



# **Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας**

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

## **Διπλωματική Εργασία**

**Διερεύνηση αντίστροφων προβλημάτων πηγής  
με τεχνικές βαθιάς μηχανικής μάθησης**

**Θωμάς Παπαδόπουλος**

Επιβλέπων καθηγητής: Τσίτσας Νικόλαος

Θεσσαλονίκη  
Μάιος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Θωμά Παπαδόπουλου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο Θωμάς Παπαδόπουλος εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του Θωμά Παπαδόπουλου ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο Θωμάς Παπαδόπουλος διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

## **Διερεύνηση αντίστροφων προβλημάτων πηγής με τεχνικές βαθιάς μηχανικής μάθησης**

**Θωμάς Παπαδόπουλος**

**Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας**

**Επιβλέπων Καθηγητής**

**Νικόλαος Τσίτσας**

Καθηγητής  
Τμήμα Πληροφορικής  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλονίκης

**Συνεπιβλέπων Καθηγητής**

**Νικόλαος Ματζάκος**

Αναπληρωτής Καθηγητής  
Παιδαγωγικό Τμήμα  
Ανώτατη Σχολή Παιδαγωγικής και  
Τεχνολογικής Εκπαίδευσης

*Στη μνήμη των γονέων μου*

## Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» (ΜΣΜ), της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας (ΣΘΕΤ), του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ). Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή Νικόλαο Τσίτσα για την καθοδήγηση και βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τον συνεπιβλέποντα καθηγητή Νικόλαο Ματζάκο και τον μεταδιδακτορικό ερευνητή Ανδρέα Καλογερόπουλο. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τη σύζυγό μου Μαριάννα για την αμέριστη και διαρκή της υποστήριξη.

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει ένα αντίστροφο πρόβλημα πηγής σε διηλεκτρικό κύλινδρο, το οποίο εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης. Στόχος είναι η ανάκτηση του αριθμού, των θέσεων και των εντάσεων εσωτερικών γραμμικών πηγών, αξιοποιώντας μετρήσεις ηλεκτρικών και μαγνητικών επιφανειακών πεδίων σε μία συχνότητα λειτουργίας. Το ευθύ πρόβλημα επιλύεται μέσω μιας αναλυτικής, αριθμητικά σταθερής υλοποίησης της λύσης της εξίσωσης Helmholtz για TM πόλωση, βασισμένης σε κυλινδρικές αρμονικές και ειδικές συναρτήσεις Bessel και Hankel. Η υλοποίηση πραγματοποιείται στην κλάση `PhysicsTM`, η οποία παρέχει πλήρως διανυσματοποιημένο υπολογισμό των επιφανειακών πεδίων.

Πάνω σε αυτή τη βάση αναπτύσσεται ένα ολοκληρωμένο pipeline βαθιάς μηχανικής μάθησης. Αρχικά, εκπαιδεύεται ένα μοντέλο ταξινόμησης για την αναγνώριση του αριθμού (έως 5) των πηγών. Στη συνέχεια, επιλύεται το αντίστροφο πρόβλημα πηγής για μία, δύο και τρεις πηγές, με χρήση νευρωνικών δικτύων που μαθαίνουν τη χαρτογράφηση από τα επιφανειακά πεδία στις καρτεσιανές συντεταγμένες των πηγών. Η παραγωγή δεδομένων γίνεται μέσω surrogate μοντέλων υψηλής ακρίβειας, επιτρέποντας τη δημιουργία μεγάλων συνόλων εκπαίδευσης.

Για το πρόβλημα των δύο και τριών πηγών αναπτύσσονται εξειδικευμένες τεχνικές: γεωμετρικοί περιορισμοί δειγματοληψίας, canonical ordering, structured loss, curriculum learning και noise-consistency training. Ιδιαίτερα για τις τρεις πηγές, η σταδιακή κλιμάκωση γεωμετρικής δυσκολίας και η permutation-invariant αξιολόγηση αποδεικνύονται κρίσιμες για τη σταθερότητα της εκπαίδευσης.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα μοντέλα επιτυγχάνουν υψηλή ακρίβεια, ισχυρή αντοχή σε θόρυβο και αξιόπιστη γενίκευση ακόμη και σε παθολογικές γεωμετρίες. Η εργασία αναδεικνύει τη δυνατότητα των deep-learning surrogates να επιλύουν δύσκολα αντίστροφα προβλήματα με ταχύτητα και σταθερότητα που υπερβαίνουν τις κλασικές

## Λέξεις - Κλειδιά

Αντίστροφα προβλήματα σκέδασης, Αντίστροφο πρόβλημα πηγής, Διηλεκτρικός κύλινδρος, Ειδικές συναρτήσεις Bessel και Hankel, Αναλυτική λύση ευθέως προβλήματος, Νευρωνικοί αναπληρωτές, Βαθιά μηχανική μάθηση, Πολυκέφαλα νευρωνικά δίκτυα, Εκπαίδευση με προοδευτική αύξηση πολυπλοκότητας, Εκπαίδευση με συνεκτικότητα ως προς τον θόρυβο, Αξιολόγηση ανεξάρτητη από την αντιστοίχιση, Εκτίμηση θέσης πηγών, TM πόλωση, Επιφανειακά ηλεκτρικά πεδία, Αντίστροφη εκτίμηση θέσης πηγών

## Abstract

This thesis investigates an inverse source problem in a dielectric cylinder, belonging to the broader class of inverse scattering problems. The objective is to recover the number, positions, and strengths of internal line sources using measurements of electric and magnetic surface fields at a single operating frequency. The forward problem is treated through an analytical, numerically stable implementation of the solution of the Helmholtz equation for TM polarization, based on cylindrical harmonics and Bessel/Hankel special functions. This implementation is provided by the `PhysicsTM` class, which computes surface fields in a fully vectorized manner.

Building on this foundation, a complete deep-learning pipeline is developed. First, a classification model is trained to identify the number (up to 5) of active sources. Then, the inverse source problem is solved for one, two, and three sources using neural networks that learn the mapping from surface fields to the Cartesian coordinates of the sources. Training data are generated using high-accuracy surrogate models, enabling the creation of large datasets.

For the two- and three-source problems, specialized techniques are introduced: geometric sampling constraints, canonical ordering, structured loss, curriculum learning, and noise-consistency training. In the three-source case, gradual geometric difficulty scaling and permutation-invariant evaluation are essential for stable training.

The results demonstrate that the models achieve high accuracy, strong noise robustness, and reliable generalization even in pathological geometries. The work highlights the capability of deep-learning surrogates to solve challenging inverse problems with speed and stability surpassing classical methods.

## Keywords

Inverse scattering problems, Inverse source problem, Dielectric cylinder, Bessel and Hankel special functions, Analytical forward solution, Neural surrogates, Deep learning, Multi-head neural networks, Curriculum learning, Noise-consistency training, Permutation-invariant evaluation, Source localization, TM polarization, Surface electric fields, Inverse source localization

# Περιεχόμενα

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Ευχαριστίες</b>  | <b>v</b>    |
| <b>Περίληψη</b>   | <b>vi</b>   |
| <b>Λέξεις - Κλειδιά</b>   | <b>vii</b>  |
| <b>Abstract</b>   | <b>viii</b> |
| <b>Keywords</b>   | <b>ix</b>   |
| <b>Συντομογραφίες &amp; Ακρωνύμια</b>                                       | <b>xv</b>   |
| <b>1 Εισαγωγή</b>   | <b>1</b>    |
| <b>2 Το ευθύ πρόβλημα</b>   | <b>3</b>    |
| <b>3 Αντικείμενο εργασίας</b>   | <b>8</b>    |
| 3.1 Εφαρμογές . . . . .   | 8           |
| 3.2 Μεθοδολογία . . . . .   | 10          |
| <b>4 Ψηφιοποίηση αναλυτικής λύσης</b>                                       | <b>11</b>   |
| 4.1 Surrogate Models . . . . .  | 12          |
| 4.2 Multi-Layer Perceptrons . . . . .                                       | 13          |
| 4.3 Παραγωγή δεδομένων εισόδου για τα surrogate models . . . . .            | 16          |
| 4.4 Αρχιτεκτονική και εκπαίδευση των surrogate models . . . . .             | 18          |
| 4.5 Το SurrogateEM Module και το Unified API . . . . .                      | 19          |
| 4.6 surrogate_wrapper.py : Το ενιαίο API . . . . .                          | 21          |
| 4.7 Αξιολόγηση των surrogate models . . . . .                               | 22          |
| <b>5 Πρόβλημα Ταξινόμησης Πηγών σε Κυλινδρικό Σκεδαστή</b>                  | <b>30</b>   |
| 5.1 Το πρόβλημα είναι κατάλληλο για Convolutional Neural Networks . . . . . | 31          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.2      | Residual Networks (ResNets) και βαθιά αρχιτεκτονική . . . . .                 | 32        |
| 5.3      | Δομή των δεδομένων και φυσική σημασία . . . . .                               | 32        |
| 5.4      | Παραγωγή Δεδομένων (Data Generation) . . . . .                                | 33        |
| 5.5      | Αρχιτεκτονική του Νευρωνικού Δικτύου . . . . .                                | 35        |
| 5.6      | Διαδικασία Εκπαίδευσης . . . . .  | 37        |
| 5.7      | Αποτελέσματα Αξιολόγησης . . . . .  | 38        |
| <b>6</b> | <b>Regression Problem I — Εκτίμηση Θέσης και Έντασης Μίας Πηγής</b>           | <b>42</b> |
| 6.1      | Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος . . . . .                                | 42        |
| 6.2      | Παραγωγή συνθετικού δείγματος (dataset) . . . . .                             | 43        |
| 6.3      | Αρχιτεκτονική του μοντέλου και εκπαίδευση . . . . .                           | 43        |
| 6.4      | Αξιολόγηση Μοντέλου . . . . .   | 45        |
| <b>7</b> | <b>Regression Problem II — Εκτίμηση Θέσης Δύο Πηγών</b>                       | <b>49</b> |
| 7.1      | Ασφαλές όριο εγγύτητας πηγών . . . . .  | 49        |
| 7.2      | Dataset Generation . . . . .  | 50        |
| 7.3      | Model Architecture . . . . .  | 52        |
| 7.4      | Structured Loss Function . . . . .  | 54        |
| 7.5      | Training Pipeline . . . . .   | 56        |
| 7.6      | Evaluation & Metrics . . . . .  | 59        |
| <b>8</b> | <b>Regression Problem III — Εκτίμηση Θέσης Τριών Πηγών</b>                    | <b>72</b> |
| 8.1      | Δειγματοληψία και κλιμάκωση γεωμετρικής δυσκολίας . . . . .                   | 73        |
| 8.2      | Αρχιτεκτονική νευρωνικού δικτύου . . . . .                                    | 76        |
| 8.3      | Η σημασία της αναλυτικής κλιμάκωσης δυσκολίας (curriculum learning) . . . . . | 77        |
| 8.4      | Εκπαίδευση με συνέπεια υπό θόρυβο (noise consistency training) . . . . .      | 79        |
| 8.5      | Σταθεροποίηση της αντιστοίχισης (permutation) . . . . .                       | 80        |
| 8.6      | Αποτελέσματα αξιολόγησης . . . . .  | 82        |
|          | <b>Παράρτημα: Οδηγός Εγκατάστασης και Χρήσης</b>                              | <b>87</b> |
|          | <b>Βιβλιογραφικές Αναφορές</b>  | <b>93</b> |

## Κατάλογος σχημάτων

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Διηλεκτρικός κύλινδρος με δύο εσωτερικές γραμμικές πηγές. . . . .                        | 3  |
| 2.2 | Εγκάρσια διατομή κυλίνδρου στο $xy$ επίπεδο. . . . .                                     | 4  |
| 2.3 | Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των επιφανειακών πεδίων μιας τυχαίας διάταξης. . . . . | 7  |
| 4.1 | Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ενεργοποίησης. . . . .                                  | 15 |
| 4.2 | Χρωματικοί χάρτες σχετικού σφάλματος. . . . .  | 25 |
| 4.3 | Σύγκριση αναλυτικής και surrogate αναπαράστασης. . . . .                                 | 26 |
| 4.4 | Σημειακά απόλυτα σφάλματα surrogate. . . . .   | 27 |
| 4.5 | Φασματική σύγκριση surrogate. . . . .  | 27 |
| 4.6 | Κατανομή σχετικού σφάλματος. . . . .   | 28 |
| 4.7 | Scatter plot σχετικού σφάλματος. . . . .   | 29 |
| 5.1 | Confusion matrix (percentages) . . . . .   | 38 |
| 6.1 | Κατανομές σφαλμάτων για μία πηγή . . . . .   | 47 |
| 6.2 | Scatter plots πραγματικών και προβλεπόμενων τιμών για μία πηγή . . . . .                 | 47 |
| 7.1 | Το πρόβλημα δεν είναι καλώς τοποθετημένο . . . . .                                       | 50 |
| 7.2 | Καμπύλες εκπαίδευσης δύο πηγών . . . . .   | 60 |
| 7.3 | Κατανομές απόστασης (p99) των δύο πηγών . . . . .  | 65 |
| 7.4 | Κατανομές ακτίνων (p99) των δύο πηγών . . . . .  | 66 |
| 7.5 | Κατανομές γωνιών (p99) των δύο πηγών . . . . .   | 66 |
| 7.6 | Κατανομές αποστάσεων (tail 1%) των δύο πηγών . . . . .                                   | 67 |
| 7.7 | Κατανομές ακτίνων (tail 1%) των δύο πηγών . . . . .                                      | 67 |
| 7.8 | Κατανομές γωνιών (tail 1%) των δύο πηγών . . . . .                                       | 68 |
| 7.9 | Scatter plots ακτίνων και γωνιών των δύο πηγών . . . . .                                 | 69 |
| 8.1 | Όρια εγγύτητας πηγών ανά επίπεδο δυσκολίας. . . . .                                      | 75 |

## Κατάλογος πινάκων

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Αρχιτεκτονική του deep MLP surrogate model. . . . .                  | 18 |
| 4.2 | Υπερπαράμετροι εκπαίδευσης των surrogate models. . . . .             | 19 |
| 4.3 | Έλεγχος 2π-περιοδικότητας. . . . .                                   | 23 |
| 4.4 | Έλεγχος περιστροφικής συμμετρίας. . . . .                            | 24 |
| 4.5 | Έλεγχος συμβατότητας με τις εξισώσεις Maxwell. . . . .               | 25 |
| 4.6 | Στατιστική αξιολόγηση σφάλματος των surrogate models. . . . .        | 28 |
| 4.7 | Χρονική σύγκριση αναλυτικής και surrogate λύσης. . . . .             | 29 |
| 5.1 | Confusion matrix (raw counts) . . . . .                              | 38 |
| 5.2 | Αποτελέσματα προβλήματος ταξινόμησης . . . . .                       | 39 |
| 6.1 | Αξιολόγηση μοντέλου μίας πηγής . . . . .                             | 46 |
| 6.2 | Ανθεκτικότητα σε θόρυβο του μοντέλου μίας πηγής . . . . .            | 46 |
| 7.1 | Αρχιτεκτονική νευρωνικού δικτύου για δύο πηγές . . . . .             | 53 |
| 7.2 | Στατιστική ανάλυση της επίδοσης του μοντέλου των δύο πηγών . . . . . | 65 |
| 7.3 | Ανθεκτικότητα του μοντέλου των δύο πηγών σε θόρυβο . . . . .         | 70 |
| 8.1 | Κλιμάκωση γεωμετρικής δυσκολίας στο curriculum learning. . . . .     | 74 |
| 8.2 | Ανθεκτικότητα του μοντέλου τριών πηγών στον θόρυβο. . . . .          | 84 |

## Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

|      |                                     |
|------|-------------------------------------|
| TM   | — Transverse Magnetic               |
| TE   | — Transverse Electric               |
| GPR  | — Ground Penetrating Radar          |
| EEG  | — Electroencephalography            |
| NDT  | — Non-Destructive Testing           |
| EM   | — Electromagnetic                   |
| BVP  | — Boundary Value Problem            |
| MLP  | — Multilayer Perceptron             |
| ReLU | — Rectified Linear Unit             |
| API  | — Application Programming Interface |
| GPU  | — Graphics Processing Unit          |
| CPU  | — Central Processing Unit           |

## 1. Εισαγωγή

Τα προβλήματα σκέδασης αποτελούν κεντρικό αντικείμενο στη μαθηματική φυσική, τον ηλεκτρομαγνητισμό, την ακουστική, τη γεωφυσική και ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών μηχανικής (Colton & Kress, 1998). Στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης (direct scattering problem), στόχος είναι να περιγραφεί πώς ένα προσπίπτον κύμα —ηλεκτρομαγνητικό, ακουστικό ή κβαντικό— αλληλεπιδρά με ένα αντικείμενο και παράγει ένα σκεδαζόμενο πεδίο. Το αντικείμενο μπορεί να είναι ένας αγωγός, ένας διάχυτος στόχος, μια γεωλογική ανομοιογένεια ή οποιαδήποτε δομή που μεταβάλλει την πορεία του κύματος. Στο ευθύ πρόβλημα γνωρίζουμε τις ιδιότητες του αντικειμένου και επιλύουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις (π.χ. Helmholtz, Maxwell) για να υπολογίσουμε το πεδίο (Jackson, 1999).

Αντίθετα, στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης (inverse scattering problem), η πορεία αντιστρέφεται: γνωρίζουμε το σκεδαζόμενο πεδίο και επιδιώκουμε να ανακτήσουμε τις ιδιότητες του άγνωστου αντικειμένου (Kirsch & Grinberg, 2008). Πρόκειται για ένα από τα πιο θεμελιώδη και δύσκολα προβλήματα στην εφαρμοσμένη μαθηματική ανάλυση. Στόχος είναι να προσδιοριστούν χαρακτηριστικά όπως η γεωμετρία, η θέση, η σύσταση ή η εσωτερική δομή του σκεδαστή, αποκλειστικά από μετρήσεις του πεδίου. Αυτό το καθιστά εξαιρετικά σημαντικό για εφαρμογές όπως η ιατρική απεικόνιση, η γεωφυσική διερεύνηση, το ραντάρ, το sonar, ο μη καταστροφικός έλεγχος και ανακατασκευή υλικών (Chew, 1995). Η σύγχρονη βιβλιογραφία αναγνωρίζει ότι τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης αποτελούν ένα από τα πιο ενεργά πεδία έρευνας στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, με σημαντικές εξελίξεις τόσο στη θεωρία όσο και στις αριθμητικές μεθόδους (Colton & Kress, 2013).

Στην περίπτωση των κυματικών εξισώσεων, όπως η εξίσωση Helmholtz, η θεμελιώδης λύση (Green's function) εκφράζεται μέσω ειδικών συναρτήσεων, όπως οι συναρτήσεις Hankel (Abramowitz & Stegun, 1964). Αυτές περιγράφουν την ακτινική διάδοση κυματικών πεδίων σε δύο διαστάσεις και αποτελούν τον πυρήνα των ολοκληρωτικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στις μεθόδους συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων (boundary integral methods) (Kress, 2014). Η ακριβής και αποδοτική αξιολόγηση αυτών των συναρτήσεων είναι κρίσιμη τόσο για την επίλυση του ευθέως προβλήματος όσο και για την ανακατασκευή στο αντίστροφο πρόβλημα.

Τα προβλήματα σκέδασης συνδυάζουν φυσική, ανάλυση, αριθμητικές μεθόδους και υπολογιστική επιστήμη. Η πολυπλοκότητά τους, σε συνδυασμό με τη μεγάλη πρακτική τους σημασία, τα καθιστούν ιδανικό πεδίο για την ανάπτυξη σύγχρονων τεχνικών όπως neural surrogates, operator learning και differentiable physics, οι οποίες μπορούν να ξεπεράσουν τα όρια των κλασικών μεθόδων και να επιτρέψουν ταχύτερες και πιο σταθερές λύσεις (Lu κ.ά., 2021).

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα πηγής, το οποίο ανήκει στην

κατηγορία των αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Η περιγραφή του ευθέος προβλήματος αναπτύσσεται στην επόμενη παράγραφο και βασίζεται στην εργασία (Pallikarakis κ.ά., 2024), η οποία αποτέλεσε τη βασική βιβλιογραφία μου.

Η παρούσα εργασία συνοδεύεται από ανοικτό κώδικα και πλήρη τεκμηρίωση, με στόχο τη διαφάνεια, τη δυνατότητα αναπαραγωγής και τη διευκόλυνση μελλοντικών επεκτάσεων. Ο κώδικας που υλοποιεί τα αριθμητικά μοντέλα, τις διαδικασίες εκπαίδευσης και αξιολόγησης, καθώς και τα εργαλεία παραγωγής δεδομένων, είναι διαθέσιμος στο δημόσιο αποθετήριο GitHub του έργου (Papadopoulos, 2024). Περιλαμβάνονται τόσο τα βασικά υπολογιστικά εργαλεία όσο και οι νευρωνικές αρχιτεκτονικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των αντίστροφων προβλημάτων <https://github.com/th0ma/inverse-source-em>.

Για την υποστήριξη των χρηστών και των ερευνητών που επιθυμούν να αξιοποιήσουν ή να επεκτείνουν το σύστημα, έχει αναπτυχθεί αναλυτική διαδικτυακή τεκμηρίωση σε μορφή wiki. Η τεκμηρίωση αυτή περιλαμβάνει οδηγίες εγκατάστασης και γρήγορης εκκίνησης, αναλυτικούς οδηγούς χρήσης για όλα τα pipelines (surrogate, classification, regression), θεωρητικό υπόβαθρο για το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα, καθώς και παραδείγματα. Επιπλέον, παρέχεται πλήρης *API reference* για όλες τις δημόσιες διεπαφές της βιβλιοθήκης, επιτρέποντας την εύκολη ενσωμάτωση των εργαλείων σε εξωτερικά συστήματα ή την ανάπτυξη νέων λειτουργικών ενότητων.

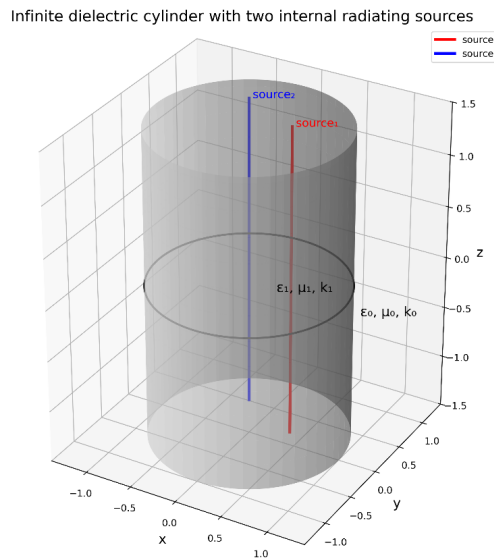
Η τεκμηρίωση και ο κώδικας εξελίσσονται παράλληλα με το έργο, με στόχο τη δημιουργία ενός σταθερού και επεκτάσιμου πλαισίου για την έρευνα στα αντίστροφα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα. Η ύπαρξη ενιαίας και οργανωμένης τεκμηρίωσης διευκολύνει τόσο την αναπαραγωγή των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας όσο και τη μελλοντική αξιοποίηση του πλαισίου από την ερευνητική κοινότητα.

## 2. Το ευθύ πρόβλημα

Έστω ένας κυκλικός κύλινδρος ακτίνας  $a$ , άπειρος κατά τον άξονα  $z$ , ο οποίος αποτελείται από μαγνητοδιηλεκτρικό υλικό με σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_1$  και σχετική μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_1$ . Ο κύλινδρος έχει εγκάρσια διατομή  $D$  στο επίπεδο  $xy$  και βρίσκεται εντός κενού, το οποίο χαρακτηρίζεται από κυματάριθμο  $k_0$  (πραγματικός αριθμός), διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_0$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ .

Υπάρχουν  $N$  εσωτερικές γραμμικές πηγές, απείρου μήκους κατά τον άξονα  $z$ , οι οποίες εκπέμπουν διακριτά πρωτεύοντα ηλεκτρικά πεδία με πόλωση  $\mathbf{E}$ , της μορφής

$$\mathbf{E}_j^{\text{pr}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} E_j^{\text{pr}}(\mathbf{r}), \quad j = 1, \dots, N.$$

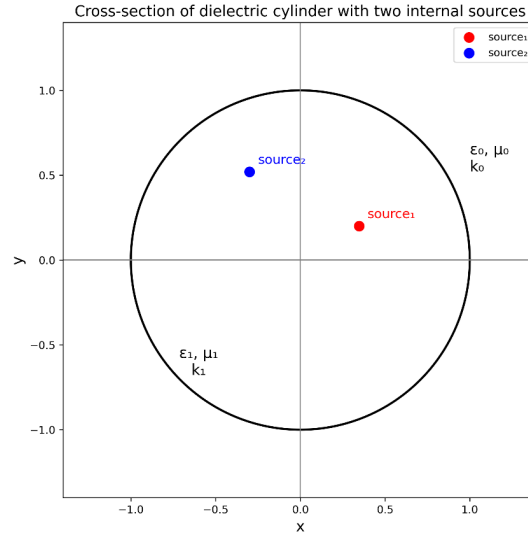


Σχήμα 2.1: Διηλεκτρικός κύλινδρος με δύο εσωτερικές γραμμικές πηγές.

Υποθέτοντας και παραλείποντας την αρμονική χρονική εξάρτηση  $e^{-i\omega t}$ , όπου  $\omega$  είναι η γωνιακή συχνότητα, τα πεδία αυτά δίνονται από τη σχέση

$$E_j^{\text{pr}}(\mathbf{r}) = AI_j H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j$$

με  $\mathbf{r} = (\rho, \phi)$  και  $\mathbf{r}_j = (\rho_j, \phi_j)$  τα διανύσματα παρατήρησης και θέσης της πηγής  $j$  αντιστοίχως,  $H_0 \equiv H_0^{(1)}$  η μηδενικής τάξης κυλινδρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους,  $I_j$  η ένταση της γραμμικής πηγής  $j$ ,  $k_1 = k_0 \eta$  ο πραγματικός κυματάριθμος του κυλίνδρου (με  $\eta$  τον δείκτη διάθλασης αυτού) και  $A = -\omega \mu_0 \mu_1 / 4$ .



Σχήμα 2.2: Εγκάρσια διατομή κυλίνδρου στο  $xy$  επίπεδο.

Ο κύλινδρος διαταράσσει τα πρωτεύοντα πεδία δημιουργώντας το ολικό εξωτερικό πεδίο  $E_0$  (για  $\rho > \alpha$ ) και το ολικό εσωτερικό πεδίο  $E_1$  (για  $\rho < \alpha$ ), το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$E_1(\mathbf{r}) = E^{\text{sec}}(\mathbf{r}) + E^{\text{pr}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D \setminus \{\mathbf{r}_j \mid j = 1, \dots, N\}.$$

Στην ανωτέρω σχέση,  $E^{\text{sec}}(\mathbf{r})$  είναι το ολικό δευτερεύον πεδίο στο  $D$  λόγω της διαταραχής του ολικού πρωτεύοντος πεδίου  $E_j^{\text{pr}}$  από τον κύλινδρο. Αυτά τα πεδία δίνονται από τις σχέσεις

$$E^{\text{sec}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N E_j^{\text{sec}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D.$$

και

$$E^{\text{pr}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N E_j^{\text{pr}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j,$$

όπου  $E_j^{\text{sec}}(\mathbf{r})$  είναι το δευτερεύον πεδίο στο  $D$  λόγω της διαταραχής του πρωτεύοντος πεδίου  $E_j^{\text{pr}}(\mathbf{r})$  από τον κύλινδρο. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών έγκειται στον καθορισμό των συναρτήσεων που περιγράφουν τα ηλεκτρικά πεδία

$$E^{\text{sec}} \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}^1(\bar{D})$$

$$E_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$$

Αυτά τα πεδία ικανοποιούν τις βαθμωτές εξισώσεις Helmholtz

$$\nabla^2 E_0(\mathbf{r}) + k_0^2 E_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \rho > \alpha$$

$$\nabla^2 E^{\text{sec}}(\mathbf{r}) + k_1^2 E^{\text{sec}}(\mathbf{r}) = 0, \quad 0 \leq \rho < \alpha$$

καθώς και τις συνοριακές συνθήκες μετάβασης

$$E_0(\mathbf{r}) - E^{\text{sec}}(\mathbf{r}) = E^{\text{pr}}(\mathbf{r}), \quad \rho = \alpha$$

$$\frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E^{\text{sec}}(\mathbf{r})}{\partial \rho} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E^{\text{pr}}(\mathbf{r})}{\partial \rho}, \quad \rho = \alpha$$

Επιπροσθέτως, το ολικό εξωτερικό πεδίο  $E_0$  ικανοποιεί τη δισδιάστατη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial \rho} - ik_0 E_0(\mathbf{r}) \right) = 0$$

ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\rho$ .

Η λύση του ευθέως προβλήματος προσδιορίστηκε με μία μέθοδο καθολικής υπέρθεσης (Pallikarakis κ.ά., 2024). Ορίστηκαν οι ακόλουθες συναρτήσεις παρατήρησης

$$\mathcal{J}_n(\rho, \phi) = e^{in\phi} J_n(k_1 \rho), \quad \mathcal{H}_{n,q}(\rho, \phi) = e^{in\phi} H_n(k_q \rho)$$

όπου  $J_n$  και  $H_n$  είναι οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel τάξης  $n$  και πρώτου είδους Hankel, αντιστοίχως, ενώ  $q \in \{0, 1\}$ . Στη συνέχεια ορίστηκε ο τελεστής διέγερσης

$$\mathcal{G}_n(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^N I_j e^{-in\phi_j} x_{n,j}.$$

όπου  $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,N}) \in \mathbb{C}^N$ . Μέσω του τελεστή διέγερσης και των συναρτήσεων παρατήρησης, το ολικό εξωτερικό πεδίο  $E_0$  και το ολικό δευτερεύον πεδίο  $E^{\text{sec}}$  γράφονται ως εξής

$$E_0(\rho, \phi) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(\mathbf{a}_n) \mathcal{H}_{n,0}(\rho, \phi),$$

$$E^{\text{sec}}(\rho, \phi) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(\mathbf{b}_n) \mathcal{J}_n(\rho, \phi),$$

όπου

$$\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N}), \quad \mathbf{b}_n = (b_{n,1}, \dots, b_{n,N})$$

είναι τα διανύσματα των οποίων οι συντεταγμένες είναι οι άγνωστοι συντελεστές των επιμέρους πεδίων κάθε γραμμικής πηγής. Ενώ το γνωστό ολικό πρωτεύον πεδίο δίνεται από την

$$E^{\text{pr}}(\rho, \phi) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(\mathbf{d}_n) \mathcal{H}_{n,1}(\rho, \phi), \quad \rho > \max\{\rho_j : j = 1, \dots, N\},$$

με

$$\mathbf{d}_n = (J_n(k_1\rho_1), \dots, J_n(k_1\rho_N)).$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες μετάβασης για  $\rho = a$  καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{G}_n(\mathbf{a}_n) = -\frac{2i}{k_0 a \pi} \frac{\mathcal{G}_n(\mathbf{d}_n)}{\eta J'_n(k_1 a) H_n(k_0 a) - \mu_1 H'_n(k_0 a) J_n(k_1 a)},$$

όπου η παραγωγή γίνεται ως προς όλο το όρισμα. Έτσι, το ολικό εξωτερικό πεδίο καθορίζεται πλήρως. Οι συντελεστές  $\alpha_{n,j}$  των επιμέρους πεδίων λαμβάνονται αντικαθιστώντας το διάνυσμα  $\mathbf{d}_n$  με το

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n,j} = (0, \dots, 0, \frac{e^{in\phi_j}}{I_j^{-1}} J_n(k_1\rho_j), 0, \dots, 0).$$

Στη συνέχεια, εκφράστηκαν αναλυτικά τα επιφανειακά πεδία (ηλεκτρικό και μαγνητικό).

$$E^{\text{surf}}(\phi) = E_0(a, \phi) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(\mathbf{a}_n) \mathcal{H}_{n,0}(a, \phi),$$

$$H^{\text{surf}}(\phi) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_0(\rho, \phi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{A}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_n(\mathbf{a}_n) \frac{\partial \mathcal{H}_{n,0}(\rho, \phi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a}.$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις, οι παραπάνω εκφράσεις γράφονται

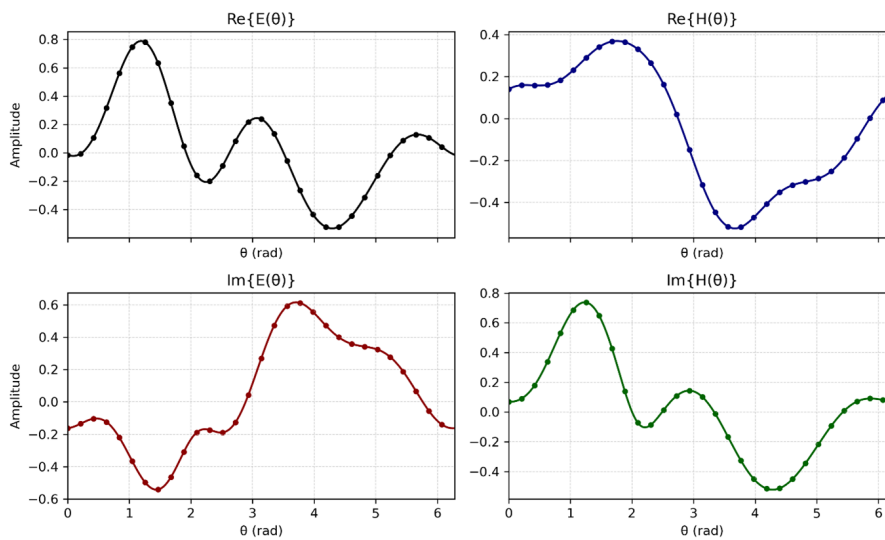
$$E^{\text{surf}}(\phi) = A \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_j a_{n,j} H_n(k_0 a) e^{in(\phi-\phi_j)},$$

$$H^{\text{surf}}(\phi) = \frac{A}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_j a_{n,j} H'_n(k_0 a) e^{in(\phi-\phi_j)},$$

όπου

$$a_{n,j} = -\frac{2i}{k_0 a \pi \eta} \frac{J_n(k_1 \rho_j)}{J'_n(k_1 a) H_n(k_0 a) - \mu_1 H'_n(k_0 a) J_n(k_1 a)}.$$

Στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν (Σχήμα 2.3) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα τυχαίας διάταξης πηγών. Τα σημεία αντιστοιχούν στις γωνίες παρατήρησης (μέτρησης) του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στην περιφέρεια της διατομής.



Σχήμα 2.3: Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των επιφανειακών πεδίων μιας τυχαίας διάταξης.

### 3. Αντικείμενο εργασίας

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, αναπτύσσεται μια μεθοδολογία βασισμένη στη βαθιά μηχανική μάθηση (deep learning) για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης γραμμικών πηγών σε διηλεκτρικό κύλινδρο. Στόχος είναι η ανάκτηση του αριθμού, των θέσεων και των εντάσεων των εσωτερικών πηγών, αξιοποιώντας μετρήσεις ηλεκτρικών επιφανειακών πεδίων σε μία συχνότητα λειτουργίας (Pallikarakis κ.ά., 2024).

#### 3.1 Εφαρμογές

Τα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από σημειακές ή γραμμικές πηγές αποτελούν θεμελιώδες εργαλείο στη μελέτη της διάδοσης κυμάτων σε πολύπλοκα περιβάλλοντα (Chew, 1995). Η κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των πηγών και των υλικών μέσων είναι κρίσιμη σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, που εκτείνονται από τη γεωφυσική και τη βιοϊατρική μέχρι τον σχεδιασμό κεραιών και τα αντίστροφα προβλήματα.

**Γεωφυσική απεικόνιση και Ground Penetrating Radar (GPR)** Η σκέδαση κυμάτων από κυλινδρικά ή επιμήκη αντικείμενα είναι κεντρικής σημασίας στη μοντελοποίηση και ερμηνεία μετρήσεων GPR (Daniels, 2004). Τυπικές εφαρμογές περιλαμβάνουν:

- Ανίχνευση υπόγειων σωληνώσεων, καλωδίων και αγωγών σε στρωματοποιημένα γεωλογικά μέσα.
- Εντοπισμός ανωμαλιών υπεδάφους, όπως κενά, ρωγμές ή περιοχές με μεταβαλλόμενη διηλεκτρική σταθερά.
- Διάγνωση διαρροών σε δίκτυα ύδρευσης ή φυσικού αερίου.

Σε αυτά τα σενάρια, οι γραμμικές πηγές προσομοιώνουν την κεραία εκπομπής, ενώ τα κυλινδρικά αντικείμενα σκέδασης αναπαριστούν υπόγειες δομές.

**Βιοϊατρική απεικόνιση και θεραπευτικές εφαρμογές** Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε βιολογικούς ιστούς (Gabriel κ.ά., 1996) είναι κρίσιμη για:

- Μικροκυματική υπερθερμία για θεραπεία καρκίνου του μαστού (Lazebnik κ.ά., 2007), όπου απαιτείται ακριβής υπολογισμός του σκεδαζόμενου πεδίου για τη βελτιστοποίηση της διέγερσης των κεραιών.

- Βιοηλεκτρική και επικοινωνία με εμφυτεύσιμες συσκευές, όπου η παρουσία εμφυτευμάτων επηρεάζει τη διάδοση των κυμάτων (Hall & Hao, 2007).

Σε τέτοιες εφαρμογές, οι σημειακές πηγές προσομοιώνουν μικρές κεραίες ή τοπικές εκπομπές μέσα σε ανομοιογενή μέσα.

**Μη καταστροφικός έλεγχος (NDT) και ανίχνευση ελαττωμάτων** Η σκέδαση κυμάτων χρησιμοποιείται ευρέως για την αξιολόγηση της δομικής ακεραιότητας υλικών:

- Ανίχνευση επιφανειακών ρωγμών με χρήση laser-generated ultrasound, όπου το σκεδαζόμενο κύμα αποκαλύπτει μικρορωγμές (Scruby & Drain, 1990).
- Εντοπισμός θαμμένων αντικειμένων ή εγκλεισμάτων, με στόχο την εκτίμηση της θέσης, του μεγέθους και του σχήματός τους.

Τα προβλήματα αυτά συχνά ανάγονται στη σκέδαση από κυλινδρικές ή ρωγμοειδείς γεωμετρίες (Achenbach, 1973).

**Σχεδιασμός και ανάλυση κεραιών** Τα προβλήματα σκέδασης από γραμμικές πηγές αποτελούν βασικό εργαλείο στην ηλεκτρομαγνητική σχεδίαση:

- Ανάλυση διαγραμμάτων ακτινοβολίας σε περιβάλλοντα με κοντινές δομές.
- Μελέτη της αλληλεπίδρασης κεραιών με ανοίγματα, κοιλότητες ή κυλινδρικούς αγωγούς, που μπορεί να αλλοιώσουν σημαντικά το εκπεμπόμενο πεδίο.

Η ακριβής μοντελοποίηση αυτών των φαινομένων είναι κρίσιμη για τον σχεδιασμό αποδοτικών και συμβατών κεραιών.

**Αντίστροφα προβλήματα και ανακατασκευή πηγών** Τα προβλήματα σκέδασης από σημειακές και γραμμικές πηγές αποτελούν τη βάση πολλών αντίστροφων προβλημάτων (Colton & Kress, 1998):

- **Ανακατασκευή πηγών:** προσδιορισμός της θέσης και της ισχύος μιας άγνωστης πηγής από μετρήσεις του σκεδαζόμενου πεδίου. Εφαρμογές περιλαμβάνουν την ηλεκτροεγκεφαλογραφία (EEG) και άλλες τεχνικές βιοηλεκτρικής απεικόνισης (Grech κ.ά., 2008).
- **Χαρακτηρισμός στόχων:** εκτίμηση της γεωμετρίας και των υλικών παραμέτρων ενός άγνωστου αντικειμένου μέσω των μετρούμενων πεδίων.

Τα αντίστροφα προβλήματα απαιτούν ιδιαίτερα ακριβή forward models, γεγονός που καθιστά τη μελέτη της σκέδασης από σημειακές και γραμμικές πηγές θεμελιώδη.

## 3.2 Μεθοδολογία

Σε ό,τι αφορά τη μεθοδολογία, ακολουθούμε την ίδια στρατηγική με αυτήν που επέλεξαν οι συγγραφείς της εργασίας (Pallikarakis κ.ά., 2024). Δηλαδή, επιλύουμε δύο τύπους αντίστροφων προβλημάτων που είναι αλληλένδετα.

Το πρώτο είναι το λεγόμενο *πρόβλημα ταξινόμησης (classification problem)*, δηλαδή το πρόβλημα της αναγνώρισης του αριθμού  $N$  των πηγών που διεγείρουν τον σκεδαστή (Goodfellow κ.ά., 2016a).

Το δεύτερο είναι ένα *αντίστροφο πρόβλημα πηγής (inverse source problem)*, δηλαδή η ανάκτηση των θέσεων και των εντάσεων των διεγερτικών πηγών (Isakov, 2006).

Η προσέγγιση αυτή χαρακτηρίζεται ως μεθοδολογία *διαίρει και βασίλευε (divide-and-conquer)*, με στόχο πρώτα την επίλυση του προβλήματος ταξινόμησης και στη συνέχεια του αντίστροφου προβλήματος πηγής.

## 4. Ψηφιοποίηση αναλυτικής λύσης

Η ψηφιοποίηση της αναλυτικής λύσης του ευθέως προβλήματος σκέδασης αποτελεί θεμέλιο της παρούσας εργασίας. Η κλάση `PhysicsTM` υλοποιεί μια πλήρως διανυσματοποιημένη και αριθμητικά σταθερή εκδοχή της αναλυτικής λύσης για TM πόλωση, ενώ το συνοδευτικό `SurrogateWrapper` παρέχει ένα ενιαίο API που επιτρέπει την εναλλαγή μεταξύ αναλυτικού και προσεγγιστικού (surrogate) μοντέλου χωρίς αλλαγές στον κώδικα. Η αρχιτεκτονική ακολουθεί αρχές modular scientific computing με καθαρό διαχωρισμό μεταξύ φυσικής μοντελοποίησης, αριθμητικής υλοποίησης, παραγωγής δεδομένων και machine learning surrogates.

Η υλοποίηση βασίζεται στη γλώσσα Python, αξιοποιώντας τις βιβλιοθήκες NumPy για διανυσματικές πράξεις (Harris κ.ά., 2020), SciPy (`scipy.special`) για τις ειδικές συναρτήσεις Bessel και Hankel (Virtanen κ.ά., 2020), PyTorch για την εκπαίδευση και εκτέλεση των νευρωνικών δικτύων (Paszke κ.ά., 2019), καθώς και ένα ελαφρύ custom API για την ενοποίηση των forward models.

Κατά την αρχικοποίηση της κλάσης `PhysicsTM`, ορίζονται η ακτίνα του κυλίνδρου  $R$ , οι ηλεκτρομαγνητικές παράμετροι των δύο μέσων  $(\epsilon_0, \mu_0)$  και  $(\epsilon_1, \mu_1)$ , η γωνιακή συχνότητα  $\omega$ , ο αριθμός όρων της σειράς  $N$  και η ένταση της γραμμικής πηγής  $I$ . Από αυτά υπολογίζονται ο κυματάρριθμος του εσωτερικού μέσου  $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ , ο κυματάρριθμος του εξωτερικού μέσου  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , ο δείκτης διάθλασης  $\eta = k_1/k_0$  και η σταθερά πόλωσης για TM σκέδαση. Όλες οι ποσότητες αποθηκεύονται ως `float64`, εξασφαλίζοντας αριθμητική ακρίβεια και σταθερότητα.

Η λύση βασίζεται σε σειρές κυλινδρικών αρμονικών. Το `PhysicsTM` δημιουργεί τον πίνακα δεικτών  $n = -N, \dots, N$ , υπολογίζει τις συναρτήσεις Bessel  $J_n$ , Hankel  $H_n^{(1)}$  και τις παραγώγους τους μέσω SciPy. Χρησιμοποιεί πλήρη διανυσματοποίηση (vectorization) και broadcasting για την αποφυγή βρόχων, επιτρέποντας τον υπολογισμό χιλιάδων γωνιών παρατήρησης σε μία μόνο κλήση (Oliphant, 2006). Το αποτέλεσμα είναι ένας forward solver που είναι ταυτόχρονα ακριβής, γρήγορος και σταθερός.

Οι συντελεστές  $a_n(\rho_s)$  υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στο  $\rho = R$ . Το `PhysicsTM` υπολογίζει τις ειδικές συναρτήσεις στο όριο, υπολογίζει τον παρονομαστή  $D_n$  που ενσωματώνει τις υλικές παραμέτρους και παράγει τους συντελεστές με διανυσματικό τρόπο. Δεν χρησιμοποιείται caching, καθώς η χρήση του solver είναι ελαφριά και σπάνια καλείται απευθείας — το μεγαλύτερο μέρος των forward calls εκτελείται από τα surrogates.

Η κλάση παρέχει δύο βασικές μεθόδους με ενιαίο API. Αν το τρίτο όρισμα είναι ακέραιος, τότε δημιουργείται ομοιόμορφο πλέγμα γωνιών· αν είναι scalar, επιστρέφεται μία μόνο τιμή· ενώ αν είναι array, οι υπολογισμοί γίνονται απευθείας χωρίς βρόχο. Δημιουργείται ο όρος φάσης  $e^{in\phi}$ ,

αθροίζονται οι όροι της σειράς και επιστρέφεται το πεδίο ως complex NumPy array. Με αυτόν τον τρόπο, το PhysicsTM λειτουργεί ως ψηφιακός αναπαραγωγέας της αναλυτικής λύσης με πλήρη αριθμητική συνέπεια.

Για να ενσωματωθεί το PhysicsTM σε ένα ενιαίο pipeline με τα surrogates, σχεδιάστηκε η κλάση SurrogateWrapper, η οποία έχει ακριβώς το ίδιο API. Υποστηρίζει scalar, array και integer input, κάνει broadcasting των παραμέτρων, μετατρέπει τα δεδομένα σε μορφή κατάλληλη για το MLP surrogate και επιστρέφει αποτελέσματα με την ίδια μορφή (complex NumPy arrays). Αυτό το pattern ονομάζεται interface-level polymorphism (Gamma κ.ά., 1994). Ο κώδικας που χρησιμοποιεί το forward model δεν χρειάζεται να γνωρίζει αν εκτελείται η αναλυτική λύση (PhysicsTM) ή το νευρωνικό surrogate (SurrogateEM+ SurrogateWrapper). Το αποτέλεσμα είναι ένα καθαρό, επεκτάσιμο και εύκολα συντηρήσιμο computational framework.

## 4.1 Surrogate Models

Η κλάση PhysicsTM υπολογίζει τα επιφανειακά πεδία  $E$  και  $H$  μέσω modal expansion με συναρτήσεις Bessel και Hankel, χρησιμοποιώντας  $2N + 1 = 41$  όρους ανά κλήση. Κάθε υπολογισμός για μία θέση πηγής και ένα σύνολο γωνιών παρατήρησης απαιτεί:

- Υπολογισμό ειδικών συναρτήσεων (jn, jnr, hankel1, h1vr) για κάθε όρο.
- Διανυσματοποιημένη άθροιση  $41 \times M$  όρων ανά πεδίο, όπου  $M$  ο αριθμός γωνιών παρατήρησης.
- Συνολικά:  $O(N \cdot M)$  πράξεις ανά πηγή — αποδοτικό για μεμονωμένες κλήσεις, αλλά ιδιαίτερα βαρύ σε μεγάλη κλίμακα.

Σε πιο απαιτητικές εφαρμογές — όπως iterative inversion με gradient descent (Nocedal & Wright, 2006), Monte Carlo δειγματοληψία (Robert & Casella, 2004), ή online data augmentation — ο αναλυτικός λύτης αποτελεί σημαντικό bottleneck. Η λύση είναι η εκπαίδευση ενός ελαφριού νευρωνικού δικτύου που μαθαίνει την απεικόνιση:

$$(\rho/R, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos \theta, \sin \theta) \longrightarrow (\text{Re}[F], \text{Im}[F]),$$

όπου  $F$  είναι το αντίστοιχο επιφανειακό πεδίο (ηλεκτρικό  $E$  ή μαγνητικό  $H$ ). Με αυτόν τον τρόπο, η PhysicsTM αντικαθίσταται από μία απλή πρόσθια διέλευση ενός MLP — χωρίς αθροίσεις σειρών και χωρίς υπολογισμό ειδικών συναρτήσεων.

Η εκπαίδευση των MLPs πραγματοποιείται με εποπτευόμενο τρόπο (supervised learning) (Goodfellow κ.ά., 2016a), χρησιμοποιώντας ως δεδομένα στόχου τα επιφανειακά πεδία που παράγονται από το αναλυτικό μοντέλο PhysicsTM. Έτσι, το MLP μαθαίνει να αναπαράγει με υψηλή ακρίβεια τη συμπεριφορά του φυσικού συστήματος, επιτρέποντας εξαιρετικά γρήγορους προσεγγιστικούς υπολογισμούς του forward model — απαραίτητους για αντίστροφα προβλήματα και για διαδικασίες εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων μεγάλης κλίμακας.

## 4.2 Multi-Layer Perceptrons

Τα πολυεπίπεδα νευρωνικά δίκτυα (Multilayer Perceptrons – MLPs) (Rosenblatt, 1958) αποτελούν μία από τις βασικότερες και ευρύτερα χρησιμοποιούμενες αρχιτεκτονικές στη μηχανική μάθηση. Πρόκειται για πλήρως συνδεδεμένα δίκτυα (fully connected networks), στα οποία κάθε νευρώνας ενός επιπέδου συνδέεται με όλους τους νευρώνες του επόμενου. Η απλότητα της δομής τους, σε συνδυασμό με την υψηλή εκφραστική τους ικανότητα, τα καθιστά κατάλληλα για την προσέγγιση πολύπλοκων μη γραμμικών συναρτήσεων.

Σε ένα MLP, τα δεδομένα εισόδου μετασχηματίζονται διαδοχικά μέσω πολλαπλών επιπέδων (layers), καθένα από τα οποία εφαρμόζει έναν γραμμικό μετασχηματισμό ακολουθούμενο από μία μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης (activation function). Οι πιο συνηθισμένες ενεργοποιήσεις είναι οι ReLU, tanh και sigmoid, με τη ReLU να αποτελεί τη δημοφιλέστερη επιλογή λόγω της αριθμητικής σταθερότητας και της ευκολίας εκπαίδευσης (Nair & Hinton, 2010). Μέσω αυτών των μη γραμμικών μετασχηματισμών, το MLP μπορεί να μάθει πολύπλοκες σχέσεις μεταξύ εισόδων και εξόδων, ακόμη και σε υψηλές διαστάσεις.

Ένα πολυεπίπεδο νευρωνικό δίκτυο ορίζεται ως μια συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^{d_{\text{in}}} \rightarrow \mathbb{R}^{d_{\text{out}}},$$

η οποία προκύπτει από τη διαδοχική σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών και μη γραμμικών συναρτήσεων ενεργοποίησης. Για ένα δίκτυο με  $L$  κρυφά επίπεδα, ορίζουμε:

- διάνυσμα εισόδου:  $x \in \mathbb{R}^{d_{\text{in}}}$
- πίνακας βαρών επιπέδου  $l$ :  $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{d_l \times d_{l-1}}$
- διάνυσμα μετατοπίσεων:  $b^{(l)} \in \mathbb{R}^{d_l}$
- συνάρτηση ενεργοποίησης:  $\sigma(\cdot)$
- ενεργοποίηση επιπέδου  $l$ :  $h^{(l)}$

Η προώθηση (forward pass) ορίζεται αναδρομικά ως:

$$h^{(0)} = x,$$

$$z^{(l)} = W^{(l)}h^{(l-1)} + b^{(l)}, \quad l = 1, \dots, L,$$

$$h^{(l)} = \sigma(z^{(l)}), \quad l = 1, \dots, L.$$

Το τελικό επίπεδο εξόδου είναι συνήθως γραμμικό:

$$f(x) = W^{(L+1)}h^{(L)} + b^{(L+1)}.$$

Συνεπώς, ένα MLP είναι η σύνθεση

$$f(x) = (W^{(L+1)} \circ \sigma \circ W^{(L)} \circ \dots \circ \sigma \circ W^{(1)})(x).$$

Η εκφραστική ισχύς των MLPs θεμελιώνεται στο Θεώρημα Καθολικής Προσέγγισης (Universal Approximation Theorem), σύμφωνα με το οποίο ένα δίκτυο με τουλάχιστον ένα κρυφό επίπεδο και κατάλληλη μη γραμμική ενεργοποίηση μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση σε συμπαγή σύνολα με αυθαίρετη ακρίβεια (Cybenko, 1989; Hornik, 1991).

### Παραδείγματα συναρτήσεων ενεργοποίησης

Οι γραφικές παραστάσεις των συνηθέστερων συναρτήσεων ενεργοποίησης παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1.

- **ReLU (Rectified Linear Unit)**

$$\sigma(x) = \max(0, x)$$

(τμηματικά γραμμική, παράγει αραιές ενεργοποιήσεις και αποφεύγει το vanishing gradient για  $x > 0$ )

- **Sigmoid**

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

(τιμές στο  $(0, 1)$ , χρησιμοποιείται σε binary classification, υποφέρει από vanishing gradient για μεγάλα  $|x|$ )

- **Hyperbolic Tangent**

$$\sigma(x) = \tanh(x)$$

(τιμές στο  $(-1, 1)$ , συμμετρική ως προς το 0 και πιο «κεντραρισμένη» από τη sigmoid)

- **Leaky ReLU**

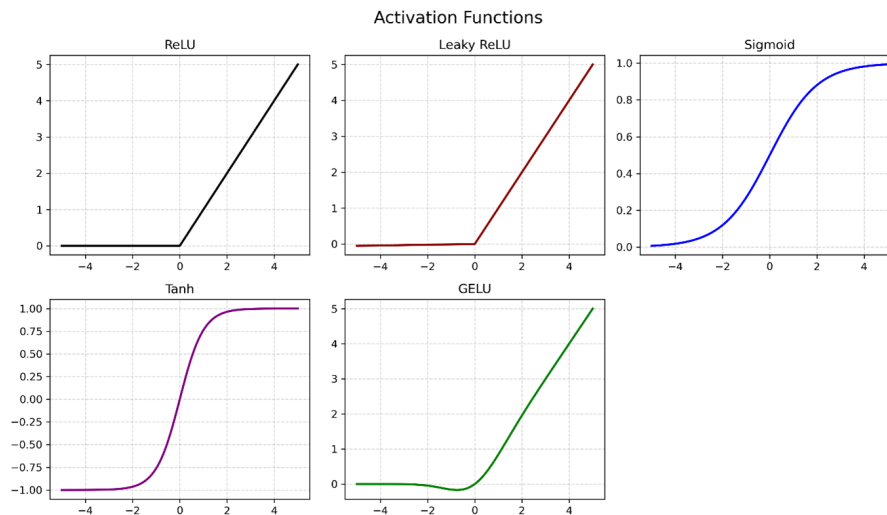
$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \alpha x, & x < 0 \end{cases}$$

με  $\alpha \approx 0.01$ . (λύνει το “dying ReLU problem”, μικρή κλίση για αρνητικές τιμές)

- **GELU (Gaussian Error Linear Unit)**

$$\sigma(x) = x \Phi(x)$$

όπου  $\Phi(x)$  η CDF της κανονικής κατανομής. (χρησιμοποιείται σε transformers, ομαλή, μη γραμμική, με στοχαστική ερμηνεία)



Σχήμα 4.1: Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ενεργοποίησης.

## Backpropagation και Gradient Descent

Η εκπαίδευση ενός MLP βασίζεται στη βελτιστοποίηση των παραμέτρων του (βαρών και μετατοπίσεων), έτσι ώστε η έξοδος του δικτύου να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα τα δεδομένα στόχου (Goodfellow κ.ά., 2016a). Η διαδικασία αυτή διατυπώνεται ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους  $L(\theta)$ , όπου  $\theta$  συμβολίζει το σύνολο όλων των παραμέτρων του δικτύου.

Για προβλήματα παλινδρόμησης χρησιμοποιείται συνήθως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), ενώ για ταξινόμηση η cross entropy (Bishop, 2006).

Ο βασικός μηχανισμός εκπαίδευσης είναι ο gradient descent (Nocedal & Wright, 2006), ο οποίος ενημερώνει τις παραμέτρους σύμφωνα με τον κανόνα:

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \nabla_{\theta} L(\theta),$$

όπου  $\eta$  είναι ο ρυθμός μάθησης.

Ο υπολογισμός του διανύσματος βαθμίδων  $\nabla_{\theta} L$  είναι υπολογιστικά απαιτητικός για μεγάλα δίκτυα. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται μέσω του backpropagation (Rumelhart κ.ά., 1986), ενός αποδοτικού αλγορίθμου που εφαρμόζει τον κανόνα της αλυσίδας (chain rule) με πλήρως διανυσματοποιημένο τρόπο.

Στην πράξη, ο υπολογισμός των παραγώγων υλοποιείται μέσω του μηχανισμού autograd του PyTorch (Paszke κ.ά., 2019), ο οποίος κατασκευάζει δυναμικά το γράφημα υπολογισμού και εφαρμόζει αυτόματα το backpropagation.

Για κάθε επίπεδο  $l$ , ο αλγόριθμος υπολογίζει:

- το σφάλμα στο επίπεδο  $l$ ,
- τις παραγώγους ως προς τα βάρη  $W^{(l)}$  και τις μετατοπίσεις  $b^{(l)}$ ,
- τις “ευαισθησίες” που μεταφέρονται στο προηγούμενο επίπεδο.

Η εκπαίδευση πραγματοποιείται συνήθως με στοχαστικές παραλλαγές του gradient descent, όπως το Stochastic Gradient Descent (SGD) (Robbins & Monro, 1951) ή πιο εξελιγμένους βελτιστοποιητές όπως ο Adam (Kingma & Ba, 2015a), οι οποίοι επιταχύνουν τη σύγκλιση και βελτιώνουν τη σταθερότητα.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, τα backpropagation και gradient descent αποτελούν τον πυρήνα της εκπαίδευσης των surrogate μοντέλων. Τα MLPs μαθαίνουν να αναπαράγουν την αναλυτική λύση του PhysicsTM μέσω της ελαχιστοποίησης του σφάλματος μεταξύ των επιφανειακών πεδίων που παράγει ο αναλυτικός λύτης και των αντίστοιχων εξόδων του δικτύου.

Η είσοδος του δικτύου αποτελείται από τις γεωμετρικές παραμέτρους της πηγής ( $\rho_s, \phi_s$ ) και τη γωνία παρατήρησης  $\theta$ , κατάλληλα κανονικοποιημένες, ενώ η έξοδος είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του επιφανειακού πεδίου (Raissi κ.ά., 2019). Η διαδικασία αυτή επιτρέπει την κατασκευή surrogate μοντέλων υψηλής πιστότητας, τα οποία μπορούν να αντικαταστήσουν τον αναλυτικό λύτη σε εφαρμογές όπου απαιτείται ταχύτητα, όπως στα αντίστροφα προβλήματα.

### 4.3 Παραγωγή δεδομένων εισόδου για τα surrogate models

Για την εκπαίδευση των pointwise surrogate μοντέλων κατασκευάστηκε ένα ελαφρύ αλλά υψηλής πιστότητας dataset, βασισμένο αποκλειστικά στην αναλυτική λύση του ευθέως προβλήματος όπως υλοποιείται στην κλάση PhysicsTM. Η βασική σχεδιαστική επιλογή ήταν κάθε δείγμα να αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζεύγος ( $\rho_s, \phi_s, \theta$ ), επιτρέποντας την εκπαίδευση ενός MLP που

προσεγγίζει το επιφανειακό πεδίο σημειακά (pointwise regression). Με αυτόν τον τρόπο, το δίκτυο μαθαίνει τη χαρτογράφηση

$$(\rho_s, \varphi_s, \theta) \mapsto (\text{Re } F_{surf}, \text{Im } F_{surf}),$$

όπου  $F \in \{E, H\}$ .

Η διαδικασία παραγωγής δεδομένων οργανώθηκε έτσι ώστε να είναι πλήρως διανυσματοποιημένη και να απαιτεί μόνο μία κλήση του αναλυτικού λύτη ανά πηγή. Για κάθε μία από τις  $N_{sources} = 10\,000$  πηγές, τα πεδία υπολογίζονται σε  $M = 72$  ομοιόμορφα κατανομημένες γωνίες παρατήρησης (βήμα  $5^\circ$ ), οδηγώντας σε συνολικά 720 000 δείγματα ανά dataset.

Οι ακτίνες των πηγών δειγματολαμβάνονται στο διάστημα  $[0.05R, 0.95R]$  με τετραγωνική ρίζα της ομοιόμορφης κατανομής, ώστε η πυκνότητα να είναι ομοιόμορφη ως προς το εμβαδόν. Οι γωνίες  $\varphi_s$  δειγματολαμβάνονται ομοιόμορφα στο  $[0, 2\pi)$ , ενώ οι γωνίες παρατήρησης  $\theta$  προκύπτουν από ομοιόμορφο πλέγμα.

Για την είσοδο του MLP εφαρμόστηκε κυκλική κωδικοποίηση των γωνιακών μεταβλητών (García κ.ά., 2017), ώστε να αποφευχθούν ασυνέχειες στο 0 και στο  $2\pi$ . Συγκεκριμένα, κάθε δείγμα περιγράφεται από το πενταδιάστατο διάνυσμα:

$$x = \left[ \frac{\rho_s}{R}, \cos \varphi_s, \sin \varphi_s, \cos \theta, \sin \theta \right],$$

το οποίο εξασφαλίζει ομαλή παρεμβολή σε όλο το κυκλικό πεδίο και βελτιώνει σημαντικά τη σταθερότητα της εκπαίδευσης. Η επιλογή αυτή είναι κρίσιμη, καθώς τόσο η θέση της πηγής όσο και η γωνία παρατήρησης είναι περιοδικές μεταβλητές.

Οι έξοδοι του μοντέλου είναι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του επιφανειακού πεδίου, τα οποία κανονικοποιούνται με global max-scaling (Goodfellow κ.ά., 2016a):

$$Y_{\text{norm}} = \frac{Y}{y_{\text{max}}},$$

όπου  $y_{\text{max}}$  η μέγιστη απόλυτη τιμή του αντίστοιχου dataset. Για τα δύο πεδία προέκυψαν οι τιμές

$$y_{\text{max}}(E) = 0.9910, \quad y_{\text{max}}(H) = 2.2120.$$

Οι τιμές αυτές αποθηκεύονται στα αρχεία .npz και χρησιμοποιούνται κατά την πρόβλεψη για την αποκανονικοποίηση των εξόδων. Η διαδικασία αυτή εξασφαλίζει ότι τα δεδομένα στόχου βρίσκονται στο διάστημα  $[-1, 1]$ , διευκολύνοντας την εκπαίδευση και επιτρέποντας στα MLPs να συγκλίνουν γρήγορα και σταθερά.

Τέλος, τα δύο datasets (light\_Esurf.npz και light\_Hsurf.npz) αποθηκεύονται ξεχωριστά, επι-

τρέποντας την ανεξάρτητη εκπαίδευση δύο surrogate μοντέλων — ενός για το ηλεκτρικό και ενός για το μαγνητικό επιφανειακό πεδίο. Η συνολική διαδικασία είναι ταχεία, πλήρως αναπαράγωγιμη και παράγει δεδομένα υψηλής πιστότητας, κατάλληλα για την εκπαίδευση pointwise neural approximators του ευθέος προβλήματος (Pallikarakis κ.ά., 2024).

#### 4.4 Αρχιτεκτονική και εκπαίδευση των surrogate models

Για την προσέγγιση του ευθέος προβλήματος σκέδασης επιλέχθηκε μια απλή αλλά βαθιά, πλήρως συνδεδεμένη αρχιτεκτονική (deep MLP, βλ. Πίνακα 4.1) (Goodfellow κ.ά., 2016a). Η επιλογή αυτή εξυπηρετεί δύο βασικούς στόχους:

- ελάχιστο inference latency, ώστε το surrogate να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αντίστροφα προβλήματα που απαιτούν χιλιάδες forward calls,
- εύκολη φορητότητα, καθώς η πλήρως συνδεδεμένη δομή επιτρέπει άμεσο export σε ONNX ή TorchScript για χρήση σε εξωτερικά συστήματα.

Το μοντέλο εκπαιδεύεται σε διπλή ακρίβεια (float64), ώστε να διατηρηθεί η αριθμητική συνέπεια με τον αναλυτικό λύτη PhysicsTM, ο οποίος επίσης λειτουργεί σε float64. Η αρχιτεκτονική του MLP έχει την εξής μορφή:

| Επίπεδο  | Διαστάσεις | Ενεργοποίηση |
|----------|------------|--------------|
| Input    | 5          | –            |
| Hidden 1 | 128        | ReLU         |
| Hidden 2 | 128        | ReLU         |
| Hidden 3 | 128        | ReLU         |
| Hidden 4 | 128        | ReLU         |
| Output   | 2 (Re, Im) | –            |

Πίνακας 4.1: Αρχιτεκτονική του deep MLP surrogate model.

Εκπαιδεύτηκαν δύο ανεξάρτητα δίκτυα, ένα για το ηλεκτρικό πεδίο  $E_{\text{surf}}$  και ένα για το μαγνητικό πεδίο  $H_{\text{surf}}$ . Ο διαχωρισμός αυτός επιτρέπει ανεξάρτητη βελτιστοποίηση κάθε πεδίου, απλοποιημένη διαδικασία tuning και δυνατότητα αντικατάστασης ενός μοντέλου χωρίς να επηρεάζεται το άλλο. Η απλότητα της αρχιτεκτονικής είναι σκόπιμη, διότι το πρόβλημα είναι χαμηλής διάστασης, ομαλό και χωρίς χωρική τοπικότητα· επομένως δεν απαιτούνται συνελκτικές ή attention-based δομές. Ένα αρκούτως βαθύ MLP είναι επαρκές και αποδοτικό. Η εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε σε CPU, καθώς το μοντέλο είναι ελαφρύ και το dataset πλήρως διανυσματοποιημένο.

Οι υπερπαραμέτροι εκπαίδευσης συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2 :

| Παράμετρος        | Τιμή                   |
|-------------------|------------------------|
| Optimizer         | Adam                   |
| Learning rate     | $1 \times 10^{-3}$     |
| Loss function     | MSE                    |
| Batch size        | 512                    |
| Epochs            | 200 (+ Early Stopping) |
| Train / Val split | 80% / 20%              |
| Precision         | float64                |
| Device            | CPU                    |

**Πίνακας 4.2: Υπερπαράμετροι εκπαίδευσης των surrogate models.**

Ο optimizer Adam (Kingma & Ba, 2015a) επιλέχθηκε λόγω της σταθερής και γρήγορης σύγκλισής του σε προβλήματα παλινδρόμησης με ομαλές συναρτήσεις στόχου. Η συνάρτηση κόστους είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) μεταξύ των κανονικοποιημένων πραγματικών και φανταστικών μερών του πεδίου.

Για την αποφυγή υπερπροσαρμογής χρησιμοποιήθηκε early stopping (Prechelt, 1998), με παρακολούθηση του validation loss. Επιπλέον, εφαρμόστηκε learning rate scheduler τύπου ReduceLROnPlateau (Smith, 2017), ο οποίος μειώνει τον ρυθμό μάθησης όταν η βελτίωση του validation loss επιβραδύνεται.

Και τα δύο μοντέλα, για το  $E_{\text{surf}}$  και το  $H_{\text{surf}}$ , παρουσιάζουν ομαλή και σταθερή σύγκλιση. Το validation loss ακολουθεί στενά το training loss, χωρίς ενδείξεις υπερπροσαρμογής, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι:

- το dataset είναι επαρκώς μεγάλο και ποικιλόμορφο,
- η κανονικοποίηση των εξόδων είναι αποτελεσματική,
- η κυκλική κωδικοποίηση των γωνιών επιτρέπει ομαλή παρεμβολή,
- η αρχιτεκτονική είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Το τελικό validation MSE βρίσκεται σε επίπεδα που επιτρέπουν υψηλής πιστότητας αναπαραγωγή της αναλυτικής λύσης, καθιστώντας τα surrogates κατάλληλα για χρήση σε αντίστροφα προβλήματα και σε real-time εφαρμογές.

## 4.5 Το SurrogateEM Module και το Unified API

Για την αξιοποίηση των εκπαιδευμένων surrogate μοντέλων αναπτύχθηκε το module SurrogateEM, το οποίο παρέχει ένα ενιαίο και υψηλού επιπέδου API για την παραγωγή

των επιφανειακών πεδίων  $E_{\text{surf}}$  και  $H_{\text{surf}}$ . Ο στόχος του module είναι να αντικαταστήσει πλήρως τον αναλυτικό λύτη PhysicsTM σε εφαρμογές όπου απαιτείται ταχύτητα, διατηρώντας παράλληλα συμβατότητα ως προς τη διεπαφή και τη μορφή των εξόδων.

Η κλάση φορτώνει δύο ανεξάρτητα MLP μοντέλα (ένα για το ηλεκτρικό και ένα για το μαγνητικό πεδίο), καθώς και τις αντίστοιχες σταθερές κανονικοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκπαίδευση. Με αυτόν τον τρόπο, η αποκανονικοποίηση των εξόδων γίνεται αυτόματα, επιτρέποντας στον χρήστη να εργάζεται απευθείας με φυσικές τιμές πεδίου.

### Κανονικοποίηση και προετοιμασία εισόδου

Η μέθοδος `_make_input` υλοποιεί την ίδια κυκλική κωδικοποίηση που χρησιμοποιήθηκε στο dataset:

$$\left[ \frac{\rho_s}{R}, \cos \varphi_s, \sin \varphi_s, \cos \theta, \sin \theta \right]$$

Η είσοδος μετατρέπεται σε tensor PyTorch και μεταφέρεται στη συσκευή εκτέλεσης (CPU ή GPU). Η κανονικοποίηση των εξόδων αντιστρέφεται μέσω των αποθηκευμένων σταθερών  $y_{\text{max},E}$  και  $y_{\text{max},H}$ , ώστε το τελικό αποτέλεσμα να βρίσκεται στην αρχική κλίμακα του αναλυτικού μοντέλου.

### Batch inference

Οι μέθοδοι `batch_Esurf` και `batch_Hsurf` αποτελούν τον χαμηλού επιπέδου μηχανισμό πρόβλεψης. Δέχονται arrays ίδιου σχήματος για  $\rho_s$ ,  $\phi_s$  και  $\theta$ , κατασκευάζουν το normalized input και εκτελούν το MLP σε λειτουργία `eval()` χωρίς gradient tracking.

Το αποτέλεσμα επιστρέφεται ως μιγαδικός πίνακας:

$$F_{\text{surf}} = (\text{Re } Y + i \text{ Im } Y) y_{\text{max}}.$$

Η λειτουργία αυτή είναι πλήρως διανυσματοποιημένη και επιτρέπει την αξιολόγηση χιλιάδων σημείων σε λίγα milliseconds.

### Explicit- $\theta$ API

Οι μέθοδοι `Esurf_theta` και `Hsurf_theta` παρέχουν έναν καθαρό τρόπο υπολογισμού του πεδίου για ένα συγκεκριμένο array γωνιών:

$$F(\theta_k) = \text{SurrogateMLP}(\rho_s, \phi_s, \theta_k), \quad k = 1, \dots, M.$$

Οι παράμετροι  $\rho_s$  και  $\phi_s$  γίνονται broadcasting αυτόματα ώστε να ταιριάζουν στο σχήμα του

πίνακα γωνιών. Το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας μιγαδικών τιμών ίδιου μεγέθους με το  $\theta$ .

## Unified API

Το πιο σημαντικό στοιχείο της κλάσης είναι το ενιαίο API μέσω των μεθόδων `Esurf` και `Hsurf`. Η τρίτη παράμετρος μπορεί να είναι:

- **ακέραιος** → αριθμός γωνιών, με αυτόματο uniform sampling στο  $[0, 2\pi)$ ,
- **πραγματικός αριθμός** → μία μόνο γωνία (επιστρέφεται scalar),
- **array** → explicit λίστα γωνιών.

Αυτό επιτρέπει στον χρήστη να καλεί το surrogate με τον ίδιο τρόπο που θα καλούσε τον αναλυτικό λύτη. Η διεπαφή αυτή καθιστά το surrogate *drop-in replacement* του PhysicsTM, επιτρέποντας την άμεση ενσωμάτωσή του σε αντίστροφα προβλήματα, optimization loops ή real-time εφαρμογές.

## 4.6 surrogate\_wrapper.py : Το ενιαίο API

Για να καταστεί δυνατή η άμεση σύγκριση μεταξύ της αναλυτικής λύσης (PhysicsTM) και των νευρωνικών προσεγγιστικών μοντέλων (surrogates), αναπτύχθηκε μια ενδιάμεση κλάση με την ονομασία `SurrogateWrapper`. Η κλάση αυτή λειτουργεί ως λεπτό στρώμα προσαρμογής (lightweight interface layer), το οποίο επιτρέπει στα surrogate models να μιμηθούν πλήρως τη δημόσια διεπαφή (public API) της PhysicsTM.

Η βασική ιδέα είναι ότι ο κώδικας που χρησιμοποιεί το forward model — είτε για αξιολόγηση, είτε για σύγκριση, είτε για εκπαίδευση — δεν χρειάζεται να γνωρίζει αν το μοντέλο που καλείται είναι αναλυτικό ή νευρωνικό. Και τα δύο εκθέτουν τις ίδιες μεθόδους:

- `Esurf( $\rho_s, \phi_s, \theta$ )`
- `Hsurf( $\rho_s, \phi_s, \theta$ )`

με τα ίδια semantics:

- scalar  $\theta$  → επιστρέφει scalar,
- array  $\theta$  → επιστρέφει array,
- integer → δημιουργεί ομοιόμορφο πλέγμα γωνιών.

Με αυτόν τον τρόπο, το `physics_vs_surrogate.ipynb`, που θα εξετάσουμε αμέσως μετά, μπορεί να χρησιμοποιεί ακριβώς τον ίδιο κώδικα για να παράγει συγκριτικά διαγράμματα, σφάλματα, heatmaps και μετρικές απόδοσης.

## Σχεδιαστική φιλοσοφία

Η κλάση `SurrogateWrapper` ακολουθεί τρεις βασικές αρχές.

**α. Καμία αλλαγή στη φυσική.** Ο wrapper δεν τροποποιεί τα πεδία, δεν εφαρμόζει `normalization`, δεν αλλάζει μονάδες και δεν εισάγει πρόσθετη λογική. Απλώς προσαρμόζει την είσοδο στη μορφή που αναμένει το `surrogate`.

**β. Πλήρης συμβατότητα με NumPy broadcasting.** Όπως και η `PhysicsTM`, ο wrapper υποστηρίζει:

- scalar  $\rho_s, \phi_s, \theta$
- arrays  $\rho_s, \phi_s, \theta$
- αυτόματη προσαρμογή διαστάσεων (broadcasting)
- επιστροφή NumPy arrays με μιγαδικές τιμές

Έτσι, ο χρήστης μπορεί να καλέσει:

$$E = \text{model.Esurf}(1.0, \pi/4, 720)$$

είτε το `model` είναι `PhysicsTM` είτε `SurrogateWrapper`.

## Ενιαίο batch API για εκπαίδευση

Για τις ανάγκες της εκπαίδευσης των `surrogates`, ο wrapper παρέχει τη μέθοδο:

$$\text{batch\_forward}(\rho_t, \phi_t, I_t, \theta_{\text{obs}})$$

η οποία δέχεται PyTorch tensors, παράγει πλήρη πλέγματα παρατήρησης, καλεί το `surrogate` σε `vectorized` μορφή και επιστρέφει τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των πεδίων ως tensors.

Η λειτουργία αυτή επιτρέπει την εκπαίδευση των μοντέλων με χιλιάδες `forward` calls ανά batch, χωρίς Python loops, διατηρώντας υψηλή απόδοση και πλήρη συμβατότητα με το `training pipeline`.

## 4.7 Αξιολόγηση των surrogate models

Το notebook `physics_vs_surrogate.ipynb` παρουσιάζει μια εκτενή διαδικασία επικύρωσης του ενιαίου `forward` API που χρησιμοποιείται τόσο από το αναλυτικό μοντέλο `PhysicsTM` όσο

και από το νευρωνικό προσεγγιστικό μοντέλο SurrogateEM, μέσω της ενδιάμεσης κλάσης SurrogateWrapper. Στόχος της ανάλυσης είναι να διασφαλιστεί ότι τα δύο μοντέλα είναι πλήρως συμβατά ως προς τη διεπαφή, τη συμπεριφορά και τη φυσική συνέπεια, επιτρέποντας άμεση και αντικειμενική σύγκριση των αποτελεσμάτων τους.

Περιλαμβάνει μια σειρά από στοχευμένες δοκιμές:

- **Έλεγχο συνέπειας API**, ώστε οι μέθοδοι  $E_{\text{surf}}$  και  $H_{\text{surf}}$  να επιστρέφουν σωστού τύπου και σχήματος δεδομένα για scalar, array και integer είσοδο.
- **Έλεγχο broadcasting**, ο οποίος επιβεβαιώνει ότι τα surrogate μοντέλα υποστηρίζουν πλήρως διανυσματοποιημένες κλήσεις, σε αντίθεση με το αναλυτικό μοντέλο που λειτουργεί σε scalar mode.
- **Δοκιμές περιοδικότητας και περιστροφικής συμμετρίας**, που επαληθεύουν ότι τα μοντέλα σέβονται τις θεμελιώδεις συμμετρίες του κυλινδρικού προβλήματος σκέδασης,
- **Έλεγχο συμβατότητας με τις εξισώσεις Maxwell**, μέσω σύγκρισης του  $H_{\text{surf}}$  με την ακτινική παράγωγο του ηλεκτρικού πεδίου στο σύνορο.

Το πρώτο βήμα επικύρωσης διασφαλίζει ότι ο forward solver σέβεται την εγγενή  $2\pi$  περιοδικότητα της κυλινδρικής γεωμετρίας:

$$E_{\text{surf}}(\theta) = E_{\text{surf}}(\theta + 2\pi), \quad H_{\text{surf}}(\theta) = H_{\text{surf}}(\theta + 2\pi).$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την αναπαράσταση μέσω σειράς Fourier:

$$E_{\text{surf}}(\theta) = A \sum_{n=-N}^N \alpha_n(\rho_s) H_n^{(1)}(k_0 R) e^{in(\theta - \phi_s)},$$

καθώς ο εκθετικός παράγοντας  $e^{in\theta}$  είναι  $2\pi$ -περιοδικός. Τα αποτελέσματα των δοκιμών παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3.

| Μέγιστη απόλυτη διαφορά | PhysicsTM                 | SurrogateEM               |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $E_{\text{surf}}$       | $1.41914 \times 10^{-15}$ | $5.11788 \times 10^{-16}$ |
| $H_{\text{surf}}$       | $1.18799 \times 10^{-15}$ | $4.00296 \times 10^{-16}$ |

**Πίνακας 4.3:** Έλεγχος  $2\pi$ -περιοδικότητας.

Το δεύτερο βήμα επικύρωσης διασφαλίζει ότι ο forward solver σέβεται περιστροφική συμμετρία. Αν η πηγή περιστραφεί κατά γωνία  $\alpha$ , τότε τα επιφανειακά πεδία πρέπει να μετασχηματιστούν ως:

$$E_{\text{surf}}(\theta) = E_{\text{surf}}(\theta - \alpha), \quad H_{\text{surf}}(\theta) = H_{\text{surf}}(\theta - \alpha).$$

Αυτό προκύπτει από τη δομή του τελεστή διέγερσης:

$$G_n = I_0 e^{-in\phi_s},$$

και από την ανάπτυξη των πεδίων σε σειρά Fourier. Μια περιστροφή της πηγής κατά  $\alpha$  αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό κάθε συνιστώσας Fourier με  $e^{-in\alpha}$ .

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 4.4:

| Μέγιστη απόλυτη διαφορά | PhysicsTM                 | SurrogateEM                |
|-------------------------|---------------------------|----------------------------|
| $E_{\text{surf}}$       | $9.42464 \times 10^{-16}$ | $8.078557 \times 10^{-3}$  |
| $H_{\text{surf}}$       | $1.50053 \times 10^{-15}$ | $1.2844905 \times 10^{-2}$ |

**Πίνακας 4.4: Έλεγχος περιστροφικής συμμετρίας.**

Για οποιαδήποτε φυσικά ορθή λύση TM, τα επιφανειακά πεδία πρέπει να ικανοποιούν:

$$H_{\text{surf}}(\theta) = \frac{1}{\omega\mu_0} \left. \frac{\partial E}{\partial \rho} \right|_{\rho=R}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E(\rho, \theta) = A \sum_{n=-N}^N \alpha_n(\rho_s) H_n^{(1)}(k_0\rho) e^{in(\theta-\phi_s)},$$

η ακτινική παράγωγος στο σύνορο  $\rho = R$  είναι:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = A \sum_{n=-N}^N \alpha_n(\rho_s) H_n^{(1)'}(k_0R) k_0 e^{in(\theta-\phi_s)}.$$

Επομένως, η συνοριακή συνθήκη απαιτεί:

$$H_{\text{surf}}(\theta) = \frac{1}{\omega\mu_0} A \sum_{n=-N}^N \alpha_n(\rho_s) H_n^{(1)'}(k_0R) k_0 e^{in(\theta-\phi_s)}.$$

Συγκρίνουμε το  $H_{\text{surf}}$  από το forward model με την ακτινική παράγωγο της ανακατασκευασμένης σειράς Fourier. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5:

| Μέγιστη απόλυτη διαφορά | PhysicsTM | SurrogateEM                |
|-------------------------|-----------|----------------------------|
| $E_{\text{surf}}$       | 0         | $6.4214336 \times 10^{-3}$ |
| $H_{\text{surf}}$       | 0         | $9.3768064 \times 10^{-3}$ |

**Πίνακας 4.5: Έλεγχος συμβατότητας με τις εξισώσεις Maxwell.**

Κατόπιν υπολογίζουμε το σχετικό σφάλμα στο επίπεδο  $(\rho, \theta)$  για:

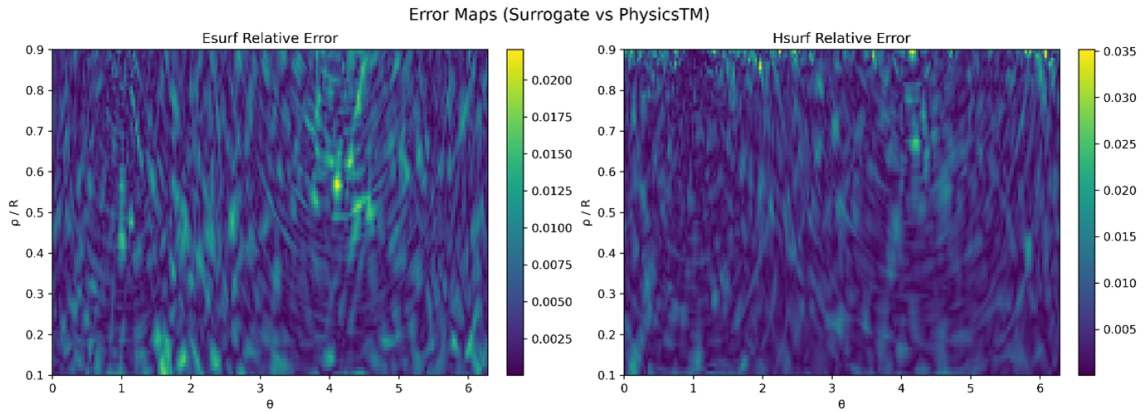
$$\rho \in [0.1R, 0.9R], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Για κάθε σημείο:

$$\text{ERR}_E(\rho, \theta) = \frac{|E_{\text{phys}} - E_{\text{sur}}|}{|E_{\text{phys}}| + 10^{-12}},$$

$$\text{ERR}_H(\rho, \theta) = \frac{|H_{\text{phys}} - H_{\text{surr}}|}{|H_{\text{phys}}| + 10^{-12}}.$$

Τα heatmaps (Σχήμα 4.2) αποκαλύπτουν τις περιοχές υψηλής και χαμηλής ακρίβειας, τη μεταβολή του σφάλματος ως προς την ακτίνα και τη γωνία, και επιβεβαιώνουν ότι τα surrogates εμφανίζουν ομαλές και φυσικά συνεπείς αποκλίσεις από τις λύσεις αναφοράς.



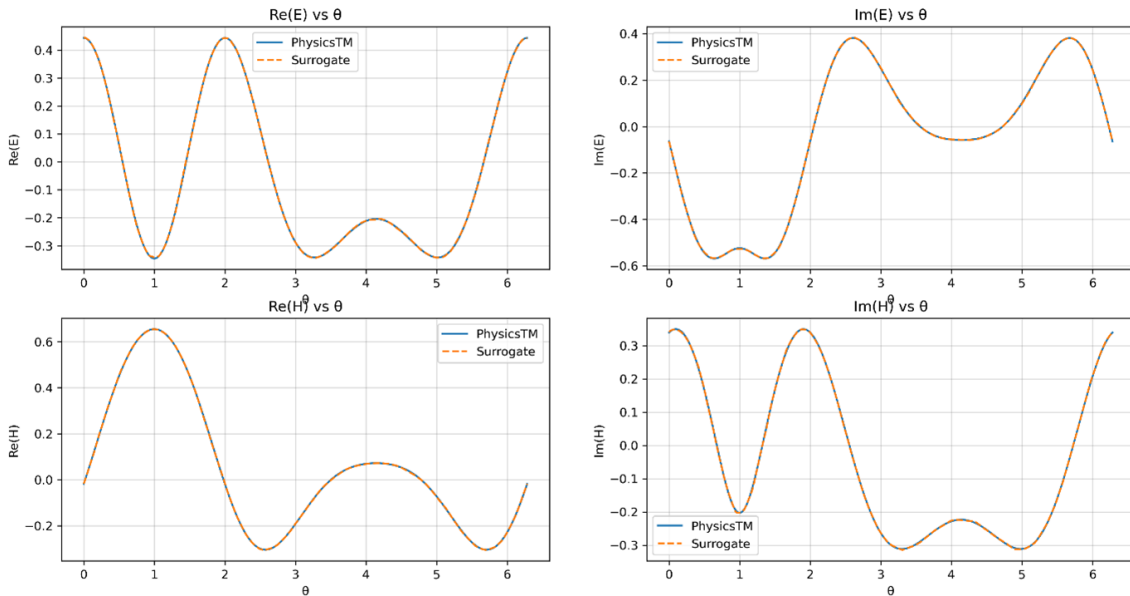
**Σχήμα 4.2: Χρωματικοί χάρτες σχετικού σφάλματος.**

Για να αποκτήσουμε μια λεπτομερή, σημειακή σύγκριση μεταξύ του αναλυτικού μοντέλου PhysicsTM και του εκπαιδευμένου μοντέλου SurrogateEM, εξετάζουμε τα επιφανειακά πεδία κατά μήκος μιας πυκνής γωνιακής σάρωσης:

$$\theta \in [0, 2\pi), \quad N_\theta = 1024.$$

Για μια σταθερή θέση πηγής  $(\rho_s, \phi_s)$  υπολογίζουμε:

- τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του  $E_{\text{surf}}(\theta)$ ,
- τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του  $H_{\text{surf}}(\theta)$ ,
- τα σημειακά σφάλματα  $|\Delta E(\theta)|$  και  $|\Delta H(\theta)|$ ,
- καθώς και τα φάσματα Fourier και των δύο πεδίων.



Σχήμα 4.3: Σύγκριση αναλυτικής και surrogate αναπαράστασης.

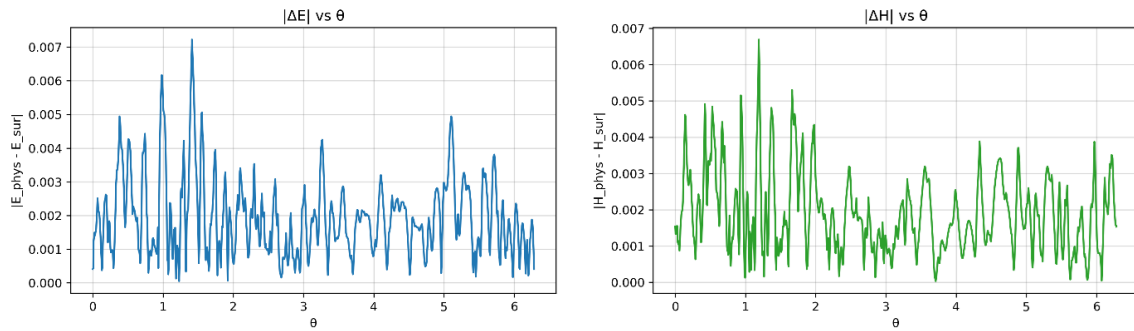
Συγκρίνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των επιφανειακών πεδίων βλέπουμε (Σχήμα 4.3) αν το surrogate αποτυπώνει σωστά τη δομή των ταλαντώσεων, αν η εξέλιξη της φάσης είναι ακριβής και αν τα πραγματικά/φανταστικά μέρη παραμένουν ομαλά και φυσικά συνεπή.

Υπολογίζουμε τα σημειακά σφάλματα:

$$|\Delta E(\theta)| = |E_{\text{phys}} - E_{\text{sur}}|, \quad |\Delta H(\theta)| = |H_{\text{phys}} - H_{\text{sur}}|.$$

Αυτές οι καμπύλες δείχνουν (Σχήμα 4.4):

- πού το surrogate αποκλίνει περισσότερο,
- αν το σφάλμα είναι εντοπισμένο ή ομοιόμορφα κατανομημένο,
- και αν το surrogate διατηρεί τη σωστή γωνιακή περιοδικότητα.



Σχήμα 4.4: Σημειακά απόλυτα σφάλματα surrogate.

### Φασματική Σύγκριση (FFT ως προς $\theta$ )

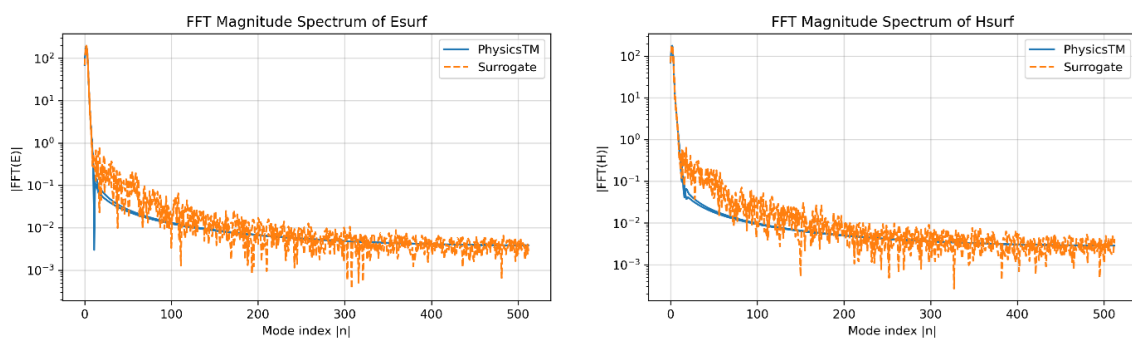
Χρησιμοποιώντας τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier:

$$F_E[n] = \mathcal{F}\{E_{\text{surf}}(\theta)\}, \quad F_H[n] = \mathcal{F}\{H_{\text{surf}}(\theta)\},$$

συγκρίνουμε τα φάσματα μέτρου των δύο μοντέλων.

Αυτό το τεστ αποκαλύπτει (Σχήμα 4.5):

- αν το surrogate αναπαράγει το σωστό φασματικό περιεχόμενο,
- αν οι υψηλότερης τάξης όροι Fourier αποδίδονται ή αποσβένονται,
- και πόσο καλά το surrogate διατηρεί τις φυσικές γωνιακές αρμονικές του TM πεδίου.



Σχήμα 4.5: Φασματική σύγκριση surrogate.

Στατιστική αξιολόγηση σφάλματος σε τυχαία σημεία του τρισδιάστατου χώρου εισόδου  $(\rho_s, \phi_s, \theta)$ , ώστε να εκτιμηθεί η συνολική συμπεριφορά του surrogate (Interpolation error test, βλ. Πίνακα 4.6). Αξιολογούμε τα μοντέλα σε ένα μεγάλο σύνολο τυχαία επιλεγμένων σημείων:

$$\rho_s \sim U(0.1R, 0.9R), \quad \phi_s \sim U(0, 2\pi), \quad \theta \sim U(0, 2\pi).$$

Σε κάθε σημείο υπολογίζουμε:

$$\Delta E = E_{\text{phys}} - E_{\text{sur}}, \quad \Delta H = H_{\text{phys}} - H_{\text{sur}},$$

καθώς και τα σχετικά σφάλματα:

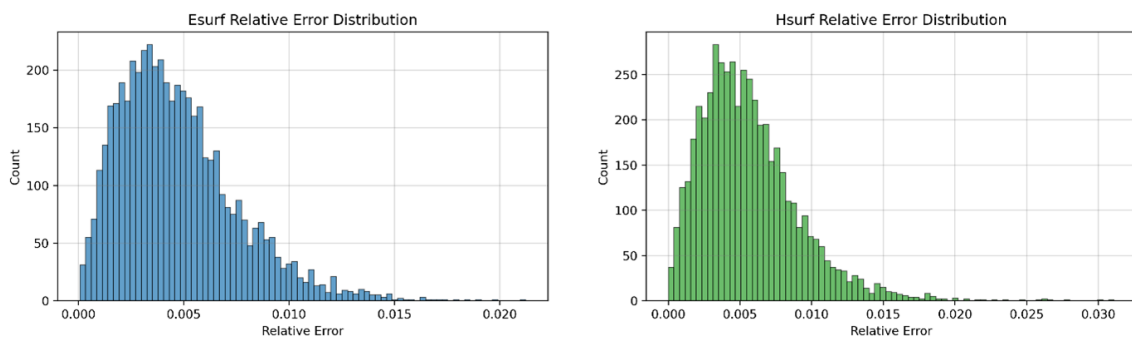
$$\text{ERR}_E = \frac{|\Delta E|}{|E_{\text{phys}}| + 10^{-12}}, \quad \text{ERR}_H = \frac{|\Delta H|}{|H_{\text{phys}}| + 10^{-12}}.$$

Στη συνέχεια οπτικοποιούμε τις κατανομές του σφάλματος χρησιμοποιώντας ιστογράμματα (Σχήμα 4.6) και scatter plots (Σχήμα 4.7). Αυτό το τεστ αποκαλύπτει:

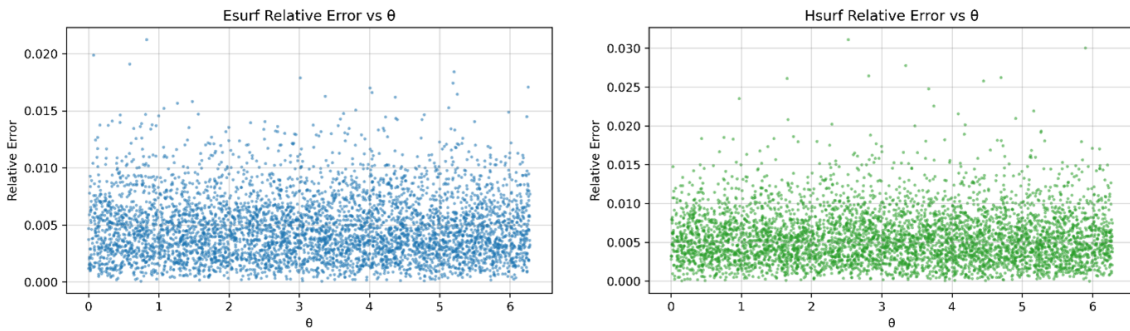
- τη συνολική ακρίβεια του surrogate σε ολόκληρο το πεδίο,
- αν η κατανομή του σφάλματος είναι ομαλή,
- και αν υπάρχουν γωνιακές περιοχές που εμφανίζουν συστηματικά μεγαλύτερη απόκλιση.

| Στατιστικό μέτρο       | Ηλεκτρικό πεδίο      | Μαγνητικό πεδίο       |
|------------------------|----------------------|-----------------------|
| Μέσο απόλυτο σφάλμα    | 0.001888361943339184 | 0.0020113233130675434 |
| Μέγιστο απόλυτο σφάλμα | 0.009210796834833668 | 0.011556764514777813  |
| Μέσο σχετικό σφάλμα    | 0.00471044737036602  | 0.0056198155519035    |
| Μέγιστο σχετικό σφάλμα | 0.0212273749364237   | 0.031108763445863347  |

**Πίνακας 4.6: Στατιστική αξιολόγηση σφάλματος των surrogate models.**



**Σχήμα 4.6: Κατανομή σχετικού σφάλματος.**



Σχήμα 4.7: Scatter plot σχετικού σφάλματος.

Για να ποσοτικοποιήσουμε το υπολογιστικό πλεονέκτημα του surrogate μοντέλου, συγκρίνουμε τον χρόνο απόκρισης του αναλυτικού solver PhysicsTM με αυτόν του εκπαιδευμένου δικτύου SurrogateEM.

Παράγουμε  $N = 10^4$  τυχαία σημεία δοκιμής:

$$\rho_s \sim U(0.1R, 0.9R), \quad \phi_s \sim U(0, 2\pi), \quad \theta \sim U(0, 2\pi).$$

Μετράμε τον συνολικό χρόνο που απαιτείται για τον υπολογισμό των πεδίων σε όλα τα σημεία. Το PhysicsTM εκτελεί βαθμωτές αξιολογήσεις και επομένως κλιμακώνεται γραμμικά με το  $N$ . Το SurrogateEM αξιολογεί όλα τα σημεία σε ένα ενιαίο vectorized πέρασμα.

Ο παράγοντας επιτάχυνσης που προκύπτει:

$$\text{Speedup} = \frac{T_{\text{PhysicsTM}}}{T_{\text{Surrogate}}},$$

αναδεικνύει το πρακτικό όφελος (Πίνακας 4.7) του surrogate για μεγάλης κλίμακας προσομοιώσεις, αντίστροφα προβλήματα και εφαρμογές πραγματικού χρόνου.

| Μέτρο              | Χρόνος (s) | Speedup |
|--------------------|------------|---------|
| PhysicsTM          | 4.4497     | –       |
| Surrogate          | 0.0401     | –       |
| Speedup (Phys/Sur) | –          | 111.0×  |

Πίνακας 4.7: Χρονική σύγκριση αναλυτικής και surrogate λύσης.

Συνολικά, το notebook τεκμηριώνει ότι το SurrogateEM αναπαράγει με υψηλή ακρίβεια τη δομή των πεδίων που παράγει το PhysicsTM, ενώ παράλληλα προσφέρει σημαντικό υπολογιστικό όφελος. Η ύπαρξη του ενιαίου API, μέσω του SurrogateWrapper, επιτρέπει το ίδιο ακριβώς codebase να χρησιμοποιείται τόσο για την αναλυτική όσο και για την προσεγγιστική λύση, γεγονός που απλοποιεί την ενσωμάτωση των surrogates σε μεγαλύτερα pipelines και σε αντίστροφα προβλήματα.

## 5. Πρόβλημα Ταξινόμησης Πηγών σε Κυλινδρικό Σκεδαστή

Η εκτίμηση του αριθμού των εσωτερικών πηγών σε έναν κυλινδρικό σκεδαστή αποτελεί ένα θεμελιώδες πρόβλημα στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό. Η πληροφορία που διαθέτουμε προέρχεται αποκλειστικά από επιφανειακές μετρήσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, καταγεγραμμένες σε ένα σύνολο γωνιακών θέσεων γύρω από τον κύλινδρο. Το ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε πόσες γραμμικές πηγές βρίσκονται στο εσωτερικό του σκεδαστή, χωρίς να γνωρίζουμε τις θέσεις ή τις εντάσεις τους.

Το πρόβλημα αυτό είναι εγγενώς δύσκολο διότι:

- οι πηγές μπορούν να βρίσκονται σε οποιαδήποτε θέση εντός του δίσκου,
- τα παραγόμενα πεδία αλληλεπιδρούν μέσω γραμμικής υπέρθεσης,
- διαφορετικές διαμορφώσεις πηγών μπορεί να παράγουν παρόμοια επιφανειακά ίχνη,
- και η φασική πληροφορία είναι κρίσιμη για τη διάκριση μεταξύ κοντινών ή αλληλεπικαλυπτόμενων πηγών.

Η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος βασίζεται στο TM scattering σε κυλινδρική γεωμετρία. Για κάθε πηγή με πολικές συντεταγμένες  $(\rho_s, \phi_s)$ , όπως είδαμε, τα επιφανειακά πεδία γράφονται ως:

$$E_{\text{surf}}(\theta) = A \sum_{n=-N}^N a_n(\rho_s) H_n^{(1)}(k_0 R) e^{in(\theta-\phi_s)},$$

και αντιστοίχως για το  $H_{\text{surf}}$ .

Η εξάρτηση από τη γωνία  $\theta$  είναι πλούσια σε αρμονικό περιεχόμενο, και η πληροφορία για τον αριθμό των πηγών κωδικοποιείται στη δομή των Fourier modes. Η γραμμική υπέρθεση πολλών πηγών:

$$E_{\text{total}}(\theta) = \sum_{j=1}^S E_{\text{surf}}^{(j)}(\theta),$$

παράγει χαρακτηριστικά μοτίβα που εξαρτώνται από το πλήθος  $S$ .

Το πρόβλημα ταξινόμησης συνίσταται στο να μάθουμε έναν χάρτη:

$$f : \mathbb{R}^{4 \times N_\theta} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

όπου τα τέσσερα κανάλια αντιστοιχούν στα

$$\operatorname{Re}(E_{\text{surf}}), \quad \operatorname{Im}(E_{\text{surf}}), \quad \operatorname{Re}(H_{\text{surf}}), \quad \operatorname{Im}(H_{\text{surf}}),$$

και  $N_\theta = 30$  είναι ο αριθμός των γωνιακών δειγμάτων.

## 5.1 Το πρόβλημα είναι κατάλληλο για Convolutional Neural Networks

Ένα Convolutional Neural Network (CNN) είναι ένα νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιεί συνελίξεις (convolutions) για να εξάγει με αυτόματο τρόπο χαρακτηριστικά από τα δεδομένα. Αντί να μαθαίνει πλήρως συνδεδεμένα βάρη για κάθε είσοδο, χρησιμοποιεί μικρά φίλτρα (kernels) που σαρώνουν την είσοδο και ανιχνεύουν τοπικά μοτίβα. Τα φίλτρα λειτουργούν σαν ένα παράθυρο που κινείται πάνω στα δεδομένα και υπολογίζει τοπικούς συνδυασμούς. Τα CNNs μαθαίνουν μόνο τους μοτίβα, αλλαγές, κορυφές, συμμετρίες κλπ. (Fukushima, 1980; LeCun κ.ά., 1998)

Εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στα τέλη της δεκαετίας του '80 και αρχές '90, όπου χρησιμοποιήθηκαν για αναγνώριση χειρόγραφων ψηφίων (MNIST) σε επιταγές τραπεζών (LeCun κ.ά., 1998). Η πραγματική έκρηξη ήρθε το 2012 με το μοντέλο AlexNet (Krizhevsky κ.ά., 2012). Στον διαγωνισμό ImageNet μείωσε το error rate κατά 10 ποσοστιαίες μονάδες, ξεπερνώντας δραματικά όλες τις κλασικές μεθόδους computer vision. Από εκείνη τη στιγμή, τα CNNs έγιναν το standard για εφαρμογές οπτικής αναγνώρισης προτύπων. Έγιναν διάσημα διότι τα φίλτρα εφαρμόζονται σε όλη την εικονοσειρά, μειώνοντας δραματικά τον αριθμό παραμέτρων σε σχέση με τα MLPs (Multilayer Perceptrons). Είναι ιδανικά για εικόνες, video, σήματα και χρονοσειρές (Goodfellow κ.ά., 2016b).

Τα CNNs παρουσιάζουν ιεραρχική μάθηση χαρακτηριστικών: τα πρώτα επίπεδα (layers) μαθαίνουν απλά μοτίβα, ενώ τα βαθύτερα μαθαίνουν πιο σύνθετες δομές (Zeiler & Fergus, 2014). Επειδή τα φίλτρα είναι μικρά και επαναχρησιμοποιούμενα, τα CNNs γενικεύουν πολύ καλύτερα από τα πλήρως συνδεδεμένα δίκτυα (fully connected networks).

Στο δικό μας πρόβλημα (30 γωνίες  $\times$  4 κανάλια) η είσοδος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μικρό μονοδιάστατο σήμα, και τα CNNs είναι ιδανικά για τέτοια δεδομένα, διότι:

- μαθαίνουν τοπικές μεταβολές στα πεδία,
- ανιχνεύουν patterns που σχετίζονται με τον αριθμό πηγών,
- είναι πολύ πιο αποδοτικά από ένα MLP,
- τα residual blocks (αναφέρονται παρακάτω) επιτρέπουν μεγάλο βάθος χωρίς αστάθεια.

Τα φίλτρα μαθαίνουν αυτόματα μοτίβα όπως αιχμές, αλλαγές φάσης, τοπικές κορυφές και χαρακτηριστικές υπογραφές του αριθμού πηγών. Σε αντίθεση με τα πλήρως συνδεδεμένα δίκτυα (MLPs), τα CNNs έχουν πολύ λιγότερες παραμέτρους, γενικεύουν καλύτερα και είναι πιο σταθερά σε θόρυβο.

## 5.2 Residual Networks (ResNets) και βαθιά αρχιτεκτονική

Η χρήση residual blocks επιτρέπει την εκπαίδευση βαθιών δικτύων (He κ.ά., 2016). Στην πράξη, το δίκτυο μαθαίνει μόνο τις διαφορές (residuals). Αντί να μάθει έναν πλήρη μετασχηματισμό  $F(x)$ , μαθαίνει την ποσότητα  $F(x) - x$ , δηλαδή μαθαίνει διορθώσεις πάνω στην είσοδο αντί για πλήρεις μετασχηματισμούς. Στην περίπτωση μας υπάρχουν λεπτές διαφορές που απαιτούν βαθύτερο δίκτυο. Τα residual blocks επιτρέπουν μεγαλύτερο βάθος αποφεύγοντας την υπερπροσαρμογή (overfitting) και την αστάθεια.

Στο δικό μας πρόβλημα, αυτές οι «λεπτές διαφορές» είναι ακριβώς οι μικρές μεταβολές στη φάση και στο πλάτος των πεδίων που προκύπτουν από την υπέρθεση πολλών πηγών.

- Βασίζεται στην ιδέα των ResNets.
- Μαθαίνουν διορθώσεις πάνω στην είσοδο αντί να μάθουν έναν εντελώς νέο μετασχηματισμό. Αυτό επιτυγχάνεται με skip connection.
- Χωρίς skip connection τα βαθιά δίκτυα δυσκολεύονται να μάθουν: τα gradients σταδιακά σβήνουν (gradient vanishing) και η εκπαίδευση γίνεται ασταθής.
- Με skip connection το δίκτυο μπορεί να μάθει identity mapping.
- Το Gradient Descent λειτουργεί ευκολότερα στο backpropagation.

## 5.3 Δομή των δεδομένων και φυσική σημασία

Κάθε δείγμα αποτελείται από 30 γωνίες  $\theta$  και 4 κανάλια (Re/Im του  $E$  και  $H$ ), επομένως έχουμε συνολικά 120 αριθμητικά χαρακτηριστικά. Η πληροφορία είναι φασική, όχι μόνο σε πλάτος. Αυτό είναι κρίσιμο διότι η φάση μεταβάλλεται με τρόπο που εξαρτάται από τον αριθμό των πηγών, και τα CNNs μπορούν να μάθουν αυτές τις τοπικές μεταβολές.

Η παραγωγή των δεδομένων έγινε με surrogate forward model, το οποίο επιτρέπει γρήγορη και ακριβή προσομοίωση των επιφανειακών πεδίων. Για κάθε αριθμό πηγών  $S = 1, 2, \dots, 5$

δημιουργήθηκαν χιλιάδες τυχαίες διαμορφώσεις με ομοιόμορφη δειγματοληψία στον δίσκο.

## 5.4 Παραγωγή Δεδομένων (Data Generation)

Η επιτυχία οποιουδήποτε μοντέλου ταξινόμησης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα, την ποικιλία και την αντιπροσωπευτικότητα του συνόλου δεδομένων. Στο παρόν πρόβλημα, όπου στόχος είναι η αναγνώριση του αριθμού των εσωτερικών γραμμικών πηγών σε κυλινδρικό σκεδαστή, η παραγωγή μεγάλου πλήθους δεδομένων δεν μπορεί να βασιστεί σε πραγματικές μετρήσεις. Απαιτείται ένα συνθετικά παραγόμενο dataset μεγάλης κλίμακας, το οποίο να καλύπτει επαρκώς τον χώρο των πιθανών διαμορφώσεων πηγών.

Η παραγωγή των δεδομένων βασίζεται σε τρία θεμελιώδη στοιχεία:

- ένα φυσικό forward model (PhysicsTM), το οποίο περιγράφει με ακρίβεια τα επιφανειακά πεδία,
- ένα surrogate μοντέλο (SurrogateEM), το οποίο προσεγγίζει το PhysicsTM με εξαιρετική ταχύτητα και υψηλή πιστότητα,
- μια διαδικασία δειγματοληψίας πηγών εντός του κυλινδρικού δίσκου, με στοχαστική επιλογή θέσεων και εντάσεων.

Η χρήση του surrogate είναι κρίσιμη διότι επιτρέπει την παραγωγή δεκάδων χιλιάδων δειγμάτων σε λίγα λεπτά, κάτι που θα ήταν απαγορευτικά αργό με το ακριβές PhysicsTM.

### Δειγματοληψία Πηγών στον Δίσκο

Κάθε πηγή περιγράφεται από τις πολικές συντεταγμένες  $(\rho_s, \phi_s)$  και την έντασή της  $I_s$ , η οποία θεωρείται ίση με 1 (ή με μικρή στοχαστική διακύμανση, αν απαιτείται), με τον εξής περιορισμό:

$$0.05R \leq \rho_s \leq 0.95R, \quad 0 \leq \phi_s < 2\pi.$$

Η δειγματοληψία γίνεται με ομοιόμορφη κατανομή στον δίσκο:

$$\rho_s = R\sqrt{u}, \quad \phi_s = 2\pi v,$$

όπου  $u, v \sim U(0, 1)$ . Η χρήση της ρίζας εξασφαλίζει ομοιόμορφη πυκνότητα στον δίσκο, αποφεύγοντας τη συσσώρευση κοντά στο κέντρο.

Για κάθε αριθμό πηγών  $S = 1, 2, \dots, 5$  δημιουργούμε ένα σύνολο από  $S$  ανεξάρτητες πηγές:

$$A_s = \{(\rho_1, \phi_1), (\rho_2, \phi_2), \dots, (\rho_s, \phi_s)\}.$$

## Υπολογισμός Επιφανειακών Πεδίων

Για κάθε πηγή, το surrogate forward model παρέχει τα επιφανειακά πεδία:

$$E_{\text{surf}}^{(j)}(\theta), \quad H_{\text{surf}}^{(j)}(\theta), \quad j \in S,$$

σε 30 γωνιακές θέσεις:

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{30}, \quad k = 0, \dots, 29.$$

Τα συνολικά πεδία για  $S$  πηγές προκύπτουν από γραμμική υπέρθεση:

$$F_{\text{total}}(\theta_k) = \sum_{j=1}^S F_{\text{surf}}^{(j)}(\theta_k), \quad F \in \{E, H\}.$$

Αυτή η υπέρθεση είναι θεμελιώδης διότι μικρές διαφορές στη φάση και στο πλάτος των επιμέρους συνιστωσών δημιουργούν χαρακτηριστικά μοτίβα που σχετίζονται άμεσα με τον αριθμό των πηγών.

## Δομή των Χαρακτηριστικών (Feature Representation)

Για κάθε δείγμα, κατασκευάζουμε έναν τανυστή (tensor)

$$X = \begin{bmatrix} \Re(E(\theta_0)) & \Re(E(\theta_1)) & \dots & \Re(E(\theta_{29})) \\ \Im(E(\theta_0)) & \Im(E(\theta_1)) & \dots & \Im(E(\theta_{29})) \\ \Re(H(\theta_0)) & \Re(H(\theta_1)) & \dots & \Re(H(\theta_{29})) \\ \Im(H(\theta_0)) & \Im(H(\theta_1)) & \dots & \Im(H(\theta_{29})) \end{bmatrix}.$$

Αυτό το μονοδιάστατο πολυκαναλικό σήμα αποτελεί την είσοδο του CNN.

## Στοχευμένη Ενίσχυση Δύσκολων Κλάσεων (Oversampling)

Οι κλάσεις με περισσότερες πηγές (4 και 5) παρουσιάζουν μεγαλύτερη ποικιλία διαμορφώσεων και πιο περίπλοκη φασική δομή. Για να αποφύγουμε ανισορροπία στο dataset, εφαρμόζουμε στοχευμένο oversampling:

10 000 δείγματα για  $S = 1, 2, 3$ ,

20 000 δείγματα για  $S = 4, 5$ .

Συνολικά: 70 000 δείγματα. Αυτό εξασφαλίζει ότι το μοντέλο δεν θα υποεκπαιδευτεί στις πιο δύσκολες κλάσεις.

## Διαχωρισμός σε Train / Validation / Test

Το dataset χωρίζεται ως εξής:

70% training, 15% validation, 15% test,

με τυχαία ανάμειξη (shuffle) πριν τον διαχωρισμό.

Ο διαχωρισμός αυτός εξασφαλίζει:

- επαρκή ποικιλία για εκπαίδευση,
- αξιόπιστη παρακολούθηση overfitting μέσω validation,
- αντικειμενική αξιολόγηση στο test set.

## 5.5 Αρχιτεκτονική του Νευρωνικού Δικτύου

Η επιλογή της κατάλληλης αρχιτεκτονικής αποτελεί κρίσιμο βήμα για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος ταξινόμησης. Τα δεδομένα μας έχουν τη μορφή τετρακαναλικού μονοδιάστατου σήματος μήκους 30. Η γωνιακή μεταβλητή  $\theta$  λειτουργεί ως χωρικός άξονας, και οι τοπικές μεταβολές των πεδίων περιέχουν κρίσιμη πληροφορία για τον αριθμό των πηγών. Αυτή η δομή καθιστά τα 1D Convolutional Neural Networks ιδανικά για το πρόβλημα.

Ένα 1D CNN εφαρμόζει φίλτρα (kernels) που σαρώνουν το σήμα και εξάγουν τοπικά μοτίβα. Η βασική πράξη συνέλιξης είναι:

$$y_c[i] = \sum_{k=-m}^m w_c[k] x[i+k],$$

όπου  $x$  είναι το εισαγόμενο σήμα,  $w_c$  είναι το φίλτρο του καναλιού  $c$  και  $m$  το μισό μέγεθος του πυρήνα (kernel). Ο πυρήνας μοιάζει με ένα μικρό παράθυρο που σαρώνει την είσοδο και εξάγει χαρακτηριστικά ανιχνεύοντας μοτίβα, όπως αλλαγές στα πεδία, κορυφές και χαρακτηριστικές υπογραφές του αριθμού των πηγών. Στο δίκτυό μας έχουμε kernel size = 3, που σημαίνει ότι το φίλτρο κοιτάει κάθε φορά μια τριάδα γωνιών με τα χαρακτηριστικά (κανάλια) που κουβαλάει κάθε μία από αυτές.

Η αρχιτεκτονική του μοντέλου που εκπαιδεύσαμε χαρακτηρίζεται από ένα αρχικό Conv1d, το οποίο ακολουθείται από 4 residual blocks, καθένα από τα οποία περιέχει δύο Conv1d layers. Άρα συνολικά έχουμε:  $1 + 4 \times 2 = 9$  συνελκτικά επίπεδα. Το “1D” αναφέρεται στη διάσταση των δεδομένων. Στη δική μας περίπτωση οι μετρήσεις στα πεδία έχουν σειριακή μορφή, όπως τα σήματα, οι χρονοσειρές και οι ακολουθίες. Για εικόνες, χάρτες, πίνακες, heat maps

κλπ. χρησιμοποιούμε Conv2d, ενώ για video, 3D volumes και voxel grids τα μοντέλα είναι τρισδιάστατα.

Κάθε convolutional layer έχει πολλά φίλτρα. Κάθε φίλτρο μαθαίνει διαφορετικό μοτίβο. Στην περίπτωση μας, το Conv1d(4 → 64) παράγει 64 διαφορετικούς χάρτες χαρακτηριστικών (feature maps). Δηλαδή, πρακτικά το δίκτυό μας μαθαίνει 64 διαφορετικούς τρόπους να «διαβάζει» τα πεδία. Τα φίλτρα λειτουργούν ως ανιχνευτές μοτίβων.

Το τελικό διάνυσμα  $\mathbb{R}^{64}$  περνάει από ένα πλήρως συνδεδεμένο επίπεδο FC:  $64 \rightarrow 5$ , και η έξοδος τροφοδοτείται σε softmax:

$$p_s = \frac{e^{z_s}}{\sum_{k=1}^S e^{z_k}},$$

όπου  $p_s$  είναι η πιθανότητα ότι το δείγμα περιέχει  $S$  πηγές.

Μετά τα residual blocks, εφαρμόζεται Adaptive Average Pooling:

$$\text{AAP} : \mathbb{R}^{64 \times 30} \rightarrow \mathbb{R}^{64 \times 1}.$$

Αυτό συμπυκνώνει κάθε feature map σε μία τιμή, επιτρέποντας στο δίκτυο να μάθει καθολικά χαρακτηριστικά των πεδίων, ανεξάρτητα από το μήκος του σήματος.

Το dropout βοηθάει στη γενίκευση. Είναι μια τεχνική κανονικοποίησης (regularization) που «κλείνει» τυχαία ένα ποσοστό νευρώνων κατά την εκπαίδευση σε κάθε forward pass. Με αυτόν τον τρόπο:

- αποφεύγουμε το overfitting,
- το μοντέλο δεν απομνημονεύει το training set,
- δεν βασίζεται υπερβολικά σε συγκεκριμένους νευρώνες,
- δεν γίνεται εύθραυστο σε μικρές αλλαγές δεδομένων.

Έτσι, το δίκτυο αναγκάζεται να μάθει γενικότερα και σταθερότερα χαρακτηριστικά. Κατά το inference (test), όλοι οι νευρώνες είναι ενεργοί, καθώς οι τιμές έχουν ανακλιμακωθεί σωστά κατά την εκπαίδευση: όταν ένας νευρώνας «σβήνει», οι υπόλοιποι ενισχύονται αναλογικά.

Το dropout τοποθετείται μέσα στα residual blocks, διότι αυτά είναι ισχυρά και υπερπροσαρμόζονται εύκολα στο training set. Ποσοστό 10% είναι αρκετό για regularization και μικρό ώστε να μην διαταράξει το skip connection.

## 5.6 Διαδικασία Εκπαίδευσης

Η εκπαίδευση του μοντέλου πραγματοποιήθηκε με PyTorch, χρησιμοποιώντας το dataset των 70 000 δειγμάτων. Χρησιμοποιούμε cross-entropy loss:

$$L = - \sum_s y_s \log p_s,$$

όπου  $y_s$  είναι το one-hot label και  $p_s$  η πιθανότητα softmax.

Ο βελτιστοποιητής είναι Adam με learning rate  $\eta = 10^{-3}$ . Ο Adam προσαρμόζει αυτόματα τα βήματα ενημέρωσης των παραμέτρων, επιταχύνοντας τη σύγκλιση σε προβλήματα με πολύπλοκα τοπικά μοτίβα όπως τα δικά μας.

Η εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε για 100 epochs. Σε κάθε epoch:

- υπολογίζεται το training loss,
- υπολογίζεται η ακρίβεια (accuracy) στο validation set,
- αν το validation accuracy βελτιωθεί, τότε αποθηκεύεται το μοντέλο,
- αυτό λειτουργεί ως implicit early stopping και αποτρέπει το overfitting.

Χρησιμοποιήθηκε batch size = 64. Ο DataLoader αξιοποιεί pin\_memory όταν υπάρχει GPU, επιταχύνοντας τη μεταφορά δεδομένων.

Κάθε κανάλι κανονικοποιείται με StandardScaler:

$$x' = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Η κανονικοποίηση εφαρμόζεται στο training set για εκτίμηση των  $\mu, \sigma$ , και στο validation/test set χρησιμοποιούνται οι ίδιες τιμές. Αυτό εξασφαλίζει σταθερή εκπαίδευση και ομοιόμορφη κλίμακα στα κανάλια.

Το μοντέλο με τη μέγιστη validation accuracy αποθηκεύεται στο:

`./models/best_model_resnet_1_to_5.pt`

και χρησιμοποιείται για όλα τα πειράματα αξιολόγησης.

## 5.7 Αποτελέσματα Αξιολόγησης

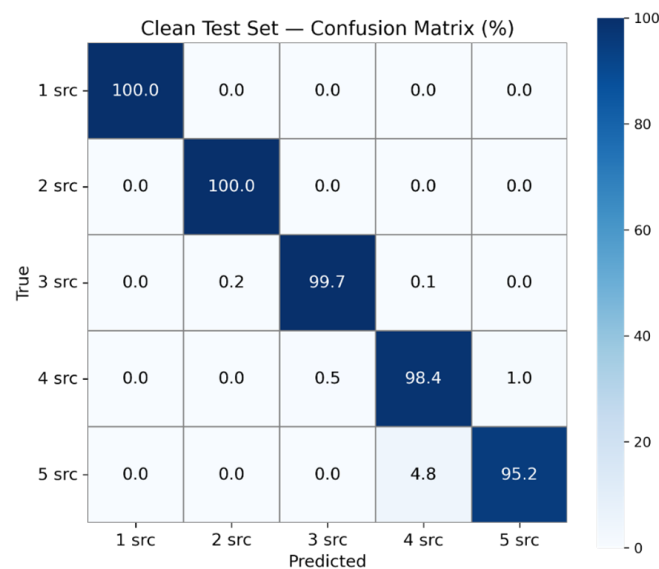
Όπως αποδείχθηκε, η επιλογή της συγκεκριμένης αρχιτεκτονικής ήταν η πλέον κατάλληλη. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας τα residual blocks έγινε εφικτή η εκπαίδευση ενός μοντέλου με μεγάλο βάθος και σχεδόν 100 000 παραμέτρους. Η μέση ακρίβεια (accuracy) ανήλθε σε 0.981429.

Το confusion matrix (raw counts, βλ. Πίνακα 5.1) στο test set είναι αποκαλυπτικό:

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1524 | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 0    | 1491 | 0    | 0    | 0    |
| 0    | 3    | 1475 | 1    | 0    |
| 0    | 0    | 16   | 2953 | 31   |
| 0    | 0    | 1    | 143  | 2886 |

Πίνακας 5.1: Confusion matrix (raw counts)

Ποιο παραστατικά (Σχήμα 5.1) σε ποσοστά επί τοις εκατό έχουμε:



Σχήμα 5.1: Confusion matrix (percentages)

Στατιστικά μέτρα (Πίνακας 5.2):

$$\text{precision} = \frac{TP}{TP + FP}$$

$$\text{recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

$$F_1 = \frac{2TP}{2TP + FP + FN}$$

$$\text{weighted avg} = \frac{\sum_{i=0}^4 \text{support}_i \cdot \text{metric}_i}{\sum_{i=0}^4 \text{support}_i}$$

όπου TP: True Positives, FP: False Positives και FN: False Negatives.

|              | precision | recall | F1-score | support |
|--------------|-----------|--------|----------|---------|
| 0            | 1.0000    | 1.0000 | 1.0000   | 1524    |
| 1            | 0.9980    | 1.0000 | 0.9990   | 1491    |
| 2            | 0.9886    | 0.9973 | 0.9929   | 1479    |
| 3            | 0.9535    | 0.9843 | 0.9687   | 3000    |
| 4            | 0.9893    | 0.9521 | 0.9703   | 3006    |
| accuracy     |           |        | 0.9814   | 10500   |
| macro avg    | 0.9859    | 0.9867 | 0.9862   | 10500   |
| weighted avg | 0.9818    | 0.9814 | 0.9814   | 10500   |

**Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα προβλήματος ταξινόμησης**

Η αξιολόγηση του ταξινομητή πραγματοποιήθηκε σε δύο στάδια:

- καθαρό test set (χωρίς θόρυβο),
- test set με προσθετικό Gaussian θόρυβο σε διαφορετικά επίπεδα.

Η πρώτη περίπτωση μετρά την ικανότητα του μοντέλου να διακρίνει τον αριθμό πηγών υπό ιδανικές συνθήκες. Η δεύτερη εξετάζει τη σταθερότητα και ανθεκτικότητα του μοντέλου σε διαταραχές των μετρήσεων, κάτι που είναι κρίσιμο για πραγματικές εφαρμογές.

Για την αξιολόγηση της ανθεκτικότητας σε θόρυβο, προστέθηκε Gaussian θόρυβος στα κανονικοποιημένα δεδομένα:

$$X_{\text{noisy}} = X + \sigma \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, 1),$$

όπου  $\sigma$  εκφράζει το ποσοστό θορύβου ως κλάσμα της συνολικής τυπικής απόκλισης του training set. Τα επίπεδα θορύβου που εξετάστηκαν ήταν:

$$\sigma \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.10\}.$$

Για κάθε επίπεδο θορύβου υπολογίστηκε:

- η συνολική ακρίβεια (accuracy),
- το confusion matrix,
- η συμπεριφορά των κλάσεων υπό διαταραχή.

### *Αποτελέσματα Noise Robustness*

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το μοντέλο διατηρεί εξαιρετικά υψηλή απόδοση έως και 5% θόρυβο. Η ακρίβεια μειώνεται σημαντικά μόνο στο 10%, όπου οι διαμορφώσεις των πεδίων αρχίζουν να επικαλύπτονται έντονα.

#### **Συνολική συμπεριφορά:**

- 0% θόρυβος: accuracy  $\approx 0.9814$  στο test set,
- 1–5% θόρυβος: η απόδοση παραμένει σταθερή, με μικρές μόνο μειώσεις,
- 10% θόρυβος: η ακρίβεια υποχωρεί αισθητά, αλλά το μοντέλο εξακολουθεί να διατηρεί υψηλή αναγνωρισιμότητα για τις κλάσεις με έντονη φασική υπογραφή.

#### **Συμπεριφορά ανά κλάση:**

- Οι κλάσεις 1–3 πηγών επηρεάζονται περισσότερο από τον θόρυβο, καθώς τα αντίστοιχα σήματα έχουν μικρότερη πολυπλοκότητα.
- Οι κλάσεις 4–5 πηγών εμφανίζουν αξιοσημείωτη ανθεκτικότητα, επειδή η υπέρθεση πολλών πηγών δημιουργεί πλουσιότερη φασική δομή.

Αυτό είναι ένα ενδιαφέρον και μη προφανές αποτέλεσμα: οι πιο “δύσκολες” κλάσεις (4 και 5 πηγές) είναι ταυτόχρονα και οι πιο σταθερές σε θόρυβο.

### **Ερμηνεία των Αποτελεσμάτων**

Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης αποκαλύπτουν σημαντικές ιδιότητες τόσο του φυσικού προβλήματος όσο και της αρχιτεκτονικής του μοντέλου.

**(α) Η φασική πληροφορία είναι εξαιρετικά διακριτική.** Το γεγονός ότι το μοντέλο επιτυγχάνει  $accuracy > 0.98$  σε καθαρά δεδομένα δείχνει ότι η φάση των πεδίων, η τοπική δομή των αρμονικών και οι μικρές μεταβολές στη γωνιακή εξάρτηση περιέχουν επαρκή πληροφορία για να διακριθεί ο αριθμός των πηγών. Αυτό επιβεβαιώνει ότι η επιλογή των τεσσάρων καναλιών είναι θεμελιώδης.

**(β) Η αρχιτεκτονική ResNet-style CNN είναι κατάλληλη για το πρόβλημα.** Τα residual blocks επιτρέπουν στο δίκτυο να μάθει λεπτές διαφορές στη φασική δομή. Η χρήση 9 συνελκτικών επιπέδων επιτρέπει στο μοντέλο να ανιχνεύει τοπικά μοτίβα, να συνδυάζει πληροφορία σε μεγαλύτερη κλίμακα και να εξάγει καθολικά χαρακτηριστικά μέσω adaptive pooling. Η υψηλή απόδοση σε θόρυβο δείχνει ότι το δίκτυο έχει μάθει σταθερά χαρακτηριστικά.

**(γ) Η συμπεριφορά των κλάσεων εξηγείται από τη φυσική του προβλήματος.** Οι κλάσεις με πολλές πηγές (4–5) έχουν πιο πλούσιο φασματικό περιεχόμενο, το οποίο παραμένει διακριτό ακόμη και υπό θόρυβο. Αντίθετα, οι κλάσεις με λίγες πηγές έχουν πιο απλές δομές που αλλοιώνονται ευκολότερα.

**(δ) Το confusion matrix αποκαλύπτει τις κύριες πηγές σφάλματος.** Τα περισσότερα σφάλματα εμφανίζονται μεταξύ 3 και 4 πηγών και μεταξύ 4 και 5 πηγών. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς οι διαφορές μεταξύ αυτών των κλάσεων είναι λεπτές και εξαρτώνται από σχετικές φάσεις, αποστάσεις και αλληλεπίδραση αρμονικών.

**(ε) Η συνολική εικόνα.** Το μοντέλο:

- μαθαίνει αποτελεσματικά τη φασική δομή των πεδίων,
- γενικεύει καλά σε νέες διαμορφώσεις,
- είναι ανθεκτικό σε θόρυβο,
- και διατηρεί υψηλή απόδοση ακόμη και σε δύσκολες κλάσεις.

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η προσέγγιση CNN + φασική πληροφορία είναι κατάλληλη για το πρόβλημα ταξινόμησης πηγών.

## 6. Regression Problem I — Εκτίμηση Θέσης και Έντασης Μίας Πηγής

Η πρώτη και θεμελιώδης μορφή του αντιστρόφου προβλήματος αφορά την εκτίμηση των παραμέτρων μίας και μόνο εσωτερικής γραμμικής πηγής εντός κυλινδρικού σκεδαστή. Στόχος είναι να ανακατασκευαστούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_s, y_s)$  και η ένταση  $I_s$  της πηγής, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις επιφανειακές μετρήσεις των πεδίων  $E_{\text{surf}}$  και  $H_{\text{surf}}$  σε 30 γωνιακές θέσεις γύρω από τον κύλινδρο.

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί το «βασικό κύτταρο» όλων των πιο σύνθετων αντίστροφων προβλημάτων που ακολουθούν (πολλαπλές πηγές, localization + counting, multitask inverse models). Η επιτυχής επίλυσή του αποδεικνύει ότι η φασική πληροφορία των πεδίων περιέχει επαρκή δομή ώστε να ανακτηθούν οι φυσικές παράμετροι της πηγής.

### 6.1 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Μία γραμμική πηγή στη θέση  $(x_s, y_s)$  ή ισοδύναμα  $(\rho_s, \phi_s)$  παράγει τα επιφανειακά πεδία  $E_{\text{surf}}(\theta)$  και  $H_{\text{surf}}(\theta)$ , τα οποία μπορούν να αναλυθούν σε κυλινδρικές αρμονικές. Η εξάρτηση από τη γωνία  $\theta$  περιέχει πλούσια φασική πληροφορία, και η θέση της πηγής επηρεάζει:

- τη σχετική φάση των αρμονικών,
- το πλάτος των συνιστωσών,
- τη συμμετρία ή ασυμμετρία του σήματος,
- την ταχύτητα μεταβολής των πεδίων ως προς τη γωνία.

Το αντίστροφο πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$f : \mathbb{R}^{4 \times 30} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

όπου τα 4 κανάλια αντιστοιχούν στα πραγματικά και φανταστικά μέρη των πεδίων, τα 30 δείγματα αντιστοιχούν στις γωνίες  $\theta_k$  παρατήρησης, και η έξοδος είναι  $(x_s, y_s, I_s)$ . Η ένταση  $I_s$  θεωρείται ίση με 1 στο dataset, αλλά το δίκτυο μαθαίνει να την εκτιμά ώστε να μπορεί να γενικεύσει σε μελλοντικές επεκτάσεις.

## 6.2 Παραγωγή συνθετικού δείγματος (dataset)

Η παραγωγή των δεδομένων έγινε με το surrogate forward model, το οποίο προσεγγίζει το PhysicsTM με εξαιρετική ακρίβεια και επιτρέπει τη δημιουργία μεγάλων συνόλων δεδομένων. Η δειγματοληψία των πηγών έγινε ομοιόμορφα στον δίσκο:

$$\rho_s = R\sqrt{u}, \quad \phi_s = 2\pi v, \quad u, v \sim U(0, 1),$$

με περιορισμό  $0.05R \leq \rho_s \leq 0.95R$  ώστε να αποφευχθούν παθολογικές περιπτώσεις κοντά στο κέντρο ή στην περιφέρεια.

Για κάθε πηγή υπολογίζονται τα  $E(\theta_k)$ ,  $H(\theta_k)$ ,  $k = 0, \dots, 29$ , και αποθηκεύονται τα πραγματικά και φανταστικά τους μέρη. Πριν την παραγωγή του dataset υπολογίζονται τα ολικά μέγιστα:

$$y_{\max,E} = \max |E|, \quad y_{\max,H} = \max |H|,$$

σε όλο το σύνολο των 20 000 πηγών. Στη συνέχεια, όλα τα πεδία κανονικοποιούνται ως:

$$E' = \frac{E}{y_{\max,E}}, \quad H' = \frac{H}{y_{\max,H}}.$$

Αυτό εξασφαλίζει σταθερή κλίμακα και αποτρέπει αριθμητικές αστάθειες.

Στην τελική τους μορφή, τα δεδομένα αποτελούνται από δείγματα 120 χαρακτηριστικών (4 κανάλια  $\times$  30 γωνίες) και 3 στόχων ( $x_s, y_s, I_s$ ). Το τελικό dataset περιέχει 20 000 δείγματα για εκπαίδευση και αξιολόγηση.

## 6.3 Αρχιτεκτονική του μοντέλου και εκπαίδευση

Για το πρόβλημα μίας πηγής επιλέχθηκε ένα Multitask Fully Connected Network με shared encoder και τρεις εξόδους (Caruana, 1997). Ο encoder αποτελείται από τρία διαδοχικά fully connected layers των 256 νευρώνων:

$$h = \varphi(W_3 \varphi(W_2 \varphi(W_1 X))),$$

όπου  $\varphi = \text{ReLU}$  και μαθαίνει μια κοινή αναπαράσταση  $h \in \mathbb{R}^{256}$  που περιέχει:

- τη γεωμετρία της πηγής,
- τη φασική δομή των πεδίων,

- την πληροφορία έντασης.

Από την κοινή αναπαράσταση παράγονται η κεφαλή εκτίμησης θέσης (localization head):

$$(x_s, y_s) = W_{xy} h + b_{xy},$$

και η κεφαλή εκτίμησης έντασης (strength head):

$$I_s = W_I h + b_I.$$

**Learnable Uncertainty Weights.** Το μοντέλο μαθαίνει τρεις log-variances  $s_{xy}, s_I, s_f$  που ρυθμίζουν αυτόματα τη σχετική βαρύτητα των losses, σύμφωνα με τη μεθοδολογία των Kendall et al. (Kendall κ.ά., 2018). Αυτό επιτρέπει στο δίκτυο να ισορροπεί:

- localization loss,
- intensity loss,
- field-consistency loss.

### Localization loss

$$L_{xy} = \|(x_{\text{pred}}, y_{\text{pred}}) - (x_s, y_s)\|^2.$$

### Intensity loss

$$L_I = (I_{\text{pred}} - I_s)^2.$$

### Field-consistency loss

$$L_f = \|E'_{\text{pred}} - E'_{\text{true}}\|^2 + \|H'_{\text{pred}} - H'_{\text{true}}\|^2.$$

Το field-consistency loss είναι το σημαντικότερο μέρος της συνάρτησης κόστους. Το δίκτυο δεν μαθαίνει απλώς να προβλέπει  $(x, y, I)$ , αλλά και τις παραμέτρους που αναπαράγουν τα σωστά πεδία. Για κάθε πρόβλεψη  $(x_{\text{pred}}, y_{\text{pred}}, I_{\text{pred}})$ :

1. μετατρέπουμε σε πολικές συντεταγμένες,
2. καλούμε το surrogate forward model,
3. παράγουμε predicted fields,

4. τα συγκρίνουμε με τα πραγματικά normalized fields.

Αυτό επιβάλλει φυσική συνέπεια (physics-informed learning) πέρα από τη γεωμετρική.

**Διαδικασία εκπαίδευσης.** Κατά την εκπαίδευση χρησιμοποιήθηκαν:

- 200 epochs,
- batch size = 256,
- optimizer = Adam,
- learning rate =  $10^{-3}$ ,
- weight decay =  $10^{-6}$ ,
- scheduler = ReduceLROnPlateau,
- early stopping με patience = 20.

Η εκπαίδευση συγκλίνει γρήγορα, με το validation loss να γίνεται έντονα αρνητικό λόγω των log-variance terms (αναμενόμενο στη συγκεκριμένη loss formulation).

## 6.4 Αξιολόγηση Μοντέλου

Η αξιολόγηση του μοντέλου πραγματοποιήθηκε στο validation set (20% του συνολικού dataset, δηλαδή 2 000 δείγματα), χρησιμοποιώντας το καλύτερο checkpoint που προέκυψε από την εκπαίδευση.

Για κάθε δείγμα υπολογίζονται:

### Απόλυτο σφάλμα θέσης

$$\varepsilon_{xy} = \sqrt{(x_{\text{pred}} - x_s)^2 + (y_{\text{pred}} - y_s)^2}.$$

### Απόλυτο σφάλμα ακτίνας

$$\varepsilon_\rho = |\rho_{\text{pred}} - \rho_s|.$$

### Απόλυτο σφάλμα γωνίας (με wrap-around στο $[-\pi, \pi]$ )

$$\varepsilon_\varphi = |\varphi_{\text{pred}} - \varphi_s|.$$

### Απόλυτο σφάλμα έντασης

$$\varepsilon_I = |I_{\text{pred}} - I_s|.$$

### Σχετικά σφάλματα

$$\varepsilon_{\rho}^{\text{rel}} = \frac{\varepsilon_{\rho}}{\rho_s}, \quad \varepsilon_I^{\text{rel}} = \frac{\varepsilon_I}{I_s}.$$

Ο Πίνακας 6.1 συνοψίζει τα σφάλματα χωρίς θόρυβο.

| Metric  | mean     | p50      | p90      | p99      |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| xy_abs  | 0.000832 | 0.000758 | 0.001460 | 0.002194 |
| rho_abs | 0.000554 | 0.000467 | 0.001166 | 0.001897 |
| rho_rel | 0.001021 | 0.000768 | 0.002044 | 0.004980 |
| phi_abs | 0.000987 | 0.000702 | 0.002054 | 0.005462 |
| I_abs   | 0.000196 | 0.000160 | 0.000410 | 0.000650 |
| I_rel   | 0.000196 | 0.000160 | 0.000410 | 0.000650 |

Πίνακας 6.1: Αξιολόγηση μοντέλου μίας πηγής

Το μέσο σφάλμα θέσης είναι 0.00083, δηλαδή περίπου 0.083% της ακτίνας. Το σφάλμα ακτίνας είναι ακόμη μικρότερο: 0.00055. Το σφάλμα γωνίας βρίσκεται στην τάξη μεγέθους  $10^{-3}$  rad. Το σφάλμα έντασης είναι μόλις 0.02%.

Αυτά τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά για inverse EM πρόβλημα: το μοντέλο ανακατασκευάζει τη θέση και την ένταση με ακρίβεια που συνήθως απαιτεί iterative inversion.

### Ανθεκτικότητα σε θόρυβο

Η αξιολόγηση σε θόρυβο πραγματοποιήθηκε για επίπεδα Gaussian θορύβου:

$$\sigma \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.10\}.$$

Στον Πίνακα 6.2 συνοψίζονται οι μέσες τιμές σφάλματος ανά επίπεδο θορύβου.

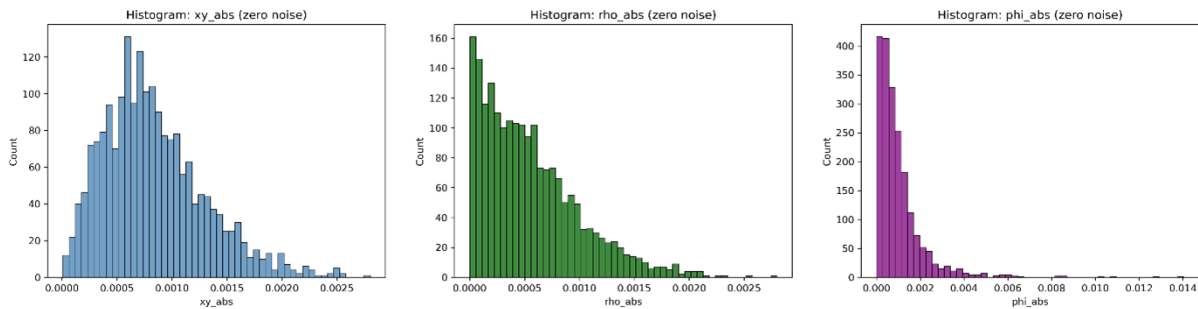
| Noise $\sigma$ | xy_abs  | rho_abs | phi_abs | I_abs   |
|----------------|---------|---------|---------|---------|
| 0.00           | 0.00083 | 0.00055 | 0.00099 | 0.00020 |
| 0.01           | 0.00240 | 0.00172 | 0.00280 | 0.00032 |
| 0.03           | 0.00701 | 0.00509 | 0.00812 | 0.00083 |
| 0.05           | 0.01187 | 0.00869 | 0.01358 | 0.00140 |
| 0.10           | 0.02628 | 0.02014 | 0.02767 | 0.00360 |

Πίνακας 6.2: Ανθεκτικότητα σε θόρυβο του μοντέλου μίας πηγής

Το μοντέλο παραμένει εξαιρετικά σταθερό έως και 5% θόρυβο. Στο 10% θόρυβο, τα σφάλματα αυξάνονται αλλά παραμένουν πολύ χαμηλά για inverse EM πρόβλημα. Η ένταση  $I$  είναι η πιο σταθερή παράμετρος: ακόμη και στο 10% θόρυβο, το σφάλμα είναι μόλις 0.0036. Η συμπε-

ριφορά αυτή οφείλεται στο ότι το μοντέλο έχει μάθει φυσικά συνεπείς αναπαραστάσεις, όχι απλώς στατιστικές συσχετίσεις.

### Κατανομές Σφαλμάτων



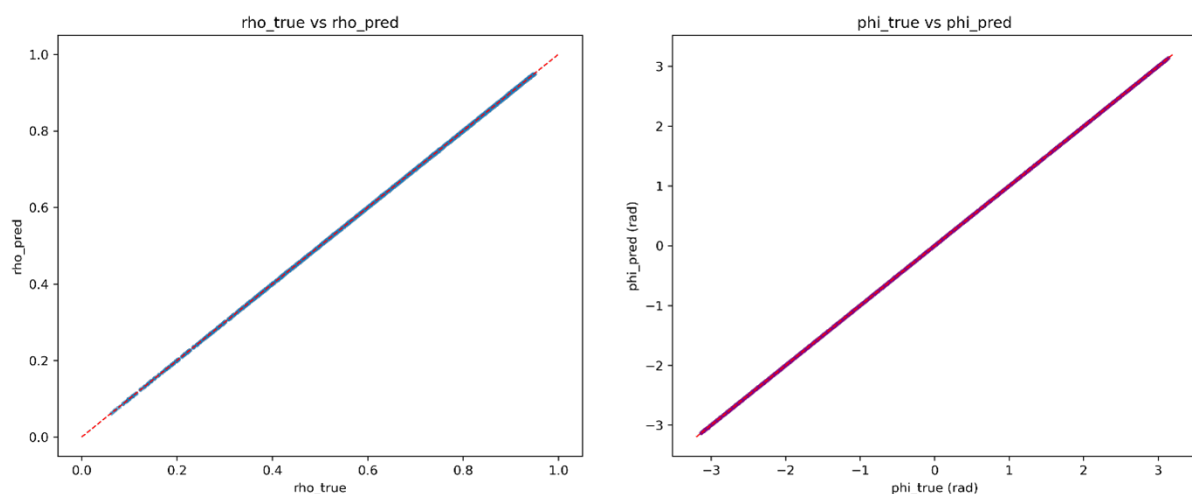
Σχήμα 6.1: Κατανομές σφαλμάτων για μία πηγή

Τα ιστογράμματα (Σχήμα 6.1) για το zero-noise validation set δείχνουν:

- πολύ στενή κατανομή γύρω από το 0,
- απουσία outliers,
- ομαλή Gaussian-like συμπεριφορά,
- συμμετρική κατανομή για όλα τα σφάλματα.

Αυτό επιβεβαιώνει ότι το μοντέλο δεν κάνει «καταστροφικά λάθη» σε καμία περιοχή του δίσκου.

### Scatter Plots: Πραγματικές vs Προβλεπόμενες Τιμές



Σχήμα 6.2: Scatter plots πραγματικών και προβλεπόμενων τιμών για μία πηγή

Τα scatter plots (Σχήμα 6.2) για  $\rho$  και  $\varphi$  δείχνουν:

- σχεδόν τέλεια ευθυγράμμιση πάνω στη γραμμή  $y = x$ ,
- ελάχιστη διασπορά,
- καμία συστηματική απόκλιση (bias),
- ομοιόμορφη απόδοση σε όλο το εύρος τιμών.

Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο δεν υπερεκτιμά ή υποεκτιμά συγκεκριμένες περιοχές, δεν παρουσιάζει edge effects κοντά στο κέντρο ή στην περιφέρεια, και έχει μάθει πλήρως τη γεωμετρία του προβλήματος.

### Συνολική Αξιολόγηση

Το μοντέλο επιτυγχάνει:

- σφάλμα θέσης  $< 0.1\%$  της ακτίνας σε καθαρά δεδομένα,
- σφάλμα θέσης  $< 1\%$  ακόμη και με  $10\%$  θόρυβο,
- σφάλμα έντασης  $< 0.4\%$  σε όλες τις περιπτώσεις,
- εξαιρετική σταθερότητα σε όλο το validation set,
- φυσική συνέπεια χάρη στο surrogate-based field loss.

Η απόδοση αυτή είναι εντυπωσιακή για inverse EM πρόβλημα και αποδεικνύει ότι:

- η φασική πληροφορία των πεδίων είναι πλήρως εκμεταλλεύσιμη,
- το multitask μοντέλο έχει μάθει τη φυσική του προβλήματος,
- το surrogate-informed loss είναι καθοριστικό για τη γενίκευση.

## 7. Regression Problem II — Εκτίμηση Θέσης Δύο Πηγών

Η μετάβαση από μία σε δύο εσωτερικές γραμμικές πηγές μεταβάλλει ριζικά τη φύση του αντιστρόφου προβλήματος. Παρότι το forward model παραμένει γραμμικό ως προς τα πεδία, η αντιστροφή του χάρτη

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \{E_{\text{surf}}(\theta), H_{\text{surf}}(\theta)\}$$

γίνεται κακώς τοποθετημένη (ill-posed) με την κλασική έννοια του Hadamard (Hadamard, 1902). Το πρόβλημα δεν είναι απλώς πιο δύσκολο — αποκτά περιοχές του χώρου λύσεων όπου η πληροφορία του επιφανειακού πεδίου είναι σχεδόν ανεπαρκής για να διακρίνει δύσκολες γεωμετρίες πηγών.

Υπάρχουν ζεύγη πηγών που παράγουν σχεδόν ταυτόσημα επιφανειακά πεδία όταν, για παράδειγμα, οι πηγές είναι συμμετρικές ως προς άξονα ή έχουν μικρή γωνιακή απόσταση. Σε άλλες περιπτώσεις, έχουν μεν διαφορετικές θέσεις αλλά παρόμοιο συνολικό διάνυσμα ακτινικής συνεισφοράς. Έτσι, το forward model «συμπιέζει» διαφορετικές γεωμετρίες σε σχεδόν ίδια σήματα.

### 7.1 Ασφαλές όριο εγγύτητας πηγών

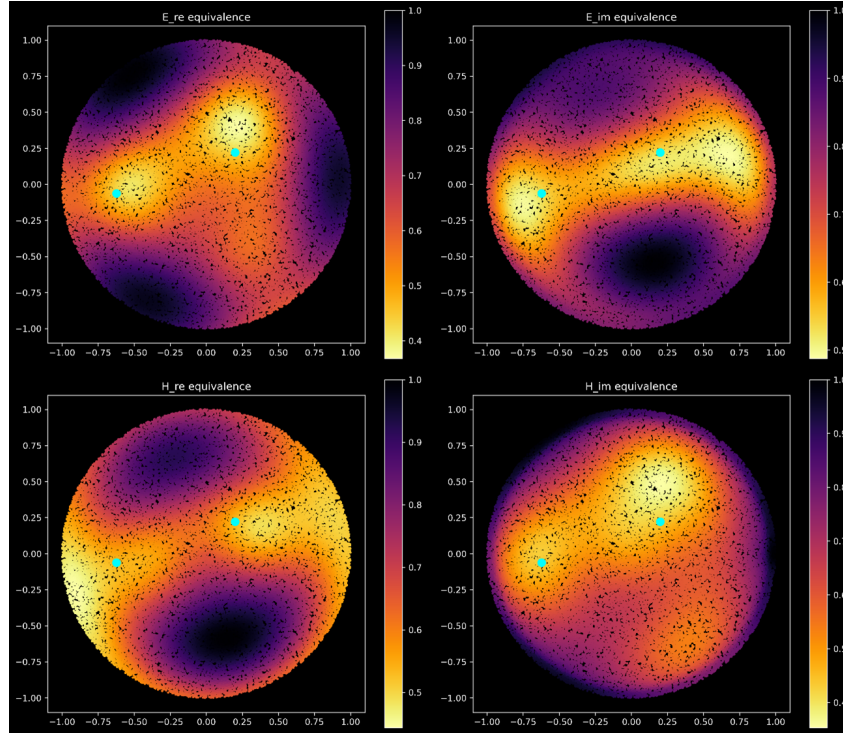
Το πείραμα που εξετάζουμε αποκαλύπτει μια κατηγορία «ισοδύναμων» γεωμετριών. Παράγουμε τέσσερις equivalence maps με την ακόλουθη διαδικασία: επιλέγουμε τυχαία ένα ζεύγος πηγών, το οποίο παραμένει σταθερό (θέση, ένταση) καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Στη συνέχεια δημιουργούμε ένα πυκνό πλέγμα θέσεων στο δίσκο και, σε κάθε κόμβο, τοποθετούμε μία πηγή με ένταση ίση με το άθροισμα των εντάσεων του αρχικού ζεύγους. Αυτές οι πηγές λειτουργούν ως «υποψήφια ισοδύναμα» ζεύγη.

Υπολογίζουμε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των επιφανειακών πεδίων και τα συγκρίνουμε με εκείνα του αρχικού ζεύγους. Η παραγωγή γίνεται μέσω των surrogate models, τα οποία επιτρέπουν γρήγορη και ακριβή παραγωγή των χαρτών.

Το αποτέλεσμα είναι αποκαλυπτικό (Σχήμα 7.1): εκτεταμένες φωτεινές περιοχές αντιστοιχούν σε σχεδόν ταυτόσημα πεδία μεταξύ του αρχικού ζεύγους (γαλάζια σημεία) και συγκεκριμένων θέσεων του πλέγματος, ενώ οι σκοτεινές περιοχές υποδεικνύουν μεγάλες διαφορές.

Οι φωτεινές περιοχές υποδεικνύουν μια κρίσιμη προϋπόθεση για την παραγωγή του dataset: πρέπει να αποκλείσουμε ζεύγη πηγών που βρίσκονται πολύ κοντά. Τέτοια ζεύγη παράγουν πεδία που παγιδεύουν το μοντέλο σε «μη επιθυμητά» τοπικά ελάχιστα της loss function. Μετά

από εκτενή πειραματισμό, καταλήξαμε σε ένα ασφαλές όριο εγγύτητας, το οποίο, σε συνδυασμό με τον γενικό περιορισμό δειγματοληψίας, μειώνει σημαντικά την κακή τοποθέτηση του προβλήματος και οδηγεί σε εντυπωσιακά ακριβείς προβλέψεις.



Σχήμα 7.1: Το πρόβλημα δεν είναι καλώς τοποθετημένο

## 7.2 Dataset Generation

Η παραγωγή ενός αξιόπιστου και φυσικά συνεπούς συνόλου δεδομένων αποτελεί κρίσιμο στάδιο για την επιτυχή εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου στο πρόβλημα των δύο πηγών. Σε αντίθεση με το πρόβλημα μίας πηγής, όπου η δειγματοληψία είναι απλή και το forward mapping καλά τοποθετημένο, η περίπτωση δύο πηγών απαιτεί προσεκτικό σχεδιασμό ώστε να αποφευχθούν οι παγίδες του ill-posedness.

Η διαδικασία παραγωγής οργανώνεται σε τέσσερα στάδια:

**(a) Δειγματοληψία γεωμετρίας δύο πηγών.** Κάθε δείγμα αποτελείται από δύο πηγές σε πολικές συντεταγμένες  $(\rho_1, \phi_1)$  και  $(\rho_2, \phi_2)$ . Η δειγματοληψία ακολουθεί γεωμετρικούς περιορισμούς:

$$0.05R \leq \rho_s \leq 0.95R, \quad |\rho_1 - \rho_2| > \Delta\rho_{\min}, \quad |\phi_1 - \phi_2| > \Delta\phi_{\min}.$$

Στο παρόν πρόβλημα χρησιμοποιούμε  $(\Delta\rho_{\min}, \Delta\phi_{\min}) = (0.05R, 3^\circ)$ .

**(b) Canonical Ordering.** Το ζεύγος  $(A, B)$  είναι ισοδύναμο με το  $(B, A)$ , άρα η αναπαράσταση δεν είναι μοναδική. Αν δεν αντιμετωπιστεί, το δίκτυο θα μάθει έναν χάρτη με δύο ισοδύναμες λύσεις, οδηγώντας σε αστάθεια και διπλές κατανομές σφάλματος. Για τον λόγο αυτό εφαρμόζεται canonical ordering, σύμφωνα με την αρχή permutation invariance (Zaheer κ.ά., 2017):

- πρώτα ταξινομούνται οι πηγές ως προς την ακτίνα  $\rho$ ,
- αν οι ακτίνες είναι σχεδόν ίσες, η ταξινόμηση γίνεται ως προς τη γωνία  $\phi$ .

**(c) Υπολογισμός επιφανειακών πεδίων.** Για κάθε ζεύγος πηγών υπολογίζονται τα:

$$E_{re}, E_{im}, H_{re}, H_{im}$$

σε  $M = 30$  γωνίες παρατήρησης. Ο υπολογισμός γίνεται μέσω του SurrogateEM, το οποίο έχει εκπαιδευτεί πάνω στην αναλυτική λύση του PhysicsTM και επιτρέπει:

- παραγωγή 20 000 δειγμάτων σε λίγα δευτερόλεπτα,
- σταθερή αριθμητική συμπεριφορά,
- πλήρη συμβατότητα με differentiable pipelines.

Το τελικό διάνυσμα εισόδου έχει διάσταση  $X \in \mathbb{R}^{4M} = \mathbb{R}^{120}$ .

**(d) Κανονικοποίηση και αποθήκευση.** Για σταθερή εκπαίδευση εφαρμόζεται MinMax scaling τόσο στα πεδία όσο και στις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \in [-1, 1]^4.$$

Το dataset χωρίζεται σε:

- 70% training,
- 30% test,

και αποθηκεύεται σε ενιαίο αρχείο .npz μαζί με scalars, το πλέγμα γωνιών και τις φυσικές παραμέτρους του κυλίνδρου.

Η ποιότητα του dataset είναι καθοριστική για την επιτυχία του μοντέλου. Η προσεκτική δειγματοληψία, ο αποκλεισμός προβληματικών γεωμετριών και το canonical ordering οδηγούν σε:

- σταθερή εκπαίδευση χωρίς τοπικά ελάχιστα,
- ομαλές κατανομές σφάλματος,
- υψηλή γενίκευση ακόμη και υπό θόρυβο,
- αξιόπιστη ανακατασκευή σε όλο το δίσκο.

Αυτή η διαδικασία αποτελεί το θεμέλιο πάνω στο οποίο χτίζεται το structured loss και η τελική αρχιτεκτονική του μοντέλου.

### 7.3 Model Architecture

Η επιλογή της αρχιτεκτονικής του νευρωνικού δικτύου για το πρόβλημα των δύο πηγών απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, καθώς το μοντέλο καλείται να μάθει μια χαρτογράφηση υψηλής πολυπλοκότητας:

$$X \in \mathbb{R}^{120} \longrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4,$$

όπου το διάνυσμα εισόδου περιλαμβάνει τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των επιφανειακών πεδίων  $\{E_{re}, E_{im}, H_{re}, H_{im}\}$  σε 30 γωνίες παρατήρησης. Η έξοδος αποτελείται από τις κανονικοποιημένες καρτεσιανές συντεταγμένες των δύο πηγών, ταξινομημένες μέσω canonical ordering.

Η αρχιτεκτονική που επιλέχθηκε είναι ένα βαθύ, πλήρως συνδεδεμένο νευρωνικό δίκτυο (MLP), το οποίο, σύμφωνα με τα κλασικά αποτελέσματα καθολικής προσέγγισης (Hornik, 1989), μπορεί να προσεγγίσει εξαιρετικά πολύπλοκες μη γραμμικές συναρτήσεις. Ο σχεδιασμός του δικτύου βασίστηκε στις ακόλουθες αρχές:

**(a) Υψηλή εκφραστικότητα για μη γραμμικές χαρτογραφήσεις.** Παρότι το forward model είναι γραμμικό ως προς τα πεδία, η αντιστροφή του χάρτη είναι έντονα μη γραμμική. Το δίκτυο πρέπει να μάθει:

- αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο πηγών,
- λεπτές διαφοροποιήσεις στο επιφανειακό πεδίο,
- γεωμετρικές συμμετρίες και ασυμμετρίες,
- περιοχές του χώρου λύσεων όπου η πληροφορία είναι ασθενής.

Αυτό απαιτεί αρκετό βάθος και πλάτος στα κρυφά επίπεδα.

**(b) Σταθερότητα έναντι ill-posedness.** Το δίκτυο πρέπει να είναι ανθεκτικό σε:

- μικρές μεταβολές των πεδίων,
- περιοχές όπου διαφορετικές γεωμετρίες παράγουν παρόμοια σήματα,
- τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης κόστους.

Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται dropout layers και προσεκτική κανονικοποίηση. Το dropout λειτουργεί ως αποτελεσματικός μηχανισμός regularization (Srivastava κ.ά., 2014).

**(c) Αποφυγή υπερπροσαρμογής.** Παρότι το dataset είναι μεγάλο (20,000 δείγματα), η πολυπλοκότητα του προβλήματος μπορεί να οδηγήσει σε overfitting. Η αρχιτεκτονική ενσωματώνει:

- dropout στα πρώτα επίπεδα,
- βαθμιαία μείωση των διαστάσεων (tapering),
- χρήση ReLU για σταθερή βελτιστοποίηση.

Το τελικό μοντέλο (Πίνακας 7.1) αποτελείται από τέσσερα κρυφά επίπεδα:

| Layer    | Dimension | Activation | Dropout |
|----------|-----------|------------|---------|
| Input    | 120       | -          | -       |
| Hidden 1 | 512       | ReLU       | 0.05    |
| Hidden 2 | 512       | ReLU       | 0.05    |
| Hidden 3 | 256       | ReLU       | -       |
| Hidden 4 | 128       | ReLU       | -       |
| Output   | 4         | Linear     | -       |

**Πίνακας 7.1: Αρχιτεκτονική νευρωνικού δικτύου για δύο πηγές**

Τα δύο πρώτα επίπεδα έχουν μεγάλο πλάτος (512) ώστε να απορροφούν την πολυπλοκότητα του σήματος και να λειτουργούν ως feature extractors. Το δίκτυο μαθαίνει:

- μοτίβα στο επιφανειακό πεδίο,
- συσχετίσεις μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου,
- χαρακτηριστικές υπογραφές γεωμετριών δύο πηγών.

Το dropout 0.05 αποτρέπει την υπερπροσαρμογή χωρίς να διαταράσσει τη μάθηση.

Τα επόμενα επίπεδα μειώνουν σταδιακά τη διάσταση, επιτρέποντας στο δίκτυο να συμπυκνώσει την πληροφορία σε μια πιο συμπαγή αναπαράσταση:

- συμπίκνωση της πληροφορίας σε χαμηλότερη διάσταση,
- εκμάθηση εσωτερικής γεωμετρικής αναπαράστασης,
- διαχωρισμός δύσκολων περιπτώσεων.

Το τελικό επίπεδο είναι γραμμικό, καθώς η έξοδος είναι συνεχής και δεν απαιτεί μη γραμμικότητα. Η σειρά των πηγών είναι εγγυημένα συνεπής λόγω του canonical ordering στο dataset.

Η ReLU επιλέχθηκε για όλα τα κρυφά επίπεδα λόγω σταθερής συμπεριφοράς στη βελτιστοποίηση, αποφυγής vanishing gradients και καλής απόδοσης σε μεγάλα MLPs. Δοκιμάστηκαν και άλλες ενεργοποιήσεις (tanh, GELU, ELU), αλλά δεν προσέφεραν βελτίωση.

Το μοντέλο διαθέτει περίπου 600,000 trainable parameters, μια τιμή που βρίσκεται στο sweet spot μεταξύ επαρκούς εκφραστικότητας, αποφυγής υπερβολικής πολυπλοκότητας και γρήγορης εκπαίδευσης.

## 7.4 Structured Loss Function

Η εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου για το πρόβλημα των δύο πηγών απαιτεί μια συνάρτηση κόστους πολύ πιο εκλεπτυσμένη από το κλασικό MSE. Το inverse mapping είναι ισχυρά μη γραμμικό, παρουσιάζει πολλαπλές ισοδύναμες λύσεις και είναι ευαίσθητο σε τοπικά ελάχιστα. Για να αντιμετωπιστούν αυτές οι δυσκολίες, σχεδιάστηκε μια δομημένη συνάρτηση κόστους (structured loss), η οποία ενσωματώνει:

- γεωμετρικά σφάλματα απόστασης,
- γωνιακά σφάλματα (angle loss),
- περιορισμό εμβαδού (area constraint),
- δυναμικά βάρη ουράς (tail-aware weighting).

Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει στο μοντέλο να μάθει όχι μόνο τον μέσο όρο των σφαλμάτων, αλλά και τη συμπεριφορά στις ουρές της κατανομής — κάτι κρίσιμο για την αξιοπιστία ενός inverse model.

**(a) Distance Loss.** Για κάθε πηγή υπολογίζεται το σφάλμα απόστασης:

$$d_S = \left\| (x_j^{pred}, y_j^{pred}) - (x_j^{true}, y_j^{true}) \right\|_2, \quad S \in \{A, B\}, j = 1, 2.$$

Το distance loss είναι η πιο άμεση μετρική γεωμετρικής ακρίβειας, αλλά από μόνο του δεν επαρκεί, διότι:

- δεν διακρίνει σωστά περιστροφικές ασυμμετρίες,
- δεν τιμωρεί περιπτώσεις με σωστή απόσταση αλλά λάθος κατεύθυνση,
- δεν ελέγχει την ουρά της κατανομής (p99).

**(b) Angle Loss.** Για κάθε πηγή  $S$  υπολογίζεται η γωνιακή απόκλιση μεταξύ των διανυσμάτων  $v_S^\# = (x_j^\#, y_j^\#)$ , με  $\# \in \{\text{pred}, \text{true}\}$ :

$$\theta_S = \arccos \left( \frac{\langle v_S^{\text{pred}}, v_S^{\text{true}} \rangle}{\|v_S^{\text{pred}}\| \|v_S^{\text{true}}\|} \right).$$

Το angle loss είναι κρίσιμο, καθώς οι γωνιακές αποκλίσεις είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες σε συμμετρικές περιπτώσεις, όπου το distance loss αποτυγχάνει. Η χρήση γωνιακών μετρικών είναι καθιερωμένη σε προβλήματα κατεύθυνσης και προσανατολισμού (Wang κ.ά., 2020).

**(c) Area Constraint.** Ο περιορισμός εμβαδού εισάγει συνεκτικότητα μεταξύ των δύο πηγών. Ορίζουμε:

$$A_\# = \frac{1}{2} |(x_1, y_1) \times (x_2, y_2)|, \quad \# \in \{\text{pred}, \text{true}\},$$

οπότε:

$$L_{\text{area}} = |A_{\text{pred}} - A_{\text{true}}|.$$

Ο όρος αυτός:

- σταθεροποιεί τη σχετική γεωμετρία των δύο πηγών,
- αποτρέπει το μοντέλο από το να «αντιστρέφει» τις πηγές,
- μειώνει την πιθανότητα κατάρρευσης σε ισοδύναμες λύσεις.

**(d) Tail-Aware Dynamic Weights.** Η πιο καινοτόμα συνιστώσα της structured loss είναι τα tail schedulers. Για κάθε loss component υπολογίζονται τα p99:

$$p99(d_A), p99(d_B), p99(\theta_A), p99(\theta_B).$$

Αν το p99 υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο, τότε το βάρος αυξάνεται:

$$w = \min\left(w_{\min} + \frac{p99 - \text{target}}{\Delta}, w_{\max}\right).$$

Η λογική αυτή σχετίζεται με distribution-aware weighting, όπως στο focal loss (Lin κ.ά., 2017), όπου τα δύσκολα δείγματα λαμβάνουν μεγαλύτερη έμφαση.

Με αυτόν τον τρόπο:

- το μοντέλο εστιάζει αυτόματα στα δύσκολα δείγματα,
- οι ουρές της κατανομής συρρικνώνονται,
- η συνολική ακρίβεια βελτιώνεται δραματικά.

### Συνολική Συνάρτηση Κόστους.

$$L_{total} = w_{dA}d_A + w_{dB}d_B + w_{\theta A}\theta_A + w_{\theta B}\theta_B + \lambda_{area}L_{area}.$$

Η structured loss:

- εξισορροπεί γεωμετρική ακρίβεια και σταθερότητα,
- ελέγχει τις ουρές της κατανομής,
- αποτρέπει την κατάρρευση σε ισοδύναμες λύσεις,
- βελτιστοποιεί την απόδοση σε όλο το εύρος του δίσκου.

Χωρίς αυτή τη συνάρτηση κόστους, το πρόβλημα των δύο πηγών είναι δύσκολο επιλύσιμο με MLP. Συνοψίζοντας, η structured loss:

- μετέτρεψε ένα ill-posed πρόβλημα σε διαχειρίσιμο,
- επέτρεψε στο δίκτυο να μάθει σταθερή χαρτογράφηση,
- οδήγησε σε εντυπωσιακά χαμηλά σφάλματα ακόμη και υπό θόρυβο.

Αποτελεί το κεντρικό στοιχείο της επιτυχίας του μοντέλου.

## 7.5 Training Pipeline

Η εκπαίδευση του μοντέλου για την εκτίμηση της θέσης δύο πηγών απαιτεί έναν προσεκτικά σχεδιασμένο μηχανισμό βελτιστοποίησης, ικανό να διαχειριστεί την πολυπλοκότητα του

inverse mapping, την κακή τοποθέτηση του προβλήματος και την ύπαρξη πολλών τοπικών ελαχίστων. Το training pipeline βασίζεται σε αρχές σταθερότητας, ελεγχόμενης προσαρμογής και συνεχούς παρακολούθησης της συμπεριφοράς του μοντέλου.

Η διαδικασία εκπαίδευσης περιλαμβάνει:

- διαμόρφωση DataLoader,
- ορισμό optimizer και learning-rate scheduler,
- ενσωμάτωση της structured loss,
- gradient clipping και σταθεροποίηση,
- early stopping και επιλογή του βέλτιστου μοντέλου,
- καταγραφή όλων των μετρικών για ανάλυση.

**(a) DataLoaders και batching.** Το dataset χωρίζεται σε training και test σύνολα (70%–30%). Η εκπαίδευση γίνεται με mini-batches:

$$\text{batch}_{\text{train}} = 128, \quad \text{batch}_{\text{val}} = 256.$$

Το μικρότερο training batch προσφέρει:

- καλύτερη στοχαστικότητα,
- ταχύτερη σύγκλιση,
- μειωμένη πιθανότητα παγίδευσης σε τοπικά ελάχιστα.

Το validation batch είναι μεγαλύτερο για σταθερότερη εκτίμηση του validation loss.

**(b) Optimizer και Learning Rate Scheduler.** Χρησιμοποιείται ο Adam με αρχικό learning rate  $\eta_0 = 10^{-3}$ , λόγω της σταθερής συμπεριφοράς του σε υψηλής διάστασης MLPs και της αποτελεσματικής διαχείρισης διαφορετικών κλιμάκων gradients (Kingma & Ba, 2015b). Για τον έλεγχο της εκπαίδευσης χρησιμοποιείται ReduceLROnPlateau, το οποίο μειώνει το learning rate κατά παράγοντα 0.5 όταν το validation loss δεν βελτιώνεται για 150 συνεχόμενα epochs.

**(c) Gradient Clipping.** Για την αποφυγή εκρήξεων των gradients εφαρμόζεται:

$$\|\nabla\|_2 \leq 1.0.$$

Το gradient clipping είναι κρίσιμο για τη σταθεροποίηση της εκπαίδευσης σε βαθιά MLPs και αποτελεί καθιερωμένη τεχνική για την αντιμετώπιση exploding gradients (Pascanu κ.ά., 2013).

**(d) Ενσωμάτωση της Structured Loss.** Σε κάθε batch:

1. υπολογίζεται η structured loss (distance, angle, area),
2. υπολογίζονται τα p99 για κάθε loss component,
3. τα tail schedulers ενημερώνουν τα δυναμικά βάρη,
4. υπολογίζεται το συνολικό loss,
5. εκτελείται backward pass και ενημέρωση των βαρών.

Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στο μοντέλο να εστιάζει στα δύσκολα δείγματα, να μειώνει τις ουρές της κατανομής σφαλμάτων και να αποφεύγει την κατάρρευση σε ισοδύναμες λύσεις.

**(e) Early Stopping και επιλογή βέλτιστου μοντέλου.** Η εκπαίδευση μπορεί να φτάσει έως 2500 epochs, αλλά το πραγματικό σημείο σύγκλισης εντοπίζεται μέσω early stopping. Σε κάθε epoch υπολογίζεται το validation loss και το μοντέλο με τη χαμηλότερη τιμή αποθηκεύεται ως *best model*. Μετά το τέλος της εκπαίδευσης φορτώνεται αυτό το μοντέλο, εξασφαλίζοντας:

- αποφυγή overfitting,
- μέγιστη γενίκευση,
- αποδοτική χρήση χρόνου εκπαίδευσης.

**(f) Καταγραφή μετρικών και ανάλυση εκπαίδευσης.** Σε κάθε epoch καταγράφονται:

- train loss,
- validation loss,
- distance losses (A, B),
- angle losses (A, B),
- area loss,
- p99 metrics,
- dynamic weights,

- learning rate,
- gradient norm.

Αυτή η λεπτομερής καταγραφή επιτρέπει πλήρη ανάλυση της συμπεριφοράς του μοντέλου, εντοπισμό πιθανών ασταθειών και αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των tail schedulers.

**(g) Συνολική συμπεριφορά του training pipeline.** Το training pipeline που αναπτύχθηκε:

- είναι εξαιρετικά σταθερό,
- συγκλίνει ομαλά,
- προσαρμόζει δυναμικά τα βάρη των loss components,
- ελέγχει αποτελεσματικά τις ουρές της κατανομής,
- οδηγεί σε υψηλή ακρίβεια ακόμη και σε υψηλά επίπεδα θορύβου.

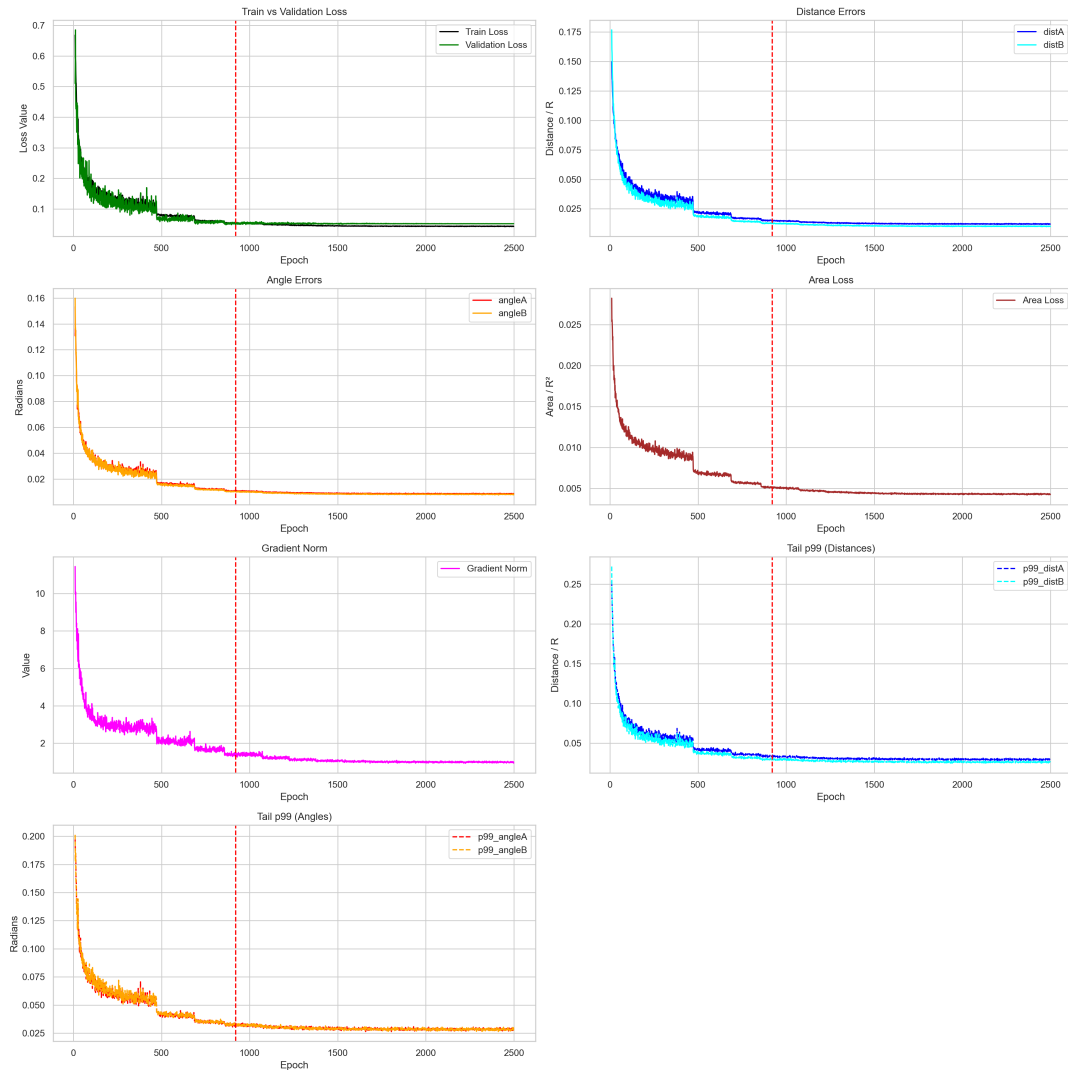
Η structured loss και οι tail schedulers αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες για την επιτυχία του μοντέλου. Στο Σχήμα 7.2 αποτυπώνονται ενδεικτικά δεδομένα από το training log.

Στην πρώτη γραμμή του dashboard φαίνεται η σύγκλιση της συνάρτησης κόστους (Train vs. Validation Loss), καθώς και η σταδιακή μείωση των σφαλμάτων απόστασης (distA, distB). Η δεύτερη γραμμή δείχνει τη μείωση σφαλμάτων γωνίας και τη σταθεροποίηση του περιορισμού του εμβαδού (Area Loss). Στην τρίτη γραμμή παρατηρούμε την εξέλιξη του gradient norm, καθώς και τη συμπεριφορά των p99 σφαλμάτων απόστασης. Στην τέταρτη και τελευταία γραμμή βλέπουμε τα p99 σφάλματα γωνίας. Η κατακόρυφη κόκκινη γραμμή υποδεικνύει το σημείο βέλτιστης απόδοσης (best epoch), όπου το validation loss είναι ελάχιστο. Το μοντέλο όχι μόνο συγκλίνει ομαλά, αλλά προσαρμόζει δυναμικά τη βαρύτητα των σπάνιων σφαλμάτων, επιτυγχάνοντας ισορροπία μεταξύ μέσου όρου και ουράς της κατανομής.

## 7.6 Evaluation & Metrics

Η παρούσα ενότητα οργανώνεται με τρόπο που να παρέχει μια πλήρη, διαφανή και επιστημονικά τεκμηριωμένη εικόνα της απόδοσης του μοντέλου στο πρόβλημα εντοπισμού δύο πηγών. Η αξιολόγηση διαρθρώνεται σε επιμέρους υποενότητες, καθεμία από τις οποίες εστιάζει σε διαφορετικό επίπεδο ανάλυσης.

Αρχικά ορίζονται με ακρίβεια τα μεγέθη και οι μετρικές σφάλματος που χρησιμοποιούνται. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τόσο στο κύριο σώμα των κατανομών (p99) όσο και στις ουρές (upper 1%). Τέλος συζητούνται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη συμπεριφορά του μοντέλου.



Σχήμα 7.2: Καμπύλες εκπαίδευσης δύο πηγών

Η δομή αυτή εξασφαλίζει ότι η αξιολόγηση είναι όχι μόνο ποσοτική αλλά και ποιοτική, επιτρέποντας την κατανόηση τόσο της τυπικής όσο και της ακραίας συμπεριφοράς του συστήματος.

### Ορισμοί Μεγεθών και Μετρικών Σφάλματος

Στην παρούσα υποενότητα ορίζονται με ακρίβεια όλα τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση του μοντέλου, καθώς και οι αντίστοιχες μετρικές σφάλματος. Το πρόβλημα αφορά την εκτίμηση των θέσεων δύο πηγών στο επίπεδο, οπότε η αξιολόγηση βασίζεται σε διανυσματικά μεγέθη, ακτίνες, γωνίες και τις αποκλίσεις τους από τις πραγματικές τιμές.

(a) **Διανυσματικές συντεταγμένες πηγών.** Για κάθε πηγή  $A$  και  $B$  ορίζουμε:

$$\mathbf{y}_A = (x_A, y_A), \quad \mathbf{y}_B = (x_B, y_B),$$

και αντιστοίχως τις προβλεπόμενες θέσεις:

$$\hat{\mathbf{y}}_A = (\hat{x}_A, \hat{y}_A), \quad \hat{\mathbf{y}}_B = (\hat{x}_B, \hat{y}_B).$$

**(b) Σφάλματα θέσης (Euclidean distance errors).** Το σφάλμα θέσης για κάθε πηγή:

$$d_A = \|\hat{\mathbf{y}}_A - \mathbf{y}_A\|_2, \quad d_B = \|\hat{\mathbf{y}}_B - \mathbf{y}_B\|_2.$$

Ορίζουμε επίσης το μέγιστο σφάλμα ανά δείγμα:

$$d_{\max} = \max(d_A, d_B).$$

**(c) Ακτίνες και σφάλματα ακτίνας.** Οι πραγματικές και προβλεπόμενες ακτίνες:

$$\rho_A = \|\mathbf{y}_A\|_2, \quad \hat{\rho}_A = \|\hat{\mathbf{y}}_A\|_2,$$

$$\rho_B = \|\mathbf{y}_B\|_2, \quad \hat{\rho}_B = \|\hat{\mathbf{y}}_B\|_2.$$

Τα σφάλματα ακτίνας:

$$e_{\rho,A} = |\hat{\rho}_A - \rho_A|, \quad e_{\rho,B} = |\hat{\rho}_B - \rho_B|.$$

To worst-case:

$$e_{\rho,\max} = \max(e_{\rho,A}, e_{\rho,B}).$$

**(d) Γωνίες και κυκλικά σφάλματα γωνίας.** Οι πραγματικές και προβλεπόμενες γωνίες:

$$\varphi_A = \text{atan2}(y_A, x_A), \quad \hat{\varphi}_A = \text{atan2}(\hat{y}_A, \hat{x}_A),$$

$$\varphi_B = \text{atan2}(y_B, x_B), \quad \hat{\varphi}_B = \text{atan2}(\hat{y}_B, \hat{x}_B).$$

Το κυκλικό σφάλμα γωνίας, σύμφωνα με τη θεωρία κυκλικών μεγεθών (Jammalamadaka & Sengupta, 2001), ορίζεται ως:

$$e_{\varphi,A} = \left| \text{angle} \left( e^{i(\hat{\varphi}_A - \varphi_A)} \right) \right|, \quad e_{\varphi,B} = \left| \text{angle} \left( e^{i(\hat{\varphi}_B - \varphi_B)} \right) \right|.$$

Το worst-case:

$$e_{\varphi,\max} = \max(e_{\varphi,A}, e_{\varphi,B}).$$

## Μεθοδολογία Αξιολόγησης

Η αξιολόγηση της απόδοσης του μοντέλου βασίζεται σε μια συνδυαστική προσέγγιση που περιλαμβάνει στατιστική ανάλυση, μελέτη κατανομών και διερεύνηση ακραίων τιμών. Στόχος είναι να αποτυπωθεί τόσο η «τυπική» συμπεριφορά του μοντέλου όσο και η απόδοσή του σε δύσκολες ή ακραίες περιπτώσεις. Η μεθοδολογία οργανώνεται σε τρία επίπεδα: στατιστικά μέτρα περιγραφής, ανάλυση κατανομών μέσω ιστογραμμάτων και εκτιμητών πυκνότητας, και διαχωρισμός της ανάλυσης σε κύριο σώμα (bulk) και ουρά (tail) της κατανομής.

**(α) Στατιστικά μέτρα περιγραφής.** Για κάθε μετρική σφάλματος υπολογίζονται:

**Μέση τιμή (mean)**

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

**Διάμεσος (median),** η τιμή που χωρίζει το διατεταγμένο δείγμα σε δύο ίσα μέρη.

**Τυπική απόκλιση (standard deviation)**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}.$$

**Εκατοστημόρια (percentiles):**  $p_{90}, p_{95}, p_{99}$  για την αποτύπωση της συμπεριφοράς στο ανώτερο τμήμα της κατανομής.

**Μέγιστη τιμή (max)**

$$x_{\max} = \max_i x_i.$$

Επιπλέον, για τα μεγέθη που προβλέπει άμεσα το μοντέλο (αποστάσεις, ακτίνες, γωνίες) υπολογίζεται συντελεστής προσδιορισμού τύπου  $R^2$ .

Για γραμμικές ποσότητες:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (t_i - \hat{t}_i)^2}{\sum_i (t_i - \bar{t})^2}.$$

Για γωνίες, λόγω της κυκλικής φύσης τους, χρησιμοποιείται κυκλικός συντελεστής προσδιορισμού:

$$\rho_c = \frac{\sum_i \sin(\varphi_i - \bar{\varphi}) \sin(\hat{\varphi}_i - \bar{\hat{\varphi}})}{\sqrt{\sum_i \sin^2(\varphi_i - \bar{\varphi}) \sum_i \sin^2(\hat{\varphi}_i - \bar{\hat{\varphi}})}}, \quad R_{\text{circ}}^2 = \rho_c^2.$$

**(b) Ανάλυση κατανομών: ιστογράμματα και KDE.** Για την οπτική διερεύνηση της συμπεριφοράς των σφαλμάτων χρησιμοποιούνται:

- **Ιστογράμματα**, τα οποία δείχνουν την εμπειρική κατανομή.
- **Kernel Density Estimators (KDE)**, οι οποίοι παρέχουν ομαλή εκτίμηση της υποκείμενης πυκνότητας (Silverman, 1986).

Ο συνδυασμός τους επιτρέπει:

- αναγνώριση της μορφής της κατανομής (μονοκόρυφη, πολύκορη, skewed),
- σύγκριση μεταξύ πηγών A, B και worst case,
- ανάδειξη περιοχών υψηλής συγκέντρωσης σφαλμάτων.

Για συνέπεια, κάθε στήλη (A, B, max) απεικονίζεται με σταθερό χρωματικό κώδικα.

**(c) Διαχωρισμός bulk και tail: p99 και upper 1%.**

**i) Bulk analysis (p99 zoom).** Υπολογίζεται το 99ο εκατοστημόριο:

$$p_{99} = \text{percentile}(x, 99),$$

και εξετάζεται το σύνολο:

$$\{x_i : x_i \leq p_{99}\}.$$

Αυτό αντιστοιχεί στο 99% των δειγμάτων και αποτυπώνει:

- τη σταθερότητα του μοντέλου,

- την τυπική ακρίβεια,
- την ύπαρξη ή μη συστηματικών αποκλίσεων.

**ii) Tail analysis (upper 1%).** Για την κατανόηση της συμπεριφοράς σε δύσκολες περιπτώσεις εξετάζεται:

$$\{x_i : x_i > p_{99}\}.$$

Η tail analysis αποκαλύπτει failure modes, συμπεριφορά σε ακραίες γεωμετρίες και την πραγματική robustness του μοντέλου.

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με ξεχωριστά ιστογράμματα και KDE για το tail, ώστε η μορφή της ουράς να αποτυπώνεται καθαρά χωρίς να συμπιέζεται από το bulk.

### Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του μοντέλου, όπως αυτά προκύπτουν από τα στατιστικά μέτρα περιγραφής και την ανάλυση των κατανομών σφάλματος. Η παρουσίαση οργανώνεται σε δύο επίπεδα: (α) συνοπτικοί πίνακες με τα βασικά στατιστικά μεγέθη για κάθε μετρική και (β) γραφικές απεικονίσεις των κατανομών τόσο στο κύριο σώμα ( $p_{99}$ ) όσο και στην ουρά (upper 1%). Η διάκριση αυτή επιτρέπει την πλήρη κατανόηση της συμπεριφοράς του μοντέλου, τόσο υπό τυπικές συνθήκες όσο και σε ακραίες περιπτώσεις.

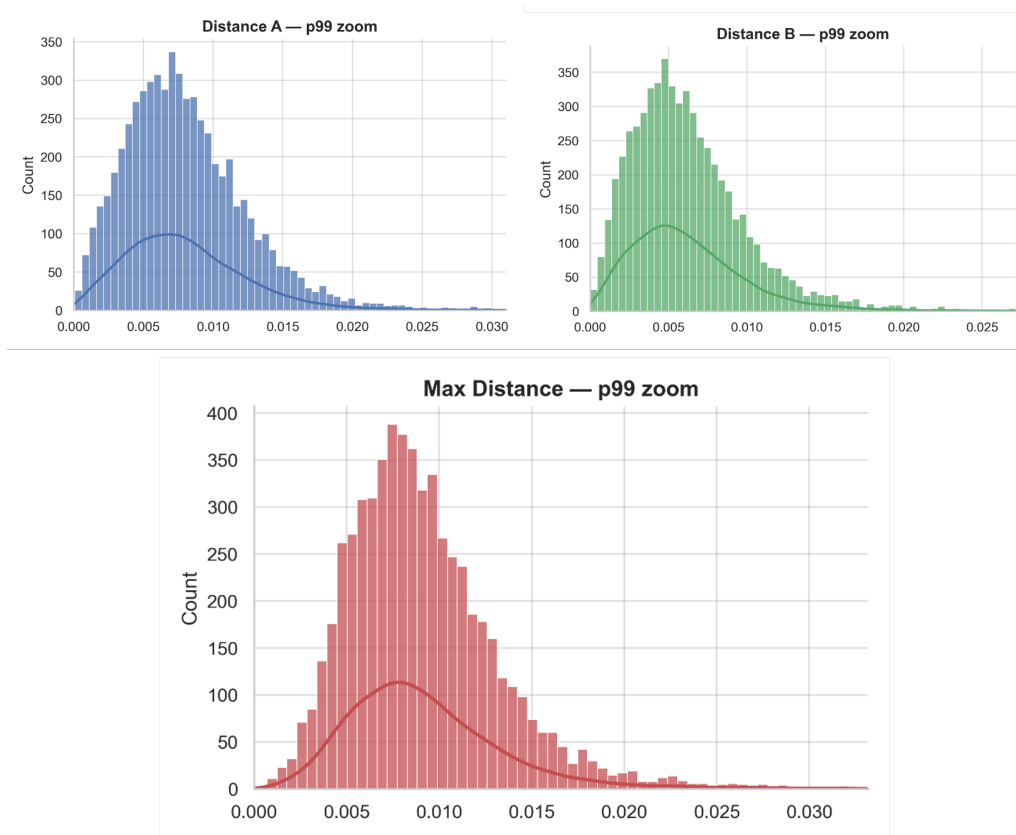
**Συνοπτικοί πίνακες στατιστικών μεγεθών.** Για κάθε μετρική σφάλματος — αποστάσεις  $d_A, d_B, d_{\max}$ , σφάλματα ακτίνας  $e_{\rho,A}, e_{\rho,B}, e_{\rho,\max}$  και σφάλματα γωνίας  $e_{\varphi,A}, e_{\varphi,B}, e_{\varphi,\max}$  — υπολογίζονται τα στατιστικά μέτρα που ορίστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα: μέση τιμή, διάμεσος, τυπική απόκλιση, εκατοστημόρια  $p_{90}, p_{95}, p_{99}$ , μέγιστη τιμή και συντελεστής προσδιορισμού  $R^2$  (γραμμικός ή κυκλικός, ανάλογα με το μέγεθος).

Ο Πίνακας 7.2 παρέχει μια συνοπτική αλλά ολοκληρωμένη εικόνα της απόδοσης του μοντέλου. Η σύγκριση μεταξύ των πηγών A και B, καθώς και του worst case του ζεύγους, επιτρέπει την αναγνώριση πιθανών ασυμμετριών ή διαφορών στη δυσκολία εκτίμησης των δύο πηγών. Επιπλέον, οι τιμές των percentiles και του  $p_{99}$  αποτυπώνουν τη συμπεριφορά του μοντέλου στο ανώτερο τμήμα της κατανομής, ενώ οι μέγιστες τιμές και τα  $R^2$  προσφέρουν πληροφορία για την ακραία και συνολική ακρίβεια αντίστοιχα.

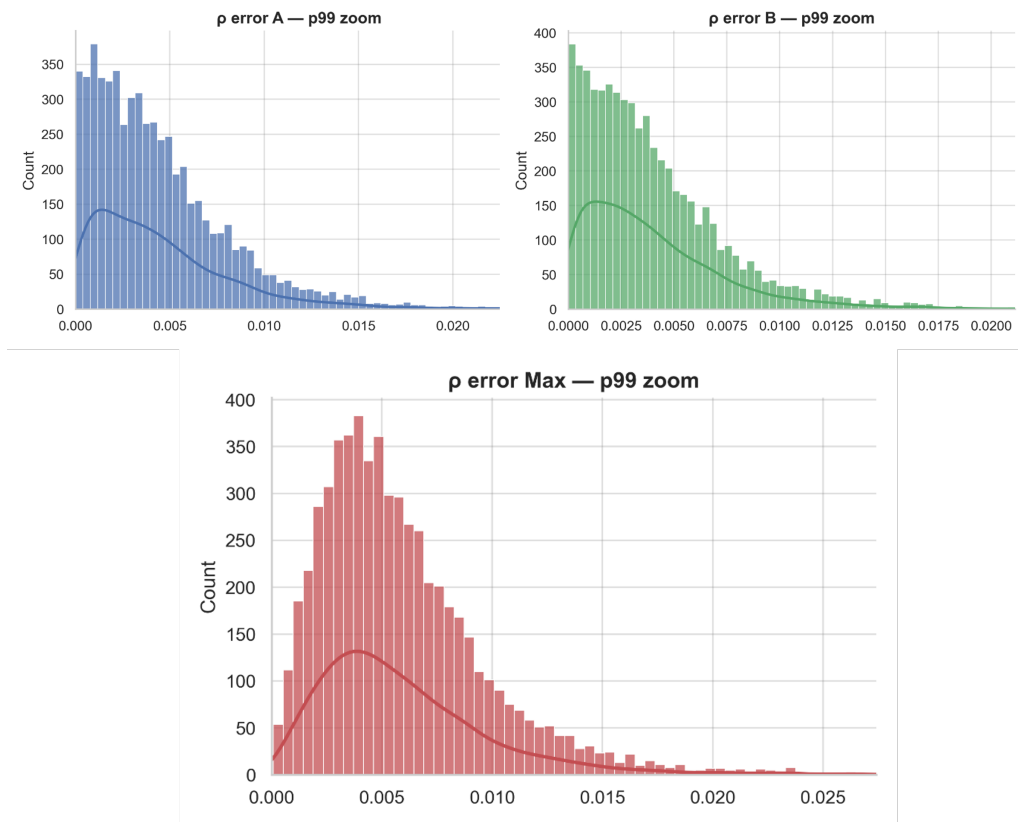
Τα ιστογράμματα που ακολουθούν (Σχήματα 7.3 έως 7.8) δείχνουν λεπτομερώς τις κατανομές, ενώ τα scatter plots (Σχήμα 7.9) ακτινογραφούν την αξιολόγηση του μοντέλου.

| Metric           | mean     | median   | std      | p90      | p95      | p99      | max      | $R^2$    |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $d_A$            | 0.008777 | 0.007465 | 0.012129 | 0.013952 | 0.016593 | 0.031028 | 0.541116 | 0.995591 |
| $d_B$            | 0.006863 | 0.005640 | 0.009385 | 0.011252 | 0.014180 | 0.027144 | 0.422964 | 0.998998 |
| $d_{\max}$       | 0.009973 | 0.008574 | 0.012163 | 0.014699 | 0.017717 | 0.033171 | 0.541116 | -        |
| $\rho_A$         | 0.004995 | 0.003677 | 0.007163 | 0.009655 | 0.012657 | 0.023701 | 0.166284 | 0.996919 |
| $\rho_B$         | 0.004400 | 0.003224 | 0.006483 | 0.008664 | 0.011312 | 0.021127 | 0.237923 | 0.999023 |
| $\rho_{\max}$    | 0.006491 | 0.005148 | 0.007918 | 0.011253 | 0.014222 | 0.027408 | 0.237923 | -        |
| $\varphi_A$      | 0.008966 | 0.007183 | 0.014938 | 0.016763 | 0.020200 | 0.033280 | 0.590828 | 0.995090 |
| $\varphi_B$      | 0.006584 | 0.004658 | 0.011032 | 0.012879 | 0.017334 | 0.032960 | 0.354503 | 0.998981 |
| $\varphi_{\max}$ | 0.010905 | 0.008982 | 0.015407 | 0.018347 | 0.022126 | 0.036856 | 0.590828 | -        |

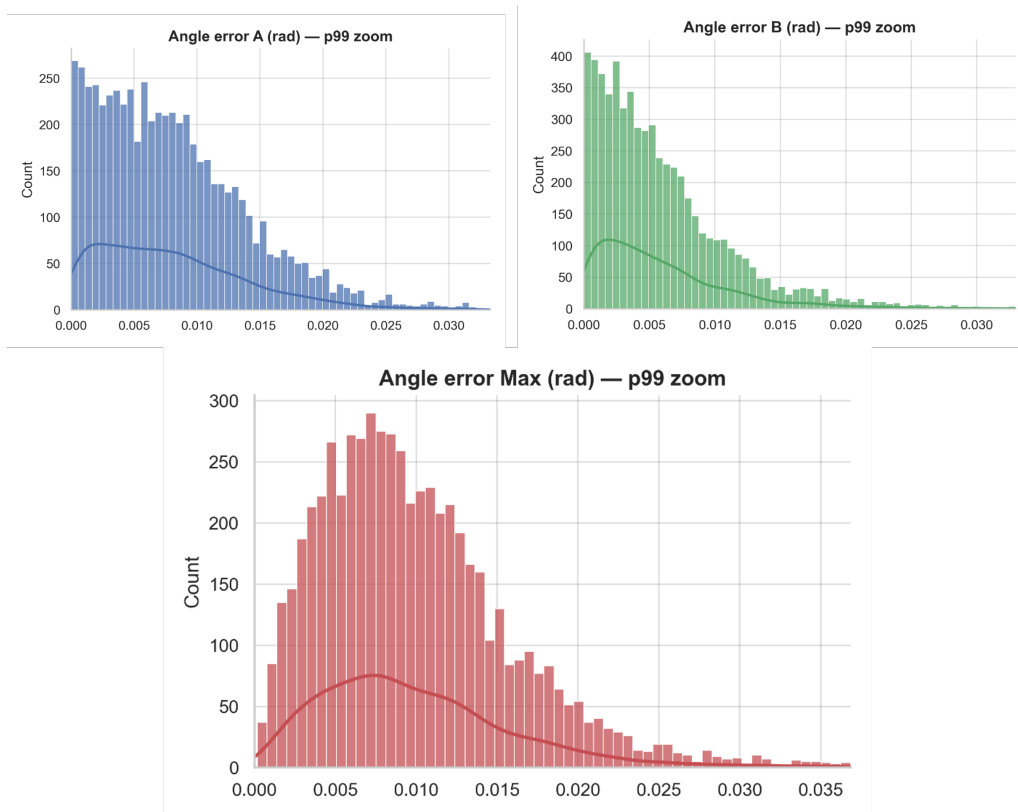
Πίνακας 7.2: Στατιστική ανάλυση της επίδοσης του μοντέλου των δύο πηγών



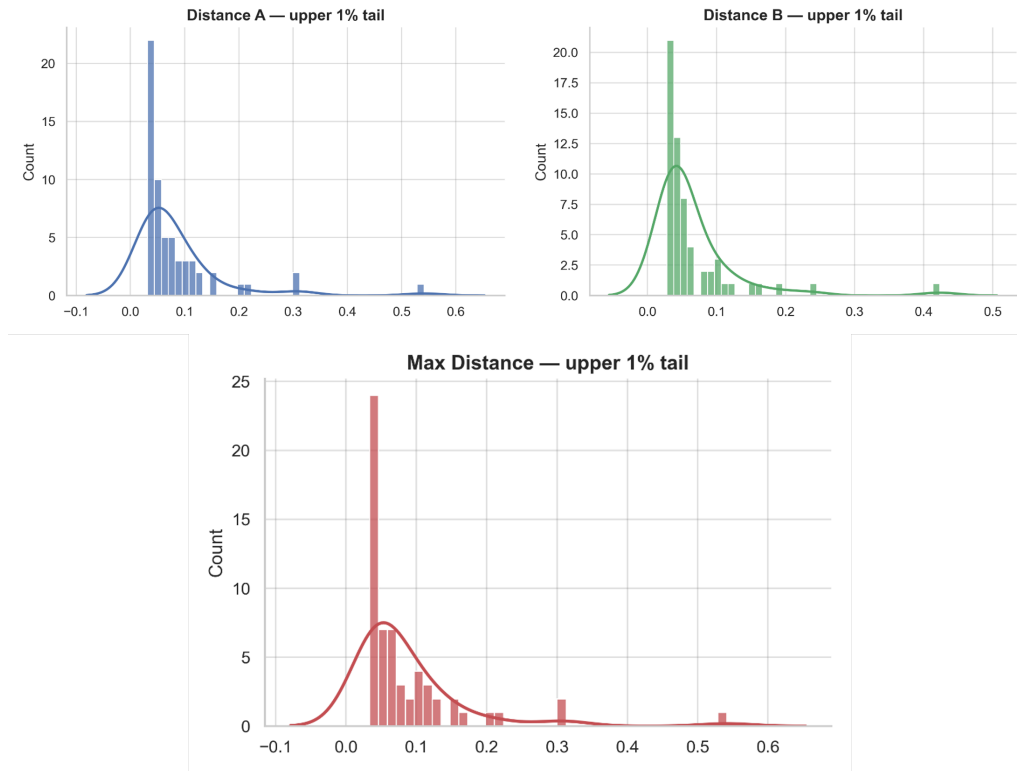
Σχήμα 7.3: Κατανομές απόστασης (p99) των δύο πηγών



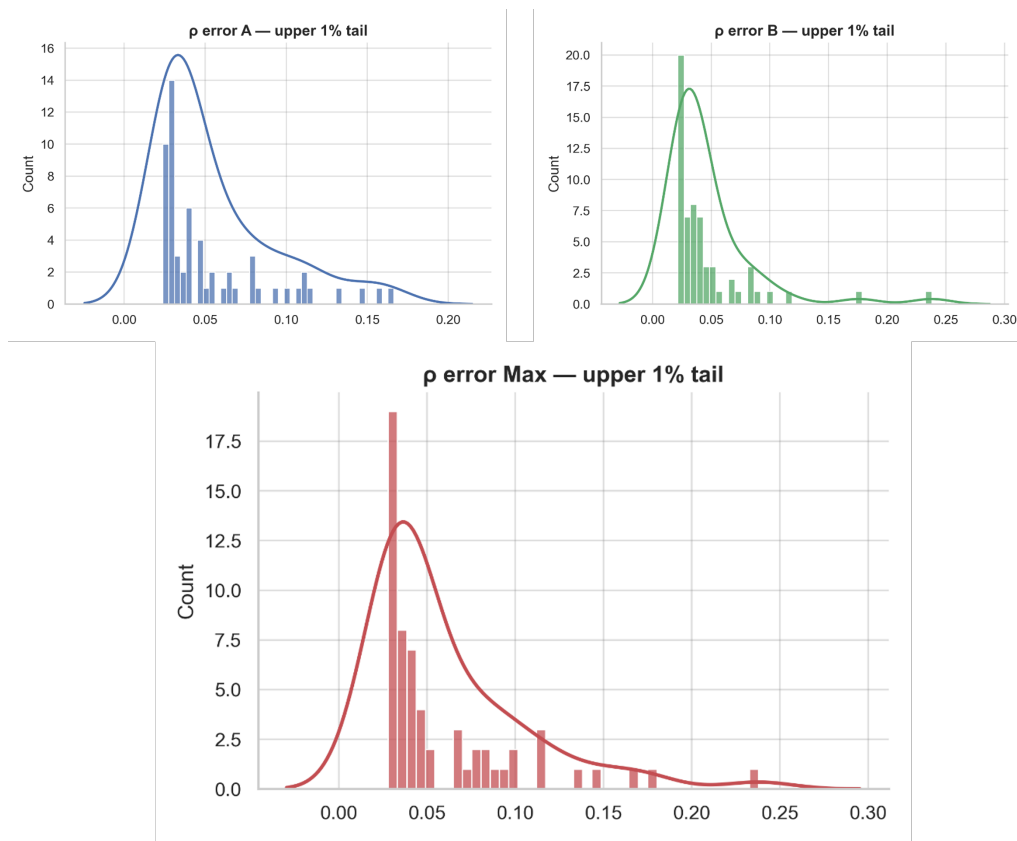
Σχήμα 7.4: Κατανομές ακτίνων (p99) των δύο πηγών



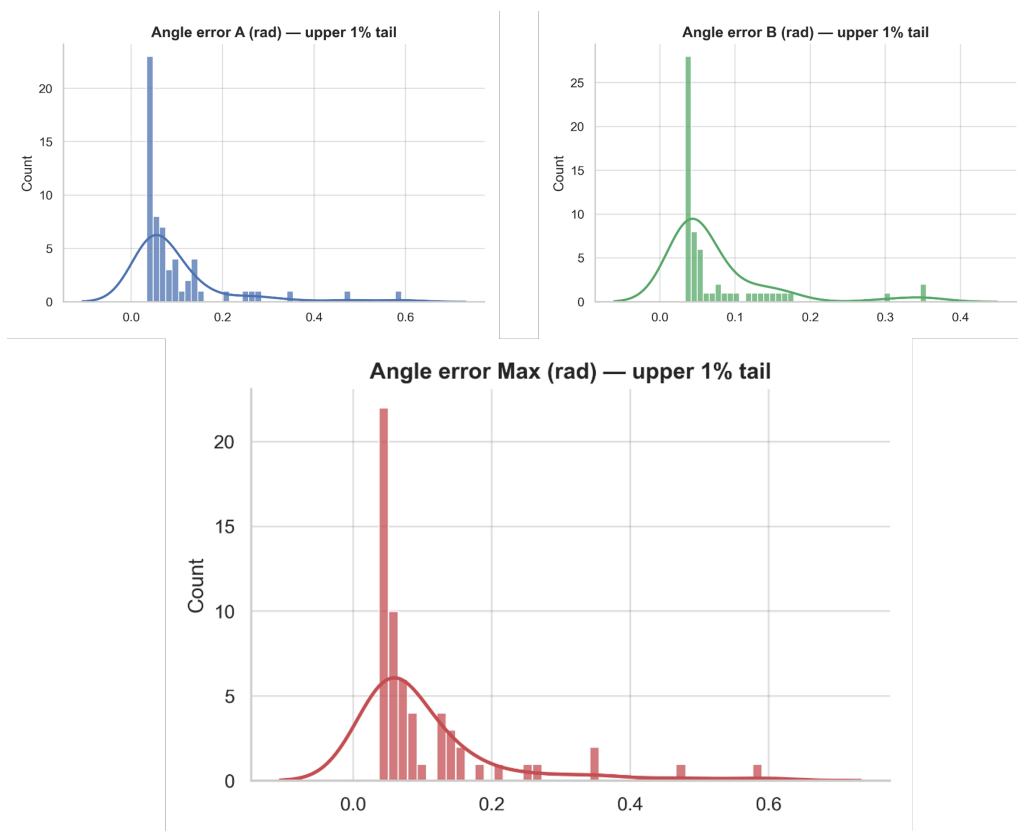
Σχήμα 7.5: Κατανομές γωνιών (p99) των δύο πηγών



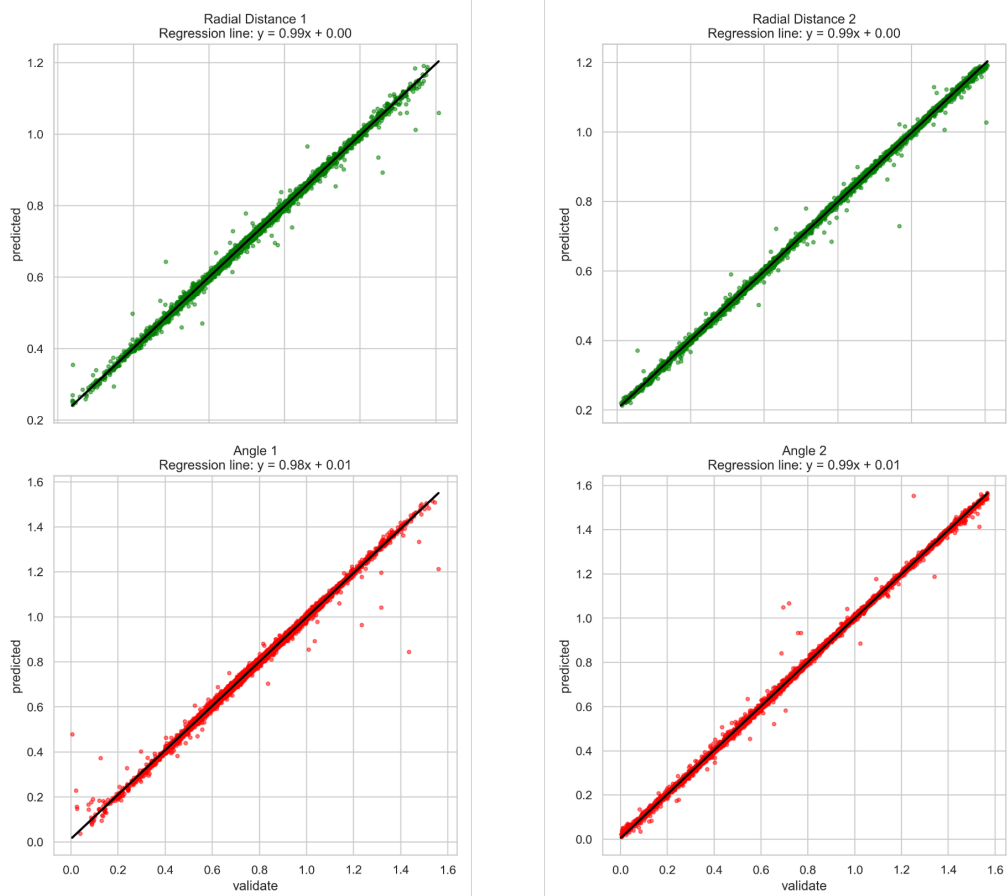
Σχήμα 7.6: Κατανομές αποστάσεων (tail 1%) των δύο πηγών



Σχήμα 7.7: Κατανομές ακτίνων (tail 1%) των δύο πηγών



Σχήμα 7.8: Κατανομές γωνιών (tail 1%) των δύο πηγών



Σχήμα 7.9: Scatter plots ακτίνων και γωνιών των δύο πηγών

## Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Σε συνθήκες μηδενικού θορύβου, το μοντέλο παρουσιάζει εξαιρετικά υψηλή ακρίβεια σε όλες τις μετρικές σφάλματος. Τα σφάλματα θέσης  $d_A$  και  $d_B$  έχουν πολύ μικρές μέσες τιμές (0.0088 και 0.0069 αντίστοιχα), ενώ οι διάμεσοι βρίσκονται ακόμη χαμηλότερα, γεγονός που υποδηλώνει ότι η πλειονότητα των δειγμάτων συγκεντρώνεται πολύ κοντά στις πραγματικές θέσεις. Η τυπική απόκλιση είναι μικρή και τα percentiles  $p_{90}$ ,  $p_{95}$  και  $p_{99}$  παραμένουν σε χαμηλά επίπεδα, δείχνοντας ότι ακόμη και τα σχετικά μεγάλα σφάλματα είναι περιορισμένα. Τα αντίστοιχα  $R^2$  (0.9956 και 0.9990) επιβεβαιώνουν ότι το μοντέλο αναπαράγει με συνέπεια τις πραγματικές συντεταγμένες.

Αντίστοιχα, τα σφάλματα ακτίνας  $e_{\rho,A}$  και  $e_{\rho,B}$  είναι ακόμη μικρότερα (μέσες τιμές 0.0050 και 0.0044), με υψηλό βαθμό συγκέντρωσης γύρω από τη διάμεσο και εξαιρετικά υψηλά  $R^2$  (0.9969 και 0.9990). Αυτό δείχνει ότι το μοντέλο συλλαμβάνει με ακρίβεια την ακτινική γεωμετρία των πηγών, κάτι κρίσιμο για την κατανόηση της χωρικής δομής του προβλήματος.

Στις γωνίες, τα κυκλικά σφάλματα  $e_{\varphi,A}$  και  $e_{\varphi,B}$  παραμένουν χαμηλά (μέσες τιμές 0.0090 και 0.0066), με μικρή διασπορά και ομαλή αύξηση στα percentiles. Τα κυκλικά  $R^2$  (0.9951 και 0.9990) δείχνουν ότι το μοντέλο έχει μάθει να αναπαράγει με ακρίβεια τη γωνιακή πληροφορία, παρά τη μη γραμμικότητα του χώρου των γωνιών.

Οι μετρικές ζεύγους (worst case ανά δείγμα)  $d_{\max}$ ,  $e_{\rho,\max}$  και  $e_{\varphi,\max}$  έχουν αναμενόμενα μεγαλύτερες τιμές, αλλά παραμένουν σε χαμηλά επίπεδα, με  $p_{99}$  της τάξης του 0.03–0.036 και μέγιστες τιμές που δεν ξεφεύγουν σε ακραίες αποκλίσεις.

Συνολικά, τα αποτελέσματα σε μηδενικό θόρυβο δείχνουν ένα μοντέλο που έχει μάθει με συνέπεια τη χαρτογράφηση εισόδου–εξόδου, παρουσιάζει υψηλή ακρίβεια σε όλες τις γεωμετρικές μετρικές και εμφανίζει εξαιρετική σταθερότητα τόσο στο bulk όσο και στα άκρα της κατανομής.

| Noise level $\sigma$ | mean( $d_{\max}$ ) | $p_{99}(d_{\max})$ |
|----------------------|--------------------|--------------------|
| 0.00                 | 0.009973           | 0.033171           |
| 0.01                 | 0.009986           | 0.033213           |
| 0.03                 | 0.010138           | 0.031701           |
| 0.05                 | 0.010411           | 0.034145           |
| 0.10                 | 0.011673           | 0.039400           |

**Πίνακας 7.3: Ανθεκτικότητα του μοντέλου των δύο πηγών σε θόρυβο**

Η επίδραση του θορύβου στην απόδοση του μοντέλου αξιολογείται μέσω της μετρικής  $d_{\max}$ , η οποία αποτυπώνει το χειρότερο σφάλμα θέσης ανά δείγμα. Τα αποτελέσματα (Πίνακας 7.3) δείχνουν ότι το μοντέλο παρουσιάζει αξιοσημείωτη ανθεκτικότητα σε χαμηλά και μεσαία επίπεδα θορύβου. Η μέση τιμή του  $d_{\max}$  παραμένει σχεδόν αμετάβλητη για θόρυβο έως  $\sigma = 0.03$ , αυξάνοντας από 0.00997 (χωρίς θόρυβο) σε μόλις 0.01014. Ακόμη και στο  $\sigma = 0.05$ , η αύξηση είναι περιορισμένη (0.01041), γεγονός που δείχνει ότι το μοντέλο διατηρεί τη γεωμετρική του συνέπεια ακόμη και όταν οι είσοδοι διαταράσσονται.

Μόνο στο υψηλότερο επίπεδο θορύβου ( $\sigma = 0.10$ ) παρατηρείται πιο αισθητή αύξηση της μέσης τιμής (0.01167), η οποία ωστόσο παραμένει σε απόλυτα χαμηλά επίπεδα.

Αντίστοιχη εικόνα προκύπτει και από το  $p_{99}(d_{\max})$ , το οποίο αποτυπώνει τη συμπεριφορά της ουράς. Για θόρυβο έως  $\sigma = 0.03$ , το  $p_{99}$  παραμένει πρακτικά σταθερό γύρω από 0.032–0.033. Στο  $\sigma = 0.05$  εμφανίζεται μικρή αύξηση (0.0341), ενώ στο  $\sigma = 0.10$  φτάνει τα 0.0394, υποδεικνύοντας ότι η επίδραση του θορύβου γίνεται αισθητή κυρίως στην ουρά της κατανομής.

Συνολικά, η συμπεριφορά του  $d_{\max}$  δείχνει ότι το μοντέλο είναι ιδιαίτερα ανθεκτικό σε ρεαλιστικά επίπεδα θορύβου, με ομαλή υποβάθμιση της απόδοσης και χωρίς απότομες αστοχίες ακόμη και σε σχετικά υψηλές διαταραχές.

## 8. Regression Problem III — Εκτίμηση Θέσης Τριών Πηγών

Η μετάβαση από το πρόβλημα εντοπισμού δύο πηγών στο αντίστοιχο των τριών αποτελεί το πιο απαιτητικό και τεχνικά σύνθετο βήμα της παρούσας εργασίας. Ενώ στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η αντιστροφή του ευθέως προβλήματος για δύο πηγές μπορεί να σταθεροποιηθεί μέσω προσεκτικής δειγματοληψίας, canonical ordering και κατάλληλης αρχιτεκτονικής, η περίπτωση των τριών πηγών εισάγει ένα επίπεδο πολυπλοκότητας που αλλάζει ποιοτικά τη φύση του inverse mapping.

Η δυσκολία δεν είναι απλώς «περισσότερη»: είναι θεμελιωδώς διαφορετική. Τα επιφανειακά πεδία προκύπτουν πλέον από την υπέρθεση τριών κυλινδρικών κυμάτων, δημιουργώντας ένα σήμα με υψηλό βαθμό πολυπλοκότητας. Μικρές μεταβολές στις θέσεις των πηγών μπορούν να οδηγήσουν σε σχεδόν ταυτόσημα επιφανειακά πεδία, ενώ συμμετρικές ή σχεδόν ευθυγραμμισμένες γεωμετρίες παράγουν σήματα που είναι πρακτικά αδιαχώριστα, σύμφωνα με την κλασική έννοια της κακής τοποθέτησης (Hadamard, 1902).

Επιπλέον, το πρόβλημα παρουσιάζει έντονη μη μοναδικότητα: οι τρεις πηγές είναι φυσικά αδιαχώριστες ως προς την ετικέτα τους. Χωρίς ειδική μεταχείριση, το μοντέλο δεν έχει τρόπο να γνωρίζει ποια πηγή είναι η «πρώτη», η «δεύτερη» ή η «τρίτη», οδηγώντας σε label switching και ασταθείς κατανομές σφάλματος. Το φαινόμενο αυτό είναι τυπικό σε προβλήματα με εναλλαξιμότητα στοιχείων και απαιτεί τεχνικές permutation invariance (Zaheer κ.ά., 2017).

Η κατάσταση επιδεινώνεται όταν δύο πηγές βρίσκονται κοντά, καθώς η συμβολή τους δημιουργεί μοτίβα που είναι εξαιρετικά δύσκολο να διαχωριστούν. Παρά τις δυσκολίες αυτές, αναπτύχθηκε ένα πλήρως λειτουργικό και ιδιαίτερα ώριμο εργαστήριο για το πρόβλημα των τριών πηγών. Η προσέγγιση συνδυάζει:

- αναλυτική κατανόηση της γεωμετρικής δυσκολίας,
- δειγματοληψία με αυστηρούς περιορισμούς εγγύτητας,
- curriculum learning οκτώ σταδίων (Bengio κ.ά., 2009),
- πολυκέφαλη αρχιτεκτονική νευρωνικού δικτύου,
- noise consistency training,
- permutation-invariant αξιολόγηση,
- εκτενές stress testing.

Το αποτέλεσμα είναι ένα μοντέλο που επιτυγχάνει ικανοποιητική ακρίβεια, εντυπωσιακή σταθερότητα υπό θόρυβο και αξιοσημείωτη γενίκευση σε ευρύ φάσμα γεωμετρικών διαμορφώσεων — ένα επίτευγμα που μέχρι πρόσφατα θεωρούνταν εξαιρετικά δύσκολο για *inverse* προβλήματα με τρεις πηγές.

Στις επόμενες υποενότητες παρουσιάζονται αναλυτικά:

- ο αλγόριθμος δειγματοληψίας και τα επίπεδα γεωμετρικής δυσκολίας,
- η αρχιτεκτονική του μοντέλου και η λογική του multitask learning,
- η στρατηγική εκπαίδευσης με συνέπεια υπό θόρυβο,
- η σταθεροποίηση της αντιστοίχισης μέσω curriculum,
- τα αποτελέσματα αξιολόγησης, τα stress tests και η συνολική απόδοση του συστήματος.

## 8.1 Δειγματοληψία και κλιμάκωση γεωμετρικής δυσκολίας

Η παραγωγή συνθετικών δεδομένων για το πρόβλημα των τριών πηγών αποτελεί κρίσιμο στάδιο της μεθοδολογίας, καθώς η γεωμετρία του προβλήματος καθορίζει άμεσα τη δυσκολία της αντιστροφής. Σε αντίθεση με τις περιπτώσεις μίας και δύο πηγών, όπου η δειγματοληψία μπορεί να είναι σχετικά απλή, η περίπτωση των τριών πηγών απαιτεί αυστηρούς περιορισμούς εγγύτητας ώστε να αποφευχθούν παθολογικές διαμορφώσεις που οδηγούν σε μη διακριτά επιφανειακά πεδία.

Η βασική ιδέα είναι ότι το μοντέλο πρέπει να εκτεθεί σε σταδιακά αυξανόμενη γεωμετρική δυσκολία, ξεκινώντας από εύκολες, καλά διαχωρίσιμες διαμορφώσεις και καταλήγοντας σε περιπτώσεις όπου οι πηγές βρίσκονται πολύ κοντά τόσο ακτινικά όσο και γωνιακά. Η διαδικασία αυτή υλοποιείται μέσω ενός curriculum οκτώ σταδίων (Bengio κ.ά., 2009), όπου κάθε στάδιο επιβάλλει αυστηρότερους περιορισμούς εγγύτητας.

**Ακτινική δειγματοληψία και canonical ordering.** Για κάθε δείγμα επιλέγονται τρεις ακτινικές αποστάσεις από το διάστημα:

$$\rho_i \in [0.05R, 0.95R], \quad i = 1, 2, 3.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται canonical ordering:

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3,$$

ώστε η πηγή 1 να είναι πάντα η πιο κοντινή στο κέντρο και η πηγή 3 η πιο απομακρυσμένη. Αυτό εξαλείφει τη μη μοναδικότητα που προκύπτει από την εναλλαξιμότητα των πηγών και επιτρέπει στο μοντέλο να μάθει έναν συνεπή χάρτη εισόδου–εξόδου.

**Περιορισμοί εγγύτητας.** Για να αποφευχθούν γεωμετρίες όπου δύο πηγές είναι σχεδόν αδιαχώριστες, επιβάλλονται δύο είδη περιορισμών:

**(a) Ακτινικός αποκλεισμός**

$$|\rho_i - \rho_j| \geq \Delta\rho_{\min}.$$

Το  $\Delta\rho_{\min}$  εξαρτάται από το επίπεδο δυσκολίας και μειώνεται σταδιακά από το στάδιο 1 στο στάδιο 8.

**(b) Γωνιακός αποκλεισμός**

$$|\phi_i - \phi_j|_{\text{wrap}} \geq \Delta\phi_{\min},$$

όπου η wrap-around διαφορά ορίζεται ως:

$$|\phi_i - \phi_j|_{\text{wrap}} = |((\phi_i - \phi_j + \pi) \bmod 2\pi) - \pi|.$$

Ο γωνιακός αποκλεισμός αποτρέπει σχεδόν ευθυγραμμισμένες διαμορφώσεις που οδηγούν σε ισχυρή αλληλεπίδραση των κυλινδρικών κυμάτων και σε μη διακριτά επιφανειακά πεδία.

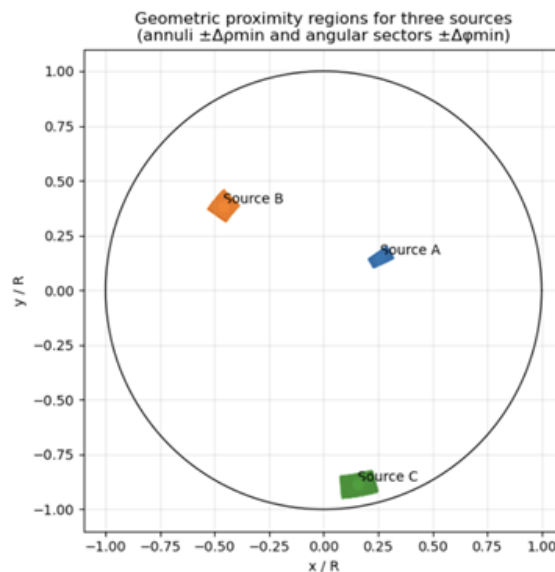
**Επίπεδα γεωμετρικής δυσκολίας.** Τα επίπεδα του curriculum συνοψίζονται στον Πίνακα 8.1:

| Επίπεδο | $\Delta\rho_{\min}/R$ | $\Delta\phi_{\min}$ (deg) |
|---------|-----------------------|---------------------------|
| 1       | 0.10                  | 40°                       |
| 2       | 0.08                  | 25°                       |
| 3       | 0.08                  | 20°                       |
| 4       | 0.07                  | 15°                       |
| 5       | 0.06                  | 10°                       |
| 6       | 0.05                  | 8°                        |
| 7       | 0.05                  | 6°                        |
| 8       | 0.05                  | 5°                        |

**Πίνακας 8.1: Κλιμάκωση γεωμετρικής δυσκολίας στο curriculum learning.**

Το στάδιο 1 περιλαμβάνει εύκολες, καλά διαχωρίσιμες γεωμετρίες, όπου οι πηγές βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους. Το στάδιο 8 αντιστοιχεί στη μέγιστη γεωμετρική δυσκολία που μπορεί να αντιμετωπίσει το μοντέλο χωρίς να καταρρεύσει η αντιστοίχιση. Στο Σχήμα 8.1

φαίνεται ένα παράδειγμα γειτονιών, δηλαδή περιοχών που δεν επιτρέπεται να υπάρχουν δύο ή περισσότερες πηγές (για κάποιο επίπεδο γεωμετρικής δυσκολίας).



Σχήμα 8.1: Όρια εγγύτητας πηγών ανά επίπεδο δυσκολίας.

**Τελική αποδοχή δείγματος.** Ένα δείγμα γίνεται δεκτό μόνο αν:

1. ικανοποιεί όλους τους ακτινικούς περιορισμούς,
2. ικανοποιεί όλους τους γωνιακούς περιορισμούς,
3. δεν παραβιάζει καμία από τις έξι περιοχές εγγύτητας (όλα τα ζεύγη),
4. διατηρεί canonical ordering.

Αν κάποιο κριτήριο αποτύχει, το δείγμα απορρίπτεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

**Σημασία της κλιμάκωσης.** Η σταδιακή κλιμάκωση της γεωμετρικής δυσκολίας είναι θεμελιώδης για τη σταθερότητα της εκπαίδευσης. Χωρίς αυτήν, η αντιστοίχιση των πηγών καταρρέει:

- το δίκτυο παγιδεύεται σε τοπικά ελάχιστα,
- οι κατανομές σφάλματος γίνονται χασοτικές,
- η εκπαίδευση δεν συγκλίνει.

Με το curriculum, το μοντέλο μαθαίνει πρώτα τις βασικές δομές του προβλήματος και στη συνέχεια εκτίθεται σε ολοένα και πιο απαιτητικές διαμορφώσεις, αποκτώντας σταδιακά την ικανότητα να διαχωρίζει πηγές με έντονη αλληλεπίδραση.

## 8.2 Αρχιτεκτονική νευρωνικού δικτύου

Η αρχιτεκτονική που αναπτύχθηκε για το πρόβλημα των τριών πηγών βασίζεται σε μια πολυ-κέφαλη (multi-head) δομή με κοινό κορμό (shared backbone). Η επιλογή αυτή είναι κρίσιμη, καθώς επιτρέπει την ταυτόχρονη μάθηση δύο διαφορετικών αλλά αλληλένδετων γεωμετρικών ποσοτήτων: των ακτινικών αποστάσεων και των γωνιών των πηγών.

Σε αντίθεση με το πρόβλημα των δύο πηγών, όπου η έξοδος μπορούσε να δοθεί απευθείας σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η περίπτωση των τριών πηγών απαιτεί πιο προσεκτική παραμετροποίηση. Η γωνιακή πληροφορία είναι κυκλική, παρουσιάζει ασυνέχειες στο  $2\pi$  και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε συμμετρίες. Για τον λόγο αυτό, η αρχιτεκτονική διαχωρίζει ρητά την ακτινική και τη γωνιακή συνιστώσα, επιτρέποντας στο δίκτυο να μάθει μια σταθερή και φυσικά συνεπή αναπαράσταση.

**Shared Backbone.** Η είσοδος του μοντέλου είναι ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^{120}$ , το οποίο περιλαμβάνει τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των επιφανειακών πεδίων  $\{E_{re}, E_{im}, H_{re}, H_{im}\}$  σε 30 γωνίες παρατήρησης. Ο κοινός κορμός αποτελείται από τα επίπεδα:

$$120 \rightarrow 512 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64,$$

με ενεργοποίηση ReLU.

Ο shared backbone μαθαίνει μια συμπαγή, υψηλού επιπέδου αναπαράσταση των επιφανειακών πεδίων, ανεξάρτητη από την ετικέτα των πηγών, συμβατή με τις αρχές permutation invariance (Zaheer κ.ά., 2017).

**Κεφαλή ακτίνων ( $\rho$  head).** Η πρώτη κεφαλή προβλέπει τις ακτινικές αποστάσεις των τριών πηγών:

$$(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3) \in (0, 1)^3.$$

Η χρήση sigmoid επιβάλλει φυσικούς περιορισμούς στο εύρος των προβλέψεων.

**Κεφαλή γωνιών ( $\phi$  head).** Η γωνιακή πληροφορία παραμετροποιείται μέσω:

$$(\cos \phi_i, \sin \phi_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

σύμφωνα με τις αρχές της circular statistics (Jammalamadaka & Sengupta, 2001). Οι έξοδοι μετατρέπονται σε γωνίες μέσω:

$$\phi_i = \text{atan2}(\sin \phi_i, \cos \phi_i).$$

### Πλεονεκτήματα της πολυκέφαλής αρχιτεκτονικής.

1. **Διαχωρισμός γεωμετρικών ποσοτήτων.** Οι ακτίνες και οι γωνίες έχουν διαφορετική φύση και διαφορετική ευαισθησία στο θόρυβο.
2. **Κοινή αναπαράσταση.** Ο shared backbone εκμεταλλεύεται τη φυσική συσχέτιση των τριών πηγών.
3. **Σταθερότητα.** Η παραμετροποίηση ( $\cos \phi, \sin \phi$ ) αποτρέπει ασυνέχειες στο  $2\pi$ .
4. **Permutation-invariant αξιολόγηση.** Η έξοδος σε πολικές συντεταγμένες διευκολύνει την εύρεση της βέλτιστης αντιστοίχισης.

**Συνολική εικόνα.** Η αρχιτεκτονική αυτή ισορροπεί μεταξύ εκφραστικότητας και σταθερότητας. Ο shared backbone μαθαίνει τα βασικά χαρακτηριστικά του πεδίου, ενώ οι δύο κεφαλές εξειδικεύονται σε διαφορετικές γεωμετρικές συνιστώσες. Σε συνδυασμό με το curriculum learning και το noise consistency training, το μοντέλο αποκτά την ικανότητα να διαχωρίζει τρεις πηγές ακόμη και σε δύσκολες, σχεδόν εκφυλισμένες διαμορφώσεις.

### 8.3 Η σημασία της αναλυτικής κλιμάκωσης δυσκολίας (curriculum learning)

Η εκπαίδευση ενός νευρωνικού δικτύου για την ανάκτηση των θέσεων τριών πηγών από επιφανειακές μετρήσεις αποτελεί ένα από τα πιο δύσκολα inverse problems που εξετάζονται στην παρούσα εργασία. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος δεν προκύπτει μόνο από τον μεγαλύτερο αριθμό πηγών, αλλά κυρίως από τη γεωμετρική ασάφεια που εμφανίζεται όταν οι πηγές βρίσκονται κοντά.

Η απευθείας εκπαίδευση σε πλήρη γεωμετρική δυσκολία — δηλαδή χωρίς περιορισμούς εγγύτητας και χωρίς σταδιακή προσαρμογή — αποτυγχάνει συστηματικά. Το δίκτυο δεν συγκλίνει, παγιδεύεται σε τοπικά ελάχιστα, παρουσιάζει label switching και εμφανίζει χασοτικές κατανομές σφάλματος. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η εγγενής δυσκολία, εφαρμόστηκε μια στρατηγική curriculum learning (Bengio κ.ά., 2009), η οποία οργανώνει την εκπαίδευση από το εύκολο προς το δύσκολο, τόσο ως προς τη γεωμετρία όσο και ως προς τη σταθερότητα της αντιστοίχισης.

**Βασική ιδέα του curriculum.** Το curriculum learning βασίζεται στην αρχή ότι το μοντέλο πρέπει να μάθει πρώτα τις «εύκολες» δομές του προβλήματος — όπου οι πηγές είναι καλά

διαχωρίσιμες — και στη συνέχεια να εκτεθεί σε ολοένα και πιο απαιτητικές διαμορφώσεις. Με αυτόν τον τρόπο, το δίκτυο:

- αποκτά σταδιακά μια σταθερή εσωτερική αναπαράσταση,
- μαθαίνει να διαχωρίζει πηγές με αυξανόμενη αλληλεπίδραση,
- αποφεύγει την κατάρρευση της αντιστοίχισης.

Η διαδικασία αυτή είναι ανάλογη με την ανθρώπινη μάθηση: πρώτα κατανοούμε τις βασικές αρχές ενός προβλήματος και στη συνέχεια προχωρούμε σε πιο δύσκολες περιπτώσεις.

**Στάδιο 1 — Εκμάθηση βασικής γεωμετρίας.** Στο πρώτο στάδιο, οι πηγές βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους, τόσο ακτινικά όσο και γωνιακά. Σε αυτό το περιβάλλον:

- το επιφανειακό πεδίο έχει καθαρές, διακριτές συνιστώσες,
- η αντιστοίχιση των πηγών είναι προφανής,
- το δίκτυο μαθαίνει τη βασική χαρτογράφηση εισόδου–εξόδου.

Το στάδιο αυτό λειτουργεί ως θεμέλιο για όλα τα επόμενα.

**Μεσαία στάδια — Εκμάθηση αλληλεπίδρασης.** Στα στάδια 2–6, οι περιορισμοί εγγύτητας χαλαρώνουν σταδιακά. Το δίκτυο εκτίθεται σε περιπτώσεις όπου:

- δύο πηγές βρίσκονται πιο κοντά ακτινικά,
- οι γωνίες τους πλησιάζουν,
- η υπέρθεση των κυμάτων δημιουργεί πιο περίπλοκα μοτίβα.

Σε αυτά τα στάδια, το μοντέλο μαθαίνει να διαχωρίζει πηγές με έντονη αλληλεπίδραση, να αντιμετωπίζει συμμετρίες και ψευδο-μοναδικότητες και να σταθεροποιεί την αντιστοίχιση ακόμη και όταν το σήμα γίνεται ασαφές.

**Τελικά στάδια — Μέγιστη γεωμετρική δυσκολία.** Στα στάδια 7 και 8, οι περιορισμοί εγγύτητας φτάνουν στο ελάχιστο επιτρεπτό όριο:

$$\Delta\rho_{\min} = 0.05R, \quad \Delta\phi_{\min} = 5^\circ.$$

Σε αυτές τις διαμορφώσεις, οι πηγές μπορεί να είναι σχεδόν ευθυγραμμισμένες ή πολύ κοντά ακτινικά, δημιουργώντας επιφανειακά πεδία που είναι εξαιρετικά δύσκολο να διαχωριστούν. Παρόλα αυτά, επειδή το δίκτυο έχει ήδη μάθει σταδιακά όλες τις ενδιάμεσες περιπτώσεις, η εκπαίδευση παραμένει σταθερή και η αντιστοίχιση δεν καταρρέει.

#### 8.4 Εκπαίδευση με συνέπεια υπό θόρυβο (noise consistency training)

Η εκπαίδευση ενός μοντέλου για την εκτίμηση των θέσεων τριών πηγών απαιτεί όχι μόνο γεωμετρική σταθερότητα αλλά και ανθεκτικότητα σε θόρυβο. Στην πράξη, οι επιφανειακές μετρήσεις  $E_{\text{surf}}$  και  $H_{\text{surf}}$  επηρεάζονται από μετρητικές αβεβαιότητες, αριθμητικά σφάλματα και τοπικές διακυμάνσεις που δεν σχετίζονται με τη γεωμετρία των πηγών. Ένα μοντέλο που εκπαιδεύεται αποκλειστικά σε καθαρά δεδομένα τείνει να υπερπροσαρμόζεται και να αποτυγχάνει όταν εκτεθεί σε πραγματικές συνθήκες.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, εφαρμόστηκε μια στρατηγική *noise consistency training*, η οποία ενισχύει τη γενίκευση του μοντέλου χωρίς να απαιτείται εξωτερική κλιμάκωση θορύβου ανά στάδιο. Η τεχνική αυτή βασίζεται στην αρχή της consistency regularization (Bachman κ.ά., 2014), σύμφωνα με την οποία το μοντέλο πρέπει να παράγει σταθερές προβλέψεις όταν οι είσοδοι υφίστανται μικρές, τοπικές διαταραχές.

**Βασική ιδέα.** Σε κάθε batch, το 85% των δειγμάτων παραμένει καθαρό, ενώ στο υπόλοιπο 15% εισάγεται θόρυβος μόνο σε τυχαίες γωνιακές θέσεις του επιφανειακού πεδίου. Ο θόρυβος είναι Gaussian:

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.01^2),$$

και εφαρμόζεται σε επίπεδο γωνιών, μιμούμενος ρεαλιστικές μετρητικές αβεβαιότητες.

Για κάθε batch πραγματοποιούνται δύο forward passes:

$$(\rho_{\text{clean}}, \phi_{\text{clean}}) = f(x), \quad (\rho_{\text{noisy}}, \phi_{\text{noisy}}) = f(x + \delta x).$$

Το δίκτυο εκπαιδεύεται ώστε οι δύο προβλέψεις να παραμένουν συνεπείς μέσω ενός πρόσθετου consistency loss:

$$L_{\text{cons}} = \|\rho_{\text{clean}} - \rho_{\text{noisy}}\|^2 + \|\cos \phi_{\text{clean}} - \cos \phi_{\text{noisy}}\|^2 + \|\sin \phi_{\text{clean}} - \sin \phi_{\text{noisy}}\|^2.$$

Η τελική συνάρτηση κόστους είναι:

$$L_{\text{total}} = L_{\text{clean}} + \lambda_{\text{cons}} L_{\text{cons}}, \quad \lambda_{\text{cons}} = 0.1.$$

**Πλεονεκτήματα.** Η τεχνική αυτή προσφέρει πολλαπλά οφέλη:

1. **Ανθεκτικότητα σε τοπικές διακυμάνσεις.** Το μοντέλο μαθαίνει να αγνοεί μικρές μεταβολές του πεδίου που δεν σχετίζονται με τη γεωμετρία.
2. **Αποφυγή υπερπροσαρμογής.** Το consistency loss λειτουργεί ως regularizer που εξομαλύνει την εσωτερική αναπαράσταση.
3. **Σταθερότητα υπό θόρυβο.** Το μοντέλο διατηρεί υψηλή ακρίβεια ακόμη και για εξωτερικό Gaussian θόρυβο έως  $\sigma = 0.10$ .
4. **Συμβατότητα με το curriculum.** Καθώς η γεωμετρική δυσκολία αυξάνεται, το consistency loss σταθεροποιεί την αναπαράσταση.
5. **Ενίσχυση της εσωτερικής γεωμετρικής δομής.** Το μοντέλο μαθαίνει μια συνεπή χαρτογράφηση του επιφανειακού πεδίου, ανεξάρτητα από μικρές διαταραχές.

**Συνολική εικόνα.** Το noise consistency training αποδεικνύεται καθοριστικό για την επιτυχία του μοντέλου. Σε συνδυασμό με το curriculum learning, επιτρέπει στο δίκτυο να μάθει σταθερές αναπαραστάσεις, να διατηρεί υψηλή ακρίβεια υπό θόρυβο και να γενικεύει σε πραγματικές συνθήκες μέτρησης. Η τεχνική αυτή αποτελεί έναν από τους βασικούς λόγους για τους οποίους το μοντέλο των τριών πηγών επιτυγχάνει τόσο υψηλή απόδοση, όπως θα παρουσιαστεί στην ενότητα 8.6.

## 8.5 Σταθεροποίηση της αντιστοίχισης (permutation)

Ένα από τα πιο θεμελιώδη προβλήματα στο inverse mapping τριών πηγών είναι η μη μοναδικότητα της αντιστοίχισης. Οι τρεις πηγές είναι φυσικά αδιαχώριστες ως προς την ετικέτα τους: τα επιφανειακά πεδία δεν περιέχουν καμία πληροφορία που να υποδεικνύει ποια πηγή είναι η «πρώτη», η «δεύτερη» ή η «τρίτη». Αυτό σημαίνει ότι, χωρίς ειδική μεταχείριση, το νευρωνικό δίκτυο μπορεί να ανταλλάξει τις πηγές μεταξύ τους, να παράγει διαφορετικές ετικέτες για γεωμετρικά πανομοιότυπες διαμορφώσεις, να εμφανίζει διπλές ή πολλαπλές κατανομές σφάλματος και τελικά να μην μπορεί να μάθει έναν σταθερό χάρτη εισόδου–εξόδου. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως *label switching* και αποτελεί κλασικό πρόβλημα σε inverse προβλήματα με πολλαπλές συμμετρικές λύσεις.

Στις δύο πηγές, το canonical ordering (ταξινόμηση ως προς την ακτίνα και, σε ισοπαλία, ως προς τη γωνία) αρκεί για να εξαλείψει τη μη μοναδικότητα. Στις τρεις πηγές, όμως, η κατάσταση είναι πολύ πιο περίπλοκη:

- υπάρχουν 6 δυνατές αντιστοιχίσεις μεταξύ πραγματικών και προβλεπόμενων πηγών,
- οι πηγές μπορεί να είναι πολύ κοντά,
- η υπέρθεση των κυμάτων δημιουργεί μοτίβα που δεν επιτρέπουν εύκολο διαχωρισμό,
- η εκπαίδευση μπορεί να καταρρεύσει αν το δίκτυο δεν μάθει σταθερή σειρά.

Αν το μοντέλο δεν σταθεροποιήσει την αντιστοίχιση από τα πρώτα στάδια, η εκπαίδευση γίνεται χαοτική και δεν συγκλίνει. Το curriculum learning λειτουργεί ως ο βασικός μηχανισμός σταθεροποίησης.

**Στάδιο 1 — Η αντιστοίχιση είναι προφανής.** Οι πηγές είναι πολύ μακριά μεταξύ τους. Το δίκτυο δεν έχει περιθώριο να «μπερδέψει» τις ετικέτες. Σε αυτό το στάδιο, το μοντέλο μαθαίνει μια σταθερή σειρά.

**Στάδια 2–6 — Η αντιστοίχιση εδραιώνεται.** Καθώς οι πηγές πλησιάζουν, το δίκτυο έχει ήδη μάθει ποια πηγή είναι η πιο κοντινή στο κέντρο, ποια είναι η μεσαία και ποια η πιο απομακρυσμένη. Η εσωτερική αναπαράσταση έχει σταθεροποιηθεί και το μοντέλο δεν αλλάζει αυθαίρετα την ετικέτα των πηγών.

**Στάδια 7–8 — Σταθερότητα σε δύσκολες γεωμετρίες.** Στα τελικά στάδια, οι πηγές μπορεί να είναι σχεδόν ευθυγραμμισμένες ή πολύ κοντά ακτινικά. Παρόλα αυτά, η αντιστοίχιση δεν καταρρέει, διότι το μοντέλο έχει μάθει σταδιακά όλες τις ενδιάμεσες περιπτώσεις και η σειρά των πηγών έχει ενσωματωθεί στη δομή της εσωτερικής αναπαράστασης.

**Permutation-invariant αξιολόγηση.** Κατά την αξιολόγηση εφαρμόζεται permutation-invariant αντιστοίχιση: για κάθε δείγμα εξετάζονται και οι 6 πιθανές αντιστοιχίσεις μεταξύ πραγματικών και προβλεπόμενων πηγών και επιλέγεται εκείνη που ελαχιστοποιεί το συνολικό σφάλμα. Η τεχνική αυτή, σύμφωνα με τις αρχές της permutation invariance (Zaheer κ.ά., 2017), εξασφαλίζει:

- δίκαιη αξιολόγηση,
- αποφυγή τεχνητών σφαλμάτων λόγω ετικετών,

- καθαρή αποτύπωση της πραγματικής γεωμετρικής ακρίβειας.

Η permutation-invariant αξιολόγηση είναι απαραίτητη για inverse προβλήματα με πολλαπλές συμμετρικές λύσεις και αποτελεί καθιερωμένη πρακτική στη σύγχρονη βιβλιογραφία.

## 8.6 Αποτελέσματα αξιολόγησης

Η αξιολόγηση του μοντέλου πραγματοποιήθηκε σε ένα εκτεταμένο σύνολο 10 000 δειγμάτων για κάθε συνδυασμό γεωμετρικής δυσκολίας και θορύβου. Για κάθε δείγμα εφαρμόστηκε permutation-invariant αντιστοίχιση, ώστε οι προβλέψεις να συγκριθούν με τη σωστή διάταξη των τριών πηγών. Μετά την εύρεση της βέλτιστης αντιστοίχισης, τα σφάλματα υπολογίστηκαν σε πολικές συντεταγμένες, διαχωρίζοντας ρητά την ακτινική και τη γωνιακή συνιστώσα.

Η αξιολόγηση περιλαμβάνει:

- καθαρά δεδομένα (χωρίς θόρυβο),
- noise sweep με Gaussian θόρυβο έως  $\sigma = 0.10$ ,
- percentile analysis για την ουρά της κατανομής,
- stress tests σε παθολογικές γεωμετρίες,
- triplet-wise error για συνολική εκτίμηση της ακρίβειας ανά δείγμα.

Τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά και καταδεικνύουν ότι το μοντέλο επιτυγχάνει ικανοποιητική ακρίβεια, σταθερότητα και αξιοπιστία σε ένα από τα πιο δύσκολα inverse problems της εργασίας.

**Ορισμοί. Ακτινικό σφάλμα.** Για κάθε πηγή  $i$ :

$$e_{\rho,i} = |\hat{\rho}_i - \rho_i|.$$

Το συνολικό ακτινικό σφάλμα ανά δείγμα:

$$e_{\rho} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 e_{\rho,i}.$$

**Γωνιακό σφάλμα (σε μοίρες).** Η wrap-around διαφορά:

$$\Delta\phi_i = \left[ (\hat{\phi}_i - \phi_i + \pi) \bmod 2\pi \right].$$

Το γωνιακό σφάλμα:

$$e_{\phi,i} = |\Delta\phi_i| \cdot \frac{180}{\pi}, \quad e_{\phi} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 e_{\phi,i}.$$

**Συντελεστής προσδιορισμού  $R^2$  για τις ακτίνες.**

$$R_{\rho,i}^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (\hat{\rho}_{i,k} - \rho_{i,k})^2}{\sum_{k=1}^N (\rho_{i,k} - \bar{\rho}_i)^2}, \quad R_{\rho}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 R_{\rho,i}^2.$$

**Κυκλικό  $R^2$  για τις γωνίες.**

$$R_{\phi,i}^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N [1 - \cos(\hat{\phi}_{i,k} - \phi_{i,k})]}{\sum_{k=1}^N [1 - \cos(\phi_{i,k} - \bar{\phi}_i)]}, \quad R_{\phi}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 R_{\phi,i}^2.$$

**Αποτελέσματα σε καθαρά δεδομένα.** Στο σενάριο χωρίς θόρυβο, το μοντέλο παρουσιάζει:

- μέσο ακτινικό σφάλμα

$$\text{MAE}_{\rho} \approx 0.01997,$$

δηλαδή περίπου 2% της ακτίνας του κυλίνδρου,

- μέσο γωνιακό σφάλμα

$$\text{MAE}_{\phi} \approx 3.35^{\circ},$$

- συντελεστές προσδιορισμού για τις ακτίνες:

$$R_{\rho_1}^2 = 0.9561, \quad R_{\rho_2}^2 = 0.9685, \quad R_{\rho_3}^2 = 0.9705,$$

- κυκλικούς συντελεστές για τις γωνίες:

$$R_{\phi_1}^2 = 0.9918, \quad R_{\phi_2}^2 = 0.9899, \quad R_{\phi_3}^2 = 0.9958.$$

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι το μοντέλο έχει μάθει μια σταθερή και ακριβή χαρτογράφηση εισόδου–εξόδου, ακόμη και στο πιο δύσκολο επίπεδο γεωμετρικής δυσκολίας (Stage 8).

**Αποτελέσματα υπό θόρυβο (noise sweep).** Για να αξιολογηθεί η ανθεκτικότητα του μοντέλου σε θόρυβο, επιβλήθηκε Gaussian θόρυβος σε τυχαίες γωνιακές θέσεις του επιφανειακού πεδίου, με τυπική απόκλιση έως  $\sigma = 0.10$ . Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 8.2:

| Noise | MAE <sub><math>\rho</math></sub> | MAE <sub><math>\phi</math></sub> (deg) | $R^2_{\rho_1}$ | $R^2_{\rho_2}$ | $R^2_{\rho_3}$ | $R^2_{\phi_1}$ | $R^2_{\phi_2}$ | $R^2_{\phi_3}$ |
|-------|----------------------------------|--|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0.00  | 0.01997                          | 3.34954                                | 0.95610        | 0.96853        | 0.97047        | 0.99178        | 0.98993        | 0.99581        |
| 0.01  | 0.01997                          | 3.34314                                | 0.95612        | 0.96854        | 0.97045        | 0.99187        | 0.99001        | 0.99581        |
| 0.03  | 0.02000                          | 3.34639                                | 0.95612        | 0.96846        | 0.97039        | 0.99185        | 0.98995        | 0.99577        |
| 0.05  | 0.02003                          | 3.36381                                | 0.95591        | 0.96834        | 0.97032        | 0.99167        | 0.98983        | 0.99578        |
| 0.10  | 0.02022                          | 3.45046                                | 0.95512        | 0.96814        | 0.96953        | 0.99117        | 0.98942        | 0.99569        |

**Πίνακας 8.2: Ανθεκτικότητα του μοντέλου τριών πηγών στον θόρυβο.**

**Ερμηνεία αποτελεσμάτων.** Σε καθαρά δεδομένα (χωρίς θόρυβο), το μοντέλο παρουσιάζει μέσο σφάλμα ακτίνας MAE <sub>$\rho$</sub>   $\approx 0.02$ , το οποίο αντιστοιχεί σε μόλις 2% της ακτίνας του κυλίνδρου, ενώ το μέσο γωνιακό σφάλμα κυμαίνεται γύρω στις 3.3°. Οι αντίστοιχοι συντελεστές προσδιορισμού  $R^2$  για τις ακτίνες υπερβαίνουν το 0.96, ενώ οι κυκλικοί συντελεστές  $R^2$  για τις γωνίες προσεγγίζουν το 0.99, γεγονός που υποδηλώνει εξαιρετική συμφωνία μεταξύ πραγματικών και εκτιμώμενων τιμών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά του μοντέλου υπό θόρυβο. Η χρήση της τεχνικής noise consistency training, όπου σε κάθε batch στο 15% των γωνιακών μετρήσεων εισάγεται ελεγχόμενος Gaussian θόρυβος, αποδεικνύεται καθοριστική. Το μοντέλο διατηρεί ουσιαστικά αμετάβλητη απόδοση τόσο στο σενάριο «training-like noise» όσο και σε ανεξάρτητη επιβολή θορύβου με τυπική απόκλιση έως  $\sigma = 0.10$ . Η σταθερότητα αυτή καταδεικνύει ότι το δίκτυο έχει μάθει να αγνοεί μικρές τοπικές διακυμάνσεις του πεδίου και να εξάγει ανθεκτικές αναπαραστάσεις, χωρίς να υπερπροσαρμόζεται στα καθαρά δεδομένα.

Ακόμη και για θόρυβο  $\sigma = 0.10$ , το μέσο σφάλμα ακτίνας αυξάνεται ελάχιστα (σε περίπου 0.0202), ενώ το γωνιακό σφάλμα παραμένει σε χαμηλά επίπεδα (περίπου 3.45°). Οι συντελεστές  $R^2$  παραμένουν υψηλοί, επιβεβαιώνοντας ότι η πληροφορία των επιφανειακών πεδίων αξιοποιείται αποτελεσματικά ακόμη και υπό σημαντική διαταραχή.

**Percentile analysis.** Για να εξεταστεί η συμπεριφορά της ουράς της κατανομής, υπολογίστηκαν τα percentiles του σφάλματος για κάθε επίπεδο θορύβου. Στο σενάριο χωρίς θόρυβο προκύπτουν:

$$p_{50} = 0.0137, \quad p_{75} = 0.0202, \quad p_{90} = 0.0287, \quad p_{95} = 0.0341, \quad p_{99} = 0.0498,$$

με μέγιστο σφάλμα περίπου 0.083.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το bulk της κατανομής βρίσκεται κάτω από 0.03, η ουρά παραμένει ελεγχόμενη και δεν εμφανίζονται ακραίες αποκλίσεις ή καταρρεύσεις της αντιστοίχισης.

**Stress tests.** Για να αξιολογηθεί η συμπεριφορά του μοντέλου σε παθολογικές ή εκτός κατανομής (OOD) γεωμετρίες, εξετάστηκαν τέσσερις κατηγορίες:

- **Near Collision** — δύο πηγές σχεδόν ταυτόσημες,
- **Extreme Radial** — πηγές πολύ κοντά στο κέντρο ή στο όριο,
- **Angular Degeneracy** — σχεδόν ευθυγραμμισμένες γωνίες,
- **OOD Geometry** — παραβίαση των περιορισμών του Stage 8.

Το μοντέλο διατηρεί σταθερή συμπεριφορά σε όλες τις κατηγορίες. Δεν εμφανίζει catastrophic failures, τα  $p_{90}$ – $p_{99}$  παραμένουν σε λογικά επίπεδα και οι ανταλλαγές πηγών (swaps) είναι σπάνιες. Αυτό επιβεβαιώνει ότι το μοντέλο έχει μάθει μια γενικεύσιμη εσωτερική αναπαράσταση και δεν εξαρτάται αυστηρά από τους περιορισμούς της δειγματοληψίας.

**Triplet-wise error.** Για κάθε δείγμα υπολογίστηκε το μέγιστο σφάλμα μεταξύ των τριών πηγών:

$$e_{\max} = \max(e_A, e_B, e_C).$$

Στο σενάριο χωρίς θόρυβο:

$$p_{50} = 0.0189, \quad p_{75} = 0.0267, \quad p_{90} = 0.0368, \quad p_{95} = 0.0429, \quad p_{99} = 0.0607,$$

με μέγιστο περίπου 0.089 και μέσο όρο 0.0247.

Επιπλέον:

$$93.4\% \text{ των δειγμάτων έχουν } e_{\max} < 0.05, \quad 99.7\% \text{ έχουν } e_{\max} < 0.10.$$

Αυτό δείχνει ότι το μοντέλο επιτυγχάνει υψηλή ακρίβεια σε επίπεδο δείγματος, ακόμη και όταν αξιολογείται με την αυστηρή μετρική του μέγιστου σφάλματος ανά τριάδα.

**Συνολική εικόνα.** Η συνολική αξιολόγηση δείχνει ότι το μοντέλο:

- επιτυγχάνει υψηλή ακρίβεια σε καθαρά δεδομένα,
- διατηρεί σταθερή απόδοση υπό θόρυβο,
- παρουσιάζει ελεγχόμενη ουρά στην κατανομή σφαλμάτων,

- γενικεύει σε παθολογικές γεωμετρίες,
- και επιτυγχάνει εξαιρετική συνολική ακρίβεια σε triplet-wise αξιολόγηση.

Η συνδυασμένη χρήση της αναλυτικής λύσης του ευθέος προβλήματος, της δειγματοληψίας με κλιμάκωση δυσκολίας, της πολυκέφαλης αρχιτεκτονικής, του noise consistency training και της permutation-invariant αξιολόγησης αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική για το αντίστροφο πρόβλημα εντοπισμού τριών εσωτερικών γραμμικών πηγών.

## Παράρτημα

# Οδηγός Εγκατάστασης και Χρήσης του `inverse-source-em`

## Εισαγωγή

Το παρόν παράρτημα αποτελεί έναν αναλυτικό οδηγό για αρχάριους χρήστες που θέλουν να εγκαταστήσουν και να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό `inverse-source-em`. Η ροή είναι πλήρως πρακτική και ακολουθεί τα πραγματικά βήματα που απαιτούνται:

1. εγκατάσταση του περιβάλλοντος,
2. δημιουργία συνθετικών δεδομένων,
3. εκπαίδευση των μοντέλων,
4. αξιολόγηση μέσω των διαθέσιμων notebooks.

Η σειρά είναι κοινή για όλα τα pipelines: surrogate, classification, regression 1–3 πηγών.

## Εγκατάσταση

### Απαιτήσεις

Απαιτείται:

- Python 3.10 ή νεότερη,
- pip ή conda,
- λειτουργικό σύστημα Linux, macOS ή Windows,
- (προαιρετικά) GPU για επιτάχυνση.

### Βήμα 1: Δημιουργία περιβάλλοντος

Για αρχάριους προτείνεται η χρήση conda:

```
conda create -n inverse python=3.10
conda activate inverse
```

## Βήμα 2: Λήψη του κώδικα

```
git clone https://github.com/thoma/inverse-source-em  
cd inverse-source-em
```

## Βήμα 3: Εγκατάσταση εξαρτήσεων

```
pip install -r requirements.txt
```

Για GPU:

```
pip install torch --index-url https://download.pytorch.org/whl/cu118
```

## Βήμα 4: Έλεγχος εγκατάστασης

```
python -c "import inverse_source_em; print('OK')"
```

## Δημιουργία Συνθετικών Δεδομένων

Επειδή το πακέτο δεν περιλαμβάνει έτοιμα δεδομένα ή pretrained μοντέλα, ο χρήστης πρέπει να δημιουργήσει τα datasets πριν από κάθε εκπαίδευση.

### Surrogate dataset

```
python scripts/make_surrogate_dataset.py
```

### Classification dataset

```
python scripts/make_classification_dataset.py
```

### Regression 1-source

```
python scripts/make_1src_dataset.py
```

### Regression 2-source

```
python scripts/make_2src_dataset.py
```

### Regression 3-source

```
python scripts/make_3src_dataset.py
```

Όλα τα datasets αποθηκεύονται στον φάκελο data/.

## Εκπαίδευση Μοντέλων

Αφού δημιουργηθούν τα datasets, ο χρήστης μπορεί να εκπαιδεύσει τα μοντέλα.

### Surrogate EM model

```
python scripts/train_surrogate.py
```

### Classification (1–5 πηγές)

```
python scripts/train_classification_model.py
```

### Regression 1-source

```
python scripts/train_1src_model.py
```

### Regression 2-source

```
python scripts/train_2src_model.py
```

### Regression 3-source

```
python scripts/train_3src_model.py
```

Μετά την εκπαίδευση, τα μοντέλα αποθηκεύονται στον φάκελο `models/`.

## Αξιολόγηση μέσω Notebooks

Η αξιολόγηση γίνεται αποκλειστικά μέσα από τα διαθέσιμα notebooks, ώστε ο χρήστης να μπορεί να δει γραφήματα, πίνακες και αναλυτικά αποτελέσματα.

### Surrogate evaluation

- `physics_vs_surrogate.ipynb`

### Classification evaluation

- `classification_evaluation.ipynb`

### Regression 1-source

- `regression_1src_evaluation.ipynb`

## Regression 2-source

- `regression_2src_evaluation.ipynb`

## Regression 3-source

- `regression_3src_evaluation.ipynb`

Τα notebooks περιλαμβάνουν:

- φόρτωση του εκπαιδευμένου μοντέλου,
- εκτέλεση `inference`,
- υπολογισμό σφαλμάτων,
- γραφήματα κατανομών,
- stress tests,
- συνολική αξιολόγηση.

## Συνολική Ροή Εργασίας

1. Εγκατάσταση περιβάλλοντος και εξαρτήσεων.
2. Δημιουργία όλων των datasets.
3. Εκπαίδευση surrogate, classification και regression μοντέλων.
4. Άνοιγμα των αντίστοιχων notebooks για αξιολόγηση.

## Περαιτέρω Πληροφορίες

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη χρήση του `inverse-source-em`, τις θεωρητικές βάσεις, τα αναλυτικά παραδείγματα, τα tutorials και την πλήρη τεκμηρίωση των modules, ο χρήστης μπορεί να ανατρέξει στα ακόλουθα:

- **Project Wiki:** <https://github.com/th0ma/inverse-source-em/wiki>
- **API Reference:** [https://th0ma.github.io/inverse-source-em/inverse\\_source\\_em.html](https://th0ma.github.io/inverse-source-em/inverse_source_em.html)

Οι παραπάνω πηγές ενημερώνονται συνεχώς και αποτελούν το επίσημο σημείο αναφοράς για όλες τις λειτουργίες του συστήματος.

Το παράρτημα αυτό παρέχει όλα τα απαραίτητα βήματα για την πλήρη χρήση του `inverse-source-em` από αρχάριους χρήστες.

### **Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα**

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (Eds.). (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (Vol. 55). National Bureau of Standards.
- Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland.
- Bachman, P., Alsharif, O., & Precup, D. (2014). Pseudo-ensembles: Encouraging a diverse set of classifiers. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*.
- Bengio, Y., Louradour, J., Collobert, R., & Weston, J. (2009). Curriculum learning. *Proceedings of the 26th International Conference on Machine Learning (ICML)*, 41–48.
- Bishop, C. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning*. Springer.
- Caruana, R. (1997). Multitask learning. *Machine Learning*, 28(1), 41–75. <https://doi.org/10.1023/A:1007379606734>
- Chew, W. C. (1995). *Waves and fields in inhomogeneous media*. Academic Press.
- Colton, D., & Kress, R. (1998). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory* (2nd ed.). Springer.
- Colton, D., & Kress, R. (2013). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory* (3rd ed.). Springer.
- Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2, 303–314.
- Daniels, D. J. (2004). *Ground penetrating radar* (2nd ed.). The Institution of Engineering; Technology.
- Fukushima, K. (1980). Neocognitron: A self-organizing neural network model for a mechanism of pattern recognition. *Biological Cybernetics*, 36(4), 193–202. <https://doi.org/10.1007/BF00344251>
- Gabriel, S., Lau, R. W., & Gabriel, C. (1996). The dielectric properties of biological tissues: Iii. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in Medicine and Biology*, 41(11), 2271–2293. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/41/11/003>
- Gamma, E., Helm, R., Johnson, R., & Vlissides, J. (1994). *Design patterns: Elements of reusable object-oriented software*. Addison-Wesley.
- García, F., Badillo, S., Vázquez, M., & García, P. (2017). A comparison of techniques for representing time in recurrent neural networks. *Neural Processing Letters*, 45(3), 1–19.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016a). *Deep learning*. MIT Press.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016b). *Deep learning*. MIT Press. <http://www.deeplearningbook.org>
- Grech, R., Cassar, T., Muscat, J., Camilleri, K. P., Fabri, S. G., Zervakis, M., Xanthopoulos, P., Sakkalis, V., & Vanrumste, B. (2008). Review on solving the inverse problem in

- eeg source analysis. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 5(1), 25. <https://doi.org/10.1186/1743-0003-5-25>
- Hadamard, J. (1902). *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Princeton University Press.
- Hall, P. S., & Hao, Y. (2007). Antennas and propagation for body-centric wireless communications. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 49(3), 41–58. <https://doi.org/10.1109/MAP.2007.4394021>
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., del Río, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., ... Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585, 357–362.
- He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2016). Deep residual learning for image recognition. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 770–778. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
- Hornik, K. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2(5), 359–366. [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(89\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0893-6080(89)90020-8)
- Hornik, K. (1991). Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural Networks*, 4(2), 251–257.
- Isakov, V. (2006). *Inverse problems for partial differential equations* (2nd ed.). Springer.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics* (3rd ed.). Wiley.
- Jammalamadaka, S. R., & Sengupta, A. (2001). *Topics in circular statistics*. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/4031>
- Kendall, A., Gal, Y., & Cipolla, R. (2018). Multi-task learning using uncertainty to weigh losses for scene geometry and semantics. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 7482–7491. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2018.00781>
- Kingma, D. P., & Ba, J. (2015a). Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations (ICLR)*.
- Kingma, D. P., & Ba, J. (2015b). Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations (ICLR)*.
- Kirsch, A., & Grinberg, N. (2008). *The factorization method for inverse problems* (Vol. 36). Springer.
- Kress, R. (2014). *Linear integral equations* (3rd ed.). Springer.
- Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Hinton, G. E. (2012). Imagenet classification with deep convolutional neural networks. *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*, 25.
- Lazebnik, M., McCartney, L., Popovic, D., Watkins, C. B., Lindstrom, M. J., Harter, J., Sewall, S., Magliocco, A., Booske, J. H., Okoniewski, M., & Hagness, S. C. (2007). A large-scale study of the ultrawideband microwave dielectric properties of normal, benign and

- malignant breast tissues. *Physics in Medicine and Biology*, 52(20), 6093–6115. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/52/20/002>
- LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., & Haffner, P. (1998). Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*, 86(11), 2278–2324. <https://doi.org/10.1109/5.726791>
- Lin, T.-Y., Goyal, P., Girshick, R., He, K., & Dollár, P. (2017). Focal loss for dense object detection. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2980–2988. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2017.324>
- Lu, L., Jin, P., & Karniadakis, G. E. (2021). Learning nonlinear operators via deepnet based on the universal approximation theorem of operators. *Nature Machine Intelligence*, 3(3), 218–229. <https://doi.org/10.1038/s42256-021-00302-5>
- Nair, V., & Hinton, G. E. (2010). Rectified linear units improve restricted boltzmann machines. *Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning (ICML)*, 807–814.
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization* (2nd ed.). Springer.
- Oliphant, T. E. (2006). *A guide to NumPy*. Trelgol Publishing.
- Pallikarakis, N., Kalogeropoulos, A., & Tsitsas, N. L. (2024). Exploring the inverse line-source scattering problem in dielectric cylinders with deep neural networks. *Physica Scripta*, 99(11), 116013. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad852c>
- Papadopoulos, T. D. (2024). Inverse-source-em: Open-source framework for inverse electromagnetic source localization. Retrieved April 4, 2026, from <https://github.com/th0ma/inverse-source-em>
- Pascanu, R., Mikolov, T., & Bengio, Y. (2013). On the difficulty of training recurrent neural networks. *International Conference on Machine Learning (ICML)*, 1310–1318.
- Paszke, A., Gross, S., Massa, F., Lerer, A., Bradbury, J., Chanan, G., Killeen, T., Lin, Z., Gimelshein, N., Antiga, L., Desmaison, A., Kopf, A., Yang, E., DeVito, Z., Raison, M., Tejani, A., Chilamkurthy, S., Steiner, B., Fang, L., ... Chintala, S. (2019). Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. *Advances in Neural Information Processing Systems*.
- Prechelt, L. (1998). Early stopping — but when? In G. B. Orr & K.-R. Müller (Eds.), *Neural networks: Tricks of the trade* (pp. 55–69, Vol. 1524). Springer.
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707.
- Robbins, H., & Monro, S. (1951). A stochastic approximation method. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(3), 400–407.
- Robert, C. P., & Casella, G. (2004). *Monte carlo statistical methods* (2nd ed.). Springer.
- Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65(6), 386–408.

- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1986). Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 323, 533–536.
- Scruby, C. B., & Drain, L. E. (1990). *Laser ultrasonics: Techniques and applications*. Taylor & Francis.
- Silverman, B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman; Hall.
- Smith, L. N. (2017). Cyclical learning rates for training neural networks. *Proceedings of the IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV)*, 464–472.
- Srivastava, N., Hinton, G., Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Salakhutdinov, R. (2014). Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting. *Journal of Machine Learning Research*, 15(1), 1929–1958.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S. J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K. J., Mayorov, N., Nelson, A. R. J., Jones, E., Kern, R., Larson, E., ... Contributors, S. 1. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in python. *Nature Methods*, 17, 261–272.
- Wang, H., Wang, Y., Zhou, Z., Ji, X., Gong, D., Zhou, J., Li, Z., & Liu, W. (2020). Cosface: Large margin cosine loss for deep face recognition. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*.
- Zaheer, M., Kottur, S., Ravanbakhsh, S., Poczos, B., Salakhutdinov, R., & Smola, A. (2017). Deep sets. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*.
- Zeiler, M. D., & Fergus, R. (2014). Visualizing and understanding convolutional networks. *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 818–833. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-10590-1\\_53](https://doi.org/10.1007/978-3-319-10590-1_53)