ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διπλωματική Εργασία

Τα Μαθηματικά στη Μεσαιωνική Κίνα, Ινδία και τον Ισλαμικό Κόσμο. Μια Προσέγγιση Μέσω Πηγών

Κασλής Κωνσταντίνος
Α.Μ. 112795

Επιβλέπων: Καθ. Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Συνεπιβλέπων: Καθ. Μιχαήλ Ανούσης

Άγιος Νικόλαος, Ιούνιος 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Αρβανιτογεώργο, για την καθοδήγηση του και την πολύτιμη βοήθεια του καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ θερμά την οικογένεια μου και ιδιαιτέρως τη σύζυγο μου Ευαγγελία για τη συμπαράστασή της, την πολύτιμη βοήθεια της καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου και τη συγγραφή της εργασίας μου.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η μεσαιωνική περίοδος, που εκτείνεται περίπου από τον 5ο έως τον 15ο αιώνα, χαρακτηρίζεται από σημαντικές εξελίξεις στον τομέα των μαθηματικών σε πολιτισμούς πέραν της Ευρώπης. Κατά τη διάρκεια αυτής της εποχής, οι περιοχές της Κίνας, της Ινδίας και του ισλαμικού κόσμου γνώρισαν αξιοσημείωτες προόδους στα μαθηματικά, οι οποίες όχι μόνο συνέβαλαν στην επιστημονική γνώση της εποχής τους, αλλά έθεσαν και τα θεμέλια για τη μετέπειτα Αναγέννηση και την Επιστημονική Επανάσταση στη Δύση. Στην Κίνα, η μαθηματική παράδοση ενισχύθηκε σημαντικά κατά τις δυναστείες Τανγκ (618-907) και Σονγκ (960-1279). Κατά τη διάρκεια αυτών των περιόδων, οι Κινέζοι μαθηματικοί ανέπτυξαν σύνθετες θεωρίες και πρακτικές εφαρμογές στα μαθηματικά. Εξέχοντες μαθηματικοί όπως ο Yang Hui και ο Qin Jiushao έκαναν προόδους στην άλγεβρα, τη γεωμετρία και την αριθμητική. Ο Yang Hui για παράδειγμα, ανακάλυψε το τρίγωνο του Pascal το αποκαλούμε στην Ευρώπη 400 χρόνια πριν , ενώ ο Qin Jiushao ανέπτυξε τη μέθοδο των υπολοίπων για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Οι πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών στην Κίνα περιλάμβαναν τη βελτίωση της αριθμητικής, την ανάπτυξη αστρονομικών εργαλείων και τη διαχείριση υδραυλικών έργων. Στην Ινδία, η μαθηματική παράδοση κατά τη μεσαιωνική περίοδο είναι γνωστή για την εισαγωγή και ανάπτυξη του δεκαδικού συστήματος και της έννοιας του μηδενός. Αυτές οι καινοτομίες είχαν βαθύ αντίκτυπο στην εξέλιξη των μαθηματικών παγκοσμίως. Σημαντικοί Ινδοί μαθηματικοί, όπως ο Aryabhata, ο Brahmagupta και ο Mahavira Acharya ανέπτυξαν προχωρημένες θεωρίες στην αριθμητική, την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Ο Aryabhata, για παράδειγμα, εισήγαγε τις βασικές αρχές της τριγωνομετρίας και των σφαιρικών συντεταγμένων, ενώ ο Brahmagupta ανέπτυξε κανόνες για τη χρήση του μηδενός και αρνητικών αριθμών.Ο Mahavira Acharya με πιο διάσημο έργο του είναι το “The Essence of Mathematics” παρουσίασε μαθηματικές έννοιες, ορισμούς και θεωρήματα με λεπτομερείς εξηγήσεις και αποδείξεις, κάνοντας σημαντικές προόδους στη μαθηματική γνώση.

Ο ισλαμικός κόσμος, από τον 8ο έως τον 14ο αιώνα, έγινε κέντρο μαθηματικών σπουδών και καινοτομίας. Οι μεταφράσεις ελληνικών και ινδικών κειμένων στα αραβικά, σε συνδυασμό με τις πρωτότυπες συνεισφορές μαθηματικών όπως ο Al-Khwarizmi, Al – Biruni και ο Nasir al-Din al-Tusi, οδήγησαν σε σημαντικές εξελίξεις στην άλγεβρα, τη γεωμετρία και την αστρονομία. Ο Al-Khwarizmi, γνωστός ως "πατέρας της άλγεβρας", εισήγαγε τη χρήση αλγεβρικών εξισώσεων και ανέπτυξε μεθόδους επίλυσης που είναι θεμελιώδεις στη σύγχρονη μαθηματική σκέψη.Ο Al-Biruni έκανε σημαντικές προόδους στην τριγωνομετρία, εισήγαγε αρκετές νέες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και ανέπτυξε μεθόδους για την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων , ενώ ο Nasir al-Din al-Tusi ανέπτυξε τη σφαιρική τριγωνομετρία και βελτίωσε τις αστρονομικές παρατηρήσεις μέσω της κατασκευής του αστεροσκοπείου στο Maragheh. Αυτή η πτυχιακή εργασία επιχειρεί να εξετάσει τις μαθηματικές εξελίξεις στη μεσαιωνική Κίνα, Ινδία και τον ισλαμικό κόσμο, αναδεικνύοντας τις κύριες συνεισφορές αυτών των πολιτισμών και κατανοώντας πώς αλληλεπίδρασαν και επηρέασαν ο ένας τον άλλον. Μέσα από την ανάλυση ιστορικών κειμένων, μαθηματικών θεωριών και επιστημονικών επιτευγμάτων, θα παρουσιαστεί μια ολοκληρωμένη εικόνα της μαθηματικής προόδου κατά τη διάρκεια αυτής της κρίσιμης περιόδου στην ιστορία της ανθρωπότητας. Η μελέτη θα καταδείξει τη σημασία της διαπολιτισμικής ανταλλαγής γνώσης και τη συμβολή των μη δυτικών πολιτισμών στην εξέλιξη των μαθηματικών, αμφισβητώντας την αντίληψη ότι η επιστημονική πρόοδος περιοριζόταν αποκλειστικά στη Δύση. Αυτή η ανάλυση θα αναδείξει επίσης τις κοινές προσπάθειες της ανθρωπότητας να κατανοήσει και να αξιοποιήσει τα μαθηματικά για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων και την προώθηση της επιστημονικής γνώσης. Οι δυσκολίες που συνάντησα στη γραφεί της διπλωματικής εργασίας ήταν ότι οι εδαφικές εκτάσεις της Ινδίας, της Κίνας και του Ισλαμικού κόσμου είναι τεράστιες και η ενότητα που υπήρχε ποικίλλει με το χρόνο, την άνοδο και την πτώση των αυτοκρατοριών , δεν υπήρχε ποτέ μια κοινή γλώσσα ομιλούμενη σε καμία από αυτές τις περιοχές και ότι στις πρώτες περιόδους του ινδικού και κινέζικου πολιτιμού οι πηγές είναι ελάχιστες και δε μπορούμε να προσδιορίσουμε τον βαθμό αξιοπιστίας τους.

Κίνα

Η μελέτη των μαθηματικών κατά τη μεσαιωνική περίοδο στην Κίνα αποτελεί ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον και πλούσιο πεδίο έρευνας, το οποίο αποκαλύπτει τις συνεισφορές των Κινέζων μαθηματικών στην ανάπτυξη της επιστήμης. Στο πλαίσιο αυτό, η παρούσα διπλωματική εργασία φιλοδοξεί να διερευνήσει και να αναλύσει την εξέλιξη των μαθηματικών στη μεσαιωνική Κίνα, με έμφαση στα σημαντικότερα επιτεύγματα, τις μεθόδους και τα προβλήματα που απασχόλησαν τους Κινέζους μαθηματικούς.

Κατά την περίοδο αυτή, η Κίνα γνώρισε σημαντικές πολιτιστικές και επιστημονικές αλλαγές, οι οποίες επηρέασαν και την ανάπτυξη των μαθηματικών. Οι μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με ποικίλα προβλήματα, από την επίλυση πολυωνύμων και την ανάπτυξη της αριθμητικής και της γεωμετρίας, έως τις εφαρμογές των μαθηματικών σε πρακτικά θέματα, όπως η αστρονομία, η μηχανική και η οικονομία.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να φωτίσει τις καινοτομίες και τις επιστημονικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν στην Κίνα κατά τη μεσαιωνική περίοδο, καθώς και να αναδείξει την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Μέσω της ανάλυσης πρωτογενών πηγών και δευτερογενών μελετών, θα επιχειρηθεί η κατανόηση του πλαισίου στο οποίο αναπτύχθηκαν τα μαθηματικά και η αξιολόγηση της συμβολής των Κινέζων μαθηματικών στην παγκόσμια επιστημονική κληρονομιά.

Η μελέτη αυτή έρχεται να προσθέσει μια σημαντική ψηφίδα στη συνολική εικόνα της ιστορίας των μαθηματικών, υπογραμμίζοντας τη σημασία της Κίνας ως ενός από τα κύρια κέντρα επιστημονικής σκέψης και καινοτομίας κατά τη μεσαιωνική περίοδο.

Qin Jiushao

Ο Qin Jiushao, γνωστός και ως Ch'in Chiu-Shao, γεννήθηκε την εποχή της δυναστείας Nan Sung. Οι πρόγονοί του κατάγονταν από το Luchun της επαρχίας Shantung και ορισμένες βιογραφίες αναφέρουν λανθασμένα αυτό ως γενέτειρά του. Ο πατέρας του, Qin Jiuyu (ή Ch'in Chiu-yu), εργαζόταν ως υπάλληλος στην τοπική διοίκηση. Όταν ο Qin ήταν περίπου δεκαεπτά ετών, ο πατέρας του εργαζόταν ως έπαρχος του Bazhou τότε ο Qin προσφέρθηκε εθελοντικά στον στρατό, ο οποίος κατέστειλε μια εξέγερση. Ο πατέρας του Qin μετακόμισε στο Hang-chou, την πρωτεύουσα του Nan Sung, γύρω στο 1224 και ο Qin ακολούθησε τον πατέρα του. Εκείνη την περίοδο σπούδασε Αστρονομία και στη συνέχεια Μαθηματικά από έναν πλανόδιο μαθηματικό. Μέχρι τις μέρες είναι άγνωστο ποιος ήταν ο δάσκαλος του Qin.

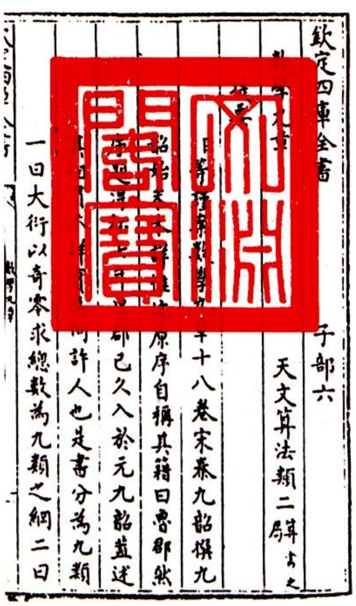
Παράλληλα με τα μαθηματικά ασχολήθηκε με τη ξιφασκία, τη τοξοβολία, την ποίηση και περιγράφετε από πηγές ο βίαιος χαρακτήρας. Η επιθετική του φύση αναμφίβολα ταίριαζε στη στρατιωτική ζωή και έγινε διοικητής υπερασπιστής ενώ υπηρετούσε την επαρχία Σετσουάν του Μογγόλου ηγέτη των Μογγόλων. Στη συνέχεια διορίστηκε κυβερνήτης του Hui-chou (τώρα She-hsien) στην επαρχία Anhwei αλλά πραγματοποίησε παράνομες δοσοληψίες με αλάτι και αποκόμισε αρκετά χρήματα. Στη συνέχεια μετακόμισε στο Wu-hsing στην επαρχία Chekiang όπου εγκαταστάθηκε και έκανε μια αρκετά πλούσια ζωή από αποκτηθέντα πλούτη του. Στα μέσα του 1244 τοποθετήθηκε ως ανώτερος διαχειριστής στο Nanking. Αφού κράτησε αυτή τη θέση για τρεις μήνες, η μητέρα του πέθανε τον Σεπτέμβριο του 1244 και ο Qin άφησε τη θέση του στο Nanking για την περίοδο του πένθους και επέστρεψε στο Hui-chou στην επαρχία Anhwei όπου ζούσε η μητέρα του. Κατά τη διάρκεια της περιόδου του πένθους του στο Hui-chou, ο Qin έγραψε το βιβλίο που το έκανε γνωστό Mathematical Treatise in Nine Sections που εμφανίστηκε το 1247. Διορίστηκε κυβερνήτης του Qiongzhou στο Hainan το 1259 απολύθηκε για διαφθορά και εκμετάλλευση μετά από εκατό ημέρες στην εξουσία και επέστρεψε στο σπίτι έχοντας αποκτήσει και πάλι τεράστια περιουσία παράνομα. Αντιλαμβανόμαστε ότι ο Qin ήταν ένας χαρακτήρας που δεν είχε αρχές, αλλά ήταν επίσης μια μαθηματική ιδιοφυΐα. Το βιβλίο του Shushu Jiuzhang βασίζεται σε εννέα κεφάλαια που θα αναλύσουμε σε κάποιο βαθμό παρακάτω. Ήταν ένα βιβλίο που άλλαξε τα μαθηματικά δεδομένα της συγκεκριμένης περιόδου.

Στο βιβλίο Mathematical Treatise in Nine Sections έχουμε 81 προβλήματα εφαρμοσμένων μαθηματικών παρόμοια με το Nine Chapters. Παρατηρούμε επίλυση ορισμένων εξισώσεων υψηλότερου βαθμού (μέχρι 10ου), συστηματική αντιμετώπιση απροσδιόριστων ταυτόχρονων γραμμικών συνθηκών και Ευκλείδειος αλγόριθμος.

Τα εννέα κεφάλαια του βιβλίου είναι:

1. *Dayan lei* 大衍類 (indeterminate analysis)
2. *Tianshi lei* 天時類 (heavenly phenomena)
3. *Tianyu lei* 田域類 (boundaries of fields)
4. *Cewang lei* 測望類 (measuring at a distance/telemetry)
5. *Fuyi lei* 賦役類 (taxes and levies of service)
6. *Qiangu lei* 錢穀類 (money and grain)
7. *Yingjian lei* 營建類 (fortifications and buildings)
8. *Junlü lei* 軍旅類 (military affairs)
9. *Shiwu lei* 市物類 (commercial affairs)

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται εννέα προβλήματα, συνολικά 81 προβλήματα.


欽定四庫全書 子部六
[illegible] 天文算法類二 [illegible]
[illegible] 十八卷宋秦九韶撰九
[illegible] 原序自稱其籍曰魯郡然
[illegible] 郡已久入於元九韶蓋述
[illegible] 許人也是書分為九類
一曰大衍以奇零求總數為九類之綱二曰

Στο πρώτο κεφάλαιο ο Qin Jiushao έγραψε ένα εξαιρετικό κεφάλαιο για την ιστορία μαθηματικών διατυπώνοντας μια γενική μέθοδο που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση πολλών παρόμοιων τύπων προβλημάτων. Η περίφημη μέθοδος Dayan περιλαμβάνει μία σειρά πράξεων πολλαπλασιασμού και διαιρέσεων μέχρι να γίνουν σχετικά πρώτοι οι αριθμοί. Η μέθοδος Dayan αναφέρετε τόσο στο Libbrecht όσο και από το Dauben.

Πρόβλημα 5 του κεφαλαίου πρώτου:

Section 1 (indeterminate analysis), Problem 5: Three farmers divided their harvested rice equally among themselves to be sold. Farmer A sold his rice to the local government and had 3 *dou* 斗 2 *sheng* 升 of rice remaining. Farmer B sold his rice to the commoners of Anji 安吉 and had 7 *dou* of rice remaining. Farmer C sold his to people in Pingjiang 平江 and had 3 *dou* remaining. How much rice did they have originally?

Λύση:

Αρχικά το hu είναι δοχείο μέτρησης που χρησιμοποιούσε το κράτος της Κίνας και έχει χωρητικότητα 8 dou 3 sheng. Αναλυτικά:

1 hu= 83 sheng

Anji hu=110 sheng

Pingjang hu=135 sheng

1 shi=10 dou=100 sheng

Το πρόβλημα μπορούμε να το λύσουμε σήμερα με το εξής τρόπο:

$N \equiv 32\ (mod 83)$

$N \equiv 7\ (mod 110)$

$N \equiv 3\ (mod 135)^2$ όπου N είναι η αρχική πσότητα του κάθε αγρότη.

$N = 83x + 32$ όπου x είναι ο αριθμός hu που πούλησε ο αγρότης Α.

$N = 110y + 7$ όπου y είναι ο αριθμός Anji hu που πούλησε ο αγρότης Β.

$N = 135z + 3$ όπου z είναι ο αριθμός Pingjiang hu που πούλησε ο αγρότης Γ.

Έχουμε τους αριθμούς 83,110 και 135 και από τους 110 και 135 έχουν κοινό διαιρέτη το 5. Σύμφωνα με τον κανόνα Dayan του Qin ο μόνος περιττός αριθμός είναι το 135 θα το μειώσουμε διαιρώντας τον με το 5.

$$83\,,110\,,135\ \rightarrow 83, 110, 27$$

Θα θέσουμε $\alpha_1 = 83\,, \alpha_2 = 110\,, \alpha_3 = 27$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 246.510$$

$m_1 = a_2 \cdot a_3 = 110 \cdot 27 = 2970$

$m_2 = a_1 \cdot a_3 = 83 \cdot 27 = 2241$

$m_3 = a_1 \cdot a_2 = 83 \cdot 110 = 9130$

Στη συνέχεια παίρνουμε το υπόλοιπο : $m_1 : a_1 = 2970 : 83 = 35$ υπόλοιπο 65

$m_2 : a_2 = 2241 : 110 = 20$ υπόλοιπο 41

$m_3 : a_3 = 9130 : 27 = 338$ υπόλοιπο 4

Θέτουμε $g_1 = 65, g_2 = 41$, $g_3 = 4$

Ο κανόνας Dayan:

$$\kappa_1 \cdot 65 \equiv 1 (mod 83)$$

$$\kappa_1 = 23$$

$$\kappa_2 \cdot 41 \equiv 1 (mod 110)$$

$$\kappa_2 = 51$$

$$\kappa_3 \cdot 4 \equiv 1 \ (mod 27)$$

$$\kappa_3 = 7$$

Για να το μετατρέψουμε σε yongshu θα κάνουμε :

$$S_1 = \kappa_1 \cdot m_1 = 23 \ \cdot 2970 = 68.310$$

$$S_2 = \kappa_2 \cdot m_2 = 51 \ \cdot 2241 = 114.291$$

$$S_3 = \kappa_3 \cdot m_3 = 7 \ \cdot 9130 = 68.910$$

Με βάση τα υπόλοιπα που δίνονται στο πρόβλημα έχουμε $R_1 = 32$, $R_2 = 70$, $R_3 = 30$ πολλαπλασιάζουμε με yongshu :

$$N_1 = R_1 \cdot S_1 = 32 \cdot 68.310 = 2.185.920$$

$$N_2 = R_2 \cdot S_2 = 70 \cdot 114.291 = 8.000.370$$

$$N_3 = R_3 \cdot S_3 = 30 \cdot 63.910 = 1.917.300$$

Προσθέτοντας αυτά μαζί παίρνουμε ένα zongshu :

$$N_1 + N_2 + N_3 = 12.103.590$$

Η διαίρεση με το yanmu θα έχουμε ένα υπόλοιπο που θα είναι ο αριθμός N

$12.103.590 : 246.510 = 49$ υπόλοιπο 24.600

Άρα $N = 24.600$

Κάθε αγρότης είχε 24.600 sheng ή 246 shi ρύζι αρχική ποσότητα. Συνολικά είχαν $246 \cdot 3 = 738$ shi ρύζι.

Ο Αγρότης Α σε hu: $p_a = \frac{246 \cdot 100}{83} = 296$ shi

Ο Αγρότης Β σε Anji hu : $p_{\beta} = \frac{246 \cdot 100}{110} = 224$ shi

Ο Αγρότης Γ σε Pingjiang : $p_{\gamma} = \frac{246 \cdot 100}{135} = 182$ shi

Ο Qin Jiushao δεν επινόησε ο ίδιος τον κανόνα Dayan αφού ηταν γνωστός στους αστρονόμους εκείνης της περιόδου αλλά ο ίδιος βοήθησε να διαδοθεί και ώθησε στη χρήση του.[3] Ο κανόνας προσπάθησε να επιλύσει πολλά προβλήματα της καθημερινότητας από μία σειρά από διάφορους τομείς όπως εργασίες, προβλήματα κατασκευής, διοικητικά-οικονομικά θέματα και ημερολογιακούς υπολογισμούς. Μερικά από εννέα προβλήματα που έχουμε να κάνουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι στην απόσταση κρατικών αγγελιοφόρων, κατασκευή ενός κτιρίου με τέσσερις διαφορετικούς τύπους δαπέδου, τέσσερις περιοχές κατασκευάζουν όλες μαζί ένα ανάχωμα. Ένα σοβαρό πρόβλημα της περιόδου εκείνης είναι οι ισοτιμίες αφού άλλαζαν κάθε τρία χρόνια και η τιμή καθοριζόταν σε κάθε επανέκδοση.

Στην ενότητα 2 (Ουράνια φαινόμενα) προσπαθεί ο συγγραφέας να επιλύσει προβλήματα που αφορούν ημερολογιακά θέματα, αστρονομικά φαινόμενα και καιρικά. Συγκεκριμένα τα τρία πρώτα προβληματα από τα εννέα της ενότητας έχουν να κάνουν με ημερολογιακούς υπολογισμούς. Το τέταρτο πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της ταχύτητας κάποιων πλανητών με βάση αστρονομικές παρατηρήσεις.Το πέμπτο πρόβλημα έχει να κάνει με τα θερινά και χειμερινά ηλιοστάσια. Τα τέσσερα τελευταία προβλήματα έχουν να κάνουν με το ύψος των βροχοπτώσεων σε επίπεδο έδαφος και οι μετρήσεις αυτών.

Μέσα από τα προβλήματα του κεφαλαίου αυτού παίρνουμε αρκετές χρήσιμες πληροφορίες για την κινέζικη αστρονομία, για το χειμερινό ηλιοστάσιο που ήταν σημείο αναφοράς στα ημερολόγια της εποχής εκείνης. Ο Qin Jiushao έκανε αναφορά στη μέθοδο υπολογισμού του He Chengtian (370-447 μ.χ.) και στη απόδειξη αυτής, που επέζησε για δέκα περίπου αιώνες και ήταν μέρος της κινέζικης παράδοσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο του έργου του Qin Jiushao ασχολείται με τον υπολογισμό της έκτασης των διαφόρων σχημάτων γεωργικών αγρών. Το πρώτο πρόβλημα αναφέρετε στον υπολογισμό του εμβαδούν ένος χωραφιού σχήματος χαρταετού. Εδώ ο κινέζος μαθηματικός λύνει το πρόβλημα με μία εξίσωση τετάρτου βαθμού :

$$-x^4 + 763200x^2 - 4064256000 = 0$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από Qin για την εξαγωγή ρίζας αυτής της εξίσωσης είναι παρόμοια με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε από το Βρετανό μαθηματικό William George Horner το

1819. Η μέθοδος του Κινέζου μαθηματικού έμεινε γνωστή zhengfu kaifang fa (θετική και αρνητική μέθοδος εκχύλισης ριζών). Δε ν ήταν ο δημιουργός αυτής της μεθόδου αλλά είναι η παλιότερη που έχει διασωθεί και εξηγεί ξεκάθαρα τη μέθοδο.

Αν και υπάρχει και πιο άμεσος τρόπος να λύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα χωρίς να καταφύγουμε σε εξίσωση τετάρτου βαθμού. Το συμπέρασμα είναι ότι υπήρχε η μέθοδος να λυθούν εξισώσεις τετάρτου βαθμού με τη μέθοδο zhengfu kaifang . Μια άλλη μέθοδο που βλέπουμε στο τρίτο κεφάλαιο είναι η εύρεση εμβαδού ενός τριγώνου με βάση το μήκος των τριών πλευρών:

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}[\gamma^2\alpha^2 - (\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2})^2]}$$

όπου α, β και γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, ο τύπος είναι παρόμοιος από τον τύπο του Ήρωνα της Αλεξάνδρειας. Ο Qin φαίνεται να την έχει αναπτύξει μόνος τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο ο κινέζος μαθηματικός αντιμετωπίζει προβλήματα που αφορούν τον υπολογισμό αποστάσεων και υψών με βάση παρατηρήσει από μακρινή απόσταση. Το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζει είναι ο υπολογισμός του ύψους ενός βουνού και η απόσταση του βουνού από την πόλη με σημείο αναφοράς ένα δέντρο ανάμεσα τους με γνωστό ύψος. Ο Qin λύνει το πρόβλημα με ομοιότητα τριγώνων. Στο πρόβλημα 5 λύνει το πρόβλημα με εξίσωση δεκάτου βαθμού και είναι η πρώτη εξίσωση τέτοιου βαθμού που λύνεται στα κινέζικα μαθηματικά μέχρι τότε. Το πρόβλημα ασχολείται με την εύρεση της περιφέρειας και της διαμέτρου ενός κυκλικού τείχους μίας πόλης.

Πρόβλημα 5 του κεφαλαίου τέταρτου:

> There is a round town of which we do not know the circumference and the diameter. There are four gates [in the wall]. Three li outside the northern [gate] there is a high tree. When we go outside the southern gate and turn east, we must cover 9 li before we see the tree. Find the circumference and the diameter $[x^2]$ of the town $(\pi = 3)$[6].

Ο Qin χρησιμοποιεί την εξίσωση: $x^{10} + 15x^8 + 72x^6 - 864x^4 - 1164x^2 - 34992 = 0$

Όπου το x^2 είναι η διάμετρος του τείχους αλλά και εδώ αρκετοι μαθηματικοί αργότερα αμφισβήτησαν την περιπλοκή μέθοδο του Qin αφού θα μπορούσε να λυθεί το πρόβλημα με εξίσωση πέπτου βαθμού αντί για $x^2 = y$.

$$y^5 + 15y^4 + 72y^3 - 864y^2 - 1164y - 34992 = 0$$

Το παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί και με εξίσωση τρίτου βαθμού και όχι με τόσο πολύπλοκο τρόπο αλλά πολλοί μαθηματικοί θεωρούν πως ο Qin ήθελε να δείξει πως η μέθοδος zhengfu kaifang fa θα μπορούσε να λύσει τέτοιου βαθμού εξισώσεις και όχι με την απλούστερη λύση.

Στα επόμενα τρία προβλήματα του κεφαλαίου ο κινέζος μαθηματικός ασχολείται με υπολογισμό απόστασης και μεγέθους ενός εχθρικού στρατοπέδου. Ο Qin ασχολείται στα κεφάλαια του αρκετά με στρατιωτικά θέματα. Σε αυτό το κεφάλαιο παρατηρούμε ότι χρησιμοποιεί διάφορες τιμές του π (λόγος περιφέρειας ενός κύκλου και της διαμέτρου) στο προηγούμενο πρόβλημα $\pi = 3$ ενώ στο έκτο πρόβλημα της ενότητας χρησιομοποιεί $\pi = \frac{22}{7}$. Γενικά οι κινέζοι μαθηματικοί χρησιμοποιήσαν διάφορες τιμές για το π όπως $\pi = \sqrt{10}, \pi = \frac{157}{50}, \pi = \frac{142}{45}$. Το γεγονός ότι και Qin Jiushao χρησιμοποίησε αυτές τιμές για να λύσει διάφορα προβλήματα μας κάνει να πιστεύουμε ότι ήταν γνώστης των έργων άλλων μαθηματικών.

Στο κεφάλαιο 5 «Φόροι και εισφορές υπηρεσίες» ο Qin Jiushao έκανε εκτεταμένη χρήση των δεικτών για την αντιμετώπιση πολύ πρακτικών θεμάτων στον υπολογισμό των φόρων , ενοικίων και εργασίας. Το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζει είναι πως έξι χωριά που είχαν γη αλλά με διαφορετική παραγωγή θα πρέπει να υπολογιστεί το ποσό των φόρων που θα επιβάλλεται σε κάθε τύπο γης με βάση ότι οι ιδιοκτήτες γης καλύτερης ποιότητας γη θα πρέπει να πληρώσουν περισσότερους φόρου. Για τη λύση του προβλήματος αφιέρωσε 32[1] σελίδες στο πρωτότυπο χειρόγραφο του.

Στο κεφάλαιο 6 «Χρήματα και Σιτηρά» είναι ίσως το μεγαλύτερο ενδιαφέρουσα ενότητα αφού τα προβλήματα καλύπτουν μεγάλη ποικιλία πρακτικών προβλημάτων που αφορούν χρήματα και σιτηρά. Διαπιστώνουμε για άλλη μία φορά την διάθεση του Qin Jiushao να λύσει καθημερινά πρακτικά προβλήματα. Το πρώτο πρόβλημα που έλυσε σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρετε σε τέσσερις πόλεις που έπρεπε να μεταφέρουν τους εισπραχθέντες φόρους στην πρωτεύουσα. Περιλαμβάνει τον υπολογισμό της αξίας του ασημιού και του υφάσματος και την μετατροπή σε παλιό Huizi και σε νέο Huizi. Άλλο πρόβλημα αναφέρετε στη σύγκριση τιμή του ρυζιού από πέντε διαφορετικές περιοχές λαμβάνοντας υπόψιν και το κόστος μεταφοράς καθώς και τρόπος μέτρησης του όγκου. Το όγδοο πρόβλημα αφορά το κράτος να δανείζει χρήματα με μηνιαίο επιτόκιο 6,5%. Το τελευταίο πρόβλημα σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφει το πρόβλημα ενός αγρότη που πληρώνει φόρο 1534 shi ρυζιού ως φόρο αλλά διαπιστώθηκε πως τα 1534 shi ρυζιού υπήρχες και άλλο σιτάρι για αυτό πρότεινε για πρώτη φορά το τυχαίο δείγμα. Το τυχαίο δείγμα θεωρείται μια πολύ καινοτόμος προσέγγιση στην ιστορία των μαθηματικών μέχρι τότε , μόλις τον 17αιώνα οι μαθηματικοί στον υπόλοιπο κόσμο άρχισαν να το ακολουθούν.[2]

Το έβδομο κεφάλαιο «Οχυρώσεις και κτίσματα» της πραγματείας πραγματεύεται κατασκευαστικά προβλήματα. Ο Qin Jiushao εξέτασε τον υπολογισμό του ποσού των υλικών που απαιτείται για την κατασκευή διαφόρων κατασκευών, τον αριθμό των εργατών που χρειάζονται και το χρηματικό ποσό που χρειάζεται για να πληρωθούν οι μισθοί των εργατών.

Στο όγδοο τμήμα «Στρατιωτικές υποθέσεις» του έργου ασχολείται με το στρατιωτικό ζητήματα, συμπεριλαμβανομένων προβλημάτων στον υπολογισμό των διαστάσεων του στρατοπέδου που απαιτούνται για να στεγάζει έναν δεδομένο αριθμό στρατιωτών, τον αριθμό των στρατιωτών που απαιτούνται για σχηματισμούς μάχης και τον χρόνο που απαιτείται για την κατασκευή όπλων για τους στρατιώτες. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε αυτή την ενότητα γενικά δεν είναι πολύπλοκες. Το πιο αξιόλογο πρόβλημα είναι το νούμερο εννέα.

> Υπάρχουν τρεις τύποι υλικού στην αποθήκη για την κατασκευή ρούχων για τους στρατιώτες: ύφασμα κάνναβης, μετάξι από νήμα και πιο λεπτό μετάξι. Αν χρησιμοποιήσουμε 8 bolts κάνναβης ύφασμα για κάθε 6 στρατιώτες, τότε μας χαλάσουμε 160 bolts. Αν χρησιμοποιήσουμε 9 bolts για κάθε 7 στρατιώτες, τότε έχουμε 560 bolts επιπλέον. Όπως και για το νήμα μετάξι, αν χρησιμοποιήσουμε 150 Liang για κάθε 8 στρατιώτες, τότε εμείς έχουν 16.500 Liang επιπλέον. Αν χρησιμοποιήσουμε 170 Liang για κάθε 9 στρατιώτες, τότε έχουμε 14.400 Liang επιπλέον. Όσο για το λεπτότερο μετάξι, αν χρησιμοποιήσουμε 13 jin για κάθε 4 στρατιώτες, τότε είμαστε λίγοι κατά 6804 jin. Αν εμείς χρησιμοποιήσουμε 14 jin για κάθε 5 στρατιώτες, τότε έχουμε ακριβώς το σωστό ποσό. Πόσοι στρατιώτες υπάρχουν; Πόσο ύφασμα κάνναβης, νήμα μετάξι και λεπτότερο μετάξι υπάρχουν;

Απάντηση: 15.120 στρατιώτες, 30.000 bolts από ύφασμα κάνναβης, 300.000 Liang από μετάξι και 42.336 jin από λεπτότερο μετάξι.[3]

(2) $s = t(modu)$ τα s και t έχουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με το u

(3) Chen, Zhang, and Zhou

O Qin Jiushao έχει τόσα πολλά προβλήματα αφιερωμένα σε στρατιωτικά θέματα στο βιβλίο του. Άλλωστε έζησε σε μια εποχή που γινόντουσαν πόλεμοι συχνά. Επιπλέον, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι κατείχε πολλές στρατιωτικές θέσεις σε όλη τη διάρκεια της καριέρας του. Επομένως, είναι φυσική επιλογή για αυτόν να ασχοληθεί με θέματα που αφορούν σχηματισμούς μάχης και στρατιωτικές προμήθειες γιατί πρέπει να του ήταν οικεία θέματα.

Το τελευταίο κεφάλαιο «Εμπορικές υποθέσεις» του Shushu jiuzhang ασχολείται με εμπορικά θέματα. Το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για να λύσει πρόβλημα για την αξία τριών διαφορετικών τύπων αγαθών. Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Σε τρεις διαφορετικές παραγγελίες έχουμε, στην πρώτη παραγγελία έχουμε 3500 δέσμες ξύλου, 2200 jin από κέλυφος χελώνας και 375 θήκες. Την επόμενη φορά θα έχουμε 2970 δέσμες ξύλο, 2130 jin από κέλυφος χελώνας και 3056 θήκες. Την τελευταία φορά που εστάλθησαν 3200 δέσμες ξύλου, 1500 jin από κέλυφος χελώνας και 3750 θήκες. Κάθε παραγγελία θα πληρωθεί με 1470000 γκουάν. Θέλουμε να ξέρουμε την αξία κάθε δεσμίδας ξύλου, κάθε τζιν από κέλυφος χελώνας, και κάθε θήκης.

Απάντηση: 300 γκουάν το ξύλο, 180 γκουάν το κέλυφος χελώνας και 64 γκουάν η θήκη

$$3500\,x + 2200y + 375z = 1470000$$
$$2970x + 2130y + 3056z = 1470000$$
$$3200x + 1500y + 3750z = 1470000$$

όπου x= η τιμή της δεσμίδα ξύλου , y= η τιμή κάθε τζιν από κέλυφος χελώνας και z= κάθε θήκη.
Η μέθοδος που χρησιμοποίησε για να λύσει αυτό το σύστημα είναι η ίδια με τη σύγχρονη μέθοδος. Ο Qin χρησιμοποίησε αυτή τη μέθοδο ξανά στο αμέσως επόμενο πρόβλημα που αφορούσε τον υπολογισμό του ποσού των προϊόντων που πρέπει να πληρωθούν πίσω σε καθέναν από τους τέσσερις επενδυτές που είχαν επενδύσει διαφορετικά ποσά αγαθών και χρήματα σε μια κοινή επιχείρηση θαλάσσιου εμπορίου. Η μυθολογία και οι λύσεις του ίδιου του Qin έχουν διατηρηθεί. Τα διαγράμματα είναι στην πραγματικότητα πίνακες και απεικονίζουν ολόκληρη τη διαδικασία που πραγματοποίησε ο Qin για να βρει την απάντηση. Ως εκ τούτου, είναι βέβαιο ότι ο Qin χρησιμοποιούσε πίνακες για την επίλυση ταυτόχρονων εξισώσεων.

Είναι προφανές ότι ήταν ο Qin Jiushao πολύ συνεπής στην τοποθέτηση των προβλημάτων του στο πλαίσιο να ανταποκριθεί στα προβήματα της καθημερινότητας. Αυτό είναι χαρακτηριστικό όλων των κινεζικών μαθηματικών πραγματειών γενικά.

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, ο Qin Jiushao ήταν αληθινός οπαδός του Κινεζική μαθηματική παράδοση. Παρόλο που παρουσίαζε πολύ αφηρημένα μαθηματικά και εξελιγμένες μεθόδους όπως ο κανόνας «dayan» και το «zhengfu kaifang fa» (θετική και αρνητική μέθοδος εκχύλισης ρίζας), τα εφάρμοσε στα πρακτικά προβλήματα. Με άλλα λόγια, ποτέ δεν ξεπέρασε τα όρια της παράδοσης, και δεν εμβάθυνε ποτέ στη θεωρητική μαθηματική έρευνα. Παρείχε μεθόδους για την επίλυση συγκεκριμένων τύπων προβλημάτων, αλλά ποτέ δεν κατέληξε σε γενική θεωρία.

Για το Qin οι διαθέσιμες πληροφορίες είναι περιορισμένες για αυτό η εικόνα του είναι μία αμφιλεγόμενη λόγω έλλειψης αδιαμφισβήτητων στοιχείων. Ο ίδιος δεν ήταν μόνος μαθηματικός ήταν και πολλά άλλα παράλληλα με τα μαθηματικά. Τα προβλήματα και οι μέθοδοι του Qin Jiushao μπορούν ακόμη να χρησιμεύσουν ως πολύτιμα εκπαιδευτικά εργαλεία για μαθηματικούς και μαθητές.

Li Zhi ή Li Ye

Ο Li Zhi ή Li Ye (1192-1279) ήταν ένας από τους μεγάλους Κινέζους μαθηματικούς που έζησαν την περίοδο του μεσαίωνα, ο ίδιος έζησε το δέκατο τρίτο αιώνα. Το πίο διάσημο έργο του είναι « Ce yuan Hai Jing» που γράφτηκε το 1248. Ο πατέρας του, Li Yü, υπηρέτησε ως ακόλουθος υπό έναν αξιωματικό Hu Sha-hu. Ο Li Yü έστειλε αργότερα την οικογένειά του πίσω στο Luan-ch'eng, στην επαρχία Hopeh. Ο Li Zhi πήγε μόνος του στην περιοχή Yüan-shih στην ίδια επαρχία για την εκπαίδευσή του.

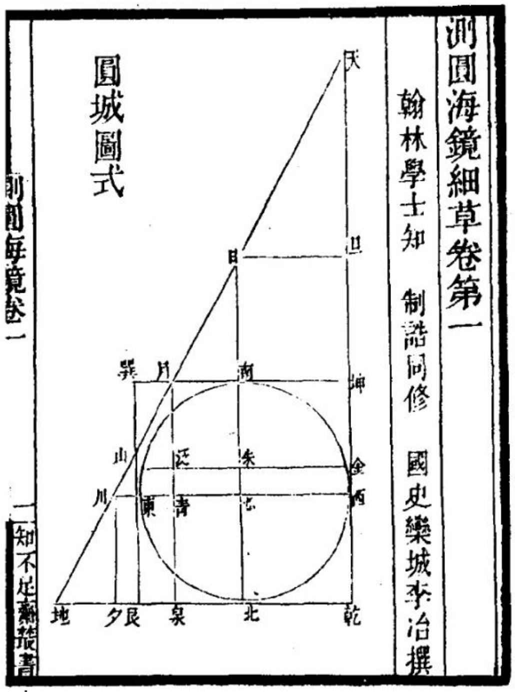
Το 1230 ο Li Zhi πήγε στο Loyang για να δώσει τις εξετάσεις για τη δημόσια υπηρεσία αφού πέρασε, διορίστηκε γραμματέας στην περιφέρεια Kaoling, στην επαρχία Shensi. Προτού παρουσιαστεί για υπηρεσία, ωστόσο, έγινε κυβερνήτης της Chün-chou (τώρα Yü-hsien), της επαρχίας Honan. Το 1232 οι Μογγόλοι κατέλαβαν την πόλη Chün-chou και ο Li Zhi αναγκάστηκε να αναζητήσει καταφύγιο στην επαρχία Shansi. Το βασίλειο των Jurchen έπεσε στα χέρια των Μογγόλων το 1234. Από εκείνη τη στιγμή, ο Li Zhi αφοσιώθηκε στην επιστήμη, ζούσε φτωχικά. Ήταν κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου που έγραψε το πιο σημαντικό μαθηματικό του έργο *Ce yuan hai jing* .

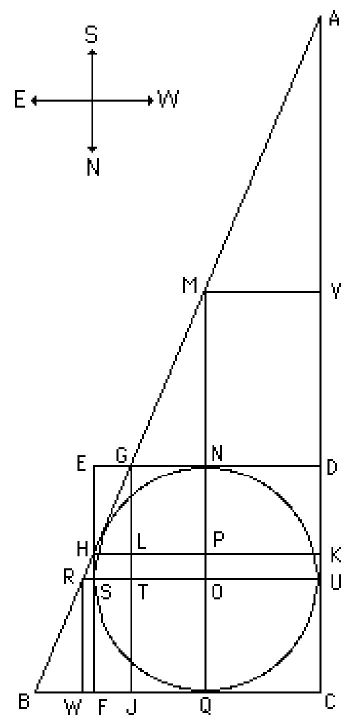
Περίπου το 1251 ο Li Chih, βρίσκοντας τον εαυτό του σε βελτιωμένη οικονομική θέση, επέστρεψε στην περιοχή Yüan-shih της επαρχίας Hopeh και εγκαταστάθηκε κοντά στο Feng-lung. O Li Zhi ολοκλήρωσε ένα άλλο μαθηματικό κείμενο, Yi gu yan duan το 1259. Ο Κουμπλάι Χαν ανέβηκε στον θρόνο το 1260 και τον επόμενο χρόνο πρόσφερε στον Li μια κυβερνητική θέση, η οποία απορρίφθηκε ευγενικά με την έκκληση κακής υγείας και γήρατος. Το 1264 ο Μογγολικός αυτοκράτορας ίδρυσε την Ακαδημία Han-lin με σκοπό τη συγγραφή των επίσημων ιστοριών των βασιλείων του Liao και του Jurchen, και τον επόμενο χρόνο ο Li Zhi υποχρεώθηκε να ενταχθεί σε αυτήν. Μετά από λίγους μήνες υπέβαλε την παραίτησή του επικαλούμενος και πάλι αναπηρία και γήρας Κρατικοί αξιωματούχοι του είχαν ζητήσει να τους εξηγήσει του λόγους που γίνονται σεισμοί. Επέστρεψε στο σπίτι του κοντά στο Feng-lung και πολλοί μαθητές τον ακολούθησαν να σπουδάσουν κοντά του. O Li Zhi άλλαξε το όνομά του σε Li Ye κάποια στιγμή στη ζωή του επειδή ήθελε να αποφύγει να έχει το ίδιο όνομα με τον τρίτο αυτοκράτορα Τανγκ, του οποίου ο δυναστικός τίτλος ήταν Τανγκ Κάο-τσουνγκ (650-683). Αυτή η περίσταση έχει προκαλέσει κάποια σύγχυση ως προς το αν το Li Yeh ήταν λάθος εκτύπωση για τον Li Zhi.

Είμαστε τυχεροί που έχουμε έργα του Li Zhi εκτός από τον Ce yuan hai jing γιατί είπε στον γιο του να κάψει όλα τα βιβλία του εκτός από τον Ce yuan hai jing στον θάνατό του, καθώς αυτό ήταν το μόνο έργο για το οποίο ήταν περήφανος. Δεν έχει καταγραφεί εάν ο γιος του εκτέλεσε τις οδηγίες του πατέρα του, αλλά σίγουρα έχουν διασωθεί περισσότερα κείμενα, άλλα μη μαθηματικά.

Σε αντίθεση με τους περισσότερους δυτικούς αλγεβριστές, ο Li Zhi δεν εξηγεί ποτέ πώς να λύσουμε εξισώσεις, αλλά μόνο πώς να τις κατασκευάσουμε. Αλλά δεν περιορίζετε σε εξισώσεις του δεύτερου ή του τρίτου βαθμού. Για αυτόν, το γεγονός ότι εμπλέκονται πολυωνυμικές εξισώσεις αυθαίρετα υψηλού βαθμού έχει μικρή σημασία. Αλλά περιγράφει μόνο τους χειρισμούς που πρέπει να γίνουν σε συγκεκριμένα προβλήματα, χωρίς να εξηγεί δια του κειμένου του με όρους ορισμών, κανόνων και θεωρημάτων.

Σύμφωνα με οποιαδήποτε πρότυπα, το Ce yuan hai jing είναι ένα πολύ αξιόλογο έργο. Αρχίζει με τον πρόλογο και στη συνέχεια δίνεται το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα.





Το παραπάνω σχήμα είναι το μοναδικό στο βιβλίο του και κάθε ένα από τα 170 προβλήματα που αποτελούν τα Κεφάλαια 2 έως 12 αφορούν αυτό το σχήμα. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν είναι ένα βιβλίο γεωμετρίας και γι' αυτό είναι δυνατή η συσχέτιση κάθε προβλήματος με ένα μόνο σχήμα. Το Κεφάλαιο 1 περιέχει τρεις ενότητες, η πρώτη περιέχει τα ονόματα των προβλημάτων του, η δεύτερη ενότητα παραθέτει όλες τις τιμές των μηκών των τμημάτων, άρα στην ουσία περιέχει όλες τις απαντήσεις στα προβλήματα, ενώ η τρίτη ενότητα περιλαμβάνει 692 τύπους για μέτρηση τριγώνων και μηκών τμημάτων. Διαπιστώνουμε ότι δεν μοιάζει με κανένα βιβλίο μαθηματικών του σήμερα!

Η μονογραφία ξεκινά με ένα κύριο διάγραμμα που ονομάζεται Διάγραμμα της Στρογγυλής Πόλης (圆城图式). Δείχνει έναν κύκλο εγγεγραμμένο σε ορθογώνιο τρίγωνο και τέσσερις οριζόντιες γραμμές, τέσσερις κάθετες γραμμές.

- TLQ, το μεγάλο τρίγωνο ορθής γωνίας, με οριζόντια γραμμή LQ, κάθετη γραμμή TQ και υποτείνουσα TL
- NCS: Μια κατακόρυφη γραμμή μέσω του C, τέμνει τον κύκλο και η ευθεία LQ στη βόρεια πλευρά του τείχους της πόλης, τέμνει τη νότια πλευρά του κύκλου στο S.

- NCSR, Επέκταση της γραμμής NCS για να τέμνει την υποτείνουσα TL στο R
- WCE: μια οριζόντια γραμμή που διέρχεται από το κέντρο C, τέμνει τον κύκλο και την ευθεία TQ στο W, δυτική πλευρά του τείχους της πόλης) και τον κύκλο στο E (ανατολική πλευρά του τείχους της πόλης).
- WCEB: επέκταση της γραμμής WCE για να τέμνει την υποτείνουσα στο B
- KSYV: μια οριζόντια εφαπτομένη στο S, τέμνει την ευθεία TQ στο K(坤), την υποτείνουσα TL στο Y.
- HEMV: κατακόρυφη εφαπτομένη κύκλου στο σημείο E, τέμνει την ευθεία LQ στο H, υποτείνουσα στο M(βουνό)
- Τα HSYY, KSYV, HNQ, QSK σχηματίζουν ένα τετράγωνο, με εγγεγραμμένο κύκλο C.
- Γραμμή YS, κάθετη γραμμή από το Y τέμνει την ευθεία LQ στο S ελατήριο)
- Γραμμή BJ, κάθετη γραμμή από το σημείο B, τέμνει την ευθεία LQ στο J (νύχτα)
- Το RD, μια οριζόντια γραμμή από το R, τέμνει την ευθεία TQ στο D (ημέρα)

Η κατεύθυνση του Βορρά, του Νότου, της Ανατολής και της Δύσης στο διάγραμμα του Li Zhi είναι αντίθετη με τα σημερινά δεδομένα.

Υπάρχουν συνολικά δεκαπέντε ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται από την τομή μεταξύ του τριγώνου TLQ, των τεσσάρων οριζόντιων γραμμών και τεσσάρων κάθετων γραμμών. Τα ονόματα αυτών των ορθογώνιων τριγώνων και οι πλευρές τους συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός	**Ονομα**	**Κορυφές**	**Υποτείνουσα γ**	**Κατακόρυφη β**	**Οριζόντια α**
1	通 TONG	天地乾	通弦 (TL天地)	通股（TQ天乾）	通勾（LQ地乾）
2	边 BIAN	天西川	边弦（TB天川）	边股 (TW天西)	边勾（WB西川）
3	底 DI	日地北	底弦 (RL日地)	底股 (RN日北)	底勾（LB地北）

4	黄广 HUANGGUANG	天山金	黄广弦（TM天山）	黄广股（TJ天金）	黄广勾（MJ山金）
5	黄长 HUANGCHANG	月地泉	黄长弦 (YL月地)	黄长股 (YS月泉)	黄长勾 (LS地泉)
6	上高 SHANGGAO	天日旦	上高弦 (TR天日)	上高股（TD天旦）	上高勾 (RD日旦)
7	下高 XIAGAO	日山朱	下高弦 (RM日山)	下高股 (RZ日朱)	下高勾（MZ山朱）
8	上平 SHANGPING	月川青	上平弦（YS月川）	上平股（YG月青）	上平勾（SG川青）
9	下平 XIAPING	川地夕	下平弦（BL川地）	下平股（BJ川夕）	下平勾（LJ地夕）
10	大差 DACHA	天月坤	大差弦 (TY天月)	大差股（TK天坤）	大差勾（YK月坤）
11	小差 XIAOCHA	山地艮	小差弦（ML山地）	小差股 (MH山艮)	小差勾（LH地艮）
12	皇极 HUANGJI	日川心	皇极弦 (RS日川)	皇极股（RC日心）	皇极勾（SC川心）

13	太虚 TAIXU	月山泛	太虚弦 (YM月山)	太虚股（YF月泛）	太虚勾（MF山泛）
14	明 MING	日月南	明弦 (RY日月)	明股 (RS日南)	明勾 (YS月南)
15	叀 ZHUAN	山川东	叀弦 (MS山川)	叀股 (ME山东)	叀勾（SE川东）

Ας δούμε μερικά προβλήματα που περιέχονται στο Ce yuan hai jing :

Τα πρώτα δέκα προβλήματα λύθηκαν χωρίς τη χρήση του Tian yuan shu. Αυτά τα προβλήματα σχετίζονται με διάφορους τύπους εγγεγραμμένων κύκλων.

Πρόβλημα 1

> Δύο άνδρες Α και Β ξεκινούν από τη γωνία Q. Ο Α περπατά προς τα ανατολικά 320 βήματα και στέκεται ακίνητος. Ο Β περπατά νότια 600 βήματα και δες το Β. Ποια είναι η διάμετρος της κυκλικής πόλης;

Απάντηση: η διάμετρος της στρογγυλής πόλης είναι 240 βήματα. Αυτό σχετίζεται με το πρόβλημα εγγεγραμμένου κύκλου DTLQ.

Πρόβλημα 2

> Δύο άτομα Α και Β ξεκινούν από τη δυτική πύλη. Ο Β περπατά μια απόσταση 256 pu προς τα ανατολικά. Στη συνέχεια ο Α περπατά μια απόσταση 480 pu νότια πριν μπορέσει να δει τον Β. Βρείτε τη διάμετρο της πόλης.

Πρόβλημα 3

> Το άτομο Α φεύγει από τη δυτική πύλη και περπατά νότια για 480 pu. Ο Β αφήνει την ανατολική πύλη και περπατά ευθεία μπροστά σε απόσταση 16 pu, όταν μόλις βλέπει τον Α. Βρείτε τη διάμετρο της πόλης.

Αν εξετάσουμε προσεκτικά τη λύση του Li Zhi, βλέπουμε ένα αξιοσημείωτο βάθος κατανόησης των εξισώσεων. Το πρόβλημα οδηγεί σε μια εξίσωση Quartic με έναν παράγοντα $x + 16$. Γνωρίζοντας ότι η λύση δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός $x = -16$, ο Li Zhi δουλεύει με τον κυβικό παράγοντα και το λύνει για να βρει τη λύση.

Σε ένα άλλο πρόβλημα:

> Σε 135 pu ακριβώς έξω από τη νότια πύλη είναι ένα δέντρο. Αν κάποιος περπατήσει 15 pu από τη βόρεια πύλη και στη συνέχεια στρίψει ανατολικά για μια απόσταση 208 pu, το δέντρο φαίνεται. Βρείτε τη διάμετρο της πόλης.

Ο Li Zhi καταλήγει στην εξίσωση Quartic:

$$-4x^4 - 600x^3 - 22500x^2 + 11681280x + 788486400 = 0$$

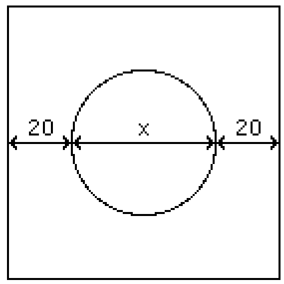
που δίνει λύση $x = 120\ pu.$

Σε πολλά προβλήματα τίθεται το πρόβλημα να περπατούν δύο άτομα σε ευθείες γραμμές μέχρι να δουν ο ένας το άλλον, να συναντηθούν ή να φτάσουν σε ένα δέντρο ή συγκεκριμένο σημείο. Είναι ένα βιβλίο αλγεβρικής γεωμετρίας που μελετάει περίπλοκες γεωμετρικές σχέσεις άλγεβρας.

Το άλλο του βιβλίο Yi gu yan duan πολλοί ιστορικοί πιστεύουν ότι γράφτηκε επειδή οι άνθρωποι βρήκαν ότι η κατανόηση του Ce yuan hai jing ήταν πέρα από αυτούς. Το Yi gu yan βασίζονται σε ένα παλαιότερο βιβλίο που λέγεται ότι γράφτηκε από τον Chaing Chou του P'ing-yang (αν και τίποτα άλλο δεν είναι γνωστό για τον συγγραφέα, ούτε υπάρχει καμία γνώση για την ημερομηνία αυτού του προηγούμενου έργου). Το βιβλίο του Li Zhi περιέχει 64 προβλήματα, από τα οποία λέει ότι τα 21 είναι από το προηγούμενο κείμενο. Κεντρικό θέμα είναι η κατασκευή και η διατύπωση τετραγωνικών εξισώσεων. Μερικές από αυτές τις εξισώσεις επιλύονται τη μέθοδο του tiao duan ή «μέθοδος τομών». Αυτή η παλαιότερη μέθοδος επίλυσης εξισώσεων με γεωμετρικό στυλ χρησιμοποιήθηκε από Κινέζους μαθηματικούς πριν από τον Li Zhi και έτσι το Yi gu yan δίνει στους ιστορικούς μια μοναδική ευκαιρία να δουν τη νέα μέθοδο πίνακα συντελεστών δίπλα στην παλαιότερη μέθοδο τομών.

Ένα πρόβλημα που έχουμε στο βιβλίο Yi gu yan duan είναι:

> Ένα τετράγωνο αγρόκτημα έχει μια κυκλική λίμνη στο κέντρο. Το οικόπεδο είναι 13 mou και $7\frac{1}{2}$ δέκατα του mou. Η λίμνη απέχει 20 pu από την άκρη. Βρείτε το μήκος της πλευράς του αγροκτήματος και τη διάμετρο της λίμνης.



Γνωρίζουμε ότι η έκταση γης είναι 13,75 mou και έτσι (αφού 1 mou είναι 240 τετραγωνικά pu) η έκταση γης είναι 3300 τετραγωνικά pu. Στη συνέχεια πρέπει να γνωρίζουμε ότι ο Li Zhi παίρνει $\pi = 3$ σε αυτό το πρόβλημα. Η λύση που προτείνει ο Li Ye είναι:

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $(x + 40)^2$. Εμβαδόν λίμνης $0{,}75\, x^2$ και έκταση γης $(x + 40)^2 - 0{,}75x^2 = 0{,}25x^2 + 80x + 1600$. Το εμβαδόν γης είναι 3300 οπότε

$$-025x^2 - 80x + 1700 = 0$$

Αυτή είναι η τετραγωνική εξίσωση που γράψαμε στη μέθοδο συντελεστών του Li Zhi παραπάνω. Δίνει $x = 20$ pu που είναι η διάμετρος της λίμνης. Η πλευρά του τετράγωνου του αγροκτήματος είναι τότε 60 pu.

Παρατηρούμε τη χρήση του $\pi = 3$ από τον Li Zhi σε αυτό το πρόβλημα. Συζητά χρησιμοποιώντας τις τιμές$\text{του}\ \pi = 3$, $\pi = \frac{22}{7}$ και $\pi = 3{,}14$. Όταν παίρνει $\pi = 3$ δεν είναι επειδή λαμβάνει την καλύτερη κατά προσέγγιση απάντηση που μπορεί, αλλά είναι η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος που είναι σημαντική και μπορεί καλύτερα να το απεικονίσει αυτό με «ωραίους» αριθμούς. Αυτό υπαγορεύει την επιλογή του $\pi = 3$ σε αυτό το πρόβλημα.
Ο Li Zhi όχι μόνο προώθησε τις μαθηματικές γνώσεις, αλλά επίσης εφάρμοσε τις αρχές του σε πρακτικά προβλήματα, όπως η γεωμετρία και η αρχιτεκτονική. Το έργο του επηρέασε βαθύτατα τους μεταγενέστερους μαθηματικούς και ενσωματώθηκε στην ευρύτερη παράδοση των κινεζικών επιστημών. Ο θάνατος του Li Zhi άφησε ένα μεγάλο κενό στην κινεζική μαθηματική κοινότητα, αλλά η κληρονομιά του συνεχίζει να ζει μέσω των γραπτών του και της επιρροής του στους

μεταγενέστερους μελετητές. Η συνεισφορά του στη μαθηματική επιστήμη αναγνωρίζεται μέχρι και σήμερα, καθιστώντας τον έναν από τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς της Κίνας.

Yang Hui

Ο 13ος αιώνας ήταν ίσως η πιο αξιοσημείωτη μαθηματική περίοδος στην ιστορία της Κίνας. ΟYang Hui ήταν ένας κινεζικός μαθηματικός του 13ου αιώνα που έζησε κατά τη διάρκεια της δυναστείας της Sung. Ο Yang Hui ήταν ένας Κινέζος μαθηματικός που έγραψε πολλά εξαιρετικά μαθηματικά κείμενα αυτά περιείχαν λύσεις τετραγωνικών εξισώσεων καθώς και το τρίγωνο και τα μαγικά τετράγωνα του Πασκάλ. Λίγα είναι γνωστά για τον Yang Hui εκτός από το ότι έγραψε πολλά εξαιρετικά μαθηματικά κείμενα. Ήταν σύγχρονος και του Qin Jiushao και του Li Zhi , κάτι που γνωρίζουμε από τις ημερομηνίες κατά τις οποίες εμφανίστηκαν τα κείμενά του, δείχνοντας ότι έζησε προς το τέλος της δυναστείας Nan (Νότιο) Sung.Οι ακριβείς ημερομηνίες γέννησης και θανάτου του είναι άγνωστες αλλά όλα του τα έργα ολοκληρώθηκαν στο δεύτερο μισό αιώνα του δέκατου τρίτου αιώνα με αρκετά έργα του να έχουν διασωθεί. Τα πιο σπουδαία είναι :

1. Mathematical Methods Explaining in Detail The Nine Chapters (Xiangjie jiuzhang suanfa 詳解九章算法, 1261 CE, hereafter Mathematical Methods)

2. Precious Reckoner of Variations of the Multiplication and Division (*Cheng Chu Tong Bian Ben Mo* 乘除通變算寶, 1274 CE)
3. Selection of Unusual Mathematical Methods in the Wake of the Ancients (Xugu zhaiqi suanfa 續古摘奇算法, 1275 CE)
4. Quick Methods for Multiplication and Division for the Surface of the Fields and Analogous Problems (Tianmu bilei chengchu jiefa 田畝比類乘除捷法, 1275 CE).

Το 1261 ο Yang έγραψε το Xiangjie jiuzhang suanfa ένα έργο βασισμένο στην ανάλυση του μοναδικού Nine Chapters έργο έπαιξε κρίσιμο ρόλο στην κυκλοφορία και τη διάδοση του Nine Chapters στις μαθηματικές μεθόδους.

Ωστόσο, η μόνη σωζόμενη έντυπη έκδοση του Mathematical Methods είναι ημιτελής και περιέχει πολλά λάθη που εμποδίζουν την κατανόηση αυτής της εργασίας από τους σύγχρονους ερευνητές ενώ η έκδοση περιείχε σημειώσεις από τον Jia Xian σε αυτό αναφέρονται ο Liu Hui και αργότερα ο Li Chunfeng . Οι σημειώσεις της Jia Xian δεν έχουν επιβιώσει, επομένως γνωρίζουμε γι 'αυτούς μόνο μέσω των παραπομπών από τον Yang. Σε αυτό το έργο ο Yang ανάλυει λύσεις σε ογδόντα προβλημάτων που τον απασχολούσαν κατανεμημένα σε δώδεκα κεφάλαια όπου τα εννέα από τα δώδεκα αντιστοιχούν στο Nine Chapters αλλά υπάρχουν τρία επιπλέον κεφάλαια: ένα περιέχει γεωμετρικά σχήματα, ένα περιέχει τις θεμελιώδεις μεθόδους και ένα στο οποίο ο Yang παρουσιάζει μια νέα ταξινόμηση των προβλημάτων. Κάθε πρόβλημα μελετάται από τον Yang με τρεις διαφορετικές πτυχές. Αρχικά εξηγεί τη λογική πίσω από το πρόβλημα, δεύτερον δίνει μια αριθμητική λύση στο πρόβλημα και τρίτον δείχνει πώς η μέθοδος που παρουσίασε μπορεί να τροποποιηθεί για να λύσει παρόμοια προβλήματα. Για παράδειγμα, αν το πρόβλημα επιλύεται με τετραγωνική εξίσωση, τότε ο Yang θα το έλυνε με τετραγωνική εξίσωση και μετά θα έδειχνε πώς να λύσει μια γενική τετραγωνική εξίσωση.

Το πρόβλημα 16 στο Κεφάλαιο 7 του Nine Chapters έχει ως εξής:

1 κυβικό μέτρο νεφρίτη ζυγίζει 7 λίανγκ και 1 κυβικό μέτρο βράχου ζυγίζει 6 λίανγκ. Τώρα υπάρχει ένας κύβος της πλευράς 3 κυβικά μέτρα που αποτελείται από ένα μείγμα νεφρίτη και βράχου που ζυγίζει 11 jin. Ποια είναι τα βάρη του νεφρίτη και του βράχου στον κύβο. Σημείωση 1 jin = 16 liang

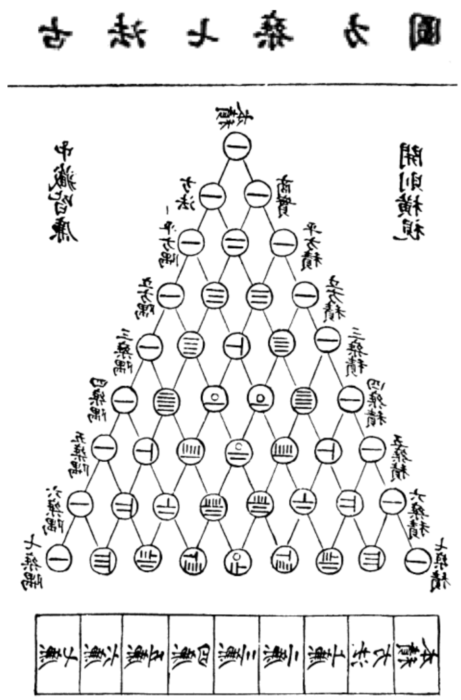
Απάντηση: Αν θέσουμε

$$x + y = 27$$

$$7x + 6y = 176$$

Αν και ο Yang έχει παρουσιάσει ένα πρόβλημα απευθείας από τα Nine Chapters η μέθοδος επίλυσής του είναι αρκετά διαφορετική. Αυτό στο οποίο ουσιαστικά ανάγεται η μέθοδος του Yang ονομάζεται fangcheng και είναι όμοια της εύρεση της ορίζουσας του πίνακα των συντελεστών του συστήματος εξισώσεων. Φυσικά λαμβάνει την ίδια απάντηση με τους προηγούμενους συγγραφείς και σχολιαστές, δηλαδή ότι ο κύβος περιέχει 14 κυβικά κούνια νεφρίτη που ζυγίζουν 6 jin 2 liang και 13 κυβικά κούνια βράχου που ζυγίζουν 4 jin 14 liang.

Στο Mathematical Methods έχουμε το τρίγωνο του Yang Hui είναι μια ειδική τριγωνική διάταξη αριθμών που χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς των μαθηματικών. Στην Ασία πήρε το όνομά το 13ο αιώνα, ο Yang Hui, ένας από τους πρώτους που περιέγραψε τις ιδιότητές του. στην Ευρώπη συχνά ονομάζεται από το17ο από Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal. Ακόμη και πριν από τον Yang Hui, αυτή η τριγωνική διάταξη αριθμών περιγράφηκε από τον Άραβα ποιητή και μαθηματικό Omar Khayyam και από τον Ινδό μαθηματικός Halayudha.



Το τρίγωνο Yang Hui με ράβδους, όπως απεικονίζεται σε μία δημοσίευση του Zhu Shijie το 1303 μ.χ. Οι ιδιότητες του τριγώνου είναι οι εξής:

- Το άθροισμα των αριθμών κάθε σειράς είναι διπλάσιο από αυτό της προηγούμενης σειράς.

- Ο πρώτος αριθμός μετά το 1 σε κάθε σειρά διαιρεί ομοιόμορφα όλους τους άλλους αριθμούς εάν και μόνο εάν ο πρώτος αριθμός μετά το 1 είναι πρώτος αριθμός.
- Οι «ρηχές διαγώνιοι» του τριγώνου του αθροίζονται στους αριθμούς Fibonacci.
- Η εξίσωση για το τρίγωνο είναι $\alpha_{nr} \equiv \frac{n!}{r!(n-r)!} \equiv \binom{n}{r}$ όπου *n* είναι ο αριθμός της σειράς και *r* είναι η στήλη στη σειρά.

Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την εύρεση ενός συγκεκριμένου όρου στην επέκταση ενός διωνύμου στη μορφή $(x+y)^n$

1 Σειρά 0

1 1 Σειρά 1

1 2 1 Σειρά 2

1 3 3 1 Σειρά 3

1 4 6 41 Σειρά 4

1 5 10 10 5 1 Σειρά 5

1 6 15 20 15 5 6 1 Σειρά 6

1 7 21 35 35 21 7 1 Σειρά 7

Ας δούμε ένα παράδειγμα πως δουλεύει:

Να βρούμε το 4^o όρο στην 6^η σειρά του τριγώνου

$$C = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

Άθροισμα σειρών: Το άθροισμα των αριθμών σε οποιαδήποτε σειρά είναι ίσο με 2^n, πότε n είναι ο αριθμός της σειράς.

$2^0 = 1 = 1$

$2^2 = 4 = 1 + 2 + 1$

$2^3 = 8 = 1 + 3 + 3 + 1$

$2^4 = 16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$

Στην Άλγεβρα, κάθε σειρά στο Τρίγωνο του Yanh Hui περιέχει τους συντελεστές του διωνύμου $(x+y)$ υψωμένο στη δύναμη της σειράς.

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Μια άλλη σημαντική περιοχή όπου εμφανίζεται το τρίγωνο του Yang Hui και είναι πολύ χρήσιμο είναι για την εύρεση συνδυασμών.

Ένα χρόνο μετά τη συγγραφή του Mathematical Methods, ο Yang έγραψε *το Riyong suanfa* (Μαθηματικά για καθημερινή χρήση) . Αν και το κείμενο αυτού έχει χαθεί, γνωρίζουμε αρκετά για αυτό από αποσπάσματα άλλων έργων ώστε να γνωρίζουμε ότι ήταν ένα στοιχειώδες κείμενο. Οι λόγοι που τον οδήγησαν να γράψει το *Riyong suanfa* είναι για να βοηθήσει τον αναγνώστη με τα πολυάριθμα θέματα καθημερινής χρήσης των μαθηματικών και επίσης να καθοδηγήσει τους νέους στην πρακτική αριθμητική.

Τα επόμενα χρόνια ο Yang πρέπει να συνέχισε να παράγει υλικό για τα μαθηματικά, αλλά δεν δημοσίευσε τίποτα περισσότερο μέχρι το 1274 όταν εμφανίστηκε τ*ο Cheng Chu Tong Bian Ben Mo* που σημαίνει το Άλφα και το Ωμέγα των παραλλαγών στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση . Αυτό ήταν ένα έργο τριών κεφαλαίων, το κάθε κεφάλαιο είχε τον δικό του τίτλο. Το πρώτο κεφάλαιο είναι Fundamental changes in calculation, το δεύτερο Computational treasure for variations in multiplications and divisions και το τρίτο, που γράφτηκε σε συνεργασία με τον Shih Chung-yung που ήταν ένας από τους φίλους του, είναι Fundamentals of the applications of mathematics.

Το 1275 εμφανίστηκαν δύο ακόμη έργα του Yang το Selection of Unusual Mathematical Methods in the Wake of the Ancients και το Quick Methods for Multiplication and Division for the Surface of the Fields and Analogous Problems , και τα δύο είναι έργα δύο κεφαλαίων. Τα θέματα που καλύπτονται από το Yang περιλαμβάνουν πολλαπλασιασμό, διαίρεση, εξαγωγή ρίζας, τετραγωνικές και ταυτόχρονες εξισώσεις, σειρές, υπολογισμούς εμβαδών ενός ορθογωνίου, τραπεζίου, κύκλου και άλλα σχήματα. Δίνει επίσης μια υπέροχη περιγραφή των μαγικών τετραγώνων και των μαγικών κύκλων.

Ένα πρόβλημα που συναντάμε στο δεύτερο από τα δύο κεφάλαια του Yang το Selection of Unusual Mathematical Methods in the Wake of the Ancients είναι:

Με 100 νομίσματα αγοράζουμε τα εξής πορτοκάλια Wenzhou, πράσινα πορτοκάλια και χρυσά πορτοκάλια. Εάν ένα πορτοκάλι Wenzhou κοστίζει 7 νομίσματα, ένα πράσινο πορτοκαλί 3 νομίσματα και τα 3 χρυσά πορτοκάλια κοστίζουν 1 νόμισμα, πόσα πορτοκάλια από τα τρία είδη θα αγοραστούν;

Ο Yang το λύνει με τον εξής τρόπο:

Από 3 φορές 100 νομίσματα αφαιρέστε 100 νομίσματα, από 3 φορές το κόστος ενός πορτοκαλιού Wenzhou, δηλαδή 21 , αφαιρέστε 1 . το υπόλοιπο είναι 20 . Από το 3 φορές το κόστος ενός πράσινου πορτοκαλιού, δηλαδή 9 , αφαιρέστε 1. Το υπόλοιπο είναι 8 . Το άθροισμα του υπολοίπου είναι 28 . Διαιρέστε το 200 με το 28 , έχουμε τον ακέραιο αριθμό 6 . Αυτός είναι ο αριθμός των πορτοκαλιών Wenzhou. Και τότε (200 - 6 × 28) ÷ 8 = 4 , αυτή είναι η διαφορά του αριθμού των πορτοκαλιών Wenzhou και των πράσινων πορτοκαλιών. Ως εκ τούτου, το άθροισμά τους είναι 16, ενώ ο αριθμός των χρυσών πορτοκαλιών που βρίσκονται είναι 84.

Δηλαδή, θέτει $x =$ τα πορτοκάλια Wenzhou με $y =$ τα πράσινα πορτοκάλια και $z =$ τα χρυσά πορτοκάλια και :

$$x + y + z = 100$$

$$7x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με 3

$$x + y + z = 100$$

$$21x + 9y + z = 300$$

Ας δούμε τον τρόπο του Yang. Αφαιρεί τη δεύτερη εξίσωση από την πρώτη: 300 - 100 νομίσματα, 21 - 1 πορτοκάλια Wenzhou, 9 - 1 πράσινα πορτοκάλια και παίρνουμε :

$$20x + 8y = 200$$

Έπειτα θέτουμε d τη διαφορά του αριθμού των πορτοκαλιών Wenzhou και των πράσινων πορτοκαλιών, $y = x - d$. Κάνουμε αντικατάσταση :

$$20x + 8(x - d) = 200$$

επίσης

$$28x = 200 - 8d$$

καταλήγουμε $x = 6 + \frac{1}{28}(32 - 8d)$

άρα $d = 4$, $x = 6$, $y = 10$ και $z = 84$ τα χρυσά πορτοκάλια

Ένα άλλο του ίδιου τύπου πρόβλημα συναντάμε στο Κεφάλαιο 2 και είναι το πρώτο πρόβλημα:

> Ένας αριθμός φασιανών και κουνελιών τοποθετούνται μαζί στο ίδιο κλουβί. Τριάντα πέντε κεφάλια και ενενήντα τέσσερα πόδια είναι μετρημένα. Βρείτε τον αριθμό των φασιανών και των κουνελιών.

Τέλος, ας σημειώσουμε την αξιοσημείωτη συμβολή του Yang στα μαγικά τετράγωνα. Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι τα παρουσιάζει ως έναν καλό τρόπο ώστε να προσελκύσει τους ανθρώπους με τους αριθμούς και δεν διεκδικεί μαγικές ιδιότητες. Το όρο μαγικά τετράγωνα το αποδώσαμε οι νεότερες γενιές και όχι ο ίδιος ο Κινέζος μαθηματικός ο ίδιος τα αποκαλεί απλώς διαγράμματα αριθμών. Δίνει ένα μαγικό τετράγωνο τάξης 3, δύο τετράγωνα τάξης 4, δύο τετράγωνα τάξης 5, δύο τετράγωνα τάξης έξι, δύο τετράγωνα τάξης 7, δύο τάξης 8, ένα τάξης εννέα και ένα της τάξης 10.

Το τετράγωνο 3 × 3

4	9	2
3	5	7
8	1	6

, το ένα από τα δύο τετράγωνα $4 \; x \; 4$

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	17	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

το ένα από τα δύο $5 \; x \; 5$ και τέλος θα δούμε

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

το $10\ x\ 10$

Zhu Shijie

Ο Zhu Shijie γεννήθηκε το 1249, κατά τη διάρκεια της δυναστείας των νότιων Song, στη σημερινή Shandong της Κίνας. Καταγόταν από ακαδημαϊκή οικογένεια με πλούσια παράδοση στη μάθηση και αυτό το περιβάλλον πιθανότατα έθρεψε το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Λίγα είναι γνωστά για την πρώιμη εκπαίδευσή του, αλλά είναι προφανές ότι έλαβε μια ολοκληρωμένη και αυστηρή μαθηματική εκπαίδευση, πιθανότατα από ιδιωτικούς δασκάλους και μέσω της μελέτης κλασικών κινεζικών κειμένων. Ο Zhu ήταν, επομένως, ο τελευταίος από αυτούς τους τέσσερις μεγάλους Κινέζους μαθηματικούς του δέκατου τρίτου αιώνα, αλλά φαίνεται από τα γραπτά του ότι δεν γνώριζε το έργο των τριών διάσημων προκατόχων του.

Σε νεαρή ηλικία, ο Zhu Shijie επέδειξε εξαιρετική ικανότητα στα μαθηματικά και άρχισε να συνεισφέρει στον τομέα που σύντομα θα τον ξεχώριζε. Καθώς το πολιτικό τοπίο της Κίνας άλλαξε, με την πτώση της δυναστείας των νότιων Song και την εμφάνιση της δυναστείας Yuan, ο Zhu

Shijie αντιμετώπισε προκλήσεις και ευκαιρίες που θα διαμόρφωσαν την καριέρα του και θα επηρέαζαν τη δουλειά του.

Ο Zhu Shijie είναι κυρίως γνωστός για το μεγάλο έργο του, «Si-yuan yujian» -«The Precious Mirror of the Four Elements».(1303). Αυτό το έργο καλύπτει ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών θεμάτων, καθιστώντας το ένα από τα πιο επιδραστικά μαθηματικά κείμενα στην κινεζική ιστορία. Χωρίζεται σε τέσσερις τόμους, καθένας από τους οποίους διερευνά διαφορετικό μαθηματικό πεδίο. Αυτοί οι τόμοι καλύπτουν τα παραδοσιακά κινέζικα μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων της αριθμητικής, της άλγεβρας, της γεωμετρίας και της μέτρησης.

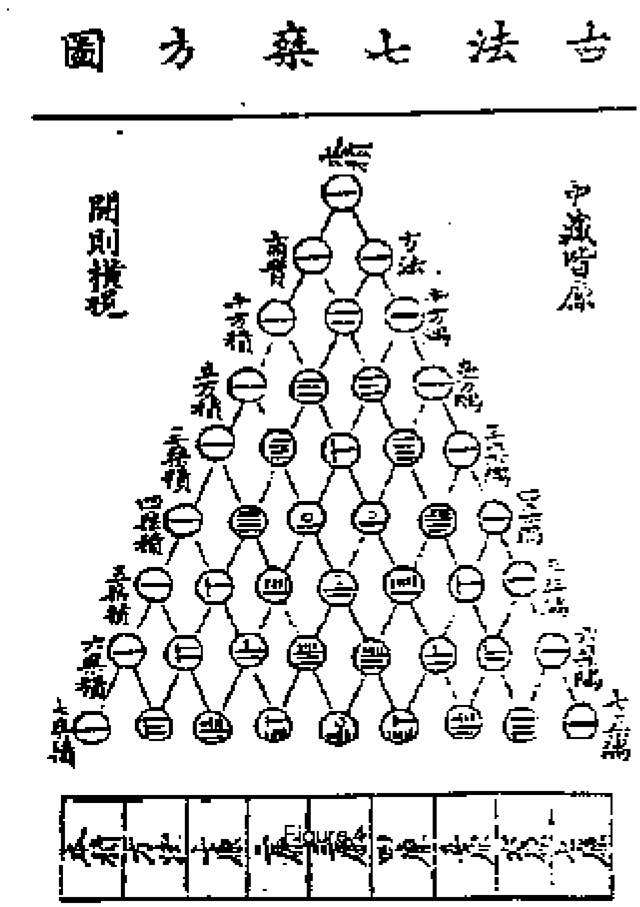
Αριθμητική: Ο πρώτος τόμος του «The Precious Mirror of the Four Elements» εστιάζει στην αριθμητική και καλύπτει μια ποικιλία αριθμητικών θεμάτων, όπως βασικές πράξεις, κλάσματα, δεκαδικά ψηφία και υπολογισμούς που περιλαμβάνουν μεγάλους αριθμούς. Ο Zhu Shijie εισάγει αλγόριθμους για πολύπλοκους υπολογισμούς, συμπεριλαμβανομένης της εύρεσης τετραγωνικών και κυβικών ριζών, κάτι που ήταν μια σημαντική πρόοδος στη μαθηματική μεθοδολογία.

Άλγεβρα: Ο δεύτερος τόμος εμβαθύνει σε αλγεβρικά θέματα, συμπεριλαμβανομένων των πολυωνυμικών εξισώσεων και των λύσεών τους. Το έργο του Zhu Shijie σε αυτόν τον τόμο είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτο για τη μέθοδο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων υψηλότερου βαθμού, που αποτελεί πρόδρομο της σύγχρονης έννοιας των τύπων του Vieta. Εισάγει επίσης μια συστηματική προσέγγιση για την επίλυση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων. Η καινοτόμος προσέγγισή του στα αλγεβρικά προβλήματα άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σημειογραφίας και μεθόδων στους επόμενους αιώνες.

Γεωμετρία: Ο τρίτος τόμος της πραγματείας είναι αφιερωμένος στη γεωμετρία, με επίκεντρο τις γεωμετρικές αρχές, τις ιδιότητες διαφόρων σχημάτων και την εφαρμογή γεωμετρικών εννοιών σε πρακτικά προβλήματα. Το γεωμετρικό έργο του Zhu Shijie θεωρείται καινοτόμο και έθεσε τις βάσεις για την ανάπτυξη της παραδοσιακής κινεζικής γεωμετρίας.

Μέτρηση: Ο τέταρτος και τελευταίος τόμος καλύπτει μετρήσεις, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της τοπογραφίας και της αρχιτεκτονικής. Ο Zhu Shijie παρέχει λεπτομερείς οδηγίες για το πώς να μετράτε με ακρίβεια τις αποστάσεις, τις περιοχές και τους όγκους. Αυτό το τμήμα της πραγματείας είχε πρακτική σημασία, καθώς είχε εφαρμογές σε διάφορα μηχανολογικά και κατασκευαστικά έργα της εποχής.

Ο Zhu Shijie ανακάλυψε μία μέθοδος των τεσσάρων στοιχείων δηλαδή μία μέθοδος γραφής εξισώσεων τεσσάρων αγνώστων και στη συνέχεια εξάλειψης των αγνώστων σε μία εξίσωση με ένα άγνωστο. Ο ίδιος δεν αναλύσει αρκετά το τρόπο που καταλήγει σε μία εξίσωση με έναν άγνωστο και για αυτό έχουμε κάνει υποθέσεις πως καταλήγει στην τελική εξίσωση. Η μέθοδος του ονομάστηκε siyuan shu του Zhu Shijie δεν αναπτύχθηκε περαιτέρω στα κινέζικα μαθηματικά ο λόγος για αυτό ήταν ότι δεν υπήρχε το κατάλληλο περιβάλλον αφού απαιτούσε προχωρημένη μαθηματική σκέψη και υπήρχαν λίγοι μαθηματικοί όπου μπορούσαν να καταλάβουν το siyuan shu εκείνη την περίοδο στην Κίνα.



Το διάγραμμα τριγώνου Pascal του Zhu .

Ο Zhu παρουσιάζει 288 προβλήματα που χωρίζονται σε τρεις τόμους με 24 κεφάλαια. Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες πτυχές αυτής της εργασίας είναι ότι ο Zhu, αν και εξακολουθεί να χρησιμοποιεί την παραδοσιακή κινεζική προσέγγιση της παρουσίασης των μαθηματικών μέσω πρακτικών προβλημάτων, δεν κάνει σε καμία περίπτωση τα παραδείγματά του ρεαλιστικά.

Μάλλον είναι απλώς οχήματα για την παρουσίαση των μεθόδων. Επομένως, ο Zhu δεν δίνει απαραίτητα την απλούστερη λύση σε ένα πρόβλημα, αλλά μάλλον συχνά εισάγει επιπλοκές που έχουν σχεδιαστεί ρητά για να επεξηγήσουν τον τρόπο χειρισμού πιο περίπλοκων καταστάσεων. Ας το επεξηγήσουμε δίνοντας ένα από τα προβλήματα του Zhu:

Η βάση είναι x bu, το ύψος είναι y bu, και η υποτείνουσα είναι z bu. Οπότε έχουμε $\frac{1}{2}xy = 30$ και $x + y = 17$. Άρα $y = 17 - x$ που προκύπτει $x^2 - 17x + 60 = 0$ ως εκ τούτου $x = 12$ ή 5 αλλά η βάση που έχει μικρότερο μήκος δίνει $x = 5$ bu , $y = 12$ bu άρα $z = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Ο Zhu, ωστόσο, θέλει να απεικονίσει κάτι πιο προηγμένο από την επίλυση μιας εξίσωσης τετραγωνικής. Θέτει $t = z + x$ και στη συνέχεια αντικατάσταση $z = x - t$, $y = 17 - x$ και δίνει

$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 - 34x + 2tx + 289 - t^2 = 0\ (1)$ αλλά $x^2 - 17x + 60 = 0 \iff x^2 = 17x - 60$ η (1) δίνει $0 = 229 - 17x + 2xt - t^2 \iff x = \frac{-229+t^2}{-17+2t}$ αντικαθιστώντας την εξίσωση με στην (1) και πολλάπλασιάζοντας επί $(-17 + 2t)^2$ δίνει $t^4 - 34t^3 + 71t^2 + 3706t + 3600 = 0\ (2)$

Αν και δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι οι μέθοδοι του Zhu είναι ακριβώς αυτό που παρουσιάσαμε εδώ, σίγουρα έφτασε στην εξίσωση (2) . Έχει μελετήσει τον τρόπο εργασίας με τους τέσσερις άγνωστους x, y, z, t και μπορεί τώρα να επεξηγήσει πώς να λύσει μια εξίσωση Quartic. Ωστόσο η εξίσωση (2) έχει λύσεις τους αρίθμους -1 ,-8, 18 και 25 αλλά ο Zhu δίνει τη μόνη σωστή απάντηση 18 bu.

Σε ένα άλλο από τα προβλήματα του Zhu διατυπώνεται με όρους ορθογώνιου τριγώνου, αλλά στην πραγματικότητα δίνει απλώς ένα σύστημα εξισώσεων. Οι πλευρές του τριγώνου είναι x, y, z *ό*που z είναι η υποτείνουσα.

Το *Siyuan yujian* περιέχει επίσης μια μέθοδο μετασχηματισμού για την αριθμητική λύση των εξισώσεων που εφαρμόζεται σε εξισώσεις μέχρι το βαθμό 14 . Αυτό βασίζεται στη μέθοδο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων που ανακαλύφθηκε ξανά από τους Horner και Ruffini. Ο Zhu δίνει επίσης τύπους:

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$1 + 3 + 6 + 10 + \cdots .. + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$,

$1 + 4 + 10 + 20 + \cdots .. + \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3),$

$1 + 5 + 15 + 35 + \cdots \ldots + \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$1 + 6 + 21 + 56 + \cdots .. \frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \frac{1}{720}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$

Παρομοίως έδωσε το άθροισμα των :

$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \cdots \ldots$

$1 + 5 + 14 + 30 + 55 + 91 + \cdots \ldots ..$

$1 + 6 + 18 + 40 + 75 + 126 + \cdots \ldots ..$

$1 + 8 + 30 + 80 + 175 + 336 + \cdots.$

Δουλεύοντας το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο άθροισμα , ο Zhu έλυσε το ακόλουθο πρόβλημα:

Εάν ο νόμος του κύβου εφαρμόζεται στο ποσοστό στρατολόγησης στρατιωτών και διαπιστωθεί ότι την πρώτη ημέρα στρατολογούνται 3 κύβοι, 4 κύβοι τη δεύτερη ημέρα και κάθε επόμενη ημέρα ο κύβος ενός αριθμού ένα μεγαλύτερο από την προηγούμενη ημέρα είναι στρατολογήθηκαν, πόσοι στρατιώτες συνολικά θα έχουν στρατολογηθεί μετά από 15 ημέρες; Πόσες μετά από n ημέρες;

Απάντηση: 23400 στρατιώτες μετά από 15 μέρες και $\frac{1}{4}n(n+5)(n^2+5n+12)$ στρατιώτες μετά από n μέρες.

Ο Zhu Shijie ήταν γνωστός για την καινοτόμο σκέψη του και την ικανότητά του να συνδυάζει θεωρητικές έννοιες με πρακτικές εφαρμογές. Τα έργα του επηρέασαν βαθύτατα τους μεταγενέστερους μαθηματικούς και άνοιξαν το δρόμο για την περαιτέρω ανάπτυξη της άλγεβρας και της αριθμητικής στην Κίνα. Ο επίλογος της ζωής του Zhu Shijie σηματοδοτεί το τέλος μιας εποχής μεγάλης μαθηματικής καινοτομίας. Παρά το γεγονός ότι τα έργα του χάθηκαν για αιώνες, η επανανακάλυψή τους τον 18ο αιώνα ανέδειξε ξανά την αξία και τη σημασία τους. Η κληρονομιά του συνεχίζει να ζει, και η συνεισφορά του αναγνωρίζεται ως θεμελιώδης στην ιστορία των μαθηματικών. Ο Zhu Shijie παραμένει μια από τις σημαντικότερες μορφές της κινεζικής μαθηματικής παράδοσης, με την επιρροή του να φτάνει μέχρι τις σύγχρονες μαθηματικές μελέτες.

Jia Xian

Ο Jia Xian είναι επίσης γνωστός ως Chia Hsien**.** Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό για τη ζωή του. Ο Jia Xian είναι γνωστό ότι έγραψε δύο μαθηματικά βιβλία: *Huangdi Jiuzhang Suanjing Xicao* και *Suanfa Xuegu Ji* (Συλλογή αρχαίων μαθηματικών κανόνων) . Και τα δύο έχουν χαθεί και δεν γνωρίζουμε τίποτα για το δεύτερο από τα δύο βιβλία εκτός από τον τίτλο του. Το πρώτο όμως, αν και έχει χαθεί, μας είναι γνωστό με κάποια λεπτομέρεια. Αυτό συμβαίνει επειδή ο Yang Hui έγραψε *το Xiangjie Jiuzhang Suanfa* το 1261 με σκοπό να εξηγήσει και να κάνει πιο γνωστό το έργο του Jia Xian. Ένα αντίγραφο του κειμένου του Yang Hui έχει διασωθεί και δηλώνει ρητά τους λόγους για τη συγγραφή του έργου στον πρόλογο.

Ότι γνωρίζουμε είναι από τον Yang Hui για τη μαθηματική συμβολή του Jia Xian. Το πρώτο είναι η κατανόηση του τριγώνου του Πασκάλ . Εδώ ο Jia Xian γνωρίζει την επέκταση του και δίνει έναν πίνακα με τους προκύπτοντες διωνυμικούς συντελεστές με τη μορφή $(\mathrm{a}+\beta)^{\mathrm{n}}$ του τριγώνου του Pascal . Ο Jia Xian φαίνεται να έχει υπολογίσει τους διωνυμικούς συντελεστές μέχρι $\mathrm{n}=6$ και έδωσε έναν συνοδευτικό πίνακα παρόμοιο με το τρίγωνο του Pascal που καταγράφει τους συντελεστές μέχρι τη σειρά $1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1$.

Η άλλη συνεισφορά είναι ένας αλγόριθμος για την εξαγωγή ρίζας αλλά, όπως θα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιεί τη μέθοδο του τριγώνου Pascal . Γενικεύτηκε μια μέθοδος εύρεσης τετραγωνικών ριζών και κυβικών ριζών στην εύρεση της νης ρίζας, για $n > 3$, και στη συνέχεια επέκτεινε τη μέθοδο στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων αυθαίρετου βαθμού. Ο αλγόριθμος ονομάζεται μέθοδος *Zeng chang kaifang* από τον Jia Xian, που σημαίνει την προσθετική-πολλαπλασιαστική μέθοδο για εξαγωγές ριζών. Η μέθοδος είναι ουσιαστικά αυτή που σήμερα ονομάζεται μέθοδος Ruffini - Horner ή μέθοδος Horner .

Ας επεξηγήσουμε τη μέθοδο με επίλυση :

$x^3 = 146363183$

Από $10^6 < x^3 < 10^9$ έχουμε $100 < x < 1000$. Όποτε $x = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ με $1 < \alpha < 9$, $0 < \beta < 9$ και $0 < \gamma < 9$.

Από $500^3 = 125000000$ και $600^3 = 216000000$ οπότε $\alpha = 5$. Άρα :

(500+10β)$^3 = 125000000 + 7500000\beta + 150000\beta^2 + 1000\beta^3 \leq 146363183$

Αφαιρούμε το 125000000 οπότε $7500000\beta + 150000\beta^2 + 1000\beta^3 \leq 21363183$

Έχουμε μόνο τον πρώτο όρο $\beta < 3$ και $\beta = 2$ και έχουμε ότι είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή δίνοντας στην αριστερή πλευρά 15608000 . Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 2$ με $x = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ έχουμε $520 + \gamma$ τότε $x^3 = (520 + \gamma)^3$. Αφαιρούμε 15608000 από 21363183 και παίρνουμε $811200\gamma + 1560\gamma^2 + \gamma^3 = 5755183$

που έχουμε λύση $\gamma = 7$.

Μια συναρπαστική ιστορική περιγραφή των μεθόδων εξαγωγής ριζών που χρησιμοποιούνταν από Κινέζους και Άραβες μελετητές. Στο βιβλίο της η Chemla, Similarities στο «Chinese and Arabic mathematical writings I : Root extraction, *Arabic Sci. Philos*» ορίζει ακριβώς από τι αποτελείται η μέθοδος Ruffini-Horner, έτσι ώστε σε κάθε βήμα του αλγορίθμου να εκτελείται ακριβώς η ίδια διαδικασία, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό και αφαίρεση, μέχρι να ληφθεί η ρίζα. Αφού εξέτασε παλαιότερες κινεζικές μεθόδους που δόθηκαν στα «Nine Chapters on the Mathematical Art» και εκείνες του Zhang Qiujian τον πέμπτο αιώνα, συμπεραίνει ότι ο Jia Xian ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη μέθοδο Ruffini-Horner. Μια εξέταση των μεθόδων εξαγωγής ριζών από Άραβες συγγραφείς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο al-Samawal τον δωδέκατο αιώνα ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη μέθοδο Ruffini-Horner. Δείχνεται επίσης ότι τόσο η μέθοδος του Jia Xian όσο και η μέθοδος του al-Samawal καταλήγουν στην ίδια μορφή για την προσέγγιση των ριζών. Αν το α είναι το αναπόσπαστο τμήμα της νιοστής ρίζας του A, τότε η προσέγγιση δίνεται από $\alpha + \frac{A-\alpha^n}{(a+1)^n-a^n}$

Τόσο ο Jia Xian όσο και ο Al-Samawal χρησιμοποιούν διωνυμικούς συντελεστές, που υπολογίζονται με μια μορφή του τριγώνου του Pascal, για να υπολογίσουν τον παρονομαστή της έκφρασης. Το ενδιαφέρον ερώτημα εάν ο al-Samawal ανακάλυψε τη μέθοδο ανεξάρτητα ή εάν υπήρξε μετάδοση της κινεζικής μεθόδου του Jia Xian στα Ισλαμικά/Αραβικά μαθηματικά παραμένει άλυτο.

Τέλος βλέπουμε τον Jia Xian- triangle όπου στις μέρες μας ονομάζετε τρίγωνο Pascal αλλά ο Jia το είχε δημιουργήσει 400 χρόνια πριν.

1 – 7 – 21 – 35 – 35 – 21 – 7 – 1

1	7					
1	6	21				
1	5	15	35			
1	4	10	20	35		
1	3	6	10	15	21	
1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1

Η συνεισφορά του Jiu Xian στη μαθηματική επιστήμη αναγνωρίζεται ως θεμελιώδης για την κατανόηση και την εξέλιξη της άλγεβρας. Η δουλειά του συνεχίζει να εμπνέει και να διδάσκεται, υπογραμμίζοντας τη διαχρονική αξία των επιτευγμάτων του. Στον επίλογο της ζωής του, η παρακαταθήκη του Jiu Xian παραμένει ζωντανή, διασφαλίζοντας ότι η συμβολή του θα συνεχίσει να αναγνωρίζεται και να τιμάται στις επόμενες γενιές μαθηματικών.

Matteo Ricci

Ο Ιταλός ιεραπόστολος και μαθηματικός Matteo Ricci (6 Οκτωβρίου 1552 –11 Μαΐου 1610), ιδρυτής των αποστολών των Ιησουιτών στην Κίνα, ήταν ο πρώτος που μοιραστείτε τα ευρωπαϊκά μαθηματικά με τους Κινέζους. Όχι μόνο έδωσε στην Κίνα μια ματιά στον Θεό και τη θρησκεία του, τους παρείχε την πρώτη τους εντύπωση του δυτικού πολιτισμού και της επιστήμης. Ο Ricci γεννήθηκε το Macerata, τότε μέρος των παπικών κρατών. Ο ευγενής πατέρας του απαγόρευε οποιαδήποτε συζήτηση για θρησκευτικά θέματα στο σπίτι του. Ίσως αυτός ο περιορισμός είχε αντίστροφο επίδραση στον Ricci που προσελκύθηκε από το τάγμα της Κοινωνίας του Ιησού, οργανωμένο από τον Άγιο Ιγνάτιο του Λογιόλα μόνο μια γενιά νωρίτερα. Το 1568 στάλθηκε ο Ρίτσι στη Ρώμη για να σπουδάσει νομικά, αλλά τρία χρόνια αργότερα εντάχθηκε στους Ιησουίτες. Αυτός εγγραφεί στο Collegio Romano, όπου εκτός από το δικό του φιλοσοφικές και θεολογικές σπουδές έμαθε μαθηματικά, κοσμολογία και αστρονομία από τον Ιησουίτη λόγιο Κρίστοφερ Κλάβιους.

Η επαφή του Matteo Ricci με την Κίνα είχε να κάνει με τις αποστολές των Ιησουιτών στην Κίνα, την Κορέα και την Ιαπωνία όπου ανέπτυξαν λεπτές και εξελιγμένες στρατηγικές προκειμένου να πραγματοποιήσουν τον στόχο τους να φέρουν τους εκεί λαούς στο Χρισιανισμό. Στην Κίνα, όπου η αποστολή των Ιησουιτών ήταν πιο επιτυχημένη, η στρατηγική που χρησιμοποίησε ο πατέρας Matteo Ricci εξασφάλισε τα θεμέλια της καθολικής εκκλησίας. Ως στρατηγική, περιελάμβανε την υιοθέτηση της κινεζικής κουλτούρας και ενδυμασίας, την τήρηση των κινεζικών πολιτικών εθίμων, τη χρήση και τη γνώση της κινεζικής γλώσσας και την πλεονεκτική χρήση των ευρωπαϊκών καινοτομιών. Μία από τις παραμέτρους αποστολής ήταν και η χρήση των ευρωπαϊκών μαθηματικών προς όφελος της Καθολικής αποστολής. Μέσω της διδασκαλίας των μαθηματικών, ο πατέρας Ricci και η ιεραποστολή των Ιησουιτών προσπάθησαν να αλλάξουν τον τρόπο σκέψης των Κινέζων προκειμένου να προετοιμάσουν το μυαλό τους για την αποδοχή του χριστιανικού δόγματος. Ο ιστορικός Jacques Gernet, στη μελέτη του για την αποστολή των Ιησουιτών στην Κίνα, ονόμασε τις επιστήμες «δέλεαρ».Πολύ περισσότερο από δέλεαρ, οι επιστήμες ήταν ένα εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για να εισχωρήσουν στο μυαλό των Κινέζων μια επιστημονική διαδικασία σκέψης - την ίδια διαδικασία σκέψης που χρησιμοποιήθηκε για να δείξει την ορθολογική υπεροχή των καθολικών δογμάτων και τη λογική αναγκαιότητα της μεταστροφής.

Ο Ricci έγινε εξαιρετικά ικανός στην κινεζική γλώσσα και κατανόησε τον κινεζικό πολιτισμό. Ενώ βρισκόταν στην επαρχία Kwangtung δημιούργησε την πρώτη έκδοση του χάρτη του the world, Great Map of Ten Thousand Countries, ίσως ο πιο ακριβής εκείνη την εποχή. Οι Κινέζοι είχαν χάρτες, που ονομάζονταν «περιγραφές του κόσμου» από τους γεωγράφους τους, αλλά αυτές έδειχναν μόνο τις δεκαπέντε επαρχίες της Κίνας που περιβάλλονταν από θάλασσα και μερικά νησιά χαραγμένα με τα ονόματα των χωρών για τις οποίες είχαν ελάχιστη γνώση. Η κινεζική αντίληψη του,το μεγαλείο της χώρας τους και η ασημαντότητα άλλων χωρών τους έκανε να πιστέψουν ότι ο υπόλοιπος κόσμος ήταν άγριος και βάρβαρος. Οι μαθημένοι Κινέζοι διαμαρτυρήθηκαν όταν τους έδειξαν ευρωπαϊκούς χάρτες και είδαν πόσο μικρή ήταν η Κίνα σε σχέση με όλο τον κόσμο.

Το 1601 επιτράπηκε να εγκατασταθεί στο Πεκίνο (τώρα Πεκίνο), από που ως αλλοδαπός είχε αποκλειστεί νωρίτερα. Έγινε ο μαθηματικός της αυλής του αυτοκράτορα Wan-li και παρέμεινε στην Απαγορευμένη Πόλη μέχρι τον θάνατό του εννέα χρόνια αργότερα. Τα τελευταία του χρόνια ήταν πολυάσχολα και απαιτητικά. Τον Μάιο του 1610 η υγεία του χειροτέρεψε και μετά από ασθένεια οκτώ ημερών πέθανε σε ηλικία 58 ετών. Οι αλλοδαποί απαγορευόταν να ταφούν στην Κίνα, αλλά ο αυτοκράτορας έδωσε στους Ιησουίτες το νεκροταφείο Zhalan και ανέθεσε μια υπέροχη ταφόπλακα για τον Ricci που στέκεται ακόμα και σήμερα. Όταν πέθανε στις 11 Μαΐου 1610, ήταν ο πρώτος μη Κινέζος που του παραχωρήθηκε το δικαίωμα να ταφεί σε κινεζικό έδαφος, ένδειξη της μεγάλης εκτίμησης που του είχαν εκείνη την εποχή.
Ο Ricci έκανε περισσότερα από οποιονδήποτε άλλον για να εξοικειώσει τους Κινέζους με τα μαθηματικά και την αστρονομία της Δύσης. Τα βιβλία του «Geometrica Practica» και «Trigonometica» ήταν μεταφράσεις του έργου του Clavius στα κινέζικα. Ο Ιταλός Ιησουίτης Matteo Ricci και ο Κινέζος λόγιος XU Guang-qi της δυναστείας των Μινγκ συνεργάστηκε για την παραγωγή μιας μετάφρασης των πρώτων έξι βιβλίων του Elements (ακριβέστερα, η έκδοση δεκαπέντε βιβλίων Euclidis Elementorum Libri XV με δημιουργό το Christopher Clavius.) Χρησιμοποίησε τη βεβαιότητα των προτάσεων του Ευκλείδη για την εξάλειψη των αμφιβολιών των διανοουμένων του Μινγκ για την ύπαρξη του Θεού και την προσέλκυση τους στη δυτική θρησκεία.

Ο Matteo Ricci δεν είχε σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις ώστοσο μέσα από το έργο του κατάφερε να φέρει πιο κοντά δυο διαφορετικούς πολιτισμούς με ότι ωφέλειες συνεπάγεται από την κίνηση αυτή. Άνοιξε το παράθυρο στους κινέζους προς τα μαθηματικά που είχαν αναπτυχθεί στον υπόλοιπο κόσμο. Το 1607 είναι χρονιά ορόσημο αφού τότε μεταφράστηκε το πρώτο ευρωπαϊκό βιβλίο μαθηματικών στα Κινέζικα.

Η μετάφραση του Elements βασίστηκε στην έκδοση που συνέταξε ο Clavius το 1574 (με τις επόμενες εκδόσεις), μια έκδοση δεκαπέντε βιβλίων με τίτλο Euclidis Elementorum Libri XV (Clavius, 1574). Για τον Ricci, ο οποίος σπούδασε μαθηματικά υπό τον Clavius, το έργο Elements, που συνέταξε ο Ευκλείδης (περίπου 325-265 π.Χ.) στις αρχές του τρίτου αιώνα π.Χ., ήταν η βάση οποιασδήποτε μαθηματικής μελέτης. Πρότεινε λοιπόν στον Κινέζο φίλο του XU Guang-qi ότι θα πρέπει να είναι το πρώτο μαθηματικό κείμενο που θα μεταφραστεί. Ο XU έβαλε τον εαυτό του να δουλέψει πολύ σκληρά σε αυτό το έργο. Πήγαινε να ακούει τη διάλεξη του Ricci για το Elements κάθε μέρα το απόγευμα (καθώς δεν μπορούσε να διαβάσει λατινικά, ενώ ο Ricci ήξερε καλά τα κινέζικα) και μελετούσε κοπιαστικά και κάθε βράδυ έγραφε στα κινέζικα όλα όσα είχε μάθει την ημέρα. Σύμφωνα με μια αφήγηση του Ricci: «Όταν [XU Guang-qi] άρχισε να κατανοεί τη λεπτότητα και τη σταθερότητα του βιβλίου, του άρεσε τόσο πολύ που δεν μπορούσε να μιλήσει για κανένα άλλο θέμα με τους συναδέλφους του. , και δούλευε μέρα νύχτα για να το μεταφράσει με σαφές, σταθερό και κομψό ύφος. Έτσι κατάφερε να φτάσει στο τέλος των έξι πρώτων βιβλίων που είναι τα πιο απαραίτητα και, ενώ τα μελετούσε, ανακάτεψε μαζί τους και άλλες ερωτήσεις στα μαθηματικά. Θα ήθελε να συνεχίσει μέχρι το τέλος της Γεωμετρίας. αλλά ο Matteo Ricci επιθυμώντας να αφιερώσει τον χρόνο του σε πιο σωστά θρησκευτικά ζητήματα και να τον χαλιναγωγήσει λίγο, του είπε να περιμένει μέχρι να δουν εκ πείρας πώς έλαβαν οι Κινέζοι λόγιοι αυτά τα πρώτα βιβλία, πριν μεταφράσουν τα άλλα» (Bernard, 1935). Το μεταφρασμένο κείμενο δημοσιεύτηκε το 1607 και έλαβε τον τίτλο Ji He Yuan Ben.

Η ιστορία δεν προχώρησε (δυστυχώς) με τον τρόπο που θα ήθελε να τη δει ο XU Guang-qi. Η μετάφραση των Στοιχείων από τον XU Guang-qi και τον Matteo Ricci οδήγησε στο πρώτο κύμα μετάδοσης της ευρωπαϊκής επιστήμης στην Κίνα, με ένα δεύτερο κύμα (ή έναν απόηχο του πρώτου κύματος όπως θα το έβλεπαν ορισμένοι ιστορικοί) και ένα τρίτο κύμα να ακολουθήσει στη δυναστεία Qing, αλλά το καθένα σε

ένα μάλλον διαφορετικό ιστορικό πλαίσιο. Το κέρδος αυτού του πρώτου κύματος φάνηκε στιγμιαίο και πέρασε με την πτώση της δυναστείας των Μινγκ. Κοιτάζοντας πίσω μπορούμε να δούμε τη μακροπρόθεσμη επιρροή του, αλλά εκείνη τη στιγμή αυτό το μικρό παράθυρο που άνοιγε σε έναν καταπληκτικό εξωτερικό κόσμο έκλεισε σύντομα ξανά, για να ανοίξει αναγκαστικά ως μια ευρύτερη πόρτα διακόσια χρόνια αργότερα.

Ο όρος "ji he" γίνεται η σύγχρονη κινεζική ορολογία για τη γεωμετρία. Μια πρόταση ορισμένων ότι πρόκειται για μεταγραφή της δυτικής λέξης γεωμετρία ακούγεται απίθανη για διάφορους λόγους. Εξετάζοντας τους μεταφρασμένους ορισμούς στο Βιβλίο V, το οποίο αναφέρεται στη θεωρία της αναλογίας του Εύδοξου, βλέπουμε ότι το «ji he» είναι ο τεχνικός όρος για το «μέγεθος».

Ο Guang-qi είπε το 1607, «*Αυτό το βιβλίο (Τα Στοιχεία) έχει ευρείες εφαρμογές και είναι ιδιαίτερα απαραίτητο σε αυτή τη χρονική στιγμή*». Στον πρόλογο ο Ricci εξέφρασε επίσης την επιθυμία του να διαδώσει αυτό το βιβλίο,λέγοντας «*Υποθέτω ότι όλοι θα το μελετήσουν σε εκατό χρόνια από τώρα, οπότε και θα μετανιώσουν που το μελετούν πολύ αργά. Κακώς θα μου απέδιδαν την προνοητικότητα [κατά την εισαγωγή αυτού του βιβλίου], αλλά τι διορατικότητα έχω πραγματικά*». Ωστόσο, σχεδόν εκατό χρόνια αργότερα, η κατάσταση απείχε ακόμα πολύ από αυτό που θα ήθελε να δει ο XU. Πάνω από τετρακόσια χρόνια πριν ο XU Guang-qi είχε ήδη επισημάνει αυτό το ηθικό και πνευματικό όφελος με τη μελέτη των Στοιχείων.

Ινδία

Η μεσαιωνική περίοδος στην Ινδία, γνωστή για την πλούσια πολιτιστική και επιστημονική της κληρονομιά, αποτελεί μια σημαντική εποχή στην ιστορία των μαθηματικών. Οι μαθηματικοί της εποχής αυτής συνέβαλαν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της αριθμητικής, της άλγεβρας, της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας, επηρεάζοντας σημαντικά τις μετέπειτα επιστημονικές εξελίξεις τόσο στην Ανατολή όσο και στη Δύση.

Οι Ινδοί μαθηματικοί όπως ο Aryabhata, ο Brahmagupta, και ο Mahavira, παρήγαγαν πρωτοποριακά έργα που εισήγαγαν και ανέπτυξαν βασικές μαθηματικές έννοιες. Αυτοί οι επιστήμονες ανέπτυξαν τον δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, εισήγαγαν τη χρήση του μηδενός ως αριθμητική μονάδα, και προώθησαν τις μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και αλγεβρικών προβλημάτων.

Η παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρεί να διερευνήσει τη μαθηματική πρόοδο της μεσαιωνικής Ινδίας, εστιάζοντας στις βασικές ανακαλύψεις και στους πρωτοπόρους μαθηματικούς της περιόδου. Μέσω της ανάλυσης των έργων τους, της κατανόησης των μεθόδων που ανέπτυξαν, και της επίδρασης των επιτευγμάτων τους, επιδιώκεται να αναδειχθεί η σημασία της μαθηματικής σκέψης στην Ινδία και η συμβολή της στη διαμόρφωση της παγκόσμιας μαθηματικής γνώσης.

Σε αυτήν τη μελέτη, θα εξετάσουμε τις ιστορικές και κοινωνικές συνθήκες που επηρέασαν την ανάπτυξη των μαθηματικών στην Ινδία, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των Ινδών μαθηματικών και άλλων πολιτισμών. Μέσα από αυτή την πολυδιάστατη προσέγγιση, θα κατανοήσουμε καλύτερα πώς η μαθηματική σκέψη και καινοτομία άνθισαν στην μεσαιωνική Ινδία και πώς οι ιδέες αυτής της περιόδου συνέβαλαν στη διαμόρφωση των σύγχρονων μαθηματικών.

Αυτή η διπλωματική εργασία φιλοδοξεί να αποτελέσει έναν σημαντικό πόρο για την κατανόηση της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών και να ενισχύσει την εκτίμηση για τις διαχρονικές συνεισφορές των Ινδών μαθηματικών στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα.

Brahmagupta

Ο Brahmagupta είναι ο πιο αξιοσημείωτος μαθηματικός και αστρονόμος της Ινδίας κατά τη διάρκεια της μεσαιωνικής περιόδου. Ο αντίκτυπος των έργων του για την ανάπτυξη του τα μαθηματικά δεν φαίνεται μόνο στην Ινδία, αλλά στο εξωτερικό επίσης. Ο Brahmagupta κατέχει μια μοναδική θέση στην ιστορία των Αρχαίων Ινδικών Μαθηματικών. Συνέβαλε τόσο κομψά αποτελέσματα στη Γεωμετρία και τη Θεωρία Αριθμών που οι σημερινοί μαθηματικοί εξακολουθούν να θαυμάζουν την πρωτοτυπία τους. Τα θεωρήματά του που οδηγούν στον υπολογισμό της περιφέρειας ενός τριγώνου και των μηκών των διαγώνιων ενός κυκλικού τετράπλευρου, η κατασκευή ενός ορθολογικού κυκλικού τετράπλευρου και ακέραιων λύσεων σε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού είναι σίγουρα τα χαρακτηριστικά μιας ιδιοφυΐας. Οι ανακαλύψεις του διαφορετικά θεωρήματα στα μαθηματικά ήταν τόσο καινοτόμος που θεωρείται ως ένας από τους μεγαλύτεροι μαθηματικοί του κόσμου. Αν και ο Μπραμαγκούπτα είχε διαπρέψει τόσο μαθηματικά όσο και αστρονομία, του επιτεύγματα στα μαθηματικά ήταν που έμεινα στην ιστορία. Ο Brahmagupta γεννήθηκε το 628 μ.Χ. στο χωριό Bhillamala του βόρειου Γκουτζαράτ.

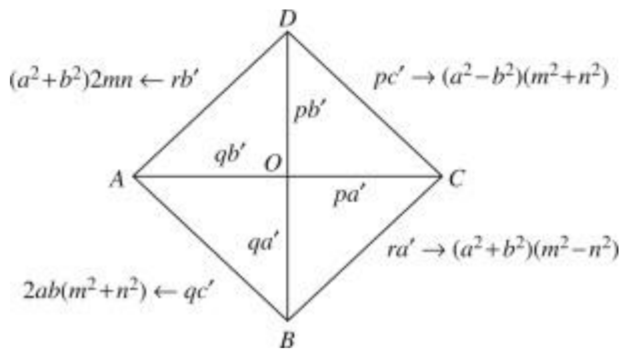
Ο Brahmagupta είχε εργαστεί στην αυλή του βασιλιά της δυναστείας Chapa Vyaghramukha. Αργότερα έγινε διευθυντής της Ujjain αστεροσκοπείο της Ινδίας. Ο Brahmagupta έγινε ο επικεφαλής του αστρονομικού παρατηρητηρίου στο Ujjain, το οποίο ήταν το σημαντικότερο μαθηματικό κέντρο της αρχαίας Ινδίας εκείνη την εποχή. Εξαιρετικοί μαθηματικοί όπως ο Varahamihira είχαν εργαστεί εκεί και είχαν δημιουργήσει μια ισχυρή σχολή μαθηματικής αστρονομίας. Πέθανε το 670 μ.Χ.

Ο Brahmagupta έχει γράψει δύο διάσημα βιβλία Brahma Sphuta Siddhanta και Khanda Khadyaka. Το πρώτο έχει 24 κεφάλαια και περιέχει 1008 προβλήματα που ασχολούνται με τα Μαθηματικά και την Αστρονομία. Στα πρώτα 10 κεφάλαια, έχει θέματα που ήταν γνωστά νωρίτερα σε αυτόν και τα υπόλοιπα κεφάλαια ασχολούνται με νέα θέματα που ανακάλυψε ο ίδιος. Το δωδέκατο κεφάλαιο του Brahma Sphuta Siddhanta είναι αφοσιωμένος στην αριθμητική, τη γεωμετρία και προβλήματα μέτρησης . Το δέκατο όγδοο κεφάλαιο που αποτελείται από 102 πρόβλημα που ασχολούνται με την Άλγεβρα. Τα θέματα που καλύπτονται είναι: τα μέσα γεωγραφικά μήκη των πλανητών, αληθινά γεωγραφικά μήκη των πλανητών, σεληνιακές εκλείψεις, ηλιακές εκλείψεις, συνδέσεις των πλανητών μεταξύ τους. και συνδέσεις των πλανητών με τα σταθερά αστέρια.

Το Khanda Khadyak χρησιμοποιήθηκε για πολλούς αιώνες ως πρακτικό εγχειρίδιο για αστρονομικούς υπολογισμούς. Εχει εννέα κεφάλαια που περιέχουν 194 προβλήματα. Υπάρχει ένα το δεύτερο μέρος του βιβλίου, που ονομάζεται Uttara-Khanda. Το Uttara-Khanda το οποίο έχει 5 κεφάλαια που περιλαμβάνουν 71 προβλήματα.

Παρακάτω θα δούμε μερικά από τα θέματα που ασχολήθηκε ο Brahmagupta στα βιβλία του και είναι οι λόγοι που τον θεωρούν ίσως το πιον σπουδαίο μαθηματικό της μεσαιωνικής περιόδου.

1. Ο Brahmagupta έδωσε μια γενική φόρμουλα για ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές από 2mn , $(m^2 - n^2)$ και $(m^2 + n^2)$ όπου m και n άνισοι ρητοί αριθμοί.

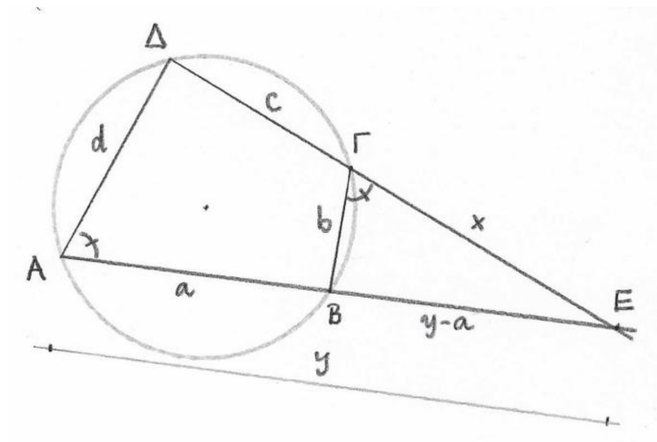


2. Ο Brahmagupta είχε ανακαλύψει ένα τύπο για τις πλευρές του ορθογώνιου τριγώνου εάν η μία πλευρά (διαφορετική από την υποτείνουσα) δίνεται και έχουμε την πλευρά α. Οπότε $\alpha\,, \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{m} - m\right), (\frac{\alpha^2}{m} + m)$

3. Η ανακάλυψη του για την περιοχή ενός τετράπλευρου που οριοθετείται από τέσσερις χορδές ενός κύκλου (κυκλικό ή χορδή τετράπλευρο), στην Πρόταση XII.21 του BSS καταλήγει στον τύπο $E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma(\tau-\delta)}$ όπου α,β,γ και δ η πλευρές του τετραπλεύρου και $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$

Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται "τύπος του Brahmagupta" γιατί τον αναφέρει σε ένα έργο του ο Ινδός μαθηματικός τον 7ο αιώνα. Όμως τον καταγράφει χωρίς απόδειξη και χωρίς να σημειώσει ότι ισχύει (μόνο) για εγγράψιμμα τετράπλευρα (νομίζει ότι ισχύει για όλα). Αργότερα ο συντοπίτης του Baskhara τον 12ο αιώνα σημειώνει το σφάλμα του Brahmagupta και δίνει απόδειξη. Στο μεσοδιάστημα των δύο Ινδών μαθηματικών, ο Άραβας μαθηματικός, φιλόσοφος και περιηγητής al Biruni που γνώριζε και την Ελληνική και την Ινδική Μαθηματική βιβλιογραφία αναφέρει ότι ο τύπος οφείλεται στον Αρχιμήδη. Γνωρίζουμε ότι ο Αρχιμήδης έγραψε σχετικό έργο, αλλά δεν έχει σωθεί. Παραθέτουμε την απόδειξη του τύπου Brahmagupta όπως έχει μέινει στην ιστορία :

Θεωρούμε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και συμβολίζουμε α=ΑΒ, β=ΒΓ ,γ=ΓΔ και δ=ΔΑ και $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$. Τότε $E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma(\tau-\delta)}$



Απόδειξη: Εάν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, ο τύπος ισχύει προφανώς.
Υποθέτουμε οτι ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο Ε, και θέτουμε x=ΕΓ, y= ΕΑ. Τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΓΒ είναι όμοια, με λόγο λ. Τοτε x=λy, β=λδ και $y - a = \lambda(\gamma + x)$.
Το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{E\Delta A} - E_{EB\Gamma}$.
Το τρίγωνο ΕΑΔ έχει μήκη πλευρών $|EA| = y$, $|A\Delta| = \delta, |E\Delta| = x + \gamma$ και θέτουμε

$$2\sigma = |EA| + |A\Delta| + |\Delta E| = y + \delta + x + \gamma$$

$$s_1 = \sigma = \frac{y+\delta+x+\gamma}{2},$$

$$s_2 = \sigma - y = \frac{\delta + \gamma + x - y}{2}$$

$$s_3 = \sigma - \delta = \frac{y + \gamma + x - \delta}{2}$$

$$s_4 = \sigma - x - \gamma = \frac{y + \delta - \gamma - x}{2}$$

Από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε $E_{EA\Delta} = \sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4}$ και $E_{EB\Gamma}\sqrt{(\lambda s_1)(\lambda s_2)(\lambda s_3)(\lambda s_4)}$

Άρα είναι $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{E\Delta A} - E_{EB\Gamma} = \sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} - \lambda^2\sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} = (1 - \lambda^2\sqrt{s_1 s_2 s_3 s_4} = \sqrt{(1-\lambda)^2 s_1 s_3 (1+\lambda)^2 s_2 s_4} = \sqrt{(s_1 - \lambda s_1)(s_2 - \lambda s_2)(s_3 - \lambda s_3)(s_4 - \lambda s_4)}$

Υπολογίζουμε $s_1 - \lambda s_1 = \frac{1}{2}\left(y + \delta + x + \gamma - x - \beta - (y - a)\right) = \frac{1}{2}(a + \gamma + \delta - \beta) = \tau - \beta$

Όμοια $s_2 + \lambda s_2 = \tau - \alpha$, $s_3 - \lambda s_3 = \tau - \delta$ και $s_4 + \lambda s_4 = \tau - \gamma$

Άρα $E = \sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma(\tau - \delta)}$

4. Ο Brahmagupta έκανε αντιληπτό, ότι τα μαθηματικά χρειάζονται έναν νέο αριθμό. Κατά συνέπεια, στο έργο του ήταν ο πρώτος που εισήγαγε μια από τις θεμελιώδεις ανακαλύψεις στα μαθηματικά την έννοια του αριθμού μηδέν. Ο Brahmagupta ονόμασε τον νέο αριθμό $\hat{s}\hat{u}nya$, που στα σανσκριτικά σημαίνει κενό. Το BrahmaSphutaSiddhanta είναι το πρώτο βιβλίο που αναφέρει

το μηδέν ως αριθμός, επομένως θεωρείται ως ο επιστήμονας που βρήκε το μηδέν.Θεωρείται και ο πρώτος μελετητής να μελετάεο τους αρνητικούς αριθμούς. Ο πρώτος μαθηματικός που κάνει αναφορά στα προβλήματα του αριθμητικούς κανόνες για μηδέν και αρνητικοί αριθμοί ως προς τις περιουσίες (θετικοί αριθμοί) και οφειλές (αρνητικές αριθμοί) :

- Ένα χρέος μείον το μηδέν είναι χρέος.
- Μια περιουσία μείον το μηδέν είναι μια περιουσία.
- Το μηδέν μείον το μηδέν είναι μηδέν.
- Ένα χρέος που αφαιρείται από το μηδέν είναι μια περιουσία.
- Μια περιουσία που αφαιρείται από το μηδέν είναι χρέος.
- Το γινόμενο του μηδέν πολλαπλασιασμένο με ένα χρέος ή περιουσία είναι μηδέν.
- Το γινόμενο του μηδενός πολλαπλασιασμένο με το μηδέν είναι μηδέν.
- Το προϊόν ή το πηλίκο δύο περιουσιών είναι μία περιουσία.
- Το προϊόν ή το πηλίκο δύο χρεών είναι μια περιουσία.
- Το γινόμενο ή το πηλίκο ενός χρέους και μιας περιουσίας είναι χρέος.
- Το προϊόν ή το πηλίκο μιας περιουσίας και ενός χρέους είναι χρέος.

Στη συνέχεια, ο Brahmagupta προσπάθησε να επεκτείνει την αριθμητική για να συμπεριλάβει τη διαίρεση με το μηδέν:

- Οι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί όταν διαιρούνται με το μηδέν είναι ένα κλάσμα του μηδενός ως παρονομαστής.
- Το μηδέν διαιρούμενο με αρνητικούς ή θετικούς αριθμούς είναι είτε μηδέν είτε εκφράζεται ως κλάσμα με αριθμητή το μηδέν και παρονομαστή την πεπερασμένη ποσότητα.
- Το μηδέν διαιρούμενο με το μηδέν είναι μηδέν.

Ο Brahmagupta προσπαθεί να κάνει τη διαίρεση $\frac{\nu}{0}$. Σίγουρα κάνει λάθος όταν στη συνέχεια ισχυρίζεται ότι το μηδέν διαιρούμενο με το μηδέν είναι μηδέν. Ωστόσο, είναι μια λαμπρή προσπάθεια επέκτασης της αριθμητικής σε αρνητικούς αριθμούς και μηδέν.

5. Ο Brahmagupta ισχυρίζεται ότι αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, με μήκη πλευρών α , β γ και δ τότε τα μήκη των διαγωνίων θα είναι

$$B\Delta = \sqrt{\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}} \text{ και } A\Gamma = \sqrt{\frac{(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}$$

Απόδειξη :

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{\theta} = A\hat{B}\Gamma$ χρησιμοποιώντας το νόμο συνημιτόνων παίρνουμε : $x^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\theta$.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\pi - \theta = A\hat{\Delta}\Gamma$ χρησιμοποιώντας το νόμο συνημιτόνων παίρνουμε: $x^2 = \gamma^2 + \delta^2 + 2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu\theta$

Αφού $\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$, έχουμε άλλη εξίσωση για το x^2.

Οπότε μπορούμε να βρούμε το $\sigma\upsilon\nu\theta$ διότι :

$-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\theta = x^2 - \alpha^2 - \beta^2$ και $2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu\theta = x^2 - \gamma^2 - \delta^2$ λύνοντας προς το $\sigma\upsilon\nu\theta$ παίρνουμε : $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x^2-\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{-x^2+\gamma^2+\delta^2}{2\gamma\delta}$

Θα πρέπει να καταλήξουμε ότι ;

$$\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)$$

Αναπτύσσοντας και τα δύο μέρη έχουμε :

$$\alpha\gamma^2 + \alpha\delta^2 + \beta^2\gamma + \beta^2\delta = \alpha^2\gamma\delta + \alpha\beta^2\delta + \alpha\gamma^2\delta + \alpha\beta\gamma^2$$

Αντικαθιστούμε το $\sigma\upsilon\nu\theta$ στην παράσταση για x^2 :

$x^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\frac{x^2-\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$ οπότε έχουμε :

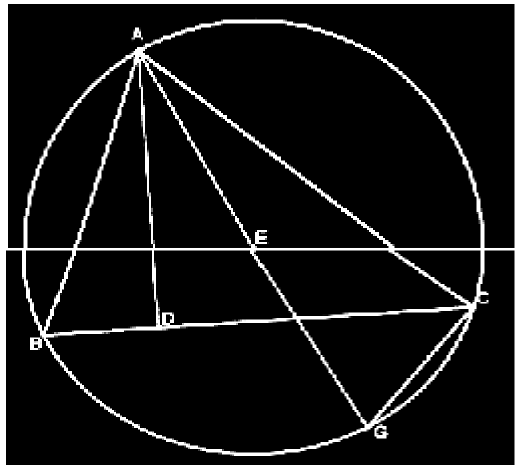
$x^2(\alpha\beta + \gamma\delta) = x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) + 2(\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2)$ άρα προκύπτει :

$$x^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}$$

Θα έχουμε $A\Gamma = \sqrt{\frac{(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}$ και $B\Delta = \sqrt{\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$

6. Είχε παρουσιάσει στο έργο του μια απλή μέθοδο να κατασκευάζει κυκλικά τετράπλευρα με ακέραιο πλευρές, ακέραιες διαγώνιες και ακέραιο εμβαδόν.

7. Το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο της περιμέτρου του επί το ύψος της τρίτης πλευράς.



Όπου έχουμε $AB \cdot AC = AD \cdot AG$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στο *Brahmasphutasiddhanta* έδωσε αξιοσημείωτους τύπους για το εμβαδόν ενός κυκλικού τετράπλευρου και για τα μήκη των διαγωνίων ως προς τις πλευρές. Το μόνο συζητήσιμο σημείο εδώ είναι ότι ο Brahmagupta δεν δηλώνει ότι οι τύποι ισχύουν μόνο για τα κυκλικά τετράπλευρα, επομένως ορισμένοι ιστορικοί ισχυρίζονται ότι είναι λάθος ενώ άλλοι ισχυρίζονται ότι εννοούσε σαφώς ότι οι κανόνες ισχύουν μόνο για τα κυκλικά τετράπλευρα.

8. Η πιο αξιοσημείωτη συμβολή του Brahmagupta στην άλγεβρα είναι η λύση του δεύτερης τάξης απροσδιόριστη εξίσωση $Nx^2 + 1 = y^2$. Για δεδομένο σταθερό ακέραιο N, το πρόβλημα είναι να βρούμε τις τιμές των x και y σε ακέραιους αριθμούς, ικανοποιώντας την εξίσωση. Για παράδειγμα λύνοντας $8x^2 + 1 = y^2$ είχε βρεί λύσεις τις τιμές των x και y ως $(1,3), (6,17), (35,99), (204, 577)$ και άλλους . Η λύση αυτού του τύπου εξίσωσης την έχουμε ονομάσει στην Ευρώπη Pells με τη μόνη διαφορά πως λύθηκες 1000 σχεδόν χρόνια αργότερα τον 17 αιώνα χωρίς να γνωρίζουμε την ανακάλυψη της στην Ινδία. Ο Brahmagupta είχε ονομάσει την εξίσωση ως Varga Prakrti.

Ο Brahmagupta συνέχισε δίνοντας μια αναδρομική συνάρτηση για την παραγωγή λύσεων ορισμένων περιπτώσεων των Διοφαντικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού όπως $Nx^2 + 1 = y^2$. Ο αλγόριθμος του ήταν γνωστός ως ο 'πολτοποιητής' καθώς σπάει τους αριθμούς σε μικρότερα κομμάτια. Το κλειδί για την λύση του ήταν η ταυτότητα:

$$({x_1}^2 - N{y_1}^2)({x_2}^2 - N{y_2}^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

η οποία είναι μια γενίκευση της ταυτότητας που ανακαλύφθηκε από τον Διόφαντο,

$$({x_1}^2 - {y_1}^2)({x_2}^2 - {y_2}^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του καθώς και το γεγονός ότι τα(x_1, y_1) και $(x_2\,, y_2)$ είναι λύσεις στις εξισώσεις $x^2 - Ny^2 = \kappa_1$ και $x^2 - Ny^2 = \kappa_2$ αντίστοιχα, τότε $(x_1x_2 + Ny_1y_2\,, x_1y_2 + x_2y_1)$ είναι μία λυση στο $x^2 - Ny^2 = \kappa_1\kappa_2$ μπόρεσε και βρήκε ολοκληρωμένες λύσεις στην εξίσωση το Pell μέσα από μια σειρά εξισώσεων της μορφής $x^2 - Ny^2 = \kappa_i$. Δυστυχώς, ο Brahmagupta δεν μπόρεσε να εφαρμόσει τη λύση αυτή ενιαία για όλες τις πιθανές τιμές του *N*, αλλά μπόρεσε μόνο να δείξει πως αν το $x^2 - Ny^2 = \kappa$ έχει μια ακέραια λύση για το $\kappa = \pm 1\,, \pm 2\,, \pm 4$ τότε το $x^2 - Ny^2 = 1$ έχει μία λύση. Η λύση της γενικής εξίσωσης του Pell λύθηκε κατόπιν από τον Baskhara το 1150.

9. Είναι ο πρώτος μαθηματικός που ανακάλυψε μία μέθοδο για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών. Ο τύπος παρεμβολής του Brahmagupta είναι ένας τύπος πολυωνυμικής παρεμβολής δεύτερης τάξης που αναπτύχθηκε από τον Ινδό μαθηματικό. Το σανσκριτικό δίστιχο που περιγράφει τον τύπο βρίσκεται στο συμπληρωματικό μέρος του Khandakadyaka, ένα έργο του Brahmagupta που ολοκληρώθηκε το 665 Κ.Χ. Το ίδιο δίστιχο εμφανίζεται στο παλαιότερο Dhyana-graha-adhikara του Μπραμαγκούπτα , το οποίο πιθανότατα γράφτηκε «κοντά στις αρχές του δεύτερου τετάρτου του 7ου αιώνα Κ.Χ., αν όχι νωρίτερα». Ο Brahmagupta ήταν ένας από τους πρώτους που περιέγραψε και χρησιμοποίησε έναν τύπο παρεμβολής χρησιμοποιώντας διαφορές δεύτερης τάξης. Αυτός ο είναι ισοδύναμος με τον επαναληπτικό τύπο του Newton-Stirling με διαφορά σχεδόν χίλια χρόνια πριν από την εκ νέου ανακάλυψη του δημοφιλής τύπου. Σε αυτό το δεύτερο έργο του Brahmagupta το Khanda Khadyaka είναι ο τύπος παρεμβολής που χρησιμοποιεί για να υπολογίσει τις τιμές των ημιτόνων.

x	x_2	……	x_r	x_{r+1}	x_n
Διαφορά	D_1	…….	D_r	D_{r+1}	D_n

Οι μαθηματικοί πριν από τον Brahmagupta χρησιμοποιούσαν έναν απλό τύπο γραμμικής παρεμβολής. Ο τύπος γραμμικής παρεμβολής για τον υπολογισμό της $f(a)$ είναι:

$f(a) = f_r + tD_r$, όπου $t = \frac{a - x_r}{h}$

Για τον υπολογισμό του $f(a)$, ο Brahmagupta αντικαθιστά *το* D_r με μια άλλη έκφραση που δίνει πιο ακριβείς τιμές και η οποία ισοδυναμεί με τη χρήση ενός τύπου παρεμβολής δεύτερης τάξης. Στην ορολογία του Brahmagupta, η διαφορά D_r είναι το *gatakhanda* , που σημαίνει *προηγούμενη διαφορά* ή η διαφορά που διασταυρώθηκε, η διαφορά D_{r+1}είναι η *bhogyakhanda* που είναι η *διαφορά που δεν έχει έρθει ακόμη* . *Vikala* είναι το ποσό σε λεπτά με το οποίο έχει καλυφθεί το διάστημα στο σημείο όπου θέλουμε να κάνουμε παρεμβολή.

Στις παρούσες σημειώσεις είναι $a - x_r$ Η νέα έκφραση που αντικαθιστά *το* $f_{r+1} - f_r$ $_r$ ονομάζεται *sphuta-bhogyakhanda* .

Η περιγραφή του *sphuta-bhogyakhanda* περιέχεται στο ακόλουθο σανσκριτικό δίστιχο (*Dhyana-Graha-Upadesa-Adhyaya, 17· Khandaka Khadyaka, IX, 8*):

गत भोग्य खण्डकान्तर दल विकल वधात् शतैर्नवभिराप्तैः ।
तद्युति दलं युतोनं भोग्यादूनाधिकं भोग्यम् ।।

Αυτό έχει μεταφραστεί χρησιμοποιώντας το σχόλιο του Bhattolpala [12] (10ος αιώνας) ως εξής:

Πολλαπλασιάστε το *vikala* με το μισό της διαφοράς του *gatakhanda* και του *bhogyakhanda* και διαιρέστε το γινόμενο με το 900. Προσθέστε το αποτέλεσμα στο μισό άθροισμα του *gatakhanda* και του *bhogyakhanda* εάν το μισό άθροισμά τους είναι μικρότερο από το *bhogyakhanda* , αφαιρέστε εάν είναι μεγαλύτερο. (Το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση είναι *sphuta-bhogyakhanda* η σωστή διαφορά πίνακα). Αυτός ο τύπος δηλώθηκε αρχικά για τον υπολογισμό των τιμών της συνάρτησης ημιτόνου για την οποία το κοινό διάστημα στον υποκείμενο βασικό πίνακα ήταν 900 λεπτά ή 15 μοίρες. Άρα η αναφορά στο 900 είναι στην πραγματικότητα αναφορά στο κοινό διάστημα *h* .

Η μέθοδος του Brahmagupta για τον υπολογισμό του *shutabhogyakhanda* μπορεί να διατυπωθεί με σύγχρονο συμβολισμό ως εξής:

sphuta-bhogyakhanda= $\frac{D_r + D_{r-1}}{2} \pm t \frac{|D_r - D_{r-1}|}{2}$

Το σύμβολο $\pm$ πρέπει να λαμβάνεται σύμφωνα με το εάν $\frac{1}{2}(D_r + D_{r+1})$ είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το D_{r+1} ή ισοδύναμα εάν $D_r < D_{r+1}$ ή $D_r > D_{r+1}$ Η έκφραση του Brahmagupta μπορεί να τεθεί με την ακόλουθη μορφή :

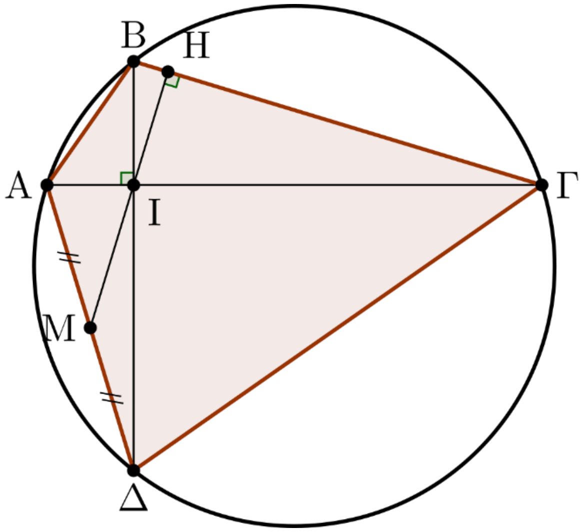
sphuta-bhogyakhanda= $\frac{D_r + D_{r-1}}{2} + t\ \frac{D_r - D_{r-1}}{2}$

Αυτός ο συντελεστής διόρθωσης αποδίδει την ακόλουθη κατά προσέγγιση τιμή για *το* $f(a)$:

$$f(a) = f_r + t \cdot sphuta - bhogyakhanda = f_r + t \frac{D_r + D_{r-1}}{2} + t^2\ \frac{D_r - D_{r-1}}{2}$$

Αυτός είναι ο τύπος παρεμβολής του Stirling που περικόπτεται στις διαφορές δεύτερης τάξης. Δεν είναι γνωστό πώς ο Brahmagupta έφτασε στον τύπο παρεμβολής του. Ο Brahmagupta έχει δώσει έναν ξεχωριστό τύπο για την περίπτωση όπου οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής δεν είναι ίσες μεταξύ τους.

10. Το θεώρημα Brahmagupta δηλώνει ότι σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ που οι κορυφές του ανήκουν σε ένα κύκλο και οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα στο σημείο Ι, ισχύει ότι η κάθετος από το Ι προς μία πλευρά διχοτομεί την απέναντι της. Στο παρακάτω σχήμα αν $H\Gamma \perp B\Gamma$ και Μ το σημείο τομής της προέκτασης της ΙΗ με τη ΒΓ τότε Μ είναι το μέσο της ΑΔ.



Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι Μ είναι το μέσο της ΑΔ. Αρά έχουμε ότι $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = x$ είναι ίσες ώς εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΒ. Ομοίως έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = y$ καθώς βαίνουν στο τόξο ΓΔ.Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΙΓ έχουμε $x + y = 90^o$ και επομένως από τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΙΗ και ΓΙΗ προκύπτει ότι $H\hat{I}\Gamma = x$ και $H\hat{I}B = y$.

Επίσης, ως κατακορυφήν γωνίες έχουμε $A\hat{I}M = H\hat{I}\Gamma = x$ και $M\hat{I}\Delta = H\hat{I}B = y$. Συνεπώς, τα τρίγωνα ΑΜΙ και ΜΙΔ είναι ισοσκελή οπότε έχουμε ΑΜ=ΜΙ=ΜΔ.

Aryabhata

Ο Aryabhata είναι επίσης γνωστός ως Aryabhata I ή Aryabhata ο Πρεσβύτερος Γεννήθηκε το έτος 476 μ.Χ. στην Ashmaka ή Kusumapura της Ινδίας. Ήταν ο πρώτος Ινδός μαθηματικός του οποίου το έργο και η βιογραφία του αναγνωρίστηκαν από σύγχρονους μελετητές. Έγινε φήμη ως μαθηματικός κατά τη διάρκεια της δυναστείας Gupta. Οι κύριες συνεισφορές του Aryabhata στα μαθηματικά περιλαμβάνουν την προσέγγιση της τιμής του π, καθώς και άλλες εξισώσεις που σχετίζονται με την Άλγεβρα και την Τριγωνομετρία.

Ο Aryabhata I είναι ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς και αστρονόμους της αρχαίας Ινδίας. Κυριάρχησε στον αρχαίο ινδικό μαθηματικό κόσμο όπως ο Πλάτωνας στον ελληνικό φιλοσοφικό κόσμο. Ο Aryabhata I, γνωστός για τις καινοτομίες του στις αστρονομικές μεθόδους, ήταν υπεύθυνος για μια νέα σχολή αστρονομίας στην αρχαία Ινδία - τη Σχολή Aryabhata I. Όλο το πλήθος των μεταγενέστερων αστρονόμων τον αντιμετώπισε ως «acharya» (Δάσκαλος). Στη διάσημη σύνθεσή του "Aryabhatiyam", έχει παράσχει τον πίνακα για την τριγωνομετρική αναλογία, "Hindu Sine" (που ονομάζεται "Jya" στα σανσκριτικά) για οξείες γωνίες.Η ακρίβεια αυτών των τιμών είναι αξιοσημείωτη.

Ο Aryabhata συνέγραψε δύο σημαντικά έργα στα μαθηματικά και την αστρονομία.

Το «Aryabhatiya» είναι το πιο διάσημο και σημαντικό έργο του Aryabhata. Γράφτηκε το 499 μ.Χ., όταν ο Aryabhata ήταν μόλις 23 ετών. Ενώ σπούδαζε στο πανεπιστήμιο, ο Aryabhata δημιούργησε το *Aryabhatiya* , το σημαντικότερο έργο του. Γραμμένο σε ηλικία μόλις 23 ετών, κυμαίνεται ευρέως στα μαθηματικά και την αστρονομία, αλλά είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτο για τους υπολογισμούς του σχετικά με τις πλανητικές περιόδους. Η τιμή που δίνεται για τη διάρκεια της αστρονομικής ημέρας της Γης διαφέρει από την πραγματική τιμή κατά λίγα μόνο λεπτά.

Το βιβλίο αυτό είναι χωρισμένο σε τέσσερα τμήματα:

- **Gitikapada**: Περιέχει 13 στίχους και ασχολείται με τη χρονική διάρκεια των πλανητικών κινήσεων και την κατασκευή ημερολογίων.
- **Ganitapada**: Περιέχει 33 στίχους και ασχολείται με τα μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών πράξεων, των γεωμετρικών αριθμών, της τριγωνομετρίας και των εξισώσεων.
- **Kalakriyapada**: Περιέχει 25 στίχους και ασχολείται με το σύστημα του χρόνου, τις ημερομηνίες, τις εποχές και τις εκλείψεις.
- **Golapada**: Περιέχει 50 στίχους και ασχολείται με την αστρονομία, περιλαμβάνοντας θεωρίες για τη σφαιρικότητα της Γης, τις κινήσεις των πλανητών και την περιγραφή του ηλιοκεντρικού συστήματος.

Το «Arya-siddhanta» είναι ένα άλλο έργο που αποδίδεται στον Aryabhata , αν και δεν σώζεται εξ ολοκλήρου. Το έργο αυτό ασχολείται με τις αστρονομικές μετρήσεις, τις θεωρίες για την κίνηση των πλανητών, τους υπολογισμούς για τις εκλείψεις και άλλες αστρονομικές παρατηρήσεις. Χρησιμοποιήθηκε ευρέως από μετέπειτα Ινδούς αστρονόμους και διαδόθηκε στη Μέση Ανατολή μέσω των Αραβικών μεταφράσεων.

Η Aryabhatta Siddhanta διανεμήθηκε κυρίως στη βορειοδυτική Ινδία και είχε σημαντικό αντίκτυπο στην ανάπτυξη της ισλαμικής αστρονομίας κατά τη διάρκεια της δυναστείας

Ο υπολογισμός του π είναι πολύ πιο ακριβής από τους Έλληνες και είναι ευρέως αποδεκτός μεταξύ των μαθηματικών. Μια άλλη συμβολή ήταν η ιδέα πριν από το Galileo ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της και οι περιστροφές της που προκαλούν εποχιακές αλλαγές. Η Aryabhatta Siddhanta διανεμήθηκε κυρίως στη βορειοδυτική Ινδία και είχε σημαντικό αντίκτυπο στην ανάπτυξη της ισλαμικής αστρονομίας κατά τη διάρκεια της δυναστείας Ssnian του Ιράν (224–651).

Μερικά από τα περιεχόμενά του διασώθηκαν και γαλουχήθηκαν από τους Varahamihira (γύρω στο 550), Bhaskara I (περίπου 629), Brahmagupta (598–c.) και άλλους.

Είναι ένα από τα πρώτα αστρονομικά έργα που ορίζουν τα μεσάνυχτα ως αρχή κάθε μέρας.

Το έργο του Aryabhatiya ήταν ιδιαίτερα γνωστή στη Νότια Ινδία, όπου πολλοί μαθηματικοί δημοσίευσαν σχόλια την επόμενη χιλιετία. Το έργο είναι γραμμένο σε δίστιχα στίχων και αφορά την αστρονομία και τα μαθηματικά.

Το σωζόμενο κείμενο είναι το αριστούργημα της Aryabhata, η *Aryabhatiya* που είναι μια μικρή αστρονομική πραγματεία γραμμένη σε 118 στίχους που δίνει μια περίληψη των ινδουιστικών μαθηματικών μέχρι εκείνη την εποχή. Το μαθηματικό του τμήμα περιέχει 33 στίχους δίνοντας 66 μαθηματικούς κανόνες χωρίς απόδειξη.

Η Aryabhatiya περιέχει μια εισαγωγή 10 στίχων, ακολουθούμενη από μια ενότητα για τα μαθηματικά με, όπως μόλις αναφέραμε, 33 στίχους, στη συνέχεια μια ενότητα 25 στίχων για τον υπολογισμό του χρόνου και τα πλανητικά μοντέλα, με το τελευταίο τμήμα των 50 στίχων να αφορά τη σφαίρα και εκλείψεις.

Το μαθηματικό μέρος της *Aryabhatiya* καλύπτει την αριθμητική, την άλγεβρα, την επίπεδη τριγωνομετρία και τη σφαιρική τριγωνομετρία. Περιέχει επίσης συνεχόμενα κλάσματα, τετραγωνικές εξισώσεις, αθροίσματα σειρών ισχύος και έναν πίνακα ημιτόνων.

Αρχικά εξετάζουμε το σύστημα αναπαράστασης αριθμών που επινόησε και χρησιμοποίησε η Aryabhata στην *Aryabhatiya* . Αποτελείται από την παροχή αριθμητικών τιμών στα 33 σύμφωνα του ινδικού αλφαβήτου για να αντιπροσωπεύουν 1 , 2 , 3 , ... , 25 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 , 80 , 90 , 100 . Οι υψηλότεροι αριθμοί συμβολίζονται με αυτά τα σύμφωνα ακολουθούμενα από ένα φωνήεν για να ληφθούν 100 , 10000 , ... Στην πραγματικότητα το σύστημα επιτρέπει αριθμούς μέχρι 10^{18} 8να αναπαρασταθεί με αλφαβητική σημείωση.

Το σύστημα θέσης είναι ένα αριθμητικό σύστημα στο οποίο η θέση ενός ψηφίου μέσα σε έναν αριθμό καθορίζει την αξία του. Η ιδέα αυτή είναι θεμελιώδης για τη σύγχρονη αριθμητική και τα μαθηματικά γενικότερα. Ο Aryabhata χρησιμοποίησε ένα δεκαδικό σύστημα θέσης στα έργα του, το οποίο περιελάμβανε τη χρήση ενός συμβόλου για το μηδέν. Αν και ο Aryabhata δεν είναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε το μηδέν, η συμβολή του στην ανάπτυξη και τη διάδοση της έννοιας του μηδενός ήταν σημαντική. Στο έργο του «Aryabhatiya», ο Άρυαμπατα έκανε χρήση ενός συμβόλου για το μηδέν, το οποίο λειτουργούσε ως κενό σε ένα σύστημα θέσης, επιτρέποντας την αναπαράσταση μεγάλων αριθμών με ένα μικρό αριθμό συμβόλων. Αυτό αποτέλεσε ένα κρίσιμο βήμα στην εξέλιξη των μαθηματικών.

Ο Ifra υποστηρίζει ότι ο Aryabhata ήταν επίσης εξοικειωμένος με τα αριθμητικά σύμβολα και το σύστημα τοποαξίας. Χαρακτηριστικά αναφέρει: *«..είναι εξαιρετικά πιθανό ότι ο Aryabhata γνώριζε το σημάδι για το μηδέν και τους αριθμούς του συστήματος τοποαξίας. Αυτή η υπόθεση βασίζεται στα ακόλουθα δύο γεγονότα: πρώτον, η εφεύρεση του αλφαβητικού συστήματος μέτρησης του θα ήταν αδύνατη χωρίς το μηδέν ή το σύστημα τοποαξίας. Δεύτερον, πραγματοποιεί υπολογισμούς σε τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, οι οποίοι είναι αδύνατος, εάν οι εν λόγω αριθμοί δεν είναι γραμμένοι σύμφωνα με το σύστημα τοποαξίας και το μηδέν»*.

Στη συνέχεια εξετάζουμε εν συντομία κάποια άλγεβρα που περιέχεται στην Aryabhatiya. Αυτή η εργασία είναι η πρώτη που γνωρίζουμε και εξετάζει ακέραιες λύσεις σε εξισώσεις της $\beta y = ax + \gamma$ και $\beta y = ax - \gamma$, όπου α β και γ ακέραιοι. Το πρόβλημα προέκυψε από τη μελέτη του προβλήματος στην αστρονομία του προσδιορισμού των περιόδων των πλανητών. Η Aryabhata χρησιμοποιεί τη μέθοδο kuttaka για να λύσει προβλήματα αυτού του τύπου. Η μέθοδος kuttaka συνίστατο στη διάσπαση του προβλήματος σε νέα προβλήματα όπου οι συντελεστές γίνονταν όλο και μικρότεροι με κάθε βήμα. Η μέθοδος εδώ είναι ουσιαστικά η χρήση του Ευκλείδειου αλγορίθμου για την εύρεση του υψηλότερου κοινού παράγοντα του ένα σχετίζεται και με συνεχόμενα κλάσματα.

Ο Aryabhata επεξεργάστηκε επίσης μια τιμή για το π που ισοδυναμεί με 3,1416, πολύ κοντά στις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται ακόμα σήμερα. Χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή, μπόρεσε να υπολογίσει ότι η Γη είχε περιφέρεια 24.835 μίλια.

Ενώ εργαζόταν για τον υπολογισμό του π, είναι πιθανό ότι ο Aryabhata μπορεί επίσης να ανακάλυψε τον παραλογισμό αυτού του αριθμού. Το σχετικό κείμενο είναι ασαφές σε αυτό το σημείο, αλλά όντως καθιέρωσε την παράλογη φύση του π, κέρδισε τους πρώτους Ευρωπαίους μαθηματικούς που το έκαναν αυτό για πολλές εκατοντάδες χρόνια.

Ο Aryabhata έδωσε μια ακριβή προσέγγιση για το π. Έγραψε στην *Aryabhatiya* το ακόλουθο: «*Προσθέστε τέσσερα στα εκατό, πολλαπλασιάστε επί οκτώ και μετά προσθέστε εξήντα δύο χιλιάδες. το αποτέλεσμα είναι περίπου η περιφέρεια ενός κύκλου διαμέτρου είκοσι χιλιάδων. Με αυτόν τον κανόνα δίνεται η σχέση της περιφέρειας με τη διάμετρο».*

Αυτό δίνει $\pi = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$ η οποία είναι μια εκπληκτικά ακριβής τιμή. Στην πραγματικότητα $\pi = 3{,}141599265$, αν και η απόκτηση μιας τιμής με αυτή την ακρίβεια προκαλεί έκπληξη, είναι ίσως ακόμη πιο περίεργο το γεγονός ότι ο Aryabhata δεν χρησιμοποιεί την ακριβή του τιμή για το π, αλλά προτιμά να χρησιμοποιεί $\sqrt{10} = 3{,}1622$ στην πράξη. Ο Aryabhata δεν εξηγεί πώς βρήκε αυτήν την ακριβή τιμή, αλλά, για παράδειγμα, ο Ahma$d$[13] θεωρεί αυτήν την τιμή ως προσέγγιση στο μισό της περιμέτρου ενός κανονικού πολυγώνου 256 πλευρών εγγεγραμμένων στον μοναδιαίο κύκλο.

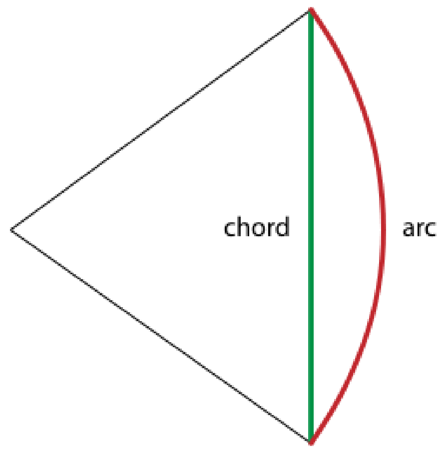
Ωστόσο, ο Bruin δείχνει ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν μπορεί να ληφθεί από τον διπλασιασμό του αριθμού των πλευρών.

Ένα άλλο ενδιαφέρον έγγραφο που συζητά αυτήν την ακριβή τιμή του π από τον Aryabhata είναι ο Jha γράφει:

«Η τιμή π του Aryabhata I είναι μια πολύ κοντινή προσέγγιση στη σύγχρονη τιμή και η πιο ακριβής μεταξύ αυτών των αρχαίων. Υπάρχουν λόγοι να πιστεύουμε ότι η Aryabhata επινόησε μια συγκεκριμένη μέθοδο για την εύρεση αυτής της τιμής. Αποδεικνύεται επαρκώς ότι το χρησιμοποίησε ο ίδιος ο Aryabhata, και αρκετοί μεταγενέστεροι Ινδοί μαθηματικοί και ακόμη και οι Άραβες το υιοθέτησαν. Η εικασία ότι η τιμή του π του Aryabhata είναι ελληνικής προέλευσης εξετάζεται κριτικά και βρέθηκε ότι είναι αβάσιμη. Ο Aryabhata ανακάλυψε αυτήν την τιμή ανεξάρτητα και επίσης συνειδητοποίησε ότι το π είναι ένας παράλογος αριθμός. Είχε το ινδικό υπόβαθρο, αναμφίβολα, αλλά διέπρεψε όλους τους προκατόχους του στην αξιολόγηση του π. Έτσι, η πίστωση της ανακάλυψης αυτής της ακριβούς τιμής του π μπορεί να αποδοθεί στον διάσημο μαθηματικό, Aryabhata I».

Οι αρχαίοι Ινδουιστές ήταν οι πρώτοι που συνειδητοποίησαν την ύπαρξη παράλογων αριθμών. Οι απλοί surd αριθμοί χρησιμοποιήθηκαν ελεύθερα στα «Sulva sutras». Aryabhata Ήμουν το πρώτο άτομο που έδωσε την προσέγγιση π =3,1416. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι ο Aryabhata I χρησιμοποιεί τη λέξη "Asana" (κατά προσέγγιση), υπονοώντας ότι η λογική τιμή του *π* που δόθηκε από αυτόν είναι μόνο κατά προσέγγιση. Αυτό το επίτευγμα της Aryabhata I τον πέμπτο αιώνα είναι πραγματικά αξιέπαινο.

Σε ένα ακόμη αντικείμενο που ασχολήθηκε είναι η τριγωνομετρία που περιέχεται στο έργο του. Ο ημιτονοειδής πίνακας του Āryabhata είναι ένα σύνολο είκοσι τεσσάρων αριθμών για τον υπολογισμό των μισών χορδών ενός συγκεκριμένου συνόλου τόξου κύκλου.



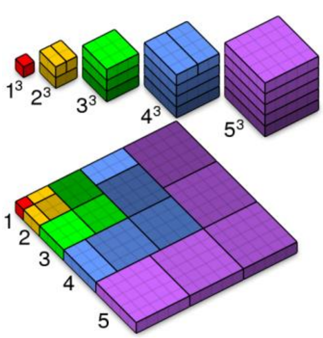
Το σύνολο των αριθμών εμφανίζεται στον στίχο 12 στο Κεφάλαιο 1 Dasagitika του Aryabhatiya. Δεν είναι πίνακας με τη σύγχρονη έννοια του μαθηματικού πίνακα. δηλαδή δεν είναι ένα σύνολο αριθμών διατεταγμένων σε σειρές και στήλες. Ο πίνακας του Āryabhaṭa δεν είναι επίσης ένα σύνολο τιμών της τριγωνομετρικής ημιτονοειδούς συνάρτησης με συμβατική έννοια. είναι ένας πίνακας των πρώτων διαφορών των τιμών των τριγωνομετρικών ημιτόνων που εκφράζονται σε λεπτά τόξου , και γι' αυτό ο πίνακας αναφέρεται επίσης ως *πίνακας ημιτονοειδών διαφορών του Āryabhaṭa*. Ο πίνακας του Āryabhaṭa ήταν ο πρώτος ημιτονικός πίνακας που κατασκευάστηκε ποτέ στην ιστορία των μαθηματικών. Ορισμένοι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν υποστηρίξει ότι ο ημιτονοειδής πίνακας που δίνεται στην Āryabhaṭiya ήταν μια προσαρμογή παλαιότερων τέτοιων πινάκων που κατασκευάστηκαν από μαθηματικούς και αστρονόμους της αρχαίας Ελλάδας.

Οι τιμές που κωδικοποιούνται στον στίχο του Āryabhaṭa μπορούν να αποκωδικοποιηθούν χρησιμοποιώντας το αριθμητικό σχήμα που εξηγείται στο Āryabhaṭīya και οι αποκωδικοποιημένοι αριθμοί παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα. Στον πίνακα, τα μέτρα γωνίας που σχετίζονται με τον ημιτονικό πίνακα του Āryabhaṭa παρατίθενται στη δεύτερη στήλη. Η τρίτη στήλη περιέχει τη λίστα με τους αριθμούς που περιέχονται στο σανσκριτικό στίχο που δίνεται παραπάνω σε γραφή Devanagari . Η επόμενη στήλη περιέχει αυτούς τους αριθμούς στους ινδουο-αραβικούς αριθμούς . Οι αριθμοί του Āryabhaṭa είναι οι πρώτες διαφορές στις τιμές των ημιτόνων. Η αντίστοιχη τιμή του ημιτόνου (ή ακριβέστερα, του *jya*) μπορεί να ληφθεί αθροίζοντας τις διαφορές μέχρι αυτή τη διαφορά. Έτσι, η τιμή του *jya* που αντιστοιχεί σε 18° 45′ είναι το άθροισμα 225 + 224 + 222 + 219 + 215 = 1105. Για την αξιολόγηση της ακρίβειας των υπολογισμών του Āryabhaṭa, οι σύγχρονες τιμές του *jya* δίνονται στην τελευταία στήλη του πίνακα.

Στην ινδική μαθηματική παράδοση, το ημίτονο (ή *jya*) μιας γωνίας δεν είναι λόγος αριθμών. Είναι το μήκος ενός συγκεκριμένου τμήματος γραμμής, μιας ορισμένης μισής χορδής. Η ακτίνα του βασικού κύκλου είναι βασική παράμετρος για την κατασκευή τέτοιων πινάκων. Ιστορικά, πολλοί πίνακες έχουν κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές για αυτήν την παράμετρο. Ο Āryabhaṭa έχει επιλέξει τον αριθμό 3438 ως τιμή της ακτίνας του βασικού κύκλου για τον υπολογισμό του ημιτόνου του. Το σκεπτικό της επιλογής αυτής της παραμέτρου είναι η ιδέα της μέτρησης της περιφέρειας ενός κύκλου σε μέτρα γωνίας. Στους αστρονομικούς υπολογισμούς οι αποστάσεις μετρώνται σε μοίρες , λεπτά , δευτερόλεπτα , κ.λπ. Σε αυτό το μέτρο, η περιφέρεια ενός κύκλου είναι 360° = (60 × 360) λεπτά = 21600 λεπτά. Η ακτίνα του κύκλου, το μέτρο της περιφέρειας του οποίου είναι 21600 λεπτά, είναι 21600 / 2π λεπτά. Υπολογίζοντας αυτό χρησιμοποιώντας την τιμή π = 3,1416 που είναι γνωστή στην Aryabhata λαμβάνεται η ακτίνα του κύκλου ως 3438 λεπτά περίπου. Ο ημιτονικός πίνακας του Āryabhaṭa βασίζεται σε αυτήν την τιμή για την ακτίνα του βασικού κύκλου. Δεν έχει εξακριβωθεί ακόμη ποιος είναι ο πρώτος που θα χρησιμοποιήσει αυτή την τιμή για την ακτίνα βάσης. Αλλά το Aryabhatiya είναι το παλαιότερο σωζόμενο κείμενο που περιέχει αναφορά σε αυτή τη βασική σταθερά.

Sl. No	Angle (A) (in degrees, arcminutes)	Value in Āryabhaṭa's numerical notation (in Devanagari)	Value in Āryabhaṭa's numerical notation (in ISO 15919 transliteration)	Value in Hindu-Arabic numerals	Āryabhaṭa's value of *jya* (A)	Modern value of *jya* (A) (3438 × sin (A))
1	03° 45′	मखि	makhi	225	225′	224.8560
2	07° 30′	भखि	bhakhi	224	449′	448.7490
3	11° 15′	फखि	phakhi	222	671′	670.7205
4	15° 00′	धखि	dhakhi	219	890′	889.8199
5	18° 45′	णखि	ṇakhi	215	1105′	1105.1089
6	22° 30′	ञखि	ñakhi	210	1315′	1315.6656
7	26° 15′	ङखि	ṅakhi	205	1520′	1520.5885
8	30° 00′	हस्झ	hasjha	199	1719′	1719.0000
9	33° 45′	स्ककि	skaki	191	1910′	1910.0505
10	37° 30′	किष्ग	kisga	183	2093′	2092.9218
11	41° 15′	श्घकि	śghaki	174	2267′	2266.8309
12	45° 00′	किघ्व	kighva	164	2431′	2431.0331
13	48° 45′	घ्लकि	ghlaki	154	2585′	2584.8253
14	52° 30′	किग्र	kigra	143	2728′	2727.5488
15	56° 15′	हक्य	hakya	131	2859′	2858.5925
16	60° 00′	धकि	dhaki	119	2978′	2977.3953
17	63° 45′	किच	kica	106	3084′	3083.4485
18	67° 30′	स्ग	sga	93	3177′	3176.2978
19	71° 15′	झश	jhaśa	79	3256′	3255.5458
20	75° 00′	ङ्व	ṅva	65	3321′	3320.8530
21	78° 45′	क्ल	kla	51	3372′	3371.9398
22	82° 30′	प्त	pta	37	3409′	3408.5874
23	86° 15′	फ	pha	22	3431′	3430.6390
24	90° 00′	छ	cha	7	3438′	3438.0000

Στο τομέα της Άλγεβρας στην *Aryabhatiya* , ο Aryabhata παρείχε κομψά αποτελέσματα για την άθροιση σειρών τετραγώνων και κύβων:



- $1^2 + 2^2 + \cdots \ldots \ldots . + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- $1^3+2^3+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n^3=(1+2+\cdots\ldots\ldots\ldots..+n)^2$

Σε σχέση με τη συμβολεί του στην αστρονομία ο ινδός μαθηματικός εργάστηκε: Ηλιοκεντρικό Μοντέλο: Ο πρότεινε Aryabhata ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της καθημερινά, κάτι που ήταν σημαντική απόκλιση από τα κυρίαρχα γεωκεντρικά μοντέλα.

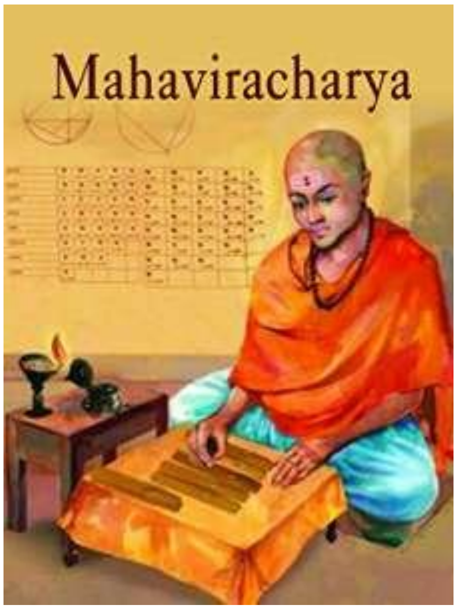
- **Εκλείψεις**: Εξήγησε τις σεληνιακές και ηλιακές εκλείψεις επιστημονικά, αποδίδοντάς τις στις σκιές που ρίχνουν η Γη και η Σελήνη.
- **Αστρονομικές Περίοδοι**: Υπολόγισε με ακρίβεια την αστρική περιστροφή (την περιστροφή της Γης σε σχέση με τα σταθερά άστρα) και το αστρικό έτος (τον χρόνο που απαιτείται για την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο σε σχέση με τα άστρα).
- **Πλανητικά Μοντέλα**: Περιέγραψε την κίνηση των πλανητών σε σχέση με τη Γη και υπολόγισε τις τροχιές τους.

Η έννοια του μηδενός και το δεκαδικό σύστημα ταξίδεψαν μέσω των Αράβων λογίων στη Μέση Ανατολή και αργότερα στην Ευρώπη, συμβάλλοντας στη μαθηματική πρόοδο του μεσαιωνικού και αναγεννησιακού κόσμου. Ο Aryabhata ήταν ένας πρωτοπόρος τόσο στα μαθηματικά όσο και στην αστρονομία, με τις καινοτόμες ιδέες και την προχωρημένη κατανόηση της εποχής του να έχουν διαρκή επιρροή.

Ο Aryabhata έκανε τον κόσμο να προσέξει την Ινδία, όσον αφορά την επιστημονική γνώση. Αμφισβήτησε και αντέκρουσε πολλές πεποιθήσεις που συνέβαιναν εκείνη την εποχή και μέσω υπολογισμών παρείχε στοιχεία για την αλήθεια. Υπάρχουν πολύ λίγοι επιστήμονες που πέτυχαν στη διάρκεια της ζωής τους ένα εξαιρετικό καθήκον εργασίας και ο Aryabhata ήταν ένας από αυτούς. Η Ινδία αναγνωρίζει τη συνεισφορά του. Το έργο του ήταν ευρέως δημοφιλές και εκτιμήθηκε στον ισλαμικό κόσμο, ιδιαίτερα οι αστρονομικές ανακαλύψεις του που μεταφράστηκαν στα αραβικά τον 8ο αιώνα. Ο πρώτος ινδικός δορυφόρος που στάλθηκε στο διάστημα πήρε το όνομά του ως φόρο τιμής. Ήταν ο πρώτος στην κλασική εποχή της Ινδίας που διέπρεψε ως μαθηματικός και αστρονόμος. Εκείνη την εποχή, χωρίς καμία προηγμένη τεχνολογία διαθέσιμη, το να μπορεί να εκτιμήσει και να προσεγγίσει τις ανακαλύψεις του ήταν πραγματικά αξιοσημείωτο.

Mahavira

Ο Mahavira (ή Mahaviracharya που σημαίνει Μαχαβίρα ο Δάσκαλος) ήταν της θρησκείας Jaina και ήταν εξοικειωμένος με τα μαθηματικά Jaina. Εργάστηκε στο Mysore στη νότια Ινδία όπου ήταν μέλος μιας μαθηματικής σχολής. Αν δεν γεννήθηκε στο Mysore τότε είναι πολύ πιθανό να γεννήθηκε κοντά σε αυτή την πόλη στην ίδια περιοχή της Ινδίας. Ουσιαστικά δεν έχουμε άλλα βιογραφικά στοιχεία, αν και μπορούμε να κερδίσουμε μόνο λίγο από την προσωπικότητά του από την αναγνώριση που δίνει στην εισαγωγή στο μοναδικό γνωστό του έργο, βλέπε παρακάτω. Ωστόσο, ο Jain αναφέρει άλλα έξι έργα τα οποία πιστώνει στον Mahavira και τονίζει την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα για τον προσδιορισμό του πλήρους καταλόγου των έργων του.



Το μόνο γνωστό βιβλίο του Mahavira είναι *η Ganita Sara Samgraha* , με ημερομηνία 850 μ.Χ., το οποίο σχεδιάστηκε ως ενημέρωση του βιβλίου του Brahmagupta . Ο Filliozat γράφει: «*Αυτό το βιβλίο ασχολείται με τη διδασκαλία του Brahmagupta αλλά περιέχει τόσο απλοποιήσεις όσο και πρόσθετες πληροφορίες. ... Αν και όπως όλα τα ινδικά στιχογραφημένα κείμενα, είναι εξαιρετικά συμπυκνωμένο, αυτό το έργο, από παιδαγωγική άποψη, έχει σημαντικό πλεονέκτημα έναντι των προηγούμενων κειμένων.»*.

Αποτελούνταν από εννέα κεφάλαια και περιλάμβανε όλες τις μαθηματικές γνώσεις της Ινδίας των μέσων του ένατου αιώνα.

Μας παρέχει το μεγαλύτερο μέρος της γνώσης που έχουμε για τα μαθηματικά της Jaina και μπορεί να θεωρηθεί ότι κατά κάποιο τρόπο παρέχει μια περιγραφή της δουλειάς εκείνων που ανέπτυξαν αυτά τα μαθηματικά. Υπήρχαν πολλοί Ινδοί μαθηματικοί πριν από την εποχή του Mahavira , αλλά, ίσως παραδόξως, το έργο τους στα μαθηματικά περιέχεται πάντα σε κείμενα που συζητούν άλλα θέματα όπως η αστρονομία. Η Ganita Sara Samgraha του Mahavira είναι το παλαιότερο ινδικό κείμενο που διαθέτουμε και το οποίο είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένο στα μαθηματικά.

Στην εισαγωγή του έργου ο Mahavira απέτισε φόρο τιμής στους μαθηματικούς των οποίων το έργο αποτέλεσε τη βάση του βιβλίου του. Αυτοί οι μαθηματικοί περιελάμβαναν τους Aryabhata I , Bhaskara I και Brahmagupta. Ο Mahavira γράφει:

«Με τη βοήθεια των καταξιωμένων αγίων σοφών, που είναι άξιοι να λατρεύονται από τους άρχοντες του κόσμου... Σταχυολογώ από τον μεγάλο ωκεανό της γνώσης των αριθμών λίγο από την ουσία του, με τον τρόπο που συλλέγονται πολύτιμοι λίθοι από Η θάλασσα, χρυσός από τον πέτρινο βράχο και το μαργαριτάρι από το κέλυφος του στρειδιού. και δίνω σύμφωνα με τη δύναμη της νοημοσύνης μου, τη Σάρα Σαμγκράχα, ένα μικρό έργο για την αριθμητική, που ωστόσο δεν είναι μικρή σε σημασία».

Τα εννέα κεφάλαια της *Ganita Sara Samgraha* είναι:

1. Ορολογία
2. Αριθμητικές πράξεις
3. Πράξεις που περιλαμβάνουν κλάσματα
4. Διάφορες πράξεις
5. Πράξεις που περιλαμβάνουν τον κανόνα των τριών
6. Μικτές λειτουργίες
7. Πράξεις που σχετίζονται με τους υπολογισμούς των περιοχών
8. Εργασίες που σχετίζονται με ανασκαφές
9. Λειτουργίες που σχετίζονται με σκιές

Σε όλη την εργασία χρησιμοποιείται ένα σύστημα τοποαξίας με εννέα αριθμούς ή μερικές φορές χρησιμοποιούνται σανσκριτικά αριθμητικά σύμβολα. Ενδιαφέρον στο Κεφάλαιο 1 σχετικά με την ανάπτυξη ενός συστήματος αριθμών θέσης-αξίας είναι η περιγραφή του αριθμού 12345654321 από τον Mahavira που λαμβάνει μετά από έναν υπολογισμό. Περιγράφει τον αριθμό ως: ξεκινώντας με ένα το οποίο στη συνέχεια μεγαλώνει μέχρι να φτάσει το έξι, μετά μειώνεται με αντίστροφη σειρά.

Μεταξύ των θεμάτων που συζητούσε ο Mahavira στο έργο του ήταν οι πράξεις με κλάσματα συμπεριλαμβανομένων μεθόδων για την αποσύνθεση ακεραίων και κλασμάτων σε κλάσματα μονάδας. Για παράδειγμα :

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$$

Εξέτασε μεθόδους τετραγωνισμού αριθμών που, αν και αποτελούν ειδική περίπτωση πολλαπλασιασμού δύο αριθμών, μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας ειδικές μεθόδους. Η Gaṇita-sāra-saṅgraha του Mahāvīra έδωσε συστηματικούς κανόνες για την

έκφραση ενός κλάσματος ως το άθροισμα των μοναδιαίων κλασμάτων .[3] Αυτό ακολουθεί τη χρήση μοναδιαίων κλασμάτων στα ινδικά μαθηματικά στη βεδική περίοδο, και δίνει μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$ ισοδύναμη με $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 3\cdot 4}$.[3]

Στο Gaṇita-sāra-saṅgraha (GSS), η δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου για την αριθμητική ονομάζεται kalā-savarṇa-vyavahāra (σ.σ. «η λειτουργία της αναγωγής των κλασμάτων»). Σε αυτό, η ενότητα bhāgajāti (στίχοι 55–98) δίνει κανόνες για τα ακόλουθα:

- Για να εκφράσετε το 1 ως άθροισμα *n* μοναδιαίων κλασμάτων (GSS *kalāsavarṇa* 75, παραδείγματα στο 76): Όταν το αποτέλεσμα είναι ένα, οι παρονομαστές των μεγεθών που έχουν έναν αριθμητή είναι [οι αριθμοί] που αρχίζουν με ένα και πολλαπλασιάζονται επί τρία, με τη σειρά. Το πρώτο και το τελευταίο πολλαπλασιάζονται επί δύο και δύο τρίτα (αντίστοιχα). Δηλαδή : $1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\ldots\ldots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{\frac{2}{3}\cdot 3^{n-1}}$
- Για να εκφράσετε το 1 ως άθροισμα περιττού αριθμού μονάδων κλασμάτων (GSS kalāsavarṇa 77): $1=\frac{1}{2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}+\cdots\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot\frac{1}{2}}+\frac{1}{2n\cdot\frac{1}{2}}$
- Για να εκφράσετε ένα μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{q}$ ως το άθροισμα n άλλων κλασμάτων με δεδομένους αριθμητές $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$ (GSS kalāsavarṇa 78, παραδείγματα στο 79) :
- $\frac{1}{q}=\frac{a_1}{q(q+a_1)}+\frac{a_2}{(q+a_1)(q+a_1+a_2)}+\cdots\ldots\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}}{(q+a_1+\cdots\ldots+a_{n-2})(q+a_1+\cdots\ldots+a_{n-1})}+\frac{a_n}{a_n(q+a_1+\cdots\ldots+a_{n-1})}$
- Για να εκφράσετε οποιοδήποτε κλάσμα $\frac{p}{q}$ ως άθροισμα μοναδιαίων κλασμάτων (GSS kalāsavarṇa 80, παραδείγματα στο 81):

  Επιλέγει έναν ακέραιο i τέτοιο ώστε $\frac{q+i}{p}$ είναι ακέραιος r, τότε καταλήγει

  $\frac{p}{q}=\frac{1}{r}+\frac{i}{r\cdot q}$

  και επαναλάβετε η διαδικασία για τον δεύτερο όρο, αναδρομικά. (Σημειώνουμε ότι το i επιλέγεται πάντα ως ο μικρότερος τέτοιος ακέραιος αριθμός).

- Για να εκφράσει ένα μοναδιαίο κλάσμα ως άθροισμα δύο άλλων μοναδιαίων κλασμάτων (GSS kalāsavarṇa 85, παράδειγμα στο 86): $\frac{1}{n} = \frac{1}{p \cdot n} + \frac{1}{\frac{p \cdot n}{n-1}}$ όπου p έχουμε τέτοιο ώστε $\frac{p \cdot n}{n-1}$ είναι ένας ακέραιος αριθμός (για τον οποίο $\frac{p \cdot n}{n-1}$ πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $n-1$).

Επίσης ακέραιες λύσεις απροσδιόριστης εξίσωσης πρώτου βαθμού με μια μέθοδο που ονομάζεται kuttaka. Η μέθοδος kuttaka βασίζεται στη χρήση του ευκλείδειου αλγόριθμου, αλλά η μέθοδος επίλυσης μοιάζει επίσης με τη συνεχιζόμενη διαδικασία κλασμάτων του Euler που δόθηκε το 1764 . Το έργο kuttaka, που εμφανίζεται σε πολλές από τις πραγματείες των Ινδών μαθηματικών της κλασικής περιόδου, έχει λάβει τη γενικότερη έννοια της «άλγεβρας».

Συνεισφορές του Mahāvīra στα Μαθηματικά ήταν :

1. Εργάστηκε στα ίδια θέματα στα οποία εργάστηκαν οι Aryabhata και Brahmagupta, και επέκτεινε το θέμα.
2. Διαχώρισε την αστρολογία από τα μαθηματικά.
3. Επινόησε τους όρους ισόπλευρο και ισοσκελές τρίγωνο, ρόμβος, κύκλος και ημικύκλιο.
4. Είπε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει τετραγωνική ρίζα για αρνητικό ακέραιο.
5. Επινόησε έναν τύπο που υπολόγιζε το εμβαδόν και τις περιμέτρους των ελλείψεων.Ο μόνος Ινδός μαθηματικός που αναφέρθηκε στην έλλειψη, πράγματι οι Ινδοί μαθηματικοί δεν μελέτησαν κωνικές τομές ή οτιδήποτε προς αυτήν την κατεύθυνση. Έδωσε λανθασμένη ταυτότητα για την περιοχή της έλλειψη.
6. Βρήκε μεθόδους για να υπολογίσει το τετράγωνο ενός αριθμού και τις κυβικές ρίζες ενός αριθμού.
7. Παρήγαγε τις αλγεβρικές ταυτότητες όπως :
$$\alpha^3 = \alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + \beta^2(\alpha-\beta) + \beta^3$$
Ο Mahavira ανακάλυψε αλγεβρικές ταυτότητες: μια ταυτότητα είναι μια μαθηματική έκφραση τύπου ισότητας που περιέχει ορισμένες μεταβλητές, ικανοποιημένες για οποιαδήποτε τιμή των μεταβλητών.

8. Εξήγαγε το γενικό τύπο συνδυασμών για $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots r}$

Ένα παράδειγμα ενός προβλήματος που δίνεται στο Ganita Sara Samgraha που οδηγεί σε απροσδιόριστες γραμμικές εξισώσεις είναι οι εξής:

Τρεις έμποροι βρίσκουν ένα πορτοφόλι στο δρόμο. Ένας έμπορος λέει "Αν κρατήσω το πορτοφόλι, θα έχω διπλάσια χρήματα από εσάς οι δύο μαζί". «Δώσε μου το πορτοφόλι και θα έχω τριπλάσιο», είπε ο δεύτερος έμπορος. Ο τρίτος έμπορος είπε: «Θα είμαι πολύ καλύτερα από οποιονδήποτε από τους δύο, αν κρατήσω το πορτοφόλι, θα έχω πέντε φορές περισσότερα από εσάς οι δύο μαζί». Πόσα χρήματα υπάρχουν στο πορτοφόλι; Πόσα χρήματα έχει ο κάθε

Αν ο πρώτος έμπορος έχει x , το δεύτερο y και ο τρίτος z και Π είναι το ποσό στο πορτοφόλι τότε:

$$\Pi + x = 2(y + z), \qquad \Pi + y = 3(x + z), \qquad \Pi + z = 5(x + y)$$

Δεν υπάρχει μοναδική λύση, αλλά η μικρότερη λύση σε θετικούς ακέραιους είναι $\Pi = 15, x = 1, y = 3, z = 5$. Οποιαδήποτε λύση σε θετικούς ακέραιους αριθμούς είναι πολλαπλάσιο αυτής της λύσης όπως ισχυρίζεται ο Mahavira.

Ο Mahavira έδωσε ειδικούς κανόνες για τη χρήση μεταθέσεων και συνδυασμών που ήταν ένα θέμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος στα μαθηματικά Jaina. Περιέγραψε επίσης μια διαδικασία για τον υπολογισμό του όγκου μιας σφαίρας και μια για τον υπολογισμό της κυβικής ρίζας ενός αριθμού.

Εξέθεσε τα ίδια θέματα για τα οποία υποστήριξαν οι Aryabhata και Brahmagupta. αλλά τα εξέφρασε πιο καθαρά. Το έργο του είναι μια εξαιρετικά συγχρονισμένη προσέγγιση της άλγεβρας και η έμφαση σε μεγάλο μέρος του κειμένου του είναι στην ανάπτυξη των τεχνικών που είναι απαραίτητες για την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Είναι ιδιαίτερα σεβαστός μεταξύ των Ινδών μαθηματικών, λόγω της καθιέρωσής του ορολογίας για έννοιες όπως ισόπλευρες. και ισοσκελές τρίγωνο,ρόμβος, κύκλος και ημικύκλιο. Η φήμη του Mahāvīra εξαπλώθηκε σε όλη τη Νότια Ινδία και τα βιβλία του αποδείχθηκαν εμπνευσμένα για άλλους μαθηματικούς στη Νότια Ινδία. . Το έργο του Μαχαβίραθα μπορούσε να επικριθεί ότι δεν είναι παρά ένας εκτενής σχολιασμός των έργων Jaina και του έργου των Aryabhata , Brahmagupta (και Bhaskara I) .

Ολοκληρώνοντας αυτή το κεφάλαιο, αναδεικνύεται η σημαντική συνεισφορά των Ινδών μαθηματικών της μεσαιωνικής περιόδου στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και γνώσης. Οι ανακαλύψεις και οι θεωρίες τους δεν επηρέασαν μόνο την τοπική επιστημονική κοινότητα, αλλά άφησαν ανεξίτηλο το αποτύπωμά τους στην παγκόσμια μαθηματική παράδοση.

Κατά τη διάρκεια αυτής της μελέτης, εξετάσαμε τη δουλειά σπουδαίων μαθηματικών όπως ο Aryabhata, ο Brahmagupta, και ο Mahavira . Αναλύσαμε τις καινοτομίες τους, όπως το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, η χρήση του μηδενός, και οι προηγμένες αλγεβρικές και τριγωνομετρικές μέθοδοι. Επιπλέον, διερευνήσαμε τις ιστορικές και κοινωνικές συνθήκες που επέτρεψαν την άνθιση της μαθηματικής επιστήμης στην Ινδία και τις επιρροές που δέχθηκαν και άσκησαν σε άλλους πολιτισμούς.

Η μελέτη αυτή υπογραμμίζει τη διαχρονική αξία των μαθηματικών επιτευγμάτων της μεσαιωνικής Ινδίας, που αποτελούν θεμέλιο για πολλές σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες και εφαρμογές. Η συμβολή των Ινδών μαθηματικών στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα αποδεικνύει ότι η επιστημονική γνώση είναι καρπός συλλογικής προσπάθειας και διαπολιτισμικής συνεργασίας.

Συμπερασματικά, η έρευνα αυτή προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση της μαθηματικής κληρονομιάς της μεσαιωνικής Ινδίας και αναδεικνύει τη σημασία της στην ιστορία των μαθηματικών. Ελπίζουμε ότι η εργασία αυτή θα εμπνεύσει περαιτέρω μελέτες και θα συμβάλει στην αναγνώριση της αξίας των μαθηματικών παραδόσεων από διαφορετικούς πολιτισμούς, προωθώντας την εκτίμηση και την κατανόηση της παγκόσμιας επιστημονικής κληρονομιάς.

Ισλαμικός κόσμος

Η μεσαιωνική περίοδος στον ισλαμικό κόσμο χαρακτηρίζεται από μια εκπληκτική άνθηση των επιστημών και των μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια αυτής της χρυσής εποχής, από τον 8ο έως τον 14ο αιώνα, οι Ισλαμικοί λόγιοι ανέπτυξαν και διεύρυναν τις μαθηματικές γνώσεις με τρόπους που είχαν βαθύ και διαρκή αντίκτυπο στην παγκόσμια επιστήμη.

Οι μαθηματικοί του ισλαμικού κόσμου, όπως ο Al-Khwarizmi, ο Al-Tusi και πολλοί άλλοι, ανέπτυξαν σημαντικές καινοτομίες στην άλγεβρα, τη γεωμετρία, την τριγωνομετρία και την αριθμητική. Οι προσπάθειές τους δεν περιορίστηκαν απλώς στη διατήρηση των γνώσεων από τους αρχαίους Έλληνες και Ινδούς, αλλά προχώρησαν σε πρωτοποριακές ανακαλύψεις και μεθόδους που επηρέασαν βαθιά την αναγέννηση των μαθηματικών στη Δύση.

Αυτή η διπλωματική εργασία στοχεύει να εξετάσει την εξέλιξη των μαθηματικών στον μεσαιωνικό ισλαμικό κόσμο, αναλύοντας τις βασικές ανακαλύψεις και τους κύριους συντελεστές αυτής της περιόδου. Μέσα από τη μελέτη των έργων τους και των συνθηκών που οδήγησαν στην άνθηση της μαθηματικής σκέψης, θα αναδειχθεί η σημασία της συμβολής τους στην παγκόσμια επιστημονική κληρονομιά.

Η παρούσα έρευνα θα εστιάσει στη μετάφραση και τη διάδοση των αρχαίων ελληνικών και ινδικών μαθηματικών κειμένων, στις πρωτοποριακές μεθόδους που ανέπτυξαν οι μουσουλμάνοι μαθηματικοί, καθώς και στις πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών στην αστρονομία, την αρχιτεκτονική, και την εμπορική δραστηριότητα. Επίσης, θα εξεταστεί η επίδραση που είχαν οι μαθηματικές εξελίξεις του ισλαμικού κόσμου στην αναγέννηση των μαθηματικών στη Δύση.

Ελπίζουμε ότι αυτή η διπλωματική εργασία θα προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση της σημαντικής κληρονομιάς των μαθηματικών του ισλαμικού κόσμου και θα συμβάλει στην εκτίμηση της διαχρονικής αξίας των μαθηματικών ανακαλύψεων αυτής της περιόδου. Μέσα από αυτή την προσέγγιση, στοχεύουμε να αναδείξουμε τον κρίσιμο ρόλο που έπαιξαν οι Ισλαμικοί λόγιοι στην εξέλιξη των μαθηματικών και στη διαμόρφωση της σύγχρονης επιστημονικής σκέψης.

Al-Khwarizmi

Ο Πέρσης μαθηματικός Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, μερικές φορές γνωστός ως ο πατέρας της άλγεβρας, ήταν ένας από τους στοχαστές με τη μεγαλύτερη επιρροή όλων των εποχών. Έφερε επανάσταση στην άλγεβρα με τα θεμελιώδη έργα του στα μαθηματικά, την αστρονομία και τη γεωγραφία έχουν αποδειχθεί ο θεμέλιος λίθος για αιώνες προόδου σε όλο τον κόσμο. Ο Al-Khwarizmi γεννήθηκε περίπου το 780 μ.Χ., και παρόλο που η γενέτειρά του δεν είναι γνωστή με βεβαιότητα.Ο Al-Khwārizmī εργάστηκε και στη συνέχεια έγινε διευθυντής του House of Wisdom στη Βαγδάτη, στο σύγχρονο Ιράκ, το οποίο ήταν η πρωτεύουσα της ισλαμικής αυτοκρατορίας εκείνη την εποχή. Σε αυτό το κέντρο επιστημονικής έρευνας και διδασκαλίας, επέβλεψε τη μετάφραση πολλών σημαντικών ελληνικών και ινδικών μαθηματικών και αστρονομικών έργων στα αραβικά. Παρήγαγε επίσης πρωτότυπο έργο που είχε διαρκή επιρροή στην πρόοδο των μουσουλμανικών και ευρωπαϊκών μαθηματικών.

Οι όροι άλγεβρα και αλγόριθμος προέρχονται από το όνομα του al-Khwārizmī και το έργο του. Η λατινοποίηση του ονόματός του ως Algoritmi οδήγησε στον όρο «αλγόριθμος». Και η λέξη άλγεβρα προέρχεται από το al-jabr στον τίτλο ενός βιβλίου-ορόσημο που έγραψε περίπου το 820 μ.Χ., al-Kitāb al-Mukhtaṣar fī Ḥisāb al-Jabr wal-Muqābalah, ή The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing. Το βιβλίο εισήγαγε θεμελιώδεις μεθόδους για την επίλυση εξισώσεων και καθιέρωσε την πειθαρχία της άλγεβρας.Το βιβλίο έδειξε πώς να λύνουμε πολυωνυμικές εξισώσεις και αλγεβρικές μεθόδους γραφής μιας έκφρασης σε απλούστερη μορφή, μια τακτική γνωστή ως αναγωγή. Κάλυψε επίσης βασικές έννοιες όπως η μετακίνηση μιας αρνητικής ποσότητας από τη μια πλευρά μιας εξίσωσης στην άλλη και η αλλαγή του πρόσημου της, που ονομάζεται ολοκλήρωση, και η αφαίρεση της ίδιας ποσότητας και από τις δύο πλευρές, γνωστή ως εξισορρόπηση. Συγκεκριμένα, ο al-Khwārizmī ανέπτυξε μια φόρμουλα για τη συστηματική επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση και την εξισορρόπηση για να ανάγει οποιαδήποτε εξίσωση σε μια που είναι επιλύσιμη.Η εργασία του για την αριθμητική χρησιμοποιώντας το 1 έως το 9 και τον αριθμό 0 ήταν τελικά υπεύθυνη για την εισαγωγή αυτού που σήμερα ονομάζουμε ινδουο-αραβικούς αριθμούς ή αραβικούς αριθμούς, πρώτα στον ισλαμικό κόσμο και μετά στον δυτικό κόσμο. Η επαναστατική προσέγγισή του στα μαθηματικά κατέστησε δυνατούς τους σημερινούς αλγοριθμικά βασισμένους υπολογιστές μας, αλλά δεν εφηύρε αλγόριθμους. Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιήθηκαν από τους αρχαίους Βαβυλώνιους γύρω στο 2500 π.Χ.

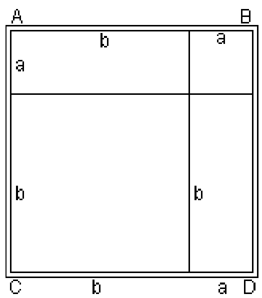
Τα έργα του Al-Khwārizmī ξεπέρασαν πολύ τα μαθηματικά. Έκανε σημαντική συμβολή στην αστρονομία, αναπτύσσοντας το πρώτο τεταρτημόριο για τον προσδιορισμό του χρόνου παρατηρώντας τον ήλιο ή τα αστέρια. Συνέταξε ένα σύνολο αστρονομικών πινάκων, γνωστών ως Zīj al-Sindhind (Αστρονομικοί πίνακες του Siddhanta), βασισμένος σε πολλές ινδουιστικές και ελληνικές πηγές, και κάλυπτε πτυχές όπως τον υπολογισμό των θέσεων του ήλιου, της σελήνης και των πλανητών και πότε θα γίνονταν εκλείψεις. Ο Al-Khwārizmī βελτίωσε επίσης τη θεωρία και την κατασκευή των ηλιακών ρολογιών και, λόγω της δουλειάς του, τοποθετούνταν συχνά ηλιακά ρολόγια στα τζαμιά για να δείχνουν την ώρα της προσευχής. Η δουλειά του σε αυτόν τον τομέα τον οδήγησε να γράψει πολλά άλλα έργα, συμπεριλαμβανομένης της περιγραφής των κανόνων για το πότε ορισμένα γεγονότα πρέπει να είναι στο εβραϊκό ημερολόγιο. Η κύρια άλλη περιοχή στην οποία ο al-Khwarizmī παρήγαγε σημαντικά έργα ήταν η γεωγραφία. Το Kitāb ṣūrat al-arḍ (Η Εικόνα της Γης· και συχνά μεταφράζεται ως Γεωγραφία), κάλυπτε ουσιαστικά τον κόσμο όπως ήταν γνωστός τότε. Επιβλέποντας περίπου 70 γεωγράφους, αναθεώρησε και επέκτεινε το προηγούμενο έργο του Αιγυπτιακού πολυμαθήματος Πτολεμαίου για τη γεωγραφία για να καλύψει τις συντεταγμένες περίπου 2400 τοποθεσιών σε όλο τον κόσμο, ιδιαίτερα γύρω από τη Μεσόγειο Θάλασσα και πόλεις στην Αφρική και την Ασία, συμπεριλαμβανομένων καταλόγων με γεωγραφικά πλάτη και μήκη, πόλεις, θάλασσες , βουνά, νησιά και ποτάμια.

Το έργο του Al-Khwārizmī επηρέασε έντονα τη Δύση για μεγάλο χρονικό διάστημα χρόνος. Το έργο του έγινε η βάση της μελέτης της άλγεβρας στο Αναγέννηση. Είναι ασφαλές να πούμε ότι οι μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Leonardo Fibonacci (1175-1230), ο Alberd (1196-1280) και ο Roger Bacon (1214-1294) χρησιμοποίησε το Al Khwarizmi's αλγόριθμους και λύσεις στις μελέτες τους. Αυτή η επιρροή εμφανίζεται ξεκάθαρα σε Practica Geometria γραμμένο από τον Leonardo Fibonacci. Το Al Kitab Al Jabr Wa'al Muqabelah περιλαμβάνει σαράντα διαφορετικά προβλήματα. Το βιβλίο αποτελείται από μία προτίμηση, παράρτημα και πέντε κύρια κεφάλαια. Αυτά τα κεφάλαια μπορούν να είναι συνοψίζονται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο έχουμε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει έξι διαφορετικούς τύπους εξισώσεων (γραμμικές και τετραγωνικές). Ο Al-Khwārizmī δίνει για πρώτη φορά γεωμετρική λύση για αυτά δεν έχει ξανά συμβεί στην ιστορία των μαθηματικών αυτή η μέθοδος επίλυσης Αυτές οι εξισώσεις ταξινομήθηκαν από τον Göker σε έξι τυπικές μορφές :

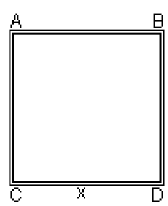
1. $\alpha x^2 - \beta x$
2. $\alpha x^2 = \beta$
3. $\alpha x = \beta$
4. $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$
5. $\alpha x^2 + \gamma = \beta x$
6. $\alpha x^2 = \beta x + \gamma$ όπου α,β και γ είναι θετικοι ακέραιοι αριθμοί.

Το δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου περιλαμβάνει τη μέθοδο πολλαπλασιασμού $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ και $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$. Ένα παράδειγμα για την κατανόηση την μέθοδο του έχει δοθεί από τον ίδιο τον Al Khwarizmi έδειξε ότι ο πολλαπλασιασμός του$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ ως το εμβαδόν του τετραγώνου ABCD κατασκευασμένο από πλευρά $(\alpha+\beta)$:

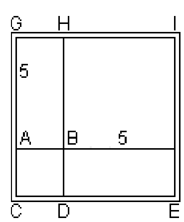


Οπότε το συνολικό εμβαδόν είναι $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι πολύ πρωτότυπο στην ιστορία των μαθηματικών που ασχολείται με ένα γεωμετρικό μοντέλο για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων,την ονόμασε αυτή την εφαρμογή τετραγωνική μέθοδος . Έλυσε την εξίσωση $x^2+10x=39$ χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο. Ο Al Khwarizmi σχεδιάζει ένα τετράγωνο ABCD της πλευράς x.



Προσθέτούμε 5 μονάδες στην πλευρά AC και CD για να κατασκευάσει το τετράγωνο DGIE:



Έτσι, το συνολικό εμβαδόν του τετραγώνου DGIE είναι $(x+5)^2$, είναι ίσο με $x^2+10x+25$ και έχουμε ότι$x^2+10x=39$. Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 25 οπότε $x^2+10x+25$ =39+25 . Επομένως, $(x+5)^2=64$ άρα $x+5=\pm 8$, μετά $x=3$ ή $x=-13$. Αυτή η λύση είναι το πρώτο παράδειγμα Αναλυτικής Γεωμετρίας που δεν μπορούμε να το δούμε στα πρώιμα ελληνικά, αιγυπτιακά και ινδικά μαθηματικά. Αυτό που συναντάμε στο έργο του Al-Khwārizmī είναι : $x^2 + \beta x + \frac{\beta^2}{4} = (x + \frac{\beta}{2})^2$ και έπειτα έχουμε προφανής λύση το $x = -\frac{\beta}{2}$.

Στην παραπάνω εικόνα έχουμε μια σελίδα από το κείμενο άλγεβρας του al-Khwārizmī, Kitāb al-jabr wa'l-muqābala, που γράφτηκε περίπου το 825, το πρώτο σωζόμενο κείμενο άλγεβρας, από τον Muḥammad ibn Mūsā Al-Khwārizmī.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολείται γενικά με τον τρόπο εύρεσης αποτελεσμάτων τύπων Binome. Δηλαδή:

$$(x + a)(x + \beta)$$

$$(x + a)(x - \beta)$$

$$(x - a)(x + \beta)$$

$$(x - a)(x - \beta)$$

Στο τέρτατο το κεφάλαιο, ο Al Khwarizmi δίνει μερικές λύσεις για διαφορετικούς τύπους εξισώσεων.Όπως :

1. $x^2 = \alpha x \leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x} = a\sqrt{x}$ άρα $x = a$
2. $x = \beta\sqrt{x} \leftrightarrow \sqrt{x} = \beta$ όπου α και β είναι θετικοι ακέραιοι αριθμοί.
3. $x = \gamma\sqrt{x}$ άρα $x = \gamma^2$

Ένα αριθμητικό παράδειγμα της λύσης του δίνεται ως εξής:

$$\left(x - 3\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} \leftrightarrow x = 4\sqrt{x} \leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x} = 4\sqrt{x} \leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \leftrightarrow x = 16$$

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνει ορισμένα προβλήματα που μπορεί να είναι λύνονται αλγεβρικά. Ειδικά, ανέφερε ο Al Khwarizmi τέσσερις αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, και διαίρεση). Ένα παράδειγμα της αλγεβρικής επίλυσης του Al Khwarizmi είναι: Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 10 και η διαδορά των τετράγωνα αυτών των αριθμών είναι 40.Έχουμε :

$$x + y = 10$$

$$x^2 - y^2 = 40$$

Συμβολίζουμε το $x = 5 + z$ και $y = 5 - z$ και έχουμε $(5 + z)^2 - (5 - z)^2 = 40 \leftrightarrow 25 + 10z + z^2 + 10z - 25 - z^2 = 40 \leftrightarrow 20z = 40 \leftrightarrow z = 2$

οπότε $x = 5 + 2 = 7$ και $y = 5 - 2 = 3$

Το ερώτημα, που φαίνεται να μην έχει εύκολη απάντηση, είναι αν ο Αλ Χουαρίζμι ήταν εξοικειωμένος με τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Γνωρίζουμε ότι θα μπορούσε να ήταν εξοικειωμένος με το έργο του Ευκλείδη. Κατά τη βασιλεία του al-Rashid, ενώ ο Al-Khwarizmi ήταν ακόμη νέος, ο Al-Hajjaj είχε μεταφράσει τα Στοιχεία του Ευκλείδη στα αραβικά και ο Al-Hajjaj ήταν ένας από τους συναδέλφους του al-Khwarizmi στον Οίκο της Wisdom.

Ο Al-Khwārizmī παρήγαγε ακριβείς πίνακες ημιτονοειδούς και συνημιτονοειδούς και τον πρώτο πίνακα εφαπτομένων.

Το δεύτερο έργο του Al-Khwārizmī με τη μεγαλύτερη επιρροή αφορούσε το θέμα της αριθμητικής, το οποίο διασώθηκε σε λατινικές μεταφράσεις, αλλά χάθηκε στο πρωτότυπο αραβικό. Τα γραπτά του περιλαμβάνουν το κείμενο kitāb al-Hisāb al-hindī ίσως το πιο στοιχειώδει κείμενο, το kitab al-jam' wa'l-tafriq al-ḥisāb al-hindī (Πρόσθεση και αφαίρεση στην ινδική αριθμητική). Αυτά τα κείμενα περιέγραψαν αλγόριθμους με δεκαδικούς αριθμούς (ινδουο-αραβικούς αριθμούς) που θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν σε μια takht (Λατινικά: tabula), ένας πίνακας καλυμμένος με ένα λεπτό στρώμα σκόνης ή άμμου χρησιμοποιήθηκε για υπολογισμούς, πάνω στον οποίο μπορούσαν να γραφτούν αριθμοί με μια γραφίδα και να διαγραφούν εύκολα και να αντικατασταθούν όταν ήταν απαραίτητο. Οι αλγόριθμοι του Al-Khwarizmi χρησιμοποιήθηκαν για σχεδόν τρεις αιώνες, μέχρι που αντικαταστάθηκαν από τους αλγόριθμους του Al-Uqlidisi που μπορούσαν να πραγματοποιηθούν με στυλό και χαρτί.Ευτυχώς το έργο του Al-Khwārizmī υπήρξε μέρος του κύματος της αραβικής επιστήμης του 12ου αιώνα που εισρέει στην Ευρώπη μέσω μεταφράσεων, αυτά τα κείμενα αποδείχθηκαν επαναστατικά στην Ευρώπη. Το λατινοποιημένο όνομα του Al-Khwarizmi, Algorismus, μετατράπηκε στο όνομα της μεθόδου που χρησιμοποιείται για υπολογισμούς και επιβιώνει στον όρο «αλγόριθμος». Σταδιακά αντικατέστησε τις προηγούμενες μεθόδους που βασίζονταν στον άβακα που χρησιμοποιούνταν στην Ευρώπη.

Τέσσερα λατινικά κείμενα που παρέχουν προσαρμογές των μεθόδων του Al-Khwarizmi έχουν διασωθεί, παρόλο που κανένα από αυτά δεν πιστεύεται ότι είναι κυριολεκτική μετάφραση:

- Dixit Algorizmi
- Liber Alchoarismi de Practica Arismetice
- Liber Ysagogarum Alchorismi
- Liber Pulveris

Η εργασία του Al-Khwarizmi για την αριθμητική ήταν υπεύθυνη για την εισαγωγή των αραβικών αριθμών, βασισμένων στο ινδουο-αραβικό αριθμητικό σύστημα που αναπτύχθηκε στα ινδικά μαθηματικά, στον δυτικό κόσμο. Ο όρος «αλγόριθμος» προέρχεται από τον αλγορισμό, την τεχνική εκτέλεσης αριθμητικής με ινδουο-αραβικούς αριθμούς που αναπτύχθηκε από τον Al-Khwārizmī. Τόσο ο «αλγόριθμος» και ο «αλγορισμός» προέρχονται από τις λατινοποιημένες μορφές του ονόματος του Al-Khwārizmī, Algoritmi και Algorismi, αντίστοιχα.

Το τρίτο σημαντικό έργο του Al-Khwārizmī είναι το Kitāb Ṣūrat al-Arḍ (αραβικά: كتاب صورة الأرض, «Βιβλίο της Περιγραφής της Γης»), γνωστό και ως Γεωγραφία του, το οποίο ολοκληρώθηκε το 833. Το έργο αποτελείται από έναν κατάλογο 2402 συντεταγμένων πόλεων και άλλων γεωγραφικών χαρακτηριστικών μετά από μια γενική εισαγωγή. Υπάρχει ένα σωζόμενο αντίγραφο του Kitāb Ṣūrat al-Arḍ, το οποίο φυλάσσεται στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου του Στρασβούργου. Μια λατινική μετάφραση βρίσκεται στη Biblioteca Nacional de España στη Μαδρίτη. Ο Al-Khwārizmī διόρθωσε τη χονδρική υπερεκτίμηση του Πτολεμαίου για το μήκος της

Μεσογείου[1] από τα Κανάρια Νησιά έως τις ανατολικές ακτές της Μεσογείου. Ο Πτολεμαίος το υπερεκτίμησε στις 63 μοίρες γεωγραφικού μήκους, ενώ ο Al-Khwārizmī το υπολόγισε σχεδόν σωστά σε σχεδόν 50 μοίρες γεωγραφικού μήκους. «Απεικόνισε τον Ατλαντικό και τον Ινδικό Ωκεανό ως ανοιχτά υδάτινα σώματα, όχι ως κλειστές θάλασσες όπως είχε κάνει ο Πτολεμαίος». Πτολεμαίος. Οι περισσότεροι μεσαιωνικοί μουσουλμάνοι συνέχισαν να χρησιμοποιούν τον κύριο μεσημβρινό του Al-Khwārizmī.

Ο Al-Khwārizmī πέθανε περίπου το 850 μ.Χ., έχοντας κάνει έργα που θα κατέληγαν να διαμορφώσουν το μέλλον του κόσμου. Ο Al-Khwārizmī έγραψε πολλά άλλα έργα, συμπεριλαμβανομένης ενός έργου για το εβραϊκό ημερολόγιο.Επηρέασε τους μεσαιωνικούς μαθηματικούς Φιμπονάτσι, Άλμπερντ και Ρότζερ Μπέικον, αλλά μέσω της δημιουργίας του στην άλγεβρα, έχει επηρεάσει ουσιαστικά κάθε μαθηματικό έκτοτε. Η ΑΛΓΕΒΡΑ του Al-Khwarizmi θεωρείται το θεμέλιο και ο ακρογωνιαίος λίθος των επιστημών. Στον Al-Khwarizmi οφείλουμε την παγκόσμια «άλγεβρα», από τον τίτλο του μεγαλύτερου μαθηματικού του έργου, Hisab al-Jabr wa-Al-Muqabala. Το πιο αναγνωρισμένο έργο του όπως προαναφέρθηκε και ένα που ονομάστηκε έτσι από αυτόν είναι η μαθηματική έννοια Αλγόριθμος. Η σύγχρονη έννοια της λέξης σχετίζεται με μια συγκεκριμένη πρακτική για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Σήμερα, οι άνθρωποι χρησιμοποιούν αλγόριθμους για να κάνουν πρόσθεση και μεγάλη διαίρεση, αρχές που βρίσκονται στο κείμενο του Al-Khwarizmi που γράφτηκε πριν από περίπου 1200 χρόνια. Ο Al-Khwarizmi ήταν επίσης υπεύθυνος για την εισαγωγή των αραβικών αριθμών στη Δύση, θέτοντας σε κίνηση μια διαδικασία που οδήγησε στη χρήση των εννέα αραβικών αριθμών, μαζί με το σύμβολο μηδέν.

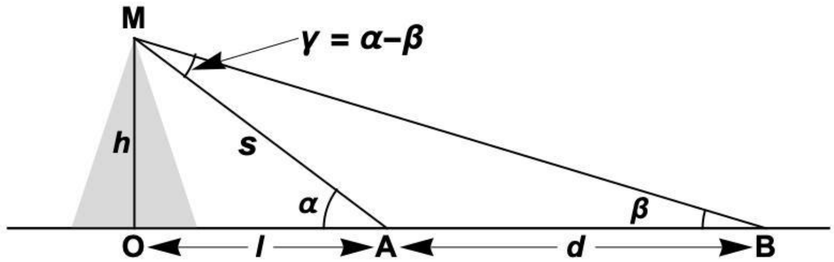
Al-Biruni

Ο Al-Biruni είναι μια από τις σημαντικότερες μορφές των ισλαμικών μαθηματικών. Συνέβαλε στην αστρονομία, τα μαθηματικά, τη φυσική, την ιατρική και την ιστορία. Ο Al-Biruni γεννήθηκε κοντά στο Kath και η πόλη όπου γεννήθηκε ονομάζεται σήμερα Biruni από τον μεγάλο λόγιο. Έζησε τόσο στο Kath όσο και στη Jurjaniyya καθώς μεγάλωνε και γνωρίζουμε ότι ξεκίνησε τις σπουδές του σε πολύ νεαρή ηλικία κοντά στον διάσημο αστρονόμο και μαθηματικό Abu Nasr Mansur . Στην ηλικία των δεκαεπτά ετών ο al-Biruni δημοσίευσε την εργασία του για το γεωγραφικό πλάτος του Kath παρατηρώντας το μέγιστο υψόμετρο του ήλιου. Σε ηλικία 22 ετών είχε γράψει μια σειρά από μικρά έργα. Ένα που έχει διασωθεί είναι *η Χαρτογραφία* του που είναι ένα έργο πάνω σε χάρτες . Διαπιστώνουμε πως στην ηλικία των 22 ετών έχει μελετήσει αρκετά αφού μέσα από το έργο του αναφέρεται σε άλλα έργα και σε άλλους συναδέλφους του. Η ζωή του άλλαξε ξαφνικά το 995 από τα πολιτικά γεγονότα εκείνης της περιόδου. Είναι ενδιαφέρον να κάνουμε εικασίες για το πόσο διαφορετική θα μπορούσε να ήταν η ζωή του και η συνεισφορά του στην επιστήμη αν δε υπήρχε αυτή η ξαφνική αλλαγή στη ζωή του. Το τέλος του 10ου αιώνα και στις αρχές του 11ου αιώνα ήταν μια περίοδος μεγάλων αναταραχών στον ισλαμικό κόσμο και υπήρξαν εμφύλιοι πόλεμοι στην περιοχή στην οποία ζούσε ο Al-Biruni. Ο Al-Biruni τράπηκε σε φυγή με το ξέσπασμα του εμφυλίου πολέμου, αλλά δε γνωρίζουμε τι συνέβη στον δάσκαλό του Abu Nasr Mansur εκείνη την περίοδο.

Η απαρίθμηση των έργων του Al-Biruni είναι σχετικά εύκολη, γιατί ο ίδιος δημιούργησε ένα ευρετήριο των έργων του μέχρι τα 60 του χρόνια. Ωστόσο, έζησε καλά μέχρι τα εβδομήντα του και, καθώς ορισμένα από τα έργα του που σώθηκαν δεν αναφέρονται σε αυτό το ευρετήριο, το ευρετήριο είναι στην καλύτερη περίπτωση μια μερική λίστα. Η προσθήκη όλων των τίτλων στο ευρετήριο, καθώς και αυτών που βρέθηκαν αργότερα, ανεβάζει τη συνολική παραγωγή του σε 146 τίτλους, ο καθένας με μέσο όρο περίπου 90 φύλλα. Σχεδόν οι μισοί τίτλοι αφορούσαν αστρονομικά και μαθηματικά θέματα. Μόνο ένας μικρός αριθμός από το έργο του, 22 τίτλοι, έχει διασωθεί, και μόνο περίπου το μισό από αυτό έχει δημοσιευτεί. Μερικά από τα έργα του είναι ,*Taḥqīq mā li-l-hind min maqūlah maqbūlah fī al-ʿaql aw mardhūlah* («Επαληθεύοντας όλα όσα αφηγούνται οι Ινδοί, το Λογικό και το Παράλογο») , *Το Χρονολόγιο των Αρχαίων Εθνών, Al-Qānūn al-Masʿūdi* ("Ο κανόνας των Masʿudic"), *Το Al-Tafhīm li-awāʾil ṣināʿat al-tanjīm* («Στοιχεία της Αστρολογίας») , *Το Taḥdid nihāyāt al-amākin li-taṣḥīḥ masāfāt al-masākin* («Προσδιορισμός των συντεταγμένων των τόπων για τη διόρθωση των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων»). Τα σχετικά δευτερεύοντα έργα του είναι ελάχιστα σε μέγεθος, γιατί είναι τουλάχιστον εξίσου εκλεπτυσμένα με τα κύρια έργα του. *Τα Maqālīd ʿilm al-hayʾah* («Κλειδιά για την Αστρονομία») του Al-Bīrūnī , *Al-jamāhir fī maʿrifat al-jawāhir* («Gems»), *Kitāb al-ṣaydanah* («Φαρμακολογία») και *Ifrālāl-al-Almailq* (*The Exhaustive Treatise on Shadows*).

Ο Al-Biruni πρότεινε μια νέα μέθοδο που βασίζεται σε ημιτονοειδή τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μέτρησε την περιφέρεια της Γης βρίσκοντας μια τιμή αρκετά κοντά στη σύγχρονη. Ο Al-Biruni πρότεινε επίσης νέες μεθόδους για τη μέτρηση του γεωγραφικού μήκους και νέεςχαρτογραφικές προβολές, μερικές από τις οποίες επινοήθηκαν εκ νέου μετά από αιώνες από σύγχρονους χαρτογράφους.

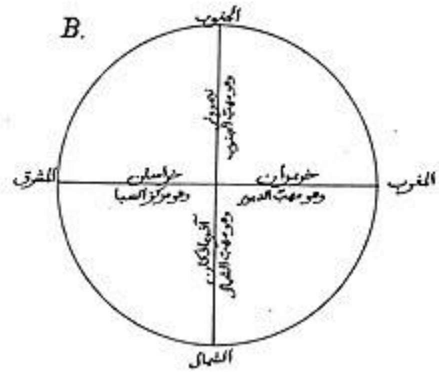
Ο Al-Biruni επινόησε μια νέα μέθοδο για τον προσδιορισμό της ακτίνας της Γης μέσω της παρατήρησης του ύψους ενός βουνού.



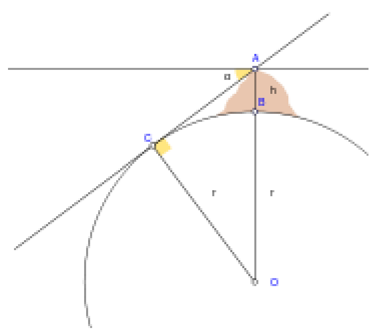
Ο Al-Biruni ήταν να μετρήσει τις γωνίες ανύψωσης $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ από δύο σημεία A και B σε διαφορετικές αποστάσεις από το βουνό. Μέτρησε τη γωνία $\hat{\alpha}$ χρησιμοποιώντας έναν αστρολάβο για να δει την κορυφή. Στη συνέχεια απομακρύνθηκε περισσότερο στο σημείο B και μέτρησε τη γωνία ανύψωσης $\hat{\beta}$ στο B. Δεδομένου ότι A και B οι δύο βρίσκονταν σε επίπεδο έδαφος, η απόσταση d μεταξύ τους μπορούσε να μετρηθεί με καλή ακρίβεια. Από τις τρεις τιμές α, β και d , ο Al-Biruni θα μπορούσε στη συνέχεια να συμπεράνει το ύψος h χρησιμοποιώντας απλή τριγωνομετρία. Λαμβάνοντας υπόψη το ορθογώνιο τρίγωνο OMA, το ύψος του βουνού h και το (άγνωστο) ύψος της κλίσης s σχετίζονται με $h = s\, sin\alpha$. Λαμβάνοντας υπόψη τις γωνίες στο τρίγωνο AMB, βλέπουμε εύκολα ότι $\gamma = \alpha - \beta$. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον κανόνα ημιτόνου στο AMB, παίρνουμε : $\frac{s}{sin\beta} = \frac{d}{\sin(\alpha-\beta)}$ οπότε καταλήγουμε $h = \frac{sin\alpha \cdot sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \cdot d = \frac{tan\alpha\, tan\beta}{tan\alpha - tan\beta} \cdot d$

Αυτή είναι η σχέση που χρησιμοποίησε ο Al Biruni για να υπολογίσει το ύψος του βουνού. Οι τιμές α, β και d μπορούν να ληφθούν όλες με καλή ακρίβεια καθώς και οι εφαπτομένες των γωνιών μπορούν να αξιολογηθούν με ακρίβεια, μπορεί να γίνει μια εξαιρετική εκτίμηση του ύψους.

Το πραγματοποίησε στη Nandana στο Pind Dadan Khan (σημερινό Πακιστάν). Χρησιμοποίησε την τριγωνομετρία για να υπολογίσει την ακτίνα της Γης χρησιμοποιώντας μετρήσεις του ύψους ενός λόφου και μέτρηση της βύθισης στον ορίζοντα από την κορυφή αυτού του λόφου. Η υπολογιζόμενη ακτίνα του για τη Γη των 3928,77 μιλίων ήταν 2% υψηλότερη από την πραγματική μέση ακτίνα των 3847,80 μιλίων.



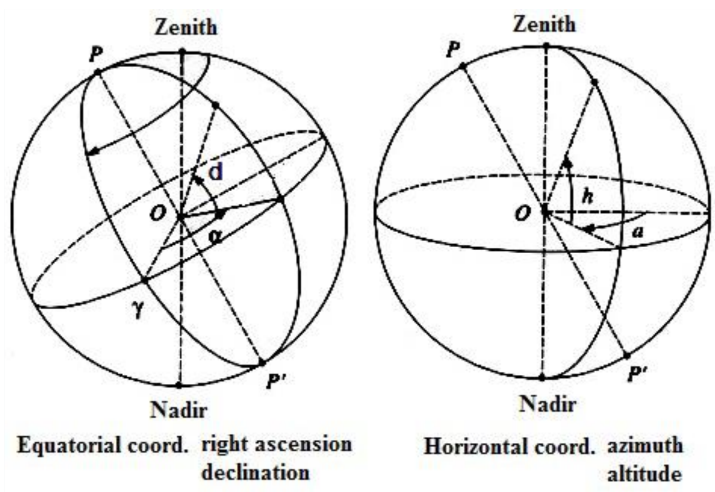
Η εκτίμησή του δόθηκε ως 12.803.337 πήχεις , επομένως η ακρίβεια της εκτίμησής του σε σύγκριση με τη σύγχρονη τιμή εξαρτάται από τη μετατροπή που χρησιμοποιείται για τους πήχεις. Το ακριβές μήκος ενός πήχηδεν είναι σαφές. Με έναν πήχη 18 ιντσών η εκτίμησή του θα ήταν 3.600 μίλια, ενώ με έναν πήχη 22 ιντσών η εκτίμησή του θα ήταν 4.200 μίλια. Ένα σημαντικό πρόβλημα με αυτήν την προσέγγιση είναι ότι ο Al-Biruni δεν γνώριζε την ατμοσφαιρική διάθλαση και δεν άφησε κανένα περιθώριο. Χρησιμοποίησε μια γωνία βύθισης 34 λεπτών τόξου στους υπολογισμούς του, αλλά η διάθλαση μπορεί τυπικά να αλλάξει τη μετρούμενη γωνία βύθισης κατά περίπου 1/6, καθιστώντας τον υπολογισμό του ακριβή μόνο εντός περίπου 20% της πραγματικής τιμής.



Διάγραμμα που απεικονίζει μια μέθοδο που προτάθηκε και χρησιμοποιήθηκε από τον Al-Biruni για την εκτίμηση της ακτίνας και της περιφέρειας τηςΓης.

Μουσουλμάνοι μελετητές χρησιμοποίησαν την ακτίνα της Γης για να υπολογίσουν την απόσταση και την κατεύθυνση προς τη Μέκκα από κάθε δεδομένο σημείο στη Γη, αυτό καθόρισε την Qibla, ή μουσουλμανική κατεύθυνση της προσευχής. Για αυτό το λόγο οι μουσουλμάνοι μαθηματικοί ανέπτυξαν τη σφαιρική τριγωνομετρία που ήταν απαραίτητη για αυτούς τους υπολογισμούς. Ο Al-Biruni εργάστηκε επίσης για τον προσδιορισμό της Qibla, με την «Οριοθέτηση των Συντεταγμένων των Πόλεων ». Στην πραγματικότητα, μόλις γνωρίζουμε το γεωγραφικό πλάτος και το μήκος της Μέκκας και του τόπου όπου μια προσευχή είναι, αυτά τα δεδομένα μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα σφαιρικό τρίγωνο και η γωνία από τον μεσημβρινό της προσευχής προς το καθορίζεται η κατεύθυνση της Μέκκας.

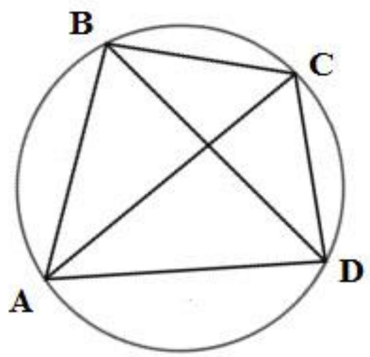
Το γεωγραφικό πλάτος μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας ισημερινές και οριζόντιες συντεταγμένες, δηλαδή από το υψόμετρο h και απόκλιση d του ήλιου την ημέρα των μετρήσεων. Η απόκλιση είναι μία από τις δύο γωνίες που εντοπίζουν ένα σημείο στην ουράνια σφαίρα στο σύστημα συντεταγμένων του ισημερινού. Για να καθορίσουμε το γεωγραφικό πλάτος, κατά τη διάρκεια της ημέρας μπορεί να χρησιμοποιήσει τον ήλιο το μεσημέρι. τη νύχτα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αστέρια.



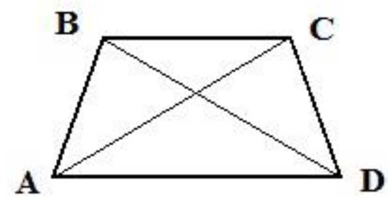
Στο Codex Masudicus (1037), ο Al-Biruni θεώρησε την ύπαρξη μιας ξηράς κατά μήκος του απέραντου ωκεανού μεταξύ Ασίας και Ευρώπης, ή αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως Αμερική. Υποστήριξε την ύπαρξή του με βάση τις ακριβείς εκτιμήσεις του για την περιφέρεια της Γης και το μέγεθος της Αφρο-Ευρασίας , το οποίο βρήκε ότι εκτείνεται μόνο στα δύο πέμπτα της περιφέρειας της Γης, με το σκεπτικό ότι οι γεωλογικές διεργασίες που προκάλεσαν την Ευρασία πρέπει σίγουρα να έχουν προκάλεσε εδάφη στον απέραντο ωκεανό μεταξύ Ασίας και Ευρώπης. Υποστήριξε επίσης τη θεωρία ότι τουλάχιστον ένα μέρος της άγνωστης γης θα βρισκόταν στα γνωστά γεωγραφικά πλάτη που θα μπορούσαν να κατοικήσουν οι άνθρωποι και

επομένως θα κατοικούνταν.

Ο Al-Biruni πρότεινε επίσης μια μαθηματική μέθοδο για τον υπολογισμό της διαφοράς του γεωγραφικού μήκους.Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τα γεωγραφικά πλάτη δύο θέσεων A και C και την απόστασή τους AC. Σε κάθε από αυτά τα δύο σημεία περνούν από έναν μεσημβρινό και έναν παράλληλο, και επομένως έχουμε τέσσερις κύκλους, οι οποίοι τέμνονται προσδιορίζοντας ένα ισοσκελές τραπεζοειδές (ABCD). Ένα ισοσκελές τραπέζιο μπορεί να εγγραφεί σε ένα κύκλο,επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα του Πτολεμαίου για κυκλικά τετράπλευρα(όπως φαίνεται στον παρακάτω σχήμα).



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



In the case $AB = CD$ and $AC = BD$

$$AC^2 = AB^2 + BC \cdot AD$$

Το Taḥdid nihāyāt al-amākin li-taṣḥīḥ masāfāt al-masākin («Προσδιορισμός των συντεταγμένων των τόπων για τη διόρθωση των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων») είναι το αριστούργημα του Al-Biruni στη μαθηματική γεωγραφία. Σε αυτό όχι μόνο υπερασπίστηκε το ρόλο των μαθηματικών επιστημών ενάντια στις επιθέσεις θρησκευτικών λογίων που δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τη χρησιμότητα των μαθηματικών επιστημών, αλλά εξέθεσε λεπτομερώς όλα όσα έπρεπε να γνωρίζει κανείς για τον προσδιορισμό των γεωγραφικών μήκων και γεωγραφικών πλάτη στην ξηρά. Έκλεισε τη συγκεκριμένη συζήτηση με μια λύση στο μάλλον περίπλοκο σφαιρικό τριγωνομετρικό πρόβλημα του προσδιορισμού της κατεύθυνσης της Μέκκας κατά μήκος του τοπικού ορίζοντα στη Γκάζνα . Εκτός από ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα, ο προσδιορισμός της κατεύθυνσης της Μέκκας είναι μια θρησκευτική απαίτηση για την εκτέλεση των καθοριζόμενων πέντε καθημερινών προσευχών στο Ισλάμ . Έτσι, όχι μόνο ο Al-Biruni δεν έχασε την ευκαιρία να δείξει τον πολύ χρήσιμο ρόλο των μαθηματικών επιστημών στη θρησκεία, αλλά χρησιμοποίησε επίσης την ευκαιρία (όπως είχε κάνει στο έργο του για την αστρολογία) για να συμπεριλάβει άλλα επιστημονικά ζητήματα.

Μέσα από την παρούσα διπλωματική εργασία, αναδείξαμε τις σημαντικές μαθηματικές ανακαλύψεις και τις καινοτόμες μεθόδους που εισήγαγε ο Al-Biruni, οι οποίες επηρέασαν βαθιά την επιστημονική κοινότητα της εποχής του και πέραν αυτής.

Ο Al-Biruni ήταν ένας πρωτοπόρος που εισήγαγε και ανέπτυξε μεθόδους για τη μέτρηση της γης, τον υπολογισμό της ακτίνας της, και την ανάπτυξη αστρονομικών εργαλείων. Η ικανότητά του να συνδυάζει θεωρητική γνώση με πρακτικές εφαρμογές, καθώς και η προσήλωσή του στη μαθηματική ακρίβεια και την επιστημονική μεθοδολογία, τον καθιστούν μια εμβληματική φιγούρα στην ιστορία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Nasir Al-Din al-Tusi

Muhammad ibn Muhammad ibn al-Hasan al-Tusi (1201 – 1274), επίσης γνωστός ως Nasir al-Din al-Tusi (αραβικά : نصير الدين الطوسی ; περσικά : نصیر الدین طوسی) ή απλά ως (al -) O Tusi , ήταν Πέρσης πολυμαθής , αρχιτέκτονας, φιλόσοφος , γιατρός , μαθηματικός και θεολόγος . Ο Nasir al-Din al-Tusi ήταν ένας συγγραφέας, που έγραφε για θέματα μαθηματικών, μηχανικής, πεζογραφίας και μυστικισμού. Επιπλέον, ο Al-Tusi έκανε αρκετές επιστημονικές προόδους. Στην αστρονομία , ο Al-Tusi δημιούργησε πολύ ακριβείς πίνακες πλανητικής κίνησης , ένα ενημερωμένο πλανητικό μοντέλο και κριτικές της πτολεμαϊκής αστρονομίας . Έκανε επίσης άλματα στη λογική , τα μαθηματικά αλλά κυρίως την τριγωνομετρία, τη βιολογία και τη χημεία. Ο Nasir al-Din al-Tusi άφησε πίσω του μια μεγάλη κληρονομιά αφού ο Tusi θεωρείται ευρέως ως ένας από τους μεγαλύτερους επιστήμονες του μεσαιωνικού Ισλάμ, διότι θεωρείται ο δημιουργός της τριγωνομετρίας ως μαθηματικού κλάδου από μόνος του. Ο μουσουλμάνος λόγιος Ibn Khaldun (1332–1406) θεωρούσε τον Tusi ως τον μεγαλύτερο από τους μεταγενέστερους Πέρσες λόγιους.

Ο Tusi ήταν άτυχος αφού έζησε σε μια περίοδο με πολέμους και αναταραχές και αυτό είχε ως αποτέλεσμα να μην είναι απόλυτα συγκεντρωμένος στο επιστημονικό του έργο. Κατά τη διάρκεια της ζωής του αναγκάστηκε να μετακομίσει αφού στην περιοχή όπου ζούσε του δεχόταν επίθεση από τους Μογγόλους. Σε νεαρή ηλικία, μετακόμισε στο Nishapur για να σπουδάσει φιλοσοφία υπό τον Farid al-Din Damad και μαθηματικά υπό τον Muhammad Hasib . Το 1256 ο Al-Tusi βρισκόταν στο κάστρο του Alamut όταν δέχτηκε επίθεση από τις δυνάμεις του Μογγόλου ηγέτη Hulegu, εγγονού του Τζένγκις Χαν. Ορισμένες πηγές υποστηρίζουν ότι ο Al-Tusi πρόδωσε την άμυνα του Alamut στους εισβολείς Μογγόλους. Αφού οι δυνάμεις του κατέστρεψαν τον Αλαμούτ, ο Χουλέγκου, ο οποίος ενδιαφερόταν ο ίδιος για τις φυσικές επιστήμες, αντιμετώπισε τον Αλ-Τούσι με μεγάλο σεβασμό, διορίζοντας τον επιστημονικό σύμβουλο και μόνιμο μέλος του εσωτερικού του συμβουλίου.Προς μεγάλη διαμάχη, θεωρείται ευρέως ότι ο Τούσι ήταν με τις μογγολικές δυνάμεις υπό τον Χουλέγκου όταν επιτέθηκαν και σφαγίασαν τους κατοίκους της Βαγδάτης το 1258 και έπαιξε ουσιαστικό ρόλο στον τερματισμό της αυτοκρατορίας των Κουράις . Αμέσως μετά, του δόθηκε η πλήρης εξουσία διαχείρισης των οικονομικών θρησκευτικών ιδρυμάτων και επισκέφτηκε πολλά από τα σιιτικά ιερά όταν τελείωσε η πολιορκία της Βαγδάτης. Όντας σε θέση ισχύος, ο Τούσι μπόρεσε να ενισχύσει την υπόθεση των δωδεκαθεϊστών σε όλη την Περσία και το Ιράκ. Ο Tusi έχει περίπου 150 έργα, από τα οποία τα 25 είναι στα περσικά και τα υπόλοιπα στα αραβικά , και υπάρχει ένα έργο στα περσικά, αραβικά και τουρκικά . Ορισμένα από τα έργα του είναι:

- Sayr wa-Suluk (Το ταξίδι) - Αυτοβιογραφία
- Kitāb al-Shakl al-qattāʿ Βιβλίο για το πλήρες τετράπλευρο. Μια πεντάτομη περίληψη της τριγωνομετρίας.
- Al-Tadhkirah fi'ilm al-hay'ah – Απομνημονεύματα για την επιστήμη της αστρονομίας. Πολλά σχόλια γράφτηκαν για αυτό το έργο που ονομάζεται Sharh al-Tadhkirah (A Commentary on al-Tadhkirah) - Τα σχόλια γράφτηκαν από τον Abd al-Ali ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Birjandi και από τον Nazzam Nishapuri .
- Akhlaq-i Nasiri – Ένα έργο για την ηθική.
- al-Risalah al-Asturlabiyah – Μια πραγματεία για τον αστρολάβο.
- Zij-i Ilkhani (Ilkhanic Tables) – Μια σημαντική αστρονομική πραγματεία, που ολοκληρώθηκε το 1272.
- Sharh al-Isharat
- Awsaf al-Ashraf ένα σύντομο μυστικιστικό-ηθικό έργο στα περσικά.
- Tajrīd al-Iʿtiqād Σιιτικά δόγματα.
- Talkhis al-Muhassal (σύνοψη περιλήψεων).
- Maṭlūb al-muʾminīn (Desideratum των πιστών).
- Aghaz u anjam - Εσωτερική ερμηνεία του Κορανίου

Ο Ṭusi φαίνεται ότι ξεκίνησε τη δική του εκπαίδευση στις κλασικές μαθηματικές επιστήμες παράγοντας εργασιακές εκδόσεις στα αραβικά υπαρχόντων αριστουργημάτων, κειμένων που ονόμαζε συστηματικά Taḥrirs, έναν όρο που είναι δύσκολο να μεταφραστεί επακριβώς, αλλά που θα μπορούσε να αποδοθεί κατά προσέγγιση με «διαγραφή». Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτό που θα έκανε ήταν να έπαιρνε όλες τις διαθέσιμες αραβικές μεταφράσεις ενός δεδομένου κειμένου και στη συνέχεια να το ξαναγράψει στη δική του εκδοχή βασιζόμενος σε όλες τις προηγούμενες μεταφράσεις και επιλέγοντας από αυτές τις λέξεις που πίστευε ότι έβγαζε καλύτερα. το επιδιωκόμενο επιστημονικό νόημα του κειμένου. Όπου διαπίστωνε μια αποτυχία στη μετάφραση, δεν θα δίσταζε να αντικαταστήσει τα δικά του λόγια με τα δικά τους. Το κείμενο που απεικονίζει καλύτερα τη μέθοδο του Ṭusi από αυτή την άποψη είναι το Taḥrir Al-Majesṭi. Εκεί αντικατέστησε τους υπολογισμούς χορδών που χρησιμοποιήθηκαν από τον Πτολεμαίο στα προηγούμενα κεφάλαια της Al-Majesṭi με τα πιο τρέχοντα τριγωνομετρικά τους ισοδύναμα που ο Τούσι γνώριζε ότι ήταν ευρέως αποδεκτοί και χρησιμοποιήθηκαν στην εποχή του. Στα μεταγενέστερα βιβλία της Al-Majesṭi, όπου ο Πτολεμαίος επανέλαβε, για κάθε πλανήτη, την ίδια επαναληπτική μέθοδο για τον προσδιορισμό των ισοδύναμων των διαφόρων πλανητών (δηλαδή, για κάθε πλανήτη, το πραγματικό σημείο σε κάποια απόσταση από τη γη γύρω από το οποίο περιστρεφόταν ο επίκυκλός του) , ο Ṭusi προχώρησε και έδωσε ένα παράδειγμα της μεθόδου και στη συνέχεια το εφάρμοσε στους διάφορους πλανήτες εισάγοντας και διαφοροποιώντας απλώς τις συγκεκριμένες παραμέτρους του καθενός. Με αυτό τον τρόπο του Tusi έχουμε την θεωρία του Πτολεμαίου αλλά με τη νεότερη και πιο ακριβή μεθοδολογία του Tusi.Ο τρόπος του ήταν ένας κάπως ιδιότυπος αλλά εξαιρετικά χρήσιμος τρόπος μιας νέας επιστημονικής σύνθεσης. Ένιωθε ελεύθερος να χρησιμοποιήσει τις προηγούμενες ιδέες, να τις προσθέσει, να τις εξωραΐσει, να τις επεξεργαστεί με τη σύγχρονη έννοια της επεξεργασίας, να τις αναδιατάξει και να τις επαναδιατυπώσει όπου έκρινε σκόπιμο και, τέλος, να παράσχει τη δική του διατύπωση για συγκεκριμένες έννοιες που θα εξέφραζαν πιο συνεκτικά το επιδιωκόμενο, έτσι ώστε το κείμενο να γίνει πιο σχετικό με τη δική του εποχή. Αυτή η τεχνική επέτρεψε επίσης στον Ṭusi να κάνει δικά του σχόλια που είτε ήταν σχετικά με το αρχικό περιεχόμενο του κειμένου είτε με την αραβική γλώσσα της μετάφρασης. Στο ίδιο Taḥrir Al-majesṭi, έλεγε, για παράδειγμα, ότι μια τέτοια έννοια στο αρχικό κείμενο ήταν δύσκολο να ακολουθηθεί ή δύσκολο να πιστέψει, και στη συνέχεια καλούσε τον αναγνώστη να την εξετάσει περαιτέρω, ή υπόσχεται ότι ο ίδιος θα επανέλθει σε αυτό στα δικά του μεταγενέστερα γραπτά. Όσο για τη γλώσσα, έλεγε συχνά ότι άλλες μεταφράσεις έδιναν αυτή ή την άλλη επιλογή λέξεων αντί για αυτήν που είχε επιλέξει, και επίσης κατά καιρούς άφηνε και τις δύο αναγνώσεις δίπλα-δίπλα στον αναγνώστη να τις συγκρίνει και να τις επιλέξει. Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα κείμενα του Ṭusi αντικατέστησαν πλήρως τα πρωτότυπα και ως αποτέλεσμα γινόταν όλο και πιο δύσκολο να εντοπιστούν τα πρωτότυπα αντίστοιχα.

Ο ίδιος συμμετείχε στις συζητήσεις που μαίνονταν για αιώνες στον ισλαμικό πολιτισμό σχετικά με τη φύση του Ευκλείδειου πέμπτου αξιώματος (το «Παράλληλο αξίωμα») είναι ύψιστης σημασίας και μαζί με τη συμβολή άλλων κράτησε αυτή τη συζήτηση ζωντανεί μέχρι τον 18ο και 19ο αιώνα, όταν τελικά οδήγησε στην ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Η αλληλογραφία του ίδιου του Ṭusi με τον ʿAlam-al-Din Qayṣar[1], τον συμμαθητή και συνάδελφό του από τις ημέρες της μαθητείας τους υπό την κηδεμονία του Kamāl-Al-Din.

Το πιο γνωστό θεώρημα είναι το ζεύγος Tusi (γνωστό και ως μηχανισμός Tusi) είναι μια μαθηματική συσκευή στην οποία ένας μικρός κύκλος περιστρέφεται μέσα σε έναν μεγαλύτερο κύκλο διπλάσια από τη διάμετρο του μικρότερου κύκλου. Οι περιστροφές των κύκλων προκαλούν ένα σημείο στην περιφέρεια του μικρότερου κύκλου να ταλαντώνεται εμπρός και πίσω σε γραμμική κίνηση κατά μήκος μιας διαμέτρου του μεγαλύτερου κύκλου. Το ζεύγος Tusi είναι ένα υποκυκλοειδές με 2 άκρες. Είναι η λύση του Tusi για τη γεωγραφική κίνηση των κατώτερων πλανητών και αργότερα. χρησιμοποιείται ευρέως ως υποκατάστατο του ισοδύναμου που εισήχθη πάνω από χίλια χρόνια νωρίτερα στην Al-majesṭi του Πτολεμαίου.

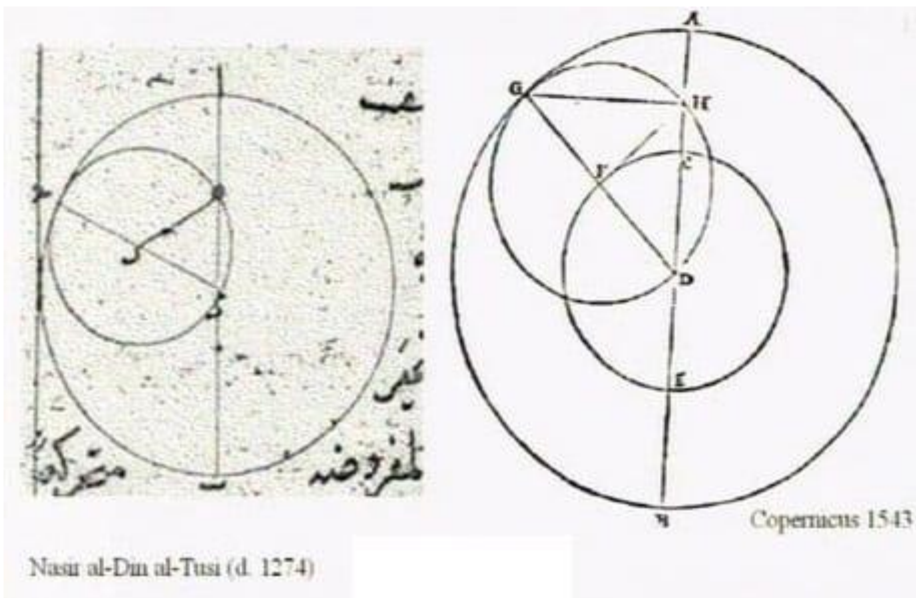
Δηλαδή εάν δύο ομοεπίπεδοι κύκλοι, η διάμετρος του ενός είναι ίση με το ήμισυ της διαμέτρου του άλλου, θεωρούνται εσωτερικά εφαπτόμενοι σε ένα σημείο και εάν ένα σημείο λαμβάνεται στον μικρότερο κύκλο - και έστω ότι είναι στο σημείο εφαπτομένη - και αν οι δύο κύκλοι κινούνται με απλές κινήσεις σε αντίθετη κατεύθυνση με τέτοιο τρόπο ώστε η κίνηση του μικρότερου (κύκλου) να είναι διπλάσια από αυτή του μεγαλύτερου, οπότε ο μικρότερος συμπληρώνει δύο περιστροφές για κάθε περιστροφή του μεγαλύτερου, τότε αυτό το σημείο θα φαίνεται να κινείται στη διάμετρο του μεγαλύτερου κύκλου που αρχικά διέρχεται από το σημείο εφαπτομένης, ταλαντούμενος μεταξύ των τελικών σημείων.

Αλγεβρικά, το μοντέλο μπορεί να εκφραστεί με μιγαδικούς αριθμούς ως

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}-\frac{1}{2}\,e^{-i\theta}=isin\theta$$

Το ζεύγος Tusi μπορεί να ερμηνευθεί ως κυλιόμενη καμπύλη όπου η περιστροφή του εσωτερικού κύκλου ικανοποιεί μια συνθήκη μη ολίσθησης καθώς το εφαπτομενό του σημείο κινείται κατά μήκος του σταθερού εξωτερικού κύκλου.

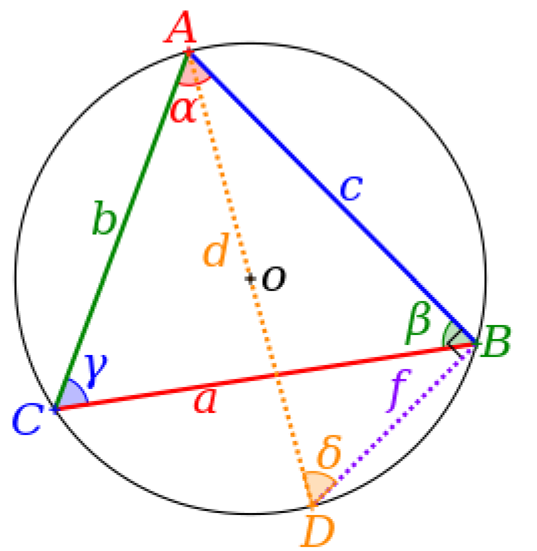
Ο όρος "ζεύγος Tusi" είναι μια από τις πολλές ισλαμικές αστρονομικές συσκευές που έχουν εντυπωσιακή ομοιότητα με τα μοντέλα του De Revolutionibus του Nicolaus Copernicus, συμπεριλαμβανομένου του μοντέλου του Ερμή και της θεωρίας του τρόμου. Οι ιστορικοί υποπτεύονται ότι ο Κοπέρνικος ή άλλος Ευρωπαίος συγγραφέας είχαν πρόσβαση στα αραβικά αστρονομικά κείμενα, αλλά δεν έχει ακόμη εντοπιστεί μια ακριβής αλυσίδα μετάδοσης. Ο επιστήμονας και περιηγητής του 16ου αιώνα Guillaume Postel έχει προταθεί ως ένας πιθανός άνθρωπος που μετέφερε τη γνώση στο δυτικό κόσμο΄. Δεδομένου ότι το ζεύγος Tusi χρησιμοποιήθηκε από τον Κοπέρνικο στην αναδιατύπωση της μαθηματικής αστρονομίας, υπάρχει μια η σιγουριά πως γνώση αυτή ήρθε στην Ευρώπη με κάποιο τρόπο όπως ότι η ιδέα του ζεύγους Tusi μπορεί να έφτασε στην Ευρώπη αφήνοντας λίγα χειρόγραφα ίχνη, καθώς θα μπορούσε να είχε συμβεί χωρίς τη μετάφραση οποιουδήποτε αραβικού κειμένου στα λατινικά. Μια πιθανή οδός μετάδοσης μπορεί να ήταν μέσω της βυζαντινής επιστήμης. Ο Γρηγόριος Χιονιάδης μετέφρασε μερικά από τα έργα του Al-Tusi από τα αραβικά στα βυζαντινά ελληνικά. Αρκετά βυζαντινά ελληνικά χειρόγραφα που περιέχουν το ζεύγος Tusi σώζονται ακόμη στην Ιταλία. Το μόνο σίγουρο είναι πως ο Copernicus είχε γνώση του θεωρήματος του Tusi ώστε να διατυπώση τη μεγαλειώδη αστρονομική του θεωρία.



Nasir al-Din al-Tusi (d. 1274)
Copernicus 1543

Ο Al-Tusi ήταν ο πρώτος που έγραψε ένα έργο για την τριγωνομετρία ανεξάρτητα από την αστρονομία. Ο Al-Tusi, στο έργο του για το Τετράπλευρο , έδωσε μια εκτενή έκθεση της σφαιρικής τριγωνομετρίας , διαφορετική από την αστρονομία. Ήταν στα έργα του Al-Tusi που η τριγωνομετρία πέτυχε την ιδιότητα ενός ανεξάρτητου κλάδου των καθαρών μαθηματικών διαφορετικού από την αστρονομία, με την οποία είχε συνδεθεί για τόσο καιρό. Ήταν ο πρώτος που απαρίθμησε τις έξι διακριτές περιπτώσεις ορθογωνίου τριγώνου στη σφαιρική τριγωνομετρία. Αυτό ακολούθησε παλαιότερη εργασία Ελλήνων μαθηματικών όπως ο Μενέλαος της Αλεξάνδρειας , ο οποίος έγραψε ένα βιβλίο για τη σφαιρική τριγωνομετρία που ονομάζεται Sphaerica , και οι προηγούμενοι μουσουλμάνοι μαθηματικοί Abū al-Wafā' al-Būzjānī και Al-Jayyani .

Στο έργο του *On the Sector Figure* , εμφανίζεται ο περίφημος Ημιτονοειδής Νόμος για τα επίπεδα τρίγωνα: $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$. Δήλωσε επίσης τον νόμο ημιτόνου για τα σφαιρικά τρίγωνα, ανακάλυψε τον νόμο των εφαπτομένων για τα σφαιρικά τρίγωνα και παρείχε αποδείξεις για αυτούς τους νόμους.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, ας υπάρχει ένας κύκλος με εγγεγραμμένο ABC και ένας άλλος εγγεγραμμένος ADB που διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου. Η $A\hat{B}C=90^o$είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο οπότε το ABD είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $sinD=\frac{c}{2R}$ όπου $R=\frac{d}{2}$ είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Οι γωνίες c και d βαίνουν στο ίδιο τόξο οπότε είναι ίσες. Άρα $sind=sinc=\frac{c}{2R}$ με $2R=\frac{c}{sinc}$. Αν δουλέψουμε με την ίδια διαδικασία και στο ADB θα έχουμε

$$\frac{a}{sina}=\frac{b}{sinb}=\frac{c}{sinc}=2R$$

Ο Al Tusi είναι γνωστός για το έργο του στην αστρονομία, ιδιαίτερα για την κατασκευή του Rasad Khaneh, ενός από τα μεγαλύτερα αστεροσκοπεία της εποχής του στο Maragheh, το οποίο βρίσκεται στο σημερινό Ιράν. Εκεί, συγκέντρωσε και βελτίωσε αστρονομικές παρατηρήσεις. Στη φιλοσοφία, ο Al Tusi έγραψε σημαντικά έργα που επηρεάστηκαν από τον Αριστοτέλη και τον Πλάτωνα, και αναφέρθηκε σε θέματα όπως η ηθική και η δικαιοσύνη. Το βιβλίο του "Akhlāq-i Nāsirī" είναι ένα από τα πιο γνωστά έργα του, που ασχολείται με την ηθική φιλοσοφία και την κοινωνική συμπεριφορά.

Η εργασία του Nasir al-Din al-Tusi είχε σημαντικό αντίκτυπο στους τομείς της επιστήμης και της φιλοσοφίας. Οι αστρονομικές του παρατηρήσεις και οι βελτιώσεις στις μαθηματικές μεθόδους επηρέασαν βαθιά τη μεταγενέστερη ευρωπαϊκή Αναγέννηση και την επιστημονική επανάσταση. Οι ιδέες του για την ηθική και τη φιλοσοφία συνέβαλαν επίσης στη διαμόρφωση της ισλαμικής σκέψης. Ο Al Tusi παραμένει μια σημαντική μορφή στη ιστορία της επιστήμης και της φιλοσοφίας, και τα έργα του συνεχίζουν να μελετώνται και να εκτιμώνται μέχρι σήμερα. Ο Tusi αναδείχθηκε ως μαθηματικός πρώτης βαθμίδας τη μεσσαιωνική περίοδο, οι δεξιότητές του στα μαθηματικά του επέτρεψαν να γράψει πολλά βιβλία μαθηματικών με αξιοσημείωτη προσφορά για μαθηματική επιστήμη. Τα βιβλία του έγινα πρότυπο για τις επόμενες γενιές μαθηματικών.

Thābit

Ο Thābit γεννήθηκε στο Harran στην Άνω Μεσοποταμία, η οποία εκείνη την εποχή ήταν μέρος της υποδιαίρεσης Diyar Mudar της περιοχής Al-Jazira του Χαλιφάτου των Αβασιδών. Ο Thābit ανήκε στους Σαβιανούς του Χαρράν, μια εξελληνισμένη σημιτική πολυθεϊστική αστρική θρησκεία που υπήρχε ακόμα στο Χαρράν του ένατου αιώνα.[Ως νέος, ο Thābit εργάστηκε ως υπάλληλοε σε ανταλλακτήριο χρημάτων στο Harran μέχρι που γνώρισε τον Muhammad ibn Mūsā, τον παλαιότερο από τους τρεις μαθηματικούς και αστρονόμους γνωστούς ως Banū Mūsā. Ο Thābit επέδειξε τόσο εξαιρετικές γλωσσικές δεξιότητες που ο ibn Mūsā τον επέλεξε να έρθει στη Βαγδάτη για να εκπαιδευτεί στα μαθηματικά, την αστρονομία και τη φιλοσοφία υπό την κηδεμονία του.Ο Thābit εισήχθη όχι μόνο σε μια κοινότητα λογίων αλλά και σε εκείνους που είχαν σημαντική δύναμη και επιρροή στη Βαγδάτη. Ο Thābit και οι μαθητές του ζούσαν στη μέση της πιο ζωντανής πνευματικά και πιθανώς της μεγαλύτερης πόλης της εποχής, της Βαγδάτης. Ο Thābit αρχικά μεταφράζει ελληνικά μαθηματικά κείμενα.Αυτό που είναι άγνωστο είναι πώς ο Banū Mūsā και ο Thābit ασχολήθηκαν με τα .μαθηματικά, την αστρονομία, την αστρολογία, τη μαγεία, τη μηχανική, την ιατρική και τη φιλοσοφία. Μέχρι το τέλος της ζωής του, ο Thābit είχε καταφέρει να γράψει 150 έργα για τα μαθηματικά, την αστρονομία και την ιατρική αλλά υπάρχουν λιγότερα από 12 έργα του που έχουν διασωθεί.

Πολλά από ελληνικά μαθηματικά κείμενα που γνωρίζουμε οφείλεται στη μετάφραση τους στα αραβικά εκείνη την περίοδο. Ο Thābit έκανε πολλές μεταφράσεις ώστε να δούμε μία άνθηση της ελληνικής μάθησης στον αραβικό κόσμο. Αλλά ξέχωρα από το ρόλο του αυτό ο Thābit υπήρξε ένας λαμπρός μαθηματικός με πολλές σημαντικές μαθηματικές αποκαλύψεις. Αν και ο Thabit συνέβαλε σε διάφορους τομείς, το πιο σημαντικό από το έργο του ήταν στα μαθηματικά, όπου ο ίδιος βοήθησε στην επέκταση της έννοιας του αριθμου σε πραγματικούς αριθμούς(θετικούς), στον ολοκληρωτικό λογισμό, σφαιρική τριγωνομετρία, στην αναλυτική γεωμετρία και στη μη ευκλείδεια γεωμετρία.

Το έργο του Thābit είναι αξιοσημείωτο πάνω στη θεωρία αριθμών για τους φιλικούς αριθμούς. Ο Thabit ισχυρίζεται ότι ο Πυθαγόρας ξεκίνησε τη μελέτη των τέλειων και φιλικών αριθμών. Αυτός ο ισχυρισμός, που πιθανότατα έγινε για πρώτη φορά από τον Ιάμβλιχο στη βιογραφία του για τον Πυθαγόρα που γράφτηκε τον τρίτο αιώνα μ.Χ. όπου έδωσε τους φιλικούς αριθμούς 220 και 284, είναι σχεδόν σίγουρα ψευδής. Ωστόσο ο Thabit δηλώνει πολύ σωστά ότι παρόλο που ο Ευκλείδης και ο Νικόμαχος μελέτησαν τέλειους αριθμούς, και ο Ευκλείδης έδωσε έναν κανόνα για τον προσδιορισμό τους.[1]

Αφού δώσει εννέα λήμματα, ο Thabit δηλώνει και αποδεικνύει το θεώρημά του: Για $n > 1$ έχουμε $p_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^n$ και $p_2 = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1}$, $p_3 = 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ είναι τρεις πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι από 2 τότε $\alpha_1 = 2^n p_1 \cdot p_2$ και $a_2 = 2^n p_3$ είναι φιλικοί αριθμοί με α υπερτέλειος (αριθμός είναι ένας ακέραιος αριθμός για τον οποίο το άθροισμα των κατάλληλων διαιρετών του είναι μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό) και β είναι ελλιπής αριθμός (ο αριθμός είναι ένας ακέραιος για τον οποίο το άθροισμα των κατάλληλων διαιρετών του είναι μικρότερο από τον ίδιο τον αριθμό.Για ένα υπερτέλειο αριθμό n ισχύει $S(n) > n$ και για τον ελλιπή αριθμό n ισχύει $S(n) < n$.Με βάση τα παραπάνω ο Thabit ήταν πιθανώς ο πρώτος που ανακάλυψε το ζευγάρι των φιλικών αριθμών 17296, 18416. Πρώτον, ο κανόνας του Thabit δεν είναι καθόλου ασήμαντος και ξεπερνά οι αριθμητικές θεωρητικές γνώσεις διαθέσιμες στην ελληνική αρχαιότητα. Δεύτερον, η ανάλυση της ανακάλυψης του Thabit μπορεί να δώσει νέες γνώσεις για τον τρόπο με τον οποίο αυτά δύο παραδόσεις ενσωματώθηκαν στα ισλαμικά μαθηματικά. Τρίτον, η ανάλυσή της οδηγεί σε καλύτερη κατανόηση της δομής των φιλικών αριθμών.

Το έργο του Thabit για τους φιλικούς αριθμούς αποτελείται από 10 προτάσεις, οι οποίες μπορούν να είναι χωρίζεται σε τέσσερις ομάδες: 1-4, 5-6, 7-9 και 10. Η πρόταση 10 περιέχει τον κανόνα και η απόδειξη του. Οι προτάσεις 1-4 είναι προκαταρκτικές: Οι προτάσεις 1-3 απαριθμούν τους διαιρέτες $n = \alpha \cdot \beta$ με α, β πρώτους ή σύνθετους, και η πρόταση 4 αφορά μία ιδιότητα μιας γεωμετρικής σειράς της οποίας οι όροι είναι σε αναλογία $1:2$.

Στη πρόταση 5 έχουμε αν $\alpha = 2^n p$ με p πρώτος αριθμός. Όταν

$\sigma_o \alpha = 2^{n+1} - 1 + 2^n p - p$.Επομένως, αν $p = 2^{n+1} - 1$, με α είναι τέλειος.

Αν $p < 2^{n+1} - 1$, με α είναι υπερτέλειος.

Αν $p > 2^{n+1} - 1$, με α είναι ελλιπής αριθμός.

Στην πρόταση 6 αναφέρει $\alpha = 2^n p_1 p_2$ με p_1, p_2 να είναι πρώτοι αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν $k = 2^{n+1} - 1 + (2^{n+1} - 1)(p_1 + p_2)$ και $\sigma_o(\alpha) = k + 2^n p_1 p_2 - p_1 p_2$. Επομένως αν $p_1 \cdot p_2 < k$, όταν είναι υπερτέλειος ενώ αν $p_1 \cdot p_2 > k$ όταν είναι ελλιπής, η απόδειξη είναι δομημένη με τον Ευκλείδειο τρόπο.

Αν α,β,γ και δ είναι φυσικοί αριθμοί και $\alpha:\beta:\gamma:\delta = 1:2:4:8$. Τότε οι προτάσεις:

7. $\gamma(\gamma + \delta)(\gamma + \beta) = \gamma\delta(\alpha + \delta)$

8. $\gamma(\beta + \delta + 2\gamma) = \delta(\alpha + \delta)$

9. $\delta(\alpha + \delta - 1) = \gamma[\delta(\alpha + \delta) - 1] - (\delta + \gamma - 1)(\beta + \gamma - 1)$

Οι προτάσεις 7 και 8 είναι απαραίτητες για την απόδειξη της πρότασης 9. Πρόταση 9, με τη σειρά του, παίζει κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη της Πρότασης 10. Η απόδειξη της πρότασης 10 είναι :

$z = 1 + 2 + 2^2 + \cdots \ldots . + 2^n$ και έχουμε:

$p_1 = z + 2^n$

$p_2 = z - 2^{n-1}$

$p_3 = 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$.

Θεώρημα : Αν p_1 , p_2 και p_3 είναι διακριτοί πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 2, τότε $\alpha_1 = 2^n p_1 p_2$ και $\alpha_2 = 2^n p_3$ είναι φιλικοί αριθμοί.

Ο Thabit στην απόδειξη του ορίζει $\sigma_0(\alpha_1) = \alpha_2$ και $\sigma_0(\alpha_2) = \alpha_1$ εξετάζει τη διαφορά $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_2 - \sigma_0(\alpha_2), \sigma_0(\alpha_1) - \alpha_1$. Από την πρόταση 5 έχουμε

$\alpha_2 - \sigma_0(\alpha_2) = p_3 - (2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}[(2^{n+1} - 1) + 2^{n-2}]$.

Από την πρόταση 6 έχουμε : $\sigma_0(\alpha_1) - \alpha_1 = 2^{n+1}[(2^{n+1} - 1) + 2^{n-2}]$.

Από τη διαφορά $\alpha_2 - \alpha_1 = 2^n(p_3 - p_1 p_2)$ τότε έχουμε το $p_2 = 2^{n-1} + 2^n - 1$ οπότε :

$a_2 - a_1 = 2^n\{[2^{n+1}(2^{n-2} + 2^{n+1}) - 1] - (2^{n+1} - 2^n - 1)(2^{n-1} + 2^n - 1)\}$

Επομένως από την πρόταση 9, έχουμε $\alpha = 2^{n-2}$,$\beta = 2^{n-1}$,$\gamma = 2^n$, $\delta = 2^{n+1}$ και $\alpha_2 - \alpha_1 = 2^{n+1}[(2^{n-2} + 2^{n+1}) - 1]$

Συμπερασματικά έχουμε $\alpha_2 - \sigma_0(\alpha_2) = \sigma_0(\alpha_1) - \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1$, άρα $\sigma_0(\alpha_1) = \alpha_2$ και $\sigma_0(\alpha_2) = \alpha_1$

Ο Thabit είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι είναι ο πρώτος που ερεύνησε τους διαιρέτες του φιλικού ζεύγος 220, 284, που πιθανότατα γνώριζε από αρχαία πηγή μάλλον από τον Ιάμβλιχο.

Μια άλλη σημαντική πτυχή του έργου του Thabit ήταν το βιβλίο του για τη σύνθεση των αναλογιών. Σε αυτό το Thabit ασχολείται με αριθμητικές πράξεις που εφαρμόζονται σε λόγους γεωμετρικών μεγεθών. Οι Έλληνες είχαν ασχοληθεί με τα γεωμετρικά μεγέθη αλλά δεν τα είχαν σκεφτεί με τον ίδιο τρόπο όπως αριθμούς στους οποίους μπορούσαν να εφαρμοστούν οι συνήθεις αριθμητικοί κανόνες. Με την εισαγωγή αριθμητικών πράξεων σε ποσότητες που προηγουμένως θεωρούνταν γεωμετρικές και μη αριθμητικές, ο Thabit ξεκίνησε μια τάση που οδήγησε τελικά στη γενίκευση της έννοιας του αριθμού.

Ο Thabit γενίκευσε το θεώρημα του Πυθαγόρα σε ένα αυθαίρετο τρίγωνο. Εργάστηκε πάνω στις παραβολές, τριχοτόμηση της γωνίας και τα μαγικά τετράγωνα. Η εργασία του Thabit για τις παραβολές και τα παραβολικά είναι ιδιαίτερης σημασίας καθώς είναι ένα από τα βήματα που έγιναν προς την ανακάλυψη του ολοκληρωτικού λογισμού. Ένα σημαντικό ζήτημα εδώ είναι αν ο Thabit ήταν γνώστηςς με τις μεθόδους του Αρχιμήδη. Πάρα πολλοί ιστορικοί θεωρούν ότι ο Thabit ήταν εξοικειωμένος με τα αποτελέσματα του Αρχιμήδη σχετικά με το τετράγωνο της παραβολής. Στην πραγματικότητα ο Thabit υπολόγισε αποτελεσματικά το ολοκλήρωμα του $\sqrt{x}$. Ο υπολογισμός βασίζεται ουσιαστικά στην εφαρμογή των ανώτερων και κατώτερων αθροισμάτων ολοκληρώματος και η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της εξάντλησης: εκεί, για πρώτη φορά, το τμήμα της ολοκλήρωσης χωρίζεται σε άνισα μέρη.

Σύμφωνα με τον Copernicus, ο Thabit προσδιόρισε τη διάρκεια του αστρονομικού έτους ως 365 ημέρες, 6 ώρες, 9 λεπτά και 12 δευτερόλεπτα (σφάλμα 2 δευτερολέπτων). Ο Copernicus στήριξε τον ισχυρισμό του στο λατινικό κείμενο που αποδίδεται στον Thabit . Ο Thabit δημοσίευσε τις παρατηρήσεις του για τον Ήλιο. Στους τομείς της μηχανικής και της φυσικής μπορεί να αναγνωριστεί ως ο ιδρυτής της στατικής. Παρατήρησε συνθήκες ισορροπίας σωμάτων, δοκών και μοχλών. Ο Thabit έγραψε επίσης για φιλοσοφικά και κοσμολογικά θέματα, αμφισβητώντας μερικές από τις θεμελιώδεις αρχές του Αριστοτελικού Κόσμου. Στο σημείο που ο Thabit έκανε μέγα λάθος ήταν η μεσαιωνική αστρονομική θεωρία του τρόμου των ισημεριών.

Η μητρική γλώσσα του Thābit ήταν η συριακή και μιλούσε άπταιστα τόσο τα μεσαιωνικά ελληνικά όσο και τα αραβικά. Λόγω του ότι ήταν τρίγλωσσος, ο Thābit μπόρεσε να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο κατά τη διάρκεια του ελληνοαραβικού μεταφραστικού κινήματος. Έκανε επίσης μεταφραστική σχολή στη Βαγδάτη.O Thābit μετέφρασε από τα ελληνικά στα αραβικά έργα του Απολλώνιου της Πέργας, του Αρχιμήδη, του Ευκλείδη και του Πτολεμαίου. Αναθεώρησε τη μετάφραση των Στοιχείων του Hunayn ibn Ishaq του Ευκλείδη. Ξαναέγραψε επίσης τη μετάφραση του Ishaq ibn Hunayn του Almagest του Πτολεμαίου και μετέφρασε τη Γεωγραφία του Πτολεμαίου. Η μετάφραση του Thābit ενός έργου του Αρχιμήδη που έδινε την κατασκευή ενός κανονικού επτάγωνου ανακαλύφθηκε τον 20ο αιώνα, με το πρωτότυπο να είχε χαθεί. Ο Thābit μέσα από τις μεταφράσεις του συντέλεσε να έχουμε στα χέρια μας έργα μεταφρασμένα έργα που πολλά από τα αυτά έχουν χαθεί τα πρωτότυπα.

Συμπεράσματα

Η μελέτη της μαθηματικής ανάπτυξης κατά τον μεσαίωνα στην Κίνα, την Ινδία και τον Ισλαμικό κόσμο αποκαλύπτει την αξιοσημείωτη συμβολή αυτών των πολιτισμών στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. Κάθε ένας από αυτούς τους πολιτισμούς προσέφερε μοναδικές και σημαντικές καινοτομίες που όχι μόνο επηρέασαν τις τοπικές κοινωνίες τους, αλλά και διαμόρφωσαν τη μαθηματική γνώση όπως την ξέρουμε σήμερα.

Κίνα

Στην Κίνα, τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν μέσα από έργα όπως Mathematical Treatise in Nine Sections , που αποτέλεσε θεμέλιο για την κινεζική μαθηματική παράδοση. Σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως ο Li Zhi και ο Zhu Shijie εισήγαγαν νέες έννοιες στη γεωμετρία και την αριθμητική. Οι κινεζικές τεχνικές, όπως οι ράβδοι αρίθμησης και η χρήση του τριγωνομετρικού πίνακα, συνέβαλαν σημαντικά στην ακρίβεια των μαθηματικών υπολογισμών και στην ανάπτυξη της επιστήμης και της τεχνολογίας στην Ανατολική Ασία.

Ινδία

Στην Ινδία, η μαθηματική σκέψη αναπτύχθηκε μέσω καινοτομιών όπως το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και η χρήση του μηδενός ως αριθμού. Οι Ινδοί μαθηματικοί, όπως ο Brahmagupta , ο Aryabhata και ο Mahavira , έκαναν σημαντικές συνεισφορές στην αριθμητική, την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Ο Aryabhata υπολόγισε με ακρίβεια την περιφέρεια της Γης και ανέπτυξε τεχνικές για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων, ενώ ο Brahmagupta εισήγαγε την έννοια των αρνητικών αριθμών και ανέπτυξε μεθόδους για την επίλυση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων. Οι εξελίξεις αυτές δεν περιορίστηκαν μόνο στην Ινδία, αλλά διαδόθηκαν μέσω των εμπορικών και πολιτισμικών ανταλλαγών σε όλον τον κόσμο.

Ισλαμικός κόσμος

Ο Ισλαμικός κόσμος λειτούργησε ως γέφυρα μεταξύ της αρχαίας ελληνικής και της ινδικής μαθηματικής γνώσης, προσαρμόζοντας και εμπλουτίζοντας τα υπάρχοντα συστήματα. Μελετητές όπως ο Al-Khwarizmi το οποίο αποτέλεσε θεμέλιο για τη σύγχρονη άλγεβρα και εισήγαγε συστηματικές μεθόδους για την επίλυση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων, ενώ Al- Tusi και ο Al- Biruni διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά και στην αστρονομία μέσα από τα έργα τους έδωσα μία νέα οπτική στους τομείς που προσέγγισαν.

<u>Συμπέρασμα</u>

Η αλληλεπίδραση αυτών των πολιτισμών και η ανταλλαγή γνώσεων μέσω των εμπορικών δρόμων, των κατακτήσεων και των πολιτιστικών επαφών, διαμόρφωσε ένα θεμέλιο που επέτρεψε τη συνεχή ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών. Οι συνεισφορές τους δεν περιορίστηκαν μόνο στα μαθηματικά, αλλά επηρέασαν και άλλες επιστήμες όπως η αστρονομία, η μηχανική και η φυσική. Η κινεζική, ινδική και ισλαμική επιστημονική σκέψη απέδειξε την αξία της διαπολιτισμικής συνεργασίας και ανταλλαγής γνώσεων, δημιουργώντας μια διαρκή κληρονομιά που συνεχίζει να επηρεάζει την επιστημονική κοινότητα μέχρι και σήμερα. Η μελέτη αυτών των ιστορικών εξελίξεων μας επιτρέπει να κατανοήσουμε καλύτερα τη συνεχή πρόοδο της επιστημονικής σκέψης και την αναγκαιότητα της συνεργασίας και της αλληλεπίδρασης μεταξύ διαφορετικών πολιτισμών. Οι μαθηματικές επιτεύξεις της μεσαιωνικής περιόδου στην Κίνα, την Ινδία και τον Ισλαμικό κόσμο αποτελούν απόδειξη της διαρκούς ανθρώπινης επιδίωξης για γνώση και κατανόηση του κόσμου, αναδεικνύοντας τη σημασία της επιστημονικής έρευνας και της διεθνούς συνεργασίας στην πορεία της ανθρωπότητας. Ειδικότερα στην Κίνα και στην Ινδία θα δίναμε το χαρακτηρισμό μιας αλγοριθμικής φάσης εξέλιξης των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

1. Peng-Yoke, Biography in Dictionary of Scientific Biography (Νέα Υόρκη 1970 - 1990) .

2. LY Lam, Μια κριτική μελέτη του «Yang Hui suan fa»: μια κινεζική μαθηματική πραγματεία του δέκατου τρίτου αιώνα (Σιγκαπούρη, 1977)

3. Lay Yong Lam, A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa: A Thirteenth-Century Chinese Mathematical Treatise, μετάφραση από τα κινέζικα (1977) .

4. JC Martzloff, A history of Chinese Mathematics (Βερολίνο-Χαϊδελβέργη, 1997) .

5. JC Martzloff, Histoire des mathématiques chinoises (Παρίσι, 1987) .

6. Y Mikami, Μαθηματικά στην Κίνα και την Ιαπωνία (Νέα Υόρκη, 1961) .

7. J Needham, Science and Civilization in China III (Cambridge, 1959) .

8. K Shen, JN Crossley και A WC Lun, Τα εννέα κεφάλαια για τη μαθηματική τέχνη: Σύντροφος και σχολιασμός (Πεκίνο, 1999) .

9. GC Smith, S Radvansky και M Chiba, History of Mathematics and related Sciences: μια σχολιασμένη βιβλιογραφία πηγών που τηρείται από τη Βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου Monash (Clayton, 1992) .

10. G Abe, Μαγικά τετράγωνα που εμφανίζονται στα μαθηματικά του Yang-Hui (Ιαπωνικά) , Sugakushi Kenkyu 70 (1976) , 11 - 32 .

11. A Hirayama, Η χρονιά κατά την οποία ο Takakazu Seki αντέγραψε το «Yang Hui Suanfa» (Ιαπωνικά) , Sugakushi Kenkyu 68 (1976) , 1 - 2 .

12. J Needham, Yang Hui and the coming of Euclid, στο J Needham, Science and civilization in China Vol. 3 : Μαθηματικά και επιστήμες των ουρανών και της γης (Νέα Υόρκη, 1959) , Κεφάλαιο 6 .

13. AE Raik, Ο υπολογισμός ορισμένων τόμων στην παλαιά κινεζική πραγματεία «Μαθηματικά σε εννέα βιβλία» (Ρωσικά) , Istor.-Mat. Issled. No. 14 (1961) .

14. MK Siu, Πυραμίδα, σωρός και άθροισμα τετραγώνων, Historia Math. 8 (1) (1981) .

15. KQ Sun, τρίγωνο και ορίζουσα του Hui Yang (Κινέζικα) , Sichuan Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 17 (4) (1994) , 53 - 57 .

16. HA Sun, A note on computation of the area of a τετράπλευρο με διαφορετικές πλευρές (κινέζικα) , J. Liaoning Norm. Παν. Nat. Sci. 25 (3) (2002) .

17. Yen Tun-chieh, Μια μελέτη των μαθηματικών βιβλίων που γράφτηκαν από τον Yang Hui την περίοδο Sung, στο Discourses on the history of mathematics of the Sung and Yuan period (Πεκίνο 1966) .

18. LY Yong, το σχόλιο του Yang Hui στο κεφάλαιο 'ying nu' του Chiu chang suan shu, Historia Math. 1 (1) (1974) .

19. LY Yong, The Jih yung suan fa: ένα στοιχειώδες εγχειρίδιο αριθμητικής του δέκατου τρίτου αιώνα, Isis 63 (218) (1972) .

20. AP Yushkevich, Μελέτες στην ιστορία των μαθηματικών στην αρχαία Κίνα (Ρωσικά) , Voprosy Istor. Εστεστβόζναν. i Tekhn. (3) (1982) .

21. AP Youschkevitch, Nouvelles recherches sur l'histoire des mathématiques chinoises, Rev. Histoire Sci. Appl. 35 (2) (1982) .

22. LY Yong, το σχόλιο του Yang Hui στο κεφάλαιο «ying nu» του «Chiu chang suan shu», Historia Math. 1 (1) (1974) .

23. DM Zhou, «A syllabus of mathematics» και Hui Yang's methodology of διδασκαλία μαθηματικών (Κινέζικα) , J. Central China Normal Univ. Natur. Sci. 24 (3) (1990) .

24. J-C Martzloff, A history of Chinese mathematics (Berlin-Heidelberg, 1997).

25. J-C Martzloff, Histoire des mathématiques chinoises (Paris, 1987).

26. B Qian, History of Chinese mathematics (Chinese) (Peking, 1981).

27. K Chemla, Similarities between Chinese and Arabic mathematical writings I : Root extraction, Arabic Sci. Philos. 4 (2) (1994), 207-266.

28. S Guo, Preliminary research into Jia Xian's Huangdi Jiuzhang Suanjing Xicao (Chinese), Studies in the History of Natural Sciences 7 (4) (1988), 328 -334.

29. S Guo, Jia Xian, in Du Shiran (ed.), Zhongguo Gudai Kexuejia Zhuanji (Biographies of Ancient Chinese Scientists) (Beijing, 1992), 472 -479.

30. R Mei, Jia Xian's additive-multiplicative method for the extraction of roots (Chinese), Studies in the History of Natural Sciences 8 (1) (1989), 1 -8.

31. L Y Lam and T S Ang, Li Ye and his Yi gu yan duan (old mathematics in expanded sections), Arch. Hist. Exact Sci. 29 (3) (1984), 237-266.

32. H Peng-Yoke, Biography in Dictionary of Scientific Biography (Νέα Υόρκη 1970 - 1990) ..

33. JC Martzloff, A history of Chinese Mathematics (Βερολίνο-Χαϊδελβέργη, 1997) .

34. JC Martzloff, Histoire des mathématiques chinoises (Παρίσι, 1987) .

35. Li Yen, An outline of Chinese Mathematics (Chinese) Vol. I (Πεκίνο 1958) .

36. J Ilgauds, Li Ye, στο H Wussing and W Arnold (επιμ.) , Biographien bedeutender Mathematiker: Eine Sammlung von Biographien (Βερολίνο, 1983) , 77 - 80 .

37. O Mei Jung-chao, ο Li Chih και τα γραπτά του για τα μαθηματικά, στο Discourses on the history of mathematics of the Sung and Yuan period (Πεκίνο 1966) .

38. LY Lam και TS Ang, Li Ye and his Yi gu yan duan , Arch. Ιστορ. Ακριβής Επιστήμη. 29 (3) (1984) , 237-266 .

39. Amelia Carolina Sparavigna. Al-Biruni and the Mathematical Geography. Philica, 2014,

40. INDIA'S GREATEST MATHEMATICIAN BRAHMAGUPTA MayadharSwain

41. Satyanad Kichenassamy. Brahmagupta’s derivation of the area of a cyclic quadrilateral. Historia Mathematica, 2010,

42. On Zhu Shijie's Elimination Theory By Kenji Ueno

43. Pollet Charlotte. A comparison of algebraic practices in medieval China and India. History, Philosophy and Sociology of Sciences. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2012

44. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century , ULRICH LIBBRECHT

45. "Ṭūsī, Muḥammad Ibn Muḥammad Ibn al-Ḥasan". Dictionary of Scientific Biography. New York: Charles Scribner's Sons. 1970–1980. ISBN 978-0-684-10114-9.

46. O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., "Nasir al-Din Tusi", MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews

47. Kamaruzzaman, Kamar Oniah (2003). "Al-Biruni: Father of Comparative Religion". Intellectual Discourse

48. Kennedy, E.S.; Engle, Susan; Wamstad, Jeanne (1965). "The Hindu Calendar as Described in Al-Biruni's Masudic Canon". Journal of Near Eastern Studies

49. Khan, M.S. (1976). "Al-Biruni and the Political History of India". Oriens. 25/26: 86–115. doi:10.1163/18778372-02502601007. ISSN 0078-6527.

50. Bosworth, C. Edmund (2000). "Bīrūnī, Abū Rayḥān". Encyclopædia Iranica.

51. Al-Biruni; Sachau, Eduard (1910). Sachau, Eduard (ed.). Alberuni's India: An Account of the Religion, Philosophy, Literature, Geography, Chronology, Astronomy, Customs, Laws and Astrology of India about A.D. 1030

52. Yasin, Mohammed (1975). "Al-Biruni in India". Islamic Culture. 49: 207–213 – via Internet Archive.

53. Karamati, Younes; Melvin-Koushki, Matthew (2021). "al-Bīrūnī". In Madelung, Wilferd; Daftary, Farhad (eds.). Encyclopaedia Islamica Online. Brill Online.

54. Ghorbani, Abolghassem (1974). Bīrūnī nāmeh [A monograph on Abu Rayḥān al-Bīrūnī]. Tehran: Iranian National Heritage Society Press.

55. Kiple, Kenneth F.; Ornelas, Kriemhild Coneè (2001). The Cambridge World History of Food. Cambridge: Cambridge University Press.

56. Karl-Sudhof-Institut, Bereich Medizin, Karl-Marx- Universitiit,German Democratic Republic

57. Francis J. Carmody: The astronomical works of Thābit b. Qurra. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1960.

58. Churton, Tobias. The Golden Builders: Alchemists, Rosicrucians, and the First Freemasons. Barnes and Noble Publishing, 2006

59. Hakim S Ayub Ali. Zakhira-i Thābit ibn Qurra (preface by Hakim Syed Zillur Rahman), Aligarh, India, 1987

60. Rashed, Roshdi, ed. (2009a). Thābit ibn Qurra: Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad. Scientia Graeco-Arabica. Berlin: De Gruyter.

61. R Rashed, The development of Arabic mathematics : between arithmetic and algebra (London, 1994).

62. R Rashed, Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes (Paris, 1984).

63. F Rosen (trs.), Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi : Algebra (London, 1831).

64. K F Abdulla-Zade, al-Khwarizmi and the Baghdad astronomers (Russian), in The great medieval scientist al-Khwarizmi (Tashkent, 1985).

65. M Abdullaev, al-Khwarizmi and scientific thought in Daghestan (Russian), in The great medieval scientist al-Khwarizmi (Tashkent, 1985).

66. A Abdurakhmanov, al-Khwarizmi : great mathematician (Russian), in The great medieval scientist al-Khwarizmi (Tashkent, 1985).

67. M A Akhadova, The mathematics of India and al-Khwarizmi (Russian), in The great medieval scientist al-Khwarizmi (Tashkent, 1985).

68. S al-Khalidi, al-Khwarizmi : scholar of astronomical and mathematical geography (Arabic), in Proceedings of the Seventh Annual Conference on the History of Arabic Science (Arabic) (Aleppo, 1986).

69. A Allard, La diffusion en occident des premières oeuvres latines issues de l'arithmétique perdue d'al-Khwarizmi, J. Hist. Arabic Sci. 9 (1-2) (1991) .

70. P G Bulgakov, al-Biruni and al-Khwarizmi (Russian), in Mathematics and astronomy in the works of scientists of the medieval East (Tashkent, 1977).

71. J N Crossley and A S Henry, Thus spake al-Khwarizmi : a translation of the text of Cambridge University Library ms. Ii.vi.5, Historia Math. 17 (2) (1990).

72. Y Dold-Samplonius, Developments in the solution to the equation cx€ + bx = a from al-Khwarizmi to Fibonacci, in From deferent to equant (New York, 1987).

73. A S Kennedy and W Ukashah, al-Khwarizmi's planetary latitude tables, Centaurus 14 (1969).

74. M M Khairullaev, al-Khwarizmi and his era (Russian), Voprosy Istor. Estestvoznan. i Tekhn. (3) (1983).

75. P Kunitzsch, al-Khwarizmi as a source for the 'Sententie astrolabii', in From deferent to equant (New York, 1987).

76. G P Matvievskaya, The algebraic treatise of al-Khwarizmi (Russian), in On the history of medieval Eastern mathematics and astronomy (Tashkent, 1983).

77. G P Matvievskaya, History of the study of the scientific work of al-Khwarizmi (Russian),, in The great medieval scientist al-Khwarizmi (Tashkent, 1985).

78. C A Nallino, Al'Khuwarizimi e il suo rifacimento della Geografia di Tolomeo, Raccolta di scritti editie inediti V (Rome, 1944).

79. Bibhutibhusan Datta and Avadhesh Narayan Singh (1962). History of Hindu Mathematics: A Source Book.

80. Pingree, David (1970). "Mahāvīra". Dictionary of Scientific Biography. New York: Charles Scribner's Sons. .

81. Selin, Helaine (2008), Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures, Springer, Bibcode:2008ehst.book.....S,

82. Hayashi, Takao (2013), "Mahavira", Encyclopædia Britannica

83. O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (2000), "Mahavira", MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews

84. D Pingree, Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

85. G G Joseph, The crest of the peacock (London, 1991).

86. E T Bell, Mahavira's Diophantine system, Bull. Calcutta Math. Soc. 38 (1946).

87. B Datta, On Mahavira's solution of rational triangles and quadrilaterals, Bull. Calcutta Math. Soc. 20 (1932).

88. B Datta, On the relation of Mahavira to Sridhara, Isis 17 (1932).

89. J Filliozat, La science indienne antique, in R Taton (ed.), Histoire générale des sciences (Paris, 1957-1964).

90. R C Gupta, Rectification of ellipse from Mahavira to Ramanujan, Ganita Bharati 15 (1-4) (1993).

91. T Hayashi, Mahavira's formulas for a conch-like plane figure, Ganita Bharati 14 (1-4) (1992).

92. H T Colebrooke, Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara (1817).

93. G Ifrah, A universal history of numbers : From prehistory to the invention of the computer (London, 1998).

94. S S Prakash Sarasvati, A critical study of Brahmagupta and his works : The most distinguished Indian astronomer and mathematician of the sixth century A.D. (Delhi, 1986).

95. S P Arya, On the Brahmagupta- Bhaskara equation, Math. Ed. 8 (1) (1991).

96. G S Bhalla, Brahmagupta's quadrilateral, Math. Comput. Ed. 20 (3) (1986).

97. B Chatterjee, Al-Biruni and Brahmagupta, Indian J. History Sci. 10 (2) (1975).

98. B Datta, Brahmagupta, Bull. Calcutta Math. Soc. 22 (1930), 39-51.

99. K Elfering, Die negativen Zahlen und die Rechenregeln mit ihnen bei Brahmagupta, in Mathemata, Boethius Texte Abh. Gesch. Exakt. Wissensch. XII (Wiesbaden, 1985.

100. R C Gupta, Brahmagupta's formulas for the area and diagonals of a cyclic quadrilateral, Math. Education 8 (1974).

101. R C Gupta, Brahmagupta's rule for the volume of frustum-like solids, Math. Education 6 (1972),.

102. R C Gupta, Munisvara's modification of Brahmagupta's rule for second order interpolation, Indian J. Hist. Sci. 14 (1) (1979).

103. S Jha, A critical study on 'Brahmagupta and Mahaviracharya and their contributions in the field of mathematics', Math. Ed. (Siwan) 12 (4) (1978).

104. S C Kak, The Brahmagupta algorithm for square rooting, Ganita Bharati 11 (1-4) (1989).

105. T Kusuba, Brahmagupta's sutras on tri- and quadrilaterals, Historia Sci. 21 (1981).

106. G Ifrah, A universal history of numbers : From prehistory to the invention of the computer (London, 1998).

107. H-J Ilgauds, Aryabhata I, in H Wussing and W Arnold, Biographien bedeutender Mathematiker (Berlin, 1983).

108. A Ahmad, On the π of Aryabhata I, Ganita Bharati 3 (3-4) (1981).

109. R Behari, Aryabhata as a mathematician, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

110. R Billard, Aryabhata and Indian astronomy, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

111. G M Bongard Levin, Aryabhata and Lokayatas, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

112. E M Bruins, With roots towards Aryabhata's π-value, Ganita Bharati 5 (1-4) (1983).

113. B Chatterjee, A glimpse of Aryabhata's theory of rotation of earth, Indian J. History Sci. 9 (1) (1974).

114. B Datta, Two Aryabhatas of al-Biruni, Bull. Calcutta Math. Soc. 17 (1926).

115. S L Dhani, Manvantara theory of evolution of solar system and Aryabhata, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

116. K Elfering, The area of a triangle and the volume of a pyramid as well as the area of a circle and the surface of the hemisphere in the mathematics of Aryabhata I, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

117. E G Forbes, Mesopotamian and Greek influences on ancient Indian astronomy and on the work of Aryabhata, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

118. Ganitanand, Some mathematical lapses from Aryabhata to Ramanujan, Ganita Bharati 18 (1-4) (1996).

119. R C Gupta, Aryabhata, ancient India's great astronomer and mathematician, Math. Education 10 (4) (1976).

120. R C Gupta, A preliminary bibliography on Aryabhata I, Math. Education 10 (2) (1976).

121. R C Gupta, Aryabhata I's value of π, Math. Education 7 (1973).

122. B Ishwar, Development of Indian astronomy at the time of Aryabhata I, Ganita Bharati 6 (1-4) (1984).

123. L C Jain, Aryabhata I and Yativrsabha - a study in Kalpa and Meru, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

124. P Jha, Aryabhata I : the man and author, Math. Ed. (Siwan) 17 (2) (1983).

125. P Jha, Aryabhata I and the value of π, Math. Ed. (Siwan) 16 (3) (1982).

126. S Kak, The Aryabhata cipher, Cryptologia 12 (2) (1988).

127. M S Khan, Aryabhata I and al-Biruni, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

128. C Müller, Volumen und Oberfläche der Kugel bei Aryabhata I, Deutsche Math. 5 (1940).

129. S Parameswaran, On the nativity of Aryabhata the First, Ganita Bharati 16 (1-4) (1994).

130. B N Prasad and R Shukla, Aryabhata of Kusumpura, Bull. Allahabad Univ. Math. Assoc. 15 (1951).

131. R N Rai, The Ardharatrika system of Aryabhata I, Indian J. History Sci. 6 (1971).

132. S N Sen, Aryabhata's mathematics, Bull. Nat. Inst. Sci. India 21 (1963).

133. M L Sharma, Indian astronomy at the time of Aryabhata, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

134. M L Sharma, Aryabhata's contribution to Indian astronomy, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

135. K S Shukla, Use of hypotenuse in the computation of the equation of the centre under the epicyclic theory in the school of Aryabhata I, Indian J. History Sci. 8 (1973).

136. K S Shukla, Aryabhata I's astronomy with midnight day-reckoning, Ganita 18 (1967).

137. K S Shukla, Glimpses from the 'Aryabhata-siddhanta', Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

138. B L van der Waerden, The 'Day of Brahman' in the work of Aryabhata, Arch. Hist. Exact Sci. 38 (1) (1988).

139. A Volodarsky, Mathematical achievements of Aryabhata, Indian J. Hist. Sci. 12 (2) (1977).

140. L J Gallagher, China in the Sixteenth Century : The Journals of Matthew Ricci, 1583-1610 (1953).

141. J Gernet, Chine et christianisme : action et reaction (Paris, 1982).

142. D E Mungello, Curious land : Jesuit accommodation and the origins of sinology (Stuttgart, 1985).

143. J D Spence, The memory palace of Matteo Ricci (New York, 1984).

144. P T Venturi (ed.), Opere storiche del P Matteo Ricci Vol 2 (1913).

145. J-C Martzloff, A history of Chinese mathematics (Berlin-Heidelberg, 1997).

146. J-C Martzloff, Histoire des mathématiques chinoises (Paris, 1987).

147. B Qian, History of Chinese mathematics (Chinese) (Peking, 1981).

148. K Chemla, Similarities between Chinese and Arabic mathematical writings I : Root extraction, Arabic Sci. Philos. 4 (2) (1994), 207-266.

149. S Guo, Preliminary research into Jia Xian's Huangdi Jiuzhang Suanjing Xicao (Chinese), Studies in the History of Natural Sciences 7 (4) (1988)