Σχολή Θετικών Επιστημών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

Διερεύνηση της Ικανότητας Μαθητών Γυμνάσιου στην Επίλυση Ιστορικών Κλασματικών Προβλημάτων

Μιλτιάδης Τσουφλίδης

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Κρύα Βρύση Πέλλας

Ιούνιος 2023

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

«Διερεύνηση της Ικανότητας Μαθητών Γυμνάσιου στην Επίλυση Ιστορικών Κλασματικών Προβλημάτων»

Μιλτιάδης Τσουφλίδης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων καθηγητής : Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής: Αυγερινός Ευγένιος

Κρύα Βρύση Πέλλας

Ιούνιος 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας την παρούσα εργασία αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν σε αυτή τη δύσκολη και πρωτόγνωρη πορεία για εμένα. Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη για τις συμβουλές και την καθοδήγηση που μου παρείχε, σε όλη την συγγραφική πορεία μου.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, καθώς χωρίς την βοήθεια τους, η παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου, που με στήριξε ηθικά και ψυχολογικά κάθε φορά που αισθανόμουν αδύναμος να ανταποκριθώ στην πληθώρα των υποχρεώσεων, τις οποίες επωμίζεται κάθε ενήλικας εκπαιδευόμενος.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Εισαγωγή: Τα προβλήματα με κλάσματα αποτελούν ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο και δύσκολο κεφάλαιο των μαθηματικών, όπου οι εκπαιδευόμενοι αντιμετωπίζουν πληθώρα δυσκολιών, με συνέπεια να μην μπορούν εφαρμόσουν στρατηγικές ορθής επίλυση τους.

Σκοπός: Η παρούσα εργασία επιδιώκει να διερευνήσει σε ποιο βαθμό οι μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι σε θέση να επιλύσουν ορθά προβλήματα με κλάσματα.

Μέθοδος: Η έρευνα χρησιμοποίησε την ποιοτική μεθοδολογία και το δείγμα της αποτέλεσαν 10 μαθητές, 5 αγόρια και 5 κορίτσια που φοιτούσαν σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου.

Αποτελέσματα: Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ότι οι μαθητές εξακολουθούν να αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες ως προς την ορθή διαχείριση των κλασματικών προβλημάτων, με αποτέλεσμα τη μη δυνατότητα ορθής επίλυσής τους. Δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφοροποιήσεις ως προς τον τρόπο διαχείρισης των κλασματικών προβλημάτων μεταξύ αγοριών και κοριτσιών. Επίσης η έρευνα κατέδειξε ότι οι συμμετέχοντες στην έρευνα έκαναν χρήση τόσο αλγεβρικών μεθόδων επίλυσης των προβλημάτων, όσο και πρακτικής αριθμητικής.

Συμπεράσματα: Συνιστάται η διενέργεια ευρύτερων ερευνών ως προς το ζήτημα της διαχείρισης των προβλημάτων με κλάσματα από μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, προκειμένου να διαπιστωθούν οι δυσκολίες, τα συνήθη λάθη και να εφαρμοστούν στρατηγικές βελτίωσης των μαθηματικών ικανοτήτων τους, ως προς την επίλυση των κλασματικών προβλημάτων.

Λέξεις Κλειδιά: Προβλήματα με κλάσματα, μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

ABSTRACT

Introduction: Problems with fractions are a particularly complex and difficult chapter of mathematics, where students face many difficulties, as a result of which they cannot apply strategies to correctly solve them.

Purpose: This paper seeks to investigate to what extent Secondary Education students can correctly solve problems with fractions.

Method: The research used the qualitative methodology and its sample consisted of 10 students, 5 boys and 5 girls who studied in all classes of the High School.

Results: The results of the research showed that students still face many difficulties in the correct management of fractional problems, resulting in the inability to solve them correctly. No significant differences were observed in the way fraction problems were handled between boys and girls. Also, the research showed that the participants in the research used both algebraic methods to solve the problems, as well as practical arithmetic.

Conclusions: It is recommended to carry out wider research on the issue of the management of problems with fractions by Secondary Education students, to identify the difficulties, common mistakes and to implement strategies to improve their mathematical abilities, in terms of solving fractional problems.

Keywords: Fraction problems, secondary school students

Περιεχόμενα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Εισαγωγή

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αρκετών ερευνών (Φιλίππου & Χρίστου, 1995· Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, Σιακαλλή, 2001· Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου, 2004), έχει διαπιστωθεί ότι παρά το γεγονός ότι δίνεται μεγάλη έμφαση στη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ωστόσο πολλοί είναι οι μαθητές που παρουσιάζουν σημαντικές αδυναμίες χρήσης τους, καθώς θεωρούν ότι τα κλάσματα αποτελούν μια ιδιαίτερα δύσκολη μαθηματική κατασκευή (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010).

Η δυσκολία κατανόησης των κλασμάτων θεωρείται από πολλούς ερευνητές ιδιαίτερα σημαντική στην προσπάθεια των μαθητών να αναπτύξουν την ικανότητα χειρισμού μαθηματικών στρατηγικών που συνδέονται με την καθημερινή ζωή τους, καθώς όπως έχει διαπιστωθεί, οι κλασματικοί αριθμοί αποτελούν θεμέλια αρχή πάνω στην οποία βασίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου, Σιακαλλή, 2001·Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου, 2004).

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ως προς την χρήση των κλασμάτων συνδέεται με τη δυνατότητα διαίρεσης, την πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων ή την πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων (McGee et al., 2006). Σε επίπεδο εννοιολογικής φύσης οι μαθητές δυσκολεύονται να συνδέσουν το κλάσμα με την απόλυτη αξία των φυσικών αριθμών, όπως επίσης δεν μπορούν εύκολα να κατανοήσουν ότι μεταξύ δύο διαδοχικών κλασμάτων δεν υπάρχει άλλος κλασματικός αριθμός. Δίπλα στα παραπάνω πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν ότι η κλασματική μονάδα αποτελεί ένα σταθερό μέγεθος, ή ότι υπάρχει η δυνατότητα λογιστικού χειρισμού των αριθμητών ανεξάρτητα από τους παρανομαστές (Φιλίππου & Χρίστου, 1995· Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου, 2004· Ni & Zhou, 2005· McGee et al., 2006).

Αρκετοί είναι οι ερευνητές που ωστόσο υποστηρίζουν ότι οι μαθητές μπορούν να βελτιώσουν τις δεξιότητές τους ως προς την χρήση των κλασμάτων και την επίλυση κλασματικών προβλημάτων, εάν εξοικειωθούν με τα ιστορικά κλασματικά προβλήματα και ανατρέξουν στους τρόπους χειρισμού τους από τους ιστορικούς συγγραφείς (Furinghetti & Radford, 2002· Helfgot, 2004· Thomaidis & Tzanakis, 2007).

Η προαναφερόμενη άποψη συμπλέει με τη γενικότερη αντίληψη ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει σημαντικό εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών, προκειμένου να βοηθήσουν τους μαθητές να είναι θετικά διακείμενοί απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών (Helfgot, 2004).

Λαμβάνοντας υπόψη τα προαναφερόμενα η παρούσα εργασία αποσκοπεί να διερευνήσει εάν οι μαθητές Γυμνασίου είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα μαθηματικών, με ποιο τρόπο επιδιώκουν να τα επιλύσουν και σε ποιο βαθμό η προσπάθεια τους είναι επιτυχής. Τα προβλήματα που κλήθηκαν να επιλύσουν οι μαθητές της παρούσας έρευνας, έχουν επιλεγεί από ιστορικές πηγές και από μαθηματικές συλλογές που αφορούν διαφόρους πολιτισμούς και χρονικές περιόδους. Απώτερος στόχος της έρευνας είναι να καταδειχθεί εάν οι μαθητές προσεγγίζουν τα ιστορικά προβλήματα, χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό ή αριθμητικό τρόπο, ή εάν επινοούν πρωτότυπες λύσεις, όπως αυτές που είχαν δώσει οι συγγραφείς των προβλημάτων.

Η παρούσα εργασία διαχωρίζεται σε 5 επιμέρους κεφάλαιο. Τα 3 πρώτα κεφάλαια αποτελούν το θεωρητικό μέρος της εργασίας και τα άλλα 2 το εμπειρικό μέρος. Το πρώτο κεφάλαιο εστιάζει στη συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, κάνοντας αναφορά στην αναγκαιότητα της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, στα εμπόδια και στους προβληματισμούς ως προς την ενσωμάτωση της και στους πιθανούς τρόπους ενσωμάτωσης στο πλαίσιο διδασκαλίας εντός της σχολικής τάξης. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην ιστορία των κλασμάτων, στην έννοια και στις ερμηνείες τους, στον τρόπο ένταξης των κλασμάτων στα σχολικά εγχειρίδια του γυμνασίου και στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως προς την κατανόηση τους. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα ιστορικά προβλήματα και μια ευρύτερη περιγραφή παραδειγμάτων κλασματικών προβλημάτων από την ιστορία των μαθηματικών. Στο ίδιο κεφάλαιο περιλαμβάνεται και σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση προγενέστερων ερευνών οι οποίες εστίαζαν σε κλασματικά προβλήματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή του σκοπού και των ερευνητικών ερωτημάτων της παρούσας μελέτης, της μεθοδολογίας που χρησιμοποιήθηκε, του δείγματος της έρευνας και της διαδικασίας συλλογής των δεδομένων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, η συζήτηση, ενώ ακολουθούν τα συμπεράσματα και οι προτάσεις η εργασία ολοκληρώνεται με τις βιβλιογραφικές αναφορές και το παράρτημα.

Α΄ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κεφάλαιο 1ο Η Συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση

1.1 Αναγκαιότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση

Η αναγκαιότητα διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών κερδίζει διαρκώς έδαφος τις τελευταίες δεκαετίες, με πολλούς μελετητές να έχουν εκφράσει εμπεριστατωμένα τις απόψεις τους. Η προαναφερόμενη αναγκαιότητα όπως έχει τονίσει ο Barzun (1954), έγκειται στο γεγονός, ότι οι μαθητές αναπτύσσουν μια απωθητική διάθεση για τα μαθηματικά, αφού οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να τους εξηγήσουν τα «γιατί». Δεν υπάρχει κανένα ιστορικό πλαίσιο, με αποτέλεσμα οι μαθητές να θεωρούν ότι τα μαθηματικά «έχουν πέσει έτοιμα από τον ουρανό και πως για να τα χρησιμοποιήσει κάποιος, πρέπει να είσαι γεννημένος ταχυδακτυλουργός».

Η Grugnetti (1989) όσον αφορά την διεπιστημονική προσέγγιση του συγκεκριμένου μαθησιακού αντικειμένου, κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών είναι αναγκαία γιατί βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν, ότι τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν προϊόν έρευνας, με αποτέλεσμα να κεντρίζεται τον ενδιαφέρον τους να διερευνήσουν τα μαθηματικά (Farmaki & Paschos, 2007).

Την σπουδαιότητα της ιστορικής διαδρομής των μαθηματικών έχει επισημάνει ο Struve (1989), εστιάζοντας στο γεγονός ότι είναι αναγκαία η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών γιατί συμβάλλει στην αποσαφήνιση εννοιών, ενώ σημαντικά είναι τα οφέλη που μπορεί να αποκομίσει ο μαθητής μέσα από την διεπιστημονικότητα της ιστορίας. Ο Speranza (1989) επίσης κατέληξε ότι είναι αναγκαία η διδασκαλία της ιστορίας και της φιλοσοφίας των μαθηματικών, γιατί φανερώνουν στους μαθητές εναλλακτικές θεωρίες, προάγουν την ιστορική συναίσθηση των μαθηματικών, ενθαρρύνουν τον στοχασμό και δικαιολογούν στους μαθητές για ποιο λόγο πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά όργανα και τις μεθοδολογίες. Επίσης ο Boero (1989) τόνισε, ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών βοηθά τους μαθητές να κατακτήσουν μαθηματικές έννοιες, ενώ ο Strasser (1989) επεσήμανε την ανάγκη της διασύνδεσης των μαθηματικών με την κοινωνική γνώση.

Ο Fauvel (1991) επικεντρώνοντας την έρευνα του στην ιστορία των μαθηματικών αναφέρει, ότι αυτή θα πρέπει να αποτελεί βασική διάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών, καθώς επιφέρει πολλαπλά οφέλη. Επιχειρηματολογώντας της προαναφερόμενης άποψης, επισημαίνει ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών προάγει και συνάμα λειτουργεί πολλαπλασιαστικά των μαθησιακών κινήτρων. Ενθαρρύνεται η ανάδειξη του ανθρώπινου χαρακτήρα της μαθηματικής επιστήμης, οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες εφόσον έχουν αντιληφθεί την εξέλιξη των μαθηματικών, να τροποποιήσουν τις αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά και να αυξήσουν το ενδιαφέρον τους.

Στις παραπάνω θετικές πτυχές διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών, ο Fauvel (1991), αναφέρει ότι οι μαθητές μπορούν να αποσαφηνίσουν τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στην κοινωνία, να ασχοληθούν με τις διαθέσιμες εργασίες, να διδαχθούν ευκολότερα τα μαθηματικά, ενώ διευκολύνεται η διδασκαλία του μαθήματος.

Υπερθεματίζοντας των προαναφερόμενων επιχειρημάτων ο Fried (2001) τονίζει, ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών βοηθά στον εξανθρωπισμό της μαθηματικής επιστήμης, οδηγεί στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών, γίνονται περισσότερο προσιτά και κατανοητά, ενώ προάγονται προοπτικές σε σχέση με έννοιες, προβλήματα και την επίλυση τους. Αναλυτικότερα όσον αφορά τον εξανθρωπισμό των μαθηματικών, η διδασκαλία της ιστορίας τους, οδηγεί τους μαθητές να αναπτύξουν πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις και τους παρέχονται ιστορικά πρότυπα, τα οποία τους βοηθούν να συνδέσουν τη μελέτη των μαθηματικών με κίνητρα (Russ et al., 1991· Tzanakis & Thomaidis, 2000· Taimina, 2004· Bakker & Gravemeijer, 2006· Farmaki & Paschos, 2007) και συναισθήματα (Swetz 1995). Η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών συμβάλει στον εμπλουτισμό της διδασκαλίας τους, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μεταβάλουν την αρνητική στάση τους και τον φόβο τους για τα μαθηματικά, ενώ συνάμα κατανοούν τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν στην καθημερινή ζωή τους. Επίσης η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών δεν είναι ωφέλιμη μόνο για την μαθητική, αλλά και για την εκπαιδευτική κοινότητα. Οι εκπαιδευτικοί μέσα από την διδασκαλία της ιστορικής πορείας ενός μαθηματικού προβλήματος, μπορούν αποτελεσματικότερα να το προσεγγίσουν και να το μεταδώσουν στους μαθητές (Fried, 2001).

O Jankvist (2009) εστιάζοντας και αυτός στην αναγκαιότητα διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών παραθέτει δύο διαφορετικά είδη επιχειρημάτων γύρω από το ζήτημα, αυτά που αναφέρονται στην ιστορία ως μέσο, ως εργαλείο που συμβάλλει στην πραγματική εκμάθηση και διδασκαλία τους και αυτά που εστιάζουν στην διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών ως ξεχωριστό στόχο. Η πρώτη κατηγορία επιχειρημάτων αναφέρει ότι η εργαλειακή προσέγγιση της ιστορίας των μαθηματικών, μπορεί να αποτελέσει κινητήριο δύναμη των μαθητών να ασχοληθούν περαιτέρω με τα μαθηματικά, να διατηρήσουν το ενδιαφέρον και τον ενθουσιασμό τους και να προσδώσουν σε αυτά μία ανθρώπινη διάσταση (Helfgot, 2004). Η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό γνωστικό εργαλείο, το οποίο να λειτουργήσει υποστηρικτικά στην εκμάθηση των μαθηματικών, παρέχοντας στους μαθητές διαφορετικές οπτικές προσέγγισης, όπως επίσης παρέχει και μία φυσική ροή, με αποτέλεσμα να παύουν να τα θεωρούν απρόσωπα και ξένα (Baker & Gravemeijer, 2006). Επιπλέον, ο μαθητής περνά από τα εξελικτικά στάδια των μαθηματικών, με αποτέλεσμα να μπορεί να τα κατανοήσει σε βάθος (Furinghetti & Radford, 2002· Thomaidis & Tzanakis, 2007).

Τέλος, οι Tzanakis & Archavi (2000) συμφώνησαν και αυτοί με τους προαναφερόμενους, ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών βοηθά στην εκμάθηση των μαθηματικών, προάγει νέες οπτικές που συνδέονται με τη μαθηματική φύση και δραστηριότητα και δημιουργεί θετική προδιάθεση από την πλευρά των μαθητών. Επίσης τόνισαν ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών εμπλουτίζει το διδακτικό υπόβαθρο των εκπαιδευτικών και το ρεπερτόριο τους, ενώ συνάμα τόσο οι μαθητές, όσο και οι εκπαιδευτικοί κατανοούν ότι τα μαθηματικά συνδέονται με το πολιτιστικό κεφάλαιο (Kragh, 1990· Hallez, 1990) και γενικότερα την εξέλιξη της ανθρωπότητας (Baker & Gravemeijer, 2006). Οι μαθητές κατανοούν ότι τα μαθηματικά υπάρχουν αλλά και εξελίσσονται χωρικά και χρονικά (Tzanakis και Thomaidis, 2000), δεχόμενα επιδράσεις αλλά και επιδρώντας στους διάφορους πολιτισμούς (Thomaidis & Tzanakis, 2007).

1.2 Εμπόδια & Προβληματισμοί στην Ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση

Αν και είναι αυταπόδεικτα τα οφέλη της συμβολής της διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών, ωστόσο έχουν εκφραστεί προβληματισμοί όσον αφορά την διδασκαλία της, σε σχέση κυρίως με τα εμπόδια που προκύπτουν στην πράξη. Τα επιχειρήματα που αφορούν τον προαναφερόμενο προβληματισμό ως προς τις δυσκολίες εφαρμογής της εντάσσονται σε δύο ευρύτερες κατηγορίες φιλοσοφικού και πρακτικού ενδιαφέροντος (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Όσον αφορά τα επιχειρήματα φιλοσοφικού περιεχομένου, το πρώτο εστιάζει στο γεγονός ότι η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι μαθηματικά, επομένως θα πρέπει να διδάσκεται ως ξεχωριστό μαθησιακό αντικείμενο, με τους μαθητές να διδάσκονται αρχικά το μαθηματικό ζήτημα και εν συνεχεία την ιστορία του. Έχει επισημανθεί επίσης ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών, μπορεί αντί να βοηθήσει, να μπερδέψει περισσότερο τους μαθητές (Fauvel, 1991). Οι μαθητές μπορεί να μην διαθέτουν το απαιτούμενο ιστορικό κεφάλαιο, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να ενοποιήσουν τα μαθηματικά με την γενική ιστορία (Fauvel, 1991). Επιπροσθέτως, ένα μέρος των μαθητών δεν διάκειται θετικά απέναντι στην ιστορία, με αποτέλεσμα να είναι πολύ πιθανό να αναπτύξει την ίδια διάθεση και για την ιστορία των μαθηματικών. Στα επιχειρήματα φιλοσοφικού ενδιαφέροντος επίσης εντάσσεται το ερώτημα ότι εφόσον η μαθηματική πρόοδος λαμβάνει χώρα μέσω της αντιμετώπισης και επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, για ποιο λόγο να πρέπει κάποιος να εξακολουθεί να ασχολείται με ένα πρόβλημα το οποίο έχει ξεπεραστεί; (Le Goff, 1996). Επιπλέον έχει επισημανθεί ότι εάν η ιστορία δεν διδαχθεί με ορθό τρόπο, μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη πολιτιστικού σοβινισμού και εθνικισμού, κάτι που μπορεί να συμβεί και στη περίπτωση της διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών.

Όσον αφορά τα επιχειρήματα που εστιάζουν στα εμπόδια της πρακτικής εφαρμογής της διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών, έχει αναφερθεί αρχικά ότι ο διδακτικός χρόνος είναι περιορισμένος, με συνέπεια να περιορίζεται ακόμη περισσότερο, εάν μέσα σε αυτόν πρέπει να διδαχθεί και η ιστορία των μαθηματικών (Buhler, 1990). Έχει τονιστεί ότι δεν επαρκούν οι πόροι, δηλαδή δεν υπάρχει το απαραίτητο υλικό από άποψη ιστορικών πληροφοριών, τα οποία θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν εποικοδομητικά από τη εκπαιδευτική κοινότητα (Fauvel, 1991·Le Goff, 1996). Ανεπάρκεια υπάρχει ακόμη σε επίπεδο εμπειρογνωμοσύνης, καθώς οι μαθηματικοί, λόγω αντικειμένου δεν διαθέτουν την απαραίτητη επιμόρφωση και γνώση για να εξετάσουν τα μαθηματικά από ιστορικής άποψης (Ransom, 1991). Τέλος, στα προαναφερόμενα επιχειρήματα συμπεριλαμβάνεται και η έλλειψη αξιολόγησης. Εφόσον οι μαθητές δεν αξιολογούνται στο συγκεκριμένο αντικείμενο, αυτό έχει σαν συνέπεια να μην δείχνουν την απαιτούμενη προσοχή.

1.3 Τρόποι Ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση

Η διαπίστωση τη αναγκαιότητας διδασκαλίας της ιστορίας των μαθηματικών και των πρακτικών εμποδίων αποτελεί την αφετηρία, αλλά όχι την λύση για την διδασκαλία τους. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να διερευνήσουν και να εφαρμόσουν τους τρόπους που θα μπορούσαν να ενσωματώσουν την ιστορία των μαθηματικών στο μάθημα τους.

Η Furinghetti (2000), προτείνοντας ένα μοντέλο για την διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών τονίζει, ότι αυτό θα πρέπει να βασίζεται στα ακόλουθα επίπεδα: α) γνώση των πηγών, β) επιλογή των κατάλληλων θεμάτων για την τάξη, γ)να έχει προηγηθεί η ανάλυση των αναγκών των μαθητών, δ) να σχεδιάζεται η δραστηριότητα στην τάξη σύμφωνα με τα κατάλληλα εργαλεία, την στοχοθεσία, και το πλαίσιο της δραστηριότητας, ε) να πραγματοποιούνται projects, στ) να αξιολογείται η δραστηριότητα που εφαρμόζεται.

Οι Avital (1995), Davitt (2000) και Tzanakis & Thomaidis, (2000) αναφέρουν ότι η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να διδαχθεί μέσω διαισθητικών διδακτικών προσεγγίσεων. Κατά τον ίδιο τρόπο που στο μάθημα τις ιστορίας αναφέρει ο εκπαιδευτικός ένα ειδικό παράδειγμα μεταπηδώντας στη συνέχεια σε μία θεωρητική προσέγγιση, αντίστοιχα θα μπορούσε να εφαρμοστεί η διαισθητική αυτή μέθοδος και στο μάθημα των μαθηματικών, οδηγώντας τους μαθητές να μεταπηδούσουν σε ένα ανώτερο επίπεδο μαθηματικών (Vital, 1995)

Οι Tzanakis και Archavi (2000), έχουν προτείνει τρείς διαφορετικούς αλλά συνάμα και αλληλοσυμπληρωματικούς τρόπους που μπορούν οι εκπαιδευτικοί να ενσωματώσουν στο μάθημα τους τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών. Οι τρόποι που προτείνουν είναι οι ακόλουθοι:

- Παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών
- Διδακτική προσέγγιση βασισμένη στην ιστορία
- Εις βάθος επίγνωση του μαθηματικού, του κοινωνικού και του πολιτισμικού πλαισίου της μαθηματικής επιστήμης

Εκτός από τους προαναφερόμενους τρόπους οι Tzanakis και Archavi (2000) έχουν επίσης τονίσει ότι η διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να λάβει χώρα με τη χρήση ιστορικών πηγών που αφορούν τα μαθηματικά, φύλλα εργασίας, ερευνητικές εργασίες, ιστορικά προβλήματα, βιωματικές δραστηριότητες, παιχνίδια, ταινίες και άλλα οπτικά μέσα, εξωτερικές δραστηριότητες και χρήση του διαδικτύου.

Οι Barbin & Menghini (2000), έχουν προτείνει την ενσωμάτωση ιστορικών δεδομένων κατά την εφαρμογή διδακτικών στρατηγικών, με τέτοιο τρόπο, ώστε η ιστορία των μαθηματικών να μην είναι άμεσα ορατή ως κυρίαρχο στοιχείο εντός της αίθουσας διδασκαλίας. Για να ενσωματωθεί η ιστορία των μαθηματικών στη διδακτική δραστηριότητα με τον προαναφερόμενο τρόπο, πρέπει να λάβει χώρα η ανακατασκευή (Reconstruction), δηλαδή ο εκπαιδευτικός να εισάγει την ιστορία σιωπηρά, κάνοντας χρήση εννοιών, μεθόδων, συμβολισμών, οι οποίοι έχουν εμφανιστεί αργότερα του θέματος που εξετάζεται (Tzanakis & Arcavi, 2000).

Ο Van Maanen (1997) εστιάζοντας και αυτός στις πρακτικές ενσωμάτωσης τις ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη αναφέρει, ότι ο εκπαιδευτικός μπορεί να σχεδιάζει ερευνητικές μαθηματικές δραστηριότητες, οι οποίες να αποσκοπούν στην ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.

Υπερθεματίζοντας της προαναφερόμενης άποψης οι Fauvel & van Maanen, (1997) τονίζουν ότι ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να γίνουν πιο έμπειροι σε ιστορικά υλικά, ώστε να αναπτύξουν περισσότερες πρακτικές ερευνητικού περιεχομένου κατά την μελέτη των μαθηματικών. Ο Swetz (1989) αναφέρει ότι εμπλεκόμενοι σε ερευνητικές δραστηριότητες οι μαθητές μπορούν να μετατραπούν σε «αρχαιολόγους των μαθηματικών».

Ο εκπαιδευτικός προκειμένου να ενσωματώσει την ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία, θα πρέπει να χρησιμοποιήσει καταρχήν το κατάλληλο υλικό και τις απαιτούμενες πηγές. Το υλικό μπορεί να είναι είτε πρωτογενές, όπως για παράδειγμα διάφορα αποσπάσματα από πρωτότυπα έγγραφα μαθηματικών ή δευτερογενές όπως είναι για παράδειγμα αφηγήσεις, ή ερμηνείες που έχουν γίνει για ζητήματα μαθηματικών (Tzanakis & Archavi, 2000).

Ολοκληρώννοντας, οι Tzanakis & Archavi (2000) και ο Jankvist (2009) έχουν αναπτύξει μία τριπλή κατηγοριοποίηση των μεθόδων εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών κατά τη διδασκαλία τους, κάθε μία εκ των οποίων βασίζεται σε μία προσέγγιση. Αναλυτικότερα οι κατηγορίες είναι :

- **Διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination approaches):** Η διδασκαλία των μαθηματικών και τα βιβλία συμπληρώνονται από ποικίλες ιστορικές πληροφορίες, όπως είναι παραδείγματος χάριν ιστορικά αποσπάσματα, βιβλιογραφίες, διάσημα προβλήματα όπως προαναφέρθηκαν.
- **Προσεγγίσεις οριοθετημένων ενοτήτων (modules approaches):** Αφορούν ενότητες οι οποίες συνδέονται με την ιστορία των μαθηματικών, μελετώντας συγκεκριμένες περιπτώσεις. Συνήθως πρόκειται για ιστορικά πακέτα τα οποία για να μελετηθούν γίνεται χρήση σχολικών εγχειριδίων, πρωτογενών πηγών ή εργασίες μαθητών.
- **Προσεγγίσεις που έχουν ως βάση την ιστορία (history-based approaches):** Αφορά προσεγγίσεις που εστιάζουν στην ανάπτυξη και στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών με σημείο αναφοράς την ιστορία τους. Συνήθως σε αυτές τις προσεγγίσεις γίνεται έμμεση μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών, δεν γίνεται αναλυτική έρευνα για την ιστορική εξέλιξη, ωστόσο από αυτή καθορίζεται ο τρόπος παρουσίασης των θεμάτων των μαθηματικών.

Κεφάλαιο 2ο Τα Κλάσματα

2.1 Η Ιστορία των Κλασμάτων

Τα κλάσματα αποτελούν μία από τις μαθηματικές έννοιες, οι οποίες έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας εδώ και πάρα πολλά χρόνια. Ο προαναφερόμενος επιστημονικός προσανατολισμός, κάθε άλλο παρά τυχαίος είναι, εφόσον η εκπαιδευτική και η μαθητική κοινότητα, θεωρούν τα κλάσματα ως ένα από τα πιο δύσκολα κεφάλαια το μαθήματος των μαθηματικών. Επίσης πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ανεπαρκής γνώση των μαθητών ως προς τα κλάσματα τους φέρνει αντιμέτωπους με πληθώρα δυσκολιών στο μάθημα των μαθηματικών, ενώ επιδρά αρνητικά και στην εκμάθηση άλλων μαθηματικών εννοιών (Petit, Laird & Marsden, 2010).

Εξετάζοντας αδρομερώς την ιστορία των κλασμάτων διαπιστώνεται ότι ως έννοια αναπτύχθηκαν όταν τα κοινωνικά υποκείμενα ήρθαν αντιμέτωπα με προβλήματα που σχετίζονταν με τη «μοιρασιά», όπως επίσης και στις περιπτώσεις που οι φυσικοί αριθμοί δεν μπορούσαν να ικανοποιήσουν τις μαθηματικές ανάγκες τους. Η λέξη κλάσμα έχει αραβικές, ρίζες προερχόμενη από τη λέξη που σημαίνει «σπάσιμο/διαίρεση».

Οι πρώτες ιστορικές αναφορές γύρω από τα κλάσματα διαπιστώνονται σε αναπαραστάσεις κλασμάτων που έχουν εντοπιστεί στην κοιλάδα της Μεσοποτάμιας, οι οποίες ανάγονται στους Σουμέριους και χρονικά τοποθετούνται το 3500 π.Χ. . Σύμφωνα με τον Clawson (2005), οι πληροφορίες γύρω από την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης των Σουμερίων αν και είναι περιορισμένες, ωστόσο από πλακίδια που έχουν διασωθεί διαπιστώνεται, ότι οι προαναφερόμενοι είχαν διαμορφώσει ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο αριθμητικό σύστημα, το οποίο είχε ως βάση το 60 και το 10, ενώ γνώριζαν τις 4 βασικές αριθμητικές πράξεις, την πρόσθεση την αφαίρεση, τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό, όπως επίσης ήταν αξιοσημείωτη και η χρήση κλασμάτων. Οι Σουμέριοι πλεονεκτούσαν στο γεγονός, ότι το σύστημα που είχαν διαμορφώσει, τους επέτρεπε να γράψουν και να χρησιμοποιήσουν με ιδιαίτερη ευκολία τα κλάσματα. Ωστόσο στα μειονεκτήματα του αριθμητικού συστήματος τους έγκειται το γεγονός, ότι ο εκάστοτε αναγνώστης έπρεπε διαβάζοντας στο κοινό να καταλαβαίνει αν πρόκειται για ακέραιους αριθμούς ή κλάσματα. Παρά ωστόσο τις προαναφερόμενες δυσκολίες οι Σουμέριοι, θεωρούνται οι πρώτοι που αναγνώρισαν και ενέταξαν τα κλάσματα τους αριθμούς (Clawson, 2005).

Με την κατάκτηση των Σουμερίων από τους Βαβυλώνιους, οι τελευταίοι υιοθέτησαν και τα μαθηματικά τους, προσαρμόζοντας τα όμως στις δικές τους ανάγκες. Ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα του βαβυλωνιακού συστήματος αρίθμησης ήταν η δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων με αριθμούς και κλάσματα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Προκειμένου οι Βαβυλώνιοι να επιλύουν τα καθημερινά τους προβλήματα όπως για παράδειγμα αυτά που προκύπταν στην παραγωγή του σιταριού σε σχέση με την επιφάνεια των αγρών, προβλήματα που αφορούσαν την κατασκευή των καναλιών, προβλήματα που συνδέονταν αντίστροφους αριθμούς, προβλήματα που αναφέρονταν σε διαστάσεις και στο εμβαδόν ορθογωνίου, έκαναν χρήση των κλασμάτων (Bunt, Jones & Bedient, 1981).

Όσον αφορά τους Αιγυπτίους και την χρήση των μαθηματικών οι υπάρχουσες ιστορικές πληροφορίες προέρχονται από παπύρους με αποκλειστικό μαθηματικό περιεχόμενο. Οι προαναφερόμενοι πάπυροι περιέχουν πληθώρα μαθηματικών προβλημάτων εκ των οποίων μπορούν να αντληθούν χρήσιμες πληροφορίες τόσο για το αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα, όσο και για τον τρόπο εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων (Bunt, Jones & Bedient, 1981). Ως προς τα κλάσματα διαπιστώνεται από τα υπάρχοντα αιγυπτιακά μαθηματικά κείμενα, ότι διαδραμάτισαν σημαίνοντα ρόλο, σε όλες τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Ωστόσο οι Αιγύπτιοι έκαναν χρήση μόνο των κλασμάτων που είχαν ως αριθμητή την μονάδα, τα οποία ονομάζονταν κλασματικές μονάδες, διότι μόνο για αυτά τα κλάσματα είχαν δημιουργήσει ειδικούς συμβολισμούς (Εξαρχάκος, 1997).

Όσον αφορά τα κλάσματα στην αρχαία Ελλάδα διαπιστώνεται ότι οι αρχαίοι Έλληνες δεν εμπλούτισαν ιδιαίτερα το συγκεκριμένο τομέα μιας και θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά έπρεπε να λειτουργούν μόνο με ακέραιους αριθμούς. Κατά συνέπεια δεν παρατηρείται συχνή αναφορά κλασματικών εκφράσεων στα αρχαία ελληνικά κείμενα. Ωστόσο οι πυθαγόρειοι περίπου στα μέσα του 5^{ου} αι. π.Χ. βοήθησαν στην ανάπτυξη των κλασμάτων, καθώς υποστήριξαν ότι η μονάδα είναι αδιαίρετη και έκαναν χρήση των κλασμάτων ως αναλογίες. Ο Πυθαγόρας μαζί με τους μαθητές του προέβησαν στη δημιουργία μιας γενικής θεωρίας που αφορούσε τα κλάσματα και πραγματοποιούσαν τις 4 αριθμητικές πράξεις όπως επίσης και συνέκριναν τα κλάσματα μέσω της μετατροπής τους σε κοινό παρανομαστή. Οι Έλληνες για να αποτυπώσουν τα κλάσματα χρησιμοποιούσαν το ελληνικό αλφάβητο, το οποίο αντιπροσώπευε τους αριθμούς (Bunt, Jones & Bedient, 1981).

Τα κλάσματα στην περίπτωση των Ινδών εντοπίζονται από την περίοδο της αρχαιότητας. Το κλάσμα 1/2 (ardha) και ¾ (tri-pāda), εμφανίζονται σε ένα από τα πιο παλιά έργα του του Ṛgveda περίπου το 100 π.Χ. . Εν αντιθέσει με τους αρχαίους Αιγυπτίους που έκαναν χρήση μόνο κλασματικών μονάδων, οι αρχαίοι Ινδοί χρησιμοποίησαν ακόμη και σύνθετα κλάσματα, τα οποία ήταν απαραίτητα για να εκφραστούν μικρότερες μονάδες, βάρους, μήκους, χρόνου, χρήματος κλπ. Οι Ινδοί έγραφαν τα κλάσματα με παρόμοιο τρόπο με τον σημερινό, δηλαδή υπήρχε ο αριθμητής ο παρονομαστής, αλλά έλειπε η γραμμή ανάμεσα τους. Τόσο αριθμητής, όσο και ο παρονομαστής, εκφράζονταν στο δεκαδικό σύστημα τιμών θέσης. Όταν ένα πρόβλημα εμπεριείχε πολλά κλάσματα, τότε ο διαχωρισμός μεταξύ τους γινόταν με κάθετη και οριζόντια γραμμή. Οι Ινδοί έκαναν ιδιαίτερη χρήση των κλασμάτων με αποτέλεσμα ο τρόπος αρίθμησης και ο συμβολισμός τους, να μεταδοθεί στον ισλαμικό κόσμο. Οι Άραβες προσέθεσαν τη γραμμή στο κλάσμα που χρησιμοποιείται ως σήμερα για να διαχωριστεί ο αριθμητής από τον παρονομαστή. Από τις αραβικές χώρες τα κλάσματα προοδευτικά εξαπλώθηκαν στη μεσαιωνική Ευρώπη (Bunt, Jones & Bedient, 1981).

2.2 Έννοια και Ερμηνείες των Κλασμάτων

Τα κλάσματα αποτελούν μαθηματικές έννοιες ιδιαίτερα πολύπλοκες, με τις οποίες έρχονται σε επαφή μαθητές από την περίοδο της φοίτησής τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005). Τα κλάσματα αντιπροσωπεύουν έναν τομέα των μαθηματικών τον οποίο η εκπαιδευτική κοινότητα δυσκολεύεται να διδάξει και οι μαθητές να κατανοήσουν (Caralambous & Pitta-Pantazi, 2007˙ Stefffe & Olive, 2010˙ Tunç-Pekkan, 2015).

Προκειμένου να γίνει αντιληπτή η έννοια και οι ερμηνείες γύρω από τα κλάσματα, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις 5 υποκατηγορίες της έννοιας του κλάσματος. Αναλυτικότερα πρώτη κατηγορία αφορά το κλάσμα ως μέρος του όλου και συνδέεται με τον τεμαχισμό είτε μίας ποσότητας που είναι συνεχής, είτε ενός συνόλου από διακριτά αντικείμενα σε ισότιμα μικρότερα μέρη (Lamon, 2012). Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία προσέγγισης του κλάσματος μόνο ως μέρος-όλο οδηγεί σε περιορισμένη αντίληψη για την έννοια και το περιεχόμενο του (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992˙ Mack, 2001˙ Olive & Vomvoridi, 2006˙ Thompson & Saldanha, 2003˙ Tzur, 1999). Οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν τι σημαίνει για παράδειγμα 3/4 από τη στιγμή που αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως «τόσα από τόσα» (Thompson & Saldanha, 2003).

Η δεύτερη ερμηνευτική προσέγγιση αφορά την κατανόηση του κλάσματος ως τελεστή, δηλαδή το κλάσμα γίνεται αντιληπτό ως μια συνάρτηση που αντιστοιχεί κάποιο σύνολο ή περιοχή, σε κάποιο άλλο σύνολο ή περιοχή. Με άλλα λόγια το κλάσμα κατανοείται ότι μεγεθύνει ή συρρικνώνει μειώνει ή επεκτείνει διαιρεί ή πολλαπλασιάζει (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007 ·Lamon, 2012· Mamede & Oliveira, 2010· Lamon, 2012).

Η τρίτη ερμηνευτική προσέγγιση αφορά το κλάσμα ως μέτρο, εστιάζοντας στη μέτρηση είτε κάποιου διαστήματος, είτε κάποιου εμβαδού (Lamon, 2012). Σε αυτή την περίπτωση το κλάσμα αποτελεί έκφραση μιας ποσότητας (Wright, 2013) και προκύπτει από τον καθορισμό της σχέσης που έχει το όλο με το μέρος (Wong & Evans, 2008). Σε αυτή την ερμηνευτική προσέγγιση του κλάσματος εμπεριέχεται μια βασική ενέργεια, αυτή του τεμαχισμού, η οποία εμπλέκεται άμεσα στην όλη διαδικασία (Thompson & Saldanha, 2003· Naik & Subramaniam, 2008· Lamon, 2012 ·Simon, Placa, Avitzur και Kara, 2018).

Η τέταρτη ερμηνευτική προσέγγιση αφορά το κλάσμα ως πηλίκο και αναφέρεται στην αντίληψη του κλάσματος ως το προϊόν μιας διαίρεσης, η οποία προκύπτει άμεσα μέσω των καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007˙ Clarke, Roche & Mitchell, 2008·). Ο αριθμητής εκφράζει τον αριθμό των μερών σε κάθε «μοιρασιά» και ο παρανομαστής εκφράζει το κλασματικό μέγεθος της εκάστοτε μοιρασιάς «Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Τέλος η πέμπτη ερμηνευτική προσέγγιση αφορά το κλάσμα ως λόγο και αναφέρεται στην πολλαπλασιαστική σύγκριση ανάμεσα σε δύο ποσότητες (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010), όπως για παράδειγμα συμβαίνει στη σύγκριση ανάμεσα σε αγόρια και κορίτσια μιας τάξης. Σύμφωνα με τον Marshall (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) αυτή η ερμηνευτική προσέγγιση του κλάσματος βοηθά στην ανάπτυξη των ισοδύναμων των τμημάτων.

Λαμβάνοντας υπόψη καθεμία από τις προαναφερόμενες ερμηνευτικές προσεγγίσεις, καταδεικνύεται πόσο αναγκαία είναι η ολόπλευρη κατανόηση των κλασμάτων με βάση και τις 5 προαναφερόμενες διαστάσεις τους, ώστε να μπορούν οι μαθητές να τα κατανοούν ολιστικά (Boyce & Norton, 2016).

2.3 Τα Κλάσματα στα Σχολικά Εγχειρίδια του Γυμνάσιου

Ανατρέχοντας στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ, 2003) της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, διαπιστώνεται ότι τα μαθηματικά θεωρούνται φυσικά αντικείμενα διαρκούς αναζήτησης και προβληματισμού. Το σύγχρονο πλαίσιο αντιλήψεων σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας αλλά και εκμάθησης των μαθηματικών προστάζει πλέον τα μαθηματικά να μην κατανοούνται μόνο σε ένα γνωστικό σύστημα, αλλά ως μια διαδικασία που οι μαθητές συλλαμβάνουν, οργανώνουν και τεκμηριώνουν τις γνώσεις που απέκτησαν. Η στοχοθεσία της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζεται στον πληρέστερο βαθμό της, με όρους που αφορούν δραστηριότητες παρά με όρους που επικεντρώνονται σε παρατηρήσιμες συμπεριφορές. Η εκάστοτε επιλογή αυτών των δραστηριοτήτων λαμβάνει χώρα με βάση συγκεκριμένα κριτήρια, τα οποία αναφέρονται στη γενική στοχοθεσία της μαθηματικής εκπαίδευσης, με τη διατύπωσή τους να παρέχει τη δυνατότητα εμπλοκής του συνόλου της μαθητικής κοινότητας εντός της τάξης (ΔΕΠΠΣ, 2003).

Όσον αφορά τη διδασκαλία των κλασμάτων το ΔΕΠΠΣ (2003) εστιάζει αρχικά στην κατανόηση της έννοιας. Αναλυτικότερα στο συγκεκριμένο στόχο εντάσσεται η δυνατότητα κατανόησης από τους μαθητές της έννοιας του κλάσματος εφαρμόζοντας διαδικασίες χωρισμού του κλάσματος σε μέρη του όλου, η εφαρμογή διαδικασιών αναζήτησης στις σχέσεις ανάμεσα σε ομοειδείς ποσότητες, υπολογισμού μέσω της μεθόδου αναγωγής στη μονάδα της τιμής ενός μέρους από το όλο, για τον υπολογισμό της τιμής του όλου, από την τιμή του μέρους.

Ο δεύτερος στόχος του ΔΕΠΠΣ (2003) αναφέρεται στα ισοδύναμα κλάσματα. Συγκεκριμένα οι μαθητές για να κατανοήσουν επιτυχώς τα ισοδύναμα κλάσματα, πρέπει να αντιληφθούν την έννοια καταρχήν των ισοδύναμων κλασμάτων, να μπορούν να απλοποιούν κλάσματα, να μετατρέπουν κλάσματα σε ομώνυμα και να χρησιμοποιούν τη μέθοδο «χιαστί» για να ελέγχουν την ισοδυναμία των κλασμάτων.

Ο τρίτος στόχος του ΔΕΠΠΣ αναφέρεται στην κατάκτηση της ικανότητας από μέρους των μαθητών να μπορούν να συγκρίνουν τα κλάσματα και να αντιστοιχούν τα κλάσματα με σημεία της ευθείας των αριθμών. Αντίστοιχα ο τέταρτος στόχος αναφέρεται στην κατάκτηση της ικανότητας πραγματοποίησης πράξεων, όπως είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση κλασμάτων. Τέλος, στη στοχοθεσία του ΔΕΠΣΣ (2003) όσον αφορά τα κλάσματα περιλαμβάνεται η κατάκτηση της ικανότητας μετατροπής ενός δεκαδικού κλάσματος, σε δεκαδικό αριθμό και αντιστρόφως.

2.4 Οι Δυσκολίες Κατανόησης των Κλασμάτων από τους Μαθητές

Η πρώτη αναφορά στις δυσκολίες με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές ως προς την κατάκτησης της γνώσης των κλασμάτων εντοπίζεται στο βιβλίο «Study and Difficulty of Mathematics” (1910) του Augustus De Morgan, ο οποίος επεσήμανε ότι η μάθηση των κλασμάτων αναμένεται να παρουσιάσει αξιοσημείωτες δυσκολίες (Brown & Quinn, 2006).

Ανατρέχοντας στην υπάρχουσα ερευνητική βιβλιογραφία μπορεί να εντοπιστεί ότι διαπιστωμένα έχει καταδειχθεί η ύπαρξη βασικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία εκμάθησης των κλασμάτων (Boyce & Norton, 2016˙ Clarke, Roche & Mitchell, 2007˙ Hackenberg & Tillema, 2009˙ Norton & Wilkins, 2009˙ Pantziara- Philippou, 2012). Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές κατά την εκμάθηση των κλασμάτων είναι κάτι που παρατηρείται από την περίοδο φοίτησής τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενώ συνεχίζεται και στις επόμενες βαθμίδες (Kilpatrick et al., 2001· Lemonidis, 2016· Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007, 2010).

Ένας από τους πιο βασικούς παράγοντες που συντελεί στα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές κατά την εκμάθηση των κλασμάτων, είναι το γεγονός ότι τα κλάσματα είναι μια έννοια πολύπλευρη που περιλαμβάνει 5 μικρότερες, αλλά αλληλένδετες κατασκευές. Η πρώτη κατασκευή είναι αυτή του μέρους-όλου (Lamon, 1999), η δεύτερη κατασκευή αφορά αυτήν του λόγου, η τρίτη κατασκευή αφορά τη μετάφραση των κλασμάτων ως τελεστές (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), η τέταρτη κατασκευή εστιάζει στο πηλίκο μιας και κάθε κλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα διαίρεσης και η πέμπτη κατασκευή είναι αυτή του μέτρου, η οποία συνδέεται με δύο έννοιες που είναι αλληλένδετες και αλληλοεξαρτώμενες, την έννοια του αριθμού και την έννοια του μέτρου που αποδίδεται σε κάποιο διάστημα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Ο Behr et al. (1992), αναφέρουν ότι η εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών που συνδέονται με τα κλάσματα, αποτελεί ένα σοβαρό εμπόδιο για την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης. Αρκετές έρευνες επίσης έχουν επισημάνει ότι η μαθητική κοινότητα δυσκολεύεται να κατανοήσει τόσο την έννοια των κλασμάτων, όσο και τις πράξεις τους. Η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα κλάσματα, συνδέεται με τη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Λόγω των γνωστικών προκαταλήψεων που δημιουργούνται κατά τη διδασκαλία των φυσικών αριθμών, οι οποίες παρεμβάλλονται ανάμεσα στην προγενέστερη και στη νέα γνώση, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατασκευάσουν γνωστικά την έννοια του κλάσματος (Ni & Zhou, 2005· McGee et al., 2006).

Ακόμη και μετά από πολλά χρόνια επαφής των μαθητών με τα κλάσματα, οι προαναφερόμενοι συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες ως προς την κατανόησή τους. Οι μαθητές πραγματοποιούν συνήθως διαδικαστικά λάθη στις πράξεις των κλασμάτων, όπως για παράδειγμα στην πρόσθεση αριθμητών και παρονομαστών. Είναι σύνηθες επίσης, οι μαθητές να εκτελούν ορθά τις πράξεις των κλασμάτων, αλλά να μην μπορούν να κατανοήσουν τη λογική που υπάρχει πίσω από αυτές (McGee et al., 2006).

Σύμφωνα με τις υπάρχουσες μελέτες, η μαθητική κοινότητα κατακτά νέες μαθηματικές έννοιες, πραγματοποιώντας 2 παράλληλες διαδικασίες γνώσεων, τη διαδικαστική και την εννοιολογική. Ως διαδικαστική γνώση νοείται η ικανότητα των ατόμων να εκτελούν μια σειρά από πράξεις, προκειμένου να επιλύσουν προβλήματα, χωρίς απαραιτήτως να κατανοούν γιατί πραγματοποιούν αυτές τις διαδικασίες (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010). Αντιστοίχως η εννοιολογική γνώση αφορά την ικανότητα των ατόμων να διασυνδέουν τη γνώση για να κατανοούν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της εκάστοτε έννοιας (Sfard, 1991˙ Rittle-Johnson & Siegler, 2001).

Οι προαναφερόμενοι δύο διαφοροποιημένοι γνωστικοί τύποι έχουν ως συνέπεια, την πρόκληση διαφορετικών αποτελεσμάτων ως προς την μαθηματική απόδοση των μαθητών. Παρά το γεγονός ότι τόσο οι διαδικαστικές, όσο και οι εννοιολογικές γνώσεις είναι εφικτό να είναι αποτελεσματικές ως προς την επίλυση προβλημάτων ανεξαρτήτως από το ποιος από τους δύο προαναφερόμενους μαθησιακούς τρόπους χρησιμοποιείται αρχικά για την απόκτηση της εκάστοτε μαθηματικής ιδέας, οι ερευνητές τονίζουν ότι οι μαθητές που στηρίζονται στην εννοιολογική γνώση μπορούν να είναι πιο αποτελεσματικοί, σε σύγκριση με αυτούς που εστιάζουν κυρίως στις διαδικαστικές γνώσεις (Charles & Nason, 2001˙ Sfard, 1991˙ Gray & Tall , 1994). Οι μαθητές που στηρίζονται στις εννοιολογικές γνώσεις αναπτύσσουν πιο εξελιγμένη μαθηματική σκέψη, ενώ όσοι στηρίζονται στις διαδικαστικές, παρουσιάζουν δυσκολίες όσον αφορά το χειρισμό πολύπλοκων εννοιολογικών μαθηματικών δομών. Παρά το γεγονός ότι η διαδικαστική εκμάθηση είναι απαραίτητη διαδικασία για κατάκτηση των μαθηματικών, ωστόσο μειονεκτεί ως προς το γεγονός ότι μπορεί να αποθηκευτεί σε διαδοχικά γνωστικά σχήματα, που είναι μη δομημένα, τα οποία ωστόσο δεν είναι εύκολα επεξεργάσιμα και συνεπώς οδηγούν τους μαθητές σε πολλές περιπτώσεις να μην κατανοούν επαρκώς ακόμη και απλές μαθηματικές έννοιες. Αντιθέτως η εννοιολογική κατανόηση εστιάζει σε αναπαραστάσεις στατικού και αντικειμενικού περιεχομένου, οι οποίες λειτουργούν συμπιεστικά ως προς τις λειτουργικές πληροφορίες, ενώ τα γνωστικά σχήματα μπορούν να αναπτυχθούν σε πιο βολικές δομές (Sfard, 1991).

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κυρίως οι μαθητές ως προς τα κλάσματα είναι εννοιολογικού χαρακτήρα. Τα εννοιολογικά λάθη βασίζονται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει κατάλληλα τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των φυσικών και των μη φυσικών αριθμών (Vamvakoussi, Van Doooren, & Verschaffel, 2012). Επίσης σημαντική είναι η εννοιολογική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ως προς την κατανόηση του κλάσματος ως λόγου (Clarke & Roche, 2009· Moseley, 2005). Σε έρευνα που πραγματοποίησαν οι Fazio & Siegler, (2011) διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές δεν κατανοούν ότι το κλάσμα προσδιορίζεται από τη σχέση ανάμεσα στους όρους του, καθώς θεωρούν ότι οι όροι περιγράφουν απόλυτα μεγέθη. Ουσιαστικά οι μαθητές κατανοούν τα κλάσματα ως σύμβολα ή τον αριθμητή και τον παρανομαστή ως ξεχωριστούς αριθμούς και όχι ως ενιαίο σύνολο (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Σε έρευνα που διενήργησε ο Moseley, (2005) διαπίστωσε ότι οι δυσκολίες εννοιολογικού περιεχομένου που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα κλάσματα, συνδέονται με την αναπαραστατική ευχέρεια που έχουν ως προς αυτά. Επίσης, τα παιδιά δεν είναι εξοικειωμένα με άλλες αναπαραστάσεις όπως για παράδειγμα το γεγονός ότι το κλάσμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως σημείο στην ευθεία (Kilpatrick et al., 2001).

Κατανοείται συνεπώς ότι η διαδικασία απόκτησης γνώσεων δεν συνδέεται πάντοτε με τη διαδικασία εμπλουτισμού των ήδη κατακτημένων εννοιολογικών δομών, αλλά απαιτείται οι μαθητές να αναδιοργανώσουν ριζικά όσα έχουν ήδη κατακτήσει γνωστικά. Σε αυτό το πλαίσιο της αναδιοργάνωσης οι μαθητές προκειμένου να καταλάβουν τα κλάσματα προβαίνουν σε παρανοήσεις, έχοντας επηρεαστεί από τις προγενέστερες γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς. Η παραπάνω συνθήκη προάγει την ανάπτυξη δυσκολιών στην εξέλιξη της μάθησης και κατάκτησης της γνώσης, γύρω από κλασματικές έννοιες.

Κεφάλαιο 3ο Ιστορικά Προβλήματα & Κλάσματα

3.1 Ιστορικά Προβλήματα

Για πάρα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα η εκπαίδευση των μαθηματικών στο πλαίσιο του σχολείου εστίαζε στην ανάπτυξη χαμηλού επιπέδου δεξιοτήτων, στις οποίες κυριαρχούσαν οι υπολογισμοί (Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2013). Ωστόσο τις τελευταίες δεκαετίες έχει πραγματοποιηθεί μεταβολή όσον αφορά τον τρόπο διδασκαλίας της μαθηματικής επιστήμης, με τους εκπαιδευτικούς να στρέφουν το ενδιαφέρον τους τόσο στην προσπάθεια να συσσωρεύσουν οι μαθητές διαδικαστική μαθηματική γνώση και διαδικαστικές μαθηματικές ρουτίνες , όσο και να αποκτήσουν τα κατάλληλα γνωστικά εργαλεία, τα οποία θα τους φανούν χρήσιμα ως προς την ορθή αξιολόγηση των πολύπλοκων πληροφοριών, με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι στην καθημερινή ζωή τους και οι οποίες εμπεριέχουν μαθηματικές πτυχές (Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2013).

Η προαναφερόμενη μεταστροφή είχε ως αποτέλεσμα στις μέρες μας όταν επιδιώκεται να οριστεί η έννοια και το περιεχόμενο των μαθηματικών, οι περισσότεροι ερωτώμενοι να επικεντρώνουν την προσοχή τους στην επίλυση των προβλημάτων ως σημείο αναφοράς του ορισμού τους, τάση που παρατηρείται σε παγκόσμια κλίμακα και στο σύνολο των αναλυτικών προγραμμάτων των περισσοτέρων κρατών (Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2013).

Εστιάζοντας στην προσπάθεια απόδοσης ορισμού σχετικά με την έννοια και το περιεχόμενο του προβλήματος, αξίζει να λεχθεί ότι έχουν αναπτυχθεί πληθώρα ορισμών γύρω από το ζήτημα. Αναλυτικότερα ο Polya (1945) όρισε το πρόβλημα ως μια συνειδητή αναζήτηση από την πλευρά του ατόμου, προκειμένου να εντοπίσει έναν τρόπο για να επιτύχει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, το οποίο δεν γνωρίζει άμεσα. Μερικές δεκαετίες αργότερα οι Blum και Niss (1991) όρισαν το πρόβλημα ως εκείνη την κατάσταση, η οποία περιλαμβάνει συγκεκριμένα άρρηκτα ερωτήματα που προκαλούν το άτομο πνευματικά, καθώς αυτό δεν διαθέτει τις απαιτούμενες μεθόδους, διαδικασίες ή αλγόριθμους ώστε να απαντήσει άμεσα σε αυτά. Ο Schoenfeld (1992) επιδιώκοντας να προσδιορίσει την έννοια και το περιεχόμενο του προβλήματος υποστήριξε ότι πρόκειται για μια κατάσταση, όπου το άτομο δεν έχει γνωρίσει τον άμεσο τρόπο αντιμετώπισης της και την πορεία που πρέπει να ακολουθήσει, προκειμένου να επιτύχει τη λύση της. Το ίδιο έτος ο Mayer (1992) επεσήμανε ότι ένα πρόβλημα παρουσιάζεται, όταν το άτομο έρθει αντιμέτωπο με μια δεδομένη κατάσταση και επιθυμεί μια άλλη κατάσταση την οποία ονομάζει ως κατάσταση στόχου, αλλά ωστόσο δεν υπάρχει ένας σαφής και προφανής τρόπος, για να περάσει από την μια κατάσταση στην άλλη. Πιο πρόσφατα ο Jonassen (2000) ανέφερε ότι ένα πρόβλημα υφίσταται όταν υπάρχει μια άγνωστη κατάσταση για την οποία απαιτείται να βρεθεί μια τιμή. Ο προσδιορισμός της προαναφερόμενης άγνωστης οντότητας καθορίζεται από τη διαφορά ανάμεσα στην τρέχουσα κατάσταση και στην κατάσταση που έχει τεθεί ως στόχο. Κατανοητό από τους προαναφερόμενους ορισμούς είναι ότι το πρόβλημα νοείται ως ένα έργο, που ο λύτης δεν γνωρίζει τον τρόπο που μπορεί να το επιλύσει. Το προαναφερόμενο γνώρισμα αποτελεί και τη βασική διαφοροποίηση του προβλήματος από την άσκηση, καθώς στη δεύτερη περίπτωση οι μαθητές γνωρίζουν εξ αρχής τις ενέργειες που πρέπει να πραγματοποιήσουν προκειμένου να βρουν το αποτέλεσμα.

Ωστόσο πρέπει να λεχθεί ότι η ιδιότητα μιας κατάστασης ως προβλήματος είναι άμεσα εξαρτώμενη από το άτομο στο οποίο απευθύνεται. Πιο συγκεκριμένα οι Blum και Niss (1991) υποστηρίζουν το πρόβλημα εξαρτάται από τα άτομα τα οποία εμπλέκονται σε αυτή τη διαδικασία. Για παράδειγμα ένα έργο μπορεί να αποτελέσει πρόβλημα για κάποιον όταν δεν γνωρίζει τον τρόπο επίλυσης του, αλλά όχι για κάποιον άλλον που γνωρίζει ακριβώς τις ενέργειες στις οποίες πρέπει να προβεί προκειμένου να βρει το αποτέλεσμα.

Ο χαρακτηρισμός ενός έργου ως προβλήματος είναι άρρηκτα επίσης συνδεδεμένος με το πλαίσιο της κουλτούρας και την πρακτική της τάξης μέσα στην οποία εφαρμόζεται. Οι Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Human, Murray & Wearne (1996) αναφέρουν ότι αυτό που οδηγεί ένα έργο να χαρακτηριστεί ως πρόβλημα είναι ο τρόπος που το αντιμετωπίζουν τόσο οι εκπαιδευτικοί, όσο και οι μαθητές. Κατά συνέπεια οποιοδήποτε έργο με μαθηματικό έλεγχο σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα μπορεί να διδαχθεί ως πρόβλημα (Hiebert et al., 1996).

3.1.1 Ταξινόμηση των Μαθηματικών Προβλημάτων

Όπως αναφέρει ο Swetz (2007) τα γραπτά μαθηματικά αρχεία από την αρχαιότητα, περιλάμβαναν προβλήματα που καλούνται να λύσουν οι αναγνώστες. Αρχεία παλαιότερων πολιτισμών που έχουν διασωθεί όπως για παράδειγμα των Βαβυλωνίων των Αιγυπτίων και των Κινέζων, επιβεβαιώνουν πως οι μαθηματική διδασκαλία συνδεόταν άρρηκτα με την επίλυση προβλημάτων από τα πρώτα στάδια της μαθηματικής εκπαίδευσης των ατόμων. Τα μαθηματικά προβλήματα ανέκαθεν αποτελούσαν αντικείμενο διδασκαλίας, έχοντας επιλεγεί με ιδιαίτερη προσοχή από τον εκάστοτε συγγραφέα, ώστε να συμβάλλουν με αποτελεσματικό τρόπο στην ανάδειξη της μαθηματικής τέχνης. Τα μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιούνταν προκειμένου να ικανοποιήσουν τις άμεσες ανάγκες των κοινωνιών της αρχαιότητας, κάτι που επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι αντικατοπτρίζουν πολλές πτυχές της καθημερινότητας των ανθρώπων της εποχής. Προοδευτικά οι αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που επιδίωξαν να εφαρμόσουν τις αρχές και τις τεχνικές της απόδειξης και της γενίκευσης στη μαθηματική επιστήμη και ειδικότερα στα προβλήματα. Στη μαθηματική βιβλιογραφία υπάρχουν χιλιάδες προβλήματα, τα οποία μπορούν να λειτουργήσουν ως πηγή του εκπαιδευτικού που μπορεί να εφαρμοστεί στο πλαίσιο της σχολικής τάξης.

Στην υπάρχουσα βιβλιογραφία τα μαθηματικά προβλήματα ταξινομούνται με τη χρήση διαφόρων κριτηρίων όπως για παράδειγμα την πληρότητά τους (Newel & Simon, 1972), το σενάριο τους (Blum & Niss, 1991) ή τις δεξιότητες που απαιτούνται από τους λύτες για να επιλυθούν (Greeno, 1991).

Ξεκινώντας με το κριτήριο της πληρότητας τα προβλήματα μπορούν να διακριθούν στα σαφώς δομημένα προβλήματα οπού τόσο η στοχοθεσία τους, όσο και οι επιτρεπόμενες ενέργειες τους είναι προσδιορισμένες και στα ασαφώς δομημένα προβλήματα όπου η στοχοθεσία, η κατάσταση που δίνεται και οι επιτρεπόμενες ενέργειες δεν χαρακτηρίζονται από πλήρη σαφήνεια (Newel & Simon, 1972). Σύμφωνα με την προαναφερόμενη διάκριση, η έμφαση δίνεται στο πρόβλημα και όχι μόνο στη λύση του. Ένα πρόβλημα που είναι σαφώς δομημένο χαρακτηρίζεται από μια καθορισμένη δομή, η οποία αναγνωρίζεται από τον μαθητή, κάτι που του επιτρέπει να κάνει χρήση συγκεκριμένων τεχνικών για να το επιλύσει. Η δομή ενός προβλήματος αναφέρεται στα συστατικά του μέρη δηλαδή στα επιμέρους τμήματά του, καθώς επίσης και στον τρόπο διασύνδεσης αυτών.

Σε ένα πρόβλημα που είναι σαφώς δομημένο όλα τα στοιχεία που έχει περιγράφονται στο πρόβλημα, υπάρχει μια πιθανή λύση, ενώ εμπλέκονται κανόνες και αρχές σε μια γνωστική περιοχή (Jonassen, 1997). Επιπροσθέτως για αυτό το πρόβλημα υπάρχει μια απάντηση ή οποία θεωρείται σωστή και κατανοητή, αφού η σχέση μεταξύ επιλογών και καταστάσεων του προβλήματος είναι πιθανή, ενώ τέλος το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με βάση την εφαρμογή προτεινόμενων συγκεκριμένων στρατηγικών (Κολέζα, 2010).

Από την άλλη πλευρά ένα πρόβλημα είναι ασαφώς δομημένο θεωρείται πραγματικά νέο για τον λύτη και συνεπώς θα πρέπει να επινοήσει μια νέα στρατηγική για να το επιλύσει. Σε αυτή την περίπτωση προβλήματος υπάρχουν περισσότερα άγνωστα στοιχεία, ενώ μπορεί να υπάρχει δυνατότητα εφαρμογής πολλαπλών στρατηγικών για να επιλυθεί, αλλά και να αξιολογηθεί. Στο ασαφές δομημένο πρόβλημα εμπεριέχεται έντονα το στοιχείο της αβεβαιότητας σε σχέση με την εφαρμογή εννοιών, κανόνων και αρχών, προκειμένου να επιλυθεί. Επιπροσθέτως το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από ασυνεπείς σχέσεις μεταξύ ενιαίων, κανόνων και αρχών (Jonassen, 1997).

Μια δεύτερη ταξινόμηση των μαθηματικών προβλημάτων η οποία πραγματοποιείται σύμφωνα με το περιεχόμενό τους, αφορά τα γνωστικά πλούσια ((knowledge-rich) και διαγνωστικά φτωχά προβλήματα ((knowledge-lean) (Glaser, 1984). Για παράδειγμα τα προβλήματα τύπου puzzle θεωρούνται γνωστικά φτωχά προβλήματα, ενώ αντιστοίχως η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου για ένα κοινωνικό φαινόμενο που χαρακτηρίζεται από συνθετότητα αποτελεί γνωστικά πλούσιο πρόβλημα (Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2013).

Ένα άλλο κριτήριο ταξινόμησης των μαθηματικών προβλημάτων αφορά τη γνωστική λειτουργία ή αλλιώς τη δεξιότητα που απαιτείται για να επιλυθεί (Greeno, 1991). Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται για παράδειγμα τα προβλήματα επαγωγής, τα προβλήματα μετασχηματισμού και τα προβλήματα διευθέτησης, όπου παρέχονται όλα τα στοιχεία και ουσιαστικά το άτομο που καλείται να λύσει το πρόβλημα πρέπει να «τακτοποιήσει» τα προβλήματα αυτά με τέτοιο τρόπο ώστε να τα επιλύσει. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λεχθεί ότι δεν είναι δυνατόν το σύνολο των προβλημάτων να ταξινομηθούν κάνοντας χρήση μόνο της μιας από τις προαναφερόμενες κατηγορίες, καθώς σε κάποιες περιπτώσεις θα πρέπει να συνδυαστούν δύο ή περισσότερες από αυτές.

Με κριτήριο το σενάριο τα προβλήματα μπορούν να διακριθούν στα αμιγώς μαθηματικά προβλήματα και σε προβλήματα της καθημερινότητας. Χαρακτηριστικό γνώρισμα των προβλημάτων της καθημερινότητας αποτελούν αυτά που οι καταστάσεις και οι ερωτήσεις από τις οποίες ορίζονται, αφορούν κάποιο μέρος του πραγματικού κόσμου, επιτρέποντας παράλληλα να εμπλακούν κάποιες μαθηματικές έννοιες, μέθοδοι και αποτελέσματα. Με τον όρο πραγματικός κόσμος ορίζεται ο κόσμος που βρίσκεται εκτός των μαθηματικών. Αντιθέτως στα αμιγώς μαθηματικά προβλήματα οι καταστάσεις που περιγράφονται είναι πλήρως ενσωματωμένες σε κάποιο υποθετικό σύμπαν (Blum & Niss, 1991).

Επίσης τα μαθηματικά προβλήματα διακρίνονται σε κλειστά, ανοιχτά και μαθηματικές διερευνήσεις. Τα κλειστά προβλήματα τις περισσότερες φορές αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη μαθηματική περιοχή, ενώ στην εκφώνηση τους περιλαμβάνονται όλες εκείνες οι απαιτούμενες πληροφορίες για λύση, με την απάντησή τους να είναι μονοσήμαντη (Κολέζα, 2010). Τα ανοιχτά ή αλλιώς ασθενή δομημένα προβλήματα επιδέχονται ποικιλία απαντήσεων σε σχέση με τις αρχικές παραδοχές τους. Αυτή η κατηγορία προβλημάτων μπορεί να χαρακτηρίζεται από ελλιπείς ή έμμεσες πληροφορίες, προβλήματα που μπορεί να υπάρχει λάθος, είτε στην εκφώνηση, είτε στη λύση και ζητείται να εντοπιστεί το λάθος όπως και προβλήματα που πρέπει να κατασκευάσουν οι ίδιοι οι λύτες σύμφωνα με τις πληροφορίες που έχουν στη διάθεσή τους. Ως προς τις μαθηματικές διερευνήσεις, χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η μέθοδος project, η οποία τροφοδοτείται από ένα πλαίσιο που περιλαμβάνει υλικό για διερεύνηση, είτε αυτό είναι καθαρά μαθηματικό, είτε σχετίζεται με την πραγματική ζωή (Κολέζα, 2010).

Ανεξαρτήτως της κατηγορίας στην οποία ανήκει ένα μαθηματικό πρόβλημα, όλα τα μαθηματικά προβλήματα πρέπει να φέρουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (Λεμονίδη, 1998). Για παράδειγμα όλα τα μαθηματικά προβλήματα πρέπει να σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο που θα επιτρέπουν στο σύνολο της μαθητικής κοινότητας να συμμετέχει στη διαδικασία επίλυσής τους. Συνάμα όλοι οι μαθητές θα πρέπει να διαθέτουν γνωστική επάρκεια, καθώς σε διαφορετική περίπτωση δεν μπορεί να λάβει χώρα η νέα μάθηση, μιας και γίνεται εφαρμογή των παλιών γνώσεων. Εφόσον οι μαθητές εφαρμόσουν τις αρχικές τους γνώσεις κατά την επίλυση ενός προβλήματος, εν συνεχεία καλούνται να συνειδητοποιήσουν το βαθμό της επάρκειας τους, ώστε να έχουν κίνητρο για την κατάκτηση πρόσθετου κεφαλαίου της μαθηματικής επιστήμης. Τέλος όλα τα προβλήματα θα πρέπει να περιλαμβάνουν στοιχεία ελέγχου και επαλήθευσης των απαντήσεων, ώστε οι μαθητές να μπορούν να αποφασίζουν αν μια λύση είναι λογική και ικανοποιητική όχι (Λεμονίδη, 1998).

3.1.2 Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος

Η επίλυση ενός προβλήματος αναφέρεται στην ικανότητα που διαθέτει ένα άτομο να κάνει χρήση των γνωστικών διαδικασιών, στοχεύοντας να το αντιμετωπίσει και να δώσει σαφή λύση για αυτό. Όπως προαναφέρθηκε, τα μαθηματικά προβλήματα μπορεί να συνδέονται με καταστάσεις της πραγματικής ζωής των μαθητών ή να θεωρούνται σημαντικά για το κοινωνικό περιβάλλον. Επίσης μπορεί να έχουν διαθεματικό χαρακτήρα, δηλαδή να παρατηρείται η εμπλοκή διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων του αναλυτικού προγράμματος ,όπως για παράδειγμα είναι οι φυσικές επιστήμες και η γλώσσα, χωρίς ωστόσο να συνδέονται από τα γνωστικά αντικείμενα κατ' αποκλειστικότητα με το πρόβλημα. Η επίλυση προβλημάτων όπως τα προαναφερόμενα δεν μπορεί να λάβει χώρα εάν οι μαθητές εφαρμόζουν απλά τις διαδικασίες που έχουν διδαχθεί. Σύμφωνα με τους Blum και Niss (1991) η επίλυση ενός προβλήματος αναφέρεται σε όλη εκείνη τη διαδικασία ενασχόλησης του εκάστοτε ατόμου σε μια προσπάθεια να το επιλύσει.

Η επίλυση ενός προβλήματος είναι μια διαδικασία αρκετά περίπλοκη, καθώς πρέπει να συνδυαστεί το γνωστικό κεφάλαιο του λύτη, το προγενέστερο επίπεδο των εμπειριών του, η διαίσθησή του, οι πολλαπλές ικανότητες που έχει, οι στάσεις και οι πεποιθήσεις. Παρά το γεγονός ότι πρόκειται για μια διαδικασία επίπονη για τους μαθητές, τα προβλήματα παρέχουν την ευκαιρία στη μαθητική κοινότητα να προάγει την ικανότητα οργάνωσης των πληροφοριών της, συνάμα κινητοποιούν το ενδιαφέρον ακόμη και των πιο αδύναμων μαθητών, ενώ επιτρέπουν τη διασύνδεση των μαθηματικών με διάφορα πεδία εφαρμογής, δίνοντάς τους πολλές φορές διασκεδαστική χροιά (Blum & Niss, 1991· van De Walle, 2007· Κολέζα, 2010.).

Η επίλυση ενός προβλήματος ειδικότερα τις τελευταίες δεκαετίες αποτελεί μια κεντρική διδακτική πρακτική που στόχο έχει οι μαθητές να οικοδομήσουν γνωστικό κεφάλαιο γύρω από τα μαθηματικά (van De Walle, 2007). Συνάμα η επίλυση των προβλημάτων βοηθά τους εκπαιδευόμενους να αναπτύξουν μαθηματικές ικανότητες όπως για παράδειγμα να αντιλαμβάνονται πληροφορίες και δεδομένα πληρέστερα και να καλλιεργήσουν τη συνδυαστική και τη συλλογική ικανότητα. Η προαναφερόμενη επιδίωξη αποτελεί και τον βασικό λόγο καθώς η επίλυση προβλημάτων θεωρείται αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σύνολο των εκπαιδευτικών βαθμίδων στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα (Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2013).

Σύμφωνα με τον Πόρποδα (2003) η επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων είναι μια διαδικασία πολυδιάστατη, στην οποία δεν περιλαμβάνεται μόνο η γνώση αριθμητικών δεδομένων, αλγορίθμων και πράξεων, αλλά και ο προσωπικός παράγοντας από τον οποίο προκύπτουν ποσοτικές σχέσεις που διασυνδέουν τα στοιχεία πάνω στα οποία διατυπώνεται το πρόβλημα, με συνέπεια αυτό να κατανοείται και να κωδικοποιείται αναλόγως. Για να επιλυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι απαραίτητο οι μαθητές να αναπτύσσουν συλλογιστική σκέψη, συσχετισμούς και να έχουν τη δυνατότητα αναπαράστασης του (Van De Walle 2007).

Ως προς την επίλυση των προβλημάτων σημαντικό είναι το έργο του Polya (1981), ο οποίος πρότεινε ένα μοντέλο για την επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνει 4 στάδια: α) Το στάδιο της κατανόησης, β) το στάδιο της επινόησης ενός σχεδίου λύσης, διαδικασία που συνδέεται με την αναγνώριση, αλλά και την επιλογή των κατάλληλων στρατηγικών, γ) το στάδιο της εφαρμογής του σχεδίου λύσης και δ) το στάδιο της διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

Στο στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να διακρίνει την δομή του προβλήματος, μια διαδικασία που θεωρείται ιδιαίτερα αναγκαία, ειδικότερα στις περιπτώσεις των σύνθετων προβλημάτων. Με τον όρο δομή νοούνται τα επιμέρους στοιχεία-τμήματα, τα οποία συνθέτουν το πρόβλημα, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο αυτά συνδέονται μεταξύ τους και αλληλοεπιδρούν. Για να υπάρξει κατανόηση της δομής, είναι αναγκαία η ανάλυση του προβλήματος στα επιμέρους μέρη του. Ο Polya (1981) τονίζει ότι οι επίδοξοι λύτες θα πρέπει να θέτουν μια σειρά βοηθητικών ερωτήσεων, σε σχέση με το ποια είναι τα ζητούμενα, ποια τα δεδομένα, ποια η συνθήκη του προβλήματος και πώς αυτή ικανοποιείται, ενώ προτείνει επίσης τη χρήση σχημάτων και κατάλληλων συμβολισμών για την επίλυση του. Για την κατανόηση του προβλήματος οι Krulik et al. (1988) τόνισαν, ότι ένας τρόπος προκειμένου αυτό να κατανοηθεί και να γίνει αντιληπτό, είναι να επαναλαμβάνεται η διατύπωση του και να σχεδιάζεται ένα σχήμα, στο οποίο θα εμπεριέχονται τα ζητούμενα και τα δεδομένα του προβλήματος.

Στο στάδιο της ανάλυσης το προβλήματος, ο μαθητής θα πρέπει να διασπάσει σε επιμέρους πιο απλούστερα τμήματα, το πρόβλημα, διαδικασία μέσω της οποίας μπορεί να ελαττωθεί η δυσκολία αντιμετώπισης των προβλημάτων, ειδικότερα όσο προχωρά βαθύτερα η ανάλυση, σε πιο απλά προβλήματα. Ο Polya (1957) εστιάζει ότι ο επίδοξος λύτης θα πρέπει να εστιάσει στη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και στα δύο ζητούμενα. Σε περίπτωση που διαπιστώσει ότι ο προαναφερόμενος συσχετισμός δεν μπορεί να επιτευχθεί άμεσα, τότε απαιτείται να εξετάσει το σύνολο των βοηθητικών προβλημάτων, για να καταρτίσει το απαιτούμενο σχέδιο λύσης. Επίσης συνιστάται ο λύτης να είναι σίγουρος πως έκανε χρήση όλων των δεδομένων και πως έλαβε υπόψη του το σύνολο των εννοιών που εμπεριέχονται στο πρόβλημα. Η επινόηση του σχεδίου λύσης ενός προβλήματος λαμβάνει χώρα όταν είναι γνωστοί τόσο οι υπολογισμοί, όσο και οι πράξεις, οι οποίες θα εκτελεστούν, προκειμένου να εξευρεθούν τα ζητούμενα του προβλήματος (Krulik et al., 1988).

Στο στάδιο του σχεδιασμού και της υλοποίησης πρέπει να λάβει χώρα η λύση του προβλήματος, μέσω της επίλυσης των επιμέρους προβλημάτων. Σε αυτό το στάδιο, ο μαθητής αρχικά σχεδιάζει τις διαφορετικές δυνατές στρατηγικές που έχει στη διάθεσή του και τέλος επιλέγει αυτήν που θεωρεί καταλληλότερη. Τέλος στο τελευταίο στάδιο εφαρμόζει τον πιο αποδοτικό τρόπο επίλυσης του προβλήματος κατά τη γνώμη του. Σε αυτό το στάδιο ο μαθητής πρέπει να ελέγχει κάθε ενέργειά του και την ορθότητα αυτής. Σε αυτή την περίπτωση οι λύτες καλούνται να αναλογιστούν αν υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος και αν τα αποτελέσματα που εντοπίστηκαν σε αυτό το πρόβλημα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε άλλα (Polya, 1957).

Κατά το στάδιο της επαλήθευσης, πρέπει να εξετάζεται και να ελέγχεται το αποτέλεσμα, καθώς επίσης και να αιτιολογείται η λύση που προτείνεται. Μέσω αυτής της διαδικασίας προάγεται η βέλτιστη δυνατή κατανόηση της λύσης, εμπεδώνεται η γνώση και αναπτύσσονται ικανότητες επίλυσης προβλημάτων (Polya, 1957).

Τα προαναφερόμενα στάδια στα οποία αναφέρθηκε ο Polya (1957) εξελίχθηκαν από άλλους ερευνητές (Schoenfeld, 1985· Lester et al., 1989 ·Verschaffel et al., 1999). Σε κάθε περίπτωση αυτό που έχει κατανοηθεί είναι ότι η επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων είναι μια διαδικασία που χαρακτηρίζεται από εξέλιξη και κυκλικότητα καθώς σε κάθε περίπτωση περιλαμβάνονται τα στάδια της διατύπωσης του προβλήματος, της κατανόησης του, της επινόησης και της εφαρμογής ενός σχεδίου και τέλος η διαδικασία της ανασκόπησης (Wilson et al. 1994).

Τέλος οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017), σε πρόσφατη έρευνα που πραγματοποίησαν πρότειναν την εφαρμογή περισσότερων ενεργειών ως προς την καθοδήγηση και την επίλυση ενός προβλήματος, αναφέροντας δέκα στάδια, τα οποία είναι, ο εντοπισμός και η χρήση παρόμοιων γνωστών προβλημάτων, ο εντοπισμός βοηθητικών στοιχείων και σχέσεων που θα συμβάλουν στην επίλυση του υπάρχοντος προβλήματος, η δημιουργία βοηθητικών προβλημάτων που θα λειτουργήσουν ως βοηθητικά μέσα για την επίλυση του επιδιωκόμενου προβλήματος, η διερεύνηση ύπαρξης πιθανών μαθηματικών μοτίβων, η εφαρμογή της αντίστροφης εργασίας με τον εκπαιδευόμενο να ξεκινά είτε από τα συμπεράσματα, είτε από κάποια εικασία του προβλήματος, τη δημιουργία σχημάτων, τη διατύπωση του εκάστοτε προβλήματος με τη χρήση μαθηματικών προβλημάτων, τη διαφοροποίηση του προβλήματος μεταβάλλοντας κάποια βασικά μέρη ή συνθήκες του, το διαχωρισμό ή την εκ νέου διατύπωση του προβλήματος, ώστε να βρεθούν εναλλακτικές για τυπώσεις και τέλος την επανεξέταση της επιχειρηματολογίας του.

3.2 Παραδείγματα Κλασματικών Προβλημάτων

Ακολούθως παρουσιάζονται τα ιστορικά κλασματικά προβλήματα που αναλύονται στην παρούσα έρευνα όπως και η ενδεικτική επίλυση τους.

3.2.1 Το Λιοντάρι και ο Λάκκος

Ένα λιοντάρι έχει βρεθεί σε ένα λάκκο βάθος 50 ποδιών. Κάθε μέρα σκαρφαλώνει το 1/7 του βάθους, ενώ το βράδυ γλιστρά το 1/9. Το ερώτημα που τίθεται στο προαναφερόμενο πρόβλημα είναι σε πόσες μέρες να καταφέρει το λιοντάρι να βγει από το λάκκο (Fibonacci, 2003).

Η λύση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

$\frac{1}{7}50-\frac{1}{9}50=\frac{100}{63}$ το καθαρό ύψος που ανεβαίνει το λιοντάρι στη διάρκεια μίας ολόκληρης μέρας.

Για να ανέβει $50-\frac{1}{7}50=\frac{300}{7}$ χρειάζεται $\frac{300\cdot 7\cdot 9}{7\cdot 100}=27$ ημέρες.

Συνεπώς για να βγει το λιοντάρι από τον λάκκο θα χρειαστεί 27+1=28 ημέρες.

3.2.2 Η Κληρονομιά

Ένας άντρας πλησιάζοντας στο τέλος της ζωής του κάλεσε τους γιους του και του ζήτησε να μοιράσουν την περιουσία του με βάση την επιθυμία του. Ο μεγαλύτερος γιος θα έπαιρνε ένα σόλδι και1/7 από όσα θα περίσσευαν. Ο δεύτερος γύρος θα έπαιρνε 2 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περίσσευαν. Ο τρίτος γιος θα έπαιρνε 3 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περίσσευαν κτλ. Έτσι κάθε γιος θα έπαιρνε ένα σόλδι περισσότερο από τον προηγούμενο και το 1/7 από αυτό που θα περίσσευε, με τον τελευταίο γιο να παίρνει ότι περισσεύει. Με τον προαναφερόμενο τρόπο η περιουσία θα μοιραζόταν δίκαια και όλοι θα είχαν πάρει τα ίδια χρήματα. Το ερώτημα που θέτει το πρόβλημα είναι πόσους γιους είχε ο άνδρας και πόσο μεγάλη ήταν η περιουσία του (Fibonacci, 2003).

Ο μαθητής θα πρέπει να ορίσει ως X τα σόλδια της περιουσίας του άνδρα. Ο πρώτος γιός πήρε $1+\frac{(x-1)}{7}$ σόλδια. Συνεπώς έμενανX-[1+(X-1)/7] σόλδια.

Ο δεύτερος γιός έλαβε.

$$2+\frac{\left[x-1-(x-1)/7-2\right]}{7}$$

$$1+\frac{(x-1)}{7}=2+\frac{[x-1-(x-1)/7-2}{7}$$

$$7+(x-1)=\frac{14+x-1-(x-1)}{7-2}$$

$$\frac{(x-1)}{7}=5$$

$$x-1=35$$

$$x=36$$

Κατά συνέπεια ο πρώτος και κάθε γιός πήρε $\frac{1+(36-1)}{7}=36$,

Άρα $\frac{36}{6}$=6 γιοί.

Άρα ο κάθε ένας γιός πήρε 36 σόλδια και ήταν 6 γιοί.

3.2.3 Το Πρόβλημα του Issak Newton

Δυο ταχυδρόμοι Α και Β απέχουν 59 μίλια ο ένας από τον άλλον και ξεκινούν το πρώτο ταξίδι τους για να συναντηθούν. ο Α διανύει 7 μίλια εντός 2 ωρών και ο Β διανύει 8 μίλια εντός 3 ωρών, Με τον Β να ξεκινά το ταξίδι του μια ώρα αργότερα σε σχέση με τον Α, το ερώτημα που τίθεται είναι πόσα μίλια θα πρέπει να διανύσει ο Α έως ότου να συναντήσει τον Β (Newton, 1720).

Η λύση του προβλήματος είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι τα μίλια είναι x τα οποία θα διανύσει ο Α ταχυδρόμος έως ότου συναντήσει τον Β. Κατά συνέπεια 59-x είναι τα μίλια που θα διανύσει ο Β έως το σημείο συνάντησης. Ο Α ταξιδεύει 7 μίλια μέσα σε 2 ώρες, οπότε τα x μίλια που θα διανύσει είναι σε $\frac{2x}{7}$ ώρες.

Ο Β διανύει 8 μίλια σε 3 ώρες, συνεπώς τα 59 μίλια θα τα διανύσει σε $\frac{3(59-x)}{8}=\frac{177-3x}{8}$ ώρες.

Ο ταχυδρόμος Β με βάση την εκφώνηση του προβλήματος θα ξεκινήσει μία ώρα αργότερα από τον Α, συνεπώς $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Πραγματοποιώντας τις πράξεις προκύπτει ότι x=35. Δηλαδή ο Α θα διανύσει 35 χλμ. έως ότου συναντήσει τον Β.

3.2.4 Παλατινή Ανθολογία

Η Αφροδίτη ρώτησε τον Έρωτα γιατί στεκόταν κατηφής και αυτός της απάντησε ότι οι μούσες το έκλεψαν τα μήλα που είχε φέρει από τον Ελικώνα, καθώς τα άρπαξαν από το κόρφο του και τα μοιράστηκαν μεταξύ τους παίρνοντας η κάθε μία διαφορετικό αριθμό. Το 1/5 των μήλων το πήρε η Κλειώ, το 1/12 του Ευτέρπη και το 1/8 Θάλεια, η Μελπομένη πήρε το 1/20, η Τερψιχόρη το 1/4 και ή Ερατώ το 1/7. 30 μήλα έκλεψε η Πολύμνια, η Ουράνια 120 και η Καλλιόπη έφυγε με 300 μήλα. Ο Έρωτας αναφέρει στην Αφροδίτη ότι έρχεται με τα χέρια ελαφρόμένα και της δίνει 50 μήλα που το άφησαν οι θεές. Το ζητούμενο που τίθεται είναι πόσα μήλα είχε πάρει συνολικά ο έρωτας από τον Ελικώνα.

Ως προς τη λύση του προβλήματος μαθητές θα πρέπει να ορίσει ότι έστω x είναι ο αριθμός των μήλων που έχει πάρει ο Έρωτας από τον Ελικώνα. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος θα πρέπει να δημιουργήσει την ακόλουθη εξίσωση :

$$x-\frac{x}{5}-\frac{x}{12}-\frac{x}{8}-\frac{x}{20}-\frac{x}{4}-\frac{x}{7}-30-120-300=50$$

Ακολούθως γίνεται πολλαπλασιασμός κατά μέλη με το 840 με αποτέλεσμα να προκύπτει ότι: 840x-168x-70x-105x-42x-210x-120x=420.000

125x=420.000

X=3.360

Κατά συνέπεια ο έρωτας έλαβε 3.360 μήλα.

3.2.5 Η Κληρονομιά του Euler

Ένας πατέρας αφήνει κληρονομιά στους γιους του δίνοντας στο πρώτο παιδί 100 λίρες και το $\frac{1}{10}$ του υπολοίπου. Το δεύτερο παιδί έλαβε 200 λίρες και το $\frac{1}{10}$ του υπολοίπου, τρίτο παιδί έλαβε 300 λίρες και το $\frac{1}{10}$ του υπολοίπου, κτλ. Με αυτόν τον τρόπο ο πατέρας μοίρασε την περιουσία του ισότιμα σε όλα τα παιδιά του. Το πρόβλημα ζητά να εντοπιστεί το αρχικό ποσό της κληρονομιάς και ο αριθμός των παιδιών (Euler & Heche, 2015).

Έστω ότι η αρχική περιουσία του πατέρα είναι z λίρες και έστω ότι x είναι το μερίδιο που παίρνει το κάθε παιδί. Τότε ο αριθμός των παιδιών θα είναι $\frac{z}{x}$. Ακολούθως σχηματίζεται ο παρακάτω πίνακας

Πίνακας 1. Συνοπτική Παρουσίαση Δεδομένων Προβλήματος «Η Κληρονομιά του Euler»

Κληρονομιά προς Διανομή	Παιδιά	Μερίδιο για Κάθε Παιδί	Διαφορές
z	1º	x=100+$\frac{z-100}{10}$	
z-x	2º	x=200+$\frac{z-x-200}{10}$	100-$\frac{x+100}{10}=0$
z-2x	3º	x=300+$\frac{z-2x-300}{10}$	100-$\frac{x+100}{10}=0$
z-3x	4º	x=400+$\frac{z-3x-400}{10}$	100-$\frac{x+100}{10}=0$

z-4x	5^o	x=500+ $\frac{z-4x-500}{10}$	100-$\frac{x+100}{10}=0$
z-5x	6^o	x=600+ $\frac{z-5x-600}{10}$	100-$\frac{x+100}{10}=0$

Οι διαφορές κάθε μεριδίου από το προηγούμενο πρέπει να είναι Ο. Άρα λύνοντας την εξίσωση 100-$\frac{x+100}{10}=0$ => x=900 λίρες. Άρα κάθε παιδί έλαβε 900 λίρες και συνεπώς παίρνοντας οποιανδήποτε τύπο από την $3^η$ στήλη προκύπτει ότι: x=100+ $\frac{z-100}{10}$ => 900=100+ $\frac{z-100}{10}$ => z=8100 λίρες η συνολική περιουσία του πατέρα. Άρα ο αριθμός των παιδιών θα είναι $\frac{8100}{900}$=9 παιδιά.

3.2.6 Πρόβλημα Μοιρασιάς από τον Euler 1770 μ.Χ.

Ένας πατέρας αφήνει 1600 λίρες για αν μοιραστούν στους τρείς γιούς του με τον ακόλουθο τρόπο. Ο μεγαλύτερος θα πάρει 200 λίρες περισσότερες από τον δεύτερο και ο δεύτερος 100 λίρες από τον νεότερο. Ποιο το μερίδιο που θα λάβει ο κάθε γιός;

Ο Euler προτείνει την αλγεβρική λύση του προβλήματος. Έστω x το μερίδιο του νεότερου γιού. Τότε ο δεύτερος θα πάρει x+100 και ο πρώτος x+300. Οπότε x+x+100+x+300=1600=> x=400 λίρες ο νεότερος, 500 ο δεύτερος και 700 λίρες ο μεγαλύτερος.

Μία άλλη πιο πρακτική λύση είναι η ακόλουθη. Αν αφαιρεθούν οι διαφορές μεταξύ των μεριδίων, δηλαδή τις 400 λίρες τότε το ποσό των 1600-400 = 1200 λιρών μοιράζεται ίσα και στους τρείς γιούς, ήτοι 1200:3=400. Άρα ο νεότερος παίρνει 400 λίρες, ο δεύτερο 500 λίρες και ο μεγαλύτερος 700 λίρες (Euler & Heche, 2015).

3.2.7 Πρόβλημα Χρηματικών Ποσών

Το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο χρηματικά ποσά, η διαφορά των οποίων είναι 2 dirhams (νομισματική μονάδα που χρησιμοποιείται σε αραβικά κράτη) (Swetz, 1993). Αν διαιρεθεί το μικρότερο ποσό με το μεγαλύτερο, το πηλίκο θα ισούται με $\frac{1}{2}$. Το ερώτημα που τίθεται, είναι να βρεθούν τα χρηματικά ποσά.

Η λύση του προβλήματος είναι η ακόλουθη, εάν x το μεγαλύτερο ποσό τότε το μικρότερο θα είναι x-2 και θα ισχύει $\frac{x-2}{x}=\frac{1}{2}$ οπότε, 2(x-2) =x=>x=4. Άρα το ένα ποσό θα είναι 4 και το άλλο 2.

3.2.8 Το Γέμισμα της Δεξαμενής

Το πρόβλημα αναφέρει ότι 4 χείμαρροι καταλήγουν σε μία δεξαμενή όπου ο καθένας χρειάζεται ξεχωριστά 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{6}$ ημέρες αντίστοιχα να τη γεμίσουν. Αν όλοι οι χείμαρροι ρίχνουν ταυτόχρονα νερό στην δεξαμενή, πόσος χρόνος χρειάζεται για την γεμίσουν; .

Η λύση του Bhaskara αναφέρει ότι έστω ότι t_1,t_2,t_3, t_4 είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι που χρειάζονται οι χείμαρροι για να γεμίσουν τη δεξαμενή ξεχωριστά, τότε ο χρόνος που απαιτείται αν όλοι μαζί οι χείμαρροι γεμίζουν την δεξαμενή θα είναι

$$\frac{1}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}}=\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{1+2+3+6}=\frac{1}{12}$$ της ημέρας.

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης είναι ο ακόλουθος: Οι 4 χείμαρροι, γεμίζουν σε μία μέρα αντίστοιχα 1, 2, 3 και 6 δεξαμενές. Άρα όλοι μαζί σε μία μέρα γεμίζουν 12 δεξαμενές (όμοιες). Άρα 1 δεξαμενή θα τη γεμίσουν σε $\frac{1}{12}$ της ημέρας όλοι μαζί.

Μία άλλη λύση είναι με τη χρήση της έννοιας της παροχής που είναι το πηλίκο του όγκου προς το αντίστοιχο του χρόνου $\Pi=\frac{V}{t}$.

Οι παροχές των χειμάρρων είναι αντίστοιχα: $\Pi_1 = \frac{V}{1}, \Pi_2 = \frac{V}{\frac{1}{2}}, \Pi_3 = \frac{V}{\frac{1}{3}}, \Pi_4 = \frac{V}{\frac{1}{6}}$,

ενώ εάν λειτουργούν και οι 4 χείμαρροι γεμίζοντας τον ίδιο όγκο V της δεξαμενής, η συνολική παροχή θα είναι αθροιστική:

$$\Pi_{ολ} = \frac{V}{t} \Rightarrow \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{V}{t} \Rightarrow V + 2V + 3V + 6V = \frac{V}{t} \Rightarrow 12V = \frac{V}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{12}$$

της ημέρας.

3.2.9 Παλατινή Ανθολογία

Ένας πατέρας άφησε στους δύο γιούς του 1000 στατήρες της περιουσίας του. Το $\frac{1}{5}$ όμως από το μερίδιο του γνήσιου γιού, ήθελε να αυξηθεί κατά 10 από το $\frac{1}{4}$ αυτού που θα έπαιρνε ο νόθος γιός (Ανθολογία Ελληνική, 2008).

Η λύση του προβλήματος είναι η ακόλουθη : Έστω ότι α το μερίδιο του γνήσιου γιου και β το μερίδιο του νόθου γιού. Τότε θα ισχύουν, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματα τα παρακάτω.

α+β=1000 (1) και $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} + 10$ (2)

(1)=> α=1000-β οπότε (2)=> $\frac{1000-\beta}{5} = \frac{\beta}{4} + 10$

$$20\frac{1000-\beta}{5} = 20\frac{\beta}{4} + 20 \cdot 10 \Rightarrow 4000 = 4\beta = 5\beta + 200 \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{3800}{9} = 422\frac{2}{9} \text{ και } \alpha = 1000 - \frac{3800}{9} = \frac{5200}{9} = 577\frac{7}{9}$$

Άρα ο γνήσιος γιός θα πάρει $577\frac{7}{9}$ στατήρες και ο νόθος $422\frac{2}{9}$ στατήρες.

3.2.10 Πρόβλημα Κληρονομίας

Μία κληρονομιά μοιράζεται με τον ακόλουθο τρόπο μεταξύ ενός ορισμένου αριθμού κληρονόμων. Ο πρώτος κληρονομεί α δρχ. και V-στό μέρος του υπολοίπου, ο δεύτερος 2α δρχ. και το V-στό μέρος του νέου υπολοίπου, ο τρίτος 3^{α} δρχ. και V- στο μέρος του νέου υπολοίπου κ.ο.κ. Υπό αυτές τις συνθήκες όλοι οι κληρονόμοι βρίσκονται να έχουν λάβει ίσα μερίδια. Ποιος είναι ο αριθμός των κληρονόμων και ποιο το μερίδιο του καθενός; (Bouchery, 1961).

Έστω ότι x η κληρονομιά τότε ο πρώτος θα πάρει $a+\dfrac{x-a}{V}$ δρχ.

Επειδή όλοι οι κληρονόμοι θα πάρουν ίσα μερίδια θα ισχύει $\alpha(v-1)^2$ δρχ. και το μερίδιο του κάθε κληρονόμου θα είναι : $a+\dfrac{a(v-1)^2-a}{v}=a(v-1)$ δρχ. και άρα ο αριθμός των κληρονόμων θα είναι : $a\dfrac{(v-1)^2}{a(v-1)}$=v-1.

Στην εργασία των Maria T. Sanz και Berbardo Gomez για το πρόβλημα «Η Κληρονομιά» αναφέρεται μία λύση του Fibonacci (2002), αρκετά παράξενη και γρήγορη. Όπως έχει αναφερθεί στο πρόβλημα 3.2.2. κάθε γιός ξεκινώντας από τον 1^{o} έπαιρνε 1 σόλδι και το $\frac{1}{7}$ της υπόλοιπης περιουσίας. Ο $2^{ος}$ 2 σόλδια και το $\frac{1}{7}$ της περιουσίας. Ο Fibonacci έλυσε το πρόβλημα με τον ακόλουθο γρήγορο τρόπο:

Για το $\frac{1}{7}$ που έδωσε ο πατέρας σε κάθε παιδί κρατούνται τα 7 από το οποίο αφαιρείται το 1. Άρα απομένουν 6 και συνεπώς τόσοι ήταν οι γιοί συνολικά. Το 6 πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του κάνει 36 και αυτός είναι ο αριθμός όλων των σολδίων. Κάνοντας μία προσπάθεια να επιλυθεί το 6^{o} πρόβλημα με τον προαναφερόμενο περίεργο τρόπο διαπιστώνεται ότι ισχύει:

Για το V-στό που δίνεται σε κάθε παιδί κρατείται το V και αφαιρείται το 1. Άρα μένουν (V-1) και επομένως τόσα είναι τα παιδιά. Επειδή ο πρώτος γιος πήρε α δρχ., ενώ στο πρόβλημα 3.2.2. ο πρώτος γιός πήρε 1 σόλδι, η περιουσία είναι 1·(7-1)·(7-1)=36 σύμφωνα με την μέθοδο του Fibonacci, α·(V-1)·(V-1)=α $(v-1)^2$ θα είναι η συνολική περιουσία. Παρατηρείται ότι, τόσο το 36 όσο και το $\alpha(V-1)^2$ στο 6^o πρόβλημα συμφωνούν με τα αποτελέσματά μας.

Οι Sanz-Gomez, όπως και ο γράφων, μη μπορώντας να εξηγήσουν επαρκώς την μέθοδο του Fibonacci, πιθανολογούν πως έκανε χρήση μίας αριθμητικής μεθόδου που στηρίζεται στην παραγοντοποίηση και στην αναλογία, δίνοντας μία εξήγηση με συμβολική γλώσσα:

Έστω ότι C το τελικό υπόλοιπο των σολδίων που έλαβε ο τελευταίος γιός. Επειδή η διαφορά μεταξύ του ποσού που απομένει πριν την τελική διανομή και αυτού που λαμβάνει ο τελευταίος γιός είναι μηδέν, τότε έχουμε:

c-[1n+1/7*(c-1n)=0 (1) όπου $[1\cdot n+\frac{1}{7}(c-1\cdot n)]$ το τελικό ποσό που έλαβε ο τελευταίος γιός. Όπου n: ο αριθμός των γιών. (1)=>7c-c-7n-n=0 6n=6c (2). Άρα ο αριθμός των παιδιών είναι ίσως με το τελικό υπόλοιπο. Άρα η κληρονομιά θα είναι $c\cdot n=n\cdot n=n^2$ και έτσι το ποσό που έλαβε ο $1^{ος}$ γιός θα είναι $1+\frac{1}{7}(n^2-1)=n \Rightarrow n=6$

.

Άρα οι γιοί θα είναι 6 και η συνολική κληρονομιά θα είναι n^2=36 σόλδια.

3.2.11 Το Λιοντάρι και το Πρόβατο

Ένα λιοντάρι τρώει ένα πρόβατο σε 4 ώρες, μία λεοπάρδαλη τρώει το ίδιο πρόβατο σε 5 ώρες και μία αρκούδα τρώει το ίδιο πρόβατο σε 6 ώρες. Αν ρίχναμε το πρόβατο στα τρία σαρκοβόρα, πόση ώρα θα έκαναν όλα μαζί για να το φάνε (Fibonacci, 2002);

Ο Fibonacci προτείνει την ακόλουθη λύση:

Για το λιοντάρι που χρειάζεται 4 ώρες να φάει το πρόβατο γράφουμε $\frac{1}{4}$, για την λεοπάρδαλη που χρειάζεται 5 ώρες για να φάει το πρόβατο γράφουμε $\frac{1}{5}$ και για την αρκούδα αντίστοιχα $\frac{1}{6}$. Επειδή το $\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{6}$ χωράνε ακριβώς στο 60, ας υποτεθεί ότι χρειάζονται 60 ώρες για να φάνε όλα μαζί τα σαρκοβόρα το πρόβατο. Κατόπιν ο Fibonacci εξέτασε πόσα πρόβατα θα έτρωγε το λιοντάρι σε 60 ώρες. Επειδή σε 4 ώρες τρώει 1 πρόβατο, σε 60 ώρες θα έτρωγε 15 πρόβατα. Αντίστοιχα η λεοπάρδαλη θα έτρωγε σε 60 ώρες 12 πρόβατα και η αρκούδα 10 πρόβατα. Άρα σε 60 ώρες και τα τρία σαρκοβόρα μαζί θα έτρωγαν 12+15+10=37 πρόβατα. Πολλαπλασίασε το 1 με το 60 και το διαίρεσε με το 37 οπότε $\frac{60}{37}=1\frac{23}{37}$. Σε τόσες ώρες θα είχαν φάει το πρόβατο και τα 3 ζώα μαζί.

Μία άλλη λύση του προβλήματος είναι με αναγωγή στην μονάδα του χρόνου. Δηλαδή σε 1 ώρα το λιοντάρι τρώει το $\frac{1}{4}$ του προβάτου. Η λεοπάρδαλη το $\frac{1}{5}$ και η αρκούδα το $\frac{1}{6}$.

Άρα όλα μαζί σε 1 ώρα τρώνε : $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{15+12+10}{60}=\frac{37}{60}$ του προβάτου σε 1 ώρα.

Άρα τα $\frac{60}{60}$ του προβάτου σε $x=\frac{60}{37}$ ώρες $=1\frac{23}{37}$ ώρες.

3.2.12 Πρόβλημα Ταξιδιού

Ένας άνδρας πήγε στη Lucca για δουλειές. Εκεί διπλασίασε τα χρήματα του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Μετά πήγε στην Φλωρεντία όπου και πάλι διπλασίασε τα χρήματα του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Τέλος έφτασε στην Πίζα όπου κι εκεί διπλασίασε τα χρήματα του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Στο τέλος δεν του περίσσεψαν καθόλου χρήματα. Πόσα χρήματα είχε αρχικά (Fibonacci, 2002);

Η λύση που προτείνει η Fibonacci είναι η ακόλουθη:

Αφού ο άνδρας διπλασίαζε κάθε φορά τα χρήματα του είναι προφανές ότι τα 2 θα γίνουν από το 1, με αποτέλεσμα να προκύπτει κλάσμα $\frac{1}{2}$ και μάλιστα 3 φορές λόγω των 3 ταξιδιών. Οπότε $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Το 2 πολλαπλασιάζεται με το 2 και το άλλο 2, οπότε προκύπτει το 8 στον παρανομαστή, από το οποίο παίρνουμε το $\frac{1}{2}$ δηλαδή το 4, από το οποίο παίρνουμε το $\frac{1}{2}$, δηλαδή, το 2 και ακολούθως το $\frac{1}{2}$ δηλαδή το 1. Στη συνέχεια προσθέτουμε το 4, το 2 και το 1 που έχουν αποτέλεσμα 7 και ακολούθως πολλαπλασιάζουμε με τα 12 δηνάρια που ξόδεψε ο άνδρας, όπου προκύπτει το αποτέλεσμα 84 και διαιρείται με το 8.

Το αποτέλεσμα είναι 10 και $\frac{1}{2}$ δηνάρια που είχε ο άνδρας αρχικά.

Ένας άλλος τρόπος λύσης είναι με τη χρήση άλγεβρας. Έστω ότι x τα χρήματα που είχε ο άνδρας αρχικά. Στη Lucca θα είχε 2x-12. Στη Φλωρεντία 2(2x-12)-12 και στη Πίζα, 2[2(2x-12)-12]-12=0.

Λύνοντας την εξίσωση προκύπτει ότι x=10,5 δηνάρια.

Ένας άλλος τρόπος λύσης χρησιμοποιεί πρακτική αριθμητική. Εφόσον στην Πίζα δεν έμειναν στον άνδρα καθόλου χρήματα αυτό σημαίνει ότι είχε 12 δηνάρια τα οποία και ξόδεψε. Αφού όμως στην Πίζα διπλασίασε τα χρήματα του, αυτό σημαίνει ότι όταν έφτασε σε αυτόν τον προορισμό, είχε 6 δηνάρια. Άρα στην Φλωρεντία είχε 18 δηνάρια όπου και ξόδεψε τα 12. Συνεπώς στην Φλωρεντία έφτασε με 9 δηνάρια τα οποία και διπλασίασε και στην Lucca είχε 21 δηνάρια όπου και ξόδεψε τα 12. Τα 21 δηνάρια τα είχε αποκτήσει προφανώς διπλασιάζοντας τα αρχικά χρήματα του. Δηλαδή 10,5 δηνάρια, άρα αρχικά ο άνδρας είχε 10,5 δηνάρια.

3.2.13 Τα Μαργαριτάρια του Raja

Το πρόβλημα θυμίζει, το πρόβλημα με την Κληρονομιά του Fibonacci (3.2.2). Ένας ραγιάς πεθαίνοντας άφησε στις κόρες του έναν ορισμένο αριθμό μαργαριταριών με οδηγία να μοιραστούν με τον ακόλουθο τρόπο:

Η μεγαλύτερη κόρη θα έπαιρνε 1 μαργαριτάρι και το $\frac{1}{7}$ από αυτά που είχαν απομείνει.

Η 2η κόρη θα έπαιρνε 2 μαργαριτάρια και το $\frac{1}{7}$ από αυτά που είχαν απομείνει.

Η 3η κόρη θα έπαιρνε 3 μαργαριτάρια και το $\frac{1}{7}$ από αυτά που έμειναν κ.ο.κ. Πόσα μαργαριτάρια υπήρχαν και πόσες κόρες είχε ο ραγιάς; (Fibonacci, 2002).

Αναφέρεται εδώ μία λύση διαφορετική, με τη χρήση πρακτικής αριθμητικής, που υπάρχει στην εργασία των Maria T. Sanz και Berardi Gomez, που χρησιμοποιήθηκε από κάποιους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα τους.

Ας υποτεθεί ότι το συνολικό ποσό -1 είναι ένας αριθμός διαιρετός με το 7. Αν για παράδειγμα ο αρχικός αριθμός μαργαριταριών είναι π.χ. 15 τότε προκύπτει: 15-1=14, $\frac{14}{7}$=2.

Άρα, η 1η κόρη έχει 3 μαργαριτάρια, και το υπόλοιπο θα είναι 12.

Οπότε η 2η κόρη θα λάβει 12-2=10.

Το 10 δεν διαιρείται με το 7.

Συνεπώς το 15 απορρίπτεται.

Συνεχίζοντας τις δοκιμές φτάνουμε στον αριθμό 36.

Οπότε :

36-1=35 και $\frac{35}{7}$=5. Άρα η 1η κόρη έχει 6 μαργαριτάρια.

Υπόλοιπο 30 : 30-2=28 και $\frac{28}{7}$=4. Άρα η 2$^{\eta}$ κόρη έχει 6 μαργαριτάρια.

Υπόλοιπο 24: 24-3=21 και $\frac{21}{7} = 3$. Άρα η 3$^{\eta}$ κόρη έχει 6 μαργαριτάρια.

Υπόλοιπο 18: 18-4=14 και $\frac{17}{7}$=4. Άρα β 4$^{\eta}$ κόρη έχει 6 μαργαριτάρια

Υπόλοιπο 12: 12-5=7 και $\frac{7}{7}$=1. Αρά η 5$^{\eta}$ κόρη έχει 6 μαργαριτάρια.

Υπόλοιπο 6: Άρα η 6$^{\eta}$ και τελευταία κόρη έχει 6 μαργαριτάρια.

Σύνολο 36 μαργαριτάρια και 6 κόρες.

3.2.14 Το πρόβλημα των Χρημάτων στο Πορτοφόλι

Ένας άνδρας βρήκε ένα πορτοφόλι το οποίο περιείχε μερικά δουκάτα, δεν αναφέρονται πόσα. Από αυτά ξοδεύει διαδοχικά τα $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ και $\frac{1}{6}$ και περισσεύουν 9 δουκάτα. Ζητείται ο αριθμός των δουκάτων στο πορτοφόλι όταν το βρήκε.

Η λύση που δίνεται είναι ότι αυτοί οι 3 αριθμοί περιέχονται στο 120 (οι παρανομαστές), όπως προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους μεταξύ τους. Διαιρώντας με το 2 θα έχουμε 60, στο οποίο οι παρανομαστές επίσης εμπεριέχονται. Ακολούθως λαμβάνουν χώρα οι εξής ενέργειες:

Το $\frac{1}{4}$ του 60 είναι το 15.

Το $\frac{1}{5}$ του 60 είναι το 2.

Το $\frac{1}{6}$ του 60 είναι το 10.

Το σύνολο είναι 37.

Αν αφαιρεθεί το 37 από το 60, απομένουν 23.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα των τριών προκύπτει

- Απέμειναν 23 από τα 60.
- Απέμειναν 9 από τα x;

$23x=60\cdot 9 \Rightarrow x=23\frac{11}{23}$ δουκάτα είχε αρχικά το πορτοφόλι.

Μία λύση αλγεβρική είναι η ακόλουθη: Αν x ο αριθμός των συνολικών δουκάτων στο πορτοφόλι, θα ισχύει : $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}+9=x$

- ⇨ $15x+12x+10x+540=60x \Rightarrow x=\frac{540}{23}=23\cdot\frac{11}{23}$ δουκάτα.

3.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση Προγενέστερων Ερευνών

Όσον αφορά προγενέστερες έρευνες που έχουν εστιάσει στην επίλυση ιστορικών κλασματικών προβλημάτων και τον τρόπο που τα αντιμετωπίζουν οι μαθητές διαπιστώθηκαν οι ακόλουθες έρευνες.

Οι Park, Mccroy & Gucler (2012) διεξήγαγαν έρευνες εξετάζοντας τις απόψεις των εκπαιδευτικών ως προς την διδασκαλία των ιστορικών κλασματικών προβλημάτων στο πλαίσιο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε ήταν ποιοτική με τους ερευνητές να βιντεοσκοπούν 6 διδακτικές ώρες στο πλαίσιο των οποίων οι εκπαιδευτικοί δίδαξαν ιστορικά κλασματικά προβλήματα εντός της σχολικής τάξης. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν τα κλάσματα ως επέκταση του ακέραιου συστήματος αριθμών και κατά συνέπεια και τα κλάσματα ως αριθμούς. Οι προαναφερόμενες αντιλήψεις δημιουργούσαν σημαντικά προβλήματα στους μαθητές προκειμένου να κατανοήσουν το γνωστικό κεφάλαιο των κλασμάτων.

Η Σταυρίδου (2016) διεξήγαγε έρευνα εξετάζοντας τους λόγους για τους οποίους οι εκπαιδευτικοί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση προβαίνουν στην επιλογή συγκεκριμένων προβλημάτων για να διδάξουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων. Η μέθοδος έρευνας που εφαρμόστηκε ήταν η μεικτή και τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ερωτηματολόγιο και συνέντευξη. Στην έρευνα έλαβαν μέρος 40 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι συμμετέχοντες τόνισαν ότι το κεφάλαιο των κλασμάτων αποτελεί μια δύσκολη θεματική ενότητα για τους μαθητές την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, γι' αυτό το λόγο η διδασκαλία τους λαμβάνει χώρα στις τελευταίες τάξεις. Στην πλειοψηφία τους οι συμμετέχοντες διατύπωσαν προβλήματα που αφορούσαν πραγματοποίηση πράξεων τόσο πρόσθεσης, όσο και πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Σε πολλές περιπτώσεις τα προβλήματα που εμπεριείχαν κλάσματα και παρουσιάζονταν μέσα στην τάξη συνδέονταν με ζητήματα της καθημερινής ζωής όπως για παράδειγμα κάποιο φαγώσιμο υλικό. Οι επιλογές των μαθηματικών προβλημάτων που αφορούσαν κλάσματα επηρεάστηκαν στην περίπτωση των εκπαιδευτικών από τα χρόνια προϋπηρεσίας τους.

Η Περιβολά (2021) διεξήγαγε έρευνα εξετάζοντας την αναγκαιότητα ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πρακτική. Συγκεκριμένα η έρευνα εξέταζε την ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών και τη διδασκαλία των μαθημάτων στους μαθητές της Α΄ γυμνασίου. Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε ήταν ποιοτική μέσω της εφαρμογής διδακτικής παρέμβασης, η οποία διήρκησε 3 διδακτικές ώρες και πραγματοποιήθηκε σε 3 διαφορετικές ημέρες. Στην έρευνα έλαβαν μέρος 43 μαθητές της Α΄ γυμνασίου από σχολεία του δήμου Περιστεριού, ελληνικής, αλβανικής και πολωνικής υπηκοότητας. Η διδακτική παρέμβαση έλαβε χώρα μέσω της πλατφόρμας του Webex. Αρχικά η ερευνήτρια διαπίστωσε το επίπεδο της κατανόησης του κεφαλαίου των κλασμάτων που διέθεταν οι μαθητές. Κατά τη διάρκεια της πρώτης διδακτικής ώρας οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο. Στις επόμενες 2 διδακτικές ώρες που απέμεναν οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν 2 φύλλα εργασίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι μέσω της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές κατανόησαν σε σημαντικό βαθμό τις διδασκόμενες μεθοδολογίες όπως επίσης και ήταν σε θέση να τις εφαρμόσουν. Συνάμα οι περισσότεροι μαθητές μπορούσαν να εντοπίσουν τις ομοιότητες των ιστορικών μεθοδολογιών που εφαρμόστηκαν με τις σύγχρονες μεθόδους που διδάσκονται στο σχολικό πλαίσιο.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι μαθητές βελτίωσαν τις δεξιότητές τους απέναντι στην επίλυση προβλημάτων που εμπεριείχαν κλάσματα.

Η Μωυσιάδου (2022) διεξήγαγε έρευνα με σκοπό να αξιολογήσει τις επιδόσεις των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων κάνοντας χρήση ιστορικών προβλημάτων, καθώς επίσης και το ενδεχόμενο διαφοροποίησης των επιδόσεων αυτών των μαθητών. Απώτερος στόχος της έρευνας ήταν να διαπιστωθεί κατά πόσο βελτιώνεται το ενδιαφέρον των μαθητών όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων και την ιστορία των μαθηματικών. Η έρευνα που εφαρμόστηκε ήταν ποιοτική και το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν διδακτική παρέμβαση. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 16 μαθητές μέσης εκπαίδευσης γυμνασίου και λυκείου που φοιτούσαν σε διάφορα σχολεία του νομού Έδεσσας. Οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες ως προς την επίλυση προβλημάτων, ενώ οι επιδόσεις τους χαρακτηρίζονται από μέτριες έως αδύναμες. Οι μαθητές γυμνασίου που έλαβαν μέρος στην παρέμβαση κατάφεραν να βελτιώσουν σημαντικά τις επιδόσεις τους στην επίλυση των προβλημάτων σε σχέση με τους μαθητές του λυκείου. Η ερευνήτρια κατέληξε ότι είναι αναγκαίο να ενταχθούν τα ιστορικά προβλήματα στην εκπαιδευτική διαδικασία των μαθηματικών και στη σχολική τάξη.

Το περιορισμένο πλήθος των ερευνών που συνδέεται με τα προβλήματα κλασμάτων, ειδικά με αυτά που εμπλέκουν την ιστορία των μαθηματικών, καταδεικνύει την αναγκαιότητα περεταίρω διερεύνησης του ζητήματος σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης.

Β΄ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 4ο Έρευνα

4.1 Σκοπός της Ερευνάς

Σε όλες τις βαθμίδες του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, η επίλυση προβλημάτων είναι ένας βασικός διδακτικός στόχος του μαθήματος, παρά το γεγονός ότι δεν αποτελεί ξεχωριστή ενότητα στο μάθημα των μαθηματικών. Στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, ειδικότερα στην περίπτωση των μαθητών Γυμνασίου, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού, όπως και να είναι σε θέση να κατασκευάζουν γραμμικές εξισώσεις. Η μαθηματική εκπαίδευση αποσκοπεί ήδη από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές να αποκτήσουν τα απαραίτητα εφόδια, ώστε να μετατραπούν σε ικανούς λύτες πληθώρας αριθμητικών πράξεων, μεταξύ άλλων και προβλημάτων. Τα μαθηματικά προβλήματα που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια, μπορούν να χαρακτηριστούν ως «προβλήματα ρουτίνας», με την έννοια ότι ο εκπαιδευτικός διδάσκει στους μαθητές τον τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος και αντιστοίχως αυτοί καλούνται να επιλύσουν ανάλογα προβλήματα. Ωστόσο παρά το γεγονός ότι η επίλυση προβλημάτων αποτελεί βασική πτυχή πολλών ειδικότερων διδακτικών ενοτήτων των μαθηματικών, κάτι που θα οδηγούσε στο συμπέρασμα της εξοικείωσης τους με αυτά, ωστόσο ένας σημαντικός αριθμός μαθητών παρουσιάζουν δυσκολίες επίλυσης και συχνά αποτυγχάνουν ορθής επίλυσης τους.

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί να διερευνήσει εάν οι μαθητές Γυμνασίου είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα μαθηματικών, με ποιο τρόπο επιδιώκουν να τα επιλύσουν και σε ποιο βαθμό η προσπάθεια τους είναι επιτυχής. Τα προβλήματα που κλήθηκαν να επιλύσουν οι μαθητές της παρούσας έρευνας έχουν επιλεγεί από ιστορικές πηγές και από μαθηματικές συλλογές που αφορούν διαφόρους πολιτισμούς και χρονικές περιόδους. Απώτερος στόχος της έρευνας είναι να καταδειχθεί εάν οι μαθητές προσεγγίζουν τα ιστορικά κλασματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό ή τον αριθμητικό τρόπο ή εάν επινοούν πρωτότυπες λύσεις όπως αυτές που είχαν δώσει οι συγγραφείς των προβλημάτων.

4.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που καλείται να απαντήσει η παρούσα εργασία είναι τα ακόλουθα:

- Με αφορμή τα ιστορικά προβλήματα μαθηματικών, ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην επίλυση προβλημάτων;
- Παρατηρείται διαφοροποίηση όσον αφορά το επίπεδο επίδοσης μεταξύ αγοριών και κοριτσιών;
- Ποιους τρόπους επίλυσης προτιμούν οι μαθητές στην επίλυση των προβλημάτων τον αλγεβρικό ή τον αριθμητικό;

4.3 Μεθοδολογία Έρευνας

Η μέθοδος έρευνας που επιλέχθηκε για την παρούσα έρευνα είναι η ποιοτική λόγω της μορφής και του σκοπού της παρούσας έρευνας. Αναλυτικότερα λαμβάνοντας υπόψη τον σκοπό της έρευνας, επιλέχθηκε η ποιοτική έρευνα καθώς όντας μία ερμηνευτική ή νατουραλιστική προσέγγιση επιτρέπει τη δυνατότητα ανθρώπινης κατανόησης και ερμηνείας φαινομένων (Babbie, 2013). Η ποιοτική έρευνα επιλέχθηκε καθώς στόχος της έρευνας ήταν να καταγράψει το φαινόμενο επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, εστιάζοντας στις περιγραφές επίλυσης των συμμετεχόντων και στην υποκειμενική άποψη τους (Bryman, 2017).

Η ποιοτική μέθοδος προτιμάται στην περίπτωση της μελέτης των μαθηματικών καθώς επιτρέπει να ερμηνευθεί σε βάθος, σε ποιόν βαθμό έχει κατανοηθεί το μαθηματικό αντικείμενο, εξετάζοντας τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι εκπαιδευόμενοι όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων και μέσα από αυτές, να κατανοηθούν οι στάσεις, αντιλήψεις και τις πεποιθήσεις τους. Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι το δείγμα της παρούσας έρευνας ήταν μικρό, καθώς επρόκειτο για 10 μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, κατανοείται ότι η ποιοτική μεθοδολογία ήταν η καταλληλότερη μέθοδος έρευνας στην εφαρμογή της παρούσας μελέτης, μιας και το δείγμα ήταν περιορισμένο, καθώς στόχος του ερευνητή δεν ήταν η μελέτη τάσεων, αλλά η σε βάθος κατανόηση του βαθμού που οι μαθητές αυτοί μπορούν να επιλύσουν προβλήματα μαθηματικών (Babbie, 2013).

4.4 Δείγμα Έρευνας

Η έρευνα έλαβε χώρα τον Δεκέμβριο του 2023 και σε αυτή συμμετείχαν 10 μαθητές και μαθήτριες Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που φοιτούσαν από την Α΄ έως την Γ΄ Γυμνάσου. Από τους συμμετέχοντες οι 5 ήταν αγόρια και οι 5 κορίτσια.

4.5 Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων, όπως επίσης και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, εφόσον δεν υπήρχε κάποιο σταθμισμένο εργαλείο αξιολόγησης, ο ερευνητής παραχώρησε στους μαθητές ένα αυτοσχέδιο φύλλο εργασίας, το οποίο περιλαμβάνονταν τα 4 προβλήματα που είχαν αντληθεί από τις ιστορικές μαθηματικές πηγές διαφορετικών πολιτισμών και διαφορετικών χρονικών περιόδων, ζητώντας από τους μαθητές να επιλύσουν τα προβλήματα με όποιο τρόπο επιθυμούσαν (αλγεβρικά, αριθμητικά, σχηματικά, περιγραφικά κτλ.) (Παράρτημα).

Τα προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές μπορούσαν να επιλυθούν με απλές μαθηματικές μεθόδους, για παράδειγμα μέσω της κατασκευής και επίλυσης εξισώσεων α΄ βαθμού ή με τον μετασχηματισμό εξισώσεων α΄ βαθμού, ή με απλές πράξεις κλασμάτων. Όλες τις μεθόδους που θα μπορούσαν να επιλύσουν τα προβλήματα οι μαθητές τις είχαν διδαχθεί στα προηγούμενα έτη φοίτησης τους.

Το φύλλο εργασίας περιλάμβανε τα προβλήματα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος», «Η Κληρονομιά», « Το Πρόβλημα του Isaak Newton» και «Η Παλατινή Ανθολογία».

Κεφάλαιο 5ο Αποτελέσματα Έρευνας

5.1 Προφίλ Μαθητών που Έλαβαν Μέρος στην Έρευνα

Το γνωστικό και μαθησιακό επίπεδο των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα ήταν μέτριο, ωστόσο υπήρχαν περιπτώσεις μαθητών που παρουσίαζαν από ικανοποιητικές έως εξαιρετικές επιδόσεις. Οι συγκεκριμένες περιπτώσεις μαθητών κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το σύνολο των προβλημάτων με τη χρήση άλγεβρας. Παρόλα αυτά όταν τους επιλύθηκαν τα προβλήματα με χρήση αριθμητικής, δυσκολεύτηκαν να τα κατανοήσουν. Τους φάνηκε ενδιαφέρον ο τρόπος λύσης με αριθμητική, αλλά εάν είχαν την επιλογή να επιλύσουν ξανά το πρόβλημα θα επέλεγαν την άλγεβρα. Οι υπόλοιποι μαθητές παρουσίασαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων. Κάποιοι κατάφεραν να επιλύσουν ελάχιστα προβλήματα με σωστό τρόπο, ενώ άλλοι έφτασαν σε ικανοποιητικό επίπεδο έχοντας όμως λάθη σε μαθηματικές πράξεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις πάντως οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν την έννοια και τη φύση του προβλήματος, όπως επίσης και τον τρόπο με τον οποίο θα τα επιλύσουν.

Όσον αφορά το συναισθηματικό προφίλ των μαθητών οι ίδιοι είχαν την επιλογή να διαλέξουν ποια μέρα θα ασχοληθούν με τα προβλήματα, έτσι ώστε να είναι χαλαροί και ήρεμοι. Επίσης είχαν την επιλογή να αναβάλουν την διαδικασία σε περίπτωση που ένιωθαν πιεσμένοι και αγχωμένοι.
Τα παιδιά εμφανίστηκαν την ημέρα της εξέτασης ευδιάθετοι και με όρεξη, γνωρίζοντας ότι θα ασχοληθούν με κάτι το οποίο δεν θα εμπεριείχε το φόβο της βαθμολόγησης τους. Η όλη διαδικασία τους φάνηκε ενδιαφέρουσα και με το τέλος της, όταν αποχώρησαν από την αίθουσα, δήλωσαν ότι θα ήθελαν να συμμετέχουν ξανά σε παρόμοια διαδικασία.

5.2 Αποτελέσματα Δεδομένων Μαθητών

1ος Μαθητής Γ΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

Κάθε μέρα το λιοντάρι βρίσκεται πιο ψηλά $\frac{1}{7}\cdot 50-\frac{1}{9}50=50(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})=50\frac{2}{63}=\frac{100}{63}=1,587\approx 1,588$ πόδια πιο ψηλά.

Επειδή ο λάκκος έχει συνολικά 50 πόδια, θα έχουμε 50:1,588=31,48.

Άρα για 31 ημέρες θα παραμείνει στον λάκκο ακόμα, ενώ σε 32 ημέρες θα είναι έξω από αυτόν.

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Η αρχική περιουσία σε σόλδια είναι x

Μετά τον 1ο γιό γίνεται: $x-1-\frac{x-1}{7}=\frac{6x-6}{7}$ αυτό απέμεινε μετά την 1η μοιρασιά.

Άρα αν από την αρχική x περιουσία αφαιρεθεί αυτή που απέμεινε, τότε προκύπτει ότι: $x-\frac{6(x-1)}{7}=0 \Rightarrow 7x-6(x-1)=0 \Rightarrow 7x-6x+6=0 \Rightarrow x+6=0 \Rightarrow x=-6.$

Άρα η αρχική τιμή μειώθηκε κατά -6 σόλδια.

Αν στην μειωμένη τιμή $\frac{6(x-1)}{7}$ προστεθούν τα 6 σόλδια θα βρεθεί η αρχική περιουσία.

$$\frac{6(x-1)}{7}+6=x \Rightarrow 6(x-1)+42=7x \Rightarrow 6x-6+42=7x \Rightarrow 42-6=7x-6x \Rightarrow x=36.$$

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

Οι δυο ταχυδρόμοι απέχουν 59 μίλια. Επειδή ο Α ξεκινάει 1 ώρα πιο νωρίς και αφού διανύει σε 2 ώρες 7 μίλια, σε 1 ώρα διανύει 3,5 μίλια. Άρα όταν ξεκινάει ο Β, ο Α έχει διανύσει 3,5 μίλια και τα υπόλοιπα 55,5 μίλια θα τα διανύσουν ταυτόχρονα. Όποτε τα 55, 5 μίλια θα τελειώσουν σε :

$$\frac{55,5}{\frac{8}{3}+\frac{7}{2}}\text{ώρες}=$$

$$\frac{55,5}{\frac{16}{6}+\frac{21}{6}}=\frac{55,5}{\frac{37}{6}}=\frac{655,5}{37}=9 \text{ ώρες.}$$

Άρα σε 9 ώρες θα συναντηθούν ο Α με τον Β.

Ο Α θα έχει διανύσει 3,5+3,5·9=35 μίλια.

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+30+120+300+50$$

Μετατροπή σε ποσοστά 20%+8,33%+12,5%+5%+25%+14,285%+500=100%=>500=100%-85,11%=>

500=14,88%=> $\frac{500}{x}=\frac{14,88\%}{100\%} \Leftrightarrow x=3359,09\approx 3360$ μήλα.

Συμπερασματικές Παρατηρήσεις για τον 1ο Μαθητή : Το πρόβλημα με το «Λιοντάρι και το Λάκκο» ο μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου προσπάθησε να το λύσει με πρακτική αριθμητική. Δεν έλαβε υπόψη του ότι την τελευταία ημέρα το λιοντάρι θα βγει από τον λάκκο, χωρίς να χρειαστεί να κυλίσει πάλι προς τα πίσω, με συνέπεια να καταλήγει σε λάθος αποτέλεσμα. Το σκεπτικό του πάντως μέχρι ενός σημείου είναι αρκετά σωστό, και ώριμο για την ηλικία του.

Στο πρόβλημα για την κληρονομιά, ο μαθητής προσπαθεί να το λύσει με τη χρήση της άλγεβρας. Η εξίσωση $x-\frac{6(x-1)}{7}=0$, προφανώς είναι λάθος, καθώς ισχυρίζεται ότι η παράσταση στο Α΄ μέλος εκφράζει την 1η μείωση της κληρονομιάς, αλλά την εξισώνει με το 0. Από εκεί και ύστερα οι πράξεις είναι απλές αριθμητικές συμπτώσεις.

Στο πρόβλημα του Issak Newton, γίνεται από τον μαθητή πολύ καλή χρήση της πρακτικής αριθμητικής, σε ένα πρόβλημα που παραπέμπει σε ασκήσεις συνάντησης 2 κινητών από το μάθημα της Φυσικής της Β΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου. Το αποτέλεσμα στο οποίο έχει καταλήξει ο μαθητής είναι σωστό.

Ο μαθητής προσπαθεί να λύσει το πρόβλημα τα Παλατινής Ανθολογίας με έναν συνδυασμό πρακτικής αριθμητικής και άλγεβρας. Δεν χρησιμοποίησε μεταβλητή στην ισότητα του, παρά μόνο στο τέλος. Φαίνεται ότι, ενώ έχει συλλάβει τη λύση του προβλήματος δεν μπορεί να κάνει ορθή χρήση της μεταβλητής. Το αποτέλεσμα είναι σωστό $\frac{36}{6}=6$ παιδιά που πήραν από 6 σόλδια.

Ο μαθητής προσπάθησε να επιλύσει και τα 4 προβλήματα που δόθηκαν

2η Μαθήτρια Γ΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

Κάθε μέρα θα ανεβαίνει $\frac{1}{7}50-\frac{1}{9}50$, εκτός από την τελευταία μέρα που δεν θα πέσει.

$$x\cdot\left(\frac{1}{7}50-\frac{1}{9}50\right)=50-\frac{1}{9}50 \Rightarrow \frac{50x}{7}-\frac{50x}{9}-50-\frac{50}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{450x}{63}-\frac{350x}{63}=\frac{450}{9}-\frac{50}{9}\Rightarrow$$

$$\frac{100x}{63}=\frac{400}{9}\Rightarrow$$

$$\frac{100x}{7}=400\Rightarrow$$

$$x=\frac{400\cdot 7}{100}\Rightarrow$$

x=28 ημέρες για να βγει από τον λάκκο.

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Χ ολόκληρη η περιουσία

1ος Γιός: $1+\frac{1}{7}(x-1)$ (1)

2ος Γιός: $2+\frac{1}{7}\left[x-2-1-\frac{1}{7}(x-1)\right]$ (2)

3ος Γιός: $3+\frac{1}{7}\left[x-3-3-\frac{1}{7}\left(x-2-1-\frac{1}{7}x-\frac{1}{7}\right)\right]$

Όλοι θα έχουν πάρει τα ίδια χρήματα, άρα:

(1)=(2)=> $1+\frac{1}{7}(x-1)=2+\frac{1}{7}\left[x-2-1-\frac{1}{7}(x-1)\right]$ =>

Ακολουθούν οι πράξεις x=>36 σόλδια

Ο $1^{ος}$ Γιός θα πάρει: $1+\frac{1}{7}35=6$, Μένουν 30 σόλδια

Ο $2^{ος}$ Γιός θα πάρει: $2+\frac{1}{7}28=6$, Μένουν 24 σόλδια

0 $3^{ος}$ Γιός θα πάρει: $,3+\frac{1}{7}21=3+3=6$ Μένουν 18 σόλδια

Ο $4^{ος}$ Γιός θα πάρει: $,4+\frac{1}{7}14=6$ Μένουν 12 σόλδια

Ο $5^{ος}$ Γιός θα πάρει: $,5+\frac{1}{7}7=6$ Μένουν 6 σόλδια.

Ο $6^{ος}$ Γιός θα πάρει όσα απέμειναν, δηλαδή 6 σόλδια

Άρα οι Γιοί ήταν 6.

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

d=59 μίλα. Οι ταχύτητες τους είναι :

$U_A=\frac{7}{2}$ =3,5 μίλια/h

$U_B=\frac{8}{3}$ μίλια/h

Ο Α διανύει 3,5 μ. σε 1h και τότε ξεκινάει ο Β.

Αν ο Β διανύσει x μίλια τότε μίλια, τότε ο Α θα διανύσει 59-3,5-x=55,5-x μίλια μετά την 1h.

Τότε θα κινούνται για ίσο χρόνο.

Άρα 55,5-x=$U_A \cdot$ t=> t=$\frac{55,5-x}{3,5}$ (1) και ο Β x= $U_B \cdot$ t=> t=$\frac{x}{\frac{8}{3}}$ (2).

Οι χρόνοι θα είναι ίσοι =>$\frac{55,5-x}{3,5} = \frac{x}{\frac{8}{3}}$ => $44h - 8x = 10,5x$ => $x = 24$ μίλια.

Αρά ο Α θα διανύσει : 3,5+55,5-x=59-24=35 μίλια.

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

x όλα τα μήλα

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 30 + 120 + 300 + 50 = x$$

$$=> \frac{12x}{60} + \frac{5x}{60} + \frac{x}{8} + \frac{x}{20} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 500 = x$$

$$=> \frac{17x}{60} + \frac{7x}{56} + \frac{8x}{56} + \frac{x}{20} + \frac{5x}{20} + 500 = x$$

$$=> \frac{143}{168}x + 500 = x$$

$$=> 500 = x - \frac{143}{168}x$$

$$=> 500 = \frac{25}{168}x =>$$

$$84000 = 25x =>$$

x=3360 μήλα.

Συμπερασματικές Παρατηρήσεις για την μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου: Η μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου χρησιμοποίησε αλγεβρική επίλυση προβλημάτων με επιτυχία και στα τέσσερα προβλήματα. Έγινε εξαιρετική χρήση της άλγεβρας. Άριστη αναλυτική σκέψη εκ μέρους της.Αξίζει να σημειωθεί ότι η εν λόγω μαθήτρια έχει υψηλό δείκτη νοημοσύνης με έφεση προς τα μαθηματικά.

3^{ος} Μαθητής Γ΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

Έστω ότι x φορές που θα ανέβει το λιοντάρι και (x-1) επομένως οι φορές που θα κατέβει.

$$x \cdot \frac{50}{7} - (x-1)\frac{50}{9} = 50$$

$$=> \frac{50x}{7} - \frac{50x}{9} + \frac{50}{9} = \frac{50}{1}$$

$$\frac{50x}{7} - \frac{50x}{9} = \frac{50}{1} - \frac{50}{9} =>$$

$$\frac{450x}{63} - \frac{350x}{63} =$$

$$\frac{450}{9} - \frac{50}{9}$$

$$=> \frac{100x}{63} = \frac{400}{9}$$

$$=> \frac{\frac{100x}{63}}{\frac{100}{63}} = \frac{\frac{400}{9}}{\frac{100}{63}}$$

$$=> x = \frac{25200}{900}$$

$$x = 28$$

Το λιοντάρι θα χρειαστεί 28 ημέρες να βγει από τον λάκκο.

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Έστω ότι Χ όλα τα σόλδια.

Ο 1^{ος} γιός θα πάρει $\frac{1}{1} + \frac{x-1}{7}$

Ο 2^{ος} γιός θα πάρει $2 + \frac{x - \frac{x-1}{7} - 3}{7} = 2 + \frac{\frac{7x - x + 1 - 21}{7}}{7}$

$$= 2 + \frac{6x - 20}{49}$$

Όλοι θα πάρουν ίσο μερίδιο επομένως:

$1+\frac{x-1}{7}=2+\frac{6x-20}{49}$ =>

$49\cdot 1+49\frac{x-1}{7}=49\cdot 2+49\frac{6x-20}{49}$ =>

$49+7x-7=98+6x-20$ =>

x=36 σόλδια όλη η περιουσία.

Ο 1^{ος} γιός θα πάρει: $1+\frac{x-1}{7}=1+\frac{36-1}{7}=1+5=6$

Αφού όλοι θα πάρουν ίσο μερίδιο και έχει 36 σόλδια ο πατέρας, οι γιοί του ήταν 6.

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

$U_A = \frac{7 miles}{2 hours}=3,5 mph$

$U_B\ \frac{8}{3} mph$

Για 1 ώρα ο Α θα πηγαίνει μόνος του, άρα ξεκινάει από x=3,5 miles. Άρα, $X_A+X_B=$ 55,5 miles θα συναντηθούν την ίδια στιγμή άρα $t_A=t_B$ =>

$\frac{X_A}{U_A}=\frac{X_B}{U_B}$ =>

$\frac{X_A}{3,5}=\frac{55,5-X_A}{\frac{8}{3}}$ =>

$X_A\cdot\frac{8}{3}=3,5(55,5-X_A)$

=> $3\frac{8X_A}{3}=3\cdot 194,25-3\cdot 3,5X_A$ =>

$8X_A=582,75-10,5X_A$ =>

$18,5X_A=582,75$ =>

$X_A=31,5.$

Επομένως ο Α ταχυδρόμος διένυσε 35 miles.

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

Έστω ότι x όλα τα μήλα του Έρωτα

x=

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{12}+\frac{x}{8}+\frac{x}{20}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+30+120+300+50$$

$$=> 840x=\frac{840x}{5}+\frac{840x}{12}+\frac{840x}{8}+\frac{840x}{20}+\frac{840x}{4}+\frac{840x}{7}+420.000$$

$$=> 840x=715x+420.000$$

$$=> 840x-715x=420.000$$

$$=> \frac{\cancel{125}x}{\cancel{125}}=\frac{420.000}{125}$$

x=3.360 μήλα.

Συμπερασματικές Παρατηρήσεις για τον μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου: Εξαιρετική χρήση άλγεβρας από τον μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου με πιο σύνθετη σκέψη. Σωστή η επίλυση και των 4 προβλημάτων. Πρόκειται και πάλι για παιδί με υψηλό δείκτη νοημοσύνης με έφεση στα μαθηματικά.

4η Μαθήτρια Γ΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

1ος γιός : $1+\frac{1}{7}$

2ος γιός : $2+\frac{1}{7}$

3ος γιός: $3+\frac{1}{7}$ κοκ

Ο τελευταίος θα λάβει ότι περισσέψει.

Έστω x τα σόλδια και y τα σόλδια που θα περισσέψουν

x=$1+\frac{1}{7}y+2+\frac{1}{7}y+3\frac{1}{7}y$ (1)

$$1+\frac{1}{7}y=2+\frac{1}{7}y=3+\frac{1}{7}y$$

$$<=> x=3\cdot(1+\frac{1}{7}y) <=> x=3+\frac{3}{7}y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3+\frac{3}{7}y}{y} = \frac{\frac{24}{7}y}{y} = \frac{24}{7} <=> \frac{x}{y} = \frac{24}{7} <=>$$

$$x = \frac{24y}{7}$$

και

$$y = \frac{7}{24}x$$

$$\frac{24y}{7} = 1 + \frac{1}{7}y + 2 + \frac{1}{7}y + 3 + \frac{1}{7}y =>$$

$$24y = 7 + 1y + 14 + y + 21 + y =>$$

$$(1) => 24y - 1y - 1y - 1y = 7 + 14 + 21 =>$$

$$21y = 42 =>$$

y=2 σόλδια

$$x = \frac{24 \cdot 2}{7} = \frac{48}{7} = 6{,}8$$

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

Α= 7 μίλια/2h   Α ――― V=59 μίλια ――― Β

Β=8μίλια/3h   Α+Β 59 μίλια

$t_B = t_A - 1 \quad 2V_A - V_B$

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

$$M = \frac{1}{5}M + \frac{1}{12}M + \frac{1}{8}M + \frac{1}{20}M + \frac{1}{4}M + \frac{1}{7}M + 30 + 120 + 300 + 50$$

ΕΚΠ (5,12,5,20,4,7) =840

$$\frac{168M + 70M + 105M + 42M}{840} + 420M + 120M =>$$

$$M = \frac{185M}{108} + 500 =>$$

$$M=\quad M - \frac{185}{160}M = 500 =>$$

$$\frac{-17M}{108} = \frac{500}{1} =>$$

$$-17M = 500 \cdot 168 =>$$

$$M = \frac{500 \cdot 168}{-17}$$

M=-4941,71 Μήλα

Συμπερασματικές παρατηρήσεις για τη μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου: Η μαθήτρια δεν επίλυσε το πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκος». Όσον αφορά το Πρόβλημα «Η Κληρονομιά», προσπαθεί να το επιλύσει αλγεβρικά προβαίνοντας όμως σε λανθασμένες επιλογές μεταβλητών και λανθασμένο το συνολικό σκεπτικό της. Παρατηρείται ανεπάρκεια της μαθήτρια σε επίπεδο γνώσεων ως προς την πραγματοποίηση πράξεων με μονώνυμα. Ως προς το πρόβλημα του «Issak Newton» η μαθήτρια μόλις που καταγράφει τα δεδομένα και μάλιστα με λανθασμένο τρόπο. Προφανώς δεν κατανόησε το πρόβλημα. Τέλος στο πρόβλημα με την «Παλατινή Ανθολογία» παρά το γεγονός ότι η μαθήτρια κατέγραψε σωστά την εξίσωση, ωστόσο δεν κατάφερε να την επιλύσει ορθά, κάτι που διαπιστώνεται από το γεγονός ότι βγάζει αρνητικό αριθμό μήλων. Παρατηρείται η αδυναμία της μαθήτριας να επιλύσει πολυωνυμική εξίσωση με τους συντελεστές.

5η Μαθήτρια Γ΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

Δεν έχει επιλυθεί το πρόβλημα

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Έστω x σόλδια η περιουσία

1ος γιός =1 σόλδια και το $\frac{1}{7}$ απ' ότι έχει περισσέψει.

2ος γιός =2 σόλδια και το $\frac{1}{7}$ από ότι έχει περισσέψει.

3ος γιός =3 σόλδια και το $\frac{1}{7}$ από ότι έχει περισσέψει.

1ος γιός= $1+\frac{1+(x-1)}{7}$

2ος γιός $=\frac{2+(x-1-(x-1)}{7}$

$$7+(x-1)=14+x-1-\frac{(x-1)}{7-2} =>$$
$$6+x=14+x-1+\frac{-x(x-1)}{7}-2 =>$$
$$x+6=14+x-1+\frac{-x+1}{7}-2 =>$$
$$x+6=11+x+\frac{-x+1}{7} =>$$
$$x+6=\frac{7\cdot 11}{7}+\frac{7x}{7}+\frac{-x+1}{7} =>$$
$$x+6=\frac{7\cdot 11+7x-x+1}{7} =>$$
$$x+6=\frac{77+7x-x+1}{7} =>$$
$$x+6=\frac{78+7x-x}{7} =>$$
$$x+6=\frac{78+6x}{7} =>$$
$$x+6-6=\frac{6x+78}{7}-6 =>$$
$$x=\frac{6x+36}{7} =>$$
$$x=7\cdot\frac{6x+36}{7} =>$$
$$7x=6x+36 =>$$
$$7x-6x=36$$

x=36 σόλδια

$\sqrt{36}$=6 γιοί.

- **Πρόβλημα «του Issak Newton»**

x= μετά από πόσες ώρες συναντιούνται οι ταχυδρόμοι.

Ο Α κινείται με $\frac{7}{2}$ μίλια.

Ο Β κινείται με $\frac{8}{3}$ μίλια.

Ο Α έχει διανύσει $\frac{7x}{2}$ μίλια.

Ο Β έχει διανύσει $\frac{8(x-1)}{3}$ μίλια.

Απέχουν 59 χιλιόμετρα ο ένας από τον άλλο.

7x/2+8(x-1)/3=59   ΕΚΠ (2,3)=6

21x+16(x-1)=354

21x+16x-16=354

37x=370

x=10 ώρες

Ο Α θα έχει διανύσει 10·7/2=35 μίλια.

Πρόβλημα με Έρωτα και Αφροδίτη

(x= Όλα τα μήλα)   Ε.Κ.Π. (5,12,8,20,4,7)=840

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{12}+\frac{x}{18}+\frac{x}{20}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+30+120+300+50 =>$$

$$168x+70x+105x+42x+210x+120+30+300+50 =>$$

$$715x+500\cdot 840 =>$$

$$715x+420.000=840x =>$$

$$840x-715x=420.000 =>$$

$$125x=420.000 =>$$

$$\frac{420.000}{125}=3.360$$

Συνεπώς τα μήλα ήταν 3.360.

Συμπερασματικές παρατηρήσεις για τη μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου: Η μαθήτρια δεν έχει επιλύσει το πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος». Το πρόβλημα της «Κληρονομιάς», η μαθήτρια προσπαθεί να το λύσει με αλγεβρικό τρόπο. Ο τρόπος δόμησης της εξίσωσης είναι λάθος αφού στο μερίδιο του 2^{ου} απαλείφεται η μεταβλητή x, που είναι η αρχική περιουσία. Κατά αριθμητική σύμπτωση βρίσκει σωστό αποτέλεσμα για το x. Ως συλλογισμός δε, ότι ο αριθμός των γιων είναι $\sqrt{36}$=6 είναι προφανώς εντελώς λάθος.

Το πρόβλημα «Του Issak Newton» επιλύεται αλγεβρικά σωστά γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με το σκεπτικό του 1^{ου} προβλήματος. Τέλος και το πρόβλημα της «Παλατινής Ανθολογίας» η μαθήτρια επιδιώκει να το επιλύσει αλγεβρικά καταστρώνοντας ορθά την λογική παράσταση με άγνωστο x, τον αριθμό των μήλων. Αν και διανέμει σωστά τα μέρη των μήλων στον κάθε ένα, δεν δημιουργεί εξίσωση. Δεν εξισώνει τα μήλα με το σύνολο των μήλων x. Κάτι που κάνει αργότερα και οι πράξεις της είναι σωστές. Η συλλογική της είναι σωστή, με λάθος συμβολισμό.

6^{η} Μαθήτρια Β΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

0,14+0,11=0,25

50:0,25=200

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Η μαθήτρια δεν έλυσε το συγκεκριμένο πρόβλημα

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

59:7=8,4

8,4-1,0=7,4

59:8=7,3

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{6}{56}$$
$$30+120+300+50=500$$

Συμπερασματικές παρατηρήσεις για μαθήτρια Β΄ Γυμνασίου: Προσπάθησε η μαθήτρια να επιλύσει τα τρία από τα τέσσερα προβλήματα με πρακτική αριθμητική. Ωστόσο όλες οι απαντήσεις που έδωσε ήταν λανθασμένες. Για το πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος» δεν παρέθεσε καμία απάντηση.

7^{η} Μαθήτρια Β΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

$$50=\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{9}{7}$$

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

Η μαθήτρια δημιούργησε μία γραμμή την οποία χώρισε σε 8 ίσα μέρη, τοποθετώντας πάνω από τον αριθμό 7 το Α και πάνω από τον αριθμό 8 το Β.

Ακολούθως προέβη στον ακόλουθο συνειρμό :

Α=7·2=14

Β=8·3=34-2 ώρα

23+14=37

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

$\frac{1}{5}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{20}, \frac{1}{4}, , \frac{1}{7}$ 30, 120, 300

x μήλα

1) $\frac{1x}{5}$ 2) $\frac{1x}{12}$ 3) $\frac{1x}{8}$ 4) $\frac{1x}{20}$ 5) $\frac{1x}{4}$ 6) $\frac{1x}{7}$ 7)30x 8)120x 9)300x

$$x = \frac{1x}{5} + \frac{1x}{12} + \frac{1x}{8} + \frac{1x}{20} + \frac{1x}{4} + \frac{1x}{7} + \frac{30x}{1} + \frac{120x}{1} + \frac{300x}{1}$$

Συμπερασματικές παρατηρήσεις μαθήτριας Β΄ Γυμνασίου: Η μαθήτρια προσπάθησε να επιλύσει τα 3 από τα 4 προβλήματα, ωστόσο οι προσπάθεια της ήταν ανεπιτυχής. Φαίνεται ότι δεν έχει κατανοήσει τα δεδομένα και τα ζητούμενα των προβλημάτων. Στο πρόβλημα Αφροδίτης – Έρωτα πραγματοποιεί μία υποτυπώδη προσπάθεια να επιλύσει αλγεβρικά το πρόβλημα, αλλά και εκεί χρησιμοποιεί η μαθήτρια λανθασμένα τα δεδομένα μπερδεύοντας τα ποσοστά των μήλων με τις ποσότητες των μήλων. Δεν παράθεσε καμία απάντηση για το πρόβλημα «Η Κληρονομιά».

8ος Μαθητής Α΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

Δεν έχει επιλύσει το πρόβλημα ο μαθητής

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Περιουσία=x

Ο 1ος γιός πήρε : 1+(χ-1):7 σόλδια

Έμειναν x-1-(x-1):7 σόλδια

Ο 2ος γιός πήρε : 2[χ-1- (χ-1):7-2]:7

Πρέπει 1+(χ-1):7=2+[x-1-(x-1):7-2]:7

7+(x-1)=14+x-10(x-1):7-2

(x-1):7=5

x-1=35

x=36 σόλδια

Άρα ο κάθε γιός πήρε 1+(36-1):7=6 σόλδια

Οπότε 36:6=6 οι γιοί.

Επαλήθευση

1ος 1+(36-1):7 =6 και έμειναν 30

2ος 2+(30-2):7=6 και έμειναν 24

3ος 3+(24-3):7=6 και έμειναν 18

4ος 4+(18-4):7=6 και έμειναν 12

5ος 5+(12-5):7 =6 και έμειναν 6

6ος 6 αυτά που περίσσεψαν

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

Οι Α και Β απέχουν 59 μίλια μεταξύ τους.

Ο Α: 7 μίλια ανά 2 ώρες.

Ο Β: 8 μίλια ανά 3 ώρες.

Ο Β ξεκίνησε 8+2,6= 10,6 μίλια

7:2=3,5 μίλια ανά ώρα

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{7}$

30 μήλα, 120 μήλα, 300 μήλα

30=5·32 $300=2^2\cdot3\cdot5^2$ $8=2^3$ $20=2^2\cdot5$ $7=7^1$

$120=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $12=3 \cdot 2 \cdot$ $4=2^2$

ΕΚΠ$=5^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 7=4200$

Άρα τα μήλα ήταν 4200

Συμπερασματικές παρατηρήσεις μαθητή Α΄ Γυμνασίου: Ο μαθητής έχει επιλύσει επιτυχώς το πρόβλημα με την κληρονομιά με αλγεβρικό τρόπο και απρόσμενο για επίπεδο Α΄ Γυμνασίου. Φαίνεται ότι το παιδί έχει λάβει αρκετά γερές βάσεις στο δημοτικό σχολείο. Προφανώς ο συγκεκριμένος μαθητής κατανόησε πολύ καλά τη χρήση της μεταβλητής για αλγεβρική επίλυση του προβλήματος. Η προσπάθεια ωστόσο επίλυσης των άλλων δύο προβλημάτων με πρακτική αριθμητική ήταν αποτυχημένη. Δεν παρέθεσε καμία λύση για το πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος».

9ος Μαθητής Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»

50 πόδια

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$

$\frac{1}{7}$ του 50 = 7,14 π

$\frac{1}{9}$ του 50 5,5 π.

Άρα έχουμε 7.14 -5.5=1.64

$$\frac{50}{1.64}=30,48\mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma$$

- **Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»**

Έστω ότι κ η περιουσία (ολόκληρη)

Και y το περίσσευμα κάθε φορά

$1+\frac{\kappa-1}{7}$ ότι θα πάρει ο πρώτος γιος.

Επειδή από το περίσσευμα ο κάθε γιός παίρνει το $\frac{1}{7}$, αυτό χωρίζεται στο 7.

Άρα οι γιοί δεν μπορούν να είναι περισσότεροι από 7,

1) $1+\frac{\kappa-1}{7}$
2) $2+\frac{\kappa-1}{7}$
3) $3+\frac{\kappa-1}{7}$
4) $4+\frac{\kappa-1}{7}$
5) $5+\frac{\kappa-1}{7}$
6) $6+\frac{\kappa-1}{7}$
7) $7+\frac{\kappa-1}{7}$

$$\kappa=1+\frac{\kappa-1}{7}+2+\frac{\kappa-1}{7}+3+\frac{\kappa-1}{7}+4+\frac{\kappa-1}{7}+5+\frac{\kappa-1}{7}+6+\frac{\kappa-1}{7}$$

$$+\ 7+\frac{\kappa-1}{7}$$

$$\kappa=\frac{28}{1}+\frac{\kappa-1}{7}$$

$$\kappa=\frac{196}{7}+\frac{\kappa-1}{7}$$

$$\kappa=\frac{\kappa-195}{7}$$

$$\kappa\text{-}\kappa=\frac{195}{7}$$

0=27,9 (Άτοπο)

Άρα οι γιοί δεν είναι 7.

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

Α = 7 μίλια σε 2 ώρες

Β= 8 μίλια σε 3 ώρες

Για τον Α έχουμε $\frac{7}{2}$ =3.5=> Άρα διανύει 3.5 μίλια την ώρα.

Για τον Β έχουμε $\frac{8}{2}$ =2,7 => Άρα διανύει 2.7 μίλια την ώρα.

Μέχρι στιγμής ο Α έχει προχωρήσει για 2 ώρες και ο Β για 4, αφού 3(που προχώρησε) και 1 (που καθυστέρησε) 3+1=4

Έστω x τα μίλια που διανύει.

και y ο ώρες που χρειάζεται .

Έχουμε x=3,5·y(1) και x=2,7·y (2)

Άρα 2x=3,5 ·y +2,7·y

$$\frac{2x}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot y}{2}$$

x=3,1y

(1)=>3,1y=3,5y

3,1y=3,5y=0

-0,4=0 (Άτοπο)

(2)=>3,1y=2,7y

3,1y-2,7y=0

0,4=0 (Άτοπο)

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

$\frac{1}{5}$κλ $\frac{1}{12}$ Εο $\frac{1}{8}$Θ $\frac{1}{20}$Μ$\frac{1}{4}$Τ $\frac{1}{7}$Ερ

30 Πολ, 120 Ουρ, 300 Καλ, 50 πέρισσευμα

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{30}{1}+\frac{120}{1}+\frac{300}{1}+\frac{50}{1}=$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{500}{1}=$$
$$\frac{4}{20}+\frac{1}{20}+\frac{5}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{500}{1}=$$
$$\frac{10}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{500}{1}=$$
$$\frac{1}{4}=0,25$$
$$\frac{1}{7}=0,14$$

30
120
300
50

0,2+0,83+0,125+0,05+0,25+0,14+30+120+300+50=501,595 Μήλα

Συμπερασματικές παρατηρήσεις για μαθητή Β΄ Γυμνασίου: Για το πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος» γίνεται προσπάθεια επίλυσης με πρακτική αριθμητική, αλλά είναι λανθασμένη. Ο μαθητής για το πρόβλημα «Η Κληρονομιά», ο μαθητής προσπάθησε, ανεπιτυχώς, να καταστρώσει αλγεβρικές παραστάσεις για να περιγράφει τα μερίδια του κάθε γιού. Λανθασμένες οι παραστάσεις και η σχηματιζόμενη εξίσωση και στο πρόβλημα «Του Issak Newton». Παρομοίως το πρόβλημα της «Παλατινής Ανθολογίας», αλλά με λανθασμένο τρόπο.

10^{ος} Μαθητής Β΄ Γυμνασίου

- **Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»**

Κάθε μέρα σκαρφαλώνει το $\frac{1}{7}$ του βάθους

Το βράδυ κυλά προς τα κάτω το $\frac{1}{9}$

1^{η} μέρα : $\frac{1}{7}$ 1ο βράδυ $\frac{1}{9}$

2^{η} μέρα : $\frac{2}{7}$ 2^{ο} βράδυ $\frac{2}{9}$

- **Πρόβλημα «Του Issak Newton»**

X=u·t

$$x = \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{3} =$$

$$x = 1 - \frac{56}{6} =$$

$$x = \frac{1}{1} - \frac{56}{6} =$$

$$x = \frac{6}{6} - \frac{56}{6} =$$

$$x = \frac{50:2}{6:2} = \frac{25}{2}$$

25 μιλιά

2 ώρες

- **Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»**

Έστω ότι x= τα μήλα που είχε ο έρωτας

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{12} + \frac{x}{8} + \frac{x}{20} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 30 + 120 + 300 + 50$$

ΕΚΠ (5,12,8,20,4,7)=840

Άρα

168x+70x+105x+42x+210x+120x+420.000

715x+420.000=840x

420.000=840x-715x

$$\frac{420.000}{125}=\frac{\cancel{125}x}{\cancel{125}}$$

x=3.360

Συμπερασματικές Παρατηρήσεις για Μαθητή Β΄ Γυμνασίου: Στο πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος» ο μαθητής κάνει ουσιαστικά μια απατηλή αναφορά των δεδομένων του προβλήματος. Επίσης δεν πραγματοποιεί καμία προσπάθεια να επιλύσει το πρόβλημα «Η Κληρονομιά». Στο πρόβλημα της «Παλατινής Ανθολογίας» ο μαθητής έκανε σωστή την κατάστρωση της αλγεβρικής παράστασης εισάγοντας ως μεταβλητή το x για το σύνολο των μήλων. Δεν εξίσωσε τα μέρη με το σύνολο x των μήλων παρά μόνο στο τέλος το αποτέλεσμα είναι σωστό. Στο πρόβλημα «Του Issak Newton» γίνεται προσπάθεια επίλυσης του με τύπο από τη φυσική αλλά με λάθος αντικαταστάσεις, καθώς ο μαθητής θέτει όπου $U=\frac{7}{2}$ και όπου t (χρόνος) την ταχύτητα του Β. Η αντιμετώπιση του προβλήματος είναι όλοι λανθασμένη.

5.3 Συζήτηση

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 10 μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, 5 αγόρια και 5 κορίτσια. Από το σύνολο των μαθητών, 1 μαθητής φοιτούσε στην Α΄ Γυμνασίου, 2 μαθήτριές και 2 μαθητές φοιτούσαν στην Β΄ Γυμνασίου και 3 μαθήτριες και 2 μαθητές στην Γ΄ Γυμνασίου.

Εξετάζοντας τις απαντήσεις του δείγματος αρχικά σύμφωνα με το κάθε πρόβλημα παρατηρούνται τα ακόλουθα:

Πίνακας 2. Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος» - Επίλυση

Απαντήσεις Μαθητών για Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»	Μαθητές/Μαθήτριες
Σωστή Επίλυση	2
Καμία Απάντηση	3
Λανθασμένη Απάντηση	4
Μερικώς Σωστή Λύση	1
Σύνολο	10

Όσον αφορά το πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος» από τον Πίνακα 2 παρατηρείται ότι μόνο 2 από τους 10 μαθητές, έλυσαν σωστά το πρόβλημα (McGee et al., 2006· Hallett, Nunes, & Bryant, 2010· Μωυσιάδου, 2022). Στην πλειοψηφία τους 4 στους 10, έλυσαν το πρόβλημα λάθος, ενώ 3 στους 10, δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση. Επίσης 1 μαθητής επέλυσε το πρόβλημα μερικώς σωστά. Συνεπώς η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν κατάφερε να επιλύσει το πρόβλημα σωστά.

Πίνακας 3. Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»- Επίλυση με Βάση το Φύλο

Απαντήσεις Μαθητών για Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος»	Μαθητές /Μαθήτριες Γυμνασίου	Μαθητές	Μαθήτριες
Επιτυχία με εξίσωση	2	1	1
Επιτυχία με πρακτική αριθμητική	0	0	0
Αποτυχία με εξίσωση	0	0	0
Αποτυχία με πρακτική αριθμητική	5	3	2
Καμία λύση	3	1	2
Σύνολο	10	5	5

Από τον Πίνακα 3 συμπεραίνεται ότι μόλις 1 μαθητής κατάφερε να χρησιμοποιήσει με επιτυχία εξίσωση για να επιλύσει το πρόβλημα και αντιστοίχως 1 μαθήτρια.

Αποτυχημένα έκαναν χρήση πρακτικής αριθμητικής 3 μαθητές και 2 μαθήτριες, ενώ αντίστοιχα 1 μαθητής και 3 μαθήτριές δεν έδωσαν καμία λύση (McGee et al., 2006· Hallett, Nunes, & Bryant, 2010· Μωυσιάδου, 2022).

Πίνακας 4. Πρόβλημα «Το Λιοντάρι και ο Λάκκος» - Επίλυση με Βάση τον Τρόπο

Τρόπος Επίλυσης του προβλήματος Αφροδίτης Έρωτα	Μαθητές /Μαθήτριες Γυμνασίου	Αγόρια	Κορίτσια
Χρήση Άλγεβρας	2	1	1
Χρήση Πρακτικής Αριθμητικής	5	3	2
Καμία Απάντηση	3	1	2
Σύνολο	10	5	5

Εξετάζοντας τον πίνακα 4 ο οποίος παρουσιάζει στοιχεία σε σχέση με τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος, διαπιστώνεται ότι οι 5 στους 10 μαθητές έκαναν χρήση πρακτικών μαθηματικών, οι 3 στους 10 δεν έδωσαν καμία απάντηση και 2 στους 10 έκαναν χρήση άλγεβρας. Από αυτούς που χρησιμοποίησαν πρακτική αριθμητική οι 3 στους 10 ήταν αγόρια και το 2 στους 10 κορίτσια. Αντίστοιχα 1 μαθητής και 1 μαθήτρια του δείγματος έκαναν χρήση άλγεβράς. Τα 2 κορίτσια από τα 5 δεν έδωσαν καμία απάντηση και αντίστοιχα 1 από τα 5 αγόρια στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Πίνακας 5. Πρόβλημα «Η Κληρονομιά» - Επίλυση

Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»	Μαθητές/Μαθήτριες
Σωστή Επίλυση	4
Καμία Απάντηση	3
Λανθασμένη Απάντηση	3
Μερικώς Σωστή Λύση	0
Σύνολο	10

Στο πρόβλημα η «Κληρονομιά» 4 στους 10 μαθητές έλυσαν το πρόβλημα σωστά. Αντίστοιχα 3 μαθητές έδωσαν λανθασμένη απάντηση και 3 δεν το απάντησαν καθόλου. Κατά συνέπεια η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατάφερε να επιλύσει ορθά, ούτε αυτό το πρόβλημα (McGee et al., 2006· Hallett, Nunes, & Bryant, 2010· Μωυσιάδου, 2022).

Πίνακας 6. Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»- Επίλυση με Βάση το Φύλο

Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»	Μαθητές	Μαθήτριες
Επιτυχία με εξίσωση	2	1
Επιτυχία με πρακτική αριθμητική	0	0
Αποτυχία με εξίσωση	2	2
Αποτυχία με πρακτική αριθμητική	0	0
Καμία λύση	1	2
Σύνολο	5	5

Όπως φανερώνεται στον πίνακα 6, 2 μαθητές και 1 μαθήτρια έλυσαν τον πρόβλημα κάνοντας χρήση εξίσωσης. Αντιστοίχως 2 μαθητές και 2 μαθήτριές, επεδίωξαν να επιλύσουν το πρόβλημα αποτυχημένα με τη χρήση εξίσωσης, ενώ 1 μαθητής και 2 μαθήτριές δεν έλυσαν το πρόβλημα. Κανένας μαθητής δεν έκανε χρήση της πρακτική αριθμητικής, αλλά αντιθέτως όσοι επεδίωξαν να το λύσουν, χρησιμοποίησαν ορθά ή λανθασμένα εξίσωση.

Πίνακας 7. «Η Κληρονομιά»- Επίλυση με Βάση τον Τρόπο

Πρόβλημα «Η Κληρονομιά»	Μαθητές/Μαθήτριες Γυμνασίου	Αγόρια	Κορίτσια
Χρήση Άλγεβρας	7	3	3
Χρήση Πρακτικής Αριθμητικής	-	-	-
Καμία Απάντηση	3	2	2
Σύνολο	10	5	5

Όπως παρατηρείται από τον Πίνακα 7, το πρόβλημα της κληρονομιάς επιλύθηκε συνολικά από 7 μαθητές με τη χρήση άλγεβρας.

Πίνακας 8. Πρόβλημα «Του Issak Newton»- Επίλυση

Πρόβλημα «Του Issak Newton»	Μαθητές/Μαθήτριες
Σωστή Επίλυση	4
Καμία Απάντηση	0
Λανθασμένη Απάντηση	6
Μερικώς Σωστή Λύση	0
Σύνολο	10

Από τον πίνακα 8 διαπιστώνεται ότι 4 στους 10 μαθητές, έλυσαν το πρόβλημα ορθά, ενώ αντίστοιχα η πλειοψηφία, δηλαδή 6 στους 10, δεν κατάφεραν να επιλύσουν ούτε αυτό το πρόβλημα (McGee et al., 2006· Hallett, Nunes, & Bryant, 2010· Μωυσιάδου, 2022).

Πίνακας 9. Πρόβλημα «Του Issak Newton»- Επίλυση με Βάση το Φύλο

Πρόβλημα «Του Issak Newton»	Μαθητές/ Μαθήτριες Γυμνασίου	Μαθητές	Μαθήτριες
Επιτυχία με εξίσωση	3	1	2
Επιτυχία με πρακτική αριθμητική	1	1	0
Αποτυχία με εξίσωση	1	1	0
Αποτυχία με πρακτική αριθμητική	5	2	3
Καμία λύση	0	0	0
Σύνολο	10	5	5

Από τον πίνακα 9 διαπιστώθηκε ότι 2 μαθήτριες από τις 5 που έλαβαν μέρος στην έρευνα κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα ορθά, κάνοντας χρήση εξίσωσης, ενώ 1 μαθητής έλυσε το πρόβλημα με εξίσωση και 1 με πρακτική αριθμητική. Διαφαίνεται ότι οι 3 από τους 4 μαθητές που κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα έκαναν χρήση εξίσωσης.

Πίνακας 10. Πρόβλημα «Του Issak Newton»-Επίλυση με Βάση τον Τρόπο

Πρόβλημα «Του Issak Newton»	Μαθητές/Μαθήτριες Γυμνασίου	5 Αγόρια	5 Κορίτσια
Χρήση Άλγεβρας	5	3	2
Χρήση Πρακτικής Αριθμητικής	5	2	3
Καμία Απάντηση	0	0	0

Από τον πίνακα 10 παρατηρούμε ότι οι μαθητές μοιράστηκαν ισάριθμα ως προς την χρήση της άλγεβρας και της πρακτικής αριθμητικής για την επίλυση του προβλήματος. Ωστόσο τα αγόρια σε αυτή την περίπτωση προτίμησαν στην πλειοψηφία τους την επίλυση κάνοντας χρήση άλγεβρας και αντίστοιχα τα κορίτσια κάνοντας χρήση πρακτικής αριθμητικής.

Πίνακας 11. Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»- Επίλυση

Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»	Μαθητές/Μαθήτριες
Σωστή Επίλυση	4
Καμία Απάντηση	0
Λανθασμένη Απάντηση	5
Μερικώς Σωστή Λύση	1

Σύνολο	10

Από τον πίνακα 11 διαπιστώνεται ότι και στο πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία» 4 στους 10 μαθητές κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα. Κατά συνέπεια και σε αυτή το πρόβλημα η πλειοψηφία των συμμετεχόντων αντιμετώπισε δυσκολία επίλυσης (McGee et al., 2006· Hallett, Nunes, & Bryant, 2010· Μωυσιάδου, 2022).

Πίνακας 12. Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»- Επίλυση με Βάση το Φύλο

Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»	Μαθητές/ Μαθήτριες Γυμνασίου	Μαθητές	Μαθήτριες
Επιτυχία με εξίσωση	2	1	1
Επιτυχία με πρακτική αριθμητική	1	0	1
Αποτυχία με εξίσωση	2	0	2
Αποτυχία με πρακτική αριθμητική	2	2	0
Καμία λύση	0	0	0
Μερικώς σωστή λύση με εξίσωση	1	2	1
Σύνολο	10	5	5

Αντίστοιχα ο πίνακας 12 παρουσιάζει πως μαθητές και οι μαθήτριες επέλυσαν το πρόβλημα. Από τα αποτελέσματα διαφαίνεται ότι 1 μαθητής και 1 μαθήτρια, κατάφεραν να κάνουν ορθή χρήση της εξίσωσης, ενώ αντίστοιχα 1 μαθήτρια έκανε ορθή χρήση ορθής αριθμητικής.

Πίνακας 13. Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία» - Επίλυση με Βάση τον Τρόπο

Πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία»	Μαθητές/Μαθήτριες Γυμνασίου	Αγόρια	Κορίτσια
Χρήση Άλγεβρας	6	3	3
Χρήση Πρακτικής Αριθμητικής	4	2	2
Καμία Απάντηση	0	0	0

Τέλος όσον αφορά τον τρόπο επιδίωξης επίλυσης του προβλήματος στην πλειοψηφία τους οι συμμετέχοντες, 6 στους 10, 3 μαθητές και 3 μαθήτριες προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα αλγεβρικά.

Συμπεράσματα

Με βάση τον προαναφερόμενα και ανατρέχοντας στον σκοπό της παρούσας εργασίας, αυτή εξέταζε εάν οι μαθητές και οι μαθήτριες Γυμνασίου, είναι σε θέση να επιλύσουν προβλήματα μαθηματικών με κλάσματα, με ποιο τρόπο επιδιώκουν να τα επιλύσουν και σε ποιο βαθμό η προσπάθεια τους είναι επιτυχής. Τα προβλήματα που κλήθηκαν να επιλύσουν οι μαθητές της παρούσας έρευνας έχουν επιλεγεί από ιστορικές πηγές και από μαθηματικές συλλογές, που αφορούν διαφόρους πολιτισμούς και χρονικές περιόδους. Απώτερος στόχος της έρευνας είναι να καταδειχθεί, εάν οι μαθητές προσεγγίζουν τα ιστορικά προβλήματα χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό ή αριθμητικό τρόπο ή εάν επινοούν πρωτότυπες λύσεις όπως αυτές που είχαν δώσει οι συγγραφείς των προβλημάτων.

Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών και στην επίλυση των τεσσάρων κλασματικών προβλημάτων που κλήθηκαν να απαντήσουν δεν ήταν ιδιαίτερα υψηλές, άποψη που έχει καταδειχθεί και από άλλες προγενέστερες έρευνες (Brown & Quinn, 2006· Park, Mccroy & Gucler, 2012· Σταυρίδου, 2016· Μωυσιάδου, 2022). Αναλυτικότερα στο πρόβλημα το «Λιοντάρι και ο Λάκκος» μόνο το 2 από τους 10 συμμετέχοντες των συμμετεχόντων κατάφεραν να επιλύσουν ορθά το πρόβλημα. Αντίστοιχα στο πρόβλημα «Η Κληρονομιά», στο πρόβλημα «Του Issak Newton» και στο πρόβλημα η «Παλατινή Ανθολογία», μόνο τέσσερις στους 10 κατάφεραν να δώσουν ορθές απαντήσεις στα προβλήματα. Από τα προαναφερόμενα αποτελέσματα καταδεικνύεται, ότι οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντικές αδυναμίες επίλυσης κλασματικών προβλημάτων, συμπέρασμα που συμπλέει με αντίστοιχα αποτελέσματα ερευνών που έχουν διεξάγει οι Φιλίππου & Χρίστου (1995), Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή (2001) Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου (2004), Hallett, Nunes, & Bryant (2010) και Μωυσιάδου (2022).

Ως προς το επίπεδο επίδοσης μεταξύ αγοριών και κοριτσιών, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν, ότι δεν υπήρχαν μεγάλες διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο φύλων. Στο πρόβλημα το «Λιοντάρι και ο Λάκκος», 1 μαθητής και 1 μαθήτρια κατάφεραν να επιλύσουν ορθά το πρόβλημα. Στο πρόβλημα «Η Κληρονομιά», 2 μαθητές και 1 μαθήτρια, στο πρόβλημα «Του Issak Newton» 2 μαθητές και 2 μαθήτριες και στο πρόβλημα «Παλατινή Ανθολογία», 2 μαθήτριές και μαθητής έδωσαν ορθές λύσεις. Δεν εντοπίστηκε προγενέστερη έρευνα που να εξετάζει τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων σύμφωνα με το φύλο. Κρίνεται σκόπιμο ωστόσο να πραγματοποιηθούν μελλοντικές έρευνες και όσον αφορά αυτή την ερευνητική διάσταση προκειμένου να διαπιστωθεί, εάν τα δημογραφικά στοιχεία των μαθητών, επηρεάζουν τον τρόπο προσέγγισης των κλασματικών προβλημάτων.

Όσον αφορά τους τρόπους επίλυσης που προτίμησαν οι συμμετέχοντες για την επίλυση των προβλημάτων, τον αλγεβρικό ή τον αριθμητικό, στο πρόβλημα το «Λιοντάρι και ο Λάκκος», 5 μαθητές προτίμησαν την πρακτική αριθμητική, στο πρόβλημα «Η Κληρονομιά», 7 μαθητές έκαναν χρήση άλγεβρας στο πρόβλημα, «Του Issak Newton» οι μαθητές μοιράστηκαν ισότιμα μεταξύ άλγεβρας και πρακτικής αριθμητικής και τέλος στο πρόβλημα και στην «Παλατινή Ανθολογία», 6 έκαναν χρήση άλγεβρας και 4 χρήση πρακτικών μαθηματικών.

Από τα όσα προαναφέρθηκαν διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες ως προς την ικανότητα επίλυση ιστορικών κλασματικών προβλημάτων. Επίσης διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές επιδιώκουν να επιλύσουν τα προβλήματα με σύγχρονες μαθηματικές μεθόδους (άλγεβρα). Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν κυρίως οι μαθητές αφορούσαν την χρήση διαίρεσης και την πρόσθεση ομώνυμων ή ετερώνυμων κλασμάτων. Οι προαναφερόμενες δυσκολίες συμπλέουν με τα αποτελέσματα της έρευνας των McGee et al. (2006), οι οποίοι είχαν καταλήξει σε όμοια συμπεράσματα. Επίσης από τα λάθη που πραγματοποίησαν οι μαθητές κατά την προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων, καταδεικνύεται ότι δεν μπορούσαν να κατανοήσουν ότι η κλασματική μονάδα είναι ένα σταθερό μέγεθος και πως δεν μπορούν να χειριστούν ξεχωριστά τους αριθμητές και τους παρανομαστές. Τις ίδιες δυσκολίες αντίστοιχα είχαν επισημάνει στις έρευνες τους οι Φιλίππου & Χρίστου (1995) Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου (2004) Ni & Zhou (2005), McGee et al., (2006) και Park, Mccroy & Gucler (2012). Συγκεκριμένα οι McGee et al. (2006), ανέφεραν ότι οι μαθητές κατά την εμπλοκή τους με πράξεις κλασμάτων, πραγματοποιούν ως επί το πλείστον διαδικαστικά λάθη, όπως για παράδειγμα την πρόσθεση των αριθμητών και των παρονομαστών. Αντίστοιχα στις έρευνες τους οι

Behr et al. (1992), Ni & Zhou, (2005) και McGee et al. (2006), τόνισαν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν τα κλάσματα ούτε ως έννοιες, ούτε σε επίπεδο πράξεων, ενώ πολλοί από αυτούς δεν μπορούν να κατασκευάσουν γνωστικά την έννοια του κλάσματος.

Συνάμα οι δυσκολίες που παρουσίασαν οι μαθητές καταδεικνύουν ότι κατά πάσα πιθανότητα έχουν σημαντικά μαθησιακά κενά πιθανόν από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Με την προαναφερόμενη άποψη έχουν συμφωνήσει αρκετές προγενέστερες έρευνες (Kilpatrick et al., 2001· Lemonidis, 2016· Stafylidou & Vosniadou, 2004· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007, 2010), σύμφωνα με τις οποίες οι μαθητές που παρουσιάζουν δυσκολίες στην εκμάθηση των κλασμάτων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν τις ίδιες δυσκολίες και στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας λόγω του γεγονότος ότι αφορούσαν έναν περιορισμένο αριθμό συμμετεχόντων, δεν μπορούν να γενικευθούν, ωστόσο μπορούν να αποτελέσουν την «μαγιά» για να πραγματοποιηθούν ευρύτερες έρευνες στο μέλλον, σε μεγαλύτερο αριθμό συμμετεχόντων, προκειμένου να διερευνηθεί το παρόν ερευνητικό ζήτημα, ώστε τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας να επιβεβαιωθούν ή όχι.

Ωστόσο μπορεί να λεχθεί ότι οι μαθητές έδειξαν να απολαμβάνουν τη διαδικασία επίλυσης ιστορικών κλασματικών προβλημάτων, ακόμη και αν απέτυχαν να τα επιλύσουν ορθά. Η δυνατότητα των μαθητών να επιλύουν ιστορικά κλάσματα, χωρίς να εστιάζουν στην βαθμολογική απόδοση τους, καταδεικνύει έναν νέο τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών από την πλευρά των εκπαιδευτικών, καθώς διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον για αυτής της κατηγορίας τα προβλήματα. Διαφαίνεται από την προαναφερόμενη διαπίστωση, ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν εποικοδομητικά τα ιστορικά προβλήματα προκειμένου να παρακινήσουν τους μαθητές να προσεγγίσουν θετικότερα το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο (Fried, 2001· Helfgot, 2004· Helfgot, 2004· Περιβολά, 2021) και να σταματήσουν να θεωρούν τα μαθηματικά απρόσωπα και ξένα (Baker & Gravemeijer, 2006).

Προτάσεις

Συνίσταται οι εκπαιδευτικοί της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης να εστιάσουν στην ενότητα των κλασματικών προβλημάτων, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν το περιεχόμενο και τις στρατηγικές επίλυσης τους. Προκειμένου να βοηθηθούν οι μαθητές ως προς την επίλυση κλασματικών προβλημάτων, θα ήταν ωφέλιμο οι εκπαιδευτικοί να εντοπίσουν τα σημεία στα οποία δυσκολεύονται οι μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης, τα λάθη που συνήθως πραγματοποιούν, τις πιθανές παρανοήσεις, ώστε να επικεντρώσουν την προσοχή τους στην προσπάθεια να βελτιώσουν τις ικανότητες και τις επιδόσεις της μαθητικής κοινότητας (Περιβολά, 2021).

Παίρνοντας αφορμή από τα ιστορικά προβλήματα που κλήθηκαν να επιλύσουν οι συμμετέχοντες στην παρούσα έρευνα, κρίνεται σκόπιμο οι εκπαιδευτικοί να εστιάσουν στον σημαίνοντα ρόλο που θα μπορούσαν να επιτελέσουν τα ιστορικά προβλήματα στην βελτίωση των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών στα κλάσματα, όπως άλλωστε διαπιστώθηκε και από τα αποτελέσματα προγενέστερων ερευνών (Tzanakis & Arcavi, 2000· Μωυσιάδου, 2022).

Όντας η ιστορία των μαθηματικών μέρος της μαθηματικής επιστήμης συνίσταται οι εκπαιδευτικοί να την αξιοποιήσουν καθώς μπορούν τα ιστορικά προβλήματα να αποτελέσουν ελκυστικό παράγοντα για τους μαθητές, μιας και ενεργοποιούν το ενδιαφέρον τους και τους ενθαρρύνουν να αναζητήσουν και να εμπεδώσουν την μαθηματική γνώση (Tzanakis & Arcavi, 2000· Περιβολά, 2021· Μωυσιάδου, 2022)

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ξενόγλωσσες

Avital, S. (1995). «History of mathematics can help improve instruction and learning». In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Hohansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters*, (pp. 3 - 23). Washington DC: The Mathematical Association of America.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). «An historical phenomenology of mean and median». *Educational Studies in Mathematics*, 62,149-168.

Barbin, E. & Menghini, M. (2000). «On potentialities, limits, and risks». In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 86 – 90). Dordrecht The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Barzun, J. (1954). *Teacher in America*. New York: Doubleday and Co.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). «Rational number, ratio, and proportion». In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.296-333). New York: Macmillan.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.

Boyce, S., & Norton, A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 10-25.

Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *The Australian Mathematics Teacher*, 62(4), 28.

Bryman, A. (2017). *Social Research Methods*. London: Oxford University Press.

Boero, P. (1989). Mathematical Literacy for All: Experiences and Problems, *Proceedings of PMEXIII*, (I), pp. 62-76

Bruhler, M. (1990). «Reading Archimedes' measurement of a circle». In J. Fauvel (ed), History in the mathematics classroom: the IREM papers (pp. 43–58). Leicester: Mathematical Association.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). «Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research». In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 233-240). Melbourne, Australia: PME.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.

Charles, K., & Nason, R. (2001). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 43 (2), 191-221.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 72(1), 127-138.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2007). «Year six fraction understanding: A part of the whole story». In J. Watson & K. Beswick (Eds.), P*roceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics: essential research, essential practice* (pp. 207-216). Sydney: MERGA

Clawson, C. (2005). *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Κέδρος.

Davitt, R. M. (2000). The evolutionary character of mathematics. *Mathematics Teacher*, 93(8), 692 -694.

Euler, L. & Heche, S. (2015). *Elements of Algebra*. USA: CreateSpace Independent Publishing. Platform.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών - ΔΕΠΠΣ (2003). Ανακτήθηκε από : http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 83-106.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 11 (2), 3-6.

Fauvel, J. & Maanen, J. V. (1997). The Role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics discussion document for an ICMI study (1997- 2000). *ZDM*, 29 (4), 138 – 140.

Fibonacci's Liber Abaci, (2003). A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. London: Sigler.

Fried, M., (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?. *Science & Education 10*(4),391-408

Furinghetti, F. (2000). «The long tradition of history in mathematics teaching». In V. Katz (Ed.). *Using history to teach mathematics: An international perspective*, (pp. 49 – 58). Washington. DC: The Mathematical Association of America.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). «Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice». In L. English (Ed.), *Handbook ofinternational research in mathematics education* (pp. 631-654). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Glaser, R. (1984). Education and thinking: The role of knowledge. *American Psychologist*, 39(2), 93 - 104.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

Greeno, J. G. (1991). «A view of mathematical problem solving in school». In M.U. Smith (Ed.), Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains, (pp. 69-98).

Grugnetti, L & Rogers, L. (2000). «Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues». In J. Fauvel & J. van *Maanen (Eds.), History in Mathematics Education: The ICMI Study*, (pp. 39 - 62). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 1-18.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395.

Hallez, M. (1990). «Teaching Huygens in the rue Huygens». In J. Fauvel (ed), *History in the mathematics classroom: the IREM papers*, (pp. 97-112). Leicester: Mathematical Association, 97–112

Helfgott, M. (2004). «Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics». *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 147-164.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, 25(4), 12-21.

Jankvist U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" on using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71, pp.235-261.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional design models for well-structured and IIIstructured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development*, 45(1), 65-94.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development*, 48(4), 63-85.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kragh, H. (1990), *An Introduction to the Historiography of Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). *Problem solving: A handbook for Elementary School*

Teachers. Boston: Allyn and Bacon.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New York: Routledge.

Le Goff, J-P. (1996). «Cubic equations at secondary school level: following in Euler's footsteps». In E. Barbin, R. Douady (eds), *Teaching mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice*, (pp.11–34), Pont-a-Mousson: Topiques Editions.

Lemonidis, Ch. (2016). Effects of remedial instruction on 6th grade students with and without difficulties in fractions. Biennial Meeting of EARLI SIG 3 – Conceptual Change, Florina, Greece.

Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). The Role of Metacognition in MathematicalvProblem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes.

Final report to the National Science Foundation Grant of MEDC project MDR, 85-50346.

Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3) 267-295

Mamede, E., & Oliveira, M. (2010). *Issues on children's ideas of fraction when quotient interpretation is used.* Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Poland: Rzeszów.

McGee, L., Kervin, L., & Chinnappan, M. (2006). «Emerging issues in the investigation of the construct of partitive quotient». In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces. Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (, pp. 360-367). Adelaide: MERGA.

Mayer, R.E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition.* New York: W.H. Freeman and Company.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 37-69.

Ni, Y., & Zhou, YD (2005). Διδασκαλία και εκμάθηση κλασμάτων και ρητών αριθμών: Η προέλευση και οι συνέπειες της προκατάληψης ακέραιων αριθμών. *Εκπαιδευτικός Ψυχολόγος*, 40, 27-52.

Naik, S., & Subramaniam, K. (2008). «Integrating the measure and quotient interpretation of fractions». In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group of the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (pp. 17-24). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH,

Newton, I. (1972). *Translated by Joseph Raphson*, Universal Arithmetick, 1720.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*.Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Norton, A., & Wilkins, J. L. M. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 150-161.

Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 18-45.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61-83.

Park, J. Mccroy. R. & Gucler, B. (2012) Teaching prospective teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics* 82(3): 455-479.

Petit, M. M., Laird, R. E. & Marsden, E. L. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom.* New York & London, Routledge.

Polya, G. (1945*). How to solve it.* NJ: Princeton University Press

Polya, G. (1957). How to solve it? (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematics discovery: An understanding, learning, and teachingproblem solving (combined edition).* New York: John Willey & Son.

Ransom, P., Arcavi, A,, Barbin, E. & Fowler, D. (1991). The experience of history in mathematics education. *For the learning of mathematics* 11 (2), 7–16.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, 93(2), 346.

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G., (1991). The experience of history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 7-16.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving ,metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.) *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp.334-370). New York: MacMillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-asmeasure: A study of the learning through activity research program. *Journal of Mathematical Behavior,* 52, 122-133

Speranza, F. (1989). History, Epistemology, Didactics: some noteworthy cases. In Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), *proceedings of the first Italian - German bilateral symposium on Didactics of Mathematics* (pp. 95 – 107).

Strasser, R. (1989). «Scholarly Knowledge and Social Needs Sources and legitimation of Mathematical Knowledge to be taught». In Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), Proceedings of the first Italian - German bilateral symposium on didactics of Mathematics (pp. 125 – 144).

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. New York: Springer

Struve, H. (1989). «The relevance of investigations of the historical development of mathematical theories for the teaching of these theories». In Bazzini L. - H. G. Steiner (Ed.), Proceedings of the first Italian - German bilateral symposium on Didactics of Mathematics (pp. 37 – 50).

Swetz, F. (1993) *Learning Activites and History of Mathematics.* NY: J Weston Walch.

Swetz, F. J. (1995). «Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction». In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, (pp. 25–38). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Swetz, F. J. (2007), Historical Problems: A Valuable Resource for Mathematics. Washington DC: The Mathematical Association of America.

Taimina, D. (2004). History of mathematics and mechanics in digital Reuleaux kinematic mechanism collection. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 89-102.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). «Fractions and multiplicative reasoning». In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp.95-113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 419-441

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). «Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey». In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, (pp. 201 - 240). Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 44 – 5

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2007). The Notion of Historical 'Parallelism' Revisited: Historical Evolution and Students' Conceptions of the Order Relation on the Number Line. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2),165-183.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-41.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). «How many numbers are there in a rationa numbers interval? Constraints, synthetic models, and the effect of the number line». In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265–282). Oxford, UK: Elsevier

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, 28(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355.

Van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods'. *For the Learning of Mathematics*,17(2), 39-46.

Van De Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά.* Αθήνα: Επίκεντρο.

Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2013). Mathematical Problem Solving. In P. Andrews and T. Rowlands (Eds.), MasterClass in mathematics education: International perspectives on teaching and learning (pp. 113-123). London: Bloomsbury.

Wilson, J., Fernandez, M., L., and Hadaway, N. (1994). Problem Solving: Managing it all, The Mathematics Teacher, vol. 87, (No 3).195-199.

Wong, M., & Evans, D. (2008). «Fractions as a measure». In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Navigating Currents and Charting Directions: Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 597-603). Brisbane, Australia: MERGA.

Wright, V. (2013). In search of the prototypical fraction. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 18(2), 27–32.

Ελληνόγλωσση

Babbie, E. (2013). *Εισαγωγή στην κοινωνική έρευνα.* Αθήνα : Κριτική.

Bouchery, G. (1961). *Παράδοξα και Διασκεδαστικά Μαθηματικά.* Αθήνα: Αίθρα

Γαγάτσης,Α., Μιχαηλίδου Ε. & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών*. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου,

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α. , Ηλία, Ι., Σπύρου, Π. (2004). Αναπαραστάσεις και Μάθηση των Μαθηματικών; Λευκωσία: Intercollage Press.

Κολέζα, Ε. (2010). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Λεμονίδης, Χ., (1998). Διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Α΄ τάξης του Δημοτικού σε πράξεις και προβλήματα προσθετικού τύπου. Συμπεράσματα και προτάσεις για τη διδασκαλία. Πρακτικά 1ης Διημερίδας του Πανεπιστημίου Κρήτης στη Διδακτική των Μαθηματικών. σσ. 161-174.

Μαμωνά-Downs, Γ.Παπαδόπουλος Ι.(2017) .*Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.* Ηράκλειο: Πανεποστημιακές Εκδόσεως Κρήτης.

Μωυσιάδου, Κ. (2022). *Διδασκαλία και μάθηση Αλγεβρικών εννοιών με ιστορική προοπτική.* Διπλωματική Εργασία. Πάτρα: ΕΑΠ.

Περιβολά, Σ. (2021). Σχεδιάζοντας Δραστηριότητες αξιοποιώντας την Ιστορία των Μαθηματικών: Η περίπτωση των Κλασμάτων. (Διπλωματική Εργασία). Πανεπιστήκο Αιγαίου, Ρόδος.

Πόρποδας Κ. (2003): «Διαγνωστική Αξιολόγηση και Αντιμετώπιση των Μαθησιακών Δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο». ΕΠΕΑΕΚ του ΥΠΕΠΘ. Πάτρα

Σταυρίδου, Μ. (2016). *Λόγοι Επιλογής των Προβλημάτων Πρόσθεσης και Πολλαπλασιασμού Κλασμάτων στη Διδασκαλία των Μαθηματικών: Οι Ιδέες των Εκπαιδευτικών.* (Διπλωματική Εργασία). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη.

Παράρτημα

Πρόβλημα 2.9.7. ***Η κληρονομιά***
Ένας άντρας που πλησίαζε το τέλος του, κάλεσε τους γιους του και τους ζήτησε να μοιράσουν την περιουσία του, σύμφωνα με την επιθυμία του. Στον μεγάλο γιό του είπε να πάρει ένα σόλδι και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Στον δεύτερο γιό του να πάρει 2 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν. Στον τρίτο γιο του είπε να πάρει 3 σόλδια και το 1/7 από αυτά που θα περισσέψουν κ.ο.κ. Έτσι λοιπόν κάθε γιος θα παίρνει ένα σόλδι περισσότερο από τον προηγούμενο και το 1/7 από ότι θα παραμένει. Τέλος, ο τελευταίος γιος θα πάρει ότι περισσέψει. Με αυτό τον τρόπο η περιουσία θα έχει μοιραστεί δίκαια και όλοι θα έχουν πάρει τα ίδια χρήματα. Πόσους γιους είχε και πόσο μεγάλη ήταν οι περιουσία του; "FIBONACCI"

Πρόβλημα 2.12.2. *Αν δύο ταχυδρόμοι Α και Β, απέχουν 59 μίλια ο ένας από τον άλλο και ξεκινούν το πρωί το ταξίδι για να συναντηθούν. Ο Α διανύει 7 μίλια μέσα σε δύο ώρες και ο Β διανύει 8 μίλια μέσα σε τρεις ώρες και ο Β ξεκινάει το ταξίδι του μία ώρα αργότερα σε σχέση με τον Α. Πόσα μίλια θα έχει διανύσει ο Α μέχρι να συναντήσει τον Β;* "ISAAK NEWTON"

Η Αφροδίτη είπε στον Έρωτα που στεκόταν κατηφής: "Γιατί παιδί μου, είσαι θλιμμένος;" Κι αυτός απάντησε: "Οι Μούσες μου 'κλέψαν τα μήλα που είχα φέρει από τον Ελικώνα, αρπάζοντας τα από τον κόρφο μου, και τα μοιράστηκαν μεταξύ τους, παίρνοντας διαφορετικά η καθεμία. Το ένα πέμπτο από τα μήλα το πήρε η Κλειώ, το ένα δωδέκατο η Ευτέρπη, και η θεϊκή Θάλεια το ένα όγδοο. Η Μελπομένη πήρε το ένα εικοστό, η Τερψιχόρη το ένα τέταρτο, η Ερατώ το ένα έβδομο. Τριάντα μήλα μου 'κλεψε η Πολύμνια, η Ουρανία εκατόν είκοσι, ενώ η Καλλιόπη έφυγε με τριακόσια μήλα. Σου 'ρχομαι τώρα λοιπόν με τα χέρια ελαφρωμένα, και σου φέρνω ετούτα τα πενήντα μήλα που μου αφήσανε οι θεές." "ΠΑΛΑΤΙΝΗ ΜΥΘΟΛΟΓΙΑ"

Πρόβλημα 2.9.2. ***Το Λιοντάρι και ο λάκος*** "FIBONACCI"
Ένα λιοντάρι έχει παγιδευτεί μέσα σε έναν λάκο με βάθος 50 πόδια και προσπαθεί να βγει έξω. Κάθε μέρα σκαρφαλώνει το 1/7 του βάθους και το βράδυ κυλά προς τα κάτω το 1/9. Πόσες μέρες θα του πάρει για να καταφέρει να βγει από το λάκο;

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 και τα άρθρα 2,4,6 παρ. 3 του Ν. 1256/1982, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον.