ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διπλωματική Εργασία

Η διαδικασία του "Ελέγχου" στην επίλυση προβλημάτων στο Λύκειο.

ΓΕΜΕΛΟΥ ΑΡΙΣΤΕΑ

Επιβλέπων καθηγητής: Αρβανιτογεώργος Ανδρέας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Η διαδικασία του "Ελέγχου" στην επίλυση προβλημάτων στο Λύκειο.

ΓΕΜΕΛΟΥ ΑΡΙΣΤΕΑ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:	Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Αρβανιτογεώργος Ανδρέας	Καριώτου Φωτεινή
Καθηγητής	Επίκ. Καθηγ. ΕΑΠ
Πανεπιστήμιο Πατρών	

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της διαδικασίας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων προσαρμοσμένα στο Λύκειο. Σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων κατέχει ο Έλεγχος που λειτουργεί ως ένας συνεχής μηχανισμός λήψης αποφάσεων με σκοπό την επιτυχή έκβαση της επίλυσης. Στόχος είναι μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα, με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις επίλυσης τους, να παρουσιάσουμε ερωτήματα που ανακύπτουν στα πλαίσια του Ελέγχου.

Στο 1ο **κεφάλαιο** δίνονται διάφοροι ορισμοί του προβλήματος και ειδικά του μαθηματικού προβλήματος καθώς και τι σημαίνει επίλυση προβλήματος. Στην συνέχεια γίνεται εκτενής αναφορά στον μαθηματικό Polya και στο βιβλίο του «Πως να το λύσω». Τέλος περιγράφονται τα στάδια επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya και γίνεται αναφορά στις ευρετικές (Heuristics).

Στο 2ο **κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι τύποι προβλημάτων κατά τον μαθηματικό Terence Tao. Επιπλέον αναλύουμε τα βήματα επίλυσης που προτείνει ο Tao στο βιβλίο του «Solving Mathematical Problems». Στο τέλος περιγράφεται ένα παράδειγμα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ώστε να γίνουν κατανοητά τα βήματα επίλυσης κατά τον Terence Tao.

Στο 3ο **κεφάλαιο** της εργασίας αναφέρονται οι θέσεις της Γιάννας Μαμωνά -Downs για την επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά και γίνεται εισαγωγή στην έννοια του Ελέγχου καθώς και ανάδειξη της σημασίας του κατά την επίλυση. Στην συνέχεια παρουσιάζονται ερωτήματα που ανακύπτουν στα πλαίσια του Ελέγχου.

Στο 4ο **κεφάλαιο** παρουσιάζονται προβλήματα από τα μαθηματικά του Λυκείου, έτσι ώστε να παρουσιαστούν και να κατανοηθούν καλύτερα τα ερωτήματα που προκύπτουν από τον Έλεγχο, κατά την διαδικασία της επίλυσης ενός προβλήματος.

Στο 5ο **κεφάλαιο** γίνεται μία αναφορά σε σύγχρονες προσεγγίσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών και πως μπορούμε να εντάξουμε το πρόβλημα σε αυτές τις προσεγγίσεις.

Στο 6ο **κεφάλαιο** επιχειρείται μια προσπάθεια να παρουσιαστεί η μαθηματική εκπαίδευση σήμερα και στο τέλος παρουσιάζεται το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στις τρεις τάξεις του λυκείου.

Abstract

Summary

The purpose of this thesis is the study of the procedure of solving mathematical problems tailored to High School. Control plays an important role in problem solving and functions as a continuous decision-making mechanism aiming at the successful outcome of the solution. The objective is to present questions that arise in terms of control, through specific examples, with the corresponding solving approaches.

In the **1st chapter** various definitions of the problem are given and especially the mathematical problem as well as what problem-solving means. Then, there is an extensive reference to the mathematician Polya and his book «How to solve it». Finally, the stages of solving a mathematical problem according to Polya are described and reference is made to heuristics.

In the **2nd chapter** the types of problems according to the mathematician Terence Tao are presented. In addition, we analyse the solution steps proposed by Tao in his book «Solving mathematical problems». At the end, an example from Euclidean geometry is described in order to understand the solution steps according to Terence Tao.

In the **3rd chapter** of the thesis the views of Gianna Mamona-Downs on problem solving in mathematics are mentioned and the concept of Control is introduced and its importance in solving is highlighted. Questions arising with regard to Control are then presented.

In the **4th chapter** problems from high school mathematics are presented, in order to present and better understand the questions that arise from Control, during the process of solving a problem.

In the **5th chapter** a reference is made to modern approaches to teaching mathematics and how we can integrate the problem into these approaches.

In the **6th chapter** an attempt is made to present the present-day mathematics education and finally the curriculum of mathematics in the three grades of high school is presented.

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ιστορική αναδρομή στην οποία αναφέρονται μερικοί μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

1.1 Πρόβλημα – Επίλυση προβλήματος

Με τον όρο πρόβλημα εννοείται μία κατάσταση η οποία χρήζει αντιμετώπισης, απαιτεί λύση, η δε λύση της δεν είναι γνωστή ,ούτε προφανής. Ο όρος πρόβλημα οριοθετείτε καλά από τους Newell και Simon που έγραψαν : «θεωρούμε ότι κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν θέλει κάτι και δεν γνωρίζει άμεσα τη σειρά των ενεργειών που μπορεί να ακολουθήσει ώστε να το επιτύχει.

Μαθηματικό πρόβλημα, θα καλούμε ένα πρόβλημα που στην αναζήτηση της λύσης του εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες , αρχές και θεωρίες.

Στον όρο επίλυση προβλήματος οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών προσδίδουν διάφορες μαθησιακές προοπτικές, θα εστιάσουμε στην προοπτική που περιλαμβάνει τις συνειδητές αποφάσεις στην ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας κατά την αναζήτηση λύσης. Ο μαθηματικός Alan Schoenfeld αναφέρει ότι η επίλυση ενός προβλήματος είναι γενικά η προσπάθεια του λύτη να πλησιάσει την λύση όταν δεν γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο θα μπορέσει να το επιτύχει.

Ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι ένας ιδιαίτερος τύπος μαθηματικής ερώτησης, που απαιτεί διερεύνηση προκειμένου να απαντηθεί. Το να μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μια μαθηματική ερώτηση ως πρόβλημα, εξαρτάται από το σε ποιόν απευθύνεται. Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες ταξινομήσεις μαθηματικών προβλημάτων: κλειστά, ανοιχτά, πεδία διερεύνησης κλπ. Η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων εμπεριέχει την ικανότητα ευέλικτης διαχείρισης μιας βάσης γνώσεων, τη ικανότητα για συστηματική αναζήτηση και μεταγνωστικές δεξιότητες.

Με τον όρο «επίλυση προβλήματος» (problem solving) περιγράφεται ένας κλάδος της Διδακτικής των Μαθηματικών που ασχολείται με τη διαδικασία συντονισμού προηγούμενης εμπειρίας, γνώσης και προαισθήματος, σε μια προσπάθεια προσδιορισμού μιας μεθόδου ανάλυσης μιας κατάστασης, της οποίας τα αποτελέσματα είναι άγνωστα ή είναι γνωστά αλλά πρέπει να αποκαλυφθούν και με την οποία έρχονται αντιμέτωποι καθημερινά οι μαθητές στη σχολική πραγματικότητα αφού αποτελεί πλέον τον πυρήνα της μαθηματικής δραστηριότητας.

Η επίλυση προβλήματος κατέχει κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών και συνδέεται με αυτή με τρεις τρόπους:

i. Μπορούμε να διδάξουμε συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, ανεξαρτήτως περιεχομένων (teaching about problem solving).
ii. Μπορούμε να διδάξουμε Μαθηματικά με στόχο την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα (teaching for problem solving).
iii. Μπορούμε να διδάξουμε Μαθηματικά μέσω επίλυσης προβλημάτων (teaching via problem solving).

Πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι δεν διδάσκονται όλα τα μαθηματικά περιεχόμενα μέσω της επίλυσης προβλημάτων.

1.2 Ιστορική αναδρομή, Μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με την επίλυση προβλήματος

Ο Ήρων από την Αλεξάνδρεια ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε με προβλήματα κυρίως βελτιστοποίησης. Έζησε γύρω στο δεύτερο με πρώτο αιώνα π.χ. στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και διεύθυνε την Ανώτατη Τεχνική Σχολή.

Ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς υπήρξε μια από τις σημαντικότερες μαθηματικές μορφές του 4ου μ.Χ., αιώνα. Κορυφαίο από τα έργα του υπήρξε η "Μαθηματική Συναγωγή", το οποίο χωρίζεται σε 8 βιβλία, από τα οποία χάθηκαν το πρώτο και η αρχή του δευτέρου. Στο έβδομο βιβλίο της Συναγωγής του , ο Πάππος αναφέρεται σε έναν κλάδο μελέτης που ονομάζεται ΄΄αναλυόμενος΄΄. Η ονομασία αυτή μπορεί να αποδοθεί σαν « Η τέχνη του να λύνεις Προβλήματα» ή «Ευρετική».

Ο Gottfried Wilhelm Leibniz γεννήθηκε στις 1 Ιουλίου το 1646 στην Λειψία της Γερμανίας , ήταν Γερμανός φιλόσοφος, μαθηματικός, νομικός και πολιτικός επιστήμονας. Σχεδίαζε να γράψει την «Τέχνη της επινόησης» αλλά δεν τα κατάφερε, όμως πολυάριθμα αποσπάσματα του έργου του, δείχνουν ότι είχε ενδιαφέρουσες ιδέες. Έγραψε «Τίποτα δεν είναι πιο σημαντικό από το να δει κανείς της πηγές της επινόησης, που είναι, κατά την γνώμη μου , πιο ενδιαφέρουσες από τις ίδιες τις επινοήσεις».

Ο Bernard Bolzano (1781-1848) γεννήθηκε στην Πράγα. Το 1796 φοίτησε στο πανεπιστήμιο, όπου σπούδασε μαθηματικά, φιλοσοφία και φυσική. Ασχολήθηκε με

τη λογικήκξαι τα μαθηματικά, αφιέρωσε ένα εκτενές μέρος από την περιεκτική παρουσίαση της λογικής, «Wissenschaftslehre» στο θέμα της ευρετικής.
Ο René Descartes γεννήθηκε στις 31 Μαρτίου 1596 στην Γαλλία, ήταν μαθηματικός, επιστήμονας και φιλόσοφος. Σχεδίαζε να κατασκευάσει μια καθολική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, όμως άφησε ατελείωτο το έργο του «Κανόνες που κατευθύνουν το νου».

1.3 Στάδια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya

Ο Gyorgy Polya, γεννήθηκε στην Βουδαπέστη (1887-1985) ο οποίος στο βιβλίο του με τίτλο «How to solve it» περιγράφει και συστηματοποιεί τις στρατηγικές που κατά τη γνώμη του χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί, όταν λύνουν προβλήματα. Καταπιάνεται με τη λύση και ότι προηγείται αυτής, δηλαδή με την ευρετική πορεία.

Μια συμπυκνωμένη περιγραφή των σταδίων επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος κατά τον Polya δίνονται παρακάτω. Τα χωρίζει σε τέσσερα βήματα και είναι τα εξής:

1. **Κατανόηση του προβλήματος**

   Πρώτα πρέπει να καταλάβουμε το πρόβλημα, ώστε να δούμε τι ακριβώς ζητάει. Ένας λύτης έχει κατανοήσει ένα πρόβλημα όταν είναι σε θέση να το διατυπώσει με ευχέρεια και μπορεί να επισημάνει τα βασικά μέρη, δηλαδή το ζητούμενο, τα δεδομένα και την συνθήκη. Αν υπάρχει ένα σχήμα , θα πρέπει να γίνει και πάνω σε αυτό να καταγραφούν τα δεδομένα και το ζητούμενο. Τέλος θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί κατάλληλος συμβολισμός.

2. **Επινόηση ενός σχεδίου**

   Η όλη διαδικασία από την κατανόηση του προβλήματος μέχρι τη σύλληψη του σχεδίου μπορεί να είναι μακριά και επίπονη. Έχουμε ένα σχέδιο, μόνο όταν ξέρουμε σε γενικές γραμμές τι υπολογισμούς ή κατασκευές πρέπει να κάνουμε ώστε να φτάσουμε στο ζητούμενο. Για να συλλάβουμε την ιδέα ενός σχεδίου πρέπει να έχουμε καλή προγενέστερη αποκτημένη γνώση του θέματος και να βασιστούμε σε προηγούμενες εμπειρίες. Ο λύτης πρέπει να δει πως συσχετίζονται τα δεδομένα με το ζητούμενο έτσι ώστε να συλλάβει την ιδέα της λύσης , έτσι ώστε να φτιάξει ένα σχέδιο.

3. Εκτέλεση του σχεδίου

Η εκτέλεση του σχεδίου είναι ευκολότερη από τα παραπάνω στάδια και αυτό που χρειάζεται είναι κυρίως υπομονή. Εκτελέστε λεπτομερώς όλες τις αλγεβρικές ή γεωμετρικές πράξεις που έχετε προβλέψει να γίνουν. Επιβεβαιώστε ότι κάθε βήμα είναι σωστό με τυπικούς συλλογισμούς ή διαισθητικά. Έτσι από την κεντρική ιδέα επίλυσης που εντοπίσαμε στο προηγούμενο στάδιο , διαμορφώνουμε τα κατάλληλα βήματα για την επίτευξη του τελικού στόχου.

4. Ανασκόπηση της λύσης

Ξανακοιτάζουμε την ολοκληρωμένη λύση, επανεξετάζουμε το αποτέλεσμα καθώς και τον δρόμο που μας οδήγησε σε αυτό. Αυτό το στάδιο είναι πολύ σημαντικό όχι μόνο για την επαλήθευση του αποτελέσματος αλλά για τη εύρεση τυχών λαθών ή παραλήψεων στην διαδικασία της επίλυσης αλλά ίσως και στην εύρεση μίας διαφορετικής προσέγγισης που θα οδηγούσε στην λύση με πιο σύντομο τρόπο.

1.4 Ευρετικές

Ευρετική ήταν το όνομα ενός ορισμένου κλάδου μελέτης, χωρίς σαφώς καθορισμένα όρια, που θεωρούσαν ότι άνηκε στη λογική, τη φιλοσοφία ή την ψυχολογία. Η λέξη Ευρετική ,σαν επίθετο, σημαίνει «υπηρετώ την ανακάλυψη».
Ο σκοπός της ευρετικής είναι η μελέτη των μεθόδων και των κανόνων της ανακάλυψης και της επινόησης.

Οι πιο γνωστές προσπάθειες κατασκευής ενός συστήματος ευρετικής οφείλονται στον Descartes , Leibnitz και στον Bolzano Bernard.

Η σύγχρονη Ευρετική έχει στόχο την κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος και ειδικά των νοητικών διεργασιών που είναι τυπικά χρήσιμες σε αυτή την διαδικασία. Η βάση πάνω στην οποία οικοδομείται ο ευρετικός συλλογισμός πρέπει να είναι η εμπειρία μας στην επίλυση προβλημάτων καθώς και στη παρατήρηση άλλων ανθρώπων να λύνουν προβλήματα. θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι ευρετικες είναι γενικές τακτικές που μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων.

Από τότε που εισηγήθηκε ο Polya τις ευρετικές, η εφαρμογή τους έχει αποδειχθεί ένας πολύ χρήσιμος παράγοντας στην τάξη των μαθηματικών για την επίλυση των προβλημάτων. Οι κυριότερες ευρετικές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι οι εξής:

1. Λαμβάνουμε υπόψιν μας και χρησιμοποιούμε προβλήματα που ήδη έχουμε συναντήσει και είναι παρόμοια με αυτό που αντιμετωπίζουμε τώρα.
2. Ανακαλύπτουμε βοηθητικά στοιχεία και σχέσεις που θα μας βοηθήσουν στην λύση του.
3. Διαμορφώνουμε βοηθητικά προβλήματα με στόχο όχι την επίλυση αυτού καθαυτού του προβλήματος , αλλά την εξέταση του που ελπίζουμε να μας οδηγήσει στην λύση του αρχικού προβλήματος.
4. Διερευνούμε για την πιθανή ύπαρξη μοτίβου.
5. Εργαζόμαστε αντίστροφα , είτε από τα συμπεράσματα της απόδειξης είτε από την εικασία που κάναμε.
6. Διασπάμε και ανασυνθέτουμε το πρόβλημα.
7. Σχεδιάζουμε ένα σχήμα.
8. Διατυπώνουμε το πρόβλημα με μαθηματικά σύμβολα.
9. Διαφοροποιούμε το πρόβλημα αλλάζοντας κάποια από τα βασικά μέρη του.
10. Σιγουρευόμαστε ότι η επιχειρηματολογία μας είναι σωστή.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Οι θέσεις του μαθηματικού Tao Terence σχετικά με την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος από το βιβλίο του «Solving mathematical problems».

2.1 Terence Tao

O Terence Tao είναι Αυστραλός μαθηματικός, γεννημένος το 1975, θεωρείται ευρέως ως ένας από μεγαλύτερους εν ζωή μαθηματικούς. Το 2006 έγινε αποδέκτης του Μεταλλίου Fields , επίσημα γνωστό ως Διεθνές Μετάλλιο για Εξαιρετικές Ανακαλύψεις στα Μαθηματικά που απονέμεται σε μαθηματικούς κάτω των 40 ετών. Σε ηλικία 15 ετών έγραψε το βιβλίο «Solving mathematical problems» στο οποίο δίνει την δική του εκδοχή για τον τρόπο επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος.

O Tao από την αρχή επισημαίνει την σημασία των μαθηματικών προβλημάτων στην εκπαιδευτική, μαθηματική διαδικασία. Στο βιβλίο του προσπαθεί να παρουσιάσει κάποια μυστικά για την επίλυση προβλημάτων αν και σχολιάζει ότι η εμπειρία και η γνώση είναι δύο όπλα που πρέπει να διαθέτει κάθε λύτης και δεν είναι εύκολο να τα κερδίσουμε μόνο μέσω της ανάγνωσης αλλά αποκτώνται με την πάροδο του χρόνου, γι΄αυτό στον πρόλογο της δεύτερης έκδοσης αναφέρει ότι αν έγραφε τώρα το βιβλίο θα ήταν πολύ διαφορετικό.

2.2 Τύποι προβλημάτων κατά τον Tao

Από την αρχή του βιβλίου ο Tao αναφέρει ότι είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε το είδος του προβλήματος, γιατί αυτό καθορίζει τη βασική μέθοδο προσέγγισης. Έτσι τα είδη προβλημάτων κατά τον Tao διακρίνονται σε τρεις κύριους τύπους:

- Προβλήματα απόδειξης, υπολογισμού ή εκτίμησης, με εκφώνηση «να δειξετε ότι…» ή « να υπολογιστεί…»
- Προβλήματα εύρεσης ,τα οποία ζητούν να βρεθεί κάτι που ικανοποιεί κάποια απαίτηση, με εκφώνηση «να βρεθεί…»
- Προβλήματα ύπαρξης τα οποία απαιτούν την εξέταση ύπαρξης μίας πρότασης ή εύρεσης ενός αντιπαραδείγματος με εκφώνηση «υπάρχει…»

Φυσικά, δεν εμπίπτουν όλα τα προβλήματα στους παραπάνω τύπους, αλλά το είδος της ερώτησης εξακολουθεί να δείχνει τη βασική στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για την επίλυση ενός προβλήματος.

Τα προβλήματα του 1^{ου} τύπου ξεκινούν με κάποια δεδομένα και ο στόχος είναι να οδηγηθούμε σε μία πρόταση ή να βρεθεί η τιμή μίας έκφρασης. Στα προβλήματα 2^{ου} τύπου ο λύτης μαντεύει μία λύση που σχεδόν λειτουργεί και μετά κάνοντας μικρές αλλαγές προσπαθεί να την προσαρμόσει στο δοσμένο πρόβλημα. Τέλος τα προβλήματα 3^{ου} τύπου, είναι συνήθως τα πιο δύσκολα, γιατί πρέπει πρώτα να πάρεις μια απόφαση σχετικά με το αν ένα αντικείμενο υπάρχει ή όχι, και στη συνέχεια να αποδείξουμε τον ισχυρισμό ή να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

2.3 Βήματα Επίλυσης

Ο Tao προτείνει έξι βήματα που πρέπει να ακολουθήσει ο λύτης ενός μαθηματικού προβλήματος. Τα τέσσερα πρώτα είναι ακριβώς αυτά που είχαν μελετήσει οι Poya και Schoenfeld.

1. Κατανόηση του προβλήματος και των δεδομένων. Η κατανόηση των πληροφοριών που δίνονται καθώς και πως αυτές αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους οδηγεί στην επίλυση του προβλήματος.

2. Εντοπισμός του ζητούμενου. Είναι σημαντικό να γίνει πλήρης κατανόηση του πιο ακριβώς είναι το ζητούμενο. Η γνώση του στόχου βοηθά στη επιλογή σωστών τακτικών που θα μας φέρουν πιο κοντά στην επίλυση του προβλήματος.

3. Επιλογή κατάλληλου συμβολισμού. Τα δεδομένα και το ζητούμενο καθώς και όλες οι πληροφορίες που δίνονται πρέπει να είναι με ξεκάθαρο και απλό τρόπο καταγεγραμμένα. Ο γραπτός λόγος που επιλέγει μπορεί να τον διαφωτίσει και να φτάσει στην λύση.

4. Τροποποίηση του προβλήματος ελαφρώς. Η επίλυση ενός απλούστερου σχετικού προβλήματος αποκαλύπτει μερικές φορές τον τρόπο που πρέπει ακολουθήσει κάποιος για την επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Κάποιοι τρόποι για να διαφοροποιήσουμε ένα πρόβλημα είναι οι εξής:

i. θεωρούμε μια ειδική περίπτωση του προβλήματος, όπως η μελέτη μίας οριακής θέσης ή η μελέτη ειδικών περιπτώσεων.
ii. Λύνουμε μια απλοποιημένη έκδοση του προβλήματος.
iii. Διατυπώνουμε μια εικασία που πιθανώς θα μας οδηγεί στην λύση και αποδεικνύουμε πρώτα αυτή.

iv. Εξάγουμε κάποια επακόλουθα του προβλήματος και προσπαθούμε να αποδείξετε πρώτα αυτά.
v. Αναδιατυπώστε το πρόβλημα (π.χ. μελετάμε το αντίστροφο).
vi. Εξετάζουμε λύσεις παρόμοιων προβλημάτων.
vii. Γενικεύουμε το πρόβλημα.

5. Σημαντική τροποποίηση του προβλήματος. Πρόκειται για μία επιθετική στρατηγική, κάνουμε ριζικές αλλαγές , όπως αλλαγή δεδομένων, προσπάθεια διάψευσης της πρότασης. Μέσα από αυτή την διαδικασία εντοπίζουμε τα κομβικά σημεία των δεδομένων καθώς και πού βρίσκεται η κύρια δυσκολία.

6. Η απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικά με το ζητούμενο. Η απόδειξη μικρών αποτελεσμάτων θα μπορούσε να είναι επωφελής στην επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Αφού έχουν επιτευχθεί τα παραπάνω βήματα κάνουμε απλοποίηση της λύσης, εξαλείφοντας κατευθύνσεις έρευνας που δεν οδήγησαν κάπου. Τέλος αξιολογούνται οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν.

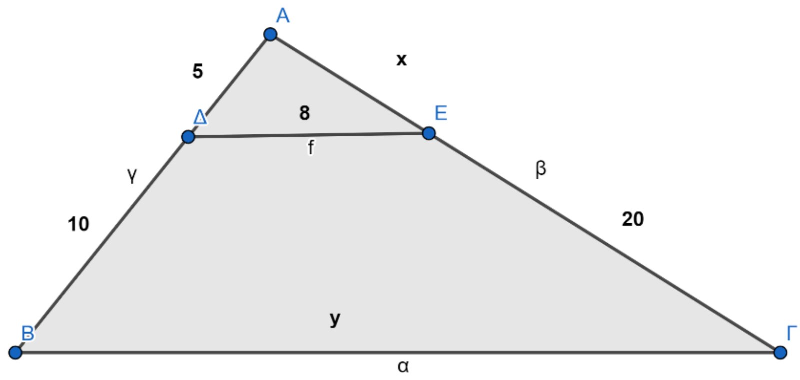
2.4 Παράδειγμα

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα επίλυσης που προτείνει ο Tao Terence. Για την επίλυση προβλημάτων ευκλείδειας γεωμετρίας ο Tao προτείνει ως πρώτο βήμα το σχεδιασμό του σχήματος και την καταγραφή των δεδομένων πάνω στο σχήμα. Επίσης ότι πολλές φορές το να φέρεις μια βοηθητική γραμμή λειτουργεί καταλυτικά στη επίλυση του προβλήματος.

Πρόβλημα

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ φέρνω ΒΓ//ΔΕ όπου Δ,Ε σημεία στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=5, ΒΔ=10, ΓΕ=20 , ΔΕ=8 να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΓ (*Γεωμετρία Β Λυκείου , Κεφάλαιο 7ο Αναλογίες , άσκηση 1 κατανόησης*)

- **Κατανόηση δεδομένων**
  Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος, σχεδιάζουμε ένα σχήμα. Και καταγράφουμε τα δεδομένα πάνω στο σχήμα.

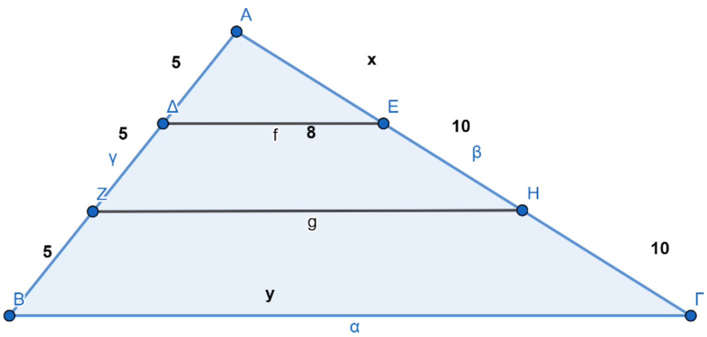


- **Εντοπισμός του ζητούμενου**
  Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός δύο ευθύγραμμων τμημάτων των ΑΕ και ΒΓ.

- **Επιλογή κατάλληλης σημειογραφίας**
  Θα πρέπει να εκφράσουμε τα ζητούμενα με μεταβλητές.
  Συμβολίζουμε με x την πλευρά ΑΕ και y την πλευρά ΒΓ.
  Η παραλληλία των τμημάτων ΔΕ και ΒΓ χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή του σχήματος.
  Γνωρίζουμε την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή σε τρίγωνο που λέει: το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
  Εφαρμόζουμε θεώρημα στο παραπάνω σχήμα

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

- **Τροποποίηση του προβλήματος ελαφρώς**



Φέρνουμε την βοηθητική ευθεία ΖΗ παράλληλη στη ΒΓ, με Ζ το μέσο του ΔΕ και Η το μέσο του ΕΓ.
Με την μικρή τροποποίηση του σχήματος παρατηρούμε ότι η ΑΒ τριχοτομήθηκε αρά και η ΑΓ, οπότε η ΑΕ θα είναι ίση με 10, δηλαδή x=10. Επίσης οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι τριπλάσιες από τις πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι υπολογίζουμε ότι y=8

- **Να το τροποποιήσεις σημαντικά**
Μία σημαντική τροποποίηση θα ήταν να αφαιρέσουμε το δεδομένο της παραλληλίας και να εξετάσουμε αν θα μπορούσαμε με κάποιον άλλο τρόπο να βρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα.

- **Η απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικά με το ζητούμενο**

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{15}{5}=\frac{x+20}{x}=\frac{y}{8}\Leftrightarrow\frac{15}{5}=\frac{x+20}{x}\;\kappa\alpha\iota\frac{15}{5}=\frac{y}{8}\;\Leftrightarrow 15x=5(x+20)\;\kappa\alpha\iota\;15\cdot 8=5y\Leftrightarrow x=10\;\kappa\alpha\iota\;y=24$$

- **Απλοποίηση, αξιοποίηση των δεδομένων και προσέγγιση στόχων.**
Συνοψίζοντας ο πιο πιθανός τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι η χρήση του θεωρήματος του Θαλή.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Οι θέσεις της Γιάννας Μαμωνά για την επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά και εισαγωγή της έννοιας του ελέγχου στην επίλυση προβλημάτων.

3.1 Έλεγχος

Για την επιτυχή επίλυση προβλήματος , ο λύτης χρειάζεται να γνωρίζει μεθόδους, τεχνικές και γενικές στρατηγικές όπως είναι οι ευρετικές, όμως η επιλογή κάποιων από αυτές , η επιμονή στις σωστές προσεγγίσεις, η καταγραφή και εποπτεία της όλης διαδικασίας είναι εξίσου σημαντικές παράμετροι. Η κατάσταση αυτής της λήψης αποφάσεων κατά τη διάρκεια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων καλείται Έλεγχος.

Εκτελεστικός Έλεγχος (Executive Control) ή απλά Έλεγχος (Control) είναι η «γνωστική» συμπεριφορά που έχει να κάνει με τον τρόπο που ο κάθε λύτης χρησιμοποιεί την πληροφορία που έχει και εστιάζεται στις κρίσιμες αποφάσεις, του τι να κάνει σε ένα πρόβλημα, αποφάσεις που ίσως να καθορίσουν την προσπάθεια επίλυσης. Κατά την διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος η συνήθεια να αναρωτιόμαστε αν αυτό που κάνουμε μας φέρνει πιο κοντά στην λύση είναι η βασική πράξη ελέγχου.

Ο εκτελεστικός έλεγχος είναι μία διαδικασία κατά την οποία ο νους επιλέγει το κατάλληλο σχέδιο για την επίτευξη ενός στόχου. Περιλαμβάνει ικανότητα παρατήρησης όσο και ικανότητα επεξεργασίας πληροφοριών ώστε ο λύτης να αναλάβει δράση ,να θέσει στόχους , να διατηρεί την προσοχή του σε αυτούς, να τους θυμάται και να ακολουθεί τα βήματα που χρειάζονται για να τους επιτύχει. Τέλος ο εκτελεστικός έλεγχος απαιτεί όχι μόνο να αποφασίζει ποιο είναι το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει αλλά και να είναι σε θέση να οργανώνει, να παρατηρεί και να ελέγχει τις εξωτερικές συνθήκες, να συντονίζει και να ελέγχει τις προσπάθειες που κάνει με τη θέλησή του για τη λύση προβλημάτων και τη μάθηση.

3.2 Ερωτήματα που ανακύπτουν στα πλαίσια του Ελέγχου

Έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές συνήθως δεν κάνουν πράξη τον έλεγχο,
Το να κάνουμε ερωτήσεις αφενός μας βοηθά να δούμε που πάσχει η λύση μας και αφετέρου μπορεί να μας οδηγήσει στην ίδια την λύση. Θα παρουσιάσουμε κάποια χαρακτηριστικά ερωτήματα που ανακύπτουν στο πλαίσιο του ελέγχου.

1. Τι κάνουμε κατά την επίλυση; Τι από αυτά μπορεί να συνεισφέρει στη λύση;

   Το να αναρωτιόμαστε κατά τη διάρκεια επίλυσης αν αυτό που κάνουμε μας φέρνει πιο κοντά στη λύση, είναι μια πολύ βασική πράξη ελέγχου.

2. Βρήκαμε την λύση, πως θα σιγουρευτούμε ότι είναι η σωστή; Έχει νόημα η λύση;

   Συνήθως οι μαθητές- λύτες βρίσκουν μία λύση και δεν κρίνουν αν είναι σωστή και αν έχει νόημα στο πραγματικό περιβάλλον του προβλήματος. Είναι σημαντικό ο λύτης να εκμεταλλεύεται τα κύρια χαρακτηριστικά των δεδομένων του προβλήματος και να συγκρατεί τις λεπτομέρειες της συμπεριφοράς τους έτσι ώστε να εξετάζει σε κάθε στάδιο της επίλυσης αν δικαιολογείται η διαδικασία που ακολουθήθηκε. Αν έχουμε κάποιες αμφιβολίες για την επιχειρηματολογία μας, καλό είναι, για την ενδυνάμωση της να παίρνουμε υπόψιν μας θεμελιώδες σχέσεις και αρχές. Ο καλός έλεγχος πρέπει να είναι συνεπής με την υπάρχουσα μαθηματική γνώση του λύτη, αν προκύψει σύγκρουση η προσέγγιση πρέπει να προσαρμόζεται κατάλληλα.

3. Μπορούμε να προχωρήσουμε με αυτόν τον τρόπο. Τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;

   Κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος ένα αποτέλεσμα ή μία διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε ένα άλλο αποτέλεσμα που να είναι χρήσιμο και να μας οδηγήσει στην επίλυση. Επιπλέον ένα αποτέλεσμα μπορεί να οδηγήσει σε μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία την οποία να εκτελούμε μέχρι να εξαντληθεί η δυναμική της και να είναι σημαντική για τον στόχο μας. Στη επαναλαμβανόμενες διαδικασίες ελλοχεύει ο κίνδυνος να σταματήσει κάποιος χωρίς να έχει φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

4. Τι είναι πράγματι σημαντικό εδώ;

   Όταν έχουμε πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα αναζητούμε πληροφορίες ώστε να βρούμε τρόπους να περιορίσουμε την λύση σε ένα μόνο μέρος του όλου πεδίου του προβλήματος.

5. Έχουμε αυτή την πληροφορία . Πως θα τη χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατό καλύτερα;

Η καλή χρήση των δεδομένων, η καταγραφή τους, καθώς και η οργάνωση τους μας οδηγεί στο να αποκτήσουμε καλύτερη εικόνα του προβλήματος , να ανιχνεύσουμε περισσότερες πληροφορίες και έτσι να βρούμε την λύση.

6. Πως είναι δυνατόν να εκμεταλλευτούμε το διαφορετικό των ιδιοτήτων που παρατηρούμε σε ένα σύστημα;

   Από τα δεδομένα κάθε προβλήματος παρατηρούμε κάποια χαρακτηριστικά που μπορεί να είναι τοπικά και να εκφράζουν διαφορετικές ιδιότητες ,από αυτή τη σύγκριση των διαφορών αυτών αν τις αξιοποιήσουμε σωστά μπορεί να πετύχουμε επίλυση του προβλήματος. Η σύγκριση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών είναι γενικά μία καλή πρακτική ελέγχου.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4.1 Η ερεύνα του Alan Schoenfeld

Ο Alan Schoenfeld , ερευνητής της Διδακτικής των μαθηματικών , στην δεκαετία του 1980 διαμόρφωσε μαθήματα επίλυσης προβλήματος στο Πανεπιστήμιο του Berkley και ερεύνησε τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος. Το βιβλίο του Mathematical Problem Solving (1985) στηρίζεται στην εμπειρική μελέτη που έκανε στο Πανεπιστήμιο μεταξύ φοιτητών και περιγράφει τις διαδικασίες επίλυσης που χρησιμοποίησαν. Η μελέτη του Alan Schoenfeld ανέδειξε και την σημασία του Ελέγχου σε ένα πρόβλημα.

Ο Alan Schoenfeld στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου Mathematical Problem Solving (1985) αναφέρει την προσπάθεια φοιτητών που δούλευαν από κοινού, δύο κάθε φορά, για να λύσουν ένα πρόβλημα σε συγκεκριμένο χρόνο. Για να δείξει τις επιπτώσεις που μπορεί να έχει μία λήψη απόφασης (απόφαση Ελέγχου) στην επίλυση προβλήματος εξετάζει εν συντομία την προσπάθεια δύο ζεύγη φοιτητών , να λύσουν το παρακάτω πρόβλημα.

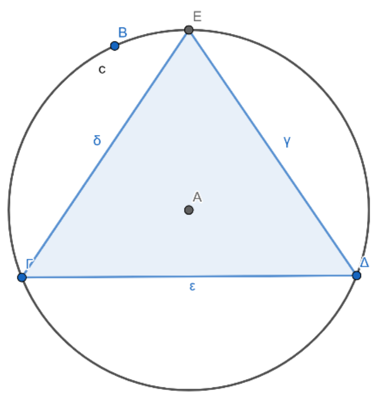
- Παίρνουμε τρία σημεία στην περιφέρεια ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας r και σχεδιάζουμε τρίγωνο με κορυφές τα σημεία αυτά. Ποια σημεία θα επιλέξουμε ώστε το τρίγωνο να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν;

Το πρόβλημα δόθηκε στους φοιτητές AM και KW, αφού διάβασαν το πρόβλημα μετά από 35 δευτερόλεπτα ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος εν συντομία.

AM: νομίζω ότι το μεγαλύτερο τρίγωνο πιθανώς να είναι ισόπλευρο.

KW: πρέπει να χωρίσουμε το μήκος του κύκλου σε τρία ίσα τόξα 120^o το καθένα.

Κατασκευάσαν το παρακάτω σχήμα

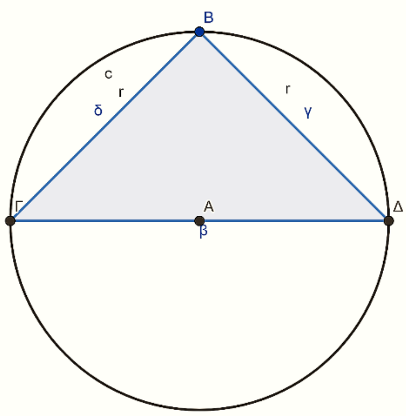


Ο μαθητής ΑΜ έκανε μία προφανή εικασία και ο μαθητής KW συμφωνεί και αρχίζει να υπολογίζει το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου. Ο ΑΜ ξαναδιαβάζει το πρόβλημα και αρχίζει να προβληματίζεται για την αιτιολόγηση της απάντησης τους. Ο KW τότε αφήνει αυτή την ιδέα και προτείνει να πάρουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ώστε να δουν αν μπορούν να κάνουν αιτιολόγηση.

ΑΜ: πρέπει να αποδείξουμε την απάντηση ….

KW : εντάξει ας κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Κατασκεύασαν το παρακάτω σχήμα



Πολύ γρήγορα υπολόγισαν το εμβαδόν του ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου. Αυτή είναι μία αδύναμη προσπάθεια γιατί αν το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου είναι μεγαλύτερο τότε έχουν πρόβλημα. Ο ΑΜ ξανά γυρίζει στον υπολογισμό του ισόπλευρου τριγώνου. Ο καθένας κάνει τους υπολογισμό του , χωρίς συζήτηση, όμως ο λάθος και όχι κοινός συμβολισμός που επιλέγουν δεν τους οδηγεί σε κάποιο αποτέλεσμα. Αφού αντιλαμβάνονται το αδιέξοδο συνεχίζουν με τον παρακάτω διάλογο.

ΑΜ: υπήρχε ένα πρόβλημα … για μια πλατεία που έπρεπε να καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος μίας περιοχής….

KW: Το μεγαλύτερο εμβαδόν…κάτι με έναν κύκλο….ίσως ένα ορθογώνιο….

ΑΜ: πολύ ωραία…..

KW: έτσι είναι R η ακτίνα του κύκλου και ……

Αυτή η δήλωση σηματοδοτεί στη επιστροφή στον υπολογισμό του εμβαδού του ισόπλευρου τριγώνου, όπου μέχρι την το τέλος του χρόνου που έχουν δεν ασχολούνται με κάτι άλλο. Κάποια στιγμή αναφέρθηκε η επεξεργασία του προβλήματος με λογισμό αλλά απορρίφθηκες χωρίς σοβαρή εξέταση. Έτσι τέλειωσε ο χρόνος χωρίς να έχουν επιλύσει το πρόβλημα.

Οι φοιτητές έκαναν πράγματι την εικασία ότι το ζητούμενο τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο , που είναι η λύση, αλλά μετά από λάθος αποφάσεις δεν κατάφεραν να επιλύσουν το πρόβλημα. Η προσπάθεια των παραπάνω φοιτητών είναι ένα σαφές παράδειγμα αποτυχίας Ελέγχου.

4.2 Προβλήματα από τα σχολικά βιβλία

Ο Έλεγχος από την ίδια του την φύση δεν μπορεί να προσδιοριστεί ικανοποιητικά , αλλά μόνο να εξηγηθεί μέσα από παραδείγματα. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα από τα μαθηματικά του Λυκείου για την καλύτερη κατανόηση του.
Έτσι θα παρουσιάσουμε ορισμένα προβλήματα - παραδείγματα έτσι ώστε να φέρουμε πιο κοντά τον λύτη, στην πορεία που προτείνεται να ακολουθήσει έτσι ώστε να βρεθεί πιο κοντά στην λύση ενός προβλήματος.
Στα παρακάτω προβλήματα με πλάγια γράμματα προτείνονται κάποιες ερωτήσεις ελέγχου. Τα ερωτήματα που θα θέσουμε μπορούν να αποτελέσουν μια καλή βάση για τη διατύπωση πολλών άλλων που θα είναι κατάλληλα για κάθε πρόβλημα χωριστά και θα έθεταν οι μαθητές ή και οι διδάσκοντες, σε κάθε προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος. Τα ερωτήματα αυτά για την πραγμάτωση του Ελέγχου δεν πρέπει να εκλαμβάνονται ως ένας κατάλογος ερωτημάτων που θα ακολουθούνται μηχανικά.

4.2.1 Πρόβλημα 1^{ο}

Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 100 τ.μ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο; (Γ' Λυκείου Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής)

- **κατανόηση του προβλήματος**

Ποιο είναι το ζητούμενο;

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι η εύρεση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (διαστάσεις).

Ποια είναι τα δεδομένα;

Το ορθογώνιο έχει εμβαδόν 100τ.μ.

Ποια είναι η συνθήκη;

Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 100 τ.μ. θέλουμε αυτό με την μικρότερη περίμετρο.

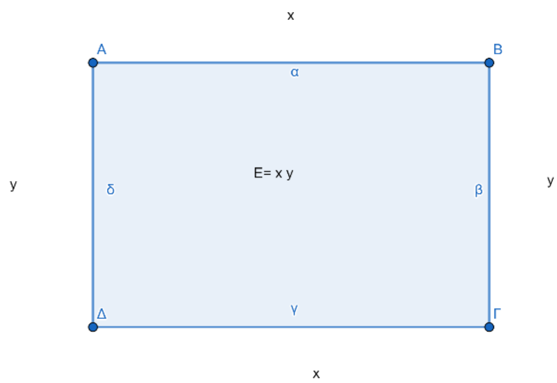
Μπορείτε να διαχωρίστε τα μέρη της συνθήκης

- Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι συγκεκριμένο.
- Η περίμετρος του ορθογωνίου να είναι η μικρότερη.

Κατάλληλος συμβολισμός :

Συμβολίζουμε το μήκος x και το πλάτος y του ορθογωνίου Ε το εμβαδόν και Π την περίμετρο του ορθογωνίου.

Χάραξη ενός σχήματος και καταγραφή των δεδομένων σε αυτό :



Τι πρέπει να γνωρίζουμε;

Τον τύπο του εμβαδού του ορθογωνίου, τον τύπο της περιμέτρου του ορθογωνίου, έννοια ακροτάτου και θεωρήματα για την εύρεση ακροτάτων.

- **επινόηση ενός σχεδίου**

  κατανοείτε την συνθήκη;

  Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των δεδομένων και του ζητούμενου;

  Οι διαστάσεις πρέπει να ικανοποιούν ταυτόχρονα και την συνθήκη για το εμβαδόν αλλά και η περίμετρος να είναι η μικρότερη.

  Πως μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η περίμετρος είναι η μικρότερη;

  Ποιο είναι το σχέδιο;

Είναι πρόβλημα ακροτάτων, άρα πρέπει να ορίσουμε μία συνάρτηση και να εφαρμόσουμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου.

- **Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης**

Τι κάνουμε κατά την επίλυση;

Μπορείτε να γράψετε τις έννοιες με μαθηματικό συμβολισμό;

Το Εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 100 τ.μ.

Επομένως $xy = 100 \; άρα \; y = \frac{100}{x}$ με $x > 0, y > 0$ επειδή αναφερόμαστε σε διαστάσεις.

Η περίμετρος δίνεται από την σχέση $\Pi = 2x + 2y$.

Πως συσχετίζονται οι πληροφορίες;

$$\begin{cases} xy = 100 \\ \Pi = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{100}{x} \\ \Pi = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow \Pi = 2x + 2\frac{100}{x}$$

Γνωρίζετε κάποια διαδικασία ή θεώρημα για την εύρεση ακροτάτων;

Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

Ορίζουμε την συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + 2y = 2x + 2\frac{100}{x}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $x \in (0, +\infty)$

Ζητάμε το ελάχιστο της συνάρτησης $\Pi(x) = 2x + 2\frac{100}{x}$

Βρίσκουμε την 1η παράγωγο $\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$

Λύνουμε την εξίσωση

$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10 \Leftrightarrow x = 10$ επειδή $x > 0$

και $\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow$

$$x < -10 \text{ ή } x > 10 \text{ επειδή } x > 0 \text{ άρα } x > 10$$

x	0 10	$+\infty$
Π(x)	-	+
Π΄(x)	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα

Άρα για x=10 η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο.

Οπότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = 10, \mathrm{y} = \frac{100}{\mathrm{x}} = \frac{100}{10} = 10$

Το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο.

Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα και όλες τις πληροφορίες;

Ελέγξατε την ορθότητα κάθε βήματος;

- **Κοιτάζοντας προς τα πίσω «ανασκόπηση»**

Κάνατε επαλήθευσή;

Είναι σωστή η λύση του βρήκατε;

Έχει νόημα στο περιβάλλον του προβλήματος;

Μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα με άλλον τρόπο;

Ο τρόπος αυτός θα οδηγούσε σε ποιο σύντομη λύση;

Θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε την απάντηση του προβλήματος;

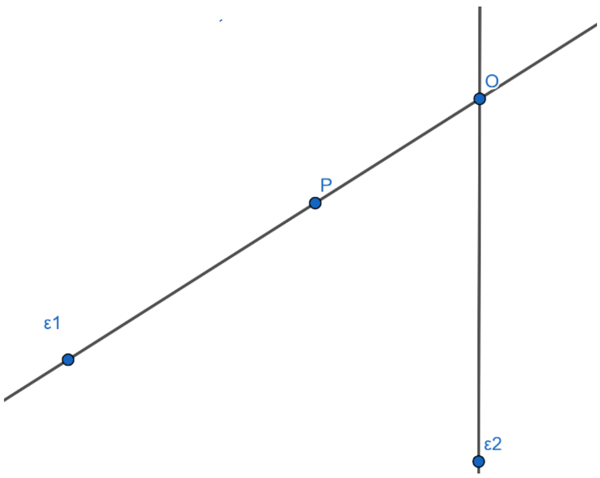
Θα είχε λύση το πρόβλημα αν ζήταγε το ορθογώνιο με την μεγαλύτερη περίμετρο;

Θα μπορούσατε να κατασκευάσετε ένα άλλο πρόβλημα αν το δεδομένο γινόταν ζητούμενο και αντίστροφα; θα είχε νόημα το ζητούμενο;

Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 100μ. ποιο είναι εκείνο με το μικρότερο εμβαδόν;

4.2.2 Πρόβλημα 2ο

Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη έναν κύκλο που να εφάπτεται και στις δύο ευθείες ε1 και ε2, με το σημείο P να είναι σημείο επαφής της μία από αυτές τις ευθείες. (Α΄ Λυκείου Γεωμετρία)



- **κατανόηση του προβλήματος**

Ποιο είναι το ζητούμενο;

Κατασκευή κύκλου με κανόνα και διαβήτη

Ποια είναι τα δεδομένα;

Ο κύκλος εφάπτεται σε δύο ευθείες ε1 και ε2 και στο σημείο P

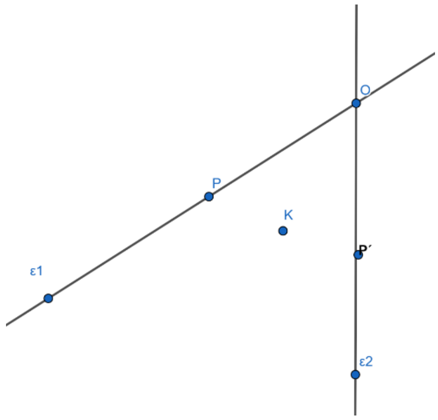
Ποια είναι η συνθήκη;

Το σημείο P ανήκει στη ε1, επομένως πρέπει να εφάπτεται στο P και σε ένα σημείο της ε2.

Κατάλληλος συμβολισμός :

P το σημείο επαφής του κύκλου με την ε1 , P΄ του κύκλου με την ε2 , O το σημείο τομής των ευθειών και K το κέντρο του κύκλου.

Χάραξη ενός σχήματος και καταγραφ δεδομένων σε αυτό :



Τι πρέπει να γνωρίζουμε;

Πως κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη κύκλο

Ιδιότητες εφαπτομένης κύκλου

Θεώρημα και πορίσματα για τα εφαπτόμενα τμήματα.

- **επινόηση ενός σχεδίου**

κατανοείτε την συνθήκη;

Ο κύκλος πρέπει να εφάπτεται στα σημεία P και P΄.

Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των δεδομένων και του ζητούμενου;

Πρέπει να βρούμε το κέντρο του κύκλου σε σχέση με τα σημεία P και P΄. Επομένως πρέπει $|KP| = |KP'|$.

Πως μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το σημείο K (κέντρο του κύκλου) είναι το σωστό;

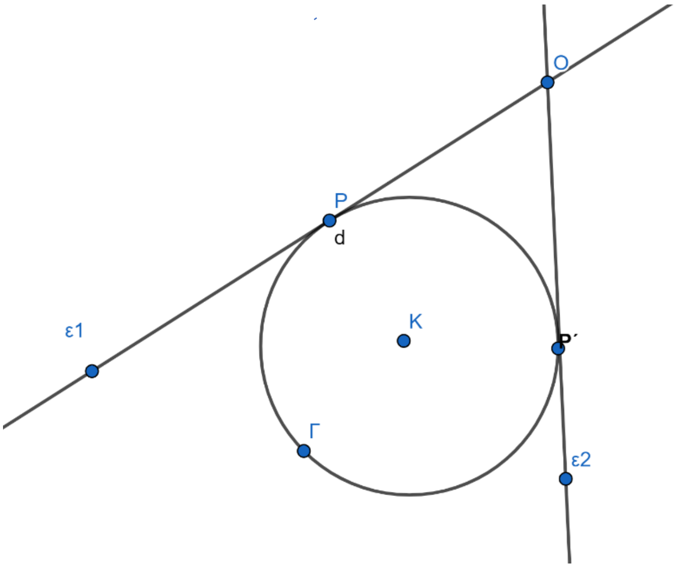
Ποιο είναι το σχέδιο;

Θα πάρουμε ως κέντρο του κύκλου το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος PP΄.

- **Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης**

Τι κάνουμε κατά την επίλυση;

Φέρνουμε από το μέσο K του PP΄ κύκλο με ακτίνα KP.



Ο κύκλος που κατασκευάσαμε ικανοποιεί την αρχική συνθήκη;

Βρήκαμε την λύση , είναι η σωστή;
Η μαθηματική γνώση συγκρούεται με την προσέγγιση μας;

Για να εξετάσουμε αν η λύση είναι σωστή, πρέπει οι γωνίες ΟΡΚ και ΟΡ΄Κ να είναι ορθές αφού οι ευθείες ε1 και ε2 είναι κάθετες.

Αυτή η συνθήκη όμως δεν ικανοποιείται γιατί το ΟΡΡ΄ είναι τρίγωνο και δεν μπορεί να έχει δύο γωνίες ορθές.

Τι πρέπει να αλλάξουμε για να διορθώσουμε το λάθος;

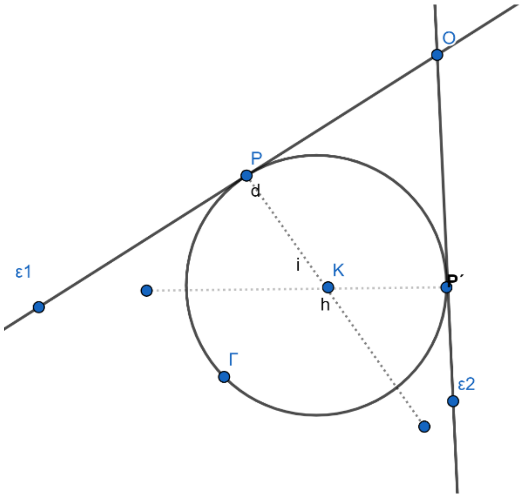
Αφού το λάθος από την συνθήκη της καθετότητας , σε αυτή την πληροφορία πρέπει να εστιάσουμε .

Πως θα εκμεταλλευτούμε την καθετότητα;

Μπορούμε να κάνουμε ένα νέο σχήμα και εκεί να εμφανίσουμε την καθετότητα

Ονομάζουμε Κ το σημείο τομής των κάθετων

Κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο το Κ και ακτίνα την ΚΡ.



- **Κοιτάζοντας προς τα πίσω «ανασκόπηση»**

Είναι σωστή η λύση του βρήκατε;

Ναι γιατί οι γωνίες ΟΡΚ και ΟΡ΄Κ είναι κάθετες.

Ποια άλλη προσέγγιση θα μπορούσα να έχω;

4.2.3 Πρόβλημα 3ο

Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για την σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζεύονταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 4ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.
Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20.000 κόκκους.

Ποιο είναι το ζητούμενο;

Πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα του ρυζιού που ζήτησε για αμοιβή.

Ποια είναι τα δεδομένα;

Το σκάκι έχει 64 τετραγωνάκια.

Το 1ο τετραγωνάκι έχει 1 κόκκο ρυζι, το 2ο τετραγωνάκι έχει 2 κόκκους ρύζι, το 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, το 4ο τετραγωνάκι 8 κόκκους και η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.
1 Kg ρυζιού έχει 20.000 κόκκους.

Ποια είναι η συνθήκη;

Σε κάθε τετραγωνάκι διπλασιάζεται η ποσότητα του ρυζιού.

Κατάλληλος συμβολισμός :

Συμβολίζουμε $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{64}$ την ποσότητα των κόκκων ρυζιού που έχει κάθε τετραγωνάκι αντίστοιχα.

Τι πρέπει να γνωρίζουμε;

Πότε μία ακολουθία λέγεται Γεωμετρική πρόοδος, τον τύπο εύρεσης του νιοστού όρου της γεωμετρικής προόδου και το άθροισμα των ν πρώτων όρων μίας γεωμετρικής προόδου.

- **επινόηση ενός σχεδίου**

Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των δεδομένων και του ζητούμενου;

Τα δεδομένα είναι οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου και το ζητούμενο είναι το άθροισμα των 64 όρων της προόδου.

Ποιο είναι το σχέδιο;

Θα βρω το άθροισμα των 64 όρων της προόδου και στη συνέχεια θα μετατρέψω την ποσότητα των κόκκων ρυζιού σε τόνους.

- **Εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης**

Τι κάνουμε κατά την επίλυση;

Μπορείτε να γράψετε τις έννοιες με μαθηματικό συμβολισμό;

Συμβολίζουμε με το γράμμα λ τον λόγο δηλαδή τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο για να πάρουμε τον επόμενο, με S_ν συμβολίζουμε το άθροισμα των ν πρώτων όρων.

Πως συσχετίζονται οι πληροφορίες;

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 8$$

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$s_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Επομένως το άθροισμα της ποσότητας των κόκκων ρυζιού στα 64 τετραγωνάκια είναι $(2^{64} - 1)$ κόκκοι ρύζι.

Γνωρίζουμε ότι 1 Kg ρυζιού έχει 20.000 κόκκους και 1 τόνος έχει 1000 Kg

Αφού 1Kg έχει $2 \cdot 10^4$ κόκκους ρύζι, 1 τόνος έχει $2 \cdot 10^7$ κόκκους ρύζι

Επομένως η ποσότητα του ρυζιού σε τόνους είναι $\frac{2^{64}-1}{2 \cdot 10^7} = 9223 \cdot 10^{11}$.

Ελέγξατε την ορθότητα κάθε βήματος;

- **Κοιτάζοντας προς τα πίσω «ανασκόπηση»**

Είναι σωστή η λύση του βρήκατε;

Έχει νόημα στο περιβάλλον του προβλήματος;

Μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα με άλλον τρόπο;

Θα μπορούσε κάποιος μαθητής να υπολογίσει χωρίς τύπους την ποσότητα σε κάθε τετραγωνάκι, διπλασιάζοντας την προηγούμενη και στο τέλος να τα προσθέσει.

Ο τρόπος αυτός θα οδηγούσε σε ποιο σύντομη λύση;

Η λύση αν και φαίνεται πολύ απλή γιατί είναι επαναλαμβανόμενη διαδικασία πολλαπλασιασμού με το 2, είναι χρονοβόρα , προκύπτουν μεγάλοι αριθμοί και είναι πολύ πιθανό να σταματήσει κάποιος χωρίς να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

5° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Αναφορά σε σύγχρονες προσεγγίσεις στην επίλυση των προβλημάτων προσαρμοσμένα στο Λύκειο.

5.1 Η τεχνολογία στην εκπαίδευση

Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος έχει μεγάλη σημασία στην διδασκαλία των μαθηματικών , γιατί η ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής ,της δημιουργικής και της κριτικής σκέψης.

Ο μαθηματικός έχοντας αφήσει πίσω του τη δασκαλοκεντρική διδακτική πράξη του περασμένου αιώνα και ακολουθώντας νέα προγράμματα σπουδών και έχοντας πλέον στη διάθεσή του και τα σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, που του παρέχουν ασύγκριτα περισσότερες δυνατότητες μπορεί να βοηθήσει τον μαθητή στην κατάκτηση της γνώσης.

Η τεχνολογία σήμερα χρησιμοποιείται ευρέως και έτσι υπάρχουν τεράστιες δυνατότητες χρήσης της και στην εκπαίδευση. Όσον αφορά τα Μαθηματικά, η χρήση των ψηφιακών μέσων κατέχει πλέον εξέχουσα θέση στη Διδακτική των Μαθηματικών, γιατί βοηθάει τους μαθητές στο να κατανοούν τις μαθηματικές ιδέες και να λύνουν προβλήματα με μμεγαλύτερη ευελιξία.

Οι τάσεις για την διδασκαλία των μαθηματικών σε περιβάλλοντα που βασίζονται σε σύγχρονα τεχνολογικά εργαλεία, ξεκίνησε από τον Seymour Papert. O Papert ήταν γνωστός για την εστίαση του στον αντίκτυπο των νέων τεχνολογιών στη μάθηση, ήταν ο δημιουργός μιας θεωρίας για τη μάθηση που ονομάζεται κονστρουκτονισμος, βασισμένη στο έργο του Jean Piaget στις κονστρουκτιβιστικες θεωρίες μάθησης. Ο Papert είχε την άποψη ότι η αξιοποίηση της τεχνολογίας πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ένα πολιτισμικό αγαθό. Ο Papert πρότεινε να σχεδιαστούν τεχνητά περιβάλλοντα πλούσια σε δυνατότητες, ώστε να δίνουν στα παιδιά εμπειρίες δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων.

Στη διδασκαλία των μαθηματικών και ειδικότερα στην επίλυση προβλήματος, είναι έντονη η ανάγκη δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων όπου κυριαρχούν η δράση, ο διάλογος, το βίωμα, η έκφραση, η αναπαράσταση, ο πειραματισμός , η επιστημονική στάση απέναντι στη γνώση και η συμμετοχή σε πολλαπλές συλλογικότητες.
Σε αυτό το πλαίσιο έρχεται να αξιοποιηθεί η ψηφιακή τεχνολογία, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εκφραστικά εργαλεία σε συνδυασμό με

εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας. (Χρονάκη 2000, Ματσαγγούρας 1987, Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης 2002).

5.2 Η συμβολή των ψηφιακών εργαλείων στην διαδικασία του Ελέγχου στην επίλυση προβλήματος

Στην επίλυση Μαθηματικού προβλήματος ουσιαστικό ρόλο διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις στην διαδικασία και αυτό γιατί μας βοηθάνε να κάνουμε καλό Έλεγχο. Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, ένας λύτης είναι καλό να δημιουργήσει αναπαραστάσεις του προβλήματος όχι μόνο για να τον βοηθήσει να οργανώσει, να κατανοήσει το πρόβλημα και να κοινοποιήσει τη σκέψη του αλλά και να αποκτήσει καλύτερη εικόνα του προβλήματος και να μπορεί να απαντήσει σε βασικά ερωτήματα του ελέγχου. Μέσω των αναπαραστάσεων μπορούμε να έχουμε περιοδική παρακολούθησή και αξιολόγηση της λύσης καθώς εξελίσσεται ,που είναι σημαντικό στοιχείο του αποτελεσματικού Ελέγχου. πιο ευκολά ο λύτης δίνει απάντηση σε βασικά ερωτήματα του Ελέγχου όπως, *τι είναι πράγματι σημαντικό εδώ; πως θα χρησιμοποιήσω αυτή την πληροφορία; Έχει νόημα η λύση που βρήκαμε; Μπορώ να προχωρήσω με αυτό τον τρόπο;* Και πολλά άλλα.

Η αναπαράσταση θεωρείται ως μια ιδιαίτερα σημαντική κατασκευή όχι μόνο στην επίλυση προβλημάτων, αλλά και στην εκμάθηση των Μαθηματικών γενικά (Goldin, 2003). η γραφιστική αναπαράσταση στην αλληλεπίδραση, παίζει σημαντικό ρόλο στα μαθησιακά κίνητρα. Οι μαθητές συχνά έλκονται από την καινοτομία των αλληλεπιδραστικών πολυμέσων. Η διάταξη της πληροφορίας στην οθόνη και ο τρόπος παρουσίασης επηρεάζουν σημαντικά την κατεύθυνση, τη διάρκεια και το βαθμό προσοχής του μαθητή. Στο πλαίσιο αυτό το χρώμα, η ταχύτητα, η κίνηση και ο ήχος, μπορούν να επηρεάσουν την αλληλεπιδραστική διαδικασία .Ο Lester υποστηρίζει ότι: «ενώ τα φυσικά αντικείμενα γίνονται περισσότερο αφηρημένα όταν μοντελοποιούνται σε οθόνη υπολογιστή, τα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία είναι από τη φύση τους αφηρημένα, γίνονται περισσότερο συγκεκριμένα»

Ο λύτης παρακολουθεί τη διαδικασία προσέγγισης της λύσης με ταυτόχρονη απεικόνιση έτσι δεν αρκείται στο υπολογιστικό κομμάτι αλλά το συνδυάζει με την γραφική αναπαράστασή τους ενώ παράλληλα μπορεί να συγκρίνει το αποτέλεσμα είτε οπτικά είτε αριθμητικά. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να κάνει έλεγχο σε κάθε στάδιο της επίλυσης , δεν σπαταλάται χρόνος σε υπολογισμούς, επαναλαμβάνει διαδικασίες γρηγορότερα, επικεντρώνεται στην ουσία και έλέγχει κάθε στάδιο αν δικαιολογείται ,καθώς και γρηγορότερα εξετάζει διαφορετικά σενάρια επίλυσης και επιλέγει αυτό που θα τον οδηγήσει στην επίλυση.

Η τάση σήμερα είναι να ενταχθούν διάφορα ψηφιακά εργαλεία στην διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα στην επίλυση προβλήματος. Κυρίως διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε την σχέση του Ελέγχου με τα διάφορα ψηφιακά εργαλία, όμως η έρευνα για την σύνδεση τους για την επίλυση του προβλήματος εκκρεμεί και είναι αντικείμενο άλλης εργασίας .

5.3 Ψηφιακά εργαλεία

Τα ψηφιακά εργαλεία έχουν μεγάλες δυνατότητες και παρέχουν πρόσβαση σε ισχυρά εποπτικά μοντέλα. Η δυνατότητα της δυναμικής αναπαράστασης ορισμένων λογισμικών βοηθάει τους μαθητές στο να αναγνωρίζουν και να εξερευνούν θεμελιώδεις μαθηματικές σκέψεις.

Με την βοήθεια της τεχνολογίας οι μαθητές ενθαρρύνονται στο να ψάξουν διαφορετικούς τρόπους για να αναπαραστήσουν και να λύσουν ένα πρόβλημα.
Αυξάνουν το πλήθος των διαφόρων προβλημάτων στα οποία μπορούν να έχουν πρόσβαση και τους δίνει τη δυνατότητα να κάνουν συνηθισμένες διαδικασίες γρήγορα και με ακρίβεια. Έτσι ο χρόνος τους αξιοποιείται καλύτερα στο να κατανοήσουν βασικές έννοιες και να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη, αφού η επίλυση του προβλήματος μετατοπίζεται από μία μηχανιστική εκτέλεση πράξεων σε έναν ουσιαστικό προβληματισμό γύρω από το τι πορεία πρέπει να ακολουθήσουν ώστε να οδηγηθούν στη λύση. Η ένταξη των ψηφιακών εργαλείων θα πρέπει να γίνεται πάντα με αφετηρία την πρόσθετη παιδαγωγική αξία.

Πλέον υπάρχει πληθώρα ψηφιακών εργαλείων, ενδεικτικά στην επίλυση προβλήματος μπορούν να αξιοποιηθούν τα παρακάτω:

- Graph plotters
  Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν ευθείες και αντίστροφες αναλογίες χρησιμοποιώντας γραφικές αναπαραστάσεις ή για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.

- Dynamic geometry software
  Είναι προγράμματα υπολογιστών που επιτρέπουν σε κάποιον να δημιουργεί και στη συνέχεια να χειρίζεται γεωμετρικές κατασκευές, κυρίως σε επίπεδο γεωμετρίας . Οι δυνατότητες αυτής της τεχνολογίας επιτρέπουν στους χρήστες να κατασκευάσουν διάφορα γεωμετρικά σχήματα, να αναπτύξουν εικασίες και να αξιολογήσουν την εγκυρότητα αυτών των εικασιών. Το GeoGebra είναι ένα παράδειγμα αντίστοιχου λογισμικού .

- Data - handling tools
  Ο χειρισμός δεδομένων θεωρείται ένα από τα πιο σημαντικά θέματα στη στατιστική καθώς ασχολείται με τη συλλογή συνόλων δεδομένων. Ο χειρισμός δεδομένων μπορεί να αναπαρασταθεί οπτικά με τη μορφή γραφημάτων.

- Computer algebra systems (CAS)
  Ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας (CAS) λύνει, σχεδιάζει και χειρίζεται μαθηματικές εκφράσεις σε αναλυτική μορφή. Τα CAS υποστηρίζουν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών όπως γραμμική άλγεβρα, λογισμός και αλγεβρικές και συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις. Το CAS υποστηρίζει τόσο αριθμητικές όσο και συμβολικές προσεγγίσεις στη μαθηματική μοντελοποίηση, που επιτρέπει να επιλύετε προβλήματα χρησιμοποιώντας την καλύτερη προσέγγιση.

- Intergrated mathematics packages
  Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καλύπτει θέματα άλγεβρας, γεωμετρίας, τριγωνομετρίας και ανάλυσης.

- Digital story – Telling
  Η ψηφιακή αφήγηση αναφέρεται στην πρακτική της χρήσης εργαλείων που βασίζονται σε υπολογιστή για την αφήγηση ιστοριών ή την παρουσίαση ιδεών. Για τον όρο «ψηφιακή αφήγηση» έχουν δοθεί πολλοί ορισμοί. Ενδεικτικά, ψηφιακή αφήγηση σύμφωνα με τον Lathem (2005) ορίζεται ο συνδυασμός της παραδοσιακής αφήγησης με πολυμέσα και εργαλεία τηλεπικοινωνίας.

- Mathlets
  Μια σημαντικότατη – για τα μαθηματικά – εφαρμογή των Java Applets, είναι τα Mathlets. Τα Mathlets είναι μικρά ανεξάρτητα εργαλεία εκμάθησης τα οποία εστιάζουν σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα ή πρόβλημα και είναι έτοιμα προς χρήση για επιδείξεις απ’ τους καθηγητές ή για εξατομικευμένη μάθηση απ’ τους ίδιους τους μαθητές. Βρίσκονται είτε σε ιστοσελίδες στο διαδίκτυο είτε είναι οργανωμένα σε βιβλιοθήκες όπως είναι το Math Forum, Library of Virtual Manipulatives, Digital Classroom Resources κ.α.

5.4 Ψηφιακή αφήγηση

Η ψηφιακή αφήγηση συνδυάζει την παραδοσιακή προφορική αφήγηση με πολυμέσα και εργαλεία τηλεπικοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα, οι ψηφιακές ιστορίες είναι πολυμεσικές ταινίες, που συνδυάζουν φωτογραφίες, βίντεο, κινούμενη εικόνα, ήχο, μουσική και κείμενο.

Στην εκπαίδευση των μαθηματικών, ο Jonassen (2003) πιστεύει ότι οι ιστορίες με προβλήματα είναι η πιο συνηθισμένη μορφή επίλυσης προβλημάτων στην εκπαίδευση. «Οι μαθητές αρχίζουν την επίλυση των προβλημάτων μέσα από ιστορίες νωρίς στο δημοτικό σχολείο και συνεχίζουν μέχρι να αποφοιτήσουν από το σχολείο» . Ο Janassen υποστήριξε ότι τα προβλήματα με ιστορίες μπορεί να είναι απλά προβλήματα αλλά και σύνθετα προβλήματα σε προηγμένα μαθηματικά και φυσική.

Ο Schiro (2004) υποστηρίζει ότι η ψηφιακή αφήγηση χρησιμοποιείται για να διδάξουν στους μμαθητές την επίλυση αλγορίθμων αλλά και προβλημάτων μμέσα από διάφορα στάδια μάθησης προκειμένου να αναπτύσσουν τις δικές τους μαθηματικές ικανότητες. Υποστήριξε ότι οι ψηφιακές ιστορίες, μαζί με άλλα υλικά, όπως τα φύλλα εργασίας, όχι μόνο παρουσιάζουν μαθηματικές δεξιότητες που οι μαθητές πρέπει να μάθουν , αλλά και τοποθετεί τα μαθηματικά σε ένα πλαίσιο που είναι ενδιαφέρον και ελκυστικό. Τα μαθηματικά ως επιστήμη συνδέονται άμεσα με την καθημερινότητα της κοινωνίας.

Τα πλεονεκτήματα της ψηφιακής αφήγησης στα μαθηματικά είναι αρκετά και σημαντικά. Αναφέρουμε μερικά πλεονεκτήματα της ψηφιακής αφήγησης .

1. Οι μαθητές μπορούν να γράψουν τη δική τους μαθηματική ιστορία ή να επιλύσουν αυτές που παρέχει ο καθηγητής. Με αυτό τον τρόπο θα μάθουν να συνδέουν τα μαθηματικά με την καθημερινότητα και να ανακαλύψουν μόνοι τους τη σημασία και τη συμβολή των μαθηματικών στη ζωή τους.

2. Η δημιουργία ιστοριών για την κατανόηση των μαθηματικών όρων παρέχει στρατηγικές επίλυσης σε όλους τους μαθητές καθώς και αποτελεί ένα κώδικα επικοινωνίας και αλληλοβοήθειας μεταξύ των μαθητών.

3. Το λεξιλόγιο των μαθηματικών δεν είναι πάντα εύκολο και κατανοητό για τους μαθητές. Η ψηφιακή αφήγηση ιστοριών δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν ιστορίες που περιέχουν το μαθηματικό λεξιλόγιο και να δημιουργήσουν εικόνες και εκφράσεις, που θα τους βοηθούν στην κατανόηση των δύσκολων μαθηματικών όρων.

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Η θέση των Μαθηματικών στην Δευτεροβάθμια εκπαίδευση σήμερα.

6.1 Μαθηματική εκπαίδευση τον 20ο αιώνα

Η επιστήμη των μαθηματικών αποτελεί ένα ερευνητικό πεδίο σε διαρκή εξέλιξη. Μέχρι το 1950 η Αριθμητική στις δύο πρώτες τάξεις του εξατάξιου Γυμνασίου ήταν ο βασικός πυρήνας του Προγράμματος Σπουδών, στις επόμενες τέσσερις τελευταίες τάξεις μαζί με την βασική Άλγεβρα, έχουμε την Τριγωνομετρία και την Γεωμετρία.

Μετά το 1950, μέχρι και σήμερα έχουν γίνει μία σειρά από σημαντικές αλλαγές τόσο στο περιεχόμενο , όσο και στην παρουσίαση των σχολικών μαθηματικών. Τα αίτια μπορούμε να τα συνοψίσουμε ως εξής:

i. Πρόοδος της μαθηματικής επιστήμης.
ii. Οριοθέτηση σαφών σχολών που ασχολούνται με την θεμελίωση των μαθηματικών.
iii. Η καθολική παρουσία της θεωρίας των συνόλων ως ενοποιητικής θεωρίας.
iv. Η ανάπτυξη της τεχνολογίας.
v. Εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών.
vi. Η αλλαγή στα προγράμματα των μαθηματικών στα πανεπιστήμια.
vii. Οι ανάγκες της νέας κοινωνικοοικονομικής δομής του κόσμου.
viii. Ο διεθνής καταμερισμός της εργασίας.
ix. Οι αξιόλογες πρωτοποριακές έρευνες πάνω στη διδακτική των μαθηματικών.

Στις δεκαετίες ’60-’70 τους μαθηματικούς απασχολεί κυρίως τι πρέπει να διδαχθεί και πώς. Στο επίκεντρο της διδακτικής πράξης βρίσκεται ο εκπαιδευτικός-αυθεντία, ο οποίος ακολουθεί απαρέγκλιτα την πορεία που του χαράζει το σχολικό εγχειρίδιο και κατευθύνει τον μαθητή με ασφάλεια και χωρίς εκπλήξεις στο μονοπάτι της μετάδοσης και εμπέδωσης της έτοιμης μαθηματικής γνώσης.

Από τη δεκαετία του ’70 και μετά η έννοια του προγράμματος σπουδών εμπλουτίζεται σταδιακά με διδακτικούς στόχους, προσεγγίσεις και τρόπους αξιολόγησης. Μέσα στο γενικότερο αυτό κλίμα ανανέωσης είναι αυτονόητο ότι οι μαθηματικοί οφείλουν να είναι πλήρως καταρτισμένοι και ως προς το γνωστικό αντικείμενο αλλά και από παιδαγωγική άποψη, προκειμένου να ανταποκριθούν στο νέο τους ρόλο που τους θέλει συντονιστές της διδασκαλίας και καθοδηγητές των προσπαθειών των εκπαιδευομένων να αυτονομηθούν και να αναπτύξουν αυτό που λέμε «μαθηματική λογική». Ο μαθηματικός παύει να κινείται με σαφώς καθορισμένο τρόπο στο πλαίσιο ενός αυστηρά δομημένου προγράμματος σπουδών με στόχο την απλή μετάδοση γνώσεων και καλείται να συντονίσει ποικίλες δραστηριότητες για ολόκληρη την τάξη, μεμονωμένους διδασκόμενους ή ομάδες.

Στην Ελλάδα σταθμό στη διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί η εισαγωγή των μοντέρνων Μαθηματικών, η οποία έγινε στις αρχές της δεκαετίας του 1980, τότε συγγράφονται στη χώρα μας τα “νέα” βιβλία μαθηματικών, με τα οποία εισάγεται η νέα προσέγγιση των μοντέρνων Μαθηματικών.

6.2 Τα μαθηματικά σήμερα

Σήμερα, παρά το γεγονός ότι τα προγράμματα σπουδών έχουν σε μεγάλο βαθμό εκσυγχρονιστεί τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς τους στόχους και τα προτεινόμενα μέσα διδασκαλίας, τα μαθηματικά εξακολουθούν σε πολλές περιπτώσεις να διδάσκονται με τρόπο που δίνει έμφαση στην απόκτηση ακαδημαϊκών γνώσεων σε βάρος της καλλιέργειας ανεξάρτητου πνεύματος και κριτικής ικανότητας.

Μέσα από την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια γενική μαθηματική παιδεία ο μαθητής μαθαίνει αριθμητική, γεωμετρία, άλγεβρα και λογισμό, αλλά φαίνεται να τα αξιοποιεί μόνο για να εκτελέσει μηχανικές και καθοδηγούμενες ασκήσεις επανάληψης. Βέβαια, σύμφωνα με τον Piaget και τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού – που υποστηρίζει ότι η γνώση κατασκευάζεται μέσα από την εκτέλεση ενεργειών – τέτοιες καθοδηγούμενες ασκήσεις θέτουν τη βάση για την αφαιρετική σκέψη. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι απαραίτητες, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όμως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο μαθητής δεν πρέπει να παραμείνει εγκλωβισμένος σε ανάλογες δραστηριότητες. Στο σημείο αυτό ακριβώς ο εκπαιδευτικός, πρέπει να βοηθήσει τον μαθητή να αντενεργήσει, να ερευνήσει, να επαληθεύσει και να φτάσει σε συμπεράσματα και σε αποδείξεις.

Τα Μαθηματικά είναι από τα λίγα μαθήματα τα οποία διδάσκονται στο σχολείο όχι για τις αμέσως πρακτικές γνώσεις τις οποίες προσφέρουν όσο κυρίως για τη σημασία την οποία έχουν για τη μεταβίβαση της μάθησης. Εξάλλου ποτέ δεν αποκηρύχθηκε ποτέ από κανέναν η άποψη ότι διδάσκοντας μαθηματική σκέψη στο σχολείο, διδάσκουμε λογική σκέψη γενικώς.

Τα μαθηματικά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη είναι η Υπολογιστική που αφορά κυρίως πράξεις και ιδιότητες και η δεύτερη είναι η Εφαρμογή των Μαθηματικών στο κόσμο γύρω μας, δηλαδή τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά. Η πρώτη κατηγορία είναι εύκολη ως προς την κατανόηση της αλλά με την πάροδο του χρόνου κάποια κομμάτια της χρειάζονται υπενθύμιση, κάτι τέτοιο όμως επιτυγχάνεται εύκολα αναλόγως το υπόβαθρο του κάθε μαθητή στη μαθηματική λογική. Η δεύτερη κατηγορία είναι πιο δύσκολο να διδαχθεί, είναι όμως αυτή που θα θέλαμε οι μαθητές να διατηρήσουν ακόμα και αν δεν καταλήξουν σε πεδία θετικών επιστημών.

Ο μαθηματικος Meyer που διευθύνει την ιστοσελίδα “www.desmos.com” και είναι καθηγητής μαθηματικών σε σχολείο πιστεύει πώς για να βοηθήσουν οι εκπαιδευτικοί τους μαθητές να αποκτήσουν μαθηματική σκέψη πρέπει να εστιάσουν λιγότερο στην υπολογιστική πλευρά των μαθηματικών και περισσότερο στο να μπορεί ο κάθε μαθητής να προσδιορίσει ποιες πληροφορίες είναι χρήσιμες σε ένα πρόβλημα και ποιες περιττές. Η διδασκαλία των Μαθηματικών όπως γίνεται στα σχολεία σήμερα, δεν δίνει τα σωστά εφόδια για να πραγματοποιηθεί μια τέτοιου είδους διδακτική προσέγγιση. Με την υπάρχουσα διδακτική μέθοδο οι μαθητές αποθαρρύνονται όταν συναντούν κάποιο πρόβλημα που δεν επιλύεται άμεσα, με γενικότερη συνέπεια να μην έχουν εμπιστοσύνη στις ικανότητες τους.

Σχεδόν όλοι πάντως συμφωνούν ότι τα Μαθηματικά είναι από τα δυσκολότερα σχολικά μαθήματα. Οι ειδικοί ωστόσο υποστηρίζουν ότι η δυσκολία αυτή δεν είναι σύμφυτη του αντικειμένου, αλλά οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι δεν διδάσκονται σωστά. Είναι επίσης γεγονός ότι η παραδοσιακή διδακτέα ύλη δεν προσφέρει κίνητρα για τη μελέτη τους με αποτέλεσμα οι μαθητές να μαθαίνουν διάφορα πράγματα, όχι επειδή παρουσιάζουν ενδιαφέρον, αλλά επειδή ζητούν να τα μάθουν. Τα Μαθηματικά λοιπόν είναι ένα μάθημα και χρήσιμο και ενδιαφέρον, το κυρίως πρόβλημα είναι όμως είναι η Διδακτική τους. Για να αγαπήσουν οι μαθητές τα μαθηματικά οι καθηγητές και τα σχολεία μπορούν να εφαρμόσουν τα παρακάτω:

1. Χρήση τεχνολογικών μέσων για να φέρουν μια ρεαλιστική διάσταση μέσα στην αίθουσα με υψηλή ανάλυση και γεμάτη χρώματα.

2. Να ενθαρρύνουν τους μαθητές να δρουν με τη διαίσθηση τους.

3. Στοχευμένες και σύντομες ερωτήσεις να καθοδηγούν τη συζήτηση αφήνοντας περιθώρια επέκτασης της.

4. Οι μαθητές να χτίζουν το πρόβλημα οι εκπαιδευτικοί πρέπει να αφήνουν τις πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις να βγουν από τη συζήτηση.

5. Διδασκαλίας των μαθηματικών με τη βοήθεια δραστηριοτήτων , φύλλων εργασίας και ερευνητικών εργασιών.

Όλο και περισσότεροι καθηγητές και μαθητές θέλουν μια αλλαγή στον τρόπο διδασκαλίας και ήδη πολλοί από αυτούς έχουν κάνει την αρχή. Έτσι είναι πιο εύκολο για όποιον εκπαιδευτικό θέλει, να βρει υλικό και ιδέες δωρεάν και να βλέπει την πορεία σχολείων και καθηγητών που ακολουθούν τη μέθοδο αυτή .

6.3 Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α’, Β’ και Γ’ τάξεων Γενικού Λυκείου (2021)

Η σημασία και η χρησιμότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι τόσο αυτονόητη και προφανής ,ώστε να μην χρειάζεται καν να την συζητεί κανείς. Τα Μαθηματικά κατέχουν παγκοσμίως δεσπόζουσα θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα των σχολείων. Στην Ελλάδα διδάσκονται αδιαλείπτως και τα δώδεκα έτη της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και μάλιστα επί πολλές ώρες την εβδομάδα.

Τα Μαθηματικά αναγνωρίζονται ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν και της σημαντικής, ως συνέπεια, συνεισφοράς τους στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης. Αντικείμενο των Μαθηματικών είναι η μελέτη δομών και σχέσεων, η κατανόηση των οποίων χαρακτηρίζει αυτό που ονομάζεται μαθηματικός τρόπος σκέψης και συλλογισμού.

Τα Μαθηματικά στο παρόν Πρόγραμμα Σπουδών γίνονται αντιληπτά ως ανθρώπινο δημιούργημα που μπορεί να προσφέρει σε όλους τους μαθητές τις γνώσεις και τα εργαλεία ώστε να γίνουν ενεργοί, χειραφετημένοι και κριτικοί πολίτες του αύριο, που θα είναι σε θέση να λειτουργούν δυναμικά και αποτελεσματικά τόσο ως άτομα όσο και ως μέλη μιας συνεχώς μεταβαλλόμενης κοινωνίας.

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών φιλοδοξεί να προσφέρει σε όλους τους μαθητές την ευκαιρία να είναι σε θέση, μέσα από τη συμμετοχή τους στα μαθήματα, να:

- Εκτιμούν και να αποδίδουν αξία στα Μαθηματικά μέσα από τη συνειδητοποίηση της φύσης της μαθηματικής γνώσης και των κρίσιμων/μεγάλων ιδεών της.
- Αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.
- Αξιοποιούν ποικιλία πόρων και εργαλείων, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα ψηφιακά εργαλεία, για να διαχειριστούν κατάλληλα μέσα από προσεγγίσεις διερεύνησης αλλά και μαθητείας, αλλαγές, κρίσεις και προκλήσεις στο ακαδημαϊκό, προσωπικό, επαγγελματικό και κοινωνικό περιβάλλον δράσης τους.

- Αναγνωρίζουν συνδέσεις μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων πεδίων της ανθρώπινης γνώσης και δράσης και να εκτιμούν τα Μαθηματικά ως προσπελάσιμο και ενδιαφέρον πεδίο μελέτης.
- Χρησιμοποιούν με αυτοπεποίθηση και εμπιστοσύνη τα Μαθηματικά για να κατανοούν με κριτικό τρόπο τον κόσμο γύρω τους.
- Κατανοούν και είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τον μαθηματικό λόγο εντοπίζοντας κρίσιμες μαθηματικές ιδέες, αναλύοντας και ερμηνεύοντας διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα.

Ειδικότερα για το Λύκειο το νέο Πρόγραμμα Σπουδών έχει δύο κεντρικούς στόχους. Ο πρώτος, που επιδιώκεται μέσα από τα μαθήματα γενικής παιδείας, αφορά την ολοκλήρωση τόσο των μαθηματικών γνώσεων όσο και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, που αμφότερα είναι αναγκαία σε έναν κοινωνικά ενεργό πολίτη. Ο δεύτερος, που επιδιώκεται μέσα από τα μαθήματα προσανατολισμού, αφορά την περαιτέρω ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και των μαθηματικών γνώσεων εκείνων των μαθητών που επιθυμούν να συνεχίσουν σπουδές θετικού και οικονομικού προσανατολισμού, ώστε να αποκτήσουν τα απαραίτητα εφόδια για τη συνέχεια των σπουδών τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Το Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά υποστηρίζει τη γνωστική-ατομική και την κοινωνικοπολιτισμική συμμετοχική προσέγγιση στη μάθηση, αντιμετωπίζοντάς τες ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση. Αναγνωρίζοντας την κρισιμότητα της μαθηματικής γνώσης σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης, επενδύει στη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης που δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας συνδέσεων μεταξύ της γνώσης του περιεχομένου των Μαθηματικών και της εφαρμογής των εννοιών και των διαδικασιών που το χαρακτηρίζουν. Επιπλέον, υποστηρίζει την ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, μαθηματικών ικανοτήτων διατύπωσης και επίλυσης ολοένα και πιο περίπλοκων προβλημάτων, τη διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων που βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα Μαθηματικά, όπως και εκτός αυτών.

Ο εκπαιδευτικός καλείται να μην περιορίζει τις επιλογές του σε έργα που εστιάζουν στην εφαρμογή αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων, αλλά να επιλέγει έργα που ανταποκρίνονται στα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες των μαθητών, αντλούν προβληματισμούς από πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας, επιδέχονται διαφορετικές μεθόδους επίλυσης και απαιτούν τεκμηριωμένες επεξηγήσεις και παραδοχές. Γενικότερα, το ζητούμενο είναι έργα που εμπλέκουν τους μαθητές στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη. Ωστόσο, η απλή εμπλοκή των μαθητών σε ένα μαθηματικό έργο (π.χ. επίλυση εξίσωσης) δεν είναι αρκετή για να θεωρηθεί ότι αναπτύσσουν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα, η οποία τους προσφέρει την ευκαιρία να αναπτύξουν ποικιλία μαθηματικών και κοινωνικοπολιτισμικών πρακτικών που θα τους οδηγήσουν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως είναι η απόδειξη, η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί), στην ανάπτυξη των αντίστοιχων μαθηματικών νοημάτων και, τελικά, αυθεντικής μαθηματικής σκέψης.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετήσαμε το πρόβλημα στα μαθηματικά και την διαδικασίας επίλυσης του. Ο έλεγχος σε κάθε στάδιο της είναι τόσο σημαντικός ώστε να επηρεάζει την επιτυχή έκβαση της επίλυσης.

Το θέμα της συγκεκριμένης εργασίας θα μπορούσε μελλοντικά να επεκταθεί και σε περαιτέρω έρευνα καθώς υπάρχει πρόσφορο έδαφος στο συγκεκριμένο επιστημονικό κλάδο. Η συνεργασία με μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα μπορούσε και πρακτικά να αποδείξει πως εφαρμόζουν οι λύτες – μαθητές τις μεθόδους και τις στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος που έχουμε καταγράψει. Τα αποτελέσματα αυτής έρευνας σίγουρα θα αποτελέσουν βήμα βελτίωσης και εξέλιξης των μεθόδων επίλυσης τόσο για την πλευρά του καθηγητή όσο και για την μεριά του μαθητή.

Αναμενόμενα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας είναι :

1. Η ανάδειξη της σημασίας του Ελέγχου στη επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.
2. Η συσχέτιση της επίλυσης προβλήματος με την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.
3. Παρουσίαση στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων καθώς και τα βήματα επίλυσης τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γιάννα Μαμωνα-Downs, Ιωάννης Παπαδόπουλος(2017), Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Κλαουδάτος, Ν. (2011). Σημειώσεις του μαθήματος Δ7, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Μεθοδολογίας και Διδακτικής των Μαθηματικών. Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.
- Κρικώνη Μαρία ,Επίλυση προβλήματος και διδασκαλία Ελευθερία Καλλιμάνη, doi: 10.12681/edusc.957
- Καψάλης, Χ. Λεμονίδης (1999). Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των μαθηματικών. ΜΑΚΕΔΝΟΝ, Περιοδική επιστημονική έκδοση της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας του Α.Π.Θ. Τεύχος 6, σσ. 95-115.
- Παπαδόπουλος Ιωάννης,Τεχνικές επίλυσης προβλήματος με τη συμβολή της τεχνολογίας για την ενίσχυση της έννοιας του εμβαδού, Διδακτορική διατριβή, Πάτρα 2007.
- Πεντίδου, Χ. (2016). Διπλωματική εργασία στο Πρόγραμμα σπουδών, Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά, ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ. , Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα.
- Στουραΐτης (Kostas Stouraitis) Κ. (2018). Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΜΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (4), 9–37. https://doi.org/10.12681/enedim.18821
- Ευκλείδεια γεωμετρία, Τεύχος Α΄, Αργυρόπουλος Ηλίας, Βλάμος Παναγιώτης, Κατσούλης Γεώργιος, Μαρκατης Στυλιανός, Σιδέρης Πολυχρόνης, ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων, Α΄τάξης Γενικού Λυκείου, Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Παπαστανρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Σβέρκος Ανδρέας, ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής, Γ΄ Λυκείου, **Αδαμόπουλος Λεωνίδας, Δαμιανού Χαράλαμπος, Σβέρκος Ανδρέας,** ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Lester, J., (2000), Designing Interactive Mathematic, Paper presented at the Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai, Thailand
- Lesh, R. E., & Doerr, H. M. (2003). Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Γέμελου Αριστέα, Η διαδικασία του "Ελέγχου" στην επίλυση προβλημάτων στο Λύκειο.

- G. Polya, Πως να το λύσω, Τάσος Πατρώνης (Επιμ.), Ξανθή Ψυακκή (Μετάφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Καρδαμίτσα.
- Shapiro «Thinking about Mathematics» Oxford University Press.
- Schoenfled, Alan H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, San Diego, New York, London, Toronto, Montreal, Sydney, Tokio: Academic Press.
- T.Tao, Solving mathematical problems , Oxford University Press,2006