάπτυξης των μαθηματικών εκπαίδευσης στο καθεστώς ενός ακαδημαϊκού κλάδου. Τα εθνικά περιοδικά και οι ενώσεις εκπαιδευτικών αποτέλεσαν σημαντικό εργαλείο για τη μετάδοση ιδεών και πληροφοριών μεταξύ των εκπαιδευτικών σε πολλά έθνη, και αποδείχθηκαν καθοριστικής σημασίας για τη διαμόρφωση της ταυτότητα των καθηγητών μαθηματικών. Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα θέματα που πραγματεύτηκαν σχετίζονταν με τα εθνικά εκπαιδευτικά συστήματα και ότι οι εκπαιδευτικοί μιας χώρας αποτελούσαν το αναγνωστικό κοινό, δεν αποτελεί έκπληξη ότι οι περισσότεροι συνεισφέροντάς ήταν εθνικοί φορείς και ότι οι δράσεις των ενώσεων εκπαιδευτικών περιορίζονταν κυρίως στην αντιμετώπιση εθνικών προβλημάτων. Στα περιοδικά που ήταν αφιερωμένα στη διδασκαλία των μαθηματικών οι συνεισφορές των ξένων συγγραφέων ήταν πολύ λίγες και συνήθως μεταφρασμένες στην τοπική γλώσσα. Παρά τις εθνικές αυτές ρυθμίσεις, μπορούμε να εντοπίσουμε κάποια κοινά σημεία στους προβληματισμούς, στις αρχές του

20ού αιώνα, σχετικά με τα προβλήματα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Οι συζητήσεις σχετικά με την οργάνωση των προγραμμάτων σπουδών βασίζονταν σε τρία κύρια θέματα:

- Σχέση μεταξύ των τμημάτων των προγραμμάτων,
- Αυστηρότητα έναντι διαίσθησης- και
- Σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και των άλλων επιστημονικών κλάδων.

Αυτό που προέκυψε ήταν η ανάγκη να προχωρήσουμε πέρα από τις συζητήσεις για την αναδιοργάνωση των προγραμμάτων σπουδών. Οταν αναγνωρίστηκε ότι υπήρχε ανάγκη να εξεταστούν νέες μέθοδοι διδασκαλίας που θα έπαιρναν υπόψη τους τα ακόλουθα:

- "Πρακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία", που βασίζονται στην παρατήρηση, τα πειράματα και τα εργαστήρια,
- Νέα ευρήματα σχετικά με την ανάπτυξη των παιδιών- και
- Έμφαση στις εφαρμογές.

Λόγω πολλών κοινών χαρακτηριστικών μεταξύ των προβλημάτων της μαθηματικής εκπαίδευσης, τα πιθανά πλεονεκτήματα της διεθνούς συνεργασίας για την επίτευξη λύσεων στα διδακτικά και άλλα εκπαιδευτικά προβλημάτων αναγνωρίστηκαν σε πολλές χώρες. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε δύο κύριες πρωτοβουλίες που συνέβαλαν σημαντικά σε αυτόν τον αυξανόμενο διεθνισμό.

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, η διεθνοποίηση ήταν μια αιώνια ιδέα σε πολλές πτυχές του κοινωνίας. Ο διεθνισμός εισέβαλε σε όλες τις πτυχές της ζωής, μεταξύ των οποίων και στα μαθηματικά. Αυτό δεν ήταν τυχαίο, ότι το 1893 πραγματοποιήθηκε ένα συνέδριο μαθηματικών στο Σικάγο. Το συνέδριο των μαθηματικών του 1893 αποτέλεσε τον ακρογωνιαίο λίθο στη διαδικασία της μαθηματικών χωρίς όρια, και προανήγγειλε μια παράδοση (που ξεκίνησε το 1897) της διοργάνωσης Διεθνών συνεδρίων μαθηματικών (ICM). Ένας από τους πρωτεργάτες της παράδοσης της διοργάνωσης των διεθνών συνεδρίων μαθηματικών ήταν ο Γάλλος μαθηματικός Charles-Ange Laisant, ο οποίος παρακινήθηκε τόσο από την πολιτιστική του άποψη για την φύση των μαθηματικών όσο και από τα κοινωνικά ιδεώδη της αδελφοσύνης και της αλληλεγγύης (Menghini et al., 2008)(Furinghetti, & Giacardi, 2008). Μετά το συνέδριο του Παρισιού, το 1900, τα ICM διεξάγονται κάθε 4 χρόνια (εκτός από διακοπές λόγω των δύο παγκόσμιων πολέμων). Αυτά τα τακτικά φόρουμ συνέβαλαν αξιοσημείωτα στη διαμόρφωση της ταυτότητας μιας διεθνούς κοινότητας ερευνητών μαθηματικών. Η Διεθνής Μαθηματική Ένωση

(IMU) (Menghini et al., 2008) ιδρύθηκε το 1920, και αν και διαλύθηκε το 1932, επανιδρύθηκε το 1951, με την πρώτη Γενική Συνέλευση της νέας IMU να πραγματοποιείτε το 1952. Η ιδέα του διεθνισμού δεν ήταν εύκολο να μεταφερθεί στον κόσμο της εκπαίδευσης για δύο προφανείς λόγους:

(α) τα θέματα διδασκαλίας είναι κυρίως εθνικά- και

(β) οι καθηγητές μαθηματικών έχουν ένα καθεστώς διαφορετικό από εκείνο των μαθηματικών -συγκεκριμένα, έχουν λιγότερες ευκαιρίες και οικονομικούς πόρους για να επικοινωνούν και να ταξιδεύουν.

Παρόλα αυτά, η μαθηματική εκπαίδευση αγγίχτηκε από την διεθνοποίηση, χάρη στην ίδρυση το 1899 του περιοδικού L'Enseignement Mathématique από τον Laisant και τον Ελβετό μαθηματικό Henri Fehr. Η αποστολή και το όραμα αυτής της έκδοσης, ρητά δηλώθηκε από τους εκδότες στο πρώτο τεύχος, ήταν να κάνει τη διδασκαλία των μαθηματικών να ενταχθεί στο κίνημα της αλληλεγγύης, του διεθνισμού και της επικοινωνίας της εποχής.

Αυτός ο διεθνής χαρακτήρας του L'Enseignement Mathématique σηματοδότησε τη διαφορά μεταξύ αυτού του περιοδικού από τα άλλα υπάρχοντα περιοδικά που απευθύνονταν στη διδασκαλία των μαθηματικών, αμέσως, δημοσίευσε έρευνες σχετικά με την κατάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών σε διάφορες χώρες. Η συντακτική επιτροπή περιελάμβανε μαθηματικούς και ιστορικούς των μαθηματικών που είχαν ήδη δείξει γνήσιο ενδιαφέρον για τα προβλήματα της διδασκαλίας των μαθηματικών (κυρίως ο Klein) και της επικοινωνίας στα μαθηματικά (Furinghetti, 2009). Το περιοδικό ήταν ιδιαίτερο όχι μόνο για τον διεθνή του χαρακτήρα, αλλά και για το πεδίο εφαρμογής του. Στον έκτο τόμο (1904) οι συντάκτες υποστήριξαν ότι γι' αυτούς η λέξη "enseignement" (διδασκαλία) είχε το ευρύτερο δυνατό νόημα: σήμαινε διδασκαλία σε μαθητές, καθώς και διδασκαλία σε δασκάλους -και, πράγματι, οι συντάκτες ξεκαθάρισαν ότι δύσκολα μπορεί κανείς να έχει το ένα χωρίς το άλλο. Για το λόγο αυτό δήλωσαν ρητά την πρόθεσή τους να αφιερώσουν ευρύ χώρο σε ζητήματα φιλοσοφίας, μεθοδολογίας και ιστορίας. Γι' αυτούς, οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να διευρύνουν τους ορίζοντές τους πέρα από το πρόγραμμα της τάξης τους και των χωρών τους. Το L'Enseignement Mathématique ήταν προϊόν του μαθηματικού περιβάλλοντος -αλλά ο Fehr ο οποιος δίδασκε στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης, όπου εργάζονταν οι ψυχολόγοι Édouard Claparède και Théodore Flournoy ,χρησιμοποίησαν το περιοδικό για να ξεκινήσουν ένα ερωτηματολόγιο που διερευνούσε τους τρόπους εργασίας των μαθηματικών. Αυτή η μελέτη είναι σημαντική, διότι επισήμανε πτυχές χρησιμοποιώντας ορολογία που εμείς θα λέγαμε τώρα ότι αφορούσε τον γνωστικό και συναισθηματικό τομέα. Από την άλλη πλευρά, οι ερευνητές μαθηματικοί, όπως ο Henri Poincaré, δημοσίευσαν στο περιοδικό άρθρα που εστίαζαν σε πτυχές που αφορούσαν τη φύση της μαθηματικής εφεύρεσης.

Η άνοδος και η ανάπτυξη ενός διεθνούς έργου: ICMI

Το 1905 ο David Eugene Smith δημοσίευσε στο L'Enseignement Mathématique μια εργασία που υποστήριζε περισσότερη διεθνή συνεργασία και τη δημιουργία μιας επιτροπής που θα διοριζόταν κατά τη διάρκεια μιας διεθνούς διάσκεψης με σκοπό τη μελέτη των διδακτικών προβλημάτων σε διάφορες χώρες (Smith, 1905). Το άρθρο αυτό αποτέλεσε τον σπόρο για τη δημιουργία, κατά τη διάρκεια του τέταρτου ICM (Ρώμη, 1908), της Διεθνούς Επιτροπής για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, με πρώτο πρόεδρο τον Klein. Στις πρώτες δεκαετίες της ζωής της η Επιτροπή αναφερόταν συνήθως ως CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique), στα γαλλικά, ή IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission), στα γερμανικά. Αν και υπέστη πολλές αλλαγές στο καθεστώς και το πεδίο εφαρμογής της, αυτή η Επιτροπή μπορεί να θεωρηθεί η πρώτη ενσάρκωση της σημερινής ICMI.(*C I E A E M Commission Internationale Pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement Des Mathématiques International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*, n.d.) Η σημασία της ίδρυσης της ICMI υπερβαίνει την απλή δημιουργία ενός οργανωτικού δομής. Αυτό που ήταν σημαντικό ήταν ότι υποδείκνυε την ύπαρξη μιας διεθνούς κοινότητας για της οποίας το κύριο επίκεντρο της προσοχής θα ήταν η μαθηματική εκπαίδευση. Δεδομένου ότι τα αρχικά μέλη της ICMI ήταν έθνη, και ότι οι εκπρόσωποι αυτών των εθνών ήταν κυρίως ακαδημαϊκοί μαθηματικοί, δεν αποτελούσε έκπληξη το γεγονός ότι για μεγάλο χρονικό διάστημα οι δραστηριότητες του ICMI αναπτύσσονταν στο εσωτερικό της κοινότητας των μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια των συνεδριάσεων του ICM, το ICMI παρουσίαζε τις εκθέσεις του και λάμβανε εντολές για μελλοντικές δραστηριότητες(Furinghetti, 2009; Menghini et al., 2008) .Τα κύρια αποτελέσματα του ICMI κατά τα πρώτα χρόνια ήταν οι εθνικές εκθέσεις για τη μαθηματική διδασκαλία στα διάφορες χώρες, και διεθνείς έρευνες για σημαντικά θέματα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Παρόλο που ο Klein (1923) ισχυρίστηκε ρητά ότι η ICMI αναγνώριζε ότι όλα τα επίπεδα των σχολικών μαθηματικών άξιζαν προσοχής, στην πράξη η προσοχή δόθηκε κυρίως στα δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια επίπεδα, καθώς και στους δασκάλους. Οι προτεραιότητες αυτές ήταν εμφανείς στον ακόλουθο κατάλογο δραστηριοτήτων που δρομολόγησε η ICMI μεταξύ 1908 και 1915:

- Τρέχουσα κατάσταση της οργάνωσης και των μεθόδων της μαθηματικής διδασκαλίας,
- Σύγχρονες τάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών,
- Η αυστηρότητα στη διδασκαλία της μέσης εκπαίδευσης και η συγχώνευση των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών,
- Η διδασκαλία των μαθηματικών σε φοιτητές φυσικών και φυσικών επιστημών,
- Η μαθηματική εκπαίδευση των φυσικών στο πανεπιστήμιο,
- Διαίσθηση και πείραμα στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση,
- Αποτελέσματα που προέκυψαν από την εισαγωγή του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού στα ανώτερα έτη του γυμνασίου,
- Η θέση και ο ρόλος των μαθηματικών στην ανώτερη τεχνική διδασκαλία- και
- Διερεύνηση της κατάρτισης των καθηγητών μαθηματικών στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις διάφορες χώρες.

Όπως πολλά άλλα επιστημονικά ιδρύματα, το ICMI υπέστη γενική κρίση κατά τη διάρκεια του Πρώτου Παγκοσμίου Πολέμου, και η περίοδος μεταξύ των δύο παγκοσμίων πολέμων ήταν μια περίοδος στασιμότητας στις δραστηριότητες του ICMI(Schubring, 2008) . Κατά τη διάρκεια της πρώτης Γενικής Συνέλευσης του ανασυγκροτημένου IMU, που πραγματοποιήθηκε στη Ρώμη το 1952, το ICMI έγινε μόνιμη υποεπιτροπή της IMU. Ωστόσο, οι καιροί είχαν αλλάξει, και στις δεκαετίες του 1950 και 1960 η παλιά ατζέντα που βασιζόταν σε έρευνες και εθνικές εκθέσεις θεωρήθηκε ανεπαρκής για την αντιμετώπιση των νέων καταστάσεων. Επίσης, οι σχέσεις με μαθηματικούς έπρεπε να επανεξεταστούν προκειμένου να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά τα εκπαιδευτικά προβλήματα.

1.4 Μεταρρυθμίσεις του προγράμματος σπουδών στον 20ό αιώνα και το κίνημα του Perry

Την εποχή που γεννήθηκε το ICMI τα ζητήματα που σχετίζονταν με την κατασκευή των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών συζητούνταν έντονα σε πολλές χώρες. Οι συζητήσεις αυτές δεν συζητούσαν μόνο θέματα που ήταν κοινά για τα διάφορα έθνη, αλλά και θέματα που αφορούν συγκεκριμένα έθνη. Για παράδειγμα, τόσο στο Ηνωμένο

Βασίλειο όσο και στην Ιταλία, η επάρκεια των Στοιχείων του Ευκλείδη για τη διδασκαλία των γεωμετρίας ήταν ένα πολυσυζητημένο θέμα. Στις αρχές της δεκαετίας του 1870 η AIGT (Ένωση για τη Βελτίωση της διδασκαλίας της γεωμετρίας) είχε δημιουργηθεί για να εξετάσει και να αμφισβητήσει την παράδοση της χρήσης της αποστήθισης ασκήσεων για τις εισαγωγικές εξετάσεις στα βρετανικά πανεπιστήμια. Οι συζητήσεις που ακολούθησαν δημιούργησαν πολυάριθμα εναλλακτικά εγχειρίδια και οδήγησαν επίσης σε ορισμένες αλλαγές στις εισαγωγικές εξετάσεις. Αλλά το 1901 η Βρετανική Ένωση για την Προώθηση της Επιστήμης φιλοξένησε μια ομιλία του John Perry που θα επηρεάσει τη μαθηματική εκπαίδευση σε ολόκληρο τον κόσμο. Ο John Perry επιτέθηκε σε ολόκληρο το σύστημα των μαθηματικής εκπαίδευσης το οποίο, όπως υποστήριξε, δεν λάμβανε υπόψη του το μυαλό των παιδιών, τα ενδιαφέροντά τους, τις εφαρμογές των μαθηματικών και τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών τομέων των μαθηματικών. Στην Αγγλία, το "Perry κίνημα" έδωσε το έναυσμα για πολλές συζητήσεις σχετικά με τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών και για την ανάγκη για την ανασύσταση της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης (A. G. Howson, 1982). Στην Ιταλία μια προσαρμογή των Στοιχείων του Ευκλείδη δημοσιεύτηκε το 1867-1868 ως το πρώτο ιταλικό εγχειρίδιο μετά την ενοποίηση. Οι συγγραφείς ήταν διάσημοι μαθηματικοί που υπερασπίστηκαν την ιδέα της καθαρότητας των γεωμετρίας απέναντι στις επικρίσεις που διατυπώθηκαν στην Ιταλία και στο Ηνωμένο Βασίλειο. Οι Ιταλοί μεταρρυθμιστές έδωσαν έμφαση στην σημασία της προετοιμασίας και της δημοσίευσης καλών εγχειριδίων με βάση την ευκλείδεια μέθοδο. Στην Ιταλία, η έρευνα στον τομέα της γεωμετρίας ανθούσε και πολλοί σημαντικοί ερευνητές ασχολήθηκαν με την συγγραφή εγχειριδίων. Για την κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εισήχθη μια διαισθητική γεωμετρία βασισμένη στη παρατήρηση και σε πειραματικές δραστηριότητες. Προς το τέλος του 19ου αιώνα στις ΗΠΑ διορίστηκε μια "Επιτροπή των Δέκα" για να κάνει συστάσεις για την τυποποίηση, ως προς το περιεχόμενο και τις μεθόδους, των αμερικανικών σχολικών προγραμμάτων σπουδών.(kilpatrick, 2020) . Η υποεπιτροπή για τα μαθηματικά παρήγαγε μια σειρά συστάσεων, για μαθηματικά προγράμματα σπουδών από το δημοτικό έως το γυμνάσιο, οι οποίες μπορούν να συνοψιστούν στις λέξεις-κλειδιά "άσκηση της νοητικής δραστηριότητας του μαθητή" και "οι κανόνες πρέπει να προκύπτουν επαγωγικά αντί να διατυπώνονται δογματικά". Στη Γαλλία, μια μεταρρύθμιση του 1902 που απευθυνόταν ειδικά στα λύκεια αναγνώρισε την ανάγκη να δοθεί έμφαση στις νέες σύγχρονες ανθρωπιστικές επιστήμες, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών, και να καταργηθεί το μονοπώλιο των κλασικών ανθρωπιστικών επιστημών. Οι μεταρρυθμιστές ζήτησαν επίσης τα σχολικά μαθηματικά να αποκτήσουν μεγαλύτερη αίσθηση της πραγματικότητας, εμφανίζοντας περισσότερες εφαρμογές στις επιστήμες της ζωής (Gispert, 2009). Μια σημαντική πτυχή της μεταρρύθμισης ήταν η εισαγωγή στοιχείων διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Υπενθυμίζουμε ότι κατά την περίοδο αυτή η Γαλλία ήταν μια από τις κορυφαίες χώρες στον τομέα της ανάλυσης. Τόσο η γαλλική μεταρρύθμιση όσο και το κίνημα Perry με το αίτημά του για μεγαλύτερη έμφαση στον λογισμό έδωσαν ώθηση στο γερμανικό μεταρρυθμιστικό κίνημα με επικεφαλής τον Klein. Αυτό το κίνημα, του οποίου η βασική φράση ήταν "λειτουργικός συλλογισμός", είχε μεταξύ των κύριων στόχων του τη μετατόπιση προς τα κάτω ορισμένων στοιχείων τού διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού από το πανεπιστήμιο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ωστόσο, το περιεχόμενο της μεταρρύθμισης δεν περιορίστηκε στα τελευταία σχολικά έτη ,αντίθετα, η μεταρρύθμιση ξεκίνησε από τις κατώτερες τάξεις και αφορούσε πολλούς εκπαιδευτικούς (Schubring, 2000). Η σημερινή έμφαση που δίνεται στις συναρτήσεις ως εννοιολογικό δομικό στοιχείο για τη διδασκαλία και τη μάθηση της άλγεβρας και της γεωμετρίας θυμίζει αυτή την γερμανικό μεταρρυθμιστικό κίνημα (Törner & Sriraman, 2005). Ειδικότερα, ο ρόλος της αναλυτικής γεωμετρίας στην μελέτη των συναρτήσεων τονίστηκε και έτσι δημιουργήθηκε και καθιερώθηκε μια σύνδεση μεταξύ της σχολικής γεωμετρίας και της άλγεβρας. Επιπλέον, το πρόγραμμα Erlanger του Klein, το οποίο χαρακτήριζε τη γεωμετρία ως τη μελέτη των αναλλοίωτων ιδιοτήτων κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών, αποτέλεσε ένα ερέθισμα για βαθύτερη εργασία πάνω στην γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αφού έγινε ο ιδρυτικός πρόεδρος του ICMI το 1908, ο Klein προώθησε μια διεθνή μεταρρύθμιση βασισμένη στις ιδέες των γερμανικών μεταρρυθμίσεων. Μια διεθνής σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών, η οποία αποτελούσε μέρος της ατζέντα του ICMI από την αρχή, θα λειτουργούσε ως βασικό στοιχείο που θα επέτρεπε την υλοποίηση αυτής της πρότασης (Schubring, 2000). Αν και δεν συμμετείχαν όλες οι χώρες ενεργά, πολλές ξεκίνησαν σημαντική μεταρρύθμιση των προγραμμάτων σπουδών δραστηριότητες κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Σύμφωνα με τον Schubring (2000) στις χώρες αυτές περιλαμβάνονταν η Αυστρία, το Βέλγιο, Δανία, Γαλλία, Γερμανία, Μεγάλη Βρετανία, Ουγγαρία, Σουηδία και ΗΠΑ. Η ανάλυσή σχετικά με το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών σε διάφορα έθνη μας οδήγησε να συμφωνήσουμε με τον Howson (2003) ότι μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1950 υπήρχε σημαντική συμφωνία σχετικά με το τι σχολική άλγεβρα θα μπορούσε να σημαίνει. Μετά την εισαγωγή των γραμμάτων για τη σήμανση αριθμών ή μεταβλητών θα έπρεπε να έρθει η κατασκευή αλγεβρικών τύπων, ακολουθούμενη από το σχηματισμό ή την επίλυση γραμμικών εξισώσεων, στη συνέχεια τετραγωνικές, στη συνέχεια ταυτόχρονες γραμμικές εξισώσεις και οι ιδιότητες των ριζών των τετραγωνικών και κυβικών εξισώσεων. Αντίθετα, μπορεί να υπάρχουν αξιοσημείωτες διαφορές στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Αυτές αφορούσαν την εγγύτητα στον αρχικό Ευκλείδη, το επίπεδο αυστηρότητας, τη χρήση αλγεβρικών ή αναλυτικών μέσων, το πείραμα ή την διαίσθηση , τη χρήση γεωμετρικών μετασχηματισμών. Παρ' όλα αυτά, συμφωνήθηκε γενικά ότι στα περισσότερα έθνη η προσοχή σε ένα μικρό αριθμό κλασικών θεωρημάτων της γεωμετρίας ήταν απαραίτητη - τα θεωρήματα αυτά περιλάμβαναν το θεώρημα του Πυθαγόρα, το θεώρημα του Θαλή ή το θεώρημα της τομής, τα θεωρήματα του κύκλου, καθώς και οι ιδιότητες της σύμπτωσης και της ομοιότητας(Schubring, 1999).

1.5 Τα «Νέα Μαθηματικά» (New Maths)

Μια δεύτερη διεθνής μεταρρύθμιση που έλαβε χώρα τη δεκαετία του 1960 θεωρείται ότι έχει προήλθε από την ομάδα μαθηματικών που ιδρύθηκε το 1932 υπό το υποτιθέμενο όνομα Bourbaki. Το ενδιαφέρον της ομάδας Bourbaki για τη μαθηματική εκπαίδευση ξεκίνησε το δεκαετία του 1950, όταν ορισμένα από τα μέλη της εντάχθηκαν στη Διεθνή Επιτροπή CIEAEM (Commission Internationale pour l' Étude et l' Amélioration de l' Enseignement des Mathématiques), η οποία ιδρύθηκε από τον Caleb Gattegno με στόχο τη μελέτη και τη βελτίωση της της διδασκαλίας των μαθηματικών(Félix, 1985) . Η Επιτροπή αυτή περιελάμβανε άτομα από διαφορετικό υπόβαθρο (μαθηματικοί, παιδαγωγοί, ψυχολόγοι, επιστημολόγοι και καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης). Στα πρώτα χρόνια της λειτουργίας της, οι δράσεις της CIEAEM μπορούν να συνοψιστούν στα ακόλουθα σημεία:

Εκδημοκρατισμός των μαθηματικών, ενεργός παιδαγωγική και πραγματική συμμετοχή των εκπαιδευτικών. Μεταξύ των μαθηματικών αυτής της ερευνητικής ομάδας βρίσκουμε τους μπουρμπακιστές Jean Dieudonné, Gustave Choquet και André Lichnerowicz, οι οποίοι συνέβαλαν επίσης στο κείμενο των Piaget κ.ά. (1955), το οποίο ήταν το πρώτο από τα δύο βιβλία που εξέδωσε το CIEAEM. Σε εκείνο το βιβλίο όλοι οι συγγραφείς αναγνώρισαν τις ευκαιρίες που προσέφεραν τα σύγχρονα μαθηματικά στην σε σχέση με τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών, και ο Dieudonné υποστήριξε ότι η ουσία των μαθηματικών ήταν η συλλογιστική πάνω σε αφηρημένες έννοιες. Το κίνημα των "σύγχρονων μαθηματικών" που αναπτύχθηκε στην Ευρώπη είχε κοινές ρίζες με ένα παράλληλο κίνημα στις ΗΠΑ (Moon, 1986)-το κίνημα των νέων μαθηματικών που ξεκίνησε στις αρχές της δεκαετίας του 1950 από τον Max Beberman με τη δημιουργία του Πανεπιστημίου του Illinois Committee on School Mathematics (UICSM). Αμέσως μετά την εκτόξευση του Σπούτνικ το 1957, η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία δημιούργησε την Ομάδα Μελέτης Σχολικών Μαθηματικών (SMSG) για την ανάπτυξη ενός νέου προγράμματος σπουδών για τα λύκεια. Το 1958, ο Edward G. Begle, τότε στο Πανεπιστήμιο Yale, διορίστηκε διευθυντής της Ομάδα Μελέτης Σχολικών Μαθηματικών (SMSG) (Neill, 1975). Μεταξύ των πολλών ομάδων προγραμμάτων σπουδών που δημιουργήθηκαν στις ΗΠΑ κατά τη διάρκεια της νέα μαθηματικά, η SMSG ήταν, ίσως, η πιο επιδραστική. Οι εμπειρίες αυτής της ομάδας και των πολυάριθμων άλλων ομάδων προγραμμάτων σπουδών μαθηματικών που δημιουργήθηκαν γύρω από εκείνη την επωφελήθηκαν από τις συνεισφορές της ψυχολογίας (Kilpatrick, 1992).Όλα αυτά τα ρεύματα μεταρρύθμισης που σχετίζονται με τα σύγχρονα ή νέα μαθηματικά συναντήθηκαν το 1959 σε μια διεθνές συνέδριο που πραγματοποιήθηκε στο Royaumont, κοντά στο Παρίσι. Το συνέδριο οργανώθηκε από τον OEEC (Οργανισμός Ευρωπαϊκής Οικονομικής Συνεργασίας), υπό την προεδρία του Marshall Stone, πρόεδρος του ICMI. Σημαντικό ρόλο έπαιξαν τα μέλη της CIEAEM, ιδίως ο Dieudonné, ο οποίος έδωσε διάλεξη σχετικά με τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια σχολείο στο πανεπιστήμιο. Σύμφωνα με τον Dieudonné, η διδασκαλία της γεωμετρίας πρέπει να προχωρήσει από τους πραγματικούς αριθμούς, θεσπίζοντας κανόνες για τις πράξεις σε ένα σύνολο απροσδιόριστων αντικειμένων έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια δομή διανυσματικού χώρου. Οι μετρικές σχέσεις στη συνέχεια θα εισάγονται μέσω ενός κλιμακωτού γινομένου. Η ευκλείδεια γεωμετρία θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί μόνο σε τρία μαθήματα, στα οποία θα παρουσιαζόταν το σύστημα των αξιωμάτων. Οι ιδιότητες των τριγώνων δεν θα έπαιζαν ρόλο σε αυτή τη νέα ανάπτυξη (OEEC, 1961). **Τα «Νέα μαθηματικά» ανέδειξαν την αφαίρεση ως τη σημαντικότερη αξία της μαθηματικής**

εκπαίδευσης. Η εστίαση στις αφηρημένες έννοιες οδήγησε σε μια τυπική, αυστηρά δομημένη διδακτική προσέγγιση, που εστιάζει στη συστηματοποίηση των μαθηματικών ιδεών με χρήση των συμβόλων. Αφηρημένα μαθηματικά σημαίνει: μη συνδεδεμένα με συγκεκριμένο πλαίσιο (Goffree, 1993).Σημειώνουμε ότι την ίδια χρονιά, το 1959, πραγματοποιήθηκε το συνέδριο του Woods Hole στο ΗΠΑ, με γενικότερο στόχο τη βελτίωση της επιστημονικής εκπαίδευσης, και φέρνοντας σε επαφή επιστήμονες, μαθηματικούς, ψυχολόγους και άλλους(Bruner, 1960) .Ο στόχος της Διάσκεψης του Royaumont ήταν να επιτευχθεί η διδακτέα ύλη των μαθηματικών αλλά, δεδομένου ότι τόσο οι ΗΠΑ όσο και ο Καναδάς είχαν προσκληθεί να συμμετάσχουν, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι μια διεθνής μεταρρύθμιση που εκτεινόταν πέρα από τα ευρωπαϊκά έθνη ήταν επιθυμητή. Η διάσκεψη είχε μια πιο πρακτική συνέχεια το 1962 στο Ντουμπρόβνικ της Γιουγκοσλαβίας, όταν μια ομάδα εμπειρογνωμόνων συναντήθηκε για να εκπονήσει ένα σύγχρονο πρόγραμμα για τη διδασκαλία των μαθηματικών στα δευτεροβάθμια σχολεία. Στα προγράμματα γεωμετρίας για τις ηλικίες 15-18 που παρήγαγε η Επιτροπή, το καρτεσιανό επίπεδο οριζόταν ως διανυσματικός χώρος διάστασης δύο με ένα κλιμακωτό γινόμενο. Για παιδιά ηλικίας 11 έως 15 ετών, μια πιο διαισθητική προσέγγιση της γεωμετρίας, σύμφωνα με τις προτάσεις του βελγικού Paul Libois. Όσον αφορά την άλγεβρα, τα περιεχόμενα που αναφέρονται στο Dubrovnik περιελάμβανε σύνολα, εφαρμογές και συναρτήσεις, την εισαγωγή στους πραγματικούς αριθμούς, στοιχεία της θεωρίας αριθμών, συνδυαστική, ομάδες και δομές, γραμμικές εφαρμογές και πίνακες. Ορισμένα από αυτά τα θέματα θα γίνονταν προαπαιτούμενα σε πολλά προγράμματα σπουδών. Η θεωρία συνόλων ήταν ένα σημαντικό ενοποιητικό θέμα και επηρέασε έντονα τη γλώσσα που χρησιμοποιούνταν στα εγχειρίδια που γράφτηκαν για τα σύγχρονα μαθηματικά. Τόσο στην Ευρώπη όσο και στις ΗΠΑ, η πορεία της καινοτομίας θα ξεκινούσε από το πανεπιστήμιο για να προχωρήσει από τα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα δημοτικά σχολεία. Η θεωρία συνόλων θα ήταν παρούσα σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης .(Pellerey, 1989).

Πολλές χώρες υιοθέτησαν επίσημα τα σύγχρονα προγράμματα μαθηματικών και στη Γαλλία και Βέλγιο οι προτάσεις ήταν απολύτως σύμφωνες με τις απόψεις του Μπουρμπακισμού. Παρόλο που τα κινήματα των μοντέρνων/νέων μαθηματικών σύντομα προκάλεσαν έντονες αντιδράσεις (Ahlfors et al., 1962; Kline, 1973), οι εκτενείς συζητήσεις σχετικά με τις αλλαγές στα σχολικά μαθηματικά αποτέλεσε εφαλτήριο για μεταγενέστερες, πιο στέρεα θεμελιωμένες μεταρρυθμίσεις πρωτοβουλίες στη δεκαετία του 1960. Στο Ηνωμένο Βασίλειο, το 1961 ξεκίνησε το School Mathematics Project, και το έργο της Edith Biggs και το "Nuffield Project" εκλαΐκευσε τη χρήση συγκεκριμένων υλικών και εργαστηριακών τεχνικών στα βρετανικά προγράμματα μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Το 1967 η Σκανδιναβική Επιτροπή για τον Εκσυγχρονισμό των Σχολικών Μαθηματικών (Δανία, Φινλανδία, Νορβηγία και Σουηδία) παρουσίασε ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα εμπνευσμένο από τα νέα μαθηματικά. Ένα από τα πιο γνωστά μέλη αυτής της επιτροπής ήταν ο Bent Christiansen, από τη Δανία. Το 1968 ιδρύθηκε το Zentrum für Didaktik der Mathematik (Κέντρο για τη διδακτική των μαθηματικών). στην Καρλσρούη από τους Hans Georg Steiner και Heinz Kunle. Ακολούθησε το 1973 από το IDM (Institut für Didaktik der Mathematik), που ιδρύθηκε στο Bielefeld από τον Steiner, Michael Otte και Heinrich Bauersfeld, οι στόχοι του οποίου συνδύαζαν την πρακτική στο σχολείο και την θεωρητική έρευνα. Το 1969 ιδρύθηκαν τα πρώτα IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) στη Λυών, το Παρίσι και το Στρασβούργο. Στις αρχές της δεκαετίας του 1970 ιδρύθηκε η συνεργατική ομάδα για την έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση στο Κέντρο Μαθηματικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου του Σαουθάμπτον, με τον Geoffrey Howson και Bryan Thwaites ως συνεργάτες. Το 1971 ο Hans Freudenthal ίδρυσε το Ινστιτούτο Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO, Ινστιτούτο για την Ανάπτυξη του Διδασκαλίας των Μαθηματικών). Η πρωτοβουλία αυτή είχε τις μακρινές της ρίζες στο "Mathematics Working Group" που ιδρύθηκε το 1936 από την Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa. Οι συνεδριάσεις αυτής της ομάδας συμμετείχε ο Freudenthal και αποτέλεσαν ένα πρώτο βήμα στη διαδοχική ανάπτυξη του κινήματος των "Ρεαλιστικών Μαθηματικών", του οποίου αρχικά ηγήθηκε ο Freudenthal (Smid, 2009). Νέα θέματα τύπου Bourbakist, όπως τα διανύσματα, οι μετασχηματισμοί, οι πίνακες και η θεωρία συνόλων συμπεριλήφθηκαν στα σχολικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών σε πολλές χώρες, και μια μεγαλύτερη έμφαση στις πιθανότητες και τη στατιστική έγινε το ζητούμενο. Η δεκαετία του 1970 ήταν γόνιμα χρόνια για τη δημιουργία έργων, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι οι παρουσιάσεις 15 έργων αναφέρθηκαν στα πρακτικά του τρίτου διεθνούς συνεδρίου για την Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICME-3), που πραγματοποιήθηκε στην Καρλσρούη της Γερμανίας το 1976. Αυτά και άλλες αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση σκιαγραφήθηκαν σε ένα ειδικό τεύχος του περιοδικού Educational Studies in Mathematics με τίτλο "Change in

Mathematics Education Since the Late1950s-Ideas and Realisation: An ICMI Report" (1978).

1.6 Από το "Math Moderne" στα "Μαθηματικά για όλους"

Οι μαθηματικοί Artin, Dieudonné, Papy και Servais ήταν οι ηγετικές φυσιογνωμίες της Επιτροπής στη δεκαετία του '60 και του αρχές της δεκαετίας του '70. Υποστήριξαν τον εκσυγχρονισμό της διδασκαλίας των μαθηματικών και την πλήρη ανασυγκρότηση των σχολικών μαθηματικών" από το νηπιαγωγείο έως το πανεπιστήμιο". Η συζήτηση στο πλαίσιο της CIEAEM μετατοπίστηκε προς την αναδιατύπωση και την αναδιοργάνωση του μαθηματικού περιεχομένου των προγραμμάτων σπουδών ή των κατευθυντήριων γραμμών σύμφωνα με τις κύριες ιδέες και τις κύριες μεθόδους της "Μαθηματικής Moderne". Οι ιδέες τους άσκησαν μεγάλη επιρροή στις ευρωπαϊκές και διεθνείς συζητήσεις για τα "Νέα Μαθηματικά" και τα έγγραφά τους έχουν δημοσιευθεί σε σημαντικές εκδόσεις της UNESCO και του ΟΟΣΑ. Όμως, έθεσαν επίσης επί τάπητος πολύ αμφιλεγόμενες συζητήσεις στο πλαίσιο του CIEAEM, ιδίως όταν έγινε φανερό ότι οι πολιτικές μεταρρυθμίσεις συνίσταντο κυρίως σε επιφανειακές αλλαγές στην ορολογία, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι νέες απαιτήσεις των μαθηματικών, τα νέα κοινωνικά πλαίσια, και τις νέες συνθήκες μάθησης και διδασκαλίας. Στα τέλη της δεκαετίας του '70 και του '80, πρόεδροι της CIEAEM, όπως η Πολωνή μαθηματικός και εκπαιδευτικός των μαθηματικών Anna Sofia Krygowska, η Ιταλίδα παιδαγωγός Emma Castelnuovo, ο Καναδός εκπαιδευτικός μαθηματικών Claude Gaulin και ο Ολλανδός μαθηματικός Hans Freudenthal, έθεσαν ένα πολύ διαφορετικό επίκεντρο για την CIEAEM. Προσπάθησαν να βάλουν τέλος στην "ευγενή απομόνωση" των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης και του προσανατολισμού της μόνο προς τα καθαρά μαθηματικά, και να συνδέσουν την μαθηματική εκπαίδευση πιο κοντά στις άλλες επιστήμες, στην κοινωνική πραγματικότητα και στην κοινωνική μαθηματική πρακτική. Οφείλεται στις πρωτοβουλίες τους ότι τα θέματα των συναντήσεων του CIEAEM διαμορφώθηκαν και έγιναν αντιληπτά όλο και περισσότερο διεπιστημονικά και διεπιστημονικά: Τα "Μαθηματικά για όλους" έγινε προγραμματικό αίτημα. Ταυτόχρονα, οι συναντήσεις CIEAEM αυξήθηκαν σε ένα μεγάλο διεθνές φόρουμ.

1.7 Σταδιακές μεταρρυθμίσεις

Εκτός από αυτές τις ισχυρές καινοτομίες στο πρόγραμμα σπουδών, υπήρχαν επίσης κάποιες υφέρπουσες μεταρρυθμίσεις που επηρέασαν τόσο το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών όσο και τις μεθόδους διδασκαλίας και μάθησης σε σχολικά μαθηματικά. Το καινοτόμο πειραματικό έργο των ψυχολόγων, τα νέα διδακτικά βοηθήματα και τα μεταρρυθμιστικά κινήματα των αρχών του 20ου αιώνα έφεραν ένα ενδιαφέρον μεταξύ των μαθηματικών για τα εργαστήρια μαθηματικών(Bruner, 1960) στα οποία οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ενεργά όργανα σχεδίασης, υπολογιστικές μηχανές και χειριστικά υλικά μέσα. Στις αρχές του 20ού αιώνα, ο Peter Treutlein, ένας Γερμανός μαθηματικός, ανέπτυξε περισσότερα από 200 μοντέλα που θα μπορούσαν να βοηθήσουν τη διδασκαλία της γεωμετρίας (Friedman, 2016).Τα μοντέλα αυτά κατασκευάστηκαν και διανεμήθηκαν από διάσημους κατασκευαστές, όπως αυτοί του Ludwig Brill (Darmstadt) και Martin Shilling (στο Halle και στη συνέχεια στη Λειψία) στα μέσα του 20ού αιώνα. αιώνα, και χρησιμοποιήθηκαν ευρέως στα γερμανικά πανεπιστήμια και πολυτεχνεία. Το 1945 μια επετηρίδα του NCTM ήταν αφιερωμένη στη μέτρηση και τη σχεδίαση οργάνων και στη δημιουργία τρισδιάστατων φυσικών μοντέλων. Ένας ενεργός προωθητής στον τομέα αυτό ήταν ο Gattegno, ο οποίος εστίασε τις πρώτες δραστηριότητες του CIEAEM σε συγκεκριμένα υλικά(Gattegno, 1958) Η δραστηριότητα αυτή είχε σημαντική διδακτική μεταφορά στο έργο της καθηγήτριας Emma Castelnuovo. Ο Gattegno, καθώς και η μαθηματικός και ψυχολόγος Zoltan Dienes, υποστήριξαν σθεναρά τη χρήση της χειριστικών μέσων, όπως ράβδοι Cuisenaire και λογικά τουβλάκια, στις δραστηριότητες της τάξης. Το παρουσία του Dienes στο ICME-1 στη Λυών της Γαλλίας το 1969 μαρτυρούσε το ενδιαφέρον του ICMI για τη χρήση συγκεκριμένων υλικών. Άλλοι ψυχολόγοι, συμπεριλαμβανομένου του Jean Piaget, επηρέασαν το κίνημα. Willmore (1972) και Price (1995) έχουν επισημάνει τη σημασία αυτού του γεγονότος για την αλλαγή του τρόπου σκέψης σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Ο Libois χρησιμοποίησε συγκεκριμένα υλικά στο École Decroly στις Βρυξέλλες, και στο Ηνωμένο Βασίλειο, η Ένωση Καθηγητών Μαθηματικών (ATM) υποστήριξε σθεναρά την πρωτοβουλία του Gattegno για την προώθηση της χρήσης χειριστικών μέσων. Τα χειραγωγικά μέσα έγιναν ένα μέσο για τη διαίσθηση και το πείραμα στην τάξη, και προετοίμασαν το σχολικό περιβάλλον για να υποδεχτεί μεταγενέστερες καινοτομίες με τη μαθηματική τεχνολογία (Ruthven, 2008). Ο Gattegno συνέγραψε καινοτόμο λογισμικό για τη διδασκαλία των δημοτικών έννοιες της αρίθμησης και ταινίες για τη διδασκαλία της γεωμετρίας που επέκτειναν ορισμένα από τα θέματα στις ταινίες του Jean Nicolet (Powell, 2007).Στα πρακτικά του πρώτου συνεδρίου του ICME (1969) βρίσκουμε αναφορά στα παιχνίδια, φύλλα εργασίας, ταινίες, βιντεοπροβολείς και σε συγκεκριμένο υλικό που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στο τάξη. Η χρήση των υλικών τίθεται σε σχέση με μια νέα μεθοδολογία της τάξης δραστηριοτήτων που περιλαμβάνει επίσης ομάδες εργασίας και συζήτηση στην τάξη. Εκείνη την εποχή, οι υπολογιστές έμπαιναν στις συζητήσεις για τη μαθηματική εκπαίδευση. Μια ρητή αναφορά στο ρόλο των υπολογιστών στα σχολικά μαθηματικά, ειδικά για τα εφαρμοσμένα μαθηματικών, έγινε από τον Bryan Thwaites (1969) στην ομιλία του στο ICME1. Την ίδια συνέδριο, ο Frédérique Papy παρουσίασε τον "μικροϋπολογιστή" (Papy, 1969). Ο αρχικός ενδιαφέρον για τις αλγοριθμικές πτυχές ή για τα διακριτά μαθηματικά δημιούργησε μια θέση για προγραμματισμό ως μέσο για την επίτευξη αυστηρότητας (Furinghetti, 2008)

1.8 Ανάδυση νέων προσεγγίσεων στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Στη δεκαετία του 1950 η μαθηματική έρευνα άλλαξε κατεύθυνση, καθώς και ο ρόλος των μαθηματικών στην κοινωνία άλλαξε. Νέες χρήσεις των μαθηματικών προωθήθηκαν από τις εξελίξεις στην τεχνολογία, καθώς και από τους πολιτικούς συσχετισμούς με τον διαστημικό αγώνα και τον ανταγωνισμό μεταξύ των προηγμένων χωρών του πλανήτη. Η διδασκαλία των μαθηματικών έγινε αντιληπτή από τις κυβερνήσεις ως συνδεδεμένη με μια σημαντική δυναμική για την εξουσία μεταξύ των εθνών. Εν τω μεταξύ, τα σχολεία καλούνταν να αντιμετωπίσουν την ταχεία αύξηση του πληθυσμού και τα συναφή εκπαιδευτικά προβλήματα. Δεδομένης της πολυπλοκότητας των αναδυόμενων εκπαιδευτικών προβλημάτων, η απλή μελέτη και σύγκριση των αναλυτικών προγραμμάτων και των προγραμμάτων, που ήταν οι κύριες δραστηριότητες των πρώτων ετών του ICMI, κρίθηκαν ανεπαρκείς. Νέες προσεγγίσεις στη μαθηματική εκπαίδευση κατάλληλες για την μεταβαλλόμενα μαθηματικά και κοινωνικά πλαίσια ήταν απαραίτητη (Furinghetti, Menghini, Arzarello, & Giacardi 2008). Διάφορες πρωτοβουλίες, όπως η

CIEAEM και οι ομάδες διδακτικού προγράμματος των ΗΠΑ, επεσήμαναν την ανάγκη συνεργασίας μεταξύ μαθηματικών, εκπαιδευτικών ψυχολόγων, εκπαιδευτών εκπαιδευτικών μαθηματικών και εκπαιδευτικών μαθηματικών. Σαφώς, είχε προκύψει μια ανάγκη για νέα επαγγελματική εμπειρογνωμοσύνη που χαρακτηρίζεται από αυτό που η Krygowska (1968) ονόμασε "σύνορα έρευνα", η οποία αναγνώριζε τη μαθηματική εκπαίδευση ως επιστημονικό κλάδο.

Ο Freudenthal (1963) παρατήρησε ότι η ιστορία είχε δείξει τη στειρότητα των προβλημάτων της απλής οργάνωσης. Μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 1960 το ερευνητικό ενδιαφέρον μετατοπίστηκε από τα αναλυτικά προγράμματα θέματα προς την ευρύτερη μελέτη των διαφόρων διαστάσεων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Εκεί διαμορφώθηκε μια τάση διεύρυνσης του πεδίου εφαρμογής των παρεμβάσεων στο αναλυτικό πρόγραμμα, για παράδειγμα σε προσχολική ηλικία και σε περιβάλλοντα επαγγελματικής εκπαίδευσης και εκπαίδευσης ενηλίκων. Υπήρξε επίσης μια έκκληση για περισσότερη προσεκτική επιστημονική έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση. Μια ισχυρή επιχειρηματολογία για τη σημασία της εμπειρικής έρευνας διατυπώθηκε στο πρώτο ICME το 1969 από τον Begle, τότε στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ. Το ενδιαφέρον για την εμπειρική έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση αυξανόταν στις ΗΠΑ και, από το μέσα της δεκαετίας του 1960, διάφορα συνέδρια που συζητούσαν τις προτεραιότητες της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση έλαβαν χώρα. Μέχρι το 1968 είχε συσταθεί μια ομάδα ειδικού ενδιαφέροντος για την έρευνα στην εκπαίδευση των μαθηματικών στο πλαίσιο της Αμερικανικής Ένωσης Εκπαιδευτικής Έρευνας (Kilpatrick, 1992). Αν και αυτό το είδος έρευνας δεν είχε αγκαλιαστεί σε πολλές άλλες χώρες, η ανάπτυξη των διεθνών ερευνητικών περιοδικών και κέντρων θα άλλαζε αυτή την προοπτική. Όπως αναφέρει το Fehr και Glaymann (1972) δήλωσαν στην έκδοση της UNESCO New Trends in Mathematics Teaching: Το κίνημα της μεταρρύθμισης των προγραμμάτων σπουδών των δύο τελευταίων δεκαετιών στα σχολικά μαθηματικά είχε ως στόχο κυρίως στη βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής. Δεν σχεδιάστηκε για να αυξήσει τον αριθμό ή την ποιότητα των ερευνητικών μελετών στη μαθηματική εκπαίδευση. Παρ' όλα αυτά, το κίνημα της μεταρρύθμισης τόνωσε σε τεράστιο βαθμό την έρευνα αυτή - εν μέρει επειδή οι μεταρρυθμιστές του προγράμματος σπουδών έπρεπε να αποδείξουν ότι το έργο τους μπορεί να κάνει τη διαφορά στην τάξη- εν μέρει επειδή αυτοί οι μεταρρυθμιστές αναγνώρισαν ότι οι μελλοντικές αλλαγές μπορούν να διαχειριστούν καλύτερα, αν κατανοήσουμε περισσότερα για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών- και εν μέρει επειδή οι ζυμώσεις στο πρόγραμμα σπουδών έχει προσελκύσει πολλούς νέους μελετητές στη μελέτη των προβλημάτων στα μαθηματική εκπαίδευση (Neill, 1975). Υπήρχε επίσης μια αυξανόμενη αναγνώριση της ανάγκης για την ακαδημαϊκή νομιμότητα των ειδικών στη μαθηματική εκπαίδευση να αναγνωρίζεται και να γίνεται σεβαστή. Τα "Ψηφίσματα της του Πρώτου Διεθνούς Συνεδρίου για τη Μαθηματική Εκπαίδευση" (1969) υπέθεσαν ότι η μαθηματική εκπαίδευση είχε αρχίσει να γίνεται μια αυτοτελής επιστήμη, με τα δικά της προβλήματα που αφορούν τόσο το μαθηματικό όσο και το παιδαγωγικό περιεχόμενο. Το ICME κάλεσε τη νέα επιστήμη της μαθηματικής εκπαίδευσης να λάβει θέση στα κατάλληλα μαθηματικά τμήματα των πανεπιστημίων ή ερευνητικών ινστιτούτων. Αυτή η συζήτηση σχετικά με την ταυτότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης, ή της διδακτικής της μαθηματικών -η προτιμώμενη ονοματολογία σε ορισμένες χώρες- συνεχίστηκε στο ICME-2 το 1972. Η Anna Zofia Krygowska, για παράδειγμα, στη συνεισφορά της στην ομάδα εργασίας σχετικά με την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, της οποίας προήδρευε ο Steiner, προσδιόρισε τέσσερις πτυχές της διδακτικής των μαθηματικών: μια σύνθεση των κατάλληλων μαθηματικών, εκπαιδευτικών, πολιτιστικών και περιβαλλοντικών ιδεών- μια εισαγωγή στην έρευνα, η φύση και η κατάσταση του παιδιού- και η πρακτική εμπειρία (βλ. Howson, 1973). Ο Bent Christiansen (1975) διέκρινε μεταξύ της μαθηματικής εκπαίδευσης ως διαδικασίας την αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών στις τάξεις τους και τη διδακτική των μαθηματικών, η οποία ήταν η μελέτη αυτής της διαδικασίας. Αναγνώρισε στη διδακτική των μαθηματικών την ιδιότητα ενός νέου επιστημονικού κλάδου και επεσήμανε ότι πρέπει να διδάσκεται από ειδικούς - "διδακτικούς των μαθηματικών"- και όχι από ειδικούς της γενικής εκπαίδευσης.

1.9 Οι γνωστικές επιστήμες και η μαθηματική εκπαίδευση

Από τα τέλη του 19ου αιώνα οι απαντήσεις σε ζητήματα που σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών αναζητούνται σε τομείς εκτός των μαθηματικών. Οι πρώτες εργασίες που πραγματοποιήθηκαν σε αυτόν τον τομέα αφορούσαν μαθητές με ιδιαίτερες ανάγκες, αλλά οι μέθοδοι που εφαρμόστηκαν σε αυτές τις περιπτώσεις αποδείχθηκαν σύντομα κατάλληλες για την αντιμετώπιση προβλημάτων που σχετίζονται με τη διδασκαλία και τη μάθηση όλων των παιδιών στο δημοτικό σχολείο. Το μαθηματικό περιεχόμενο που ελήφθη υπόψη αφορούσε κυρίως την αριθμητική, αλλά η χρήση συγκεκριμένων υλικών επηρέασε επίσης τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Οι εκπαιδευτικοί πραγματοποιούσαν το έργο τους σε σχολεία πρακτικής που ιδρύθηκαν και διευθύνθηκαν με σκοπό να πειραματιστούν με νέες μεθόδους διδασκαλίας. Σε αυτά τα σχολεία η πρακτική ήταν στενά συνυφασμένη με έρευνα και προέκυψαν δύο διαφορετικά ερευνητικά ρεύματα: το ένα αφορούσε την έρευνα για τη διδασκαλία η άλλη με την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών. Σε αυτές τις εξελίξεις οι ρίζες των θεωριών της μάθησης που ασχολούνται με το τι συμβαίνει στον εγκέφαλο του μαθητή (όπως στη θεωρία του Piaget) μπορούν να αναγνωριστούν, όπως επίσης και οι θεωρίες διδασκαλίας που αναφέρονται στις συμπεριφορές που πρέπει να αναλαμβάνει ένα παιδί κατά την προκειμένου να μάθει (όπως στη θεωρία του Bruner). Η επιρροή του έργου των παιδαγωγών και των ψυχολόγων στη μαθηματική εκπαίδευση πιθανώς ξεκίνησε στις αρχές του 19ου αιώνα μέσω του Ελβετού παιδαγωγού Johann Heinrich Pestalozzi. Ο Pestalozzi επηρέασε τη διδασκαλία και τη μάθηση της αριθμητικής και της γεωμετρίας στα δημοτικά σχολεία σε Ευρώπη (G. Howson, 2010). Ένας από τους οπαδούς του ήταν ο Friedrich Fröbel, ο ιδρυτής του γερμανικού οργανισμού νηπιαγωγείων. Ο Fröbel έφερε τους μαθητές του στο να μαθαίνουν μέσω παιχνιδιών και άλλων δραστηριοτήτων - ξύλινα τουβλάκια χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της αριθμητικής και της συγκεκριμένα γεωμετρικά αντικείμενα για τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Ο Johann Friedrich Herbart ήταν ένας άλλος μελετητής που επηρέασε τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία. Γύρω στο 1900, οι ιδέες του Herbart επηρέασαν τη διδασκαλία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών σε διάφορες χώρες (Howson, 1982). Παρά τα στάδια της διδασκαλίας που ο Herbart προέτρεπε τους εκπαιδευτικούς να ακολουθήσουν(Ellerton & Clements, 2005), οι απόψεις του για τη σχέση μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης μπορούν να θεωρηθούν ότι συνάδουν με αυτό που αργότερα έγινε γνωστό ως εποικοδομητισμός. Σε μεγάλο βαθμό βασίστηκε επίσης στις ανθρώπινες και κοινωνικές αλληλεπιδράσεις. Το ενδιαφέρον για την εκπαίδευση των παιδιών αναπτύχθηκε ιδιαίτερα στις ΗΠΑ ως αποτέλεσμα των συγγραμμάτων του John Dewey ο οποίος, το 1896, ίδρυσε ένα εργαστηριακό σχολείο στο Πανεπιστήμιο του Σικάγο. Το 1904 ο Dewey μετακόμισε στο Πανεπιστήμιο Κολούμπια, όπου πέρασε το υπόλοιπο της καριέρας του. O Dewey διαμόρφωσε το πλαίσιο κάθε μάθησης ως αποτέλεσμα της δραστηριότητας. Όσον αφορά τη μάθηση των μαθηματικών, μία από τις κύριες παραδοχές του ήταν ότι η έννοια της ποσότητας κατανοείται από το παιδί ως αποτέλεσμα της επίλυσης πρακτικών προβλημάτων(Stemhagen, 2008) Αυτή η ιδέα της ενεργητικής μάθησης ήταν επίσης παρούσα στο έργο της Maria Montessori, η οποία δημιούργησε ένα σχολείο για παιδιά στη Ρώμη, και του Ovide Decroly που δημιούργησε την École de l'Ermitage στις Βρυξέλλες. Και οι δύο ήταν γιατροί που ανέπτυξαν τις μεθόδους τους όταν εργάζονταν αρχικά με παιδιά με μικρές αναπηρίες. O Decroly's βασιζόταν σε παρατηρήσεις του περιβάλλοντος κόσμου, αλλά η Montessori ανέπτυξε συγκεκριμένες τεχνικές που σκοπό είχαν να βοηθήσουν τα παιδιά να μάθουν αυτόνομα. Μετά από αυτό δημιουργήθηκαν πολλά ψυχολογικά εργαστήρια στην Ευρώπη, συχνά από ψυχολόγους όπως ο Alfred Binet - ο Γάλλος ψυχολόγος διάσημος για τη συμβολή του στη θεωρία και τον έλεγχο της νοημοσύνης -και ο Ελβετός νευρολόγος και παιδοψυχολόγος Claparède. Οι προσπάθειες των παιδιών να μάθουν μαθηματικά μελετήθηκαν συχνά στα εργαστήρια του Binet και του Claparède. Στις ΗΠΑ, η έρευνα για την εκμάθηση των μαθηματικών διεξήχθη από τον Edward Lee Thorndike, έναν συμπεριφοριστή ψυχολόγο που είχε έντονο ενδιαφέρον για τη μάθηση των μαθηματικών, και ο William Brownell, ένας δάσκαλος, ψυχολόγος, εκπαιδευτικός μαθηματικών και ψυχολόγος εκπαίδευσης. Οι Brownell και Thorndike, αν και προέρχονταν από διαφορετικές θεωρητικές θέσεις, ήταν μέρος ενός ευρύτερου κινήματος για τη δημιουργία της επιστήμης της εκπαίδευσης. Το 1922 ο Thorndike δημοσίευσε το βιβλίο του Psychology of Arithmetic και λίγο αργότερα το βιβλίο του Psychology of Algebra (1923). Και οι δύο βασίζονταν στη θεωρία των συσχετίσεων σε μια "συνδετιστική" προοπτική, και είχαν σκοπό να υποστηρίξουν τη σειρά σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών του Thorndike. Ο Brownell, ακολουθώντας τις ιδέες του συμβούλου του Charles H. Judd, τόνισε τη σημασία της "ουσιαστικής μάθησης" σε σχέση με τις μεθόδους "απομνημόνευσης", σε αντίθεση με τις πιο συμπεριφοριστικές απόψεις του Thorndike. (Kilpatrick & Weaver, 1977)

Οι συμπεριφοριστικές ψυχολογικές θεωρίες ("συμπεριφορισμός"), οι οποίες είχαν αναπτυχθεί μέσω πειραμάτων με ζώα, συνδέθηκαν με τη σχολική μάθηση από τον Burrhus Frederic Skinner κατά την περίοδο 1930-1950 με έμφαση σε αυτό που έγινε γνωστό ως λειτουργική προετοιμασία. Ο Skinner έδωσε έμφαση στις διαδικασίες ενίσχυσης, που θεωρήθηκαν θεμελιώδεις για τη διαμόρφωση της συμπεριφοράς και σύμφωνα με αυτή την διδακτική θεωρία, οι αλλαγές στη συμπεριφορά μπορούσαν να επιτευχθούν μέσω προγραμματισμένων διδασκαλίας (ή, αργότερα, μέσω της μάθησης με γνώση και της μάθησης με τη βοήθεια υπολογιστή). Οι ιδέες αυτές είχαν ευρεία εφαρμογή στη διδασκαλία των μαθηματικών (Skinner, 1954) και ειδικότερα στη θεωρία που υποστηρίζει τις πρώτες χρήσεις των υπολογιστών στη μάθηση Ωστόσο, η μεγαλύτερη επιρροή της ψυχολογίας στη μαθηματική εκπαίδευση προήλθε από το έργο του Ελβετού ψυχολόγου Jean Piaget. Ενώ μελετούσε τη συμπεριφορά των παιδιών με κλινικό τρόπο και προσδιορίζοντας "γνωστικά στάδια", ο Piaget ανέπτυξε μεθόδους που επέτρεψαν τη διεύρυνση του φάσματος των μαθηματικών θεμάτων στο δημοτικό σχολείο. Τα στάδια του Piaget παραλληλίστηκαν στις ΗΠΑ με τη διδακτική στάδια του Jerome Bruner, αλλά, όπως το έθεσε ο (kilpatrick, 2020) μόνο

"Με την άφιξη της γνωστικής ψυχολογίας στις δεκαετίες του 1950 και 1960, που σηματοδοτήθηκε από τη διαθεσιμότητα του έργου του Piaget σε αγγλική μετάφραση και την επανερμηνεία αυτού του έργου από τον Jerome Bruner, [άρχισαν] οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης να έχουν μια πιο συνετή εκτίμηση της ψυχολογικής θεωρίας και να συνεργάζονται συχνότερα με ψυχολόγους"

Αν και ο Ρώσος Lev Semënovic Vygotskij γεννήθηκε την ίδια χρονιά με τον Piaget, δεν ήταν μέχρι τη δεκαετία του 1960 που οι ιδέες του άρχισαν να έχουν αντίκτυπο στη μαθηματική εκπαίδευση. Η καθυστέρηση αυτή οφειλόταν σε στην έλλειψη μεταφράσεων των έργων του και επίσης στην έλλειψη ενδιαφέροντος για μια κοινωνική προοπτική σε αυτόν τον τομέα. Η εισαγωγή των ιδεών του Vygotsky, ιδίως σε σχέση με τον κρίσιμο ρόλο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στην πρόοδο των μαθητών μέσω της ζώνης εγγύς ανάπτυξής τους , θα αποδειχθεί σημαντική. Για τον Vygotsky, όλη η γνώση κατασκευάζεται κοινωνικά και εσωτερικεύεται με κοινές διαδικασίες στις οποίες οι μαθητές έφεραν τις προσωπικές τους εμπειρίες. Ακολουθούσε ότι η στενή και υποστηρικτική σχέση έπαιζαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της γνώσης ενός ατόμου. Στην προοπτική της πολιτισμικής διαμεσολάβησης, ο κόσμος του νοήματος στο παιδί αναπτύχθηκε μέσω εργαλείων (τεχνουργημάτων) και σημείων. Τα τελευταία 25 χρόνια η θεωρία του Vygotskian έχει εφαρμοστεί εκτενώς στη μαθηματική εκπαίδευση, με κυρία εστίαση στις μαθηματικές δραστηριότητες μιας ομάδας μαθητών ή μιας δυάδας και όχι του ατόμου(Berger, 2005) .Μια σημαντική συμβολή στη σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευσης με τις επιστήμες της αγωγής ήρθε από μελετητές -όπως οι Caleb Gattegno, Zoltan Dienes, Richard Skemp και Efraim Fischbein- των οποίων οι εκπαίδευση ήταν τόσο στα μαθηματικά όσο και στις επιστήμες της αγωγής. Το έργο των Skemp και Fischbein υποκίνησε τη σκέψη σχετικά με το ρόλο των ψυχολογικών παραγόντων όσον αφορά τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών στις ανώτερες τάξεις. Ο (Skemp, 1976) διέκρινε μεταξύ των "εργαλειακών" και τη "σχεσιακή κατανόηση": Η εργαλειακή κατανόηση είναι το αποτέλεσμα μιας μηχανικής εκμάθησης κανόνων, θεωρημάτων και των άμεσων εφαρμογών τους, και η σχεσιακή κατανόηση είναι αποτέλεσμα μιας προσωπικής εμπλοκής του μαθητή με μαθηματικά αντικείμενα, καταστάσεις, προβλήματα, ιδέες. Οφείλουμε στον Fischbein μια βαθιά εργασία σχετικά με τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ διαίσθησης και αυστηρότητας στη μαθηματική εκπαίδευση (Tsamir et al., 2008) .Κατά τη διάρκεια της ICME-1, μια συζήτηση στρογγυλής τραπέζης για τα ψυχολογικά προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης που οργανώθηκε υπό την ηγεσία του Fischbein, ο οποίος επίσης οργάνωσε και διηύθυνε μια παρόμοια ομάδα συζήτησης στο ICME-2. Στην εισαγωγή των πρακτικών για το ICME-2, ο Howson (1973) τόνισε τη σημασία που είχε η ψυχολογία του Piaget σε σχέση με τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου.. Σύμφωνα με τον Howson (1973), το θέμα που συζητήθηκε "στηρίζει το σύνολο των μαθηματικής εκπαίδευσης" (σ. 15).Στο εισαγωγικό του κεφάλαιο του 1990 που παρέχει μια ερευνητική σύνθεση για την σειρά μελετών του ICMI, (Fischbein, 1990 σ. 4) υποστήριξε ότι "τα ψυχολογικά προβλήματα της μαθηματικής μάθησης και συλλογιστικής είναι επιστημονικά συναρπαστικά και ταυτόχρονα πραγματικά σημαντικά για τη μαθηματική εκπαίδευση" Στην πραγματικότητα, αν και πολλοί τομείς της γνώσης έχουν συνδεθεί με την μαθηματική εκπαίδευση, όπως η ψυχολογία, η φιλοσοφία, η ιατρική, η κοινωνιολογία, η γλωσσολογία και η ανθρωπολογία, η κύριος εξωτερική εννοιολογική υποστήριξη στην ανάπτυξη της μαθηματικής εκπαίδευσης προήλθε από την ψυχολογία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο:
Μαθηματική εκπαίδευση και τεχνολογία

2.1 Εισαγωγή

Από τις πήλινες πινακίδες των αρχαίων Αιγυπτίων ως τα έξυπνα κινητά και τις ηλεκτρονικές ταμπλέτες των σημερινών μαθητών η ανθρωπότητα έχει εξελιχθεί τεχνολογικά με αλματώδη ρυθμό και προφανώς από την εξέλιξη της τεχνολογίας δεν θα μπορούσε να μείνει ανεπηρέαστη ούτε η μαθηματική εκπαίδευση. Από την έλευση της ηλεκτρονικής αριθμομηχανής, έχει γίνει σύνηθες να συζητείται η "τεχνολογία" στη μαθηματική εκπαίδευση να αναφέρεται σχεδόν αποκλειστικά στη χρήση ηλεκτρονικών συσκευών. Από την πρώτη εμφάνιση της υπήρχε η ελπίδα και η υπόσχεση ότι η τεχνολογία θα έφερνε επανάσταση στον τρόπο με τον οποίο θα γινόταν η διδασκαλία και η μάθηση. (Pearlstein, 2011) . Η χρήση εργαλείων για την υποβοήθηση της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών έχει στην πραγματικότητα μια ιστορία πολύ πριν από την ηλεκτρονική τεχνολογία, και ορισμένα από αυτά έχουν ανακηρυχθεί ως επαναστατικά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε την ιστορία της εκπαιδευτικής τεχνολογίας με πιο ολοκληρωμένο τρόπο, χωρίς να δίνουμε ιδιαίτερη προτίμηση στην ηλεκτρονική τεχνολογία. Πράγματι, μια τέτοια προσέγγιση παρέχει μια χρήσιμη προοπτική από την οποία μπορούμε να δούμε τις συζητήσεις γύρω από τα σημερινά ηλεκτρονικά εργαλεία. Για να μην φτάσουμε στο άλλο άκρο, με την έννοια της τεχνολογίας να περιλαμβάνει ένα ανεξέλεγκτα μεγάλο εύρος ανθρώπινων δραστηριοτήτων, που ίσως περιλαμβάνει τη μαθηματική σημειογραφία και τη γλώσσα γενικά, θα περιοριστούμε στις υλικές συσκευές. Ο αναγνώστης μπορεί επίσης να εντοπίσει ότι έχει υπάρξει σημαντική ομογενοποίηση της εκπαιδευτικής τεχνολογίας παγκοσμίως ειδικότερα με την παγκοσμιοποιημένη χρήση των προσωπικών υπολογιστών των έξυπνων κινητών τηλεφώνων και του διαδίκτυού τις τελευταίες δεκαετίες. Η εκπαιδευτική χρήση της τεχνολογίας υπόκειται σε γενικότερες εκπαιδευτικές φιλοσοφίες που επικρατούν σε κάθε χρόνο και τόπο.

2.2 Το βιβλίο ως εγχειρίδιο χρήσης.

Κατά καιρούς η τεχνολογία έχει εφευρεθεί και τροποποιηθεί ειδικά για να εξυπηρετεί μαθηματικούς σκοπούς. Άλλες φορές η τεχνολογία εισήλθε εξωτερικά στα μαθηματικά, και ειδικά στη μαθηματική εκπαίδευση, από τον ευρύτερο κόσμο έξω, κυρίως από το εμπόριο και την επιστήμη. Πιθανώς το πιο διαδεδομένο και αναλλοίωτο από αυτά τα εργαλεία, που διατηρεί μια ισχυρή παρουσία στην παγκόσμια μαθηματική εκπαίδευση μέχρι σήμερα, είναι το βιβλίο. Ως εκπαιδευτικό εργαλείο, το βιβλίο ως εγχειρίδιο χρήσης χρησιμεύει ως μέσο αποθήκευσης και προβολής πληροφοριών που πρέπει να μεταδοθούν στους μαθητές. Το βιβλίο έχει μια ιστορία σχεδόν τόσο παλιά όσο και ο ίδιος ο πολιτισμός, από τις πήλινες πινακίδες μέχρι τον πάπυρο στον χειρόγραφο κώδικα, στο τυπωμένο βιβλίο και στο σύγχρονο ηλεκτρονικό βιβλίο (Schubring, 1999, 2018). Η πολυποίκιλη συμβολή αυτής της τεχνολογίας στον πολιτισμό είναι γνωστή και δεν χρειάζεται να αναφερθεί. Σίγουρα για πολλούς αιώνες, τα άτομα μάθαιναν τα μαθηματικά ανεξάρτητα από τα βιβλία, και ομοίως οι δάσκαλοι χρησιμοποιούσαν βιβλία για να διδάξουν μαθηματικά σε άτομα και μικρές ομάδες, αλλά μια νέα εποχή αρχίζει με την έλευση της μαζικής εκπαίδευσης και του μαζικά παραγόμενου σχολικού βιβλίου. Αυτά τα αλληλένδετα φαινόμενα δεν έγιναν εμφανή μέχρι τον δέκατο ένατο αιώνα στην Ευρώπη και την Αμερική και βοηθήθηκαν υλικά τόσο από τις πολιτικές όσο και από τις οικονομικές εξελίξεις. Από την πολιτική πλευρά, υπήρξε αυξανόμενη υποστήριξη για την παροχή εκπαίδευσης σε μεγαλύτερο ποσοστό των παιδιών. Από οικονομική πλευρά, αυξανόταν η αποτελεσματικότητα στην παραγωγή του φυσικού βιβλίου και οι αυξανόμενες δυνατότητες μεταφοράς του σε μεγάλες αποστάσεις, με αποτέλεσμα να υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής και διανομής μεγάλου αριθμού σχετικά φτηνών βιβλίων. (Kidwell et al., n.d.).

Όταν τα βιβλία ήταν σπάνια, αν μια σχολική τάξη είχε ένα βιβλίο, συχνά ήταν στην αποκλειστική κατοχή του δασκάλου. Αν η τάξη είχε κάποιο αξιόλογο μέγεθος, αυτό ενθάρρυνε την απαγγελία ως μέθοδο διδασκαλίας, η οποία συχνά συνεπαγόταν ότι ο δάσκαλος απλά διάβαζε δυνατά από το βιβλίο και οι μαθητές προσπαθούσαν, μέσω του γραπτού λόγου ή της ωμής απομνημόνευσης, να συγκρατήσουν ό,τι διάβαζε και στη συνέχεια να το απαγγείλουν στον δάσκαλο. Αξιοσημείωτες προσπάθειες αναβάθμισης αυτού του συστήματος έγιναν στην Αγγλία και τις αποικίες της το τέλη του δέκατου όγδοου και στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα με το λεγόμενο σύστημα παρακολούθησης, στο οποίο ο δάσκαλος δίδασκε πρώτα μια ομάδα πιο προχωρημένων μαθητών, οι οποίοι με τη σειρά τους δίδασκαν λιγότερο προχωρημένους μαθητές. μαθητές. Ειδικότερα στα μαθηματικά, η μέθοδος της απαγγελίας και το εποπτικό σύστημα υποστήριζαν κυρίως ένα πρόγραμμα σπουδών που επικεντρωνόταν στην απομνημόνευση των στοιχειωδών αριθμητικών αρχών (Butts, 1955). Πριν από την εμφάνιση τόσο του σχολικού βιβλίου όσο και του πίνακα, ήταν επίσης κοινή πρακτική σε πολλά σχολεία στην Ευρώπη και τη Βόρεια Αμερική για κάθε μαθητή να παράγει ένα "τετράδιο" ή "κρυπτογραφημένο βιβλίο". Ξεκινώντας από μια συλλογή κενών σελίδων (το χαρτί και η ποιότητα του δεσίματος μπορούσαν να ποικίλλουν σε μεγάλο βαθμό, ανάλογα με τις οικονομικές συνθήκες), ο μαθητής αντέγραφε το υλικό που μιλούσε φωναχτά ο δάσκαλος. Εδώ και πάλι η χρήση των αντιγραφικών βιβλίων υποστήριζε κυρίως την αριθμητική διδασκαλία, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό θα μπορούσε να είναι αρκετά περίπλοκη, περιλαμβάνοντας τετραγωνικές και κυβικές ρίζες και περίπλοκα προβλήματα από το εμπόριο και τις επιχειρήσεις. Ο δάσκαλος μπορούσε να επιθεωρεί περιοδικά τα αντιγραφικά βιβλία, έτσι ώστε να μπορούν να λειτουργήσουν ως αυτό που οι πιο πρόσφατοι εκπαιδευτικοί θα ονόμαζαν "χαρτοφυλάκιο". Αλλά το πόσο αυστηρά αξιολογούνταν τα τετράδια του δέκατου όγδοου και δέκατου ένατου αιώνα ως προς τη μαθηματική ορθότητα δεν είναι σαφές, και ορισμένα μπορεί να αξιολογούνταν περισσότερο για αισθητικούς λόγους, όπως η καλλιγραφία (Clements & Ellerton, 2010) . Όμως, με τα φθηνότερα βιβλία ήρθε η δυνατότητα (αν και ακόμα συχνά δεν ήταν η πραγματικότητα) ότι οι μαθητές καθώς και οι εκπαιδευτικοί θα μπορούσαν να έχουν ατομική πρόσβαση σε ένα σχολικό βιβλίο. Ένας μαθητής με ένα βιβλίο θα μπορούσε πλέον να ζητηθεί να διαβάσει το βιβλίο αυτό τόσο κατά τη διάρκεια όσο και εκτός της τάξης και να επεξεργαστεί προβλήματα που του ανατίθενται από το βιβλίο. Ήταν τώρα ευκολότερο από ό,τι στο παρελθόν να παρέχεται πιο εξελιγμένη διδασκαλία μαθηματικών σε μια τάξη με μαθητές. **Έτσι, η αυξανόμενη παρουσία της άλγεβρας και της γεωμετρίας εκτός από την αριθμητική στο πρόγραμμα σπουδών στα σχολεία του δέκατου ένατου αιώνα οφείλεται σίγουρα σε μεγάλο βαθμό στον πολλαπλασιασμό των σχολικών εγχειριδίων**. Είναι επίσης πιθανό ότι η χρήση των εγχειριδίων εξυπηρετούσε την απόκρυψη των προβλημάτων ανεπαρκούς προετοιμασίας των εκπαιδευτικών. Αυτό συνέβαινε σίγουρα στις Ηνωμένες Πολιτείες του δέκατου ένατου αιώνα(Tyack, 1974) . Επιπλέον, το σύστημα χρήσης των σχολικών βιβλίων ενίσχυσε τον εαυτό του: μια μεγαλύτερη προσφορά βιβλίων παρήγαγε μια μεγαλύτερη ζήτηση για βιβλία, η οποία με τη σειρά της παρήγαγε ακόμη περισσότερα βιβλία, και ούτω καθεξής. Στα μαθηματικά αυτό είχε ως αποτέλεσμα όχι μόνο τη δημιουργία μεμονωμένων εγχειριδίων, αλλά ολόκληρων σειρών εγχειριδίων που κάλυπταν όλο το φάσμα του προγράμματος σπουδών από τις κατώτερες τάξεις έως τα πανεπιστήμια: από τη βασική αριθμητική έως το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό. Οι συνθήκες στις Ηνωμένες Πολιτείες, ιδίως η οικονομία της ελεύθερης αγοράς και η διαχωρισμός από τη Βρετανία, φαίνεται ότι ήταν ιδιαίτερα ευνοϊκές για τη δημιουργία ενός δυναμικού εγχειριδίου βιομηχανικά παραγμένου τον δέκατο ένατο αιώνα(Clements & Ellerton, 2010). Μια αξιοσημείωτη επίδραση των εγχειριδίων ήταν η τυποποίηση και η κωδικοποίηση του προγράμματος σπουδών. Οι εκπαιδευτικοί συχνά δυσκολεύονται να απομακρύνουν τα θέματα του προγράμματος σπουδών από τη στιγμή που έχουν τυπωθεί σε ευρέως διαδεδομένα εγχειρίδια. Αυτό είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό στις Ηνωμένες Πολιτείες, οι οποίες παρά τη μακρά παράδοση του τοπικού ελέγχου των σχολείων και την αποφυγή ενός επίσημου εθνικού προγράμματος σπουδών, γρήγορα συγκλίνουν σε ένα de facto πρότυπο πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά, καθώς ένας σχετικά μικρός αριθμός σχολικών βιβλίων άρχισε να κυριαρχεί στην αγορά. Τα πραγματικά καινοτόμα εγχειρίδια μαθηματικών δεν τα πήγαν ποτέ καλά στην αγορά των ΗΠΑ. Ακόμη και κατά τη διάρκεια της δεκαετίες του 1950 και του 1960, υποτίθεται ότι ήταν μια εποχή μεγάλων ανακατατάξεων, μπορούμε να παρατηρήσουμε σημαντικά εγχειρίδια που παρουσιάζουν ουσιαστική συνέχεια από τις προηγούμενες δεκαετίες. Η ελπίδα ήταν ότι αυτά τα κείμενα, ορισμένα ιδιαίτερα καινοτόμα, θα χρησίμευαν ως πρότυπα για τα εμπορικά εγχειρίδια. Αλλά αυτή η ελπίδα πραγματοποιήθηκε σε σπάνιες μόνο περιπτώσεις (Karp & Roberts, 2014)

2.3 Ο επιτοίχιος μαυροπίνακας

Ο μαυροπίνακας ή μαυροπίνακας και τα παρακλάδια του χρησιμοποιούνται σήμερα ευρέως εκτός της εκπαίδευσης, ιδίως σε επιχειρήσεις και την κυβέρνηση, αλλά σε αντίθεση με το βιβλίο αυτή η τεχνολογία φαίνεται να έχει βρει την πρώτη της εκτεταμένη χρήση στην σχολική τάξη. Η εκπαιδευτική χρήση αυτού του εργαλείου είναι στενά συνδεδεμένη με την με την άνοδο της μαζικής εκπαίδευσης, η οποία έφερε την επιτακτική ανάγκη για πολλά άτομα να βλέπουν τις ίδιες πληροφορίες ταυτόχρονα. Πριν από τον επιτοίχιο πίνακα, υπήρχε μια αργή εξέλιξη των χειροκίνητων επιφανειών γραφής, με αποκορύφωμα την πλάκα, στην οποία μπορούσε κάποιος να γραφτεί με κιμωλία και αυτό αποτελούσε συχνά μια πτυχή της μεθόδου διδασκαλίας με απαγγελία. Ο δάσκαλος μπορούσε να διαβάσει ένα πρόβλημα από το βιβλίο και οι μαθητές μπορούσαν να αντιγράψουν και να εμφανίσουν τις λύσεις τους στις πινακίδες τους (Cajori 1890, Burton 1850). Ο επανεγγράψιμος μαυροπίνακας, που γράφεται με κιμωλία, εξαπλώθηκε αθόρυβα στα σχολεία στις αρχές του 1800 και είχε καθιερωθεί μέχρι το τέλος του ίδιου αιώνα(Kidwell et al., n.d.2008) Επέτρεπε στον εκπαιδευτικό να εμφανίζει περίπλοκες λεκτικές ή εικονογραφικές λεπτομέρειες με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια από ό,τι αν διάβαζε απλώς προφορικά από ένα βιβλίο. Επιπλέον, επέτρεπε στους μαθητές να επεξεργάζονται οι ίδιοι τα προβλήματα στον πίνακα, εμφανίζοντας τις προσπάθειές τους τόσο για τον εκπαιδευτικό όσο και για τους άλλους μαθητές να τις δουν και να τις σχολιάσουν, αλλάζοντας έτσι την προσωπική δυναμική της τάξης. Στα μαθηματικά ο πίνακας λειτουργούσε σε συνδυασμό με το σχολικό βιβλίο για να προωθήσει την αύξηση της άλγεβρας και της γεωμετρίας στο πρόγραμμα σπουδών. Οι μαυροπίνακες συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται στις τάξεις των μαθηματικών μέχρι σήμερα. Σε πολλές περιπτώσεις, ο μαυροπίνακας έχει αντικατασταθεί από τον "πίνακα ξηρής διαγραφής" ή τον "λευκό πίνακα", αλλά χωρίς ουσιαστική αλλαγή στην λειτουργικότητα. Ο διαδραστικός πίνακας, που αναπτύχθηκε στα τέλη του εικοστού αιώνα, αντιπροσωπεύει μια σημαντική καινοτομία, επιτρέποντας την απευθείας σύνδεση του υλικού που εμφανίζεται στον πίνακα με έναν υπολογιστή.

Οι απόψεις ποικίλλουν ευρέως σχετικά με την αξία αυτής της τεχνολογίας στην τάξη (Wood & Ashfield, 2008) .Οι προσωπικοί υπολογιστές tablet προσφέρουν παρόμοιες λειτουργίες, συμπεριλαμβανομένης της αναγνώρισης χειρογράφου, με την οποία ο υπολογιστής είναι σε θέση να ερμηνεύει τον γραφικό χαρακτήρα που σχεδιάζεται στην οθόνη, όχι απλώς να πληκτρολογεί που εισάγεται μέσω πληκτρολογίου (Anderson, 2011).

2.4 Ο προβολέας οροφής

Μια πιο πρόσφατη τεχνολογία προβολής στην τάξη είναι ο προβολέας οροφής. Οι πρώτες εκδηλώσεις του φαίνεται ότι σχετίζονταν με την εκπαίδευση, αλλά όχι σε σχολικές αίθουσες: δημόσιοι λέκτορες του δέκατου ένατου αιώνα που αναζητούσαν πρόσθετη οπτική ανανέωση. Η χρήση του άρχισε να μπαίνει στα σχολεία στις αρχές του εικοστού αιώνα. αιώνα, ως μέρος ενός ευρύτερου κινήματος για "οπτική εκπαίδευση" που περιελάμβανε φωτογραφικές διαφάνειες και βιντεομαθήματα. Στη συνέχεια, οι προβολείς οροφής χρησιμοποιήθηκαν σημαντικά από τον στρατό των ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου για εκπαιδευτικούς σκοπούς, συμβάλλοντας πιθανώς στη σημαντική επέκταση της χρήσης τους στα σχολεία κατά τα μεταπολεμικά έτη (Kidwell et al., n.d.). Έχει δύο βασικά ελκυστικά στοιχεία. Πρώτον, επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να συνεχίσει να αντιμετωπίζει τον μαθητές ενώ τους παρουσιάζει υλικό. Δεύτερον, επιτρέπει στον καθηγητή να προβάλλει περίτεχνες διαφάνειες που έχουν δημιουργηθεί πριν από το μάθημα. Για παράδειγμα, ένας καθηγητής γεωμετρίας μπορεί να προετοιμάσει ή να αγοράσει περίπλοκα διαγράμματα με ακρίβεια που δεν θα μπορούσε ποτέ να ελπίζει σε διαγράμματα που σχεδιάζονται γρήγορα με το χέρι που αυτοσχεδιάζονται ενώ παρακολουθούνται από τους μαθητές. Υπάρχει ωστόσο ένα μειονέκτημα, στο ότι η εξάρτηση από έτοιμα διαφάνειες μπορεί να ενθαρρύνει μια πολύ γρήγορη διαδοχή υλικού που μπορεί να υπερφορτώσει την ικανότητα των μαθητών να αφομοιώσουν τις πληροφορίες που παρουσιάζονται. Οι προβολείς συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα, αλλά σε πολλές περιπτώσεις έχουν αντικατασταθεί. από νέες τεχνολογίες που επιτρέπουν μεγαλύτερη ευκολία στη χρήση και μεγαλύτερο εύρος λειτουργιών προβολής. Τα συστήματα προβολής επιτρέπουν την προβολή οποιασδήποτε εικόνας, στατικής ή κινούμενης, που είναι διαθέσιμη στον κεντρικό υπολογιστή και ειδικότερα επιτρέπουν την προβολή διαφανειών που έχουν επιμελώς δημιουργηθεί από τον εκπαιδευτικό προηγουμένως, μέσω διαφανειών σε προβολέα προβολής μέσω λογισμικού όπως το PowerPoint και όχι μόνο. (Ash, 2009) .

2.5 Η αριθμομηχανή

Η αριθμομηχανή είναι βασικά ένα ψηφιακό όργανο, το οποίο φαίνεται να έχει δώσει ένα αποφασιστικό πλεονέκτημα για την κατάκτηση μιας θέσης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η θέση της στην τάξη βρίσκεται ακόμη σε πειραματικό στάδιο. Η ευρωπαϊκή ανάπτυξη των μηχανικών αριθμομηχανών χρονολογείται από τον δέκατο έβδομο αιώνα, με σημαντικούς μαθηματικούς όπως ο Pascal και ο Gottfried Wilhelm Leibniz να έχουν σημαντική συμμετοχή. (Goldstine, 1993). Όμως, μόλις στα μέσα του δέκατου ένατου αιώνα οι βιομηχανικές διεργασίες ήταν αρκετά προηγμένες ώστε να επιτρέπουν την κατασκευή υπολογιστικών συσκευών σε εμπορική βάση, τόσο στην Ευρώπη όσο και στις Ηνωμένες Πολιτείες. Μέχρι τη δεκαετία του 1920 είχαν γίνει βασικό χαρακτηριστικό πολλών γραφείων. Φαίνεται όμως ότι μόλις μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο έλαβαν μεγάλη προσοχή ως εκπαιδευτικά βοηθήματα. Στη δεκαετία του 1950 υπήρξαν κάποιοι μικροί πειραματισμοί σε τάξεις με μηχανικές αριθμομηχανές, ή μηχανικές αριθμομηχανές με ηλεκτρική υποστήριξη, αλλά το μέγεθος και το κόστος των αυτών των μηχανών τις καθιστούσαν ακατάλληλες ως προσωπικές συσκευές (Kidwell et al., n.d.2008).Η μεγάλη επανάσταση σημειώθηκε τη δεκαετία του 1970, με την άφιξη φθηνών, πλήρως ηλεκτρονικών αριθμομηχανών. Αρχικά αυτές οι αριθμομηχανές ήταν ακόμη σχετικά ογκώδεις και ήταν σε θέση να εκτελέσουν λίγα πράγματα πέρα από το τις γνωστές τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Αλλά μέχρι τη δεκαετία του 1980 οι αριθμομηχανές είχαν γίνει εύκολα φορητές και ήταν σε θέση να υπολογίζουν τριγωνομετρικές και άλλες υπερβατικές συναρτήσεις και να εμφανίζουν γραφικές παραστάσεις, με αποτέλεσμα να ξεπερνούν κατά πολύ τη λειτουργικότητα των μηχανικών αριθμομηχανών και των διαφανειών. Η χρήση στην τάξη έγινε πρακτική και αν και πολύ ανομοιόμορφη, σύντομα έγινε αρκετά διαδεδομένη ώστε να δημιουργήσει διαμάχες μεταξύ ενθουσιωδών και αρνητών. Οι αριθμομηχανές αύξησαν σημαντικά το εύρος των εφικτών προβλημάτων που μπορούσαν να δοθούν στους μαθητές, αλλά εκφράστηκε ανησυχία σχετικά με την επίδραση στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες και αμφιβολίες. Επίσης εκφράστηκαν αμφιβολίες σχετικά με την ετοιμότητα των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τους υπολογιστές (Demana & Waits, 2000; Kelly, 2003). Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1990 τα συστήματα άλγεβρας υπολογιστών (CAS) ήταν διαθέσιμα σε φορητές συσκευές, οδηγώντας σε περαιτέρω συζητήσεις. Τώρα, στον εικοστό πρώτο αιώνα, αν και η γενική ονομασία παραμένει, οι συσκευές υψηλής τεχνολογίας που αναφέρονται ως "αριθμομηχανές" παρέχουν στην πραγματικότητα ένα τεράστιο φάσμα αποθήκευσης πληροφοριών, δυνατότητες απεικόνισης πληροφοριών και επίδειξης, εκτός από τους καθαρούς υπολογισμούς (Aldon, 2010). Κάποιες διαφωνίες έχουν επιμείνει, αλλά τα τελευταία χρόνια η χρήση των αριθμομηχανών αυξάνεται σε όλο τον κόσμο στα σχολεία δευτεροβάθμιας και πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και σε επίπεδο πανεπιστημίων. Μια πολύ σημαντική υπόθεση αυτής της θεωρίας είναι η ιδέα ότι η γνώση οικοδομείται από τους εκπαιδευόμενους μέσω της προσαρμογής με τις περιβάλλον μέσω αλληλεπιδράσεων:

"Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων υποθέτει ότι η μάθηση σε μια σχολική κατάσταση είναι μια προσαρμογή σε ένα περιβάλλον. Το καθήκον του εκπαιδευτικού είναι τότε να οργανώσει την περιβάλλον με τέτοιο τρόπο ώστε η προσαρμογή να έχει ως αποτέλεσμα να αναπτύξει ο μαθητής τη γνώση-στόχο."(Sierpinska, 1999, διάλεξη 3, σ. 4)

2.6 Ο υπολογιστής

Όπως και στο βιβλίο, οι ευρύτερες κοινωνικές χρήσεις αυτού του εργαλείου είναι τεράστιες και επαναστατικές . Έχει πλέον καθιερωθεί στη μαθηματική εκπαίδευση σε όλο τον κόσμο, αν και ο τελικός του ρόλος δεν είναι ίσως ακόμη σαφής και σαφώς προσδιορισμένος . Μπορεί να υποστηριχθεί ότι ένα μεγάλο μέρος της εκπαιδευτικής χρήσης των υπολογιστών είναι ασήμαντο σε σύγκριση με τις πλήρεις δυνατότητες της τεχνολογίας. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές σήμερα μπορούν να διαβάσουν τα σχολικά βιβλία στην οθόνη ενός υπολογιστή, αλλά αυτό σίγουρα δεν αποτελεί βαθιά ικανότητα. Πιθανότατα η πιο συνηθισμένη χρήση των υπολογιστών στη στοιχειώδη διδασκαλία είναι η άμεση ανατροφοδότηση των μαθητών που εργάζονται σε προβλήματα. Αυτό αποτελεί αναμφίβολα μια αύξηση της συναίνεσης που μπορεί να καταπλήξει τις προηγούμενες γενιές μαθητών και εκπαιδευτικών, αλλά κατ' αρχήν δεν διαφέρει από την αναζήτηση της απάντησης στο τέλος του βιβλίου. Σε αντίθεση με το βιβλίο, η έλευση των υπολογιστών στην εκπαίδευση δεν χάνεται στην ομίχλη του χρόνου και μάλιστα είναι ακόμη στη ζωντανή μνήμη. Οι αρχικοί υπολογιστές "main-frame", που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια και αμέσως μετά το Παγκόσμιο Πόλεμο, ήταν πολύ ακριβοί, πολύ ογκώδεις και απαιτούσαν πολύ συντήρηση για να έχουν μεγάλη σημασία για τους εκπαιδευτικούς. Μόνο στη δεκαετία του 1960, με τα συστήματα διαμοιρασμού χρόνου και τους λεγόμενους μίνι υπολογιστές, άρχισε να υπάρχει αξιόλογη χρήση των υπολογιστών στην εκπαίδευση. Ήταν πλέον δυνατό για πολλοί μαθητές να αλληλεπιδρούν ταυτόχρονα με τον ίδιο υπολογιστή. Μια πρωτοποριακή περίπτωση ήταν το Πανεπιστήμιο του Ιλινόις, το πρόγραμμα PLATO (Programmed Logic for Automatic Teaching Operations). (Bitzer et al., 1961). Αυτό βασίστηκε σε προηγούμενες, μη ηλεκτρονικές, "προγραμματισμένες" προσπάθειες μάθησης που είχαν γίνει δημοφιλείς από τη δεκαετία του 1950. Τα πειράματα προγραμματισμένης μάθησης, μεγάλο μέρος των οποίων ήταν εμπνευσμένα από το έργο του B. F. Skinner και άλλων ψυχολόγων, παρουσίαζαν διατεταγμένα σύνολα προβλημάτων τα οποία ο μαθητής καλούνταν να επεξεργαστεί (Vargas & Vargas, 1996). Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές επέτρεπαν στην ίδια διαδικασία να γίνει πιο εύκολα και με μεγαλύτερη ευελιξία. Όπως έχει ήδη σημειωθεί, αυτή η βασική λειτουργία συνεχίζει να είναι μια από τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες εφαρμογές των υπολογιστών στη μαθηματική εκπαίδευση. Μια διαφορετική τακτική για τη χρήση των υπολογιστών στην εκπαίδευση διερευνήθηκε στο Dartmouth College, και πάλι με αφετηρία τη δεκαετία του 1960. Εδώ ο στόχος ήταν να προγραμματίσουν οι ίδιοι οι προπτυχιακοί φοιτητές τον υπολογιστή, με αποτέλεσμα να μαθαίνοντας έτσι τις θεμελιώδεις λογικές αρχές πίσω από τις μηχανές. Κατάφεραν να κάνουν τους υπολογιστές τον προγραμματισμό όχι μόνο στα μαθήματα μαθηματικών αλλά και σε άλλα μαθήματα όπου τα μαθηματικά ήταν συμπεριλαμβανομένων των επιχειρήσεων και των κοινωνικών επιστημών. Ένα βασικό κομμάτι για την επίτευξη αυτού του στόχου ήταν η ανάπτυξη από τους καθηγητές του Dartmouth John Kemeny και Thomas Kurtz της γλώσσας υπολογιστών BASIC, η οποία στη συνέχεια διαδόθηκε παγκοσμίως μεταξύ αρχάριων και έμπειρων χρηστών υπολογιστών. Τελικά ένα σημαντικό αποτέλεσμα του έργου του Dartmouth, και άλλων παρόμοιων σχεδίων σε όλο τον κόσμο, ήταν ότι η επιστήμη των υπολογιστών διακλαδώθηκε από τα μαθηματικά ως ξεχωριστός ακαδημαϊκός κλάδος στο κολέγιο και στο πανεπιστημιακό επίπεδο (Kemeny & Kurtz, 1985).Η εμφάνιση του μικροϋπολογιστή, ή προσωπικού υπολογιστή, στις δεκαετίες του 1970 και 1980, έδωσε περαιτέρω ώθηση στην εκπαιδευτική χρήση των υπολογιστών, ιδίως κάτω από το επίπεδο του πανεπιστημίου. Για πρώτη φορά οι υπολογιστές έγιναν οικιακή συσκευή, γεγονός που έκανε τη χρήση στο σχολείο πολύ πιο άνετη τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Και τώρα που τα ακατέργαστα τερματικά τηλέτυπων των παλαιότερων ημερών αντικαταστάθηκαν από οθόνες προβολής βίντεο, ήταν δυνατόν να δημιουργηθούν πολύ περισσότερα περίτεχνα γραφικά, με προφανή εφαρμογή στη διδασκαλία της γεωμετρίας. Το Geometer's Sketchpad και Cabri-géomètre είναι δύο παραδείγματα προγραμμάτων υπολογιστή που εκμεταλλεύονται αυτές τις δυνατότητες (Deturck & Wilf, 2002) .Στατιστικό λογισμικό όπως το Minitab και λογισμικό άλγεβρας όπως το Derive ήρθαν επίσης στην αγορά τη δεκαετία του 1980 ((Grinberg, 1989). Μεγάλα πακέτα λογισμικού που ενσωμάτωναν ένα πλήρες φάσμα αλγεβρικών δυνατοτήτων, μαζί με εξελιγμένα γραφικά, περιελάμβαναν τα Maple και Mathematica (Chonacky & Winch, 2005). Τέτοια λογισμικά έχουν εγείρει αναπάντητα μέχρι σήμερα ερωτήματα σχετικά με το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών. Ακόμη και λογισμικό γενικής χρήσης, όπως το Microsoft Excel προσφέρει εκτεταμένες μαθηματικές δυνατότητες, οι οποίες δυνητικά θα μπορούσαν να αναδιαμορφώσουν πλήρως το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι η χρήση των υπολογιστών στις τάξεις των μαθηματικών ποικίλλει σε μεγάλο βαθμό παγκοσμίως. Το κόστος αγοράς και συντήρησης των υπολογιστών, καθώς και της εκπαίδευσης και της στάσεις και τις πεποίθησης των εκπαιδευτών στη χρήση τους παραμένει σημαντικό εμπόδιο σε πολλά μέρη, ιδίως σε σύγκριση με την παλαιότερη τεχνολογία, το βιβλίο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}:

Μιά θέαση στην μαθηματική ανάλυση υπό το πρίσμα των CAS περιβαλλόντων

Εισαγωγή :

Η τεχνολογία των Computer Algebra Systems [CAS], άμεσα διαθέσιμη σε μεγάλα πλαίσια υπολογιστές από τις αρχές της δεκαετίας του 1970 και σε μικροϋπολογιστές από τις αρχές της δεκαετίας του 1980, είναι τώρα προσβάσιμη σε φορητούς υπολογιστές CAS tablets και laptops και ακόμα πιο πρόσφατα στα ψηφιακά κινητά τηλεφωνά που σχεδόν καθολικά οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατέχουν. Οι δυνατότητες του CAS περιλαμβάνουν την απόδοση αλγεβρικών διαδικασίων, συμπεριλαμβανομένων των υπολογισμών, τη σχεδίαση γραφημάτων και την εκτέλεση αριθμητικών, διανυσματικών, πινάκων και στατιστικών υπολογισμών. Οι αριθμομηχανές CAS έχουν τις δυνατότητες γραφικών αριθμομηχανών μαζί με δυνατότητες συμβολικής άλγεβρας, ενώ οι αριθμομηχανές γραφικών έχουν τις δυνατότητες των αριθμητικών υπολογιστών μαζί με δυνατότητες για γραφικά. Ισχυρό μαθηματικό λογισμικό όπως τα C.A.S αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά προσφέρονται ,και προσφέρει επίσης πολλές ευκαιρίες για νέες μαθησιακές εμπειρίες. Ειδικότερα θα σταθούμε στο λογισμικό Geogebra .Το GeoGebra δημιουργήθηκε το 2001 από τον Markus Hohenwarter στο Πανεπιστήμιο του Σάλτσμπουργκ. Από τότε ο Markus και μια αφοσιωμένη και συνεχώς αυξανόμενη ομάδα προγραμματιστών έχουν μετατρέψει αυτό το πρόγραμμα σε ένα από τα κορυφαία παιδαγωγικά προγράμματα υπολογιστών για τη μαθηματική εκπαίδευση σε όλο τον κόσμο. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα πολλαπλών πλατφορμών, ανοικτού κώδικα πρόγραμμα, ελεύθερο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Το GeoGebra μπορεί να περιγραφεί καλύτερα ως ένα μαθηματικό εργαστήριο. Χειρίζεται δυναμικά γεωμετρία, γραφικές παραστάσεις, λογιστικά φύλλα, στατιστική, παλινδρόμηση, άλγεβρα, πίνακες, σύνθετα αριθμούς, διαφορικές εξισώσεις, συμβολική άλγεβρα, προγραμματισμό και ούτω καθεξής. Είναι ένα περιβάλλον ιδιαίτερα κατάλληλο για ερευνητική εργασία, αρκετά εύκολο για να χρησιμοποιηθεί σε χαμηλότερες βαθμίδες εκπαίδευσης, αλλά και αρκετά ισχυρό ώστε να είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τους φοιτητές του πανεπιστημίου. Τα διάφορα στοιχεία συνεργάζονται σε ένα δυναμικό, διαδραστικό και διαισθητικό τρόπο. Το υπολογιστικό φύλλο μπορεί να περιέχει τόσο αριθμούς όσο και αντικείμενα όπως γραμμές, σημεία και κύκλους. Η συμβολική άλγεβρα είναι δυναμική και μπορεί να συνδεθεί τόσο με ρυθμιστικά όσο και με γεωμετρικά στοιχεία. **Το GeoGebra είναι, από την αρχή, φτιαγμένο για να υποστηρίζει πολλαπλές αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων και εννοιών.**

3.1 Το Μεταρρυθμιστικό Κίνημα του Λογισμού

Ιστορικά, η μελέτη του λογισμού θεωρείται εξαιρετικά σημαντικό συστατικό των μαθηματικών. Ωστόσο, μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1980 οι εκπαιδευτικοί των ΗΠΑ πίστευαν ότι ήταν σε κρίση λόγω των δυσκολιών που αντιμετώπιζαν οι μαθητές στην κατανόηση των σχετικών εννοιών και της υπερβολικής εξάρτησης από αλγεβρικές τεχνικές.Ο (Hughes-Hallett et al., 1994) Έγραψε:

"Ο λογισμός είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρώπινης διάνοιας. Εμπνευσμένοι από προβλήματα στην αστρονομία, ο Νεύτωνας και ο Λάιμπνιτς ανέπτυξαν τις ιδέες του λογισμού πριν από 300 χρόνια. Από τότε, κάθε αιώνας έχει αποδείξει τη δύναμη του λογισμού να φωτίζει ερωτήματα στα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανική και τις κοινωνικές και βιολογικές επιστήμες. Ο λογισμός ήταν τόσο επιτυχημένος λόγω της εξαιρετικής του δύναμης να μειώνει τα περίπλοκα προβλήματα σε απλούς κανόνες και διαδικασίες - χάνοντας έτσι από τα μάτια του τόσο τα μαθηματικά όσο και την πρακτική του αξία. (σ.vii)"

Ταυτόχρονα, η τεχνολογία των προσωπικών υπολογιστών γινόταν όλο και πιο διαθέσιμη στις αίθουσες διδασκαλίας των πανεπιστήμιων προσφέροντας νέες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία του λογισμού και μια καλύτερη ευκαιρία για τους μαθητές να κατανοήσουν τις υποκείμενες έννοιες του λογισμού. Η τεχνολογία προτείνεται ως μέσο απελευθέρωσης των μαθητών από τον αλγεβρικό χειρισμό, μειώνοντας την αγγαρεία του υπολογισμού, υποστηρίζοντας την εκμάθηση θεμελιωδών ιδεών και επιτρέποντας την εξερεύνηση των εννοιών(Ferrini-Mundy & Graham, 1994a). Αυτά τα συναισθήματα ήταν κεντρικά στο Κίνημα Μεταρρύθμισης του Λογισμού. Ενα ευρύτερο φάσμα παραγόντων παρακίνησε τις μεταρρυθμίσεις, όπως: αλτρουιστικές επιθυμίες να γίνει ο λογισμός πιο κατανοητός για ένα ευρύτερο φάσμα μαθητών, εμπορικές επιθυμίες για την παραγωγή εμπορεύσιμων προϊόντων, πρακτικές εκτιμήσεις για το τι πραγματικά έπρεπε να διδαχθεί, προβληματισμός σχετικά με τον τύπο των μαθηματικών που είναι κατάλληλος σε μια τεχνολογική εποχή και μια αυξανόμενη φιλοδοξία να ερευνηθεί η μαθησιακή διαδικασία για να κατανοήσουν πώς τα άτομα αντιλαμβάνονται τις έννοιες του λογισμού. (D. Tall, 1996a) Έτσι, το Μεταρρυθμιστικό Κίνημα του Λογισμού ενέπνευσε αλλαγές στους τρόπους με τους οποίους διδάχθηκε και μαθεύτηκε ο λογισμός. Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μεταρρύθμισης του λογισμού - αλλαγές στους τρόπους διδασκαλίας και χρήσης της τεχνολογίας μαζί με αυξημένη εστίαση στην εννοιολογική κατανόηση και μειωμένη προσοχή στη συμβολική χειραγώγηση - βρίσκουν το δρόμο τους τόσο στα μαθήματα μαθηματικών πριν όσο και μετά τον λογισμό. (Tucker & Leitzel, 1995)

3.2 Χρήση της τεχνολογίας για την κατανόηση των εννοιών του Λογισμού

3.2.1 Τεχνολογία και παραδοσιακές δυσκολίες με τον λογισμό

Στην ενότητα αυτή αναφέρονται οι παραδοσιακές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές κατά την εκμάθηση εισαγωγικών εννοιών της ανάλυσης χωρίς τεχνολογία και πώς η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει στο να ξεπεραστούν ορισμένες από αυτές. Ένας σημαντικός όγκος βιβλιογραφίας έχει εντοπίσει τις συνήθεις δυσκολίες των μαθητών μεταξύ των οποίων:

- Ο αλγεβρικός χειρισμός (A. Orton, 1983) .
- Κατανόηση των ορίων (T. Orton, 1986; D. Tall, 1996a; White, 1993)
- Χρήση συμβολισμών (Frid, 1992- Orton, 1986- Tall, 1985).
- Κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (D. Tall & Bakar, 1992; White, 1993)

Υπάρχει μια ευρέως διαδεδομένη πεποίθηση ότι τα προβλήματα που σχετίζονται με τους αλγεβρικούς χειρισμούς μπορούν εύκολα να ξεπεραστούν με τη χρήση της δυνατότητας συμβολικής άλγεβρας των CAS (Bennett, 1995). Ο Bennet (1995) και οι συνάδελφοί τους παρακολούθησαν ένα μάθημα μαθηματικών γενικής εκπαίδευσης ενός εξαμήνου με αρκετές τάξεις προπτυχιακών φοιτητών διαφορετικών ικανοτήτων. Οι καθηγητές του κολεγίου αξιολόγησαν ανεπίσημα το μάθημα και διαπίστωσαν ότι οι φοιτητές τους ήταν σε θέση να αντιμετωπίσουν προβλήματα σε μια ποικιλία διαφορετικών τρόπων. Ο Bennet διαπίστωσε ότι ξόδευε λιγότερο χρόνο στο μάθημα για να ασχοληθεί με αλγεβρικά προβλήματα και, κατά συνέπεια, μπορούσε να αφιερώσει περισσότερο χρόνο στη συζήτηση εννοιών με τους μαθητές. Συνιστά ανεπιφύλακτα τη χρήση του CAS (Derive) για την ελαχιστοποίηση των επιπτώσεων του φτωχού αλγεβρικού υπόβαθρου των μαθητών. Ερευνώντας την κατανόηση των ορίων με το CAS, οι Monaghan, Sun και Tall (1994) διερεύνησαν την κατανόηση της έννοιας του ορίου από τους μαθητές συγκρίνοντας μια ομάδα εννέα φοιτητών που είχαν πρόσβαση σε ένα CAS (Derive) με μια συγκρίσιμη ομάδα δεκαεννέα μαθητές ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που είχαν μελετήσει ένα πανομοιότυπο πρόγραμμα σπουδών χωρίς CAS. Οι ερευνητές ταίριαξαν τις ομάδες πολύ προσεκτικά, έτσι ώστε οι διαφορές μεταξύ των μαθητών του σχολείου και των φοιτητών του κολεγίου θα ελαχιστοποιούνταν. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το όριο έννοια δεν είναι ″εύκολη″ στην κατανόηση και ότι οι απλές προσεγγίσεις, με και χωρίς CAS, δεν επιτρέπουν στους μαθητές να εκτιμήσουν το βάθος της έννοιας του ορίου. Ωστόσο, υπήρχαν ενδείξεις ότι ένας συνδυασμός εναλλακτικών προσεγγίσεων, συμπεριλαμβανομένης της χρήσης του CAS, θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια πιο ευέλικτη αντίληψη του ορίου. Οι δυσκολίες που σχετίζονται με τη διδασκαλία των ορίων μπορούν να παρακαμφθούν με τη χρήση μιας εναλλακτικής γραφικής προσέγγισης (Fey & Heid, 1984; D. Tall, 1985, 1996b) εξηγεί την προσέγγιση αυτή. Η γραφική προσέγγιση επιτρέπει τον έμμεσο χειρισμό της έννοιας του ορίου, για παράδειγμα, με μεγέθυνση της γραφικής παράστασης ώστε να φαίνεται "τοπικά ευθεία", έτσι ώστε η απαιτούμενη κλίση να είναι αυτή της ορατά ευθείας γραφικής παράστασης. Αυτό βοηθά τη μετάβαση σε στοιχειώδη λογισμό χωρίς να σκοντάφτει στην έννοια του ορίου, αλλά η έλλειψη αυτή μπορεί να χρειαστεί να αντιμετωπιστεί αργότερα όταν περαιτέρω γνωστική αναδόμηση μπορεί να αποδειχθεί αναγκαία για την αντιμετώπιση των τυπικών εννοιών.

3.2.2 Βελτιωμένη κατανόηση των εννοιών του λογισμού

Οι υπολογιστές μπορούν να εκτελούν χρονοβόρες κουραστικές και επίπονες δραστηριότητες (π.χ. σχεδίαση γραφικών παραστάσεων, επίλυση πολύπλοκων εξισώσεων και εύρεση παραγώγων και ολοκληρωμάτων) θεωρητικά καθιστώντας εφικτό στους μαθητές να επιλύουν περισσότερα, ανοίγοντας την βεντάλια των προβλημάτων σε πιο ρεαλιστικής φύσεως, προβλήματα και να κερδίζουν περισσότερο χρόνο για την κατανόηση των εννοιών του λογισμού. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1980 έχουν διατυπωθεί πολυάριθμοι γενικοί ισχυρισμοί σχετικά με τα πιθανά οφέλη από τη χρήση εργαλείων υπολογιστών για τη βελτίωση της κατανόησης του λογισμού (Arnold, 1991; Fey, 1989; D. O. Tall & West, 1986; White, 1990).Για παράδειγμα, ο Heid (1988, σ. 4), σχολιάζοντας ένα σύνολο ερευνών που διεξήχθησαν κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δέκα χρόνια, δηλώνει ότι ″Οι υπολογιστικές συσκευές είναι φυσικά εργαλεία για τον αναπροσανατολισμό των μαθηματικών ″ Μεταγενέστερες έρευνες υποστηρίζουν επίσης αυτόν τον ισχυρισμό (Cooley, 1995a; Ellison, 1993; Hillel, 1993; D. Tall, 1996b) . O Hillel (1993, σ. 46) παρατήρησε οφέλη για τη μάθηση των μαθητών: ″οι μαθητές που βγαίνουν από αυτό είχαν αποκτήσει διαφορετικού τύπου ιδέες και γνώσεις από τους παραδοσιακά προετοιμασμένους μαθητές - ιδέες και γνώσεις που θεωρούσαμε ότι ήταν πιο κοντά στην ουσία της μαθηματικής ανάλυσης .″

Ο Cooley (1996) αναφέρει επίσης τη θετική επίδραση στην επίδοση και την κατανόηση των εννοιών (όριο, παράγωγος, στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής, ολοκλήρωμα, μέγιστο και ελάχιστο, και σκιαγράφηση καμπυλών) μετά την ολοκλήρωση ενός CAS (Mathematica) σε ένα εισαγωγικό μάθημα ανάλυσης στο κολέγιο. Οι μαθητές στην ομάδα τεχνολογίας σημείωσαν σημαντικά υψηλότερη βαθμολογία στον εννοιολογικό τομέα της παραγώγου (συν το όριο και την καμπύλη σκιαγράφησης) από ό,τι στην ομάδα μη τεχνολογικών ομάδων. Η τεχνολογική ομάδα σημείωσε επίσης υψηλότερη βαθμολογία στις παραδοσιακές ερωτήσεις υπολογιστικού λογισμού, υποδεικνύοντας ότι αυτοί οι μαθητές δεν υπέστησαν καμία απώλεια υπολογιστικών δεξιοτήτων και ότι η εννοιολογική προκατάληψη της διδασκαλίας μπορεί να τους βοήθησε επίσης στην εκτέλεση αλγοριθμικών διαδικασιών. Άλλες έρευνες δείχνουν επίσης ότι η απόκτηση δεξιοτήτων δεν αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση των εννοιών ή των εφαρμογών και ότι, όταν η εννοιολογική κατανόηση των εννοιών του λογισμού προηγείται, οι υπολογιστικές δεξιότητες δεν χάνονται ((Palmiter, 1991; Repo, 1994). Για παράδειγμα, ο Heid (1988) διεξήγαγε μια μελέτη στην οποία δύο τάξεις φοιτητών κολεγίου διδάχθηκαν μαθηματικά για δεκαπέντε εβδομάδες. Οι υπολογιστές χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλείο για τη διευκόλυνση της και τη διερεύνηση των εννοιών που διέπουν τον υπό μελέτη λογισμό. Η πειραματική τάξη επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη εννοιών για δώδεκα εβδομάδες και στην συνέχεια διδάχθηκαν δεξιότητες κατά τη διάρκεια των τριών τελευταίων εβδομάδων. Η ομάδα ελέγχου μελέτησε τις δεξιότητες για τις δεκαπέντε εβδομάδες. Ο Heid διαπίστωσε ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έδειξαν καλύτερη κατανόηση των εννοιών του λογισμού (όπως η έννοια της παραγώγου) από την ομάδα ελέγχου και υπήρχε μικρή διαφορά σε μια τελική εξέταση των δεξιοτήτων ρουτίνας. Η εκμάθηση των εννοιών βελτιώθηκε σημαντικά και οι μαθητές είχαν σχεδόν εξίσου καλές επιδόσεις στις δεξιότητες ρουτίνας με την ομάδα ελέγχου. Συγκεκριμένα, ήταν σε θέση να εκφράζουν ιδέες σε δικά τους λόγια και οι εννοιολογήσεις τους ήταν ευρύτερες, σαφέστερες, πιο ευέλικτες και πιο λεπτομερείς από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Ο Heid ερμήνευσε αυτά τα αποτελέσματα ως απόδειξη ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τις έννοιες του λογισμού, χωρίς προηγούμενη γνώση των βασικών δεξιότητες υπολογισμού, δείχνοντας ότι ήταν δυνατόν να αναδιοργανωθεί η σειρά με την οποία ο λογισμός διδάσκεται στους μαθητές, ώστε να επικεντρωθεί στις έννοιες πριν από τη διδασκαλία των διαδικασιών. Οι μαθητές ανέφεραν ότι αισθάνθηκαν ότι ο υπολογιστής τους απάλλαξε από ορισμένες από τις χειραγωγικές πτυχές του υπολογισμού, ότι τους έδωσε αυτοπεποίθηση στην οποία βασίζουν τη συλλογιστική τους, και ότι τους βοήθησε να επικεντρωθούν σε πιο σφαιρικές πτυχές της επίλυσης προβλημάτων. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας οι μαθητές συμμετείχαν στη συζήτηση των ιδεών και κλήθηκαν να κατανοήσουν τις γλώσσα που σχετίζεται με τον λογισμό, συμπεριλαμβανομένης της ορολογίας και των συμβόλων.

3.2.3 Λόγοι για τη βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης μέσω των C.A.S

Ο όρος «αναπαράσταση» αναφέρεται σε ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια, το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο (Kaput, 1987). Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθησιακή διαδικασία καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τα όσα μαθαίνει ο μαθητής και το πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών στα μαθηματικά (Cheng, 2000). Λειτουργούν δηλαδή ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών εννοιών (Greeno & Hall, 1997). Σχετικά, οι Lesh, Post και Behr (1987) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης και την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο. Η ικανότητα αναγνώρισης, χειρισμού και μετάφρασης αναφέρονται στην ευελιξία χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές.

Η οπτικοποίηση και η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων έχουν προταθεί για να εξηγήσει γιατί η τεχνολογία βοηθά τους μαθητές να είναι επιτυχείς στα εννοιολογικά αντικείμενα. Αποδίδεται βελτιωμένη κατανόηση στη δύναμη της οπτικής εικόνας να οικοδομεί έννοιες (D. O. Tall & West, 1986): Ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι ισχυρά εξοπλισμένος για να επεξεργάζεται οπτικές πληροφορίες. Με τη χρήση γραφικών υπολογιστών είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί αυτή η δύναμη για να βοηθηθούν οι μαθητές να αποκτήσουν μεγαλύτερη κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, οι δυναμικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών διαδικασιών παρέχουν έναν βαθμό ψυχολογικής πραγματικότητας που επιτρέπει στο μυαλό να τις χειριστεί με πολύ πιο γόνιμο τρόπο από ό,τι θα μπορούσε ποτέ να επιτευχθεί ξεκινώντας από το στατικό κείμενο και τις εικόνες ενός βιβλίου (D. Tall, 1996a) .Οι υπολογιστές μπορούν να δώσουν νόημα σε ″αφηρημένες″ ιδέες αναπαριστώντας τες ως ″συγκεκριμένα″ αντικείμενα (σύμβολα, αριθμοί και αριθμοί) να χειριστούν μέσω των διαδραστικών δυνατοτήτων του λογισμικού να αντανακλαστούν και, κατά συνέπεια, είναι πιθανότερο να γίνουν κατανοητά(D. Tall, 1991). Πράγματι, είναι γενικά αληθές ότι κάθε φορά που ένα άτομο κατασκευάζει κάτι σε έναν υπολογιστή, μια αντίστοιχη κατασκευή γίνεται στο μυαλό του ατόμου (Even, 1998a) . Ωστόσο, η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων- που είναι ευκολότερα προσβάσιμες με την τεχνολογία, αναφέρεται ως η πιο σημαντικότερη ωφέλεια για την εννοιολογική ανάπτυξη (Fey, 1989). Η κατανόηση και η ευκολία των μαθητών με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις του λογισμού εννοιών και διαδικασιών - συμβολικές, γραφικές και αριθμητικές - είναι απαραίτητες για την εμπεριστατωμένη κατανόηση του λογισμού και των προβλημάτων που απαιτούν λογισμό.(Norman, 1994) . Η ικανότητα αναγνώρισης και αναπαράστασης του ίδιου αντικειμένου σε διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία στη μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, επιτρέπουν σε κάποιον να δει πλούσιες σχέσεις, να αναπτύξει μια καλύτερη εννοιολογική κατανόηση, να διευρύνει και να εμβαθύνει τις κατανόηση και να ενισχύσει τις ικανότητές του να επιλύει προβλήματα (Even, 1998b). Η σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων αναπτύσσει γνώσεις για την κατανόηση της ουσίας καθώς και των πολλών όψεων μιας έννοιας. Αρκετές έρευνες δείχνουν ότι μια πλήρης αντιμετώπιση του ρόλου των αναπαραστάσεων στα μαθηματικά είναι πολύπλοκη. Ο Goldin (1998) περιγράφει θεωρητικές ερμηνείες του όρου "αναπαράσταση" και "σύστημα αναπαράστασης" σε σχέση με τη μαθηματική μάθηση, τη διδασκαλία και την ανάπτυξη (Goldin, 1998). Εξηγεί επίσης λεπτομερώς την έννοια της μαθηματικής νόησης που λαμβάνει χώρα σε διάφορα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης που δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμα. Αυτές είναι η αριθμητική, η γραφική και οι συμβολικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα παραδοσιακά μαθηματικά και περιγράφονται ως μέρος του "τυπικού" και "μαθηματικού συστήματος των αναπαραστάσεων"(Goldin & Kaput, 1996). Οι Goldin και Kaput (1996) θεωρούν τις εξωτερικές διαμορφώσεις ως εκείνες οι οποίες είναι "προσιτές στην άμεση παρατήρηση (ομιλία, γραπτές λέξεις, τύποι, μικροκόσμοι υπολογιστών) όπως εμφανίζονται στην οθόνη . Για να επιτευχθεί άμεσα (και σωστά) μια δεδομένη μετάφραση, πρέπει να μετασχηματίσουμε την πηγή "κατά στόχο" ή, με άλλα λόγια, να την εξετάσουμε από τη σκοπιά του στόχου και να εξάγουμε τα αποτελέσματα.(Pimm, 1990). Η διδασκαλία των αναπαραστάσεων με το CAS έχει αλλάξει το φύση των γραφικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων (και της σύνδεσης μεταξύ των τριών αναπαραστάσεων) από στατική σε ενεργητική που θεωρείται ευεργετική για την κατανόηση των αναπαραστάσεων(Goldin & Kaput, 1996). Στην παρούσα εργασία θα παρακολουθείται η συμπεριφορά των μαθητών καθώς χρησιμοποιούν τις αριθμητικές, γραφικές και συμβολικές αναπαραστάσεις του προγράμματος Geogebra καθώς και οι εν γένει διατυπώσεις και ερμηνείες κατά την διάρκεια επίλυσης του προβλήματος.

3.2.4 Δυσκολίες που σχετίζονται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων

Ορισμένες μελέτες έχουν αναφέρει δυσκολίες των μαθητών να συνδέουν αναπαραστάσεις και να κινούνται με ευελιξία μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων.(Ferrini-Mundy & Graham, 1994b). Οι έννοιες, οι μέθοδοι συλλογισμού και το ρεπερτόριο ευρετικών μεθόδων είναι ριζικά διαφορετικές σε κάθε μία από αυτές τις αναπαραστάσεις, και αν οι μαθητές είναι άνετοι με τις ασυνέπειες, τις αντιφάσεις και τις ανταγωνιστικές έννοιες που προκύπτουν ως αποτέλεσμα, τότε η πρόκληση να τους βοηθήσουμε να φτάσουν σε ένα λειτουργικό μέσο σύνδεσης αυτών των αναπαραστάσεων είναι πολύ περίπλοκη. Μια πρόσθετη μεταβλητή βέβαια, είναι ο ρόλος που πρέπει να διαδραματίσει η τεχνολογία.(Ferrini-Mundy & Graham, 1994b) Άλλες μελέτες αναφέρουν δυσκολίες που σχετίζονται με τη μετάφραση μεταξύ αναπαραστάσεων και αναφέρουν ότι οι μαθητές μπορεί να έχουν μια επιφανειακή ικανότητα να συνδέουν αναπαραστάσεις χωρίς κατανόηση των βαθύτερων εννοιολογικών δεσμών μεταξύ τους (Hong et al., 2000) .Οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (που χρησιμοποιούσαν αριθμομηχανές γραφικών και με κατεξοχήν συμβολικές αντιλήψεις για την άλγεβρα) αντιμετώπισαν δυσκολίες, τόσο διαδικαστικά και εννοιολογικά, συνδέοντας συμβολικές και γραφικές αναπαραστάσεις(Slavit, 1998). Αυτοί προτιμούσαν να χρησιμοποιούν στρατηγικές που είχαν μάθει προηγουμένως παρά νέες που είχαν διδαχθεί πιο πρόσφατα προσεγγίσεις και αυτό διαφαίνεται και στα συμπεράσματα αυτής της ερευνάς όπου κάποιοι μαθητές επέμεναν στην χρήση του ολοκληρώματος ακόμα και όταν δεν γνωρίζουμε την συνάρτηση . Συνεπώς, είναι σημαντικό να διερευνηθεί ο ρόλος της τεχνολογίας και των μηχανισμών μάθησης στη μετακίνηση μεταξύ των αναπαραστάσεων, ιδίως δεδομένου ότι υπάρχει έλλειψη μελετών σχετικά με πώς συμβαίνει αυτό(Even, 1998). Ωστόσο, παρόλο που σήμερα υπάρχει συμφωνία μεταξύ των εκπαιδευτικών των μαθηματικών σχετικά με την σημασία των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών, δεν είναι πολλά γνωστό για τη φύση των διαδικασιών που εμπλέκονται στην εργασία με διαφορετικές αναπαραστάσεις.(Kaput, 1998) Παρόλο που υπάρχει σημαντικός όγκος βιβλιογραφίας που υποστηρίζει ότι η χρήση CAS θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόηση των εννοιών του λογισμού, υπάρχουν πολύ λίγες μελέτες που αναφέρονται σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις με CAS για να αναπτύξουν την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου, ιδίως όταν το μάθημα σπουδών είναι η πρώτη τους εισαγωγή στον λογισμό. Η έρευνα που περιλαμβάνει μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι σημαντική επειδή αντιμετωπίζει αυτό το κενό στην έρευνα. Συμβάλλει επίσης στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με ισχυρή φορητή προσωπική τεχνολογία θα πρέπει να υιοθετηθεί στις τάξεις πριν από την αναπόφευκτη χρήση της (στο εγγύς μέλλον) από τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εκτός από την οφέλη στην κατανόηση της έννοιας βασικών εννοιών του λογισμού και της μαθηματικής ανάλυσης , η παρούσα εργασία θα είναι επίσης σε θέση να διερευνήσει τις δυσκολίες που σχετίζονται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Ο Tall (1996) περιγράφει τρεις πιθανές διδακτικές προσεγγίσεις για την κατανόηση της λογισμού. Η πρώτη σχετίζεται με την κατανόηση του πραγματικού λογισμού και η δεύτερη, κατάλληλη για τον στοιχειώδη λογισμό, είναι μια πιο θεωρητική προσέγγιση που περιλαμβάνει αριθμητική, συμβολικές, γραφικές αναπαραστάσεις. Η τρίτη προσέγγιση είναι η τυπική προσέγγιση της ανάλυσης με βάση τον ορισμό-θεώρημα. Ο Tall προτείνει ένα μοντέλο που συνδέει αυτές τις προσεγγίσεις μέσω των ενεργειών "πράττειν" και "αντιπράττειν", αλλά περιλαμβάνει το περιεχόμενο του λογισμού εκτός των απαιτήσεων του προγράμματος σπουδών.

Προσδιορίζονται τέσσερα στοιχεία που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνουν διαφορετικές αναπαραστάσεις: (O’Callaghan, 1998)

1. Μοντελοποίηση: η μετάβαση από την κατάσταση του προβλήματος σε μια μαθηματική αναπαράσταση της κατάστασης.
2. Ερμηνεία: κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων σε σχέση με την πραγματική ζωή εφαρμογών.
3. Μετάφραση: η ικανότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση της συνάρτησης σε μια άλλη.
4. Επαναπροσδιορισμός: δημιουργία ενός νοητικού αντικειμένου από αυτό που αρχικά έγινε αντιληπτό ως διαδικασία ή διαδικασία.

3.3 Διαφοροποίηση στην οργάνωση του προγράμματος σπουδών

Οι ερευνητικές μελέτες έχουν υιοθετήσει διαφορετικούς σχεδιασμούς του προγράμματος σπουδών που είχαν πρωταρχικό έμφαση στη δομή του προγράμματος σπουδών.

- Προσέγγιση με ενσωμάτωση υπολογιστή: Κατάλληλες δραστηριότητες στον υπολογιστή για χρήση από τους μαθητές ενσωματώνονται σε ένα υπάρχον πρόγραμμα σπουδών (Connors, 1996- Dunham, 1991, Martinez-Cruz, 1993- Rochowicz, 1996).
- Επαναπροσδιορισμένα μαθήματα υπολογισμού: Οι έννοιες και οι εφαρμογές του λογισμού τονίζονται και διδάσκονται πριν από τις χειραγωγικές δεξιότητες με την πεποίθηση ότι οι μαθητές θα μπορούσαν να μάθουν τις απαραίτητες δεξιότητες αφού αποκτήσουν μια καλή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Dubinsky & Schwingendorf, 1991-Heid, 1984, 1988, Judson, 1988- και άλλοι).
- Προσέγγιση εφαρμογών/λύσης προβλημάτων: Έμφαση στις εφαρμογές και στην πραγματική ζωή .Η μοντελοποίηση θεωρείται απαραίτητη για την ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης.

Ο O'Callaghan (1998) υποστηρίζει αυτή την αντίληψη στο πλαίσιο των συναρτήσεων και στο πλαίσιο των προβλημάτων του λογισμού. Εκτός από τους παραπάνω σχεδιασμούς, δύο άλλες προσεγγίσεις έχουν επικεντρωθεί ιδιαίτερα σε στην εννοιολογική κατανόηση.

- Προσέγγιση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στην εισαγωγή του εγχειριδίου τους, Calculus, οι Hughes-Hallett et al: Μία από τις κατευθυντήριες αρχές είναι ο "κανόνας των τριών", ο οποίος λέει ότι όπου είναι δυνατόν τα θέματα πρέπει να διδάσκονται γραφικά και αριθμητικά, καθώς και αναλυτικά [αλγεβρικά]. Ο στόχος είναι να παραχθεί ένα μάθημα στο οποίο οι τρεις οπτικές γωνίες είναι ισορροπημένες, και όπου οι μαθητές βλέπουν μια σημαντική ιδέα από διάφορες οπτικές γωνίες. **Με αυτή την προσέγγιση, δίνεται έμφαση στην κατανόηση των αριθμητικών και γραφικών αναπαραστάσεων εκτός από την παραδοσιακή συμβολική αναπαράσταση** (Repo, 1994)(Heid, 1984)(Klein, 1994).

- Προσέγγιση εναλλακτικών αναπαραστάσεων: Υπάρχει ένα σύνολο βιβλιογραφίας που υποστηρίζει τη διεύρυνση του αριθμού των αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, ο Kennedy (2000) συνιστά να συμπεριληφθεί η λεκτική αναπαράσταση ως τέταρτη βασική αναπαράσταση για έναν "κανόνα των τεσσάρων". Ο Kaput (1998) περιγράφει επίσης την ανεπάρκεια των ″μεγάλων τριών″ για τη σύνδεση των αναπαραστάσεων και προτρέπει τους μαθητές να βιώσουν την πραγματική καταστάσεις και φαινόμενα και να εμπεδώσουν τη χρήση της συνάρτησης σε πραγματικά δεδομένα. Μια ώριμη κατανόηση των εννοιών του λογισμού η το φάσμα των αναπαραστάσεων πρέπει να διευρυνθεί πέρα από τις αριθμητικές, γραφικές και συμβολικές αναπαραστάσεις, ώστε να περιλαμβάνει ενεργητικές (οπτικο-χωρικές) και τυπικές αναπαράσταση(D. Tall, 1996a). Η εμψύχωση (″κινούμενες εικόνες″) θα βοηθήσει τους μαθητές να οπτικοποιήσουν (″δούν″) τις μαθηματικές ιδιότητες που εξετάζονται, όπως η ″περιοριστική περίπτωση″ στο διαφορικό λογισμό. και οι ιδιότητες που σχετίζονται με τους τυπικούς γραφικούς μετασχηματισμούς(Leinbach et al., 2002). Ο Lin (1993) συνιστά επίσης τη χρήση διαδραστικών δυναμικών προγραμμάτων για να βοηθήσει τους μαθητές να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των αλλαγών στις γραφικές και συμβολικές αναπαραστάσεις και να συνδέσουν με νόημα τις αναπαραστάσεις(Lin & Hsieh, 1993).

3.4 Διαφοροποίηση στη διδακτική προσέγγιση

Άλλα σχέδια προγραμμάτων σπουδών επικεντρώθηκαν σε διδακτικές προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση που περιγράφεται παρακάτω είναι μια δασκαλοκεντρική μέθοδος όπου ο δάσκαλος καθοδηγεί τη μάθηση των μαθητών ενώ στις άλλες δύο προσεγγίσεις είναι μαθητοκεντρική και οι μαθητές έχουν μεγαλύτερη συμβολή στον έλεγχο της δικής τους μάθησης.

- **Παραδοσιακή προσέγγιση** που συμπληρώνεται με την τεχνολογία: Καθηγητής που βασίζεται σε υπολογιστή επίδειξης προστίθενται στην παραδοσιακή διδακτέα ύλη και στη διδασκαλία σε στυλ διάλεξης και οι μαθητές αναλαμβάνουν εργασίες που περιλαμβάνουν τη χρήση της τεχνολογίας.(Klein, 1994)

- **Εργαστηριακή προσέγγιση**: Οι μαθητές ενθαρρύνονται να παρατηρούν, να εντοπίζουν, να εξερευνούν, να αναλύουν και να εξηγούν, έτσι ώστε η έμφαση να μεταφερθεί από τον υπολογισμό στον ερμηνεία(Cooley, 1995b)

- **Η προσέγγιση της συνεργατικής μάθησης και η κατασκευή νοήματος από τους μαθητές**: Οι μαθητές ενθαρρύνονται να κατασκευάσουν το νόημα για τον εαυτό τους μέσω διερευνήσεων με υπολογιστές (Repo, 1994).Για παράδειγμα, οι Keller και συνάδελφοι αναφέρουν ότι η διδασκαλία με επίκεντρο τον μαθητή (συνεργατική μάθηση, εργαστηριακά πειράματα, ποικιλία μορφών συζήτησης) είχε θετική επίδραση στους στη συνολική επιτυχία των μαθητών στους υπολογισμούς (Keller et al., 1999)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:

Η Ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση ως διδακτικό πλαίσιο σχεδιασμού

4.1. Εισαγωγή

Η θεωρητική βάση για τη διδασκαλία σχεδιασμού για την εκπαίδευση που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία βασίζεται στη θεωρία της ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME). Η προσδοκία ήταν ότι η προσαρμογή της διδακτικής ευρετικών του σχεδιασμού της RME ως εργαλεία για τη δημιουργία μιας ενότητας του Λογισμού θα βοηθούσε τους μαθητές να γεφυρώσουν τη δύσκολη μετάβαση από τις άτυπες διαισθητικές μορφές συλλογισμού στις πιο τυπικούς μαθηματικούς τρόπους συλλογισμού. Χρησιμοποιώντας αυτή τη θεωρία, οι μαθητές οδηγούνται μέσα από μια διαδικασία "καθοδηγούμενης επανίδρυσης και επανεφεύρεσης" καθώς μαθαίνουν να συλλογίζονται και να ασχολούνται με μαθηματικές εργασίες. Η απομάκρυνση από την παρουσίαση των μαθηματικών ως σταθερό σύστημα κανόνων είναι επιθυμητή (Freudenthal, 1991) και η ανάπτυξη οργανωμένων δραστηριοτήτων από τις οποίες οι μαθητές θα μπορούσαν να οδηγηθούν στην εκ νέου ανακάλυψη των τυπικών μαθηματικών κανόνων και σχέσεων επίσης . Τα μαθηματικά για να έχουν οποιαδήποτε αξία, έπρεπε να συνδέονται με την πραγματικότητα του γνωστικού υποκειμένου ή του μαθητή(Freudenthal, 1991). Για τον Freudenthal, τα μαθηματικά δεν ήταν απλώς το σώμα των μαθηματικών γνώσεων, αλλά η δραστηριότητα της "επίλυσης προβλημάτων, της αναζήτησης προβλημάτων και της οργάνωσης ενός αντικειμένου" (Freudenthal, 1973) .Ο ίδιος χαρακτήρισε αυτή τη δραστηριότητα της πράξης μαθηματικών, μαθηματικοποίηση. Η πρόβλεψη ήταν ότι καθώς οι μαθητές θα κατέληγαν να συλλογίζονται τους τρόπους με τους οποίους οι βασικές ιδέες του ρυθμού μεταβολής και της συσσώρευσης συνδέονται, θα υποστηρίζονταν στο να αναπτύξουν ατομικά την κατανόηση του τι αντιπροσωπεύουν βασικές έννοιες της μαθηματικής Ανάλυσης. Μέσω μιας διαδικασίας προοδευτικής μαθηματικοποίησης, οι μαθητές προχωρούν από ένα επίπεδο σε ένα υψηλότερο επίπεδο κατανόησης. Συμβολικές συσκευές όπως "γραφήματα, αλγόριθμοι και ορισμοί γίνονται χρήσιμα εργαλεία όταν οι μαθητές τα κατασκευάζουν μέσω μιας διαδικασίας κατάλληλα καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης" (Rasmussen & Kwon, 2007).Η πραγματικότητα αναφέρεται τόσο στα πλαίσια της πραγματικής ζωής όσο και στις μαθηματικές καταστάσεις που οι μαθητές βιώνουν ή αντιλαμβάνονται ως φυσικές ή πραγματικές (Drijvers, 2002). Η διδακτική πρόταση των Ρεαλιστικών Μαθηματικών χαρακτηρίζεται από μια ενσωματωμένη και λειτουργική στην κοινωνία θεώρηση των μαθηματικών και του ρόλου τους και απεικονίζει μια ευρύτερη αλλαγή στη θεμελιακή σχέση μεταξύ μαθητή , καθηγητή σχολείου και κοινωνίας. Σε αντίθεση με τα «Νέα Μαθηματικά», αποδίδει μια ιδιαίτερη αξία στα πλούσια- σχετικά με την καθημερινή ζωή- πλαίσια για τη μάθηση, στην επίλυση προβλήματος, στη σύνδεση με την προγενέστερη εμπειρία των μαθητών, στη συμμετοχή ολιστικά των μαθητών στην μαθησιακή διαδικασία καθώς και σε μαθησιακά περιβάλλοντα πολυμέσων (multimedia learning environments - MMLEs) (Conway & Sloane, 2006).

4.2 Τι είναι η RME;

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME) είναι μια διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών που αναπτύχθηκε από τον Ολλανδό μαθηματικό και εκπαιδευτικό Hans Freudenthal το 1971 στο Ινστιτούτο Freudental του Πανεπιστημίου της Ουτρέχτης στις Κάτω Χώρες . Σύμφωνα με την RME, τα μαθηματικά πρέπει να είναι κοντά στα παιδιά και να σχετίζονται με καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Ωστόσο, η λέξη "ρεαλιστικό" δεν αναφέρεται μόνο στη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά περιλαμβάνει επίσης πραγματικές προβληματικές καταστάσεις στο μυαλό των μαθητών. Μπορεί τα προβλήματα που τίθενται στους μαθητές να έχουν κάτι από τον πραγματικό κόσμο στο περιεχόμενό τους, αλλά αυτό δεν ισχύει πάντα. Η τυπική δομή των μαθηματικών μπορεί να παρέχει το κατάλληλο περιεχόμενο για ένα πρόβλημα στο βαθμό που αυτό είναι πραγματικό στο μυαλό των μαθητών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση είναι μια θεωρία διδασκαλίας που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο και για τη μαθηματική εκπαίδευση (Gravemeijer, 1994; Treffers, 1987). Η βασική της φιλοσοφία στηρίχτηκε στις απόψεις του ιδρυτή της για το: ***τι είναι τα μαθηματικά, πώς μαθαίνουν οι μαθητές μαθηματικά*****, και** ***πώς θα πρέπει να διδαχθούν τα μαθηματικά***(V. den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005) . Προσφέρει μια διδακτική φιλοσοφία για τη διδασκαλία, τη μάθηση και το σχεδιασμό διδακτικού υλικού για τα μαθηματικά. Η θεωρία έχει τις ρίζες της στην άποψη του Freudenthal (1991) ότι "τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα" και όχι "ένα καλά οργανωμένο επαγωγικό σύστημα" (Gravemeijer, 1994). Μια υποστηριζόμενη άποψη στην RME είναι ότι η εκμάθηση των μαθηματικών πρέπει να ξεκινά με πραγματικές προβληματικές καταστάσεις που πρέπει να επιλύσουν οι μαθητές. Μια κεντρική κατασκευή στην RME είναι η προοδευτική μαθηματικοποίηση. Οι μαθηματικοί αναλαμβάνουν νοητικά αντικείμενα από την πραγματικότητα και το οργανώνουν σύμφωνα με μαθηματικά πρότυπα προκειμένου να επιλύσουν προβλήματα από την πραγματικότητα (Gravemeijer, 1994). "Δεν υπάρχουν μαθηματικά χωρίς μαθηματικοποίηση" (Freudenthal, 1973). Υπάρχουν δύο τύποι μαθηματικοποίησης: "η οριζόντια μαθηματικοποίηση, η οποία αναφέρεται στη μοντελοποίηση μιας προβληματικής κατάστασης σε μαθηματικά και αντίστροφα, και η κάθετη μαθηματικοποίηση, η οποία αναφέρεται στη διαδικασία της επίτευξης ενός υψηλότερου επιπέδου μαθηματικής αφαίρεσης"(Drijvers, 2002) . Η ιδέα ότι η μετάβαση από τον κόσμο της ζωής στον κόσμο των συμβόλων ήταν οριζόντια μαθηματικοποίηση, ενώ η λειτουργία μέσα στον κόσμο των συμβόλων είναι κάθετη μαθηματικοποίηση τονίστηκε από τον Freudenthal (1991). Ωστόσο, αυτή η ιδέα προήλθε από το έργο του Treffers (1987). Η μαθηματικοποίηση (η οργάνωση από μια μαθηματική προοπτική), περιλαμβάνει μια σειρά από προοδευτικές αναλύσεις και ερμηνείες από το ένα επίπεδο στο άλλο. Αυτή η διαδικασία της προοδευτικής μαθηματικοποίησης παρέχει μια τροχιά μέσω της οποίας μπορεί να πραγματοποιηθεί η μάθηση(Treffers, 1987). Σύμφωνα με τον Gravemeijer(1994, σ. 446), "οι διδακτικές δραστηριότητες θα πρέπει να αξιοποιούν τη μαθηματικοποίηση ως την κύρια αρχή της μάθησης. Η μαθηματικοποίηση δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να επανεφεύρουν τα μαθηματικά". Εάν προσαρμοστεί κατάλληλα, η "ρεαλιστική" προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι κατάλληλη για εννοιολογική ανάπτυξη, καθώς οι μαθητές εμπλέκονται σε βαθιές διαδικασίες "μαθηματικοποιώντας τα προβλήματα του πλαισίου (οριζόντια) και μαθηματικοποιώντας τη λύση- διαδικασίες (κάθετα)" (Fauzan, 2002). Ο Treffers (1987) διακρίνει τις ρεαλιστικές προσεγγίσεις από τη μηχανιστική προσέγγιση, η οποία δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε κάθετη μαθηματικοποίηση, μια δομιστική προσέγγιση, η οποία δίνει έμφαση στην κάθετη μαθηματικοποίηση, και μια εμπειριστική προσέγγιση με έμφαση στην οριζόντια μαθηματικοποίηση μόνο εστιάζοντας σε δύο τρόπους μαθηματικοποίησης και διαφοροποίησε σαφώς την RME από τις άλλες, επικρατούσες στην μαθηματική εκπαίδευση, προσεγγίσεις, τις οποίες ο Treffers (1987) ταξινομεί σε:

• **Μηχανιστική ή παραδοσιακή** προσέγγιση: Δίδεται έμφαση στην επαλήθευση και την εφαρμογή κανόνων και αλγορίθμων σε προβλήματα που είναι παρόμοια με προηγούμενα, καθώς και στην μάθηση και απομνημόνευση «τεχνασμάτων». Δεν χρησιμοποιεί **καμία** μορφή **μαθηματικοποίησης**.

• **Εμπειριστική** προσέγγιση: Παρέχονται στους μαθητές καταστάσεις από τον κόσμο διαβίωσής τους τις οποίες πρέπει να οργανώσουν με δραστηριότητες **οριζόντιας** μαθηματικοποίησης.

• **Δομιστική** (structuralistic) ή «προσέγγιση των Νέων Μαθηματικών»: Βασίζεται στην άποψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα οργανωμένο, παραγωγικό σύστημα και η διαδικασία μάθησης θα πρέπει να καθοδηγείται από τη δομή αυτού του συστήματος που συχνά δεν έχει τίποτε κοινό με τον πραγματικό κόσμο του μαθητή . Η δομιστική προσέγγιση περιορίζεται στην **κάθετη** μαθηματικοποίηση.

• **Ρεαλιστική** προσέγγιση: Λαμβάνεται ως αφετηρία της μάθησης μια πραγματική κατάσταση ή ένα πρόβλημα πλαισίου το οποίο οργανώνεται με δραστηριότητες **οριζόντιας** μαθηματικοποίησης. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται η **κάθετη** μαθηματικοποίηση για να αναπτυχθούν και να γενικευτούν οι μαθηματικές έννοιες.

Αυτή η ταξινόμηση περιγράφεται σαφώς από τον Freudenthal (1991) στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1: Τέσσερις τύποι μαθηματικής εκπαίδευσης (Freudenthal, 1991)

Τύπος προσέγγισης	Οριζόντια Μαθηματικοποίηση	Κάθετη Μαθηματικοποίηση
Μηχανιστική (Mechanistic)	-	-
Εμπειριστική (Empiristic))	+	-
Δομιστική (Structuralist)	-	+
Ρεαλιστική (Realistic)	+	+

4.3 Καθοδηγούμενη επανεφεύρεση

Μία από τις σημαντικότερες ευρετικές μεθόδους της RME διδασκαλίας είναι ότι οι διδακτικοί πόροι θα πρέπει να σχεδιαστούν για να ενθαρρύνουν την επανεφεύρεση των βασικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές (Freudenthal 1973). Για να αρχίσει να αναπτύσσει μια διδακτική ακολουθία, ο σχεδιαστής συμμετέχει πρώτα σε ένα πείραμα σκέψης για να οραματιστεί μια μαθησιακή διαδρομή που θα μπορούσε να εφεύρει η ίδια η τάξη (Gravemeijer, 2004). Ενώ μερικές από αυτές που θεωρούμε βασικές μαθηματικές έννοιες όπως η έννοια της συνάρτησης και της παραγώγου σήμερα χρειάστηκαν δεκαετίες ή και αιώνες για να αναπτύξουν πλήρως οι πρωτοπόροι μαθηματικοί, οι μαθητές αναμένεται να αναπτύξουν ολοκληρωμένες εννοιολογικές αντιλήψεις των μαθηματικών εννοιών μέσα σε διάστημα αρκετών εβδομάδων ή μηνών ενός μόνο σχολικού έτους. Οι διδακτικοί πόροι της RME βοηθούν τους μαθητές να επανεφεύρουν αυτές τις ιδέες σε συντομευμένες χρονικές περιόδους χρησιμοποιώντας προσεκτικά διαδοχικά προβλήματα και εργαλεία και καθοδήγηση από τον δάσκαλο. Σε αυτή την προσέγγιση επανεφεύρεσης, οι μαθηματικές έννοιες δεν παρουσιάζονται στους μαθητές με τρόπο από πάνω προς τα κάτω, όπως στην παραδοσιακή διδασκαλία. Αντίθετα, η διαδρομή μάθησης είναι ο προσεκτικός σχεδιασμός ώστε η εννοιολογική ανάδυση να συμβεί καθώς οι μαθητές εμπλέκονται στη διδακτική ακολουθία Αυτή η πρώτη αρχή αναφέρει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν την ευκαιρία να βιώσουν την εκμάθηση των μαθηματικών σε μια διαδικασία παρόμοια με τον τρόπο που εφευρέθηκαν τα μαθηματικά(Bakker, 2004; Gravemeijer, 1994). Οι διδακτικές δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να παρέχουν μαθητές με βιωματικά πραγματικές καταστάσεις από τις οποίες είναι σε θέση να σχηματίσουν ή να κατασκευάσουν τις δικές τους στρατηγικές επίλυσης. Με την καθοδήγηση του εκπαιδευτή, οι μαθητές οδηγούνται σε μια διαδικασία επανεφεύρεσης τυπικών πρακτικών μέσω της προοδευτικής μαθηματικοποίησης οι ίδιοι (Freudenthal, 1973). - Η καθοδηγούμενη επανεφεύρεση περιλαμβάνει την ανακατασκευή ενός φυσικού τρόπου ανάπτυξης ενός μαθηματικής έννοιας από μια δεδομένη προβληματική κατάσταση

4.4 Προβλήματα πλαισίου

Μια άλλη σημαντική κατασκευή στην RME αφορά τα προβλήματα πλαισίου. Ορίζονται ως προβλήματα των οποίων η προβληματική κατάσταση είναι βιωματικά πραγματική για τον μαθητή. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ένα καθαρό μαθηματικό πρόβλημα μπορεί επίσης να είναι ένα πρόβλημα πλαισίου. (Gravemeijer & Doorman, 1999) υπό την προϋπόθεση ότι τα μαθηματικά που εμπλέκονται προσφέρουν ένα πλαίσιο, δηλαδή, είναι βιωματικά πραγματικά για τον μαθητή και τα οποία παρέχουν στους μαθητές σημεία εκκίνησης από τα οποία η επανεφεύρεση εξελίσσεται μέσω προοδευτικών διαδικασιών και τροχιών μαθηματικοποίησης. Αυτά τα προβλήματα πλαισίου επιτρέπουν στους μαθητές την εξατομικευμένη κατασκευή λύσεων, αλλά παρέχουν επίσης μια πιθανή μαθησιακή διαδρομή μέσω προοδευτικής μαθηματικοποίησης (Gravemeijer & Doorman, 1999: Kwon, 2002). Το επιλεγμένα προβλήματα τοποθετούνται σε πλαίσια που επιτρέπουν την οριζόντια μαθηματικοποίηση. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να υπάρχει χώρος για πλαίσια τύπου μοντέλου που επιτρέπουν την κάθετη μαθηματικοποίηση για την πρόοδο εντός της δομής του θέματος. Η εννοιολογική μάθηση απαιτεί μια πρακτική σχεδιασμού της διδασκαλίας όπου η έμφαση δίνεται στους μαθητές να κατασκευάζουν και όχι οι εκπαιδευτικοί να καθοδηγούν (Gravemeijer, 2004). Σε αυτή την προσέγγιση διδακτικού σχεδιασμού, υπάρχει μετατόπιση της προσοχής από τη μάθηση αποτελέσματα (γνώσεις, δεξιότητες και ικανότητες) στις νοητικές δραστηριότητες των μαθητών. Για να διασφαλιστεί ότι οι μαθησιακές ακολουθίες που αναπτύσσονται διαμορφώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ανιχνεύουν τις κατασκευές ή

τη γνωστική διαδρομή του μαθητή και όχι των εκπαιδευτικών χρησιμοποιείται η έννοια της υποθετικής μαθησιακής τροχιάς (HLT). Η HLT παρέχει την εκπαιδευτικό διδακτικό σχεδιασμό με ένα σκεπτικό για την επιλογή μιας συγκεκριμένης διδακτικής σχεδιασμού. Μια τέτοια τροχιά αποτελείται από τρία στοιχεία:(Simon, 1995)
(α) τον μαθησιακό στόχο ή σκοπό που διαμορφώνει την κατεύθυνση της διδασκαλίας και της μάθησης,
(β) τις δραστηριότητες που πρέπει να αναλάβουν οι μαθητές και τον εκπαιδευτικό,
(γ) μια πιθανή μαθησιακή διαδρομή ή γνωστική διαδικασία, η οποία είναι "Μια πρόβλεψη του τρόπου με τον οποίο θα εξελιχθεί η σκέψη και η κατανόηση των μαθητών κατά την πλαίσιο των μαθησιακών δραστηριοτήτων" (Simon, 1995, σ. 136). Το HLT είναι ευέλικτο και δεν μπορεί να είναι γνωστή εκ των προτέρων. Χρησιμοποιώντας πειράματα σκέψης, ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει μια υποθετική μαθησιακή τροχιά σχετικά με την βάση μιας ερμηνείας και πρόβλεψης για το πού βρίσκονται (ή θα έπρεπε να βρίσκονται) οι μαθητές από την άποψη των ενεργειών και των συλλογιστικών τους ικανοτήτων και των επιθυμητών μαθησιακών στόχων. Ο δάσκαλος θα συνεχίσει να προσαρμόζει το HLT ανάλογα με τις αντιδράσεις των μαθητών σε αυτό μέχρι να επιτευχθούν οι επιθυμητοί στόχοι. Καθοριστικό στοιχείο της μαθησιακής ακολουθίας είναι η αφετηρία της. Η RME ως σχεδιασμός διδασκαλίας χρησιμοποιεί διάφορες τεχνικές για τον προσδιορισμό των σημείων εκκίνησης οι οποίες είναι βιωματικά πραγματικές για τους μαθητές και επιτρέπουν στους μαθητές διαφοροποιημένους τρόπους να αναπτύξουν κατανόηση. Τρεις μέθοδοι εμφανίζονται στη βιβλιογραφία: πειράματα σκέψης , η μελέτη της ιστορίας του εκάστοτε μαθηματικού ζητήματος ή η χρήση άτυπων στρατηγικών επίλυσης από τους μαθητές. Όταν χρησιμοποιούνται πειράματα σκέψης, ο σχεδιαστής της διδακτικής πορείας σκέφτεται τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να έχει επινοήσει το συγκεκριμένο μαθηματικό ζήτημα. (Freudenthal, 1991)
Στη συνέχεια, ο σχεδιαστής οραματίζεται πώς θα μπορούσε να προχωρήσει η μάθηση. Με την ανάλυση των στοιχείων από τα πειράματα σχεδιασμού, είναι σε θέση να διαπιστώσει αν οι προσδοκίες που φαντάστηκε επιβεβαιώνονται ή απορρίπτονται. Η πρακτική ανατροφοδότηση επιστρατεύεται στα επόμενα "πειράματα σκέψης" για να ενημερώσει τον επόμενο γύρο σχεδιασμού. Μια άλλη σημαντική κατασκευή στην RME αφορά τα προβλήματα πλαισίου. Προβλήματα πλαισίου παρέχουν στους μαθητές σημεία εκκίνησης από τα οποία γίνεται επανεφεύρεση μέσω της προοδευτικής μαθηματικοποίησης μπορεί να συμβεί. Αυτά τα προβλήματα πλαισίου επιτρέπουν στους μεμονωμένους μαθητές κατασκευές λύσεων, αλλά παρέχουν επίσης μια πιθανή μαθησιακή διαδρομή μέσω

προοδευτικής μαθηματικοποίησης (Gravemeijer & Doorman, 1999: Kwon, 2002). Τα επιλεγμένα προβλήματα τοποθετούνται σε πλαίσια που επιτρέπουν την οριζόντια μαθηματικοποίηση. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να υπάρχει χώρος για πλαίσια τύπου μοντέλου που επιτρέπουν την κάθετη μαθηματικοποίηση για την πρόοδο εντός της δομής του θέματος. Οι μαθηματικοί τείνουν να κάνουν ένα τυπικό λάθος όταν σχεδιάζουν μια εκπαιδευτική ακολουθία και προβλήματα πλαισίου για τον λογισμό. Η γενική προσέγγιση ενός μαθηματικού είναι να προσπαθήσει να απλοποιήσει ένα πολύπλοκο μαθηματικό θέμα, χωρίζοντάς το σε μικρότερα μέρη, που μπορούν να ταξινομηθούν σε μια ακολουθία που είναι λογική από μαθηματική άποψη. «Από την άποψη του ειδικού , τα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν ως μέρος ενός συνόλου. Αλλά ο μαθητής μπορεί να δει τα κομμάτια όπως παρουσιάζονται, μεμονωμένα, σαν ξεχωριστά κομμάτια ενός παζλ για τα οποία δεν υπάρχει διαθέσιμη συνολική εικόνα». (D. Tall, 1991). Μπορεί να είναι ακόμη χειρότερο, αν ο μαθητής δεν συνειδητοποιήσει ότι υπάρχει μια μεγάλη εικόνα ένας εννοιολογικός χάρτης. Ο μαθητής μπορεί να φανταστεί κάθε κομμάτι ως μια απομονωμένη εικόνα, η οποία θα εμποδίσει σοβαρά μια σύνθεση. Το αποτέλεσμα μπορεί να είναι ότι ο μαθητής κατασκευάζει μια εικόνα κάθε μεμονωμένου κομματιού, χωρίς ποτέ να καταφέρει να συγκεντρώσει όλα τα κομμάτια μαζί σε ένα σύνολο. Για παράδειγμα, ο Tall περιγράφει μια πιθανή ακολουθία για την έννοια της παραγώγισης . Παρουσιάζει την ακόλουθη συλλογιστική. Για να μπορέσει κανείς να κατανοήσει το παράγωγο f'(x), πρέπει να έχει τη σημασία ενός ορίου στη διάθεσή του. Γιατί, πρέπει να πάρουμε το όριο του πηλίκου διαφοράς (f (x+h)— f (x))/ h όπου το h τείνει στο μηδέν. Έτσι, η έννοια του ορίου πρέπει να προηγείται της παραγώγου. Επιπλέον, θα μπορούσε κανείς να αποφασίσει ότι είναι ευκολότερο να πάρει το όριο στην περίπτωση που το x είναι σταθερό. Το επόμενο βήμα τότε θα ήταν να αφήσουμε το x να ποικίλει, να εισαγάγουμε την ιδέα ενός παραγώγου με αυτόν τον τρόπο. Για τον μαθητή, όμως, η εισαγωγή της έννοιας του ορίου εμφανίζεται ξαφνικά χωρίς λόγο, με όλα τα γνωστικά προβλήματα που μπορεί να φέρει αυτό. Το επόμενο μεγάλο πρόβλημα είναι στη μετατόπιση από ένα όριο με σταθερό x σε ένα μεταβαλλόμενο x, αφού η λήψη ενός ορίου σε ένα σημείο είναι ουσιαστικά διαφορετική από την αντίληψη του f'(x) ως συνάρτηση του οποίου οι τιμές περιγράφουν την κλίση ενός γραφήματος της συνάρτησης f (x) βλέπε (Avgerinos & Skoufi, 2009, 2008, 2009) και (Skoufi & Avgerinos, 2012).

4.5 Αναδυόμενη μοντελοποίηση

Τα αναδυόμενα μοντέλα είναι μοντέλα που αρχικά αναπαριστούν προβληματικές καταστάσεις αλλά αργότερα στη συνέχεια εξελίσσονται σε μοντέλα αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων και σχέσεων (Bakker et al., 2003).Η επιλογή της RME ως υποκείμενης θεωρίας για την παρούσα μελέτη σχετίζεται με τη δυνατότητά της να να αντιμετωπίσει ζητήματα διδακτικού σχεδιασμού(Bakker, 2004). Οι παραδοσιακές προσεγγίσεις της σχεδιασμού διδασκαλίας με γενικές συνταγογραφικές ακολουθίες για την επίτευξη των διδακτικών στόχων (Merrill, 2002; Reigeluth & Moore, 1999) δεν έχουν ικανοποιητική συμβατότητα με την μαθηματική εκπαίδευση . Δεν διαθέτουν εμπειρική βάση για να υποστηρίξουν υποθέσεις σχεδιασμού της διδασκαλίας (Laurillard, 1993- Wilson, 1995). Οι προγραμματιστές προγραμμάτων σπουδών έχουν μείνει με πολύ λίγα μοντέλα διδακτικού σχεδιασμού που βασίζονται σε πραγματικές εμπειρίες της εμπλοκής των μαθητών με τα μαθησιακά καθήκοντα από τις οποίες προκύπτουν διδακτικές ακολουθίες που δύναται να βελτιωθούν (Yackel et al., 2003). Η χρήση της RME ως προοπτικής διδακτικού σχεδιασμού θα μπορούσε να ανακουφίσει αυτό το πρόβλημα, καθώς η RME είναι ενσωματωμένη στην έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση. Τα οφέλη που επιφέρει στη μελέτη η RME είναι, πρώτα απ' όλα, εγγενή στην RME φιλοσοφία και την άποψη των μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας. Η προώθηση της θεωρίας RME βασίζεται στη συνεχή εστίαση, προσαρμογή και προβληματισμό σχετικά με τις πραγματικές μαθητικές εμπλοκή με μαθηματικές εργασίες, όχι μόνο στις υποθέσεις των ερευνητών(M. van den Heuvel-Panhuizen, 2000) . Το δεύτερο όφελος έχει να κάνει με την έρευνα σχεδιασμού μεθοδολογία συλλογής δεδομένων. Αυτή η μεθοδολογία συνδυάζει την ανάπτυξη διδακτικών μέσων και τον τρόπο με τον οποίο τα μέσα αυτά υποστηρίζουν τη συλλογιστική των μαθητών (Bakker, 2004).Η διαδικασία και τα αποτελέσματα του σχεδιασμού έρευνας μετατράπηκαν σε υποδείγματα για μελλοντικό διδακτικό σχεδιασμό. Η πράξη της διδακτισμού (οργάνωση και δόμηση της διδασκαλίας) είναι ευεργετική για τη διδασκαλία της μαθηματικών λόγω αυτών των αποτελεσμάτων. "Ενώ η οριζόντια διδακτική οδηγεί σε νέες διδακτικά μαθήματα και ακολουθίες, η κάθετη διδακτική οδηγεί σε νέο σχεδιασμό αρχές, στρατηγικές ή διαδικασίες" (Yackel et al., 2003)

4.6 Οι Βασικές Αρχές Διδασκαλίας του RME

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση RME περιλαμβάνει μια σειρά από βασικές αρχές για τη διδασκαλία των μαθηματικών που είναι αναπαλλοτρίωτα συνδεδεμένες με την RME. Οι περισσότερες από αυτές τις βασικές αρχές διδασκαλίας διατυπώθηκαν αρχικά από τον

Treffers (1978), αλλά αναδιατυπώθηκαν με την πάροδο των ετών, συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του Treffers. Συνολικά διακρίνονται έξι αρχές:

Η αρχή της δραστηριότητας: σημαίνει ότι στο RME οι μαθητές αντιμετωπίζονται ως ενεργοί συμμετέχοντες στη μαθησιακή διαδικασία. Επίσης, τα μαθηματικά μαθαίνονται καλύτερα κάνοντας μαθηματικά, η οποία αντικατοπτρίζεται έντονα στην ερμηνεία του Freudenthal για τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα, καθώς και στην ιδέα του Freudenthal και του Treffers για τη μαθηματικοποίηση.

Η αρχή της πραγματικότητας μπορεί να αναγνωριστεί στη RME με δύο τρόπους. Πρώτον, εκφράζει τη σημασία που αποδίδεται στον στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένης της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά στην επίλυση προβλημάτων «πραγματικής ζωής». Δεύτερον, σημαίνει ότι η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να ξεκινά από προβληματικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές, γεγονός που τους προσφέρει ευκαιρίες να δώσουν νόημα στις μαθηματικές κατασκευές που αναπτύσσουν κατά την επίλυση προβλημάτων. Αντί να ξεκινά με τη διδασκαλία αφαιρέσεων ή ορισμών που θα εφαρμοστούν αργότερα, στο RME, η διδασκαλία ξεκινά με προβλήματα σε πλούσια πλαίσια που απαιτούν μαθηματική οργάνωση ή, με άλλα λόγια, μπορεί να μαθηματικοποιηθεί και να βάλει τους μαθητές στο δρόμο των άτυπων στρατηγικών επίλυσης που σχετίζονται με το πλαίσιο ως ένα πρώτο βήμα στη μαθησιακή διαδικασία.

Η αρχή των επιπέδων: Υπογραμμίζει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών σημαίνει ότι οι μαθητές περνούν διάφορα επίπεδα κατανόησης: από άτυπες λύσεις που σχετίζονται με το πλαίσιο, μέσω της δημιουργίας διαφόρων επιπέδων συντομεύσεων και σχηματοποιήσεων, έως την απόκτηση πληροφοριών για το πώς σχετίζονται οι έννοιες και οι στρατηγικές. Τα μοντέλα είναι σημαντικά για τη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ των άτυπων μαθηματικών που σχετίζονται με το πλαίσιο και των πιο τυπικών μαθηματικών. Για να εκπληρώσουν αυτή τη λειτουργία γεφύρωσης, τα μοντέλα πρέπει να μετατοπιστούν(Streefland, 1996) - αυτό που ο Streefland ονόμασε - από ένα "μοντέλο" μιας συγκεκριμένης κατάστασης σε ένα "μοντέλο για" όλα τα είδη άλλων, αλλά ισοδύναμων, καταστάσεων (Gravemeijer 1994; Van den Heuvel-Panhuizen 2003). Ιδιαίτερα για τη διδασκαλία που λειτουργεί με αριθμούς, αυτή η αρχή του επιπέδου αντικατοπτρίζεται στη διδακτική μέθοδο της «προοδευτικής σχηματοποίησης» και στην οποία οι διαφανείς μέθοδοι υπολογισμού ολόκληρου του αριθμού εξελίσσονται σταδιακά σε αλγόριθμους που βασίζονται σε ψηφία.(Treffers, 1987)

Η αρχή της διασύνδεσης : Σημαίνει ότι τα μαθηματικά πεδία περιεχομένου όπως η γεωμετρία αριθμών, η μέτρηση και ο χειρισμός δεδομένων δεν θεωρούνται μεμονωμένα κεφάλαια του προγράμματος σπουδών αλλά ως σε μεγάλο βαθμό ενσωματωμένα και ολιστικά . Στους μαθητές προσφέρονται πλούσια προβλήματα στα οποία μπορούν να χρησιμοποιήσουν διάφορα μαθηματικά εργαλεία και γνώσεις. Η αρχή αυτή ισχύει και για τους τομείς. Για παράδειγμα, εντός του πεδίου της αίσθησης αριθμών, η νοητική αριθμητική, η εκτίμηση και οι αλγόριθμοι διδάσκονται σε στενή σχέση μεταξύ τους.
Η αρχή της διαδραστικότητας της RME :σημαίνει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών δεν είναι μόνο μια ατομική δραστηριότητα αλλά και μια κοινωνική δραστηριότητα. Ως εκ τούτου, η RME ευνοεί τις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης και την ομαδική εργασία που προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες να μοιραστούν τις στρατηγικές και τις εφευρέσεις τους με άλλους. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να πάρουν ιδέες για τη βελτίωση των στρατηγικών τους. Επιπλέον, η αλληλεπίδραση προκαλεί προβληματισμό, ο οποίος επιτρέπει στους μαθητές να φτάσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο κατανόησης.
Η αρχή της καθοδήγησης: αναφέρεται στην ιδέα του Freudenthal για την «καθοδηγούμενη επανεφεύρεση» των μαθηματικών. Υπονοεί ότι στην RME οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν ενεργό ρόλο στη μάθηση των μαθητών και ότι τα εκπαιδευτικά προγράμματα θα πρέπει να περιέχουν σενάρια που έχουν τη δυνατότητα να λειτουργήσουν ως μοχλός για να φτάσουν σε αλλαγές στην κατανόηση των μαθητών. Για να γίνει αυτό, η διδασκαλία και τα προγράμματα θα πρέπει να βασίζονται σε συνεκτικές μακροπρόθεσμες πορείες διδασκαλίας-μάθησης.Το τρίτο όφελος προκύπτει επειδή η RME αντιμετωπίζει προκλήσεις μοναδικές στην μαθηματική εκπαιδευτική πρακτική. Οι προκλήσεις περιλαμβάνουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μάθηση. Αφορούν τομείς όπως η ελλιπής εννοιολογική ανάπτυξη, η έλλειψη επαρκών πρακτικών επίλυσης προβλημάτων, και την εμφάνιση γνωστικού χάσματος μεταξύ των μαθητών διαισθητικών δομών γνώσης και των φαινομενικά αφηρημένων δομών των μαθηματικών γνώσης.

4.7 Διδακτική φαινομενολογία της συσσώρευσης.

Η διδακτική φαινομενολογία είναι η ανάλυση ενός φαινομένου από την άποψη του τρόπου με τον οποίο μαθαίνεται και διδάσκεται. Σύμφωνα με τον Gravemeijer (1994, 1999), ο στόχος μιας φαινομενολογικής έρευνας είναι να εντοπιστούν προβληματικές καταστάσεις για τις οποίες οι ειδικές για την κατάσταση προσεγγίσεις μπορούν να γενικευτούν. Κατά τη διεξαγωγή αυτής της φαινομενολογίας, ο ερευνητής προσπαθεί να εντοπίσει καταστάσεις από τις οποίες προκύπτουν διαδικασίες επίλυσης που οδηγούν στην κάθετη μαθηματικοποίηση. Δεδομένου ότι τα μαθηματικά συνήθως εξελίσσονται από την επίλυση προβλημάτων, είναι λογικό να εντοπίσουμε εκείνα τα προβλήματα πλαισίου που είναι πιθανό να οδηγήσουν στην επιθυμητή μάθηση. Το φαινόμενο που θα επιλεγεί θα πρέπει να είναι πραγματικό και να έχει νόημα για τους μαθητές αλλά και να επιτρέπει μαθηματική αφαίρεση. Η πρόκληση είναι να βρεθούν φαινόμενα που "παρακαλούν να οργανωθούν" (Freudenthal Hans, 1983) από τις έννοιες ή τις κατασκευές που σκοπεύει κανείς να διδάξει. Τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα, και η διδακτική σύνδεση αυτής της δραστηριότητας με την πραγματικότητα του μαθητή, και η προσπάθεια να βιώσουν οι μαθητές μια διαδικασία καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης θα μπορούσε να έχει τη δυνατότητα να επιφέρει την επιθυμητή μορφή μάθησης. Για τα μαθηματικά, η δραστηριότητα είναι η μαθηματικοποίηση.

Η διδακτική φαινομενολογία μπορεί να θεωρηθεί ως μια ευρετική σχεδιασμού μαθήματος επειδή προτείνει τρόπους προσδιορισμού διδακτικών προσεγγίσεων που ενισχύουν την ατομική δραστηριότητα και τις συζητήσεις με ολόκληρη την τάξη και εμπλέκουν τους μαθητές σε προοδευτική μαθηματικοποίηση (Gravemeijer, 1994b). Η φαινομενολογική διερεύνηση στοχεύει στη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος όπου οι μαθητές μπορούν να επαναδιαπραγματευθούν συλλογικά όλο και πιο περίπλοκες λύσεις σε εμπειρικά-πραγματικά προβλήματα με ατομική δραστηριότητα και αλληλεπίδραση στην τάξη (Gravemeijer & Terwel, 2000) και (Avgerinos & Skoufi, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο:

Μαθηματική μοντελοποίηση ο αδύναμος κρίκος

5.1 Εισαγωγή

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η μαθηματική μοντελοποίηση όλο και περισσότερο ως εκπαιδευτική προσέγγιση παγιώνεται στην εκπαιδευτική συνείδηση των μαθηματικών από τα στοιχειώδη επίπεδα έως την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, η μαθηματική μοντελοποίηση έχει θεωρηθεί ως ένας τρόπος για τη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών να επιλύουν προβλήματα της πραγματικής ζωής (Gravemeijer & Stephan, 2002; R. A. Lesh & Doerr, 2003). Τα τελευταία χρόνια, πολλές μελέτες έχουν διεξαχθεί σχετικά με τη μοντελοποίηση σε διάφορα εκπαιδευτικά επίπεδα(Delice & Kertil, 2015) και έμφαση έχει δοθεί στη μαθηματική μοντελοποίηση στα σχολικά προγράμματα σπουδών (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000). Ο όρος "μοντελοποίηση" λαμβάνει ποικίλες σημασίες (Blum et al., 2007; Kaiser et al., 2006).

(i) Παρουσίαση βασικών εννοιών και θεμάτων που σχετίζονται με τη μαθηματική μοντελοποίηση στα μαθηματικά εκπαίδευση και

(ii) Η συζήτηση των δύο κύριων προσεγγίσεων στη μοντελοποίηση, δηλαδή "μοντελοποίηση για τη μάθηση των μαθηματικών" και "εκμάθηση μαθηματικών για μοντελοποίηση".

Οι ακόλουθες βασικές πληροφορίες είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση του χαρακτηρισμού της μοντελοποίησης, του θεωρητικού της υπόβαθρου και της φύσης των προβλημάτων μοντελοποίησης. Το κύριο πλεονέκτημα της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι η εκμάθηση λήψης αποφάσεων. Με την βοήθεια της μαθηματικής μοντελοποίησης, μερικές φορές μπορούν να προβλεφθούν μελλοντικές τάσεις, αποφάσεις για παγκόσμια περιβαλλοντικά ζητήματα. Η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμοποιείται στη βιομηχανία, στην οικονομία, στα βιολογικά συστήματα, στις ιατρικές δοκιμές και στην υπολογιστική Φυσική. Στην πραγματικότητα είναι δύσκολο να βρει κανείς κάποιον τομέα όπου εργάζεται ο άνθρωπος που να μην έχει γίνει χρήση μαθηματικών μοντέλων. Στις σημερινές αγορές με γνώμονα τον ανταγωνισμό, ο σύγχρονος μηχανικός πρέπει να μειώσει την έναρξη χρόνους εκκίνησης και τις δαπανηρές παραγωγές δοκιμαστικών σειρών και άλλα κατασκευαστικά κόστη. Έτσι, ουσιαστικά όλη η ανάπτυξη προϊόντων εξαρτάται πλέον από την επιτυχή μοντελοποίηση και προσομοίωση, είτε μιλάμε για αυτοκίνητα, κινητά τηλέφωνα, εξαρτήματα υπολογιστών, ιατρικό εξοπλισμό ή πιο "αόρατα" πράγματα, όπως οι αποτελεσματικές στρατηγικές ουρών αναμονής για αεροδρόμια και τρένα ή την ανάπτυξη λογισμικού. Προφανώς, ο υπολογιστής έχει δώσει τεράστια ώθηση στη μαθηματική μοντελοποίηση. Όλοι όσοι διαθέτουν ένα σύγχρονο κινητό τηλέφωνο και πρόσβαση στο Διαδίκτυο έχουν επίσης πρόσβαση σε εργαλεία όπως το Wolfram Alpha. Η επιστήμη αλλάζει ακόμη και μαζί με την τεχνολογία. Κάποτε μιλούσαμε για τη θεωρητική και την πειραματική φυσική. Σήμερα, μιλάμε επίσης για υπολογιστική φυσική που βασίζεται σε ισχυρά υπολογιστικά μοντέλα που δεν θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε πριν από την άφιξη του υπολογιστή. Κάποτε μιλούσαμε για τη διαίρεση των κόσμο σε ύλη και ενέργεια. Σήμερα, μιλάμε επίσης για τη σημασία της πληροφορίας, για τη διάρθρωση της ύλης και της ενέργειας. Σήμερα, μιλάμε επίσης για την τεχνητή νοημοσύνη και την ημερομηνία της μοναδικότητας, όταν οι υπολογιστές γίνουν πιο έξυπνοι από την ανθρωπότητα. Η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί σημαντικό μέρος όλων των πληροφοριών που πρέπει να διαχειριστούμε. Ακολουθούν ορισμένα επιπλέον επιχειρήματα για τους λόγους για τους οποίους είναι σημαντική η κατασκευή μοντέλων:

- Το πραγματικό σύστημα είναι αδύνατο να πειραματιστεί. Θα μπορούσε να είναι ένας ζωντανός άνθρωπος ή ένα μακρινό αστρικό σμήνος.
- Το πραγματικό σύστημα είναι πολύ ακριβό για να παίξουμε με αυτό. Θα μπορούσε να είναι μια διαστημική εξερεύνηση δορυφόρος ή το σύστημα ρύθμισης ενός εργοστασίου παραγωγής χημικών προϊόντων.
- Το πραγματικό σύστημα είναι πολύ επικίνδυνο για να πειραματιστεί κανείς. Θα μπορούσε να είναι ένα νέο αεροσκάφος μοντέλο αεροσκάφους ή η εύρεση της σωστής δόσης φαρμάκου.
- Η μοντελοποίηση σας δίνει μια καλύτερη κατανόηση του αρχικού προβλήματος.
- Η μοντελοποίηση καθιστά ορατό ένα σύστημα που δεν έχει ακόμη κατασκευαστεί ή κατασκευαστεί.
- Η μοντελοποίηση μπορεί να σας βοηθήσει να προβλέψετε το μέλλον και να κάνετε προβλέψεις.

5.2 Μαθηματική μοντελοποίηση και βασικές έννοιες

Μοντέλο και μαθηματικό μοντέλο: Ένα μοντέλο αποτελείται τόσο από εννοιολογικά συστήματα στο μυαλό των μαθητών όσο και από τα εξωτερικά συστήματα συμβολισμού αυτών των συστημάτων (π.χ, ιδέες, αναπαραστάσεις, κανόνες και υλικά)(R. A. Lesh & Doerr, 2003). Ένα μαθηματικό μοντέλο χρησιμοποιείται για την κατανόηση και την ερμηνεία πολύπλοκων συστημάτων στην φύση. Περιγράφουν ένα μοντέλο ως μια προσπάθεια κατασκευής μιας αναλογίας μεταξύ ενός άγνωστου συστήματος και ενός προηγουμένως γνωστό ή οικείου συστήματος(R. Lehrer & Schauble, 2007). Αντίστοιχα, οι άνθρωποι δίνουν νόημα σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής και τις ερμηνεύουν χρησιμοποιώντας μοντέλα.(R. Lehrer & Schauble, 2007). Χαρακτηρίζουν επίσης τα επίπεδα της μοντελοποιημένης σκέψης ως ιεραρχικά. Τα μαθηματικά μοντέλα επικεντρώνονται σε δομικά χαρακτηριστικά και λειτουργικές αρχές αντικειμένων ή καταστάσεων στην πραγματική ζωή (R. A. Lesh & Doerr, 2003). Κατά τους Lehrer και Schauble ιεραρχία, τα μαθηματικά μοντέλα δεν περιλαμβάνουν όλα τα χαρακτηριστικά των προς μοντελοποίηση καταστάσεων της πραγματικής ζωής. Επίσης, τα μαθηματικά μοντέλα περιλαμβάνουν μια σειρά από αναπαραστάσεις, πράξεις και σχέσεις, παρά και όχι μόνο μία, για να βοηθήσουν να κατανοηθεί η πραγματική ζωή (Lehrer & Schauble, 2003).

5.3 Ορισμός Μαθηματικής μοντελοποίησης;:

Η μαθηματική μοντελοποίηση χαρακτηρίζεται ως κυκλική διαδικασία κατά την οποία τα προβλήματα της πραγματικής ζωής μεταφράζονται σε μαθηματική γλώσσα, επιλύονται μέσα σε ένα συμβολικό σύστημα, και οι λύσεις δοκιμάζονται και πάλι μέσα στο σύστημα της πραγματικής ζωής(Haines & Crouch, 2007). Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία κατά την οποία οι καταστάσεις της πραγματικής ζωής και οι σχέσεις σε αυτές τις καταστάσεις εκφράζονται με τη χρήση μαθηματικών(Verschaffel et al., 2002). Και οι δύο προοπτικές δίνουν έμφαση στην υπέρβαση των φυσικών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης της πραγματικής ζωής για να εξεταστεί η δομική των χαρακτηριστικών της μέσω των μαθηματικών. Οι μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία κατά την οποία τα υπάρχουσα εννοιολογικά συστήματα και μοντέλα χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία και την ανάπτυξη νέων μοντέλων σε νέα πλαίσια(R. A. Lesh & Doerr, 2003). Κατά συνέπεια, ένα μοντέλο είναι ένα προϊόν και η μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία δημιουργίας ενός φυσικού, συμβολικού ή αφηρημένου μοντέλου μιας κατάστασης(Sriraman, 2006) . Η μαθηματική μοντελοποίηση δεν περιορίζεται στην έκφραση καταστάσεων της πραγματικής ζωής με μαθηματική γλώσσα με τη χρήση προκαθορισμένων μοντέλων(Gravemeijer & Stephan, 2002),περιλαμβάνει τη συσχέτιση των φαινομένων της κατάστασης με μαθηματικές έννοιες και αναπαραστάσεις με την επανερμηνεία τους. Για να είναι σε θέση να εκφραστεί αποτελεσματικά μια κατάσταση της πραγματικής ζωής σε μαθηματική γλώσσα, οι μαθητές πρέπει να έχουν μαθηματικές γνώσεις ανώτερου επιπέδου ικανότητες πέρα από τις υπολογιστικές και αριθμητικές, δεξιότητες, όπως η χωρική σκέψη, η ερμηνεία και οι εκτίμηση (R. , & S. L. Lehrer, 2003). Οι ερευνητές συμφωνούν ότι η μοντελοποίηση είναι μια κυκλική διαδικασία που περιλαμβάνει πολλαπλούς κύκλους (Crouch & Haines *, 2004; Haines & Crouch, 2007; R. , & S. L. Lehrer, 2003). Στη βιβλιογραφία, μια ποικιλία οπτικών αναφορών περιγράφουν τα στάδια της κυκλικής φύσης της διαδικασίας μοντελοποίησης (Ferri, 2006; Lingefjärd, 2002),(NCTM, 1989). Για παράδειγμα, η διαδικασία μοντελοποίησης που περιγράφεται από τον NCTM (1989, σ. 138) τονίζει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια μη γραμμική διαδικασία που περιλαμβάνει πέντε αλληλένδετα βήματα:

(i) Προσδιορισμός και απλοποίηση της κατάστασης προβλήματος του πραγματικού κόσμου,
(ii) Δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου,
(iii) Μετασχηματισμός και επίλυση του μοντέλου,
(iv) Ερμηνεύει το μοντέλο
(v) επικυρώνει και χρησιμοποιεί το μοντέλο.

5.4 Μαθηματική μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων:

Η μαθηματική μοντελοποίηση συχνά συγχέεται με τα παραδοσιακά προβλήματα λέξεων. Τα παραδοσιακά λεκτικά προβλήματα προκαλούν τους μαθητές να αναπτύξουν κάποιες διδακτικές παραδοχές σχετικά με την επίλυση προβλημάτων(Reusser & Stebler, 1997). Επιπλέον, τα πραγματικά περιβάλλοντα σε αυτά τα προβλήματα συχνά δεν είναι επαρκώς ρεαλιστικά και συνεπώς αποτυγχάνουν να υποστηρίξουν τις ικανότητες των μαθητών να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στον πραγματικό κόσμο (English, 2003; P. L. Galbraith et al., 2007; R. A. Lesh & Doerr, 2003). Ενώ το να εργάζονται πάνω σε τέτοια προβλήματα, οι μαθητές συχνά απλά επικεντρώνονται στο να υπολογίσουν τις απαιτούμενες πράξεις (Greer, 1997; Nunes et al., 1993). Ορισμένες μελέτες επικεντρώνονται στην αναδιοργάνωση των λεκτικών προβλημάτων για να μπορέσουν οι μαθητές να αποκτήσουν ικανότητα σκέψης σχετικά με τα πλαίσια της πραγματικής ζωής κατά την επίλυσή τους (Greer, 1997; Verschaffel et al., 1997; Verschaffel & de Corte, 1997). Τέτοιες εκδοχές των λεκτικών προβλημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ασκήσεις προθέρμανσης για την προετοιμασία της μοντελοποίησης (Verschaffel & De Corte, 1997).
Ενώ η Lingefjard (2002b) υποστηρίζει ότι είναι παράλογο να συγκρίνουμε την επίλυση προβλημάτων και μοντελοποίηση, οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ τους μπορεί να είναι χρήσιμες (R. A. Lesh & Doerr, 2003; Mousoulides et al., 2007; Zawojewski et al., 2003). Στον ακόλουθο πίνακα περιγράφονται συνοπτικά μερικές από τις σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο εννοιών.

Table 1Σύγκριση μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων και της μαθηματικής μοντελοποίησης (Προσαρμοσμένο από Lesh & Doerr [2003a] και Lesh & Zawojewski [2007])

Παραδοσιακή επίλυση προβλημάτων	**Μαθηματική μοντελοποίηση**
Διαδικασία κατάληξης σε συμπέρασμα με τη χρήση δεδομένων	Πολλαπλοί κύκλοι, διαφορετικές ερμηνείες
Το πλαίσιο του προβλήματος είναι μια εξιδανικευμένη κατάσταση της πραγματικής ζωής ή μια ρεαλιστική κατάσταση της ζωής	Αυθεντικό πλαίσιο της πραγματικής ζωής
Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιούν διδαγμένες δομές όπως τύποι, αλγόριθμοι, στρατηγικές και μαθηματικές ιδέες	Οι μαθητές βιώνουν τα στάδια ανάπτυξης, αναθεώρησης και αναθεώρηση σημαντικών μαθηματικών ιδεών και δομών κατά τη διάρκεια της διαδικασίας μοντελοποίησης
Δίνεται έμφαση στην ατομική εργασία	Δίνεται έμφαση στην ομαδική εργασία (κοινωνική αλληλεπίδραση, ανταλλαγή μαθηματικών ιδεών, κ.λπ.)
Αφηρημένη από την πραγματική ζωή	Διαθεματικός χαρακτήρας
Οι μαθητές αναμένεται να κατανοήσουν τα μαθηματικά σύμβολα και δομές	Στις διαδικασίες μοντελοποίησης, οι μαθητές προσπαθούν να κάνουν μαθηματικές περιγραφές ουσιαστικών καταστάσεων της πραγματικής ζωής
Διδασκαλία συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (πχ, ανάπτυξη μιας μοναδικής προσέγγισης, μεταφορά σε ένα σχήμα) που μπορούν να μεταφερθούν σε παρόμοια προβλήματα	Ανοιχτές και πολυάριθμες στρατηγικές επίλυσης, που αναπτύσσονται συνειδητά από τους μαθητές σύμφωνα με τις προδιαγραφές της του προβλήματος.
Μία μόνο σωστή απάντηση	Περισσότερες από μία προσεγγίσεις και πιθανή λύσεις (μοντέλο)

5.5 Προσεγγίσεις μαθηματικής μοντελοποίησης

Σχεδόν είκοσι χρόνια πριν στο πλαίσιο της συζήτησης για τις εφαρμογές και τη μοντελοποίηση εκείνης της εποχής προκρίθηκαν διάφορες για την διάκριση της μοντελοποίησης , σε διεθνές και εθνικό επίπεδο. Αναδείχθηκαν οι ακόλουθες δύο κύριες προοπτικές από τη συζήτηση εκείνης της εποχής: (Kaiser-Messmer, 1986)

- Μια πραγματιστική προοπτική, που εστιάζει στην ωφελιμιστικούς ή πραγματιστικούς στόχους, την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

- Μια επιστημονική-ανθρωπιστική προοπτική που προσανατολίζεται περισσότερο προς τα μαθηματικά ως επιστήμη και στα ανθρωπιστικά ιδεώδη της εκπαίδευσης με έμφαση στην ικανότητα των μαθητών να δημιουργούν σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών και της πραγματικότητας. Ο "πρώιμος" Hans Freudenthal (βλ. για παράδειγμα 1973) θα μπορούσε να θεωρηθεί ως πρωτοπόρος αυτής της προσέγγισης. Ο Freudenthal άλλαξε τη θέση του στο τέλος της ζωής του, καθώς τείνει να λαμβάνει περισσότερο υπόψη του τους πραγματιστικούς στόχους. (Freudenthal Hans, 1983)

Για μια καλύτερη κατανόηση των σημερινών προσεγγίσεων θα δοθεί μια σύντομη περιγραφή αυτών των προσεγγίσεων. Σχετικά με την επιστημονική-ανθρωπιστική προοπτική η προσέγγιση που αναπτύχθηκε από τον Hans-Georg Steiner (1968) έθεσε τους επιστημολογικούς στόχους στο προσκήνιο και έδωσε έμφαση στην ανάπτυξη της μαθηματικής θεωρίας ως ολοκληρωμένου τμήματος των διαδικασιών της μαθηματικοποίησης. Αναδύεται το τρίπτυχο κατάσταση-μοντέλο-θεωρία που σημαίνει ότι τα μοντέλα κατασκευάζονται ξεκινώντας από μια κατάσταση η οποία στη συνέχεια οδηγεί στο ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας(Revuz, 1971). Επιπλέον, μια χειραφετητική προοπτική στην συζήτηση μπορεί να εντοπιστεί, η οποία αναπτύσσεται σε κοινωνικο-κριτικές προσπάθειες διδασκαλίας των μαθηματικών (για τις τρέχουσες προσεγγίσεις(Gellert et al., 2001). Ένα τρίτο ρεύμα, το οποίο ονομάζεται ενοποιητική προοπτική, απαιτεί οι εφαρμογές και η μοντελοποίηση να υπόκεινται σε διαφορετικά επίπεδα στόχων, που δηλαδή να εξυπηρετούν επιστημονικούς, μαθηματικούς και πραγματιστικούς σκοπούς, αλλά σε μια αρμονική σχέση μεταξύ τους. Η προοπτική αυτή δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένους στόχους και αντλεί τη δύναμή της από ένα ευρύ φάσμα στόχων και επιχειρημάτων (Blum & Niss, 1991). Οι διάφορες προοπτικές της συζήτησης ανακατασκευάζονται και ποικίλλουν έντονα λόγω των στόχων τους όσον αφορά την εφαρμογή της μοντελοποίησης (Kaiser-Messmer, 1986).

Οι κατάλληλες αναφορές υποδεικνύουν διάφορες διαστάσεις των στόχων: (Kaiser, 2005)

- Παιδαγωγικοί στόχοι: μετάδοση ικανοτήτων που επιτρέπουν στους μαθητές να κατανοήσουν κεντρικές πτυχές του κόσμου μας με καλύτερο τρόπο,
- Ψυχολογικοί στόχοι: καλλιέργεια και ενίσχυση των κινήτρων και της στάσης απέναντι στα μαθηματικά και τη διδασκαλία των μαθηματικών
- Στόχοι που σχετίζονται με το γνωστικό αντικείμενο: διάρθρωση των μαθησιακών διαδικασιών, εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών και μεθόδων συμπεριλαμβανομένης της απεικόνισής τους,
- Στόχοι που σχετίζονται με την επιστήμη: μετάδοση μιας ρεαλιστικής εικόνας των μαθηματικών ως επιστήμη, παροχή διορατικότητας στην αλληλεπικάλυψη των μαθηματικών και εξωμαθηματικών θεωρήσεων της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών. Εν τω μεταξύ, η τρέχουσα συζήτηση για τη μοντελοποίηση έχει αναπτυχθεί περαιτέρω και έχει γίνει πιο

διαφοροποιημένη. Νέες προοπτικές προέκυψαν από τις παραπάνω περιγραφόμενες παραδόσεις ή εν μέρει μπορούν να θεωρηθούν ως συνέχειές τους. Έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις με διαφορετικές θεωρητικές προοπτικές για τη χρήση της μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση, και καμία ενιαία άποψη δεν έχει συμφωνηθεί μεταξύ των εκπαιδευτικών(Blum, 2002; Kaiser et al., 2011). Για να αποσαφηνιστούν οι διαφορετικές οπτικές γωνίες για το θέμα αυτό και να επιτευχθεί κάποιου είδους οριζόντιας συναίνεση, αυτές οι ομοιότητες και οι διαφορές θα πρέπει να αποσαφηνιστούν (Kaiser, 2006- Kaiser & Sriraman, 2006), Sriraman, Kaiser, & Blomhoj, 2006). Η ταξινόμηση των Kaiser και Sriraman (2006) για την παρουσίαση προσεγγίσεων μοντελοποίησης μπορούν να θεωρηθούν ως η κορυφαία προοπτική. Σύμφωνα με το αυτό το σύστημα, οι προοπτικές ταξινομούνται ως εξής (Kaiser & Sriraman, 2006)

(i) Ρεαλιστική ή εφαρμοσμένη μοντελοποίηση
(ii) Πλαισιωμένη μοντελοποίηση,
(iii) Εκπαιδευτική μοντελοποίηση,
(iv) Κοινωνικοκριτική μοντελοποίηση,
(v) Επιστημολογική ή θεωρητική μοντελοποίηση

Η ακόλουθη προοπτική μπορεί να περιγραφεί ως ένα είδος μετα-προοπτικής

(vi) Γνωστική μοντελοποίηση.

Στόχοι

α) ανάλυση των γνωστικών διεργασιών που λαμβάνουν χώρα κατά τη μοντελοποίηση και την κατανόηση αυτών των διαδικασιών γνωστικών διεργασιών

Ψυχολογικοί στόχοι: β) προώθηση της μαθηματικής διαδικασιών σκέψης με τη χρήση μοντέλων ως νοητικών εικόνων ή ακόμη και φυσικών εικόνων ή δίνοντας έμφαση στη μοντελοποίηση ως νοητική διαδικασία, όπως η αφαίρεση ή τη γενίκευση

Προοπτική	**Κεντρικοί στόχοι**	**Σχέσεις με προηγούμενες προοπτικές**	**Ιστορικό**
Ρεαλιστική ή εφαρμοσμένη μοντελοποίηση	Πραγματικοί-χρηστικοί στόχοι, δηλ: κατανόηση του πραγματικού κόσμου ,προώθηση των ικανοτήτων μοντελοποίησης	Πραγματιστική προοπτική του Pollak	Αγγλοσαξονικός πραγματισμός και εφαρμοσμένα μαθηματικά
Πλαισιωμένη μοντελοποίηση	Θεματικοί και ψυχολογικοί στόχοι, π.χ. επίλυση λεκτικών προβλημάτων	Επεξεργασία πληροφοριών Και προσεγγίσεις που οδηγούν σε συστήματα προσεγγίσεων	Αμερικανικό πρόβλημα
Εκπαιδευτική μοντελοποίηση **διαφοροποιημένη σε** **α) διδακτική** **μοντελοποίηση και** **β) εννοιολογική** **μοντελοποίηση**	Παιδαγωγικά και θεματικοί στόχοι: α) Διάρθρωση των μαθησιακών διαδικασιών και προώθησή τους β) Εισαγωγή εννοιών και ανάπτυξη αυτών	Ολοκληρωτική προοπτική (Blum, Niss) και περαιτέρω εξέλιξη της επιστημονική-ανθρωπιστικής προσέγγισης	Διδακτικές θεωρίες και θεωρίες μάθησης
Κοινωνικοκριτική μοντελοποίηση	Παιδαγωγικοί στόχοι όπως η κριτική κατανόηση του περιβάλλοντος κόσμου	Χειραφετητική προοπτική	Κοινωνικοκριτική προσέγγιση στην πολιτική κοινωνιολογία
Επιστημολογική ή θεωρητική μοντελοποίηση	Στόχοι προσανατολισμένοι στη θεωρία, δηλ. προώθηση της ανάπτυξης της θεωρίας	Επιστημονική-ανθρωπιστική προοπτική της "Freudenthal	Roman epistemology

Γενικά, η μοντελοποίηση ταξινομείται επίσης ανάλογα με το σκοπό της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως

(i) η μοντελοποίηση ως ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών ή (ii) μοντελοποίηση ως μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών (P. Galbraith, 2012; P. L. Galbraith et al., 2007; Julie & Mudaly, 2007). Γιατί η μοντελοποίηση είναι τόσο δύσκολη για τους μαθητές ; Ένας σημαντικός λόγος είναι σίγουρα οι γνωστικές απαιτήσεις των εργασιών μοντελοποίησης. Η μοντελοποίηση είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με άλλες μαθηματικές ικανότητες όπως η ανάγνωση και η επικοινωνία, ο σχεδιασμός και η εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων ή η μαθηματική εργασία (συλλογισμός, υπολογισμός)(Niss, 2003). Ιδιαίτερα χρήσιμο για τις γνωστικές αναλύσεις των εργασιών μοντελοποίησης είναι ένα μοντέλο του "κύκλου μοντελοποίησης" για την επίλυση αυτών των εργασιών. Ακολουθεί το μοντέλο επτά βημάτων(Blum & Leiß, 2007)

1. Κατασκευή
2. Απλοποίηση/ Δόμηση
3 .Μαθηματικοποίηση
4. Εργασία στο μαθηματικό περιβάλλον
5. Ερμηνεία
6. Επικύρωση
7. Έκθεση

5.6 Η μοντελοποίηση ως σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών

Η μαθηματική μοντελοποίηση θεωρείται ως βασική ικανότητα και στόχος της διδασκαλίας μαθηματικών είναι να εξοπλίσει τους μαθητές με αυτή την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα της πραγματικής ζωής στα μαθηματικά και σε άλλους κλάδους (Blomhøj & Jensen, 2007; Blum, 2002; Lingefjärd, 2002). Σε αυτή την προσέγγιση, αρχικά, οι μαθηματικές έννοιες και τα μαθηματικά μοντέλα παρέχονται και αργότερα αυτές οι έτοιμες έννοιες ή τα μοντέλα εφαρμόζονται σε πραγματικές καταστάσεις (P. L. Galbraith et al., 2007; Lingefjärd, 2002).Τα μαθηματικά μοντέλα και οι έννοιες θεωρούνται ως ήδη υπάρχοντα αντικείμενα (Gravemeijer, 2002). Οι ερευνητές που υιοθετούν αυτή την προοπτική εστιάζουν στην ζήτημα της εννοιολόγησης, της ανάπτυξης και της μέτρησης των ικανοτήτων μοντελοποίησης(Crouch & Haines *, 2004; Haines & Crouch, 2007).. Ενώ οι Blomhøj και Jensen (2007) υιοθετούν μια ολιστική προσέγγιση, άλλες μελέτες εξετάζουν το ζήτημα αυτό σε μικροεπίπεδο (Crouch & Haines, 2004- Haines, Crouch, & Davis, 2000- Lingefjard, 2004). Επιπλέον, ορισμένες μελέτες επικεντρώνονται στη διδασκαλία της μαθηματικής μοντελοποίησης (Ärlebäck & Bergsten, 2010- Lingefjard, 2002a). Προβλήματα Fermi, για παράδειγμα, θεωρούνται ως κατάλληλα είδη προβλημάτων για τη διδασκαλία της μοντελοποίησης (Ärlebäck, 2009; Bergman Ärlebäck & Bergsten, 2010) .

5.7 Η μοντελοποίηση ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών

Σε αυτή την προσέγγιση, η μοντελοποίηση θεωρείται ένα όχημα για την υποστήριξη των προσπαθειών των μαθητών να δημιουργήσουν και να αναπτύξουν τις πρωτόγονες μαθηματικές τους γνώσεις και μοντέλα. Η προοπτική των μοντέλων και της μοντελοποίησης (R. A. Lesh & Doerr, 2003)και η ρεαλιστική μαθηματική Εκπαίδευση (Gravemeijer, 2002- Gravemeijer & Stephan, 2002) είναι δύο παραδείγματα αυτής της προσέγγισης. Η προοπτική των μοντέλων και της μοντελοποίησης είναι μια νέα και ολοκληρωμένη θεωρητική προσέγγιση του χαρακτηρισμού της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, μάθησης και διδασκαλίας (Lesh & Doerr, 2003a; 2003b), η οποία λαμβάνει υπόψη της τις εποικοδομητικές και κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες ως θεωρητικό θεμέλιο. Στο πλαίσιο αυτής της προοπτικής, τα άτομα οργανώνουν, ερμηνεύουν και κατανοούν τον κόσμο των γεγονότων, των εμπειριών ή των προβλημάτων χρησιμοποιώντας νοητικά μοντέλα (εσωτερικά εννοιολογικά συστήματα). Έτσι δημιουργούν ενεργά τα δικά τους μοντέλα, σύμφωνα με τις βασικές ιδέες του εποικοδομισμού (R. , & S. L. Lehrer, 2003). Επιπλέον, για την παραγωγική χρήση των μοντέλων για την αντιμετώπιση σύνθετων καταστάσεων επίλυσης προβλημάτων, θα πρέπει να εξωτερικεύονται με αναπαραστατικά μέσα αναπαράστασης (π.χ. σύμβολα, σχήματα).Οι Lesh, Hoover, Hole, Kelly και Post (2000) προσέφεραν έξι αρχές για να καθοδηγήσουν το σχεδιασμό των μοντέλων και της μοντελοποίησης :

(i) Η αρχή της κατασκευής του μοντέλου,

(ii) Η αρχή της πραγματικότητας,

(iii) Η αρχή της αυτοαξιολόγησης,

(iv) Η αρχή της τεκμηρίωσης της κατασκευής,

(v) Η αρχή της δυνατότητας διαμοιρασμού και επαναχρησιμοποίησης της κατασκευής,

(vi) Η αρχή του αποτελεσματικού πρωτοτύπου. (R. Lesh et al., 2000)

Στην εφαρμογή και τον σχεδιασμό των μοντέλων , οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες τριών έως τεσσάρων ατόμων. Αναμένεται να εργαστούν στην δημιουργία διαμοιραζόμενων και επαναχρησιμοποιήσιμων μοντέλων, τα οποία ενθαρρύνουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών. Ως εκ τούτου, η κοινωνική πτυχή της μάθησης είναι ένα άλλο στοιχείο της μαθηματικής μοντελοποίησης (Zawojewski, Lesh, & English, 2003). Σύμφωνα με τους Lesh (2003), οι προοπτικές της μοντελοποίησης δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται ως απομονωμένες δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων. Θα πρέπει να χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της ανάπτυξης μοντέλων ακολουθίες, όπου οι δραστηριότητες προθέρμανσης και παρακολούθησης είναι επίσης σημαντικές.

5.8 Η προσέγγιση της μοντελοποίησης στα ρεαλιστικά μαθηματικά

Η προσέγγιση της μοντελοποίησης που υιοθετεί η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση βασίζεται στον εποικοδομισμό και κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες (Freudental, 1991, Gravemeijer, 2002). Σε αυτή την προσέγγιση, η μοντελοποίηση πηγαίνει πέρα από τη μετάφραση πραγματικών προβληματικών καταστάσεων σε μαθηματικές. Περιλαμβάνει την αποκάλυψη νέων σχέσεων μεταξύ των φαινομένων που ενσωματώνονται στις καταστάσεις με την οργάνωσή τους (Gravemeijer, 1994, 1999; Gravemeijer & Stephan, 2002). Κατά τη μοντελοποίηση, οι μαθητές αρχικά εργάζονται πάνω σε πραγματικές καταστάσεις και δημιουργούν τα πρωταρχικά τους μοντέλα, τα οποία ονομάζονται μοντέλα της. Ο όρος "μοντέλο" περιγράφει όχι μόνο τις φυσικές ή μαθηματικές αναπαραστάσεις των φαινομένων, αλλά και τα συστατικά στοιχεία των εννοιολογικών συστημάτων των μαθητών, όπως τους σκοπούς και τους τρόπους σκέψης για την κατάσταση (Gravemeijer et al., 2012). Με τη βοήθεια προσεκτικά σχεδιασμένων προβλημάτων πραγματικής ζωής και μαθησιακών περιβαλλόντων που ενθαρρύνουν τους μαθητές να ανακαλύψουν εξελιγμένα μαθηματικά μοντέλα, οι μαθητές προχωρούν στη δημιουργία πιο αφηρημένων και τυπικών μοντέλων, τα οποία αποκαλούμε μοντέλα (Doorman & Gravemeijer, 2009). Κατά συνέπεια, η μοντελοποίηση χαρακτηρίζεται ως μια διαδικασία της μετάβασης από το "μοντέλο του " στο "μοντέλο για", το οποίο ονομάζεται αναδυόμενη μοντελοποίηση (Doorman & Gravemeijer, 2009; Gravemeijer & Doorman, 1999)..

5.9 Συζήτηση και συμπεράσματα

Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ολοένα και μεγαλύτερη έμφαση στην χρήση της μοντελοποίησης στη μαθηματικά εκπαίδευση (NCTM, 1989, 2000). Μια ποικιλία διαφορετικών προοπτικών έχουν προταθεί για την εννοιολόγηση και τη χρήση της μοντελοποίησης (Kaiser & Sriraman, 2006). Οι προοπτικές αυτές μπορεί να είναι ομαδοποιηθούν σε δύο κύριες κατηγορίες:

(i) Η μοντελοποίηση ως μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών και

(ii) Η μοντελοποίηση ως στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών (Blum & Niss, 1991- Galbraith, 2012).

Στην πρώτη προοπτική, στους μαθητές παρέχονται προκαθορισμένα μοντέλα και αναμένεται να εφαρμόσουν αυτά τα μοντέλα σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής . Ο απώτερος στόχος είναι η βελτίωση των ικανοτήτων μοντελοποίησης των μαθητών (Haines & Crouch, 2001, 2007- Lingefjard, 2002). Στην δεύτερη προοπτική, η υποκείμενη υπόθεση είναι ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν τις θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες με νόημα μέσω της μοντελοποίησης ,διαδικασία κατά την οποία χρειάζονται και ανακαλύπτουν διαισθητικά μαθηματικές έννοιες ενώ αντιμετωπίζουν μια πραγματική κατάσταση επίλυσης προβλημάτων (Lesh & Doerr, 2003a). Συνοπτικά, η δεύτερη προσέγγιση (δηλαδή η μοντελοποίηση ως μέσο για τη διδασκαλία των μαθηματικών) φαίνεται περισσότερο αναπτυγμένη για παιδαγωγικούς σκοπούς. Ωστόσο, η διδασκαλία με τη χρήση της μεθόδου είναι μια από τις πιο σημαντικές προοπτικές που υπάρχουν, όποια προσέγγιση και αν προτιμάται και χρησιμοποιείται, η ενσωμάτωση της μοντελοποίησης στην εκπαίδευση των μαθηματικών είναι σημαντική για τη βελτίωση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων και αναλυτικής σκέψης των μαθητών. Ωστόσο, λίγες μελέτες έχουν διεξαχθεί στην Ελλάδα σχετικά με τη χρήση της μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Συνεπώς, υπάρχει ανάγκη για περισσότερη έρευνα σχετικά με τη χρήση της μοντελοποίησης στα διάφορες επίπεδα εκπαίδευσης. Αυτό μπορεί να επιτρέψει την παραγωγή πόρων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην προ-υπηρεσιακή και προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια της υπηρεσίας.

5.10 Κύκλοι μοντελοποίησης

Εισαγωγή:

Το 1945 ο George Polya δημοσίευσε το βιβλίο How To Solve It το οποίο γρήγορα έγινε η πιο πολύτιμη έκδοσή του. Πούλησε πάνω από ένα εκατομμύριο αντίτυπα και έχει μεταφραστεί σε 17 γλώσσες. Στο βιβλίο αυτό προσδιορίζει τέσσερις βασικές αρχές επίλυσης προβλημάτων η οποιες είναι οι εξής .

Πρώτη αρχή του Polya: Κατανοήστε το πρόβλημα

Αυτό φαίνεται τόσο προφανές που συχνά δεν αναφέρεται καν, ωστόσο οι μαθητές συχνά κωλύονται στις προσπάθειές τους να λύσουν προβλήματα απλώς και μόνο επειδή δεν το κατανοούν πλήρως ή έστω εν μέρει. Ο Polya δίδασκε τους δασκάλους να θέτουν στους μαθητές ερωτήσεις όπως:

- Καταλαβαίνετε όλες τις λέξεις που χρησιμοποιήθηκαν στη διατύπωση του προβλήματος;
- Τι σας ζητείται να βρείτε ή να δείξετε;
- Μπορείτε να επαναδιατυπώσετε το πρόβλημα με δικά σας λόγια;
- Μπορείτε να σκεφτείτε μια εικόνα ή ένα διάγραμμα που θα μπορούσε να σας βοηθήσει να κατανοήσετε το πρόβλημα;

- Υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για να μπορέσετε να βρείτε μια λύση;

Η δεύτερη αρχή του Polya: Επινοήστε ένα σχέδιο

Ο Polya αναφέρει ότι υπάρχουν πολλοί λογικοί τρόποι επίλυσης προβλημάτων. Η δεξιότητα στην επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής μαθαίνεται καλύτερα με την επίλυση πολλών προβλημάτων. Περιλαμβάνεται ένας μερικός κατάλογος στρατηγικών:

- Μάντεψε και έλεγξε - Ψάξε για ένα μοτίβο- Φτιάξτε έναν ταξινομημένο κατάλογο - Σχεδιάστε μια εικόνα- Αποκλείστε τις πιθανότητες - Λύστε ένα απλούστερο πρόβλημα
- Χρησιμοποιήστε συμμετρία - Χρησιμοποιήστε ένα μοντέλο- Εξετάστε ειδικές περιπτώσεις
- Εργαστείτε προς τα πίσω- Χρησιμοποίησε άμεσο συλλογισμό - Χρησιμοποίησε τύπο
- Λύστε μια εξίσωση - Να είστε έξυπνοι

Τρίτη αρχή του Polya: Εκτέλεση του σχεδίου

Αυτό το βήμα είναι συνήθως ευκολότερο από την επινόηση του σχεδίου. Σε γενικές γραμμές, το μόνο που χρειάζεστε είναι προσοχή και υπομονή, δεδομένου ότι διαθέτετε τις απαραίτητες αλγεβρικές και γεωμετρικές δεξιότητες. Επιμείνετε στο σχέδιο που έχετε επιλέξει. Εάν συνεχίσει να μην λειτουργεί, απορρίψτε το και επιλέξτε κάποιο άλλο. Μην παραπλανηθείτε, έτσι γίνονται τα μαθηματικά, ακόμη και από τους επαγγελματίες.

Η τέταρτη αρχή του Polya: Κοιτάξτε πίσω

Ο Polya αναφέρει ότι πολλά μπορούν να κερδηθούν αν αφιερώσουμε χρόνο για να σκεφτούμε και να κοιτάξουμε τι έχετε κάνει, τι λειτούργησε και τι δεν λειτούργησε.(Polya, 1945)

Η επίλυση προβλημάτων είναι ένα από τα πιο σημαντικά συστατικά της ανθρώπινης γνώσης που επηρεάζει για αιώνες την πρόοδο της ανθρώπινης κοινωνίας. Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι ένας ειδικός τύπος επίλυσης προβλημάτων που αφορούν προβλήματα που σχετίζονται με την επιστήμη ή με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και ούτε η ίδια θα μπορούσε να μείνει ανεπηρέαστη από το έργο και τις τέσσερις αρχές του Polya .Από το πρώιμο έργο του Pollak υπάρχει ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για την εισαγωγή δραστηριοτήτων που προωθούν την εργασία με βάση τα συμφραζόμενα και τη μαθηματική μοντελοποίηση στον τομέα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης σε διαφορετικά εκπαιδευτικά επίπεδα (Vorhölter et al., 2014) . Καθιερώνεται μια πλατωνική διαφοροποίηση μεταξύ του μαθηματικού πεδίου και του υπόλοιπου κόσμου. Αυτός ο διαχωρισμός οδηγεί αναπόφευκτα στη διαδικασία μαθηματικοποίησης ενός φαινομένου και στην ερμηνεία των μαθηματικών μοντέλων που αναπτύσσονται στη μαθηματική σφαίρα μέσα στο πραγματικό τους πλαίσιο ως επικύρωση. Το 1976, ο Pollak έδωσε μια ομιλία στην ICME 3 στην Καρλσρούη, όπου συνέβαλε στον ορισμό του όρου μοντελοποίηση. Επεσήμανε ότι εκείνη την εποχή ήταν λιγότερο γνωστό πώς χρησιμοποιήθηκαν οι εφαρμογές στη διδασκαλία των μαθηματικών. Για να διευκρινίσει τον όρο, διέκρινε τέσσερις ορισμούς των εφαρμοσμένων μαθηματικών (Pollak, 1977):

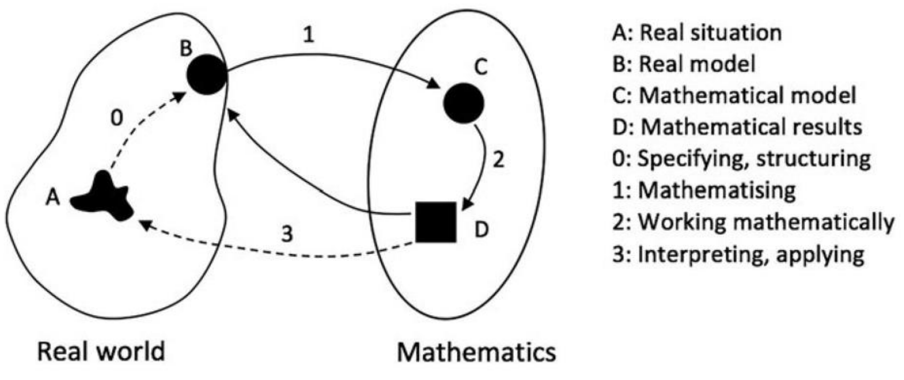
Α) Κλασικά εφαρμοσμένα μαθηματικά (κλασικοί κλάδοι ανάλυσης, τμήματα ανάλυσης που εφαρμόζονται στη φυσική)

Β) Μαθηματικά με σημαντικές πρακτικές εφαρμογές (στατιστική, γραμμική άλγεβρα, πληροφορική, ανάλυση)

Γ) Εφάπαξ μοντελοποίηση (ο κύκλος μοντελοποίησης διέρχεται μόνο μία φορά)

Δ) Επαναληπτική Μοντελοποίηση (ο κύκλος μοντελοποίησης επαναλαμβάνεται αρκετές φορές).

Υπάρχουν διακριτές διαφορές μεταξύ αυτών των τεσσάρων ορισμών των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Οι δύο πρώτοι ορισμοί αναφέρονται στο περιεχόμενο (κλασικά ή εφαρμόσιμα μαθηματικά), ενώ οι άλλοι δύο σχετίζονται με τη διαδικασία επεξεργασίας. Επομένως, ο όρος μοντελοποίηση επικεντρώνεται στη διαδικασία επεξεργασίας. Η μοντελοποίηση τότε θεωρήθηκε ως ένας κύκλος μεταξύ πραγματικότητας και μαθηματικών, ο οποίος επαναλαμβάνεται αρκετές φορές (Greefrath, 2010). Στο άρθρο του Blum (1985) για τη διδασκαλία των μαθηματικών με προσανατολισμό στις εφαρμογές ήταν πολύ σημαντικό στη συζήτηση για τη μοντελοποίηση. Περιελάμβανε μια σειρά από παραδείγματα εφαρμογών με ποικίλα θέματα, π.χ. κατανομή των εδρών μετά από εκλογές, χαρτογράφηση διαδρομής κόμβων αυτοκινητοδρόμων, παραγωγή ποδοσφαιρικών μπαλών, και τη χορήγηση δανείων. Επιπλέον, το άρθρο αυτό έδειξε ότι η συζήτηση για τις εφαρμογές και τη μοντελοποίηση αποκτά όλο και μεγαλύτερη σημασία. Η πιο γνωστή απεικόνιση ενός κύκλου μοντελοποίησης στη (Εικόνα 1) βρίσκεται επίσης σε αυτό το άρθρο -συνεισφορά.

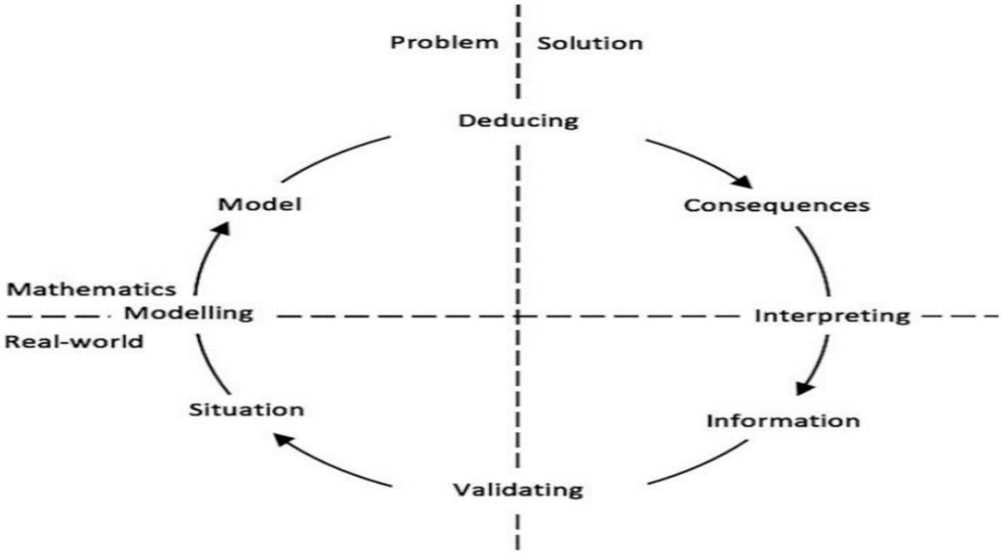


Εικόνα 1Modelling cycle by Blum (Blum and Kirsch 1989)

Για πρώτη φορά η απεικόνιση που παρουσιάζεται στην Εικόνα 1 ονομάζεται διαδικασία μοντελοποίησης, η οποία βασίζεται στην κοινή τότε έννοια των μοντέλων για μαθηματική εφαρμογή (Blum, 1985).O Blum όχι μόνο έκανε διάκριση μεταξύ εφαρμογών και εργασιών, όπου το πρόβλημα τυλίγεται στο πλαίσιο ενός άλλου επιστημονικού κλάδου ή της καθημερινής ζωής, παρέδωσε επιπλέον επιχειρήματα και στόχους σχετικά με τις εφαρμογές στη διδασκαλία των μαθηματικών (δηλ. στόχοι, επιχειρήματα και προοπτικές). Επιπλέον, συνόψισε τα επιχειρήματα κατά των εφαρμογών, όπως τα προβλήματα χρόνου ή τα λιγότερο κατάλληλα παραδείγματα. (Kaiser & Brand, 2015) .Ολόκληρη η διαδικασία μοντελοποίησης συχνά αναπαρίσταται ως κύκλος μοντελισμού.

Ενιαία μαθηματικοποίηση

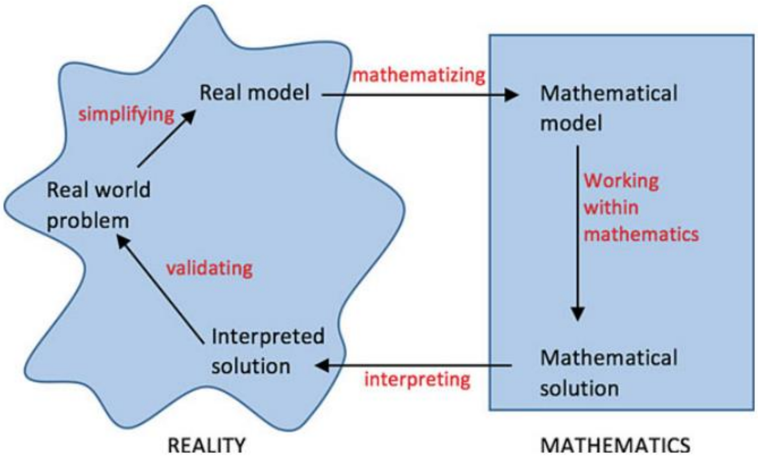
Εάν χρησιμοποιείται μόνο ένα βήμα για τη μεταφορά ενός πραγματικού προβλήματος σε ένα μοντέλο, αυτό το μοντέλο ενός κύκλου μοντελοποίησης ονομάζεται απλή μαθηματικοποίηση. Ειδικότερα, η αναπαράσταση του του γενικά αποδεκτού μοντέλου από τον Schupp (1988) είναι τόσο σαφής όσο και συγκεκριμένη. Στη μια διάσταση, διαχωρίζει τα μαθηματικά και την πραγματικότητα, κάτι που είναι σύνηθες για τα μοντέλα της μαθηματικής μοντελοποίησης, ενώ στην άλλη διάσταση, το πρόβλημα και η λύση



Εικόνα 2Modelling cycle by Schupp (1989)

διαχωρίζονται εξίσου (βλ. Εικόνα 2).Ο κύκλος μοντελοποίησης δεν χρειάζεται πάντα να ολοκληρώνεται πλήρως ή να επαναλαμβάνεται αρκετές φορές.

Οι Büchter και Leuders (2005) περιέγραψαν τον επαναλαμβανόμενο κύκλο μοντελοποίησης ως σπείρα, δίνοντας δηλαδή έμφαση στην εξέλιξη της εμπειρίας κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης. Μετά από κάθε εκτέλεση, αποκτάται εμπειρία όσον αφορά την επίλυση του προβλήματος. Οι Büchter και Leuders έκαναν επίσης διάκριση μεταξύ πραγματικών και μαθηματικών μοντέλων. Ωστόσο, τα μοντέλα αυτά διαφέρουν μεταξύ των δύο κατηγοριών, ο προσδιορισμός του προβλήματος διαχωρίζεται ως επιμέρους βήμα μεταξύ πραγματικότητας και μοντέλου. Υπάρχουν επίσης συγκεκριμένοι κύκλοι μοντελοποίησης



Εικόνα 3Modelling cycle of Maaß (2006, p. 115)

που περιλαμβάνουν ένα απλό βήμα μαθηματικοποίησης.

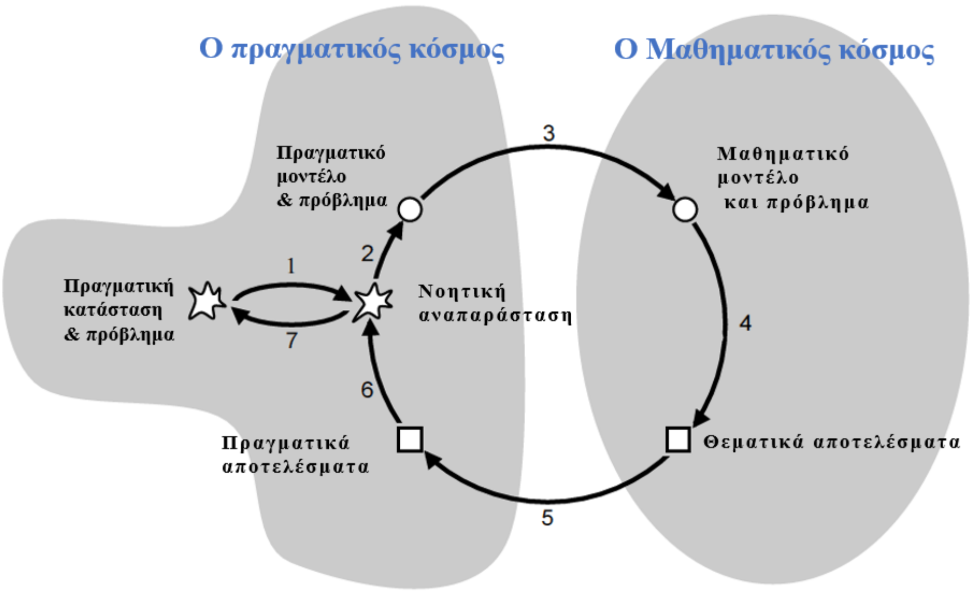
Ο πιο γνωστός κύκλος μοντελοποίησης στη Γερμανία δημιουργήθηκε από τον Blum (1985 βλ.Σχήμα 2). Προσδιόριζε ένα πρόσθετο βήμα για την κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου. Η απλοποίηση της πραγματικότητας ή, με άλλα λόγια, η δημιουργία ενός πραγματικού μοντέλου θεωρήθηκε ως ένα μεμονωμένο βήμα. Αυτό το μοντέλο αναπτύχθηκε μαζί με την Kaiser-Meßmer (1986) και έχει βελτιωθεί από πολλούς συγγραφείς (Henn 1995- Humenberger και Reichel 1995- Maaß 2002,Borromeo Ferri 2004). Επιπλέον, ο Maaß (2005) καθώς και οι Kaiser και Stender(2013) προσέθεσαν την ερμηνευμένη λύση ως ένα βήμα μεταξύ της μαθηματικής λύσης και της πραγματικότητας . Αυτό αναδεικνύει την ερμηνεία και την επικύρωση ως διαφορετικές διαδικασίες στο δεύτερο μισό του κύκλου μοντελοποίησης (βλ. Greefrath 2010). Αυτή η αντίληψη του κύκλου μοντελοποίησης κληρονομεί την προαναφερθείσα διαίρεση μεταξύ των πεδίων του πραγματικού κόσμου και του μαθηματικού κόσμου. Η έρευνα για τη μαθηματική μοντελοποίηση στη μαθηματική εκπαίδευση, ανεξάρτητα από το ποια προοπτική για τη μοντελοποίηση προσαρμόζεται, συνήθως χρησιμοποιεί ή αναπτύσσει κάποια γενική περιγραφή της διαδικασίας της μαθηματικής μοντελοποίησης (Kaiser et al., 2006). Αυτή η γενική περιγραφή συχνά δίνεται ή συνοψίζεται σε έναν λεγόμενο κύκλο μοντελοποίησης, ο οποίος σχηματικά και εξιδανικευμένος δείχνει πώς η διαδικασία μοντελοποίησης συνδέει τον εξω-μαθηματικό κόσμο (πεδίο) και τον μαθηματικό κόσμο (τομέας) (Blum, Galbraith, &Niss, 2007). Ανάλογα με τον σκοπό και την εστίαση της έρευνας, αυτοί οι κύκλοι μοντελοποίησης μπορεί να φαίνονται διαφορετικοί και να επισημαίνουν διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας μοντελοποίησης (Haines & Crouch, 2007)

Οι Berry και Davies (1996) περιγράφουν τη διαδικασία μοντελοποίησης ως κυκλική, κατανοώντας ότι οι μοντελιστές/λύτες περνούν από τα διάφορα στάδια της εργασίας τους, ενώ βελτιώνουν τα μοντέλα και τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Μία από τις πιο αναγνωρισμένες προοπτικές των διαδικασιών μαθηματικής μοντελοποίησης στον τομέα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι η εννοιολόγηση και η αναπαράσταση της Blum and Leiss (2007) η οποια αναλυεται παρακατω .

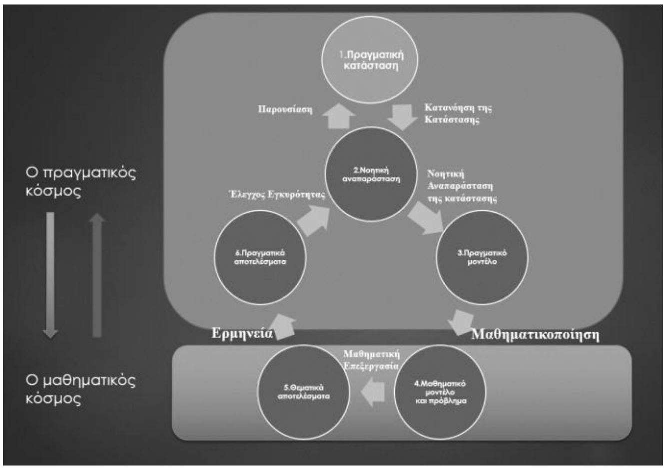
Ένα νεότερο μοντέλο των Blum και Leiß (2005) και προσαρμοσμένο από τον Borromeo Ferri (2006),αναπτύχθηκε από γνωστική άποψη. Το αρχικό μοντέλο του Blum επεκτάθηκε με την προσθήκη ενός μοντέλου καταστάσεων, το οποίο έδειχνε περισσότερες λεπτομέρειες στην εξέταση του τρόπου με τον οποίο δημιουργείται ένα μαθηματικό μοντέλο. Ο ρόλος του ατόμου που δημιουργεί το μοντέλο περιγράφηκε επίσης με πιο λεπτομερή τρόπο. Το μοντέλο κατάστασης περιέγραφε τη νοητική αναπαράσταση της κατάστασης από το άτομο.Το μοντέλο των Fischer και Malle (1985) περιέγραφε τον τρόπο μεταφοράς μιας πραγματικής κατάσταση σε ένα μαθηματικό μοντέλο με λεπτομέρεια. Είναι αρκετά ενδιαφέρον ότι η διαδικασία της συλλογής δεδομένων προστέθηκε σε αυτό το μοντέλο, η οποία ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη στον προσδιορισμό του βήματος απλούστευσης.Ανάλογα με την ομάδα-στόχο, το ερευνητικό θέμα και το ερευνητικό ενδιαφέρον, τα περιγραφόμενα μοντέλα επικεντρώνονται σε διαφορετικές πτυχές. Συχνά έχουν επίσης διαφορετικό σκοπό.Θα πρέπει να γίνεται ιδιαίτερη διάκριση μεταξύ κανονιστικών και περιγραφικών μοντέλων. Για παράδειγμα,ένα συγκεκριμένο μοντέλο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τις δραστηριότητες των μαθητών στο πλαίσιο μιας εμπειρικής μελέτης.

Κύκλοι μοντελοποίησης Blum & Leiß

Από την γνωσιολογική οπτική οι Blum & Leiß (2007) παρουσίασαν έναν κύκλο μοντελοποίησης με έξι στάδια και εφτά μεταβάσεις (Σχήμα 1). Υπάρχουν αρκετές ομοιότητες με προηγούμενους ερευνητές, με την διαφορά ότι οι Blum & Leiß δίνουν ιδιαίτερη σημασία στις μεταβάσεις. Ο κύκλος αποτελείται από δύο διαχωρισμένα πεδία αυτό της Πραγματικότητας (Reality) και αυτό των Μαθηματικών (Mathematics). Στο πεδίο της Πραγματικότητας βρίσκονται τέσσερα στάδια το 1,2,4,6 ενώ στο πεδίο των Μαθηματικών δυο στάδια το 4 και το 5 τα στάδια και οι μεταβάσεις (Ferri, 2006, 2007)



6 Στάδια	
1	Πραγματική Κατάσταση
2	Νοητική Αναπαράσταση της Πραγματικής Κατάστασης
3	Πραγματικό Μοντέλο
4	Μοντέλο Μαθηματικών ή/και Φυσικής
5	Αποτέλεσμα Μαθηματικών ή/και Φυσικής
6	Πραγματικό Αποτέλεσμα
7 Μεταβάσεις	
1-2	Κατανόηση της Πραγματικής Κατάστασης
2-3	Απλοποίηση Προβλήματος/Επεξεργασία και Φιλτράρισμα Πληροφοριών/Δόμηση
3-4	Μαθηματικοποίηση ή/και Φυσικοποίηση
4-5	Μαθηματική ή/και Φυσική Επεξεργασία και Εφαρμογή
5-6	Ερμηνεία Αποτελέσματος
6-2	Επαλήθευση/Έλεγχος εγκυρότητας
2-1	Παρουσίαση Αποτελέσματος



1ο Στάδιο: Πραγματική Κατάσταση (Real Situation).

Είναι η αρχική κατάσταση που δίνεται από το πρόβλημα σε οποιαδήποτε μορφή πριν ο μαθητής την επεξεργαστεί με κάποιο τρόπο.

Μετάβαση από το 1ο στο 2ο στάδιο :

Κατανόηση της Κατάστασης (Understanding the task).

Ο μαθητής καταλαβαίνει σε κάποιο βαθμό το πρόβλημα και κατασκευάζει μια νοητή εικόνα για την κατάσταση.

- ✓ Εστίασε στα νούμερα
- ✓ Αγνόησε τον θόρυβο
- ✓ Κάνε υποθέσεις στο κάτω κάτω εσύ είσαι ο ερευνητής

2ο Στάδιο: Νοητική Αναπαράστασης της Κατάστασης (Mental Representation of the Situation).

Η εικόνα που έχει κατασκευάσει νοητά ο κάθε μαθητής είναι μοναδική αφού εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αυτοί οι παράγοντες είναι η σύνδεση της πραγματικής κατάστασης με τις προσωπικές μοναδικές εμπειρίες του κάθε μαθητή, το μαθηματικό στυλ και σκέψη που μπορεί να είναι η εξεικόνιση του προβλήματος, η εστίαση στους αριθμούς και τα αριθμητικά δεδομένα ή στις σχέσεις και συνδέσεις που μπορεί να διακρίνει. Σημαντικά χαρακτηριστικά αυτού του σταδίου είναι οι πιθανές απλοποιήσεις/αφαιρέσεις (να μην λάβει υπόψιν του κάποια στοιχεία τους προβλήματος που θεωρεί μη σημαντικά) που μπορεί κάνει ο μαθητής και η ιδιαίτερη προτίμηση του μαθητή για το πως θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα στην επερχόμενη διαδικασία μοντελοποίησης.

Μετάβαση από 2ο στο 3ο στάδιο : Απλοποίηση, Επεξεργασία και Δόμηση (Simplifying, Processing and Structuring).

Στην μετάβαση αυτή γίνεται απλούστευση του προβλήματος διότι κατά την διάρκεια του 2ου Σταδίου ο μαθητής παίρνει αποφάσεις και φιλτράρει τις πληροφορίες. Επεξεργάζεται τα στοιχεία και ανάλογα με το είδος τους προβλήματος η αναζήτηση ή η απαίτηση μαθηματική γνώσης εμφανίζεται, όχι αναγκαστικά σε απόλυτα τυπική μορφή. Δομείται σταδιακά ένα μαθηματικό μοντέλο.

✓Φτιάξε ένα οπτικό σχήμα που θα περιγράφει την κατάσταση όσο πιο απλοποιημένο γίνεται

✓Απέφυγε τις περιττές λεπτομέρειες

✓ Κράτησε το σημαντικό και πέταξε το ασήμαντο

3ο Στάδιο: Πραγματικό Μοντέλο (Real Model).

Το Στάδιο αυτό είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το 2ο στάδιο, διότι το πραγματικό μοντέλο έχει δημιουργηθεί κυρίως από της εσωτερικές αναπαραστάσεις του μαθητή. Αλλά μπορεί να έχει εκφραστεί σε εξωτερικές αναπαραστάσεις από τον μαθητή όπως κάποιο σχέδιο ή κάποιος τύπος ακόμα και σε λεκτικό επίπεδο.

Μετάβαση από το 3ο στο 4ο στάδιο : Μαθηματικοποίηση (Mathematizing).

Η διαδικασία της μαθηματικοποίησης όπου απαιτείται μαθηματική γνώση, που εξαρτάται προφανώς από το πρόβλημα, για την κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου.

4ο Στάδιο: Μαθηματικό Μοντέλο (Mathematical Model).

Οι λεκτικές εκφράσεις των μαθητών είναι κυρίως σε μαθηματικό επίπεδο και λιγότερο με αναφορές στην πραγματικότητα. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών είναι κυρίως κατασκευή και επεξεργασία αναπαραστάσεων, τύπων και σχεδίων (γραφημάτων).

✓όρισε τις μεταβλητές του προβλήματος και το πεδιο στο οποίο αυτές ορίζονται

✓Βρες τα πάνω και τα κάτω άκρα αυτού των διαστημάτων

✓ όρισε τις μεταβλητές .Είναι κάποιες που συνμεταβάλονται

Μετάβαση από το 4ο στο 5ο στάδιο:
Μαθηματική Επεξεργασία (Working Mathematically).

Από το μαθηματικό μοντέλο οι μαθητές χρησιμοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις και ικανότητες για να παράξουν ένα μαθηματικό αποτέλεσμα.

5ο Στάδιο: Μαθηματικά Αποτελέσματα (Mathematical Results).
Οι μαθητές καταγράφουν τα δικά τους αποτελέσματα τα οποία βασίζονται στο μαθηματικό μοντέλο.

Μετάβαση από το 5ο στο 6ο στάδιο: Ερμηνεία (Interpretation).

Οι μαθητές ερμηνεύουν τα αποτελέσματα στην μετάβαση από τα Μαθηματικά αποτελέσματα στα πραγματικά αποτελέσματα, αυτό δεν γίνεται απαραίτητα συνειδητά από τους ίδιους.

6ο Στάδιο: Πραγματικά Αποτελέσματα (Real Results).
Οι μαθητές διαπραγματεύονται τα Μαθηματικά αποτελέσματα και ελέγχουν να είναι εφικτό να είναι πραγματικά αποτελέσματα.

Μετάβαση από το 6ο στο 2ο στάδιο :Έλεγχος Εγκυρότητας (Validating).
Οι μαθητές ελέγχουν την εγκυρότητα το πραγματικών αποτελεσμάτων αν συνάδει με το μοντέλο της νοητικής τους αναπαράστασης του προβλήματος. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει σωστά ή και λανθασμένα ανεξαρτήτως σωστού ή λανθασμένου αποτελέσματος. Ο έλεγχος της εγκυρότητας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους από τους μαθητές. Ο πρώτος είναι ο διαισθητικός έλεγχος εγκυρότητας (Intuitive Validation), όπου ο μαθητής ανακαλύπτει ότι τα πραγματικά αποτελέσματα είναι λανθασμένα είτε επειδή δεν ταιριάζουν στο προσωπικό του μοντέλου νοητικής αναπαράστασης είτε για λόγους που δεν μπορεί να εξηγήσει. Ο δεύτερος τρόπος είναι ο έλεγχος εγκυρότητας που βασίζεται σε γνώσεις (Knowledge-based Validation), όπου οι μαθητές είτε διαφωνούν είτε συμφωνούν με το πραγματικό αποτέλεσμα βασιζόμενοι όμως στην μαθηματική γνώση που χρησιμοποίησαν και βασίστηκαν στην κατασκευή του μοντέλου.

Μετάβαση από το 2ο στο 1ο στάδιο : Παρουσίαση (Presenting).

Στην μετάβαση αυτή ο μαθητής έχοντας ελέγξει την εγκυρότητα του αποτελέσματος το παρουσιάζει ως απάντηση στην αρχική πραγματική κατάσταση. Αρκετοί ερευνητές στις μελέτες τους έχουν επισημάνει ότι ο κύκλος της μοντελοποίησης δεν είναι μια γραμμική διαδικασία μετάβασης, από το ένα στάδιο στο άλλο, αλλά μια δυναμική διαδικασία. Οι Blum και Ferri (2009) παρατήρησαν ότι οι μαθητές πολλές φορές επέστρεφαν στο προηγούμενο στάδιο ή και πριν από αυτό χωρίς να έχουν ολοκληρώσει τον κύκλο. Επίσης, κάποια στάδια και κάποιες μεταβάσεις δεν γινόντουσαν αφού οι μαθητές απέρριπταν τα μοντέλα τους πριν παράξουν κάποιο αποτέλεσμα. Στις παρατηρήσεις των Blum και Ferri (2009) συνηγορούν και άλλες έρευνες όπως αυτές των Haines και Crouch (2013), του Leiß (2007) και της Doerr (2007). Τα Στάδια ή οι Φάσεις του κύκλου μοντελοποίησης δεν είναι πάντα εύκολα διαχωρίσιμα. Αυτό συμπεραίνει η Ferri (2006) όπου επισημαίνει ότι εξαιτίας της γνωστικής οπτικής του κύκλου μοντελοποίησης η διαδικασία περιγράφεται εμπειρικά και αυτό δυσκολεύει την διάκριση των φάσεων. Ο κύκλος μοντελοποίησης είναι χρήσιμος στην περιγραφή των δραστηριοτήτων των μαθητών όταν μοντελοποιούν μια πραγματική κατάσταση (Haines & Crouch, 2013). Ενώ οι Blum και Ferri (2009) θεωρούν τον κύκλο μοντελοποίησης των Blum και Leiß (2007) εξαιρετικά βοηθητικό για την γνωστική ανάλυση των δραστηριότητα μοντελοποίησης .

Η εννοιολόγηση της Blum και Leiß (2007) έχει γίνει ευρέως αποδεκτή για να περιγράψει τη διαδικασία μοντελοποίησης, αλλά έχει αποδειχθεί ότι είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο ανάλυσης όταν πρόκειται να περιγράψει και να εξηγήσει το έργο των μαθητών. Μερικοί ερευνητές έχουν κατευθύνει τις προσπάθειές τους προς την επεξεργασία δεικτών για τον εντοπισμό των σταδίων που περιγράφονται από τους Blum και Leiss (2007) στις πραγματικές δραστηριότητες των μαθητών, όπως στο έργο του Borromeo Ferri (2007) ή σε αυτό των Sol, Giménez και Rosich (2011). Η ύπαρξη αυτού του τύπου μελέτης είναι ένα παράδειγμα των δυσκολιών που συναντούν οι ερευνητές όταν χρησιμοποιούν ένα συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο στην έρευνά τους (Sol et al., 2011).
Άλλοι ερευνητές έχουν υιοθετήσει μια διαφορετική προσέγγιση και υποστηρίζουν ότι τα υπάρχοντα πλαίσια κύκλου μοντελοποίησης από ορισμένες απόψεις παρέχουν μια πολύ απλοποιημένη εικόνα της μοντελοποίησης, καθώς η πορεία που ακολουθούν οι μαθητές καθ 'όλη τη διάρκεια μιας διαδικασίας μοντελοποίησης είναι μη γραμμική. Επιπλέον, υποστηρίζουν επίσης ότι είναι δύσκολο να ανατεθούν οι δραστηριότητες των μαθητών όταν ασχολούνται με τη μοντελοποίηση είτε στο να ανήκουν στον πραγματικό κόσμο είτε στον μαθηματικό τομέα, υποδηλώνοντας ότι η διάκριση μεταξύ των δύο τομέων δεν είναι πάντα δυνατή και ότι το όριο μεταξύ τους δεν είναι σαφές(Ärlebäck, 2009) .Ορισμένες θέσεις που βρέθηκαν στην υπάρχουσα βιβλιογραφία αντιτίθενται στην προαναφερθείσα έννοια που δίνεται στη λέξη πραγματικότητα. Οι Blum και Borromeo Ferri (2009), βασισμένοι στην οπτική του Pollak (1979), κατανοούν την πραγματικότητα ως οτιδήποτε είναι έξω από τα μαθηματικά, τις έννοιες και τις διαδικασίες της. Έτσι, ορίζουν την πραγματικότητα ως τον υπόλοιπο κόσμο, ο οποίος περιλαμβάνει τη φύση, την κοινωνία, την καθημερινή ζωή και τους υπόλοιπους επιστημονικούς κλάδους. Η έννοια μιας πραγματικότητας που είναι εξωτερική στα μαθηματικά έχει μια άποψη για τα μαθηματικά μοντέλα ως ένα τραχύ πορτρέτο της πραγματικότητας(Barbosa, 2006). Ο Barbosa εισάγει επίσης μια διαφορετική προοπτική με την έννοια ότι θεωρούν τα μαθηματικά μέρος της πραγματικότητας και υποδηλώνουν ότι τα μαθηματικά μοντέλα δεν είναι απαραίτητα στρεβλά ή μερικά από τη φύση τους. Όταν έρχεται αντιμέτωπος με την ανάγκη περιγραφής των διαδικασιών μοντελοποίησης που εφαρμόζουν οι μαθητές, ο Borromeo Ferri (2007) προτείνει τις λεγόμενες διαδρομές ατομικής μοντελοποίησης με στόχο τη διεύρυνση της εμβέλειας του

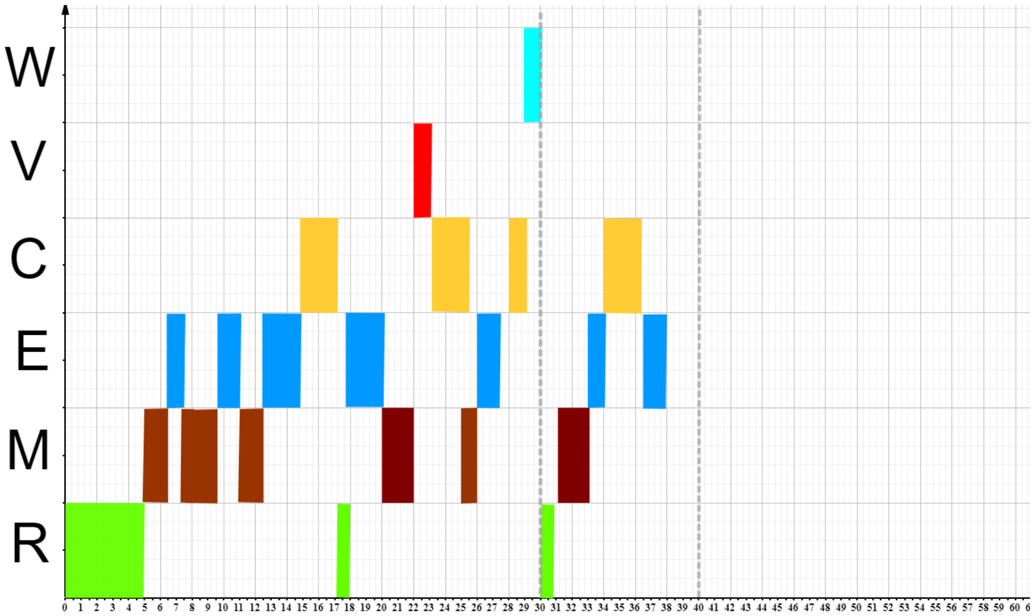
κύκλου μοντελοποίησης. Αυτές οι διαδρομές βασίζονται σε διαγράμματα βέλους που δείχνουν την εργασία των μαθητών μέσα στο θεωρητικό διάγραμμα του κύκλου μοντελοποίησης, αποδεικνύοντας ότι ο κύκλος αποτυγχάνει να δείξει τις αποφάσεις που λαμβάνουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διαδικασίας μοντελοποίησης.

Διαγράμματα δραστηριότητας μοντελοποίησης (MAD) Ärlebäck

O Ärlebäck χρησιμοποίησε μια προσαρμοσμένη έκδοση των «γραφημάτων επίλυσης προβλημάτων» του Schoenfeld (Schoenfeld, 1985) για να αποκτήσει μια σχηματική εικόνα της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων των μαθητών που εργάζονται σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα μοντελοποίησης προσαρμοσμένο από τον Wood (1983).Αποτελεί μέρος «ενός αναλυτικού πλαισίου για τη μακροσκοπική ανάλυση πρωτοκόλλων επίλυσης προβλημάτων, με έμφαση στην εκτελεστική ή ελεγκτική συμπεριφορά»(Schoenfeld, 1985) στη λήψη αποφάσεων κατά την επίλυση προβλημάτων. Η ιδέα του είναι να προσπαθήσει να χαρακτηρίσει τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων ενός ατόμου, ή μιας ομάδας ατόμων, αναλύοντας μεταγραφές λεκτικών δεδομένων που παράγονται κατά τη διάρκεια της «συνεδρίας επίλυσης προβλημάτων» . Αυτό το πέτυχε μέσω πρωτοκόλλων διαχωρισμού, που είναι αυτό που ο Schoenfeld αποκαλεί τα λεκτικά του δεδομένα, «σε μακροσκοπικά κομμάτια συνεπούς συμπεριφοράς που ονομάζονται επεισόδια. Ένα επεισόδιο είναι μια χρονική περίοδος κατά την οποία ένα άτομο ή μια ομάδα επίλυσης προβλημάτων ασχολείται με ένα μεγαλύτερο έργο ή ένα στενά συνδεδεμένο σώμα καθηκόντων στην υπηρεσία του ίδιου στόχου. (Schoenfeld, 1985). Στη συνέχεια, κάθε επεισόδιο χαρακτηρίστηκε είτε ως **ανάγνωση, ανάλυση, σχεδιασμός, υλοποίηση, εξερεύνηση, επαλήθευση ή μετάβαση**. Όλες οι κατηγορίες περιγράφονται εν συντομία μαζί με τις λεγόμενες σχετικές ερωτήσεις και «[ένας] πλήρης χαρακτηρισμός ενός πρωτοκόλλου επιτυγχάνεται με την ανάλυση ενός πρωτοκόλλου σε επεισόδια και την παροχή απαντήσεων στις σχετικές ερωτήσεις». Αρχικά σε μια προηγούμενη μελέτη, ο Ärlebäck (2009) περιλαμβάνει την προσέγγιση του Borromeo Ferri και παρουσιάζει τα διαγράμματα δραστηριότητας μοντελοποίησης (MAD) ως ένα αμφίπλευρο γράφημα που απεικονίζει τον τύπο των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης στις οποίες συμμετέχουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης. Οι δραστηριότητες αυτές που προτάθηκαν από την Ärlebäck (2009) και χρησιμοποιήθηκαν για τον χαρακτηρισμό των διαδικασιών μοντελοποίησης όσον αφορά τις MADs παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα

R: Reading	Ανάγνωση της δήλωσης της εργασίας και κατανόησή της
M: Modelling	Απλοποίηση και διάρθρωση της εργασίας μαθηματικά
E: Estimating	Πραγματοποίηση ποσοτικών εκτιμήσεων
C: Calculating	Εκτέλεση μαθηματικών υπολογισμών, όπως αριθμητικοί υπολογισμοί, εργασία με εξισώσεις, σχεδίαση σκίτσων ή διαγραμμάτων
V: Validating	Ερμηνεία, επαλήθευση και επικύρωση των αποτελεσμάτων, των υπολογισμών και του ίδιου του μοντέλου στο πραγματικό του πλαίσιο
W: Writing	Συνοψίζοντας τα ευρήματα και τα αποτελέσματα σε μια έκθεση, συντάσσοντας τη διαδικασία επίλυσης καθώς και τη λύση

Εδώ, η δραστηριότητα της ανάγνωσης είναι παρόμοια με την «κατανόηση του έργου» του Borromeo Ferri. η κατασκευή του μοντέλου ενσωματώνει τμήματα τόσο της «απλοποίησης/διάρθρωσης της εργασίας» όσο και της «μαθηματικοποίησης»· ο υπολογισμός είναι ο ίδιος με τη «μαθηματική εργασία»· και η επικύρωση είναι τόσο «ερμηνεία» όσο και «επικύρωση». Ο λόγος για αυτές τις συγχωνεύσεις είναι ότι είναι συχνά δύσκολο να διαχωριστεί η «απλοποίηση/διάρθρωση της εργασίας» από τη «μαθηματικοποίηση» και αντίστροφα, και ότι σε κάποιο βαθμό η «ερμηνεία» και η «επικύρωση» είναι αλληλένδετες. Η υποδραστηριότητα της εκτίμησης υπονοείται στον κύκλο μοντελοποίησης του Borromeo Ferri, κατά την αντίληψή του βρέθηκε τόσο ως συστατικό της «απλοποίησης / διάρθρωσης της εργασίας» κατά την κατασκευή ενός «πραγματικού μοντέλου», όσο και ως συστατικό της «μαθηματικοποίησης» στη μετάβαση από ένα «πραγματικό μοντέλο» σε ένα «μαθηματικό μοντέλο». **Μια γραφική αναπαράσταση της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων, ανάλογη με τα γραφήματα που περιγράφει ο Schoenfeld (1985b; 1992), χρησιμοποιώντας αυτές τις κατηγορίες ονομάζεται διάγραμμα δραστηριότητας μοντελοποίησης και χρησιμοποιείται ως αναλυτικό εργαλείο σε αυτή τη μελέτη για να συλλάβει τη μακροσκοπική συμπεριφορά που επιδεικνύουν οι μαθητές που ασχολούνται με τη δραστηριότητα της επίλυσης προβλημάτων**



R: Reading	Ανάγνωση της δήλωσης της εργασίας και κατανόησή της
M: Modelling	Απλοποίηση και διάρθρωση της εργασίας μαθηματικά
E: Estimating	Πραγματοποίηση ποσοτικών εκτιμήσεων
C: Calculating	Εκτέλεση μαθηματικών υπολογισμών, όπως αριθμητικοί υπολογισμοί, εργασία με εξισώσεις, σχεδίαση σκίτσων ή διαγραμμάτων
V: Validating	Ερμηνεία, επαλήθευση και επικύρωση των αποτελεσμάτων, των υπολογισμών και του ίδιου του μοντέλου στο πραγματικό του πλαίσιο
W: Writing	Συνοψίζοντας τα ευρήματα και τα αποτελέσματα σε μια έκθεση, συντάσσοντας τη διαδικασία επίλυσης καθώς και τη λύση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο:

Έρευνα σε ομάδες μαθητών της Γ λυκείου

Εισαγωγή:

Σε αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε μια ποιοτική μελέτη η οποία βασίζεται σε ημιδομημένες συνεντεύξεις στην οποία αναλύουμε τις βιντεοσκοπήσεις δυο ομάδων πέντε μαθητών της Γ λυκείου στην προσπάθεια τους να μοντελοποιήσουν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα καθοδηγούμενοι από μια πειραματική διδασκαλία ελάχιστα παρεμβατική . Προκειμένου να αναλυθούν οι διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών, χρησιμοποιήθηκαν τα λεγόμενα Διαγράμματα Δραστηριότητας Μοντελοποίησης (Ärlebäck, 2009). Αναμένεται τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης να δείξουν ότι η επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης είναι ένα πολύπλοκο θέμα και ότι μερικά από τα θεωρητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στον τομέα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αποτυγχάνουν να αντικατοπτρίζουν επαρκώς αυτό το επίπεδο πολυπλοκότητας. Επιπλέον, τα διαγράμματα δραστηριότητας μοντελοποίησης παρουσιάζονται ως ένα πιο λεπτομερές εργαλείο ανάλυσης για τον χαρακτηρισμό των επιλογών και των ενεργειών των μαθητών, καθώς και για να κάνουν τη δομή του προβλήματος που αντιμετωπίζεται με οπτικό τρόπο.

Ο στόχος της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει τις δυνατότητες των Διαγραμμάτων Δραστηριότητας Μοντελοποίησης, που επεκτείνονται σε μια πιο λεπτομερή αναπαράσταση της πολυπλοκότητας των διαδικασιών μοντελοποίησης και να καθορίσει εάν αυτό το εκτεταμένο εργαλείο παρέχει πραγματικά περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με τις δομές που διέπουν τις διαδικασίες στις οποίες συμμετείχαν οι μαθητές. Δεδομένης της ποικιλίας των προσεγγίσεων και των στόχων στο πλαίσιο της συζήτησης για τη μοντελοποίηση, αυτός ο τομέας έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση αναπτύσσεται ραγδαία. Μια τάση στη συζήτηση μοντελοποίησης για τα επόμενα χρόνια θα μπορούσε να είναι μια γνωστική προοπτική . Η εκμάθηση της έννοιας του ολοκληρώματος αποτελεί σημαντικό μέρος των μαθηματικών του λυκείου. Το αποδίδουμε αυτό στην χρησιμότητα σε εφαρμογές καθώς και στην ιδέα που την διέπει: Η θεώρηση του όλου ως το σύνολο των μικρών μερών του η οποία επιτρέπει την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με το σύνολο, όπως καθώς και την εσωτερική δομή και τις ιδιότητές του. Ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι ακόμη και οι μαθητές με υψηλές ικανότητες σπάνια αποκτούν κατανόηση όσον αφορά την έννοια του ολοκληρώματος - μάλλον, ακόμη και στις καλύτερες περιπτώσεις, οι μαθητές δεν αποκτούν καμία περισσότερο από τυπικές τεχνικές για την επίλυση συγκεκριμένων ασκήσεων και προβλημάτων(Grenier et al. 1990). Ο Bagni (1999) υποστηρίζει ότι η παραδοσιακή μελέτη του λογισμού στο λύκειο δεν επιτρέπει την πλήρη γνώση της έννοιας του ολοκληρώματος. Ο Thompson (1994) υποστηρίζει ότι

"Οι μαθητές δυσκολίες με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού(FTC) πηγάζουν από φτωχές έννοιες του ρυθμού μεταβολής και από ανεπαρκώς ανεπτυγμένες και ανεπαρκώς συντονισμένες εικόνες της συναρτησιακής συνδιακύμανσης και των δομημένων ποσοτήτων"

Συνολικά, οι μαθητές έχουν την τάση να βλέπουν τον ολοκληρωτικό λογισμό ως μια σειρά από διαδικασίες με σχετικούς αλγορίθμους, αλλά δεν αναπτύσσουν μια κατανόηση των εννοιών, η οποία θα τους έδινε ευελιξία σκέψης. Έτσι, αντί να έχουν μια εννοιολογική θεώρηση (Grayand Tall 1994) της ολοκλήρωσης, έχουν στην καλύτερη περίπτωση μια άποψη προσανατολισμένη στις διεργασίες και στις αλγοριθμικές τεχνικές.

Η παρούσα εργασία εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές λυκείου κατασκευάζουν εννοιολογική γνώση σχετικά με την έννοια του ολοκληρώματος .Ακολουθούμε την πρόταση να χρησιμοποιήσουμε την συσσώρευση ως την κεντρική ιδέα για την προσέγγιση της έννοιας του ολοκληρώματος (Thompson 1994- Kouropatov και Dreyfus 2013). Η έρευνά μας δείχνει ότι η κατασκευή της εννοίας από τους μαθητές δεν ήταν γραμμικές κατά μήκος της ανάλυσης, και εξαρτιόνταν άρρηκτα από το προσωπικό και κοινωνικό πλαίσιο για κάθε μαθητή. Υπήρχαν διαφορές μεταξύ των μαθητών σε σχέση με το μαθηματικό υπόβαθρο, το στυλ εργασίας, την ανάγκη για υποστήριξη, τον τύπο της συνεργασίας. Από την άλλη πλευρά, παρατηρήσαμε σημαντική ομοιότητα μεταξύ των διαδικασιών κατασκευής των μαθητών και αυτό φαίνεται να οφείλεται στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και στη χαμηλή τους βαθμό εξάρτησης από προηγούμενες κατασκευές, δηλαδή από τις μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών.

6.1 Μεθοδολογία έρευνας :

6.1.1 Ερευνητική διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στις 12 και 19 Ιουλίου του 2022 σε δυο διαφορετικές ομάδες μαθητών της Γ΄ Λυκείου, εκτός ωραρίου και αφού είχε ολοκληρωθεί η ύλη της Γ΄ Λυκείου για την σχολική χρονιά 2021-2022 και είχαν εκπληρωθεί οι υποχρεώσεις των μαθητών με τις πανελλαδικές εξετάσεις με χρήση τηλεδιάσκεψης μέσω της εφαρμογής Zoom διάρκειας 60΄ και 60΄λεπτών .

Η πρώτη ομάδα (Ομάδα Α) αποτελούταν από πέντε μαθητές (τέσσερα αγόρια και ένα κορίτσι) της θετικής κατεύθυνσης στην οποία εφαρμόστηκε μια πιλοτική διδασκαλία ώστε να αποσαφηνιστούν οι τεχνικές λεπτομέρειες και πιθανές δυσκολίες της διαδικασίας, η βελτίωση της δραστηριότητας αλλά και να διερευνηθεί μια αρχική υπόθεση για την πιθανή συλλογιστική πορεία των μαθητών ως προς τις έννοιες της Φυσικής και των Μαθηματικών που θα έπρεπε να διαπραγματευτούν κατά την διάρκεια της διαδικασίας .

Η δεύτερη ομάδα (Ομάδα Β) αποτελούταν επίσης από πέντε μαθητές(τέσσερα αγόρια και ένα κορίτσι) της θετικής κατεύθυνσης στην οποία εφαρμόστηκε η τελική διδασκαλία έχοντας ήδη την εμπειρία της πρώτης διδασκαλίας .

6.1.2 Οι συμμετέχοντες και το μαθησιακό τους προφίλ

Στον παρακάτω Πίνακα 1 παρουσιάζεται το προφίλ των μαθητών των δυο ομάδων .

Πίνακας 1:Ομαδα Α

Μαθητές	Κατεύθυνση	Επίπεδο	Μαθηματικά	Φυσική
1.Ηλίας Κω.	Θετικής	Μέτριο	Μέτριο	Μέτριο
2.Ελπίδα	Θετικής	Μέτριο	Μέτριο	Μέτριο
3.Βασίλης Σ.	Θετικής	Μέτριο	Μέτριο	Μέτριο
4.Γιώργος	Θετικής	Αρίστο	Αρίστο	Αρίστο
5.Βασίλης	Θετικής	Αρίστο	Αρίστο	Αρίστο

Πίνακας 2:Ομάδα Β

Μαθητές	Κατεύθυνση	Επίπεδο	Μαθηματικά	Φυσική
1.Κώστας Κω.	Θετικής	Μέτριο	Μέτριο	Μέτριο
2.Αναστασία Σ.	Θετικής	Μέτριο	Μέτριο	Μέτριο
3.Κώστας Αρ.	Θετικής	Αρίστο	Αρίστο	Αρίστο
4.Κώστας Λε.	Θετικής	Αρίστο	Αρίστο	Αρίστο
5.Βασίλης	Θετικής	Αρίστο	Αρίστο	Αρίστο

Οι μαθητές είχαν μέτριες αλλά και άριστες επιδόσεις στη Φυσική και στα Μαθηματικά. Είχαν ολοκληρώσει την ύλη της Γ΄ Λυκείου για την σχολική χρονιά 2021-2022 και είχαν εκπληρωθεί οι υποχρεώσεις των μαθητών με τις πανελλαδικές εξετάσεις . Είχαν όλοι τις βασικές προαπαιτούμενος γνώσεις Μαθηματικών και Φυσικής και μια αρκετή καλή διαδικαστική αλγεβρική ευχέρεια όπως γνώση εύρεσης εμβαδού ευθύγραμμων χωρίων, συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων, αλλά και εύρεσης μέσου όρου. Είχαν ήδη διδαχθεί και τα ορισμένα ολοκληρώματα καθώς και τρόπους υπολογισμού εμβαδού αναμεσά σε συναρτήσεις.

6.1.3 Ερευνητικά Ερωτήματα

Η βασική εστίαση της έρευνας είναι στις προσπάθειες των μαθητών να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα που τους τέθηκε, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο ανέπτυξαν και εξέλιξαν την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα η παρούσα έρευνα σκοπεύει να απαντήσει στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1ο Ερώτημα: Ποιες προσπάθειες μοντελοποίησης αναπτύχθηκαν από τους μαθητές για την επίλυση του προβλήματος;

2ο Ερώτημα: Με ποιο τρόπο οι μαθητές ανέπτυξαν και εξέλιξαν το μαθηματικό μοντέλο της αριθμητικής ολοκλήρωσης;

3ο Ερώτημα: Ποιοι παράγοντες επηρέασαν θετικά τους μαθητές στη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος;

4**ο Ερώτημα:** Να συλλάβει κάποιες μακροσκοπικές συμπεριφορές και κοινωνικο-πολιτισμικές προεκτάσεις που επιδεικνύουν οι μαθητές που ασχολούνται με τη δραστηριότητα της επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων.

6.1.4 Τα ερευνητικά δεδομένα

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην διδασκαλία δύο διδακτικών ωρών και διάρκειας 60΄ λεπτών συλλέχθηκαν προς ανάλυση τα παρακάτω ερευνητικά δεδομένα:

1. Αρχεία ήχου και εικόνας από την μαγνητοφώνηση της διδασκαλίας μέσω της εφαρμογής Camtasia και την δυνατότητα της για μαγνητοσκόπηση της τηλεδιάσκεψης . Συμφωνήθηκε να μην είναι ανοικτές οι κάμερες κατά την διάρκεια της διδασκαλίας για προστασία των προσωπικών δεδομένων των μαθητών .Όλοι οι μαθητές είχαν έγγραφη συγκατάθεση των γονέων για την συμμετοχή τους στην ερευνητική διαδικασία

2. Ηλεκτρονικά φύλλα εργασίας των μαθητών μέσω της εφαρμογής Geogebra

3. Σημειώσεις και ηλεκτρονικά φύλλα εργασίας του εκπαιδευτικού - ερευνητή.

Κατόπιν της ηχογράφησης και μαγνητοσκόπησης της διδασκαλίας με χρήση του λογισμικού Camtasia έγινε λεπτομερή και αναλυτική απομαγνητοφώνηση (25 σελίδες και 3600 λέξεις για την πιλοτική ομάδα Α και 27 σελίδες και 5900 λέξεις για την ομάδα Β).Στην δεύτερη ομάδα επιπλέον έγινε ανάλυση και καταγραφή των χρονικών στιγμιότυπων της κάθε παράθεσης από τους μαθητές ώστε να έχουμε και την χρονική διάσταση της εξέλιξης της ερευνάς. Η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων έγινε με το πρόγραμμα Atlas.ti. Το πρόγραμμα Atlas.ti χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την υποβοήθηση της ανάλυσης δεδομένων αυτής της ποιοτικής έρευνας στην οποία εφαρμοστήκαν κωδικοί για να προσθέσουμε ετικέτες σε ποιοτικές πληροφορίες των απομαγνητοφωνημένων κείμενων των συνεντεύξεων .Χρησιμοποιήθηκαν και εφαρμοστήκαν οι παρακάτω κωδικοί

V:VALIDATING

C:CALCULATING

E:ESTIMATING

W:WRITING

M:MODELLING

R: READING

CR:ΚΡΙΣΙΜΟ ΣΗΜΕΙΟ

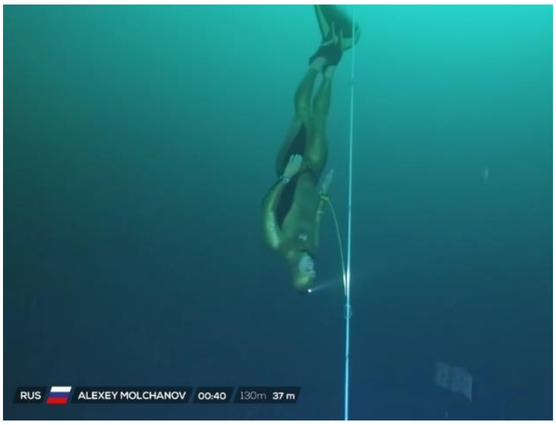
INT:ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

DM:ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

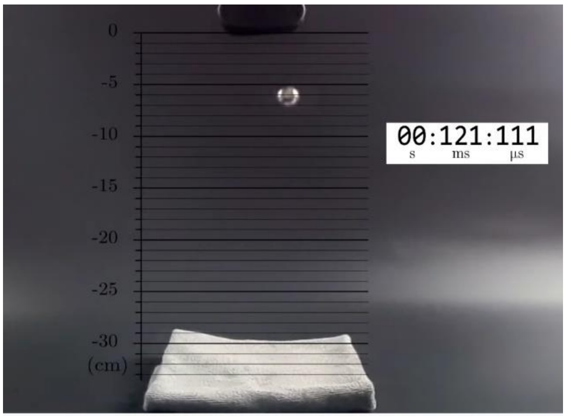
6.1.5 Προετοιμασία και οργάνωση της ερευνάς

Επιλογή προβλήματος :Η αρχική σκέψη του ερευνητή ήταν το πρόβλημα να βασίζεται σε κινουμένη εικόνα και βίντεο ώστε να τονισθεί η ρεαλιστική προοπτική του προβλήματος και να μην περιέχει οτιδήποτε παραπέμπει σε ένα συμβατικό πρόβλημα μαθηματικών .Αν χρειαστούμε πίνακες αριθμών και διαγράμματα αυτοί θα πρέπει να κατασκευαστούν από τους ίδιους τους μαθητές . Πολυάριθμες μελέτες έχουν αξιολογήσει τις γνωστικές συσχετίσεις της απόδοσης στα μαθηματικά, αλλά λίγη έρευνα έχει διεξαχθεί για να εξετάσει συστηματικά τις σχέσεις μεταξύ της οπτικής αντίληψης ως σημείου εκκίνησης της οπτικοχωρικής επεξεργασίας και της τυπικής μαθηματικής απόδοσης(Cui et al., 2017). Τα βίντεο-προβλήματα τα οποία προκρίθηκαν ήταν τα εξής τρία

● Το παγκόσμιο ρεκόρ ελεύθερης κατάδυσης του Ρώσου αθλητή Alexey Molchanov στα 130 μέτρα όπου έχουμε για κάθε χρονική στιγμή καταγραφή του αντίστοιχου βάθους του αθλητή και εύρεση της ταχύτητας του αθλητή κάθε χρονική στιγμή και ερωτήματα με το είδος της ταχύτητας .



● Το πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης μιας σφαίρας από ύψος 30 εκατοστών όπου έχουμε για κάθε χρονική στιγμή καταγραφή του αντίστοιχου ύψους της σφαίρας Ώστε οι μαθητές να ανακαλύψουν το νομό της ελεύθερης πτώσης και την τετραγωνική συνάρτηση



προκρίθηκε τελικά το πρόβλημα με το αγωνιστικό αυτοκίνητο της formula 1 το οποίο αναλύεται διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο 6.2

Επιλογή μαθητών :Ο ερευνητής επέλεξε μαθητές μόνο από την Θετική κατεύθυνση ώστε να έχουν εμπειρία με προβλήματα φυσικής και να διαχειριστεί δυσκολίες που σχετίζονται με τα προβλήματα ανακολουθίας των προγραμμάτων σπουδών στο Λύκειο αναμεσά στην Φυσική και τα μαθηματικά. Τα δυο τμήματα τόσο η πιλοτική ομάδα όσο και η ομάδα ελέγχου ήταν ισοδύναμες ως προς τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά και στην φυσική. Ο Μαθηματικός φορμαλισμός δημιουργεί εμπόδια στην μάθηση της Φυσικής αλλά είναι και η έλλειψη συνδέσεων μεταξύ των Μαθηματικών και της Φυσικής δημιουργεί προβλήματα και στην μαθηματική ικανότητα (Michelsen, 2006).Πεποίθηση του ερευνητή είναι ότι η απομόνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και η στεγανοποίηση της από την φυσική δημιουργεί πρόβλημα και στην κατανόηση των ίδιων των μαθηματικών εννοιών αφού αντιμετωπίζονται από τους μαθητές ως διαδικασίες με αναπόφευκτες συνέπειες στην μετάγνωση .Η μετάγνωση σχετίζεται με τη γνώση και την κατανόηση που έχει ένας άνθρωπος για το επίπεδο και τις δυνατότητες της σκέψης του, του προσωπικού του συστήματος επεξεργασίας των πληροφοριών και οικοδόμησης της γνώσης. Σχετίζεται με την επίγνωση και τον έλεγχο που έχει κάποιος επί των σκέψεων και των δραστηριοτήτων που βιώνει. Επίσης, σύμφωνα με τον Garner (1897) η μεταγνωστική γνώση είναι κάτι το σταθερό, συνήθως σταθερές πληροφορίες για το τι γνωρίζουμε. Αυτή η γνώση αναφέρεται στον εαυτό μας, στα προβλήματα που αντιμετωπίσουμε και στις στρατηγικές που ενεργοποιούμε για την επίλυση τους.

Συναντήσεις με εκπαιδευτικούς της Φυσικής :Προηγήθηκαν της έρευνας αυτής συνάντηση με δυο διαφορετικούς εκπαιδευτικών της φυσικής ώστε να ανιχνευθούν ζητήματα με την εγκυρότητα των δραστηριοτήτων και την πορεία της διδασκαλίας . Σκοπός των συναντήσεων ήταν η αναπροσαρμογή της δραστηριότητας αλλά και η υπόθεση για την πιθανή συλλογιστική πορεία των μαθητών ως προς τις έννοιες της Φυσικής που θα έπρεπε να συνδέσουν . Οι συζητήσεις ανέδειξαν κοινά στοιχεία από τους εκπαιδευτικούς της Φυσικής ως προς τις πιθανές σκέψεις-στρατηγικές που ενδεχομένως θα έφερναν οι μαθητές. Αποφασίστηκε ότι θα ήταν καλύτερο να μην γίνει μετατροπή των χιλιομέτρων ανά ώρα σε μετρά ανά δευτερόλεπτο από την αρχή του προβλήματος αλλά στο τέλος πολλαπλασιάζοντάς με έναν κατάλληλο συντελεστή ώστε οι μαθητές να νιώθουν πιο οικεία με την έννοια της ταχύτητας σε χιλιόμετρά ανά ώρα . Ως προς τον τρόπο που εκείνοι θα αντιμετώπιζαν την δραστηριότητα υπήρξε ποικιλομορφία στις απαντήσεις αλλά και στις προσεγγίσεις τους.

Προετοιμασία των δεδομένων του βίντεο-προβλήματος

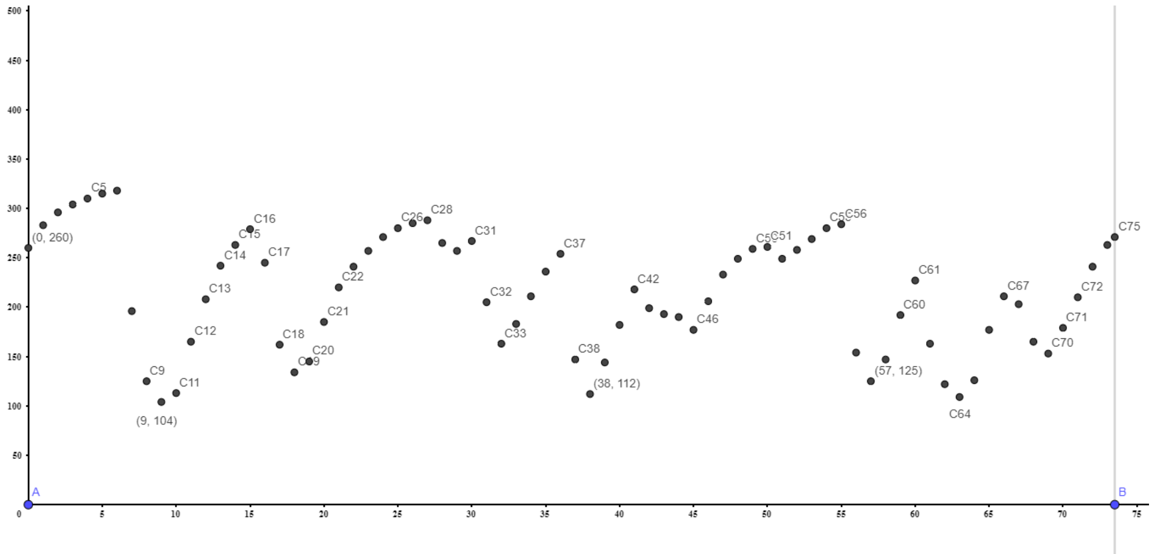
Αααναλύθηκε το βίντεο διεξοδικά και έγινε καταγραφή της ταχύτητας για κάθε δευτερόλεπτο από την αρχή της πίστας έως και τον τερματισμό. Επίσης έγινε και καταγραφή των ταχυτήτων από το 6 έως και το 9.44 sec σε διαστήματα μικρότερο του ενός δευτερολέπτου για κάθε μελλοντική πιθανή χρήση εκ μέρους των μαθητών και ειδικά για το ερώτημα 3 που αφορούσε την πιο επικίνδυνη στροφή της πίστας.

Χρονος (seconds)	Ταχυτητα (km/h)	Τελικη -Αρχικη ταχυτητα ανα sec
0	260	
1	283	23
2	296	13
3	304	8
4	310	6
5	315	5
6	318	3
7	196	-122
8	125	-71
9	104	-21
10	113	9
11	165	52
12	208	43
13	242	34
14	263	21
15	279	16
16	245	-34
17	162	-83
18	134	-28
19	145	11
20	185	40
21	220	35
22	241	21
23	257	16
24	271	14
25	280	9
26	285	5
27	288	3
28	265	-23
29	257	-8
30	267	10
31	205	-62

32	163	-42
33	183	20
34	211	28
35	236	25
36	254	18
37	147	-107
38	112	-35
39	144	32
40	182	38
41	218	36
42	199	-19
43	193	-6
44	190	-3
45	177	-13
46	206	29
47	233	27
48	249	16
49	259	10
50	261	2
51	249	-12
52	258	9
53	269	11
54	280	11
55	284	4
56	154	-130
57	125	-29
58	147	22
59	192	45
60	227	35
61	163	-64
62	122	-41
63	109	-13
64	126	17
65	177	51
66	211	34
67	203	-8
68	165	-38
69	153	-12
70	179	26
71	210	31
72	241	31
73	263	22
73.5	271	8

χρονος (seconds)	dt	Speed (km/h)	dv
6,36		301	
6,44	0,08	281	-20
6,56	0,12	261	-20
6,64	0,08	242	-19
6,76	0,12	226	-16
6,84	0,08	208	-18
6,96	0,12	196	-12
7,04	0,08	182	-14
7,16	0,12	170	-12
7,24	0,08	160	-10
7,36	0,12	153	-7
7,44	0,08	146	-7
7,56	0,12	140	-6
7,64	0,08	134	-6
7,76	0,12	130	-4
7,84	0,08	128	-2
7,96	0,12	125	-3
8,00	0,04	125	0
8,04	0,04	123	-2
8,16	0,12	121	-2
8,24	0,08	118	-3
8,36	0,12	114	-4
8,44	0,08	112	-2
8,64	0,20	109	-3
8,76	0,12	106	-3
8,84	0,08	105	-1
8,96	0,12	104	-1
9,04	0,08	102	-2
9,16	0,12	101	-1
9,36	0,20	100	-1

Κατόπιν τα δεδομένα ταχύτητας και χρόνου εισάχθηκαν στον πίνακα τιμών του Geogebra και δημιουργήθηκε το αντίστοιχο διάγραμμα ταχύτητας και χρόνου όπου είχαμε τελικά 75 σημεία με σήμανση C0,C1,C2,…C75



Έγινε χρήση των παρακάτω εντολών -δυνατοτήτων του Geogebra και του excel ώστε να απαλειφτούν προβλήματα σε σχέση με τον αριθμητικό υπολογισμό μέσων τιμών ,υπολογισμών συστημάτων πολλών μεταβλητών ,υπολογισμός εμβαδόν τραπέζιων και πολυγώνων καθώς και χρήση της ενσωματωμένης integrate του προγράμματος για των υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων .Κυρίως μέλημα του ερευνητή ήταν να εστιάσει στην διαδικασία μοντελοποίησης απαλλαγμένη από το βάρος οπουδήποτε αλγεβρικής και υπολογιστικής τεχνικής.

● FitPoly(<Λίστα σημείων >, <Επιθυμητός βαθμός πολυωνύμου>)

Δοθέντος n σημείων το geogebra υπολογίζει το πολυώνυμο παλινδρόμησης βαθμού $m \le n$.

● Περιοχή(<Πολύγωνο>)

Υπολογίζει το εμβαδόν του πολυγώνου.

● Integral(<Συνάρτηση μιας μεταβλητής >, <Start x-Value>, <End x-Value>)

Δίνει το ορισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα [Start x-Value , End x-Value] ως προς την κύρια μεταβλητή.

Βασικές δυσκολίες προετοιμασίας: Η διαχείριση από τον εκπαιδευτικό του συνόλου του ψηφιακού – ερευνητικού και εποπτικού – διδακτικού υλικού. Η ίδια η ανεξερεύνητη δραστηριότητα αφού ήταν ένα ανοιχτό και ρεαλιστικό πρόβλημα .Η πιλοτική διδασκαλία στη ομάδα Α δεν άλλαξε την δραστηριότητα στο σύνολο της αλλά βοήθησε σε μεγάλο βαθμό τον ερευνητή – εκπαιδευτικό να αναπροσαρμόσει την διαχείριση της τάξης αλλά και των υλικών, ψηφιακών και εποπτικών μέσων.

6.2 Το ρεαλιστικό πρόβλημα

Αρχικά στους μαθητές παρουσιάστηκε ένα βίντεο και κατόπιν ζητήθηκε να αναπτύξουν το παρακάτω πρόβλημα

Η «Formula1» είναι ο κορυφαίος διαγωνισμός ταχύτητας στον κόσμο με αγωνιστικά μονοθέσια αυτοκίνητα και ο Lewis Hamilton είναι ένας από τους διασημότερους και καλύτερους οδηγούς στον κόσμο. Το βίντεο που παρακολουθήσατε ήταν η προσπάθεια του οδηγού της Formula 1 Lewis Hamilton ώστε να κάνει τον ταχύτερο γύρο σε μια πίστα συγκεκριμένα στην πίστα της Ουγγαρίας . Η Pole position στην F1 πηγαίνει στον οδηγό που έκανε τον ταχύτερο γύρο κατά τη διάρκεια της τελικής προκριματικής περιόδου. Ο οδηγός στην pole έχει το πλεονέκτημα να ξεκινάει μπροστά από όλους τους άλλους οδηγούς, γεγονός που τους δίνει την καλύτερη ευκαιρία να οδηγήσουν τον αγώνα πηγαίνοντας στην πρώτη στροφή. Οι πληροφορίες που μας παρείχε το βίντεο ήταν η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή του Lewis Hamilton για τον γύρο αυτό.

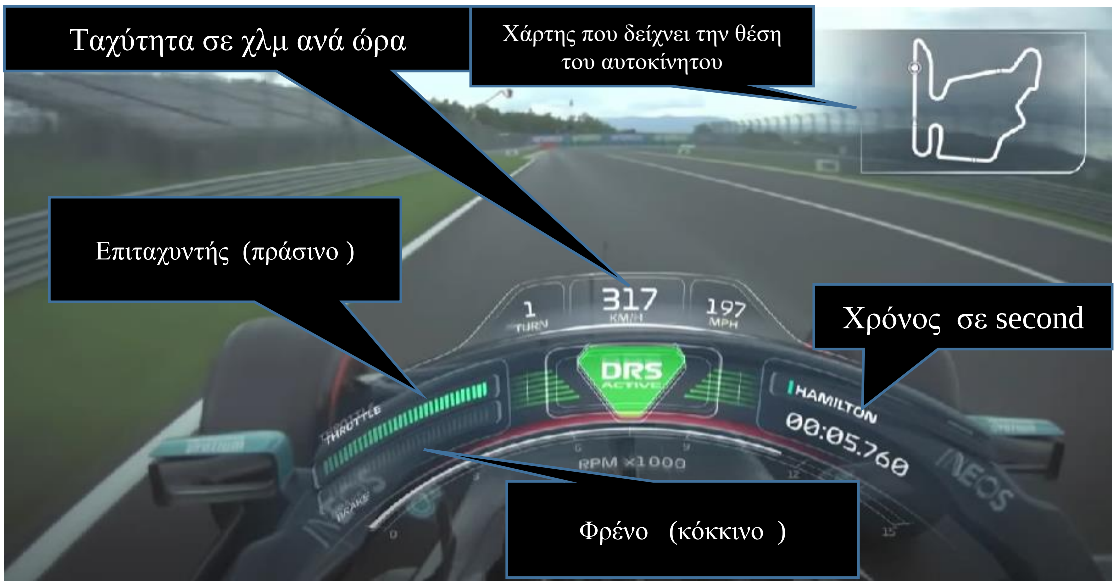
Α.*Μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό μήκος που διένυσε ο* Lewis Hamilton *πριν εισέλθει στην πρώτη στροφή. Συγκεκριμένα από την χρονική στιγμή t=0 ως την χρονική στιγμή t=6 ;*

Β. *Μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της πίστας με μια σχετική ακρίβεια :*

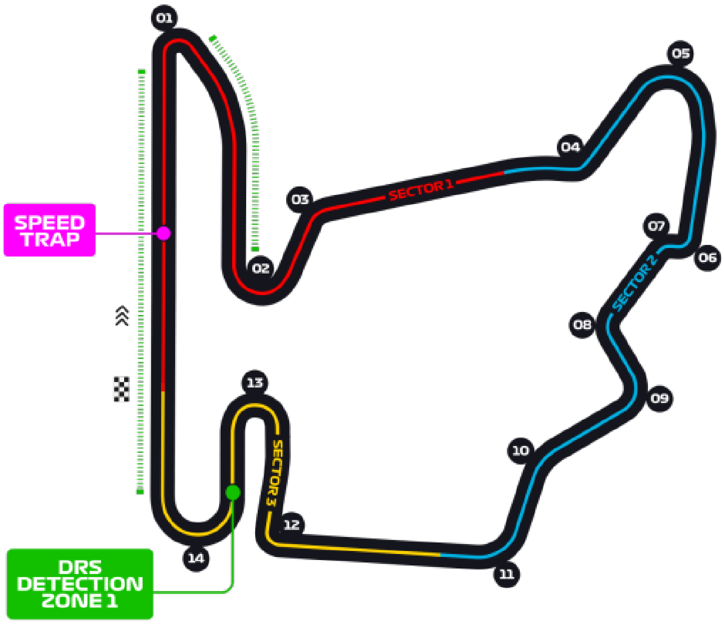
Γ. *Αφού μελετήσετε τα ερωτήματα α και β μπορείτε να αποφασίσετε ποια από τις 14 στροφές της πίστας θεωρείται πιο επικίνδυνη και να δικαιολογήσετε την απόφασης σας*

Δ. *Πώς θα μπορούσα να χωρίσω την πίστα σε 3 ΙΣΟΜΗΚΗ μέρη (Αυτό το ερώτημα προήλθε ως επιπλέον ερώτημα κατά την διεξαγωγή της τηλεδιάσκεψης με την δεύτερη ομάδα μαθητών)*

Το βίντεο οι μαθητές το παρακολούθησαν μέσω του διαμοιρασμού οθόνης η οποία είναι μια σημαντική δυνατότητα που δίνει η εφαρμογή τηλεδιάσκεψης Zoom .Υπήρχε και η δυνατότητα μέσω του εκπαιδευτικού που χειριζόταν τον υπολογιστή να μπορούν να δουν στο πρόγραμμα GeoGebra το γράφημα που ήθελαν αλλά και να μπορούν να υπολογίσουν εμβαδά ευθύγραμμων χωρίων. Οι μαθητές έπρεπε να διερευνήσουν το ανοιχτό πρόβλημα που τους δόθηκε ώστε να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης συνδυάζοντας γνώσεις από τα Μαθηματικά και την Φυσική. Δεν δόθηκε κάποιο άλλο υλικό στους μαθητές σε αυτή την φάση της δραστηριότητας ώστε η δραστηριότητα να είναι ελάχιστα παρεμβατική εκ μέρους του ερευνητή .Στο βίντεο οι μαθητές είχαν ως δεδομένα την στιγμιαία ταχύτητα (σε χιλιόμετρα ανά ώρα) του αγωνιστικού αυτοκινήτου στο ειδικό εικονίδιο και τον χρόνο ανά δευτερόλεπτο (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) από την χρονική διάρκεια του βίντεο . Επίσης, εμφανίζονταν το γκάζι (επιταχυντής), που απεικονίζεται με πράσινο χρώμα και το φρένο (επιβραδυντής), που απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα που πατούσε ο οδηγός.



Επιπλέον καταγράφονται και οι στροφές της πίστας. Δίνεται και ο χάρτης της πίστας όπου καταγράφονται οι στροφές της πίστας . Πρόκειται για ένα ανοικτό πρόβλημα σε σχέση με την έννοια της απόστασης και της ταχύτητας. Πολλοί ερευνητές έχουν εξάγει θετικά συμπεράσματα για τις έννοιες των Μαθηματικών όταν αυτές συνδέονται με έννοιες της Φυσικής, ειδικά για θέματα ανάλυσης (Blum & Niss, 1989; Gravemeijer & Doorman, 1999; Michelsen, 2006; Doorman & Gravemeijer, 2009; Ivanjek et.al., 2016).



Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε, τις διαδικασίες που χρησιμοποίησαν αλλά και ανέπτυξαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν το πρόβλημα, την εξέλιξή τους καθώς και τους παράγοντες που επηρέασαν αυτήν την εξέλιξη. Η συμβατική παραδοσιακή διδασκαλία της ανάλυσης επικεντρώνεται στο πως θα γίνουν οι υπολογισμοί και οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί και όχι στο γιατί γίνονται. Η ταχύτητα χρησιμοποιείται ως στιγμιαία ιδιότητα ενός αντικειμένου, και ως σχετική ιδιότητα που περιγράφει μια σχέση μεταξύ αντικειμένων. Τέτοιοι διαφορετικοί τρόποι χρήσης και ερμηνείας της ταχύτητας σχετίζονται με τη διδασκαλία της κινηματικής(Gravemeijer & Doorman, 1999). Με την ταχύτητα αναφερόμαστε γενικά στην βαθμωτή ταχύτητα ποσότητας αντί για μια διανυσματική ποσότητα. Η ταχύτητα ορίζεται στα εγχειρίδια ως η σύνθετη ποσότητα της διανυθείσας απόστασης διαιρούμενη με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Σε αυτόν τον ορισμό οι μαθητές δύσκολα βλέπουν τη φύση αυτής της σύνθεσης, τη διαφορά μεταξύ στιγμιαίας και μέσης ταχύτητας, ούτε το νόημα και το στόχο αυτής της διαφοράς (Halloun & Hestenes, 1985). Η διαφορά μεταξύ μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας είναι σημαντική για τη φυσική της ερμηνεία και η διαφορά έρχεται στο προσκήνιο στη χρήση του χρόνου. Η μέση ταχύτητα σχετίζεται με την απόσταση που διανύεται μέσα σε ένα χρονικό διάστημα, ενώ η στιγμιαία ταχύτητα είναι ταχύτητα σε μια στιγμή, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί με ένα χρονικό διάστημα που τείνει στο μηδέν. Ο Streefland (1981) επεσήμανε ένα εννοιολογικό πρόβλημα που συνδέεται με το ρόλο του χρόνου στον ορισμό της ταχύτητας. Η ταχύτητα είναι μια στιγμιαία ιδιότητα της κίνησης. Ωστόσο, μόλις θέλετε να δώσετε νόημα στην ταχύτητα, χρησιμοποιείτε ένα χρονικό διάστημα και χάνετε τη στιγμή. Αυτή είναι μια εννοιολογική πτυχή που δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί από τη διαισθητική συλλογιστική σχετικά με την ταχύτητα. Η Beth (1928) περιέγραψε αυτή την πτυχή σε έναν παράδοξο ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας: Η ταχύτητα είναι αυτή που θα ήταν αν παρέμενε αυτό που ήταν. (Beth, 1928)

Ακόμα οι μαθητές θεωρούν δεδομένα τα μαθηματικά μοντέλα όπως ότι το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα. Δεν συμμετέχουν στην κατασκευή έστω και διαισθητικά αυτών των μοντέλων με αποτέλεσμα να μην έχουν κάποιο νόημα για αυτούς. Η στόχευση της διδασκαλίας είναι σχεδόν πάντα άμεσα στις διαδικασίες, ενώ οι έννοιες που διαπραγματεύονται δεν είναι απλές. Αυτός ίσως είναι ο λόγος που οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην ανάλυση και την κινηματική. Από τις διαδικασίες μοντελοποίησης των μαθητών μπορεί να προκύψει η ανάγκη σύνδεσης της κατανόησης ιδιοτήτων της Φυσικής με τα Μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999). Οι Gravemeijer και Doorman (1999) σημειώνουν ότι οι βασικές αρχές της Ανάλυσης οι οποίες ιστορικά αναπτυχθήκαν για να λύσουν προβλήματα κίνησης μπορούν να αναπτυχθούν από τους μαθητές όταν αυτοί επιχειρηματολογούν για την κίνηση υποστηριζόμενοι από διακριτά γραφήματα (discrete graphs). Συνεχίζουν υποστηρίζοντας ότι το διακριτό γράφημα μπορεί να έχει ένα ρόλο ενδιάμεσου μοντέλου διακριτής προσέγγισης της κίνησης ώστε να συνδέσει προηγούμενες δραστηριότητες των μαθητών με την επιχειρηματολογία τους. Τα διακριτά γραφήματα και έπειτα τα συνεχή αποτελούν τη βάσης της Ανάλυσης. Τα διακριτά γραφήματα διαδραματίζουν ένα εξέχοντα ρόλο ως του ενδιάμεσου σταδίου μεταξύ των ρεαλιστικών προβλημάτων για λύση και της τυπική ανάλυσης που αναπτύσσεται. Ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι ακόμη και οι μαθητές με υψηλές ικανότητες σπάνια αποκτούν κατανόηση όσον αφορά την έννοια του ολοκληρώματος . Οι μαθητές δεν αποκτούν τίποτα περισσότερο από τυπικές τεχνικές για την επίλυση συγκεκριμένων ασκήσεων και προβλημάτων. Για παράδειγμα, οι Grenier et al. (1990)και Bagni (1999) υποστηρίζουν ότι η παραδοσιακή μελέτη του λογισμού στο λύκειο δεν επιτρέπει την πλήρη γνώση της έννοιας του ολοκληρώματος.. Συνολικά, οι μαθητές έχουν την τάση να βλέπουν τον ολοκληρωτικό λογισμό ως μια σειρά από διαδικασίες με σχετικούς αλγορίθμους, αλλά δεν αναπτύσσουν μια κατανόηση των εννοιών, η οποία θα τους έδινε ευελιξία σκέψης. Έτσι, αντί να έχουν μια εννοιολογική θεώρηση (Grayand Tall 1994) της ολοκλήρωσης, έχουν στην καλύτερη περίπτωση μια άποψη προσανατολισμένη στις διεργασίες.

Η ιδέα της προσέγγισης (approximation) αποτελεί βασικό στοιχείο στα διακριτά γραφήματα όπου συνδυαστικα με την έννοια της συσσώρευσης (accumulation) δημιουργούν μια προεννοιακή εικόνα (pro-concept image) για την έννοια του ολοκληρώματος (Kouropatov

& Dreyfus, 2014). Η έννοια της συσσώρευσης στην ανάλυση (Calculus) σύμφωνα με τους Thompson και Silverman (2008) είναι σημαντική για την έννοια του ολοκληρώματος αφού ως συσσώρευση ορίζεται η συσσώρευση μιας ποσότητας παίρνοντας όλο και περισσότερα κομμάτια της (bits) όπου τελικά η οριακή συσσώρευσή της είναι το ολοκλήρωμα ως άθροισμα Riemann. Το εμβαδό κάτω από τη καμπύλη είναι μια αρκετά απλή έννοια ώστε να αποτελέσει το έναυσμα για την διαισθητική κατανόηση των ολοκληρωμάτων. Δηλαδή οι μαθητές πρέπει να συνδέσουν το γινόμενο των δυο ποσοτήτων που αναπαριστούν οι άξονες $x'x$ και $y'y$ με το εμβαδό κάτω από την γραφική παράσταση της $f(x) = y$, ανά διαστήματα, και έπειτα το αριθμητικό άθροισμα (συσσώρευση – accumulation) όλων αυτών το εμβαδών, όπως στο άθροισμα Riemann (Jones, Lim & Chandler, 2017). Σημαντική είναι η ανάπτυξη μιας προ-εννοιακής εικόνας του Ολοκληρώματος, αντί να εστιάζουν οι μαθητές στην διαδικαστική κατανόηση. Η συσσώρευση (accumulation) είναι η κεντρική ιδέα της έννοιας του ολοκληρώματος και επομένως η διαισθητική - άτυπη κατανόηση του ολοκληρώματος αναλύεται στα δύο στοιχεία της διαίσθησης, που αναφέρεται στην συσσώρευση όλο και μικρότερων ποσοτήτων και της άτυπης, που αναφέρεται στην μη τυπική γνώση του ορίου. Οι μαθητές μπορούν με την χρήση αριθμητικών και γραφικών στοιχείων αντί για αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και διαδικασίες να κατανοήσουν τι προσεγγίζουν, πως θα βελτιώσουν την προσέγγιση και πως θα γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους (Kouropatov & Dreyfus, 2014).

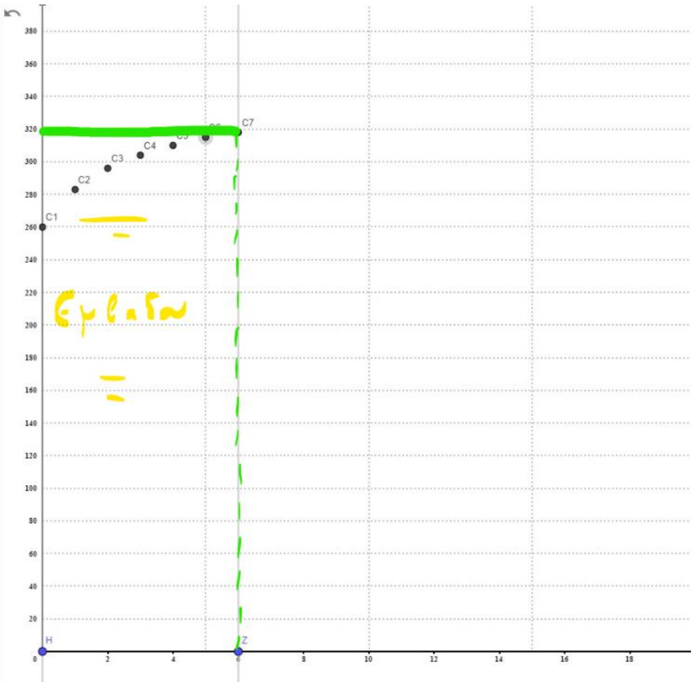
6.3 Ανάλυση και αποτελέσματα ερευνητικών δεδομένων ανά ερώτημα

Ερώτημα Α

Μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό μήκος που διένυσε ο Lewis Hamilton πριν εισέλθει στην πρώτη στροφή. Συγκεκριμένα από την χρονική στιγμή t=0 ως την χρονική στιγμή t=6 ; .Δίνεται και πίνακας τιμών της ταχύτητας σε σχέση με τον χρόνο

χρονος (seconds)	Speed (km/h)	τελικη -αρχικη ταχυτητα
0	260	
1	283	23
2	296	13
3	304	8
4	310	6
5	315	5
6	318	3

1η απόπειρα μοντελοποίησης :
Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή στο σύνολό του διαστήματος και εύρεση του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου .Στην πρώτη πιλοτική διδασκαλία της ομάδας Α είχαμε την ιδέα του Γιώργου να θεωρηθεί η κίνηση ως ευθύγραμμη ομαλή στο σύνολο της και μέσω του εμβαδού να βρούμε το μήκος της διαδρομής πριν την πρώτη στροφή .Ετσι το εμβαδόν είναι Ε= $318\cdot 6\cdot \frac{10}{36}=\frac{3180}{6}=530$ τετραγωνικά μέτρα



Γ1 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 1
Εκπαιδευτικός: ακούω ιδέες

Γιώργος: να πω

Εκπαιδευτικός: Πες μου Γιώργο

Γιώργος: άμα πάρουμε τη μέγιστη ταχύτητα και τη διαιρέσουμε το χρόνο από την αρχή ως τη στροφή

Εκπαιδευτικός: να δούμε πόσο είναι η μέγιστη ταχύτητα

Γιώργος: είναι 318

Εκπαιδευτικός: συμφωνείτε υπόλοιποι πόσο είναι ο χρόνος

Γιώργος: Νομίζω γράφει 6 second

Βασίλης Σ: δεν πάει μόνιμα όμως μόνιμα με 318 χιλιόμετρα

Αρκετά γρήγορα παρόλο που η ιδέα του Γιώργου είναι στη σωστή κατεύθυνση και μας δείχνει ένα πρώτο μέγιστο μήκος διαδρομής έχουμε γρήγορα απόρριψη αυτής της ιδέας από τον Βασίλη Σ. του Γιώργου δεν έχει πολύ μεγάλη ακρίβεια και έτσι πρέπει να στραφούμε σε μία καινούργια απόπειρα μοντελοποίησης που να είναι σχετικά πιο ακριβής από την πρώτη απόπειρα

2η απόπειρα μοντελοποίησης :

Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή όχι όμως με την μέγιστη τιμή της ταχύτητάς αλλά χρησιμοποιώντας την μέση τιμή των ταχυτήτων στο χρονικό διάστημα από 0 έως 6 second .Η προσπάθεια αυτή προήλθε πάλι από τον μαθητή Γιώργο Τ. στην πρώτη πιλοτική διδασκαλία και μαζί του συμφώνησέ και η μαθήτρια Ελπίδα αλλά γρηγορά είχαμε απόρριψη αυτής της πρότασης

Γ1 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 2

Εκπαιδευτικός: Πολύ Καλή σκέψη όπως είπε και ο Βασίλης δεν πάει όμως μόνιμα με 318 χιλιόμετρα

Γιώργος :Αν βρούμε το μέσο όρο τη μέση ταχύτητα

Εκπαιδευτικός :Πώς θα βρω τη μέση ταχύτητα

Γιώργος : Δεν ξέρω

Βασίλης: αν υπολογίζω την επιτάχυνση το α που λέμε στη φυσική

Εκπαιδευτικός: Άρα τι είδους κίνηση έχουμε

Ηλίας :είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη

Εκπαιδευτικός :ποιά δεδομένα έχουμε στα χέρια μας

Γιώργος: έχω την ταχύτητα και το χρόνο

Ελπίδα: αυτό που είπε ο Γιώργος δεν μπορούμε να βρούμε το μέσον όρο των ταχυτήτων

Βρίσκοντας την μέση τιμή όλων των ταχυτήτων από 0 έως 6 εχω ότι αυτή είναι

$$\frac{260+283+.....318}{8}=260,75$$

Ετσι το εμβαδόν είναι Ε= $260,75 \cdot 6 \cdot \frac{10}{36} = 434,58\,\textit{μέτρα}$

Το αποτέλεσμα αυτής της απόπειρας έχει περσότερο σφάλμα από ότι η πρώτη προσπάθεια

3η απόπειρα μοντελοποίησης :

Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμης ομαλής ανά διαστήματα του ενός δευτερολέπτου

Γ2 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 1

[00:08:08] - Εκπαιδευτικός

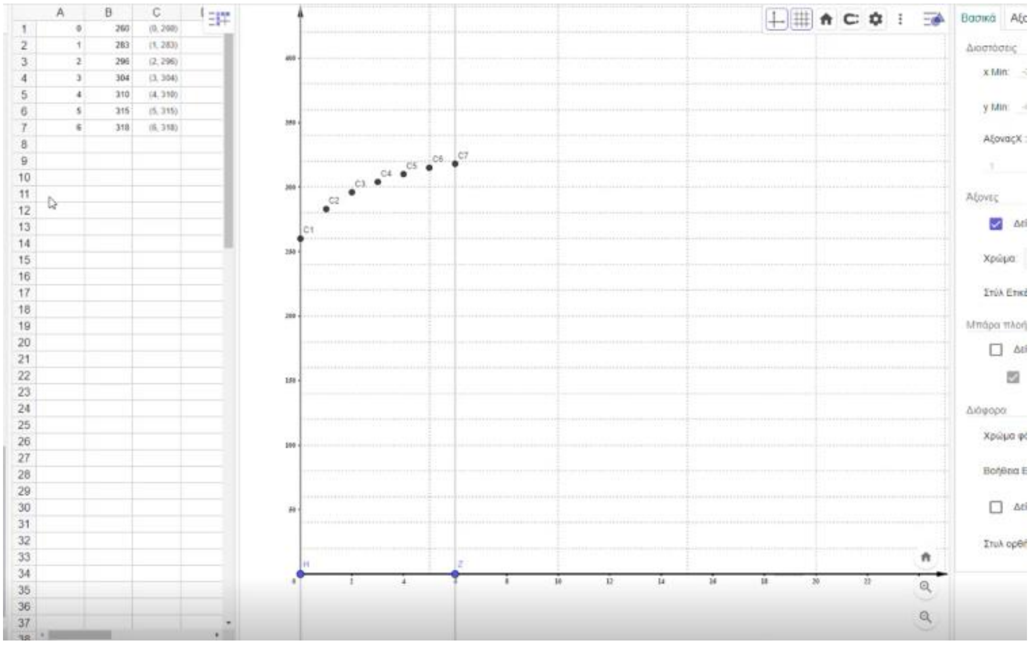
Έχεις καμία άλλη ιδέα κάτι ;

[00:08:18] – Βασίλης

Πάνω κάτω ότι είπαν τα παιδιά δηλαδή Θα μπορούσαμε να το χωρίσουμε σε μικρές ευθύγραμμες, ομαλές κινήσεις που η καθεμία θα διαρκεί ανά ένα δευτερόλεπτο και να αθροίσουμε τα μήκη κάθε δευτερολέπτου και να το βρούμε .

[00:08:48] - Εκπαιδευτικός

Εδώ. Κάτι τέτοιο λέτε. Δεν ξέρω φαίνεται.



.

[00:09:03] – Κώστας Κ
Αν και εδώ η ταχύτητα δεν είναι σε χιλιόμετρα ανά ώρα.

[00:09:12] - Εκπαιδευτικός
Ναι απλά θα κάνουμε στο τέλος μια μικρή μετατροπή πολλαπλασιάζοντας με δέκα προς 36. Και θα το βγάλουμε κατευθείαν. Δεν έχουμε θέμα εκεί. Απλώς καταλαβαίνεις καλύτερα την ταχύτητα. Παρά το καταλαβαίνουμε καλύτερα. Τα χιλιόμετρα την ώρα το χούμε πιο προσιτά. Δηλαδή το 318 είναι μεγάλη ταχύτητα.

[00:09:31] - Κώστας Κ.
Ε πάει λίγο γρήγορα.(Γέλια)

[00:09:32] - Εκπαιδευτικός
Της βάλαμε τις τιμές μετά;

[00:09:40] – Κώστας Α
Να πω εγώ .

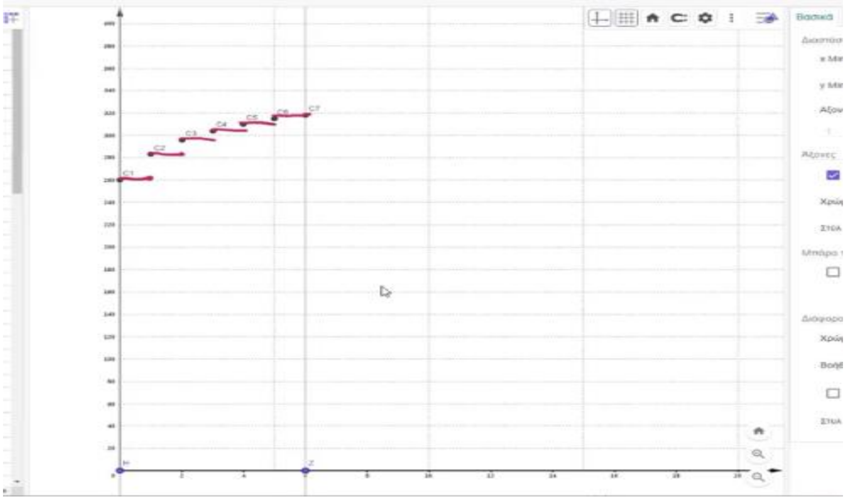
[00:09:41] - Εκπαιδευτικός
Πέστο.

[00:09:44] - Κώστας Α.
Αφού ξέραμε ότι ο τύπος της απόστασης είναι dx=dv επι dt Μπορούμε από κει πέρα .Ολοκλήρωμα ; όχι ολοκλήρωμα έχει ίσως τέτοια ιδιότητες. Αλλά δεν έχουμε συνάρτηση .

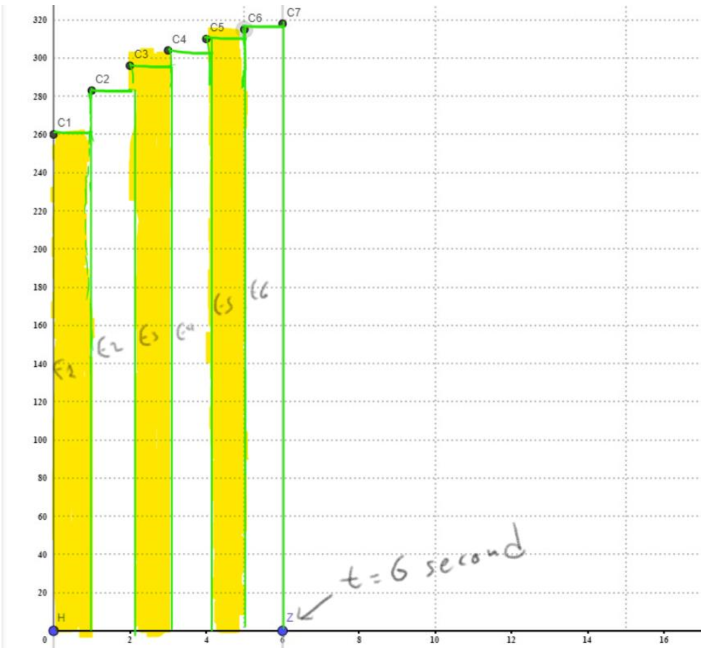
[00:10:04] - Εκπαιδευτικός
Όχι ολοκλήρωμα δεν έχουμε συνάρτηση εδώ

[00:10:07] - Κώστας Α.
Ολοκλήρωμα ; όχι ολοκλήρωμα έχει ίσως τέτοια ιδιότητες. Αλλά δεν έχουμε συνάρτηση .Μέση τιμή δηλαδή να προσθέσουμε τα y δια το μήκος που είναι 1 second ,δεν είναι αυτές οι τιμές; .Αφού θέλουμε μήκος θα πάρουμε την μέση τιμή των ταχυτήτων δια 6

[00:10:54] - Εκπαιδευτικός
Ναι αλλά αυτό πρόσεξε κάτι .Να κάνουμε απόκομμα εδώ .Φαίνεται Αρά λες να πάρουμε την μέση τιμή των ταχυτήτων δια 6 .Όταν όμως πάρουμε την μέση τιμή τι θεώρηση κάνουμε για τις κινήσεις; Δηλαδή φαντάζομαι ότι στο πρώτο δευτερόλεπτο θεωρούμε ότι είναι αυτό εδώ και μετα στο δεύτερο πάει έτσι και μετα με τον ίδιο τρόπο .Παιδιά ελευθέρα τις γνώμες σας



Η προσπάθεια μοντελοποίησης κατέληξε σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα εύρεσης του εμβαδού των 6 ορθογωνίων παραλληλογράμμων με ύψος την αντίστοιχη ταχύτητα και βάση 1 δευτερόλεπτο αφού κάναμε τις κατάλληλες μετατροπές .



Εικόνα 4eok

4η απόπειρα μοντελοποίησης :

Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ανα δευτερόλεπτο και εισαγωγή της εννοίας της διαμέριση σε διαστήματα μικρότερο του ενός δευτερόλεπτου για βελτίωση της ακρίβειας . Με τη βοήθεια των συμμαθητών του ο Κώστας Κ αντιλήφθηκε ότι η θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμης ομαλής σε κάθε διάστημα δεν μας δίνει αρκετή ακρίβεια οπότε υπέθεσε ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ανα διάστημα του ενός δευτερολέπτου . Η Αναστασία και ο Κώστας Αναφέρουν για πρώτη φορά το ολοκλήρωμα ως ένα τρόπο επίλυσης του προβλήματος χωρίς όμως να έχουμε την συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τας δεδομένα μας .Επιπλέον ο Κώστας Κ. αντιλαμβάνεται ότι μία διαμέριση του διαστήματος σε διαστήματα μικρότερο του ενός δευτερολέπτου θα μας δώσει περισσότερη ακρίβεια στην επίλυση του προβλήματος μας .Αρκετοί μαθητές έχουν ήδη εκπλαγεί ευχάριστα από την εμπλοκή της ευκλείδειας γεωμετρίας στο πρόβλημά μας και με τη βοήθεια της συνεχούς διαμερίσεις αυτό τους οδηγεί σταδιακά στην έννοια του ορίου και του ολοκληρώματος .Διαφαίνεται επίσης σε πολλούς μαθητές μια νοητική σύγκρουση αναμεσά στις εννοείς της μέσης ταχύτητας και τις θεώρησης της κίνησης ως ευθύγραμμης ομαλής η ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης η επιβαραδυνομεςνης .

Γ2 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 2

[00:11:35] – Κώστας Κ
Είχα και εγώ μια ιδέα Θα μπορούσαμε τα c1 και c2 να τα ενώσουμε και να φτιάξουμε μια γραμμή και σε αυτό το χώρο να μετρήσουμε αυτό το εμβαδόν που είναι ένα σχήμα που το ξέρουμε μάλλον τραπέζιο και στην ευθεία c1c2 μπορούμε να βρούμε την κλίσης της και αν θέλω το χωρίζω σε ένα τρίγωνο και ένα ορθογώνιο και έτσι βρισκω τα εμβαδά .Και είναι σχετικά ακριβές

[00:12:03] - Εκπαιδευτικός
Να σε ρωτήσω κάτι ;Η ιδέα του Κώστα Α έχει δόσεις αληθείας .Όταν ο Κώστας Α. πηρέ την μέση τιμή στην ουσία τι θεώρηση έκανε για τις κινήσεις όλες ;

[00:12:18] – Κώστας Α
Ότι είναι …Αυτό που είχε πει και το άλλο παιδί .Ότι είναι ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κάθε δευτερόλεπτο. Μια ξεχωριστή ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη.

[00:12:29] - Εκπαιδευτικός
Ναι αλλά ξέρεις τι λες ;εσύ μου λές στο πρώτο δευτερόλεπτο ότι είναι τι είναι η κίνηση ;

[00:12:36] – Κώστας Κ
Ανά δευτερόλεπτα είναι ΕΟΚ

[00:12:44] - Εκπαιδευτικός
Δεν είναι όμως λάθος ο τρόπος σκέψης αυτός μια και αυτό το εμβαδόν θα είναι σχετικά κοντά στο πραγματικό Αποτέλεσμα ; Θα πάει πάρα πολύ κοντά

[00:12:55] – Αναστασία
Να ρωτήσω κάτι ;Αφού μιλάμε για καμπύλες γιατί δεν χρησιμοποιούμε ολοκλήρωμα .Για να έχουμε μεγαλύτερη προσέγγιση

[00:13:08] - Εκπαιδευτικός
Πες μου εσύ; Ποια συνάρτηση να βάλουμε;

[00:13:16] – Αναστασία

Ποια συνάρτηση ; Από την στιγμή που αυξάνεται βασικά αυξάνεται και μειώνεται οπότε δεν έχει κάποια σταθερή συνάρτηση αυξάνεται η ταχύτητα μέχρι λίγο πριν φτάσει στην στροφή ,ελαττώνεται και ξανά αυξάνεται

[00:13:37] - Εκπαιδευτικός
Αναστασία μετράμε από το 0 στο 6 δευτερόλεπτο.

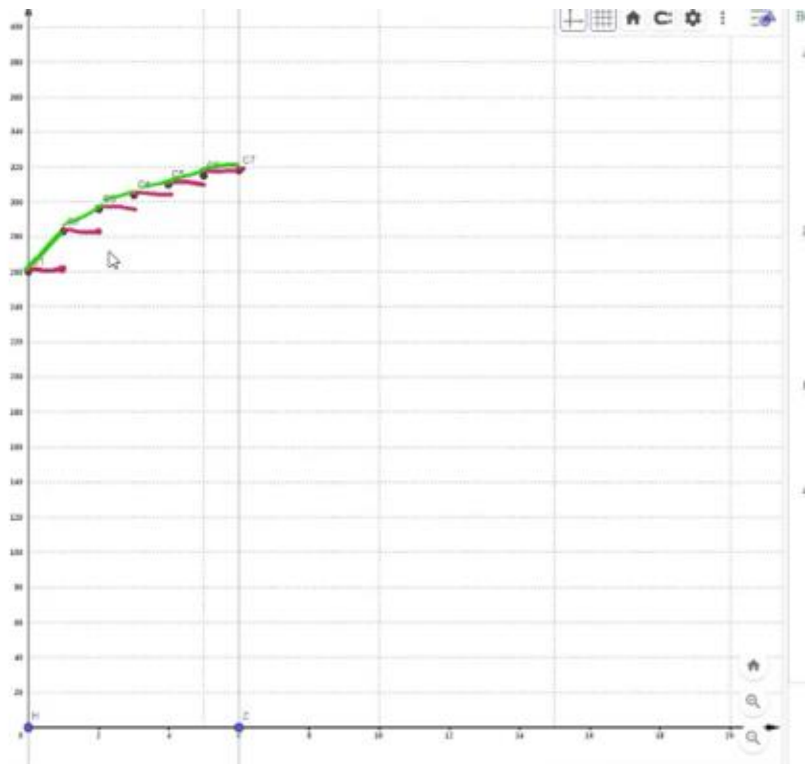
[00:13:16] – Αναστασία
Το 6 τι είναι ;

[00:13:43] - Εκπαιδευτικός
Μέχρι το 6 second

[00:13:57] - Εκπαιδευτικός
Γιατί το κάνουμε αυτό ;ποιος κατάλαβε γιατί πρέπει να το κάνουμε αυτό

[00:14:05] – Κώστας Λ.
Γιατί μετα από αυτό το σημείο δεν έχουμε επιβράδυνση οπότε μετα έχουμε τελείως διαφορετική κίνηση

[00:14:18] - Εκπαιδευτικός
Γιατί μετα αλλάζει η αλλάζει η λογική της κίνησης .Αν αλλάξει η λογική της κίνησης θα πρέπει να βρούμε καινούργια συνάρτηση .Η συνάρτηση όπως έχουμε μάθει στο Λύκειο είναι μια διαδικασία τι πιστεύετε μας την έφερε ο θεός δώρο την συνάρτηση πάρτε την συνάρτηση να την έχετε. Δηλαδή ο Κώστας Α . θεώρησε σταθερές συναρτήσεις ανά δευτερόλεπτο f(t)=260 από 0 έως 1 .η καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να γίνει με την πράσινη γραμμή .Στη ουσία δεν δουλεύω συναρτήσεις δουλεύω με τι ; Την βλέπετε την πράσινη γραμμή ;



[00:15:07] – Βασίλης
Με σχήματα τα οποία τα ξέρω από την γεωμετρία της α λυκείου

[00:15:32] - Εκπαιδευτικός
Την πράσινη γραμμή τι την θεωρούμε ως κίνηση αφού έχουμε το v -t διάγραμμα

[00:15:36] - Κώστας Κ
Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ανά δευτερόλεπτο

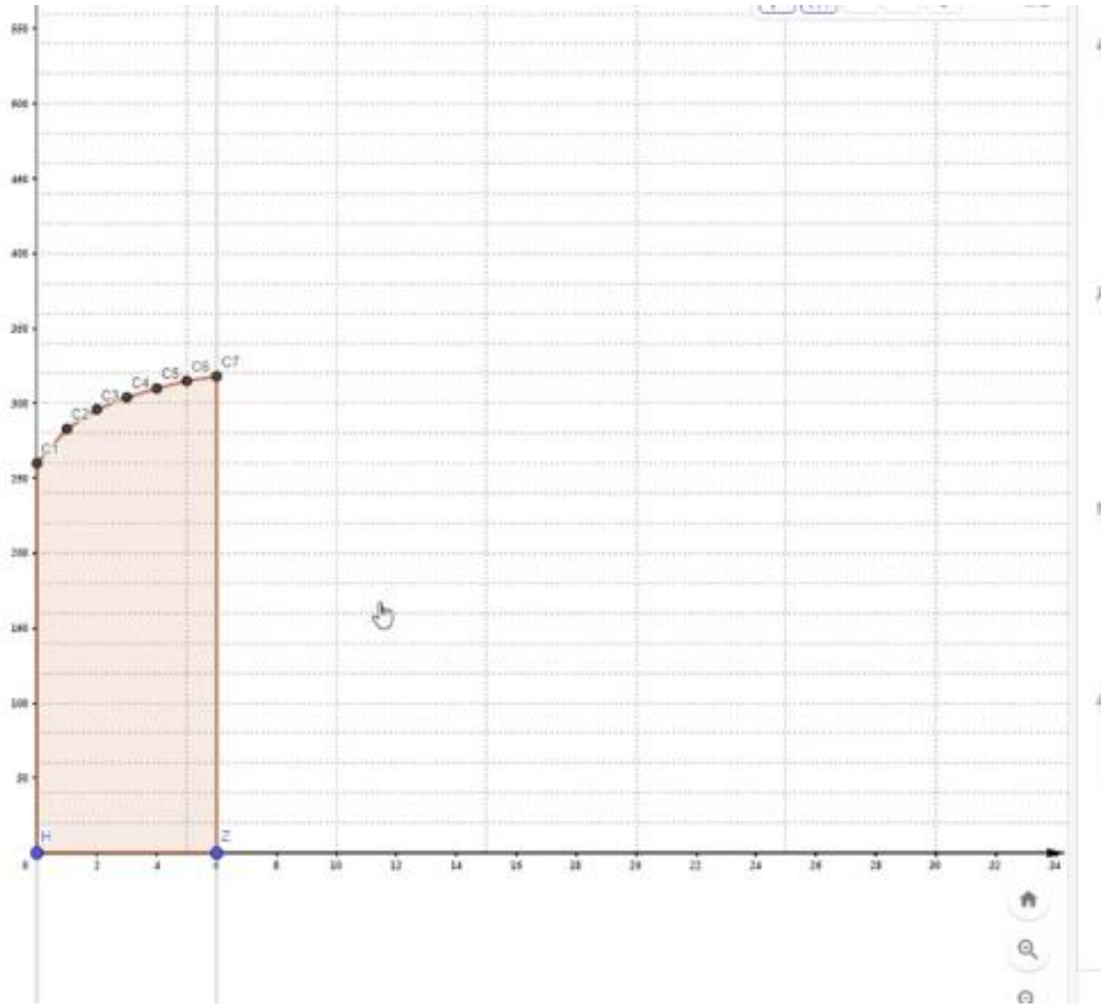
[00:15:45] - Κώστας Κ
Για ποσά δευτερόλεπτα μιλάμε

[00:16:31] – Εκπαιδευτικός
Βλέπετε αυτό που σας λέω με το πολύγωνο ;

[00:16:36] - Κώστας Κ
Για ποσά δευτερόλεπτα μιλάμε

[00:16:39] – Εκπαιδευτικός
Για έξι

[00:16:45] - Εκπαιδευτικός
Εχω σχηματίσει τα πολύγωνα . Αυτό το σχήμα ποσά τραπέζια έχει ;



[00:16:53] - Κώστας Κ
Έξι

[00:17:16] - Εκπαιδευτικός
Μπορώ να υπολογίσω τώρα το εμβαδόν του. Το εμβαδόν των πολυγώνου είναι 1797 .έχετε το χαρτί μπροστά σας .επειδή το εχω σε χιλιόμετρα ανά ώρα πολλαπλασιάζοντας το με 10/36 προκύπτει 499,16.

[00:18:09] - Εκπαιδευτικός
Συμφωνείται; Να ρωτήσω κάτι ακόμα είναι ακριβής η μέτρηση αυτή ;

[00:18:27] - Κώστας Κ-Α, Αναστασία
όχι

[00:18:36] - Εκπαιδευτικός
Βασίλη τι λες για αυτό ;

[00:18:39] – Βασίλης
Ουσιαστικά εχω θεωρήσει αυτή τη στιγμή ότι κάθε δευτερόλεπτο η επιτάχυνση είναι ίδια ανά δευτερόλεπτο από 0 σε 1 sec είναι συγκεκριμένη μετα πάλι αλλάζει .Στην

πραγματικότητα δεν μπορεί να γίνεται αυτό δεν μπορεί να είναι για ένα ολόκληρο δευτερόλεπτο ολόιδια

[00:19:05] – Αναστασία
Αφού βρήκαμε την μέση τιμή των ταχυτήτων σε χιλιόμετρα ανά ώρα .Σε αυτά τα 6 δευτερόλεπτα έχουμε πάρει ότι αυξάνεται ομαλά ενώ στην πραγματικότητα δεν γίνεται

[00:19:36] - Εκπαιδευτικός
Γιατί στην πραγματικότητα δεν γίνεται ;Πως βγάζεις αυτό το συμπέρασμα ;

[00:19:40] – Αναστασία
Γιατί επιταχύνεται όλη την ώρα δεν έχουμε σταθερή ταχύτητα

[00:19:56] - Εκπαιδευτικός
Άρα με αυτό τον τρόπο χάνουμε λίγο ;

[00:20:23] – Αναστασία
Ναι …είπα ότι έχουμε βρει μια τυχαία μέση τιμή η οποία δεν είναι καθαρή προσέγγιση του μήκους αφού επιταχύνεται συνεχώς

[00:20:42] - Εκπαιδευτικός
Αρά δεν είναι η σωστή προσέγγιση ,μήπως πρέπει να σκεφτούμε κάτι άλλο .
Έχει κάνεις καμμιά άλλη ιδέα ;

[00:21:08] - Κώστας Κ
Να προτείνω κάτι άλλο αν και δεν νομίζω να είναι τελείως διαφορετικό θα μπορούσαμε να πάρουμε περισσότερες τιμές για την ταχύτητα .Άμα από 0 σε 6 παίρναμε άλλες 100 τιμές για την ταχύτητα θα είμασταν ακόμα πιο κοντά

[00:21:26] - Εκπαιδευτικός
Άρα λες να αλλάξουμε την διαμέριση του διαστήματος

[00:21:28] - Κώστας Κ
Ναι να βάλουμε c8,c9,c10,

[00:21:35] - Εκπαιδευτικός
Να ρωτήσω κάτι ακόμα .Συμφωνείτε ;

[00:21:41] - Κώστας Α.
Πάλι θα είναι πιο ακριβής αλλά πάλι δεν θα πλησιάσουμε την τέλεια ακρίβεια .μάλλον θα την πλησιάσουμε

[00:21:53] - Εκπαιδευτικός
Αυτή η συνεχής διαμέριση που μας οδηγεί ;

[00:22:00] - Κώστας Α
Στην έννοια του ολοκληρώματος και του ορίου

5η απόπειρα μοντελοποίησης :

Έχοντας κατασκευάσει το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου από 0 έως 6 second οι μαθητές καταλήγουν ότι το εμβαδό του αντίστοιχο πολυγώνου το οποίο αποτελείται από έξι τραπέζια μας δίνει μία ικανοποιητική λύση στο πρόβλημα μας με μία σχετική ακρίβεια. Καταλήγουν οι μαθητές ότι πρέπει να εφεύρουμε μία συνάρτηση η οποία διέρχεται από τα επτά αυτά σημεία και είναι κοίλη. αρχίζοντας με την παραδοχή ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία και από τρία σημεία διέρχεται η μία ευθεία η μια παραβολή ο Βασίλης καταλήγει στο συμπέρασμα να δεχθούμε μια πολυωνυμική συνάρτηση που είναι βαθμού όσα είναι τα σημεία και μετα επαληθεύσουμε για κάθε σημείο και βγει ένα σύστημα

Άρα έχοντας ανακαλύψει αυτή την πολυωνυμική συνάρτηση είναι πια εύκολα να υπολογίσουμε το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση της συνάρτησης των οριζόντιο άξονα και τις κατακόρυφες ευθείες t=0 και t=6 και το άφησε εντάξει και αξιοποιώντας το ολοκλήρωμα να υπολογίσουμε το μήκος διαδρομής με τη μέγιστη ακρίβεια που μπορεί να μας προσφέρει η μαθηματική επιστήμη.

Γ2 -ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ 3

[00:22:08] - Εκπαιδευτικός
Άρα χρειαζόμαστε μια συνάρτηση .Πως θα βρούμε αυτή την συνάρτηση;

[00:22:22] - Κώστας Κ
Μοιάζει με μια συνάρτηση που ξέρουμε .Μοιάζει με την ριζά x αλλά συν κάτι και είναι πιο ψηλά

[00:22:33] - Εκπαιδευτικός
Προσέξτε δεν είναι ορθοκανονικό το σύστημα .Εχω αλλάξει την μονάδα μέτρησης

[00:22:40] - Κώστας Κ
Έτσι και αλλιώς δεν θα ήταν ίδιο .Εκτός αν ήταν στρατηγική του Χάμιλτον .τι να πω ;

[00:23:12] - Κώστας Λ
Λογαριθμική .για την απότομη την καμπύλη γιατί ουσιαστικά είναι ανά δευτερόλεπτο και μετράμε στον κάθετο σε χιλιόμετρα είναι πολύ απότομη άνοδος οπότε μου κάνει προς τα εκεί !!!!

[00:23:39] - Κώστας Α
Και μετα όμως νομίζω ότι η λογαριθμική έχει χαμηλή κλίση .ε!!!! ,ίσως θέλω κάτι απότομο ….αρά

[00:23:49] - Κώστας Λ

Μιλάμε για την πολύ αρχή σκέψου ότι είναι 6 δευτερόλεπτα μπροστά σε χιλιόμετρα ανά ώρα στον οριζόντιο είναι για την απότομη την καμπύλη γιατί είναι πολύ απότομη άνοδος οπότε μου κάνει προς τα εκεί

[00:24:00] - Κώστας Α
Μπορούμε να δούμε το ίδιο διάγραμμα σε μετρά ανά second;

[00:24:04] – Εκπαιδευτικός
Δεν διαφοροποιεί το πρόβλημα .Δεν έχει διαφορά

[00:24:10] - Κώστας Α
Θέλω να δω αν ξεκινά τόσο ψηλά από τον άξονα των y

[00:24:14] – Εκπαιδευτικός
Το δύσκολο πράγμα στην μοντελοποίηση είναι να βρούμε μια συνάρτηση η οποία να περιγράφει το πρόβλημα .Ψάχνω μια συνάρτηση η οποία θα περνάει από αυτά τα 7 σημεία και θα είναι κυρτή η κοίλη Τι λέτε να είναι ;

[00:24:50] - Κώστας Λ
Κοίλη

[00:25:00] - Κώστας Λ
Κοίλη .Μήπως είναι ημίτονο και η ρίζα x μου αρέσει

[00:25:25] - Κώστας Λ.
χ εις την 3

[00:25:50] – Αναστασία
Εκθετική ,απλά φαίνεται ανάποδα και αυτό είναι πολύ απότομο

[00:25:54] – Εκπαιδευτικός
Από δυο σημεία πόσες ευθείες διέρχονται ;

[00:25:55] - Κώστας Λ.
Μόνο μια

[00:25:56] – Εκπαιδευτικός
Από τρία σημεία ;

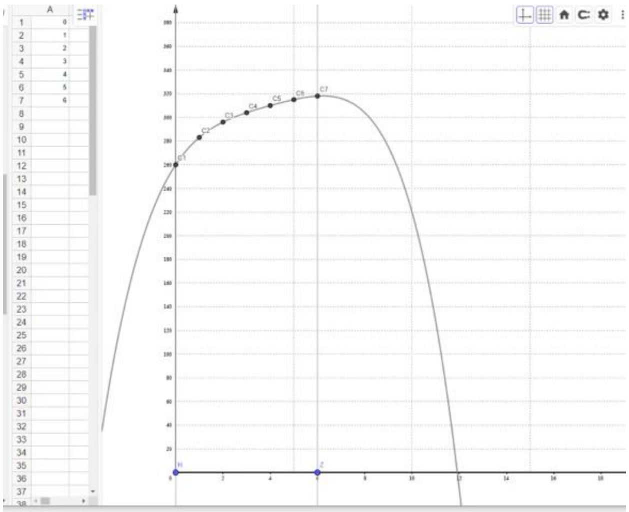
[00:25:58] – Βασίλης
Να προτείνω κάτι αν πάρουμε μια πολυωνυμική που είναι βαθμού όσα είναι τα σημεία και μετα επαληθεύσουμε για κάθε σημείο και βγει ένα σύστημα δεν θα μπορούμε να βρούμε μια συγκεκριμένη πολυωνυμική .

[00:26:24] – Εκπαιδευτικός
Ποσά σημεία εχω

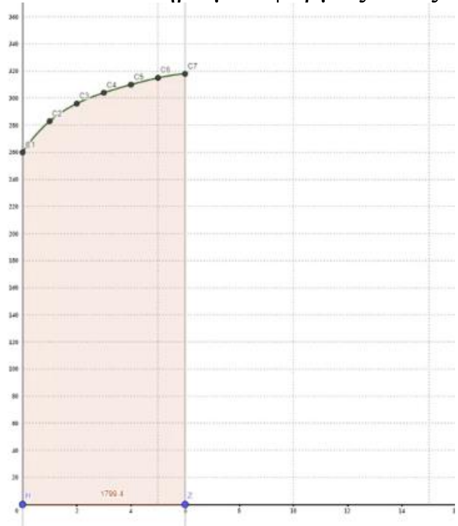
[00:26:31] – Βασίλης
7

[00:26:44] – Εκπαιδευτικός

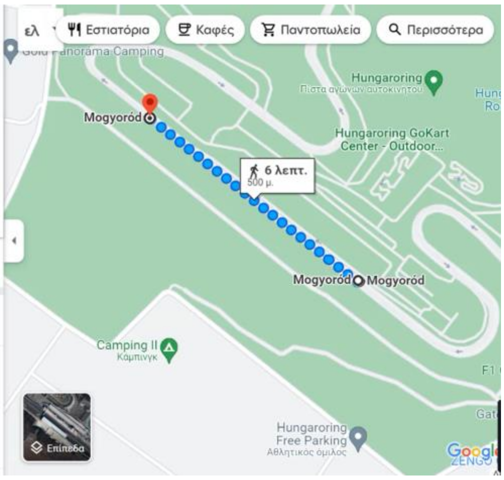
Αλλά θέλω μια πολυωνυμική συνάρτηση 7^{ου} βαθμού το μέγιστο .Λοιπόν εχω λύσει το σύστημα και εχω βρει την συνάρτηση
$-0,8x^4 +1.38x^3 -8,42x^2 +30.17x+260$ περιορισμένη στο 0 έως 6



[00:27:28] - Κώστας Α
Άρα μπορώ τώρα να υπολογίσω ολοκλήρωμα από 0 σε 6 και κάπως έτσι θα ανακάλυψε και ο ρίμαν το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας διαδοχικές διαμερίσεις



[00:28:21] – Εκπαιδευτικός
Αρά τώρα είμαστε έτοιμη να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με το geogebra .το αποτέλεσμα είναι 1799,4
Με τον συντελεστή 10/36 μας κάνει 499,83 .είμαστε μέσα νά το δούμε λίγο στο google maps ,μακάρι να πάτε και στη πιστά να το δείτε από κοντά .βλέπετε ποσό λέει 500μ .Πέσαμε έξω 20 εκατοστά περίπου

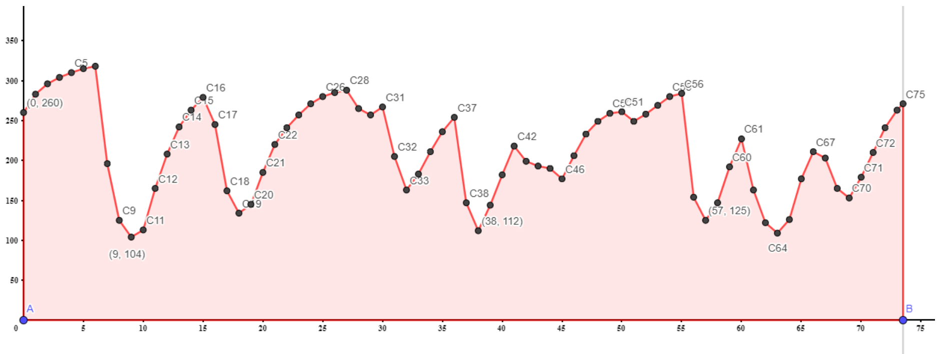


[00:29:33] - Κώστας Κ
Αυτό μπορεί να είναι και σφάλμα του δορυφόρου

[00:29:43] – Εκπαιδευτικός
Τα σφάλματα είναι μέσα στην ζωή ,μερικές φορές είναι ποιο εύκολο να υπολογίσουμε τη ταχύτητα από την απόσταση

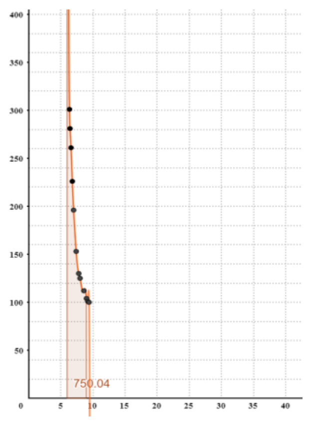
Δεύτερο ερώτημα
B. *Μπορείτε να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της πίστας με μια σχετική ακρίβεια :*

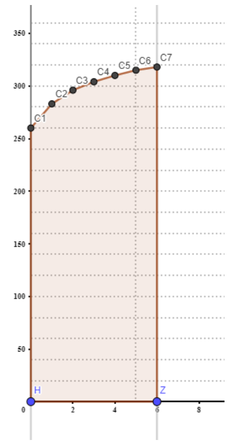
Οι μαθητές έχοντας ήδη την εμπειρία του πρώτου ερωτήματος και των διαφορετικών επιλογών επίλυσης του η καθεμία των οποίων προσφέρει τη δικιά της ακρίβεια καταλήγουν σε πολλούς τρόπους για την επίλυση του Β ερωτήματος και κατά επέκταση και για το 3^{ο} ερώτημα -Προτείνουν είτε να βρουν το εμβαδόν γεωμετρικά σχηματίζοντας το πολύγωνο που διέρχεται από αυτά τα 72 σημεία και με τη βοήθεια του geogebra να υπολογίσουν το εμβαδόν των 73 τραπεζιών που σχηματίζονται Είναι ένας καθαρά γεωμετρικός τρόπος ο οποίος αποτελεί μία προ έννοια του ολοκληρώματος



- Ο δεύτερος τρόπος που προτείνουν είναι να βρούμε μία πολυωνυμική συνάρτηση το πολύ 70ο βαθμού που να διέρχεται από όλα τα σημεία του προβλήματος και κατόπιν να υπολογίσουμε το εμβαδόν με χρήση του ολοκληρώματος

-Ο τρίτος τρόπος είναι να διασπάσουν το σχήμα σε επιταχυνόμενες και επιβραδυνόμενες κινήσεις και έτσι να σχηματίσουν μία πολυωνυμική συνάρτηση για κάθε σημαντικό μέρος της πίστας όπως αναφέρει και ο Κώστας Α





Είναι σαφές σε όλους τους μαθητές ότι όσο μικρότερη διαμέριση του χρονικού διαστήματος δεχθούμε τόσο πιο ακριβή αποτελέσματα θα πάρουμε

[00:30:17] – Εκπαιδευτικός
Για να προεκτείνουμε το πρόβλημα .Πως θα υπολογίσω το μήκος όλης της πίστας

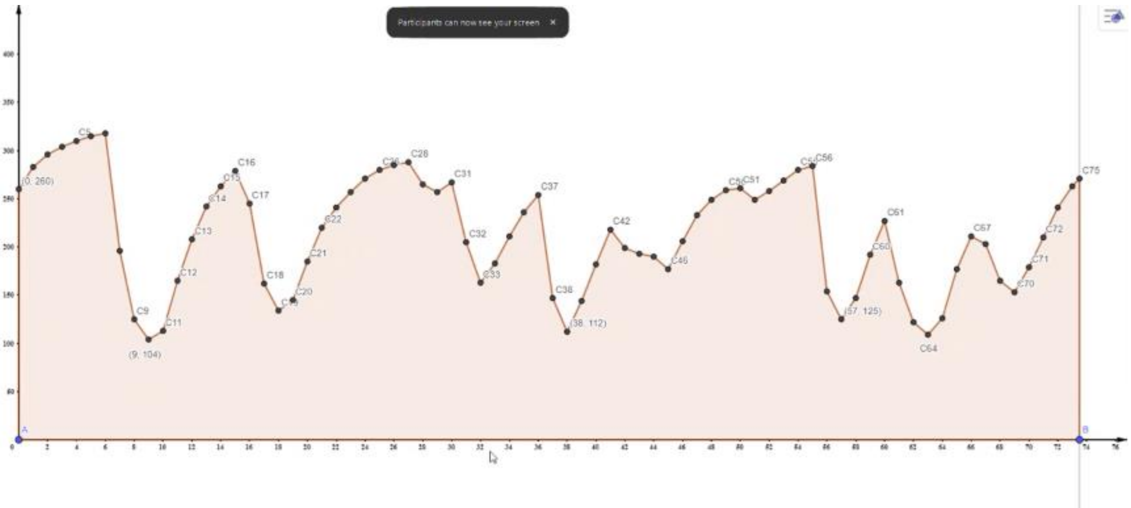
[00:30:33] - Κώστας Α
Θα συνεχίσουμε με την ίδια λογική απλά η πολυωνυμική συνάρτηση θα είναι μεγαλύτερου βαθμού και θα χρειαζόμαστε πολλές περισσότερες πράξεις για να λύσουμε το σύστημα

[00:32:50] - Κώστας Κ
Εχετε βάλει διάφορες τιμές για όλη τη διαδρομή; Για να δούμε πως χτίζετε όλη την συνάρτηση

[00:33:17] – Εκπαιδευτικός
Θα ήταν πολύ κουραστικό. Αλλά ναι

[00:33:27] - Κώστας Α
Δεν ξέρω αν ειπώθηκε ότι πάλι την ίδια λογική θα ακολουθήσουμε απλά θα έχουμε μια συνάρτηση με πολλούς κλάδους αλλά σημαντικό τμήμα της πίστας και θα βρίσκουμε μια πολυωνυμική συνάρτηση που αντιστοιχεί για κάθε σημαντικό τμήμα της πίστας

[00:33:50] – Εκπαιδευτικός
Αυτό εδώ λέτε



[00:33:52.] - Κώστας Κ
Αυτό έψαχνα […]

[00:34:10] - Κώστας Λ
Σιγουρά είμαστε στη σωστή διαδρομή δηλαδή έχουμε υπολογίσει τα βασικά σημεία πάει πολύ καλά το πρόβλημα.

[00:34:27] – Αναστασία
Να ρωτήσω κάτι .Τα κατακόρυφα σημεία είναι οι διάφορές

[00:34:50 .] – Εκπαιδευτικός
Μπορώ από δω να υπολογίσω το μήκος όλης της διαδρομής ,το νούμερο βγάζει 15684 αυτό το εμβαδόν είναι ολοκλήρωμα ;

[00:35:40] – Αναστασία
Μπορεί και ναι μπορεί και όχι

[00:35:45] - Κώστας Λ
Πήρα πολλά ολοκληρώματα μάλλον πολλά εμβαδά τραπεζίου

[00:36:00] – Αναστασία
Το ολοκλήρωμα δεν θα μας έβγαζε σε παρόμοια αποτέλεσμα και πιο γρηγορά

[00:36:07] – Εκπαιδευτικός
Ποιο είναι το πρόβλημα πάλι;

[00:36:10] - Κώστας Λ
Δεν ξέρω την συνάρτηση σε όλο το διάστημα

[00:36:17] – Εκπαιδευτικός
Ποιο είναι το πρόβλημα πάλι; Το εμβαδό στο 15684 αν το κάνω βγαίνει 4356,66 πόσο εχω πέσει έξω ;

[00:36:40] – Βασίλης
Πολύ
[00:36:45] - Κώστας Λ

Εγώ δεν νομίζω πολύ

[00:36:47] – Εκπαιδευτικός
Εγώ το εχω βρει 4356,66 Κι η πραγματική είναι 4381 έχουμε χάσει 24 μετρά στα 4381.τι θα μπορούσατε να κάνετε για να μειώσετε το σφάλμα .

[00:36:55] - Κώστας Α
Ανάλογα τα πλαίσια της ακρίβειας που θέλουμε

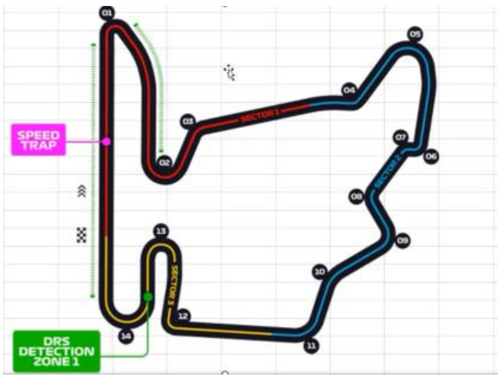
[00:37:07] – Εκπαιδευτικός
Έχουμε χάσει 24 μετρά στα 4381.Τι θα μπορούσατε να κάνετε για να μειώσετε το σφάλμα
.
[00:37:45] - Κώστας Α.
Αυτό που κάναμε και πριν να παίρνουμε κάθε σημαντικό τμήμα εκεί που υπάρχει μια ομαλότητα αρά μια πολυωνυμική συνάρτηση και να χωρίσουμε σε πολλές πολυωνυμικής συναρτήσεις

[00:38:07] – Εκπαιδευτικός
Έχει πολλές λογικές το πρόβλημα Αποκτάει ένα νόημα η πολύκλαδη συνάρτηση εδώ

Έχοντας ως κύριο στόχο την επίλυση του προβλήματος επιλέγοντας μια από της δοσμένες τιμές για την συνολική απόσταση, οι μαθητές κατευθύνουν την σκέψη τους στο να βρουν την καλύτερη προσέγγιση ώστε να λύσουν το πρόβλημα. Στην προσπάθεια αυτή εμφανίζονται σε άτυπη ή/και διαισθητική μορφή έννοιες ανάλυσης όπως αυτή του ορίου και του ορισμένου ολοκληρώματος αλλά και διαδικασίες όπως αυτή της αριθμητικής ολοκλήρωσης και της ελαχιστοποίησης σφάλματος.

Ερώτημα Γ και Δ .
Γ.Αφού μελετήσετε τα ερωτήματα α και β μπορείτε να αποφασίσετε ποια από τις 14 στροφές της πίστας θεωρείται πιο επικίνδυνη και να δικαιολογήσετε την απόφασης σας

Δ. *Πως θα μπορούσα να χωρίσω την πίστα σε 3 ισομήκη μέρη (Αυτό το ερώτημα προήλθε ως επιπλέον ερώτημα κατά την διεξαγωγή της τηλεδιάσκεψης με την δεύτερη ομάδα μαθητών)*



Το τρίτο ερώτημα ήταν ένα ανοιχτό πρόβλημα το οποίο ήθελε να διερευνήσει αν οι μαθητές θα εξακολουθούν να τοποθετούνται με βάση την εμπειρία τους ή θα συμβουλευτούνε το διάγραμμα το οποίο θα κατασκευάσει ήδη από τα δύο πρώτα ερωτήματα στην αρχή οι μαθητές απαντάνε με βάση την εμπειρία τους και κατόπιν με παραίνεση του εκπαιδευτικού του ζητείται να εκμεταλλευτούν το διάγραμμα από πού και με χρήση της κλίσης εφαπτομένης ισχυρίζονται ότι η πρώτη στροφή είναι η πιο επικίνδυνη Γιατί έχουμε τη μεγαλύτερη μείωση ταχύτητας από όλες τις στροφές της πίστας ένα άλλο πλεονέκτημα της ρεαλιστικής Μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ότι προκύπτουν συμπεράσματα ακόμα και την οδική ασφάλεια και συνειδητοποιούν ότι ένας από τους καλύτερους οδηγούς στον κόσμο παίρνει μία στροφή με 110 χιλιόμετρα .

[00:40:00] – Εκπαιδευτικός
Ποια είναι η πιο επικίνδυνη στροφή δηλαδή ποια έχει την χειρότερη κλίση.

[00:40:05] - Κώστας Α
Η 1

[00:40:07.] – Εκπαιδευτικός
Εδώ επειδή είναι επιστημονικό το συμβούλιο .Το πήγατε οπτικά μήπως θα έπρεπε να συμβουλευτώ το ….
[00:40:23] – Βασίλης
Το διάγραμμα ίσως

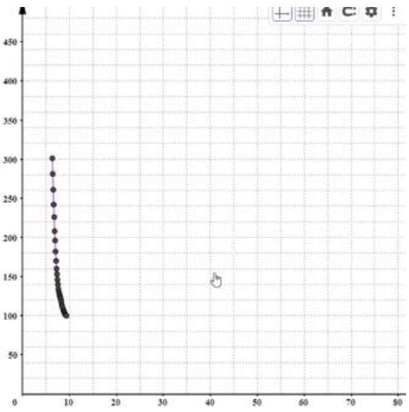
[00:40:27] – Εκπαιδευτικός
Θα μπορούσα να συμβουλευτώ το διάγραμμα Εδώ φαίνεται η στροφή που είναι η χειρότερη από όλες

[00:40:33] – Κώστας Λ.
Εκεί που μειώνεται πιο γρηγορά η ταχύτητα

[00:40:45] - Κώστας Α
Απότομα

[00:41:40] – Εκπαιδευτικός
Κοιτάξτε πάλι το βίντεο .Ποσά g δέχεται ο οδηγός μπαίνει στην στροφή με 318 και καταλήγει με 110 στην έξοδο της στροφής .Θα μπορούσα να μελετήσω την κίνηση μόνο στην στροφή.

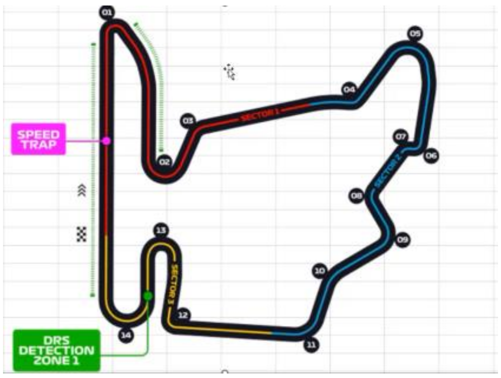
[00:42:30] – Εκπαιδευτικός΄
Που έχουμε την μεγαλύτερη επιβράδυνση στην αρχή η στο τέλος ; Εδώ έχουμε ένα πολυώνυμο 12 βαθμού



[00:42:45] – Κώστας Κ.
Το πιο επικίνδυνο σημείο είναι στην αρχή της στροφής γιατί είναι οριακά ευθεία η κλίση της εφαπτομένης

Οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι η χρήση της εφαπτομένης της συνάρτησης και η κλίση της είναι ένα πιο ευέλικτο εργαλείο το οποίο μπορεί να μας απαντήσει στο ερώτημα για το ποία στροφή και ποιο σημείο της στροφής είναι το πιο επικίνδυνο από όλα έχοντας σχηματίσει τη συνάρτηση. ο Κώστας Κ καταλήγει το πιο επικίνδυνο σημείο της τροφής είναι η αρχή της στροφής όπου η κλίση τις εφαπτόμενης ευθείας οριακά γίνεται μηδέν.
Για το τέταρτο ερώτημα το οποίο προέκυψε μετα από παρατήρηση του Κώστα Α οι τρόποι που διαπραγματευτήκαν οι μαθητές ήταν πρακτικοί

[00:46:50] – Κώστας Α.
Επιπλέον θα μπορούσα να χωρίσω όλη την πιστά σε 3 τμήματα.



[00:46:58] –Βασίλης
Ναι
[00:47:01] –Κώστας Α.
Φαίνεται χρωματικά

[00:47:08] –Κώστας Κ.
Και μετα να χωρίσω σε τρία εμβαδά

[00:47:18] –Κώστας Λ.
Να βρω μετα όλο το μήκος της κόκκινης διαδρομής και μετα επί 3 .Τα άλλα δεν τα χρειάζομαι

[00:47:30] –Κώστας Α.
Γιατί δεν τα χρειάζομαι ; Για να βρω το συνολικό μήκος

[00:47:40] – Εκπαιδευτικός
Ναι για το συνολικό μήκος της πίστας. το κόκκινο μήκος είναι υπολογισμένο .θα κάνεις διαμερισμό του σχήματος

[00:47:45] –Βασίλης .
Θα μπορούσα να βάλω και ένα σύρμα πάνω στον χάρτη μετα να το ισιώσω και μετα να το κόψω σε 3 ίσια μέρη [γέλια…]

[00:48:00] –Κώστας Α.
Υπάρχει και άλλος τρόπος .σημαδεύεις ένα σημείο της ρόδας και με ένα μαγνήτη ίσως μετράει πόσες φορές έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή της αφού ξέρω την ακτίνα της οπότε βρισκω το συνολικό μήκος που έχει διανύσει το όχημα

[00:48:13] – Εκπαιδευτικός
Έτσι δουλεύει και το ταχύμετρο στο αυτοκίνητο

[00:48:23] – Εκπαιδευτικός
Να ρωτήσω κάτι ακόμα αυτός με την μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα κερδίζει ;

[00:48:40] –Αναστασία
Όχι απαραίτητα

[00:48:50] – Εκπαιδευτικός
Σε τι απαραίτητα πρέπει να είναι πρώτος

[00:48:55] – Βασίλης
Στη μέση ταχύτητα

6.4 Συμπεράσματα -Αποτελέσματα της έρευνας

Από τα αποτελέσματα της έρευνας για το πρώτο ερώτημα προέκυψαν πέντε διαδικασίες μοντελοποίησης που είτε απορρίφθηκαν είτε εξελίχθηκαν στη συνέχεια από τους συμμετέχοντες. Οι διαδικασίες-απόπειρες μοντελοποίησης στο πρώτο ερώτημα ήταν η εξής **(1η)** Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή στο σύνολο της στην μέγιστη ταχύτητα των 318 km/h στο σύνολό του διαστήματος και εύρεση του εμβαδού του αντίστοιχου ορθογωνίου παραλληλογράμμου .Το εμβαδόν προέκυψε $E = 318 \cdot 6 \cdot \frac{10}{36} = \frac{3180}{6} = 530$ τετραγωνικά μέτρα

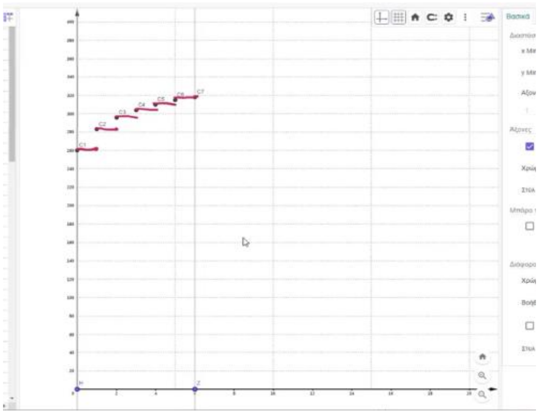
(2η) Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλή όχι όμως με την μέγιστη τιμή της ταχύτητάς αλλά χρησιμοποιώντας την μέση τιμή των ταχυτήτων στο χρονικό διάστημα από

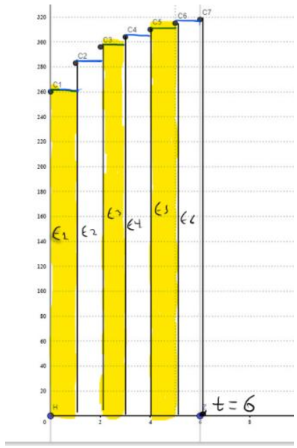
0 έως 6 second . $\frac{260+283+.....318}{8}=260,75$. Ετσι το εμβαδόν είναι

$$E=260,75\cdot 6\cdot \frac{10}{36}=434,58$$ τετραγωνικά μέτρα

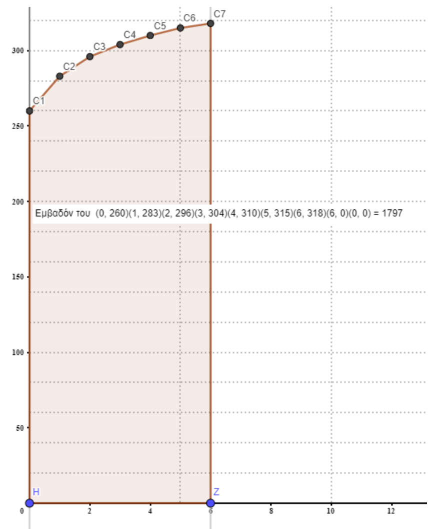
(3η) Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμης ομαλής ανά διαστήματα του ενός δευτερολέπτου. Με αυτή την προσέγγιση το εμβαδόν είναι

E=$(260\cdot 1+283\cdot 1+296\cdot 1+304\cdot 1+310\cdot 1+315\cdot)\cdot \frac{10}{36}=491{,}111...$ τετραγωνικά μέτρα





(4η) Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ανά δευτερόλεπτο και εισαγωγή της εννοίας της διαμέριση σε διαστήματα μικρότερο του ενός δευτερόλεπτου για βελτίωση της ακρίβειας .Υπολογίζοντας το εμβαδόν των πολυγώνου με την βοήθεια του GeoGebra προκύπτει η τιμή 1797 ,πολλαπλασιάζοντας τη με τον συντελεστή μετατροπής 10/36 προκύπτει 499,16 τετραγωνικά μέτρα Έχοντας κατασκευάσει το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου από 0 έως 6 second οι μαθητές καταλήγουν ότι το εμβαδό του αντίστοιχο πολυγώνου το οποίο αποτελείται από έξι τραπέζια μας δίνει μία ικανοποιητική λύση στο πρόβλημα μας με μία σχετική ακρίβεια

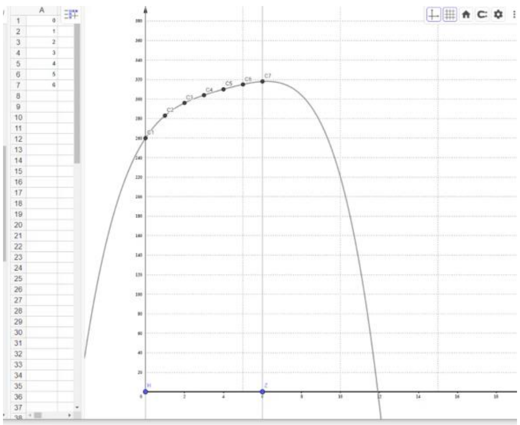


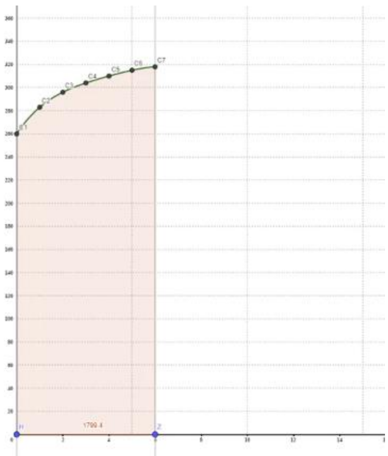
(5η) Προκρίνεται η ιδέα εφεύρεσης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης εβδόμου βαθμού το μέγιστο ορισμένη στο διάστημα από 0 έως 6 η οποία διέρχεται από τα επτά αυτά σημεία και είναι κοίλη. Με χρήση της εντολής Fitpoly τροφοδοτώντας της τα επτά σημεία προκύπτει η πολυωνυμική συνάρτηση τέταρτου βαθμού

$x(t) = -0,8t^4 + 1.38t^3 - 8,42t^2 + 30.17t + 260$ περιορισμένη στο 0 έως 6

Κατόπιν με χρήση της εντολής integrate του Geogebra υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

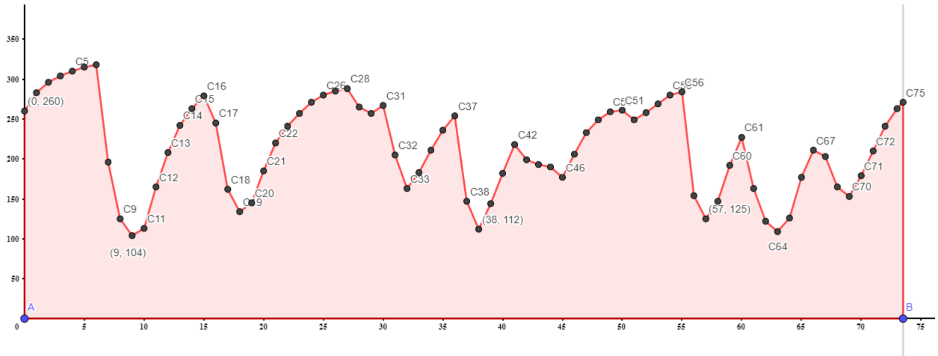
$\int_0^6 x(t)dt = 1799,4$ και πολλαπλασιάζοντας με τον συντελεστή 10/36 προκύπτει το αποτέλεσμα 499,83 τετραγωνικά μέτρα με επαλήθευση του πραγματικού μήκους της πίστας στο google 500μ προκύπτει ένα σφάλμα των 20 εκατοστών.



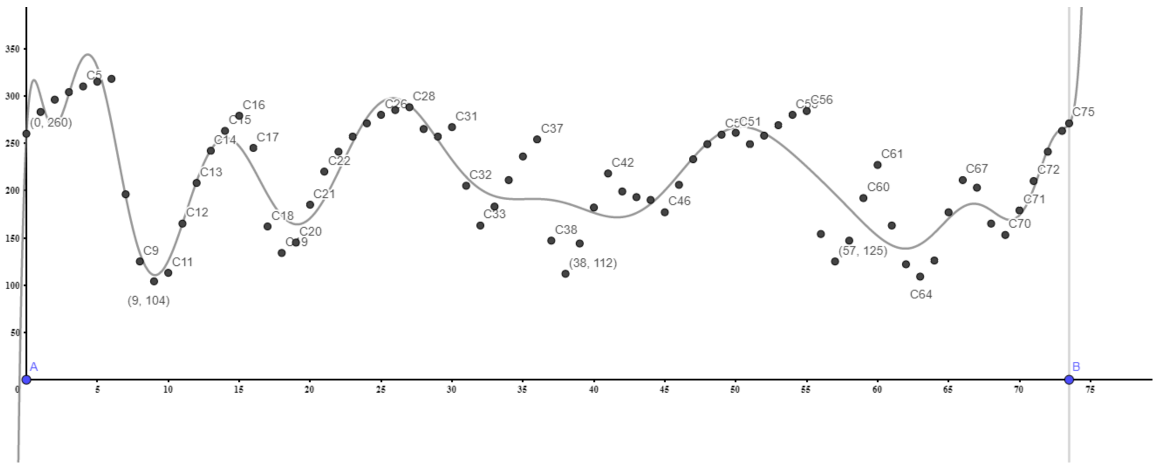


Από τα αποτελέσματα της έρευνας για το δεύτερο ερώτημα προέκυψαν τρεις διαδικασίες μοντελοποίησης

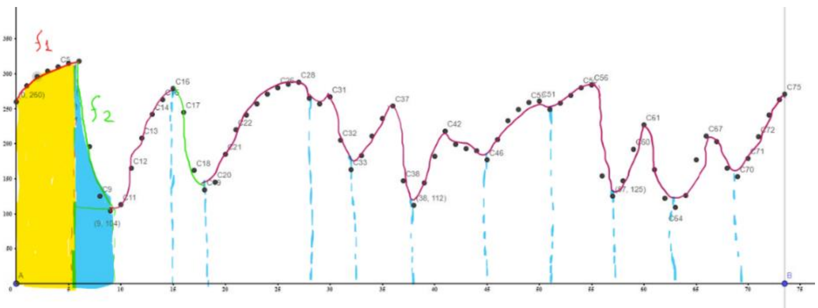
(1η) Θεώρηση της κίνησης ως ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη ή επιβραδυνομένη ανα δευτερόλεπτο κ άθολη την διάρκεια της κίνησης. Υπολογίζοντας το εμβαδόν του πολυγώνου που διέρχεται από αυτά τα 76 σημεία με την βοήθεια του GeoGebra . προκύπτει το εμβαδόν του πολυγώνου ισον με 4356,66 τετραγωνικά μέτρα. Η πραγματική τιμή είναι 4381 έχουμε ένα σφάλμα των 24 μέτρων περίπου.

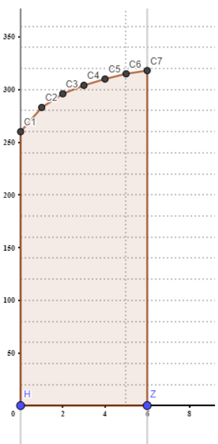


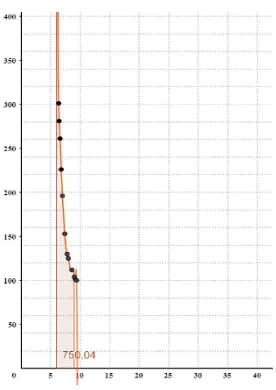
(2η) Ο δεύτερος τρόπος που προτείνουν είναι να βρούμε μία πολυωνυμική συνάρτηση το πολύ 70ο βαθμού που να διέρχεται από όλα τα σημεία του προβλήματος και κατόπιν να υπολογίσουμε το εμβαδόν με χρήση του ολοκληρώματος .Οι μαθητές κατανοούν γρήγορα ότι ακόμα και το GeoGebra δυσκολεύεται να διαχειριστεί μια τόσο μεγάλου βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση. Το πρόγραμμα μας δίνει μια συνάρτηση 20ου βαθμού την οποία ολοκληρώνοντας προκύπτει 4620,930 τετραγωνικά μέτρα που έχει μια αρκετά μεγάλη απόκλιση από την μέση τιμή .



(3η) Ο τρίτος τρόπος είναι να διασπάσουν το σχήμα σε επιταχυνόμενες και επιβραδυνόμενες κινήσεις και έτσι να σχηματίσουν μία πολυωνυμική συνάρτηση για κάθε σημαντικό μέρος της πίστας







Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές εφηύραν την έννοια της κλίσης της εφαπτομένης ως ένα ανοικτό μέτρο επικινδυνότητας της στροφής όπου όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση της εφαπτομένης τόσο πιο επικίνδυνη η στροφή .

Στο τέταρτο ερώτημα οι απαντήσεις των μαθητών ήταν κυρίως πρακτικοί και όχι καθαρά μαθηματικοί.

Στην ανάπτυξη του πρώτου και δευτέρου ερωτήματος και τις πέντε και τρεις απόπειρες μοντελοποίησης αντίστοιχα αναγνωρίσαμε πέντε στάδια:

(1) Η σημασία εύρεσης του εμβαδού κάτω από το γράφημα ταχύτητας – χρόνου.

(2) Η σχεδίαση διαφορετικών ειδών γραφημάτων.

(3) Ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού.

(4) Η αναζήτηση της καλύτερης προσέγγισης και της μεγαλύτερης ακρίβειας

(5) Ο υπολογισμός της αριθμητικής τιμής του εμβαδού με χρήση ψηφιακού εργαλείου.

(6) Η αναζήτηση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης η οποία διέρχεται από τα δεδομένα σημεία.

(7) Η σύνδεση μεταξύ της ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μια άτυπη γέφυρα προς τον κόσμο της Ανάλυσης

Από τα αποτελέσματα και την ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων προέκυψε ότι οι παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη της γνώσης των μαθητών ήταν

(1) Η επικοινωνία μεταξύ του ερευνητή και των μαθητών

(2) Η ρεαλιστική φύση του προβλήματος και η σύνδεση του με τα ενδιαφέροντα των μαθητών

(3) Η αναζήτηση ακρίβειας

(4) Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού

(5) Η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων μέσω ψηφιακού λογισμικού.

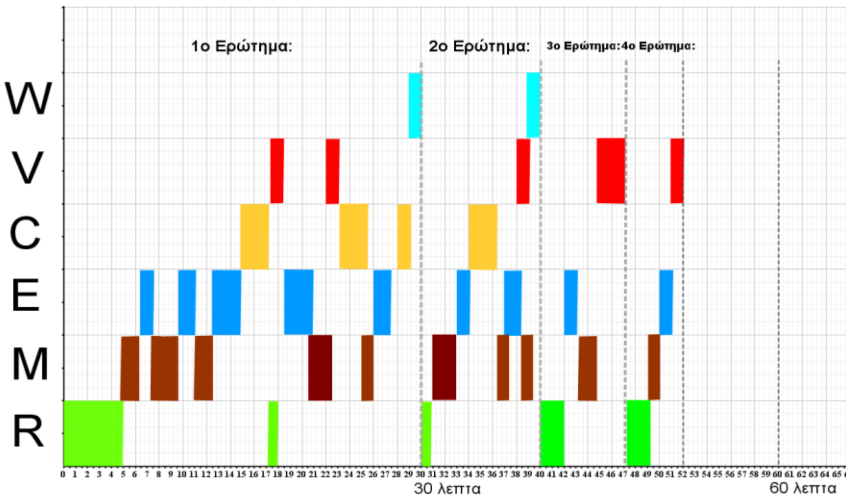
(6) Οι μαθηματικές ικανότητες και παρατηρήσεις συγκεκριμένων μαθητών

(7) Οι προσωπικές εμπειρίες συγκεκριμένων μαθητών

(8) Οι διάθεση για συνεργασία και αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών.

Το διάγραμμα δραστηριότητας μοντελοποίησης για την ομάδα Β

Στην Εικόνα 6 παρουσιάζεται το διάγραμμα δραστηριότητας μοντελοποίησης της εργασίας της ομάδας Β για το πρόβλημα της Formoula 1. Στο πρώτο ερώτημα και στο δεύτερο ερώτημα της εργασίας που αποτελεί και το κύριο μέρος της οι μαθητές αφιέρωσαν περίπου 30 λεπτά για το πρώτο και 10 λεπτά για το δεύτερο ερώτημα. Αυτή η πιο γρήγορη αντιμετώπιση του δευτέρου ερωτήματος εδράζει στην απόκτηση εμπειρίας από το πρώτο ερώτημα και την σχετική συνάφεια τους.



R: Reading	Ανάγνωση της δήλωσης της εργασίας και κατανόησή της
M: Modelling	Απλοποίηση και διάρθρωση της εργασίας μαθηματικά
E: Estimating	Πραγματοποίηση ποσοτικών εκτιμήσεων
C: Calculating	Εκτέλεση μαθηματικών υπολογισμών, όπως αριθμητικοί υπολογισμοί, εργασία με εξισώσεις, σχεδίαση σκίτσων ή διαγραμμάτων
X: Validating	Ερμηνεία, επαλήθευση και επικύρωση των αποτελεσμάτων, των υπολογισμών και του ίδιου του μοντέλου στο πραγματικό του πλαίσιο
Y: Writing	Συνοψίζοντας τα ευρήματα και τα αποτελέσματα σε μια έκθεση, συντάσσοντας τη διαδικασία επίλυσης καθώς και τη λύση

Εικόνα 5:Διάγραμμα μοντελοποίησης ομάδας Β

Ανάγνωση (Reading)

Μετά από μια σύντομη αρχική φάση ανάγνωσης και παρακολούθησης του βιντεοπροβλήματος των 5 λεπτών περίπου οι μαθητές αφιερώνονται στο πρώτο μέρος του προβλήματος που αποτελείται από τη διαλεκτική αλληλεπίδραση μεταξύ της κατασκευής ενός μοντέλου και της εκτίμησης (με μερικά δευτερεύοντα στοιχεία επικύρωσης και υπολογισμού). Όταν η ομάδα ασχολείται με την επίλυση του δεύτερου μέρους του προβλήματος, συνεχίζουν πρώτα με αυτόν τον διαλεκτικό τρόπο για άλλα 8 λεπτά, ακολουθούμενα από περίπου 10 λεπτά που αποτελούνται από επικύρωση με ένα παράλληλο στοιχείο υπολογισμού.

Δημιουργία μοντέλου(Modelling)

Ένα τυπικό τμήμα της ομαδικής εργασίας κατηγοριοποιήθηκε ως το μοντέλο που ασχολείται με τη διαπραγμάτευση και τη συμφωνία για το πώς να δομήσει το πρόβλημα και ποιες υποθέσεις ή εξιδανικεύσεις να κάνει. Οι μαθητές κάνουν 4 αρχικές απόπειρες μοντελοποίησης η οποίες όλες εδράζουν στην Γεωμετρία θεωρώντας τις κινήσεις είτε ως ευθύγραμμες ομαλές είτε επιταχυνόμενες -επιβραδυνόμενες προσπαθώντας να δημιουργήσουν μια συμβατική γέφυρα ανάμεσα στα πραγματικά δεδομένα και στα γραφήματα .Η πέμπτη μοντελοποίηση η οποία εμφανίζεται μπορεί να θεωρηθεί ως προάγγελος της πολυωνυμικής παρεμβολής .Έστω f πραγματική συνάρτηση, της οποίας είναι γνωστές μόνον οι τιμές $f(x_i)$ σε n+1 διαφορετικά σημεία του πεδίου ορισμού της με $i = 0,1,...n$. Το πρόβλημα εύρεσης μιάς συνάρτησης φ, (από ένα ορισμένο σύνολο συναρτήσεων Σ), έτσι ώστε η φ να προσδιορίζεται μμόνον από τις τιμές $f(x_i)$ και να πληροί τις συνθήκες $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $i = 0,1,...n$ καλείται παρεμβολή. Αν το σύνολο Σ είναι αρκετά «πλούσιο», τότε η τιμή της συνάρτησης φ(x) για $x \neq x_i$ μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζει την τιμή f(x).

Ποσοτικές εκτιμήσεις (Estimating)

Τα τμήματα εκτίμησης συχνά ξεκινούν με μια άμεση ερώτηση από τους μαθητές και μια αίσθηση ανασφάλειας όπου συνήθως αναλαμβάνουν δράση οι μαθητές με μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση. Οι συζητήσεις που ακολουθούν μεταξύ των μαθητών ένα τέτοιο ερώτημα αποσκοπούν όλες στην παραγωγή μιας εκτίμησης κάποιας ποσότητας, ενός αριθμού η μιας διαδικασίας επίλυσης .

Ερμηνεία -Επαλήθευση-Επικύρωση (Validating)

Οι ερωτήσεις επικύρωσης ξεκινούν επίσης συχνά τμήματα επικύρωσης ("Αυτό που είχε πει και το άλλο παιδί .Ότι είναι ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κάθε δευτερόλεπτο. Μια ξεχωριστή ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη.;"), όπως και οι δηλώσεις αμφιβολίας ("Να ρωτήσω κάτι ;Αφού μιλάμε για καμπύλες γιατί δεν χρησιμοποιούμε ολοκλήρωμα .Για να έχουμε μεγαλύτερη προσέγγιση "). Σε αυτά τα τμήματα οι προηγούμενες παραδοχές, εκτιμήσεις, υπολογισμοί και αποτελέσματα εξετάζονται κριτικά και είτε εκδηλώνονται είτε απορρίπτονται υπέρ καλύτερων εκδόσεων. Το είδος των προβληματισμών που πρέπει να αντιμετωπιστούν όταν χρησιμοποιούνται οι κωδικοί του πλαισίου MAD κωδικοποιεί τη δραστηριότητα σε επίπεδο ομάδας και όχι σε ατομικό επίπεδο. Παρ' όλα αυτά, η συμβολή συγκεκριμένων ηγετικών μορφών της ομάδας (εκτίμηση) είτε λόγω αλγεβρικής ευχέρειας και μαθηματικών ικανοτήτων είτε λόγω προσωπικότητας έχουν μεγάλη επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα των ομάδων όπου αναλαμβάνουν εξ ορισμού έναν μαθηματικό αρχηγό της αγέλης -ομάδας .

Υπολογισμοί και σύνοψη (Calculating and Writing)

Ο υπολογισμός είναι μια δραστηριότητα που συνήθως προδιαμορφώνεται από ένα από τα μέλη της ομάδας στο παρασκήνιο κάποιας άλλης δραστηριότητας, οπότε εδώ η εγγραφή βίντεο είναι ζωτικής σημασίας για την κωδικοποίηση. Περιστασιακά, ολόκληρη η ομάδα επικεντρώνεται στον πραγματικό υπολογισμό, αλλά ανεξάρτητα από το πώς λαμβάνεται και από ποιον, το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού είναι σημαντικό για το πώς εξελίσσεται η διαδικασία επίλυσης.

Παρατηρήθηκε μια αγκίστρωση σε μαθηματικούς τρόπους όπως για παράδειγμα της Αναστασίας οπού συχνά επικαλούταν την χρήση του ολοκληρώματος ενώ ακόμα στο πρόβλημα δεν είχε δομηθεί συνάρτηση και οι μαθητές εργαζόταν με καθαρά γεωμετρικούς τρόπους εύρεσης των εμβαδών.

Από την ανάλυση των δεδομένων μπορούσε επίσης να παρατηρηθεί ότι οι μαθητές χρησιμοποιούσαν συχνά τις προσωπικές τους εξωμαθηματικές γνώσεις και εμπειρίες από εξωτερικούς δεσμούς στη διαδικασία επίλυσης. Φαίνεται ότι το έκαναν αυτό με τουλάχιστον τρεις διαφορετικούς τρόπους: με δημιουργικό τρόπο για να κατασκευάσουν ένα μοντέλο ή να κάνουν μια εκτίμηση, στη διαδικασία επικύρωσης ενός αποτελέσματος ή μιας εκτίμησης και τελικά με κοινωνικό τρόπο ως αφηγηματικό ανέκδοτο. Από αυτή την άποψη, το ρεαλιστικό χαρακτηριστικό και πλαίσιο του προβλήματος είναι ζωτικής σημασίας. Μπορεί κανείς να σημειώσει ότι η δυναμική της ομάδας είναι απαραίτητη για την εξέλιξη και την ενεργοποίηση των διαφόρων υπο-δραστηριοτήτων κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων. Είναι οι συζητήσεις και οι αλληλεπιδράσεις στις ομάδες, όταν έρχονται αντιμέτωπες διαφορετικές πεποιθήσεις και απόψεις, που οδηγούν και διαμορφώνουν τη διαδικασία μοντελοποίησης. Η συμπεριφορά της ομάδας επηρεάζεται έντονα από τις ατομικές προτιμήσεις και τη σύνθεση της ομάδας, καθιστώντας την μία από τις πιο σημαντικές μεταβλητές εργασίας που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Παρατηρούνται επίσης και κοινωνικό- πολιτισμικές προεκτάσεις κατά την ενασχόληση των μαθητών με το πρόβλημα .Αρκετές παρατηρήσεις αφορούσαν την οδηγική συμπεριφορά και την οδική ασφάλεια ειδικά στο σημείο που συνειδητοποιούν ότι ένας πιλότος της φόρμουλα 1 με ένα τεχνολογικά προηγμένο αυτοκίνητο και ειδικό εξοπλισμό ασφάλειας διέρχεται από την πρώτη στροφή με μόνο 110 χιλιόμετρα ανά ώρα.

Η μελέτη της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ένας σταθερά αναπτυσσόμενος κλάδος της έρευνας τουλάχιστον από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 (Blum, 1995). Τα επιχειρήματα για τη συμπερίληψη της μαθηματικής μοντελοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση είναι αδιαμφισβήτητα και η μαθηματική μοντελοποίηση περιλαμβάνεται σήμερα ρητά ως μέρος των προγραμμάτων σπουδών μαθηματικών σε πολλές χώρες σε όλο τον κόσμο. Δεδομένης της ποικιλίας των προσεγγίσεων και των στόχων στο πλαίσιο της συζήτησης για τη μοντελοποίηση, αυτός ο τομέας έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση αναπτύσσεται ραγδαία. Μια τάση στη συζήτηση μοντελοποίησης για τα επόμενα χρόνια θα μπορούσε να είναι μια γνωστική άποψη. Αυτός ο τομέας έρευνας έχει παραμεληθεί σε μεγάλο βαθμό στις προηγούμενες συζητήσεις. Είναι μια σημαντική κατεύθυνση για να αποκτήθει γνώση για τις λογικές διεργασίες στο μυαλό των μαθητών και των εκπαιδευτικών Το είδος των προβληματισμών που πρέπει να αντιμετωπιστούν όταν χρησιμοποιούνται οι κωδικοί του πλαισίου MAD κωδικοποιεί τη δραστηριότητα σε επίπεδο ομάδας και όχι σε ατομικό επίπεδο. Η παρούσα έρευνα συνιστά μια διδακτική πρόταση η οποία αποτελείται όμως από σημαντικούς και αναπόσπαστους παράγοντες προβλέψιμους και μη. Οι παράγοντες αυτοί είναι η φύση του προβλήματος ως ένα ανοιχτό πρόβλημα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, το καλό κλίμα συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών, οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού αλλά και η χρήση του ψηφιακού εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra στο τελικό στάδιο της δραστηριότητας. Ο συνδυασμός και η εξέλιξη των παραπάνω παραγόντων αλλά ειδικότερα η απαραίτητη συνύπαρξή τους είναι καθοριστικής σημασίας για αυτή την διδακτική πρόταση. Η διδακτική πρόταση στοχεύει στην ανάπτυξη και εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλήματος αλλά και της διαισθητικής ανάπτυξης εννοιών της ανάλυσης. Το πλαίσιο της διαισθητικής ανάπτυξης εννοιών της ανάλυσης με αφετηρία στην ευκλείδεια Γεωμετρία και η μετάβαση από τα την έννοια της μέσης ταχύτητας στην στιγμιαία ταχύτητα με συνέχεις χρονικές διαμερίσεις σε διαστήματα διακριτά γραφήματα στα συνεχή γραφήματα μέσα από στρατηγικές και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων προτείνεται εξαιτίας των δυσκολίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οδηγούνται μακριά από την εννοιολογική κατανόηση αφού εστιάζουν περισσότερο στις διαδικασίες. Συγκεκριμένα η έννοια του ολοκληρώματος προτείνεται να προσεγγιστεί διαισθητικά με την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου. Σκοπός είναι οι μαθητές να επανεφεύρουν την μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος ως εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα. Συνεπώς η ιδέα της αριθμητικής ολοκλήρωσης λειτουργεί ως προσεγγιστικός τρόπος υπολογισμού του εμβαδού, ενώ παράλληλα συνυπάρχει με την έννοια της διαμέρισης όπου για την καλύτερη προσέγγιση (approximation) αθροίζονται όλο και περισσότερες ποσότητες εμβαδού (accumulation) όταν το πλάτος της διαμέρισης μικραίνει. Τα παραπάνω επομένως έχουν δύο στόχους την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ολοκληρώματος αλλά και την κατασκευή του μέσα από την μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης η οποία προτείνεται ώστε να αποτελέσει το ενδιάμεσο άτυπο στάδιο πριν την τυπική έννοια του ολοκληρώματος. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας δείχνουν ότι η επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων είναι ένα πολύπλοκο θέμα και ότι μερικά από τα θεωρητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στον τομέα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αποτυγχάνουν να αντικατοπτρίζουν επαρκώς αυτό το επίπεδο πολυπλοκότητας. Επιπλέον, τα διαγράμματα δραστηριότητας μοντελοποίησης παρουσιάζονται ως ένα πιο λεπτομερές εργαλείο ανάλυσης για τον χαρακτηρισμό των επιλογών και των ενεργειών των μαθητών, καθώς και για να κάνουν τη δομή του προβλήματος που αντιμετωπίζεται οπτικά διαχειρίσιμη . Η χρήση των τηλεδιασκέψεων με χρήση ψηφιακών εργαλείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο από εκπαιδευτικούς όσο και από ερευνητές ως ένα μέσο εξερεύνησης σε μικρές ομάδες του λαβυρίνθου της κατασκευής των μαθηματικών εννοιών εκ μέρους των μαθητών.

Προτείνουμε μια προσέγγιση της έννοιας του ολοκληρώματος για προχωρημένους μαθητές λυκείου και παρέχουμε στοιχεία για τη δυνατότητα αυτής της προσέγγισης να υποστηρίξει τους μαθητές να αποκτήσουν μια σε βάθος εννοιολογική θεώρηση της εννοίας της ολοκλήρωσης. Η προσέγγιση βασίζεται στη μαθηματική ιδέα της προσέγγισης και της συσσώρευσης. Οι μαθησιακές διαδικασίες των μαθητών μικροαναλύθηκαν με τη χρήση των διαγραμμάτων δραστηριότητας μοντελοποίησης. Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές κατέληξαν σε μια εννοιολογική κατανόηση του ολοκληρώματος που τους προετοίμασε για το επόμενο βήμα στο πρόγραμμα σπουδών, δηλαδή το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού.

Βιβλιογραφία

Ahlfors, L. v, Courant, R., & Coxeter, H. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *American Mathematical Monthly*, *69*(3), 189–193.

Aldon, G. (2010). Handheld calculators between instrument and document. *ZDM*, *42*(7), 733–745.

Anderson, M. H. (2011). Tablet PCs modernize your lectures. *MAA Focus*, *31*(1), 29–30.

Ärlebäck, J. B. (2009). ON THE USE OF REALISTIC FERMI PROBLEMS FOR INTRODUCING MATHEMATICAL MODELLING IN SCHOOL. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331–364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Arnold, S. (1991). Learning to teach mathematics with new tools. *Australian Senior Mathematics Journal*, *5*(2), 75–87.

Ash, K. (2009). Projecting a better view. *Education Week*, 34–35.

Avgerinos Evgenios and Alexandra Skoufi, "The Role and Use of Technology in Teaching and Learning of Calculus", in E. Avgerinos (ed), "Current Trends in Contributing New Technologies to Qualitative University Education" , University of the Aegean, ISBN 978-960-86791-4-6, Athens 2009, pp. 201-230.

Avgerinos Evgenios P. and Alexandra Skufi, "On a new crucial role of RME for understanding and teaching notions of school calculus" in Research in Mathematics Education Conf of Five cities, ED, Gagatsis A. Univ of Cyprus, pp 1-26 , Nicosia 2008

Avgerinos Evgenios and Alexandra Skoufi, "Teaching Analysis Using the Use of New Technologies in the Realm Mathematical Education (RME) in Combination with Other Modern Approaches", Proceedings of the 11th Pancyprian Congress of Mathematical Education and Science, pp. 269-298 , Nicosia, February 2009

Bakker, A. (2004). *Bakker, A. (2004). Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.*

Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2003). Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education. *Onderwijs Research Dagen (ORD).*

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Bennett, G. (1995). Calculus for general education in a computer classroom. *International DERIVE Journal*, *2*, 3–11.

Berger, M. (2005). Vygotsky's Theory of Concept Formation and Mathematics Education. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 153–160.

Bergman Ärlebäck, J., & Bergsten, C. (2010). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. In *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 597–609). Springer.

Bitzer, D., Braunfeld, P., & Lichtenberger, W. (1961). PLATO: An automatic teaching device. *IRE Transactions on Education*, *4*(4), 157–161.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 45–56). Springer.

Blum, W. (1985). *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion*.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1), 149–171.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). Bibliography. In *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 513–517). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_59

Blum, W., & Leiß, D. (2007). Investigating quality mathematics teaching: The DISUM project. *Developing and Researching Quality in Mathematics Teaching and Learning, Proceedings of MADIF*, *5*, 3–16.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education:[a searching discussion of school education opening new paths to learning and teaching]*. Vintage Books.

Butts, R. F. (1955). *A Cultural histrory of Western education 2nd*. McGraw-Hill.

C I E A E M Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching. (n.d.).

Chonacky, N., & Winch, D. (2005). 3Ms for instruction: Reviews of Maple, Mathematica, and Matlab. *Computing in Science & Engineering*, *7*(3), 7–13.

Clements, M. A., & Ellerton, N. (2010). Rewriting the history of mathematics education in North America. *Unpublished Paper Presented to a Meeting of the Americas Section of the International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics, Pasadena. See Http://Www. Hpm-Americas. Org/Wp-Content/Uploads/2010/12/Clements. Pd f*.

Cooley, L. A. (1995a). *Evaluating the effects on conceptual understanding and achievement of enhancing an introductory calculus course with a computer algebra system*. New York University.

Cooley, L. A. (1995b). *Evaluating the effects on conceptual understanding and achievement of enhancing an introductory calculus course with a computer algebra system*. New York University.

Crouch, R., & Haines *, C. (2004). Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(2), 197–206. https://doi.org/10.1080/00207390310001638322

Cui, J., Zhang, Y., Cheng, D., Li, D., & Zhou, X. (2017). Visual Form Perception Can Be a Cognitive Correlate of Lower Level Math Categories for Teenagers. *Frontiers in Psychology*, *8*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01336

Delice, A., & Kertil, M. (2015). INVESTIGATING THE REPRESENTATIONAL FLUENCY OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS IN A MODELLING PROCESS. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(3), 631–656. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9466-0

Demana, F., & Waits, B. K. (2000). Calculators in mathematics teaching and learning. *Past, Present, and Future. In Learning Mathematics for a New Century*, 51–66.

den Heuvel-Panhuizen, V., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zdm*, *37*(4), 287–307.

Deturck, D., & Wilf, H. S. (2002). Lectures on Numerical Analysis. *Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA*, *19104*, 6395.

Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, *41*(1), 199–211.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(5), 221–228. https://doi.org/10.1007/BF02655825

Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). A mathematics education ghost story: Herbartianism and school mathematics. *Building Connections: Theory, Research and Practice—Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia, Melbourne*, 313–321.

Ellison, M. J. (1993). *The effect of computer and calculator graphics on students' ability to mentally construct calculus concepts.(Volumes I and II)*. University of Minnesota.

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. In *Mathematical modelling* (pp. 3–17). Elsevier.

Even, R. (1998a). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105–121.

Even, R. (1998b). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105–121.

Félix, L. (1985). Essai sur l'histoire de la CIEAEM. *Mathematiques Pour Tous… à l'age de l'ordinateur*, 375–378.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Ferri, R. B. (2007). Modelling Problems from a Cognitive Perspective. In *Mathematical Modelling* (pp. 260–270). Elsevier. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.260

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994a). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. *MAA Notes*, 31–46.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994b). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. *MAA Notes*, 31–46.

Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(3), 237–272.

Fey, J. T., & Heid, M. K. (1984). Impact of computing on calculus. *Computing and Mathematics. The Impact on Secondary School Curricula*, 53–70.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, *14*(1), 31–50.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

Freudenthal Hans. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (Vol. 1). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X

Friedman, M. (2016). Two beginnings of geometry and folding: Hermann Wiener and Sundara Row. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, *31*(1), 52–68.

Furinghetti, F. (2008). Mathematics education in the ICMI perspective. *International Journal for the History of Mathematics Education*, *3*(2), 47–56.

Furinghetti, F. (2009). The evolution of the journal L'Enseignement Mathématique from its initial aims to new trends. *Dig Where You Stand". Proceedings of the Conference on On-Going Research in the History of Mathematics Education, Reykjavik: University of Iceland–School of Education*, 31–46.

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2012). From Mathematics and Education, to Mathematics Education. In *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273–302). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_9

Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(5), 3–16.

Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (Vol. 10). Springer Science & Business Media.

Gattegno, C. (1958). Observations on the teaching of mathematics in the United States. *The Mathematics Teacher*, *51*(3), 194–196.

Gellert, U., Jablonka, E., & Keitel, C. (2001). Mathematical Literacy and. *Sociocultural Research on Mathematics Education: An International Perspective*, 57.

Gispert, H. (2009). Two mathematics reforms in the context of twentieth century France: Similarities and differences. *International Journal for the History of Mathematics Education*, *4*(1), 43–50.

Goffree, F. (1993). HF: Working on mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1), 21–49.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137–165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning*, *397*.

Goldstine, H. H. (1993). *The computer from Pascal to von Neumann*. Princeton University Press.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443–471.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2012). Symbolizing, modeling, and instructional design. In *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 235–284). Routledge.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1), 111–129.

Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent Models as an Instructional Design Heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 145–169). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_10

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777–796.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Springer-Verlag.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 293–307.

Grinberg, E. L. (1989). The menu with the college education. *Notices of the American Mathematical Society*, *36*(7), 838–842.

Haines, C., & Crouch, R. (2007). Mathematical Modelling and Applications: Ability and Competence Frameworks. In *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 417–424). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_46

Heid, M. K. (1984). *An exploratory study to examine the effects of resequencing skills and concepts in an applied calculus curriculum through the use of the microcomputer*. University of Maryland, College Park.

Hillel, J. (1993). Computer algebra systems as cognitive technologies: Implication for the practice of mathematics education. In *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 18–47). Springer.

Hong, Y. Y., Thomas, M., & Kwon, O. (2000). In T. Nakahara & M. Koyama. *Proceedings of the 24th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 57–64.

Howson, A. G. (1982). *A History of Mathematics Education in England, Cambridge Uni*. versity Press, Cambridge. HowsonA History of Mathematics Education in ….

Howson, G. (2010). Mathematics, society, and curricula in nineteenth-century England. *International Journal for the History of Mathematics Education*, *5*(1), 21–51.

Hoyrup, J. (1994). *In measure, number, and weight: Studies in mathematics and culture*. SUNY Press.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D. E., Gordon, S. P., Lomen, D. O., Lovelock, D., McCallum, W. G., Osgood, B. G., Pasquale, A., & Tecosky-Feldman, J. (1994). *Calculus (international edition)*. John Wiley & Sons, New York.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 503–510). Springer.

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school–Examples and experiences. *Mathematikunterricht Im Spannungsfeld von Evolution Und Evaluation. Festband Für Werner Blum. Hildesheim: Franzbecker*, *99*, 108.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, *38*(2), 82–85. https://doi.org/10.1007/BF02655882

Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B., & Stillman, G. (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Kaiser, G., & Brand, S. (2015). *Modelling Competencies: Past Development and Further Perspectives* (pp. 129–149). https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, *38*(3), 302–310.

Kaiser-Messmer, G. (1986). *Anwendungen im mathematikunterricht. 2. empirische untersuchungen*. Franzbecker.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265–281.

Karp, A., & Roberts, D. L. (2014). Interview with Jeremy Kilpatrick. In *Leaders in Mathematics Education: Experience and Vision* (pp. 101–123). Brill.

Karp, A., & Schubring, G. (2014). *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer.

Keller, B., Russell, C., & Thompson, H. (1999). Effects of student-centered teaching on student evaluations in calculus. *Educational Research Quarterly*, *23*(1), 59.

Kelly, B. (2003). The emergence of technology in mathematics education. *A History of School Mathematics*, *2*, 1037–1084.

Kemeny, J. G., & Kurtz, T. E. (1985). *Back to Basic; The History, Corruption, and Future of the Language*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.

Kidwell, P. A., Ackerberg-Hastings, A., & Roberts, D. L. (n.d.). *Tools of American Mathematics Teaching*.

kilpatrick, j. (2020). history of research in mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education*.

Kilpatrick, J., & Weaver, J. F. (1977). A Forum for Researchers: The Place of William A. Brownell in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(5), 382–384.

Klein, T. Joseph. (1994). *A comparative study on the effectiveness of differential equations instruction with and without a computer algebra system*.

Kline, M. (1973). Why Johnny can't add. *New York: St*.

Lehrer, R. , & S. L. (2003). *Origins and evaluation of model-based reasoning in mathematics and science*.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). A Developmental Approach for Supporting the Epistemology of Modeling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 153–160). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_14

Leinbach, C., Pountney, D. C., & Etchells, T. (2002). Appropriate use of a CAS in the teaching and learning of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*(1), 1–14. https://doi.org/10.1080/00207390110087156

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Lesh, R., Hoover, M. N., Hole, B. L., Kelly, A. E., & Post, T. R. (2000). *Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers*.

Lin, P.-P., & Hsieh, C.-J. (1993). Parameter effects and solving linear equations in dynamic, linked, multiple representation environments. *The Mathematics Educator*, *4*(1).

Lingefjärd, T. (2002). Mathematical Modeling for Preservice Teachers: A Problem from Anesthesiology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(2), 117–143. https://doi.org/10.1023/A:1021122431218

Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L. M., & Arzarello, F. (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Istituto Della Enciclopedia Italiana.

Merrill, M. D. (2002). First principles of instruction. *Educational Technology Research and Development*, *50*(3), 43–59.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM*, *38*(3), 269–280. https://doi.org/10.1007/BF02652810

Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling. *Education*, *12*(1), 23–47.

Nabonnand, P. (2007). *Les réformes de l'enseignement des mathématiques au début du XXe siècle. Une dynamique à l'échelle international.* INRP; Vuibert.

Neill, H. (1975). Mathematics: society and curricula, by H. B. Griffiths and A. G. Howson. Pp xv, 423. £7·50 casebound, £3·50 paperback. 1974. SBN 0 521 20287 6/09892 0 (Cambridge University Press). *The Mathematical Gazette*, *59*(408), 115–116. https://doi.org/DOI: 10.2307/3616652

Niss, M. (2003). *MATHEMATICAL COMPETENCIES AND THE LEARNING OF MATHEMATICS: THE DANISH KOM PROJECT*.

Norman, F. A. , & P. M. K. (1994). *Cognitive obstacles to the learning of calculus: A Kruketskiian perspective*.

Nunes, T., Carraher, T. N., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 21–40.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250.

Orton, T. (1986). Introducing calculus: an accumulation of teaching ideas? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *17*(6), 659–668.

Palmiter, J. R. (1991). Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(2), 151–156.

Pearlstein, S. (2011). Mark them tardy to the revolution. *The Washington Post*, G5.

Pellerey, M. (1989). *Oltre gli insiemi: nascita, crescita e crisi dell'insiemistica: nuovi orientamenti nella didattica dell'aritmetica*. Tecnodid.

Pimm, D. (1990). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(1), 91–99. https://doi.org/10.1007/BF00311018

Pollak, H. O. (1977). The interaction between mathematics and other school subjects (including integrated courses). *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, 255–264.

Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400828678

Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 189–194.

Reigeluth, C. M., & Moore, J. (1999). Cognitive education and the cognitive domain. *Instructional-Design Theories and Models: A New Paradigm of Instructional Theory*, *2*, 51–68.

Repo, S. (1994). Understanding and reflective abstraction: Learning the concept of derivative in a computer environment. *International DERIVE Journal*, *1*(1), 97–113.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, *7*(4), 309–327.

Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. In *The Teaching of Geometry at the Pre-College Level* (pp. 272–276). Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8

Schubring, G. (1999). *Analysis of Historical Textbooks in Mathematics: Lecture Notes*. PUC do Rio de Janeiro, Department de Matemática.

Schubring, G. (2000). The first international curricular reform movement in mathematics and the role of Germany–A case study in the transmission of concepts. *Learning and Assessment in Mathematics and Science*, 265–287.

Schubring, G. (2008). The origins and early incarnations of ICMI. *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education*, 113–130.

Schubring, G. (2018). *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Autores Associados.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*(1), 20–26.

Skinner, B. F. (1954). Critique of psychoanalytic concepts and theories. *The Scientific Monthly*, *79*(5), 300–305.

Skoufi Alexandra and Avgerinos Evgenios, A PROPOSAL FOR THE TEACHING OF DIFFERENTIAL SOFTWARE CONCEPTS using "visualization": Didactical projects FOR TEACHING MATHEMATICS in secondary level students, Proceedings of the 29th Pan-Hellenic Conference of Mathematical Education with International Participation, of the Hellenic Mathematical Society (HMS),, p. , 198-209, Kalamata, November 2012

Slavit, D. (1998). Three women's understandings of algebra in a precalculus course integrated with the graphing calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(3), 355–372.

Smith, D. E. (1905). Opinion de David-Eugene Smith sur les réformesa accomplir dans l'enseignement des mathématiques. *L'Enseign. Math*, *7*, 469–471.

Sol, M., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). *Project Modelling Routes in 12–16-Year-Old Pupils* (pp. 231–240). https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_24

Sriraman, B. (2006). Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1686–1695.

Stemhagen, K. (2008). Doin'the math: on meaningful mathematics-ethics connections. *The Mathematics Enthusiast*, *5*(1), 59–66.

Streefland, L. (1996). Negative numbers: Reflections of a learning researcher. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 57–77. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90040-1

Struik, D. J. (1987). A concise history of mathematics (4th). *Mineola, NY: Dover*.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, *110*.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Tall, D. (1996a). Functions and calculus. In *International handbook of mathematics education* (pp. 289–325). Springer.

Tall, D. (1996b). Functions and calculus. In *International handbook of mathematics education* (pp. 289–325). Springer.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(1), 39–50.

Tall, D. O., & West, B. (1986). Graphic insight into calculus and differential equations. *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching*, 107–119.

Törner, G., & Sriraman, B. (2005). Issues and tendencies in German Mathematics Didactics: An epochal perspective. *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, *1*, 197–202.

Treffers, A. (1987). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 125–145.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81–95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5

Tucker, A., & Leitzel, J. R. C. (1995). *Assessing calculus reform efforts: A report to the community* (Vol. 6). Mathematical Assn of Amer.

Tyack, D. B. (1974). *The one best system: A history of American urban education* (Vol. 95). Harvard University Press.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute CD-Rom for ICME9*, 1–32.

Vargas, E. A., & Vargas, J. S. (1996). BF Skinner and the origins of programmed instruction. *BF Skinner and Behaviorism in American Culture*, 237–253.

Verschaffel, L., & de Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 577–601.

Verschaffel, L., de Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 339–359.

Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2002). Everyday Knowledge and Mathematical Modeling of School Word Problems. In *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education* (pp. 257–276). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_16

Vorhölter, K., Kaiser, G., & Borromeo Ferri, R. (2014). Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education. In *Transforming mathematics instruction* (pp. 21–36). Springer.

White, P. (1990). Is calculus in trouble? *Australian Senior Mathematics Journal*, *4*(2), 105–110.

White, P. (1993). Differential calculus. *Reflections*, *18*(4), 31–34.

Wood, R., & Ashfield, J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: a case study. *British Journal of Educational Technology*, *39*(1), 84–96.

Yackel, E., Stephan, M., Rasmussen, C., & Underwood, D. (2003). Didactising: continuing the work of Leen Streefland. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 101–126.

Zawojewski, J. S., Lesh, R., & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. *Beyond Constructivism: Models and*

Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching, 337–358.