ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ένα τετράγωνο μέσα σε ένα τρίγωνο και η μελέτη περίπτωσης της κατασκευής αυτού του ιστορικού προβλήματος μαθηματικών από μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

ΚΟΥΤΣΙΚΟΥ ΘΕΑΝΩ

ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ, 2023

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα έχει ως αντικείμενο τη διδασκαλία των εγγεγραμμένων σχημάτων και συγκεκριμένα την εγγραφή ενός τριγώνου μέσα σε ένα τετράγωνο. Ο γενικός σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει αν η αξιοποίηση της ιστορικής μεθόδου στη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα των εγγεγραμμένων σχημάτων μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία σε μαθητές λυκείου και αν μπορεί να τους βοηθήσει να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την ολοκλήρωση της εργασίας είναι η μελέτη περίπτωσης και το κυρίως σώμα της περιλαμβάνει εισαγωγή, βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών που χρησιμοποιήθηκαν, την αναλυτική παρουσίαση της μεθοδολογίας, τα αποτελέσματα, τη συζήτηση και τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την έρευνα.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, ο μαθητής, ο οποίος συμμετείχε στην έρευνα παρουσίασε σημαντική βελτίωση σε όλους τους τομείς που εξετάστηκε, μετά την παρακολούθηση δίωρης διδακτικής παρέμβασης διδασκαλίας του προβλήματος του εγγεγραμμένου τριγώνου σε τετράγωνο με την αξιοποίηση της μεθόδου της εμπλοκής της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα της γεωμετρίας.

Ακόμη, βρήκε το μάθημα εξαιρετικά ενδιαφέρον και χρήσιμο και δήλωσε πως θα ήθελε να διδάσκεται πάντα έτσι την γεωμετρία.

Τέλος, από τις απαντήσεις του προέκυψε ότι θα επιθυμούσε περισσότερο οπτικοακουστικό υλικό κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας αλλά και περισσότερο

χρόνο για παραδείγματα και συζήτηση, ώστε να αφομοιώσει καλύτερα τις γνώσεις του.

Λέξεις Κλειδιά: Γεωμετρία, Ιστορία των Μαθηματικών, Διδακτική Παρέμβαση, Εγγεγραμμένα Σχήματα

ABSTRACT

The subject of this research is the teaching of inscribed shapes, specifically the registration of a triangle inside a square. The general purpose of the paper is to examine whether the use of the historical method in the teaching of mathematics, and specifically inscribed figures, can bring about positive results in the teaching of high school students and whether it can help them deal with their difficulties. The method used to complete the work is the case study and its main body includes an introduction, a literature review of the researches used, the detailed presentation of the methodology, the results, the discussion and the conclusions drawn from the research.

According to the results of this research, the student who participated in the research showed a significant improvement in all the areas examined, after attending a two-hour teaching intervention teaching the problem of the inscribed triangle in a square by utilizing the method of involving history in teaching mathematics and specifically geometry.

Furthermore, he found the lesson extremely interesting and useful and stated that he would like to always teach geometry this way.

Finally, from his answers it emerged that he would like more audio-visual material during the teaching but also more time for examples and discussion, in order to better assimilate his knowledge.

Keywords: Geometry, History of Mathematics, Teaching Intervention, Inscribed Shapes

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη της γεωμετρίας μέσα από την ιστορία των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει μία εξαιρετικά αποτελεσματική μέθοδο διδασκαλίας καθώς μπορεί να συμβάλλει σε πλήθος τομέων, όπως η κατανόηση της εξέλιξης των γεωμετρικών εννοιών και η εκτίμηση του πολιτισμικού πλαισίου των μαθηματικών. Μελετώντας την ιστορία της γεωμετρίας, ο μαθητής μπορεί να γνωρίσει πώς έχουν εξελιχθεί διαφορετικές γεωμετρικές έννοιες με την πάροδο του χρόνου. Με τον τρόπο αυτό είναι σε θέση να κατανοήσει καλύτερα τα θεμέλια της σύγχρονης γεωμετρίας και να εκτιμήσει τη συμβολή των μαθηματικών σε όλη την ιστορία του ανθρώπινου πολιτισμού.

Τα μαθηματικά θεωρούνται ως μια παγκόσμια γλώσσα που υπερβαίνει τα πολιτιστικά και ιστορικά όρια. Ωστόσο, η ανάπτυξη των μαθηματικών ήταν πάντα επηρεασμένη από πολιτιστικούς και ιστορικούς παράγοντες. Μελετώντας την ιστορία της γεωμετρίας, φαίνεται το πώς διαφορετικοί πολιτισμοί και ιστορικές περίοδοι συνέβαλαν στην ανάπτυξη της γεωμετρίας. Επιπλέον, επιτυγχάνεται η βαθύτερη κατανόηση, η οποία επιτρέπει τη βελτίωση των επιδόσεων τους.

Η παρούσα εργασία, εστιάζει στο πεδίο των εγγεγραμμένων σχημάτων και συγκεκριμένα στην περίπτωση του προβλήματος της εγγραφής ενός τετραγώνου σε ένα τρίγωνο. Τα εγγεγραμμένα τετράγωνα σε τρίγωνα έχουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες και χρησιμοποιούνται συχνά σε προβλήματα γεωμετρίας. Το μήκος της πλευράς ενός εγγεγραμμένου τετραγώνου σε ένα τρίγωνο είναι ίσο με το μισό του γινόμενου της περιμέτρου του τριγώνου και της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Ο λόγος του εμβαδού του εγγεγραμμένου τετραγώνου προς το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου προς την ακτίνα του τριγώνου. Η κορυφή του τετραγώνου που βρίσκεται στη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου χωρίζει αυτή την πλευρά σε δύο τμήματα και τα μήκη αυτών των τμημάτων είναι ίσα με το άθροισμα και τη διαφορά του μισού της περιμέτρου του τριγώνου και του μήκους της πλευράς του τετραγώνου. Το υψόμετρο του τριγώνου από την κορυφή του τετραγώνου που βρίσκεται στη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι ίσο με τη διαφορά μεταξύ του μισού της περιμέτρου του τριγώνου και του μήκους της πλευράς του τετραγώνου, διαιρούμενο με την τετραγωνική ρίζα του 2.

Μία από τις παλαιότερες γνωστές αναφορές σε εγγεγραμμένα τετράγωνα σε τρίγωνα βρίσκεται στο έργο του Έλληνα μαθηματικού Ευκλείδη, ο οποίος έγραψε γι' αυτά στο διάσημο βιβλίο του "Στοιχεία" γύρω στο 300 π.Χ. Ο Ευκλείδης απέδειξε αρκετές ιδιότητες των εγγεγραμμένων τετραγώνων σε τρίγωνα, συμπεριλαμβανομένου του γεγονότος ότι το τετράγωνο που εγγράφεται σε ένα τρίγωνο με τη μικρότερη περίμετρο είναι ισόπλευρο.

Τον 19ο αιώνα, ο Γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss ανέπτυξε μια μέθοδο για την κατασκευή ενός εγγεγραμμένου τετραγώνου σε οποιοδήποτε τρίγωνο, χρησιμοποιώντας μόνο μια ευθεία και πυξίδα. Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως θεώρημα Gauss-Wantzel και περιλαμβάνει την κατασκευή αρκετών βοηθητικών κύκλων και γραμμών μέσα στο τρίγωνο.

Τα εγγεγραμμένα τετράγωνα σε τρίγωνα συνέχισαν να μελετώνται από τους μαθηματικούς μέχρι σήμερα, και εξακολουθούν να αποτελούν αντικείμενο συνεχούς έρευνας. Χρησιμοποιούνται σε διάφορους τομείς της γεωμετρίας και άλλων πεδίων των μαθηματικών, και έχουν επίσης εφαρμοστεί σε πρακτικά περιβάλλοντα όπως τα γραφικά υπολογιστών και η μηχανική.

Η παρούσα έρευνα έχει ως αντικείμενο τη διδασκαλία των εγγεγραμμένων σχημάτων και συγκεκριμένα την εγγραφή ενός τριγώνου μέσα σε ένα τετράγωνο.

Οι στόχοι που έχουν τεθεί για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας είναι οι ακόλουθοι:

(1) η παρουσίαση των μεθόδων απόδειξης εγγραφής τριγώνου σε τετράγωνο ιστορικά

(2) η ανάδειξη των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν κατά την διδασκαλία εγγεγραμμένων σχημάτων

(3) η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μελέτης περίπτωσης διδασκαλίας εγγραφής τριγώνου σε τετράγωνο με την ιστορική μέθοδο σε μαθητή Β' Λυκείου.

Ο γενικός σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει αν η αξιοποίηση της ιστορικής μεθόδου στη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα των εγγεγραμμένων σχημάτων μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία σε μαθητές λυκείου και αν μπορεί να τους βοηθήσει να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους.

μελέτης περίπτωσης.

Στο πρώτο κεφάλαιο, πραγματοποιήθηκε βιβλιογραφική ανασκόπηση με στόχο τη διερεύνηση των υπαρχουσών μεθόδων και την αξιολόγηση τους αλλά και την ανάδειξη των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν κατά την εκμάθηση των εγγεγραμμένων σχημάτων, σύμφωνα με άλλες έρευνες.

Στη συνέχεια, σχεδιάστηκε ένα πλάνο μαθήματος, με την αξιοποίηση της ιστορικής μεθόδου διδασκαλίας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σε μαθητή Β' Λυκείου, ο οποίος είχε ήδη αξιολογηθεί στο συγκεκριμένο αντικείμενο πριν τη διδακτική παρέμβαση. Ο μαθητής παρακολούθησε τη διδακτική παρέμβαση και στη συνέχεια επανεξετάστηκε, αλλά και απάντησε σε ερωτήματα, ώστε να γίνει σύγκριση της επίδοσης του και ανάλυση των απόψεων του για την παρέμβαση.

Στόχος της συγκεκριμένης μελέτης περίπτωσης στον μαθητή, ήταν η διερεύνηση του εάν και κατά πόσο η μέθοδος απέδωσε, ήταν αποτελεσματική και βοήθησε το μαθητή να αντιμετωπίσει τις δυσκολίες του.

Μετά την αναλυτική παρουσίαση της μελέτης περίπτωσης, παρατίθενται η συζήτηση, τα συμπεράσματα, τα παραρτήματα και η βιβλιογραφία της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Είναι σημαντικό για τη μαθηματική εκπαίδευση να αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη πνευματική δραστηριότητα για την απόκτηση γνώσης, καθώς και να αντιλαμβάνεται την εξελικτική φύση αυτής της γνώσης. Αυτό είναι σημαντικό για δύο λόγους: πρώτον, βοηθά στην υποστήριξη της εκτέλεσης, της μάθησης και της διδασκαλίας συγκεκριμένων μαθηματικών προβλημάτων και δεύτερον, βοηθά στην εκτίμηση της σχέσης των μαθηματικών με άλλες πνευματικές και πολιτιστικές αναζητήσεις σε όλη την ιστορική τους εξέλιξη. Αυτή η αντίληψη των μαθηματικών, όπως περιγράφεται λεπτομερώς στις προηγούμενες παραγράφους, ορίζεται ως ιστορικο-παιδαγωγικο-μαθηματική προοπτική HPM (Clark et al., 2018). Αυτή η προοπτική συνδέει την Ιστορία, την Εκπαίδευση και τα Μαθηματικά ως τρεις διακριτές αλλά γόνιμα αλληλένδετες διαστάσεις για τη διδασκαλία και τη μάθηση τόσο των μαθηματικών όσο και της ιστορίας τους. Αυτές οι τρεις διαστάσεις είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους με την έννοια ότι η Ιστορία επισημαίνει τη μη απόλυτη φύση της ανθρώπινης γνώσης: τι είναι αποδεκτό ως γνώση και τι δεν είναι αποδεκτό.

Η εκπαίδευση δίνει έμφαση στην πραγματικότητα ότι οι άνθρωποι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους με διάφορους τρόπους, συμπεριλαμβανομένης της ηλικίας, των κοινωνικών συνθηκών, της πολιτισμικής παράδοσης, των ατομικών ιδιοτήτων και άλλων παραγόντων. Η εκπαίδευση βοηθά τους ανθρώπους να κατανοήσουν αυτές τις διαφορές και να γίνουν πιο ανεκτικοί με τις προοπτικές, τις προκαταλήψεις, τις λανθασμένες αντιλήψεις και πιθανώς τους ιδιότυπους τρόπους αυτοέκφρασης που έχουν οι μαθητές ή/και οι εκπαιδευτικοί. Με αυτόν τον τρόπο, η εκπαίδευση βοηθά τους ανθρώπους να κατανοήσουν αυτές τις διαφορές και να γίνουν πιο δεκτικοί στη γνώση.

Σε μεγαλύτερο βαθμό από οποιοδήποτε άλλο πεδίο μελέτης, τα μαθηματικά δίνουν έμφαση στην απαίτηση για λογική, ορθολογική και διανοητική αυστηρότητα και συνέπεια στην ανθρώπινη προσπάθεια να κατανοήσουν τόσο τις νοητικές όσο και τις εμπειρικές πτυχές του κόσμου.

Προκειμένου να ενσωματωθεί η ιστορία και η επιστημολογία των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση, έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγίσεις, με βασικό και κύριο μέλημα τη διερεύνηση των πολύπλοκων και πολύπλευρων σχέσεων μεταξύ αυτών των τριών διαστάσεων (Clark et al., 2018).

Σημαντικοί μαθηματικοί όπως οι De Morgan (1865), Zeuthen (1902), Poincaré (1908), Klein (2016)) και άλλοι (Glaisher, 1890, Barwell, 1913· Miller, 1916) έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σχετικά με τα θεμέλια των μαθηματικών. Στα τέλη του 20^{ου} αιώνα, το ενδιαφέρον για τη σύνδεση αυτή αναζωπυρώθηκε. Ως αποτέλεσμα αυτών των συζητήσεων, η ιστορία έγινε πηγή για μια ποικιλία επιστημολογικών προσεγγίσεων, όπως η ιστορική επιστημολογία του Bachelard (1938), η γενετική επιστημολογία του Piaget (Piaget & Garcia, 1989) και του Freudenthal (1983).

Μετά τη μεταρρύθμιση των Νέων Μαθηματικών στις δεκαετίες του 1960 και του 1970, υπήρξε ένα κύμα ενδιαφέροντος για την ενσωμάτωση της ιστορίας στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ιστορία διευκολύνει την αντίληψη των μαθηματικών ως μιας ανθρώπινης προσπάθειας που συνεχώς αναπτύσσεται. Το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής αφιέρωσε την 31η Επετηρίδα τους στο θέμα της ιστορίας των μαθηματικών ως εργαλείο διδασκαλίας το έτος 1969. (NCTM, 1969). Την ίδια χρονιά, υπήρξε ένα σημαντικό γεγονός γνωστό ως το Πρώτο Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICME-1), το οποίο έπαιξε ρόλο στην καθιέρωση της μαθηματικής εκπαίδευσης ως βασικό θέμα σε περιοδικά προγραμματισμένες διεθνείς συγκεντρώσεις.

Ο P. S. Jones και ο L. Rogers ήταν εκείνοι που οργάνωσαν την Ομάδα Εργασίας που ασχολήθηκε με τις «Σχέσεις μεταξύ της Ιστορίας και της Παιδαγωγικής των Μαθηματικών» το 1972 στο συνέδριο ICME-2. Αυτή ήταν μια από τις 38 διαφορετικές Ομάδες Εργασίας (WG) που δημιουργήθηκαν για τα κύρια θέματα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στη διάσκεψη ICME-3 το 1976, αυτή η Ομάδα Εργασίας επανέλαβε τις εργασίες της.

Έχοντας αναγνωρίσει τη σημασία των ιστορικών παιδαγωγικών σπουδών στα μαθηματικά καθώς και το εκτεταμένο ενδιαφέρον για τέτοια θέματα, παρουσιάστηκε ένα ψήφισμα στη Διεθνή Επιτροπή Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICMI) που προτείνει τη δημιουργία ενός συστήματος για τη διασφάλιση τακτικών συνεδριάσεων σε μελλοντικές ICME με θέμα ιστορικοπαιδαγωγικές σπουδές στα μαθηματικά.

Η Διεθνής Επιτροπή Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICMI) έδωσε την έγκρισή της στην αίτηση μιας νέας Ομάδας Μελέτης να συνδεθεί με αυτήν. Ο τίτλος εργασίας της νέας Ομάδας Μελέτης ήταν «Διεθνής Ομάδα Σπουδών για τις Σχέσεις μεταξύ

Ιστορίας και Παιδαγωγικής των Μαθηματικών, σε συνεργασία με τη Διεθνή Επιτροπή για τη Μαθηματική Εκπαίδευση». Ο σχηματισμός αυτής της ομάδας, η οποία τώρα αναφέρεται με τη συντομογραφία της, HPM Group, έδωσε σημαντική ώθηση στον βαθμό ενδιαφέροντος και εκπαιδευτικής έρευνας που διεξάγεται στον τομέα αυτό σε παγκόσμια κλίμακα. Ακόμα κι αν ανακοινώθηκαν λίγο αργότερα, τα κύρια σημεία που αποτελούσαν αρχικά την έμφαση και τον στόχο αυτής της ομάδας εξακολουθούν να είναι επίκαιρα ακόμη και σήμερα.

Από εκείνη την εποχή, η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση έχει εξελιχθεί σε έναν παγκοσμίως εντατικά μελετημένο τομέα νέων παιδαγωγικών πρακτικών και ερευνητικών δραστηριοτήτων εμπνευσμένων από την προοπτική του HPM.

Το αυξανόμενο διεθνές ενδιαφέρον για την προοπτική της HPM και τις δραστηριότητες που σχετίζονται με τον τομέα HPM οδήγησαν στην έγκριση από το ICMI το 1996 μιας 4ετούς Μελέτης ICMI που ερευνούσε το έργο που επιτελέστηκε σε αυτόν τον τομέα και αναφέρει τα κύρια ζητήματα για περαιτέρω έρευνα.

Το Έγγραφο Συζήτησης που συντάχθηκε από τους συμπροέδρους της Μελέτης και το Συνέδριο Μελέτης που πραγματοποιήθηκε το 1998 ήταν τα δύο γεγονότα που οδήγησαν στο αποκρυστάλλωμα της Μελέτης, που ήταν η δημοσίευση που ήταν τόσο ολοκληρωμένη όσο και αποτέλεσμα των συνδυασμένων προσπαθειών μεγάλου αριθμού ανθρώπων (Fauvel & van Maanen, 2000).

Αυτός ο τόμος έγινε ορόσημο για την καθιέρωση και την ευρέως ορατή της προοπτικής HPM ως μια πολλά υποσχόμενη γραμμή έρευνας στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το έκανε διεγείροντας και ενισχύοντας το διεθνές ενδιαφέρον της εκπαιδευτικής κοινότητας στον τομέα της HPM, εμπνέοντας και παρακινώντας περαιτέρω έρευνα και πραγματικές υλοποιήσεις στην εκπαίδευση που κοινοποιούνται με διάφορους τρόπους. Επιπλέον, τόνωσε και ενίσχυσε το διεθνές ενδιαφέρον της εκπαιδευτικής κοινότητας για τον τομέα της HPM (Clark et al. 2018).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

2.1.Ορισμός

Η εγγραφή γεωμετρικών σχημάτων μέσα σε άλλα σχήματα, αποτελεί μία πρακτική ή οποία έχει περάσει από γενιά σε γενιά από την αρχαιότητα. Ήδη, στα Στοιχεία του Ευκλείδη παρατίθενται οδηγίες εγγραφής ενός πολυγώνου σε έναν κύκλο (Guyot, 2018).

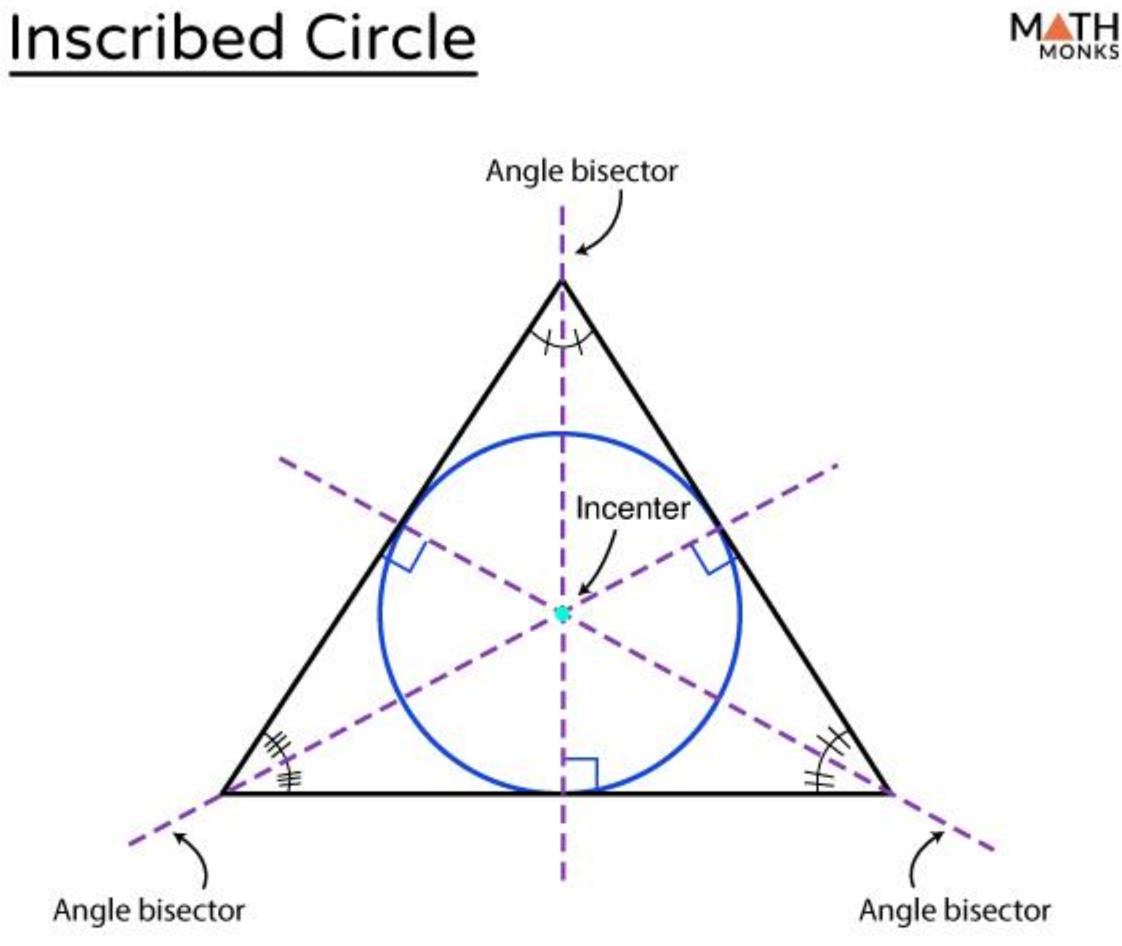
Η εγγραφή σε ένα σχήμα συνδέεται με τον σχεδιασμό ενός σχήματος εντός ενός άλλου, χωρίς το σχήμα να αγγίζεται ή να διασχίζεται με κάποιο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι πρόκειται για μία εκ διαμέτρου αντίθετη περίπτωση με εκείνη του περιγεγραμμένου κύκλου.

Ένας εγγεγραμμένος κύκλος είναι ένας τύπος κύκλου που χρησιμοποιείται στη γεωμετρία. Μερικές φορές αναφέρεται ως ο κύκλος ενός πολυγώνου και είναι ο μεγαλύτερος κύκλος που μπορεί να δημιουργηθεί μέσα σε ένα κανονικό κυκλικό πολύγωνο. Ο κύκλος που σχεδιάζεται μέσα στο τρίγωνο θα έρθει σε επαφή με κάθε μία από τις τρεις πλευρές στο ίδιο ακριβές σημείο. Το σημείο που υποδηλώνει το ακριβές κέντρο ενός τέτοιου κύκλου αναφέρεται ως κέντρο. Πρόκειται για την τομή των δύο ευθειών που αποτελούν τις διχοτόμους της γωνίας του τριγώνου.

Όταν ένα τρίγωνο εγγράφεται μέσα σε έναν κύκλο, θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός του κύκλου και ο κύκλος έρχεται σε επαφή με τις πλευρές του τριγώνου σε ένα σημείο σε κάθε πλευρά του τριγώνου. Εφαπτόμενες στον κύκλο είναι οι τρεις πλευρές που αποτελούν το τρίγωνο. Εξαιτίας αυτού, ένας κύκλος δεν μπορεί να περιέχεται εντός των ορίων ενός πολυγώνου εκτός εάν καθεμία από τις πλευρές του πολυγώνου εφάπτεται στον κύκλο.

Ως αποτέλεσμα, τα τρίγωνα και τα κανονικά πολύγωνα έχουν πάντα εγγεγραμμένο έναν κύκλο μέσα τους.

Η πρώτη εικόνα, που παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω απεικονίζει ένα τρίγωνο που περιέχει έναν κύκλο:

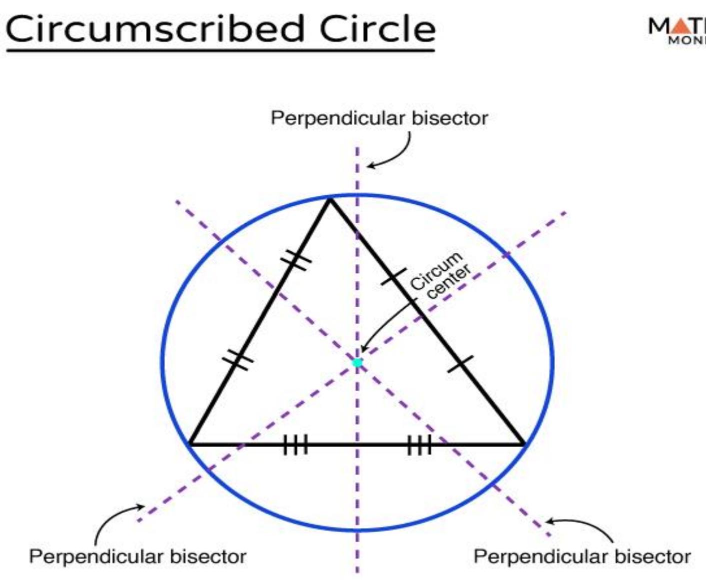


Εικόνα 1 Τρίγωνο που περιέχει κύκλο (MathMonks, 2022)

Ένας κύκλος που έρχεται σε επαφή και με τις τρεις κορυφές ενός πολυγώνου είναι γνωστός ως ο περιγεγραμμένος κύκλος σε αυτό το πολύγωνο. Το σημείο στο οποίο συναντώνται οι κάθετες διχοτόμοι των πλευρών είναι γνωστό ως περίκεντρο ενός τέτοιου κύκλου. Αυτό το σημείο χρησιμεύει επίσης ως κέντρο του κύκλου. Η ακτίνα που ορίζει την περιφέρεια ενός τέτοιου κύκλου αναφέρεται ως *περιφέρεια*.

Ωστόσο, ένας περιγεγραμμένος κύκλος δεν συνοδεύει πάντα ένα πολύγωνο. Ένα κυκλικό πολύγωνο είναι ένας τύπος πολυγώνου που περιέχει έναν περιγεγραμμένο κύκλο εντός των ορίων του. Λόγω του ότι οι κορυφές του είναι κυκλικές, αναφέρεται και ως κυκλικό πολύγωνο. Τα κυκλικά σχήματα περιλαμβάνουν δυνητικά όλα τα τρίγωνα καθώς και συμβατικά πολύγωνα όπως τετράγωνα, ορθογώνια, τραπεζοειδή και χαρταετούς.

Λόγω του τρόπου που κατασκευάζονται τα τρίγωνα, έχουν πάντα έναν κύκλο που περιβάλλεται γύρω τους. Όταν ένας κύκλος περικλείει εντελώς ένα τρίγωνο, το τρίγωνο θεωρείται ότι περιέχεται μέσα στον κύκλο και κάθε κορυφή του τριγώνου εφάπτεται με τον κύκλο. Η Εικόνα 2, απεικονίζει την περίπτωση αυτή σχηματικά:

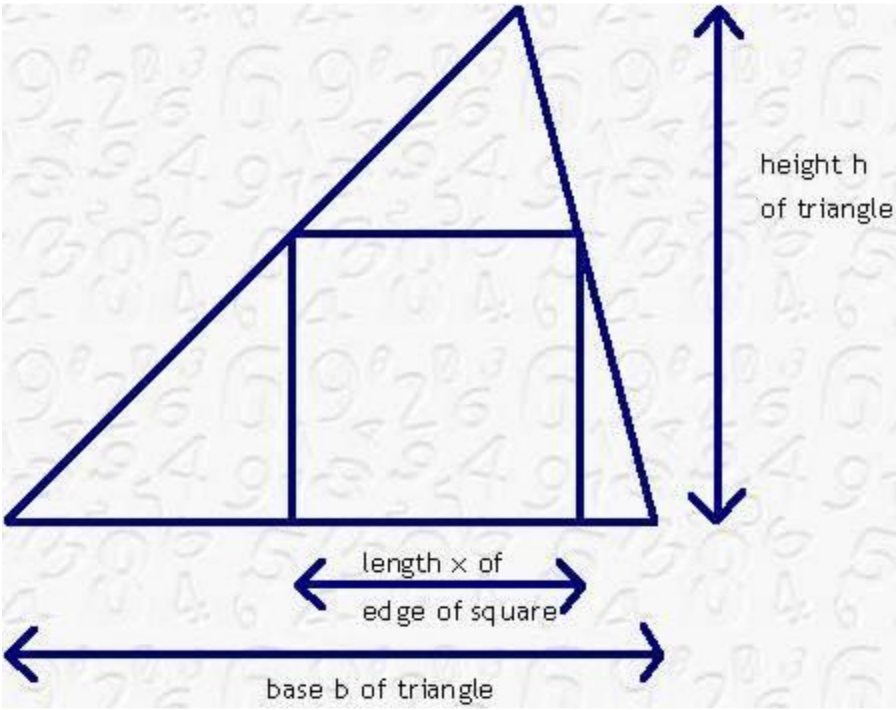


Εικόνα 2 Περιγεγραμμένος Κύκλος (Math Monks, 2022)

2.2. Τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο

Η εγγραφή του τετραγώνου εντός του τριγώνου, αποτελεί ένα πρόβλημα που έχει απασχολήσει πολλούς στοχαστές από την αρχαιότητα, ξεκινώντας από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Το πρόβλημα τίθεται ως εξής:

Ένα τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 3 Τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο (McClellan, 2022)

Το εμβαδόν όλου του τριγώνου είναι b*h/2.

Το εμβαδόν του μικρού τριγώνου στην κορυφή είναι x*(h-x)/2

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι x^2.

Το εμβαδόν του τριγώνου που προκύπτει ολισθαίνοντας μεταξύ τους τα δύο μικρότερα τρίγωνα που στέκονται στη βάση είναι (b-x)*x/2.

Επομένως,

b*h/2 = x*(h-x)/2 + x2 + (b-x)*x/2

b*h = x*(h-x) + 2*x2 + (b-x)*x

= x*h - x2 + 2*x2 + b*x - x2

= x*h + b*x

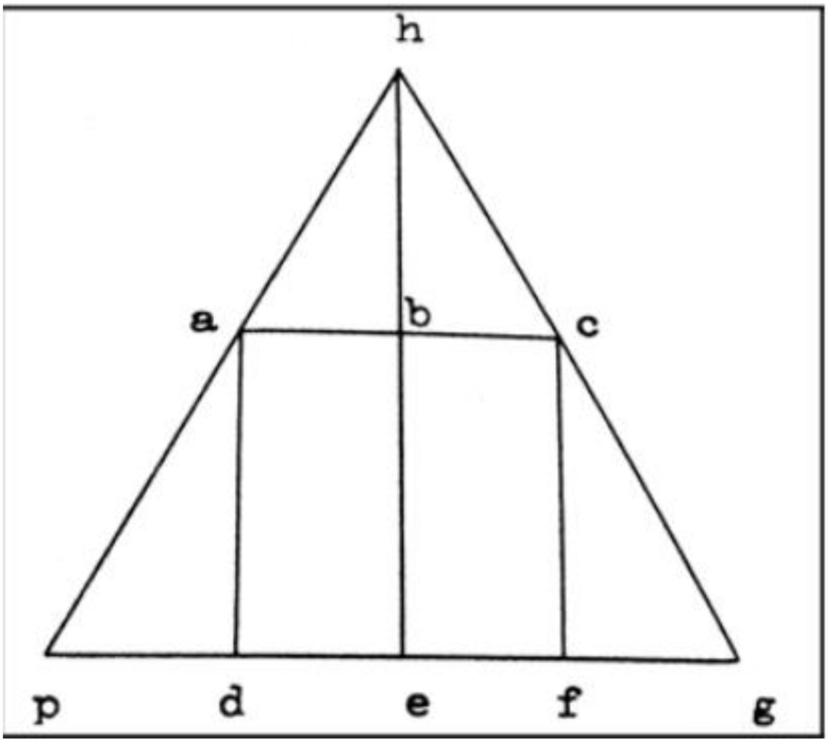
= x*(h + b)

Έτσι

x = b*h/(b + h) (McClellan, 2022).

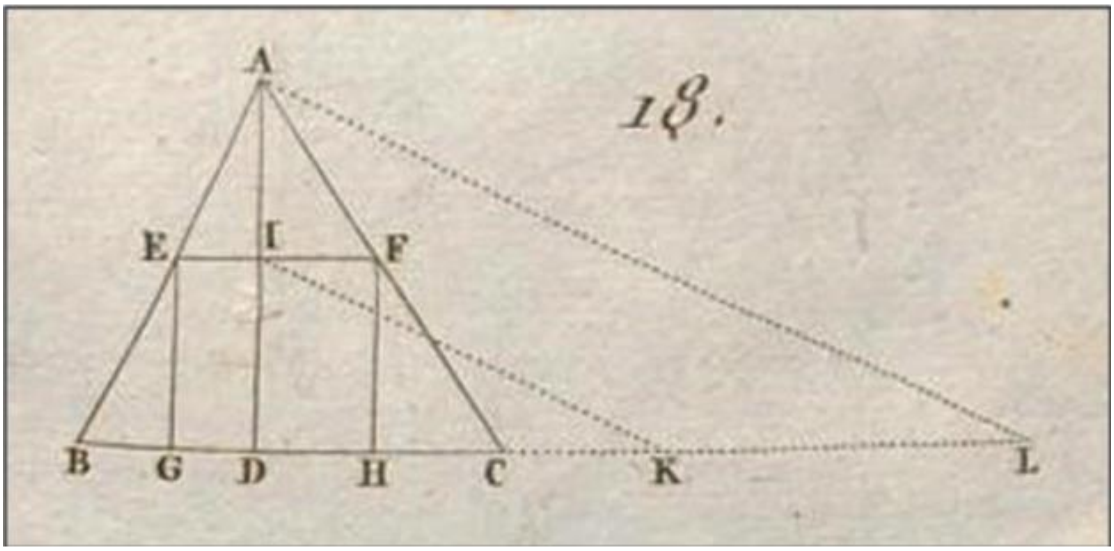
O Nicolas Chuquet, το 1484 στο έργο του La Geometrie πρότεινε δύο τρόπους επίλυσης του προβλήματος.

Υπάρχει ένα ισόπλευρο τετράγωνο acdf που περιέχεται σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο hgp του οποίου ο καθετήσιος είναι επομένως he με πλευρά του τετραγώνου να είναι επομένως 4. Στόχος είναι να βρεθεί το μήκος του τριγώνου. Για να πετύχει κανείς τέτοιο κάτι τέτοιο, πρέπει να καταλάβει ότι το μικρό τρίγωνο hac είναι ισόπλευρο άρα οι πλευρές του είναι ίσες με εκείνες του τετραγώνου, που είναι 4, επομένως το hc θα είναι 4, και κατά συνέπεια το hb θα είναι R2, το οποίο, μετά από πρόσθεση στο be, κάνει 4 συν R2, ενώ το he όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, κάνει 28 p R2. Με βάση αυτό το σκεπτικό και τις αρχές του πυθαγορείου θεωρήματος, ο μαθηματικός πρότεινε τις λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.



Διάγραμμα Chuquet (Guyot, 2018)

Ένα άλλο εγχειρίδιο του δέκατου ένατου αιώνα του Louis Bourdon (1837) περιγράφει μια μέθοδο κοντά στην προηγούμενη, παρέχοντας πολύ πιο σαφείς οδηγίες και αιτιολόγηση της προκύπτουσας κατασκευής. Ακολούθως, παρουσιάζεται το σχέδιο το οποίο κατασκεύασε:



Διάγραμμα Bourdon (Guyot, 2018)

Το πρόβλημα του εγγεγραμμένου τετραγώνου εντός τριγώνου, αποτελεί ένα πρόβλημα το οποίο έχει απασχολήσει πλήθος μαθηματικών, και δεν θα μπορούσε να μην έχει απασχολήσει και των γνωστό ως πατέρα της άλγεβρας al- Khwarizmi. Αμέσως παρακάτω, πρόκειται να παρατεθεί το πρόβλημα, όπως μεταφράστηκε από την Σαχίνη (2023)

«Αν πούμε: ένα τριγωνικό κομμάτι γης, οι δύο πλευρές του (μετρούν) δέκα πήχες και η βάση δώδεκα πήχες, και μέσα στην κοιλιά του υπάρχει ένα τετράγωνο κομμάτι γης. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;

Η μέθοδος γι' αυτό συνίσταται στο να γνωρίζουμε το ύψος του τριγώνου (της γης) και είναι με τον πολλαπλασιασμό του μισού της βάσης - και αυτό είναι έξι - με τον εαυτό του- προκύπτει τριάντα έξι. Αφαιρέστε αυτό από το τετράγωνο μιας από τις κοντές πλευρές - και αυτό είναι εκατό- εξήντα τέσσερα παραμένουν. Πάρτε την τετραγωνική ρίζα, οκτώ, και αυτό είναι το ύψος. Το εμβαδόν του είναι σαράντα οκτώ πήχες και αυτό είναι ο πολλαπλασιασμός του ύψους επί το μισό της βάσης, που είναι έξι. Θεωρούμε μια από τις πλευρές του τετραγώνου (γη) (ίση με) ένα «πράγμα» [x] και εμείς την τετραγωνίζουμε- γίνεται το αγαθό [x2]. Το κρατάμε. Τότε βλέπουμε ότι έχουμε δύο τρίγωνα στις δύο πλευρές του τετραγώνου (γη) και ένα τρίγωνο πάνω από αυτό. Όσο για τα δύο τρίγωνα που βρίσκονται στις δύο πλευρές, είναι ίσα και τα ύψη τους είναι τα ίδια και βρίσκονται σε ορθή γωνία. Το εμβαδόν τους βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας ένα πράγμα [x] με το έξι μείον το μισό πράγμα, με αποτέλεσμα έξι πράγματα μείον το μισό από τα πράγματα [6x - 1/2x2]. Και είναι το εμβαδόν των δύο τριγώνων μαζί που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου. Όλο αυτό είναι το εμβαδόν του τετραγώνου και το εμβαδόν των τριών τριγώνων, και είναι δέκα πράγματα, (που) είναι ίσο με σαράντα οκτώ, και αυτό είναι το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου. Από αυτό, το πράγμα είναι τέσσερις πήχεις και τέσσερα πέμπτα του πήχεως, και είναι κάθε μία από τις πλευρές του του τετραγώνου (γης).»

Το πρόβλημα, λύθηκε από τον ίδιο τον μαθηματικό, με αλγεβρική μέθοδο, ως ακολούθως:

- Θεωρείται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=12 και ΑΒ=ΑΓ=10. Το ύψος του ΑΔ υπολογίζεται με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ. $ΑΔ^2$ = $ΑΒ^2$ - $(\frac{1}{2}ΒΓ)^2$=100-36=64, ΑΔ=$\sqrt{64}$ =8.

- Το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με Ε=$\frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ$ =48.

- Τα τρίγωνα ΚΒΝ και ΛΜΓ που σχηματίζονται είναι ίσα και το εμβαδό του καθένα είναι ίσο με $Ε_1 = \frac{1}{2}$ ΒΝ ·ΚΝ=$\frac{1}{2}(6 - \frac{x}{2}) \cdot x = \frac{1}{2}$ (6x- $\frac{x^2}{2}$)

- Το εμβαδό του τριγώνου ΑΚΛ είναι ίσο με

  $Ε_2 = \frac{1}{2}$ ΑΖ·ΚΛ=$\frac{1}{2}$(8-x) ·x = 4x - $\frac{x^2}{2}$

- Το άθροισμα του τετραγώνου και των τριών τριγώνων δίνει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ : $E_{ΑΒΓ} = 2\ E_1 + E_2 + E_{ΚΛΜΝ}$
- Κατά συνέπεια, προκύπτει 48= 6x- $\frac{x^2}{2}$ +4x - $\frac{x^2}{2}$ +x^2 $\Leftrightarrow$ x=4,8 ή 4 $\frac{4}{5}$.

(Σαχίνη, 2023)

Το ίδιο πρόβλημα, επεδίωξε να λύσει και ο Jose Anastacio da Cunha, με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ότι δίνεται ένα τρίγωνο ABC με AB=α, BC=b, AC=c και x η πλευρά του τετραγώνου DEFG. Τα τρίγωνα ADG και ABC είναι όμοια, άρα, ισχύει το θεώρημα του Θαλή:

$\frac{b}{a} = \frac{x}{AD} \Leftrightarrow \frac{b}{b-x} = \frac{a}{a-AD} \Leftrightarrow \frac{b-x}{b} = \frac{DB}{a}$ (1)

Ακόμη από το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να προκύψει ότι

$BE^2=DB^2- DE^2 \Leftrightarrow \frac{BE^2}{a^2} = \frac{DB^2}{a^2} - \frac{DE^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{BE^2}{a^2} = (\frac{b-x}{b})^2 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow$

$BE^2= (a - \frac{ax}{b})^2 - x^2$ (2)

Αντίστοιχα :

$CF^2 = (c - \frac{cx}{b})^2 - x^2$ (3)

Ακόμη, ισχύει :

b-x=BE+FC ή b-x= $\sqrt{(a - \frac{ax}{b})^2 - x^2} + \sqrt{(c - \frac{cx}{b})^2 - x^2}$ (4)

(Σαχίνη, 2023)

2.3. Διδασκαλία εγγεγραμμένων σχημάτων

Ο Guyot (2018) μελετώντας τα εγγεγραμμένα σε τρίγωνα τετράγωνα πραγματοποίησε μία έρευνα μελέτης περίπτωσης σε μία τάξη 16 μαθητών. Οι μαθητές επένδυσαν περίπου τρεις ώρες σε αυτή την προσπάθεια, η οποία τους επέτρεψε να ολοκληρώσουν με επιτυχία μια ποικιλία μαθηματικών ασκήσεων που ήταν μέρος του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών για την τάξη τους.

Με αφορμή την περίπτωση αυτή, ο εκπαιδευτικός κατάφερε να αναφέρει τις ιδιότητες απλών γεωμετρικών σχημάτων, το θεώρημα του Θαλή (αναγνωρίζοντας μια περίπτωση εφαρμογής και χρησιμοποιώντας το ίδιο το θεώρημα), το θεώρημα του Πυθαγόρα, την ισότητα των αναλογιών, τις εξισώσεις (ανάπτυξη εξίσωσης και επίλυσή της), τον υπολογισμό, και τη χρήση τύπων για τα εμβαδά απλών σχημάτων και εγγεγραμμένων σχημάτων. Ο συγγραφέας, τόνισε ιδιαίτερα ότι οι συζητήσεις που γίνονται για την επικύρωση, την αποδοχή, την επίδειξη ή την αντίκρουση μιας έννοιας είναι εξαιρετικά γόνιμες σε επίπεδο διδασκαλίας και μάθησης.

Σε πολλές περιπτώσεις, χρειάστηκε μια ομαδική συζήτηση μεταξύ των μαθητών που ήθελαν να υπερασπιστούν την ιδέα τους αλλά και να ακούσουν τα επιχειρήματα των συμμαθητών τους και να τα αποδεχτούν εάν ο τρόπος τους φαινόταν πιο αποτελεσματικός. Επιπλέον, ο Guyot (2018) τόνισε πόσο σημαντικό είναι για το μαθητή να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα που έχει αποκτήσει νόημα μέσω προκαταρκτικών σχεδίων και ενός κοινού σκηνικού, και που έχει δει τη λύση του να εμφανίζεται με δύο πολύ διαφορετικές μορφές. Αυτό το πρόβλημα έχει δει τη λύση του να εμφανίζεται με δύο πολύ διαφορετικές μορφές, καθεμία από τις οποίες προέρχεται από το παρελθόν, αλλά εξακολουθεί να ισχύει. Πράγματι, τόσο το θέμα όσο και οι προσεγγίσεις που ακολουθούνται είναι αρκετά συχνές και στον σύγχρονο κόσμο.

Κλείνοντας το σχετικό άρθρο του, ο καθηγητής (Guyot, 2018) ανέφερε με έμφαση τη φράση, η οποία προέρχεται από ένα άρθρο που γράφτηκε από την Evelyne Barbin (1995), επικεφαλής της inter-IREM επιτροπής Épistémologie et Histoire des Mathématiques:

«Ο καθηγητής μαθηματικών πρέπει να διδάσκει τα μαθηματικά ως μια ιστορική διαδικασία με πολιτιστικό στόχο.»

Ωστόσο, όπως ο ίδιος τόνισε, δεν προσπάθησε να μοντελοποιήσει τη διδασκαλία στην ιστορία. Αντίθετα, προσπάθησε να αντιμετωπίσει τις προκλήσεις που δίνουν αξία στη γνώση και να τις εξαγάγει από την ιστορία.

Εφαρμογές αντίστοιχων μεθόδων στην τάξη, δεν αποτελούν μία κουραστική και δύσκολη, περιττή διαδικασία για τους μαθητές.

Αντίθετα, εμπνέουν στους μαθητές την προθυμία να κατανοήσουν τις ασκήσεις που περιγράφονται ενσωματωμένες σε μια «ιστορική διαδικασία». Επιπλέον, η παραδοξότητα και τα ερωτήματα που εγείρονται από τα κείμενα προκαλούν προβληματισμό σε πολιτιστικό επίπεδο. Όπως αναφέρθηκε από τον ίδιο τον συγγραφέα, η ύπαρξη δύο εντελώς διαφορετικών στρατηγικών για την αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος έχει επίδραση στην αντίληψη των μαθητών και τους επιτρέπει να κατανοήσουν τις στρατηγικές και τις πληροφορίες που μπορεί να έχουν συναντήσει σε άλλα πεδία.

Κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας, κανένας μαθητής δεν αναρωτήθηκε ποια η χρησιμότητα της διδακτικής παρέμβασης και πως οι γνώσεις αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν. Το ενδιαφέρον που προέκυψε για την επίλυση του προβλήματος αποτέλεσε ουσιαστικά το κίνητρο της τάξης.

Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, είναι ότι ο εκπαιδευτικός ενδιαφέρθηκε να ακούσει τις απόψεις των μαθητών σχετικά με το αν θεωρούσαν ή όχι τη μία προσέγγιση ανώτερη από την άλλη.

Αντί για μια συγκριτική αναλογία, από τις απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν αρκετές παράμετροι σύγκρισης. Για έναν μαθητή, η μία μέθοδος ήταν αυτή που παρείχε τα πιο ακριβή αποτελέσματα, ενώ για έναν άλλο, η ταχύτερη, ή για άλλη μια φορά αυτή που παρείχε τα πιο πρακτικά αποτελέσματα, ή τελικά, αυτή που παρείχε τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μέσα από τη σχετική συζήτηση προέκυψε μία ενδιαφέρουσα διαδικασία ανατροφοδότησης και χρήσιμης ανταλλαγής απόψεων και οικοδόμησης της γνώσης (Guyot, 2018).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ

3.1. Γενικά Στοιχεία

Σύμφωνα με τους Τζανάκη και Κούρκουλο (2000), η μελέτη της γεωμετρίας συμβάλλει στην επίτευξη των γενικών στόχων της διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίοι μπορούν να αναλυθούν σε ελάχιστους και μέγιστους στόχους. Οι ελάχιστοι στόχοι συνδέονται κυρίως με περιορισμένο αριθμό απλών πρακτικών γνώσεων, όπως η καταμέτρηση, η εκτέλεση ενεργειών κ.λπ. Ωστόσο, οι μέγιστοι στόχοι περιλαμβάνουν και την παροχή μαθηματικής εκπαίδευσης με στόχο να καταστεί σαφές ότι η γεωμετρία διαδραματίζει πρωταρχικό ρόλο στην εφαρμογή αυτών των ιδεών.

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι ένας από τους στόχους της παροχής μαθηματικής εκπαίδευσης στους μαθητές είναι να κεντρίσουν το ενδιαφέρον τους για την επίλυση προβλημάτων και την παροχή απαντήσεων σε δύσκολες ερωτήσεις, καθώς και την ανάπτυξη των δυνατοτήτων αξιολόγησης καταστάσεων, καθώς και ικανοτήτων στη σύλληψη, τη διατύπωση και την εμπειρική επαλήθευση εικασιών.

Ουσιαστικά, η εκπαίδευση που λαμβάνουν οι μαθητές στα μαθηματικά τους εξοπλίζει με όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να καλύπτουν την εμπειρική και νοητική αιτιολόγηση των εικασιών, να μπορούν να αρθρώνουν και να ελέγχουν τους συλλογισμούς και επίσης να οργανώνονται με ορθολογικό τρόπο διατυπώνοντας με ακρίβεια τις σκέψεις τους. Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, οι μαθητές μπορούν να βελτιώσουν την ικανότητά τους να προσομοιώνουν διάφορα σενάρια.

Σύμφωνα με τον De Moor (2000), η γεωμετρία είναι ο σύνδεσμος μεταξύ των άλλων γνωστικών θεμάτων που καλύπτονται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Ωστόσο, διαφέρει από τα άλλα μαθήματα στο ότι ασχολείται με πολυδιάστατο τρόπο με ορισμένα θέματα, όπως «μοντελοποίηση, οπτικοποίηση, συλλογισμός, ο προβληματισμός, αλλά και η εφαρμογή». Επιπλέον, η γεωμετρία παρέχει τα μέσα με τα οποία πραγματοποιούνται οι στόχοι των σχολικών μαθηματικών, που περιλαμβάνουν την επίλυση προβλημάτων και την επικοινωνία, καθώς και την ολοκλήρωση των μαθηματικών εννοιών.

Σύμφωνα με τον Koleza (2000), η μελέτη της γεωμετρίας είναι πολύ σημαντική γιατί επιτρέπει την ανάπτυξη τριών διαφορετικών ειδών γνωστικών διαδικασιών. Αυτά είναι:

α) οπτικοποίηση για την αναπαράσταση χωροαντικειμένων, επεξήγηση πρότασης, συστηματική διερεύνηση περίπλοκης κατάστασης ή για υποκειμενική επαλήθευση και έλεγχο κάποιων υποθέσεων

(β) κατασκευή με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό ορισμένες προϋποθέσεις

(γ) συλλογιστική

Αυτές οι διεργασίες μπορούν να πραγματοποιηθούν είτε ανεξάρτητα η μία από την άλλη είτε με τη γνωστική τους συνεργασία, η οποία συχνά απαιτείται για τον γεωμετρικό συλλογισμό. Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), η μελέτη της γεωμετρίας είναι απαραίτητη γιατί επιτρέπει σε κάποιον να αποκτήσει μια πιο σφαιρική προοπτική του κόσμου και παίζει επίσης σημαντικό ρόλο σε πεδία όπως η τέχνη, η αρχιτεκτονική κ.λπ. Επιπλέον, οι μαθητές είναι σε θέση να αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων καθώς και χωροταξικό συλλογισμό συμμετέχοντας σε γεωμετρική έρευνα. Είναι σημαντικό να τεθεί υπόψη το γεγονός ότι η μελέτη της γεωμετρίας δεν είναι μόνο απαραίτητη για τη μελέτη άλλων υποτομέων των μαθηματικών αλλά και για μια μεγάλη ποικιλία επιστημονικών υποπεδίων. Επιπλέον, η διδασκαλία της μπορεί να γίνει εξαιρετικά ευχάριστη και ενδιαφέρουσα.

Ωστόσο, κατά τη διάρκεια του μαθήματος της Γεωμετρίας, η συντριπτική πλειονότητα των μαθητών παρουσιάζει σημαντική δυσκολία τόσο στην κατανόηση των εννοιών που διδάσκονται όσο και στην εφαρμογή των όσων έχουν μάθει. Οι μαθητές έχουν πρόβλημα με τη γλώσσα, την αίσθηση του χώρου, τις πολλές αποδείξεις και πολλά άλλα (Ζαράνης & Τζιαχρήστος, 2001).

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών έχει υποστηρίξει σε έρευνες ότι η γεωμετρία είναι ένα από τα πιο απαιτητικά και χρονοβόρα μαθήματα που έχουν παρακολουθήσει ποτέ. Η πλειοψηφία των ανθρώπων αδυνατεί να κατανοήσει τη διαδικασία της τεκμηρίωσης που εφαρμόζεται στα προβλήματα της γεωμετρίας (Ζαράνης & Τζιαχρήστος, 2001). Η δυσκολία που αντιμετωπίζουν στο μάθημα της γεωμετρίας οι μαθητές δεν οφείλεται μόνο στο περιεχόμενό του αλλά και στη μορφή διδακτικών προσεγγίσεων, και ειδικότερα όταν πρόκειται για παραδοσιακή (δασκαλοκεντρική – διαλεκτική) διδασκαλία, που καθιστά τη δυσκολία του μαθήματος ακόμα πιο μεγάλη (Νικολουδάκης & Χουστουλάκης, 2004). Ωστόσο, οι δάσκαλοι των μαθηματικών προσπαθούν να εφαρμόσουν μεθόδους, εργαλεία και στρατηγικές που θα επιτρέψουν την πιο αποτελεσματική διδασκαλία της γεωμετρίας με την ελπίδα να κάνουν το μάθημα πιο ελκυστικό και προσιτό στους μαθητές (Ζαράνης & Τζιαχρήστος, 2001).

Σύμφωνα με τα ευρήματα παλαιότερης έρευνας που διεξήχθη στην ελληνική περιφέρεια (Makras & Salihos, 1991), μόνο 20 % έως 30% των μαθητών που είναι εγγεγραμμένοι στο δημοτικό σχολείο είναι σε θέση να απαντήσουν με επιτυχία σε ερωτήσεις που αφορούν βασικές μαθηματικές έννοιες. Αυτές οι έννοιες περιλαμβάνουν στοιχειώδεις γεωμετρικές έννοιες και μετρήσεις. Η πλειονότητα αυτών των χαμηλών επιπέδων μαθηματικών επιδόσεων εντοπίζεται στην ουσία στα αναλυτικά προγράμματα, στη διδασκαλία, στις διαφορετικές στρατηγικές μάθησης που χρησιμοποιούνται, καθώς και στο διδακτικό υλικό.

Είναι υψίστης σημασίας να αναγνωριστεί ότι τα μαθηματικά ως θέμα έχουν εγγενή χαρακτηριστικά τα οποία, εάν δεν ληφθούν υπόψη κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, μπορεί να αποτελέσουν αιτία μαθησιακών δυσκολιών. Είναι επίσης πολύ σημαντικό να σημειωθεί ότι αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να αποτελέσουν πηγή απογοήτευσης για τους μαθητές (Αγαλιώτης, 2000).

Ο βαθμός αφαίρεσης των μαθηματικών εκφράσεων που απαιτούνται για τους ορισμούς και τη συγκεκριμενοποίηση καταστάσεων και αντικειμένων μπορεί να είναι ιδιαίτερα προκλητικός για τους μαθητές.

Επιπλέον, οι μαθητές συχνά διαπιστώνουν ότι ο τρόπος με τον οποίο αναπαρίσταται η μαθηματική γνώση είναι δύσκολο να κατανοηθεί και να απεικονιστεί.

Οι Χρονάκη και Δημουλάς (2005) πραγματοποίησαν έρευνα για να προσδιορίσουν τον τρόπο και τον βαθμό στον οποίο οι μαθητές της πρώτης τάξης του Δημοτικού Σχολείου κατανοούν την έννοια του τριγώνου. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις διαφορές μεταξύ των γεωμετρικών οντοτήτων που αποτελούν το τρίγωνο. Με άλλα λόγια, έχουν ιδιαίτερο πρόβλημα να αναγνωρίσουν διάφορα είδη τριγώνων, κάτι που είναι μια πραγματικότητα που συνδέεται άμεσα με τη διαθεσιμότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων των χωρικών εικόνων που σχετίζονται με τρίγωνα και την ικανότητά τους να τα διαχειρίζονται. Τα τρίγωνα που συνήθως απεικονίζονται μονοσήμαντα και στερεοτυπικά στο μυαλό των παιδιών, καθώς και στο περιβάλλον, και οι πιο δημοφιλείς αναπαραστάσεις είναι αυτές των ισοσκελών και των ισόπλευρων τριγώνων. Συνεπώς, συχνά, οι αναπαραστάσεις αυτές ταυτίζονται στη σκέψη των μαθητών με την έννοια του τριγώνου (Van de Walle, 2005) (Αποστολάκης, 2019).

3.2. Μέθοδοι Αξιοποίησης

Σύμφωνα με τον Fey (1984), το πιο δύσκολο και επίμαχο ζήτημα σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία είναι το μάθημα της γεωμετρίας. Ο

Wirszup (1976) κάνει επίσης την παρατήρηση ότι πολλά παιδιά, παρά το γεγονός ότι έχουν επιτυχία σε άλλους τομείς σπουδών, αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στο συγκεκριμένο μάθημα. Σύμφωνα με τα ευρήματα ορισμένων ερευνητών (Van Hieles, 1986, Clements & Battista, 1992), ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται η γεωμετρία στους μαθητές είναι ένας από τους παράγοντες που συμβάλλουν στην τρέχουσα κατάσταση.

Ειδικότερα για το σκοπό της πιο συμβατικής διδασκαλίας της, θα επικεντρωθούμε στα ακόλουθα τέσσερα σημεία:

Πρώτον στην επικοινωνιακή ασυμμετρία μεταξύ καθηγητών και μαθητών (Νικολουδάκης & Χουστουλάκης, 2004), που προκαλείται από το γεγονός ότι η πληροφορία μέσω της οποίας μεταφέρεται η γνώση από τον εκπαιδευτικό στον μαθητή, κυρίως προφορικά στην παραδοσιακή διδασκαλία, δεν ταυτίζεται απαραίτητα με αυτόν που ο μαθητής προσλαμβάνει από τον εκπαιδευτικό (Νικολουδάκης & Χουστουλάκης, 2004). (Adda, 1997). Δεύτερον, σε διαφορετικά επίπεδα Van Hiele, που λειτουργούν από τους συμμετέχοντες στη διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης, και τα οποία η παραδοσιακή μέθοδος δεν λαμβάνει υπόψη τη διδασκαλία επειδή λανθασμένα θεωρεί την τάξη ομοιογενή. Τρίτον, στην τάση πολλών μαθηματικών να αναφέρουν μόνο τα τελικά αποτελέσματα κρύβοντας συστηματικά τις ενδιάμεσες διαδικασίες (de Villiers, 1997) και τέταρτον, στο γεγονός ότι η παραδοσιακή διδασκαλία ωθεί τον εκπαιδευτικό να λειτουργήσει σε θεωρητικό επίπεδο, δηλαδή να διδάξει χρησιμοποιώντας παραδείγματα που δεν συνδέονται άμεσα με τον πραγματικό κόσμο.

Όλα τα παραπάνω είναι προβλήματα που σχετίζονται με τον τομέα των μαθηματικών και καθιστούν την εκμάθηση της γεωμετρίας μια δυσάρεστη εμπειρία για τους μαθητές, και σύμφωνα με τον Hoffer (1981), δεν ενθαρρύνουν μια αυξημένη ικανότητα κατανόησης αλλά μάλλον ενθαρρύνουν την απομνημόνευση.

Ακόμη, λόγω της έλλειψης ανατροφοδότησης στο παραδοσιακό μοντέλο, η παραδοσιακή διδασκαλία είναι αναποτελεσματική (Ματσαγγούρας, 1997) στην επίλυση προβλημάτων.

Τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτουν σύμφωνα με μεγάλο αριθμό Ελλήνων και διεθνών ερευνητών (Van Hieles, 1986; Hoffer, 1981; Burger & Shaughnessy 1986).

Σύμφωνα με τα ευρήματα των Dina και Pierre van Hiele, δύο Ολλανδών ερευνητών, η μετάβαση που κάνουν οι μαθητές από το ένα επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης στο άλλο δεν είναι μια φυσική διαδικασία. Μάλλον, είναι μία διαδικασία που πραγματοποιείται υπό την επιρροή ενός προγράμματος διδασκαλίας –μάθησης.

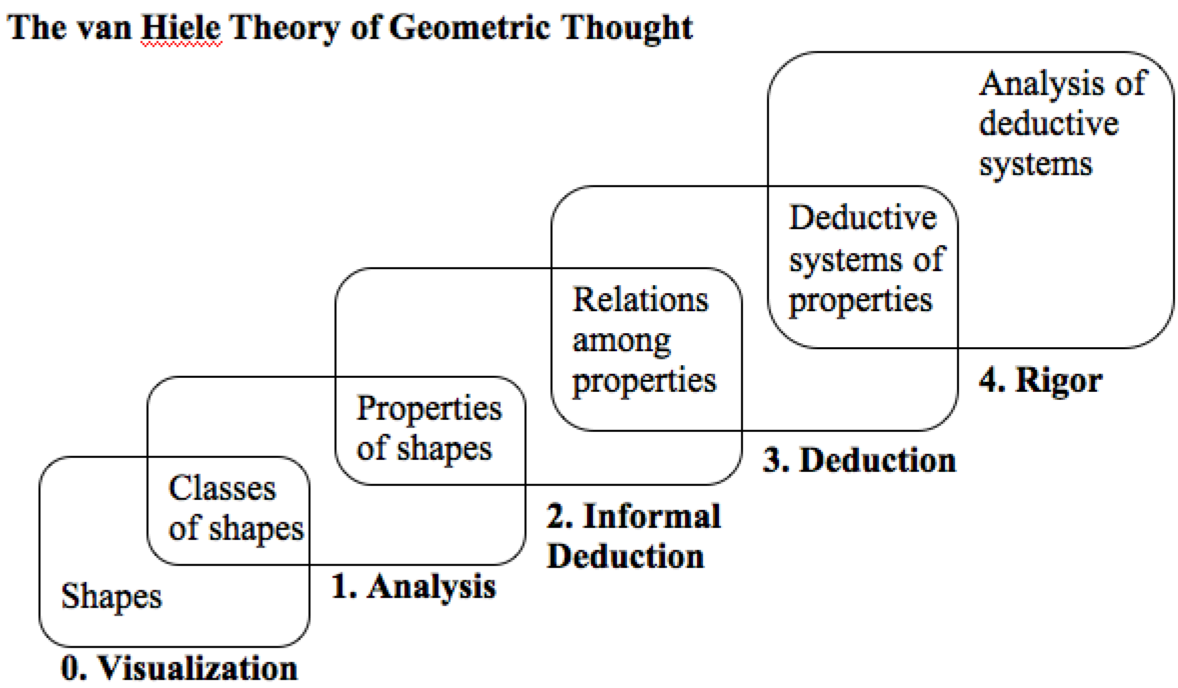
Οι μαθητές περνούν και από τα πέντε επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης με διαδοχική σειρά, χωρίς να παρακάμπτουν κανένα. Ο Hoffer (1981) αναφέρεται σε αυτό το στάδιο ως επίπεδο αναγνώρισης. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο είναι σε θέση να αναγνωρίζουν σχήματα με βάση μόνο τις μορφές τους, μια διαδικασία γνωστή ως αντίληψη Gestalt. (College, 2000).

Η δεύτερη ανάλυση αποκαλύπτει ότι οι μαθητές γνωρίζουν τα συστατικά και τις ιδιότητες ενός σχήματος. Ωστόσο, δεν γνωρίζουν τις σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων και σχημάτων. Οι μαθητές κατανοούν καλά τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων ενός σχήματος και μεταξύ διαφορετικών σχημάτων και αρχίζουν να κατανοούν την έννοια του ορισμού χάρη στην τρίτη ταξινόμηση. Οι μαθητές στο τέταρτο επίπεδο της Επαγωγής είναι σε θέση να σκέφτονται λογικά για τα γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αυτών των αντικειμένων ως ένα αποτελεσματικό πρότυπο.

Είναι σε θέση να διαφοροποιούν και να συγκρίνουν διάφορα συστήματα γεωμετρίας στο πέμπτο επίπεδο, το οποίο είναι γνωστό ως επίπεδο αυστηρότητας ή ακρίβειας, και κατανοούν πόσο σημαντικό είναι να διατυπώνονται με ακρίβεια οι γεωμετρικές θεωρίες. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η χρήση της γλώσσας είναι ένας παράγοντας που έχει σημαντική επίδραση στη διαδικασία διαπραγμάτευσης γεωμετρικών θεμάτων (Κυπριανού, Χατζηνικολάου, Γκαγκάτσης και Σπύρου, 2006).

Σύμφωνα με τον Senk (1985), τα άτομα που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα χειρίζονται διαφορετικά την ίδια λέξη και ως εκ τούτου δεν μπορούν να κατανοήσουν το ένα το άλλο. Στο άρθρο του με τίτλο «Η γεωμετρία είναι κάτι περισσότερο από απόδειξη», που δημοσιεύτηκε το 1981, ο Hoffer κάνει την παρατήρηση ότι «η Γεωμετρία είναι κάτι περισσότερο από αποδείξεις θεωρημάτων». Ο Hoffer συνιστά επίσης στους μαθητές να αναπτύξουν τους ακόλουθους πέντε τομείς δεξιοτήτων κατά τη μελέτη της γεωμετρίας: οπτική, λεκτική, σχεδίαση, λογική και εφαρμογή.

Ο Hoffer θεωρεί καθεμία από αυτές τις περιοχές ως εξίσου σημαντικές για το μάθημα της γεωμετρίας. Φτάνει στο σημείο να ισχυρίζεται ότι έχει μεγαλύτερη σημασία για τον μαθητή να απεικονίσει ένα γεωμετρικό αντικείμενο παρά να καταδείξει ένα θεώρημα. Σύμφωνα με τους Κοντογιάννη και Τζιαχρήστο (1999), οι τροποποιήσεις που προτείνονται από τον Hoffer ολοκληρώνουν τα επίπεδα van Hiele συμπεριλαμβάνοντας τις πέντε δεξιότητες που είναι απαραίτητες για να κατέχουν οι μαθητές σε κάθε επίπεδο κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.



Εικόνα 4: Η θεωρία του Van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη

Επιπλέον, η θεωρία του Van Hiele δίνει έμφαση στη διορατικότητα των στοιχείων της και παρέχει μια περιγραφή πέντε μη γραμμικών φάσεων μάθησης, όπως αναφέρουν οι Hoffer (1981). Αυτές οι φάσεις μάθησης είναι που επιτρέπουν στον μαθητή να προχωρήσει από το ένα επίπεδο στο άλλο.

Ο Teppo (1991) υποστηρίζει ότι η πρόοδος των μαθητών από το ένα επίπεδο στο άλλο είναι αποτέλεσμα στοχευμένης διδασκαλίας που είναι σύμφωνη με τα πρότυπα NCTM (2000) και οργανώνεται με αυτές τις φάσεις. Αν ονομάσουμε τη διαδικασία της μάθησης, η οποία προχωρά από το ένα επίπεδο στο άλλο, «περίοδο», όπως την περιγράφει ο Van Hiele (1986), τότε μέσα σε μια περίοδο θα συναντήσουμε τις ακόλουθες φάσεις:

Στάδιο 1ο:

Το αρχικό στάδιο είναι η ενημέρωση. Οι μαθητές διεξάγουν έρευνα για το θέμα χρησιμοποιώντας το υλικό που ο εκπαιδευτής διαθέτει στους μαθητές. Για παράδειγμα, οι μαθητές εξετάζουν παραδείγματα καθώς και αντιπαραδείγματα προκειμένου να ανακαλύψουν μια δομή.

Στάδιο 2ο:

Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει έναν περιορισμένο προσανατολισμό. Μέσω της συμμετοχής του σε μια καλά προγραμματισμένη και διαδοχική σειρά εύκολων δραστηριοτήτων που απαιτούν μια συγκεκριμένη απάντηση, το παιδί έρχεται σε πρώτη επαφή με τις συνδέσεις που τελικά θα αποτελέσουν το δίκτυο των σχέσεων που θα δημιουργηθούν.

Στάδιο 3ο:

Το στάδιο της διευκρίνισης έρχεται τρίτο. Κάθε μαθητής αναμένεται να μπορεί να συμμετέχει στη συζήτηση στην τάξη, η οποία διευθύνεται από τον διδάσκοντα και θα οδηγήσει στη σωστή χρήση της γλώσσας ως αποτέλεσμα.

Στάδιο 4ο:

Ο ελεύθερος προσανατολισμός αποτελεί το τέταρτο στάδιο. Οι μαθητές επιφορτίζονται με την επίτευξη στόχων που αποτελούνται από πολλαπλούς υποστόχους και μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους.

Στάδιο 5ο:

Η πέμπτη και τελευταία φάση ολοκληρώνεται, όταν πλέον ο εκπαιδευτής ενθαρρύνει τους μαθητές να σκεφτούν τις ενέργειές τους και το γεγονός ότι τα αντικείμενα και οι σχέσεις τους πρόκειται να ενσωματωθούν σε ένα νέο γνωστικό σχήμα (1986, σ. 177).

Στο πλαίσιο των επιπέδων και των φάσεων μάθησης του van Hiele, η πρόοδος της γεωμετρικής σκέψης από το ένα επίπεδο στο επόμενο μπορεί να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύει την κατακόρυφη ανάπτυξη, ενώ η πρόοδος από τη μια φάση στην επόμενη εντός του ίδιου επιπέδου μπορεί να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύει την οριζόντια ανάπτυξη.

Ωστόσο, σύμφωνα με σχετική έρευνα τίθεται θέμα καταλληλότητας των φάσεων της θεωρίας van Hiele σε διάφορα περιβάλλοντα (Ding and Jones, 2007). Επισημαίνεται επίσης ότι πολλά ερωτήματα, όπως το πώς οι φάσεις διδασκαλίας σχετίζονται με το αντικείμενο διδασκαλίας και τις προηγούμενες επιδόσεις των μαθητών (Ding and Jones, 2007), παραμένουν αναπάντητα λόγω έλλειψης έρευνας που σχετίζεται με τις διδακτικές φάσεις του van Hiele (Clements and Battista, 1992. σ. 434).

Η γνωστική μαθητεία είναι ένα μοντέλο σχεδιασμού διδασκαλίας που αναπτύχθηκε από τους Bransford, Brown και Cocking (2000). Αυτό το μοντέλο βασίζεται σε σύγχρονες αντιλήψεις για το πώς μαθαίνουν τα άτομα. Η φιλοσοφική και θεωρητική της βάση ορίζεται από τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ZPD) του Vygotsky, επίσης γνωστή ως η Καθιερωμένη (ή Εγκατεστημένη) Γνώση και ως Situated Cognition και Traditional Apprenticeship. Σύμφωνα με τους Collins, Brown, and Newman (1989) και τους Collins, Brown, and Holum (1991), η προσέγγιση της εν λόγω μεθόδου αποτελείται από τις έξι μεθόδους διδασκαλίας που παρατίθενται παρακάτω:

• Μοντελοποίηση: Οι μαθητές παρακολουθούν έναν επαγγελματία να εκτελεί μια εργασία, ώστε να μπορούν να σχηματίσουν ένα ακριβές νοητικό μοντέλο για το πώς να ολοκληρώσουν την εργασία οι ίδιοι.

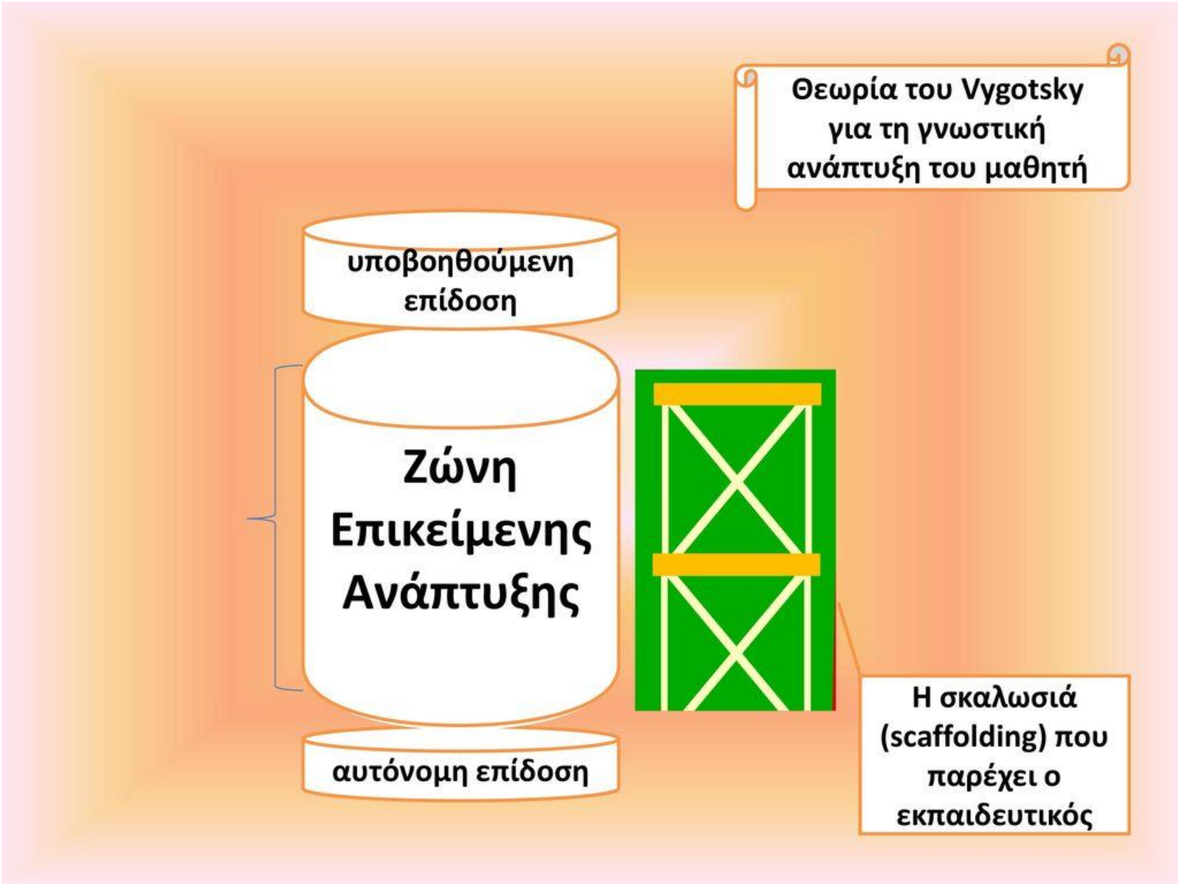
• Coaching: Ορίζεται ως η συμβουλή και η υποστήριξη που δίνεται από τον εκπαιδευτή, εκτός από την ανατροφοδότηση.

• Scaffolding and fading: Σε αυτή την τεχνική, ο ερμηνευτής ή ο δάσκαλος βοηθά τον μαθητή στα αρχικά βήματα του προβλήματος ενώ σταδιακά αποσύρει την υποστήριξή του. Αυτό παραδίδει τον έλεγχο της κατάστασης στον μαθητή.

• Άρθρωση: Η σαφήνεια, ή άρθρωση, αναφέρεται στη διαδικασία έκθεσης των γνώσεων και των δραστηριοτήτων κάποιου κατά την επίλυση ενός προβλήματος.

• Προβληματισμός: Στη φάση του προβληματισμού, ο μαθητής αξιολογεί τη δική του μέθοδο επίλυσης προβλημάτων σε σύγκριση με αυτή των επαγγελματιών και άλλων μαθητών.

• Εξερεύνηση: η εξερεύνηση, είναι έρευνα που διεξάγεται για την εξεύρεση λύσεων σε ζητήματα χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση προσωπικού.



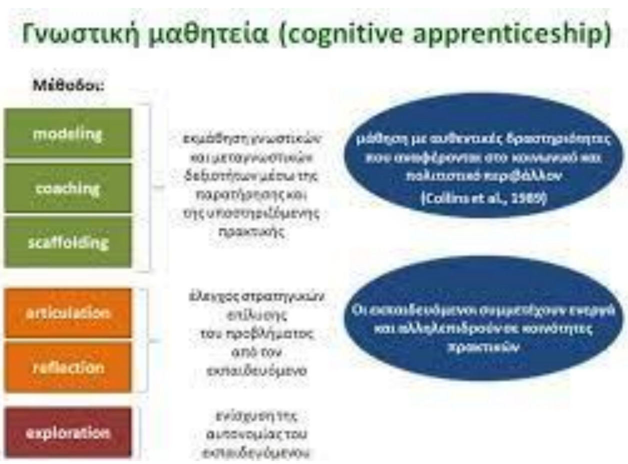
Εικόνα 5: Η Ζώνη επικείμενης ανάπτυξης του Vygotsky

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ρόλος της τεχνολογίας στη Γνωσιακή Μαθητεία είναι πολύ σημαντικός σύμφωνα με τους Collins (1991) και De Corte (1990).

Αυτό συμβαίνει γιατί οι υπολογιστές παρέχουν σημαντική βοήθεια στις μεθόδους της εν λόγω μεθόδου καθώς το Τ.Π.Ε. επιτρέπουν τη δημιουργία πραγματικών καταστάσεων μίμησης (Collins, 1991), οι οποίες προκύπτουν μέσα από κατάλληλα παραδείγματα Γνωστικής Μαθητείας (Δημάκος, Νικολουδάκης, Φερεντίνος, & Χουστουλάκης, 2010) (Brown, Collins, & Duguid, 1989). Επιπλέον, σημειώνουμε το γεγονός ότι η σημασία της τεχνολογίας στις σημερινές τάξεις έχει τονιστεί από μεγάλο αριθμό ερευνητών και εκπαιδευτικών (Dorfler, 1993; Laborde, 1993).

Σύμφωνα με τους Noss και Hoyles (1992), ο υπολογιστής παίζει καθοριστικό ρόλο στην αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλων και μαθητών καθώς και στις δραστηριότητες που αναμένεται να πραγματοποιήσουν οι μαθητές.

Οι Clements και Battista (1990) πιστεύουν ότι η τεχνολογία έχει τη δυνατότητα να βοηθήσει τα παιδιά να βελτιώσουν τόσο τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουν τις γεωμετρικές έννοιες όσο και την ικανότητά τους. Ως αποτέλεσμα, πρότειναν στα σχολεία να υιοθετήσουν ένα αναλυτικό πρόγραμμα γεωμετρίας με επίκεντρο το λογότυπο. Σημειώνουμε επίσης ότι με το πιθανό λογισμικό The Geometer's Sketchpad, είναι ικανό να δημιουργήσει κατασκευές που, σύμφωνα με τον De Villiers (1999), βοηθούν στη μετάβαση από το δεύτερο επίπεδο van Hiele στο τρίτο, ενώ, σύμφωνα με τον Mariotti (2003), το "drag" έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός «Σημειωτικού εργαλείο διαμεσολάβησης» από την άποψη του Vygotsky. Τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό, ο Καλαβάσης (1997) επισημαίνει ότι οι ικανότητες που απαιτούνται σε ένα τεχνολογικό περιβάλλον συγκλίνουν με απόλυτο τρόπο με τις διδακτικές προτάσεις των θεωριών μάθησης και της γνωσιολογίας, όπως αυτές που βρίσκονται στη Διδακτική των Μαθηματικών.



Εικόνα 6: Μέθοδοι Γνωσιακής Μαθητείας

3.3.Δυσκολίες κατά τη διαδικασία διδασκαλίας των εγγεγραμένων σχημάτων

Σύμφωνα με μελέτες, η δυσκολία διδασκαλίας και κατανόησης των μαθηματικών, ιδιαίτερα της γεωμετρίας, είναι ένας παράγοντας που έχει συμβάλει στην εκτεταμένη ακαδημαϊκή αποτυχία (NMC 2009). Σύμφωνα με τους Adegun & Aalegun (2013), οι μαθητές είχαν προβλήματα με τη γεωμετρία και είχαν κακή βαθμολογία στα μαθήματα μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τα ευρήματα της Telima (2012), ένας σημαντικός αριθμός μαθητών αποτυγχάνει να κατανοήσει τις θεμελιώδεις αρχές της γεωμετρίας και αποφοιτά από μαθήματα μαθηματικών χωρίς να έχει αποκτήσει θεμελιώδες λεξιλόγιο.

Ως αποτέλεσμα των παρακάτω παραγόντων, η μελέτη και η διδασκαλία του μαθηματικού θέματος της γεωμετρίας θεωρείται ένα από τα πιο απαιτητικά ζητήματα και βασικό στόχο αποτελεί η εκμάθηση της εκπαιδευτικής στρατηγικής, της γεωμετρικής γλώσσας και των δυνατοτήτων οπτικοποίησης.

Σύμφωνα με τον Mason (2002), ορισμένα άλλα ζητήματα τα οποία προέκυψαν περιλαμβάνουν τις μη ανεπτυγμένες συλλογιστικές δεξιότητες, τις διαφορές των φύλων, τον ανεπαρκή χρόνο, το ανεπαρκές σχολικό πρόγραμμα σπουδών και την έλλειψη αποδείξεων από τους μαθητές. Αυτό έχει σημαντικό και επιζήμιο αντίκτυπο στην ικανότητα του μαθητή στο μάθημα της γεωμετρίας.

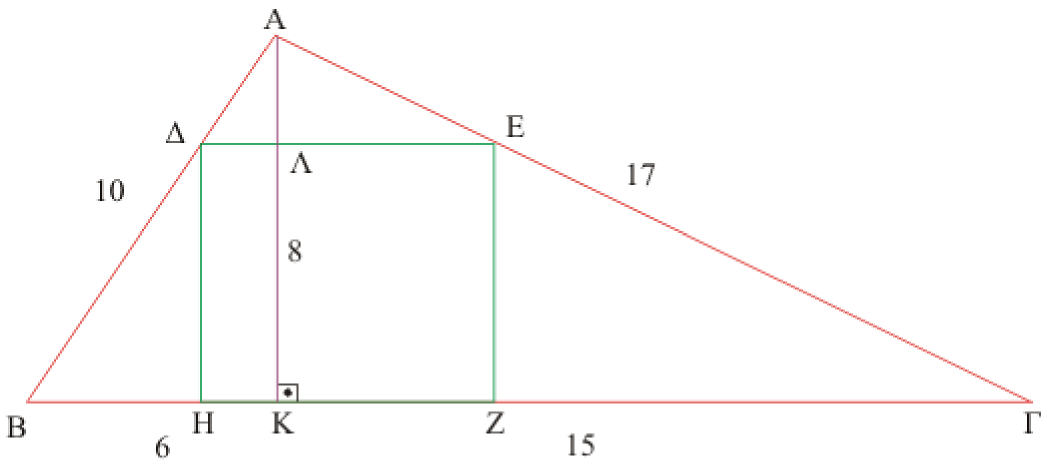
Οι Abiam και Odok (2006) δεν βρήκαν στοιχεία σημαντικής συσχέτισης μεταξύ του φύλου και των επιτευγμάτων στους τομείς της αλγεβρικής διαδικασίας, της στατιστικής ή του αριθμού και της αρίθμησης.

Η έκθεση των επικεφαλής εξεταστών για κάθε ένα από τα έτη 2010, 2011, 2012, 2013 και 2014 αποκαλύπτει και επιβεβαιώνει ελλείψεις σε τομείς όπως η μέτρηση, η κατασκευή και τα θεωρήματα κύκλων, μεταξύ άλλων.

Περνώντας στο ζήτημα το οποίο πρόκειται να εξεταστεί στην παρούσα εργασία, αν και οι δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετώπισαν κατά την παρέμβαση θα παρουσιαστούν αναλυτικά παρακάτω, πρόκειται να γίνει μία συνοπτική παρουσίαση των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν κατά την απόδειξη εγγεγραμμένου τετραγώνου σε τρίγωνο.

Για τις ανάγκες της προσέγγισης αυτής, δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα:

Δίνεται τρίγωνο με πλευρές ΑΒ=10 ΑΓ=17 ΒΓ=21. Κατασκευάζουμε το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΔΕΖΗ όπου η πλευρά ΖΗ βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΒΓ και οι κορυφές Δ και Ε πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου αντίστοιχα. Υποθετικά, ζητείται να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου:



Συνεπώς, αφού:

$\mathrm{B\Gamma}^2 > \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2$ άρα $\widehat{\mathrm{A}} > 90^\circ$

Έστω ΑΚ το ύψος του ΑΒΓ στην ΒΓ (Κ εσωτερικό του ΒΓ), που τέμνει τη ΔΕ στο Λ.

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 7} = 84$$

Άρα $\frac{\mathrm{B\Gamma \cdot AK}}{2} = 84 \Rightarrow \mathrm{AK} = 8$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΒΚ είναι ΒΚ = 6, οπότε ΓΚ =15.

Αν x η πλευρά του τετραγώνου, από την ομοιότητα των ΒΗΔ με ΒΚΑ και ΓΕΖ με ΓΑΚ είναι:

$$\frac{x}{8} = \frac{BH}{BK} = \frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{\Gamma K}} = \frac{\mathrm{BH + \Gamma Z}}{\mathrm{BK + \Gamma K}} = \frac{21 - x}{21} \Rightarrow x = \frac{168}{29}$$

(Ρίζος, 2008)

Ένα σημαντικό πρόβλημα το οποίο εντοπίζεται, σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μαθητές είτε δε γνωρίζουν είτε δεν κατανοούν απόλυτα το πυθαγόρειο θεώρημα, ώστε να το χρησιμοποιήσουν για την επίλυση του προβλήματος.

Επιπλέον, σε μεγάλο αριθμό των μαθητών, διαπιστώνεται ότι έχουν σημαντικά προβλήματα, ακόμη και στην επίλυση απλών πράξεων, γεγονός που δεν τους επιτρέπει να επιτύχουν μία σωστή λύση, ακόμη και αν καταλάβουν ποιο είναι το σκεπτικό επίλυσης του προβλήματος.

Δεδομένου ότι οι μαθητές, δεν κατανοούν δυστυχώς τη σημασία των μαθηματικών στην ζωή τους, φαίνεται πως δεν έχουν κίνητρο να μελετήσουν επαρκώς τα προβλήματα γεωμετρίας, ώστε να μπορούν να ανταποκριθούν σε μεγάλο ποσοστό, συνεπώς, θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ιστορική προσέγγιση, η οποία μπορεί να αυξήσει τα κίνητρα των μαθητών.

3.4.Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ελλάδα, παρά την τεράστια σημασία της, είναι αρκετά παραγκωνισμένη και περιθωριοποιημένη, καθώς διδάσκεται ως ένα μικρό τμήμα των μαθηματικών και με τρόπο απόλυτα διακριτό από την άλγεβρα. Η παρέμβαση που θα παρουσιαστεί παρακάτω αφορά ένα μαθητή της Β τάξης του Λυκείου, συνεπώς, κρίθηκε κρίσιμο να δοθεί βαρύτητα στην ύλη που διδάσκεται στην συγκεκριμένη τάξη, η οποία απεικονίζεται στον ακόλουθο πίνακα[1]:

[1] Ο πίνακας προέρχεται από τη σελίδα: Διδακτέα ύλη Γεωμετρίας Β τάξης Ημερήσιου ΓΕΛ (pe03.gr)

Β΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Διδακτέα - Εξεταστέα ύλη Σχολικού Έτους 2022-2023

Σύμφωνα με την απόφαση 101173/Δ2/2022 του ΥΠΑΙΘ

Ενδεικτικός προγραμματισμός διδασκαλίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ	ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ	ΩΡΕΣ	ΜΗΝΑΣ
Κεφάλαιο 7° Αναλογίες	7.1 – Εισαγωγή	5	ΣΕΠ ΟΚΤ ΝΟΕ
	7.4 – Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες		
	7.5 – Μήκος ευθυγράμμου τμήματος		
	7.6 – Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο, χωρίς την απόδειξη της πρότασης και χωρίς την υποπαράγραφο «Διερεύνηση»		
	7.7 – Θεώρημα Θαλή, χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων, χωρίς το πρόβλημα 2 και χωρίς τους ορισμούς «συζυγή αρμονικά» και «αρμονική τετράδα»		
	Στο κεφάλαιο 7 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού		
Κεφάλαιο 8° Ομοιότητα	8.1 – Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	4	
	8.2 – Κριτήρια ομοιότητας, χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων I, II και III και τις εφαρμογές 1 και 3		
	Στο κεφάλαιο 8 δεν θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού		
Κεφάλαιο 9° Μετρικές Σχέσεις	9.1 – Ορθές προβολές	5	
	9.2 – Το Πυθαγόρειο θεώρημα		
	9.3 – Γεωμετρικές κατασκευές		
	9.4 – Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος, χωρίς την εφαρμογή 2	3	ΔΕΚ ΙΑΝ ΦΕΒ
Κεφάλαιο 10° Εμβαδά	10.1 – Πολυγωνικά χωρία	5	
	10.2 – Εμβαδόν ευθυγράμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα		
	10.3 – Εμβαδόν βασικών ευθυγράμμων σχημάτων		
	10.4 – Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου, χωρίς τις αποδείξεις	2	
	10.5 – Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος II	3	
Κεφάλαιο 11° Μέτρηση Κύκλου	11.1 – Ορισμός κανονικού πολυγώνου	2	ΜΑΡ ΑΠΡ ΜΑΪ
	11.2 – Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων, χωρίς τις αποδείξεις των θεωρημάτων και του πορίσματος		
	11.4 – Προσέγγιση του μήκους κύκλου με κανονικά πολύγωνα	7	
	11.5 – Μήκος τόξου		
	11.6 – Προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου με κανονικά πολύγωνα		
	11.7 – Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος		
	ΣΥΝΟΛΟ ΩΡΩΝ	36	36
	Οι τελευταίες ώρες της διδασκαλίας να διατεθούν για επανάληψη		

Δημήτριος Σπαθάρας - τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών • www.pe03.gr

Σύμφωνα με το ΙΕΠ[2] για τη διδασκαλία μαθητών της Β τάξης του Λυκείου, συνιστάται για τους εκπαιδευτικούς να διαθέσουν επαρκή χρόνο για την αντιμετώπιση τυχόν κενών γνώσης ή εννοιολογικών παρεξηγήσεων που μπορεί να έχουν αποκτήσει οι μαθητές τους από το προηγούμενο έτος (Α Λυκείου). Τα συγκεκριμένα θέματα που απαιτούν επιπλέον χρόνο και συζήτηση κατά τη διάρκεια του μαθήματος μπορεί να διαφέρουν μεταξύ των μεμονωμένων μαθητών. Ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να εντοπίζει και να παρακολουθεί αυτές τις απαιτήσεις, τόσο κατά την έναρξη της ακαδημαϊκής περιόδου όσο και συνεχώς στη συνέχεια, και να εφαρμόζει τα κατάλληλα μέτρα. Στο πλαίσιο της Γεωμετρίας της Β' Λυκείου, που λειτουργεί ως συνέχεια της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου, η σειρά διδασκαλίας είναι προκαθορισμένη (σύμφωνα με τους δύο τόμους του σχολικού βιβλίου), αν και με ποικίλο βαθμό έμφασης σε επιμέρους κεφάλαια. Υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να απαιτείται επιπλέον χρόνος για επανεξέταση και ενίσχυση της Α' ύλης στη Β' Λυκείου.

[2] v-gel-geometria.pdf (esos.gr)

4.Μεθοδολογία

4.1.Αντικείμενο και στόχοι έρευνας

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη διδασκαλία των εγγεγραμμένων σχημάτων και συγκεκριμένα την εγγραφή ενός τριγώνου μέσα σε ένα τετράγωνο. Οι στόχοι που έχουν τεθεί για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας είναι:

(1) η παρουσίαση των μεθόδων απόδειξης εγγραφής τριγώνου σε τετράγωνο ιστορικά

(2) η ανάδειξη των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν κατά την διδασκαλία εγγεγραμμένων σχημάτων

(3) η παρουσίαση των αποτελεσμάτων μελέτης περίπτωσης διδασκαλία εγγραφής τριγώνου σε τετράγωνο με την ιστορική μέθοδο σε μαθητή Β’ Λυκείου.

Ο γενικός σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει αν η αξιοποίηση της ιστορικής μεθόδου στη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα των εγγεγραμμένων σχημάτων μπορεί να επιφέρει θετικά αποτελέσματα στη διδασκαλία σε μαθητές λυκείου και αν μπορεί να τους βοηθήσει να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους.

4.2.Μεθοδολογία της έρευνας

Η εργασία αναπτύσσεται με τη μέθοδο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης και της μελέτης περίπτωσης. Στο πρώτο στάδιο, πραγματοποιήθηκε βιβλιογραφική ανασκόπηση με στόχο τη διερεύνηση των υπαρχουσών μεθόδων και την αξιολόγηση τους αλλά και την ανάδειξη των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν κατά την εκμάθηση των εγγεγραμμένων σχημάτων, σύμφωνα με άλλες έρευνες. Στη συνέχεια, σχεδιάστηκε ένα πλάνο μαθήματος, με την αξιοποίηση της ιστορικής μεθόδου διδασκαλίας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σε μαθητή Β' Λυκείου, ο οποίος είχε ήδη αξιολογηθεί στο συγκεκριμένο αντικείμενο πριν τη διδακτική παρέμβαση. Ο μαθητής παρακολούθησε τη διδακτική παρέμβαση και στη συνέχεια επανεξετάστηκε, αλλά και απάντησε σε ερωτήματα, ώστε να γίνει σύγκριση της επίδοσης του και ανάλυση των απόψεων του για την παρέμβαση. Στόχος της συγκεκριμένης μελέτης περίπτωσης στον μαθητή, ήταν η διερεύνηση του εάν και κατά πόσο η μέθοδος απέδωσε, ήταν αποτελεσματική και βοήθησε το μαθητή να αντιμετωπίσει τις δυσκολίες του.

4.3.Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσε ένας μαθητής της Β΄ Λυκείου, ο οποίος έχει γενικότερα καλές επιδόσεις στο μάθημα των μαθηματικών, αλλά δυσκολεύεται ιδιαίτερα στη Γεωμετρία. Ο μαθητής είναι άντρας ως προς το φύλο και είναι 16 ετών. Αν και έχει διδαχτεί το συγκεκριμένο αντικείμενο, ο ίδιος δήλωσε ότι τον δυσκολεύει αρκετά και ότι θεωρεί ότι δεν έχει αρκετές γνώσεις.

4.4.Ερευνητικά εργαλεία

Τόσο τα φύλλα εργασίας, όσο και το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκαν για την παρούσα έρευνα είναι πρωτότυπα και σχεδιάστηκαν κατόπιν μελέτης της βιβλιογραφίας. Η διδασκαλία, βασίστηκε στη μέθοδο εμπλοκής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία της γεωμετρίας και πιο συγκεκριμένα είχε ως πρότυπο την αντίστοιχη έρευνα, την οποία ο Guyot (2018) εφάρμοσε στους μαθητές του. Ακόμη, για τη διεξαγωγή της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν εργαλεία τα οποία αποτέλεσαν εποπτικά μέσα του μαθήματος, τα οποία παρατίθενται αναλυτικά παρακάτω.

4.5.Η σημασία της έρευνας

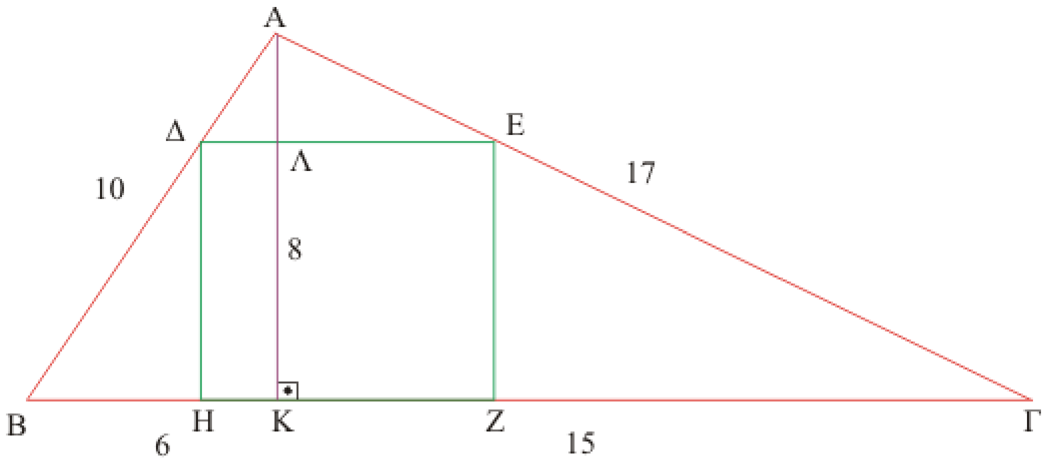
Η παρούσα έρευνα, έχοντας ως ευρύτερο αντικείμενο τη διδασκαλία των μαθηματικών, στοχεύει στο να προσφέρει χρήσιμα αποτελέσματα, τα οποία θα μπορούσαν να συμβάλλουν με θετικό τρόπο στην έρευνα και τη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα των εγγεγραμμένων σχημάτων. Μέσα από μία εμπειρική προσέγγιση, που καταγράφει αληθινή επικοινωνία με τους μαθητές, μπορούν σαφώς να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα, τα οποία ακόμη και αν δεν γενικεύονται στο σύνολο του πληθυσμού, είναι σημαντικά ως έναυσμα για περαιτέρω διερεύνηση.

5.Παρουσίαση της ερευνητικής διαδικασίας

5.1.Παρουσίαση διεξαγωγής pre study για την αξιολόγηση του επιπέδου και των δυσκολιών που αντιμετωπίζει ο μαθητής

Πριν τον σχεδιασμό της παρέμβασης, ήταν απαραίτητο να αξιολογηθούν οι γνώσεις και το επίπεδο του μαθητή, σε σχέση με τα εγγεγραμμένα σχήματα και συγκεκριμένα την εγγραφή ενός τετραγώνου σε ένα τρίγωνο. Ο μαθητής, είχε ήδη διδαχθεί στα πλαίσια της ύλης του το συγκεκριμένο κεφάλαιο, κατά συνέπεια, η δημιουργία του pre study ήταν προσαρμοσμένη στο επίπεδο γνώσεων που αναμένεται να έχει ένας μαθητής Β' Λυκείου. Ο μαθητής συμπλήρωσε το pre study σε χρόνο 45 λεπτών, αφού πρώτα ενημερώθηκε ότι οι απαντήσεις του θα αποτελέσουν τη βάση για να σχεδιαστεί το πρόγραμμα παρέμβασης ανάλογα με τις ανάγκες του. Το φύλλο εργασίας το οποίο δόθηκε στο μαθητή, παρατίθεται στο παράρτημα Α.

Παρακάτω, παρατίθεται η απάντηση στο φύλλο εργασίας, η οποία θα αποτελέσει τη βάση για να εξεταστούν και να παρουσιαστούν τα λάθη του μαθητή. Το σχήμα το οποίο έπρεπε να κατασκευαστεί, εικονίζεται στην παρακάτω εικόνα:



Ακολουθεί η σωστή επίλυση του προβλήματος:

Αφού:

$\mathrm{B\Gamma}^2 > \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2$ άρα $\widehat{\mathrm{A}} > 90^\circ$

Έστω ΑΚ το ύψος του ΑΒΓ στην ΒΓ (Κ εσωτερικό του ΒΓ), που τέμνει τη ΔΕ στο Λ.

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 3\cdot 7} = 84$$

Άρα $\dfrac{\mathrm{B\Gamma}\cdot \mathrm{AK}}{2} = 84 \Rightarrow \ \mathrm{AK} = 8$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΒΚ είναι ΒΚ = 6, οπότε ΓΚ =15.

Αν x η πλευρά του τετραγώνου, από την ομοιότητα των ΒΗΔ με ΒΚΑ και ΓΕΖ με ΓΑΚ είναι:

$$\frac{x}{8} = \frac{BH}{BK} = \frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{\Gamma K}} = \frac{\mathrm{BH}+\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{BK}+\mathrm{\Gamma K}} = \frac{21-x}{21} \Rightarrow x = \frac{168}{29}$$

Ο μαθητής κατασκεύασε σωστά το σχήμα και ξεκίνησε την επίλυση της άσκησης, ωστόσο, ένα σημαντικό πρόβλημα ανέκυψε, το οποίο δεν του επέτρεψε να λύσει την άσκηση. Ο μαθητής δεν σκέφτηκε ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα πρέπει να αξιοποιηθεί για την εύρεση απάντησης, με αποτέλεσμα να μην καταφέρει να φτάσει στο ζητούμενο και να βαθμολογηθεί με βαθμό 4 στα 10. Ο ακόλουθος πίνακας, αναδεικνύει με τη χρήση ρουμπρίκ, τα λάθη και τις αδυναμίες του, όπως προέκυψαν από το pre study:

ΤΟΜΕΑΣ	ΒΑΘΜΟΣ (0-10)
Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών	6
Αξιοποίηση προγενέστερων γνώσεων	3
Κατασκευή σχημάτων	9
Επίλυση πράξεων	8
Επιμέλεια κειμένου	5

5.2.Παρουσίαση Διδακτικής Παρέμβασης

Στόχοι παρέμβασης:

Ο μαθητής, μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης πρέπει να είναι σε θέση να:

- κατανοεί το πρόβλημα της εγγραφής του τετραγώνου εντός του τριγώνου
- μπορεί να κατασκευάσει ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο σε ένα τρίγωνο
- μπορεί να λύσει προβλήματα που περιλαμβάνουν την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο
- κατανοήσει τη σημασία της ιστορίας των μαθηματικών
- κατανοήσει την ιστορική σημασία των μαθηματικών για την ανθρωπότητα
- αποκτήσει μεταγνωστικές δεξιότητες

Εποπτικά Μέσα

- Φορητός Υπολογιστής

- Προτζέκτορας
- Αρχείο ppt
- Φύλλα εργασίας
- Φύλλο Ερωτηματολογίου

Διάρκεια:

2 διδακτικές ώρες (90 λεπτά)

Στάδια Διδασκαλίας και Δραστηριότητες:

Αφόρμηση (5 λεπτά)

Στον μαθητή παρουσιάστηκαν ορισμένες εικόνες, συγκεντρωμένες στο ppt, οι οποίες περιλάμβαναν εικόνες από αρχαία και μεσαιωνικά χειρόγραφα, στα οποία αναδεικνύονταν η πορεία της ιστορίας των μαθηματικών. Στην συνέχεια, πραγματοποιήθηκε σύντομη συζήτηση σχετικά με την ιστορική σημασία των μαθηματικών και τη συμβολή τους στον σύγχρονο κόσμο. Ο μαθητής έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις εικόνες και εντυπωσιάστηκε από την ιστορική διάρκεια της μελέτης του συγκεκριμένου αντικειμένου.

Δραστηριότητα 1 (10 λεπτά): Παρουσίαση του προβλήματος

Στο μαθητή παρουσιάστηκε το πρόβλημα της εγγραφής ενός τετραγώνου εντός του κύκλου και το γεγονός ότι η ιστορία της μελέτης των εγγεγραμένων σχημάτων, αρχίζει ήδη από την εποχή των στοιχείων του Ευκλείδη, παρουσιάστηκαν εικόνες και διαγράμματα, ενώ ο μαθητής κλήθηκε ο ίδιος να περιγράψει το πρόβλημα για να εξεταστεί κατά πόσο το είχε κατανοήσει και να σχεδιάσει ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο σε ένα τρίγωνο. Η συζήτηση τον βοήθησε να εκφραστεί και να συζητήσει τις απορίες του, παρά το γεγονός ότι αρχικά ήταν ιδιαίτερα διστακτικός. Μέσα από την καθοδήγηση εκ μέρους του εκπαιδευτικού και την διαδικασία ανάκλησης των γνώσεων, εν τέλει ο μαθητής μπόρεσε μόνος του να επιλύσει το πρόβλημα, με μικρά λάθη, που διορθώθηκαν κατόπιν συζήτησης.

Δραστηριότητα 2: Ιστορική Αναδρομή (15 λεπτά)

Στο μαθητή παρουσιάστηκαν αναλυτικά προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος από μεσαιωνικούς στοχαστές, με τον εκπαιδευτικό να επιλύει την άσκηση, συζητώντας ταυτόχρονα με τον μαθητή σχετικά με τις επόμενες κινήσεις του ή το αντίστροφο. Παρουσιάστηκαν δύο παραδείγματα, του Chuquet (La Geometrie, 1484) και του Bourdon (1837). Το πρώτο παράδειγμα επιλύθηκε από τον εκπαιδευτικό, με την καθοδήγηση του μαθητή.

Δραστηριότητα 3: Εφαρμογή Γνώσεων (15 λεπτά)

Ο μαθητής, κλήθηκε να λύσει το πρόβλημα του Bourdon (1837) μόνος του, με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού σχετικά με την βήμα προς βήμα επίλυση. Σε κάθε λάθος, ο εκπαιδευτικός τροφοδοτούσε τον μαθητή με ερωτήσεις, βοηθώντας τον να επαναξιολογήσει την ενέργεια του και να διορθώσει τα λάθη του.

Αξιολόγηση (45 λεπτά):

Η δραστηριότητα της αξιολόγησης της παρέμβασης θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα στις επόμενες δύο υποενότητες, ενώ το φύλλο εργασίας και το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκαν, βρίσκονται στο παράρτημα της εργασίας. Ο μαθητής, είχε 45 λεπτά να επιλύσει τα φύλλα εργασίας και στη συνέχεια να απαντήσει ένα πολύ μικρό ερωτηματολόγιο σχετικά με την εμπειρία του από το μάθημα. Τα αποτελέσματα, χρησιμοποιήθηκαν για να δοθεί ανατροφοδότηση στον εκπαιδευτικό, σχετικά με τα δυνατά και τα αδύναμα σημεία του μαθήματος.

5.3.Αξιολόγηση και αποτελέσματα

5.3.1.Αξιολόγηση φύλλου εργασίας 1

Κατόπιν της ολοκλήρωσης του μαθήματος, στον μαθητή δόθηκαν 40 λεπτά ως χρόνος για τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας και στη συνέχεια 5 λεπτά για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου.

Στον ακόλουθο πίνακα, πρόκειται να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του μαθητή κατόπιν της παρέμβασης, συγκρίνοντας τα οποία με τα αποτελέσματα του pre study που παρατέθηκαν παραπάνω, φαίνεται πως η βελτίωση ήταν εξαιρετικά σημαντική.

ΤΟΜΕΑΣ	ΒΑΘΜΟΣ (0-10)
Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών	8
Αξιοποίηση προγενέστερων γνώσεων	8
Κατασκευή σχημάτων	10
Επίλυση πράξεων	10

Επιμέλεια κειμένου	7

Ο μαθητής, βαθμολογήθηκε με 9/10 σε αντίθεση με την πρώτη δοκιμή, όπου κατάφερε μόλις να αγγίξει το 4/10. Κατασκεύασε σωστά το σχήμα, αξιοποίησε τις γνώσεις του, έδειξε να έχει κατανοήσει τα δύο παραδείγματα που διδάχθηκε και μπόρεσε να λύσει σωστά την άσκηση.

Ως προς την προφορική ερώτηση, ο μαθητής βαθμολογήθηκε με 8/10, δείχνοντας να έχει κατανοήσει σε αρκετά καλό επίπεδο τη μέθοδο που διδάχτηκε. Στο παράρτημα β' υπάρχει τόσο το pre study, όσο και μία απεικόνιση του σχήματος το οποίος σχεδιάστηκε.

5.3.2.Αξιολόγηση φύλλου εργασίας 2

Παρακάτω, πρόκειται να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του δεύτερου φύλλου εργασίας, το οποίο παρατίθεται στο παράρτημα:

ΤΟΜΕΑΣ	ΒΑΘΜΟΣ (0-10)
Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών	9
Αξιοποίηση προγενέστερων γνώσεων	9
Κατασκευή σχημάτων	7
Επίλυση πράξεων	10
Επιμέλεια κειμένου	7

Όπως προκύπτει, η βελτίωση των δεξιοτήτων του μαθητή, ενισχύθηκε σταθερά, όπως προκύπτει από τη μελέτη του πίνακα, συγκριτικά με το pre test. Αντίστοιχα, είναι και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο φύλλο εργασίας 3.

5.3.3.Αξιολόγηση φύλλου εργασίας 3

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του φύλλου εργασίας 3, για τα οποία ωστόσο, δεν καταγράφεται ο τομέας κατασκευή σχημάτων, καθώς δεν υπήρχε ανάλογη άσκηση. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι η επίδοση του στο τρίτο φύλλο ήταν άριστη.

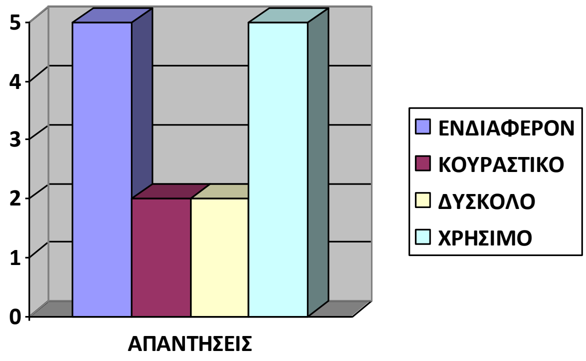
ΤΟΜΕΑΣ	ΒΑΘΜΟΣ (0-10)
Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών	9
Αξιοποίηση προγενέστερων γνώσεων	10
Κατασκευή σχημάτων	
Επίλυση πράξεων	10
Επιμέλεια κειμένου	9

5.4.Έρευνα μέσω ερωτηματολογίου

Κατά τα τελευταία 5 λεπτά της παρέμβασης, ο μαθητής κλήθηκε να συμπληρώσει ένα σύντομο ερωτηματολόγιο, το οποίο σχεδιάστηκε για να αξιολογήσει το πως ο ίδιος αξιολόγησε το μάθημα. Το ερωτηματολόγιο που μοιράστηκε, παρατίθεται στο παράρτημα γ΄ της παρούσας εργασίας.

Σύμφωνα με τις απαντήσεις του μαθητή, το μάθημα του φάνηκε λίγο κουραστικό και δύσκολο, αλλά εξαιρετικά ενδιαφέρον και χρήσιμο.

Αξιολόγηση Μαθήματος



Αντίστοιχα, ο μαθητής απάντησε ότι θα ήθελε πάντα να διδάσκεται με τον τρόπο αυτό το μάθημα τις γεωμετρίας, ενώ παρακάτω παρατίθενται οι 3 προτάσεις του για αλλαγές:

1.Μικρότερη ύλη σε κάθε μάθημα

2.Περισσότερος χρόνος προβολής εικόνων και συζήτησης

3.Περισσότερα παραδείγματα στην τάξη

Από τις απαντήσεις που ο μαθητής έδωσε, προκύπτει ότι η παρέμβαση ήταν επιτυχής, ωστόσο, θα ήταν σημαντικό να υπάρχει περισσότερος χρόνος για συζήτηση και λιγότερες ασκήσεις, ώστε ο μαθητής να μην πιεστεί.

Συζήτηση

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, η επίδοση του μαθητή βελτιώθηκε σημαντικά μέσα από τη διδακτική παρέμβαση, γεγονός το οποίο έρχεται σε συμφωνία με αντίστοιχες έρευνες που εξέτασαν την αποτελεσματικότητα αξιοποίησης της ιστορικής μεθόδου, όπως για παράδειγμα η έρευνα του Guyot (2018). Επιπλέον, οι δυσκολίες που φάνηκε ο μαθητής να αντιμετωπίζει, περιεγράφηκαν εκτενώς σε έρευνες μαθηματικών σχετικά με τις δυσκολίες που οι μαθητές αντιμετωπίζουν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Είναι σημαντικό το γεγονός ότι η παρούσα έρευνα, έδειξε για άλλη μία φορά την παιδαγωγική αξία της αξιοποίησης ιστορίας κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τον μαθηματικών σε μαθητές, καθώς εξάπτει το ενδιαφέρον του. Ο μαθητής, δήλωσε κατά τη διάρκεια του μαθήματος «Τώρα καταλαβαίνω γιατί οι άνθρωποι ασχολούνται τόσους αιώνες με τα μαθηματικά» όταν συζητήθηκε η αξιοποίηση των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα και τον ανθρώπινο πολιτισμό, ενώ αντίστοιχα, έδειξε μεγάλο ενθουσιασμό, μελετώντας εικόνες με παπύρους που πραγματεύονται τα ίδια προβλήματα που εκείνος καλείται να επιλύσει. Όπως ήταν αναμενόμενο, ο μαθητής δυσκολεύτηκε ως προς το ότι ήρθε για πρώτη φορά με τη συγκεκριμένη μέθοδο, οπότε ένιωσε πως δεν είχε την απαραίτητη εμπειρία και δεν ήξερε πως θα προχωρήσει το μάθημα, ωστόσο, όσο περνούσε ο χρόνος, ένιωθε και πιο άνετα και εξέφραζε απορίες αλλά και ιδέες.

Όπως αναφέρθηκε στη βιβλιογραφική ανασκόπηση., η δυσκολία της διδασκαλίας αλλά και της κατανόησης των μαθηματικών, και ιδιαίτερα όσον αφορά το πεδίο της γεωμετρίας, αποτελεί έναν παράγοντα ο οποίος συμβάλει στην ακαδημαϊκή αποτυχία (NMC, 2009). Σύμφωνα με τα ευρήματα της Telima (2012), ένας σημαντικός αριθμός μαθητών δεν καταφέρνει να κατανοήσει τις θεμελιώδεις αρχές της γεωμετρίας και δεν καταφέρνει κατά τα διδακτικά του χρόνια, να αποκτήσει θεμελιώδες λεξιλόγιο. Μέσα από την παρέμβαση που αξιοποίησε την ιστορία των μαθηματικών η οποία πραγματοποιήθηκε στην τρέχουσα έρευνα, ο μαθητής κατάφερε να κατανοήσει τις θεμελιώδεις αρχές της γεωμετρίας που αφορούν τα εγγεγραμμένα σχήματα και το σχετικό λεξιλόγιο, όπως προέκυψε από την κατανόηση των ασκήσεων και την συζήτηση στην τάξη.

Σύμφωνα με τα ευρήματα παλαιότερης έρευνας η οποία αφορά την διδασκαλία των μαθηματικών στην ελληνική επικράτεια (Makras & Salihos, 1991), ένα ποσοστό το οποίο κυμαίνεται από 20 % έως 30% των έχουν την δυνατότητα να απαντήσουν με επιτυχία σε ερωτήσεις που αφορούν βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως στοιχειώδεις γεωμετρικές έννοιες και μετρήσεις. Το χαμηλό επίπεδο στον τομέα των μαθηματικών επιδόσεων οφείλεται στα αναλυτικά προγράμματα, στη διδασκαλία, στις διαφορετικές στρατηγικές μάθησης που χρησιμοποιούνται, καθώς και στο διδακτικό υλικό. Η τρέχουσα έρευνα, αποτελεί να προτείνει ως αποτελεσματική τη μέθοδο της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω της ιστορίας της, παρέχοντας επιστημονικά δεδομένα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο μία τέτοια προσέγγιση μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση και το ενδιαφέρον των μαθητών.

Φυσικά, όπως κάθε έρευνα, έτσι και η παρούσα, είχε τους περιορισμούς της. Ο πρώτος περιορισμός σχετίζεται με το γεγονός ότι η έρευνα έγινε σε πραγματικές συνθήκες και δεδομένου του ελάχιστου χρόνου ενός μαθητή λυκείου, μπόρεσαν να αφιερωθούν μόνο τρεις ώρες, μία για το pre study και δύο για την παρέμβαση και την αξιολόγηση. Εκτός από το χρόνο, το γεγονός ότι ο μαθητής ήταν μόνο ένας, περιόρισε τις επιλογές μεθόδου διδασκαλίας αλλά και κατέστησε τα αποτελέσματα μη αντιπροσωπευτικά για το σύνολο των μαθητών, καθώς το επίπεδο γνώσεων και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του μαθητή, σίγουρα επηρέασαν το αποτέλεσμα.

Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, ο μαθητής, ο οποίος συμμετείχε στην έρευνα παρουσίασε σημαντική βελτίωση σε όλους τους τομείς που εξετάστηκαν (Κατανόηση Γεωμετρικών Εννοιών, Αξιοποίηση προγενέστερων γνώσεων, Κατασκευή σχημάτων, Επίλυση πράξεων, Επιμέλεια κειμένου) μετά την παρακολούθηση δίωρης διδακτικής παρέμβασης διδασκαλίας του προβλήματος του εγγεγραμμένου τριγώνου σε τετράγωνο με την αξιοποίηση της μεθόδου της εμπλοκής της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα της γεωμετρίας. Ακόμη, βρήκε το μάθημα εξαιρετικά ενδιαφέρον και χρήσιμο και δήλωσε πως θα ήθελε να διδάσκεται πάντα έτσι την γεωμετρία. Όταν ρωτήθηκε σχετικά με τους λόγους για τους οποίους του φάνηκε το μάθημα ενδιαφέρον, δήλωσε πως «κατανόησε την ιστορική αξία των προβλημάτων και προσέγγισε τη γεωμετρία από μία άλλη σκοπιά».

Επιπρόσθετα, από τις απαντήσεις του προέκυψε ότι θα επιθυμούσε περισσότερο οπτικοακουστικό υλικό κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας αλλά και περισσότερο χρόνο για παραδείγματα και συζήτηση, ώστε να αφομοιώσει καλύτερα τις γνώσεις του. Μέσα από την ενίσχυση της παρέμβασης με περισσότερο οπτικοακουστικό υλικό, αλλά και την μείωση των ασκήσεων για την εξασφάλιση περισσότερου χρόνου διδασκαλίας, ενδεχομένως, τα ήδη θετικά αποτελέσματα θα ήταν ακόμη θετικότερα και θα είχαν αντιμετωπιστεί ορισμένες παρανοήσεις του μαθητή ή και λάθη που έγιναν λόγω βιασύνης.

Εξετάζοντας τα λάθη του μαθητή, πριν και μετά την παρέμβαση, προκύπτει ότι η παρέμβαση των βοήθησε να ξεπεράσει παρανοήσεις που τον μπέρδευαν σε σχέση με την εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο, καθώς τα λάθη στην τελική του προσπάθεια, σχετίζονταν αποκλειστικά με λάθη βιασύνης.

Μέσα από τη μελέτη των αποτελεσμάτων και των απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο εκ μέρους του μαθητή, προκύπτει σαφώς το συμπέρασμα πως μία παρέμβαση που βασίζεται στην ιστορία των μαθηματικών, πρέπει να πραγματοποιείται σε επαρκή χρόνο, και να είναι πλούσια σε οπτικοακουστικό υλικό, το οποίο εξάπτει το ενδιαφέρον τον μαθητών και τους καθηλώνει.

Όπως τονίστηκε και στη συζήτηση, το γεγονός ότι η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή ενός μόνο μαθητή, σημαίνει πως τα αποτελέσματα δεν μπορούν να είναι γενικευτικά. Κατά συνέπεια, ως ερευνητική πρόταση, θα μπορούσε να προταθεί η σχεδίαση ενός προγράμματος διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω της ιστορίας τους, το οποίο θα απευθύνεται σε μαθητές πρωτοβάθμιας, δευτεροβάθμιας ή τριτοβάθμιας εκπαίδευσης ή σε ενήλικες στα πλαίσια της δια βίου μάθησης και θα περιλαμβάνει αξιολόγηση πριν και μετά το πρόγραμμα, ώστε να φανεί κατά πόσο η μέθοδος είναι αποτελεσματική για ένα σαφώς ευρύτερο δείγμα του πληθυσμού. Μόνο τότε, θα μπορούν να εξαχθούν ασφαλή και γενικευτικά συμπεράσματα, αλλά και θα μπορεί να γίνει έρευνα με μεταβλητές, όπως για παράδειγμα το φύλο, η ηλικία, το μορφωτικό επίπεδο των συμμετεχόντων και άλλα στοιχεία.

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Α' ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ PRE STUDY

Αγαπητέ μαθητή,

έχεις 45 λεπτά να απαντήσεις το ακόλουθο ερώτημα, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που έχεις αποκομίσει από τα μαθήματα σου μέχρι σήμερα.

Δεδομένα

Δίνεται τρίγωνο με πλευρές ΑΒ=10 ΑΓ=17 ΒΓ=21.

Κατασκευάζουμε το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΔΕΖΗ όπου η πλευρά ΖΗ βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΒΓ και οι κορυφές Δ και Ε πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου αντίστοιχα.

Ζητούμενα

Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου:

- Αν δυσκολευτείς, μπορείς να χρησιμοποιήσεις το βιβλίο και το τετράδιο σου, δεν μπορείς όμως να κάνεις ερωτήσεις, καθώς η αξιολόγηση σου στοχεύει στην ανάδειξη των μαθησιακών αναγκών σου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β’ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Όνομα:

Επώνυμο:

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1</u>

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1)Ποιος ήταν ο Nicolas Chuquet; Τι γνωρίζετε για το έργο του La Géométrie;

2)Με βάση τη θεωρία που μάθατε και τα στοιχεία που γνωρίσατε για τον σημαντικό μαθηματικό N. Chuquet, καλείστε να λύσετε το ακόλουθο πρόβλημα: Υπάρχει ένα ισόπλευρο τετράγωνο acdf που περιέχεται σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο hgp του οποίου η κάθετος είναι he. Κάθε πλευρά του τετραγώνου είναι 4 κει πρέπει να βρείτε το μήκος των πλευρών του τριγώνου.

3)Αφού ολοκληρώσετε, παρουσιάστε προφορικά τη μέθοδο του Bourdon, την οποία διατύπωσε λίγους αιώνες αργότερα (1837).

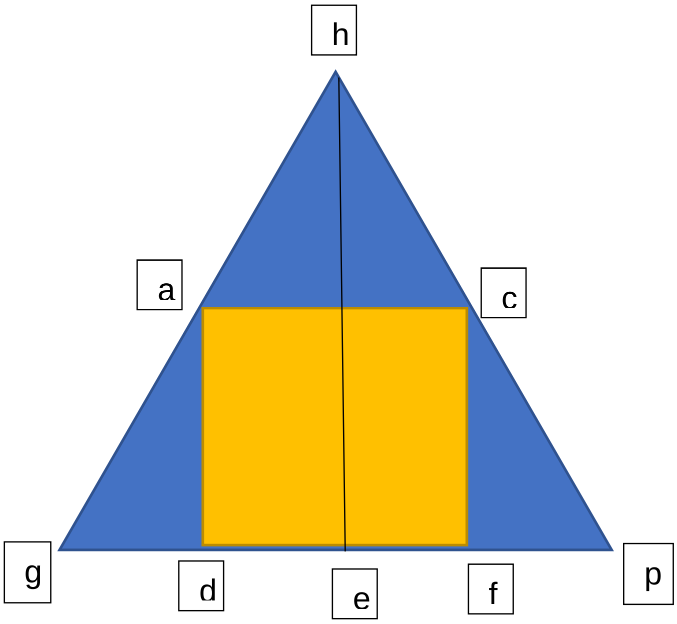
Tips! Μπορείτε να κάνετε ερωτήσεις και να κοιτάξετε πίσω, στη θεωρία, για να θυμηθείτε, μόνο αν δεν μπορείτε να προχωρήσετε παρακάτω!

ΓΝΩΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Μήκος πλευράς τετραγώνου: 4cm

Ζητούμενο: Μήκος πλευρών ισόπλευρου τριγώνου

ΣΧΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ (παρατίθεται εδώ, όπως σχεδιάστηκε)



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

1.Ο Ευκλείδης, αποτελεί έναν από τους σπουδαιότερους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Προηγουμένως, μάθαμε για το έργο Στοιχεία του Ευκλείδη και πως αυτό συνέβαλε στον τομέα των εγγεγραμμένων σχημάτων. Ποια είναι η 4η πρόταση του βιβλίου *Στοιχεία* του Ευκλείδη που διαβάσαμε προηγουμένως;

2.Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στον παρακάτω κενό χώρο;

3.Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο σε ένα ισοσκελές τρίγωνο στον παρακάτω κενό χώρο;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

1.Δώστε την αλγεβρική λύση του προβλήματος του al-Khwarizmi : Υπάρχει ένα τριγωνικό κομμάτι γης, οι δύο πλευρές του δέκα πήχεις και η βάση δώδεκα πήχεις, και μέσα στην «κοιλιά» του είναι ένα τετράγωνο κομμάτι γης. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;

2.Παρακαλώ, ξαναδείτε το κείμενο που σας μοιράστηκε και την οθόνη του power point.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ’ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Αγαπητέ μαθητή,

το παρακάτω ερωτηματολόγιο έχει σχεδιαστεί για να καταγράψει τις δικές σου εντυπώσεις από τη διδακτική παρέμβαση την οποία παρακολούθησες. Προσπάθησε να απαντήσεις ειλικρινά, ώστε το μάθημα να βελτιωθεί ανάλογα με τις δικές σου ανάγκες και επιθυμίες.

1.Αξιολόγησε βαθμολογώντας από το ένα ως το πέντε, κατά πόσο το μάθημα σου φάνηκε:

Α.ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ ☐

Β.ΔΥΣΚΟΛΟ ☐

Γ.ΧΡΗΣΙΜΟ ☐

Δ.ΚΟΥΡΑΣΤΙΚΟ ☐

2.Θα επιθυμούσες να διδάσκεσαι τη γεωμετρία μέσω την αξιοποίηση της ιστορίας πάντα;

Α.ΝΑΙ ☐

Β.ΟΧΙ ☐

3.Ποιές αλλαγές προτείνεις;

Α. ____

Β. ____

Γ. ____

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2000). Μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά : αιτιολογία αξιολόγηση, αντιμετώπιση. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αποστολάκης, Ι. (2019). Η διδασκαλία της Γεωμετρίας με την χρήση ΤΠΕ καθώς και σε e-learning περιβάλλοντα : Επίπεδα Van hiele και δυναμική γεωμετρία. Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Ντζιαχρήστος, Β. & Ζαράνης, Ν. (2001). Η αξιοποίηση της θεωρίας Van Hiele στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με τη βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 56, 55-74.

Ζαράνης, Ν. & Ντζιαχρήστος, Β. (2000). Η αξιοποίηση υπολογιστών στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών Α΄ Γυμνασίου. Στο Πρακτικά Β΄ Πανελληνίου Συνεδρίου Κέντρου Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης, Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, Αθήνα, 44-56.

Καλαβάσης, Φ. (1997). Θέματα Διδακτικής των μαθηματικών. Δάρδανος.

Ματσαγγούρας, Μ. (1997). *Θεωρία και Πράξη της διδασκαλίας*. Gutenberg.

Νικολουδάκης, Ε., & Χουστουλάκης, Ι. (2004). "Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μα-θηματικών της

Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση." Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: 359-372. <http://eudml.org/doc/236458>.

Σαχίνη, Ε. (2023). Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο- Διερεύνηση του προβλήματος από μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Διπλωματική εργασία. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Τζανάκη, Χ., & Κούρκουλος, Χ. (2000). Η τεκμηρίωση στα μαθηματικά: επιστημολογικά ζητήματα και διδακτικές προεκτάσεις. 4^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή. Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση.

Χρονάκη, Α. & Δημουλά, Μ. (2005). Ίδια και Διαφορετικά: Κατανόηση της έννοιας του τριγώνου από παιδιά πρώτης δημοτικού. Στο Χ. Κυνηγός (επιμ.), 1ο Συνέδριο ΕΝΕΔΙΜ: Η διδακτική μαθηματικών ως πεδίο έρευνας στην κοινωνία της γνώσης (σελ. 259-268), Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Εκδόσεις Leader Books.

Μάκρας, Σ., & Σαλίχος, Μ. (1991). Αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών στα Μαθηματικά κατά την είσοδο τους στο Λύκειο. Ευκλείδης Γ' (30-31), 42-60.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Dimakos, G., Nikoloudakis E., Ferentinos, S., Choustoulakis, E. (2010). The role of examples in Cognitive Apprenticeship, Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), n. 20, G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy) pp161-173.

Abiam, P. O. & Odok, J. K. (2006). Factors in Students' Achievement in Different Branches of Secondary School Mathematics. *Journal of Education and Technology*, 1 (1)*,* 161-168.

Bachelard, G. (1938). The formation of the scientific mind: A contribution to a psychoanalysis of objective knowledge. Clinamen Press.

Barwell, M. E. (1913). The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. *The Mathematical Gazette, 7*, 72-79.

Bourdon, L. P. M. (1837). Application de l'algèbre à la géométrie (4th ed.). Paris, France: Bachelier.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School. Washington DC: National Academy Press.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *1989*, *18*(1), 32-42.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31–48. https://doi.org/10.2307/749317

Chuquet, N. (1484). Triparty en la science des nombres. Éditions Jacques Gabay.

Chuquet, N. (1979). In H. L'Huillier (Ed.), La géométrie, première géométrie algébrique en langue française. Paris, France: Vrin

Clark, K.M., Kjeldsen, T.H., Schorcht, S., Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. In: Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C. (eds) Mathematics, Education and History . ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). The effects of Logo on children's conceptualizations of angle and polygons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 356-371

Collins, A., Brown, J. S. & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. American Educator, 15 (3), 6-11, 38-39.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 82*(2), 359–365. https://doi.org/10.1037/0022-0663.82.2.359

De Moor, E. (2000). Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Ολλανδία (ηλικίες 4-14) η ρεαλιστική προσέγγιση. Στο L. Srteefland (ed.) Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκαπίδευση. 131-153. Αθήνα: Leader Books.

De Morgan, A. (1865). On the study and difficulties of mathematics. London: Longmans, Green, Reader, and Dyer.

De Villiers, M.D. (1997). *Some adventures in Euclidean geometry*. Durban: University of Durban-Westville.

Ding, L. & Jones, K. (2007). Teaching geometry in lower secondary school in Shanghai, China. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. 26. 41-46.

Dorfler, W. (1993). Computer use and views of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics Education and Technology* (pp.159-186). Berlin: Springer - Verlag.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2000). History in mathematical education: The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic.

Fey, J.T. (1984). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educ Stud Math* **20**, 237–272 https://doi.org/10.1007/BF00310873

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Springer.

Glaisher, J. W. L. (1890). The Messenger of Mathematics, Vol. XIX [May 1889 - April 1890]. Leopold Classic Library.

Guyot, L. (2018). Visual and embodied aspects of mathematical understanding. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture (pp. 155-178). Springer.

Hoffer, A. (1981). Geometry Is More than Proof. The Mathematics Teacher, 74, 11-18. https://doi.org/10.5951/MT.74.1.0011 https://cms.education.gov.il/NR/rdonlyres/9066AD04-2DC3-4BE6-9D31981391E7619D/104162/TIMSS_2007_fullreport.pdf

Klein, F. (2016). Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis. Dover Publications.

Mariotti, M., A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education (pp. 97- 116). Berlin: Springer-Verlag.

Mason, J. (2002). Qualitative researching (2nd ed.). Sage.

Miller, G. A. (1916). *Historical Introduction to Mathematical Literature*. Macmillan Company.

NCTM. (1969). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R. & Hoyles, C., 1992. *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*, Springer Science & Business Media.

Piaget, J., & Garcia, R. (1989). Psychogenesis and the history of science. Columbia University Press.

Poincaré, H. (1908). *Science and hypothesis*. New York: Science Press.

Senk, S. L. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher*, v78 n6 p448-56.

Teppo, A. (1991). Van Hiele levels of geometric thought revisited. The Mathematics Teacher, 84(3), 210- 221.

Van de Walle, J. A. (2005). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. Allyn & Bacon.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. London: Academic Press.

Zeuthen, H. G. (1902). History of mathematics in ancient and medieval India. Copenhagen: J. Frimodt.