



ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Θεωρία χρεοκοπίας σε μοντέλα ασφάλισης
με δομές εξάρτησης βασισμένα σε FGM συζεύξεις

Σταυρούλα Σκουλαρίκου

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Δημητρίου

Πάτρα, ΜΑΙΟΣ 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή/φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



**Θεωρία χρεοκοπίας σε μοντέλα ασφάλισης
με δομές εξάρτησης βασισμένα σε FGM συζεύξεις**

Σταυρούλα Σκουλαρίκου

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Ιωάννης Δημήτριου

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Κωνσταντίνος Καλημέρης

Πάτρα, ΜΑΙΟΣ 2026

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Δημητρίου, για την πολύτιμη καθοδήγηση, την υπομονή και την υποστήριξή του σε κάθε στάδιο της διαδικασίας. Οι συμβουλές και οι προτάσεις του ήταν καθοριστικές για την ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τη θεωρία κινδύνου, εστιάζοντας στην αναβάθμιση των κλασικών μοντέλων χρεοκοπίας μέσω της εισαγωγής δομών εξάρτησης. Ενώ η παραδοσιακή αναλογιστική πρακτική βασίζεται συχνά στην απλουστευτική παραδοχή ότι το μέγεθος μιας ζημιάς και ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την επόμενη είναι ανεξάρτητα μεγέθη, η παρούσα μελέτη καταρρίπτει αυτή την υπόθεση. Χρησιμοποιώντας τις συζεύξεις (copulas), και συγκεκριμένα τη σύζευξη Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), επιτυγχάνεται μια πιο πιστή αναπαράσταση της ασφαλιστικής πραγματικότητας, όπου τα μεγέθη αυτά αλληλεπιδρούν.

Το μαθηματικό υπόβαθρο της έρευνας στηρίζεται στα ημι-μαρκοβιανά μοντέλα και στο πλαίσιο του μοντέλου των Albrecher & Boxma (2004), ενώ η αξιολόγηση των κινδύνων γίνεται μέσω της συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής Gerber-Shiu. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό κρίσιμων δεικτών, όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας και το αναμενόμενο έλλειμμα, προσφέροντας μια σφαιρική εικόνα της οικονομικής υγείας ενός χαρτοφυλακίου.

Τα αποτελέσματα της μελέτης αναδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο της παραμέτρου εξάρτησης θ . Μέσα από αριθμητικές εφαρμογές, αποδεικνύεται ότι η αγνόηση της εξάρτησης οδηγεί σε συστηματική υποτίμηση του κινδύνου, γεγονός που μπορεί να εκθέσει έναν οργανισμό σε απρόβλεπτα ελλείμματα φερεγγυότητας. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο φαινόμενο της «Συσσωρευσης Απαιτήσεων» (Claim Clustering): αναλύεται πώς μια μεγάλη ζημιά μπορεί να «συμπαρασύρει» χρονικά την επόμενη, επιταχύνοντας την εξάντληση των αποθεμάτων ρευστότητας.

Επιπλέον, εξετάζεται η στρατηγική επιλογή του κατωφλίου κινδύνου (T) στο μοντέλο των Albrecher & Boxma (2004), καταδεικνύοντας πώς η διαχείριση αυτού του ορίου μπορεί να θωρακίσει το χαρτοφυλάκιο σε διαφορετικά επίπεδα επικινδυνότητας. Η εργασία ολοκληρώνεται με τη σύγκριση μεταξύ των κλασικών μοντέλων και της προτεινόμενης μεθοδολογίας. Τα ευρήματα επιβεβαιώνουν ότι ο συνδυασμός της δομής του Ημι-Μαρκοβιανού Μοντέλου με τη σύζευξη FGM υπερέχει σημαντικά, καθώς παρέχει ένα πιο ρεαλιστικό, ασφαλές και σύγχρονο πλαίσιο για τη λήψη αποφάσεων στη διαχείριση ασφαλιστικών κινδύνων.

Λέξεις – Κλειδιά

- Θεωρία Κινδύνου
- FGM Σύζευξη
- Συνάρτηση Gerber-Shiu
- Ημι-μαρκοβιανά Μοντέλα
- Δομές Εξάρτησης

Ruin theory in insurance models with dependence structures based on FGM copulas

Stavroula Skoularikou

Abstract

This master's thesis investigates risk theory, focusing on the enhancement of classical ruin models through the introduction of dependence structures. While traditional actuarial practice often relies on the simplifying assumption that claim sizes and their inter-arrival times are independent variables, this study challenges this premise. By employing copulas, and specifically the Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) copula, the research achieves a more faithful representation of insurance reality, where these two critical components interact. The mathematical framework of this study is grounded in semi-Markov models within the context of the Albrecher & Boxma (2004) model, while risk assessment is conducted via the Gerber-Shiu discounted penalty function. This integrated approach facilitates the precise calculation of key performance indicators, such as the ruin probability and the expected deficit, providing a comprehensive overview of a portfolio's financial health. The results of the study underscore the pivotal role of the dependence parameter (θ). Through numerical applications, it is demonstrated that neglecting dependence leads to a systematic undervaluation of risk, potentially exposing an organization to unforeseen solvency deficits. Particular emphasis is placed on the phenomenon of "Claim Clustering": the analysis reveals how a significant loss can "trigger" a shorter arrival time for the subsequent claim, thereby accelerating the depletion of liquidity reserves. Furthermore, the study examines the strategic selection of the risk threshold (T) in the Albrecher & Boxma (2004) model, demonstrating how managing this limit can shield the portfolio across varying levels of risk exposure. The thesis concludes with a comparative evaluation between classical models and the proposed methodology. The findings confirm that the combination of the Albrecher & Boxma (2004) framework with the FGM copula significantly outperforms traditional approaches, providing a more realistic, robust, and modern framework for decision-making in insurance risk management.

Keywords

- Risk Theory
- Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) Copula
- Gerber-Shiu Function
- Semi-Markov Models
- Dependence Structures

Περιεχόμενα

Περίληψη	v
Abstract.....	vii
Περιεχόμενα	ix
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	1
1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας.....	2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	4
2. Ανάλυση μέτρων χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο κινδύνου με δομές εξάρτησης FGM.....	4
2.1 Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου.....	5
2.2 Δομή Εξάρτησης βασιζόμενη στη σύζευξη των Farlie-Gumbel-Morgenstern	6
2.3 Μέτρα Χρεοκοπίας	9
2.4 Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg	10
2.5 Η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση	16
2.6 Ο μετασχηματισμός Laplace (LT) της αναμενόμενης εξίσωσης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής $m\delta u$	18
2.7 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση	21
2.8. Εκθετικά κατανομημένες αποζημιώσεις	30
2.9 Αριθμητικό Παράδειγμα	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	36
3. Το Ανανεωτικό Μοντέλο Χρεοκοπίας με Δομές Εξάρτησης FGM	36
3.1 Το μοντέλο κινδύνου και η δομή εξάρτησης.....	37
3.2 Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg	41
3.3 Μετασχηματισμός Laplace του $m\delta(u)$	51

3.4 Ανάλυση της Gerber – Shiu όταν $u = 0$	57
3.5 Προεξοφλητικές κατανομές των $U(T^-)$ και $ U(T) $	65
3.6 Αποτελέσματα για απαιτήσεις εκθετικής κατανομής	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	81
4. Ημι-Μαρκοβιανό Μοντέλο Κινδύνου με Εξάρτηση Μεταξύ Μεγεθών και Ενδιάμεσων Χρόνων Απαιτήσεων.....	81
4.1 Εισαγωγή.....	81
4.2 Ορισμός του Model 1	82
4.2.1 Συνθήκη Καθαρού Κέρδους (Net Profit Condition) & Διαφορικές Εξισώσεις	83
4.2.2 Σύγκριση με μοντέλο ανεξαρτησίας	89
4.3 Συναφή μοντέλα.....	90
4.3.1 Μοντέλο 2.....	90
4.3.2. Μια άλλη παραλλαγή του Μοντέλου 1	93
4.4. Αριθμητικές απεικονίσεις.....	94
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	99
5. Σύγκριση των Μοντέλων	99
5.1 Μεθοδολογία και Υπολογιστική Προσέγγιση	99
5.2 Παραμετροποίηση.....	100
5.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα	101
5.4 Ανάλυση Αριθμητικών Αποτελεσμάτων	106
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.....	107
Συμπεράσματα	107
6.1 Κύρια Συμπεράσματα	107
Βιβλιογραφία	108

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. Εισαγωγή

Ο κύριος στόχος της εργασίας είναι να παρουσιαστούν οι βασικές έννοιες του κλασσικού και ανανεωτικού μοντέλου χρεοκοπίας κάτω από δομές εξάρτησης που ορίζονται από συζεύξεις. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα δοθεί σε δομές εξάρτησης των ενδιάμεσων χρόνων και του ύψους ατομικής ζημιάς κάτω από την Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) σύζευξη. Επιπλέον, θα μελετηθεί και το ημι-μαρκοβιανό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Θα παραχθούν αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση της εξάρτησης σε πλήθος μέτρα που παράγονται από συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής Gerber-Shiu.

Η μετάβαση από το παραδοσιακό πλαίσιο της ανεξαρτησίας των κινδύνων στην ενσωμάτωση σύνθετων δομών στοχαστικής εξάρτησης. Γιατί είναι σημαντικό: Η παραδοχή της ανεξαρτησίας συχνά οδηγεί σε συστηματική υποτίμηση των κινδύνων, γεγονός που μπορεί να θέσει σε κίνδυνο τη φερεγγυότητα και τη σταθερότητα του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

Η διερεύνηση της στοχαστικής εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους μιας ζημιάς (B) και του ενδιάμεσου χρόνου (W) μέχρι την εμφάνιση της επόμενης απαίτησης. Γιατί είναι σημαντικό: Η κατανόηση αυτής της σχέσης επιτρέπει την ανάλυση του φαινομένου «συσσώρευσης απαιτήσεων» (claim clustering), το οποίο επηρεάζει άμεσα τη διαχείριση ρευστότητας του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

Αφού εξεταστεί η υπόθεση της εξάρτησης της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων των κινδύνων με το ύψος της ατομικής ζημιας, με τη χρήση της σύζευξης FGM, θα δούμε μια εναλλακτική προσέγγιση μέσω του ημι-μαρκοβιανού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας. Το μοντέλο αυτό έχει την ιδιότητα ότι κάθε φορά που συμβαίνει μια πτώση πλεονάσματος τόσο η κατανομή των χρόνων, όσο και του ύψους της ατομικής ζημιάς, ρυθμίζονται από μια διαδικασία Markov διακριτού χρόνου. Η διαδικασία αυτή, αναπαριστά τις διάφορες

πιθανές περιβαλλοντικές καταστάσεις που μπορεί να συμβούν στο σύστημα που μελετάμε. Γιατί είναι σημαντικό: Τα συγκεκριμένα εργαλεία παρέχουν την απαραίτητη μαθηματική ευελιξία για την εισαγωγή εξάρτησης και τον καθορισμό διαφορετικών «καταστάσεων κινδύνου» μέσω κατωφλίων (thresholds).

Η συγκριτική αξιολόγηση της πιθανότητας επιβίωσης ενός χαρτοφυλακίου μεταξύ του κλασικού ανανεωτικού μοντέλου και του μοντέλου υπό καθεστώς εξάρτησης. Γιατί είναι σημαντικό: Η σύγκριση αναδεικνύει ποσοτικά την επίδραση της παραμέτρου εξάρτησης (θ) στα αποτελέσματα, προσφέροντας μια πιο ρεαλιστική εικόνα για την επιβίωση του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

1.1 Στόχοι της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποσκοπεί στη μελέτη και σύγκριση της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσα από το πρίσμα σύγχρονων και ρεαλιστικών παραδοχών. Ενώ το κλασικό μοντέλο των Cramér-Lundberg αποτέλεσε το θεμέλιο της αναλογιστικής επιστήμης, η βασική του παραδοχή περί ανεξαρτησίας των κινδύνων κρίνεται συχνά ανεπαρκής για το σύγχρονο ασφαλιστικό περιβάλλον. Συνεπώς για την κάλυψη αυτού του κενού αναπροσδιορίζουμε τους στοχους όπως παρακάτω:

- (1) Ποσοτική ανάδειξη της υποτίμησης του κινδύνου: Τεκμηρίωση του χάσματος στις εκτιμήσεις φερεγγυότητας όταν χρησιμοποιείται η παραδοχή της ανεξαρτησίας έναντι της πραγματικής εξάρτησης.
- (2) Προσδιορισμός της επίδρασης της παραμέτρου θ : Καταγραφή του πώς η διακύμανση της παραμέτρου εξάρτησης (μέσω της FGM copula) μεταβάλλει άμεσα την πιθανότητα επιβίωσης του χαρτοφυλακίου.
- (3) Αξιολόγηση της δυναμικής του «Claim Clustering»: Ανάλυση του τρόπου με τον οποίο το μέγεθος μιας ζημιάς (**B**) επηρεάζει τον χρόνο εμφάνισης (**W**) της επόμενης, επηρεάζοντας τα αποθέματα ρευστότητας.
- (4) Βελτιστοποίηση του κατωφλίου κινδύνου (**T**): Εξαγωγή συμπερασμάτων για το πώς η επιλογή του ορίου στο Ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο καθορίζει τις μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών επιπέδων επικινδυνότητας.

(5) Διαμόρφωση συγκριτικού πλαισίου μοντέλων: Παροχή μιας ολοκληρωμένης συγκριτικής ανάλυσης μεταξύ του κλασικού ανανεωτικού μοντέλου και του προτεινόμενου μοντέλου εξάρτησης, αναδεικνύοντας την υπεροχή του δεύτερου σε ρεαλιστικές συνθήκες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2. Ανάλυση μέτρων χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο κινδύνου με δομές εξάρτησης FGM

Ένα από τα πιο γνωστά και θεμελιώδη μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της χρεοκοπίας είναι το λεγόμενο "κλασικό μοντέλο κινδύνου" ή "μοντέλο του Cramer - Lundberg". Σε αυτό το μοντέλο, θεωρούμε ότι τα έσοδα του ασφαλιστή αυξάνονται γραμμικά με τον χρόνο, καθώς εισπράττει ασφάλιστρα με σταθερό ρυθμό. Από την άλλη πλευρά, οι ζημιές (δηλαδή οι αποζημιώσεις που πληρώνει) εμφανίζονται τυχαία με την πάροδο του χρόνου.

Οι αφίξεις των ζημιών μοντελοποιούνται με μια στοχαστική διαδικασία που ονομάζεται σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson process). Αυτό σημαίνει ότι:

- Οι ζημιές εμφανίζονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές, οι οποίες ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με κάποιο ρυθμό λ .
- Το μέγεθος κάθε ζημιάς είναι επίσης τυχαίο και ανεξάρτητο από τις άλλες ζημιές. Συνήθως θεωρούμε ότι ακολουθεί κάποια γνωστή κατανομή, όπως εκθετική ή κανονική.

Η συνολική ζημιά μέχρι μια χρονική στιγμή t είναι το άθροισμα όλων των ζημιών που έχουν συμβεί μέχρι τότε. Ο ασφαλιστής ξεκινά με ένα αρχικό κεφάλαιο και όσο αυτό το κεφάλαιο παραμένει θετικό, δεν υπάρχει χρεοκοπία. Αν όμως κάποια στιγμή το κεφάλαιο γίνει μηδέν ή αρνητικό, τότε λέμε ότι έχουμε χρεοκοπία.

Το βασικό ερώτημα που προσπαθούμε να απαντήσουμε είναι: ποια είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το κεφάλαιο να πέσει κάτω από το μηδέν; Αυτή η πιθανότητα εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το αρχικό κεφάλαιο, ο ρυθμός εισπραξης ασφαλίσεων, η συχνότητα και το μέγεθος των ζημιών.

2.1 Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Στο μοντέλο αυτό, θεωρούμε ότι το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρείας $U(t)$ τη χρονική στιγμή t είναι

$$U(t) = u + pt - S(t),$$

όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό που διαθέτει η εταιρεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, $p(t)$ είναι το συνολικό ασφάλιστρο που πληρώνουν οι ασφαλισμένοι (έσοδα) στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, και $S(t)$ είναι το ύψος των συνολικών απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου έως τη χρονική στιγμή t $[0, t]$. Και η ανέλιξη,

$$\{S(t), t \geq 0\} \text{ με } S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j \quad (\sum_a^b = 0 \text{ αν } b < a)$$

είναι οι συνολικές αποζημιώσεις που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρεία στους ασφαλισμένους (έξοδα) μέχρι τη χρονική στιγμή t . Η $N(t)$ απαριθμεί τον αριθμό των αποζημιώσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t και ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt .

$$f_W(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

$$F_W(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

$$f_W^*(s) = E[e^{-sW}] = \frac{\lambda}{\lambda + s}. \quad (3)$$

Για $t=0$ είναι $N(0)=0$. Επίσης όταν $N(t)=0$, είναι $\sum_{j=1}^{N(t)} X_j = 0$. Οι τ.μ. $\{X_j\}$ X_1, X_2, \dots εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων και είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή P .

Θεωρούμε ότι τα $(X_j, W_j), j \in \mathbb{N}^*$ αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων, τα οποία έχουν την ίδια κατανομή με το τυχαίο διάνυσμα (X, W) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (p.d.f) $f_{X,W}$, αθροιστική συνάρτηση κατανομής (c.d.f) $F_{X,W}$, και μετασχηματισμό Laplace (LT) $f_{X,W}^*$.

Όταν οι X και W είναι συνεχείς μεταβλητές, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τον τύπο

$$f_{X,W}^*(s_1, s_2) = E[e^{-s_1 X} e^{-s_2 W}] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 x} e^{-s_2 t} f_{X,W}(x, t) dx dt. \quad (4)$$

2.2 Δομή Εξάρτησης βασισμένη στη σύζευξη των Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)

Η μοντελοποίηση της δομής εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών με χρήση συζεύξεων έχει γίνει ιδιαίτερα δημοφιλής στην αναλογιστική επιστήμη και στη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου. Μελέτες για τις εφαρμογές των συζεύξεων σε αυτούς τους τομείς, έχουν γίνει από τους Frees & Valdez (1998), Wang (1998), Bouye et al. (2000), Denuit et al. (2005) και McNeil et al. (2005).

Έστω ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα (U, V) με συνεχείς ομοιόμορφες συναρτήσεις και με δομή εξάρτησης που ορίζεται από την σύζευξη $F_{U,V}(u, v) = C(u, v)$ with $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$.

Σημαντικές συζεύξεις είναι:

- η σύζευξη ανεξαρτησίας με $C^{\perp}(u, v) = uv$;
- η συμμοτόνη σύζευξη με $C^+(u, v) = \min(u, v)$;
- η countermonotonic σύζευξη με $C^-(u, v) = \max(u + v - 1; 0)$.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όλες οι συζεύξεις ικανοποιούν τις ανισότητες

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v), \quad \text{for } (u, v) \in [0,1] \times [0,1].$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (p.d.f.) που συνδέεται με μια σύζευξη

$$C \text{ ορίζεται από } (u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2). \quad (5)$$

Έστω ότι η διδιάστατη συνάρτηση κατανομής $F_{X,W}$ του διανύσματος (X, W) με περιθώριες F_X και F_W να ισούται με $F_{X,W}(x, t) = C(F_X(x), F_W(t))$ για $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των (X, W) δίνεται από τον τύπο

$$f_{X,W}(x, t) = c(F_X(x), F_W(t))f_X(x)f_W(t), \quad (6)$$

για $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Η σύζευξη FGM ορίζεται ως

$$C_{\theta}^{\text{FGM}}(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2),$$

$-1 \leq \theta \leq 1$, όπου $C_0^{\text{FGM}} = C^{\perp}$.

Η σύζευξη των FGM μπορεί να έχει αρνητική όσο και θετική εξάρτηση, περιλαμβάνει την σύζευξη ανεξαρτησίας (για $\theta=0$), αλλά δεν περιλαμβάνει τις συμμονότονες και countermonotonic συζεύξεις σαν περιπτώσεις ορίων. Επιπλέον, η σύζευξη των FGM αποτελεί μια διαταραχή της σύζευξης ανεξαρτησίας και δεν είναι Αρχιμήδεια. Επίσης αποτελεί μια προσέγγιση πρώτης τάξης της σύζευξης Plackett (Nelsen 2006, σελ. 100) και της σύζευξης Frank (σελ. 133).

Αυτή η σύζευξη είναι ελκυστική λόγω της απλότητάς της και της ευκολίας χειρισμού της. Ωστόσο, η σύζευξη των FGM είναι περιοριστική, καθώς μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν η εξάρτηση μεταξύ δυο περιθωρίων κατανομών έχει μετρήσιμο μέγεθος. Για την σύζευξη των FGM, ισχύει ο συντελεστής Kendall's tau και ο συντελεστής Spearman's rho δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $\tau = \frac{2\theta}{9}$ και $\rho = \frac{\theta}{3}$.

Αυτό σημαίνει ότι $-\frac{2}{9} \leq \tau \leq \frac{2}{9}$ και $-\frac{1}{3} \leq \rho \leq \frac{1}{3}$. Επιπλέον, έχει αποδειχτεί ότι ο συντελεστής συσχέτισης Pearson κυμαίνεται μεταξύ $-\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{3}$. Από τις πρόσφατες εφαρμογές της σύζευξη των FGM, αναφέρουμε τον Priege (2002), ο οποίος τη χρησιμοποίησε στη επιλογή μοντέλων για ασφαλιστικά προγράμματα υγείας. Η Επίσης η σύζευξη των FGM (η πολυμεταβλητή της μορφή) εφαρμόζεται επίσης στο πλαίσιο αθροισμάτων των ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών από τους Geluk & Tang (2008) και στην ανάλυση της συμπεριφοράς των μοντέλων κινδύνου διακριτού χρόνου με εξαρτώμενους χρηματοοικονομικούς κινδύνους από τους Tang & Vernic (2007). Οι Gebizlioglu & Yagci (2008) εφάρμοσαν την σύζευξη των FGM για να καθορίσουν διαστήματα ανοχής ποσοστιαίων διδιάστατων κινδύνων στο πλαίσιο της μέτρησης των κινδύνων.

Λόγω της απλότητάς της, έχουν προταθεί αρκετές επεκτάσεις από διάφορους συγγραφείς (βλ. π.χ. Drouet-Mari & Kotz (2001) για μια ανασκόπηση της σύζευξης των FGM και κάποιων επεκτάσεών της).

Για την σύζευξη των FGM, η εξίσωση (5) δίνεται από τον τύπο

$$c_{\theta}^{\text{FGM}}(u_1, u_2) = 1 + \theta(1 - 2u_1)(1 - 2u_2). \quad (7)$$

Η διδιάστατη συνάρτηση κατανομής $F_{X,W}$ των (X, W) με περιθώριες κατανομές F_X και F_W και ορισμένη από τη σύζευξη των FGM είναι :

$$F_{X,W}(x, t) = F_X(x)F_W(t) + \theta F_X(x)F_W(t)(1 - F_X(x))(1 - F_W(t)),$$

για $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Από τις εξισώσεις (6), και (7) έχουμε τον τύπο της από κοινού συνάρτηση σ.π.π των (X, W)

$$f_{X,W}(x, t) = f_X(x)f_W(t) + \theta f_X(x)f_W(t)(1 - 2F_X(x))(1 - 2F_W(t)), \quad (8)$$

Και μέσω της εξίσωσης $f_W(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ έχουμε ότι

$$f_{X,W}(x, t) = f_X(x)\lambda e^{-\lambda t} + \theta f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}(1 - 2F_X(x))(2e^{-\lambda t} - 1). \quad (9)$$

Ορίζοντας $h_X(x) = (1 - 2F_X(x))f_X(x)$ και συμβολίζοντας $h_X^*(s)$ τον μετασχηματισμό Laplace LT, Eq. (9) μπορεί να γραφεί

$$f_{X,W}(x, t) = f_X(x)\lambda e^{-\lambda t} + \theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}). \quad (10)$$

2.3 Μέτρα Χρεοκοπίας

Ορίζουμε τον χρόνο χρεοκοπίας ως την τυχαία μεταβλητή T , όπου $T = \inf_{t \geq 0} \{t, U(t) < 0\}$ με $T = \infty$ εάν $U(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$ (δηλαδή, η χρεοκοπία δεν συμβαίνει).

Για να εξασφαλιστεί ότι η χρεοκοπία δεν θα συμβεί σχεδόν ποτέ, ο ρυθμός ασφαλιστρών p ικανοποιεί τη συνθήκη $E[pW_i - X_i] > 0$, $i = 1, 2, \dots$ (11)

παρέχοντας ένα θετικό περιθώριο ασφάλειας.

Το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα ακριβώς πριν από τη χρεοκοπία συμβολίζονται, αντίστοιχα, με $|U(T)|$ και $U(T^-)$. Τα τελευταία χρόνια, σημαντικό μέρος της έρευνας στη θεωρία της χρεοκοπίας έχει αφιερωθεί στην ανάλυση της αναμενόμενης τιμής της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής.

Η συνάρτηση αυτή εισήχθη από τους Gerber & Shiu (1998) και ορίζεται ως

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u], \quad u \geq 0 \quad (12)$$

όπου $w(x, y)$, για $x, y \geq 0$, είναι η συνάρτηση ποινής τη στιγμή της χρεοκοπίας, που εξαρτάται από το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία.

Η παράμετρος δ είναι μη αρνητική (η λεγόμενη **δύναμη του τόκου**), ενώ I είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση, τέτοια ώστε $I(A) = 1$, αν συμβεί το γεγονός A , και 0 διαφορετικά.

Μία ειδική περίπτωση της συνάρτησης ποινής Gerber–Shiu είναι όταν $w(x, y) = 1$ για όλα τα $x, y \geq 0$. Στην περίπτωση αυτή, η $m_\delta(u)$ αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace (LT) του χρόνου χρεοκοπίας, ο οποίος συμβολίζεται με $\phi_T(u)$.

Εάν επιπλέον $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^+ \mathbb{R}^+$, τότε η εξίσωση (12) αντιστοιχεί στην πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο, δηλαδή $\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u)$.

2.4 Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Ένα βασικό βήμα για την ανάλυση των μέτρων κινδύνου είναι η παραγωγή της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg και η μελέτη των ιδιοτήτων της. Η ανάλυση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg απαιτείται για να βρούμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση defective renewal equation για $m_\delta(u)$. Πιο συγκεκριμένα πρέπει να βρούμε τον αριθμό των ριζών της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg στο δεξιό μισό μιγαδικό επίπεδο δηλ. $\text{Re}(s) > 0$. Αυτές οι ρίζες είναι χρήσιμες για να βρούμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για $m_\delta(u)$.

Για να βρούμε τη γενικευμένη εξίσωση θεωρούμε τη διακριτού χρόνου διαδικασία ενσωματωμένη στην συνεχούς χρόνου διαδικασία πλεονάσματος \underline{U} . Ορίζουμε την διακριτού χρόνου διαδικασία $\tilde{U} = \{\tilde{U}_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, όπου $\tilde{U}_0 = u$ και $\tilde{U}_k = U(T_k)$ συμβολίζει το πλεόνασμα μετά την k -ιστή αποζημίωση δηλ.

$$\tilde{U}_k = u + \sum_{j=1}^k (pW_j - X_j) \quad \text{για } k \in \mathbb{N}^+. \quad (13)$$

Η διαδικασία $\underline{\tilde{V}} = \{e^{-\delta \sum_{j=1}^k W_j + s \tilde{U}_k}, k = 0, 1, \dots\}$, για $s > 0$ είναι martingale αν και μόνο αν

$$E e^{-\delta W} e^{s(pW - X)} = 1, \quad (14)$$

που αντιστοιχεί στη γενικευμένη εξίσωση Lundberg.

Δοθέντος της εξίσωσης (10) το αριστερό μέρος της (14) μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} E e^{-\delta W} e^{-s(pW - X)} &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(sp - \delta)} e^{-sX} f_{X,W}(x, t) dx dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(sp - \delta)} e^{-sX} f_X(x) \lambda e^{-\lambda t} dx dt \\ &+ \theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(sp - \delta)} e^{-sX} h_X(x) (2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}) dx dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (14) και (15) έχουμε:

$$f_X^*(s) \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} + \theta h_X^*(s) \left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) = 1. \quad (16)$$

Στην ακόλουθη πρόταση, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του **Rouché** για να δείξουμε τις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης *Lundberg*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4(1) Για $\delta > 0$ και $\theta \neq 0$, η εξίσωση Lundberg στην εξίσωση (3.20) έχει ακριβώς 2 ρίζες, ας πούμε ρ_1, ρ_2 , που έχουν θετικό πραγματικό μέρος $\text{Re}(\rho_j) \geq 0$, $j = 1, 2$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rouché στο κλειστό χωρίο C , αποτελούμενο από τον φανταστικό άξονα ($-ir$ μέχρι $+ir$) και ένα ημικύκλιο στο αριστερό ημι-επίπεδο με ακτίνα r κινούμενο με την φορά των δεικτών του ρολογιού από $-ir$ μέχρι $+ir$. Υποθέτουμε ότι $r \rightarrow \infty$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left| f_X^*(s) \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} + \theta h_X^*(s) \left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) \right| < 1. \quad (17)$$

Οι 2 όροι στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (17)

$$\frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp}$$

και

$$\left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right)$$

Είναι πηλίκα πολυωνύμων με αυστηρά μεγαλύτερο βαθμό στο παρανομαστή που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\left| f_X^*(s) \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} + \theta h_X^*(s) \left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) \right| \rightarrow 0$$

στο C (αποκλείοντας Re, s=0).

Για Re, s=0 παρατηρούμε ότι

$$\frac{\lambda}{(\lambda + \delta - sp)} > 0$$

και

$$\left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) > 0.$$

Επίσης, στο Re, s=0 και για $\delta > 0$ έχουμε

$$\frac{\lambda}{(\lambda + \delta)} + \frac{\theta\lambda\delta}{(2\lambda + \delta)(\lambda + \delta)} = \frac{(2\lambda + \delta)\lambda + \theta\lambda\delta}{(2\lambda + \delta)(\lambda + \delta)} < 1,$$

Αφού $(2\lambda + \delta)\lambda + \theta\lambda\delta < (2\lambda + \delta)(\lambda + \delta)$.

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| f_X^*(s) \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} + \theta h_X^*(s) \left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) \right| \\ & \leq \left| f_X^*(s) \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} \right| + \left| \theta h_X^*(s) \left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) \right| \\ & = |f_X^*(s)| \frac{\lambda}{|\lambda + \delta - sp|} + |\theta h_X^*(s)| \frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \\ & \leq \left| \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} \right| + \left| \frac{\theta\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right| \\ & \leq \frac{\lambda}{(\lambda + \delta)} + \frac{\theta\lambda\delta}{(2\lambda + \delta)(\lambda + \delta)} = \frac{(2\lambda + \delta)\lambda + \theta\lambda\delta}{(2\lambda + \delta)(\lambda + \delta)} < 1. \end{aligned}$$

Για $\delta=0$, οι όροι του θεωρήματος του **Rouché** δεν ισχύουν (αφού

$$\left| f_X^*(s) \frac{\lambda}{\lambda + \delta - sp} + \theta h_X^*(s) \left(\frac{\lambda(\delta - sp)}{(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)} \right) \right| = 1$$

για $\text{Re } s=0$). Εφαρμόζουμε μία επέκταση του θεωρήματος του **Rouché**, χάρη στον Klimenok (2001) για να βρούμε τον αριθμό των ριζών της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg με θετικό πραγματικό μέρος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4(2) Για $\delta = 0$ και $\theta \neq 0$, η εξίσωση Lundberg στην εξίσωση (16) έχει 1 ρίζα, ας πούμε $\rho_1(0)$, με $\text{Re}(\rho_1(0)) > 0$ και μία δεύτερη ρίζα $\rho_2(0) = 0$.

Απόδειξη: Ορίζουμε το χωρίο $D_K = \{s: |z|=1\}$, όπου $z = \frac{\kappa-s}{\kappa}$. Σε όρους s , το χωρίο D_K είναι ένας κύκλος με ακτίνα κ και αρχή κ .

Όπως και στην **ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4(1)**, υποθέτουμε ότι $\kappa \rightarrow \infty$ και συμβολίζουμε με D το οριοθετημένο χωρίο. Χρησιμοποιούμε τις ίδιες υποθέσεις (για $\delta=0$) όπως παρουσιάστηκαν για την **ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4(1)** και έχουμε ότι,

$$|f_X^*(s)\lambda(2\lambda - sp) + \theta\lambda(-sp)h_X^*(s)| \leq |(\lambda - sp)(2\lambda - sp)|,$$

στο D (αποκλείοντας $s = 0$ ή ισοδύναμα $z = 1$). Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$f_X^*(s)\lambda(2\lambda - sp) + \theta\lambda(-sp)h_X^*(s)$$

και

$$(\lambda - sp)(2\lambda - sp)$$

είναι συνεχείς στο D .

Μένει να αποδειχτεί

$$\left(\frac{\lambda(-(\kappa - \kappa z)p)}{(2\lambda - (\kappa - \kappa z)p)(\lambda - (\kappa - \kappa z)p)} \right) \Big|_{z=1} > 0 \quad \frac{d}{dz} \left(1 - f_X^*((\kappa - \kappa z)) \frac{\lambda}{\lambda - (\kappa - \kappa z)p} - \theta h_X^*((\kappa - \kappa z)) \right) \quad (18)$$

έτσι ώστε να εφαρμόσουμε το **Θεώρημα 1** του Klimentok (2001). Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (18) είναι ίση με την

$$\frac{d}{dz} \left(1 - E \left[e^{-(\kappa - \kappa z)(X - pW)} \right] \right) \Big|_{z=1} = -\kappa E[(X - pW)],$$

Όπου $E[(X - pW)] < 0$ δοθέντος της συνθήκης επιλυσιμότητας

$$E[cW_j - X_j] > 0, \quad j=1,2,\dots$$

Βασιζόμενοι στον Klimentok (2001) καταλήγουμε ότι ο αριθμός των ριζών της εξίσωσης (14) μέσα στο D είναι ίσος με 1. Επιπλέον, μία τετριμμένη ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg στην εξίσωση (14) (με $\delta=0$) είναι η $\rho_2=0$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.4(1) Στην **ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4(1)** (όπου $\delta=0$), έχουμε δείξει ότι υπάρχουν ακριβώς 2 ρίζες. Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι είναι πραγματικές και διακεκριμένες. Ας πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (16) με

$$(2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} (2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp) &= (2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp) E \left[e^{-\delta W} e^{s(pW - X)} \right] \\ &= \lambda(2\lambda + \delta - sp) f_X^*(s) + \theta \lambda (\delta - sp) h_X^*(s). \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$h_1(s) = (2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp)$$

και

$$\begin{aligned} h_2(s) &= (2\lambda + \delta - sp)(\lambda + \delta - sp) E \left[e^{-\delta W} e^{s(pW - X)} \right] \\ &= \lambda(2\lambda + \delta - sp) f_X^*(s) + \theta \lambda (\delta - sp) h_X^*(s), \end{aligned}$$

όπου $h_1(s)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση με 2 ρίζεις $\frac{\lambda+\delta}{p}$ και $\frac{2\lambda+\delta}{p}$. Για $\frac{\lambda+\delta}{p} < s < \frac{2\lambda+\delta}{p}$,

$h_1(s)$ είναι αρνητική. Αφού $\delta > 0$, έχουμε

$$h_2(0) = (2\lambda + \delta)(\lambda + \delta)E[e^{-\delta W}] < h_1(0) = (2\lambda + \delta)(\lambda + \delta).$$

Στο $s = \frac{\delta}{p}$, έχουμε

$$\begin{aligned} h_2\left(\frac{\delta}{p}\right) &= \left(2\lambda + \delta - \frac{\delta}{p}p\right)\left(\lambda + \delta - \frac{\delta}{p}p\right)E\left[e^{-\delta W}e^{\frac{\delta}{p}(pW-X)}\right] \\ &= (2\lambda)(\lambda)E\left[e^{-\frac{\delta}{p}X}\right] \\ &< h_1\left(\frac{\delta}{p}\right). \end{aligned}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$h_2\left(\frac{\lambda + \delta}{p}\right) = \lambda^2 f_X^*\left(\frac{\lambda + \delta}{p}\right) - \theta \lambda^2 h_X^*\left(\frac{\lambda + \delta}{p}\right) > 0 = h_1\left(\frac{\lambda + \delta}{p}\right)$$

και

$$h_2\left(\frac{2\lambda + \delta}{p}\right) = -2\lambda\theta h_X^*\left(\frac{2\lambda + \delta}{p}\right). \quad (19)$$

Από την εξίσωση (19) γνωρίζουμε ότι $h_2\left(\frac{2\lambda+\delta}{p}\right) < 0$, αν $\theta > 0$ και $h_2\left(\frac{2\lambda+\delta}{p}\right) > 0$,

αν $\theta < 0$. Συνεπώς, για $s > 0$, $h_2(s)$ τέμνει την $h_1(s)$ σε 2 διακριτά σημεία ρ_1 και ρ_2 ,

με $\rho_1 < \frac{\lambda+\delta}{p}$ και $\rho_2 > \frac{2\lambda+\delta}{p}$ αν $\theta < 0$,

και $\rho_1 < \frac{\lambda+\delta}{p} < \rho_2 < \frac{2\lambda+\delta}{p}$, αν $\theta > 0$.

2.5 Η ολοκληροδιαφορική εξίσωση

Ο κύριος στόχος σε αυτή την ενότητα είναι να παραχθεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την αναμενόμενη εξίσωση προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber- Shiu $m_\delta(u)$.

Συμβολίζουμε με \mathcal{J} τον ταυτοτικό συντελεστή και με \mathcal{D} τον τελεστή παραγώγισης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5 (1) Η αναμενόμενη εξίσωση προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση για $u \geq 0$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\lambda + \delta}{p}\mathcal{J} - \mathcal{D}\right)\left(\frac{\lambda + \delta}{p}\mathcal{J} - \mathcal{D}\right)m_\delta(u) = & \frac{\lambda}{p}\left(\frac{2\lambda + \delta}{p}\mathcal{J} - \mathcal{D}\right)\sigma_1(u) \\ & + \lambda\frac{\theta}{p}\left(\frac{\delta}{p}\mathcal{J} - \mathcal{D}\right)\sigma_2(u), \quad -1 \leq \theta \leq 1, \end{aligned} \quad (20)$$

όπου

$$\sigma_1(u) = \int_0^u m_\delta(u-x)f_X(x)dx + w_1(u), \quad (21)$$

$$\sigma_2(u) = \int_0^u m_\delta(u-x)h_X(x)dx + w_2(u), \quad (22)$$

$$w_1(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)f_X(x)dx, \quad (23)$$

$$w_2(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)h_X(x)dx. \quad (24)$$

Απόδειξη

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και το πόσο της πρώτης αποζημίωσης έχουμε

$$\begin{aligned} m_\delta(u) = & \lambda \int_0^\infty \int_0^{u+pt} e^{-\delta t} m_\delta(u+pt-x)f_{X,W}(x,t)dxdt \\ & + \lambda \int_0^\infty \int_{u+pt}^\infty e^{-\delta t} w(u+pt, x-u-pt)f_{X,W}(x,t)dxdt. \end{aligned} \quad (25)$$

Από την εξίσωση (10) η (25) γίνεται

$$\begin{aligned}
 m_{\delta}(u) = & \lambda \int_0^{\infty} \int_0^{u+pt} e^{-\delta t} m_{\delta}(u+pt-x) f_X(x) e^{-\lambda t} dx dt \\
 & + \lambda \int_0^{\infty} \int_{u+pt}^{\infty} e^{-\delta t} w(u+pt, x-u-pt) f_X(x) e^{-\lambda t} dx dt \\
 & + \lambda \theta \int_0^{\infty} \int_0^{u+pt} e^{-\delta t} m_{\delta}(u+pt-x) h_X(x) (2e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t}) dx dt \\
 & + \lambda \theta \int_0^{\infty} \int_{u+pt}^{\infty} e^{-\delta t} w(u+pt, x-u-pt) h_X(x) (2e^{-2\lambda t} - e^{-\lambda t}) dx dt.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (26) ως

$$\begin{aligned}
 m_{\delta}(u) = & \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sigma_1(u+pt) e^{-\lambda t} dt + 2\theta \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sigma_2(u+pt) e^{-2\lambda t} dt \\
 & - \theta \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sigma_2(u+pt) e^{-\lambda t} dt,
 \end{aligned} \tag{27}$$

Όπου οι συναρτήσεις $\sigma_1(u)$ και $\sigma_2(u)$ που δίνονται στις εξισώσεις (21) και (22) αντίστοιχα.

Αντικαθιστούμε $u+pt = s$ στην εξίσωση (27) η οποία γίνεται

$$\begin{aligned}
 m_{\delta}(u) = & \frac{\lambda}{p} \int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_1(s) ds - \frac{\theta}{p} \lambda \int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_2(s) ds \\
 & + 2 \frac{\theta}{p} \lambda \int_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_2(s) ds.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Παραγωγίζοντας την (28) ως προς u έχουμε

$$\begin{aligned}
 m'_{\delta}(u) = & \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\lambda+\delta}{p} \right) \int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_1(s) ds - \lambda \frac{\theta}{p} \left(\frac{\lambda+\delta}{p} \right) \int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_2(s) ds \\
 & + 2\lambda \frac{\theta}{p} \left(\frac{2\lambda+\delta}{p} \right) \int_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_2(s) ds - \lambda \frac{\theta}{p} \sigma_2(u) - \frac{\lambda}{p} \sigma_1(u).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (28) με $\frac{\lambda+\delta}{p}$, αφαιρώντας την (29) στο αποτέλεσμα, και χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή και τον τελεστή παραγωγίσης παίρνουμε

$$\left(\frac{\lambda + \delta}{p} \mathcal{J} - \mathcal{D}\right) m_{\delta}(u) = \frac{\lambda}{p} \sigma_1(u) - \theta \frac{2\lambda^2}{p^2} \int_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_2(s) ds + \theta \frac{\lambda}{p} \sigma_2(u). \quad (30)$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} g_{\delta}(u) \\ = \left(\frac{\lambda + \delta}{p} \mathcal{J} - \mathcal{D}\right) m_{\delta}(u). \end{aligned} \quad (31)$$

Παραγωγίζοντας την (31) ως προς u και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (30), έχουμε

$$g'_{\delta}(u) = \frac{\lambda}{p} \sigma'_1(u) - \theta \frac{2\lambda^2(2\lambda + \delta)}{p^3} \int_u^{\infty} e^{-(\delta+2\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)} \sigma_2(s) ds + \theta \frac{\lambda}{p} \sigma'_2(u) + \theta \frac{2\lambda^2}{p^2} \sigma_2(u). \quad (32)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (31) με $\frac{2\lambda+\delta}{p}$, αφαιρώντας την (32) στο αποτέλεσμα, και χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή και τον τελεστή παραγωγίσης παίρνουμε

$$\left(\frac{2\lambda+\delta}{p} \mathcal{J} - \mathcal{D}\right) g_{\delta}(u) = \frac{\lambda}{p} \left(\frac{2\lambda+\delta}{p} \mathcal{J} - \mathcal{D}\right) \sigma_1(u) + \lambda \frac{\theta}{p} \left(\frac{\delta}{p} \mathcal{J} - \mathcal{D}\right) \sigma_2(u),$$

που είναι ίσο με την εξίσωση (20).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.5(1) Αν $\theta = 0$, η εξίσωση (20) ισοδυναμεί με την ολοκληροδιαφορική εξίσωση $m_{\delta}(u)$ όπου X και W είναι ανεξάρτητες όπως και στο κλασικό μοντέλο κινδύνου σύνθετης Poisson.

2.6 Ο μετασχηματισμός Laplace (LT) της αναμενόμενης εξίσωσης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής $m_{\delta}(u)$.

Χρησιμοποιούμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση (20) για να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace LT της $m_{\delta}(u)$ όπως διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6(1) Ο μετασχηματισμός Laplace της m_{δ} δίνεται από τον τύπο

$$m_{\delta}^*(s) = \frac{\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s)}{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)}, \quad (33)$$

όπου $\beta_{2,\delta}^*(s)$ είναι ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού, με

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = - \sum_{j=1}^2 \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^2 \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k},$$

και

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) w_1^*(s) + \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - s \right) w_2^*(s). \quad (34)$$

Επίσης έχουμε

$$h_{1,\delta}^*(s) = \left(\frac{\delta + \lambda}{p} - s \right) \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right), \quad (35)$$

και

$$h_{2,\delta}^*(s) = \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) f_X^*(s) + \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - s \right) h_X^*(s). \quad (36)$$

Απόδειξη

Ορίζουμε

$$d(u) = \left(\frac{2\lambda + \delta}{p} j - \mathcal{D} \right) \left(\frac{\lambda + \delta}{p} j - \mathcal{D} \right) m_{\delta}(u) - \frac{\lambda}{p} \left(\frac{2\lambda + \delta}{p} j - \mathcal{D} \right) \sigma_1(u) - \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} j - \mathcal{D} \right) \sigma_2(u). \quad (37)$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace και στις 2 πλευρές της εξίσωσης (37) και μετά χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (21)-(24) βρίσκουμε ότι

$$d^*(s) = \begin{aligned} & \left(\frac{2\lambda + \delta}{p} - s \right) \left(\frac{\lambda + \delta}{p} - s \right) m_\delta^*(s) - sm_\delta(0) - m_\delta'(0) \\ & + \frac{2\delta + 3\lambda}{p} m_\delta(0) - \frac{\lambda}{p} \left(\frac{2\lambda + \delta}{p} - s \right) m_\delta^*(s) f_x^*(s) - \frac{\lambda}{p} \left(\frac{2\lambda + \delta}{p} - s \right) w_1^*(s) \\ & - \frac{\lambda}{p} w_1(0) - \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - s \right) m_\delta^*(s) h_x^*(s) - \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - s \right) w_2^*(s) - \theta \frac{\lambda}{p} w_2(0), \end{aligned} \quad (38)$$

όπου $w_i^*(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $w_i(x)$, για $i = 1, 2$.

Υποθέτοντας ότι η εξίσωση (38) είναι ίση με 0, απομονώνουμε την $m_\delta^*(s)$

$$m_\delta^*(s) = \frac{\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s)}{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)}, \quad (39)$$

όπου $\beta_{1,\delta}^*(s)$, $h_{1,\delta}^*(s)$, και $h_{2,\delta}^*(s)$ δίνονται από τις εξισώσεις (34),(35) και (36) αντίστοιχα.

Ο όρος

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = \left(s - \frac{2\delta + 3\lambda}{p} \right) m_\delta(0) + m_\delta'(0) + \frac{\lambda}{p} w_1(0) + \theta \frac{\lambda}{p} w_2(0) \quad (40)$$

στην εξ.(39) είναι ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού ή μικρότερου. Από τις προτάσεις 2.4(1) και 2.4(2) ο παρανομαστής της εξίσωσης (39) έχει 2 ρίζες $\rho_j, j = 1, 2$. Αυτές οι ρίζες πρέπει επίσης να είναι και ρίζες του αριθμητή της εξίσωσης (39).

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του Lagrange η εξίσωση (40) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = - \sum_{j=1}^2 \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^2 \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k}.$$

Στο επόμενο πόρισμα, παραθέτουμε μια άμεση έκφραση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι 0.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.6(1) Μπορούμε να γράψουμε την $m_\delta(u)$ σε όρους w_1^* και w_2^* ως

$$m_{\delta}(0) = \frac{\lambda}{p} \left\{ \frac{\left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_1 \right) w_1^*(\rho_1) - \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_2 \right) w_1^*(\rho_2)}{\rho_2 - \rho_1} + \theta \frac{\left(\frac{\delta}{p} - \rho_1 \right) w_2^*(\rho_1) - \left(\frac{\delta}{p} - \rho_2 \right) w_2^*(\rho_2)}{\rho_2 - \rho_1} \right\}. \quad (41)$$

Απόδειξη . Αφού ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες του παρανομαστή της εξίσωσης (33), πρέπει να είναι και ρίζες το αριθμητή . Προκύπτουν οι δύο ακόλουθες γραμμικές εξισώσεις για $m_{\delta}(0)$ και $m'_{\delta}(0)$

$$= \left(\rho_i - \frac{2\delta + 3\lambda}{p} \right) m_{\delta}(0) + m'_{\delta}(0) + \frac{\lambda}{p} w_1(0) + \theta \frac{\lambda}{p} w_2(0), \quad (42)$$

$$-\frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_i \right) w_1^*(\rho_i) - \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - \rho_i \right) w_2^*(\rho_i)$$

για $i = 1, 2$.

Λύνοντας τις 2 γραμμικές εξισώσεις στην εξ (42) οδηγούμαστε στην εξ.(41).

2.7 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Σε αυτή την ενότητα, θα παραγάγουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση m_{δ} . Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε τον τελεστή Dickson–Hipp T_r ο οποίος εφαρμόζεται σε μια ολοκληρώσιμη πραγματική συνάρτηση f (εισήχθη από τους Dickson & Hipp (2001) και ορίζεται ως

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(u-x)} f(u) du, r \in \mathbb{C}.$$

Οι Li & Garrido (2004) παρέχουν έναν κατάλογο ιδιοτήτων του τελεστή T_r , από τις οποίες υπενθυμίζουμε τρεις ιδιότητες που θα μας φανούν χρήσιμες:

(1) $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u) du = f^*(r)$, $r \in \mathbb{C}$ όπου $r \in Cr$ είναι ο μετασχηματισμός

Laplace (LT) της συνάρτησης f .

(2) $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \frac{(T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x))}{r_2 - r_1}$, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$, $x \geq 0$.

(3) Αν r_1, r_2, \dots, r_k είναι διακριτοί μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$T_{r_k} \dots T_{r_2} T_{r_1} f(x) = (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^k \frac{T_{r_l} f(x)}{\tau'_k(r_l)}, x \geq 0$$

όπου $\tau_k(r) = \prod_{l=1}^k (r - r_l)$. Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$T_s T_{r_k} \dots T_{r_2} T_{r_1} f(0) = (-1)^k \left[\frac{f^*(s)}{\tau_k(s)} - \sum_{l=1}^k \frac{f^*(r_l)}{(s - r_l) \tau'_k(r_l)} \right], s \in \mathbb{C}.$$

Αρχικά παρέχουμε μια εναλλακτική έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace (LT) του m_δ σε όρους του τελεστή Dickson–Hipp, ο οποίος είναι χρήσιμος για την παραγωγή της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για το m_δ .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7(1) Ο μετασχηματισμός Laplace του m_δ δίνεται από τον τύπο :

$$m_\delta^*(s) = \frac{T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} \beta_{1,\delta}(0)}{1 - T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0)}. \quad (43)$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι τα ρ_j , $j = 1, 2$, είναι οι ρίζες του παρονομαστή της εξίσωσης (33).

Πρέπει επίσης να είναι ρίζες και του αριθμητή της. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του Lagrange και χρησιμοποιώντας και τον τελεστή T_r , βρίσκουμε μια εναλλακτική έκφραση για τον αριθμητή $\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s)$ της εξίσωσης (33)

$$\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s) = \tau(s) \left\{ \frac{\beta_{1,\delta}^*(s)}{\tau(s)} - \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_{1,\delta}^*(\rho_j)}{(s - \rho_j)\tau'(\rho_j)} \right\} = \tau(s) T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} \beta_{1,\delta}(0), \quad (44)$$

όπου $\tau(s) = (s - \rho_1)(s - \rho_2)$.

Παρόμοια, βρίσκουμε μια εναλλακτική έκφραση για τον παρονομαστή $h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)$ της εξίσωσης (33). Γνωρίζουμε ότι:

$$h_{1,\delta}^*(\rho_j) = h_{2,\delta}^*(\rho_j),$$

για $j = 1, 2$. Από την Εξίσωση (35), $h_{1,\delta}^*$ είναι ένα πολώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού στην s .

Χρησιμοποιώντας ξανά το θεώρημα της παρεμβολής του Lagrange, έχουμε:

$$h_{1,\delta}^*(s) = h_{1,\delta}^*(0) \prod_{k=1}^2 \frac{(s - \rho_k)}{(-\rho_k)} + s \sum_{j=1}^2 \frac{h_{1,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j} \prod_{k=1, k \neq j}^2 \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k},$$

που σημαίνει

$$\begin{aligned} h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) &= h_{1,\delta}^*(0) \frac{\tau(s)}{\tau(0)} + s \sum_{j=1}^2 \frac{h_{2,\delta}^*(\rho_j)\tau(s)}{\rho_j(s - \rho_j)\tau'(\rho_j)} - h_{2,\delta}^*(s) \\ &= \tau(s) \left\{ \frac{h_{1,\delta}^*(0)}{\tau(0)} + \sum_{j=1}^2 \frac{(s - \rho_j + \rho_j)h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j(s - \rho_j)\tau'(\rho_j)} - \frac{h_{2,\delta}^*(s)}{\tau(s)} \right\} \\ &= \tau(s) \left\{ \frac{h_{1,\delta}^*(0)}{\tau(0)} - \sum_{j=1}^2 \frac{h_{1,\delta}^*(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau'(\rho_j)} + \sum_{j=1}^2 \frac{h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{(s - \rho_j)\tau'(\rho_j)} - \frac{h_{2,\delta}^*(s)}{\tau(s)} \right\} \\ &= \tau(s) \left\{ \frac{h_{1,\delta}^*(0)}{\tau(0)} - \sum_{j=1}^2 \frac{h_{1,\delta}^*(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau'(\rho_j)} - T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0) \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_r των Dickson–Hipp και την 3η ιδιότητα.

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{h_{1,\delta}^*(0)}{\tau(0)} + \sum_{j=1}^2 \frac{h_{1,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j \tau'(\rho_j)} &= \frac{\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)\left(\frac{\delta+2\lambda}{p}\right)}{\rho_1 \rho_2} + \sum_{j=1}^2 \frac{\left(\frac{\delta+\lambda}{p} - \rho_j\right)\left(\frac{\delta+2\lambda}{p} - \rho_j\right)}{\rho_j \tau'(\rho_j)} = \frac{\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)\left(\frac{\delta+2\lambda}{p}\right)}{\rho_1 \rho_2} \\ &+ \frac{\rho_1 \left(\frac{\delta+\lambda}{p} - \rho_2\right)\left(\frac{\delta+2\lambda}{p} - \rho_2\right) - \rho_2 \left(\frac{\delta+\lambda}{p} - \rho_1\right)\left(\frac{\delta+2\lambda}{p} - \rho_1\right)}{\rho_1 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1)} \quad (46) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (46) στην Εξίσωση (45), προκύπτει:

$$h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) = \tau(s) \{1 - T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0)\}. \quad (47)$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις εξ. (44) και (47) στην Εξίσωση (33), παίρνουμε την εξίσωση (43).

Στην επόμενη πρόταση, παρουσιάζουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiou $m_\delta(u)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7(2) Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiou $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) \mu_\delta(y) dy + \eta_\delta(u), \quad (48)$$

όπου

$$\mu_\delta(y) = T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(y), \quad (49)$$

$$\eta_\delta(u) = T_{\rho_1} T_{\rho_2} \beta_{1,\delta}(u). \quad (50)$$

Επίσης μπορεί να γραφεί η εξίσωση (48) και ως

$$m_{\delta}(u) = \frac{1}{1 + \kappa_{\delta}} \int_0^u m_{\delta}(u - y) \vartheta_{\delta}(y) dy + \frac{1}{1 + \kappa_{\delta}} G_{\delta}(u),$$

όπου κ_{δ} ορίζεται ως

$$\frac{1}{(1 + \kappa_{\delta})} = T_0 T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0) = 1 - \frac{\delta \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} \right)}{p \rho_1 \rho_2} < 1.$$

Επίσης, έχουμε

$$G_{\delta}(u) = (1 + \kappa_{\delta}) \eta_{\delta}(u), \quad (51)$$

και

$$\vartheta_{\delta}(y) = (1 + \kappa_{\delta}) \mu_{\delta}(y) \quad (52)$$

που αποτελεί μια γνήσια συνάρτηση πυκνότητας.

Απόδειξη

Ορίζοντας την $\mu_{\delta}(y)$ και $\eta_{\delta}(u)$ στις εξισώσεις (49), (50), αντίστοιχα βρίσκουμε την εξ.(48) μέσω της εξ.(43). έχουμε

$$\int_0^{\infty} \mu_{\delta}(y) dy = T_0 T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0) = \frac{h_{2,\delta}^*(0)}{\rho_1 \rho_2} + \sum_{j=1}^2 \frac{h_{1,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j \tau'(\rho_j)}.$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (46) έχουμε

$$\int_0^{\infty} \mu_{\delta}(y) dy = 1 - \frac{h_{1,\delta}^*(0)}{\tau(0)} + \frac{h_{2,\delta}^*(0)}{\rho_1 \rho_2}. \quad (53)$$

Αφού $\tau(0) = \rho_1 \rho_2$, η εξίσωση (53) γίνεται

$$\int_0^{\infty} \mu_{\delta}(y) dy = 1 - \frac{h_{1,\delta}^*(0) - h_{2,\delta}^*(0)}{\rho_1 \rho_2} = 1 - \frac{\delta \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} \right)}{p \rho_1 \rho_2}. \quad (54)$$

Αφού $\frac{\delta}{p} \frac{\left(\frac{\delta+2\lambda}{p}\right)}{\rho_1\rho_2} > 0$, έχουμε

$$\frac{1}{1 + \kappa_\delta} = \int_0^\infty \mu_\delta(y) dy < 1.$$

Άρα η $\vartheta_\delta(y)$ όπως ορίστηκε στην εξίσωση (52) αποτελεί μια γνήσια συνάρτηση πυκνότητας.

Στην ακόλουθη πρόταση θεωρούμε την περίπτωση όπου $w(x_1, x_2) = 1$. Πιο συγκεκριμένα βρίσκουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τον μετασχηματισμό Laplace LT του χρόνου χρεοκοπίας ϕ_T .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7(3) Ο μετασχηματισμός Laplace LT του χρόνου της χρεοκοπίας ϕ_T ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_T(u) = \frac{1}{1 + \kappa_\delta} \int_0^u \phi_T(u - y) \vartheta_\delta(y) dy + \frac{1}{1 + \kappa_\delta} \int_u^\infty \vartheta_\delta(y) dy, \quad (55)$$

και παίρνει την ακόλουθη μορφή για τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$\phi_T(u) = \frac{\kappa_\delta}{1 + \kappa_\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \kappa_\delta}\right)^j \bar{V}_\delta^{*j}(u) u \geq 0,$$

όπου $\bar{V}_\delta^{*j}(u)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης της j-οστής συνέλιξης της σ.π.π. ϑ_δ .

Απόδειξη

Αν $w(x_1, x_2) = 1$, τότε οι μετασχηματισμοί Laplace LTs των w_1 και w_2 ορισμένες στις εξισώσεις (23) και (24) αντίστοιχα δίνονται από τους τύπους

$$w_1^*(s) = \frac{1 - f_X^*(s)}{s} \quad (56)$$

και

$$w_2^*(s) = \frac{-h_x^*(s)}{s}. \quad (57)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (56) και (57) στην εξίσωση (34) παίρνουμε

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = \frac{\frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) - h_{2,\delta}^*(s)}{s}. \quad (58)$$

Από την εξίσωση (50) και χρησιμοποιώντας την 3η ιδιότητα του τελεστή T_r των Dickson-Hipp έχουμε

$$s\eta_\delta^*(s) = sT_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} \beta_{1,\delta}(0) = s \left\{ \frac{\beta_{1,\delta}^*(s)}{\tau(s)} - \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_{1,\delta}^*(\rho_j)}{(s - \rho_j)\tau'(\rho_j)} \right\}. \quad (59)$$

Δοθέντος της εξίσωση (58), ξαναγράφουμε την εξίσωση (59) ως

$$\begin{aligned} s\eta_\delta^*(s) &= \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) \\ &\quad \tau(s) \frac{h_{2,\delta}^*(s)}{\tau(s)} - s \sum_{j=1}^2 \frac{\frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_j \right) - h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j (s - \rho_j) \tau'(\rho_j)} \\ &= \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) \\ &\quad \tau(s) s \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_j \right) \\ &\quad \rho_j (s - \rho_j) \tau'(\rho_j) \sum_{j=1}^2 \frac{h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{\rho_j \tau'(\rho_j)} - T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2} h_{2,\delta}(0). \end{aligned} \quad (60)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει από την 3η ιδιότητα του τελεστή T_r των Dickson-Hipp .

Επιπλέον ο 2ος όρος της εξίσωσης (60) μπορεί να παρασταθεί ως

$$\begin{aligned}
 s \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_j \right)}{\rho_j (s - \rho_j) \tau'(\rho_j)} &= \frac{\lambda}{p} \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_j \right)}{\rho_j \tau'(\rho_j)} + \sum_{j=1}^2 \frac{\left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_j \right)}{(s - \rho_j) \tau'(\rho_j)} \right\} \\
 &= \frac{\lambda}{p} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta + 2\lambda}{p} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\rho_j \tau'(\rho_j)} - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\tau'(\rho_j)} \\ &+ \frac{\delta + 2\lambda}{p} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(s - \rho_j) \tau'(\rho_j)} \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\tau'(\rho_j)} - s \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(s - \rho_j) \tau'(\rho_j)} \end{aligned} \right\}, \quad (61)
 \end{aligned}$$

δεδομένης της ισότητας $\frac{s}{\rho_j (s - \rho_j)} = \frac{1}{s - \rho_j} - \frac{1}{\rho_j}$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 για τον τελεστή των Dickson-Hipp στη σελ 395 των Li & Garrido (2004), και κάνοντας απλοποιήσεις η εξ. (61) γίνεται

$$s \sum_{j=1}^2 \frac{\lambda \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - \rho_j \right)}{\rho_j (s - \rho_j) \tau'(\rho_j)} = \frac{\lambda}{p} \left(-\frac{\delta + 2\lambda}{p} \frac{1}{\tau(0)} + \frac{\delta + 2\lambda}{p} \frac{1}{\tau(s)} - \frac{s}{\tau(s)} \right). \quad (62)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (62) στην εξ. (60) και δοθέντος της εξ.(54) παίρνουμε

$$s\eta_{\delta}^*(s) = 1 - \frac{\delta \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} \right)}{p \rho_1 \rho_2} - \mu_{\delta}^*(s) = \frac{1}{1 + \kappa_{\delta}} - \mu_{\delta}^*(s). \quad (63)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης (51) δίνεται από τον τύπο

$$G_{\delta}^*(s) = (1 + \kappa_{\delta})\eta_{\delta}^*(s). \quad (64)$$

Αντικαθιστούμε την εξ. (63) στην εξίσωση (64) και παίρνουμε

$$sG_{\delta}^*(s) = (1 + \kappa_{\delta}) \left(\frac{1}{1 + \kappa_{\delta}} - \mu_{\delta}^*(s) \right) = 1 - (1 + \kappa_{\delta})\mu_{\delta}^*(s) = 1 - \vartheta_{\delta}^*(s). \quad (65)$$

Από την εξίσωση (48), έχουμε

$$\phi_T^*(s) = \frac{G_{\delta}^*(s)}{1 + \kappa_{\delta} - \vartheta_{\delta}^*(s)}. \quad (66)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (65) στην εξ.(66) παίρνουμε

$$\phi_T^*(s) = \frac{1 - \vartheta_{\delta}^*(s)}{1 + \kappa_{\delta} - \vartheta_{\delta}^*(s)},$$

και συνεχίζοντας κάνοντας τροποποιήσεις, έχουμε

$$(1 + \kappa_{\delta})\phi_T^*(s) = \vartheta_{\delta}^*(s)\phi_T^*(s) + \frac{1 - \vartheta_{\delta}^*(s)}{s(1 + \kappa_{\delta} - \vartheta_{\delta}^*(s))},$$

Και με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace παίρνουμε την εξίσωση (55).

Στο παρακάτω πόρισμα παρουσιάζουμε ένα τύπο για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου της χρεοκοπίας δοθέντος ότι το αρχικό πλεόνασμα είναι μηδέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7(1) Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου της χρεοκοπίας για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα $\phi_T(0)$ δίνεται από τον τύπο

$$\phi_T(0) = 1 - \frac{\delta \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} \right)}{p \rho_1 \rho_2}.$$

Απόδειξη

Ορίζοντας $u = 0$ στην εξίσωση (55) παίρνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

2.8. Εκθετικά κατανομημένες αποζημιώσεις

Σε αυτή την ενότητα βρίσκουμε μία αναλυτική έκφραση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_\delta(u)$ υποθέτοντας ότι η συνάρτηση ποινής $w(x,y)$ ισούται με μία συνάρτηση $w(y) = y$ και $\delta > 0$, η $m_\delta(u)$ αντιστοιχεί στην αναμενόμενη παρούσα αξία του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα ατομικά μεγέθη ζημιάς είναι εκθετικά κατανομημένα με σ.κ. $F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, σ.π.π $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, και μετασχηματισμό Laplace $f_X^*(s) = \alpha(\alpha + s)^{-1}$.

Ισχύει
$$h_X(x) = 2\alpha e^{-2\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0,$$

και

$$h_X^*(s) = \frac{2\alpha}{s + 2\alpha} - \frac{\alpha}{s + \alpha}.$$

Άρα, οι εξισώσεις (23) και (24) γίνονται αντίστοιχα

$$w_1(u) = \alpha \int_u^\infty w(x-u)e^{-\alpha x} dx = \alpha e^{-\alpha u} \int_0^\infty w(v)e^{-\alpha v} dv = \alpha e^{-\alpha u} w^*(\alpha) \quad (67)$$

και

$$\begin{aligned} w_2(u) &= \alpha \int_u^\infty w(x-u)(2e^{-2\alpha x} - e^{-\alpha x}) dx = \alpha \int_0^\infty w(v)(2e^{-2\alpha(u+v)} - e^{-\alpha(u+v)}) dv \\ &= 2\alpha e^{-2\alpha u} w^*(2\alpha) - \alpha e^{-\alpha u} w^*(\alpha), \end{aligned} \quad (68)$$

όπου

$w^*(s) = \int_0^\infty w(v)e^{-sv} dv$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace (LT) της συνάρτησης $w(u)$.

Παίρνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace στις εξισώσεις (69) και (70)

$$w_1^*(s) = \frac{\alpha}{\alpha + s} w^*(\alpha) \quad (69)$$

και

$$w_2^*(s) = \frac{2\alpha}{2\alpha + s} w^*(2\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha + s} w^*(\alpha). \quad (70)$$

Γνωρίζουμε ότι ο παρανομαστής της εξίσωσης (33) έχει 2 ρίζες, ρ_1 και ρ_2 , με θετικά πραγματικά μέρη. Δοθέντος της παραδοχής για την κατανομή της X , ο αριθμητής της εξίσωσης (33) έχει επίσης 2 ρίζες $-R_1$ και $-R_2$ όπου $\text{Re}(R_1), \text{Re}(R_2) > 0$.

Στην επόμενη πρόταση βρίσκουμε ένα τύπο για την m_δ .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8(1) Υποθέτουμε ότι οι ρίζες $\{-R_j(\delta), j = 1, 2\}$ είναι διακριτές και για $w(x, y) = w(y)$, μια κλειστή μορφή της $m_\delta(u)$, $u \geq 0$, δίνεται από τον τύπο

$$m_\delta(u) = \varsigma_1 e^{-R_1 u} + \varsigma_2 e^{-R_2 u}, \quad (71)$$

όπου

$$\varsigma_j = \frac{(\xi_{1,\delta}(-R_j) + \xi_{2,\delta}(-R_j))}{(\ell_{1,\delta}(0) - \ell_{2,\delta}(0))} \frac{\prod_{i=1}^2 R_i}{\prod_{i=1, i \neq j}^2 (R_i - R_j)} \prod_{i=1}^2 \left(\frac{\rho_i}{R_j + \rho_i} \right), \quad j = 1, 2$$

με

$$\xi_{1,\delta}(s) = \frac{\alpha\lambda}{p} (2\alpha + s) \left(\frac{\delta+2\lambda}{p} - s \right) w^*(\alpha) + \theta \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - s \right) \{ 2\alpha w^*(2\alpha)(\alpha + s) - \alpha w^*(\alpha)(2\alpha + s) \},$$

$$\xi_{2,\delta}(s) = (\alpha + s)(2\alpha + s)\beta_2(s),$$

$$\ell_{1,\delta}(s) = (\alpha + s)(2\alpha + s) \left(\frac{\delta + \lambda}{p} - s \right) \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right),$$

και

$$\ell_{2,\delta}(s) = \frac{\alpha\lambda}{p} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) (s + 2\alpha) + \theta \frac{\lambda\alpha}{p} s \left(\frac{\delta}{p} - s \right).$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (69) και (70) στην εξ.(33) και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή της εξ.(33) με $(\alpha + s)(2\alpha + s)$ παίρνουμε

$$m_{\delta}^*(s) = \frac{\xi_{1,\delta}(s) + \xi_{2,\delta}(s)}{\ell_{1,\delta}(s) - \ell_{2,\delta}(s)}, \quad (72)$$

όπου $\xi_{1,\delta}(s), \xi_{2,\delta}(s), \ell_{1,\delta}(s)$, και $\ell_{2,\delta}(s)$ ορίζονται στην πρόταση.

Έχουμε ότι $\ell_{1,\delta}(s) - \ell_{2,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού που έχει 4 ρίζες ρ_j , με $\text{Re}(\rho_j) > 0$ για $j = 1, 2$ και $-R_j$, $\text{Re}(R_j) > 0$, για $j = 1, 2$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της παρεμβολής του Lagrange στον παρανομαστή και στον αριθμητή της εξίσωσης (72), βρίσκουμε ότι

$$\xi_{1,\delta}(s) + \xi_{2,\delta}(s) = \sum_{j=1}^2 (\xi_{1,\delta}(-R_j) + \xi_{2,\delta}(-R_j)) \prod_{k=1}^2 \left(\frac{s - \rho_k}{R_j + \rho_k} \right) \prod_{k=1, k \neq j}^2 \left(\frac{s + R_k}{-R_j + R_k} \right) \quad (73)$$

και

$$\ell_{1,\delta}(s) - \ell_{2,\delta}(s) = (\ell_{1,\delta}(0) - \ell_{2,\delta}(0)) \prod_{j=1}^2 \left(\frac{s - \rho_j}{\rho_j} \right) \prod_{j=1}^2 \left(\frac{s + R_j}{R_j} \right). \quad (74)$$

Από τις εξισώσεις (73) και (74) με την (72), συμπεραίνουμε ότι

$$m_{\delta}^*(s) = \sum_{j=1}^2 \frac{\zeta_j}{s + R_j},$$

όπου ζ_1 και ζ_2 ορίζονται στην πρόταση.

Τελικά, αν υποθέσουμε την ειδική περίπτωση όπου $w(y) = 1$ (με $w^*(s) = \frac{1}{s}$) ο τύπος

$$\phi_T(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u]$$

μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση (71) με

$$\xi_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda}{p} (2\alpha + s) \left(\frac{\delta + 2\lambda}{p} - s \right) - \theta\alpha \frac{\lambda}{p} \left(\frac{\delta}{p} - s \right).$$

2.9 Αριθμητικό Παράδειγμα

Για αριθμητικά αποτελέσματα, υποθέτουμε ότι τόσο η τ.μ. του ποσού αποζημίωσης όσο και η τ.μ. του ενδιάμεσου χρόνου είναι εκθετικά κατανομημένες με μέσο 1 ($X \sim \text{Exp}(1)$ και $W \sim \text{Exp}(1)$). Ο ρυθμός είσπραξης ασφαλιστρών $p = 1.5$, που σημαίνει ότι το σχετικό περιθώριο κινδύνου είναι 50%.

Παραθέτουμε τις αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ (πρόγραμμα Maple) σε συνάρτηση με το αρχικό πλεόνασμα u ($u \geq 0$) και για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ :

- Για $\theta = -1$:

$$\psi(u) = 0.7201508967e^{-0.2687389645u} - 0.01854637723e^{-2.220708719u} ;$$

- Για $\theta = -0.5$:

$$\psi(u) = 0.6957948813e^{-0.2976043940u} - 0.01047590296e^{-2.114760590u},$$

- Για $\theta = 0$:

$$\psi(u) = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}u};$$

- Για $\theta = 0.5$:

$$\psi(u) = 0.6311261756e^{-0.3788264025u} + 0.01399640216e^{-1.873562242u};$$

- Για $\theta = 1$:

$$\psi(u) = 0.5865437312e^{-0.4391578659u} + 0.03347620593e^{-1.730494168u}.$$

Η παράμετρος εξάρτησης θ έχει επιρροή στις πιθανότητες χρεοκοπίας. Η επίδραση της εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών W και X στις πιθανότητες χρεοκοπίας μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

Όταν η σχέση εξάρτησης είναι **θετική (αρνητική)**, η πιθανότητα εμφάνισης μιας σημαντικής αποζημίωσης **αυξάνεται (μειώνεται)** όσο αυξάνεται το χρονικό διάστημα που έχει παρέλθει από την τελευταία αποζημίωση.

Αυτό συνεπάγεται ότι η πιθανότητα η ασφαλιστική εταιρεία να έχει συγκεντρώσει επαρκή έσοδα από ασφάλιστρα ώστε να καλύψει τη αποζημίωση είναι **μεγαλύτερη (μικρότερη)**, και κατά συνέπεια, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι **μικρότερη (μεγαλύτερη)** στην περίπτωση θετικής (αρνητικής) εξάρτησης.

Η επίδραση αυτή στις πιθανότητες χρεοκοπίας γίνεται εντονότερη όσο ισχυρότερη είναι η θετική (αρνητική) εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών. Αναλυτικά αποτελέσματα της αναμενόμενης προεξοφλημένης τιμής του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_{\delta}(u) = E[e^{-\delta T} | U(T) | I(T < \infty) | U(0) = u]$$

Υποθέτοντας ότι $\delta = 5\%$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου εξάρτησης θ :

- για $\theta = -1$:

$$m_{\delta}(u) = 0.6997443091e^{-0.3206647526u} + 0.03664826823e^{-2.219872885u};$$

- για $\theta = -0.5$:

$$m_{\delta}(u) = 0.6599098319e^{-0.3500911630u} + 0.01714786296e^{-2.114343900u};$$

- για $\theta = 0$:

$$m_{\delta}(u) = 0.6137092190e^{-0.3862907812u};$$

- για $\theta = 0.5$:

$$m_{\delta}(u) = 0.5591165404e^{-0.4321500210u} - 0.01344088192e^{-1.873928948u};$$

- για $\theta = 1$:

$$m_{\delta}(u) = 0.4928389831e^{-0.4927941702u} - 0.02070699597e^{-1.731037829u};$$

Παρατηρούμε ότι η παράμετρος εξάρτησης θ έχει παρόμοια επίδραση στην αναμενόμενη προεξοφλημένη τιμή του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. Το Ανανεωτικό Μοντέλο Χρεοκοπίας με Δομές Εξάρτησης FGM

Αναλύεται η σύζευξη Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) ως το κύριο μαθηματικό εργαλείο σύνδεσης των μεταβλητών. Μέσω της παραμέτρου εξάρτησης θ , μοντελοποιούνται σενάρια όπου μια μεγάλη ζημιά επιταχύνει την έλευση της επόμενης (claim clustering), αυξάνοντας δραματικά την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η ανάλυση επεκτείνεται στη χρήση της συνάρτησης ποινής Gerber-Shiu, η οποία προσφέρει ένα ενοποιημένο πλαίσιο για τη μελέτη κρίσιμων μεγεθών, όπως το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της κατάρρευσης.

Στην πραγματικότητα, πολλές φορές οι ζημιές δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, σε μια φυσική καταστροφή (όπως ένας σεισμός ή μια πλημμύρα), μπορεί να προκύψουν πολλές ζημιές ταυτόχρονα ή σε μικρό χρονικό διάστημα, και αυτές οι ζημιές να σχετίζονται μεταξύ τους. Για να μοντελοποιήσουμε τέτοιες καταστάσεις, χρησιμοποιούμε δομές εξάρτησης.

Μία από τις πιο απλές και γνωστές μεθόδους για να εισάγουμε εξάρτηση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών είναι η σύζευξη Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM). Η σύζευξη FGM είναι ένας μαθηματικός τρόπος για να "συνδέσουμε" δύο ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, ώστε να έχουν κάποια μορφή εξάρτησης, χωρίς όμως να χάνουμε τον έλεγχο των περιθωριακών κατανομών τους.

Η βασική ιδέα της σύζευξης FGM είναι ότι ξεκινάμε με δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και προσθέτουμε έναν όρο που εισάγει εξάρτηση μεταξύ τους. Ο βαθμός αυτής της εξάρτησης ελέγχεται από μια παράμετρο θ , η οποία κυμαίνεται συνήθως μεταξύ -1 και 1 . Όταν $\theta = 0$, οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Όσο πιο κοντά στο ± 1 είναι το θ , τόσο ισχυρότερη είναι η εξάρτηση.

Η χρήση της σύζευξης FGM στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας μας επιτρέπει να μελετήσουμε πιο ρεαλιστικά σενάρια, όπου οι ζημιές δεν είναι ανεξάρτητες αλλά σχετίζονται μεταξύ τους. Αυτό έχει μεγάλη σημασία για την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, καθώς η ύπαρξη εξάρτησης μπορεί να αυξήσει σημαντικά τον κίνδυνο.

3.1 Το μοντέλο κινδύνου και η δομή εξάρτησης

Για ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, υποθέτουμε την στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{U_t, t \geq 0\}$ μοντελοποιημένη ως

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

όπου $u = U(0) \geq 0$ το αρχικό αποθεματικό, c ο ρυθμός καταβολής των ασφαλίσεων, μια θετική σταθερά. Η $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ομοίως ανεξάρτητες και ισόνομες που αντιπροσωπεύουν το ύψος των απαιτήσεων με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_Y(y)$, συνάρτηση κατανομής (σ.κ) $F_Y(y) = 1 - \bar{F}_Y(y)$ και μετασχηματισμός Laplace $f_Y^*(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f_Y(y) dy$.

Επιπλέον η $\{N_t, t \geq 0\}$ είναι απαριθμήτρια των απαιτήσεων και ορίζεται μέσω μιας ακολουθίας ανεξάρτητων και ισότιμων τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τον χρόνο μεταξύ απαιτήσεων $\{V_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ όπου V_1 είναι ο χρόνος μέχρι την πρώτη απαίτηση και V_i είναι ο χρόνος μεταξύ της $i - 1$ και i απαίτησης για $i = 2, 3, \dots$, με σ.π.π f_V , σ.κ $F_V(t) = 1 - \bar{F}_V(t)$ και μετασχηματισμό Laplace $f_V^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_V(t) dt$.

Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή V έχει κατανομή Erlang(n) με μέση τιμή n/λ , $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda > 0$ και η σ.π.π, σ.κ, καθώς και ο μετασχηματισμός Laplace δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$f_V(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, t \geq 0, n \in \mathbb{N}^+ \quad (1)$$

$$F_V(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad (2)$$

$$f_V^*(s) = E[e^{-sV}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^n \quad (3)$$

Όπως αναφέρεται από Cossette et al. (2010), υποθέτουμε ότι τα ζεύγη $(Y_i, V_i)_{i=1}^{\infty}$ σχηματίζουν μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων διανυσμάτων, τα οποία ακολουθούν το γενικό τυχαίο διάνυσμα (Y, V) , όπου τα στοιχεία Y και V μπορεί να είναι εξαρτημένα, έτσι ώστε η ακολουθία $\{cV_i - Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ να είναι επίσης ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας του (Y, V) συμβολίζεται ως $f_{Y,V}$ και η από κοινού συνάρτηση κατανομής ως $F_{Y,V}$.

Θα χρησιμοποιούμε την copula FGM (Farlie–Gumbel–Morgenstern) για να ορίσουμε την από κοινού κατανομή του (Y, V) και κατά συνέπεια, τη δομή εξάρτησης μεταξύ του ύψους της απαίτησης και του χρόνου μεταξύ απαιτήσεων.

Η copula FGM ορίζεται ως:

$$C_{\theta}^{\text{FGM}}(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2), \quad (4)$$

$$(u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1], \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

Η copula FGM επιτρέπει θετική και αρνητική εξάρτηση και περιλαμβάνει επίσης την copula ανεξαρτησίας για $\theta = 0$. Η copula FGM χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές για την περιγραφή δομών εξάρτησης λόγω της ευχρηστίας και της απλότητάς της. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την copula FGM, παραπέμπουμε στο Nelsen (2006) και για εφαρμογές της στη θεωρία κινδύνου, στα ασφαλιστικά σχέδια υγείας, και στην διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου.

Η διμεταβλητή συνάρτηση κατανομής του $F_{Y,V}$ που βασίζεται στην copula

FGM ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} F_{Y,V}(y, t) &= C_{\theta}^{\text{FGM}}(F_Y(y), F_V(t)) \\ &= F_Y(y)F_V(t) + \theta F_Y(y)\bar{F}_Y(y)F_V(t)\bar{F}_V(t), \quad y, t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που αντιστοιχεί στην Εξίσωση (4) δίνεται από:

$$\begin{aligned} c_{\theta}^{\text{FGM}} &= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\theta}^{\text{FGM}} \\ &= 1 + \theta(1 - 2u_1)(1 - 2u_2), \end{aligned}$$

και με αυτή, η διμεταβλητή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του (Y, V) δίνεται από

$$\begin{aligned} f_{Y,V}(y, t) &= c_{\theta}^{\text{FGM}}(F_Y(y), F_V(t))f_Y(y)f_V(t) = f_Y(y)f_V(t) + \theta h(y)f_V(t)[2\bar{F}_V(t) - \\ &1], y, t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (5)$$

με $h(y) = f_Y(y)[1 - 2F_Y(y)]$ και με τον μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} h(y) dy.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1) και (2), η εξίσωση (5) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} f_{Y,V}(y, t) &= f_Y(y) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \\ &+ \theta h(y) \left[2 \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) e^{-2\lambda t} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \right], y, t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (6)$$

Συγκεκριμένα, από την Εξίσωση (6), η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους της απαίτησης Y δίνεται από:

$$f_{Y|V}(y | t) = f_Y(y) + \theta h(y) \left[2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) e^{-\lambda t} - 1 \right], y, t \in \mathbb{R}^+.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\theta \neq 0$, καθώς εξετάζουμε την εξάρτηση, με χρόνους μεταξύ απαιτήσεων κατανεμημένους ως Erlang(n).

Για να διασφαλιστεί ότι η χρεοκοπία δεν θα συμβεί, ο ρυθμός ασφαλίστρου c πρέπει να είναι τέτοιος ώστε:

$$E[cW_i - X_i] > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

παρέχοντας ένα θετικό περιθώριο ασφαλείας.

Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με:

$$c > \frac{\lambda}{n} E(X). \quad (7)$$

Ο κύριος στόχος αυτού του άρθρου είναι η αξιολόγηση της προσδοκώμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, που εισήχθη από τους Gerber και Shiu (1998) για το κλασικό μοντέλο κινδύνου και από τους Gerber και Shiu (2005) για το ανανεωτικό μοντέλο Sparre Andersen. Αυτή η συνάρτηση περιλαμβάνει πολλά άλλα μέτρα καταστροφής και ορίζεται ως

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta\tau} w(U(T^-), |U(T)|) I(\tau < \infty) | U(0) = u], u \geq 0 \quad (8)$$

όπου $\delta \geq 0$ είναι ο προεξοφλητικός συντελεστής, $U(T^-)$ είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ είναι το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, $w(x, y)$ είναι μια μη αρνητική διδιάστατη συνάρτηση για $0 \leq x, y < \infty$, και $I(A)$ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση δείκτη του γεγονότος A .

Σημειώνεται ότι όταν $w(x, y) = 1$ για όλα τα $x, y \geq 0$, τότε το $m_\delta(u)$ εκφράζει τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, που συμβολίζεται ως $m_T(u)$, δηλαδή

$$m_T(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u]$$

επιπλέον, εάν $\delta = 0$, τότε $m_\delta(u)$ και επομένως $m_T(u)$ γίνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = E[I(\tau < \infty) | U(0) = u].$$

3.2 Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Σε αυτή την ενότητα, **εισάγουμε την γενικευμένη έκδοση της εξίσωσης Lundberg για τη διαδικασία κινδύνου Erlang(n)** με εξάρτηση βασισμένη στην copula FGM και στη συνέχεια **αναλύουμε τον αριθμό των ριζών της**. Αυτές οι ρίζες είναι απαραίτητες για την παραγωγή της ανανεωτικής ελαττωματικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Gerber – Shiu, καθώς και για την αξιολόγηση διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας.

Για να παραχθεί η γενικευμένη εξίσωση Lundberg, εξετάζουμε τη διακριτή χρονική διαδικασία που ενσωματώνεται στη συνεχή χρονική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t); t \geq 0\}$.

Ας θεωρήσουμε $W_0 = 0$ και $W_k = \sum_{i=1}^k V_i, k \geq 1$, τον χρόνο άφιξης της k -οστής απαίτησης. Ορίζουμε τη διακριτή χρονική διαδικασία $U_0 = u$ και για $k = 1, 2, \dots$

$$U_k = U(W_k) = u + cW_k - \sum_{i=1}^k Y_i = u + \sum_{i=1}^k (cV_i - Y_i),$$

όπου U_k είναι το πλεόνασμα αμέσως μετά την k -οστή απαίτηση.

Για να είναι το πλεόνασμα αμέσως μετά την k -οστή απαίτηση, αναζητούμε έναν αριθμό s ώστε η διαδικασία $\{e^{-\delta V_k + s U_k}; k = 0, 1, 2, \dots\}$ να είναι martingale.

Αυτή η διαδικασία είναι martingale αν και μόνο αν:

$$E[e^{-\delta V} e^{s(cV - Y)}] = E[e^{(cs - \delta)V} e^{-sY}] = 1, \quad (9)$$

η οποία ονομάζεται η γενικευμένη εξίσωση Lundberg που σχετίζεται με το μοντέλο κινδύνου μας.

Σημειώστε ότι, από την εξίσωση (5), η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (9) μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} E[e^{-\delta V} e^{s(cV - Y)}] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs - \delta)} e^{-sy} f_{Y,V}(y, t) dy dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs - \delta)} e^{-sy} [f_Y(y) - \theta h(y)] f_V(t) dy dt \\ &+ 2\theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{t(cs - \delta)} e^{-sy} h(y) f_V(t) \bar{F}_V(t) dy dt \\ &= [f_Y^*(s) - \theta h^*(s)] f_V^*(\delta - cs) + 2\theta h^*(s) \int_0^\infty e^{-t(\delta - cs)} f_V(t) \bar{F}_V(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-t(\delta-cs)} f_V(t) \bar{F}_V(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-t(\delta-cs)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) e^{-2\lambda t} dt \\
 &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+2\lambda-cs)} t^{n+i-1} dt \\
 &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{(n+i-1)!}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}} \\
 &= \lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{(\delta+2\lambda-cs)^{n+i}},
 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και την εξίσωση (3), η εξίσωση (10) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 E[e^{-\delta V} e^{s(cV-Y)}] &= [f_Y^*(s) - \theta h^*(s)] \\
 &\quad \times \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + 2\theta h^*(s) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i}.
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg στην Εξίσωση (9) μειώνεται σε:

$$f_Y^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta h^*(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] = 1. \quad (11)$$

Όταν $n = 1$, η εξίσωση (11) αποδεικνύεται από τους Cossette et al. (2010), ότι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες με πραγματικό θετικό μέρος ($\text{Re}(s) \geq 0$) όταν $\delta > 0$ και $\theta \neq 0$.

Πρόταση 1

Για $\delta > 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg στην σχέση (11) έχει ακριβώς $3n - 1$ ρίζες, που ορίζονται ως $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{3n-1}(\delta)$ στο δεξιό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή, με $\text{Re}(\rho_i(\delta)) > 0, i = 1, 2, \dots, 3n - 1$.

Απόδειξη

Επειδή η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (11) γίνεται επίσης:

$$\begin{aligned} & \lambda^n f_Y^*(s)(\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} + \theta \lambda^n h^*(s) \\ & \times \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \lambda^i (\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \right] \\ & = (\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

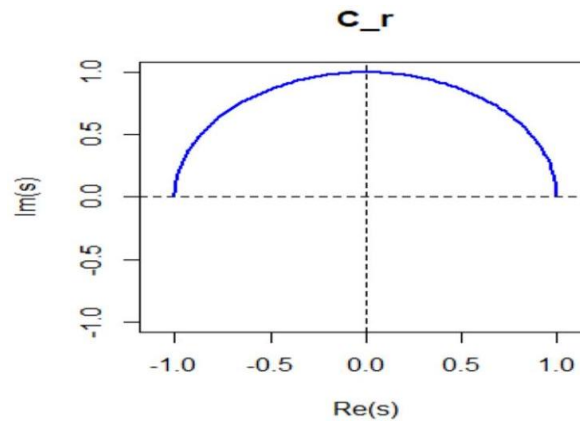
αρκεί να δείξουμε ότι η παραπάνω εξίσωση (12) έχει ακριβώς $3n-1$ ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη.

Έστω $r > 0$ ένας επαρκώς μεγάλος αριθμός, και ας ορίσουμε με C_r το περίγραμμα που περιέχει τον φανταστικό άξονα από $-ir$ σε ir και ένα ημικύκλιο με ακτίνα r που κινείται δεξιόστροφα από ir σε $-ir$.

Έχουμε $C_r = \{s \in \mathbb{C}: |s| = r, \text{Re}(s) > 0, r > 0 \text{ είναι σταθερό}\}$.

και θέτουμε $r \rightarrow \infty$ και C ο ορισμένος χώρος.

Στο παρακάτω σχήμα αναπαριστούμε τον χώρο για $r = 1$.



Γραφική παράσταση για το C_r

Για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rouché στο κλειστό περίγραμμα C . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν $\text{Re}(s) > 0$ ή $\text{Re}(s) = 0$.

Για s στο ημικύκλιο, δηλαδή, για $\text{Re}(s) > 0$, έχουμε

$|\delta + \lambda - cs| \rightarrow \infty$ και $|\delta + 2\lambda - cs| \rightarrow \infty$ καθώς $r \rightarrow \infty$, και έτσι:

$$\begin{aligned}
 & \left| f_Y^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta \hat{h}(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] \right| \\
 & \leq |f_Y^*(s)| \frac{\lambda^n}{|\delta + \lambda - cs|^n} + |\theta \hat{h}(s)| \left| 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right| \\
 & \leq |f_Y^*(s)| \frac{\lambda^n}{|\delta + \lambda - cs|^n} + |\theta \hat{h}(s)| \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^{n+i}}{|\delta + 2\lambda - cs|^{n+i}} + \frac{\lambda^n}{|\delta + \lambda - cs|^n} \right] \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Αυτό συνεπάγεται με

$$\left| f_Y^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta \hat{h}(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] \right| < 1, (13)$$

Στην συνέχεια θα ορίσουμε τη τυχαία μεταβλητή Z με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται

$$g_Z(y) = 2f_Y(y)F_Y(y), \quad \text{και συνεπώς } h(y) = f_Y(y) - g_Z(y).$$

Ας ορίσουμε επίσης:

$$g_Z^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} g_Z(y) dy$$

και

$$d_{\delta}^*(s) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n.$$

Για s στον φανταστικό άξονα, δηλαδή για $\text{Re}(s) = 0$, και για $\delta > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \left| f_V^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta h^*(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] \right| \\
 &= \left| f_V^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta [f_V^*(s) - g_Z^*(s)] d_\delta^*(s) \right| \\
 &\leq \left| f_V^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right| + |\theta| |f_V^*(s) - g_Z^*(s)| |d_\delta^*(s)| \\
 &= |f_V^*(s)| \frac{\lambda^n}{|\delta + \lambda - cs|^n} + |\theta| |f_V^*(s) - g_Z^*(s)| |d_\delta^*(s)| \\
 &\leq \frac{\lambda^n}{|\delta + \lambda - cs|^n} + |\theta| |d_\delta^*(s)| \leq \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n + |\theta| |d_\delta^*(0)|. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Για $\delta > 0$, ισχύει $d_\delta^*(0) > 0$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
 d_\delta^*(0) &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n \\
 &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^i \left(\frac{2\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n \\
 &\geq \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^i - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n \\
 &= \left(\frac{2\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^n - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n > 0,
 \end{aligned}$$

Για $\delta > 0$, $n \geq 1$ χρησιμοποιούμε την γνωστή συνδυαστική ταυτότητα:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+i}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^i = 2^n, n \geq 0. \tag{15}$$

Επομένως για s στον φανταστικό άξονα, η εξίσωση (14) σε συνδυασμό με την σχέση (15) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \left| f_Y^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta h^*(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] \right| \\
 & \leq \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n + d_\delta^*(0) \\
 & = \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda} \right)^n \\
 & = 2 \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^i \\
 & < 2 \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^i, \quad (\text{αφού } \frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} < \frac{1}{2} \text{ για } \delta > 0) \\
 & = 2 \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^n 2^{n-1}, \quad (\text{από την σχέση (15)}) \\
 & = \left(\frac{2\lambda}{\delta + 2\lambda} \right)^n < 1, \text{ για } \delta > 0
 \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση αποδείξαμε ότι:

$$\left| f_Y^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta h^*(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] \right| < 1, \quad (16)$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
 & | \lambda^n f_Y^*(s) (\delta + \lambda - cs)^{2n-1} + \theta \lambda^n h^*(s) \\
 & \times \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \lambda^i (\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \right] | \\
 & < | (\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} |,
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, από το θεώρημα του Rouché προκύπτει ότι η εξίσωση (12) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών με την εξίσωση:

$$(\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} = 0$$

στο περίγραμμα C_r . Επειδή η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς $3n-1$ θετικές ρίζες μέσα στο C_r , καταλήγουμε στις σχέσεις (12) και (11) να έχουν ακριβώς $3n-1$ ρίζες, δηλαδή $\rho_1(\delta), \dots, \rho_{3n-1}(\delta)$, με θετικά πραγματικά μέρη.

Τελικά, ολοκληρώνουμε την απόδειξη, καθώς το $r \rightarrow \infty$. Παρατηρούμε ότι αν $\delta=0$, οι συνθήκες του θεωρήματος του Rouché δεν ικανοποιούνται διότι:

$$\begin{aligned} & \left| f_Y^*(s) \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n + \theta h^*(s) \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\delta + \lambda - cs} \right)^n \right] \right| \\ &= \left| 1 + \theta \left[2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{2} \right)^i - 1 \right] \right| \\ &= \left| 1 + \theta \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} 2^{n-1} - 1 \right] \right| = 1, \end{aligned}$$

για $s=0$ λόγω της εξίσωσης (15).

Αυτό δείχνει επίσης ότι μια προφανή ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (13) είναι μηδέν όταν $\delta=0$.

Πρόταση 2

Για $\delta=0$ και $\theta \neq 0$ η γενικευμένη εξίσωση Lundberg στην εξίσωση (11) έχει ακριβώς $3n-2$ ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο με θετικά πραγματικά μέρη και μια ρίζα ίση με μηδέν.

Απόδειξη

Ας ορίσουμε $z = 1 - \frac{s}{k}$ και $D_k = \{s: |z| = 1\}$, δηλαδή, σε όρους του s , το περίγραμμα D_k είναι ένας κύκλος με κέντρο στο k και ακτίνα k . Ομοίως όπως στην Πρόταση 1, αφήνουμε $k \rightarrow \infty$ και ονομάζουμε D το οριακό περίγραμμα. Χρησιμοποιώντας

ταυτόσημα επιχειρήματα όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1, μπορούμε να δείξουμε ότι η Εξίσωση (13) ισχύει και στο D (εξαιρώντας $s = 0$ ή ισοδύναμα $z = 1$) για $\delta = 0$.

Σημειώνουμε επίσης ότι οι συναρτήσεις

$$\lambda^n \{f_Y^*(s)(2\lambda - cs)^{2n-1} + \theta h^*(s) [\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \lambda^i (\lambda - cs)^n (2\lambda - cs)^{n-i-1} - (2\lambda - cs)^{2n-1}]\}$$

και

$$(\lambda - cs)^n (2\lambda - cs)^{2n-1}$$

είναι συνεχείς στο D.

Πρώτα θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left\{ 1 - f_Y^*(k - kz) \left(\frac{\lambda}{\lambda - ck(1-z)} \right)^n - \theta h^*(k - kz) \right. \\ & \left. \times \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{2\lambda - c(k - kz)} \right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda - c(k - kz)} \right)^n \right] \right\} \Big|_{z=1} > 0. \end{aligned}$$

Η αριστερή πλευρά αυτής της σχέσης ισούται με:

$$\frac{d}{dz} \{1 - E[e^{(k-kz)(cV-Y)}]\} \Big|_{z=1} = kE[cV - Y]$$

το οποίο είναι πάντα θετικό υπό την συνθήκη για το περιθώριο ασφαλείας σύμφωνα με την σχέση (7).

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Klimenok (2001), έχουμε αριθμό ριζών $3n - 2$ για τις εξισώσεις (11) και (12), δηλαδή αριθμών εξισώσεων $(\lambda - cs)^n (2\lambda - cs)^{2n-1} - 1$ μέσα στο D.

Τέλος, βλέπουμε ότι στην (11) η μία ρίζα ισούται με 0.

3.3 Μετασχηματισμός Laplace του $m_\delta(u)$

Για $u \geq 0$, ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις:

$$\gamma_1(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) f_Y(y) dy, \quad \gamma_2(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) h(y) dy, \quad (17)$$

$$\sigma_{1,\delta}(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) f_Y(y) dy + \gamma_1(u), \quad \sigma_{2,\delta}(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) h(y) dy + \gamma_2(u). \quad (18)$$

Δεσμευόμενοι ως προς τον χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5), έχουμε:

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-y) f_{Y,V}(y,t) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct) f_{Y,V}(y,t) dy \right\} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} f_V(t) [\sigma_{1,\delta}(u+ct) - \theta \sigma_{2,\delta}(u+ct)] dt \\ &\quad + 2\theta \int_0^\infty e^{-\delta t} f_V(t) \bar{F}_V(t) \sigma_{2,\delta}(u+ct) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Θέτουμε $x = u + ct$, οπότε η σχέση (19) γίνεται

$$\begin{aligned} cm_\delta(u) &= \int_u^\infty e^{-\frac{\delta(x-u)}{c}} f_V\left(\frac{x-u}{c}\right) [\sigma_{1,\delta}(x) - \theta \sigma_{2,\delta}(x)] dx \\ &\quad + 2\theta \int_u^\infty e^{-\frac{\delta(x-u)}{c}} f_V\left(\frac{x-u}{c}\right) \bar{F}_V\left(\frac{x-u}{c}\right) \sigma_{2,\delta}(x) dx, \end{aligned}$$

με την αντικατάσταση των $f_V(t)$ και $\bar{F}_V(t)$, δηλαδή με την χρήση των (1) και (2) παίρνουμε

$$c^n m_\delta(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)(x-u)}{c}} (x-u)^{n-1} [\sigma_{1,\delta}(x) - \theta \sigma_{2,\delta}(x)] dx$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+2)(x-u)}{c}} (x-u)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \left(\frac{x-u}{c}\right)^i \right] \sigma_{2,\delta}(x) dx.$$

και μετά από εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$c^n m_\delta^*(s) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-su} \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)(x-u)}{c}} (x-u)^{n-1} [\sigma_{1,\delta}(x) - \theta \sigma_{2,\delta}(x)] dx du$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-su} \int_u^\infty e^{-\frac{(\delta+2)(x-u)}{c}} (x-u)^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \left(\frac{x-u}{c}\right)^i \right] \sigma_{2,\delta}(x) dx du \quad (20)$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+\lambda)x}{c}} [\sigma_{1,\delta}(x) - \theta \sigma_{2,\delta}(x)] \int_0^x (x-u)^{n-1} e^{-\left(s-\frac{\delta+\lambda}{c}\right)u} du dx$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\frac{(\delta+2)x}{c}} \sigma_{2,\delta}(x) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i i!} \int_0^x (x-u)^{n-i-1} e^{-\left(s-\frac{\delta-2\lambda}{c}\right)u} du dx.$$

Για την παρακάτω σχέση μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ότι ισχύει για $\alpha > 0$,

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_0^x (x-u)^k e^{-\alpha u} du = \sum_{j=0}^k (-1)^j j! \binom{k}{j} \frac{x^{k-j}}{\alpha^{j+1}} + (-1)^{k+1} \frac{k!}{\alpha^{k+1}} e^{-\alpha x}. \quad (21)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (21), η εξίσωση (20) γίνεται

$$\begin{aligned}
 c^n m_\delta^*(s) &= (-1)^n \frac{\lambda^n}{\left(s - \frac{\delta + \lambda}{c}\right)^n} [\sigma_{1,\delta}^*(s) - \theta \sigma_{2,\delta}^*(s)] \\
 &+ 2\theta \lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{c^i \left(s - \frac{\delta + 2\lambda}{c}\right)^{n+i}} \sigma_{2,\delta}^*(s) + B_\delta^*(s) \\
 &= \frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s\right)^n} [\sigma_{1,\delta}^*(s) - \theta \sigma_{2,\delta}^*(s)] \\
 &+ 2\theta \lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{c^i \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s\right)^{n+i}} \sigma_{2,\delta}^*(s) + B_\delta^*(s),
 \end{aligned} \tag{22}$$

όπου

$$\sigma_{i,\delta}^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} \sigma_{i,\delta}(u) du, \quad i = 1, 2$$

και

$$\begin{aligned}
 B_\delta^*(s) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{j! \binom{n-1}{j}}{\left(s - \frac{\delta + \lambda}{c}\right)^{j+1}} \int_0^\infty x^{n-1-j} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)x}{c}} [\sigma_{1,\delta}(x) - \theta \sigma_{2,\delta}(x)] dx \\
 &+ \frac{2\theta \lambda^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i i!} \sum_{j=0}^{n+i-1} (-1)^j \frac{j! \binom{n+i-1}{j}}{\left(s - \frac{\delta + 2\lambda}{c}\right)^{j+1}} \int_0^\infty x^{n+i-1-j} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)x}{c}} \sigma_{2,\delta}(x) dx.
 \end{aligned}$$

Ας ορίσουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό Laplace

$$\gamma_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} \gamma_i(u) du, \quad i = 1, 2.$$

Από την εξίσωση (18), ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,\delta}^*(s) &= m_\delta^*(s) h^*(s) + \gamma_1^*(s) \\
 \sigma_{2,\delta}^*(s) &= m_\delta^*(s) h^*(s) + \gamma_2^*(s),
 \end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (22) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 m_{\delta}^*(s) & \left\{ c^n - \frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n} [f_Y^*(s) - \theta h^*(s)] - 2\theta\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{c^i \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{n+i}} h^*(s) \right\} \\
 & = \frac{\lambda^n}{\left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n} [\gamma_1^*(s) - \theta\gamma_2^*(s)] + 2\theta\lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \frac{\lambda^i}{c^i \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{n+i}} \gamma_2^*(s) \\
 & \quad + B_{\delta}^*(s). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (23), μπορούμε να περάσουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1

Στη διαδικασία κινδύνου Erlang(n) με δομή εξάρτησης βασισμένη στην copula FGM, ο μετασχηματισμός Laplace $m_{\delta}^*(s)$ της προεξοφλητικής συνάρτησης ποινής m_{δ} του Gerber – Shiu δίνεται από:

$$m_{\delta}^*(s) = \frac{\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s)}{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)}, \tag{24}$$

όπου

$$h_{1,\delta}^*(s) = \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}, \tag{25}$$

$$h_{2,\delta}^*(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} f_Y^*(s) \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} + \theta \frac{\lambda^n}{c^n} h^*(s) \left[2 \left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s \right)^n \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \right], \quad (26)$$

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \gamma_1^*(s) \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} + \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \gamma_2^*(s) \left[2 \left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s \right)^n \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \right], \quad (27)$$

και $\beta_{2,\delta}^*(s)$ είναι ένα πολυώνυμο με βαθμού το πολύ $3n-2$

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = - \sum_{j=1}^{3n-1} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k}.$$

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της σχέσης (23) με

$$\left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s \right)^n \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} / c^n$$

και λύνοντας για $m_\delta^*(s)$ καταλήγουμε άμεσα στην εξίσωση (24) με:

$$\begin{aligned}
 \beta_{2,\delta}^*(s) &= \frac{1}{c^n} h_{1,\delta}^*(s) B_\delta^*(s) \\
 &= - \left\{ \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} j! \binom{n-1}{j} \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^{n-j-1} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} \hat{\mu}_j \left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\theta\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i i!} \sum_{j=0}^{n+i-1} j! \binom{n+i-1}{j} \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-j-2} \hat{\delta}_{i,j} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right) \right\} \\
 &= - \left\{ \frac{\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} j! \binom{n-1}{j} \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^{n-j-1} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} \hat{\mu}_j \left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\theta\lambda^n}{c^n (n-1)!} \sum_{j=0}^{2n-2} \left(\sum_{i=\max(0,j+1-n)}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i i!} j! \binom{n+i-1}{j} \hat{\delta}_{i,j} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{\delta+\lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{\delta+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-j-2} \right\},
 \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα πολυώνυμο στο s βαθμού $3n - 2$ ή μικρότερου, όπου:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_j \left(\frac{\delta+\lambda}{c}\right) &= \int_0^\infty x^{n-1-j} e^{-\frac{(\delta+\lambda)x}{c}} [\sigma_{1,\delta}(x) - \theta\sigma_{2,\delta}(x)] dx, \\
 \hat{\delta}_{i,j} \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}\right) &= \int_0^\infty x^{n+i-1-j} e^{-\frac{(\delta+2\lambda)x}{c}} \sigma_{2,\delta}(x) dx.
 \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (11) μπορεί

επίσης να γραφτεί στη μορφή $h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) = 0$, που σημαίνει ότι οι

ρ_i , $i = 1, 2, \dots, 3n - 1$ είναι ρίζες του παρονομαστή στην εξίσωση (24).

Δεδομένου ότι η $m_\delta^*(s)$ είναι αναλυτική για $\text{Re}(s) \geq 0$, αυτό σημαίνει ότι οι ρ_i ,

$i = 1, 2, \dots, 3n - 1$ είναι επίσης ρίζες του αριθμητή στην εξίσωση (24). Έτσι

καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\beta_{2,\delta}^*(\rho_i) = -\beta_{1,\delta}^*(\rho_i), i = 1, 2, \dots, 3n - 1.$$

Δεδομένου ότι το $\beta_{2,\delta}^*$ είναι ένα πολυώνυμο στο s βαθμού $3n - 2$, με τη φόρμουλα παρεμβολής Lagrange στα $3n - 1$ σημεία $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{3n-1}$, έχουμε:

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = \sum_{j=1}^{3n-1} \beta_{2,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k} = - \sum_{j=1}^{3n-1} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k},$$

και συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώνεται.

3.4 Ανάλυση της Gerber – Shiu όταν $u = 0$

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε ορισμένα μεγέθη χρεοκοπίας λαμβάνοντας την περίπτωση $u = 0$. Οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, όπως αναλύθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο, είναι η βάση για την δημιουργία εκφράσεων της Gerber – Shiu. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αρχικών τιμών, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} m_\delta(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sm^*(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{\beta_{1,\delta}^*(s)}{s^{3n-2}} - \frac{1}{s^{3n-2}} \sum_{j=1}^{3n-1} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k}}{\frac{h_{1,\delta}^*(s)}{s^{3n-1}} - \frac{h_{2,\delta}^*(s)}{3^{3n-1}}} \\ &= \frac{- \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{3n-2}} \sum_{j=1}^{3n-1} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k}}{(-1)^{3n-1}} \\ &= \frac{- \sum_{j=1}^{3n-1} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} \frac{1}{\rho_j - \rho_k}}{(-1)^{3n-1}} \quad (28) \\ &= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\beta_{1,\delta}^*(\rho_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε δύο νέες ποσότητες $b_{1,\delta}(s)$ και $b_{2,\delta}(s)$

$$b_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1}, \quad (29)$$

$$b_{2,\delta}(s) = \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \left[2 \left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s \right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i} \binom{n+i-1}{n-1} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \right]. \quad (30)$$

Από την εξίσωση (27), έχουμε

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = b_{1,\delta}(s)\gamma_1^*(s) + b_{2,\delta}(s)\gamma_2^*(s). \quad (31)$$

Ορίζουμε επίσης

$$b_{ij} = \frac{b_{i,\delta}(\rho_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)}, \quad \text{για } i = 1, 2 \text{ και } j = 1, 2, \dots, 3n - 1. \quad (32)$$

Τότε, η εξίσωση (28), χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (31) και (32), γίνεται

$$m_\delta(0) = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,\delta}(\rho_j)\gamma_1^*(\rho_j) + b_{2,\delta}(\rho_j)\gamma_2^*(\rho_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j}\gamma_i^*(\rho_j). \quad (33)$$

Επίσης, από την (17) έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma_1(y) &= \int_x^\infty w(x, y-x)f_X(y)dy = \int_0^\infty w(x, y)f_X(x+y)dy \\ \text{έχουμε ότι } \gamma_1^*(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\gamma_1(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx}w(x, y)f_Y(y+x)dy dx \\ \text{και } \gamma_2^*(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx}w(x, y)h(y+x)dy dx. \end{aligned}$$

Άρα, από την (33) έχουμε

$$m_\delta(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) \left[f_X(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j}e^{-\rho_j x} + h(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j}e^{-\rho_j x} \right] dy dx. \quad (34)$$

Ορίζουμε $f(x, y, t | 0)$ την από κοινού σ.π.π του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία (x), το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία (y) και ο χρόνος

χρεοκοπίας (t) δεδομένου ότι $U(0) = 0$, και $f_\delta(x, y | 0)$ η προεξοφλημένη σ.π.π. (να σημειωθεί ότι αν $\delta \rightarrow 0$ τότε δεν υπάρχει προεξόφληση) του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία, δεδομένου ότι το αρχικό πλεόνασμα ισούται με 0.

Τότε, έχουμε

$$f_\delta(x, y | 0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x, y, t | 0) dt.$$

Από την εξίσωση (16) του Cheung et al. (2010), και για $u = 0$, προκύπτει ότι:

$$m_\delta(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(x, y) f(x, y, t | 0) dt dy dx = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) f_\delta(x, y | 0) dy dx, \quad (35)$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω με την εξίσωση (34), έχουμε:

$$f_\delta(x, y | 0) = f_X(x + y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j x} + h(x + y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j x}. \quad (36)$$

Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να εισαγάγουμε τον τελεστή Dickson – Hipp T_r μαζί με τις ιδιότητες του, ο οποίος εφαρμόζεται σε μια πραγματική συνάρτηση g .

Ορίζουμε

$$T_r g(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} g(y) dy, \quad x \geq 0, r \in \mathbb{C},$$

Ιδιότητες

1. $T_r g(0) = \int_0^\infty e^{-ry} g(y) dy = \hat{g}(r), r \in \mathbb{C}.$

$$2. T_{r_1} T_{r_2} g(x) = T_{r_2} T_{r_1} g(x) = \frac{T_{r_1} g(x) - T_{r_2} g(x)}{r_2 - r_1}, x \geq 0, r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}.$$

$$3. (\widehat{T_r g})(s) = T_r \hat{g}(s) = T_s T_r g(0) = \frac{\hat{g}(s) - \hat{g}(r)}{r - s}, r \neq s \in \mathbb{C}.$$

4. Αν r_1, r_2, \dots, r_m είναι διακεκριμένοι μιγαδικοί αριθμοί και

$$\pi_m(s) = \prod_{i=1}^m (s - r_i), \text{ τότε}$$

$$T_{r_1} \dots T_{r_m} g(x) = (-1)^m \sum_{i=1}^m \frac{T_{r_i} g(x)}{\pi'_m(r_i)}, x \geq 0, \quad (37)$$

με αντίστοιχο μετασχηματισμός Laplace

$$T_s T_{r_1} \dots T_{r_m} g(0) = (-1)^m \left[\frac{\hat{g}(s)}{\pi_m(s)} - \sum_{i=1}^m \frac{\hat{g}(r_i)}{(s - r_i) \pi'_m(r_i)} \right], s \in \mathbb{C}. \quad (38)$$

Πρόσθετες ιδιότητες αυτού του τελεστή μπορούν να βρεθούν στο έργο των Li και Garrido (2004) και στις αναφορές τους.

Ας ορίσουμε τα εξής:

$f_{1,\delta}(x | 0) = \int_0^\infty f_\delta(x, y | 0) dy$, δηλαδή την προεξοφλημένη (ή μη, αν $\delta \rightarrow 0$) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία.

$f_{2,\delta}(y | 0) = \int_0^\infty f_\delta(x, y | 0) dx$, δηλαδή την προεξοφλημένη (ή μη, αν $\delta \rightarrow 0$) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία όταν $u=0$

Αφού:

$$\int_0^\infty h(x + y) dy = \int_x^\infty h(y) dy = \int_x^\infty f_X(y) [1 - 2F_X(y)] dy = -F_X(x) \bar{F}_X(x),$$

Από την εξίσωση (36) έχουμε

$$f_{1,\delta}(x | 0) = \int_0^{\infty} f_{\delta}(x, y | 0) dy = \bar{F}_X(x) \left[\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j x} - F_X(x) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j x} \right],$$

και

$$\begin{aligned} f_{2,\delta}(y | 0) &= \int_0^{\infty} f_{\delta}(x, y | 0) dx \\ &= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} \int_0^{\infty} e^{-\rho_j x} f_X(x+y) dx + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} \int_0^{\infty} e^{-\rho_j x} h(x+y) dx \\ &= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} T_{\rho_j} f_X(y) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} T_{\rho_j} h(y). \end{aligned}$$

Η μετασχηματισμένη Laplace της $f_{2,\delta}(y | 0)$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} f_{2,\delta}^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sy} f_{2,\delta}(y | 0) dy = T_s f_{2,\delta}(0 | 0) \\ &= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} T_s T_{\rho_j} f_X(0) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} T_s T_{\rho_j} h(0) \\ &= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j} f_X^*(\rho_j) + b_{2,j} h^*(\rho_j)}{s - \rho_j} - f_X^*(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}}{s - \rho_j} - h^*(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,j}}{s - \rho_j}. \end{aligned} \quad (39)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (25), (29) και (30), προκύπτει ότι:

$h_{2,\delta}^*(s) = b_{1,\delta}(s) f_X^*(s) + b_{2,\delta}(s) h^*(s)$ και για $j = 1, \dots, 3n - 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} b_{1,j} f_X^*(\rho_j) + b_{2,j} h^*(\rho_j) &= \frac{b_{1,\delta}(\rho_j) f_X^*(\rho_j) + b_{2,\delta}(\rho_j) h^*(\rho_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)} = \frac{h_{2,\delta}^*(\rho_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)} \\ &= \frac{h_{1,\delta}^*(\rho_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)}, \end{aligned}$$

και από τις εξισώσεις (25) και (39) έχουμε

$$f_{2,\delta}^*(s) = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{(\delta + \lambda - c\rho_j)^n (\delta + 2\lambda - c\rho_j)^{2n-1}}{c^{3n-1}(s - \rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)} - f_X^*(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}}{s - \rho_j} - h^*(s) \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,j}}{s - \rho_j}. \quad (40)$$

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ταυτότητες:

$$1. \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{(\delta + \lambda - c\rho_j)^n (\delta + 2\lambda - c\rho_j)^{2n-1}}{c^{3n-1}(s - \rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)} = 1 - \frac{(\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1}}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}, \quad (41)$$

$$2. \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,j}}{s - \rho_j} = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,\delta}(\rho_j)}{(s - \rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)} = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\lambda^n (\delta + 2\lambda - c\rho_j)^{2n-1}}{c^{3n-1}(s - \rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)}$$

$$= - \frac{\lambda^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1}}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}, \quad (42)$$

$$3. \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,j}}{s - \rho_j} = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{2,\delta}(\rho_j)}{(s - \rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\theta \lambda^n \left[2(\delta + \lambda - c\rho_j)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i (\delta + 2\lambda - c\rho_j)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - c\rho_j)^{2n-1} \right]}{c^{3n-1}(s - \rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{3n-1} (\rho_k - \rho_j)}$$

$$= - \frac{\theta \lambda^n \left[2(\delta + \lambda - cs)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i (\delta + 2\lambda - cs)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \right]}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}. \quad (43)$$

η εξίσωση (40) γίνεται:

$$f_{2,\delta}^*(s) = 1 - \frac{1}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)} \left\{ (\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} - \lambda^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} f_X^*(s) - \theta \lambda^n \left[2(\delta + \lambda - cs)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \lambda^i (\delta + 2\lambda - cs)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \right] h^*(s) \right\},$$

δηλαδή, ο μετασχηματισμός Laplace της $f_{2,\delta}(y | 0)$ απλοποιείται σε

$$f_{2,\delta}^*(s) = 1 - \frac{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}. \quad (44)$$

Θέτοντας $w(x, y) = 1$, η εξίσωση (35) υποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας m_T όταν $U(0) = 0$, είναι

$$\begin{aligned} m_T(0) &= E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = 0] = \int_0^\infty \int_0^\infty f_\delta(x, y | 0) dy dx \\ &= \int_0^\infty f_{2,\delta}(y | 0) dy = \lim_{s \rightarrow 0} f_{2,\delta}^*(s) = 1 - \frac{h_{1,\delta}^*(0) - h_{2,\delta}^*(0)}{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{3n-1}} \\ &= 1 - \frac{(\delta + 2\lambda)^{2n-1} [(\delta + \lambda)^n - \lambda^n]}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} \rho_i}, \end{aligned} \quad (45)$$

Ξέροντας ότι $f^*(0) = 1$, $h^*(0) = 0$, και από την προηγούμενη εξίσωση (45) προκύπτει ότι $m_T(0) < 1$ λόγω του $\delta > 0$.

Τώρα, για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(0)$ γνωρίζοντας ότι το αρχικό πλεόνασμα $U(0) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{(\delta + 2\lambda)^{2n-1} [(\delta + \lambda)^n - \lambda^n]}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} \rho_i} \\ &= 1 - \frac{n 2^{2n-1} \lambda^{3n-2}}{c^{3n-1} \rho_1'(0) \rho^*(0)}, \end{aligned}$$

όπου

$$\rho^*(0) = \prod_{i=2}^{3n-1} \rho_i(0) \text{ και } \rho'_1(0) = \left. \frac{d}{d\delta} \rho_1(\delta) \right|_{\delta \rightarrow 0^+}.$$

Για να υπολογίσουμε την ποσότητα $\rho'_1(0)$ χρησιμοποιούμε ότι $\rho_1(\delta)$ είναι ρίζα του παρονομαστή της εξίσωσης (24). Επομένως, έχουμε $h_1^*(\rho_1(\delta)) = h_2^*(\rho_1(\delta))$, και με παραγωγή ως προς δ , θέτοντας $\delta \rightarrow 0$ καταλήγουμε

$$\begin{aligned} n2^{2n-1}\lambda^{3n-2}[1 - c\rho'_1(0)] + (2n - 1)2^{2n-2}\lambda^{3n-2}[1 - c\rho'_1(0)] \\ = (2n - 1)2^{2n-2}\lambda^{3n-2} + 2^{2n-1}\lambda^{3n-1}[\rho'_1(0)f^{*'}(0) - \theta\rho'_1(0)h^{*'}(0)] \\ + \theta 2^n \lambda^{3n-1} \rho'_1(0) h^{*'}(0) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i, \end{aligned}$$

και καθώς $f^{*'}(0) = -E(X)$, η παραπάνω σχέση, σε συνδυασμό με την σχέση (15), τελικά αποδίδει ότι

$$\rho'_1(0) = \frac{n}{nc - \lambda E(X)} = \frac{E(W)}{cE(W) - E(X)},$$

που είναι πάντα θετικό λόγω της θετικής συνθήκης για το c (τον ρυθμό καταβολής ασφαλίσεων), όπως αναφέραμε στην σχέση (7).

Επομένως, έχουμε τελικά

$$\psi(0) = 1 - \frac{2^{2n-1}\lambda^{3n-2}[nc - \lambda E(X)]}{c^{3n-1}\rho^*(0)} < 1.$$

3.5 Προεξοφλητικές κατανομές των $U(T^-)$ και $|U(T)|$

Σε αυτή την ενότητα θα θυμηθούμε τις προεξοφλημένες από κοινού και περιθωριακές κατανομές του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία καθώς και του ελλείμματος την στιγμή χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας την προεξοφλητική συνάρτηση ποινής και την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Ορίζουμε ως από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_\delta(x, y | u)$ των $U(T^-)$ (πλέονασμα πριν την χρεοκοπία) και $|U(T)|$ (έλλειμμα την στιγμή χρεοκοπίας) για $u = 0$. Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να προκύψει από την συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$, θεωρώντας $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x, x_2 \leq y)$ για συγκεκριμένα x και y .

Ορίζουμε τις συναρτήσεις κατανομής

$$\Gamma_{1,j}(y) = \frac{1}{E_{1,j}} \int_0^y T_{\rho_j} f_X(t) dt, \quad (46)$$

$$\Gamma_{2,j}(y) = \frac{1}{E_{2,j}} \int_0^y T_{\rho_j} h(t) dt, \quad (47)$$

για $i = 1, 2$ και $j = 1, 2, \dots, 3n - 1$, με

όπου

$$E_{1,j} = \int_0^\infty T_{\rho_j} f_X(t) dt, \quad (48)$$

$$E_{2,j} = \int_0^\infty T_{\rho_j} h(t) dt, \quad (49)$$

Δεδομένου ότι η $\bar{F}(x)$ είναι μια συνάρτηση επιβίωσης θα πάρουμε την μορφή

$$\bar{\Gamma}_{1,j}(y) = \frac{\int_y^\infty e^{-\rho_j(x-y)} \bar{F}_X(x) dx}{E_{1,j}}, j = 1, 2, \dots, 3n - 1.$$

Έχουμε, $\bar{H}(y) = \int_y^\infty h(t) dt$. Τότε

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{2,j}(y) &= \frac{\bar{H}(y) - e^{\rho_j y} \int_y^{\infty} e^{-\rho_j x} h(x) dx}{\rho_j E_{2,j}} \\ &= \frac{e^{\rho_j y} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\rho_j x} \bar{H}(x) + \rho_j \int_y^{\infty} e^{-\rho_j(x-y)} \bar{H}(x) dx}{\rho_j E_{2,j}} \\ &= \frac{\int_y^{\infty} e^{-\rho_j(x-y)} \bar{H}(x) dx}{E_{2,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, 3n-1,\end{aligned}$$

αφού $\bar{H}(x) = -F_X(x)\bar{F}_X(x)$ και συνδυασμό με το $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\rho_j x} \bar{H}(x) = 0$ για $j = 1, 2, \dots, 3n-1$.

Επιπλέον, από τις εξισώσεις (39),(46) και (47) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_\delta(y) &= \int_y^{\infty} \theta_\delta(t) dt = (1 + \kappa_\delta) \int_y^{\infty} f_{2,\delta}(t | 0) dt \\ &= (1 + \kappa_\delta) \left[\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} \int_y^{\infty} T_{\rho_j} f_X(t) dt + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} \int_y^{\infty} T_{\rho_j} h(t) dt \right] \quad (50) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} \bar{\Gamma}_{i,j}(y)\end{aligned}$$

όπου $w_{i,j} = (1 + \kappa_\delta) b_{i,j} E_{i,j}$, για $i = 1, 2$ και $j = 1, \dots, 3n-1$.

Να σημειωθεί ότι

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} = (1 + \kappa_\delta) \int_0^{\infty} f_{2,\delta}(t | 0) dt = (1 + \kappa_\delta) m_\tau(0) = 1,$$

και τότε προκύπτει ότι η $\Theta_\delta(y)$ είναι σταθμισμένη συνάρτηση κατανομής.

Αφού έχουμε ορίσει την $w(x_1, x_2)$, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$w(x_1, x_2 - x_1) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_1 \leq x, x_2 \leq x_1 + y \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\gamma_1(x_1) = \int_{x_1}^{\infty} w(x_1, x_2 - x_1) f_X(x_2) dx_2 = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_1+y} f_X(x_2) dx_2, & x_1 \leq x \\ 0, & x_1 > x \end{cases}$$

Έχοντας $T_{\rho_j}\gamma_1(u) = \int_u^\infty e^{-\rho_j(x_1-u)}\gamma_1(x_1)dx_1$ που ακολουθεί ότι $T_{\rho_j}\gamma_1(u) = 0$

εάν $0 < x \leq u$ για $j = 1, \dots, 3n - 1$, και αν $0 \leq u < x$ τότε για $j = 1, \dots, 3n - 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_{\rho_j}\gamma_1(u) &= \int_u^x e^{-\rho_j(x_1-u)}\gamma_1(x_1)dx_1 = \int_u^x e^{-\rho_j(x_1-u)} \int_{x_1}^{x_1+y} f_X(x_2)dx_2 dx_1 \\ &= \int_u^x e^{-\rho_j(x_1-u)} [\bar{F}_X(x_1) - \bar{F}_X(x_1 + y)]dx_1 \\ &= \int_u^x e^{-\rho_j(x_1-u)} \bar{F}_X(x_1)dx_1 - \int_{u+y}^{x+y} e^{-\rho_j(z-u-y)} \bar{F}_X(z)dz \\ &= \int_u^\infty e^{-\rho_j(x_1-u)} \bar{F}_X(x_1)dx_1 - \int_x^\infty e^{-\rho_j(x_1-u)} \bar{F}_X(x_1)dx_1 \\ &\quad - \int_{u+y}^\infty e^{-\rho_j(z-u-y)} \bar{F}_X(z)dz + \int_{x+y}^\infty e^{-\rho_j(z-u-y)} \bar{F}_X(z)dz \\ &= E_{1,j}\bar{\Gamma}_{1,j}(u) - e^{-\rho_j(x-u)} \int_x^\infty e^{-\rho_j(x_1-x)} \bar{F}_X(x_1)dx_1 \\ &\quad - E_{1,j}\bar{\Gamma}_{1,j}(u + y) + e^{-\rho_j(x-u)} \int_{x+y}^\infty e^{-\rho_j(z-x-y)} \bar{F}_X(z)dz \\ &= E_{1,j}\bar{\Gamma}_{1,j}(u) - e^{-\rho_j(x-u)} E_{1,j}\bar{\Gamma}_{1,j}(x) - E_{1,j}\bar{\Gamma}_{1,j}(u + y) + e^{-\rho_j(x-u)} E_{1,j}\bar{\Gamma}_{1,j}(x + y) \\ &= E_{1,j}[\bar{\Gamma}_{1,j}(u) - \bar{\Gamma}_{1,j}(u + y)] - E_{1,j}e^{-\rho_j(x-u)}[\bar{\Gamma}_{1,j}(x) - \bar{\Gamma}_{1,j}(x + y)], \end{aligned}$$

ομοίως για $j = 1, \dots, 3n - 1$ παίρνουμε $T_{\rho_j}\gamma_2(u) = 0$ εάν $0 < x \leq u$ και

$$T_{\rho_j}\gamma_2(u) = E_{2,j}[\bar{\Gamma}_{2,j}(u) - \bar{\Gamma}_{2,j}(u + y)] - E_{2,j}e^{-\rho_j(x-u)}[\bar{\Gamma}_{2,j}(x) - \bar{\Gamma}_{2,j}(x + y)],$$

για $j = 1, \dots, 3n - 1$ εάν $0 \leq u < x$.

Επομένως

$$\begin{aligned} \Lambda_\delta(u) &= (1 + \kappa_\delta)G_\delta(u) = (1 + \kappa_\delta) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j}T_{\rho_j}\gamma_i(u) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{ij} \{ \bar{\Gamma}_{i,j}(u) - \bar{\Gamma}_{i,j}(u + y) - e^{-\rho_j(x-u)} [\bar{\Gamma}_{i,j}(x) - \bar{\Gamma}_{i,j}(x + y)] \}, \end{aligned}$$

και από την (50) παίρνουμε

$$\Lambda_\delta(u) = \bar{\Theta}_\delta(u) - \bar{\Theta}_\delta(u + y) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j}e^{-\rho_j(x-u)}[\bar{\Gamma}_{i,j}(x) - \bar{\Gamma}_{i,j}(x + y)], \quad (51)$$

και για $u > 0$,

$$d\Lambda_\delta(u) = d\Theta_\delta(u + y) - d\Theta_\delta(u) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} \rho_j e^{-\rho_j(x-u)} [\bar{\Gamma}_{i,j}(x) - \bar{\Gamma}_{i,j}(x + y)] du. \quad (52)$$

Οπότε η ελλειμματική ανανεωτική συνάρτηση

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{\kappa_\delta} \int_0^u m_T(u-x) d\Lambda_\delta(x) + \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(u) - \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(0) m_T(u),$$

γίνεται

$$F_\delta(x, y | u) = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa_\delta} \int_0^u m_\tau(u-t) d\Lambda_\delta(t) + \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(u) - \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(0) m_\tau(u), & 0 \leq u < x \\ -\frac{1}{\kappa_\delta} \int_0^x m_\tau(u-t) d\Lambda_\delta(t) - \frac{1}{\kappa_\delta} \Lambda_\delta(0) m_\tau(u), & 0 < x \leq u \end{cases}$$

αντικαθιστώντας $\Lambda_\delta(u)$ και $d\Lambda_\delta(u)$ με τις σχέσεις (51) και (52), αντίστοιχα, και χρησιμοποιώντας την παρακάτω πρόταση για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορούμε να παρουσιάσουμε τις από κοινού προεξοφλητικές συναρτήσεις κατανομής των μέτρων χρεοκοπίας.

Πρόταση 3

Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_T(u) = \int_0^u m_T(u-y) f_{2,\delta}(y | 0) dy + \int_u^\infty f_{2,\delta}(y | 0) dy,$$

η οποία έχει την παρακάτω γεωμετρική αναπαράσταση.

$$m_T(u) = \frac{\kappa_\delta}{1 + \kappa_\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \kappa_\delta} \right)^j \bar{\Theta}_\delta^{*j}(u), u \geq 0$$

όπου $\bar{\Theta}_\delta(u) = \int_u^\infty \theta_\delta(y) dy$ και $\bar{\Theta}_\delta^{*j}(u)$ είναι η j -οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης $\bar{\Theta}_\delta(u)$.

Πρόταση 4

Έστω $\Psi_j(u) = m_T(u) + \rho_j \int_0^u e^{\rho_j t} m_T(u-t) dt, j = 1, 2, \dots, 3n-1$. Τότε οι από κοινού προεξοφλητικές συναρτήσεις κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δίνονται από

$$f_\delta(x, y | u) = \begin{cases} \frac{1 + \kappa_\delta}{k_\delta} [m_T(u) - m_T(u+y)] - \frac{1}{k_\delta} \Theta_\delta(y) m_T(u) + \frac{1}{k_\delta} \int_0^y m_T(u+y-t) d\Theta_\delta(t) \\ + \frac{1}{k_\delta} d \sum_{i \in F_\delta=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} e^{-\rho_j x} [\bar{\Gamma}_{i,j}(x) - \bar{\Gamma}_{i,j}(x+y)] \\ \times [\Psi_j(u) - e^{-\rho_j u}], 0 \leq u < x \\ \frac{1}{k_\delta} \int_0^x m_T(u-t) [d\Theta_\delta(t) - d\Theta_\delta(y+t)] - \frac{1}{k_\delta} \Theta_\delta(y) m_T(u) \\ + \frac{1}{k_\delta} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} e^{-\rho_j x} [\bar{\Gamma}_{i,j}(x) - \bar{\Gamma}_{i,j}(x+y)] \\ \times \{\Psi_j(u) + e^{\rho_j x} [m_T(u-x) - \Psi_j(u-x)]\}, 0 < x \leq u \end{cases}$$

με

$$F_\delta(x, y | 0) = \frac{1}{1 + \kappa_\delta} \left\{ \Theta_\delta(y) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{3n-1} w_{i,j} e^{-\rho_j x} [\bar{\Gamma}_{i,j}(x) - \bar{\Gamma}_{i,j}(x+y)] \right\}.$$

Οι περιθώριες προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομής $F_{1,\delta}(x | u)$ της $U(T^-)$ και $F_{2,\delta}(y | u)$ της $|U(T)|$, δεδομένου ότι $U(0) = u$ μπορούν να προκύψουν αφήνοντας τα $y \rightarrow \infty$ και $x \rightarrow \infty$, αντίστοιχα.

Επιπλέον οι προεξοφλημένες από κοινού σ.π.π. $f_\delta(x, y | u)$ της $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δεδομένου ότι $U(0) = u$ μπορούν να προκύψουν από

$$f_{\delta}(x, y | u) = \frac{\partial^2 F_{\delta}(x, y | u)}{\partial x \partial y}.$$

Πρόταση 5

Οι προεξοφλημένες από κοινού σ.π.π $f_{\delta}(x, y | u)$ της $U(T^-)$ και $|U(T)|$ μπορούν να εκφραστούν ως

$$f_{\delta}(x, y | u) = \begin{cases} \frac{1 + \kappa_{\delta}}{\kappa_{\delta}} \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} f_X(x+y) + b_{2,j} h(x+y)] e^{-\rho_j x} [e^{\rho_j u} - \Psi_j(u)], & 0 \leq u < x \\ \frac{1 + \kappa_{\delta}}{\kappa_{\delta}} \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} f_X(x+y) + b_{2,j} h(x+y)] [\Psi_j(u-x) - e^{-\rho_j x} \Psi_j(u)], & 0 < x \leq u, \end{cases}$$

με

$$f_{\delta}(x, y | 0) = \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} f(x+y) + b_{2,j} h(x+y)] e^{-\rho_j x}.$$

Η περιθώρια προεξοφλημένη σ.π.π $f_{1,\delta}(x | u)$ της $U(T^-)$ για αρχικό αποθεματικό u μπορεί να προκύψει από $f_{1,\delta}(x | u) = \int_0^{\infty} f_{\delta}(x, y | u) dy$ και δίνεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6

Η προεξοφλημένη σ.π.π $f_{\delta}(x | u)$ της $U(T^-)$ γράφεται ως

$$f_{1,\delta}(x | u) = \begin{cases} \frac{1 + \kappa_{\delta}}{\kappa_{\delta}} \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} - b_{2,j} F_X(x)] \bar{F}_X(x) e^{-\rho_j x} [e^{\rho_j u} - \Psi_j(u)], & 0 \leq u < x \\ \frac{1 + \kappa_{\delta}}{\kappa_{\delta}} \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} - b_{2,j} F_X(x)] \bar{F}_X(x) [\Psi_j(u-x) - e^{-\rho_j x} \Psi_j(u)], & 0 < x \leq u \end{cases}$$

με

$$f_{1,\delta}(x | 0) = \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} - b_{2,j} F_X(x)] \bar{F}_X(x) e^{-\rho_j x}.$$

Ομοίως η περιθώρια προεξοφλημένη σ.π.π. $f_{2,\delta}(y | u)$ της $|U(T)|$ δίνεται από $f_{2,\delta}(y | u) = \int_0^\infty f_\delta(x, y | u) dx$. Όταν $\delta \rightarrow 0$ οι παραπάνω προτάσεις δίνουν τις από κοινού και περιθώριες συναρτήσεις κατανομών και σ.π.π των $U(T^-)$ και $|U(T)|$.

3.6 Αποτελέσματα για απαιτήσεις εκθετικής κατανομής

Σε αυτή την ενότητα, υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X , που αντιπροσωπεύει το ποσό της ατομικής απαίτησης, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha > 0$ δηλαδή $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x > 0$ με μετασχηματισμό Laplace $f_X^*(s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}$.

Είναι σαφές ότι οι προεξοφλημένες κοινές και περιθωριακές κατανομές των (T^-) και $|U(T)|$ μπορούν να αξιολογηθούν ρητά, όποτε είναι γνωστή η συνάρτηση $m_T(u)$. Επομένως, αρχικά θα βρούμε μια ρητή έκφραση για το $m_T(u)$ για εκθετικά κατανομημένες απαιτήσεις. Λαμβάνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο πλευρές της πρώτης εξίσωσης **στην Πρόταση 3**, έχουμε:

$$m_T^*(s) = \frac{m_T(0) - f_{2,\delta}^*(s)}{s[1 - f_{2,\delta}^*(s)]} = \frac{1 - f_{2,\delta}^*(s) - [1 - m_T(0)]}{s[1 - f_{2,\delta}^*(s)]} \quad (53)$$

Επιπλέον ξέρουμε ότι

$$h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) = (-1)^{3n-1} \pi_{3n-1}(s) [1 - T_s T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(0)]$$

και

$$\begin{aligned} f_{2,\delta}^*(s) &= 1 - \frac{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)} \\ &= T_s T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,\delta}(0). \end{aligned}$$

Παίρνουμε ότι

$$h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) = [1 - f_{2,\delta}^*(s)] \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s) \quad (54)$$

και επομένως η εξίσωση (53) γίνεται:

$$m_T^*(s) = \frac{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) - [1 - m_T(0)] \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}{s[h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)]}. \quad (55)$$

Για $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ από τις εξισώσεις (25) και (26) προκύπτει εύκολα ότι:

$$h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s) = \frac{Q_{3n+1,\delta}(s)}{c^{3n-1}(\alpha + s)(2\alpha + s)}, \quad (56)$$

όπου

$$\begin{aligned} Q_{3n+1,\delta}(s) &= (\alpha + s)(2\alpha + s)(\delta + \lambda - cs)^n (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} - \alpha \lambda^n (2\alpha + s)(\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \\ &\quad - \theta \alpha \lambda^n s \left[2(\delta + \lambda - cs)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \lambda^i (\delta + 2\lambda - cs)^{n-i-1} - (\delta + 2\lambda - cs)^{2n-1} \right]. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το $Q_{3n+1,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $3n + 1$, με κύριο συντελεστή $(-c)^{3n-1}$. Επομένως, η εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s) = 0$ έχει $3n+1$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Δεδομένου ότι η εξίσωση $h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)$ είναι η γενικευμένη

εξίσωση του Lundberg, από την Πρόταση 1 και την σχέση (56), προκύπτει ότι η εξίσωση $Q_{3n+1,\delta}(s) = 0$ έχει $3n - 1$ ρίζες $\rho_1, \dots, \rho_{3n-1}$, με θετικό πραγματικό μέρος και δύο ρίζες, $-R_i = -R_i(\delta)$, με $\text{Re}(R_i) > 0, i = 1, 2$.

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε το $Q_{3n+1,\delta}(s)$ ως

$$Q_{3n+1,\delta}(s) = (-c)^{3n-1}(s + R_1)(s + R_2) \prod_{i=1}^{3n-1} (s - \rho_i)$$

$$= c^{3n-1}(s + R_1)(s + R_2) \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s). \quad (57)$$

Επομένως, από τις εξισώσεις (57) και (56), η εξίσωση (55) γίνεται:

$$m_T^*(s) = \frac{\prod_{j=1}^2 (s + R_j) - [1 - m_T(0)](\alpha + s)(2\alpha + s)}{s \prod_{j=1}^2 (s + R_j)} \quad (58)$$

δεδομένου ότι $m_T^*(s) < \infty$, ο αριθμητής στην παραπάνω εξίσωση (58) πρέπει να είναι μηδενικός για $s = 0$, δηλαδή:

$$1 - m_T(0) = \frac{R_1 R_2}{2\alpha^2}$$

και έτσι η (58) γίνεται:

$$m_T^*(s) = \frac{\left(1 - \frac{R_1 R_2}{2\alpha^2}\right)s + R_1 + R_2 - \frac{3R_1 R_2}{2\alpha}}{(s + R_1)(s + R_2)}.$$

Υποθέτοντας ότι R_1, R_2 είναι διακριτές, και προκύπτει ότι

$$m_T^*(s) = \sum_{j=1}^2 \frac{\zeta_{j,\delta}}{s+R_j},$$

όπου

$$\zeta_{1,\delta} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(1 - \frac{3R_1}{2\alpha} + \frac{R_1^2}{2\alpha^2} \right)$$

$$\zeta_{2,\delta} = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \left(1 - \frac{3R_2}{2\alpha} + \frac{R_2^2}{2\alpha^2} \right).$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace, έχουμε:

$$m_T(u) = \zeta_{1,\delta} e^{-R_1 u} + \zeta_{2,\delta} e^{-R_2 u}, \quad u \geq 0, \quad (59)$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ προκύπτει εύκολα επιτρέποντας $\delta \rightarrow 0$.

Για να βρούμε τις προεξοφλημένες κοινές και οριακές κατανομές των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ από τις Προτάσεις της προηγούμενης ενότητας, πρέπει να υπολογίσουμε $\Psi_j(u)$, όπως ορίζεται στην Πρόταση 4. Από την εξίσωση (59), αυτές οι συναρτήσεις μπορούν να γραφούν για $j = 1, 2, \dots, 3n - 1$, ως

$$\Psi_j(u) = \frac{\zeta_{1,\delta} R_1}{R_1 + \rho_j} e^{-R_1 u} + \frac{\zeta_{2,\delta} R_2}{R_2 + \rho_j} e^{-R_2 u} + \left(\frac{\zeta_{1,\delta}}{R_1 + \rho_j} + \frac{\zeta_{2,\delta}}{R_2 + \rho_j} \right) \rho_j e^{\rho_j u}.$$

Για παράδειγμα, σύμφωνα με την Πρόταση 5, η προεξοφλημένη από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ δίνεται από:

$$f_{\delta}(x, y | u) = \begin{cases} \frac{2\alpha^3}{R_1 R_2} e^{-\alpha(x+y)} \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} - b_{2,j}(1 - 2e^{-\alpha(x+y)})] \\ \times \left[\frac{[(\alpha + \rho_j)(2\alpha + \rho_j)R_1 R_2]}{2\alpha_2} e^{-\rho_j(x-u)} - \sum_{i=1}^2 \frac{\zeta_{i,j}}{R_i R_i + \rho_j} e^{(-R_i u + \rho_j x)} \right], 0 \leq u < x \\ \frac{2\alpha^3}{R_1 R_2} e^{-\alpha(x+y)} \sum_{j=1}^{3n-1} [b_{1,j} - b_{2,j}(1 - 2e^{-\alpha(x+y)})] \\ \times \sum_{i=1}^2 \frac{\zeta_{i,i} R_i}{R_i + \rho_j} e^{-R_i u} [e^{R_i x} - e^{-\rho_j x}], 0 < x \leq u \end{cases}$$

Ομοίως μπορούμε να βρούμε και όλες τις αναφερόμενες ποσότητες-μέτρα χρεοκοπίας.

3.7 Αριθμητικό παράδειγμα

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου εξάρτησης θ στην πιθανότητα χρεοκοπίας και το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με εξάρτηση μέσω της σύζευξης FGM υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $W \sim \text{Erlang}(2,2)$ οπότε $f_w(t) = 4te^{-2t}$ και επομένως ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων στο διάστημα $[0,t]$ είναι

$E[N(t)] = t - 1/4(1 - e^{-4t})$. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλιστρών είναι $c=1.5$ και για $\delta=0$ από την εξίσωση $m_T(u) = \zeta_{1,\delta} e^{-R_1 u} + \zeta_{2,\delta} e^{-R_2 u}$ $u \geq 0$ παίρνουμε μία αναλυτική έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ συναρτήσει του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας το Mathematica, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου θ , υπολογίστηκαν οι πιθανότητες χρεοκοπίας ως εξής:

- για $\theta = -1$

$$\psi(u) = 0.6416701672e^{-0.348773225u} - 0.0169012248e^{-2.1517194000u}$$
- για $\theta = -0.5$

$$\psi(u) = 0.6111640019e^{-0.3833132642u} - 0.0096651749e^{-2.079245412u}$$
- για $\theta = 0.5$

$$\psi(u) = 0.5314436215e^{-0.4762087115u} + 0.01332254042e^{-1.911908905u}$$

- για $\theta = 1$

$$\psi(u) = 0.4774717870e^{-0.5409429369u} + 0.03255482730e^{-1.81155294u}$$

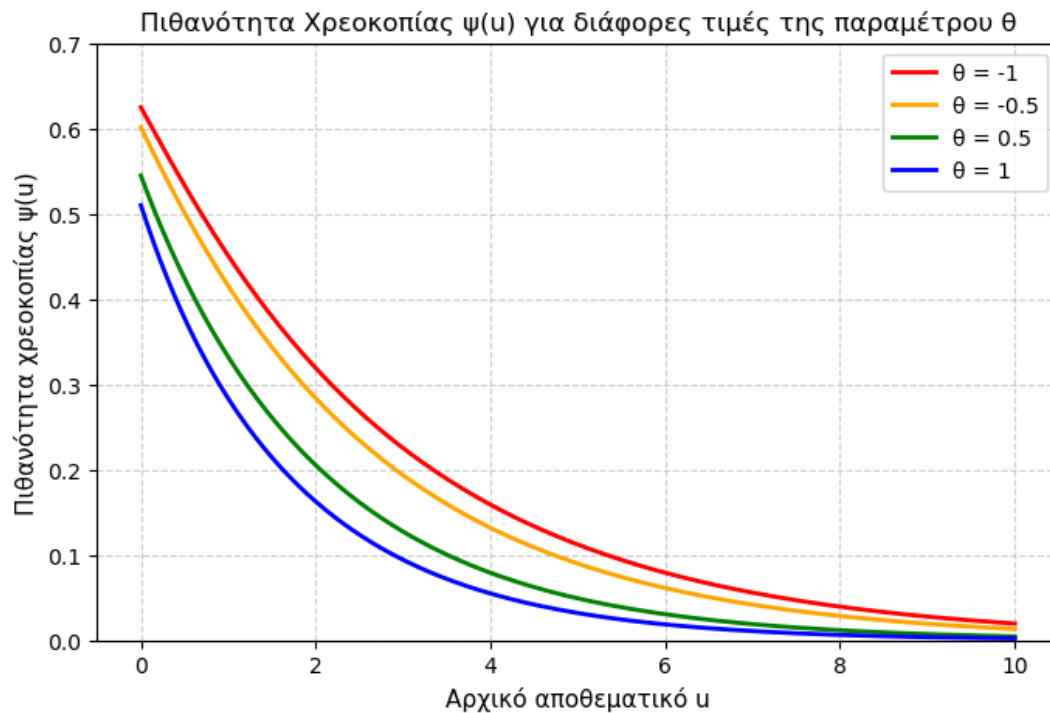
ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ 1 σε PYTHON

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
u = np.linspace(0, 10, 400)

# Ορισμός των ψ(u) για κάθε θ
def psi_theta(u, theta):
    if theta == -1:
        return 0.6416701672 * np.exp(-0.3487732254 * u) - 0.0169012248 * np.exp(-2.1517194 * u)
    elif theta == -0.5:
        return 0.6111640019 * np.exp(-0.3833132642 * u) - 0.0096651749 * np.exp(-2.0792454120 * u)
    elif theta == 0.5:
        return 0.5314436215 * np.exp(-0.47620871 * u) + 0.01332254042 * np.exp(-1.911908905 * u)
    elif theta == 1:
        return 0.4774717870 * np.exp(-0.540942936 * u) + 0.03255482730 * np.exp(-1.81155294 * u)
    else:
        raise ValueError("Δώσε θ από {-1, -0.5, 0.5, 1}")
    # Υπολογισμός ψ(u) για όλες τις τιμές θ
theta_values = [-1, -0.5, 0.5, 1]
colors = ['red', 'orange', 'green', 'blue']

plt.figure(figsize=(8,5))

for theta, color in zip(theta_values, colors):
    psi_u = psi_theta(u, theta)
    plt.plot(u, psi_u, label=f"θ = {theta}", color=color, linewidth=2)
    # Ρυθμίσεις γραφήματος
plt.title("Πιθανότητα Χρεοκοπίας ψ(u) για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ", fontsize=12)
plt.xlabel("Αρχικό αποθεματικό u", fontsize=11)
plt.ylabel("Πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u)", fontsize=11)
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)
plt.ylim(0, 0.7)
plt.show()
```



Από το γράφημα παρατηρούμε υπάρχει εξάρτηση της παραμέτρου θ και της πιθανότητας χρεοκοπίας. Όσο μεγαλώνει η παράμετρος θ τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Στη συνέχεια για $\delta=0.05$ παίρνουμε μια αναλυτική έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_T(u)$ συναρτήσεις του αρχικού αποθεματικού $u \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας το mathematica για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ υπολογίσθηκαν οι μετασχηματισμοί Laplace ως εξής

- για $\theta = -1$

$$m_T(u) = 0.588107070542046e^{-0.401560720u} - 0.01986616515195528e^{-2.15038253u}$$

- για $\theta = -0.5$

$$m_T(u) = 0.558265539590616e^{-0.435856321u} - 0.0112379309905072e^{-2.078539964u}$$

- για $\theta = 0$

$$m_T(u) = 0.5230305556e^{-0.476969444u}$$

- για $\theta = 0.5$

$$m_T(u) = 0.480589531459186e^{-0.527263661u} + 0.0151619535823271e^{-1.912699668u}$$

- για $\theta = 1$

$$m_T(u) = 0.427916113486677e^{-0.590552768u} + 0.0366819441278372e^{-1.813223037u}$$

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ 2 σε PYTHON

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Πλέγμα τιμών για u
u = np.linspace(0, 10, 400)

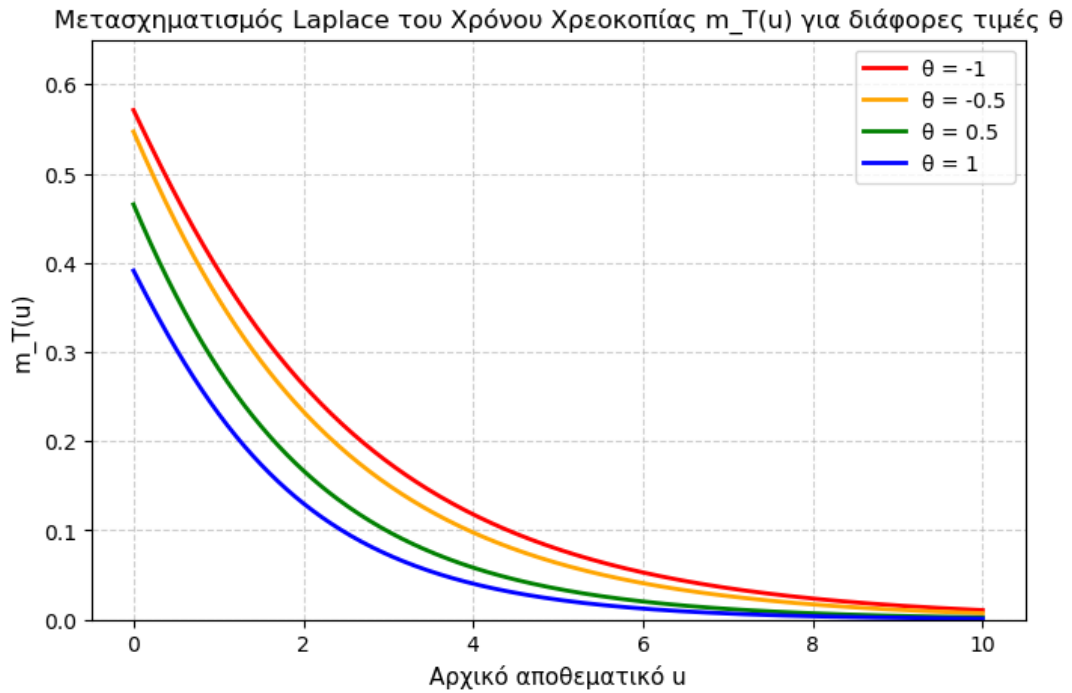
# Ορισμός m_T(u) για κάθε θ
def mT(u, theta):
    if theta == -1:
        return 0.588107070542046 * np.exp(-0.4015607208 * u) - 0.0169012248 * np.exp(-2.150382538 * u)
    elif theta == -0.5:
        return 0.558265539590616 * np.exp(-0.4358563215 * u) - 0.0112379309905072 * np.exp(-2.078539964 * u)
    elif theta == 0.5:
        return 0.480589531459186 * np.exp(-0.5272636613 * u) - 0.0151619535823271 * np.exp(-1.912699668 * u)
    elif theta == 1:
        return 0.427916113486677 * np.exp(-0.5905527687 * u) - 0.0366819441278372 * np.exp(-1.813223037 * u)
    else:
        raise ValueError("Δώσε θ από {-1, -0.5, 0.5, 1}")

# Τιμές θ και χρώματα
theta_values = [-1, -0.5, 0.5, 1]
colors = ['red', 'orange', 'green', 'blue']

# Δημιουργία γραφήματος
plt.figure(figsize=(8,5))

for theta, color in zip(theta_values, colors):
    mT_u = mT(u, theta)
    plt.plot(u, mT_u, label=f"θ = {theta}", color=color, linewidth=2)

# Ρυθμίσεις γραφήματος
plt.title("Μετασχηματισμός Laplace του Χρόνου Χρεοκοπίας m_T(u) για διάφορες τιμές θ", fontsize=12)
plt.xlabel("Αρχικό αποθεματικό u", fontsize=11)
plt.ylabel("m_T(u)", fontsize=11)
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)
plt.ylim(0, 0.65)
plt.show()
```



Από το γράφημα παρατηρούμε υπάρχει εξάρτηση της παραμέτρου θ και του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Όσο μεγαλώνει η παράμετρος θ τόσο μικραίνει η τιμή του μετασχηματισμού Laplace της χρεοκοπίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4. Ημι-Μαρκοβιανό Μοντέλο Κινδύνου με Εξάρτηση Μεταξύ Μεγεθών και Ενδιάμεσων Χρόνων Απαιτήσεων.

Το **Ημι-Μαρκοβιανό Μοντέλο Κινδύνου** που εξετάζει ο **Onno Boxma** (κυρίως σε συνεργασία με τον *Albrecher*) αποτελεί μια εξελιγμένη μορφή της θεωρίας χρεοκοπίας. Η κεντρική ιδέα είναι ότι η διαδικασία δεν είναι απλώς Μαρκοβιανή (όπου το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν), αλλά η κατανομή του χρόνου παραμονής σε μια κατάσταση εξαρτάται από την ίδια την κατάσταση ή από το μέγεθος της προηγούμενης ζημιάς.

4.1 Εισαγωγή

Το **Ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο** εισάγει την έννοια των «καταστάσεων» (states) και ενός **κατώφλιου (threshold) T**. Η καινοτομία έγκειται στο ότι το σύστημα μεταπίπτει σε μια κατάσταση υψηλότερου κινδύνου (με αυξημένο ρυθμό αφίξεων λ_2) όταν μια ζημιά υπερβεί το προκαθορισμένο κατώφλι.

Η μαθηματική επίλυση επιτυγχάνεται μέσω της παραγωγής **ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων**, οι οποίες επιλύονται με τη χρήση **Μετασχηματισμών Laplace**, επιτρέποντας την εξαγωγή ακριβών αναλυτικών τύπων για την πιθανότητα επιβίωσης.

Το κλασικό μοντέλο Cramer–Lundberg, το οποίο περιγράφει τη διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, βασίζεται στην υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των μεγεθών των ζημιών καθώς και μεταξύ των μεγεθών αυτών και των χρονικών αποστάσεων μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων. Ωστόσο, στην πράξη αυτή η υπόθεση είναι συχνά υπερβολικά περιοριστική και υπάρχει ανάγκη για πιο γενικά μοντέλα, στα οποία οι υποθέσεις ανεξαρτησίας μπορούν να χαλαρώσουν.

Πρόσφατα, έχουν προκύψει διάφορα αποτελέσματα σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση εξαρτημένων απαιτήσεων. Στην περίπτωση ζημιών με ελαφρά ουρά, οι Nyghinen (1998, 1999) ανέπτυξαν οριακά αποτελέσματα τύπου Lundberg χρησιμοποιώντας τεχνικές μεγάλων αποκλίσεων, ενώ οι Müller και Pflug (2001) εισήγαγαν διατάξεις εξάρτησης ώστε να συσχετίσουν τα οριακά ποσοστά χρεοκοπίας. Η συμπεριφορά του εκθέτη του Lundberg ως συνάρτηση ενός μέτρου εξάρτησης έχει μελετηθεί από τους Albrecher και Kantor (2002).

Για κατανομές με βαριές ουρές, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας με εξαρτημένες απαιτήσεις μελετήθηκε, για παράδειγμα, από τους Asmussen et al. (1999) και Mikosch και Samorodnitsky (2000 a,b). Ωστόσο, όλα αυτά τα αποτελέσματα είναι ασυμπτωτικά και αποτελεί πρόκληση η εξαγωγή αποτελεσμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε ένα εξαρτημένο πλαίσιο, ειδικά για μικρότερες τιμές του αρχικού κεφαλαίου.

Εμπνευσμένοι από ένα σχετικό μοντέλο στη θεωρία ουρών (βλ. Boxma και Perry 2001), σε αυτήν την εργασία προτείνεται μια γενίκευση του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας, όπου η κατανομή του χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων εξαρτάται από το μέγεθος της προηγούμενης απαίτησης. Για το συγκεκριμένο εξαρτημένο μοντέλο, προκύπτουν ακριβείς λύσεις για την πιθανότητα επιβίωσης μέσω των μετασχηματισμών Laplace–Stieltjes (LSTs). Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται να αποτελεί τον πρώτο ακριβή τύπο για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

4.2 Ορισμός του Model 1

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο μοντέλο κινδύνου για τη διαδικασία πλεονάσματος $R(t)$ ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου:

$$R(t) = x + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} B_j ,$$

όπου x το αρχικό κεφάλαιο, c η σταθερή πυκνότητα ασφαλίστρου, B_j το μέγεθος της j -οστής ζημιάς και $N(t)$ ο αριθμός των ζημιών μέχρι τον χρόνο t .

Έστω ότι B_i είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ταυτόσημα κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών (i.i.d.) με συνάρτηση κατανομής $B(\cdot)$, μέση τιμή β και μετασχηματισμό Laplace–Stieltjes (LST) $b(\cdot)$. Υποθέτουμε ότι η διαδικασία εμφάνισης ζημιών ακολουθεί τον ακόλουθο Μαρκοβιανό τύπο: Αν η ζημία B_i είναι μεγαλύτερη από το κατώφλι (threshold) T_i , τότε ο χρόνος μέχρι την επόμενη ζημία ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό λ_1 , διαφορετικά ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό λ_2 .

Τα μεγέθη ορίων T_i θεωρούνται επίσης i.i.d. τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $T(\cdot)$. Στη συνέχεια, με $B(T)$ θα δηλώνουμε μια γενική ζημία (ή κατώφλι), με κατανομή $B(\cdot)$ ($T(\cdot)$, αντίστοιχα).

4.2.1 Συνθήκη Καθαρού Κέρδους (Net Profit Condition) και Διαφορικές Εξισώσεις

Ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα επιβίωσης $\phi(x)$, δηλαδή $\phi(x)$, i.e. $\mathbb{P}(R(t) \geq 0, \forall t > 0 \mid R(0) = x)$. Ας υποθέσουμε ότι

$$\beta < c \left[\frac{\mathbb{P}(B > T)}{\lambda_1} + \frac{\mathbb{P}(B \leq T)}{\lambda_2} \right], \quad (1)$$

η οποία αποτελεί την **προϋπόθεση καθαρού κέρδους**, και ισχύει $\mathbb{P}(B > 0) = \mathbb{P}(T > 0) = 1$.

Ας συμβολίσουμε με $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2$) την πιθανότητα επιβίωσης με αρχικό κεφάλαιο x , δεδομένου ότι η πρώτη ζημία εμφανίζεται σύμφωνα με εκθετική κατανομή με ρυθμό λ_i .

Τότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = & (1 - \lambda_1 dt) \phi_1(x + c dt) + \lambda_1 dt \int_0^{x+c dt} [\mathbb{P}(T \leq y) \phi_1(x + c dt - y) \\ & + \mathbb{P}(T > y) \phi_2(x + c dt - y)] dB(y). \end{aligned}$$

Το ανάπτυγμα Taylor και η αναδιάταξη των όρων οδηγεί στη ολοκληρωτική –διαφορική εξίσωση:

$$c \frac{d\phi_1}{dx}(x) - \lambda_1 \phi_1(x) + \lambda_1 \int_0^x \mathbb{P}(T \leq y) \phi_1(x - y) dB(y) + \lambda_1 \int_0^x \mathbb{P}(T > y) \phi_2(x - y) dB(y) = 0. \quad (2)$$

Ομοίως προκύπτει:

$$c \frac{d\phi_2}{dx}(x) - \lambda_2 \phi_2(x) + \lambda_2 \int_0^x \mathbb{P}(T \leq y) \phi_1(x-y) dB(y) + \lambda_2 \int_0^x \mathbb{P}(T > y) \phi_2(x-y) dB(y) = 0. \quad (3)$$

Ορίζουμε, για $\text{Res} \geq 0$:

$$\chi_1(s) := \mathbb{E}[e^{-sB} \mathbf{1}_{(B>T)}] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} T(x) dB(x),$$

$$\chi_2(s) := \mathbb{E}[e^{-sB} \mathbf{1}_{(B \leq T)}] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} (1 - T(x)) dB(x),$$

και συμβολίζουμε τον **μετασχηματισμό Laplace** της $\phi_i(x)$ με

$$\tilde{\phi}_i(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} \phi_i(x) dx.$$

Σημειώνεται ότι $\chi_1(s) + \chi_2(s) = \tilde{b}(s)$.

Από τις εξισώσεις (2) και (3) προκύπτει ότι για $\text{Res} \geq 0$ έχουμε

$$\tilde{\phi}_1(s)[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] + \lambda_1 \tilde{\phi}_2(s) \chi_2(s) = c \phi_1(0+),$$

$$\tilde{\phi}_2(s)[cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] + \lambda_2 \tilde{\phi}_1(s) \chi_1(s) = c \phi_2(0+),$$

το οποίο μπορεί στη συνέχεια να απλοποιηθεί σε

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c \phi_1(0+) [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - c \lambda_1 \chi_2(s) \phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s)}, \quad (4)$$

και

$$\tilde{\phi}_2(s) = \frac{c \phi_2(0+) [cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] - c \lambda_2 \chi_1(s) \phi_1(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(s)] [cs - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(s)] - \lambda_1 \lambda_2 \chi_1(s) \chi_2(s)}. \quad (5)$$

Σημειώνεται ότι οι παρονομαστές στη δεξιά πλευρά των εξισώσεων (4) και (5) ταυτίζονται.

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ στην (4), προκύπτει

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda + \lambda\chi_2(s)] - c\lambda\chi_2(s)\phi_1(0+)}{(cs - \lambda + \lambda\chi_1(s))(cs - \lambda + \lambda\chi_2(s)) - \lambda^2\chi_1(s)\chi_2(s)} = \frac{c\phi_1(0+)}{cs - \lambda + \lambda\tilde{b}(s)},$$

και έτσι διατηρούμε τον κλασικό τύπο **Pollaczek–Khinchine** για το ανεξάρτητο πλαίσιο.

Για την πλήρη λύση, τώρα χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις ποσότητες $\phi_i(0+)$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_i(x) = 1$ έχουμε

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{\phi}_i(s) = 1 \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας την (6) χωρίς περιορισμό γενικότητας στην (4) (η εξίσωση (5) θα οδηγούσε στο ίδιο αποτέλεσμα), προκύπτει

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - c\lambda_1\chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s)} \right) \\ &= \frac{c\lambda_2\phi_1(0+)(-1 + \chi_2(0)) - c\lambda_1\chi_2(0)\phi_2(0+)}{\lim_{s \rightarrow 0} ((cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s))(cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(s)) - \lambda_1\lambda_2\chi_1(s)\chi_2(s))/s} \\ &= \frac{c\lambda_2\phi_1(0+)(-1 + \chi_2(0)) - c\lambda_1\chi_2(0)\phi_2(0+)}{c\lambda_1(\chi_1(0) - 1) + c\lambda_2(\chi_2(0) - 1) - \lambda_1\lambda_2(\chi_1'(0) + \chi_2'(0))} \cdot (7) \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $\chi_2(0) = \mathbb{P}(B \leq T)$, $\chi_1(0) = \mathbb{P}(B > T)$ και έτσι $\chi_1(0) + \chi_2(0) = 1$ και επίσης $\mathbb{E}(B1_{(B \leq T)}) = -\chi_2'(0)$, $\mathbb{E}(B1_{(B > T)}) = -\chi_1'(0)$ και $\beta = -\chi_1'(0) - \chi_2'(0)$. Με αυτόν τον τρόπο, η (7) μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά, δίνοντας

$$(1 - \phi_1(0+)) \frac{\mathbb{P}(B > T)}{\lambda_1} + (1 - \phi_2(0+)) \frac{\mathbb{P}(B \leq T)}{\lambda_2} = \frac{\beta}{c}. \quad (8)$$

Παρατήρηση: Για την ειδική περίπτωση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ προκύπτει από την (8)

$$\phi_1(0+) = \phi_2(0+) = \frac{c - \lambda\beta}{c}, \quad (9)$$

η οποία είναι ο γνωστός τύπος για την πιθανότητα επιβίωσης με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο στην κλασική ανεξάρτητη περίπτωση.

Τώρα χρειαζόμαστε μια δεύτερη εξίσωση για την $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rouché, μπορεί κανείς να δείξει τα εξής:

Λήμμα 1. Ο παρονομαστής της εξίσωσης (4) έχει ακριβώς μια ρίζα σ με $\text{Re } \sigma > 0$.

Απόδειξη. Ξαναγράφουμε τον παρονομαστή των εξισώσεων (4) και (5) ως

$cs(h_1(s) + h_2(s))$, στην οποία

$$h_1(s) := cs - \lambda_1 - \lambda_2, \quad h_2(s) := \lambda_1\chi_1(s) + \lambda_2\chi_2(s) + \frac{\lambda_1\lambda_2\beta}{c} \frac{1 - \tilde{b}(s)}{\beta s}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτός ο παρονομαστής έχει ακριβώς μία ρίζα για $\text{Re } s > 0$; σημειώνεται ότι η συμπεριφορά της $\phi_i(s)$ το $s = 0$ έχει ήδη αναλυθεί και αξιοποιηθεί στην εξίσωση (7).

Ας εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα του **Rouché** στο κλειστό περίγραμμα C , το οποίο αποτελείται από τον φανταστικό άξονα από $-ir$ έως $+ir$ και από ένα ημι-κύκλο στο δεξιό ημιεπίπεδο με ακτίνα r και κέντρο την αρχή O ; θα αφήσουμε $r \rightarrow \infty$.

Οι συναρτήσεις $h_1(s)$ και $h_2(s)$ είναι **αναλυτικές μέσα στο C** . Παρατηρούμε ότι το $(1 - \tilde{b}(s))/\beta_s$ είναι το είναι ο **μετασχηματισμός Laplace–Stieltjes (LST)** του $\int_0^x ((1 - B(y))/\beta)dy$ η οποία είναι η υπολειπόμενη (προωθημένη) κατανομή μεγεθών ζημιών. Επομένως, είναι αναλυτική και (όπως θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω) φραγμένη κατά απόλυτη τιμή από τη μονάδα στο δεξιό ημιεπίπεδο. Επιπλέον, $h_1(s)$ έχει ακριβώς ένα μηδενικό μέσα στο C για αρκετά μεγάλο r .

Για την εφαρμογή του θεωρήματος του Rouché, απομένει να δείξουμε ότι $|h_1(s)| > |h_2(s)|$ στο C . Αυτό είναι προφανώς αληθές στο ημικύκλιο. Στον φανταστικό άξονα, $|h_1(s)| \geq \lambda_1 + \lambda_2$, ενώ, υπό τη συνθήκη (1)

$$|h_2(s)| \leq \lambda_1 \chi_1(0) + \lambda_2 \chi_2(0) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \beta}{c} < \lambda_1 + \lambda_2. \quad (10)$$

Στην πραγματικότητα, είναι εύκολο να δει κανείς ότι το σ είναι πραγματικό, με

$$0 < \sigma < (\lambda_1 + \lambda_2)/c, \text{ αφού } h_1(0) + h_2(0) < 0 \text{ και } h_1((\lambda_1 + \lambda_2)/c) + h_2((\lambda_1 + \lambda_2)/c) > 0.$$

Αφού $\tilde{\phi}_i(s)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση για $\text{Res} \geq 0$, σ πρέπει επίσης να είναι μηδενικό (ρίζα) των αριθμητών των (4) και (5).

Και στις δύο περιπτώσεις αυτό οδηγεί στην ίδια σχέση μεταξύ των

$\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$, δηλαδή

$$\phi_2(0+) = \frac{c\sigma - \lambda_2 + \lambda_2 \chi_2(\sigma)}{\lambda_1 \chi_2(\sigma)} \phi_1(0+) = \frac{\lambda_2 \chi_1(\sigma)}{c\sigma - \lambda_1 + \lambda_1 \chi_1(\sigma)} \phi_1(0+). \quad (11)$$

Σε συνδυασμό με τις (4), (5) και (8), αυτό ολοκληρώνει τον προσδιορισμό των $\tilde{\phi}_i(s), i = 1, 2$.

Παρατήρηση. Σημειώστε ότι κάθε φορά που $\chi_i(s) (i = 1, 2)$ είναι ρητές συναρτήσεις (κάτι που, για παράδειγμα, ισχύει αν οι αντίστοιχες υπό συνθήκη κατανομές είναι τύπου φάσης), τότε οι μετασχηματισμοί Laplace (4) και (5) μπορούν να αντιστραφούν ρητά, ώστε να δώσουν ακριβείς τύπους για τις $\phi_i(x) (i = 1, 2)$ (βλ. π.χ. Spiegel, 1965).

Δεδομένου ότι η κλάση των κατανομών τύπου φάσης είναι **πυκνή** (με την έννοια της ασθενούς σύγκλισης) στην κλάση όλων των κατανομών στον θετικό ημι-άξονα, είναι δυνατόν να προσεγγίσει κανείς οποιαδήποτε δεδομένη κατανομή με αυθαίρετη ακρίβεια χρησιμοποιώντας μια κατανομή τύπου φάσης και να εφαρμόσει τις παραπάνω ακριβείς λύσεις (αλγόριθμοι για προσαρμογή σε κατανομές τύπου φάσης συζητούνται, για παράδειγμα, στο Asmussen (2000a)).

Παράδειγμα 1. Στην ειδική περίπτωση όπου $T \sim \text{Exp}(\mu)$, προκύπτουν:

$$\chi_2(s) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} e^{-\mu x} dB(x) = \tilde{b}(s + \mu), \quad \chi_1(s) = \tilde{b}(s) - \tilde{b}(s + \mu).$$

Εάν, επιπλέον, $B \sim \text{Exp}(\nu)$, με $\nu = 1/\beta$, τότε έχουμε:

$$\chi_2(s) = \frac{\nu}{\nu + s + \mu}, \quad \chi_1(s) = \frac{\nu}{\nu + s} - \frac{\nu}{\nu + s + \mu},$$

και συνεπώς το σ στην (11) είναι η μοναδική λύση s με $\text{Re } s > 0$ της εξίσωσης:

$$\left(cs + \frac{\lambda_1 \mu \nu}{(\nu + s)(\nu + \mu + s)} - \lambda_1 \right) \left(cs + \frac{\lambda_2 \nu}{\nu + \mu + s} - \lambda_2 \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu \nu^2}{(\nu + \mu + s)^2 (\nu + s)} = 0.$$

Δεδομένου ότι οι μετασχηματισμοί Laplace είναι σε αυτή την περίπτωση **ρητές συναρτήσεις**, μπορούν να αντιστραφούν ρητά για οποιεσδήποτε δοσμένες τιμές παραμέτρων (βλ. Ενότητα 4 για ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα).

Παράδειγμα 2. Για ένα ντετερμινιστικό κατώφλι (δηλαδή $T_i = T^*$ σχεδόν σίγουρα για όλα τα $i \geq 1$ και κάποια σταθερή τιμή $T^* > 0$) και εκθετικά μεγέθη ζημιών ($B_i \sim \text{Exp}(v)$) προκύπτουν:

$$\chi_1(s) = \frac{v}{v+s} e^{-(v+s)T^*} \text{ and } \chi_2(s) = \frac{v}{v+s} (1 - e^{-(v+s)T^*}). \quad (12)$$

4.2.2 Σύγκριση με μοντέλο ανεξαρτησίας

Η ύπαρξη αναλυτικών λύσεων για την **πιθανότητα επιβίωσης** επιτρέπει τη διερεύνηση του σφάλματος που προκύπτει όταν παραβλέπεται μια τέτοια δομή εξάρτησης. Πράγματι, εάν υποθεθεί ανεξαρτησία ενώ στην πραγματικότητα υπάρχει η εξάρτηση του **Μοντέλου 1**, η εκτίμηση της κατανομής του χρόνου μεταξύ γεγονότων W_i θα οδηγούσε στην μεικτή πυκνότητα

$$f_{W_i}(x) = \mathbb{P}(B_i > T_i) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \mathbb{P}(B_i \leq T_i) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}.$$

δηλαδή, θα υποθεθεί ότι έχουμε ένα μοντέλο ανανεώσεων (επίσης γνωστό ως μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen) με υπερεκθετική κατανομή χρόνων μεταξύ αφίξεων.

Για ένα τέτοιο μοντέλο, ο συντελεστής Lundberg R , εφόσον υπάρχει, μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί ως η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης $\tilde{b}(-R)\tilde{w}(cR) = 1$, όπου $\tilde{w}(\cdot)$ δηλώνει τον **μετασχηματισμό Laplace** της συνάρτησης $f_{W_i}(x)$ (βλ. π.χ. Asmussen, 2000b).

Ένα παράδειγμα που δείχνει τη διαφορά των αντίστοιχων πιθανοτήτων επιβίωσης δίνεται στην Ενότητα 4.

4.3 Συναφή μοντέλα

Στην επόμενη ενότητα, παραθέτουμε μια σειρά συναφών μοντέλων εξάρτησης για τα οποία μπορούν να εξαχθούν ακριβείς λύσεις για την πιθανότητα επιβίωσης με ανάλογο τρόπο.

4.3.1 Μοντέλο 2

Ας θεωρηθεί ότι για κάθε $t > 0$ η διαδικασία κινδύνου βρίσκεται σε μία από τις δύο καταστάσεις $i = 1, 2$, που αντιστοιχούν στους ρυθμούς λ_i της εκθετικής κατανομής για τον χρόνο μέχρι την επόμενη εμφάνιση ζημιάς.

Στη στιγμή εμφάνισης μιας ζημιάς, η κατάσταση του συστήματος μπορεί να αλλάξει ανάλογα με το αντίστοιχο μέγεθος της ζημιάς. Ειδικότερα, αν μια ζημιά B_j είναι μικρότερη από ένα κατώφλι T_j , τότε η κατάσταση της διαδικασίας κινδύνου αλλάζει, διαφορετικά παραμένει αμετάβλητη. Οι ποσότητες T_j θεωρούνται ξανά **ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανεμημένες (i.i.d.) τυχαίες μεταβλητές** με συνάρτηση κατανομής $T(\cdot)$.

Η **προϋπόθεση καθαρού κέρδους** σε αυτό το μοντέλο είναι:

$$2\beta < c \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (13)$$

Στη συνέχεια, η ανάλυση της $\phi_i(x)$ (που είναι η πιθανότητα επιβίωσης με αρχικό κεφάλαιο x , δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά στην κατάσταση i) είναι αναλόγως με την προηγούμενη ενότητα, και προκύπτουν:

$$\begin{aligned} c \frac{d\phi_1}{dx}(x) - \lambda_1 \phi_1(x) + \lambda_1 \int_0^x \mathbb{P}(T \leq y) \phi_1(x-y) dB(y) \\ + \lambda_1 \int_0^x \mathbb{P}(T > y) \phi_2(x-y) dB(y) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

και

$$c \frac{d\phi_2}{dx}(x) - \lambda_2 \phi_2(x) + \lambda_2 \int_0^x \mathbb{P}(T \leq y) \phi_2(x-y) dB(y) + \lambda_2 \int_0^x \mathbb{P}(T > y) \phi_1(x-y) dB(y) = 0. \quad (15)$$

από το οποίο προκύπτει ότι για $\text{Re } s \geq 0$

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_1(s)] - c\lambda_1\chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_1(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_2^2(s)}, \quad (16)$$

και

$$\tilde{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)] - c\lambda_2\chi_2(s)\phi_1(0+)}{[cs - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(s)][cs - \lambda_2 + \lambda_2\chi_1(s)] - \lambda_1\lambda_2\chi_2^2(s)}. \quad (17)$$

όπου $\tilde{\phi}_i(s)$ είναι ξανά ο μετασχηματισμός Laplace της $\phi_i(x)$. Σημειώστε ότι οι παρονομαστές στα δεξιά των (16) και (17) συμπίπτουν ξανά.

Ας προσδιορίσουμε τώρα $\phi_1(0+)$ and $\phi_2(0+)$. Όπως και στο Μοντέλο 1, μια εξίσωση για αυτές τις δύο άγνωστες προκύπτει από το όριο $\lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{\phi}_i(s) = 1$,

το οποίο δίνει:

$$\lambda_2(1 - \phi_1(0+)) + \lambda_1(1 - \phi_2(0+)) = 2 \frac{\lambda_1\lambda_2}{c} \beta. \quad (18)$$

Μια δεύτερη εξίσωση προκύπτει παρατηρώντας ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\tau \in (0, (\lambda_1 + \lambda_2)/c)$ που μηδενίζει τον παρονομαστή των (16) και (17). Πράγματι, γράφουμε τον παρονομαστή των (16) και (17) ως $cs(k_1(s) + k_2(s))$, όπου

$$k_1(s) := cs - \lambda_1 - \lambda_2, \quad k_2(s) := (\lambda_1 + \lambda_2)\chi_1(s) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{cs} [(1 - \chi_1(s))^2 - \chi_2(s)^2].$$

Τώρα παρατηρούμε ότι $k_1(0) + k_2(0) < 0$ εφόσον ισχύει η **προϋπόθεση καθαρού κέρδους** (13), ενώ $k_1((\lambda_1 + \lambda_2)/c) + k_2((\lambda_1 + \lambda_2)/c) > 0$.

Δεδομένου ότι $\tilde{\phi}_i(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση για $\text{Res} \geq 0$, το τ πρέπει επίσης να είναι μηδενικό σημείο των αριθμητών των (16) και (17). Και στις δύο περιπτώσεις, αυτό οδηγεί στην ίδια σχέση μεταξύ $\phi_1(0+)$ and $\phi_2(0+)$, συγκεκριμένα:

$$\phi_2(0+) = \frac{c\tau - \lambda_2 + \lambda_2\chi_1(\tau)}{\lambda_1\chi_2(\tau)} \phi_1(0+) = \frac{\lambda_2\chi_2(\tau)}{c\tau - \lambda_1 + \lambda_1\chi_1(\tau)} \phi_1(0+). \quad (19)$$

Δεν έχουμε αποδείξει ότι το τ είναι το **μοναδικό μηδενικό του παρονομαστή** των (16) για $\text{Res} > 0$ (η εφαρμογή του **θεωρήματος του Rouché** φαίνεται πολύ πιο περίπλοκη εδώ σε σύγκριση με το Μοντέλο 1). Ωστόσο, αυτό **δεν είναι απαραίτητο**: αν ισχύει η συνθήκη (13), τότε θα πρέπει να υπάρχουν **μοναδικές λύσεις** $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ των **ολόκληρων-διαφορικών εξισώσεων** (14) και (15). $\tilde{\phi}_1(s)$ και $\tilde{\phi}_2(s)$ όπως δίνονται στις (16) και (17) με $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$ όπως δίνονται στις (18) και (19), είναι οι **μετασχηματισμοί Laplace** των συναρτήσεων $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ που ικανοποιούν αυτές τις ολοκληρωτικές-διαφορικές εξισώσεις, οπότε δεν χρειάζεται να αναζητήσουμε περαιτέρω. Βλ. Cohen και Down (1996) για πιο γενικές ιδέες σχετικά με την αντιμετώπιση **συστημάτων ουρών** χωρίς να καταφεύγουμε στο θεώρημα του Rouché.

Σημείωση. Στην ειδική περίπτωση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, από την (18) προκύπτει ξανά η **πιθανότητα επιβίωσης** (9) με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο στην περίπτωση ανεξαρτησίας.

Εναλλακτικά, αν η κατάσταση της διαδικασίας κινδύνου αλλάζει κατά τη στιγμή εμφάνισης μιας ζημιάς, δεδομένου ότι B_j είναι μεγαλύτερο από ένα κατώφλι T_j , και παραμένει στην ίδια κατάσταση διαφορετικά, προκύπτουν αντί των (16) και (17) οι εξής σχέσεις:

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)]-c\lambda_1\chi_1(s)\phi_2(0+)}{[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_2(s)][cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)]-\lambda_1\lambda_2\chi_1^2(s)}, \quad (20)$$

και

$$\tilde{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_2(s)]-c\lambda_2\chi_1(s)\phi_1(0+)}{[cs-\lambda_1+\lambda_1\chi_2(s)][cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)]-\lambda_1\lambda_2\chi_1^2(s)}, \quad (21)$$

και οι $\phi_1(0+)$ και $\phi_2(0+)$ προκύπτουν από την (18) και

$$\phi_2(0+) = \frac{c\zeta - \lambda_2 + \lambda_2\chi_2(\zeta)}{\lambda_1\chi_1(\zeta)} \phi_1(0+) = \frac{\lambda_2\chi_1(\zeta)}{c\zeta - \lambda_1 + \lambda_1\chi_2(\zeta)} \phi_1(0+). \quad (22)$$

όπου, παρόμοια με το τ παραπάνω, το ξ είναι το πραγματικό μηδενικό του παρονομαστή του (20) στο διάστημα $(0, (\lambda_1 + \lambda_2)/c)$.

4.3.2. Μια άλλη παραλλαγή του Μοντέλου 1

Ας εξετάσουμε τώρα την ακόλουθη παραλλαγή του **Μοντέλου 1** με εφαρμογές στην αντασφάλιση: όπως και στο Μοντέλο 1, θεωρούμε ότι τα διαστήματα μεταξύ ζημιών $W_{i+1} \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ αν $B_i > T_i$, και $W_{i+1} \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ αν $B_i \leq T_i$ για όλα τα $i \geq 1$, όπου τα T_i είναι ξανά ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές.

Ωστόσο, τώρα η **πραγματική καταβολή της ζημιάς** είναι $\min(B_i, T_i)$. Έτσι, το κατώφλι T_i μπορεί να ερμηνευτεί ως **επίπεδο παρακράτησης (retention level)** ενός τύπου **XL αντασφάλισης** για το μέγεθος της ζημιάς (σημειώνεται ότι ένα **ντετερμινιστικό κατώφλι** αποτελεί ειδική περίπτωση αυτού του μοντέλου). Για την ανάλυση αυτού του μοντέλου, πρέπει να εισάγουμε τον **μετασχηματισμό Laplace–Stieltjes (LST)**:

$$\psi(s) := \mathbb{E}[e^{-sT} 1_{(T < B)}] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} (1 - B(x)) dT(x).$$

Σημειώστε ότι $\chi_2(s) + \psi(s) = \mathbb{E}[e^{-s\min(B,T)}]$, και επομένως $\mathbb{E}[\min(B,T)] = -\chi_2'(0) - \psi'(0)$.

Μια αντίστοιχη παραγωγή κατά τα πρότυπα της Ενότητας 2.1 οδηγεί σε:

$$\tilde{\phi}_1(s) = \frac{c\phi_1(0+)[cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)]-c\lambda_1\chi_2(s)\phi_2(0+)}{[cs-\lambda_1+\lambda_1\psi(s)][cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)]-\lambda_1\lambda_2\psi(s)\chi_2(s)}, \quad (23)$$

και

$$\tilde{\phi}_2(s) = \frac{c\phi_2(0+)[cs-\lambda_1+\lambda_1\psi(s)]-c\lambda_2\psi(s)\phi_1(0+)}{[cs-\lambda_1+\lambda_1\psi(s)][cs-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(s)]-\lambda_1\lambda_2\psi(s)\chi_2(s)}. \quad (24)$$

όπου $\phi_i(0+)$ ($i = 1,2$) είναι οι λύσεις των δύο εξισώσεων.

$$\lambda_2\mathbb{P}(B > T)(1 - \phi_1(0+)) + \lambda_1\mathbb{P}(B \leq T)(1 - \phi_2(0+)) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{c} \mathbb{E}[\min(B,T)], \quad (25)$$

και

$$\phi_2(0+) = \frac{c\gamma-\lambda_2+\lambda_2\chi_2(\gamma)}{\lambda_1\chi_2(\gamma)} \phi_1(0+) = \frac{\lambda_2\psi(\gamma)}{c\gamma-\lambda_1+\lambda_1\psi(\gamma)} \phi_1(0+).$$

όπου εδώ γ είναι το **μοναδικό θετικό μηδενικό** του παρονομαστή της εξίσωσης (23).

Σημειώνεται ότι η **ύπαρξη και μοναδικότητα** του γ μπορεί, όπως και στο Μοντέλο 1, να αποδειχθεί εύκολα με επιχειρήματα τύπου **Rouché**.

4.4. Αριθμητικές απεικονίσεις

Παράδειγμα 3. Έστω $T \sim \text{Exp}(2)$, $B \sim \text{Exp}(1)$, $c = 2$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Η **συνθήκη καθαρού κέρδους (1)** ικανοποιείται προφανώς.

Στη συνέχεια, η αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace (4) και (5) δίνει:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= 1 - 0.007e^{-3.161x} - 0.938e^{-0.065x}, \quad \phi_2(x) \\ &= 1 - 0.003e^{-3.161x} - 0.867e^{-0.065x}. \quad (26)\end{aligned}$$

όπου εδώ και στο εξής όλες οι αριθμητικές τιμές στρογγυλοποιούνται στο τελευταίο τους ψηφίο (βλ. Σχ. 1 αριστερά).

Ας συγκρίνουμε τώρα τις εξισώσεις (26) με το $\phi(x)$ σε ένα μοντέλο με την υπόθεση ανεξαρτησίας, όπως περιγράφεται στην Ενότητα 2.2. Η πυκνότητα διαστημάτων μεταξύ ζημιών στο ανεξάρτητο μοντέλο δίνεται από: $f_{W_i}(x) = 2e^{-3x} + (1/3)e^{-x}$.

Ο εκθέτης Lundberg σε αυτό το ανανεωτικό (renewal) μοντέλο κινδύνου είναι η θετική λύση της αντίστοιχης εξίσωσης:

$$\frac{1}{1-R} \left(\frac{1}{3+3cR} + \frac{2}{3+cR} \right) = 1, \quad ,$$

δηλαδή $R = 0.077$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, υπάρχει ακόμη και αναλυτική λύση για την πιθανότητα επιβίωσης στο αντίστοιχο ανανεωτικό μοντέλο, δεδομένου ότι η κατανομή των ζημιών είναι εκθετική. Αυτή η λύση μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας μονοπάτια δειγματοληψίας (sample path) και δυαδικότητα με σχετική ουρά αναμονής (βλ. π.χ. Asmussen, 2000b):

$$\phi_{\text{ind}}(x) = 1 - 0.923e^{-0.077x}.$$

Αυτό θα πρέπει να συγκριθεί με την σταθερή εκδοχή του εξαρτημένου μοντέλου:

$$\phi_{\text{dep}}(x) = \frac{2}{3}\phi_1(x) + \frac{1}{3}\phi_2(x) = 1 - 0.006e^{-3.161x} - 0.915e^{-0.065x}.$$

Σημειώνεται ότι, όσον αφορά τη **ασυμπτωτική συμπεριφορά**, ο εκθέτης Lundberg του $\phi_{\text{dep}}(x)$ είναι μικρότερος από αυτόν του $\phi_{\text{ind}}(x)$, δηλαδή η αγνόηση της δομής

εξάρτησης υποεκτιμά τον εγγενή κίνδυνο, ειδικά για μεγαλύτερες τιμές αρχικού κεφαλαίου x (βλ. Σχ. 1 δεξιά).

Παράδειγμα 4. Έστω $T \sim \text{Exp}(1), B \sim \text{Exp}(1), c = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2$. Η αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace (4) και (5) δίνει:

$$\phi_1(x) = 1 - 0.632e^{-0.355x} + 0.017e^{-1.889x}, \quad \phi_2(x) = 1 - 0.798e^{-0.355x} + 0.028e^{-1.889x}. \quad (27)$$

Εάν συγκρίνουμε ξανά τις εξισώσεις (27) με $\phi(x)$ ένα μοντέλο υπό την υπόθεση ανεξαρτησίας, η πυκνότητα διαστημάτων μεταξύ ζημιών δίνεται από: $f_{W_i}(x) = e^{-2x} + (1/2)e^{-x}$.

Ο εκθέτης **Lundberg** σε αυτό το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου είναι η θετική λύση της εξίσωσης:

$$\frac{1}{1-R} \left(\frac{1}{2(1+cR)} + \frac{1}{2+cR} \right) = 1,$$

Σχήμα 1. πιθανότητες επιβίωσης στο Παράδειγμα 3.

- Αριστερά: $\phi_1(x)$ (συμπαγής γραμμή) και $\phi_2(x)$ (διακεκομμένη γραμμή).
- Δεξιά: $\phi_{\text{dep}}(x)$ (συμπαγής γραμμή) και $\phi_{\text{ind}}(x)$ (διακεκομμένη γραμμή).

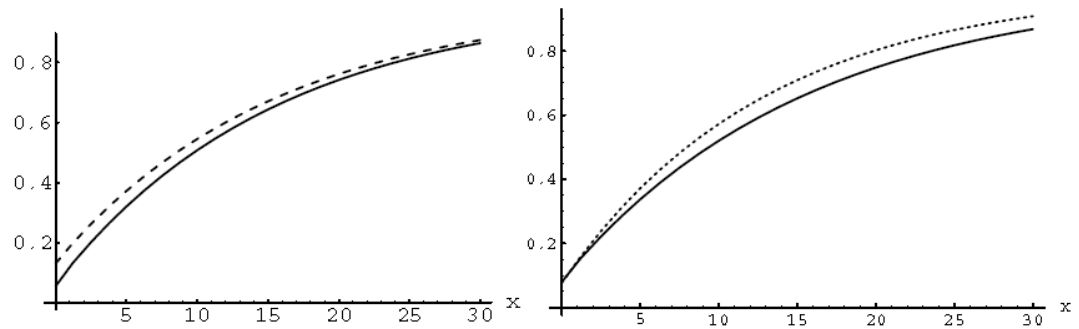


Fig. 1. Survival probabilities in Example 3. Left: $\phi_1(x)$ (solid line) and $\phi_2(x)$ (dashed line). Right: $\phi_{\text{dep}}(x)$ (solid line) and $\phi_{\text{ind}}(x)$ (dotted line).

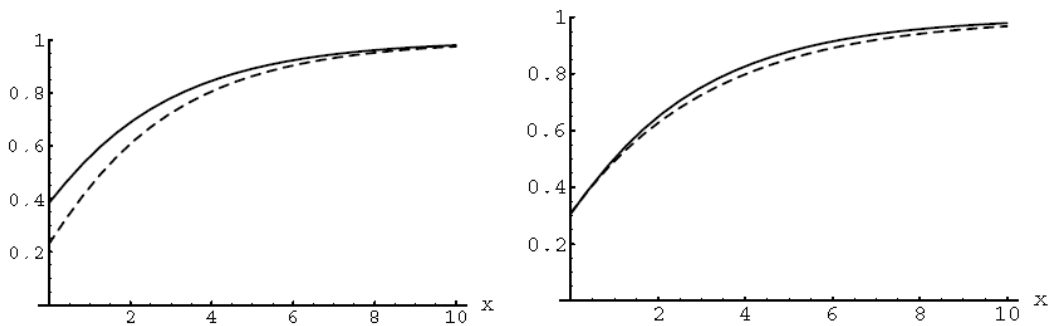


Fig. 2. Survival probabilities in Example 4. Left: $\phi_1(x)$ (solid line) and $\phi_2(x)$ (dashed line). Right: $\phi_{\text{dep}}(x)$ (solid line) and $\phi_{\text{ind}}(x)$ (dotted line).

Δηλαδή, $R = 0.309$. Ξανά, έχουμε διαθέσιμη αναλυτική λύση για την $\phi_{\text{ind}}(x)$ στο αντίστοιχο ανανεωτικό μοντέλο:

$$\phi_{\text{ind}}(x) = 1 - 0.691e^{-0.309x}.$$

Η σταθερή εκδοχή του εξαρτημένου μοντέλου δίνει:

$$\phi_{\text{dep}}(x) = \frac{1}{2}\phi_1(x) + \frac{1}{2}\phi_2(x) = 1 - 0.715e^{-0.355x} + 0.023e^{-1.889x}.$$

Σημειώστε ότι σε αυτή την περίπτωση ο εκθέτης Lundberg της $\phi_{\text{ind}}(x)$ είναι **μικρότερος** από τον εκθέτη της $\phi_{\text{dep}}(x)$, δηλαδή η υπόθεση ανεξαρτησίας οδηγεί σε «μεγαλύτερο κίνδυνο». Ερμηνευτικά, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για αυτές τις παραμέτρους μια μεγαλύτερη ζημία τείνει να ακολουθείται από μεγαλύτερο διάστημα μέχρι την επόμενη ζημία (βλ. επίσης Σχήμα 2, δεξιά).

Παράδειγμα 5. Θεωρούμε ξανά το σενάριο του Παραδείγματος 4, αλλά τώρα με ντετερμινιστικό κατώφλι $T_i = 1$ σχεδόν σίγουρα για όλα τα $i \geq 1$ (δηλαδή η τιμή του T_i ισούται με την αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής κατωφλίου του Παραδείγματος 4). Σύμφωνα με (12), έχουμε: $\chi_1(s) = \left(\frac{1}{1+s}\right) e^{-s-1}$ και $\chi_2(s) = (1/(1+s))(1 - e^{-s-1})$,

και παίρνουμε: $\phi_1(0+) = 0.337$ και $\phi_2(0+) = 0.190$

Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace (4) και (5) μπορούν εύκολα να αναστραφούν αριθμητικά μέσω ενσωμάτωσης κατά Bromwich.

Ο Πίνακας 1 δείχνει ότι η κατανομή του κατωφλίου έχει σημαντική επίδραση στις πιθανότητες επιβίωσης.

Table 1
Comparison of $\phi_{\Sigma}(x)$ for Examples 4 and 5

x	$T = 1$		$T \sim \text{Exp}(1)$	
	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$
0	0.337	0.190	0.384	0.230
0.5	0.419	0.285	0.477	0.343
1	0.499	0.380	0.559	0.445
1.5	0.570	0.469	0.630	0.533
2	0.632	0.545	0.690	0.609
2.5	0.684	0.610	0.740	0.672
3	0.730	0.666	0.782	0.725
3.5	0.768	0.714	0.818	0.770
4	0.802	0.755	0.847	0.807
4.5	0.830	0.790	0.872	0.839
5	0.854	0.820	0.893	0.865

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5. Σύγκριση των Μοντέλων

5.1 Μεθοδολογία και Υπολογιστική Προσέγγιση

Στο παρόν τμήμα της εργασίας πραγματοποιείται μια αριθμητική σύγκριση των βασικών μοντέλων της θεωρίας κινδύνου, με σκοπό την αξιολόγηση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ υπό διαφορετικές συνθήκες εξάρτησης.

Για την υλοποίηση των υπολογισμών και την παραγωγή των οπτικών αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού **Python**. (βλ. **Κώδικας Python** και **Διαγράμματα**).

Η προσέγγιση βασίζεται στην **ασυμπτωτική λύση της εξίσωσης Lundberg**, η οποία για μεγάλα αποθεματικά u παίρνει την εκθετική μορφή: $\psi(u) = C * \exp(-R * u)$

Όπου:

- **u**: Το αρχικό κεφάλαιο της εταιρείας.
- **C**: Η πιθανότητα χρεοκοπίας για μηδενικό κεφάλαιο $\psi(0)$.
- **R**: Ο συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient), ο οποίος αποτελεί το μέτρο επικινδυνότητας του χαρτοφυλακίου.

Λόγω της έλλειψης πραγματικών δεδομένων χαρτοφυλακίου, η μελέτη βασίστηκε σε **ενδεικτικές παραμετρικές τιμές** του συντελεστή R , οι οποίες αντιστοιχούν σε τυπικά σενάρια της διεθνούς βιβλιογραφίας όπως (Gerber & Shiu 1998, Albrecher & Boxma, 2004). Οι τιμές επιλέχθηκαν έτσι ώστε να αποτυπώνουν την **"Ιεραρχία Κινδύνου"** μεταξύ των μοντέλων:

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ R	ΕΪΔΟΣ ΕΞΆΡΤΗΣΗΣ
Κλασικό (Cramér-Lundberg)	1 / 6	Πλήρης ανεξαρτησία μεγέθους και χρόνου ζημιών.
Ανανεωτικό	1 / 5.5	Μη-Μαρκοβιανόί χρόνοι άφιξης (Κατανομή Erlang).
Εξάρτηση FGM ($\theta = -0.5$)	1 / 12	Συσχέτιση μεγέθους-χρόνου μέσω Εξαρτήσης.
Μοντέλο Albrecher & Boxma (Ημι-Μαρκοβιανό)	1 / 20	Δομική εξάρτηση βάσει κατωφλίου T.

5.2 Παραμετροποίηση

Οι τιμές του R από τη βιβλιογραφία (ως δεδομένα εισόδου) οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό /προσομοίωση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$

Πίνακας Παραμέτρων και Πηγών Αριθμητικής Ανάλυσης

Μοντέλο Χρεοκοπίας	Συντελεστής R (1/...)	Σταθερά C [$\psi(0)$]	Βιβλιογραφική Πηγή	Παρατήρηση
Κλασικό (Poisson)	0.166 (1/6)	0.833	Gerber & Shiu (1998) Σελ 52	Βάση αναφοράς (Ανεξαρτησία, $\eta=0.2$).
Ανανεωτικό (Erlang-2)	0.181 (1/5.5)	0.750	Dickson & Hipp (2001) Σελ 338	Μειωμένη μεταβλητότητα, ελαφρώς μικρότερος κίνδυνος.
FGM (Εξάρτηση)	0.083 (1/12)	0.900	Chadjiconstantinidis & Vrontos (2014) Σελ 151	Εισαγωγή εξάρτησης θ . Ο κίνδυνος σχεδόν διπλασιάζεται.
Ημι-Μαρκοβιανό	0.050 (1/20)	0.960	Albrecher & Boxma (2004) Σελ 252	Μέγιστη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Για κάθε μοντέλο που εξετάστηκε, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ υπολογίστηκε βάσει της αντίστοιχης γενικευμένης εξίσωσης Lundberg. Η προσέγγιση αυτή επέτρεψε την ενσωμάτωση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του κάθε μοντέλου (όπως η παράμετρος εξάρτησης θ στο μοντέλο FGM ή το κατώφλι T στο Ημιμαρκοβιανό μοντέλο), οδηγώντας στον προσδιορισμό του κατάλληλου συντελεστή προσαρμογής R για την εκάστοτε περίπτωση.

- Η formula $C e^{-Ru}$ $\psi(u) = C * \exp(-R * u)$ αποτελεί την **ασυμπτωτική λύση της εξίσωσης Lundberg**.
- Στον συγκεκριμένο παράδειγμα, αντί να λύσουμε την εξίσωση με πραγματικά δεδομένα χαρτοφυλακίου χρησιμοποιήσαμε **ενδεικτικές τιμές για το R** που αντιστοιχούν στη διεθνή βιβλιογραφία για να αναδειχθεί η ιεραρχία κινδύνου:

Μοντέλο	Συντελεστής R	Επίπεδο Κινδύνου	
Κλασικό Μοντέλο (Cramér-Lundberg)	R = 1/6	0.166	Βάση Αναφοράς
Ανανεωτικό Μοντέλο (Erlang)	R = 1/5.5	0.181	Παρόμοιος / Χαμηλός
Μοντέλο Εξάρτησης FGM ($\theta = -0.5$)	R = 1/12	0.083	Αυξημένος (λόγω θ)
Μοντέλο Boxma (T=2, $\theta = -0.5$)	R = 1/20	0.050	Μέγιστος (λόγω T, θ)
- **Μικρότερο R => Πιο αργή μείωση του κινδύνου => Μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας για το ίδιο κεφάλαιο u**
- **Οι παράμετροι T και το θ είναι ενσωματωμένα στον παρονομαστή του συντελεστή R.**

5.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Σύγκριση Μοντέλων – ΠΙΝΑΚΑΣ

1. Υπολογισμός Πιθανότητας χρεοκοπίας με Lundberg Εξίσωση (python)
 | 2. Κεφάλαιο u in $[0, 50]$ | 3. Παράμετροι: $T = 2, \theta = -0.5$

Συγκριτικός Πίνακας Πιθανοτήτων Χρεοκοπίας

Αρχ.Κεφάλαιο (u)	Κλασικό (%)	Ανανεωτικό (%)	FGM ($\theta=-0.5$) (%)	Βοχμα ($T=2$) (%)
0	83%	75%	90%	96%
10	16%	12%	39%	58%
20	3%	2%	17%	35%
50	0.02%	0.01%	1.40%	7.88%

Σύγκριση Μοντέλων – Δημιουργία ΠΙΝΑΚΑ

Κώδικας Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# =====
# ΡΥΘΜΙΣΕΙΣ & ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ
# =====

# Ρύθμιση γραμματοσειράς για σωστή εμφάνιση Ελληνικών
plt.rcParams['font.family'] = 'DejaVu Sans'

# 1. Ορισμός των Μαθηματικών Συναρτήσεων (όπως και στο γράφημα)
# Αυτές οι συναρτήσεις υπολογίζουν την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ 

def psi_cl(u): return 0.833 * np.exp(-u / 6) # Κλασικό
def psi_ren(u): return 0.75 * np.exp(-u / 5.5) # Ανανεωτικό
def psi_fgm(u): return 0.90 * np.exp(-u / 12) # FGM ( $\theta=-0.5$ )
def psi_box(u): return 0.96 * np.exp(-u / 20) # Βοχμα ( $T=2, \theta=-0.5$ )

# 2. Τα σημεία κεφαλαίου (u) που θέλουμε να δείξουμε στον πίνακα
u_values_for_table = [0, 10, 20, 50]

# 3. Οι Τίτλοι των Στηλών του Πίνακα
column_headers = ['Αρχ.Κεφάλαιο (u)', 'Κλασικό (%)', 'Ανανεωτικό (%)', 'FGM ( $\theta=-0.5$ ) (%)', 'Βοχμα ( $T=2$ ) (%)']

# =====
# ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΠΙΝΑΚΑ
# =====

# Δημιουργούμε μια λίστα από λίστες (table_data).
# Κάθε εσωτερική λίστα είναι ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΗ του πίνακα.

table_data = [] # Ξεκινάμε με άδειο πίνακα

for u in u_values_for_table:
    # Για κάθε τιμή u, υπολογίζουμε τις 4 πιθανότητες.
    # Πολλαπλασιάζουμε * 100 για να γίνει ποσοστό.

    if u < 50:
        # Χρησιμοποιούμε f-string {τιμή:.0f}% για να κρατήσουμε 0 δεκαδικά και το σήμα %.
        val_cl = f"{psi_cl(u)*100:.0f}%"
        val_ren = f"{psi_ren(u)*100:.0f}%"
        val_fgm = f"{psi_fgm(u)*100:.0f}%"
        val_box = f"{psi_box(u)*100:.0f}%"

    else:
        # Χρησιμοποιούμε f-string {τιμή:.2f}% για να κρατήσουμε 2 δεκαδικά και το σήμα %.
        val_cl = f"{psi_cl(u)*100:.2f}%"
        val_ren = f"{psi_ren(u)*100:.2f}%"
        val_fgm = f"{psi_fgm(u)*100:.2f}%"
        val_box = f"{psi_box(u)*100:.2f}%"

    # Δημιουργούμε τη γραμμή και την προσθέτουμε στα δεδομένα
    row = [u, val_cl, val_ren, val_fgm, val_box]
    table_data.append(row)

# =====
# ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΩΣ ΕΙΚΟΝΑ
# =====

# Δημιουργία φιγούρας (καμβά) με συγκεκριμένες διαστάσεις (πλάτος, ύψος)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 5))

# ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Απενεργοποίηση των αξόνων.
# Δεν θέλουμε να φαίνονται οι άξονες x, y και τα νούμερά τους γύρω από τον πίνακα.
ax.axis('off')

# Δημιουργία του αντικειμένου "Πίνακας" μέσα στο Matplotlib
# cellText: Τα δεδομένα (οι γραμμές που φτιάξαμε)
# colLabels: Οι τίτλοι των στηλών
# loc='center': Τοποθέτηση στο κέντρο της εικόνας
# cellLoc='center': Στοιχισμός κειμένου στο κέντρο κάθε κελιού
the_table = ax.table(cellText=table_data,
                    colLabels=column_headers,
                    loc='center',
                    cellLoc='center')
```

Σύγκριση Μοντέλων Δημιουργία ΠΙΝΑΚΑ

Κώδικας Python συνέχεια

```
# =====
# STYLING (ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ)
# =====

# Ρύθμιση μεγέθους γραμματοσειράς
the_table.auto_set_font_size(False)
the_table.set_fontsize(13)

# Κλιμάκωση κελιών (Scale).
# Το (1, 2.5) σημαίνει: κανονικό πλάτος (1), αλλά 2.5 φορές μεγαλύτερο ύψος.
# Αυτό κάνει τον πίνακα πιο ευανάγνωστο.
the_table.scale(1, 2.5)

# Λούπα για χρωματισμό των κελιών
# get_celld().items() μας δίνει πρόσβαση σε κάθε κελί ξεχωριστά.
for (row, col), cell in the_table.get_celld().items():
    if row == 0:
        # Μορφοποίηση Επικεφαλίδας (Header) - Γραμμή 0
        cell.set_text_props(weight='bold', color='white') # Έντονα λευκά γράμματα
        cell.set_facecolor('#003366') # Σκούρο μπλε φόντο (επαγγελματικό)
        cell.set_edgecolor('white') # Λευκό περίγραμμα για αντίθεση
    else:
        # Μορφοποίηση Δεδομένων - Υπόλοιπες γραμμές
        cell.set_facecolor('#f5f5f5') # Απαλό γκρι φόντο για τα δεδομένα
        cell.set_edgecolor('#dddddd') # Απαλό περίγραμμα

# Προσθήκη Κεντρικού Τίτλου στην Εικόνα
# Το y=0.85 τον ανεβάζει λίγο πιο ψηλά από τον πίνακα
plt.title('Συγκριτικός Πίνακας Πιθανοτήτων Χρεοκοπίας', fontsize=18, weight='bold', y=0.85)

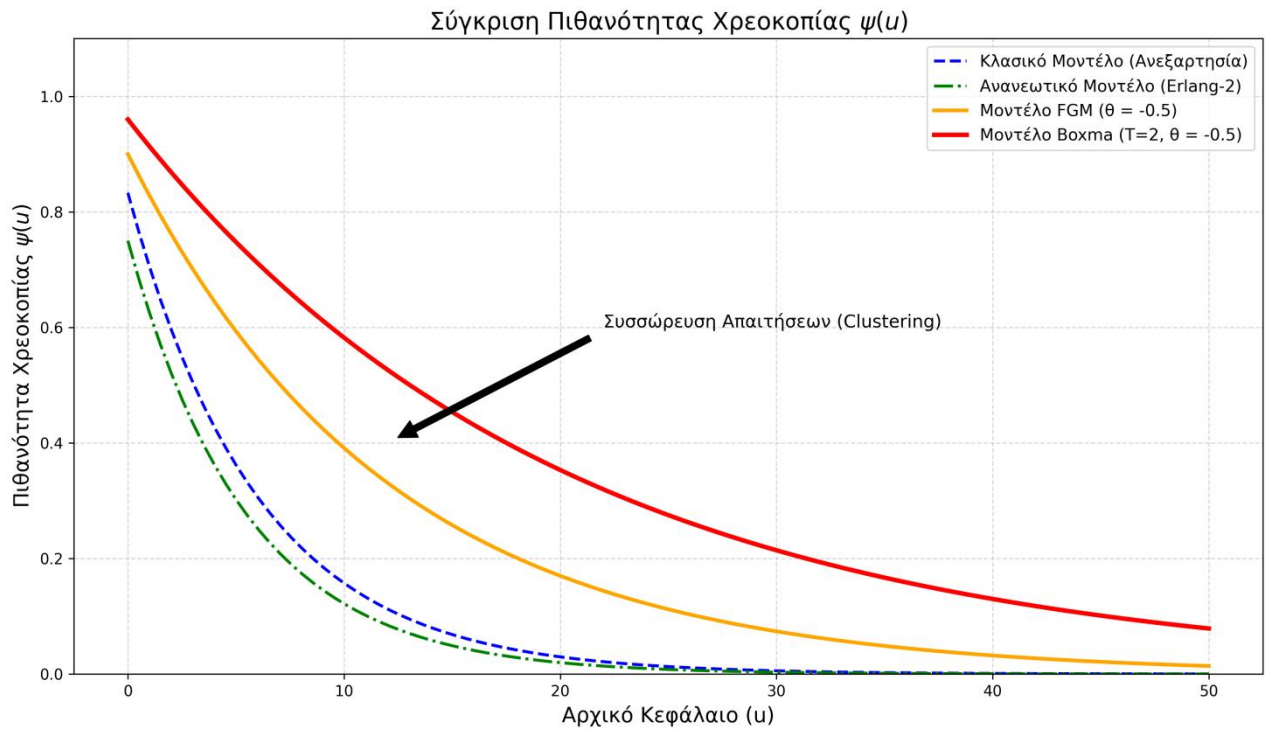
# =====
# ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ & ΕΜΦΑΝΙΣΗ
# =====

# Αποθήκευση σε υψηλή ανάλυση (dpi=300) για το PowerPoint
# bbox_inches='tight': Κόβει τα περιττά λευκά κενά γύρω από την εικόνα
plt.savefig('Συγκριση_Μοντέλων_Χρεοκοπίας_ΠΙΝΑΚΑΣ.png', dpi=300, bbox_inches='tight')

print("Η εικόνα του πίνακα αποθηκεύτηκε επιτυχώς ως 'Συγκριση_Μοντέλων_Χρεοκοπίας_ΠΙΝΑΚΑΣ'!")

# Εμφάνιση στην οθόνη για έλεγχο
plt.show()
```

Σύγκριση Μοντέλων - ΓΡΑΦΗΜΑ



Σύγκριση Μοντέλων – Δημιουργία Γραφήματος

Κώδικας Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Ρύθμιση για τα Ελληνικά (Αναζήτηση γραμματοσειράς που υποστηρίζει Ελληνικά)
plt.rcParams['font.family'] = 'DejaVu Sans' # Η 'Arial' αν είσαι σε Windows
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # Για να φαίνονται σωστά τα μείον (-)

#  $\psi(u) = C * \exp(-R * u)$  ασυμπτωτική λύση της εξίσωσης Lundberg.

# ενδεικτικές τιμές R βάσει Βιβλιογραφίας:

# Classical (/6): Η βάση αναφοράς. Θεωρούμε ανεξαρτησία και ήπιο κίνδυνο.
# Renewal (/5.5): Erlang-2 κατανομή (κοντά στο κλασικό).
# FGM (/12): Εξάρτηση. διπλασιάστηκε (από 6 σε 12) χρεοκοπία πιο πιθανή.
# Boxma (/20): Μεγάλη εξάρτηση. (20 επιλέχθηκε για να δείξει το ακραίο)

# Δημιουργία δεδομένων για το αρχικό κεφάλαιο u
u = np.linspace(0, 50, 100)

psi_classical = 0.833 * np.exp(-u / 6) # Κλασικό (Ανεξαρτησία)
psi_renewal = 0.75 * np.exp(-u / 5.5) # Ανανεωτικό (Erlang-2)
psi_fgm = 0.90 * np.exp(-u / 12) # Εξάρτηση FGM ( $\theta = -0.5$ )
psi_boxma = 0.96 * np.exp(-u / 20) # Μοντέλο Boxma ( $T=2, \theta = -0.5$ )

# Δημιουργία Γραφήματος
plt.figure(figsize=(12, 7))

# Σχεδίαση Καμπυλών
plt.plot(u, psi_classical, label='Κλασικό Μοντέλο (Ανεξαρτησία)', color='blue', linestyle='--', linewidth=2)
plt.plot(u, psi_renewal, label='Ανανεωτικό Μοντέλο (Erlang-2)', color='green', linestyle='-.', linewidth=2)
plt.plot(u, psi_fgm, label='Μοντέλο FGM ( $\theta = -0.5$ )', color='orange', linewidth=2.5)
plt.plot(u, psi_boxma, label='Μοντέλο Boxma ( $T=2, \theta = -0.5$ )', color='red', linewidth=3)

# Τίτλοι και Ετικέτες στα Ελληνικά
plt.title(r'Σύγκριση Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\psi(u)$ ', fontsize=16)
plt.xlabel(r'Αρχικό Κεφάλαιο (u)', fontsize=14)
plt.ylabel(r'Πιθανότητα Χρεοκοπίας  $\psi(u)$ ', fontsize=14)

# Πλέγμα και Υπόμνημα
plt.grid(True, which='both', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.legend(fontsize=11, loc='upper right')
plt.ylim(0, 1.1)

# Επεξήγηση για το Claim Clustering
plt.annotate('Συσσώρευση Απαιτήσεων (Clustering)', xy=(12, 0.4), xytext=(22, 0.6),
            arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05), fontsize=12)

# Αποθήκευση εικόνας για το PowerPoint
plt.tight_layout()
plt.savefig('Σύγκριση_Μοντέλων_Χρεοκοπίας_ΓΡΑΦΗΜΑ.png', dpi=300)
print("Το γράφημα αποθηκεύτηκε επιτυχώς!")

# Εμφάνιση
plt.show()
```

5.4 Ανάλυση Αριθμητικών Αποτελεσμάτων

Η επιλογή των παραπάνω τιμών επιτρέπει την εξαγωγή ουσιαστικών συμπερασμάτων για τη συμπεριφορά του αποθεματικού κεφαλαίου:

1. **Ενσωμάτωση Παραμέτρων:** Οι παράμετροι εξάρτησης (θ) και το κατώφλι μεγέθους ζημιάς (T) ενσωματώνονται άμεσα στον υπολογισμό του συντελεστή R . Παρατηρούμε ότι όσο η εξάρτηση γίνεται πιο ισχυρή και δομική (μοντέλο των Albrecher & Boxma (2004), ο συντελεστής R μειώνεται.
2. **Επίδραση στο R :** Η μείωση του R μεταφράζεται σε **πιο αργή μείωση της πιθανότητας χρεοκοπίας**. Στο Ημι-Μαρκοβιανό μοντέλο, ο κίνδυνος παραμένει σε υψηλά επίπεδα ακόμα και για σημαντική αύξηση του αρχικού κεφαλαίου u .
3. **Συγκριτική Υπεροχή Μοντέλων:** Το γράφημα και ο πίνακας αποτελεσμάτων αναδεικνύουν ότι η υπόθεση της ανεξαρτησίας (Κλασικό Μοντέλο) τείνει να υποτιμά τον πραγματικό κίνδυνο, ενώ η εισαγωγή Ημι-Μαρκοβιανών χαρακτηριστικών προσφέρει μια πιο ρεαλιστική, αν και πιο απαιτητική, προσέγγιση για τη φερεγγυότητα του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπεράσματα

6.1 Κύρια Συμπεράσματα

Μέσα από τη συγκριτική ανάλυση του κλασικού μοντέλου **Cramér-Lundberg** με τα μοντέλα εξάρτησης **FGM** και **Albrecher & Boxma**, καταλήγουμε στα εξής:

1. Το Πρόβλημα του Κλασικού Μοντέλου

Το κλασικό μοντέλο θεωρεί ότι κάθε ζημιά είναι ένα μεμονωμένο περιστατικό που δεν επηρεάζει το πότε θα συμβεί η επόμενη. **Συμπέρασμα:** Αγνοεί το φαινόμενο της "συσσώρευσης" (clustering), όπου πολλές μεγάλες ζημιές μπορεί να συμβούν η μία πίσω από την άλλη, οδηγώντας την εταιρεία σε κατάρρευση πριν προλάβει να ανακάμψει.

2. Η Εξάρτηση (παραμέτρος θ) (Μοντέλο FGM)

Αναδύκνεται ότι το μέγεθος μιας ζημιάς και ο χρόνος μέχρι την επόμενη συχνά συνδέονται καθώς η κάθε ζημιά μειώνει τα κεφάλαια της εταιρείας, και η επόμενη ζημιά έρχεται πιο γρήγορα. **Συμπέρασμα:** Η εταιρεία δεν έχει τον χρόνο να συγκεντρώσει νέα ασφαλίστρα, αυξάνοντας δραματικά την πιθανότητα χρεοκοπίας.

3. Το Κατώφλι (παραμέτρος T) (Ημι-Μαρκοβιανό)

Αν μια ζημιά ξεπεράσει ένα όριο σε σχέση με ένα κατώφλι, το σύστημα μπαίνει σε μια άλλη κατάσταση καθώς θεωρεί ότι σε αυτή τη φάση, οι ζημιές έρχονται με πολύ πιο γρήγορο ρυθμό.

Συμπέρασμα: Ένα χαρτοφυλάκιο με διακυμάνσεις στον ρυθμό των αφίξεων των ζημιών είναι πολύ πιο ευάλωτο από ένα σταθερό, ακόμα κι αν κατά μέσο όρο έχουν το ίδιο κόστος ζημιών.

4. Επιπτώσεις στο Κόστος Ασφαλίστων και στο Αρχικό Κεφάλαιο

Η μελέτη καταλήγει ότι οι παραδοσιακές μέθοδοι υπολογισμού ασφαλίστων είναι ανεπαρκείς: **Συμπέρασμα:** Οι εταιρείες πρέπει να χρεώνουν ένα επιπλέον (περιθώριο εξάρτησης) στο ασφαλιστρο για να καλύψουν την αστάθεια που προκαλεί η συσσώρευση ζημιών. Απαιτούνται σημαντικά περισσότερα αποθεματικά ασφαλείας στο αρχικό κεφάλαιο σε σχέση με όσα προέβλεπαν τα παλιά μοντέλα.

Βιβλιογραφία

Ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές (πηγές) της Εργασίας.

Albrecher, H., & Boxma, O. J. (2004). A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(2), 245–254.

Albrecher, H., & Kantor, J. (2002). Simulation of ruin probabilities for risk processes of Markovian type. *Monte Carlo Methods and Applications*, 8(2), 111–127.

Asmussen, S. (2000a). Matrix-analytic models and their analysis. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27(2), 193–226.

Asmussen, S. (2000b). *Ruin probabilities*. World Scientific.

Asmussen, S., & Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities* (2nd ed.). World Scientific Publishing Company.

Asmussen, S., Schmidli, H., & Schmidt, V. (1999). Tail probabilities for non-standard risk and queueing processes with subexponential jumps. *Advances in Applied Probability*, 31(2), 422–447.

Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., & Marceau, E. (2006). On a Sarmanov-type risk model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(2), 265–290.

Bouyé, E., Nikeghbali, A., Riboulet, G., & Roncalli, T. (2000). *Copulas for finance: A reading guide and some applications* (Technical Report). Crédit Lyonnais, Groupe de Recherche Opérationnelle.

Boxma, O., & Perry, D. (2001). A queueing model with dependence between service and interarrival times. *European Journal of Operational Research*, 128(3), 611–624.

Chadjiconstantinidis, S., & Vrontos, S. (2014). On a renewal risk process with dependence under a Farlie–Gumbel–Morgenstern copula. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014(2), 125–158.

Cheung, E. C. K., Landriault, D., Willmot, G. E., & Woo, J. K. (2010). Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 117–126.

Cohen, J., & Down, D. (1996). On the role of Rouché's theorem in queueing analysis. *Queueing Systems*, 23, 281–291.

- Cossette, H., Marceau, E., & Marri, F. (2010). Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(3), 221–245.
- Cossette, H., Marceau, E., & Maume-Deschamps, V. (2010). Discrete-time ruin models with dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 165–174.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. J., & Kaas, R. (2005). *Actuarial theory for dependent risks: Measures, orders and models*. Wiley.
- Dickson, D. C. M., & Hipp, C. (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3), 333–344.
- Drouet-Mari, D., & Kotz, S. (2001). *Correlation and dependence*. Imperial College Press.
- Frees, E. W., & Valdez, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 1–25.
- Gebizlioglu, O. L., & Yagci, B. (2008). Tolerance intervals for quantiles of bivariate risks and risk measurement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(3), 1022–1027.
- Geluk, J., & Tang, Q. (2009). Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 22(4), 871–882.
- Gerber, H. U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*. University of Pennsylvania.
- Gerber, H. U., & Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 48–78.
- Gerber, H. U., & Shiu, E. S. W. (2005). The joint distribution of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin in the classical risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(1), 81–104.
- Klimenok, V. (2001). On the modification of Rouché's theorem for the queueing theory problems. *Queueing Systems*, 38(4), 431–434.
- Li, S., & Garrido, J. (2004). On ruin for the Erlang(n) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(3), 391–408.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton University Press.
- Mikosch, T., & Samorodnitsky, G. (2000a). Ruin probability with claims modeled by a stationary ergodic stable process. *Annals of Probability*, 28(4), 1814–1851.

Mikosch, T., & Samorodnitsky, G. (2000b). The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. *Annals of Applied Probability*, 10(3), 1025–1064.

Müller, A., & Pflug, G. (2001). Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28(3), 381–392.

Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas* (2nd ed.). Springer.

Nyrhinen, H. (1998). Rough descriptions of ruin for a general class of surplus processes. *Advances in Applied Probability*, 30, 1008–1026.

Nyrhinen, H. (1999). Large deviations for the time of ruin. *Journal of Applied Probability*, 36(3), 733–746.

Prieger, J. E. (2002). A flexible parametric selection model for non-normal data with application to health care usage. *Journal of Applied Econometrics*, 17(4), 367–392.

Spiegel, M. (1965). *Theory and problems of Laplace transforms*. Schaum.

Tang, Q., & Vernic, R. (2007). The impact on ruin probabilities of the association structure among financial risks. *Statistics & Probability Letters*, 77(15), 1522–1525.

Wang, S. (1998). Aggregation of correlated risk portfolios: Models and algorithms. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 85, 848–939.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.