Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική εργασία

Διδασκαλία και μάθηση εννοιών συνδυαστικής με ιστορική προοπτική

Εμμανουήλ Λαμπαρδάκης

(Α.Μ. 150390)

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Αθήνα, Ιούνιος 2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Διδασκαλία και μάθηση εννοιών συνδυαστικής με ιστορική προοπτική

Εμμανουήλ Λαμπαρδάκης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων καθηγητής:	Συν-Επιβλέπων καθηγητής:
Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας	Ευγένιος Αυγερινός Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη περίπτωσης είχε ως στόχο να διερευνήσει την αποτελεσματικότητα της χρήσης μιας ιστορικής προσέγγισης για τη διδασκαλία της συνδυαστικής σε μαθητές λυκείου. Δύο μαθητές συμμετείχαν σε μια δίωρη διδακτική συνεδρία χρησιμοποιώντας ένα σχέδιο διδασκαλίας βασισμένο στην ιστορία της συνδυαστικής. Η μελέτη χρησιμοποίησε ένα σχέδιο σύγκρισης pre-test και post-test για να αξιολογήσει τα επίπεδα απόκτησης γνώσεων και ικανοποίησης των μαθητών. Τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική βελτίωση των γνώσεων και της κατανόησης των μαθητών για τη συνδυαστική, καθώς και την ικανοποίησή τους από τη μέθοδο διδασκαλίας. Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι η ενσωμάτωση μιας προσέγγισης βασισμένης στην ιστορία στη διδασκαλία της συνδυαστικής μπορεί να βελτιώσει τη δέσμευση, το ενδιαφέρον και τη διατήρηση της γνώσης των μαθητών.

Λέξεις Κλειδιά: Συνδυαστική, Μαθηματικά, Ιστορία, Διδακτική παρέμβαση

Abstract

This case study aimed to explore the effectiveness of using a history approach to teach combinatronics to high school students. Two students participated in a two-hour teaching session using a history-based curriculum on combinatronics. The study utilized a pre-test/post-test design to measure the students' knowledge acquisition and satisfaction levels. The results indicated a significant improvement in the students' knowledge and understanding of combinatronics, as well as their satisfaction with the teaching method. The findings suggest that incorporating a history-based approach into combinatronics teaching can improve students' engagement, interest, and retention of knowledge.

Περιεχόμενα

Λίστα πινάκων

Λίστα εικόνων

Λίστα διαγραμμάτων

Εισαγωγή

Η συνδυαστική είναι ένα πεδίο των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη της μέτρησης και της διάταξης αντικειμένων. Ασχολείται με τον αριθμό των πιθανών αποτελεσμάτων ή διευθετήσεων ενός δεδομένου συνόλου αντικειμένων. Η μελέτη της συνδυαστικής είναι ζωτικής σημασίας σε πολλούς τομείς, όπως η επιστήμη των υπολογιστών, η μηχανική, η φυσική και άλλες επιστήμες. Είναι ένα ουσιαστικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων σε αυτούς τους τομείς, καθώς παρέχει ένα πλαίσιο για την ανάλυση και την οργάνωση δεδομένων (Mazur, 2010).

Στη συνδυαστική, η εστίαση είναι στη μελέτη πεπερασμένων συνόλων, δηλαδή συνόλων που έχουν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Το κύριο ερώτημα στη συνδυαστική είναι πόσοι τρόποι υπάρχουν για να επιλεχθεί ή ταξινομηθεί ένα σύνολο αντικειμένων. Υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί τομείς εντός της συνδυαστικής, όπως η απαρίθμηση, η θεωρία γραφημάτων, η θεωρία σχεδίασης και η συνδυαστική βελτιστοποίηση (Tucker, 2018).

Η συνδυαστική είναι ένα σημαντικό πεδίο των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη της μέτρησης και της διάταξης αντικειμένων. Είναι ένα ζωτικό εργαλείο σε πολλούς τομείς της επιστήμης, της μηχανικής και της επιστήμης των υπολογιστών και παρέχει ένα πλαίσιο για την ανάλυση και την οργάνωση δεδομένων. Οι έννοιες της μετάθεσης και του συνδυασμού είναι θεμελιώδεις για τη μελέτη της συνδυαστικής και χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου (Tucker, 2018).

Το αντικείμενο της συνδυαστικής έχει μια πληθώρα πρακτικών χρήσεων στους τομείς της επιστήμης των υπολογιστών, της κρυπτογραφίας, της στατιστικής και διαφόρων άλλων κλάδων. Η διδασκαλία της συνδυαστικής είναι ένα κρίσιμο συστατικό για τον εξοπλισμό των μαθητών με τις απαραίτητες δεξιότητες για μαθηματικά ανώτερου επιπέδου και άλλα πεδία που απαιτούν την εφαρμογή συνδυαστικών αρχών. Η διδασκαλία της συνδυαστικής έχει σημαντική σημασία για την ενίσχυση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων και την ενίσχυση των ικανοτήτων συλλογιστικής.

Η διδασκαλία της συνδυαστικής αρχίζει με την αρχική έκθεση θεμελιωδών εννοιών, συμπεριλαμβανομένων, ενδεικτικά, της απαρίθμησης, των μεταθέσεων και των συνδυασμών. Τα προβλήματα μέτρησης σχετίζονται με τον υπολογισμό των πιθανών διευθετήσεων ή επιλογών ενός συγκεκριμένου συνόλου αντικειμένων. Οι μεταθέσεις αναφέρονται στις διακριτές διατάξεις των αντικειμένων σε μια συγκεκριμένη ακολουθία, ενώ οι συνδυασμοί αφορούν την επιλογή των αντικειμένων χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η σειρά τους. Οι προαναφερθείσες έννοιες χρησιμεύουν ως θεμελιώδης βάση για πιο περίπλοκα θέματα, όπως η θεωρία γραφημάτων και η αλγεβρική συνδυαστική (Hart & Sandefur, 2017).

Η επίλυση προβλημάτων είναι μια συχνά χρησιμοποιούμενη προσέγγιση για την διδασκαλία της συνδυαστικής. Οι εκπαιδευτικοί έχουν την ικανότητα να παρέχουν στους μαθητές μια σειρά από προβλήματα που απαιτούν την εφαρμογή συνδυαστικών αρχών προκειμένου να επιτευχθεί λύση. Τα προαναφερθέντα ζητήματα μπορούν να εκτεθούν σε διάφορες μορφές, συμπεριλαμβανομένων, ενδεικτικά, λεκτικών ή μαθηματικών γρίφων. Η συνεργατική επίλυση προβλημάτων σε ομάδες παρέχει μια ευκαιρία στους μαθητές να ενισχύσουν τις ικανότητες επικοινωνίας και ομαδικής εργασίας τους (Lockwood et al., 2020).

Μια εναλλακτική παιδαγωγική στρατηγική για τη διδασκαλία της συνδυαστικής είναι η ενσωμάτωση οπτικών βοηθημάτων. Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν οπτικά βοηθήματα, όπως διαγράμματα, πίνακες και άλλες γραφικές αναπαραστάσεις, προκειμένου να βελτιώσουν την κατανόηση των συνδυαστικών εννοιών από τους μαθητές. Ένας εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα δενδροδιάγραμμα ως οπτικό βοήθημα για να δείξει τον πιθανό αριθμό αποτελεσμάτων σε ένα δεδομένο σενάριο. Αυτή η παιδαγωγική προσέγγιση μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα αποτελεσματική για μαθητές που εκδηλώνουν ισχυρότερη κλίση προς οπτικά ερεθίσματα (Hart & Sandefur, 2017).

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην παιδαγωγική προσέγγιση μπορεί να χρησιμεύσει ως ευεργετικό πλεονέκτημα στη διδασκαλία της συνδυαστικής, παράλληλα με τις συμβατικές μεθοδολογίες στην τάξη. Η χρήση λογισμικού υπολογιστών και διαδικτυακών εργαλείων μπορεί να διευκολύνει την προσομοίωση πραγματικών σεναρίων, παρέχοντας στους μαθητές μια δια δραστική πλατφόρμα για την ενίσχυση των συνδυαστικών δεξιοτήτων τους. Οι εκπαιδευτικοί έχουν την επιλογή να χρησιμοποιούν προσομοιώσεις υπολογιστή ως εργαλείο για τη μοντελοποίηση των διαφόρων μεταθέσεων και συνδυασμών που μπορούν να προκύψουν από ένα δεδομένο σύνολο αντικειμένων (Lockwood et al., 2020).

Ένα εμπόδιο που συναντάται στην παιδαγωγική της συνδυαστικής είναι η ανάγκη εφαρμογής της αφηρημένης σκέψης. Ένα σημαντικό μέρος των θεμάτων αφορά τον υπολογισμό ενός τεράστιου αριθμού πιθανών αποτελεσμάτων ή την εξέταση σεναρίων που περιλαμβάνουν πολλές μεταβλητές. Αυτό μπορεί να αποτελέσει πρόκληση για τους μαθητές που παρουσιάζουν μεγαλύτερο βαθμό άνεσης με απτές έννοιες. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να επινοήσουν στρατηγικές για να βελτιώσουν την κατανόηση αυτών των εννοιών από τους μαθητές, αποδομώντας τις σε πιο διαχειρίσιμα στοιχεία και παρέχοντας οπτικοποιήσεις που σχετίζονται με τις καθημερινές τους εμπειρίες (Bunimovich, 2011).

Ένα εξέχουσας σημασίας πρόβλημα στη διδασκαλία της συνδυαστικής σχετίζεται με την ετερογένεια της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, καθώς υπάρχει μεγάλη διαφορά όσον αφορά ρυθμό με τον οποίο οι μαθητές κατακτούν θεμελιώδεις έννοιες, με κάποιους να παρουσιάζουν γρήγορη κατανόηση και άλλους να αντιμετωπίζουν δυσκολίες, συνεπώς, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να έχουν την ικανότητα να τροποποιούν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις για να καλύπτουν διαφορετικές μεθόδους μάθησης και επίπεδα ικανοτήτων. Η συγκεκριμένη διαπίστωση θα μπορούσε ενδεχομένως να συνεπάγεται την παροχή συμπληρωματικής βοήθειας σε μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες ή την παρουσίαση πιο περίπλοκων προβλημάτων σε προχωρημένους μαθητές για να ενισχυθούν οι δεξιότητες (Bunimovich, 2011).

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τη διδασκαλία διαφόρων μαθηματικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένης της συνδυαστικής. Μαθαίνοντας για την προέλευση των συνδυαστικών προβλημάτων και την ανάπτυξη συνδυαστικών μεθόδων, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν βαθύτερη εκτίμηση για το θέμα και καλύτερη κατανόηση των υποκείμενων εννοιών. Στην παρούσα εργασία, θα διερευνηθεί η χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία της συνδυαστικής, μέσα από τη μελέτη περίπτωσης εφαρμογής μίας διδακτικής παρέμβασης σε μαθητές της Γ' τάξης του Λυκείου (B, 1995).

Οι ρίζες των συνδυαστικών προβλημάτων βρίσκονται στους αρχαίους πολιτισμούς, όπου η καταμέτρηση και η απαρίθμηση ήταν σημαντικές για διάφορους πρακτικούς σκοπούς, όπως η μέτρηση της γης ή η παρακολούθηση του εμπορίου. Για παράδειγμα, ο Πάπυρος Rhind, ένα αρχαίο αιγυπτιακό μαθηματικό έγγραφο από περίπου το 1650 π.Χ., περιέχει προβλήματα που περιλαμβάνουν μέτρηση και συνδυαστική. Συζητώντας αυτά τα πρώιμα παραδείγματα, οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να κατανοούν την πρακτική προέλευση της συνδυαστικής.

Προχωρώντας στην ιστορία, μπορούν να εξεταστούν τα έργα διάσημων μαθηματικών που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της συνδυαστικής. Για παράδειγμα, ο Γάλλος μαθηματικός Blaise Pascal (1623-1662) είναι γνωστός για το έργο του στους συνδυασμούς και το διωνυμικό θεώρημα. Το τρίγωνο του Pascal είναι ένα πολύ γνωστό εργαλείο για τη δημιουργία συνδυασμών και οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν αυτό το εργαλείο και την ιστορία του. Ένας άλλος διάσημος μαθηματικός στον τομέα της συνδυαστικής είναι ο Leonhard Euler (1707-1783), ο οποίος εργάστηκε στη θεωρία γραφημάτων και στην ανάπτυξη της θεωρίας των κατατμήσεων. Μαθαίνοντας για τη συμβολή αυτών και άλλων μαθηματικών, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν την εξέλιξη των συνδυαστικών μεθόδων (Grimaldi, 2003).

Η χρήση ιστορικών παραδειγμάτων και βιογραφιών μαθηματικών μπορεί επίσης να χρησιμεύσει ως ένας τρόπος για την εμπλοκή των μαθητών και την προώθηση του ενδιαφέροντος για το θέμα. Οι μαθητές μπορεί να εμπνευστούν μαθαίνοντας για τη ζωή διάσημων μαθηματικών και τις προκλήσεις που αντιμετώπισαν κατά την ανάπτυξη των ιδεών τους. Διερευνώντας το ιστορικό πλαίσιο στο οποίο εργάστηκαν αυτοί οι μαθηματικοί, οι μαθητές μπορούν επίσης να κατανοήσουν καλύτερα τις κοινωνικές και διανοητικές δυνάμεις που διαμόρφωσαν την ανάπτυξη των μαθηματικών.

Εκτός από την εισαγωγή ιστορικών παραδειγμάτων και βιογραφιών, υπάρχουν διάφοροι άλλοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ιστορία της συνδυαστικής για τη διδασκαλία του θέματος. Μια άλλη προσέγγιση είναι η ενσωμάτωση ιστορικών παραδειγμάτων σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων.

Η χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία της συνδυαστικής μπορεί να είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τη συμμετοχή των μαθητών και την προώθηση της κατανόησης του θέματος. Με την εισαγωγή ιστορικών παραδειγμάτων και βιογραφιών, την παρουσίαση ιστορικών προβλημάτων και την ενσωμάτωση ιστορικών μεθόδων σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν βαθύτερη εκτίμηση για το θέμα και καλύτερη κατανόηση των υποκείμενων εννοιών (Rosen, 2019).

Αν και ποικίλες έρευνες έχουν αναδείξει την αξία της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών, η παρούσα, στοχεύει να αναδείξει πως η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να φανεί χρήσιμη σε ένα ιδιαίτερα δύσκολο πεδίο διδασκαλίας, το πεδίο της συνδυαστικής.

Για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας, πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση 2 ωρών σε δύο μαθητές της τρίτης τάξης του λυκείου, στο μάθημα της συνδυαστικής, στην οποία χρησιμοποιήθηκε μία προσέγγιση που περιλάμβανε την ιστορία της συνδυαστικής. Για να εξαχθούν συμπεράσματα σε σχέση με το εάν η ιστορική προσέγγιση βοήθησε εν τέλει τους μαθητές στην κατανόηση του μαθήματος, πραγματοποιήθηκε pre test και post test, και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα.

Η εργασία δομείται σε τέσσερα κεφάλαια, τα οποία περιλαμβάνουν μία θεωρητική εισαγωγή στην έννοια και την ιστορία της συνδυαστικής, αναφορά στη θέση της διδασκαλίας της συνδυαστικής στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, εξέταση ερευνών σχετικά με τη διδασκαλία και η παρουσίαση της παρέμβασης και τον αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν από την έρευνα.

Κεφάλαιο 1: Ιστορία των εννοιών της συνδυαστικής

1.1.Ορισμός

Η συνδυαστική, συχνά γνωστή ως συνδυαστικά μαθηματικά, είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που επικεντρώνεται στην επίλυση ζητημάτων που αφορούν την επιλογή, τη διάταξη και τη λειτουργία εξαρτημάτων που αποτελούν μέρος ενός πεπερασμένου ή διακριτού συστήματος. Στο πεδίο περιλαμβάνεται επίσης η συνδυαστική γεωμετρία (Kahn et al., 2008).

Ο προσδιορισμός του συνολικού αριθμού πιθανών διαμορφώσεων (όπως γραφήματα, σχέδια και πίνακες) ενός συγκεκριμένου τύπου είναι μια από τις θεμελιώδεις προκλήσεις στον τομέα της συνδυαστικής. Ακόμη και σε περιπτώσεις όπου οι κανόνες που καθορίζουν τη διαμόρφωση δεν είναι υπερβολικά περίπλοκοι, η απαρίθμηση μπορεί μερικές φορές να είναι συνδεδεμένη με ανυπέρβλητες προκλήσεις. Σε πολλές περιπτώσεις, είναι πιθανό ότι ο μαθηματικός θα πρέπει να συμβιβαστεί με την ανακάλυψη μιας προσέγγισης της σωστής λύσης, ή τουλάχιστον, ενός αξιόπιστου κάτω και άνω ορίου (Biggs, 1979).

1.2.Η ιστορία της συνδυαστικής και τα προβλήματα που επιλύθηκαν με τη χρήση της

1.2.1.Η συνδυαστική από την Αρχαιότητα ως το Μεσαίωνα

Στα ινδικά μαθηματικά, προβλήματα που αφορούν μεταθέσεις και συνδυασμούς προκύπτουν συχνά, αλλά ποτέ δεν υποστηρίζονται από κανένα επιχείρημα ή λογική. Για παράδειγμα, η ιατρική πραγματεία της *Σουσρούτα*, η οποία πιθανότατα γράφτηκε τον έκτο αιώνα π.Χ., αναφέρει ότι υπάρχουν 63 διαφορετικοί συνδυασμοί που μπορούν να πραγματοποιηθούν από τις έξι διαφορετικές γεύσεις, οι οποίες είναι πικρή, ξινή, αλμυρή, πικάντικη, γλυκιά και καυτερή, και ότι αυτοί οι συνδυασμοί μπορούν να γίνουν παίρνοντας τις γεύσεις μία τη φορά, δύο τη φορά, τρεις τη φορά κ.λπ. Με άλλα λόγια, υπάρχουν έξι διαφορετικές γεύσεις που ξεχωρίζουν, δεκαπέντε διαφορετικοί συνδυασμοί δύο γεύσεων (όπως «πικρό και ξινό», «πικρό, αλμυρό» και «αλμυρό και γλυκό»), είκοσι διαφορετικοί συνδυασμοί τριών γεύσεων (όπως «πικρό, ξινό, αλμυρό» και «ξινό, γλυκό, καυτερό»). Άλλα αρχαία κείμενα έχουν δηλώσεις που είναι συγκρίσιμες με αυτές, αλλά οι αριθμοί που εμπλέκονται είναι πάντα επαρκώς διαχειρίσιμοι και η απλή απαρίθμηση είναι το μόνο που απαιτείται για την εξαγωγή των λύσεων.

Από την άλλη πλευρά, ο αστρονόμος Varahamihira έκανε την παρατήρηση τον έκτο αιώνα ότι εάν η ποσότητα των δεκαέξι διαφορετικών ουσιών αλλάξει με έναν από τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους, ο τελικός αριθμός θα είναι 1820 (Caruth et al., 2004).

Ο Varahamihira προσπαθούσε να παράγει αρώματα χρησιμοποιώντας μόνο τέσσερα από τα συνολικά δεκαέξι συστατικά, και είχε διαπιστώσει ότι υπήρχαν ακριβώς 1820 διαφορετικοί τρόποι για να τα επιλέξει. Επειδή είναι πολύ απίθανο ο συγγραφέας να μέτρησε πραγματικά και τις 1820 πιθανές μεταθέσεις, προκύπτει ότι γνώριζε μια μέθοδο για τον υπολογισμό αυτής της τιμής. Ωστόσο, δεν υπάρχει κάποιος τύπος που να ταιριάζει με αυτήν την περιγραφή στα ινδικά μαθηματικά μέχρι τον ένατο αιώνα. Εκείνη την εποχή, ο Mahavira παρείχε τον συμβατικό αλγόριθμο για τον προσδιορισμό των αριθμών των συνδυασμών στο *Ganitasarasangraha* του. Ήταν μια φόρμουλα που εξέθεσε με λέξεις, αλλά η οποία μπορεί απλά να μετατραπεί με σύγχρονους όρους σε μαθηματική παράσταση. Αν και ο Mahavira δεν παρείχε καμία απόδειξη αυτής της φόρμουλας, εφάρμοσε τους κανόνες της σε δύο διαφορετικά προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα αφορούσε τους διάφορους συνδυασμούς γεύσεων και το δεύτερο πρόβλημα αφορούσε τους διάφορους συνδυασμούς κοσμημάτων που μπορούσαν να φορεθούν σε ένα κολιέ. Αυτά τα κοσμήματα θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν διαμάντια, ζαφείρια, σμαράγδια, κοράλλια και μαργαριτάρια. Τρεις αιώνες αργότερα, ο αστρονόμος Bhaskara (1114-1185) κατέθεσε την ίδια φόρμουλα και την εφάρμοσε σε δυσκολίες στην ποίηση που ασχολείται με τις παραλλαγές στο μέτρο και τη συλλαβή. Ο Bhaskara ήταν το πρώτο άτομο που παρατήρησε ότι ο αριθμός των μεταθέσεων n στοιχείων είναι ίσος με n. Χρησιμοποίησε αυτό το γεγονός για να καταλάβει όλες τις διαφορετικές μορφές που μπορεί να πάρει ο θεός Σίβα. Ο Bhaskara ήταν ένας από τη μακρά σειρά Ινδών αστρονόμων που έζησαν κατά τη μεσαιωνική περίοδο. Αυτοί οι αστρονόμοι υπηρέτησαν έναν από τους Ινδουιστές ή μουσουλμάνους ηγεμόνες των ινδικών χωρών παρέχοντας αστρολογικές συμβουλές και απαντώντας σε ημερολογιακά ζητήματα. (Caruth et al., 2004).

Το I Ching είναι ένα αρχαίο κινέζικο βιβλίο που χρονολογείται πριν από το έτος 2205 π.Χ. και θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα κείμενα στην ιστορία της παγκόσμιας λογοτεχνίας.

Σύμφωνα με έναν μύθο που προέρχεται από την Κίνα, η ηλικία του είναι τόσο μεγάλη που προηγείται της καταγεγραμμένης ιστορίας. Πιστεύεται ότι ο πρώτος από τους τέσσερις συγγραφείς που έζησαν κατά τη διάρκεια μιας από τις τέσσερις διαφορετικές εποχές της ιστορίας έζησε την εποχή που έγιναν οι πρώτες απόπειρες μαγειρικής. Από την άλλη, η εκδοχή του Κομφούκιου που υπάρχει σήμερα χρονολογείται από το 551-479 π.Χ.

Το I-Ching εξακολουθεί να χρησιμοποιείται ευρέως στη σύγχρονη Κίνα. Όταν μεταδίδουν τη σοφία τους στους πελάτες τους, οι μάντεις συμβουλεύονται συχνά το I-Ching. Το I-Ching αναφέρεται συχνά στις επιγραφές που βρίσκονται στις πινακίδες πολλών διαφορετικών τύπων κτιρίων. Πολλοί από τους σημερινούς ανθρώπους με τη μεγαλύτερη επιρροή αναζητούν έμπνευση και κατεύθυνση από το συγκεκριμένο κείμενο. Το I Ching χρησιμοποιεί σχήματα γνωστά ως τρίγραμμα και εξάγραμμα για να απεικονίσει φυσικές διαδικασίες που σχετίζονται με τις εγγενείς ιδιότητες των ατόμων και των πραγμάτων (Caruth et al., 2004).

Η εβραϊκή και η ισλαμική βιβλιογραφία παρέχουν μερικά από τα πρώτα δημοσιευμένα γραπτά που δικαιολογούν τους βασικούς κανόνες μέτρησης που είναι γνωστοί στην Ινδία. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι ο πρωταρχικός στόχος της αρχικής εργασίας και στις δύο αυτές περιπτώσεις ήταν να προσδιοριστεί ο αριθμός των διακριτών λέξεων που μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας τα γράμματα του εβραϊκού και του αραβικού αλφαβήτου. Ο συλλογισμός πίσω από αυτό ήταν ότι ο Θεός αρχικά βρήκε τα μεμονωμένα γράμματα που συνθέτουν το αλφάβητο και στη συνέχεια χρησιμοποίησε αυτά τα γράμματα για να κατασκευάσει τις λέξεις που επικαλούνταν τη δημιουργία του κόσμου (Caruth et al., 2004).Ο Ινδός μαθηματικός Bhaskara, ήταν εξοικειωμένος με τους διωνυμικούς συντελεστές, γνωστούς και ως ακέραιους συντελεστές στην επέκταση του $(a + b)_n$. Στο βιβλίο του με τίτλο *Llvat* ("The

Graceful"), ο Bhaskara παρείχε τους κανόνες για τον υπολογισμό των διωνυμικών συντελεστών μαζί με επεξηγηματικά παραδείγματα. Ο Πέρσης λόγιος Nar ad-Din a-si του 13ου αιώνα δίδασκε το σχήμα που σήμερα είναι γνωστό ως "τρίγωνο του Πασκάλ", το οποίο είναι μια τριγωνική διάταξη διωνυμικών συντελεστών (Biggs, 1979).

O Saadia Gaon κατάγεται από την Αίγυπτο, αλλά έζησε στη Συρία και το Ιράκ κατά το δεύτερο μισό της ζωής του. Το έτος 922, ορίστηκε ως αρχηγός ενός εβραϊκού ταλμουδικού ιδρύματος που βρισκόταν στη Σούρα, μια τοποθεσία κοντά στη Βαγδάτη, η οποία βρίσκεται σήμερα στο Ιράκ. Σε αυτό το ρόλο, του ανατέθηκε η ερμηνεία του γραπτού εβραϊκού νόμου προκειμένου να δώσει απαντήσεις σχετικά με τη συνάφειά του με συγκεκριμένα σενάρια του πραγματικού κόσμου.

Ο Saadia χρησιμοποίησε τις γνώσεις του για το *Sefer Yetzirah*, ένα μυστικιστικό εβραϊκό κείμενο, για να επεκταθεί στις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται σε αυτό. Το *Sefer Yetzirah* θεωρείται ένα από τα πιο αρχαία και αινιγματικά κείμενα της Καμπάλα.

Πραγματοποίησε υπολογισμούς για να προσδιορίσει τον συνολικό αριθμό μοναδικών μεταθέσεων για συμβολοσειρές που αποτελούνται από 8, 9, 10 και 11 γράμματα, όπου κάθε γράμμα είναι ξεχωριστό. Ο Saadia υπολόγισε ότι υπάρχουν 39.916.800 μεταθέσεις ενός συνόλου 11 γραμμάτων. Ο συγγραφέας έθεσε επίσης τη δυνατότητα να απαριθμήσει εξαντλητικά όλες τις πιθανές μεταθέσεις των 22 γραμμάτων που αποτελούν το εβραϊκό αλφάβητο, αν και αναγνωρίζοντας το μη πρακτικό αυτής της εργασίας λόγω της τεράστιας υπολογιστικής πολυπλοκότητάς του (Caruth et al., 2004).

1.2.2.Η συνδυαστική από το Διαφωτισμό ως τη σύγχρονη εποχή

Τόσο ο Blaise Pascal όσο και ο Pierre de Fermat, και οι δύο από τη Γαλλία είναι αυτοί που ανακάλυψαν πολλά κλασικά αποτελέσματα συνδυαστικής σε σχέση με την ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων κατά τον 17ο αιώνα. Αυτή η χρονική περίοδος θεωρείται γενικά ως η αρχή της συνδυαστικής στον δυτικό κόσμο.

Ο Gottfried Wilhelm Leibniz, Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός, ήταν ο πρώτος άνθρωπος που χρησιμοποίησε τον όρο συνδυαστική με τη σύγχρονη μαθηματική έννοια. Αναγνώρισε τις πιθανές εφαρμογές αυτού του νέου πεδίου σπουδών σε όλους τους τομείς στην επιστημονική κοινότητα (Khan et al., 2008).

Ο Leonhard Euler, ένας Ελβετός μαθηματικός, έχει αναγνωριστεί ως το πρόσωπο που ήταν τελικά υπεύθυνο για την ίδρυση μιας πραγματικής σχολής συνδυαστικών μαθηματικών στις αρχές του 18ου αιώνα. Όταν έλυσε το πρόβλημα της γέφυρας Konigsberg, καθιερώθηκε ως ο «ιδρυτής» της θεωρίας γραφημάτων. Ωστόσο, η γνωστή του υπόθεση σχετικά με τα λατινικά τετράγωνα δεν εξετάστηκε παρά το 1959 (Biggs, 1979).

Στην Αγγλία, ο Arthur Cayley, κοντά στα τέλη του 19ου αιώνα, συνέβαλε ουσιαστικά στην αριθμητική θεωρία γραφημάτων, ενώ ο James Joseph Sylvester ανακάλυψε αρκετά συνδυαστικά συμπεράσματα. Ο Βρετανός μαθηματικός George Boole χρησιμοποίησε συνδυαστικές μεθόδους σε σχέση με την ανάπτυξη της συμβολικής λογικής περίπου την ίδια εποχή. Οι συνδυαστικές ιδέες και μέθοδοι του Henri Poincaré, που αναπτύχθηκαν στις αρχές του 20ου αιώνα σε σχέση με το πρόβλημα των n σωμάτων, οδήγησαν στην πειθαρχία της τοπολογίας (Biggs, 1979).

Συνδυαστικές τοπικές μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν επίσης από τον George Boole περίπου την ίδια εποχή. Κατά τον 19ο αιώνα, παρουσιάστηκε μια σειρά από συνδυαστικά παζλ με μοναδικό σκοπό την παροχή πνευματικής διέγερσης. Αυτά τα παζλ είναι γνωστά με ονόματα όπως "το πρόβλημα με τις οκτώ βασίλισσες" και "το δίλημμα των μαθητών του Κίρκμαν". Από την άλλη πλευρά, η αρχή της θεωρίας του σχεδιασμού μπορεί να αναχθεί στην έρευνα του Thomas P. Kirkman για τα τριπλά συστήματα, την οποία ξεκίνησε το 1847. Στη δεκαετία του 1850, ο γεννημένος στην Ελβετία Γερμανός μαθηματικός Jakob Steiner συνέχισε το έργο του Kirkman για τα τριπλά συστήματα. Το Lehrbuchder Combinatorik (1901, *Textbook of Combinatorics*) του Γερμανού μαθηματικού Eugen Netto και το *Combinatory Analysis* του Βρετανού μαθηματικού Percy Alexander MacMahon (1915–16) είναι δύο από τα πρώτα βιβλία που είναι αφιερωμένα αποκλειστικά στη συνδυαστική. Αυτά τα έργα προσφέρουν μια άποψη της συνδυαστικής θεωρίας όπως υπήρχε πριν από το έτος 1920 (Lovazs & Promel, 2004).

Από το 1920, η ταχύτητα ανάπτυξης της συνδυαστικής θεωρίας επιταχύνεται λόγω της συμβολής πολλών διαφορετικών λόγων. Ένα από αυτά ήταν η ανάπτυξη της στατιστικής θεωρίας του σχεδιασμού των πειραμάτων από τους Άγγλους στατιστικολόγους Ronald Fisher και Frank Yates. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα πολλά προβλήματα συνδυαστικού ενδιαφέροντος και οι λύσεις που αναπτύχθηκαν αρχικά για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, που βρήκαν εφαρμογές σε άλλους τομείς, όπως η θεωρία κωδικοποίησης. Η θεωρία της πληροφορίας, που εμφανίστηκε περίπου στα μέσα του αιώνα, έχει επίσης εξελιχθεί σε μια πλούσια πηγή συνδυαστικών προβλημάτων ενός εντελώς νέου είδους (Biggs, 1979).

Η θεωρία γραφημάτων είναι ένας άλλος παράγοντας που συνέβαλε στην πρόσφατη αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος για τη συνδυαστική. Η σημασία αυτού του κλάδου των μαθηματικών έγκειται στο γεγονός ότι τα γραφήματα μπορούν να λειτουργήσουν ως αφηρημένα μοντέλα για μια μεγάλη ποικιλία διαφορετικών ειδών σχεσιακών σχημάτων που περιλαμβάνουν σύνολα αντικειμένων. Οι τομείς της επιχειρησιακής έρευνας, της χημείας, της στατιστικής μηχανικής, της θεωρητικής φυσικής και των κοινωνικοοικονομικών προβλημάτων είναι μόνο λίγοι από τους τομείς που μπορούν να επωφεληθούν από την εφαρμογή της. Ένα από τα υποπεδία που εμπίπτουν στην αρμοδιότητα της θεωρίας των κατευθυνόμενων γραφημάτων είναι η θεωρία των δικτύων μεταφοράς. Το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων, θεωρείται ότι είναι ένα από τα πιο δύσκολα θεωρητικά ζητήματα που μπορούν να βρεθούν στη σφαίρα της θεωρίας γραφημάτων. Επιπλέον, έχει εφαρμογές και σε άλλους τομείς των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένης της θεωρίας των ομάδων (Lovazs & Promel, 2004).

Η άνοδος της τεχνολογίας των υπολογιστών στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα είναι ένας από τους κύριους λόγους για τους οποίους οι άνθρωποι ενδιαφέρονται για τα πεπερασμένα μαθηματικά και ειδικότερα τη συνδυαστική θεωρία. Συνδυαστικές δυσκολίες προκύπτουν όχι μόνο στην αριθμητική ανάλυση αλλά και στο σχεδιασμό συστημάτων υπολογιστών και στη χρήση των υπολογιστών σε προβλήματα όπως αυτά της αποθήκευσης και ανάκτησης πληροφοριών (Biggs, 1979).

Τα συνδυαστικά προβλήματα μπορούν να αναχθούν στη στατιστική μηχανική, η οποία είναι και μια από τις παλαιότερες και πιο παραγωγικές γεννήτριες τέτοιων προβλημάτων. Από τα μέσα του 20ου αιώνα, εφαρμοσμένοι μαθηματικοί και φυσικοί έχουν πραγματοποιήσει πολύ σημαντική συνδυαστική εργασία. Ένα παράδειγμα είναι η δουλειά που έχει γίνει στα μοντέλα Ising.

Οι συνδυαστικές μέθοδοι έχουν αποδειχθεί χρήσιμες σε μια μεγάλη ποικιλία υποπεδίων εντός της σφαίρας των καθαρών μαθηματικών, όπως οι πιθανότητες, η άλγεβρα (συμπεριλαμβανομένων των πεπερασμένων ομάδων και πεδίων, η θεωρία πινάκων και πλέγματος), η θεωρία αριθμών (σύνολα διαφορών), η θεωρία συνόλων (θεώρημα του Sperner) και μαθηματική λογική (θεώρημα Ramsey) (Lovazs & Promel, 2004).

Σε αντίθεση με την ευρεία ποικιλία των συνδυαστικών προβλημάτων και το πλήθος των προσεγγίσεων που έχουν εφευρεθεί για την αντιμετώπισή τους, δεν φαίνεται να υπάρχει μια ενιαία θεμελιώδης θεωρία που να μπορεί να εξηγήσει τα πάντα. Από την άλλη πλευρά, ενοποιητικές αρχές και διασυνδέσεις έχουν αρχίσει να εμφανίζονται σε μια ποικιλία εφαρμογών συνδυαστικής θεωρίας. Στο τελευταίο τέταρτο του 20ου αιώνα, μια από τις προκλήσεις που προσπαθούν να ξεπεράσουν οι μαθηματικοί είναι η αναζήτηση ενός υποκείμενου μοτίβου που μπορεί να εξηγήσει, κατά κάποιο τρόπο, πώς συνυφαίνονται τα πολλά στοιχεία της συνδυαστικής (Biggs, 1979).

Η συνδυαστική είναι ένα από τα παλαιότερα υποπεδία των διακριτών μαθηματικών, που εκτείνεται μέχρι τον 16ο αιώνα (DeBellis & Rosenstein, 2008). Συγκεκριμένα, το έργο του Pascal και του Fermat, οι οποίοι μελέτησαν τη θεωρία των συνδυαστικών προβλημάτων, έθεσαν τις βάσεις για τη θεωρία των πιθανοτήτων και παρείχαν προσεγγίσεις για την ανάπτυξη της «αριθμητικής συνδυαστικής». Ο Pascal και ο Fermat είχαν και οι δύο σημαντικές συνεισφορές στον τομέα των μαθηματικών κατά την εποχή τους (DeBellis & Rosenstein, 2008).

Η συνδυαστική είναι μια αρχή υπολογισμού που περιλαμβάνει την επιλογή και τη διάταξη των αντικειμένων μέσα σε ένα περιορισμένο σύνολο. Ένας τρόπος για να ορίσουμε τη συνδυαστική είναι ως αρχή υπολογισμού. Η συνδυαστική είναι ένα ουσιαστικό μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης που λαμβάνουν οι μαθητές. Αποτελείται από ένα περίπλοκο πλαίσιο ισχυρών αρχών που χρησιμεύουν ως βάση για έναν αριθμό άλλων υποπεδίων, συμπεριλαμβανομένων της μέτρησης, του υπολογισμού και της πιθανότητας (English, 2005, (Pokorny, 2020)).

Η Συνδυαστική έχει προταθεί ως μέρος του τυπικού προγράμματος σπουδών για τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 1970 (βλ., για παράδειγμα, Kapur (1970), και το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών των Η.Π.Α., 1989). Η συνδυαστική επισημάνθηκε ως τομέας εξερεύνησης σε δύο από τα θέματα της Επιτροπής για τα πρότυπα για τα σχολικά μαθηματικά (NCTM, 1986) για την ανάπτυξη ενός προγράμματος σπουδών από την Ομάδα Εργασίας (K-4) της Επιτροπής για τα Πρότυπα για τα Σχολικά Μαθηματικά. Η Επετηρίδα NCTM του 1991 δημοσιεύθηκε λίγο μετά από αυτήν την πρόταση. Ονομάστηκε Διακριτά Μαθηματικά σε όλο το Πρόγραμμα Σπουδών, K-12, και περιείχε αρκετά κεφάλαια που ήταν αφιερωμένα στη διδασκαλία της συνδυαστικής, ιδιαίτερα στα χρόνια του γυμνασίου.

Η συνδυαστική εξακολουθεί να μην διδάσκεται με αρκετή προσοχή στην τάξη, ιδιαίτερα στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, παρά το γεγονός ότι είναι μια σημαντική πτυχή του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών (Pokorny, 2020).

Ωστόσο, λόγω του πραγματικού χαρακτήρα του μαθήματος, ο Kapur (1970) πρότεινε ότι θα έπρεπε να είναι κατάλληλη για μελέτη σε όλα τα επίπεδα της τάξης πριν από περισσότερες από τρεις δεκαετίες. Στην πραγματικότητα, η συνδυαστική θέτει τις βάσεις για ουσιαστικά ζητήματα που πρέπει να επιλυθούν με διάφορους τρόπους και με μια σειρά αναπαραστατικών εργαλείων (συμπεριλαμβανομένου του υλικού χειρισμού).

Τα συνδυαστικά προβλήματα βοηθούν στην ανάπτυξη τεχνικών απαρίθμησης, καθώς και εικασιών, γενικεύσεων και συστηματικής σκέψης.

Οι συνδυαστικές δραστηριότητες όχι μόνο ενθαρρύνουν τον σχηματισμό θεμελιωδών εννοιών όπως οι σχέσεις και οι τάξεις ισοδυναμίας, αλλά και η χαρτογράφηση και οι συναρτήσεις. Επιπλέον, δεδομένης της ευρείας εφαρμογής του συνδυαστικού τομέα (για παράδειγμα, στους τομείς της χημείας, της βιολογίας και της φυσικής), είναι δυνατό για τους μαθητές να παρουσιάζονται διαθεματικές προκλήσεις στο πλαίσιο των πραγματικών σεναρίων (English, 2005).

1.3.Προβλήματα Συνδυαστικής

Σε πολλά προβλήματα συνδυαστικής, η απευθείας απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων τα οποία ενδιαφέρουν τον μαθητή που προσπαθεί να τα επιλύσει είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές η απαρίθμηση καθίσταται ευκολότερη εφαρμόζοντας μεθόδους της Συνδυαστικής, η οποία αποτελεί έναν από τους βασικότερους κλάδους των Μαθηματικών.

Αν υποτεθεί ότι ένα άτομο επιθυμεί να ταξιδέψει από τη Θεσσαλονίκη, μέσω Αθηνών, στην Κρήτη χωρίς να χρησιμοποιήσει το ΙΧ αυτοκίνητό του έχει ορισμένες επιλογές για τη διαδρομή του. Από τη Θεσσαλονίκη μπορεί να ταξιδέψει στην Αθήνα με τρένο (Τ) ή λεωφορείο (Λ) ή αεροπλάνο (Α) ή πλοίο (Π) και από την Αθήνα στο Ηράκλειο με πλοίο ή αεροπλάνο. Το ενδιαφέρον της συνδυαστικής στρέφεται στους διαφορετικούς τρόπους ως προς το ταξιδιωτικό μέσο με τους οποίους μπορεί να πάει κάποιος να πραγματοποιήσει το ταξίδι του. Επιλύοντας το πρόβλημα, το οποίο εντάσσεται στην ύλη της Γ’ Λυκείου, το ταξίδι γίνεται σε δύο φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η μετάβαση από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα και η δεύτερη από την Αθήνα στο Ηράκλειο. Η πρώτη φάση του ταξιδιού μπορεί να γίνει με 4 τρόπους και η δεύτερη με 2 τρόπους. Σε κάθε τρόπο της πρώτης φάσης αντιστοιχούν οι δύο τρόποι της δεύτερης φάσης. Άρα το ταξίδι Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο μπορεί να γίνει με 8 διαφορετικούς τρόπους (4Χ2).

Για τέτοιου είδους προβλήματα, ισχύει η βασική αρχή απαρίθμησης:

«Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις $φ_1$, $φ_2$,..., $φ_ν$. Αν η φάση $φ_1$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1$ τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση $φ_2$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_2$ τρόπους ,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση $φ_ν$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_ν$ τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1 \cdot κ_2 \cdot ... \cdot κ_ν$ τρόπους.»

Κατά συνέπεια, ακολουθώντας την άνωθεν περιγραφείσα διαδικασία, στην πρώτη φάση συμπληρώνεται το πρώτο στοιχείο μιας διατεταγμένης ν-άδας με $κ_1$ τρόπους, στη δεύτερη φάση το δεύτερο στοιχείο με $κ^2$ τρόπους ,…, στη ν-οστή φάση το ν-στό στοιχείο με $κ_ν$, τότε σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορούν να σχηματισθούν $κ_1 \cdot κ_2 \cdot ... \cdot κ_ν$ διαφορετικές διατεταγμένες ν-άδες.

Συζητώντας ένα ακόμη πρόβλημα το οποίο εντάσσεται στην ύλη των ελληνικού σχολικού εγχειριδίου οι μαθητές καλούνται να υποθέσουν ότι μία επιτροπή με 5 μαθητές συνεδριάζει για να εκλέξει πρόεδρο, γραμματέα, και ταμία. Θέλοντας να βρουν το πλήθος των διαφορετικών τριάδων που θα εκλεγούν για τις τρεις θέσεις καλούνται να σκεφτούν ως εξής:

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση εκλογή προέδρου, 2η φάση εκλογή γραμματέα και 3η φάση εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη της επιτροπής που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του ταμία. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Καθεμιά από τις παραπάνω τριάδες λέγεται διάταξη των 5 ανά 3.

Ως Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, με $\kappa \leq \nu$, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να ληφθούν κ διαφορετικά στοιχεία του Α και μπουν σε μια σειρά.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο διατάξεις των ν ανά κ είναι διαφορετικές αν διαφέρουν ως προς ένα τουλάχιστον στοιχείο ή ως προς τη θέση την οποία κατέχουν τα στοιχεία. Για παράδειγμα, οι διατάξεις (1, 2, 3), (1, 4, 3) και (3, 2, 1) είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που ληφθούν και τα ν στοιχεία ενός συνόλου Α και τοποθετηθούν σε μια σειρά, τότε προκύπτει μια διάταξη των ν στοιχείων ανά ν η οποία λέγεται μετάθεση των ν στοιχείων. Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων συμβολίζεται με Μν και σύμφωνα με τον τύπο (1) να είναι

$M_\nu = \nu(\nu - 1)(\nu - 2)...3 \cdot 2 \cdot 1.$

Το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3...(\nu - 2)(\nu - 1)\nu$ συμβολίζεται με ν! και διαβάζεται ν παραγοντικό.

Έτσι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα τοποθετηθούν οι 5 μαθητές σε μια σειρά, τότε υπάρχουν $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν.

Με τη χρήση του συμβόλου του παραγοντικού για να εκφραστεί το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ με κ < ν προκύπτει:

$$\begin{aligned}\varDelta_\kappa^\nu &= \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\kappa+1)\\ &= \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\kappa+1)(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω, συνεπάγεται ότι:

$$\varDelta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

Αν τώρα ο τύπος (3) πρέπει να ισχύει και για κ = ν, επειδή $\Delta^\nu_\nu = M\nu = \nu!$, πρέπει $\nu!/0! = \nu!$. άρα ορίζεται 0!=1.

Αν υποτεθεί ότι από 5 άτομα Α, Β, Γ, Δ και Ε πρέπει να επιλεχθεί μια ομάδα 3 ατόμων, χωρίς να ενδιαφέρει η κατάταξη μέσα σ’ αυτήν την ομάδα, αν x είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων που μπορούν να επιλεχθούν, τότε από κάθε τέτοια ομάδα μπορούν να προκύψουν 3! διατεταγμένες ομάδες. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων ομάδων θα είναι 3!x. Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων Δ^5_3 .

Επομένως, θα είναι $\Delta^5_3 = 3!x$, οπότε $x = \frac{\varDelta_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$.

Πιο συγκεκριμένα οι ομάδες αυτές θα είναι:

{Α, Β, Γ}, {Α, Β, Δ}, {Α, Β, Ε}, {Α, Γ, Δ}, {Α, Γ, Ε}, {Α, Δ, Ε}, {Β, Γ, Δ}, {Β, Γ, Ε}, {Β, Δ, Ε}, και {Γ, Δ, Ε}. Κάθε τέτοια επιλογή λέγεται συνδυασμός των 5 ανά 3.

Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο προκύπτει ότι

$$\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\Delta_\kappa^\nu}{\kappa!}=\frac{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}}{\kappa!}=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.$$

Επομένως

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό δύο συνδυασμοί των ν ανά κ είναι διαφορετικοί αν διαφέρουν κατά ένα τουλάχιστον στοιχείο.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω, το οποίο έρχεται σε συμφωνία με το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα καθώς εντάσσεται στην ύλη του σχετικού μαθήματος αποτελεί το ακόλουθο πρόβλημα:

Στο τυχερό παιχνίδι του ΠΡΟΠΟ συμπληρώνεται καθεμιά από τις 13 θέσεις με ένα από τα στοιχεία 1, 2, Χ τα οποία αντιστοιχούν σε πρόβλεψη: νίκης της γηπεδούχου ομάδας (1), νίκης της φιλοξενούμενης ομάδας (2), ισοπαλίας (Χ).

i) Να προσδιοριστεί το πλήθος των διαφορετικών στηλών που μπορούμε να συμπληρώσουμε.

ii) Αν συμπληρώσουμε τυχαία μια στήλη ΠΡΟΠΟ, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

Α: "να πιάσουμε ακριβώς 12 αγώνες".

Β: "να πιάσουμε ακριβώς 11 αγώνες".

ΛΥΣΗ

i) Μια στήλη ΠΡΟΠΟ είναι μια 13-άδα, στην οποία κάθε θέση μπορεί να συμπληρωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά $\left\{\begin{matrix}3\\3\\3\end{matrix}\right. = 3^{13} =$ 1.594.323 διαφορετικές στήλες.

ii) • Ευνοϊκή περίπτωση για το Α είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 12 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και η εναπομένουσα θέση συμπληρώνεται με λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{12}$ για να επιλέξουμε τους 12 αγώνες που συμπληρώνονται με το σωστό αποτέλεσμα, και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε τον αγώνα που απομένει με λάθος πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το Α είναι $N(A) = \binom{13}{12}$ · 2. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{13}{12}\cdot 2}{3^{13}}=\frac{13\cdot 2}{3^{13}}=\frac{26}{3^{13}}\approx 0{,}000016.$$

• Ευνοϊκή περίπτωση για το B είναι κάθε στήλη στην οποία καθεμιά από τις 11 θέσεις συμπληρώνεται με το σωστό αποτέλεσμα και καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις συμπληρώνεται με μια λαθεμένη πρόβλεψη. Υπάρχουν $\binom{13}{11}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις 11 θέσεις με το σωστό αποτέλεσμα και 2 τρόποι για να συμπληρώσουμε καθεμιά από τις υπόλοιπες 2 θέσεις με λαθεμένη πρόβλεψη. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το B είναι N(B) = $\binom{13}{11}$ 2 · 2. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{\binom{13}{11}\cdot 2\cdot 2}{3^{13}}=\frac{312}{3^{13}}\approx 0{,}000196.$$ [1]

Για την παρούσα έρευνα, με βάση την ύλη των σχολικών εγχειριδίων, για τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ένα αντίστοιχης δυσκολίας πρόβλημα, το οποίο θα επιλυθεί από τους μαθητές πριν και μετά την παρέμβαση.

[1] Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής (Γ Λυκείου Γενικής Παιδείας), Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4704/Mathimatika-kai-Stoicheia-Statistikis_G-EPAL_html-apli/index3_3.html

Κεφάλαιο 2: Η διδασκαλία εννοιών της συνδυαστικής στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

2.1. Αναλυτικά Προγράμματα

Καθημερινά, τα μέσα ενημέρωσης παρέχουν στατιστικές πληροφορίες για μια ποικιλία θεμάτων, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών, ιατρικών, κοινωνικών και πολιτικών, τα οποία έχουν όλα αντίκτυπο στις αποφάσεις που λαμβάνουμε στην προσωπική, επαγγελματική και κοινωνική μας ζωή.

Η ανάπτυξη της ικανότητας του μαθητή να αξιολογεί κριτικά τις πληροφορίες, να βγάζει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις υπό αβέβαιες συνθήκες είναι ο πρωταρχικός στόχος της διδασκαλίας των στοχαστικών μαθηματικών (στατιστική, πιθανότητες) στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. Αυτό επιτυγχάνεται κυρίως μέσω της διδασκαλίας της στατιστικής και των πιθανοτήτων. Η μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων ή την ποικιλομορφία που υπάρχει γύρω μας (για παράδειγμα, τα άτομα είναι διαφορετικά, οι συνθήκες ενός πειράματος είναι διαφορετικές), είναι η πρωταρχική διάκριση που διαφοροποιεί τα στοχαστικά μαθηματικά από άλλες θεματικές περιοχές στο τομέα των μαθηματικών (Garfield & Ben-Zvi, 2007, 2008).

Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να κάνουν ερωτήσεις που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα, να συλλέξουν, να οργανώσουν και να αναπαραστήσουν σχετικά δεδομένα, να επιλέξουν κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για την ανάλυσή τους και να εξάγουν συμπεράσματα και να κάνουν προβλέψεις με βάση τα δεδομένα ως αποτέλεσμα της ανάλυσής τους.

Το πρόγραμμα σπουδών που έχει προταθεί παρέχει στους μαθητές αυτές τις ευκαιρίες. Είναι δυνατόν η διδασκαλία της στατιστικής να απομακρυνθεί από την έμφαση στην εκμάθηση χειρισμού αλγορίθμων και στη δημιουργία αναπαραστάσεων που δεν έχουν πραγματικό νόημα, και αντ' αυτού να δώσει μεγαλύτερη έμφαση στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων κριτικής σκέψης των μαθητών μέσω δραστηριοτήτων όπως η διεξαγωγή έρευνας, η κατανόηση στατιστικών μεθόδων, η σύνδεση στατιστικών εννοιών, η ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων, η παρατήρηση ομοιομορφιών και η παραγωγή συμπερασμάτων. Οι μαθητές μπορούν να έχουν την ευκαιρία να διεξάγουν τυχαία πειράματα χάρη στη διδασκαλία των πιθανοτήτων και μπορούν να αξιολογήσουν τον βαθμό στον οποίο οι προβλέψεις τους αποκλίνουν από τα πραγματικά εμπειρικά αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων ενώ εκτελούνται.

Ένα νέο στοιχείο του εκπαιδευτικού προγράμματος αποτελεί η διδασκαλία των μαθηματικών αναστοχασμού σε παιδιά από την προσχολική και την πρώτη τάξη. Κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν σταδιακά την ικανότητά τους για στοχαστική σκέψη, η οποία μπορεί επίσης να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των στοχαστικών εννοιών. Αυτή η εξέλιξη έχει υποστηριχθεί από πρόσφατη διεθνή βιβλιογραφία μελετών (Franklinetal, 2005; Jones, 2005; Shaughnessy, 2007), η οποία τονίζει ότι τα παιδιά σε αυτή την ηλικία είναι σε θέση να διαχειριστούν μαθηματικά προβλήματα τέτοιου τύπου. Ήδη, σύμφωνα με τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών πολλών χωρών, τα στοχαστικά μαθηματικά περιλαμβάνονται από το επίπεδο Νηπιαγωγείου και μετά (συγκεκριμένα NCTM στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής το 2000, Common Curriculum Framework for K–9 Mathematics in Canada, 2006, K-10 Scope & Sequence στην Αυστραλία το 2007 και Department for Education and Skills στη Μεγάλη Βρετανία το 2010).

Στην πρώτη ηλικιακή ομάδα, τα παιδιά, με τη βοήθεια του εκπαιδευτή, βάζουν ερωτήματα που είναι ειδικά για τον πληθυσμό της τάξης τους που κεντρίζουν το ενδιαφέρον τους και που προορίζονται να γίνουν μόνο στους συνομηλίκους τους. Είναι σημαντικό να παρέχεται στους νέους η επιλογή να συλλέγουν και να οργανώνουν τα δικά τους δεδομένα στον δικό τους χρόνο («ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη», 2013).

Τα παιδιά σε αυτή την ηλικία μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα κατασκευάζοντας απλά διαγράμματα, χρησιμοποιώντας την αντιστοίχιση ένα προς ένα, παρατηρώντας τις διαφορές των δεδομένων μεταξύ ατόμων και συγκρίνοντάς τα με αυτά της ομάδας, διαβάζουν και συγκρίνουν πληροφορίες μεταξύ δεδομένων και αναπαριστούν τις πληροφορίες κατασκευάζοντας απλά διαγράμματα. Αρχίζουν επίσης να αναγνωρίζουν ότι η πιθανότητα είναι μια μέτρηση της αβεβαιότητας και κατασκευάζουν ανεπίσημα τη γλώσσα της πιθανότητας περιγράφοντας μια πιθανότητα ως βέβαιη, αδύνατη, εφικτή ή απίθανη. Επιπλέον, αρχίζουν να κατανοούν ότι η πιθανότητα είναι ένα μέτρο αβεβαιότητας. Ακόμη, μπορούν να αξιολογούν την τυχαιότητα των γεγονότων ως προς την πιθανότητα να συμβούν, πραγματοποιούν απλές δοκιμές τύχης, αποφασίζουν εάν ένα τυχερό παιχνίδι είναι δίκαιο ή άδικο και αναμειγνύουν ή ταξινομούν περιορισμένο αριθμό αντικειμένων («ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη», 2013).

Κατά τη διάρκεια του δεύτερου ηλικιακού κύκλου, οι μαθητές αρχίζουν να αναπτύσσουν τις δικές τους ερωτήσεις, κατά τις οποίες αρχίζουν να συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων σε διαφορετικούς πληθυσμούς εκτός από τον πληθυσμό της τάξης τους. Αποκτούν δεδομένα στην τάξη τους, στο σχολείο ή στην κοινότητα (μέσω ερευνών, πειραμάτων ή μετρήσεων), παράγουν μια ποικιλία στατιστικών διαγραμμάτων και αναλύουν την αποτελεσματικότητα διαφόρων αναπαραστάσεων για την εμφάνιση ενός συνόλου δεδομένων. Αποκτούν την ικανότητα να επιχειρηματολογούν για την επιλογή μιας τεχνικής συλλογής δεδομένων, να αξιολογούν δεδομένα χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους, να εξάγουν συμπεράσματα και να κάνουν προβλέψεις ενώ γνωρίζουν τους περιορισμούς των δεδομένων (δείγμα, πληθυσμός). Αρχίζουν να αναπτύσσουν, ακόμη, τη γνώση του τυχαίου ουσιαστικά με την εκτίμηση της πιθανότητας, τη διεξαγωγή πειραμάτων και την ανάλυση εμπειρικών δεδομένων. Επιπλέον, μαθαίνουν να αναπαριστούν την πιθανότητα ενός γεγονότος χρησιμοποιώντας κλάσματα ή ποσοστά («ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη», 2013).

Οι μαθητές αναπτύσσουν ερωτήματα σχετικά με τις σχέσεις δεδομένων είτε εντός του ίδιου πληθυσμού είτε μεταξύ διαφόρων πληθυσμών κατά τη διάρκεια του τρίτου ηλικιακού κύκλου της μάθησης. Ξεκινούν ταξινομώντας τα δείγματα σε τρεις κατηγορίες: τυχαία, αντιπροσωπευτικά και μη αντιπροσωπευτικά. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν αυτές τις ταξινομήσεις για να αξιολογήσουν την ποιότητα των δεδομένων και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τον πληθυσμό. Μπορούν ακόμη να θέσουν τις υποθέσεις τους σε δοκιμή πραγματοποιώντας ή προσομοιώνοντας περίπλοκες δοκιμές τύχης και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τις προσδοκίες τους. Μέσω της χρήσης της συνδυαστικής γνώσης, υπολογίζουν τις πιθανότητες διαφόρων ενδεχομένων («ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη», 2013).

Εκτός από τα γνωστά κεφάλαια της Ανάλυσης και των Στοχαστικών Μαθηματικών, δηλαδή τη Στατιστική και τις Πιθανότητες, το πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών για την τρίτη τάξη του Γενικού Λυκείου άρχισε να ενσωματώνει τη συνδυαστική ξεκινώντας από το ακαδημαϊκό έτος 2019-2020.

Μια νέα, πιο δύσκολη ενότητα που ονομάζεται Συνδυαστική εισήχθη με αυτό τον τρόπο στο κεφάλαιο Πιθανότητες και απαιτεί υψηλότερα επίπεδα κριτικής σκέψης (Ξένος, 2019).

Οι στόχοι οι οποίοι διατυπώνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα της τρίτης λυκείου σε σχέση με τη συνδυαστική είναι οι ακόλουθοι:

1. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να εξηγούν τους τρόπους υπολογισμού διατάξεων με και χωρίς επαναλήψεις μεταθέσεων και συνδυασμών.
2. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να υπολογίζουν το πλήθος στοιχείων ενδεχομένων με χρήση αρχών απαρίθμησης.
3. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να επιλέγουν το κατάλληλο πλαίσιο συνδυαστικών μεθόδων σε κάθε πρόβλημα.
4. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

5. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου, δεδομένου ενός άλλου. (Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου)

2.2. Διδακτικά Εγχειρίδια

Η συνδυαστική είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη της μέτρησης και της διάταξης αντικειμένων με διάφορους τρόπους. Είναι ένα θέμα που περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών για την τρίτη τάξη του Λυκείου στην Ελλάδα.

Η Συνδυαστική διδάσκεται ως ξεχωριστό κεφάλαιο στην Γ’ Λυκείου, ως μέρος του ευρύτερου θέματος των διακριτών μαθηματικών. Τα διακριτά μαθηματικά ασχολούνται με αντικείμενα που είναι μετρήσιμα και διακριτά, όπως ακέραιοι αριθμοί, γραφήματα και λογικές προτάσεις. Η συνδυαστική είναι ένα σημαντικό υποπεδίο των διακριτών μαθηματικών, το οποίο επικεντρώνεται στη μελέτη της μέτρησης και της διάταξης αντικειμένων με διάφορους τρόπους. Στη συνδυαστική, η έμφαση δίνεται στην ποσότητα και όχι στην ποιότητα των αντικειμένων και στις διατάξεις παρά στις ιδιότητες των ίδιων των αντικειμένων (Ξένος, 2019).

Το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών καλύπτει ένα ευρύ φάσμα συνδυαστικών θεμάτων, συμπεριλαμβανομένων των αρχών του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης, των μεταθέσεων, των συνδυασμών, του διωνυμικού θεωρήματος και της αρχής του εγκλεισμού-αποκλεισμού. Οι αρχές του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης είναι θεμελιώδη συνδυαστικά εργαλεία που μας επιτρέπουν να μετράμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να εκτελεστεί μια συγκεκριμένη εργασία. Η αρχή του πολλαπλασιασμού δηλώνει ότι αν υπάρχουν m τρόποι για την εκτέλεση της εργασίας A και n τρόποι για την εκτέλεση της εργασίας B, τότε υπάρχουν mxn τρόποι για να εκτελεστούν και οι δύο εργασίες με τη σειρά. Η αρχή της πρόσθεσης δηλώνει ότι εάν υπάρχουν m τρόποι εκτέλεσης της εργασίας A και n τρόποι για την εκτέλεση της εργασίας B, τότε υπάρχουν m + n τρόποι για την εκτέλεση είτε της εργασίας A είτε της εργασίας B.

Οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί είναι δύο σημαντικές έννοιες στη συνδυαστική που χρησιμοποιούνται συχνά εναλλακτικά. Μια μετάθεση είναι μια διάταξη αντικειμένων σε μια συγκεκριμένη σειρά, ενώ ένας συνδυασμός είναι μια επιλογή αντικειμένων χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η σειρά. Το ελληνικό πρόγραμμα σπουδών δίνει έμφαση στη χρήση παραγοντικών και συνδυασμών για τον υπολογισμό του αριθμού των μεταθέσεων και των συνδυασμών αντικειμένων. Το διωνυμικό θεώρημα είναι μια άλλη σημαντική έννοια στη συνδυαστική που μας επιτρέπει να επεκτείνουμε μια διωνυμική έκφραση ανυψωμένη σε δύναμη. Το διωνυμικό θεώρημα χρησιμοποιείται εκτενώς στη θεωρία πιθανοτήτων και στη στατιστική.

Η αρχή της συμπερίληψης-αποκλεισμού είναι μια άλλη σημαντική έννοια στη συνδυαστική που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αριθμού των αντικειμένων που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από ένα σύνολο ασύνδετων υποσυνόλων. Η αρχή της συμπερίληψης-αποκλεισμού ορίζει ότι ο αριθμός των αντικειμένων που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από ένα σύνολο ασύνδετων υποσυνόλων είναι ίσος με το άθροισμα του αριθμού των αντικειμένων που ανήκουν σε κάθε υποσύνολο, μείον το άθροισμα του αριθμού των αντικειμένων που ανήκουν σε κάθε ζεύγος υποσυνόλων, συν το άθροισμα του αριθμού των αντικειμένων που ανήκουν σε κάθε ομάδα υποσυνόλων, και ούτω καθεξής (Ξένος, 2021).

Το Ελληνικό πρόγραμμα σπουδών περιλαμβάνει ακόμη εφαρμογές της συνδυαστικής στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική, όπως ο υπολογισμός του αριθμού των αποτελεσμάτων ενός πειράματος και η εύρεση της πιθανότητας ενός δεδομένου γεγονότος. Το πρόγραμμα σπουδών δίνει έμφαση στη χρήση συνδυαστικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων στη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική. Για παράδειγμα, η αρχή του πολλαπλασιασμού χρησιμοποιείται συχνά για τον υπολογισμό του αριθμού των αποτελεσμάτων ενός πειράματος πολλαπλών σταδίων, ενώ οι συνδυασμοί χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του αριθμού των τρόπων με τους οποίους μπορεί να συμβεί ένα συγκεκριμένο σύνολο γεγονότων.

Τα Ελληνικά σχολικά βιβλία συχνά παρέχουν παραδείγματα και ασκήσεις που επεξηγούν τις έννοιες της συνδυαστικής, όπως ο αριθμός των μεταθέσεων ενός συνόλου αντικειμένων, ο αριθμός των συνδυασμών ενός συνόλου αντικειμένων και η χρήση του διωνυμικού θεωρήματος για την επέκταση μιας διωνυμικής έκφρασης σε μια δύναμη. Αυτές οι ασκήσεις συχνά περιλαμβάνουν εφαρμογές πραγματικού κόσμου, όπως τον υπολογισμό της πιθανότητας να κερδίσει κανείς σε μια λαχειοφόρο αγορά ή τον αριθμό των πιθανών συνδυασμών ενός συνόλου αριθμών λοταρίας (Ξένος, 2021).

2.3.Γυμνάσιο

Στην Ελλάδα, δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία της συνδυαστικής στο γυμνάσιο. Αν και το θέμα θίγεται εν συντομία, δεν καλύπτεται εκτενώς στο πρόγραμμα σπουδών. Ωστόσο, τα παιδιά αποκτούν κάποιες δεξιότητες που θα τους επιτρέψουν να μάθουν για τη συνδυαστική στο μέλλον (Αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των μαθηματικών Γυμνασίου).

Στο πρόγραμμα σπουδών του Ελληνικού γυμνασίου, η εστίαση είναι στην ανάπτυξη μιας ισχυρής βάσης στις θεμελιώδεις αρχές των μαθηματικών, όπως η αριθμητική, η γεωμετρία και η άλγεβρα. Ενώ υπάρχουν ορισμένες βασικές έννοιες της συνδυαστικής που εισάγονται, δεν διερευνώνται, όμως, σε μεγάλο βάθος.

Ωστόσο, οι δεξιότητες που αποκτούν τα παιδιά στο γυμνάσιο, όπως η λογική σκέψη και η επίλυση προβλημάτων, είναι απαραίτητες για την κατανόηση της συνδυαστικής. Καθώς προχωρούν στο γυμνάσιο, οι μαθητές μπορούν στη συνέχεια να χτίσουν πάνω σε αυτό το θεμέλιο και να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση των συνδυαστικών αρχών.

Επιπλέον, υπάρχουν πολλοί διαθέσιμοι πόροι στο διαδίκτυο, συμπεριλαμβανομένων εγχειριδίων, σημειώσεων διαλέξεων και εκπαιδευτικών βίντεο, που παρέχουν μια ολοκληρωμένη εισαγωγή στη συνδυαστική. Αυτοί οι πόροι μπορούν να συμπληρώσουν όσα έχουν μάθει οι μαθητές στο γυμνάσιο και να τους παρέχουν μια πιο λεπτομερή κατανόηση του θέματος (Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 2016).

2.4. Λύκειο

Στην Ελλάδα, η συνδυαστική διδάσκεται στο λύκειο ως μέρος του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών.

Η διδασκαλία της συνδυαστικής στο Ελληνικό λύκειο ξεκινά από τη Γ' τάξη. Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών για την Γ' Λυκείου (Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για την Γ΄ Λυκείου), οι μαθητές εισάγονται σε βασικές συνδυαστικές αρχές όπως οι μεταθέσεις, οι συνδυασμοί και η αρχή του πολλαπλασιασμού. Μαθαίνουν πώς να εφαρμόζουν αυτές τις αρχές για την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με τη μέτρηση των διατάξεων αντικειμένων, όπως διάταξη καθισμάτων, μεταθέσεις γραμμάτων σε μια λέξη και συνδυασμούς διαφορετικών αντικειμένων.

Μία από τις προκλήσεις στη διδασκαλία της συνδυαστικής στο λύκειο είναι η αφηρημένη φύση του μαθήματος. Η συνδυαστική περιλαμβάνει πολλές αφηρημένες έννοιες και μαθηματική σημειογραφία, που μπορεί να είναι δύσκολο να κατανοήσουν οι μαθητές χωρίς μια σταθερή βάση στην άλγεβρα και τη μαθηματική συλλογιστική. Για να αντιμετωπίσουν αυτήν την πρόκληση, οι Έλληνες καθηγητές χρησιμοποιούν ποικίλες διδακτικές στρατηγικές για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόησή τους για τις συνδυαστικές αρχές (Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για την Γ΄ Λυκείου).

Κεφάλαιο 3: Έρευνες σχετικά με τη διδασκαλία της συνδυαστικής

3.1. Μέθοδοι Διδασκαλίας

Η συνδυαστική είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την καταμέτρηση και τη διάταξη αντικειμένων. Είναι ένα συναρπαστικό πεδίο που έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές, από το σχεδιασμό αλγορίθμων ηλεκτρονικών υπολογιστών μέχρι τη λήψη αποφάσεων σε επιχειρήσεις και οικονομικά. Ωστόσο, η διδασκαλία της συνδυαστικής στο σχολείο μπορεί να είναι γεμάτη προκλήσεις, καθώς απαιτεί από τους μαθητές να σκέφτονται αφηρημένα και να χρησιμοποιούν τη λογική για την επίλυση προβλημάτων (Jones, 2006).

Μία από τις πιο αποτελεσματικές μεθόδους για τη διδασκαλία της συνδυαστικής είναι μέσω πραγματικών παραδειγμάτων. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν για τη συνδυαστική εξετάζοντας προβλήματα του πραγματικού κόσμου που απαιτούν μέτρηση και διάταξη αντικειμένων. Αυτό μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν πώς οι έννοιες που μαθαίνουν στην τάξη μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Μια άλλη αποτελεσματική μέθοδος για τη διδασκαλία της συνδυαστικής είναι μέσω οπτικών βοηθημάτων. Τα οπτικά βοηθήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών εννοιών και να επεξηγήσουν πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων, καθιστώντας τις έννοιες πιο απτές και προσβάσιμες (Ammamiarihta, 2017).

Μια άλλη αποτελεσματική μέθοδος για τη διδασκαλία της συνδυαστικής είναι μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Τα προβλήματα συνδυαστικής μπορεί να είναι δύσκολα, αλλά είναι επίσης ενδιαφέροντα και ελκυστικά. Δουλεύοντας προβλήματα και παζλ, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν τις δεξιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων και να εφαρμόσουν τις έννοιες που έχουν μάθει στην τάξη. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εργαστούν σε ομάδες για την επίλυση προβλημάτων, κάτι που μπορεί να βοηθήσει στην ενίσχυση της συνεργασίας και των δεξιοτήτων ομαδικής εργασίας.

Εκτός από αυτές τις μεθόδους, η τεχνολογία μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία της συνδυαστικής. Υπάρχουν πολλοί διαθέσιμοι διαδικτυακοί πόροι που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν για τη συνδυαστική, συμπεριλαμβανομένων βίντεο, σεμιναρίων και διαδραστικών προσομοιώσεων. Οι μαθηματικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτούς τους πόρους για να συμπληρώσουν τη διδασκαλία τους στην τάξη και να παρέχουν στους μαθητές πρόσθετες ευκαιρίες να εξασκήσουν τις δεξιότητές τους (Jones, 2006).

Ακόμη, είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές ευκαιρίες να εξασκήσουν τις δεξιότητές τους και να εφαρμόσουν τις έννοιες που έχουν μάθει στην τάξη. Αυτό μπορεί να γίνει με κουίζ, τεστ και εργασίες για το σπίτι, καθώς και με πρακτικές δραστηριότητες και έργα. Παρέχοντας στους μαθητές μια ποικιλία ευκαιριών για εξάσκηση και εφαρμογή των δεξιοτήτων τους, οι δάσκαλοι μπορούν να βοηθήσουν να διασφαλίσουν ότι θα αναπτύξουν μια βαθιά κατανόηση της συνδυαστικής (Batanero, 1997).

Η ιστορία της συνδυαστικής μπορεί να χρησιμεύσει ως πολύτιμο εργαλείο για τη διδασκαλία αυτού του μαθηματικού πεδίου στους μαθητές. Η Συνδυαστική έχει μελετηθεί για αιώνες και η ιστορία της μπορεί να δώσει πληροφορίες για την ανάπτυξη του θέματος καθώς και τις πρακτικές εφαρμογές του. Εισάγοντας τους μαθητές στην ιστορία της συνδυαστικής, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες και τις εφαρμογές των συνδυαστικών μαθηματικών.

Ένα από τα πρώτα καταγεγραμμένα παραδείγματα συνδυαστικών μαθηματικών ήταν στο έργο του αρχαίου Κινέζου μαθηματικού Zu Chongzhi, ο οποίος έζησε τον 5ο αιώνα μ.Χ. Ο Zu Chongzhi είναι γνωστός για την εργασία του σε συνδυαστικά προβλήματα, όπως το «πρόβλημα του γραμματέα», το οποίο περιελάμβανε την επιλογή του καλύτερου υποψηφίου από μια ομάδα υποψηφίων. Η εισαγωγή των μαθητών στο έργο του Zu Chongzhi μπορεί να τους βοηθήσει να κατανοήσουν τις πρακτικές εφαρμογές της συνδυαστικής, καθώς και τις ρίζες της στις αρχαίες μαθηματικές παραδόσεις (Biggs, 1979).

Ένα άλλο βασικό πρόσωπο στην ιστορία της συνδυαστικής είναι ο Γάλλος μαθηματικός Blaise Pascal, ο οποίος έζησε τον 17ο αιώνα. Ο Pascal είναι γνωστός για το έργο του στο «τρίγωνο Πασκάλ», το οποίο είναι ένας τριγωνικός πίνακας αριθμών που έχει πολλές εφαρμογές στα συνδυαστικά μαθηματικά. Μελετώντας το έργο του Pascal, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις θεμελιώδεις αρχές της συνδυαστικής, όπως η έννοια των μεταθέσεων και των συνδυασμών (Cohen, 1979).

Τον 19ο αιώνα, ο Γερμανός μαθηματικός Georg Cantor ανέπτυξε την έννοια της «θεωρίας συνόλων», η οποία έθεσε τα θεμέλια για τη σύγχρονη συνδυαστική. Η εργασία του Cantor στη θεωρία συνόλων παρείχε ένα αυστηρό πλαίσιο για τη μελέτη συνδυαστικών προβλημάτων και εισήγαγε νέες έννοιες όπως η «μετρησιμότητα» και η «μη αριθμησιμότητα». Μελετώντας το έργο του Cantor, οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν μια βαθύτερη κατανόηση των θεωρητικών θεμελίων της συνδυαστικής και να μάθουν για την ιστορική εξέλιξη του θέματος.

Στις αρχές του 20ου αιώνα, ο Ούγγρος μαθηματικός Paul Erdős συνέβαλε σημαντικά στη συνδυαστική, συμπεριλαμβανομένης της ανάπτυξης του «μοντέλου Erdős–Rényi» των τυχαίων γραφημάτων. Ο Erdős ήταν γνωστός για τη συνεργατική του προσέγγιση στα μαθηματικά και εργάστηκε με πολλούς άλλους μαθηματικούς σε όλη τη διάρκεια της καριέρας του. Μελετώντας το έργο του Erdős, οι μαθητές μπορούν να μάθουν για τη συνεργατική φύση των μαθηματικών και να αποκτήσουν γνώσεις για τις πρακτικές εφαρμογές της συνδυαστικής σε πεδία όπως η επιστήμη των υπολογιστών και η θεωρία δικτύων (Flegg, 1983).

Η διδασκαλίας της συνδυαστικής με τη χρήση της ιστορίας μπορεί να είναι πολύτιμη για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες και τις εφαρμογές αυτού του μαθηματικού πεδίου. Εισάγοντας τους μαθητές στο έργο βασικών προσωπικοτήτων στην ιστορία της συνδυαστικής, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν μια βαθύτερη εκτίμηση για το θέμα, καθώς και να κατανοήσουν καλύτερα τις πρακτικές εφαρμογές του. Επιπλέον, η ιστορική προσέγγιση στη διδασκαλία της συνδυαστικής μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες κριτικής σκέψης, καθώς μαθαίνουν να αναλύουν και να αξιολογούν το έργο μαθηματικών από διαφορετικές εποχές.

Εκτός από την εισαγωγή των μαθητών στο έργο των βασικών προσώπων στην ιστορία της συνδυαστικής, οι εκπαιδευτικοί μπορούν επίσης να χρησιμοποιήσουν ιστορικά παραδείγματα για να επεξηγήσουν συνδυαστικές έννοιες. Για παράδειγμα, το «πρόβλημα του Monty Hall», το οποίο περιλαμβάνει έναν διαγωνιζόμενο σε μια εκπομπή παιχνιδιών που επιλέγει μία από τις τρεις πόρτες, έχει γίνει ένα κλασικό παράδειγμα συνδυαστικής πιθανότητας. Εισάγοντας τους μαθητές στο πρόβλημα του Monty Hall και την ιστορική του προέλευση, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις πρακτικές εφαρμογές της συνδυαστικής πιθανότητας σε σενάρια πραγματικού κόσμου (Cohen, 1979).

3.2.Προβλήματα και δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές

Η συνδυαστική είναι ένας σημαντικός κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την καταμέτρηση και την οργάνωση πληροφοριών. Είναι ένα σύνθετο θέμα που μπορεί να είναι δύσκολο να κατανοήσουν οι μαθητές, ιδιαίτερα εάν δεν έχουν τις απαραίτητες θεμελιώδεις γνώσεις στην άλγεβρα και τη γεωμετρία. Πολλοί μαθητές βρίσκουν τη συνδυαστική δύσκολη λόγω της αφηρημένης φύσης του θέματος, της χρήσης πολύπλοκων τύπων και της έλλειψης πραγματικού πλαισίου (Mashiach Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

Μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν μαθαίνουν συνδυαστική είναι η ανάγκη να σκέφτονται αφηρημένα. Η συνδυαστική ασχολείται με διακριτά αντικείμενα που δεν μπορούν να μετρηθούν ή να απεικονιστούν με τον ίδιο τρόπο όπως τα συνεχή αντικείμενα. Αυτό μπορεί να δυσκολέψει τους μαθητές να κατανοήσουν τις εμπλεκόμενες έννοιες, ιδιαίτερα αν έχουν συνηθίσει να εργάζονται με πιο απτά μαθηματικά αντικείμενα, όπως αριθμούς ή σχήματα. Επιπλέον, τα συνδυαστικά προβλήματα συχνά περιλαμβάνουν πολύπλοκες διαδικασίες πολλαπλών βημάτων που απαιτούν προσοχή στη λεπτομέρεια και ισχυρή κατανόηση της μαθηματικής σημειογραφίας. Αυτό μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολο για μαθητές που δυσκολεύονται με τη λογική συλλογιστική ή δυσκολεύονται να απομνημονεύσουν τύπους (Mashiach Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

Μια άλλη πρόκληση που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συνδυαστική είναι η έλλειψη πραγματικού πλαισίου. Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να δουν τη συνάφεια των συνδυαστικών προβλημάτων με την καθημερινή τους ζωή και να εφαρμόσουν τις έννοιες που έχουν μάθει σε πρακτικές καταστάσεις. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε έλλειψη κινήτρων και δέσμευσης, καθώς οι μαθητές μπορεί να αισθάνονται ότι το θέμα δεν σχετίζεται με τα ενδιαφέροντα ή τους στόχους τους. Για να αντιμετωπίσουν αυτήν την πρόκληση, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προσπαθήσουν να ενσωματώσουν παραδείγματα και εφαρμογές του πραγματικού κόσμου στα μαθήματά τους, καθώς και να τονίσουν τις πρακτικές χρήσεις των συνδυαστικών τεχνικών σε τομείς όπως η επιστήμη των υπολογιστών, η μηχανική και η στατιστική (Lamanna et al., 2022).

Μια σχετική πρόκληση που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συνδυαστική είναι ο τεράστιος όγκος του υλικού που πρέπει να μάθουν. Τα συνδυαστικά προβλήματα μπορεί να είναι απίστευτα πολύπλοκα και συχνά περιλαμβάνουν πολλά βήματα και τύπους που πρέπει να απομνημονεύονται και να εφαρμόζονται σωστά. Αυτό είναι μία δύσκολη πρόκληση για τους μαθητές, ιδιαίτερα εάν δεν έχουν τις απαραίτητες δεξιότητες μελέτης ή οργανωτικές στρατηγικές για να παρακολουθούν όλες τις πληροφορίες. Για να αντιμετωπίσουν αυτήν την πρόκληση, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να προσπαθήσουν να αναλύσουν σύνθετα προβλήματα σε μικρότερα, πιο διαχειρίσιμα βήματα και να παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να εξασκηθούν στην εφαρμογή συνδυαστικών τεχνικών σε μια ποικιλία διαφορετικών πλαισίων (Lamanna et al., 2022).

Μια άλλη κοινή δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συνδυαστική είναι η χρήση σημειογραφίας και ορολογίας. Τα συνδυαστικά προβλήματα συχνά περιλαμβάνουν σύνθετους τύπους, σύμβολα και σημειώσεις που μπορεί να είναι δύσκολο να κατανοηθούν, ιδιαίτερα για μαθητές που δεν είναι εξοικειωμένοι με τις συμβάσεις της μαθηματικής γλώσσας. Επιπλέον, η συνδυαστική έχει τη δική της μοναδική ορολογία και λεξιλόγιο που μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές.

Τέλος, οι μαθητές μπορεί να δυσκολεύονται με τη συνδυαστική λόγω έλλειψης βασικών γνώσεων στην άλγεβρα και τη γεωμετρία. Τα συνδυαστικά προβλήματα απαιτούν συχνά μια ισχυρή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όπως η πιθανότητα, οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί, οι οποίες με τη σειρά τους βασίζονται σε μια σταθερή γείωση στην άλγεβρα και τη γεωμετρία. Οι μαθητές που δεν έχουν αυτή τη θεμελιώδη γνώση δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις βασικές αρχές της συνδυαστικής και μπορεί να δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τις τεχνικές που έχουν μάθει σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Για την αντιμετώπιση αυτής της πρόκλησης, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να παρέχουν διορθωτικές οδηγίες στην άλγεβρα και τη γεωμετρία, καθώς και οδηγίες με σκαλωσιά (scaffolding) για να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν την απαραίτητη εννοιολογική κατανόηση (Mashiach Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

3.3.Προτάσεις διδασκαλίας

Η διδασκαλία της συνδυαστικής μπορεί να είναι μια πρόκληση, ειδικά για μαθητές που δεν έχουν ισχυρό υπόβαθρο στα μαθηματικά. Ωστόσο, με τη σωστή προσέγγιση, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν αυτό το θέμα πιο προσιτό και ελκυστικό για τους μαθητές τους (Clements & Ellerton, 1996).

Μια πρόταση είναι να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα πραγματικού κόσμου για την απεικόνιση συνδυαστικών εννοιών. Οι μαθητές μπορεί να δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις αφηρημένες έννοιες της συνδυαστικής χωρίς να δουν πώς χρησιμοποιούνται σε πραγματικές καταστάσεις. Η χρήση παραδειγμάτων από τον πραγματικό κόσμο, όπως η καταμέτρηση του αριθμού των πιθανών αποτελεσμάτων σε ένα παιχνίδι με κάρτες ή ο αριθμός των τρόπων τακτοποίησης ενός συνόλου αντικειμένων, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις συνδυαστικές έννοιες(Clements & Ellerton, 1996).

Μια άλλη πρόταση είναι η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της συνδυαστικής. Πολλά διαδικτυακά εργαλεία και προγράμματα λογισμικού μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να οπτικοποιήσουν και να χειριστούν συνδυαστικές έννοιες, καθιστώντας τις πιο προσιτές και ελκυστικές. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανές γραφικών για να δημιουργήσουν γραφήματα και οπτικές αναπαραστάσεις συνδυαστικών προβλημάτων. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιήσουν γλώσσες προγραμματισμού όπως Python ή R για να γράψουν αλγόριθμους που λύνουν συνδυαστικά προβλήματα (Lockwood & De Chenne, 2020).

Μια τρίτη πρόταση είναι η χρήση ιστορικών πλαισίων για τη διδασκαλία της συνδυαστικής. Η ιστορία της συνδυαστικής είναι πλούσια και ποικίλη και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτήν την ιστορία για να εμπλέξουν τους μαθητές τους και να τους δείξουν τη συνάφεια της συνδυαστικής με άλλους τομείς σπουδών. Προσαρμόζοντας τα συμφραζόμενα συνδυαστικά σε ιστορικά πλαίσια, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να δουν πώς αυτό το πεδίο σπουδών έχει συμβάλει στην κατανόηση του κόσμου γύρω μας (Damiani, 2009, Fauvel, 1991).

Ακόμη, η χρήση τεχνικών διαδραστικής και συνεργατικής μάθησης για τη διδασκαλία της συνδυαστικής θα μπορούσε να φανεί εξαιρετικά χρήσιμη, καθώς, δουλεύοντας σε ομάδες και συμμετέχοντας σε διαδραστικές δραστηριότητες, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις συνδυαστικές έννοιες και να μάθουν ο ένας από τον άλλο. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν ομαδικές δραστηριότητες όπως παιχνίδια με κάρτες ή προκλήσεις επίλυσης γρίφων για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις δεξιότητες συνδυαστικής σκέψης τους.

Η συνδυαστική είναι ένα πεδίο σπουδών που απαιτεί ισχυρές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αναπτύξουν αυτές τις δεξιότητες παρουσιάζοντάς τους προκλητικά συνδυαστικά προβλήματα προς επίλυση. Δίνοντας έμφαση στην πτυχή επίλυσης προβλημάτων της συνδυαστικής, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αναπτύξουν τις δεξιότητες κριτικής σκέψης που είναι απαραίτητες για την επιτυχία στα μαθηματικά και σε άλλους τομείς (Damiani, 2009).

Κεφάλαιο 4: Διδακτική Παρέμβαση

Για την παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε μία διδακτική παρέμβαση σε 2 μαθητές της Γ’ τάξης του Λυκείου, με στόχο τη διδασκαλία της συνδυαστικής μέσα από την αξιοποίηση της ιστορίας. Οι μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στην παρέμβαση, είχαν ήδη διδαχθεί το συγκεκριμένο μάθημα, ωστόσο, πραγματοποιήθηκε ένα τεστ πριν την παρέμβαση, ώστε να μπορεί να διαπιστωθεί κατά πόσο η διαδικασία της παρέμβασης τους βοήθησε να βελτιώσουν το επίπεδο τους και τις δεξιότητες τους.

4.1.Μεθοδολογία

4.1.1.Ερευνητικά ερωτήματα

Για την παρούσα έρευνα έχουν τεθεί τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1.Θα επηρεάσει η παρέμβαση θετικά ή αρνητικά την απόδοση των μαθητών;

2.Κατά πόσο οι μαθητές θα δυσκολευτούν ή θα διευκολυνθούν από την παρέμβαση ιστορικών παραδειγμάτων στη διδασκαλίας της συνδυαστικής;

3.Κατά πόσο οι μαθητές θα ικανοποιηθούν από την παρέμβαση;

4.1.2.Σχεδιασμός και μέθοδοι

Η παρούσα έρευνα, αποτελεί μία μελέτη περίπτωσης, για τη διεξαγωγή της οποίας σχεδιάστηκε ένα pre test με ασκήσεις από την διδακτέα ύλη των μαθητών και ένα post test, το οποίο βασίστηκε σε ένα πρωτότυπο φύλλο εργασίας, που βασίστηκε σε αντίστοιχη παρέμβαση των Caruth et al. (2004). Ακόμη, σχεδιάστηκε μία διδακτική παρέμβαση, βασισμένη στην ιδέα της αξιοποίησης της ιστορίας της συνδυαστικής, στη διδασκαλία του συγκεκριμένου τομέα.

Στόχος ήταν, από τη σύγκριση του pre test και του post test, να εξαχθούν συμπεράσματα, όσον αφορά την επίδραση της παρέμβασης στην επίδοση των μαθητών. Ακόμη, στους μαθητές μοιράστηκε ερωτηματολόγιο, ώστε μέσω της στατιστικής ανάλυσης των απαντήσεων τους σχετικά με την αξιολόγηση της παρέμβασης, να εξαχθούν απαντήσεις σχετικά με την ικανοποίηση τους από την παρέμβαση, αλλά και το βαθμό της δυσκολίας που αντιμετώπισαν.

4.1.3.Σημασία και πρωτοτυπία

Η σημασία της παρούσας έρευνας, συνδέεται με την πιθανή αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της, για τη βελτίωση των διδακτικών πρακτικών, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία της συνδυαστικής. Αν και έχουν πραγματοποιηθεί ποικίλες έρευνες σχετικά με την αξιοποίηση της ιστορικής προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών, το πεδίο της συνδυαστικής έχει εξεταστεί σε λίγες αντίστοιχες έρευνες, ιδιαίτερα στην Ελλάδα.

4.1.4.Εγκυρότητα και αξιοπιστία

Η παρούσα έρευνα, βασίστηκε σε ένα προσεκτικό σχεδιασμό, ώστε τα αποτελέσματα να είναι όσο το δυνατό πιο έγκυρα και αντικειμενικά. Ακόμη, βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα, καθώς πρόκειται για μία διδακτική πρόταση που εφαρμόστηκε σε μαθητές και ελέγχθηκε, κατά συνέπεια δε βασίζεται σε υποθετικά δεδομένα. Δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στη διασφάλιση του απορρήτου των συμμετεχόντων, αλλά και στην όσο το δυνατόν αντικειμενική καταγραφή της διαδικασίας και βαθμολόγησης των μαθητών.

4.1.5.Δείγμα

Το δείγμα αποτέλεσαν δύο μαθητές, οι οποίοι φοιτούν στην Γ' τάξη του Λυκείου, στην τεχνολογική και την θεωρητική κατεύθυνση. Ο πρώτος μαθητής, έχει αρκετά καλές επιδόσεις στα μαθηματικά, και μάλιστα, τα κατατάσσει εντός των αγαπημένων μαθημάτων του.

Σύμφωνα με όσα ο ίδιος ανέφερε, δυσκολεύεται στο κομμάτι της συνδυαστικής, καθώς θεωρεί ότι δεν έχει διδαχθεί το συγκεκριμένο μάθημα επαρκώς και δεν έχει αναπτύξει τις απαραίτητες δεξιότητες. Ωστόσο, ακόμη και πριν την παρέμβαση, έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη συνδυαστική και υποστήριξε ότι τον δυσκολεύει λίγο, αλλά του αρέσει. Ο δεύτερος μαθητής, έχει ελαφρώς χαμηλότερες επιδόσεις στα μαθηματικά, ωστόσο βρίσκεται σε ένα αρκετά καλό επίπεδο. Σύμφωνα με όσα υποστήριξε, η συνδυαστική τον δυσκολεύει εξίσου με άλλους κλάδους των μαθηματικών και δυσκολεύεται να λύσει μόνος του τις ασκήσεις.

4.1.6.Εργαλεία

Εκτός από το pre test και το φύλλο εργασίας, για την διεξαγωγή της παρέμβασης, χρησιμοποιήθηκαν και τεχνολογικά εργαλεία, τα οποία περιλαμβάνουν φορητό υπολογιστή και προτζέκτορα, τα οποία διευκόλυναν τη διεξαγωγή της παρέμβασης.

4.2.Pre test

Για τη διερεύνηση των γνώσεων των μαθητών πριν την παρέμβαση, τους ζητήθηκε να λάβουν συμμετοχή σε ένα pre test. Για τη συμπλήρωση των ακόλουθων ασκήσεων, είχαν χρόνο μισής ώρας (10 λεπτά ανά άσκηση):

Άσκηση 1:

Πόσοι διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 χωρίς επανάληψη;

Απάντηση:

Υπάρχουν πέντε επιλογές για το πρώτο ψηφίο, τέσσερις για το δεύτερο και τρεις για το τρίτο. Επομένως, υπάρχουν 5 x 4 x 3 = 60 διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί που μπορούν να σχηματιστούν.

Άσκηση 2:

Ένας κωδικός πρόσβασης αποτελείται από 6 χαρακτήρες, καθένας από τους οποίους μπορεί να είναι ένα κεφαλαίο γράμμα από την αγγλική αλφάβητο ή ένα ψηφίο. Πόσοι πιθανοί κωδικοί πρόσβασης υπάρχουν;

Απάντηση:

Κάθε χαρακτήρας μπορεί να είναι ένα από 26 γράμματα ή 10 ψηφία, επομένως υπάρχουν 36 πιθανές επιλογές για καθέναν από τους 6 χαρακτήρες. Επομένως, υπάρχουν 36^6 = 2.176.782.336 πιθανοί κωδικοί πρόσβασης.

Άσκηση 3:

Από μια ομάδα 10 ατόμων θα επιλεγεί μια 5μελής επιτροπή. Πόσες διαφορετικές επιτροπές είναι δυνατές;

Απάντηση:

Υπάρχουν 10 επιλογές για το πρώτο μέλος, 9 επιλογές για το δεύτερο και ούτω καθεξής, μέχρι 6 επιλογές για το πέμπτο μέλος. Ωστόσο, η σειρά με την οποία επιλέγονται τα μέλη δεν έχει σημασία, επομένως πρέπει να διαιρέσουμε με τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να διαταχθεί η επιτροπή, που είναι 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών επιτροπών που μπορούν να σχηματιστούν είναι (10 x 9 x 8 x 7 x 6) / (5 x 4 x 3 x 2 x 1) = 252.

Παρακάτω, παρουσιάζεται η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, με βάση την κλείδα αξιολόγησης που δημιουργήθηκε. Οι δύο πρώτες ασκήσεις βαθμολογήθηκαν με 6 μονάδες η καθεμία και η τρίτη με 8, ώστε να καταχωρηθεί ένα βαθμός με άριστα το 20. Ο τελικός βαθμός που δόθηκε στους μαθητές, υπολογίστηκε με βάση τρία κριτήρια, σωστή συλλογιστική, σωστές πράξεις και αξιοποίηση των προηγούμενων γνώσεων. Το 20, ως άριστη βαθμολογία στο γενικό βαθμό, προκύπτει από τη συγκέντρωση 60 βαθμών, 20 για κάθε κριτήριο. Υπήρχε αρκετή διάσταση ως προς το προφίλ των λαθών των μαθητών. Ο μαθητής Β, αξιοποίησε σημαντικά της γνώσεις τις οποίες είχε ήδη από τα μαθήματα, σε αντίθεση με τον μαθητή Α, ο οποίος δήλωσε και ο ίδιος ότι έχει ορισμένα κενά στον συγκεκριμένο τομέα, παρά τις καλές του γενικές επιδόσεις. Και οι δύο μαθητές, έκαναν λάθη ως προς τις πράξεις, γεγονός που δείχνει ότι ήταν αρκετά βιαστικοί, ίσως λόγω της πίεσης του χρόνου, ενώ ακολούθησαν μία επαρκή συλλογιστική, αλλά όχι μέχρι τέλους, ιδιαίτερα ο μαθητής Α. Για παράδειγμα, ο μαθητής Α, στην άσκηση 3, δεν μπορούσε να κατανοήσει πόσες επιλογές υπήρχαν για το κάθε άτομο, με αποτέλεσμα να πολλαπλασιάζει σε κάθε περίπτωση με το 10, δηλαδή των αρχικό αριθμό των συμμετεχόντων.

Πίνακας 1: Αποτελέσματα pre test

	ΜΑΘΗΤΗΣ Α	ΜΑΘΗΤΗΣ Β
ΓΕΝΙΚΟΣ ΒΑΘΜΟΣ	10/20	15/20
ΣΩΣΤΗ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ	12/20	15/20
ΣΩΣΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ	10/20	14/20
ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ	8/20	16/20

4.3.Διδακτική Παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση, βασίστηκε σε ένα φύλλο εργασίας, το οποίο παρουσιάζεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας (σελ.80). Το φύλλο εργασίας, μοιράστηκε στους μαθητές και τους ζητήθηκε να το μελετήσουν. Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκαν οι ακόλουθες δραστηριότητες:

Δραστηριότητα 1:

Χρόνος: 30 λεπτά

Εποπτικά Μέσα: Αρχείο PowerPoint, Φορητός Υπολογιστής

Στόχος: Κατανόηση της συνδυαστικής μέσα από το ιστορικό παράδειγμα του βιβλίου Sefer Yetzirah

Στους μαθητές, παρουσιάστηκε το ακόλουθο κείμενο:

Το Sefer Yetzirah είναι ένα μυστικιστικό εβραϊκό έργο του οποίου ο συγγραφέας και η ακριβής ημερομηνία είναι άγνωστα. Μάλλον γράφτηκε στην Παλαιστίνη κάπου μεταξύ 600 και 300 π.Χ.

Στόχος του ήταν να διερευνήσει πώς τα γράμματα της εβραϊκής χρησιμοποιήθηκαν από τον Θεό για να δημιουργήσει τον κόσμο. Ο Θεός τα σχεδίασε, τα συνδύασε, τα ζύγισε, και μέσω αυτών παρήγαγε ολόκληρη τη δημιουργία.

Τα γράμματα είναι το θεμέλιο των λέξεων και είναι επομένως το θεμέλιο των πάντων. Ο άγνωστος συγγραφέας ήθελε να υπολογίσει πόσες λέξεις θα μπορούσαν να σχηματίζονται από τις διάφορες διατάξεις δεδομένων γραμμάτων.

Ο Sefer Yetzirah περιέχει τα αποτελέσματα για τις μεταθέσεις των 2, 3, 4, 5, 6 και 7 στοιχείων. Ο συγγραφέας δεν έδωσε οποιαδήποτε εξήγηση για το πώς έκανε τους υπολογισμούς του. Επομένως, πολλά σχόλια γράφτηκαν προσπαθώντας να αναλύσουν τη μέθοδο του (Caruthel. 2004).

Στη συνέχεια, ακολούθησε συζήτηση με τους μαθητές, και έπειτα, τους ζητήθηκε να ανατρέξουν στην πρώτη άσκηση του φύλλου εργασίας.

1) *Δύο πέτρες χτίζουν δύο σπίτια,*

τρεις πέτρες χτίζουν έξι σπίτια,

τέσσερις χτίζουν είκοσι τέσσερα σπίτια,

πέντε χτίζουν εκατόν είκοσι σπίτια,

έξι χτίζουν επτακόσια είκοσι σπίτια,

και επτά χτίζουν πέντε χιλιάδες σαράντα

σπίτια…

Από εκεί και πέρα προχωρήστε και υπολογίστε.

Sefer Yetzirah, c. 200 C.E.

Ο συγγραφέας Sefer Yetzirah δεν έφτιαχνε λίστες για όλες τις περιπτώσεις για τις οποίες ήθελε να υπολογίσει τους πιθανούς σχεδιασμούς. Θυμηθείτε τι μάθαμε στη θεωρία και υπολογίστε με αριθμητικό τρόπο, συνεχίζοντας τον συλλογισμό του, πόσα σπίτια χτίζουν οι 8 και πόσα οι 9 πέτρες;

Οι μαθητές, με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, κατάφεραν να λύσουν την άσκηση σωστά και αν και δυσκολεύτηκαν, είχαν αρκετό ενδιαφέρον για το μάθημα. Η δυσκολία την οποία αντιμετώπισαν είχε να κάνει περισσότερο με το γεγονός ότι η εκφώνηση ήταν προφορική. Ο μαθητής Α ρώτησε: «Τώρα δηλαδή τι πράξη θα κάνουμε;». Αρχικά, ιδιαίτερα ο μαθητής Α’ έδειξε ιδιαίτερο άγχος και είπε πως δεν καταλαβαίνει την άσκηση. Τότε, ζητήθηκε από τον μαθητή Β να τον βοηθήσει, παρέχοντας υποστήριξη. Εν τέλει, και ο δεύτερος μαθητής ανέφερε ότι δυσκολεύεται, οπότε έγινε μία σύντομη αναφορά στη θεωρία και δόθηκαν συγκεκριμένες οδηγίες. Οι μαθητές, εν τέλει έλυσαν την άσκηση με επιτυχία. Ο μαθητής Β ανέφερε: «δεν φανταζόμουν με τίποτα ότι οι πράξεις που μαθαίνουμε στο σχολείο έχουν τέτοια ιστορία, σκεφτείτε πόσο δύσκολο ήταν να υπολογίσεις πριν». Με αφορμή την παρέμβαση του, έγινε μία σύντομη συζήτηση.

Δραστηριότητα 2:

Χρόνος: 30 λεπτά

Στόχος: Κατανόηση της συνδυαστικής μέσα από το ιστορικό παράδειγμα του βιβλίου του Saadia Gaon.

Εποπτικά μέσα: Αρχείο PowerPoint, Φορητός υπολογιστής

Στη συνέχεια, τους ζητήθηκε να κοιτάξουν τη δεύτερη άσκηση του φύλλου εργασίας που παρατίθεται ακολούθως:

«Η μεγαλύτερη λέξη στην Εβραϊκή Βίβλο που αποτελείται από διαφορετικά γράμματα έχει 11 γράμματα. Για το λόγο αυτό, ο Saadia Gaon σταμάτησε τους υπολογισμούς του στο 11. Πόσες πιθανές «λέξεις» μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα 11 γράμματα;»

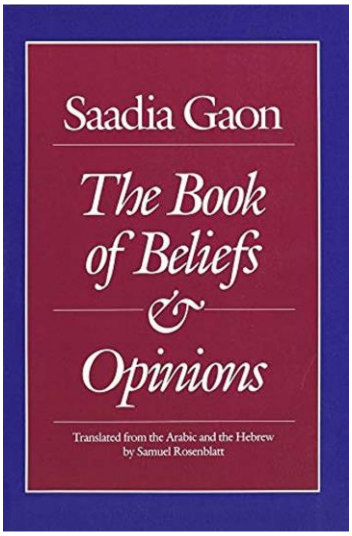
Πριν απαντήσουν, ο εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε τον φορητό υπολογιστή για να κάνει αναζήτηση για τον Saadia Gaon. Παρουσιάστηκαν οι ακόλουθες εικόνες και έπειτα ζητήθηκε από τους μαθητές να τις σχολιάσουν. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν πολύ θετικά, και συγκεκριμένα ο μαθητής Α, ρώτησε σχετικά με τη γλώσσα, αλλά και το πότε εκδόθηκε για πρώτη φορά το βιβλίο.

Εικόνα 1: Απεικόνιση από αρχαίο χειρόγραφο για τον Saadia Gaon

Εικόνα 2: Ψηφιδωτό για τον Saadia Gaon

Εικόνα 3: Απεικόνιση χειρόγραφου

Εικόνα 4: Σύγχρονη έκδοση του βιβλίο The Book of Beliefs



Έπειτα, τους παρουσιάστηκε στο powerpoint, το βιογραφικό του συγγραφέα και ορισμένα στοιχεία για το έργο του:

Ο Saadia Gaon γεννήθηκε στην Αίγυπτο αλλά πέρασε το τελευταίο μισό της ζωής του στη Συρία και το Ιράκ. Το 922 διορίστηκε επικεφαλής στην εβραϊκή ακαδημία ταλμουδικής στη Σούρα, κοντά στη Βαγδάτη στο σημερινό Ιράκ. Σε αυτή τη θέση, έπρεπε να ερμηνεύσει τον γραπτό εβραϊκό νόμο και να απαντήσει σε ερωτήσεις σχετικά με τη δυνατότητα εφαρμογής του σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Έτσι τον ενδιέφερε πάντα η σαφήνεια της έκφρασης. Τελικά απολύθηκε από τη θέση του επειδή αρνήθηκε να εκφοβίζεται από την πολιτική εξουσία. Χρησιμοποίησε τη συνταξιοδότησή του για να γράψει ένα σημαντικό φιλοσοφικό έργο που ερμηνεύει τον Ιουδαϊσμό υπό το φως της λογικής. Τα βιβλία του διακρίνονται για τη συστηματική τους δομή και λογική σειρά. Ήταν εξοικειωμένος με το Sefer Yetzirah, και επέκτεινε τη μαθηματική σκέψη του άγνωστου συγγραφέα. Υπολόγισε τον αριθμό των μεταθέσεων για 8, 9, 10 και 11 γράμματα. Υπολόγισε ότι υπάρχουν 39.916.800 μεταθέσεις 11 γραμμάτων και τόνισε ότι μπορεί να βρει όλες τις μεταθέσεις των 22 γραμμάτων του Εβραϊκού αλφάβητου, ωστόσο, σε μια εποχή πριν από αριθμομηχανές και υπολογιστές, ο προσδιορισμός αυτού του αριθμού πρέπει να φαινόταν αδύνατος (Caruthetal. 2004).

Μετά από τη μελέτη, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν το ερώτημα, ενώ ο εκπαιδευτικός έβλεπε το γραπτό και τους καθοδηγούσε. Με την απαραίτητη καθοδήγηση, κατάφεραν να λύσουν τις ασκήσεις. Ο μαθητής Β' έδειξε να προβληματίζεται, αναφέροντας χαρακτηριστικά «δεν μπορώ να το κάνω, είναι πολύ μεγάλοι αριθμοί, έχω μπερδευτεί τελείως» όμως στη συνέχεια, διαπίστωσε μόνος του, κατόπιν υπόδειξης του παραδείγματος του προηγούμενου προβλήματος, ότι ουσιαστικά, η συλλογιστική που πρέπει να ακολουθήσει είναι η ίδια με το προηγούμενο πρόβλημα. Μάλιστα, όταν εν τέλει έλυσε την άσκηση, δήλωσε: «από την εκφώνηση νόμιζα ότι θα ήταν πιο περίπλοκο».

Δραστηριότητα 3:

Χρόνος: 20 λεπτά

Εποπτικά Μέσα: Αρχείο PowerPoint, Φορητός Υπολογιστής

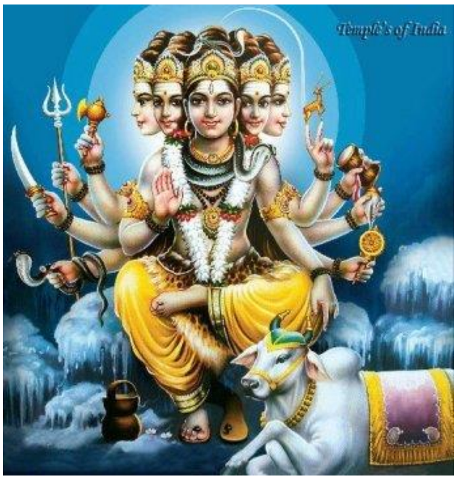
Στόχος: Εξάσκηση στην κατανόηση των αρχών της συνδυαστικής

Στους μαθητές, παρουσιάστηκε η ακόλουθη άσκηση με την απεικόνιση του θεού Shiva. Τους ζητήθηκε, βλέποντας την εικόνα, να θυμηθούν τη μέθοδο που ακολούθησαν προηγουμένως και να λύσουν το ερώτημα, το οποίο προβλημάτισε τον Ινδό μαθηματικό Bhaskara.

3) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αναπαρασταθεί ο ινδουιστικός θεός Σίβα με την αναδιάταξη των δέκα συμβόλων που κρατά στα δέκα χέρια του;

Ουσιαστικά, οι μαθητές, έπρεπε να κατανοήσουν ότι ο θεός Shiva, ο οποίος είχε 10 χέρια, στα οποία κρατούσε συγκεκριμένα ιερά αντικείμενα, μπορούσε να απεικονιστεί με πολλούς τρόπους, δηλαδή, με τα αντικείμενα αναδιατεταγμένα. Αρχικά, οι μαθητές μπερδεύτηκαν αρκετά από την εκφώνηση, όμως στην συνέχεια κατάλαβαν το ζητούμενο, και ο μαθητής Α ανέφερε: «η λογική είναι ίδια, απλά αλλάζουν τα δεδομένα»

Εικόνα 5: Απεικόνιση θεού Shiva



Έπειτα, ο ένας μαθητής, αξιολόγησε και διόρθωσε την άσκηση του άλλου μαθητή. Έτσι, καλλιέργησαν ταυτόχρονα δεξιότητες μεταγνώσης. Ο μαθητής Β, εντόπισε λάθος πράξεις στην λύση της άσκησης από τον μαθητή Α. Παρατίθεται ο διάλογος:

Μαθητής Β: Κάναμε το ίδιο αλλά έχει διαφορετικό αποτέλεσμα

Μαθητής Α: Εγώ θα έκανα λάθος

Μαθητής Β (προς εκπαιδευτικό): Μπορείτε να τα δείτε

Εκπαιδευτικός: Κάντε και οι δύο έναν επανέλεγχο και βρείτε το μόνοι σας, μπορείτε.

Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός έλυσε την άσκηση στον πίνακα και τους ζήτησε να διορθώσουν τα λάθη τους και να συζητήσουν τις απορίες τους. Οι μαθητές, έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αφοσίωση. Όσο έλυναν, έκαναν αρκετές ερωτήσεις σχετικά με τη θρησκεία του Ινδουισμού, πολλές από τις οποίες βέβαια δεν είχαν απόλυτη συνάφεια με το μάθημα.

Δραστηριότητα 4:

Χρόνος: 40 λεπτά

Εποπτικά Μέσα: Φορητός Υπολογιστής, Αρχείο PowerPoint

Στόχος: Εξάσκηση στην κατανόηση των αρχών της συνδυαστικής, μέσω του ιστορικού προβλήματος

Ο εκπαιδευτικός παρουσίασε στους μαθητές το ακόλουθο κείμενο:

Αν κάποιος θέλει να μάθει πόσες λέξεις μπορεί να δημιουργηθούν από έναν μεγαλύτερο αριθμό από το 7, όπως για παράδειγμα 8, 9, 10, ... ο κανόνας είναι ότι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα για έναν δοσμένο αριθμό από τον παρακάτω αριθμό για να λάβουμε την απάντηση... Αν θέλετε να ξέρετε τον αριθμό των διατάξεων των 8 γραμμάτων, πολλαπλασιάστε το 5040 που πήρατε από 7 γράμματα επί 8 και θα λάβετε 40.320 λέξεις και αν ψάξετε για τον αριθμό διατάξεων των 9 γραμμάτων, πολλαπλασιάστε 40.320 με 9 και θα πάρετε 352.880. Ομοίως, για 10 γράμματα υπάρχουν 3.628.800 λέξεις και για 11 γράμματα υπάρχουν 39.916.800 λέξεις.

Saadia Gaon (899-942, Iraq)

Είναι σωστό το παραπάνω απόφθεγμα; Μπορείτε να το ελέγξετε με πράξεις;

Οι μαθητές, αξιοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις τους, έκαναν τις επαληθεύσεις, στο φύλλο εργασίας τους, τις έλεγξαν προσεκτικά και στη συνέχεια συζήτησαν μεταξύ τους για τα λύσεις που βρήκαν. Ο μαθητής Β στην αρχή παραπονέθηκε, ότι οι αριθμοί είναι πολλοί μεγάλοι και αυτό θα τον μπερδέψει. Ο εκπαιδευτικός του είπε ότι ακριβώς αυτό είναι το νόημα της συνδυαστικής, να γίνει εύκολη η προσέγγιση αυτών των αριθμών και ότι ουσιαστικά, ο κόπος του θα ήταν ακριβώς ο ίδιος με λιγότερους αριθμούς. Ο μαθητής το σκέφτηκε λίγο και συμφώνησε. Η συγκεκριμένη άσκηση δεν δυσκόλεψε τους μαθητές όσο οι προηγούμενες και ταυτόχρονα, συζητούσαν μεταξύ τους και συμφωνούσαν για τα σωστά αποτελέσματα. Στο τέλος, ο εκπαιδευτικός διόρθωσε τα γραπτά και συζήτησε με κάθε μαθητή για τα λάθη του. Στην περίπτωση του μαθητή Α υπογράμμισε λάθη στις πράξεις που είχε πραγματοποιήσει, τα οποία αφορούσαν αριθμητικά λάθη και του ζήτησε να ξανακάνει τις πράξεις και να απαντήσει μόνος του που οφειλόταν το λάθος του. Όπως ο μαθητής ανέφερε: «μάλλον δε το πρόσεξα αρκετά, μπερδεύτηκα». Ο εκπαιδευτικός ζήτησε στον Α μαθητή να προσέχει πολύ την συγκέντρωση του, γιατί χάνει αρκετά από τις πράξεις, ενώ έχει κατανοήσει τη λογική που πρέπει να ακολουθήσει. Ο Β μαθητής, έκανε πολύ λίγα λάθη και μάλιστα, διόρθωνε μόνος του τον εαυτό του. Ο εκπαιδευτικός ζήτησε στους μαθητές να απαντήσουν με ειλικρίνεια αν τους άρεσε το μάθημα και απάντησαν πολύ θετικά. Ο μαθητής Α μάλιστα είπε: «πρώτη φορά τα λύνω χωρίς να κοιτάξω τη λύση από το βιβλίο, πολύ σημαντικό αυτό». Ο μαθητής Β ανέφερε: «μακάρι να το κάναμε έτσι και στο σχολείο, θα είχα 20 στα μαθηματικά».

4.4.Post test / Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση της παρέμβασης, έγινε με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος, περιλαμβάνει την επανάληψη του pretest, μία εβδομάδα μετά την παρέμβαση. Οι μαθητές, είχαν 30 λεπτά να λύσουν τις ίδιες ασκήσεις (βλ. pretest, 4.1.) και στη συνέχεια, είχαν 15 λεπτά να απαντήσουν ένα ερωτηματολόγιο, το οποίο αξιολόγησε τις εντυπώσεις και την ικανοποίηση τους από την παρέμβαση. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης pretest και post test, και τα διαγράμματα τα οποία προέκυψαν από το ερωτηματολόγιο (βλ. παράρτημα, σελ. 75 έως 79).

4.5.Ανάλυση Αποτελεσμάτων

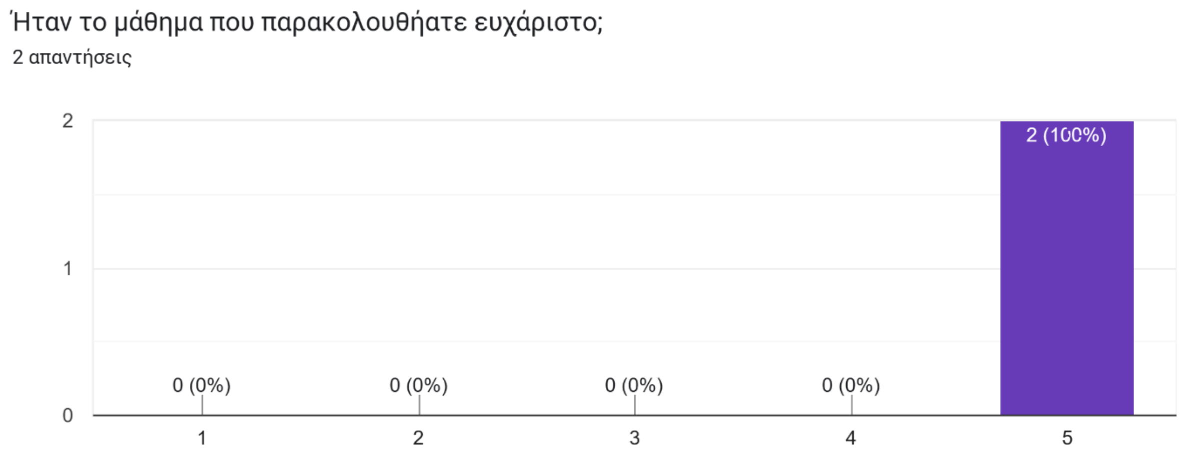
Στον ακόλουθο πίνακα, απεικονίζονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης pre test και post test. Όπως προκύπτει από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των μαθητών, η βελτίωση τους ήταν αισθητή σε όλους τους τομείς. Ο γενικός βαθμός, υπολογίζεται από τον συνυπολογισμό των τριών διαφορετικών προς εξέταση τομέων, σωστή συλλογιστική, με άριστα το 20, σωστές πράξεις, με άριστα το 20, αξιοποίηση προηγούμενων γνώσεων, με άριστα το 20. Συνεπώς, η συγκέντρωση 60 βαθμών, εξασφαλίζει το 20 στον γενικό βαθμό. Τα λάθη του πρώτου μαθητή, αφορούσαν κυρίως πράξεις, όπως για παράδειγμα λάθη σε πολλαπλασιασμούς ή λάθος υπολογισμούς λόγω βιασύνης και παρά τη δυσκολία που ο ίδιος δήλωσε πως αντιμετωπίζει ως προς την επίλυση ασκήσεων συνδυαστικής, φάνηκε να κατάλαβε αρκετά τη συλλογιστική. Ο μαθητής Β, είχε ένα πολύ καλό γραπτό, και μάλιστα έδειξε αρκετές ικανότητες, καθώς ο ίδιος εντόπιζε τα λάθη του και τα διόρθωνε μόνος του. Μάλιστα, βοήθησε πολύ τον μαθητή Α, δείχνοντας του τα λάθη του και εξηγώντας του τι πρέπει να διορθώσει και γιατί.

Πίνακας 2: Σύγκριση αποτελεσμάτων pre test και post test

	ΜΑΘΗΤΗΣ Α PRE TEST	ΜΑΘΗΤΗΣ Α POST TEST	ΜΑΘΗΤΗΣ Β PRE TEST	ΜΑΘΗΤΗΣ Β POST TEST
ΓΕΝΙΚΟΣ ΒΑΘΜΟΣ	10/20	16/20	14/20	18/20
ΣΩΣΤΗ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ	12/20	16/20	15/20	19/20
ΣΩΣΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ	10/20	15/20	14/20	17/20
ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ	8/20	17/20	16/20	18/20

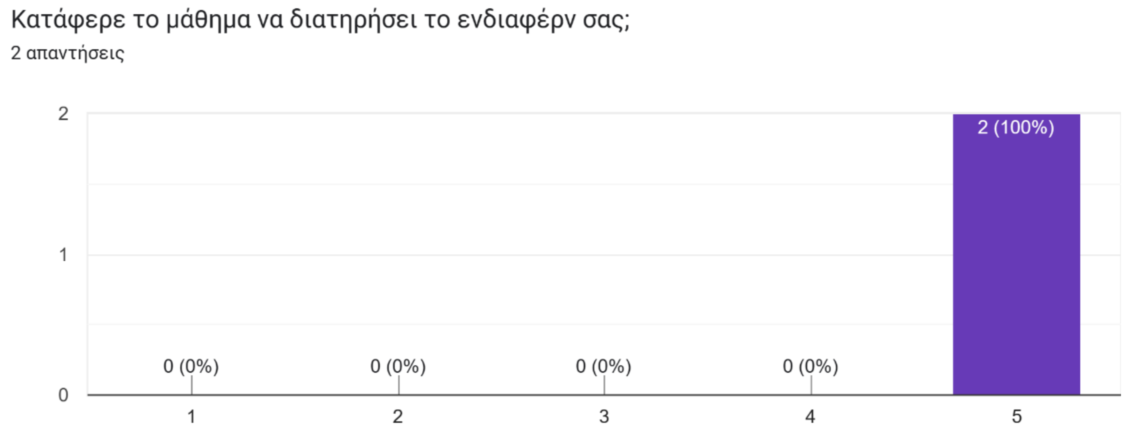
Εκτός από την ενίσχυση των δεξιοτήτων των μαθητών, αλλά και της κατανόησης τους όσον αφορά τις έννοιες της συνδυαστικής, όπως απεικονίζεται από τα ακόλουθα διαγράμματα, οι μαθητές αισθάνθηκαν ικανοποίηση από τη διδακτική παρέμβαση που παρακολούθησαν. Παρακάτω, θα παρατεθούν οι πίνακες, με τις απαντήσεις που έδωσαν για στο ερωτηματολόγιο, που κλήθηκαν να συμπληρώσουν στο τέλος της παρέμβασης.

Διάγραμμα 1: Ευχαρίστηση παρακολούθησης του μαθήματος



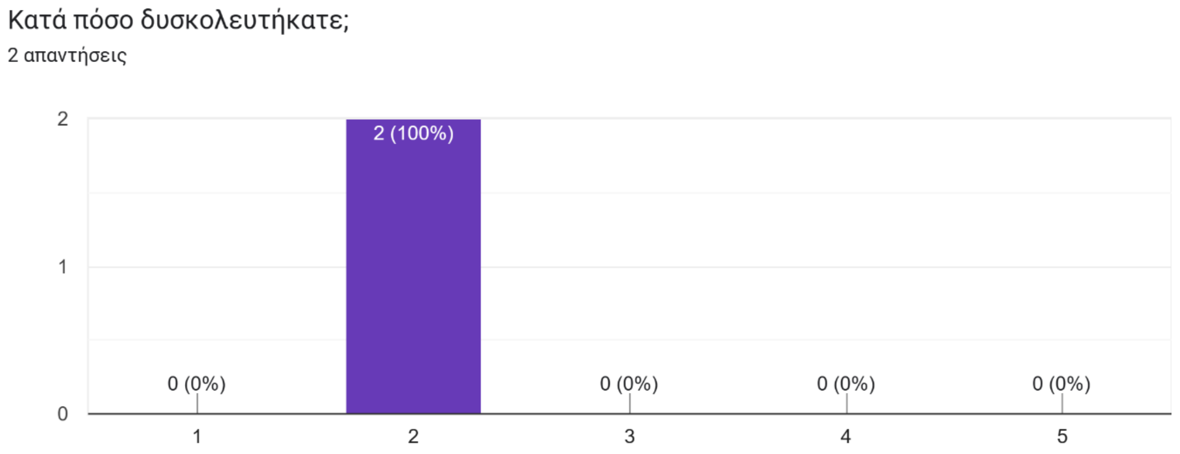
Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, οι μαθητές βρήκαν πάρα πολύ ευχάριστο το μάθημα. Μάλιστα, ένας εκ των μαθητών ανέφερε: «το μάθημα μου φάνηκε πολύ πιο ευχάριστο και δεν ένιωσα κούραση ή πλήξη. Συνήθως τα μαθηματικά με κουράζουν, σε αυτή την περίπτωση δεν κουράστηκα, επειδή το μάθημα δεν είχε μόνο ασκήσεις αλλά και συζήτηση, εικόνες, ιστορίες, μου άρεσε όλο αυτό»

Διάγραμμα 2: Ενδιαφέρον μαθητών



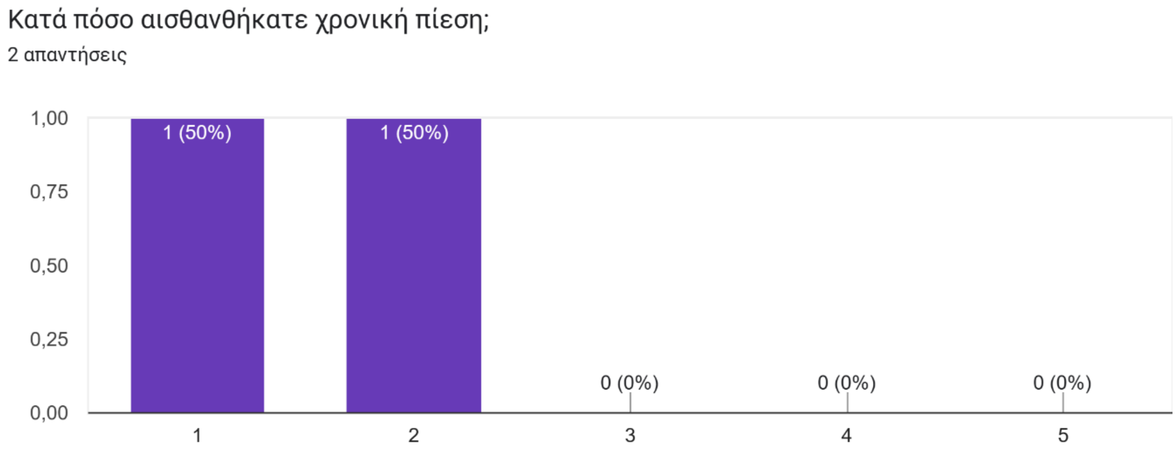
Επιπλέον, σύμφωνα με τις απαντήσεις και των δύο μαθητών, το μάθημα κατάφερε να διατηρήσει το ενδιαφέρον τους στον μέγιστο βαθμό. Σύμφωνα με προφορικές απαντήσεις των μαθητών, το ενδιαφέρον τους για το μάθημα σχετίζεται με «τη χρήση εικόνων» αλλά και την «ύπαρξη ιστορικών παραδειγμάτων», που συνέδεσαν ουσιαστικά τα μαθηματικά με την ιστορία.

Διάγραμμα 3: Βαθμός Δυσκολίας



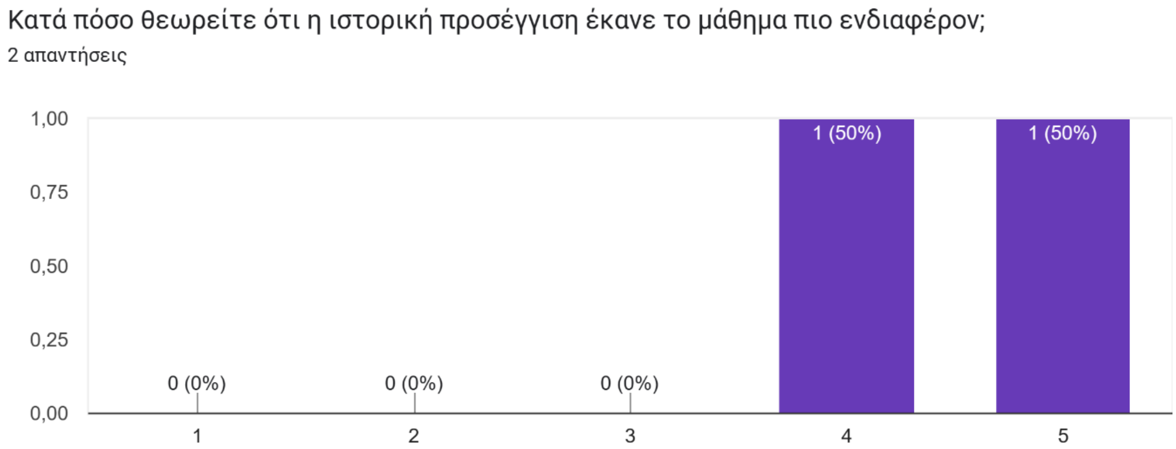
Ως προς το πόσο δυσκολεύτηκαν, οι μαθητές απάντησαν πως δυσκολεύτηκαν λίγο, γεγονός το οποίο είναι αρκετά θετικό, αν αναλογιστεί κανείς το βαθμό δυσκολίας του μαθήματος. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν αφορούσαν αφενός τη φύση του μαθήματος και αφετέρου το γεγονός ότι δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία στη συγκεκριμένη μέθοδο.

Διάγραμμα 4: Χρονική πίεση



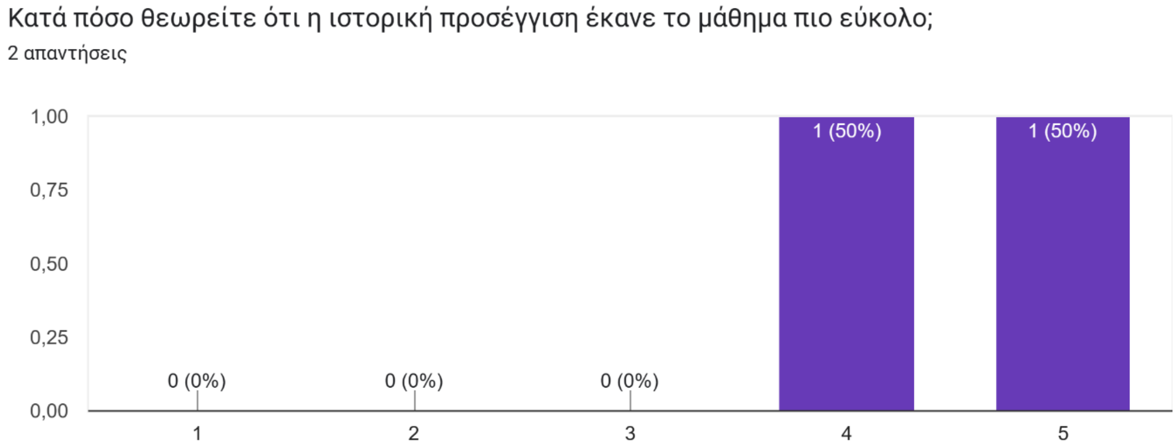
Όσον αφορά τη χρονική πίεση την οποία αισθάνθηκαν, οι μαθητές τόνισαν ότι ήταν ανύπαρκτη, έως ελάχιστη.

Διάγραμμα 5: Ενδιαφέρον μαθήματος λόγω της ιστορικής προοπτικής



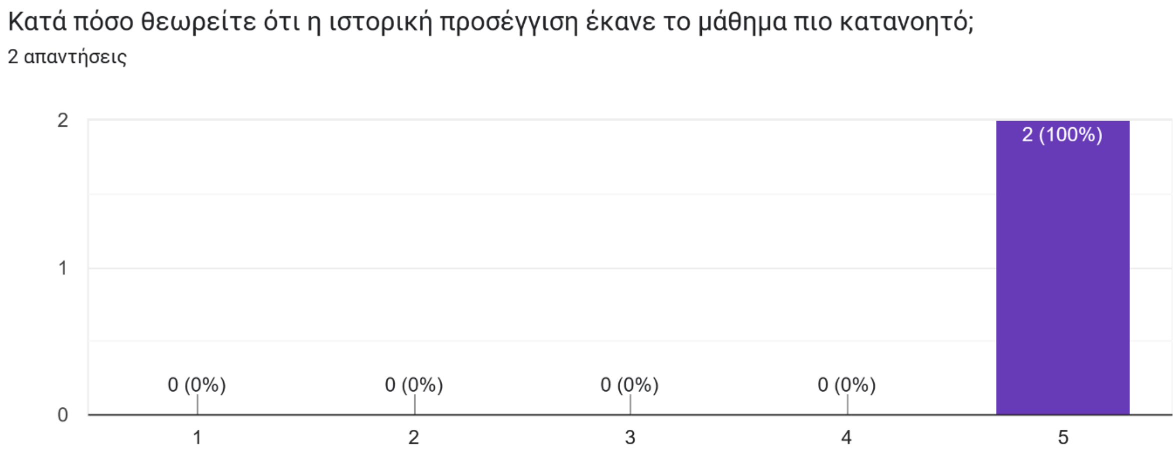
Όπως προκύπτει από το παραπάνω διάγραμμα, και οι δύο μαθητές, θεώρησαν ότι η ιστορική προσέγγιση η οποία υιοθετήθηκε, κατέστησε το μάθημα πιο ενδιαφέρον. Στη συνέχεια, στους μαθητές ζητήθηκε να αιτιολογήσουν την απάντηση τους. Ένας από τους μαθητές, ανέφερε ότι: «το μάθημα ήταν πιο ζωντανό και ενδιαφέρον, μου άρεσαν πολύ οι εικόνες και με έκαναν να συνδέσω τα μαθηματικά με την ιστορία και τους ανθρώπους που τα μελέτησαν πολλούς αιώνες πριν».

Διάγραμμα 6: Διευκόλυνση του μαθήματος λόγω της ιστορικής προσέγγισης



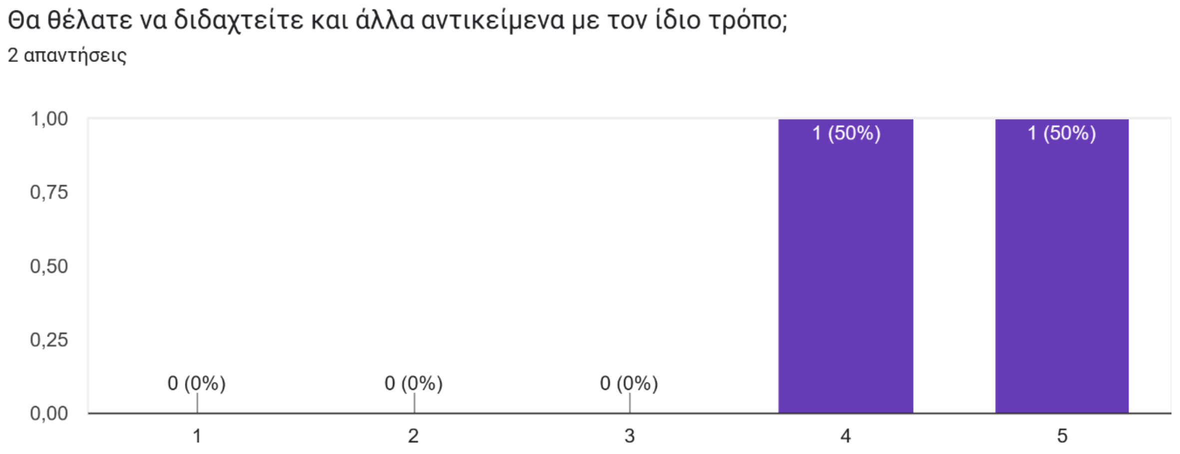
Ακόμη, υποστήριξαν και οι δύο πως η υιοθέτηση της ιστορικής προσέγγισης, έκανε επίσης το μάθημα ευκολότερο. Σε συζήτηση που πραγματοποιήθηκε μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος, ένας από τους μαθητές, ανέφερε χαρακτηριστικά πως: «μέσα από τη σύνδεση των ασκήσεων με συγκεκριμένες καταστάσεις και μέσα από τα ιστορικά παραδείγματα, ήταν πιο εύκολη η κατανόηση και επίλυση των προβλημάτων».

Διάγραμμα 7: Διάγραμμα κατανόησης λόγω της ιστορικής προσέγγισης



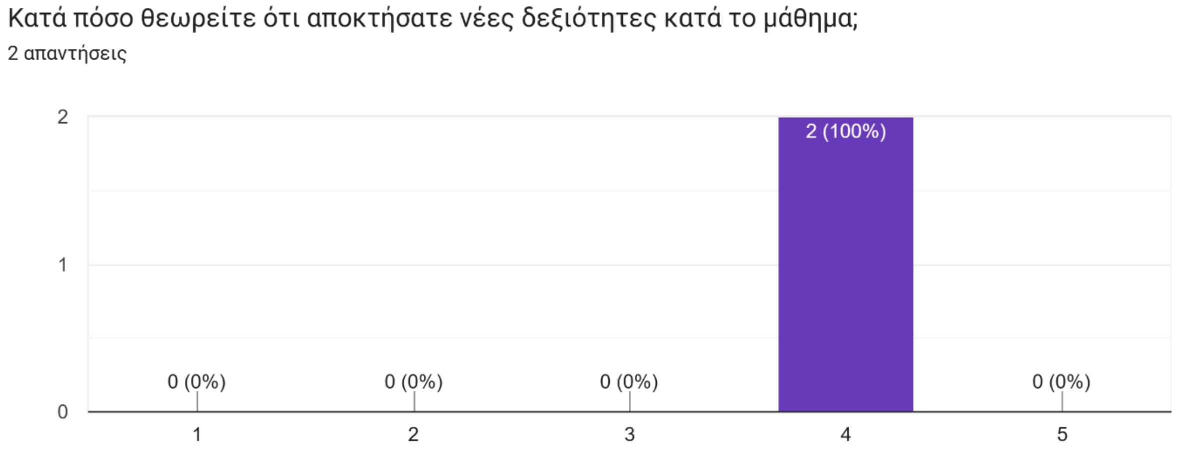
Από τις απαντήσεις των μαθητών προκύπτει, ότι σύμφωνα με την κρίση τους, το μάθημα τον μαθηματικών γίνεται πιο κατανοητό, μέσα από την υιοθέτηση μίας προσέγγισης που αξιοποιεί την ιστορία, καθώς οι μαθητές υποστήριξαν ότι η προσέγγιση αυτή τους διευκόλυνε, ενώ ταυτόχρονα κατέστησε το μάθημα ευχάριστο για εκείνους.

Διάγραμμα 8: Επιθυμία για διδασκαλία άλλων αντικειμένων με τον ίδιο τρόπο



Ακόμη, και οι δύο υποστήριξαν, ότι θα ήθελαν να διδαχθούν και άλλα αντικείμενα με τον ίδιο τρόπο.

Διάγραμμα 9: Απόκτηση νέων δεξιοτήτων



Τέλος, θεωρούν και οι δύο, ότι απέκτησαν πολλές δεξιότητες, όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, γεγονός το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί ως θετικό.

Συμπεράσματα

Η μελέτη περίπτωσης για τη διδασκαλία της συνδυαστικής μέσα από μια ιστορική προσέγγιση η οποία πραγματοποιήθηκε στην παρούσα εργασία έδωσε αρκετά χρήσιμα και αξιοποιήσιμα αποτελέσματα. Οι βαθμολογίες πριν και μετά το τεστ των δύο μαθητών που συμμετείχαν στη μελέτη έδειξαν σημαντική πρόοδο στη γνώση και στην κατανόησή τους στο πεδίο της συνδυαστικής. Επιπλέον, οι μαθητές εξέφρασαν υψηλά επίπεδα ικανοποίησης με την ιστορική προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στη διδασκαλία της συνδυαστικής. Αυτά τα ευρήματα παρέχουν πολύτιμες γνώσεις για την αποτελεσματικότητα της ιστορικής προσέγγισης στη διδασκαλία της συνδυαστικής σε μαθητές λυκείου. Κοινά λάθη, όπως για παράδειγμα τα λάθη συλλογιστικής ή τα λάθη στη μεταφορά των θεωρητικών προβλημάτων σε αριθμούς, αντιμετωπίστηκαν μέσα από τη συνεργασία των μαθητών, αλλά και ανατρέχοντας στα ιστορικά παραδείγματα. Όπως και στην έρευνα των Caruth et al. (2004) η διδασκαλία της συνδυαστικής μέσα από την ιστορία, οδήγησε σε θετικά αποτελέσματα, όσον αφορά τη διδασκαλία. Ακόμη, η χρήση της τεχνολογίας, διαδραμάτισε θετικό ρόλο, σύμφωνα με όσα υποστήριξαν οι μαθητές, γεγονός που συμφωνεί με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών όσον αφορά τη διδασκαλία της συνδυαστικής (Lockwood & De Chenne, 2020).

Η χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία της συνδυαστικής αποδείχθηκε μια αποτελεσματική μέθοδος για την εμπλοκή των μαθητών και την ενίσχυση της κατανόησής τους για το θέμα. Οι μαθητές ανέφεραν ότι η ιστορική προσέγγιση τους βοήθησε να δουν τη συνάφεια και τη σημασία της συνδυαστικής σε ένα ευρύτερο ιστορικό πλαίσιο. Αυτή η προσέγγιση τους βοήθησε επίσης να αναπτύξουν μια βαθύτερη εκτίμηση για τις συνεισφορές μαθηματικών που συνεισέφεραν με το έργο τους ιστορικά στον τομέα της συνδυαστικής. Η χρήση ιστορικών παραδειγμάτων παρείχε στους μαθητές συγκεκριμένα και σχετικά παραδείγματα που τους βοήθησαν να κατανοήσουν πιο εύκολα τις έννοιες της συνδυαστικής.

Οι βελτιωμένες βαθμολογίες των μαθητών στο post-test καταδεικνύουν ότι η ιστορική προσέγγιση στη διδασκαλία της συνδυαστικής μπορεί να αποτελέσει μια αποτελεσματική μέθοδο για τη βελτίωση της γνώσης και της κατανόησης του θέματος από τους μαθητές. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν τις συνδέσεις μεταξύ της συνδυαστικής και άλλων τομέων των μαθηματικών και της επιστήμης. Μπορεί επίσης να τους βοηθήσει να αναπτύξουν δεξιότητες κριτικής σκέψης εκθέτοντάς τους στις διαδικασίες σκέψης των μαθηματικών που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της συνδυαστικής. Η χρήση ιστορικών προβλημάτων μπορεί επίσης να προσφέρει στους μαθητές μια πιο ελκυστική και ενδιαφέρουσα μαθησιακή εμπειρία.

Περιορισμοί της έρευνας

Ωστόσο, απαιτείται περαιτέρω έρευνα για τη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της προσέγγισης της ιστορίας στη διδασκαλία της συνδυαστικής μεθόδου σε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστεί εάν τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης μπορούν να αναπαραχθούν σε άλλα περιβάλλοντα και με διαφορετικές ομάδες μαθητών. Δυστυχώς, το δείγμα δύο μόνο μαθητών, δεν μπορεί να γενικευτεί σε ένα ευρύτερο πληθυσμιακό δείγμα, ως προς τα αποτελέσματα.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ένας τομέας για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση της μακροπρόθεσμης διατήρησης της γνώσης που αποκτήθηκε μέσω της προσέγγισης της ιστορίας στη διδασκαλία της συνδυαστικής μεθόδου. Θα ήταν ωφέλιμο να διεξαχθούν αξιολογήσεις παρακολούθησης με τους συμμετέχοντες σε αυτήν τη μελέτη για να εξεταστεί εάν εξακολουθούν να είναι σε θέση να εφαρμόσουν τις έννοιες που έμαθαν μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.

Επιπλέον, θα ήταν χρήσιμο να συγκριθεί η αποτελεσματικότητα της προσέγγισης της ιστορίας με άλλες μεθόδους διδασκαλίας, όπως η προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων ή η προσέγγιση βάσει έργου. Μία τέτοια έρευνα, θα μπορούσε να παρέχει πληροφορίες σχετικά με το ποια μέθοδος διδασκαλίας είναι πιο αποτελεσματική για την προώθηση της κατανόησης και της διατήρησης των εννοιών της συνδυαστικής τεχνικής από τους μαθητές.

Τέλος, η μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να διερευνήσει τα πιθανά οφέλη από την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην ιστορική προσέγγιση της διδασκαλίας της συνδυαστικής τεχνικής, με τη χρήση διαδραστικών προσομοιώσεων ή διαδικτυακών πόρων για την ενίσχυση της δέσμευσης των μαθητών και την κατανόηση του θέματος.

Κλείνοντας, η τρέχουσα παρέχει προκαταρκτικά στοιχεία ότι η προσέγγιση της ιστορίας μπορεί να είναι μια αποτελεσματική μέθοδος διδασκαλίας της συνδυαστικής μεθόδου σε μαθητές λυκείου. Ωστόσο, απαιτείται περαιτέρω έρευνα για την επικύρωση αυτών των ευρημάτων και για τη διερεύνηση πιθανών οδών για τη βελτίωση της διδασκαλίας της συνδυαστικής στα σχολεία.

Ονοματεπώνυμο:

Ημερομηνία:

Παράρτημα

Φύλλο εργασίας

1) *Δύο πέτρες χτίζουν δύο σπίτια,*

τρεις πέτρες χτίζουν έξι σπίτια,

τέσσερις χτίζουν είκοσι τέσσερα σπίτια,

πέντε χτίζουν εκατόν είκοσι σπίτια,

έξι χτίζουν επτακόσια είκοσι σπίτια,

και επτά χτίζουν πέντε χιλιάδες σαράντα

σπίτια…

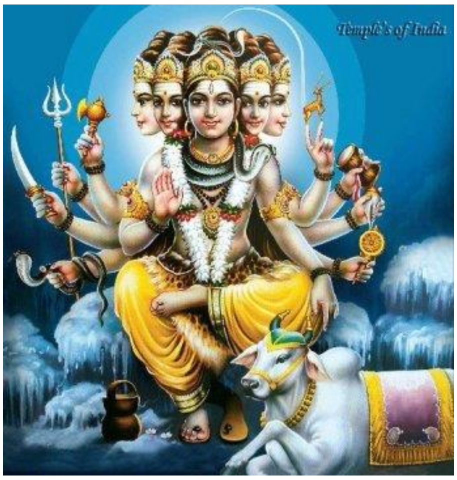
Από εκεί και πέρα προχωρήστε και υπολογίστε.

Sefer Yetzirah, c. 200 C.E.

Ο συγγραφέας Sefer Yetzirah δεν έφτιαχνε λίστες για όλες τις περιπτώσεις για τις οποίες ήθελα να υπολογίσει τους πιθανούς σχεδιασμούς. Θυμηθείτε τι μάθαμε στη θεωρία και υπολογίστε με αριθμητικό τρόπο, συνεχίζοντας τον συλλογισμό του, πόσα σπίτια χτίζουν οι 8 και πόσα οι 9 πέτρες;

2) Η μεγαλύτερη λέξη στην Εβραϊκή Βίβλο που αποτελείται από διαφορετικά γράμματα έχει 11 γράμματα. Για το λόγο αυτό, ο Saadia Gaon σταμάτησε τους υπολογισμούς του στο 11. Πόσες πιθανές «λέξεις» μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα 11 γράμματα;

3) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αναπαρασταθεί ο ινδουιστικός θεός Σίβα με την αναδιάταξη των δέκα συμβόλων που κρατά στα δέκα χέρια του;



4) *Αν κάποιος θέλει να μάθει πόσες λέξεις μπορεί να δημιουργηθούν από έναν μεγαλύτερο αριθμό από το 7, όπως για παράδειγμα 8, 9, 10, ... ο κανόνας είναι ότι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα για έναν δοσμένο αριθμό από τον παρακάτω αριθμό για να λάβουμε την απάντηση... Αν θέλετε να ξέρετε τον αριθμό των διατάξεων των 8 γραμμάτων, πολλαπλασιάστε το 5040 που πήρατε από 7 γράμματα επί 8 και θα λάβετε 40.320 λέξεις και αν ψάξετε για τον αριθμό διατάξεων των 9 γραμμάτων, πολλαπλασιάστε 40.320 με 9 και θα πάρετε 352.880. Ομοίως, για 10 γράμματα υπάρχουν 3.628.800 λέξεις και για 11 γράμματα υπάρχουν 39.916.800 λέξεις.*

Saadia Gaon (899-942, Iraq)

Είναι σωστό το παραπάνω απόφθεγμα; Μπορείτε να το ελέγξετε με πράξεις;

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Ερωτηματολόγιο

Αξιολόγηση παρέμβασης

1. Ήταν το μάθημα που παρακολουθήσατε ευχάριστο;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

2. Κατάφερε το μάθημα να διατηρήσει το ενδιαφέρον σας;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

3. Κατά πόσο δυσκολευτήκατε;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

4. Κατά πόσο αισθανθήκατε χρονική πίεση;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

5. Κατά πόσο θεωρείτε ότι η ιστορική προσέγγιση έκανε το μάθημα πιο ενδιαφέρον;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

6. Κατά πόσο θεωρείτε ότι η ιστορική προσέγγιση έκανε το μάθημα πιο εύκολο;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

7. Κατά πόσο θεωρείτε ότι η ιστορική προσέγγιση έκανε το μάθημα πιο κατανοητό;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

8. Θα θέλατε να διδαχτείτε και άλλα αντικείμενα με τον ίδιο τρόπο;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

9. Κατά πόσο θεωρείτε ότι αποκτήσατε νέες δεξιότητες κατά το μάθημα;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Ammamiarihta, A., Syahputra, E., & Surya, E. (2017). Development of learning devices oriented problem based learning to increase student's combinatorial thinking in mathematical problem solving ability. In *2nd Annual International Seminar on Transformative Education and Educational Leadership* (pp. 335-340). Atlantis Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199.

Biggs, N. L. (1979). The roots of combinatorics. *Historia mathematica, 6*(2), 109-136.

Bunimovich, E. (2011). Combinatorics, probability, and statistics in the Russian school curriculum. *Series On Mathematics Education*, 231.

Cameron, P. (1995). *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge University Press.

Caruth, P., Honeyman, L., Kasube, H. & Kiernman, G. (2004). *Combinatronics.* Historical Modules Project. Mathematical Association of America.

Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (1996). Mathematics education research: past, present and future. Bangkok: UNESCO.

Cohen, D. (1979). Basic techniques of combinatorial theory. John Wiley & Sons.

Damiani, E. (2009). From Combinatorics to Philosophy: The Legacy of G.-C. Rota. Springer Science & Business Media.

DeBellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2008). Discrete Mathematics in the Schools: Experiences from the USA. *Mathematics in School*, *37*(2), 2–4. http://www.jstor.org/stable/30216104

English, L. (2005). Combinatorics And The Development Of Children's Combinatorial Reasoning. 10.1007/0-387-24530-8_6.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Flegg, G. (1983). *Numbers: their history and meaning*. Courier Corporation.

Grimaldi, R. P. (2003). *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. CRC Press.

Hart, E. W., & Sandefur, J. (Eds.). (2017). *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*. Springer.

Jones, G. A. (Ed.). (2006). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.

Kahn, J., Lovász, L., & Prömel, H. J. (2008). Combinatorics. *Oberwolfach Reports*, *5*(1), 5-78.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 111-127.

Lamanna, L., Gea, M. M., & Batanero, C. (2022). Do Secondary School Students’ Strategies in Solving Permutation and Combination Problems Change with Instruction?. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1-15.

Lockwood, E., & De Chenne, A. (2020). Enriching students’ combinatorial reasoning through the use of loops and conditional statements in Python. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*, 303-346.

Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, 59, 100783.

Lovász, L., & Prömel, H. J. (2004). Combinatorics. *Oberwolfach Reports*, *1*(1), 5-110.

Mashiach Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and learning*, *6*(1), 15-36.

Mazur, D. (2010). *Combinatorics: A Guided Tour*. American Mathematical Society.

National Council of Teachers of Mathematics. (1986). Learning & Teaching. https://www.jstor.org/stable/i27964736

Pokorný, M. (2020). Experience with e-learning in Teaching Combinatorics and Data Processing. In *2020 43rd International Convention on Information, Communication and Electronic Technology (MIPRO)* (pp. 838-842). IEEE.

Rosen, K. H. (2019). Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill Education.

Tucker, A. (2018). *Applied Combinatorics*. John Wiley & Sons.

Tzanakis, C., Arcavi, A., & De Corte, E. (2016). Uses of history in mathematics education. In A. Gutiérrez & G. C. Leder (Eds.), Research in mathematics education in Australasia 2012-2015 (pp. 381-406). Springer.

Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία

Αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Τάξη: Γ Λυκείου). Διαθέσιμο στο: https://www.minedu.gov.gr/ilektroniki-mathisi-mathimata/programmata-studio/11436-13-05-19-3-lyk-5/file

Αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Διαθέσιμο στο: https://www.minedu.gov.gr/ilektroniki-mathisi-mathimata/programmata-studio/11436-13-05-19-3-lyk-5/file

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (2016). Σημειώσεις Διαγωνισμών. Συνδυαστική 1, Συνδυαστική 2, Συνδιαστική 3. Διαθέσιμο στο: http://www.hms.gr/?q=node/614

Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη. (2013). Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Ξένος, Θ. & Κοπάδης, Θ. (2021). Συνδυαστική. Διαθέσιμο στο: https://blogs.sch.gr/iordaniskos/archives/2350