ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ : Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

«Ο μαθηματικός ρεαλισμός στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες».

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Δημητρακόπουλος Δημήτριος

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ: 2021-2022

Α΄ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος
Β΄ ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Αρβανιτογεώργος Ανδρέας

Αθήνα, Ιούνιος 2022

«Ο μαθηματικός ρεαλισμός στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες».

Δημήτριος Δημητρακόπουλος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Αρβανιτογεώργος Ανδρέας
Πανεπιστήμιο Πατρών

Αθήνα, Ιούνιος 2022

Πρόλογος

Περίληψη

Η παρούσα εργασία μελετάει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης των μη ευκλείδειων γεωμετριών στο φιλοσοφικό ρεύμα του ρεαλισμού. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στις βασικές ιδέες που διέπουν τον ρεαλισμό του Καντ όσον αφορά τη φύση της γεωμετρίας, των μαθηματικών προτάσεων, του γεωμετρικού χώρου και των οντοτήτων του. Κατόπιν, στο δεύτερο κεφάλαιο λαμβάνει χώρα μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση στην ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών, από την απόρριψη έως την αποδοχή τους και τη θεμελίωση τους. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια ανάδειξης των λογικών τελμάτων που προέκυψαν από την ανάδειξη των μη ευκλείδειων γεωμετριών για το φιλοσοφικό ρεύμα του ρεαλισμού. Επίσης, καταγράφονται τα κύρια φιλοσοφικά ρεύματα στα μαθηματικά και ειδικότερα στη γεωμετρία μετά την ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών και αναλύεται κατά πόσο κατάφεραν να καταρρίψουν, να περιορίσουν ή να αναμορφώσουν τις βασικές θέσεις και αντιλήψεις του ρεαλισμού. Περαιτέρω, στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στη συμβατικότητα του Poincaré και τη σχετικότητα του Reichenbach ως τις κύριες φιλοσοφικές τάσεις που αναδιαμόρφωσαν την έννοια της διαίσθησης, ώστε να θεμελιώσουν μια σταθερή βάση για τους τομείς που είναι βασικοί πυρήνες στα μαθηματικά, να διατηρήσουν την έννοια του a priori αυτών των περιοχών και να εξισορροπήσουν την αυτονομία των μαθηματικών με τη σημασία της (δυνητικής) εφαρμοσιμότητάς τους και της σύνδεσής τους με τη φυσική επιστήμη.

Σκοπός της Εργασίας.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει κατά πόσο μπορούν βασικές αντιλήψεις του ρεαλισμού να ενσωματώσουν τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Θα εξετασθεί εάν οι ιδέες των συνθετικών a priori προτάσεων, ο υπερβατικός ιδεαλισμός του Καντ, ή η καθαρή διαίσθηση έχουν νόημα μετά τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Ποια είναι η «προέλευση» των καθαρών λογικών εννοιών των μαθηματικών και το «εύρος της εγκυρότητάς τους μετά το ρεαλισμό; Τι είναι αυτό που εξηγεί την πλήρη και καλά θεμελιωμένη μαθηματική μέθοδο και κατά πόσον αυτή είναι χρήσιμη σε οποιαδήποτε άλλη επιστήμη εκτός από τα μαθηματικά; Ποια είναι η φύση του γεωμετρικού χώρου αλλά και της γεωμετρικής κατασκευής υπό το πρίσμα της νέας γνώσης; Πόσο διαφορετικές είναι οι οπτικές εντυπώσεις για όντα σαν εμάς σε έναν υπερβολικό χώρο; Ο γεωμετρικός χώρος, ο φυσικός χώρος και ο φαινομενικός χώρος είναι ταυτόσημοι; Επίσης, σε τι βαθμό υπονομεύεται ολόκληρη η κατηγορία των a priori ή ολόκληρης της φιλοσοφίας των μαθηματικών; Ποια μπορεί να είναι η φύση της διαίσθησης και ποιος ο ρόλος της στη μαθηματική γνώση; Η φιλοσοφία καλείται να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα τόσο για τη φύση των μαθηματικών και τη μαθηματική γνώση όσο και τη σχέση μεταξύ των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών ύστερα από την ανάδειξη των μη ευκλείδειων γεωμετριών.

Περιεχόμενα

I)KANT

α) Η θεωρία του Καντ για την κατασκευή μαθηματικών προτάσεων στο έργο του "The Discipline of Pure Reason in Dogmatic Use"(Η Αρχή του Καθαρού Λόγου σε Δογματική Χρήση).

Η κριτική φιλοσοφία στα μαθηματικά του Καντ εκφράζεται πλήρως στην ενότητα, «Critique of Pure Reason» (Κριτική του Καθαρού Λόγου), του έργου του με τίτλο, «The Discipline of Pure Reason in Dogmatic Use»(Η πειθαρχία του καθαρού λόγου στη δογματική-καθαρή χρήση). Στις πρώτες ενότητες του έργου του Κριτική του Καθαρού Λόγου «Critique of Pure Reason» , *ο* Καντ έχει υποβάλει τον καθαρό Λόγο ,«στην υπερβατική χρήση του μέσα από ένα σύνολο επιμέρους παραδοχών», σε κριτική ώστε «να περιορίσει την τάση επέκτασης πέρα από τα στενά όρια της πιθανής εμπειρίας.» (A711/B739).Στα μαθηματικά ο Καντ υποστηρίζει πως μια τέτοια κριτική δεν είναι απαραίτητη αφού η χρήση του καθαρού Λόγου στα μαθηματικά ακολουθεί «μια ορατή διαδρομή» μέσω της διαίσθησης όπου «οι μαθηματικές έννοιες πρέπει να εκτίθενται αμέσως (in concreto) ανά περίπτωση στη καθαρή διαίσθηση , μέσω της οποίας οτιδήποτε αβάσιμο και αυθαίρετο γίνεται αμέσως προφανές» *(A711/B739).* Παρ' όλα αυτά, η πρακτική και η πειθαρχία των μαθηματικών απαιτεί μια εξήγηση, προκειμένου να εξηγηθεί η επιτυχία τους στην απόδειξη ουσιαστικών και αναγκαίων αληθειών, αλλά και για να επιτραπεί η επίκλησή τους ως μοντέλο συλλογισμού. Ο Καντ στρέφεται έτσι στο ερώτημα τι είναι αυτό που εξηγεί την πλήρη και καλά θεμελιωμένη μαθηματική μέθοδο, καθώς και στο κατά πόσον αυτή είναι χρήσιμη σε οποιαδήποτε άλλη επιστήμη εκτός από τα μαθηματικά. Για να απαντήσει αρνητικά στο τελευταίο ερώτημα, ο Καντ πρέπει να εξηγήσει τη μοναδικότητα της μαθηματικής συλλογιστικής.

Η κεντρική θέση της αναφοράς του Καντ, για τη μοναδικότητα της μαθηματικής συλλογιστικής βασίζεται στον ισχυρισμό του, ότι η μαθηματική γνώση προκύπτει από την «κατασκευή» των εννοιών της. «Η κατασκευή μιας έννοιας σημαίνει να εκτίθεται εκ των προτέρων στη διαίσθηση που αντιστοιχεί σε αυτήν» (A713/B741) (Friedman 1992, 2010; Shabel 2006). Για παράδειγμα, ενώ η έννοια του τριγώνου μπορεί να οριστεί διακριτικά ως ευθύγραμμο σχήμα που περιέχεται από τρεις ευθείες γραμμές (όπως γίνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη), η έννοια κατασκευάζεται, με την τεχνική έννοια του όρου του Καντ, μόνο όταν εκτίθεται στην αντίστοιχη διαίσθηση. Στην περίπτωση αυτή, η αντίστοιχη διαίσθηση είναι μια μοναδική και αμέσως εμφανής αναπαράσταση ενός ευθύγραμμου σχήματος τριών πλευρών. Ο Καντ υποστηρίζει ότι όταν κάποιος κατασκευάζει ένα τρίγωνο για τους σκοπούς της εκτέλεσης των βοηθητικών εποικοδομητικών βημάτων που είναι απαραίτητα για μια γεωμετρική απόδειξη, το κάνει εκ των προτέρων, είτε το τρίγωνο παράγεται σε χαρτί είτε μόνο στη φαντασία. Αυτό συμβαίνει επειδή σε κάθε περίπτωση το αντικείμενο που εμφανίζεται δεν δανείζεται το μοτίβο του από οποιαδήποτε εμπειρία (A713/B741). Επιπλέον, μπορεί κανείς να αντλήσει καθολικές ,οικουμενικές αλήθειες για όλα τα τρίγωνα από μια τέτοια μοναδική απεικόνιση ενός μεμονωμένου τριγώνου, καθώς τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εμφανιζόμενου αντικειμένου, π.χ. το μέγεθος των πλευρών και των γωνιών του, είναι «εντελώς αδιάφορα» στο τρίγωνο που αποδίδεται ως έκθεση της γενικής έννοιας του όρου «τρίγωνο»(A714/B742). Συνεπώς, σύμφωνα με τον Καντ πρέπει να λάβουμε αποστάσεις από την κοινή θέση ότι οι παγκόσμιες αλήθειες δεν μπορούν να αντληθούν μέσω της συλλογιστικής που εξαρτάται από συγκεκριμένες αναπαραστάσεις (Friedman 2012, 2020). Έτσι, οι μη απόλυτα ευθείες πλευρές ενός εμπειρικά αποδιδόμενου τριγώνου είναι «αδιάφορες» στη γενική έννοια «τρίγωνο» και έτσι μια τέτοια εμπειρική διαίσθηση θεωρείται επαρκής για γεωμετρική απόδειξη. Αυτό βέβαια εγείρει ερωτήματα σχετικά με το πώς μπορεί κανείς να είναι βέβαιος ότι μια διαίσθηση εμφανίζει επαρκώς το περιεχόμενο μιας έννοιας (Dunlop 2012), τη σχέση μεταξύ καθαρής και εμπειρικής διαίσθησης (Friedman 2012· Shabel 2003) και ειδικότερα, ποια από τα διαισθητικά εμφανιζόμενα χαρακτηριστικά μπορούν να αγνοηθούν με ασφάλεια (Friedman 2010, 2012). Αυτά τα χαρακτηριστικά της θεωρίας κατασκευής του Καντ καλούν επίσης σε συζήτηση σχετικά με τους όρους απόκτησης μαθηματικών εννοιών (Callanan 2014), το ρόλο της κατασκευής σε αποδείξεις με την εις άτοπο απαγωγή (reductio ad absurdum) (Goodwin 2018), τη σχέση μεταξύ κατασκευής και ορισμού (Heis 2014, 2020 και Nunez 2014) και το ρόλο της φαντασίας στις κατασκευές (Land 2014).

Τελικά, ο Καντ ισχυρίζεται ότι είναι «μόνο η έννοια των μεγεθών» (ποσότητες) που μπορεί να κατασκευαστεί μέσω της καθαρής διαίσθησης, καθώς «οι ιδιότητες μπορούν να γίνουν αντιληπτές μόνο μέσω της εμπειρικής διαίσθησης» (A714/B742) (Sutherland 2004a, 2004b, 2005a, 2021). Αυτό οδηγεί σε μια διάκριση αρχής μεταξύ μαθηματικής και φιλοσοφικής γνώσης. Ενώ η φιλοσοφική γνώση περιορίζεται στα αποτελέσματα μιας αφηρημένης εννοιολογικής ανάλυσης, η μαθηματική γνώση είναι το αποτέλεσμα μιας «αλυσίδας συμπερασμάτων που καθοδηγείται πάντα από τη διαίσθηση», δηλαδή από μια συγκεκριμένη αναπαράσταση των αντικειμένων της (Hintikka 1967· Parsons 1969· Friedman 1992· Hogan 2020). Ο Καντ προσπαθεί να εξηγήσει πώς ο μαθηματικός κατασκευάζει αριθμητικά και αλγεβρικά μεγέθη, τα οποία είναι διαφορετικά από τα χωρικά στοιχεία που αποτελούν αντικείμενο γεωμετρικής συλλογιστικής. Κάνοντας διάκριση μεταξύ «φαινομενικής» και «συμβολικής» κατασκευής, ταυτίζει την φαινομενική κατασκευή με την πρακτική του γεωμέτρου να εμφανίζει ή να αναπαριστά χωρικές φιγούρες, ενώ η συμβολική κατασκευή συσχετίζεται με την πράξη της συνένωσης αριθμητικών ή αλγεβρικών συμβόλων (όπως για παράδειγμα στα μαθηματικά «το ένα μέγεθος διαιρείται με το άλλο, αν τοποθετούν τα σύμβολά τους μαζί συνενωμένα με το σύμβολο της διαίρεσης...») (A717/B745) (Βρετάνη 1992· Shabel 1998).

Περεταίρω, ο Καντ ισχυρίζεται ότι η καθαρή έννοια του μεγέθους είναι κατάλληλη για κατασκευή επειδή, σε αντίθεση με άλλες καθαρές έννοιες, δεν αντιπροσωπεύει μια σύνθεση πιθανών διαισθήσεων, αλλά "περιέχει ήδη μια καθαρή διαίσθηση από μόνη της". Αλλά δεδομένου ότι οι μόνοι υποψήφιοι για τέτοιες «καθαρές διαισθήσεις» είναι ο χώρος και ο χρόνος («η μοναδική μορφή εμφάνισης»), προκύπτει ότι μόνο χωρικά και χρονικά μεγέθη μπορούν να εκτεθούν σε καθαρή διαίσθηση, δηλαδή να κατασκευαστούν. Τέτοια χωρικά και χρονικά μεγέθη μπορούν να εκτεθούν ποιοτικά, εμφανίζοντας τα σχήματα των πραγμάτων, π.χ. την ορθογωνιότητα των υαλοπινάκων ενός παραθύρου, ή μπορούν να εκτεθούν μόνο ποσοτικά, εμφανίζοντας τον αριθμό των τμημάτων των πραγμάτων, π.χ. τον αριθμό των υαλοπινάκων που περιλαμβάνει το παράθυρο. Και στις δύο περιπτώσεις, αυτό που εμφανίζεται μετράει ως καθαρή και «επίσημη διαίσθηση», η επιθεώρηση της οποίας παράγει προτάσεις που «υπερβαίνουν» το περιεχόμενο της αρχικής έννοιας με την οποία συνδέθηκε η διαίσθηση. Τέτοιες προτάσεις είναι παραδείγματα συνθετικών εκ των προτέρων προτάσεων, δεδομένου ότι είναι άφθονες αλήθειες που δικαιολογούνται ανεξάρτητα από την εμπειρία (Shabel 2006).

Με απόλυτο τρόπο, ο Καντ υποστηρίζει ότι η μαθηματική συλλογιστική δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκτός των στενών ορίων του τομέα των μαθηματικών ως κατάλληλη συλλογιστική, αφού όπως την αντιλαμβάνεται, αναφέρεται αναγκαστικά σε αντικείμενα που «προσδιορίζονται απολύτως μέσω της καθαρής διαίσθησης a priori και εντελώς ανεξάρτητα από τα όποια εμπειρικά δεδομένα» (A724/B752). Δεδομένου ότι μόνο τα επίσημα μαθηματικά αντικείμενα (δηλαδή τα χωρικά και χρονικά μεγέθη) μπορούν να προσδιοριστούν έτσι, η μαθηματική συλλογιστική είναι άχρηστη σε σχέση με αντικείμενα που σχετίζονται με το υλικό τους περιεχόμενο (αν και οι αλήθειες που προκύπτουν από τη μαθηματική συλλογιστική για τα επίσημα μαθηματικά αντικείμενα εφαρμόζονται με μεγάλη επιτυχία σε αντικείμενα με υλικό περιεχόμενο, δηλαδή τα μαθηματικά εφαρμόζονται και είναι εκ των προτέρων αληθή στον κόσμο των υλικών αντικειμένων (Shabel 2005). Κατά συνέπεια, η «πλήρης θεμελίωση» που βρίσκουν τα μαθηματικά στους ορισμούς, τα αξιώματα και τις αποδείξεις τους δεν μπορεί να «επιτευχθεί ή να μιμηθεί» από τη φιλοσοφία ή τις φυσικές επιστήμες (A727/B755).

Ενώ η θεωρία του Καντ για τη μαθηματική κατασκευή εννοιών μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχει μια εξήγηση της μαθηματικής πρακτικής όπως την κατάλαβε ο Καντ, η θεωρία είναι συνυφασμένη με τις ευρύτερες δεσμεύσεις του Καντ για αυστηρές διακρίσεις μεταξύ διαισθήσεων και εννοιών, ως τρόποι αναπαράστασης (Smyth 2014)· μεταξύ συνθετικών και αναλυτικών προτάσεων (Anderson 2004, 2015· Χόγκαν 2020) μεταξύ των ρόλων διαφορετικών γνωστικών σχολών (Land 2014· Laywine 2014) και μεταξύ ενός εκ των προτέρων και ενός εκ των υστέρων αποδεικτικών στοιχείων και συλλογισμού (Anderson 2015). Τελικά, η εικόνα των μαθηματικών που αναπτύχθηκε στην «Discipline of Pure Reason in Dogmatic Use» εξαρτάται από την πλήρη θεωρία της κρίσης που η Κριτική φιλοσοφία στοχεύει να παρέχει, και κυρίως από τη θεωρία της ευαισθησίας που προσφέρει ο Καντ στην The Transcendental Aesthetic (Η Υπερβατολογική Αισθητική) (Parsons 1992· Carson 1997· Risjord 1991), καθώς και σε αντίστοιχα αποσπάσματα στο *Prolegomena*'s Main Transcendental Question(Προλεγόμενα της Βασικής Υπερβατολογικής Ερώτησης), Πρώτο μέρος, όπου διερευνά την «προέλευση» των καθαρών λογικών εννοιών των μαθηματικών και το «εύρος της εγκυρότητάς τους» (A725/B753).

β) Καντ: Τι καθιστά δυνατή την ύπαρξη καθαρών μαθηματικών;

Ο Καντ θέτει δύο σχετικά κύρια ερωτήματα της κριτικής φιλοσοφίας του: (1) Πώς είναι δυνατές οι συνθετικές κρίσεις a priori και, (2) Πώς είναι δυνατή η μεταφυσική ως επιστήμη (B19·B23). Τα μαθηματικά παρέχουν μια ειδική οδό για να βοηθήσουν στην απάντηση αυτών των ερωτήσεων παρέχοντας ένα μοντέλο κωδικοποιημένης επιστημονικής πειθαρχίας , η δυνατότητα των οποίων είναι σαφής και, επιπλέον, εγγυημένη λόγω της ικανότητάς τους στην επίτευξη γνώσης που είναι τόσο συνθετική όσο και a priori (Anderson 2015). Με άλλα λόγια, μια εξήγηση για το πώς οι συνθετικές a priori προτάσεις επιβεβαιώνονται σε μαθηματικά πλαίσια, μαζί με την επακόλουθη και σχετική εξήγηση για το πώς ένα συστηματικό σώμα ευαπόδεικτης γνώσης περιλαμβάνει τέτοιες κρίσεις και επιτρέπει την επίκληση της μαθηματικής αλήθειας ως παράδειγμα των ουσιαστικών όσο απαραίτητων και συμπαντικών αληθειών που ελπίζει να επιτύχει η μεταφυσική. Η θεωρία του Καντ για την κατασκευή μαθηματικών εννοιών μπορεί να εκτιμηθεί πλήρως μόνο σε συνδυασμό με την αντιμετώπιση ευρύτερων ερωτημάτων σχετικά με την ίδια τη φύση και τη δυνατότητα μαθηματικής και μεταφυσικής γνώσης (Jauernig 2013).

Τόσο στο προοίμιο στα Prolegomena to Any Future Metaphysics (Προλεγόμενα σε Όποια Μελλοντική Μεταφυσική) όσο και στην β΄ εισαγωγή στο Critique of Pure Reason, ο Καντ εισάγει την αναλυτική/συνθετική διάκριση, η οποία διακρίνει μεταξύ τους τις προτάσεις των οποίων οι δηλώσεις ανήκουν ή περιέχονται στην έννοια του θέματος και στις προτάσεις των οποίων οι δηλώσεις συνδέονται αλλά υπερβαίνουν την έννοια του θέματος, αντίστοιχα. Σε κάθε κείμενο, ακολουθεί την παρουσίαση αυτής της διάκρισης μια συζήτηση του ισχυρισμού του Καντ ότι όλες οι μαθηματικές προτάσεις είναι συνθετικές και a priori. Εκεί ισχυρίζεται, πρώτον, ότι «οι ορθές μαθηματικές προτάσεις είναι πάντα a priori κρίσεις» με το αιτιολογικό ότι είναι απαραίτητες, και έτσι δεν μπορούν να αντληθούν από την εμπειρία (B14). Ακολουθεί λοιπόν αυτό το σκεπτικό με μια εξήγηση για το πώς τέτοιες μη εμπειρικές προτάσεις μπορούν ακόμα να είναι συνθετικές, δηλαδή πώς μπορούν να χρησιμεύσουν για να συνθέσουν μια πρόταση και να προβλέψουν την έννοια αντί να εξηγήσουν ή να αναλύσουν απλώς την έννοια μιας πρότασης στα συστατικά λογικά μέρη της.

Εδώ ο Καντ επικαλείται την αριθμητική πρόταση "7 + 5 = 12" και υποστηρίζει ότι μια τέτοια πρόταση είναι συνθετική. Εμφανίζεται επικριτικός, υποστηρίζοντας ότι «ανεξάρτητα από το πόσο καιρό αναλύω την πρότασή μου για ένα τέτοιο πιθανό άθροισμα [επτά και πέντε] και πάλι δεν θα βρω δώδεκα σε αυτό», όμως τοποθετείται θετικά, υποστηρίζοντας ότι "Πρέπει να προχωρήσουμε πέρα από αυτές τις έννοιες [επτά και πέντε], αναζητώντας βοήθεια στη διαίσθηση που αντιστοιχεί σε μία από τις δύο, το ένα είναι πέντε δάχτυλα, ας πούμε... και το ένα μετά το άλλο προσθέστε τις μονάδες των πέντε που δίνονται στη διαίσθηση στην έννοια των επτά... και έτσι δείτε τον αριθμό 12 που προκύπτει» (B15). Υποστηρίζει λοιπόν, ότι η απαραίτητη αλήθεια μιας αριθμητικής πρότασης όπως "7 + 5 = 12" δεν μπορεί να καθοριστεί με οποιαδήποτε μέθοδο λογικής ή εννοιολογικής ανάλυσης (Anderson 2004, 2015), αλλά μπορεί να καθιερωθεί με διαισθητική σύνθεση (Parsons 1969). Πρόσφατα, οι συζητήσεις για τη θεωρία της αριθμητικής του Καντ έχουν μετατοπίσει την προσοχή από ερωτήματα σχετικά με τη συνθετικότητα και την εκ των προτέρων φύση των αριθμητικών προτάσεων, σε έρευνες σχετικά με τον αριθμό του Καντ. Τα θέματα που αναδεικνύονται εδώ περιλαμβάνουν τη διάταξη και την πληθικότητα (Sutherland 2017, 2020),τους πραγματικούς αριθμούς (Tait 2020, van Atten 2012), την περατοκρατία (Tait 2016· Sieg 2016)· τα άπειρα και τα απειροελάχιστα (Βρετάνη 2020; Σμίθ 2014, 2021; Γουόρεν 2020) και την κεντρική θέση της έννοιας του αριθμού στη σύλληψη του Καντ για τη δυνατότητα εμπειρίας (Carson 2020).

Ο Καντ στο έργο του, ακολουθεί τη συζήτησή του για την αριθμητική συλλογιστική και την αλήθεια με αντίστοιχους ισχυρισμούς για την ευκλείδεια γεωμετρία, σύμφωνα με τους οποίους οι αρχές της γεωμετρίας εκφράζουν συνθετικές σχέσεις μεταξύ εννοιών (όπως μεταξύ της έννοιας της ευθείας γραμμής μεταξύ δύο σημείων και της έννοιας της συντομότερης γραμμής μεταξύ των ίδιων δύο σημείων), κανένα από τα οποία δεν μπορεί να «εξαχθεί» αναλυτικά από το άλλο. Οι αρχές της γεωμετρίας εκφράζουν έτσι τις σχέσεις μεταξύ των βασικών γεωμετρικών εννοιών στο σημείο που αυτές μπορούν να «εκτεθούν στη διαίσθηση» (Shabel 2003· Sutherland 2005α). Αλλού, ο Καντ περιλαμβάνει επίσης τα γεωμετρικά θεωρήματα ως τα είδη των προτάσεων (επιπρόσθετα με τις γεωμετρικές αρχές) που υπολογίζονται ως συνθετικά και προσφέρει σκέψεις για γεωμετρική απόδειξη (A716–7/B744–5) (Friedman 1992, 2010. Shabel 2004). Ένας τρόπος κατανόησης της συνθετικότητας των γεωμετρικών θεωρημάτων είναι η αναγνώριση ενός απαραίτητου διαγραμματικού ρόλου για τη διαίσθηση στη γεωμετρική απόδειξη (Shabel 2004, 2004).

Συγκεκριμένα, το εύρος του ισχυρισμού του Καντ ότι τα γεωμετρικά θεωρήματα είναι συνθετικά είναι θαμπό. Αφού αρνήθηκε ότι οι μαθηματικές αρχές (Grundsätze) θα μπορούσαν να γνωσθούν αναλυτικά από την αρχή της μη αντίφασης, παραδέχεται ότι τα μαθηματικά συμπέρασμα του είδους που απαιτούνται για τη δημιουργία γεωμετρικών θεωρημάτων προχωρούν «σύμφωνα με την αρχή της μη αντίφασης», καθώς και ότι «μια συνθετική πρόταση μπορεί φυσικά να γίνει κατανοητή σύμφωνα με την αρχή της μη αντίφασης ,μόνο στο βαθμό που μια άλλη συνθετική πρόταση μπορεί να τεθεί ως προϋπόθεση και από την οποία μπορεί να συναχθεί, ποτέ από μόνη της» (B14). Έτσι, ενώ είναι σαφές ότι όλες οι μαθηματικές κρίσεις, συμπεριλαμβανομένων των γεωμετρικών θεωρημάτων, είναι συνθετικές, είναι λιγότερο σαφής για το τι ακριβώς σημαίνει για τέτοιες προτάσεις ή τα συμπεράσματα που τις υποστηρίζουν να «συνάδουν» με την αρχή της μη αντίφασης, την παράγωγη της οποίας παίρνει για να είναι το πρότυπο τεστ της αναλυτικότητας (Hogan 2020). Αυτό οδηγεί σε μια ερμηνευτική διαφωνία ως προς το αν οι αποδεδειγμένες μαθηματικές κρίσεις προέρχονται από τις συνθετικές αρχές μέσω αυστηρά λογικών ή εννοιολογικών συμπερασμάτων –και έτσι σε αυστηρή εφαρμογή μόνο με την αρχή της μη αντίφασης– ή αν συνάγεται μέσω συμπερασμάτων που βασίζονται οι ίδιες στη διαίσθηση, αλλά δεν παραβιάζουν το νόμο της μη αντίφασης. Υπάρχει λοιπόν διαφωνία για το αν ο Καντ δεσμεύεται μόνο για τη συνθετικότητα των αξιωμάτων

των μαθηματικών (που μεταδίδουν τη συνθετικότητα σε αποδεδειγμένα θεωρήματα μέσω λογικού συμπεράσματος) ή είναι επίσης αφοσιωμένος στη συνθετικότητα του ίδιου του μαθηματικού συμπεράσματος. Η πρώτη ερμηνευτική θέση συνδέεται αρχικά με τον Ernst Cassirer και τον Lewis White Beck και η τελευταία θέση με τον Bertrand Russell (Hogan 2020). O Gordon Brittan (Brittan 2006) θεωρεί και τις δύο θέσεις «αποδεικτικές», το οποίο είναι η υποσημείωσή του για οποιαδήποτε ερμηνεία σύμφωνα με την οποία η διαίσθηση παρέχει τα απαραίτητα στοιχεία για την αλήθεια των μαθηματικών, είτε τα στοιχεία αυτά παρέχονται για την υποστήριξη των αξιωμάτων ή των συμπερασμάτων, ή και των δύο (Brittan 2006).

Η προσοχή σε αυτό το ερμηνευτικό ζήτημα στη φιλοσοφία των μαθηματικών του Καντ είναι ζωτικής σημασίας, για να φωτιστούν οι πτυχές στο γενικότερο ερώτημα τι κάνει τη συνθετική και a priori γνώση δυνατή, το κεντρικό ζήτημα στο έργο του Καντ, Critique of Pure Reason. Όσον αφορά αυτό το γενικότερο ερώτημα, είναι σημαντικό να διαφοροποιηθεί η χρήση των όρων "αναλυτικός" και "συνθετικός" από τον Καντ για να σηματοδοτηθεί μια λογική-σημασιολογική διάκριση μεταξύ των τύπων των προτάσεων -τις οποίες ο Καντ χρησιμοποιεί για να υπερασπιστεί τη χαρακτηριστική του θέση ότι η μαθηματική γνώση είναι συνθετική και a priori- από τη χρήση των ίδιων όρων από τον ίδιο, με σκοπό να σηματοδοτηθεί μια παραδοσιακή μαθηματική διάκριση, μεταξύ αναλυτικών και συνθετικών προτάσεων. Αναπτύσσει λοιπόν την τελευταία διάκριση για να εντοπίσει δύο διακριτές στρατηγικές επιχειρηματολογίας για να απαντήσει στο ερώτημα της «δυνατότητας ύπαρξης καθαρών μαθηματικών». Η αναλυτική μέθοδος χαρακτηρίζεται από τη λογική που ανιχνεύει ένα δεδομένο σώμα γνώσης, όπως τα μαθηματικά, στην προέλευσή του ή στις πηγές του στο μυαλό. Αντίθετα, η συνθετική μέθοδος στοχεύει να αντλήσει πραγματική γνώση απευθείας από τέτοιες αρχικές γνωστικές πηγές, οι οποίες οι πηγές ή οι κινητήριες δυνάμεις αντιμετωπίζονται πρώτα ανεξάρτητα από οποιοδήποτε συγκεκριμένο σώμα γνώσης (συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών) που οι ίδιες θα μπορούσαν τελικά να παράγουν. Ο Καντ υιοθετεί την προηγούμενη μέθοδο στα Prolegomena του, υποστηρίζοντας από τη συνθετική και εκ των προτέρων φύση των μαθηματικών προτάσεων τον ισχυρισμό ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι οι μορφές της ανθρώπινης αισθητικότητας. Έτσι, υιοθετεί την τελευταία προσέγγιση στο πόνημά του *Critique of Pure Reason*, υποστηρίζοντας ότι οι μορφές ανθρώπινης αισθητικής αντίληψης, χώρου και χρόνου, παρέχουν τη βάση από την οποία μπορούν να αντληθούν συνθετικές και εκ των προτέρων μαθηματικές κρίσεις (Shabel 2004). Τα επιχειρήματα αυτά, μαζί με τις λεπτομέρειες της αφήγησης της συνθετικής και εκ των προτέρων φύσης κάθε μαθηματικής πρότασης, δίνουν απάντηση στο ερώτημα της δυνατότητας των μαθηματικών: οι πρακτικές που παράγουν τις παραδειγματικά συνθετικές και εκ των προτέρων προτάσεις της επιστήμης των μαθηματικών βασίζονται και εξηγούνται από την ίδια τη φύση της ανθρώπινης αισθητικότητας, και, ειδικότερα, με τη χωροχρονική μορφή όλων (και μόνο) των αντικειμένων της ανθρώπινης εμπειρίας (Van Cleve 1999). Αλλά, αυτή η απάντηση εγείρει περαιτέρω ερωτήματα, ιδίως σχετικά με τον τρόπο διάκρισης μεταξύ μεταφυσικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων του χώρου (Carson 1997· Friedman 2000, 2015, 2020· Onof and Schulting 2014· Tolley 2016).

γ)Η αντίληψη του Καντ για το ρόλο των μαθηματικών στον Υπερβατικό Ιδεαλισμό

Η θεωρία της μαθηματικής πρακτικής του Καντ συνδέεται όχι μόνο με τη θεωρία της διαίσθησης και της αισθητικότητάς του (όπως περιγράφεται παραπάνω) αλλά και με άλλες πτυχές του δόγματος του Υπερβατικού Ιδεαλισμού, όπως διατυπώνεται σε όλα τα κρίσιμα έργα του Καντ.

Στην Υπερβατική Ανάλυση, ο Καντ διακρίνει τον πίνακα δώδεκα κατηγοριών, ή καθαρών εννοιών της νόησης, τις πρώτες έξι από τις οποίες περιγράφει ως "μαθηματικές" (σε αντίθεση με τις "δυναμικές") κατηγορίες λόγω της συσχέτισής τους με αντικείμενα που άπτονται της διαίσθησης μας (B110).

Οι 12 κατηγορίες που διέκρινε ο Καντ:

α) ποσού	μοναδικότητα πολλαπλότητα ολότητα
β) ποιού	πραγματικότητα άρνηση περιορισμός
γ) αναφοράς	ουσία αιτιότητα αλληλεπίδραση
δ) τρόπου	δυνατότητα ύπαρξη αναγκαιότητα

Η έννοια του αριθμού αντιμετωπίζεται ως να «ανήκει» στην κατηγορία της «ολότητας» ή του όλου, η οποία θεωρείται ότι προκύπτει από τον συνδυασμό των εννοιών της μοναδικότητας και της πολλαπλότητας (πλουραλισμού) (Parsons 1984). Ωστόσο, ο Καντ ισχυρίζεται περαιτέρω ότι οι δυσκολίες που προκύπτουν κατά την αναπαράσταση των απείρων –στις οποίες δύναται να αντιπροσωπεύει κανείς μοναδικότητα και πλουραλισμό χωρίς κάποια προκύπτουσα εκπροσώπηση αριθμού– αποκαλύπτουν ότι μια έννοια αριθμού πρέπει να απαιτεί τη διαμεσολάβηση μιας «ειδικής δράσης κατανόησης» (B111). (Αυτή η ειδική δράση είναι πιθανώς η σύνθεση που ο Καντ περιγράφει ως συνάρτηση τόσο της φαντασίας όσο και της κατανόησης, και την οποία είναι δουλειά της πλήρους θεωρίας των κρίσεων – συμπεριλαμβανομένης της Υπερβατικής Αφαίρεσης και του Σχηματισμού(Schematism)– να εξηγήσει (Carson 2017, Longuenesse 1998).) Έτσι, αν και ισχυρίζεται επίσης ότι η αριθμητική «διαμορφώνει τις έννοιες της για τους αριθμούς μέσω διαδοχικών προσθηκών μονάδων στο χρόνο» (4:283), είναι παραπλανητικό να συμπεράνουμε ότι η αριθμητική είναι στο χρόνο ότι η γεωμετρία είναι στο χώρο, καθώς μια επίσημη διαίσθηση του χρόνου είναι ανεπαρκής για να εξηγήσει τη γενική και αφηρημένη επιστημολογία του αριθμού. Στην πραγματικότητα, ο Καντ δηλώνει ότι η μηχανική είναι η μαθηματική επιστήμη που είναι για το χρόνο ό,τι είναι η γεωμετρία για το χώρο (Sutherland 2014).

Στο Σχηματισμό (Schematism), ο Καντ επιχειρεί να προσδιορίσει τον συγκεκριμένο μηχανισμό που επιτρέπει στις καθαρές έννοιες της νόησης να συμπεριλάβουν λογική διαίσθηση, με την οποία είναι ετερογενείς. Οι κατηγορίες πρέπει να "σχηματοποιηθούν", να λάβουν δηλαδή μορφή καθαρού σχήματος, επειδή η μη εμπειρική απαρχή τους στην καθαρή νόηση εμποδίζει να περιλαμβάνουν κάποιο είδος λογικού αισθητηριακού περιεχομένου που θα τις συνέδεε αμέσως με τα αντικείμενα της εμπειρίας. Τα υπερβατικά σχήματα είναι αναπαραστάσεις διαμεσολάβησης που προορίζονται να καθορίσουν τη σύνδεση μεταξύ καθαρών εννοιών και εκφράσεων που διέπονται από κανόνες. Οι μαθηματικές έννοιες συζητούνται σε αυτό το πλαίσιο, καθώς είναι μοναδικές στο να είναι καθαρές αλλά και λογικές έννοιες: είναι καθαρές επειδή είναι αυστηρά εκ των προτέρων(a priori) στην προέλευσή τους, και όμως είναι λογικές αφού κατασκευάζονται και εφαρμόζονται ανά περίπτωση (in concreto). (Ο Καντ περιπλέκει περαιτέρω αυτό το ζήτημα προσδιορίζοντας τον αριθμό ως το καθαρό σχήμα της κατηγορίας μεγέθους (Longuenesse 1998).) Τίθεται ένα ερμηνευτικό ερώτημα σχετικά με το αν οι μαθηματικές έννοιες, των οποίων το εννοιολογικό περιεχόμενο δίνεται αισθητηριακά, απαιτούν σχηματοποίηση από ένα διακριτό "τρίτο αντικείμενο" και, αν ναι, σε τι ισοδυναμεί (Leavitt 1991; Νέος 1984). Γενικότερα, τίθεται το ερώτημα πώς λειτουργεί η υπερβατική φαντασία, η σχολή που είναι υπεύθυνη για το σχηματισμό, διατρέχοντας τα μαθηματικά πλαίσια (Domski 2010).

Τέλος, στο Analytic of Principles(Η αναλυτική των θεμελιωδών αρχών), ο Καντ αντλεί τις συνθετικές κρίσεις που «ρέουν εκ των προτέρων από καθαρές έννοιες της νόησης» και οι οποίες θεμελιώνουν όλες τις άλλες εκ των προτέρων γνωσιακές κρίσεις, συμπεριλαμβανομένων εκείνων των μαθηματικών (A136/B175). Οι αρχές της καθαρής νόησης που συνδέονται με τις κατηγορίες ποσότητας (δηλαδή την έννοια του μοναδιαίου, του πλουραλισμό και της ολότητας) είναι τα Αξιώματα της Διαίσθησης. Ενώ οι μαθηματικές αρχές είναι κατάλληλες να «αντλούνται μόνο από τη διαίσθηση» και επομένως δεν αποτελούν μέρος του συστήματος αρχών της καθαρής νόησης, η εξήγηση για τη δυνατότητα ύπαρξης τέτοιων μαθηματικών αρχών (που περιγράφονται παραπάνω) πρέπει να συμπληρωθεί με τον απολογισμό των υψηλότερων δυνατών υπερβατικής αρχών (A148–9/B188–9) (Shabel 2017). Κατά συνέπεια, τα Αξιώματα της Διαίσθησης παρέχουν μια μετα-αρχή, ή αρχή των μαθηματικών αρχών της ποσότητας, δηλαδή ότι «Όλες οι διαισθητικές κρίσεις είναι εκτεταμένα μεγέθη» (A161/B202). Οι περισσότεροι σχολιαστές ερμηνεύουν τον Καντ εδώ για να υποδείξουν γιατί οι αρχές των μαθηματικών, που σχετίζονται με τον καθαρό χώρο και χρόνο, ισχύουν για τις εμφανιζόμενες μορφές: οι εμφανιζόμενες μορφές μπορούν να αναπαρασταθούν μόνο «μέσω της ίδιας σύνθεσης γενικά με εκείνη μέσω της οποίας ορίζεται ο χώρος και ο χρόνος » (A161/B202). Έτσι, όλες οι διαισθητικές κρίσεις, είτε καθαρές, είτε εμπειρικές, είναι «εκτεταμένα μεγέθη» που διέπονται από τις αρχές των μαθηματικών.

Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι τα βασικά αποσπάσματα στο *Critique of the Power of Judgment(Κριτική της κριτικής Δύναμης)* αφορούν τα μαθηματικά και το «μαθηματικό ανυπέρβλητο» (Fugate 2014; Breitenbach 2015).

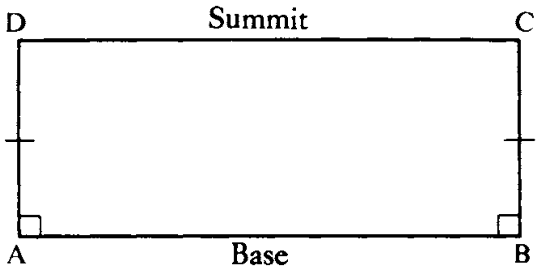
II)Η ανάδυση των μη ευκλείδειων γεωμετριών

Για μεγάλο χρονικό διάστημα, οι μαθηματικοί από την ύστερη αρχαιότητα ως την Αναγέννηση ήρθαν αντιμέτωποι με το αξίωμα των παραλλήλων της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Το αξίωμα των παραλλήλων αντιμετωπιζόταν πάντα με την υπόνοια ότι ήταν μια περιττή πρόταση για τους μαθηματικούς για πολλούς λόγους. Οι μαθηματικοί είτε το απέρριπταν επειδή δεν ήταν ¨αυταπόδεικτο¨ άμεσα μέσω της διαίσθησης όπως τα άλλα τέσσερα αξιώματα, ή ότι είναι σε θέση να το συναγάγουν από τα υπόλοιπα. Στα μέσα του 18ου αιώνα, η λογική ανεξαρτησία του αξιώματος των παραλλήλων ανακαλύφθηκε από τον Girolamo Saccheri και προετοίμασε το έδαφος για μια γόνιμη έρευνα για εναλλακτικές γεωμετρίες από τους γεωμέτρες που ακολούθησαν.

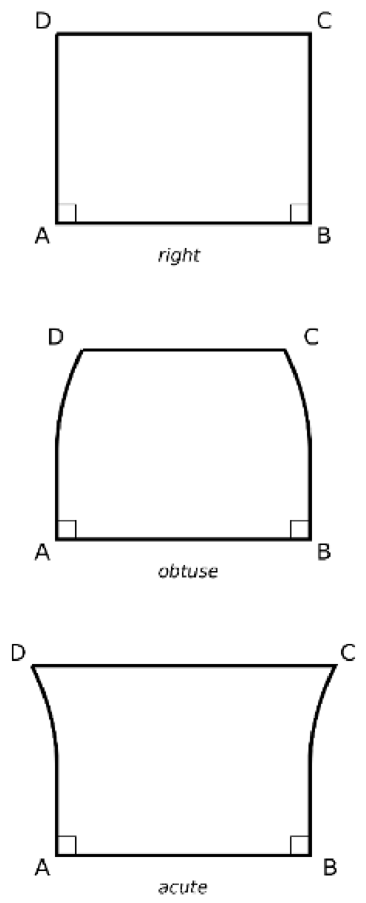
α)Saccheri

Η προσέγγιση του Saccheri στο αίνιγμα του πέμπτου αξιώματος ήταν διαφορετική από τους προκατόχους του. Όλοι οι μαθηματικοί και φιλόσοφοι που προσπάθησαν να εξάγουν το πέμπτο αξίωμα πριν τον Saccheri είτε προσπάθησαν να το εξάγουν ως συμπέρασμα θεωρώντας άλλες προτάσεις των οποίων η αλήθεια έπρεπε να ληφθεί ως αυτονόητη, είτε προσπάθησαν να το εξάγουν συμπερασματικά από τα υπόλοιπο αξιώματα αποτυγχάνοντας στις προσπάθειές τους. Ο Saccheri προσπάθησε να αποδείξει ότι η υπόθεση της άρνησης του πέμπτου αξιώματος πρέπει να είναι ασύμβατη με τα υπόλοιπα θεωρήματα των Στοιχείων του Ευκλείδη. Με άλλα λόγια, η άρνηση του πέμπτου αξιώματος αποτελεί απειλή για τη συνέπεια ολόκληρου του συστήματος.

Η εφαρμογή της εις άτοπον απαγωγή (reductio ad-absurdum) ήταν πράγματι μια νέα προσπάθεια που μέχρι τώρα δεν είχε δοκιμαστεί. Στο έργο The Euclid Vindicated from Every Blemish (2014), Βιβλίο I, ο Saccheri απαριθμεί, συνολικά, 33 προτάσεις. Οι τρεις πρώτες προτάσεις χρησιμοποιούν τετράπλευρα τα οποία, σήμερα, έχουν το όνομα τετράπλευρο Saccheri. Κάθε τετράπλευρο Saccheri ορίζεται ως το τετράπλευρο που έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και κάθετες στην ίδια πλευρά. Την πλευρά στην οποία φέρονται οι κάθετες την ονομάζει βάση και την απέναντι πλευρά κορυφή.



Κάθε απόδειξη, λοιπόν, ξεκινά με την κατασκευή ενός συγκεκριμένου τετραπλεύρου. Τα τετράπλευρα Saccheri είναι διαφορετικά μεταξύ τους όσον αφορά τις γωνίες των κορυφών τους. Μπορεί να γίνει αντιληπτό από τις πρώτες προτάσεις ότι η γωνίες των κορυφών του κατασκευασμένου τετραπλεύρου είναι είτε ίσες, μεγαλύτερες ή μικρότερες από μια «σωστή» δηλαδή ορθή γωνία. Έτσι, υπάρχουν, συνολικά, τρεις περιπτώσεις τετραπλεύρου που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για κάθε πρόταση.

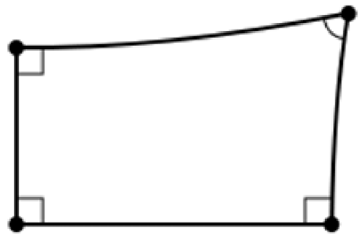


Στην πρώτη πρόταση, απέδειξε ότι οι γωνίες της κορυφής πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους. Στη δεύτερη πρόταση, απέδειξε ότι αν το τετράπλευρο διχοτομηθεί στα σημεία Μ και Η, τότε οι γωνίες στο ΜΗ στο τετράπλευρο ΜΗΒΑ θα είναι πάντα σωστές γωνίες. Στην τρίτη πρόταση, έδειξε ότι η βάση του τετραπλεύρου στις αρθρώσεις των οποίων περιέχονται οι γωνίες κορυφής πρέπει να είναι ίση, μεγαλύτερη ή μικρότερη από την βάση του τετραπλεύρου σύμφωνα με τις γωνίες κορυφής αν είναι σωστές, αμβλείες ή οξείες αντίστοιχα. Στις υπόλοιπες προτάσεις του, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι παρόλο που κατόρθωσε να αντλήσει αντιφατικές συνέπειες στην υπόθεση της αμβλείας γωνίας «Hypothesis of the Obtuse Angle (HOA)», δεν μπόρεσε ποτέ να βρει καμία υπό την υπόθεση της οξείας «Hypothesis of the Acute Angle (HAA)». Ήταν σε θέση να αντλήσει παράξενα συμπεράσματα που ακολούθησαν από την υπόθεση της οξείας γωνίας, τα οποία αργότερα θεωρήθηκαν ως θεωρήματα της υπερβολικής γεωμετρίας.

Είναι πολύ πιθανό ο Saccheri να απέρριψε τα ευρήματά του επειδή διαισθητικά φάνταζαν απίθανα, τουλάχιστον μέσα από το πρίσμα της ευκλείδιας γεωμετρίας. Χαρακτηριστικά ο Saccheri πρόσθεσε ότι «η υπόθεση της οξείας γωνίας είναι απολύτως ψευδής, επειδή είναι αποκρουστική απέναντι στην ίδια τη φύση της ευθείας γραμμής.» (Μπονόλα, 1912, σ.43), που δεν είναι παρά μια εξωλογική επιβεβαίωση της αλήθειας του πέμπτου αιτήματος. Το αίτημα των παραλλήλων, εξάλλου, είναι μια δήλωση σχετικά με τη συμπεριφορά των ευθύγραμμων γραμμών. Έτσι απορρίπτοντας την ΗΑΑ με βάση τις προ-αντιλήψεις του σχετικά με το ποια είναι η ευθεία γραμμή στην πραγματικότητα φανερώνει τη διαισθητική του στάση απέναντι στην αίτημα των παραλλήλων από την αρχή. Αν είχε συνειδητοποίησε ότι ήταν στα πρόθυρα εξεύρεσης μιας νέας γεωμετρίας, η ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών θα μπορούσαν να έχουν γίνει έναν αιώνα νωρίτερα. Χαρακτηριστικά ο Greenberg (1994:155) αναφέρει «είναι σαν να έχει ανακαλύψει κάποιος ένα σπάνιο διαμάντι, αλλά αδυνατώντας να πιστέψει αυτό που είδε, είπε ότι απλά είναι ένα κομμάτι γυαλί».

β)Lambert

Μετά τον Saccheri, το επόμενο άτομο που αξίζει να επεναιθεί για τις προσπάθειες του για να δικαιωθεί ο Ευκλείδης, είναι χωρίς αμφιβολία ο Lambert. Η προσέγγιση του Lambert ήταν πολύ παρόμοια με αυτό του Saccheri. Έκανε χρήση τετραπλεύρων και πλησίασε το πρόβλημα υποθέτοντας το αδύνατο, δηλαδή την άρνηση του πέμπτου αιτήματος. Η διαφορά μεταξύ του τετραπλεύρου που χρησιμοποιείται από το Saccheri και εκείνης που χρησιμοποιείται από τον Lambert είναι ότι η πρώτη περιελάμβανε δύο γωνίες κορυφής, ενώ η δεύτερη είχε μόνο μία γωνία κορυφής . Εύκολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράπλευρο Lambert ενώνοντας τα μέσα της βάσης και της κορυφής σε ένα τετράπλευρο Saccheri.Το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει είναι κάθετο τόσο στη βάση όσο και στη κορυφή δημιουργώντας ένα τετράπλευρο Lambert το ήμισυ του αρχικού τετραπλεύρου Saccheri.



Τετράπλευρο Lambert με οξεία γωνία κορυφής

Οι συνέπειες που μπόρεσε να αντλήσει ήταν πολύ πλουσιότερες και εξωτικές. Ο Lambert ήταν σε θέση να δείξει ότι υπάρχει σχέση αναλογίας μεταξύ του εμβαδού ενός τριγώνου και του αθροίσματος των γωνιών του. Στην ΗΟΑ, η περιοχή ενός τριγώνου είναι άμεσα ανάλογη με το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του συν δύο «σωστές» γωνίες. Στην ΗΑΑ, η περιοχή ενός τριγώνου είναι άμεσα ανάλογα με το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του μείον δύο «σωστές» γωνίες. (Wolfe, 1945). Παρατήρησε επίσης ότι η γεωμετρία με βάση το ΗΟΑ μπορούσε να αναπαρασταθεί και να συσχετιστεί με τη σφαιρική γεωμετρία. Η γεωμετρία, από την άλλη πλευρά, με βάση την ΗΑΑ, θα μπορούσε να διαμορφωθεί σε μια σφαίρα με φανταστική ακτίνα

(Wolfe, 1945). Μαθηματικά, μπορούν να εκφραστούν ως εξής: στην περίπτωση της ΗΟΑ, ο τύπος για το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται (ΑΒΓ)=(Α+Β+Γ-π)r². Στην περίπτωση της ΗΑΑ και με αντικατάσταση της ακτίνας r με τη φανταστική ακτίνα ir στον προηγούμενο τύπο γίνεται (ΑΒΓ)= (π-Α-Β-Γ) r² . Ακόμα, μια τελευταία παρατήρηση που έκανε για τη γεωμετρία που βασίζεται στην ΗΑΑ είναι ότι τα σχήματα, όπως τα τρίγωνα και τα τετράπλευρα, έχουν μια απόλυτη μονάδα μήκους (Wolfe, 1945). Αυτό σημαίνει ότι, δοθέντος της πληροφορίας σχετικά με τις γωνίες ενός δεδομένου τριγώνου ή ενός τετράπλευρου, είναι πιθανό να βρει κανείς το απόλυτο μήκος του. Αυτό έχει ορισμένες συνέπειες· σε αντίθεση με τα Ευκλείδεια γεωμετρία, τα αντικείμενα δεν έχουν κλιμακούμενες ιδιότητες και η συνάφειά τους δεν διατηρείται με το ίδιο είδος αντικειμένου σε διαφορετικές κλίμακες στη γεωμετρία με βάση το ΗΑΑ. Στα στοιχεία του Ευκλείδη τα κατασκευασμένα σχήματα βρίσκονται πάντα σε μια συνεχή σχέση ανεξάρτητη από την κλίμακα τους κάτι που δεν ισχύει στην τελευταία γεωμετρία.

Τόσο ο Saccheri όσο και ο Lambert είχαν ήδη αποδεχθεί εκ των προτέρων ορισμένες σιωπηρές παραδοχές ως προς τη φύση του πέμπτου αιτήματος πριν από τις έρευνές τους και τις προσπάθειές τους να αποδείξουν την αλήθεια του, με βάση επιχειρήματα που προέκυπταν με την εις άτοπο απαγωγή. Ως εκ τούτου, κανένας από αυτούς δεν ήταν σε θέση να συνειδητοποιήσει ότι είναι στα πρόθυρα της ανακάλυψης μιας νέας περιοχής στο γεωμετρικό τοπίο.

γ)Η αποδοχή των μη ευκλείδειων γεωμετριών και η θεμελίωσή τους

Η κατάσταση πήρε μια εντελώς διαφορετική πορεία με τους Bolyai, Lobachevsky, Schweikart και Gauss. Χάρις στα έργα των Saccheri και Lambert τόσο ο Gauss, ο Bolyai όσο και ο Lobachevsky ξεκίνησαν τις έρευνές τους με την χρήση της εις άτοπο απαγωγή, reductio ad absurdum, που συστημικά χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Saccheri και Lambert. Αντίθετα όμως με τον Saccheri και τον Lambert, παρουσιάστηκαν πιο ανοιχτοί να αγκαλιάσουν τη νέα εξέλιξη της γεωμετρίας. Φαίνεται ότι αυτοί οι μαθηματικοί ήταν πλέον πιο ανοικτοί και απεγκλωβισμένοι από τους δογματισμούς και τα στερεότυπα των προηγουμένων αιώνων ατένιζαν ένα νέο γεωμετρικό τοπίο. Υπήρχαν πολλοί λόγοι που καθυστέρησαν την εισαγωγή μιας νέας γεωμετρίας. Ένας από τους πιο σημαντικούς λόγους που την καθυστέρησαν ήταν φυσικά η ορθοδοξία της θεωρίας του Καντ για τον χώρο μεταξύ φιλοσόφων και επιστημόνων. Κανείς δεν ήταν έτοιμος να δώσει αξιοπιστία σε ένα σύστημα γεωμετρίας που ήταν εντελώς αντίθετο με την εικόνα του χώρου που οραματίστηκε και σκιαγραφήθηκε από τον Καντ. Επίσης, προφανώς άλλος ένας λόγος ήταν ότι ο ρυθμός μεταφοράς ιδεών, ήταν χαρακτηριστικά πιο αργός σε σύγκριση με τον ρυθμό με τον οποίο μεταφέρονται σήμερα, αφού χρειάστηκαν χρόνια για την ανακάλυψη που πραγματοποιήθηκε να εξαπλωθεί και να γίνει γνωστή σε όλο τον κόσμο . Ακόμα ένας λόγος, ήταν η προ-εξέχουσα θέση της Ευκλείδειας γεωμετρίας και της επιτυχημένης κληρονομιάς της για σχεδόν δύο χίλιάδες χρόνια. Παρά τους παραπάνω ανασταλτικούς παράγοντες, τα πράγματα άρχισαν να αλλάζουν με τον Bolyai, Lobachevsky και Gauss.

Οι δημοσιεύσεις του Gauss, σε σύγκριση με τις δημοσιεύσεις που έγιναν σχετικά με τις δυνατότητες της νέας γεωμετρίας, δεν είχαν σχεδόν καμία ουσιαστική συμβολή. Απεναντίας, το δια βίου ενδιαφέρον του για το θέμα μπορεί να εντοπιστεί από τα γράμματα που αντάλλαξε με τον Farka Bolyai , F. A. Taurinus ,και πολλούς άλλους. Ο Gauss ήταν αυτός που αναγνώρισε για πρώτη φορά, μαζί με τον Lobachevsky, τον Schweikart και τον Janos Bolyai, τη γεωμετρία που βασίζεται στην ΗΑΑ ως νέα γεωμετρία, και ήταν το πρώτο άτομο που την αποκάλεσε Μη Ευκλείδεια γεωμετρία (Wolfe, 1945). Σε μια επιστολή που έγραψε στο Göttingen στις 8 Νοεμβρίου 1824 στον Taurinus, δήλωσε ότι «η υπόθεση ότι το άθροισμα τριών γωνιών είναι μικρότερο από 180° οδηγεί σε μια περίεργη γεωμετρία, αρκετά διαφορετική αλλά απόλυτα συνεπή." (Wolfe, 1945) Επίσης, κάνει μια αναφορά για μια σταθερά που ανακάλυψε η οποία, όταν λαμβάνεται απείρως μεγάλη, κάνει τη νέα γεωμετρία να προσεγγίζει αυτή του Ευκλείδη στην ίδια επιστολή προς τον Ταυρίνο. Ακόμα, δηλώνει ότι όλες οι προσπάθειες ήταν μάταιες να ανακαλύψουν μια αντίφαση σε αυτό το νέο σύστημα. Οι συνειρμοί του επί αυτών των θεμάτων τον οδήγησαν στην ιδέα ότι ο χώρος είναι κάτι το εντελώς μυστηριώδες για εμάς υιοθετώντας έτσι μια εμπειρική θεωρία του διαστήματος. Παραθέτοντας από το ίδιο το γράμμα:

«Αλλά μου φαίνεται ότι ξέρουμε, παρά τα σοφά λόγια που δεν έχουν περιεχόμενο των μεταφυσικών, πολύ λίγα, ή σχεδόν τίποτα απολύτως, σχετικά με την πραγματική φύση του χώρου, για να θεωρήσουμε ως απολύτως αδύνατο αυτό που μας φαίνεται αφύσικο. Αλλά αν αυτή η μη Ευκλείδεια γεωμετρία ήταν αληθινή, και ήταν δυνατό να συγκριθεί αυτή η σταθερά με τα μεγέθη που συναντάμε στις μετρήσεις μας στη γη και στους ουρανούς, θα μπορούσε στη συνέχεια να προσδιοριστεί ως a posteriori. Κατά συνέπεια, προς χάριν αστεϊσμού, έχω εκφράσει μερικές φορές την επιθυμία η γεωμετρία να μην ήταν αληθινή, αφού τότε θα είχαμε a priori ένα απόλυτο πρότυπο του μέτρου.» (Wolfe, 1945)

Η ιδέα ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί να μην είναι η πραγματική γεωμετρία του χώρου, και στην πραγματικότητα, μπορεί να είναι ένα κεφάλαιο μιας άλλης γεωμετρίας που τη περικλείει, δεν ήταν κάτι καινοφανές για τον Gauss.

Ο Karl Ferdinand Schweikart, το 1818, ανέπτυξε ήδη ένα σύστημα στο οποίο υπήρχαν δύο είδη γεωμετρίας, η Ευκλείδεια και η Αστρική(Astral) (Halsted, 1900). Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών που προκύπτει στην πρώτη γεωμετρία είναι δύο σωστές γωνίες, ενώ στη δεύτερη σε λιγότερο από δύο σωστές γωνίες. Αυτός, όπως και ο Gauss, μιλάει για την ίδια σταθερά που ανήκει στην αστρική γεωμετρία η οποία, όταν λαμβάνεται αρκετά μεγάλη, παράγει την ευκλείδεια γεωμετρία. Στη πράξη, αυτή η προσπάθεια αποτέλεσε την πρώτη ρητή περιγραφή μιας μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία έλαβε χώρα πριν από την ανακάλυψή της από τον Janos Bolyai το έτος 1923, και τον Nikolai Lobachevsky το 1926.

i)Bolyai και Lobachevsky

Η πρώτη δημοσίευση που έγινε και καθιέρωσε τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία ως ένα συνεπές σύστημα γεωμετρίας κατασκευάστηκε από τον Janos Bolyai το έτος 1923. Ο Janos Bolyai ήταν γιος του Farkas Bolyai, ο οποίος είχε επίσης ασχοληθεί επί μακρόν με το πρόβλημα των παραλλήλων. Ο Janos Bolyai ξεκίνησε επίσης, όπως ο Saccheri και ο Lambert, τις προσπάθειές του. για να αποδείξει το πέμπτο αίτημα θεωρώντας ότι δεν ισχύει . Αλλά πριν από αυτό, άλλαξε το πέμπτο αίτημα, όπως είχε διατυπωθεί από τον Ευκλείδη με το Αξίωμα Playfair (Playfair's Axiom). Το αξίωμα που προτιμήθηκε από το πέμπτο αίτημα όπως δηλώνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη.Το αξίωμα διατυπώθηκε από τον Playfair ως εξής: «Σε ένα επίπεδο, δίνεται μια γραμμή (ευθεία) και ένα σημείο όχι σε αυτή, το πολύ μία παράλληλη στη δεδομένη γραμμή μπορεί να σχεδιαστεί μέσω του σημείου» (Playfair, 1846, σ. 29). Ο όρος «το πολύ» προστίθεται στην αρχική πρόταση για να δείξει ότι η παράλληλη γραμμή που σχεδιάζεται είναι μοναδική. Η άρνηση της συνεπώς οδηγεί στο ότι είτε καμία παράλληλη γραμμή θα μπορούσε να χαραχτεί στη δεδομένη γραμμή, περνώντας μέσω του δοθέντος σημείου ή πολλές παράλληλοι θα μπορούσαν να σχεδιαστούν (Wolfe, 1945). Ο Bolyai απέκλεισε την πρώτη υπόθεση υποστηρίζοντας ότι έρχεται σε αντίθεση με την $27^{η}$ και την $28^{η}$ από τις προτάσεις στα στοιχεία του Ευκλείδη (Wolfe, 1945). Οι συνέπειες που προέκυψαν από τη δεύτερη υπόθεση, ωστόσο, δεν έπαψαν να εκπλήσσουν τον Bolyai για πολύ καιρό. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, εάν μπορούν να χαράσσονται δύο γραμμές που δεν είναι παράλληλες, διερχόμενες από δεδεδομένο σημείο και παράλληλες σε μια δεδομένη γραμμή, τότε πρέπει να υπάρχουν απείρως πολλές γραμμές παράλληλες σε αυτή τη δεδομένη γραμμή (Wolfe, 1945). Καθώς εργαζόταν στη δεύτερη υπόθεση, συνειδητοποίησε ότι μια συνεπής γεωμετρία είχε προκύψει από την υπόθεση της ύπαρξής της καθώς δεν μπορούσε να βρει κάποια αντίφαση σε αυτό το νέο σύστημα με το οποίο ασχολείτο. Δημοσίευσε όλες τις ιδέες του και τις μαθηματικές τους θεμελιώσεις στο βιβλίο με την ονομασία Appendix κατά το έτος 1832.

Ανεξάρτητα από τις ανακαλύψεις του Janos Bolyai, ο Nikolai Lobachevsky είχε ήδη καταλήξει σε παρόμοια συμπεράσματα το έτος 1826 στο Καζάν. Τα αποτελέσματα που έλαβε ήταν παρόμοια με αυτό του Bolyai. Ο Bolyai ανακάλυψε ότι υπάρχει μια γεωμετρία στην οποία μπορεί να υπάρχουν παράλληλες σε μια δεδομένη γραμμή, διαμέσω ενός σημείου, περισσότερες από μία γραμμές. Επίσης, οι εσωτερικές γωνίες των τριγώνων που κατασκευάστηκαν μέσα σε αυτή τη γεωμετρία ήταν επίσης λιγότερο από 180° (Wolfe, 1945).

Η μεθοδολογία που χρησιμοποίησαν οι Bolyai και Lobachevsky ήταν η ίδια με εκείνη που χρησιμοποιήθηκε από τον Ευκλείδη· χρησιμοποιούσαν αυτό που ονομάζεται συνθετική μέθοδος στην οποία προχώρησαν από ορισμένα αξιώματα, αιτήματα και ορισμούς προς τα θεωρήματα, μια προοδευτική μέθοδο που ανέπτυξε ο Ευκλείδης.

ii)Γεωμετρία Riemann

Με τον Riemann, αναπτύσσεται μια αναλυτική μέθοδος αντιμετώπισης και περιγραφής του χώρου. Η συνθετική αντιμετώπιση του χώρου απαιτούσε ότι ο γεωμετρικός χαρακτήρας του χώρου θα μπορούσε είτε να περιγραφεί από τις προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας, ή από τις προτάσεις της νέας γεωμετρίας που αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τους Bolyai , Lobachevsky , Schweikart και Gauss. Όλο και περισσότερο, ειδικά από τους Schweikart, Taurinus και Gauss, άρχισε να γίνεται κοινή πεποίθηση, ότι η γεωμετρία που είναι κατάλληλη για να περιγράψει το χώρο σε αστρονομική κλίμακα είναι η αστρική γεωμετρία, και η ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση αυτής της γεωμετρίας. Η υπόθεση βασίζεται στην ανακάλυψη της σταθεράς που περιέγραψε ο Schweikart η οποία, όταν έτεινε στο άπειρο, απέδιδε τον ευκλείδειο χώρο. Έτσι η αστρική γεωμετρία φαινόταν να περιλαμβάνει τον Ευκλείδειο χώρο μέσα της. Αλλά με τον Riemann , ο χώρος απαλλάσσεται εντελώς από έναν ιδιαίτερο γεωμετρικό χαρακτήρα. Στη διάλεξή του «On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry» , δήλωσε τα εξής:

«Είναι γνωστό ότι στις γεωμετρικές υποθέσεις, θεωρούνται ως αληθείς εκ των προτέρων , τόσο η έννοια του χώρου όσο και οι πρώτες αρχές των κατασκευών στο χώρο. Δίνονται οι ορισμοί τους που είναι απλώς ονομαστικοί, ενώ οι πραγματικοί προσδιορισμοί εμφανίζονται με τη μορφή Αξιωμάτων. Η σχέση αυτών των υποθέσεων παραμένει κατά συνέπεια στο σκοτάδι· ούτε αντιλαμβανόμαστε εάν είναι απαραίτητη ή πόσο βαθιά μπορεί να είναι η σύνδεσή τους, ούτε αν είναι a priori,ούτε αν είναι δυνατή... Ο λόγος για αυτό είναι αναμφίβολα ότι η γενική έννοια του πολλαπλασιασμού εκτεταμένων μεγεθών (στα οποία τα χωρικά μεγέθη περιλαμβάνονται) παρέμειναν εντελώς ανεφάρμοστοι. Έχω από την αρχή, για αυτόν τον λόγο, θέσει ο ίδιος ως καθήκον μου τη κατασκευή της έννοιας ενός πολλαπλασιασμού εκτεταμένου μεγέθους, από τις γενικές έννοιες του μεγέθους.»

(Riemann , 1873)

Ο Riemann προσπαθεί να κατασκευάσει το χώρο από τις γενικές έννοιες του μεγέθους και προσθέτει σε αυτό ότι η δυνατότητα επίτευξης σχέσεων μέτρησης για μια συνεχή τοπολογική πολλαπλότητα ή αλλιώς πολύπτυχο (manifold) στηρίζεται στη μέτρηση.(Πολύπτυχο είναι το σύνολο των σημείων ή στοιχείων (αντικείμενα, οντότητες) εφοδιασμένο με τη πράξη του πολλαπλασιασμού εκτεταμένων μεγεθών). Δεδομένου ότι ο χώρος είναι ένα συνεχές τριπλά εκτεταμένο μέγεθος(δηλαδή μια υπόθεση που σχετίζεται με έναν σταθερό αριθμό εννοιών μεγέθους, καθεμία από τις οποίες πρέπει να καθοριστεί ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας τους, προκειμένου να διαχωριστεί και να προσδιοριστεί μια περίπτωση της υπόθεσης αυτής. Ο συνήθης φυσικός χώρος για παράδειγμα είναι τριπλά εκτεταμένο μέγεθος, επειδή χρειάζεται τρία χωρικά μήκη για να αναπαρασταθούν οι συντεταγμένες του σε ένα σύστημα συντεταγμένων) αυτό που προκύπτει αυστηρά από αυτό είναι το επόμενο: ο γενικός χαρακτήρας του χώρου δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω αξιωμάτων, πρέπει να προκύψει μέσω μέτρησης. Όπως είπε έξοχα ο Reichenbach: "Η επέκταση της έννοιας του χώρου από τον Riemann δεν ξεκίνησε από το αξίωμα των παραλλήλων, αλλά επικεντρώθηκε στην έννοια των μετρικών (της μέτρησης)." (Reichenbach, 1958).

Η θεωρία του Riemann βασίζεται στις μελέτες του Gauss σε καμπύλες επιφάνειες και μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια λαμπρή προέκταση τους. Σύμφωνα με το Σημαντικό Θεώρημα ,"Theorame Egregium" του Gauss, η καμπυλότητα οποιασδήποτε επιφάνειας, η οποία ισοδυναμεί με την απόκλιση μιας καμπύλης από ένα επίπεδο, μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως μόνο μέσα στη δισδιάστατη επιφάνεια χωρίς να ενσωματώνουμε την επιφάνεια σε υψηλότερης διάστασης χώρο. Αυτό που είχε στο μυαλό του ο Gauss ήταν μια γεωμετρία παρόμοια με την πρακτική γεωμετρία στην οποία θα μπορούσε κανείς να βρει πόσο η επιφάνεια στην οποία κάποιος στέκεται παρεκκλίνει από το να είναι επίπεδη κάνοντας μετρήσεις με αυστηρές μονάδες μήκους(rigid rods). Αυτό ονομάζεται εγγενής καμπυλότητα. Αν κάποιος διαπιστώσει ότι η αναλογία της περιφέρεια του κύκλου που μέτρησε, με τη μέτρησή της διαμέτρου του κύκλου με αυστηρές μονάδες μήκους είναι μεγαλύτερη από π, τότε θα μπορούσε κανείς να συμπεράνει ότι στέκεται στην επιφάνεια μίας σφαίρας, εάν είναι μικρότερη από π, στην επιφάνεια με σχήμα σέλας ή εάν είναι ακριβώς π, σε επίπεδη επιφάνεια. Έτσι, κάθε επιφάνεια χαρακτηρίζεται σύμφωνα με τις μετρήσεις που λαμβάνονται με αυτές τις αυστηρές μονάδες μήκους. Ο Riemann μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εξέλιξε τη θεωρία του Gauss, με το ότι ξεκίνησε με τις πολλαπλότητες (manifolds) και τη δυνατότητα ύπαρξης τους προσθέτοντας ότι δύο οποιεσδήποτε επιφάνειες έχουν διαφορετική καμπυλότητα. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο απέρριψε την άποψη ότι ο γεωμετρικός χαρακτήρας του χώρου που περιλαμβάνει τα πάντα και δίνεται πριν από τον καθορισμό των μετρικών σχέσεων μεταξύ των πολλαπλοτήτων που τον απαρτίζουν. Ο Reichenbach σχολίασε την διαδικασία που υιοθέτησε ο Riemann ως εξής:

Ο Riemann έδειξε ότι δεν είναι απαραίτητο να αναπτυχθεί ένα αξιωματικό σύστημα για να γίνουν αντιληπτοί διαφορετικοί τύποι χώρων· είναι πιο βολικό να χρησιμοποιηθεί μια αναλυτική διαδικασία ανάλογη με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε από τον Gauss για τη θεωρία επιφανειών. (Reichenbach , 1958) Ο Riemann έμοιαζε με υποστηρικτή του εμπειρισμού για το χώρο, ίσως με παρόμοιο τρόπο με τους Schweikart, Taurinus και Gauss. Αυτό που διαφοροποιούσε τις απόψεις του Riemann από τους άλλους είναι η δήλωσή του ότι υπάρχουν διαφορετικές σχέσεις μέτρησης που μπορούν να εφαρμοστούν στον χώρο. Η ευκλείδεια γεωμετρία καθιερώνει ένα σύστημα μετρικών σχέσεων· έτσι είναι μόνο μία η υπόθεση που χρησιμοποιείται από μαθηματικούς. Έως τότε , οι μαθηματικοί προτίμησαν να χρησιμοποιούν τις ευκλείδειες ευθείες γραμμές και τα τμήματα για μέτρηση, αλλά ο Riemann πιστεύει ότι η μέτρηση θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί με εντελώς διαφορετικές γραμμές και τμήματα. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει μία αληθινή και μοναδική μέτρηση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να χαρακτηρίσουμε τη γεωμετρία του χώρου· ο χώρος είναι μετρικά άμορφος(amorphous). Σχετικά με αυτό, ο Riemann έγραψε:

Προκύπτει από αυτό ότι ένα πολλαπλά εκτεταμένο μέγεθος είναι εφοδιασμένο με διαφορετικές μετρικές σχέσεις και, κατά συνέπεια, ο χώρος αποτελεί μόνο μια ιδιαίτερη περίπτωση τριπλά εκτεταμένου μεγέθους. Αλλά ως εκ τούτου ρέει μια απαραίτητη συνέπεια ότι οι προτάσεις της γεωμετρίας δεν μπορούν να προέρχονται από γενικές έννοιες μεγέθους, αλλά ότι οι ιδιότητες που διακρίνουν το χώρο από άλλα τριπλά εκτεταμένα μεγέθη πρέπει να συνάγονται μόνο από την εμπειρία. Έτσι προκύπτει το πρόβλημα, να ανακαλυφθούν οι απλούστερες ισχύουσες υποθέσεις από τις οποίες θα προκύπτουν οι μετρικές σχέσεις του χώρου· ένα πρόβλημα της φύσης αυτής της υπόθεσης δεν είναι πλήρως καθορισμένο, δεδομένου ότι μπορεί να υπάρχουν διάφορα συστήματα ισχυόντων υποθέσεων που αρκούν για να καθορίσουμε τις μετρικές σχέσεις του χώρου... (Riemann,1873)

Υπάρχουν πολλές μετρικές σχέσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της μέτρηση του χώρου, και ο Riemann συμπέρανε ότι μόνο μέσω πειραματισμού κάποιος μπορεί να καθορίσει αυτές τις μετρικές σχέσεις. Οι μαθηματικοί πρέπει πάντα να επεκτείνουν το σύστημά τους και να δοκιμάζουν διαφορετικές σχέσεις μέτρησης. Έτσι, ο καθορισμός δεν θα ήταν ποτέ ακριβής, υπό την προϋπόθεση ότι είμαστε στον τομέα μιας εμπειρικής επιστήμης. Είναι μόνο μέσω της επέκτασης μιας ποικιλίας μετρικών σχέσεων που μπορούμε να γνώσουμε, φυσικά και πάλι μέσα από ένα φάσμα πιθανοτήτων, τη πραγματική μέτρηση του χώρου. Πρέπει να επεκτείνουμε τα συστήματα διαφορετικών μετρικών σχέσεων με τις έννοιες των απείρως μικρών και απείρως μεγάλων και, υπό το πρίσμα του πειραματισμού και δοκιμάζοντας την εγκυρότητάς τους (Riemann, 1873). Αλλά ενδεχομένως αντίθετα με τη θέση του ως προς την ιδιότητα του χώρου να χαρακτηρίζεται άμορφος όσον αφορά τη μετρική του, ο Riemann έκρινε ότι η απειροελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων υπάρχει· έτσι, κατά μία έννοια, οι απόψεις του μπορούν να εκληφθούν ως επιβεβαίωση ότι σε επίπεδο απειροελάχιστου, ο χώρος είναι Ευκλείδειος.

Ακόμα ένα αξιοσημείωτο επίτευγμα του Riemann είναι ότι ανακάλυψε ένα άλλο είδος μη Ευκλείδειας γεωμετρίας με σταθερή καμπυλότητα. Αυτή η νέα γεωμετρία είναι που λαμβάνεται με την άρνηση του δεύτερου αιτήματος εκτός από την άρνηση του αιτήματος των παραλλήλων. Η νέα γεωμετρία που σχηματίζεται έτσι είναι πεπερασμένη αλλά χωρίς όρια, με την έννοια ότι μπορεί να κινείσαι επ ' αόριστον προς την ίδια κατεύθυνση χωρίς να σταματήσεις. Σε αυτή, κάθε ευθεία γραμμή συγκλίνει σε δύο διαμετρικά αντίθετα σημεία. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες σε αυτή τη γεωμετρία του Riemann , σε αντίθεση με τις γεωμετρίες του Lobachevsky και του Bolyai όπου υπάρχουν άπειρες παράλληλές. Μπορεί να ειπωθεί ότι η γεωμετρία του Riemann είναι μια "σφαιρική γεωμετρία που εκτείνεται σε τρείς διαστάσεις» (Poincaré, 1905). Έτσι, φυσικά προκύπτει ότι η επιφάνεια μιας σφαίρας παρέχει ένα μοντέλο για τη γεωμετρία Riemann στις δύο διαστάσεις με τη γεωμετρία του Riemann να χρησιμεύει ως το αξιωματικό θεμέλιο για τη σφαιρική γεωμετρία δύο και περισσότερων διαστάσεων.

Αυτές οι νέες γεωμετρίες αποτέλεσαν μια σοβαρή πρόκληση για τη θεωρία του Καντ για το χώρο και τη γεωμετρία. Αν τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας ήταν συνθετικά a-priori, πώς μπορεί να γίνει η νοητική σύλληψη των εναλλακτικών γεωμετριών; Οι εξελίξεις στον χώρο της γεωμετρίας που ξεκίνησαν από τον Saccheri και κατέληξαν στο Riemann, έθεσε υπό αμφισβήτηση την άκαμπτη ορθότητα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Όλο και περισσότερο, οι μαθηματικοί υιοθέτησαν μια εμπειριστική προσέγγιση, πιστεύοντας ότι ο χώρος θα μπορούσε στην πραγματικότητα να είναι μην είναι Ευκλείδειος. Εύλογα, προκύπτουν ερωτήματα για την εξέλιξη της φιλοσοφίας των μαθηματικών μετά την ανάδυση των μη ευκλείδειων γεωμετριών και ειδικότερα για την ικανότητα μετεξέλιξης του ρεαλισμού του Καντ υπό το νέο πρίσμα των μη ευκλείδειων γεωμετριών.

III) Ο μαθηματικός ρεαλισμός μετά την ανάδειξη των μη ευκλείδειων γεωμετριών.

α)Η φιλοσοφία των μαθηματικών μετά τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες.

Η ελκυστικότητα της θέσης ότι ο χώρος είναι υπερβατικά ιδανικός και εξαρτάται από την υποκειμενική σύσταση του μυαλού μας χάθηκε μετά την έλευση των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετρίων σχεδόν κατέστησε παρωχημένη τη θεωρία του Καντ για τον χώρο και τη γεωμετρία. Η συνέπεια και η καρποφορία αυτών των εναλλακτικών γεωμετρίων παρείχε στους φιλοσόφους και τους επιστήμονες την τεκμηρίωση ότι οι μη Ευκλείδειοι χώροι μπορούν να «συλληφθούν» νοητικά, ή να γίνουν αντιληπτοί μέσω του «στοχασμού». Αυτές οι νέες γεωμετρίες πράγματι δύναται να γνωσθούν πλήρως μέσω του στοχασμού, και είναι απαλλαγμένες από οποιαδήποτε αντίφαση. Αλλά αρκεί αυτό να χαρακτηρίσει αυτές τις νέες γεωμετρίες ως κατανοητές με την έννοια που ο Καντ χρησιμοποιεί με τον όρο "δυνατότητα σύλληψης"; Πώς πρέπει να αντιδράσει ένας Καντιανός στη θέση ότι οι μη οι ευκλείδειες γεωμετρίες είναι εξίσου κατανοητές με τις Ευκλείδειες γεωμετρίες; Προφανώς, ο ίδιος ο Καντ δεν αρνήθηκε ότι μπορούμε να κάνουμε λογικούς συνειρμούς για τα πάντα, αρκεί η συλλογιστική μας να μην σταματά από αντιφάσεις. Ισχυρίστηκε χαρακτηριστικά ότι "Μπορώ να σκεφτώ ό,τι κι αν θέλω, αρκεί να μην έχω αντιφάσεις με τον εαυτό μου."(Καντ,2007,Bxxvii/Bxxviii) Από την απλή λογική δυνατότητα, ισχυρίστηκε ο Καντ, η αντικειμενική ισχύς δεν μπορεί να αποδοθεί στην έννοια. Για να αποδοθεί η αντικειμενική ισχύς στην έννοια, κάτι περισσότερο χρειάζεται, κάτι στην εμπειρία πρέπει να αντιστοιχεί στην έννοια. Εάν δεν υπάρχει αντικείμενο που να αντιστοιχεί στην έννοια, η έννοια είναι κενή, αναμένοντας μια πιθανή εμπειρία, η οποία δεν έχει ακόμη υλοποιηθεί. Το ακόλουθο απόσπασμα μπορεί να δοθεί ως αντίθετη θέση στους υποστηρικτές της άποψης ότι οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες είναι εξίσου κατανοητές με τις Ευκλείδειες Γεωμετρίες: «Είναι, πράγματι, απαραίτητη λογική προϋπόθεση ότι μια έννοια για να μπορεί να είναι δυνατή, δεν πρέπει να περιέχει καμία αντίφαση· αλλά αυτό δεν επαρκεί σε καμία περίπτωση για να ορίσει την αντικειμενική πραγματικότητα της έννοιας, δηλαδή τη δυνατότητα του αντικειμένου όπως αναδύεται με τη νόηση μέσα στην έννοια. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχει αντιφατική έννοια στην υπόθεση ενός σχήματος που περικλείεται από δύο ευθείες γραμμές, αφού οι έννοιες των δύο ευθείων γραμμών και της συνένωσής τους δεν περιέχουν κάποια άρνηση για την ύπαρξη ενός γεωμετρικού σχήματος. Η αδυναμία προκύπτει όχι από την έννοια από μόνη της, αλλά από την σύνδεση με την κατασκευή της έννοιας στο χώρο, δηλαδή από τις αρχικές συνθήκες και τους περιορισμούς που διέπουν τον χώρο. Και δεδομένου ότι αυτά περιέχουν a priori από μόνα τους τη μορφή της εμπειρίας γενικά, έχουν αντικειμενική πραγματικότητα. δηλαδή, εφαρμόζονται σε πιθανά πράγματα. (Καντ, 2007, B268)»

Από αυτά που είπε ο Καντ εδώ, μπορεί να συναχθεί ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ λογικής δυνατότητας και διαισθητικής αληθοφάνειας. Κάθε διαισθητικά αληθοφανής έννοια πρέπει επίσης να είναι λογικά δυνατή, αλλά όχι το αντίστροφο. Εφόσον η δεδομένη έννοια δεν μπορεί να κατασκευαστεί μέσω της καθαρής διαίσθησης, η έννοια παραμένει κενή. Αντίστροφα, η αντικειμενική πραγματικότητα δεν μπορεί να διασφαλιστεί μόνο μέσω της κατασκευής της δεδομένης έννοιας μέσω της καθαρής διαίσθησης. Στο τέλος της κατασκευαστικής διαδικασίας, ένα συγκεκριμένο αντικείμενο πρέπει να αναγνωρίζεται μέσω της εμπειρίας, σε συμφωνία με την κατασκευαστική δράση του γεωμέτρου, προκειμένου η έννοια αυτή να αποκτήσει πραγματικότητα. Εξάλλου, η κατασκευή ως σχήμα μιας δεδομένης έννοιας, είναι η διεργασία που δίνει μια νόρμα παρέχοντας έτσι μια συνταγή για τη δημιουργία ενός υποσυνόλου συγκεκριμένων αντικειμένων, κάτω από αντίστοιχες γεωμετρικές έννοιες. Έγκειται στη δυναμική αυτής της κανονιστικής λειτουργίας ότι η εικόνα συνδέεται με τη γεωμετρική έννοια. Από τη βασική θέση του Καντ, προκύπτει το επιχείρημα ότι, ούτε μπορούμε να αντικρούσουμε τις μη ευκλείδειες σχέσεις μέσω της εμπειρίας μας. ούτε μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε γεωμετρικό αντικείμενο που αποκλίνει από τα ευκλείδεια χαρακτηριστικά της φαντασίας μας.

Οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες παρέχουν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα Μαθηματικής αλλαγής που απαιτεί φιλοσοφική απάντηση. Έτσι, καλούν τη φιλοσοφία για να της θέσουν ερωτήματα για τη φύση των μαθηματικών, τη μαθηματική γνώση και τη σχέσης μεταξύ των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών. Φαίνεται επίσης να διαψεύδουν την άποψη του Καντ ότι η ευκλείδεια γεωμετρία είναι απαραίτητα αληθής καθώς προκύπτει, όπως αναφέρθηκε ανωτέρω, μια a priori μορφή χώρου. Μερικές τάσεις που θα τεθούν προς σύγκριση σε αυτή την ενότητα είναι ο εμπειρισμός (empiricism) σχετικά με (τουλάχιστον ορισμένες πτυχές της) τη γεωμετρία, της γεωμετρικής συμβατικότητας (conventionalism) και της σχετιζόμενης ιδέας της σχετικότητας, ή της μη απολυτότητάς της a priori φύσης. Καθένα από αυτά αντιπροσωπεύει μια φιλοσοφική μετατόπιση που προσπαθεί να εξομαλύνει, παρά να φέρει εμπόδιο ή να αντικρούσει, τις μαθηματικές εξελίξεις. Η ύπαρξη πραγματικών γεωμετρικών εναλλακτικών εγείρει το ερώτημα κατά πόσο τα μαθηματικά είναι πραγματικά απολύτως a priori, και κάθε μία από αυτές τις τάσεις αναγνωρίζει το νέο ρόλο της φυσικής επιστήμης στη γεωμετρία.

Μία απάντηση στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία που σχετίζεται με τον Russell και τον Helmholtz είναι το σχήμα αλλαγής κάποιας μαθηματικής αλήθειας - σε γεωμετρία - και ύστερα στο εμπειρικό επίπεδο, κάποιο γεωμετρικό περιεχόμενο στη φυσική. Αυτό συνεπάγεται απόρριψη της επιστημικής συμμετρίας της θεωρίας του Καντ, διαχωρίζοντας τη γεωμετρία ως το γνωστικό αντικείμενο που πρέπει να γίνει κατανοητό με ένα νέο τρόπο. Ο γεωμετρικός εμπειρισμός ίσως αποτελεί μια πολύ ελκυστική προσέγγιση μετά και τη θεωρία της σχετικότητας. Δεδομένων των συνεπών γεωμετρικών εναλλακτικών, τα γεωμετρικά αξιώματα μπορούν να θεωρηθούν ως (περισσότερο σαν) υποθέσεις, μια στάση που φαίνεται να υποστηρίζεται από το γεγονός ότι χρειάζεται κανείς τη σύνδεση της φυσικής και της γεωμετρίας για να πραγματοποιήσει τις σχετιζόμενες εμπειρικές δοκιμές. Αυτή η εμπειρικιστική-ολιστική θεώρηση επανατοποθετεί αποτελεσματικά ορισμένες πτυχές των μαθηματικών στη φυσική, μετατοπίζοντας τον προσδιορισμό των γεωμετρικών αξιωμάτων, ή συστημάτων, μακριά από τα καθαρά θεωρικά μαθηματικά προς τα σύνορα της φυσικής επιστήμης.

Η συμβατικότητα είναι μια παρόμοια προσέγγιση, αν και πιο διακριτική απέναντι στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία. Αντιμετωπίζει τα γεωμετρικά συστήματα ως συστήματα μέτρησης και ως εκ τούτου, δεν είναι ούτε a priori, ούτε εμπειρικά. Η "Σύμβαση" είναι μια νέα επιστημονική κατηγορία, που προωθείται από τον Poincaré, ως μια ενδιάμεση κατάσταση (Folina, Poincaré and the Invention of Convention 2014). Ως συμβάσεις, τα γεωμετρικά συστήματα είναι καθορισμένα. Ωστόσο, σε αντίθεση με ορισμένες συμβάσεις, τα γεωμετρικά συστήματα δεν είναι αυθαίρετες υποθέσεις. Η συμβατικότητα αποδέχεται ότι η γεωμετρία συνδέεται στενά με τη φυσική, αλλά δεν βλέπει τη γεωμετρία ως μια απλή ενσωμάτωση στη φυσική. Αντίθετα, μαζί με άλλες συμβατικές πτυχές της επιστήμης, η γεωμετρία διατηρεί ένα διαχωρισμένο λόγο από τη φυσική λόγω του διακριτικού μεθοδολογικού της ρόλου.

Οι επιστημονικές συμβάσεις εγείρονται για το Poincaré όταν υπάρχουν περισσότερες από μία επιλογή, ωστόσο η εκλογή μεταξύ των επιλογών δεν είναι καθαρά εμπειρική ούτε καθορίζεται από αμιγώς a priori κριτήρια. Ο Poincaré επισημαίνει ότι οι εμπειρικές δοκιμές προϋποθέτουν ορισμένες συμβάσεις, άρα δεν μπορούν να επιλεγούν από τις εμπειρικές δοκιμές . Συμφωνεί με την εμπειριστική-ολιστική ότι μπορούμε μόνο να δοκιμάσουμε τη σύνδεση της φυσικής και της γεωμετρίας. Η διαφορά είναι ότι η συμβατικότητα μεγεθύνει το γεγονός ότι ορισμένα μέρη του όλου αντιμετωπίζονται (και πρέπει να αντιμετωπίζονται) διαφορετικά από άλλα μέρη. Ειδικότερα, ορισμένα μέρη μπορεί να απομονωθούν (και συνήθως απομονώνονται) γενικά από την αναθεώρηση. Δηλαδή, αυτό που είναι απομονωμένο συνήθως δεν είναι αυθαίρετο και η γεωμετρία είναι θωρακισμένη από την αναθεώρηση, επειδή διαδραματίζει διαφορετικό ρόλο στις επιστημονικές δοκιμές από τα πιο εμπειρικά μέρη της φυσικής. Στην πραγματικότητα η γεωμετρία είναι μέρος του συστήματος δοκιμής, ή καλύτερα το πλαίσιο, παρά το αντικείμενο που καλείται να δοκιμαστεί. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι συμβάσεις δεν αναθεωρούνται ποτέ, αντίθετα αναθεωρώντας τις πτυχές ενός συστήματος δοκιμών εξελίσεται σε μια διαφορετικού είδους διαδικασία από την αναθεώρηση κάποιου άλλου περιεχομένου φέρνοντας στο φώς αποτελέσματα που βασίζονται στη χρήση του εν λόγω συστήματος.

Σύμφωνα με την συμβατικότητα, τα γεωμετρικά συστήματα και ορισμένες άλλες θεμελιώδεις φυσικές αρχές λειτουργούν ως μια τρίτη κατηγορία μεταξύ του εμπειρικού και του a priori. Αφενός, δεν είναι τόσο απόλυτες ως αυτές που δεχόμαστε a priori, καθώς είμαστε κατά καιρούς πρόθυμοι για να δοκιμάσουμε άλλες συμβάσεις, άλλα πλαίσια. Αφετέρου, δεν δοκιμάζονται άμεσα επειδή αποτελούν μέρος αυτού που κάνει δυνατή την εμπειρική δοκιμή. Έτσι, ο Poincaré χαράζει μια νέα κατηγορία για τα όρια μεταξύ μαθηματικών και επιστημών, λαμβάνοντας υπόψη μερικά από αυτά που θεωρούνταν ως μαθηματικά (ιδιαίτερα γεωμετρικά συστήματα) και μερικά από αυτά που θεωρούνταν εμπειρικά (ειδικές μηχανικές αρχές) ως «συμβάσεις». Είναι σημαντικό ωστόσο, ότι αφήνει μεγάλο μέρος των επιστημονικών και των μαθηματικών αντιλήψεων ως έχει, τα εξαιρετικά εμπειρικά μέρη της επιστήμης παραμένουν εμπειρικά και ο πυρήνας των μαθηματικών παραμένει a priori.

Τόσο ο εμπειρισμός όσο και η συμβατικότητα συνάδουν με την άποψη για διαίσθηση όπως αυτή του Brouwer. Ο Brouwer δηλώνει χαρακτηριστικά ότι εγκαταλείπει την a priori φύση του χώρου, αλλά όχι του χρόνου, χτίζοντας (καθαρά) μαθηματικά μόνο στα θεμέλια που παρέχονται από την a priori μορφή του χρόνου (1913, "Intuitionism and Formalism."). Αυτές οι προσεγγίσεις του εμπειρισμού (για τη γεωμετρία), η συμβατικότητα (σχετικά με τις αρχές στο μεταίχμιο της γεωμετρίας με τη φυσική) και η μπρουαουεριανή διαίσθηση λίγο πολύ απομονώνουν τη γεωμετρία ως το «πρόβλημα». Έτσι, απομονώνουν τη γεωμετρία, προστατεύοντας τα υπόλοιπα μαθηματικά από την ανάγκη μιας νέας θεμελίωσης, επιτρέποντάς τους να παραμένουν ως μαθηματικές έννοιες a priori.

Μια τρίτη σημαντική προσέγγιση στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, ωστόσο, επαναπλαισιώνει την κατηγορία της a priori φύσης ως μη απόλυτη, ή καλύτερα ως σχετική. Σύμφωνα με τον Cassirer, αυτό είναι ένα διαφορετικό είδος προσέγγισης που είναι πιο γενικό και πιο δραστικό. Αντί να αποδώσει απλώς ορισμένους τομείς της έρευνας, όπως η γεωμετρία στον εμπειρισμό, ή να προτείνει τη δημιουργία μιας νέας ενδιάμεσης κατηγορίας όπως η συμβατική, αυτή η προσέγγιση αλλάζει ολόκληρο το εννοιολογικό πλαίσιο για τη σκέψη των μαθηματικών, της επιστήμης και της σχέσης τους. Κατά κάποιο τρόπο λαμβάνει τη συμβατική προσέγγιση και την επεκτείνει σε όλη την κατηγορία του a priori. Έτσι είναι μια πιο δραστική αντίληψη, δεδομένου ότι επηρεάζει το εννοιολογικό πλαίσιο για όλα τα μαθηματικά. Για τον Καντ και τους υποστηρικτές του, μια εκ των προτέρων γνώση απαρτίζεται από τις απαραίτητες αλήθειες που μπορούν να γνωσθούν ανεξάρτητα από την εμπειρία. Αντίθετα, η άποψη αυτή θεωρεί ότι η εκ των προτέρων έννοια είναι μόνο σχετικά εφαρμοζόμενη, η οποίο καθορίζεται μόνο από το ρόλο της στην παροχή ενός πλαισίου για την επιστήμη. Όταν η επιστήμη αλλάζει αρκετά δραστικά, το ίδιο μπορεί να κάνει και το πλαίσιό της, συνεπώς η εκ των προτέρων έννοια δεν είναι αμετάβλητη ή μόνιμη σύμφωνα με την άποψη αυτή.

Αυτή η εννοιολογική μετατόπιση επιτρέπει στη γεωμετρία να διατηρήσει τον (σχετικό) χαρακτηρισμό a priori, παρά τις πολλαπλές επιλογές που υπάρχουν δηλαδή, παρόλο που καμία επιλογή δεν είναι (απολύτως) απαραίτητη ή σταθερή. Η γεωμετρία δεν είναι απολύτως a priori, όπως φαίνεται από τις πολλαπλές επιλογές αλλά είναι "σχετικά a priori" γιατί όποιο γεωμετρικό σύστημα είναι το επιλεγμένο αποτελεί μέρος του πλαισίου που προϋποθέτει η εμπειρική δοκιμή. Συνεπώς, η γεωμετρία εξακολουθεί να είναι «πριν» από τις επιστημονικές δοκιμές, ή η πιο ξεκάθαρα εμπειρική, έτσι διατηρεί μια θέση που μπορεί να θεωρηθεί ότι εναρμονίζεται στην καντιανή παράδοση.

Συλλαμβάνοντας εκ νέου την κατηγορία τίθεται για την «εκ των προτέρων ιδιότητα» μιας περιοχής έρευνας, περισσότερο ένα ερώτημα σχετικά με τον μεθοδολογικό της ρόλο στην επιστήμη, παρά από τις εγγενείς ιδιότητές της, αφού είναι γεγονός ότι οι βασικές αλήθειες της είναι απαραίτητες ή δικαιολογημένες ανεξάρτητα από την εμπειρία. Ενώ είναι σημαντικό να ληφθεί σοβαρά υπόψη η μεθοδολογία, η άποψη ότι όλες οι εκ των προτέρων γνώσεις είναι μερικώς σχετικές είναι επαναστατική. Αν και ίσως στην καντιανή παράδοση αντιτίθεται στην άποψη του Καντ που θεωρεί την a priori ιδιότητα ως αναγκαία, αντίθετα εξαρτάται από τη φυσική επιστήμη. Η πολύ στενή σύνδεση των μαθηματικών με την επιστήμη, ακόμη και ως προνομιακή πτυχή της, δηλαδή ως το «πλαίσιό» της , αποτυγχάνει να διατηρήσει την αυτονομία της, γιατί φαίνεται να κάνει την μαθηματική αλήθεια να εξαρτάται από το ρόλο ή τη χρησιμότητα των μαθηματικών στη φυσική επιστήμη. Θολώνοντας τα όρια μεταξύ μαθηματικών και φυσικών επιστημών, αποτυγχάνεται επίσης να αντικατοπτριστεί η προφανής καθαρότητα της μαθηματικής μεθοδολογίας. Υπό αυτή την έννοια, η σχετικότητα της a priori ιδιότητας αλλάζει δραστικά τη σύλληψη των μαθηματικών ως διακριτή με τη φυσική επιστήμη: στο περιεχόμενό τους , τη μεθοδολογία τους και της επιστημονικής τους βαρύτητας. Αν και υπάρχει σαφώς μια στενή σχέση μεταξύ της συμβατικότητας και της θεώρησης περί σχετικότητας της a priori, η υπεροχή της πρώτης (καθώς επίσης και εμπειρικός ολισμός για τη γεωμετρία) είναι ότι ενώ αντιμετωπίζει τα συγκεκριμένα γεωμετρικά συστήματα με έναν νέο τρόπο, επιτρέπει στα υπόλοιπα καθαρά μαθηματικά να θεωρούνται a priori.

Το κατά πόσον η γεωμετρία είναι μια ειδική περίπτωση παρέχει έναν ενδιαφέρον διχασμό μεταξύ των προσεγγίσεων της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Τίθενται λοιπόν ερωτήματα στο κατά πόσο η ύπαρξη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας σηματοδοτεί την ανάγκη επανεξέτασης της φύσης και του ρόλου όλων των μαθηματικών. Επίσης, κατά πόσο υπονομεύεται ολόκληρη η κατηγορία των a priori, ή ολόκληρης της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Επιπρόσθετα, αναδεικνύεται το ερώτημα αν διαψεύδεται η φιλοσοφία του Καντ και κατά πόσο μπορούν οι αντιφάσεις να απομονωθούν, επιτρέποντας στη διατήρηση πολλών μαθηματικών, που έχουν σχεδιαστεί με κάποιο γενικό καντιανό τρόπο. Η αναθεώρηση του a priori ως σχετικού φαίνεται ως ένα παράδειγμα του προηγούμενου, ενώ ο περιορισμός του εμπειρισμού και της συμβατικότητας στη γεωμετρία επιτρέπει μια πιο καντιανή προσέγγιση στα υπόλοιπα μαθηματικά, μια θεώρηση που διατηρεί μια περιορισμένη ή επαναπροσδιοριζόμενη θεωρία της διαίσθησης.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα διαίρεση είναι μεταξύ των φιλοσοφικών προσεγγίσεων που απλώς περιλαμβάνουν μαθηματικές αλλαγές και τάσεις που στοχεύουν επίσης στην καθοδήγηση των μελλοντικών μαθηματικών. Οι απόψεις σχετικά με τη γεωμετρία που μέχρι στιγμής αναφέρθηκαν στο παρόν δοκίμιο, μπορούν να θεωρηθούν ως φιλοσοφία μετά τα μαθηματικά και να φιλοξενήσουν τις αλλαγές που συνέβησαν σε αυτήν. Είναι τάσεις που, όπως είπε ο Russell, «δανείζονται την Επιστήμη, αποδεχόμενες τις τελικές υποθέσεις της, ως εκείνες που επιβάλλονται από μια πραγματική αναγκαιότητα γεγονότων ή λογικής» (Russell 1897). Θα μπορούσαμε λοιπόν να ονομάσουμε τέτοιου είδους απαντήσεις ως "νατουραλιστικές", ή "δεύτερη" φιλοσοφία.

Άλλες τάσεις βλέπουν το ρόλο της φιλοσοφίας των μαθηματικών ως αυτόν του πρώτου, του προορατικού και πιο παραδοσιακού. Για παράδειγμα, οι νέοι που μυούνται στη διαίσθηση όχι μόνο αντιδρούν στην ύπαρξη εναλλακτικών γεωμετρίων αλλά τα προγράμματά τους καθοδηγούνται και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Δηλαδή, αντί να περιλαμβάνουν απλώς τις μαθηματικές αλλαγές που παρουσιάζονται από τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες (και άλλες μαθηματικές εξελίξεις), στοχεύουν επίσης να χειραγωγήσουν τα μαθηματικά, ώστε να τα κατευθύνουν ενεργά, ή ακόμη και να τα περιορίσουν, ώστε να αντικατοπτρίζουν τις φιλοσοφικές τους απόψεις.

Έτσι, οι νέοι διαισθητικοί παίζουν διπλό ρόλο στην παρούσα ανάλυση. Πρώτον, τόσο η διαίσθηση όσο και η ημιδιαίσθηση παρέχουν σημαντικά παραδείγματα προσαρμογής, αντί να εγκαταλείψουν, τη θεωρία της διαίσθησης του Καντ. Οι εν λόγω αντιλήψεις της διαίσθησης είναι ελαφρώς διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά η κάθε μία έχει ως στόχο να διατηρήσει μια βασική παραδοσιακή αντίληψη: αυτή που παράγει την ανεξαρτησία της μαθηματικής αλήθειας από τη φυσική επιστήμη και μια άποψη που υποστηρίζει την απόλυτη a priori φύση των μαθηματικών. Δεύτερον, όλοι διατηρούν έναν πιο προορατικό, κανονιστικό, παραδοσιακό ρόλο για τη φιλοσοφία των μαθηματικών.

β)Η διαίσθηση και η απολυτότητα του a priori

Προς το τέλος του 19ου αιώνα, μερικές νέες φιλοσοφίες των μαθηματικών προκύπτουν ως απάντηση στις μαθηματικές εξελίξεις που συζητήθηκαν παραπάνω. Όπως είδαμε, οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες υπονομεύουν το όραμα του Καντ για την επιστημική συμμετρία της αριθμητικής και της γεωμετρίας, καθώς και τη θεωρία της εκ των προτέρων διαίσθησης στη βάση της. Εάν, λοιπόν, η γεωμετρία είναι λιγότερο καθαρή και λιγότερο θεμελιώδης από την αριθμητική, υπάρχουν δύο κύριες στρατηγικές για μια καντιανή «διάσωση» σχετικά με τη διαίσθηση. Μπορεί κανείς να διατηρήσει την καντιανή άποψη ότι η διαίσθηση υποστηρίζει τη γεωμετρία ενώ προσφέρει μια νέα περιγραφή της αριθμητικής, ή μπορεί κανείς να απορρίψει την άποψη του Καντ ότι η διαίσθηση καθορίζει την Ευκλείδεια γεωμετρία αλλά διατηρεί την Καντιανή διαίσθηση για την αριθμητική.

Οι περισσότεροι υπερασπιστές της διαίσθησης αυτή τη στιγμή παίρνουν το δεύτερο μονοπάτι, απορρίπτουν τη διαίσθηση της γεωμετρίας για να σώσουν μια περιορισμένη μορφή Κανσιανισμού για τα υπόλοιπα μαθηματικά, ιδιαίτερα τη θεωρία αριθμών. Δηλαδή, η επίδραση της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας στην επιστημική συμμετρία του Καντ είναι να «ωθήσει τη γεωμετρία προς τα κάτω», επιτρέποντας στα υπόλοιπα μαθηματικά να παραμείνουν στο προηγούμενο επιστημικό τους επίπεδο, με την προηγούμενη φιλοσοφική τους θεμελίωση (όπως και να έχουν συλληφθεί νοητικά). Ο Frege ακολουθεί το αντίθετο μονοπάτι: διατηρεί την καντιανή διαίσθηση για τη γεωμετρία και αντ' αυτού επαναπροσδιορίζει την αριθμητική ως λογική. Έτσι, στην οπτική του, η γεωμετρία παραμένει στο προηγούμενο επίπεδό της με την προηγούμενη φιλοσοφική της θεμελίωση, και αντ’αυτού ο Frege στοχεύει να «ανεβάσει την αριθμητική» ένα επίπεδο από αυτό της γεωμετρίας σε αυτό της λογικής. Είναι ενδιαφέρον ότι θεωρεί τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία ως απόδειξη γεωμετρικής διαίσθησης: σε αντίθεση με την αριθμητική, για την οποία υπάρχει μόνο μία επιλογή, οι συνεπείς γεωμετρικές εναλλακτικές λύσεις δείχνουν, για αυτόν, ότι η διαίσθηση απαιτείται για να ξεχωρίσει κάποιος ποια εναλλακτική είναι αληθής. «Για σκοπούς εννοιολογικής σκέψης μπορούμε πάντα να υποθέσουμε το αντίθετο από ένα ή κάποιο άλλο γεωμετρικό αξίωμα, χωρίς να εμπλέξουμε τον εαυτό μας σε οποιεσδήποτε αυτοαναιρέσεις» (1884, The Foundations of Arithmetic). Οι εναλλακτικές γεωμετρίες είναι συνεπείς επειδή τα γεωμετρικά αξιώματα είναι συνθετικές και όχι αναλυτικές αλήθειες. Έτσι, η διαίσθηση αξιοποιείται για να επιλέξει, ή να καθορίσει, το ευκλείδειο σύστημα που είναι αληθές. Για παράδειγμα, ο Frege θεωρεί ότι η σκέψη για τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες χρησιμοποιεί «ακόμα την ίδια παλιά διαίσθηση του Ευκλείδειου χώρου, του μόνου του οποίου τα θεμέλεια μπορούμε να αντιληφθούμε με τη διαίσθηση » (1884). Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τη θεώρηση του Καντ, ο Frege πιστεύει ότι μπορούμε να συλλάβουμε τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, αλλά μπορούμε μόνο να διαισθανθούμε την ευκλείδεια γεωμετρία. Υπό αυτή την έννοια, η οπτική αυτή αποτελεί μια καντιανή διάσωση (για τη γεωμετρία).

Είναι μια άποψη που έρχεται σε αντίθεση με τη διαίσθηση στο χαρακτηρισμό της αριθμητικής καθώς και της γεωμετρίας. Το πρόγραμμα του Frege, ο λογικισμός, «διασώζει» τον Καντιανισμό για τη γεωμετρία εν μέρει με την «προώθηση» ή την ανύψωση της αριθμητικής στη λογική. Αυτή η άποψη της αριθμητικής αλήθειας ως λογικής ήταν ιδιαίτερα προσβλητική για τους διαισθητικούς γιατί θεωρούσαν τη λογική αλήθεια ως κενή. Αντίθετα, οι λογικιστές είδαν την αριθμητική αλήθεια ως ουσιαστική, ένα γνήσιο σώμα γνώσης, και ως εκ τούτου συνθετικό. Η υπεράσπισή τους για την καντιανή διαίσθηση επικεντρώνεται σε μη γεωμετρικούς τομείς των μαθηματικών, με ιδιαίτερη έμφαση στην αριθμητική και στο τι μπορεί να θεμελιώσει.

Έτσι, αντί να προβιβάζει την αριθμητική στη λογική, η διαισθητική καντιανή διάσωση «υποβιβάζει» τη γεωμετρία ως ένα πρώτο βήμα για τη διατήρηση του οράματος του Καντ για τα μαθηματικά. Όπως το αρθρώνει ο Brouwer:

«Αλλά το πιο σοβαρό πλήγμα για τη θεωρία της Καντιανής θεώρησης ήταν η ανακάλυψη της μη ευκλείδειας γεωμετρίας,. . . . Όσο αδύναμη κι αν φαινόταν η θέση του διαίσθησης μετά από αυτή την περίοδο μαθηματικής ανάπτυξης, έχει ανακάμψει εγκαταλείποντας την θεώρηση του Καντ περί a priori χώρου, αλλά εμμένοντας πιο αποφασιστικά στην a priori ιδιότητα του χρόνου. (Brouwer, 1913)

Έτσι, τόσο ο λογικισμός όσο και η διαίσθητικότητα προχωρούν από την ίδια τραχιά βάση, αυτή της απόρριψης της επιστημικής άποψης της συμμετρίας που σχετίζεται με τον Καντ. Εάν η αριθμητική «προωθείται» στη λογική ή η γεωμετρία «υποβιβάζεται» στο εμπειρικό (ή το συμβατικό), το αποτέλεσμα είναι κατά κάποιο τρόπο πολύ παρόμοιο αφού και οι δύο πλευρές αναγνωρίζουν την αριθμητική ως πιο θεμελιώδη από τη γεωμετρία. Εδώ, όμως, οι οπτικές αποκλίνουν απότομα.

Φυσικά, ο απλός υποβιβασμός της γεωμετρίας δεν αρκεί για να διατήρησε τη φιλοσοφία του Καντ. Πρώτον, ο ίδιος ο Καντ είπε πολύ λίγα για το ρόλο του χρόνου στη μεθοδολογία της αριθμητικής και της άλγεβρας. Υπάρχουν μερικές παρατηρήσεις, για παράδειγμα, το περίφημο απόσπασμα στα Prolegomena (Προλεγόμενα) σχετικά με την επιτυχή σύνθεση στο χρόνο γνωρίζοντας 7 + 5 = 12. Ο Καντ αναφέρει επίσης τη σημασία της «συμβολικής κατασκευής» για την άλγεβρα (σε αντίθεση με την φαινομενική κατασκευή γεωμετρίας) στην Κριτική. Αλλά αυτά τα λίγα αποσπάσματα δεν επαρκούν για να συμπληρώσουν στην απάντηση πώς διαδικασίες όπως οι διαδοχικές προσθέσεις ή οι συμβολικές κατασκευές είναι κάτι αντίστοιχο με την κατασκευή τριγώνων, γραμμών και κύκλων. Επιπλέον, η έμφαση του Καντ στην επιτυχή σύνθεση του προσδιορισμού της γενικής έννοιας του αριθμού λαμβάνει χώρα στο Schematism (Σχηματισμό) και όχι σε κάποιο κομμάτι του έργου του περί διαίσθησης. Δεν είναι έτσι σαφές τι απέμεινε από την καντιανή φιλοσοφία των μαθηματικών χωρίς χωρική διαίσθηση και γεωμετρία.

Δεύτερον, και ίσως το πιο σημαντικό, τα μαθηματικά είχαν ήδη μετακινηθεί σε αρκετά θεωρητικό και αφηρημένο έδαφος μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα. Οι συμβολικές προσεγγίσεις της άλγεβρας την απελευθέρωσαν από τα αριθμητικά της δεσμά, ακριβώς όπως η γεωμετρία απελευθερώθηκε από τα ευκλείδεια δεσμά της. Και οι δύο εξελίξεις έλαβαν χώρα παρά τις φιλοσοφικές ανησυχίες σχετικά με το νόημα, την αναφορά και την αλήθεια. Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα είναι όταν οι Βρετανοί αλγεβριστές τελικά «ταρακούνησαν» την άλγεβρα απαλλαγμένη από τις «διαμάχες» των οπαδών του Berkeley στα μέσα της δεκαετίας του 1800. Μέχρι τότε, τέτοιες φιλοσοφικές ανησυχίες εμπόδιζαν σοβαρά τη μαθηματική πρόοδο στη

Βρετανία. Οι "αδύνατοι" δηλαδή οι φανταστικοί αριθμοί δεν προβληματίζουν τους νέους διαισθητικούς επειδή δεν απαιτούν τα μεμονωμένα αντικείμενα των μαθηματικών να είναι "διαισθητικά". Η διαίσθηση σε αυτό το σημείο, προσανατολίζεται περισσότερο στην ίδια τη διαδικασία παρά στο αντικείμενο. Κάθε θεωρία που υπερασπίστηκε την καντιανή διαίσθηση για την αριθμητική, δεν θα χρειαζόταν μόνο να αποσυνδέσει τη χωρική-γεωμετρική διαίσθηση από τη χρονική-αριθμητική διαίσθηση αλλά θα πρέπει επίσης να παρέχει μια νέα έκδοση της τελευταίας. Αυτό ακριβώς κάνουν οι νέοι διαισθητικοί.

Αρκετοί μαθηματικοί προσάρμοσαν την έννοια της διαίσθησης του Καντ για να θεμελιώσουν τις μη γεωμετρικές περιοχές των μαθηματικών. Ο καθένας είχε ως στόχο να διατηρήσει την παραδοσιακή άποψη ότι τα καθαρά μαθηματικά είναι a priori, αυτόνομα (ανεξάρτητα από τις φυσικές επιστήμες), μια σφαίρα αλήθειας κ.λπ. Αν και οι έννοιες της διαίσθησης ποικίλλουν ελαφρώς, τίθενται σε παρόμοιες χρήσεις. Να θεμελιώσουν μια σταθερή βάση για τους τομείς που είναι βασικοί πυρήνες στα μαθηματικά, να διατηρήσουν την έννοια του a priori αυτών των περιοχών και να εξισορροπήσουν την αυτονομία των μαθηματικών με τη σημασία της (δυνητικής) εφαρμοσιμότητάς τους και της σύνδεσής τους με τη φυσική επιστήμη. Οι δεσπόζουσες φιλοσοφικές τάσεις που αναπτύχθηκαν και χαρακτηρίζονται από τις παραπάνω αντιλήψεις είναι αυτή της συμβατικότητας καθώς και αυτή της σχετικότητας.

γ)Η Συμβατικότητα στη Γεωμετρία των Helmholtz και Poincaré

Η δυνατότητα ύπαρξης διαισθητικής αξιοπιστίας στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες για πρώτη φορά έγινε αντικείμενο μελέτης και αντιμετωπίστηκε εκτενώς από τους Helmholtz και Poincaré. Οι απόψεις αυτών των δύο στοχαστών δεν ήταν πανομοιότυποι, αλλά αυτό που ήταν κοινό και στους δύο ήταν η προσπάθειά τους να παρέχουν μια ψυχο-φυσιολογική γένεση για τα θεμέλια της γεωμετρίας. Κατά μία έννοια, αυτό σήμαινε επιστροφή στο εμπειρικιστικό πρόγραμμα. Αλλά παρόλο που ο Helmholtz μπορεί να ειπωθεί ότι ήταν αφοσιωμένος στο εμπειρικό πρόγραμμα σχετικά με τη γένεση της γεωμετρίας, τονίζοντας τη σημασία του περιβάλλοντος στο οποίο είναι ενσωματωμένο το είδος της γεωμετρίας και τον αντίκτυπό του είδος στην εκμάθηση μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας, ο Poincaré, βασιζόμενος εν μέρει στις αναζητήσεις του Helmholtz, προσέφερε μια εντελώς νέα επιστημολογική κατηγορία για να στηρίξει τα θεμέλια της γεωμετρίας. Η νέα επιστημολογική κατηγορία που εισήγαγε ο Poincaré ήταν αυτή της συμβατικότητας.

Ο συμβατικός χαρακτήρας είχε ως στόχο να ενσωματώσει τα εμπειρικά και λογικά στοιχεία που χρειάζονταν για τη γένεση της γεωμετρίας, αλλά όχι με την έννοια που ο Καντ τα ενσωμάτωσε. Για τον Poincaré, οι προτάσεις της γεωμετρίας δεν ήταν συνθετικές αλήθειες a-priori, γιατί αν συνέβαινε αυτό, τότε «θα μας επιβάλλονταν με τέτοια δύναμη που δεν θα μπορούσαμε να φανταστούμε την αντίθετη πρόταση». (Poincaré, Science and Hypothesis,1905) Εδώ και πάλι ερχόμαστε αντιμέτωποι με τον όρο δυνατότητα σύλληψης των προτάσεων της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Για τον Poincaré, η κατανόηση των προτάσεων των μη Ευκλείδειων γεωμετριών δεν εκφράζεται μόνο ως η ικανότητά μας να τους συλλογιζόμαστε χωρίς να αντιμετωπίζουμε κάποια αντίφαση. Προσέφερε πολλά πειράματα σκέψης στα οποία απεικόνιζε εικονικούς κόσμους για να δείξει ότι διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες θα μας ανάγκαζαν να ερμηνεύσουμε εκ νέου τους πρωτόγονους γεωμετρικούς όρους. Αυτό με τη σειρά του καθιστά δυνατή την κατανόηση διαφορετικών γεωμετρίων για αισθητικά όντα που είναι εξοπλισμένα λίγο πολύ με το ίδιο είδος οργάνων αίσθησης με τα δικά μας. Αυτό, στην πραγματικότητα, αντικατοπτρίζει τον αντίκτυπο των ψυχό-φυσιολογικών επιχειρημάτων του Helmholtz στη φιλοσοφία γεωμετρίας του Poincaré. Ο Helmholtz, πριν από τον Poincaré, έδωσε παρόμοια επιχειρήματα, στο «On the Origin and Significance of Geometrical Axioms» (Περί της προέλευσης και της σημασίας των γεωμετρικών αξιωμάτων) (1870), στα οποία υποστήριξε, ότι οι διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες θα έκαναν αναπόφευκτα είδη όπως εμείς, να υιοθετήσουν μια διαφορετική γεωμετρία. Επίσης, δεν υποστήριζε την υπόθεση ότι οι προτάσεις της γεωμετρίας ήταν πειραματικά δεδομένα, γιατί «δεν κάνουμε πειράματα σε ιδανικές γραμμές ή κύκλους, μπορούμε μόνο να τις κάνουμε σε υλικά αντικείμενα» (Poincaré, 2011),ήταν συμβάσεις. Η επιλογή της μίας γεωμετρικής σύμβασης σε σχέση με μια άλλη, πραγματοποιείται υπό την καθοδήγηση της ίδιας της φύσης. Η φύση δεν επιβάλλει ποια συγκεκριμένη γεωμετρία πρέπει να επιλεγεί για να προσεγγίσει και να περιγράψει τα φαινόμενα, η φύση μπορεί μόνο να υποδηλώσει ποια συγκεκριμένη γεωμετρία πρόκειται να επιλεγεί.

Ο Poincaré προσέφερε έναν εξαντλητικό κατάλογο εμπειρικών και a-priori συνθηκών για να μελετήσει τους συστατικούς παράγοντες της γένεσης του χώρου και της γεωμετρίας. Οι εμπειρικές συνθήκες που χρειάζονται για να καταλήξει ένα είδος στην ιδέα του χώρου και της γεωμετρίας μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, τις υποκειμενικές και τις αντικειμενικές συνθήκες. Αυτός ο διαχωρισμός δεν σημαίνει ότι οι υποκειμενικές συνθήκες δεν είναι αντικειμενικές, σημαίνει μόνο ότι είναι οι συνθήκες που σχετίζονται με το υπό εξέταση υποκείμενο, δηλαδή οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται από το υποκείμενο. Οι υποκειμενικές συνθήκες πρέπει να έχουν σώμα και κινητικότητα, και η αντικειμενική προϋπόθεση είναι η δυνατότητα κίνησης του αμετάβλητου σχήματος. Ο Poincaré, αρχικά, ξεκινά αναλύοντας τις αισθήσεις μας και πώς συμβάλλουν στην ιδέα του χώρου. Επιβεβαιώνει, όπως έκανε ο Καντ στην Υπερβατολογική Αισθητική του, ότι «οι αισθήσεις μας δεν μπορούν να μας δώσουν την έννοια του χώρου», και από μόνες τους «δεν έχουν χωρικό χαρακτήρα» (Poincaré, 1898). Αλλά, σε αντίθεση με αυτόν, ο Poincaré σκέφτηκε ότι για να έχει ένας οργανισμός μια ιδέα του χώρου και με τη σειρά του να είναι ικανός να κάνει γεωμετρία, ο οργανισμός, πρώτα απ' όλα, πρέπει να είναι ικανός να κινείται. Το αναγνωρίζει ξεκάθαρα όταν λέει «Για ένα ον εντελώς ακίνητο, δεν θα υπήρχε ούτε χώρος ούτε γεωμετρία». (Poincaré, 1905)

Η προέλευση της ιδέας του χώρου εξαρτάται από τις αμοιβαίες σχέσεις που διαμορφώνονται μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου. Υπάρχουν ορισμένες εξωτερικές αλλαγές, στις οποίες υπάρχει η δυνατότητα το υποκείμενο να αποκαταστήσει το σύνολο των πρωτόγονων αισθήσεων μέσω της εκτέλεσης ορισμένων κινητικών ενεργειών και η ιδέα του χώρου βασίζεται στην ικανότητά μας να αντισταθμίσουμε τις εξωτερικές αλλαγές μέσω των αντίστοιχων εσωτερικών αλλαγών. Μέσω αυτών των αντισταθμιστικών δράσεων και κάνοντας μεταθέσεις είναι αυτό που προσδίδει σε έναν οργανισμό την ικανότητα να γνωρίζει τις χωρικές σχέσεις και έτσι να διαμορφώνει την ιδέα του χώρου. Ένας οργανισμός ανίκανος να εκτελέσει ορισμένες μεταθέσεις δεν θα γνώριζε καν τις πολύ πρωτόγονες χωρικές σχέσεις όπως αυτή της επαφής ή της απόστασης. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη την Καντιανή θέση, η οποία ισχυρίζεται ότι «ο χώρος πρέπει να έχει τεθεί ήδη ως προϋπόθέση προκειμένου οι αναπαραστάσεις να μπορούν να παρασταθούν η μία δίπλα στην άλλη» και να αναπαρασταθούν αντίστοιχα (Καντ, 2007, Β38/Β39). Αυτό, ωστόσο, θα ήταν εντελώς ανούσιο για αυτόν τον οργανισμό σύμφωνα με τον Poincaré. Ο Poincaré, στο Foundations of Geometry (Θεμέλια Γεωμετρίας) (1898), θέλει να φανταστούμε ένα υποθετικό άτομο «που κατέχει μόνο ένα ακίνητο μάτι» (Poincaré, 1898). Αυτός ο άντρας είναι εντελώς παράλυτος, και ένα από τα μάτια του είναι τυφλό. Το άλλο δεν είναι τυφλό, αλλά δεν είναι σε θέση να το μετακινήσει με τη θέλησή του. Για τον Poincaré, αυτός ο άνθρωπος δεν θα ήταν σε θέση να διατυπώσει αυτές τις προαναφερθείσες σχέσεις και τονίζει ότι η προέλευση της ιδέας του χώρου ως πλαισίου σχέσεων θα μπορούσε να αποδοθεί στην ικανότητά μας να κινούμαστε και στην ικανότητά μας να συγκρατούμε το σύνολο των πρωτόγονων σχέσεων μέσω της εκτέλεσης ορισμένων μεταθέσεων. Σε αυτό το πλαίσιο, η εστίαση σε ένα αντικείμενο με τα μάτια μας και η ικανότητά μας να το ακολουθούμε βλεματικά συνεχώς είναι ένα παράδειγμα μετατόπισης που κάνουμε με τα μάτια μας. Δεδομένου ότι ο υποθετικός άνθρωπος μας είναι ανίκανος να εκτελέσει αυτές τις κινήσεις, οι αλλαγές που εντοπίζει στον αμφιβληστροειδή του δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως χωρικές γιατί δεν υπάρχει ακόμα η δυνατότητα για τον άνθρωπό μας να συγκρατήσει τις παλιές του διαδοχικές εντυπώσεις.

Η ιδέα της κίνησης ενός αμετάβλητου σχήματος παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο στη γένεση της Ευκλείδειας γεωμετρίας και στη γέννηση της ιδέας του χώρου. Κάθε αλλαγή που παρατηρούμε στη φύση είναι είτε αλλαγή θέσης είτε αλλαγή κατάστασης. Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από αλλαγές που γενικά υφίστανται τα στερεά σώματα. Για να είναι δυνατό το αντιστάθμισμα, ο Poincaré λέει ότι "το εξωτερικό αντικείμενο στην πρώτη αλλαγή πρέπει να μετατοπιστεί όπως ένα μεταβλητό στερεό θα μπορούσε να μετατοπιστεί". (Poincaré, 1905). Τόνισε τη σημασία της δυνατότητας ελεύθερης κίνησης των αντικειμένων και είπε ότι «εάν δεν υπήρχαν στερεά σώματα στη φύση, δεν θα υπήρχε γεωμετρία». (Poincaré, 1905). Αλλαγές κατάστασης, από την άλλη πλευρά, μπορούν να δωθούν ως παράδειγμα από τις χημικές αντιδράσεις διαφόρων ειδών ή τις μετατοπίσεις υγρών, οι οποίες δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν με εσωτερικές μετατοπίσεις. Δεδομένου ότι η κίνηση ενός αμετάβλητου σχήματος δεν δηλώθηκε ρητά ως αξίωμα από τον Ευκλείδη, ο

Poincaré θεώρησε ότι ήταν ένα έμμεσο αξίωμα που χρησιμοποιήθηκε από τον Ευκλείδη για να αποτελέσει θεμέλιο για τη δυνατότητα δημιουργίας σχέσεων ισοτιμίας (congruence relations). Στο σύστημα του Ευκλείδη σχεδόν κάθε απόδειξη βασίζεται στην έννοια της ισοτιμίας. Ο ίδιος ο Helmholtz είπε ότι «η θεμελίωση όλων των αποδείξεων στην ευκλείδεια μέθοδο είναι η απόδειξη της ι των σχετικών γραμμών, γωνιών, επίπεδων σχημάτων, σωμάτων κ.λπ." (Helmholtz, 1977) Αλλά αυτό το αξίωμα, για τον Poincaré, προφανώς αποκρύπτεται στο τέταρτο αξίωμα των Στοιχείων, το οποίο δεν δηλώνεται ανεξήγητα από τον Ευκλείδη, αλλά χρησιμοποιείται παρόλα αυτά. Το τέταρτο αξίωμα επιδιώκει να δείξει ότι δύο σχήματα είναι ίσα εάν το ένα μπορεί να υπερτεθεί πάνω από το άλλο. Αλλά η μετακίνηση ενός σχήματος στο χώρο με τέτοιο τρόπο απαιτεί τα σχήματα να διατηρήσουν τη μορφή τους ενώ κινούνται. Αυτό, για το Poincaré, συνδυάζει την ευκλείδεια γεωμετρία με ένα εμπειρικό στοιχείο, αυτό της κίνησης. Συνεπώς, η εικαζόμενη καθαρότητα της γεωμετρικής πρακτικής στιγματίζεται από την εισαγωγή ενός φυσικού στοιχείου. Σε αντίθεση με τον Καντ, ο Poincaré δεν κάνει καμία διαφοροποίηση μεταξύ καθαρής θεωρητικής και εμπειρικής κίνησης όπως ο Καντ. Για τον Poincaré, η κίνηση δεν μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων, γιατί δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η κίνηση των αντικειμένων που παρατηρούμε στο περιβάλλον μας υπακούει στην ομάδα των ευκλείδειων μεταθέσεων, θα μπορούσαν κάλλιστα να υπακούσουν σε μια άλλη ομάδα μη Ευκλείδειων μεταθέσεων.

Εδώ επιτυγχάνεται η κορυφή της θέσης του Poincaré, η απόλυτη εμπειρική προϋπόθεση που είναι απαραίτητη για τη γένεση της γεωμετρίας δεν είναι τίποτα άλλο από την αμοιβαία σχέση που σχηματίζεται μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου. Το υποκείμενο συμβάλλει σε αυτό μέσω της εκτέλεσης ορισμένων εσωτερικών μετατοπίσεων που αποσκοπούν στην εξισορρόπηση της αλλαγής που προκαλείται από τις εξωτερικές μετατοπίσεις ενός αντικειμένου. Μαζί, σχηματίζουν μια ομάδα μετατόπισης. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο Poincaré υποστήριξε ότι οι εναλλακτικές γεωμετρίες είναι εξίσου κατανοητές με τις ευκλείδειες γεωμετρίες, γιατί σε έναν πιθανό κόσμο, τα στερεά σώματα μπορούν να υπακούσουν σε διαφορετικούς νόμους μετατοπίσεων από αυτούς στους οποίους έχουμε συνηθίσει εδώ και πολύ καιρό να παρατηρούμε. Ίσως το πιο διάσημο πείραμα σκέψης που παρείχε ο Poincaré είναι ο κόσμος της Σφαίρας που έδωσε στο Science and Hypothesis (Επιστήμη και Υπόθεσή) (1903). Αυτός ο κόσμος της σφαίρας είναι σε έναν φανταστικό κόσμο που διέπεται από διαφορετικούς νόμους. Οι ιδιότητες αυτής της κοσμικής σφαίρας απαριθμούνται από τον Poincaré ως εξής:

1. Ο κόσμος περικλείεται μέσα σε μια σφαίρα.

2. Η θερμοκρασία δεν είναι ομοιόμορφη μειώνεται σταδιακά καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της σφαίρας. Η απόλυτη θερμοκρασία είναι ανάλογη με $R^2 - r^2$

R = Ακτίνα της σφαίρας.

r = Απόσταση του σημείου που λαμβάνεται υπόψη από το αρχή(κέντρο σφαίρας).

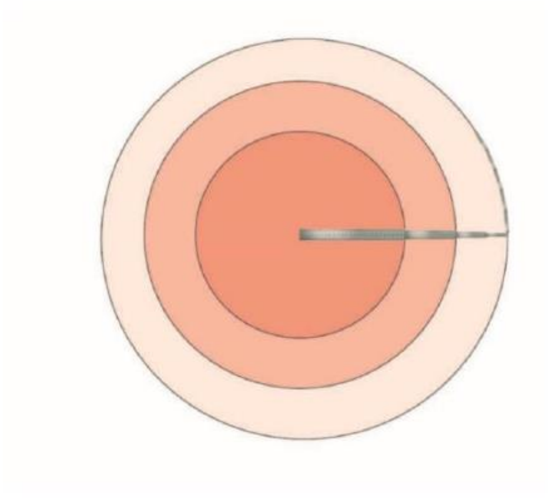
3. Κάθε σώμα έχει τον ίδιο συντελεστή διαστολής, έτσι ώστε κάθε σώμα να συρρικνώνεται ή να επεκτείνεται στην ίδια αναλογία όπως κινούνται.

4. Ο νόμος περί διάθλασης είναι αντιστρόφως ανάλογος με το $R^2 - r^2$.

5. Αυτό σημαίνει ότι η διαδρομή της ακτίνας του φωτός δεν είναι γραμμική, είναι κυκλική.

Τα λογικά όντα, υποστηρίζει ο Poincaré, θα καλλιεργούσαν μια γεωμετρία διαφορετική από τη δική μας. η γεωμετρία τους θα ήταν μια μη Ευκλείδεια γεωμετρία. Φανταστείτε ότι δύο άνθρωποι ο P_1 και ο P_2, μεταφέρονται στον κόσμο της σφαίρας από τον κόσμο μας. Ο P1 και ο P2, για τόσο πολύ καιρό, έχουν συνηθίσει να χρησιμοποιούν την ευκλείδεια γεωμετρία, οπότε η γεωμετρία με την οποία έχουν εξοικειωθεί τόσο καιρό είναι η ευκλείδεια γεωμετρία. Το ερώτημα είναι το εξής: θα παρατηρούσαν τη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο κόσμων; Αν ναι, πώς; Πρώτα απ'όλα, όπως δήλωσε ο Poincaré, ο κόσμος θα φαινόταν τόσο άπειρος για αυτά τα όντα, ενώ από τη δική μας οπτική γωνία, εμφανίζεται ως πεπερασμένος. Ο λόγος είναι ότι τα σώματα συρρικνώνονται καθώς απομακρύνονται από την αρχή, και αυτό καθιστά την περιφέρεια μη προσιτή για αυτά τα όντα, γεγονός που θα τους έκανε να σκεφτούν ότι ο κόσμος τους είναι άπειρος. Τα P1 και P2 δεν θα ήταν τόσο εύκολα σε θέση να ανιχνεύσουν την επίδραση της συρρίκνωσης και της επέκτασης μέσω της μέτρησης. Επειδή κάθε φορά που ήθελαν να μετρήσουν ένα αντικείμενο που απομακρύνεται πολύ από την αρχή, θα έπρεπε να απομακρυνθούν από την αρχή για να φτάσουν σε αυτό το αντικείμενο και να υπερθέσουν τη ράβδο μέτρησης πάνω από αυτό το αντικείμενο, έτσι οι ράβδοι μέτρησης τους, μαζί με το σώμα τους, θα συρρικνώνονταν στην ίδια αναλογία με το σώμα που ήθελαν να μετρήσουν.

Όμως δεν υπάρχει ένας τρόπος να μάθουνε ότι ο κόσμος στον οποίο είναι ενσωματωμένοι οι P1 και P2, είναι διαφορετικός από τον προηγούμενο κόσμο τους; Θα πρέπει να εξετάσουν τις απτικές και οπτικές τους εντυπώσεις στον κόσμο της σφαίρας και να τις συγκρίνουν με αυτές στον ευκλείδειο κόσμο μας. Η συνειδητοποίηση των διαφορών μεταξύ των απτικών εντυπώσεων τους στον κόσμο της σφαίρας και εκείνων στον ευκλείδειο κόσμο απαιτεί να κάνουν ορισμένα πειράματα με το σώμα τους ή με τις άκαμπτες ράβδους. Ας υποθέσουμε ότι οι P1 και P2 βρίσκονται στην αρχή της σφαίρας. Έστω ο P1 κάνει μια αντίστροφη περιστροφή με τη φορά των δεικτών του ρολογιού 90^o προς τα αριστερά και έστω ο P2 κάνει μια περιστροφή 90^o προς τα δεξιά. Αφού ο καθένας ολοκληρώσει την περιστροφή του, βάλτε τους να περπατήσουν δέκα βήματα σε μια ευθεία γραμμή και να σταματήσουν και να περιστρέψουν το σώμα τους πίσω στον αρχικό προσανατολισμό τους. Αυτό δείχνει ότι απομακρύνθηκαν ο ένας από τον άλλο για περίπου είκοσι βήματα, σταμάτησαν και επανάφεραν το σώμα τους πίσω στον αρχικό τους προσανατολισμό. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι αυτοί περπατάνε δέκα βήματα σε ευθεία γραμμή και πάλι για τελευταία φορά. Αυτό σημαίνει ότι περπατούν σε παράλληλες ευθείες αφού και οι δύο έχουν απόσταση μεταξύ τους περίπου είκοσι βήματα, και περπατούν προς την ίδια κατεύθυνση. Τώρα, αν θέλουν να μετρήσουν την απόσταση μεταξύ τους, πρέπει να περπατήσουν ο ένας προς τον άλλο και να μετρήσουν τα βήματά τους. Θα παρατηρήσουν ότι ο αριθμός των βημάτων που πρέπει να πραγματοποιηθούν είναι πολύ μεγαλύτερος τώρα, γιατί και οι δύο απομακρύνθηκαν από την αρχή περίπου δέκα βήματα και το σώμα τους συρρικνώθηκε καθώς κινούνταν, οπότε τα βήματά τους θα είναι πολύ μικρότερα όταν είναι μακριά από την αρχή με αποτέλεσμα η απόσταση που μετρούν όταν κινούνται ο ένας προς τον άλλον να είναι πολύ μεγαλύτερη. Αν αυτοί οι δύο άνθρωποι μεταφέρθηκαν σε αυτόν τον κόσμο από έναν ευκλείδειο κόσμο, θα εκπλαγούν, γιατί ήξεραν ότι στον ευκλείδειο κόσμο, οι παράλληλες ευθείες ισαπέχουν μεταξύ τους παντού. Αλλά εδώ, παρόλο που κινούνταν παράλληλα μεταξύ τους, βλέπουν ότι η απόσταση μεταξύ τους γίνεται όλο και μεγαλύτερη καθώς απομακρύνονται από την αρχή. Έτσι, όπως και στην υπερβολική γεωμετρία, η απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων γραμμών σε αυτόν τον κόσμο όντως αλλάζει, όσο περισσότερο απομακρύνονται από την αρχή, τόσο μεγαλώνει ο χώρος ανάμεσά τους. Υπάρχουν βέβαια και άλλοι τρόποι να μάθουμε τις διαφορές μεταξύ του κόσμου της σφαίρας και του ευκλείδειου κόσμου μας. Μέσω της μέτρησης της αναλογίας της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρο του με τις φυσικές ράβδους, αυτοί οι άνθρωποι είναι πιθανό να ανακαλύψουν ότι είναι μεγαλύτερος από π και καθώς η διάμετρος αυξάνεται η αναλογία υπερβαίνει το π όλο και περισσότερο. Ο λόγος πίσω από αυτό είναι απλός. Καθώς οι φυσικές ράβδοι απομακρύνονται από την αρχή, συρρικνώνονται, οπότε η μέτρηση της περιφέρειας με μικρότερες ράβδους σημαίνει ότι όλο και περισσότερες ράβδοι μπορούν να τοποθετηθούν σε αυτή, σε σύγκριση με τον αριθμό των ράβδων που θα μπορούσαν να τοποθετηθούν σε αυτή εάν η διάμετρος δεν συρρικνωνόταν συνεχώς. Αυτό με τη σειρά του θα σήμαινε ότι η μέτρηση της περιφέρειας θα απέδιδε υπερβολικά μεγάλες τιμές σε σύγκριση με την τιμή της διαμέτρου, και έτσι ο λόγο τους, θα υπερέβαινε τον συνήθη λόγο μεταξύ της περιφέρειας προς τη διάμετρο.



- Υποθέτουμε ότι το κέντρο του δίσκου θερμαίνεται και η θερμότητα διαχέεται προς τις άκρες.
- Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετρικές ράβδοι μεγεθύνονται όταν θερμανθούν.
    - ➢ Τότε:
        - Η μέτρηση της διάμετρου θα είναι μικρότερη από αυτή του μη θερμαινόμενου δίσκου(παρ. δ=7 μονάδες).
        - Η μέτρηση της περιφέρειας θα παραμαίνει ίδια.
    - ➢ Έτσι: $\frac{\pi\epsilon\rho\iota\varphi\acute{\epsilon}\rho\epsilon\iota\alpha}{\delta} > \pi$
- Θεωρούμε: R=η ακτίνα του δίσκου, l_0=το αρχικό μήκος της ράβδου, η θερμοκρασία T(r) είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από την ακτίνα r: $T(r)=R^2-r^2$
- Επίσης το μήκος της ράβδου δίνεται από: $l(r)=l_0T(r)/R^2$
    - ➢ Έτσι για κάθε κύκλο από το κέντρο με ακτίνα <R ισχύει: : $\frac{\pi\epsilon\rho\iota\varphi\acute{\epsilon}\rho\epsilon\iota\alpha}{\delta} > \pi$

Τι γίνεται με τις οπτικές εντυπώσεις αυτών των ανθρώπων στον κόσμο της σφαίρας; Πώς θα ήταν οι οπτικές εντυπώσεις των P1 και P2 διαφορετικές από εκείνες του προηγούμενου ευκλείδειου κόσμο τους; Είναι ο κόσμος της σφαίρας ποιοτικά ταυτόσημος με τον Ευκλείδειο χώρο; Μέχρι στιγμής, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις απτικές εντυπώσεις των P1 και P2, ο χώρος στον οποίο ζουν εμφανίζει τα χαρακτηριστικά του υπερβολικού χώρου. Όμως σε υπερβολικό χώρο, ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρό της είναι μεγαλύτερος από π και η οι παράλληλες γραμμές δεν ισαπέχουν. Έτσι, το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: πόσο διαφορετικές είναι οι οπτικές εντυπώσεις για όντα σαν εμάς σε έναν υπερβολικό χώρο; Ο Helmholtz, στο κεφάλαιο The Origin of the Geometrical Axioms (Προέλευση των Γεωμετρικών Αξιωμάτων) , έδωσε μια λεπτομερή εξήγηση σχετικά με αυτό. Είπε ότι τα πιο απομακρυσμένα αντικείμενα αυτού του χώρου θα φαίνονται σε πεπερασμένη απόσταση από τον παρατηρητή, αλλά η απόσταση μεταξύ αυτών των αντικειμένων και του παρατηρητή φαίνεται να διαστέλλεται καθώς ο παρατηρητής κινείται προς αυτά τα αντικείμενα. Αυτό σημαίνει ότι δύο φυσικές ευθείες που τοποθετούνται σε απόσταση σε σχέση με τη θέση του παρατηρητή φαίνεται να είναι παράλληλες εκ πρώτης όψεως. Αλλά καθώς ο παρατηρητής κινείται προς αυτές τις φυσικές γραμμές, θα έβλεπε ότι αυτές οι γραμμές στρέφονται προς τα έξω, και η απόσταση μεταξύ τους αυξάνεται. (Helmholtz, 1977). Σύμφωνα με τα όσα είπε ο Helmholtz σχετικά με τις οπτικές εκτιμήσεις του υποκειμένου, είναι προφανές σε αυτό το απόσπασμα ότι οι οπτικές εντυπώσεις του P1 και του P2 θα ήταν επίσης διαφορετικές από αυτές που θα είχαν στον κόσμο τους. Λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορά τόσο στις απτικές όσο και στις οπτικές τους αισθήσεις στον κόσμο της σφαίρας, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι αυτοί οι άνθρωποι θα υιοθετούσαν αναγκαστικά την υπερβολική γεωμετρία για να εξηγήσουν την αλληλουχία των εντυπώσεων τους σε αυτόν τον κόσμο; Είναι φανερό ότι τα στερεά σώματα που συναντούν οι P1 και P2 στον κόσμο της σφαίρας είναι εντελώς διαφορετικά από τα σώματα στα οποία είχαν εμπειρία, στον συνηθισμένο τους κόσμο. Παρά τη διαφορά στις απτικές και οπτικές εντυπώσεις τους, θα εξακολουθούσαν να θεωρούν τα σώματα που συναντούν στον κόσμο της σφαίρας ως σταθερά, αφού είναι σε θέση να αντισταθμίσουν τις εξωτερικές αλλαγές μέσω της εκτέλεσης ορισμένων εσωτερικών αλλαγών. Αλλά θα ήταν ένα βιαστικό συμπέρασμα να πούμε ότι θα υιοθετούσαν την υπερβολική γεωμετρία, επειδή τότε "η γεωμετρία θα ήταν μόνο η μελέτη των κινήσεων των στερεών σωμάτων" (Poincaré, 1905). Ο Poincaré δήλωσε ότι η εμπειρία θα μπορούσε να μας καθοδηγήσει μόνο στην επιλογή μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας, δεν θα μπορούσε ποτέ να μας υπαγορεύσει ποια γεωμετρία πρέπει να επιλέξουμε μεταξύ εναλλακτικών επιλογών. Αυτό μας φέρνει αντιμέτωπους με το ρόλο που παίζουν τα a priori στοιχεία στην επιλογή μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας. Σχετικά με αυτό, ο Poincaré έγραψε:

«Το αντικείμενο της γεωμετρίας είναι η μελέτη μιας συγκεκριμένης «ομάδας» αλλά η γενική έννοια της ομάδας προϋπάρχει στο μυαλό μας, τουλάχιστον δυνητικά. Επιβάλλεται σε εμάς όχι ως μια μορφή λόγω της αισθητικότητας μας, αλλά ως μορφή που άπτεται της διανόησής μας. Μόνο, μεταξύ όλων των πιθανών ομάδων, πρέπει να επιλέξουμε ένα πρότυπο που θα είναι το πρότυπο, ας πούμε, με το οποίο θα συσχετίζαμε φυσικά φαινόμενα.» (Poincaré, 1905)

Το a-priori στοιχείο είναι η έννοια της ομάδας. Ο Poincaré είχε ως στόχο να παρέχει μια ομάδα θεωρητικών θεμελίων τόσο για τον χώρο όσο και για τη γεωμετρία. Μεταξύ των διαφόρων ομάδων, ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για τις μεταθετικές ομάδες, για να κατακτήσουμε την ιδέα του χώρου, και η γεωμετρία δεν είναι τίποτα άλλο από μια συγκεκριμένη επιλογή μιας ομάδας μετατόπισης μεταξύ των υφιστάμενων εναλλακτικών επιλογών. Ο Poincaré υπογράμμισε ότι η έννοια της ομάδας δεν είναι μια μορφή που άπτεται της αισθητικότητάς μας αλλά ανήκει στις μορφές που άπτονται της διανόησης μας. Αυτό είναι σημαντικό, γιατί διαχωρίζει τη φιλοσοφική του θέση από τον Καντ. Για τον Καντ, ο χώρος είναι μια μορφή αισθητικότητας που όμως προηγείται όλων των δεδομένων που μας παρέχουν οι αισθήσεις μας. Ο Poincaré πίστευε ότι η ικανότητά μας να δημιουργούμε ένα δίκτυο σχέσεων δεν οφείλεται σε κάποια μορφή που άπτεται της αισθητικότητάς μας, αλλά στην ικανότητά μας να συλλαμβάνουμε την ίδια την ιδέα για πρώτη φορά.

«Αυτό που οι μαθηματικοί αποκαλούν ομάδα είναι το σύνολο ενός ορισμένου αριθμού λειτουργιών και όλων των συνδυασμών που μπορούν να γίνουν από αυτές», δήλωσε ο Poincaré (Poincaré, 1898). Ο χώρος και η γεωμετρία οφείλουν την ύπαρξή τους σε αυτές τις συγκεκριμένες λειτουργίες και τους συνδυασμούς αυτών των λειτουργιών που είμαστε σε θέση να κάνουμε. Η ίδια η ιδέα της αντιστάθμισης του συνόλου των αισθήσεων μας, βασίζεται στην ιδέα μιας αντιμεταθετικής ομάδας. Η ικανότητά μας να αντισταθμίσουμε μια εξωτερική αλλαγή λαμβάνεται ως η θεμελιώδης ομάδα λειτουργιών. Η ιδέα της αντιστάθμισης δεν λαμβάνεται από την εμπειρία, γιατί η εμπειρία μας ενημερώνει κατά προσέγγιση ότι οι αισθήσεις που αισθανόμαστε τη χρονική στιγμή t_1 διατηρούνται μετά από τις απαραίτητες μεταθέσεις την t_2. Αλλά η ίδια η ιδέα της πραγματοποίησης αντισταθμιστικών δράσεων προκύπτει από μέσα, και αυτό και μόνο είναι η προϋπόθεση της δυνατότητας ταξινόμησης των αισθήσεων μας.

Το σύνολο των λειτουργιών που δίνει ο Poincaré ως παραδείγματα μπορεί στην πραγματικότητα να εξηγηθεί με τη γλώσσα της θεωρίας ομάδων. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα σύνολο αισθήσεων που λαμβάνουμε μέσω του αντίχειρά μας, A την t_1. Θεωρούμε ότι μια εσωτερική μετατόπιση S λαμβάνει χώρα την t_2, και αυτό μας κάνει να αισθανόμαστε το ίδιο σύνολο αισθήσεων με το δείκτη μας την t_2. Έτσι, την t_2, ο δείκτης μας αισθάνεται τώρα το σύνολο των αισθήσεων A. Τώρα, σκεφτείτε ότι την t_3, λαμβάνει χώρα μια εξωτερική μετατόπιση R και κάνει το δείκτη μας να αισθάνεται ένα σύνολο αισθήσεων B. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι, κάνοντας μια αντίστροφη μετατόπιση, S΄ την t_4, φέρνουμε τον αντίχειρά μας στη θέση του δείκτη μας και ο αντίχειράς μας αισθάνεται τώρα το σύνολο των αισθήσεων B. Έτσι η S΄ γίνεται η αντίστροφη μετατόπιση του στοιχείου S. Η ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου είναι ένα από τα αξιώματα της θεωρίας ομάδας και η χρήση του δεν περιορίζεται πουθενά στις μεταθέσεις. Ακόμα και στη διαχείριση αλγεβρικών ποσοτήτων που στερούνται εντελώς χωρικής έννοιας χρησιμοποιούμε την ίδια δομή ομάδας. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η ιδέα της ομάδας ανήκει στη μορφή που άπτεται της κατανόησης και εν γένει της διανόησής μας για τον Poincaré. Ο Heinzmann δήλωσε ότι είναι μια αλγεβρική διαίσθηση που μπορεί να είναι εφαρμόσιμη στις αισθήσεις μας και είναι χρήσιμη για την ταξινόμησή τους.

Παρόλο που, αναφέραμε για πρώτη φορά νωρίτερα ως εμπειρική προϋπόθεση την δυνατότητα ύπαρξης τόσο του χώρου όσο και της ενασχόλησης με τη γεωμετρία, η ιδέα της δυνατότητας κίνησης (Heinzmann, 1999) ενός αμετάβλητου σχήματος δεν είναι κάτι που αντλούμε άμεσα από την εμπειρία. Είναι αλήθεια ότι η εμπειρία μας παρέχει στερεά σώματα που είναι αμετάβλητα κάτω από οποιαδήποτε μετατόπιση, αλλά τα στερεά σώματα δεν πρέπει να συγχέονται με τα άκαμπτα σώματα. Τα άκαμπτα σώματα είναι εξιδανικευμένα στερεά σώματα. Τα στερεά σώματα πρέπει να λαμβάνονται ως προσεγγίσεις άκαμπτων σωμάτων. Η διαφορά μεταξύ στερεών σωμάτων και άκαμπτων σωμάτων γίνεται εξαιρετικά σαφής από τον Hans Reichenbach, στο έργο του Philosophy of Space and Time (Φιλοσοφία του Χώρου και του Χρόνου). Ο πλήρης ορισμός που έδωσε, δίνεται ως εξής: «Τα άκαμπτα σώματα είναι στερεά σώματα που δεν επηρεάζονται από διαφορικές δυνάμεις ή για τα οποία η επίδραση των διαφορικών δυνάμεων έχει εξαλειφθεί με διορθώσεις δηλαδή οι καθολικές-θεμελιώδης δυνάμεις δεν λαμβάνονται υπόψη» (Reichenbach, 1958) Οι παραπάνω όροι θα παρουσιαστούν και θα αναλυθούν στην επόμενη ενότητα . Εν ολίγοις, ο Reichenbach ισχυρίστηκε ότι ένα άκαμπτο σώμα είναι ένα στερεό σώμα του οποίου οι λεπτές παραμορφώσεις μπορούν να αγνοηθούν. Αυτός ο ορισμός ευθυγραμμίζεται με τις προθέσεις του Poincaré. Ο Poincaré γνώριζε το γεγονός ότι ο νους παρεμβαίνει και εξαλείφει αυτές τις λεπτές ασήμαντες παραμορφώσεις που υπάρχουν στα στερεά αντικείμενα συμβάλλοντας έτσι στη δημιουργία ιδανικών αντικειμένων. Έτσι, η γεωμετρία δεν μελετά στερεά αντικείμενα αλλά μελετά αυτά τα ιδανικά αντικείμενα. Εδώ οι απόψεις του Poincaré αποκλίνουν από τις απόψεις του Helmholtz. Ο Helmholtz πίστευε ότι η ιδέα της κίνησης ενός αμετάβλητου σχήματος προκύπτει απευθείας από την εμπειρία. Το ακόλουθο απόσπασμα έχει ως στόχο να εκθέσει τις απόψεις του Helmholtz σχετικά με την προέλευση της δυνατότητας κίνησης ενός αμετάβλητου σχήματος: «Εάν, ωστόσο, θέλουμε να οικοδομήσουμε ανάγκες σκέψης πάνω στην υπόθεση της ελεύθερης κινητικότητας σταθερών χωρικών δομών με αναλλοίωτη μορφή προς κάθε μέρος του χώρου, τότε πρέπει να θέσουμε το ερώτημα εάν αυτή η υπόθεση δεν περιλαμβάνει κάποια λογικά μη αποδεδειγμένη προϋπόθεση. Θα δούμε επί του παρόντος ότι στην πραγματικότητα περιλαμβάνει μια τέτοια προϋπόθεση και μάλιστα μια πολύ πλούσια σε συνέπειες. Αλλά αν όντως είναι έτσι, τότε κάθε απόδειξη αυτής της μαθηματικής αναλογίας βασίζεται σε ένα γεγονός που προκύπτει μόνο από την εμπειρία». (Helmholtz, 1977)

Ο Poincaré, σε αντίθεση με τις απόψεις του Helmholtz, είχε την πεποίθηση ότι η φύση μπορεί να μας παρέχει μόνο σχεδόν άκαμπτα σώματα. Είναι ο νους που δρα πάνω σε αυτές τις κατά προσέγγιση αισθήσεις και τις μετατρέπει σε ιδανικές. Έτσι, η δυνατότητα ύπαρξης ενός αμετάβλητου σχήματος μπορεί να γνωστεί a-priori στη γεωμετρία και δεν επιτυγχάνεται μέσω της εμπειρίας. Αυτό είναι ένα από τα a-priori στοιχεία της γεωμετρίας χωρίς τα οποία η πρακτική της καθίσταται αδύνατη.

Η συμβατικότητα του Poincaré του επέτρεψε να καταστήσει αστείο το ερώτημα αν ο χώρος είναι Ευκλείδειος ή όχι. Αυτή η ερώτηση, για τον Poincaré, δεν έχει νόημα, γιατί μια γεωμετρική δομή δεν μπορεί να είναι αληθινή ή ψευδής, μπορεί να είναι μόνο πιο βολική (Poincaré, 1905). Η εμπειρία δεν μπορεί ούτε να αντικρούσει, ούτε να επαληθεύσει την ευκλείδεια γεωμετρία. Ακόμα κι αν, όπως ίσως πιστεύουν οι ερευνητές της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας όπως ο Taurinus, ο Gauss και άλλοι, μια μέρα αποδειχθεί ότι η παράλλαξη ενός μακρινού αστέρα είναι διαφορετική από ό, τι είναι σήμερα, οι επαγγελματίες της γεωμετρίας και της επιστήμης θα βρεθούν αντιμέτωποι με δύο επιλογές. Είτε θα εγκαταλείψουν την Ευκλείδεια γεωμετρία και θα υιοθετήσουν την μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, ή θα εγκαταλείψουν το νόμο της οπτικής που δηλώνει ότι μια ακτίνα φωτός διαδίδεται σε ευθεία γραμμή και θα διατηρήσουν την Ευκλείδεια γεωμετρία. Έτσι, η θέση του περί συμβατικότητας επικεντρώνεται στην αλληλεξάρτηση μεταξύ φυσικής και γεωμετρίας. Υπό το φως νέων πειραμάτων και παρατηρήσεων, η τρέχουσα γεωμετρική δομή που χρησιμοποιείται στην επιστήμη μπορεί να απαιτήσει τροποποίηση. Αλλά οι επιστήμονες θα είναι πάντα ελεύθεροι να επιλέξουν αν η γεωμετρική δομή πρόκειται να τροποποιηθεί ή οι νόμοι της φυσικής πρόκειται να τροποποιηθούν. Η επιλογή δεν μπορεί να τους υπαγορεύεται από την εμπειρία, η εμπειρία μπορεί μόνο να καθοδηγήσει τους επιστήμονες να επιλέξουν την απλούστερη και πιο βολική γεωμετρική δομή για να εξηγήσουν τη σχέση μεταξύ των φαινομένων. Ο Poincaré σκέφτηκε ότι οι επιστήμονες θα ευνοούν πάντα την ευκλείδεια γεωμετρία έναντι των εναλλακτικών επιλογών, γιατί είναι η απλούστερη και η πιο βολική γεωμετρική δομή για να εξηγήσει τα φαινόμενα.

Εν κατακλείδι, ο Poincaré απαρνήθηκε τη θεωρία του Καντ για τον χώρο και τη γεωμετρία. Ο χώρος δεν θα μπορούσε να είναι μια εκ των προτέρων μορφή αισθητικότητας, γιατί ένας άνθρωπος ανίκανος να παράγει τις απαραίτητες κινήσεις δεν θα μπορούσε να κατέχει την ιδέα του. Ένα από τα συστατικά a-priori στοιχεία του χώρου είναι η ιδέα της ομάδας, η οποία προϋπάρχει σε εμάς ως μια μορφή κατανόησης. Βέβαια, η έννοια της ομάδας δεν είναι η μόνη διανοητική ικανότητα που παίζει ουσιαστικό ρόλο στη γένεση του χώρου. Ο Poincaré απαριθμεί και άλλες ικανότητες του νου που συμβάλλουν εξίσου στη γένεση του χώρου. Οι υπόλοιπες ικανότητες είναι η ικανότητα μιας επ' αόριστον επανάληψης (αρχή της μαθηματικής επαγωγής) και η ιδέα της συνέχειας. Αυτά αναφέρονται συχνά ως διαίσθηση, η ιδέα της ομάδας εκφράζεται ως η αλγεβρική διαίσθηση, η μαθηματική επαγωγή ως αριθμητική διαίσθηση, και το συνεχές ως τοπολογική διαίσθηση από Heinzmann στο άρθρο του, Poincaré on Understanding Mathematics (1999) (Ο Poincaré στην κατανόηση των μαθηματικών). Έτσι, η γεωμετρία, δεν μπορεί να είναι ένα σώμα γνώσεων που αποτελείται από συνθετικές αλήθειες a-priori γιατί υπάρχουν εναλλακτικές γεωμετρίες που μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τη χωρική συμπεριφορά των αντικειμένων. Κατ'αυτόν τον τρόπο , δεν υπάρχει καμία ανάγκη να ξεχωρίσουμε την Ευκλείδεια γεωμετρία για να περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ των φαινομένων.

Παρόλο που ο Poincaré απέρριψε τη θεωρία του Καντ για το χώρο και τη γεωμετρία, προσπάθησε να παραμείνει πιστός στην καντιανή ορολογία σε όλα τα έργα του και πήρε το μέρος του Καντ στο θέμα του περιεχομένου των μαθηματικών. Όμοια με τον Καντ, για τον Poincaré τα μαθηματικά δεν στερούνται διαισθητικού περιεχομένου. Και ο ίδιος πίστευε ότι τα μαθηματικά είχαν εξωλογικά στοιχεία μέσα τους, και πίστευε ότι δεν μπορεί να περιοριστούν στο λογικό. Συνέδεσε αυτά τα εξωλογικά στοιχεία με τη διαίσθησή μας όπως ο Καντ. Ωστόσο, ο όρος «διαίσθηση» έλαβε πολύ διαφορετική έννοια με τον Poincaré. Η γεωμετρική διαίσθηση, με την έννοια που χρησιμοποιήθηκε από τον Καντ, παρομοιάζεται με ένα είδος διαίσθησης που υπόκειται σε σφάλματα και ανίκανη να παράσχει βεβαιότητα.

Ο Poincaré μοιράστηκε στο βιβλίο του The Value of Science (Η αξία της επιστήμης) το ακόλουθο απόσπασμα που λήφθηκε από το άρθρο του Royce, Kant's Doctrine of the Basis of Mathematics (το Δόγμα του Καντ για τη Βάση των Μαθηματικών): «Αυτή ακριβώς η χρήση της διαίσθησης που ο Καντ θεωρούσε γεωμετρικά ιδανική, ο σύγχρονος γεωμέτρης τη θεωρεί επιστημονικά ελαττωματική, επειδή είναι συγκαλυμμένη. Δεν υπάρχει μαθηματική ακρίβεια χωρίς σαφείς αποδείξεις από υποθετικές αρχές όπως είναι το σύνθημα του σύγχρονου γεωμέτρου." (Poincaré, 1958)

Το καντιανό ύφος κατασκευής ενός χωρικού μεγέθους που προκύπτει από μια διαδοχική χωροχρονική σύνθεση που πραγματοποιείται στην υπερβατική φαντασία δεν μπορεί να αιτιολογήσει αυστηρά τη συνέχεια του παραγόμενου μεγέθους με την έννοια που τα σύγχρονα μαθηματικά σήμερα το απαιτούν. Ο Michael Friedman, στο Kant's Theory of Geometry (Θεωρία του Καντ για τη Γεωμετρία), παραθέτει ότι η ύπαρξη ορισμένων σημείων που χρησιμοποιούνται στις διαγραμματικές αναπαραστάσεις ορισμένων προτάσεων καθίσταται προβληματική εάν επιλεγεί η Ευκλείδεια κατασκευαστική διαδικασία για τη δημιουργία τους. Η ύπαρξη τέτοιων σημείων μπορεί να τεκμηριωθεί μόνο με τη χρήση της θεωρίας της πολυαδικής ποσοτικοποίησης, στην οποία απλά δεν είχε πρόσβαση. Ο Friedman τονίζει επίσης το γεγονός ότι αν ο Καντ γνώριζε τη θεωρία της πολυαδικής, δεν θα προσπαθούσε να βασίσει την προέλευση του χώρου στην καθαρή διαίσθησή μας. Ο Καντ προσέφερε ένα επιχείρημα για να δείξει ότι ο χώρος μας είναι μια μη εννοιολογική αναπαράσταση, γιατί η μερεολογική δομή του δεν υπακούει σε αυτή των εννοιών και η αναπαράσταση μιας έννοιας που περιέχει μέσα της απείρως πολλές έννοιες δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί με τα εργαλεία της λογικής. Το επιχείρημά του ήταν πράγματι λαμπρό, για τον Friedman, στο να παρουσιάσει την ανεπάρκεια της μοναδικής λογικής στην αναπαράσταση του απείρου. Η μοναδική λογική είναι ένας κλάδος της λογικής 1ης τάξης που περιλαμβάνει καλά διαμορφωμένες σχέσεις που κατασκευάζονται από ένα κατηγόρημα μιας θέσης. Κάθε καλά διαμορφωμένη σχέση περιλαμβάνει ένα μόνο όρισμα για ένα μόνο αντικείμενο στη μοναδική λογική. Ο Φρίντμαν έγραψε χαρακτηριστικά: Μπορούμε τώρα να αρχίσουμε να βλέπουμε τι εννοεί ο Καντ στο δόγμα του για την κατασκευή, μέσω της καθαρής διαίσθησης. Γιατί η λογική για τον Καντ είναι φυσικά συλλογιστική λογική ή (ένα κομμάτι) αυτού που ονομάζουμε μοναδική λογική. Έτσι, για τον Καντ, δεν μπορεί κάποιος να αναπαραστήσει ή να συλλάβει την ιδέα του απείρου αυστηρά ή εννοιολογικά: δεν μπορεί κάποιος να αναπαραστήσει το άπειρο των σημείων σε μια γραμμή μέσω μιας αυστηρής θεωρίας [...] Εάν η λογική είναι μοναδική, μπορεί κανείς να αναπαραστήσει μόνο αυτό το άπειρο διαισθητικά: με μια επαναληπτική διαδικασία χωρικής κατασκευής (Friedman, 1985) Αλλά η ανακάλυψη της πολυαδικής θεωρίας ποσοτικοποίησης παρείχε στους επιστήμονες της λογικής την ευκαιρία να αναπαραστήσουν το άπειρο λογικά. Η πολυαδική λογική, σε αντίθεση με τη μοναδική λογική, περιλαμβάνει καλά διαμορφωμένες σχέσεις που κατασκευάζονται από ένα κατηγόρημα πολλών θέσεων. Κάθε καλά διαμορφωμένη σχέση περιλαμβάνει ένα όρισμα για πολλαπλά αντικείμενα, έτσι ώστε τα κατηγορήματα της πολυαδικής λογικής είναι ουσιαστικά σχεσιακά κατηγορήματα και οι ποσοτικοποιητές υποδηλώνουν τις βασικές σχέσεις τάξης μεταξύ των μεταβλητών που εισέρχονται στον καλά διαμορφωμένο τύπο. Αυτό που διακυβεύεται εδώ είναι στην πραγματικότητα η εκπροσώπηση της άπειρης διαιρεσιμότητας, γιατί ο Καντ φαινόταν να έχει πειστεί για την αδυναμία της αναπαράστασης των συστατικών μερών μιας γεωμετρικής γραμμής μέσω της λογικής. Πίστευε ότι μια τέτοια αναπαράσταση θα μπορούσε να επιτευχθεί μόνο μέσω ενός αόριστου αριθμού διχοτομήσεων, η οποία είναι μια συνθετική δράση του γεωμέτρη που λαμβάνει χώρα μέσω της καθαρής διαίσθησης. Αλλά η σύγχρονη θεωρία ποσοτικού προσδιορισμού έδειξε ότι η αναπαράσταση της άπειρης διχοτόμισης και της συνέχειας είναι στην πραγματικότητα δυνατή. Ο Φρίντμαν είπε «αυτό που τη κάνει δυνατή μια τέτοια αναπαράσταση είναι η ακριβώς η ποσοτική εξάρτηση της σύγχρονης πολυαδικής λογικής» (Friedman, 1985). Η γεωμετρική διαίσθηση, όταν πρόκειται για την αναπαράσταση της άπειρης διχοτόμησης, της συνέχειας και της διαφορικότητας, ενέχει το ενδεχόμενο να παραπλανήσει ή να οδηγήσει σε λάθος για τον Poincaré. Έτσι, ο Poincaré αντιμετωπίζει τη γεωμετρική διαίσθηση του Καντ ως μια λογική διαίσθηση, συσχετίζοντάς την με την παραγωγικότητα της φαντασίας μας, και την κατηγορεί ότι δεν είναι σε θέση να παρέχει την αυστηρότητα της καθαρής διαίσθησης, όπως μπορεί να δώσει η καθαρή διαίσθηση του αριθμού. Η καθαρή διαίσθηση του αριθμού, για τον Poincaré, είναι ουσιαστικά μια συνθετική a-priori διαίσθηση. Είναι η επίγνωση της ικανότητάς μας να επαναλαμβάνουμε επ'αόριστον. Χρησιμοποιούμε αυτή τη διαίσθηση πολύ συχνά στην αριθμητική και τη γεωμετρία όταν θέλουμε να γενικεύσουμε πάνω στο ειδικό και να αποδείξουμε ένα συγκεκριμένο θεώρημα χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Αυτή η ικανότητα, για τον Poincaré, δεν μπορεί να περιοριστεί στη λογική, γιατί αντιπροσωπεύει έναν άπειρο αριθμό συλλογισμών που συνδέονται μεταξύ τους σε μια σειρά. Έτσι, αυτή η διαίσθηση δεν μπορεί να αναχθεί στη λογική, γιατί η λογική δεν μπορεί να μας δώσει κάποιον τρόπο, πώς να περάσουμε από τους απείρως πολλούς συλλογισμούς στο να καταλήξουμε σε ένα γενικό συμπέρασμα χωρίς τις επαναλήψεις αυτής της δύναμης του μυαλού μας. Παρ' όλα αυτά, δεν αναζήτησε καταφύγιο ούτε στον φορμαλισμό, καθώς πίστευε ότι ο φορμαλισμός της άπειρης διαιρεσιμότητας και του συνεχούς δεν είναι ικανός να μας δώσει απαντήσεις για τον πραγματικό χαρακτήρα του τι είναι το συνεχές και πού βρίσκεται η προέλευσή του. Ο Poincaré, στα τελευταία του δοκίμια, δήλωσε ότι έχουμε άμεση διαίσθηση του συνεχούς. Η ιδέα του συνεχούς έχει ληφθεί ήδη ως προϋπόθεση από τον επιστήμονα της λογικής και εκφράζεται ως αξίωμα της λογικής. Αλλά η αλήθεια είναι ότι το αξίωμα γίνεται δυνατό μόνο μέσω της δυνητικής διαθεσιμότητας αυτής της διαίσθησης.

δ)Ο Reichenbach και η Σχετικότητα στη Γεωμετρία

Ο Poincaré και ο Helmholtz προσπάθησαν να εδραιώσουν τη δυνατότητα να συλλάβουν μια διαφορετική γεωμετρία σε διαφορετικά περιβάλλοντα. Προσπαθούσαν σχολαστικά να εξηγήσουν πώς, με βάση τα δεδομένα που μας παρέχονται από τις αισθήσεις μας, δημιουργούμε τον ιστό των σχέσεων που ονομάζεται χώρος του οποίου ο γεωμετρικός χαρακτήρας εξαρτάται αποκλειστικά από τον παρατηρούμενο χαρακτήρα αυτών των σχέσεων. Ο ρόλος που παίζουν οι αισθήσεις μας στην υιοθέτηση μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας έγινε ακόμη πιο αισθητή και κέρδισε μια παιδαγωγική σημασία στους πιθανούς κόσμους που έχουν δημιουργηθεί. Μέσα σε αυτούς τους πιθανούς κόσμους υπήρχαν διαφορετικές ομάδες χωρικών σχέσεων που παρατηρήθηκαν μεταξύ των σωμάτων που είναι εντελώς ξένες για εμάς. Ήταν για πρώτη φορά με τον Albert Einstein(Αϊνστάιν) που ο πραγματικός μας κόσμος, αποδείχθηκε ότι ήταν τόσο περίπλοκος όσο αυτοί οι πιθανοί κόσμοι που δημιούργησαν οι Poincaré και Helmholtz στα πειράματα σκέψης τους. Δυστυχώς, τόσο ο Poincaré όσο και ο Helmholtz δεν μπόρεσαν να ζήσουν αρκετά για να δουν τα αξιοσημείωτα επιτεύγματα του Αϊνστάιν Ο Αϊνστάιν εφάρμοσε με επιτυχία τη γεωμετρία του Riemannian στον πραγματικό μας κόσμο και ανέτρεψε την παλιά Νευτώνεια αντίληψη που χτίστηκε πάνω στο σύστημα του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τη γενική θεωρία σχετικότητας (GRT) του Αϊνστάιν, το φως καμπυλώνει όταν ταξιδεύει κοντά σε μια βαρυτική περιοχή και η καμπύλωση του φωτός γίνεται πιο αισθητή καθώς η δύναμη του βαρυτικού πεδίου αυξάνεται. Αυτή η κάμψη του φωτός ήταν αυτό που αντικατέστησε την παλιά ιδέα της ευθείας γραμμής. Η ευθεία γραμμή λοιπόν στο σύμπαν του Αϊνστάιν, δεν οριζόταν πλέον όπως οριζόταν από την Ευκλείδεια γεωμετρία, και για να δοθεί το όνομα της ευθείας σε αυτό το καμπυλωτό μονοπάτι που δημιουργούσε κάποια ακτίνα φωτός θα σήμαινε να υιοθετήσουμε τη μη-Ευκλείδεια γεωμετρία.

Όντας μάρτυρες της επιτυχίας της φυσικής στην ακριβή περιγραφή των χωρικών σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων με τρόπο που ανήκει στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, οι λογικοί θετικιστές εξέφρασαν ανησυχίες παρόμοιες με αυτές των Poincaré και Helmholtz σχετικά με την ορθή αντίληψη της φύσης του χώρου και της γεωμετρίας. Η γενική διαφωνία που εγέρθηκε από τους λογικούς θετικιστές, όπως ο Schlick, ο Carnap και αργότερα ο Reichenbach, στη φιλοσοφία γεωμετρίας του Καντ είναι η αποτυχία του να κάνει διάκριση μεταξύ καθαρής γεωμετρίας και εφαρμοσμένης γεωμετρίας. Το θέμα της καθαρής γεωμετρίας είναι η μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ των μη ερμηνευμένων πρωταρχικών όρων. Συνεπώς, πρόκειται για μια επιστήμη που ασχολείται αποκλειστικά με την παραγωγική ικανότητα, σύμφωνα με τους νόμους της επίσημης λογικής. Κάθε όρος που χρησιμοποιείται στην καθαρή γεωμετρία στερείται οποιουδήποτε περιεχομένου και μόνο οι σχέσεις μεταξύ αυτών των όρων παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Η εφαρμοσμένη γεωμετρία, από την άλλη πλευρά, αποσκοπεί στην επιλογή μιας συγκεκριμένης δομής που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα που αποκτώνται μέσω παρατηρήσεων και πειραμάτων. Για να επιτευχθεί αυτή η επιτυχία στην επεξήγηση, οι όροι που δεν έχουν ερμηνευτεί βρίσκουν το νόημά τους στην εφαρμοσμένη γεωμετρία. Οι όροι "σημείο", "ευθεία γραμμή" κ.λπ. δεν είναι πλέον κενού περιεχομένου αφού καθένας συσχετίζεται με επιτυχία με ένα φυσικό αντικείμενο. Η διάκριση μεταξύ καθαρής και εφαρμοσμένης γεωμετρίας μπορεί να συνοψιστεί στη διάκριση μεταξύ μαθηματικού χώρου και φυσικού χώρου. Μαθηματικός χώρος είναι αυτός στον οποίο οι μαθηματικοί εργάζονται με δυνητικές χωρικές κατασκευές. Οι μαθηματικοί ασχολούνται με υποθετικούς χώρους και τους παραδίδουν σε φυσικούς των οποίων η δουλειά είναι να επιλέξουν μεταξύ εκείνων των υποθετικών χώρων, αυτόν που περιγράφει πραγματικά τον φυσικό χώρο, δηλαδή τον χώρο που περιγράφεται από τη φυσική.

Η γενική έννοια του χώρου φαίνεται να διακλαδίζεται σε δύο διακριτές αντιλήψεις του χώρου για τους λογικούς θετικιστές μετά τον Poincaré. Η ιδέα ενός μαθηματικού χώρου δεν εντοπίζεται πουθενά στη φιλοσοφία του Poincaré, και δεν θα μπορούσε να να είναι έτσι, αφού ο Poincaré δεν έδωσε καμία αξιοπιστία στη δυνατότητα σύλληψης των αξιωμάτων της γεωμετρίας ανεξάρτητα από τις αισθήσεις μας και των σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ των αισθήσεών μας. Για τον Poincaré, επίσης, δεν υπάρχει κάποια ύπαρξη όπως ο φυσικός χώρος στη φιλοσοφία του, γιατί δεν υπάρχει καμία μοναδικά αληθής μετρική που μπορούμε να επιλέξουμε για να αναπαραστήσει τις χωρικές σχέσεις. Οποιαδήποτε μετρική θα μπορούσε να επιλεγεί, γιατί η επιλογή είναι πάντα συμβατική. Η εισαγωγή αυτής της νέας διχοτόμησης μεταξύ μαθηματικού χώρου και φυσικού οφείλεται εν μέρει στην επιτυχία της γενικής θεωρίας του Αϊνστάιν στη περιγραφή αλλά και στη πρόβλεψη των φαινομένων, και εν μέρει λόγω της δουλειάς του Hilbert στο έργο του Θεμελιώσεις της Γεωμετρίας (Foundations of Geometry). Ο Hilbert πίστευε ότι η γεωμετρία στερείται συγκεκριμένου περιεχομένου. Σύμφωνα με την άποψή του, η γεωμετρία δεν είναι παρά ένα σύστημα σχέσεων μεταξύ πρωτόγονων εννοιών που δεν έχουν ακόμη καθοριστεί πλήρως. Στα Θεμέλια της Γεωμετρίας, έδειξε ότι οι κατασκευαστικές διαδικασίες που κρίνονται απαραίτητες από τον Καντ είναι απλά βοηθητικά εργαλεία και δεν υπάρχει καμία απαραίτητη προϋπόθεση για να αποδειχθεί οποιοδήποτε αποτέλεσμα στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Ο Hilbert υποστήριξε ότι λόγω της ανεπάρκειας της αξιωματικής δομής της Ευκλείδειας γεωμετρίας οι γεωμέτρες πρέπει να ανατρέχουν σε διαγράμματα και οπτικά σχήματα. Σε ένα αυστηρά καθορισμένο αξιωματικό σύστημα, δεν θα υπήρχε ανάγκη για την χρήση κανενός σχήματος για τον Hilbert. Αναφερόμενοι και πάλι στον Αϊνστάιν ο αντίκτυπος του, τόσο ως επιστήμονας όσο και ως φιλόσοφος, σε αυτούς τους φιλοσόφους δεν μπορεί να υποτιμηθεί. Εξάλλου, στην εποχή των θετικιστών, η περίφημη ρήση του Αϊνστάιν, «όσο οι νόμοι των μαθηματικών αφορούν την πραγματικότητα, δεν είναι βέβαιοι, στο βαθμό που είναι βέβαιοι τότε δεν αναφέρονται στην πραγματικότητα» (Αϊνστάιν, 1921), αντήχησε και λήφθηκε ως μια φράση υψίστης εννοιολογικής αξίας.

Ίσως το πιο εξαίρετο έργο στη φιλοσοφία του χώρου και του χρόνου πραγματώθηκε από τον Reichenbach λίγο μετά τη κυριαρχία του θετικισμού πάνω στη φιλοσοφία της επιστήμης. Ο Reichenbach μοιράστηκε τα δόγματα της συμβατικότητας και του θετικισμού και παρείχε ένα επιτυχημένο μείγμα από αυτά. Σε αντίθεση με τον Poincaré, δεν πίστευε ότι η επιλογή μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας για να περιγράψει τις χωρικές σχέσεις είναι καθαρά συμβατική. Ωστόσο, όπως και ο Poincaré, σκέφτηκε ότι υπάρχει επίσης ένα συμβατικό συστατικό στη γεωμετρία, και είναι ο τρόπος που ορίζεται η ισότητα. Η γεωμετρία του φυσικού χώρου μπορεί να προσδιοριστεί μόνο μετά τον συμβατικό ορισμό της έννοιας της ισότητας. Μόλις οριστεί η έννοια της ισότητας, το πρόβλημα του γεωμετρικού χαρακτήρα του χώρου γίνεται εμπειρικό πρόβλημα . Για να καθοριστεί η ισότητα, ένα φυσικό αντικείμενο πρέπει να συνδυαστεί με την έννοια της μονάδας μήκους, αυτό ονομάζεται μετρικός ορισμός μέσω συντεταγμένων (Reichenbach, 1958). Οι ορισμοί στη φυσική είναι διαφορετικοί από τους ορισμούς στα μαθηματικά, γιατί στην πρώτη περίπτωση, το οριζόμενο είναι ένα φυσικό αντικείμενο που κάνει τη δουλειά του καθορισμού της αντίστοιχης έννοιας, ενώ στην δεύτερη , το οριζόμενο είναι ένα άλλο σύνολο εννοιών που αποσκοπεί στον καθορισμό της έννοιας-στόχου. Το πρότυπο του μέτρου στο Παρίσι συνδυάζεται με την έννοια της μονάδας μήκους. Αυτό είναι ένα εξαιρετικό παράδειγμα μετρικού ορισμού με συντεταγμένες. Η ολοκλήρωση του ορισμού μας για την ισότητα μέσω συντεταγμένων απαιτεί τη σύγκριση δύο μονάδων μήκους σε διαφορετικές τοποθεσίες. Μόλις το μήκος της μονάδας είναι φυσικά καθορισμένο, αυτό που μένει να γίνει είναι να καθοριστεί πώς πρέπει να συμπεριφέρεται η ράβδος μέτρησης όταν μεταφέρεται από τη μία περιοχή στην άλλη. Ο ορισμός ενός άκαμπτου σώματος τότε καθορίζεται από τον ορισμό της συμπεριφοράς της ράβδου μέτρησης κατά τη μεταφορά της Το ερώτημα που πρέπει να τεθεί σε αυτό το σημείο είναι το εξής: δεν αρκεί να λάβουμε υπόψη τις πραγματικές παρατηρήσεις μας που έγιναν με σαφήνεια σε διαφορετικά σημεία για να συμπεράνουμε ότι η ίδια ράβδος είναι ίση με τον εαυτό της σε διαφορετικά μέρη; Ο Reichenbach απαντά αρνητικά σε αυτό το ερώτημα. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από τα παρατηρούμενα γεγονότα ότι δύο ράβδοι είναι ίσες μεταξύ τους σε διαφορετικά μέρη καθώς το να υποθέσουμε ότι είναι πάντα ίσες σε μήκος θα ήταν μόνο μια πρόσθετη σύμβαση. Αλλά δηλώνει επίσης, ότι αυτός ο συμβατικός ορισμός μπορεί να επαληθευτεί εμπειρικά συγκρίνοντας το μήκος των ράβδων που μετριούνται σε διαφορετικά μέρη. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, ο Reichenbach δήλωσε ότι «μπορεί κανείς να πει ότι οι πραγματικές σχέσεις που ισχύουν για τις τοπικές συγκρίσεις ράβδων, αν και δεν απαιτούν τον ορισμό της ισότητας υπό τη σκοπιά που αφορά τις μεταφερόμενες ράβδους, καθιστούν αυτόν τον ορισμό αποδεκτό".(Ράιχενμπαχ, 1958) Στην ιδέα του κόσμου της σφαίρας του Poincaré, αποδείχθηκε ότι η ίδια ράβδος τελικά θα έπρεπε να είναι ταυτόσημη με τον εαυτό της παρά τις μεταφορές, επειδή δεν έλαβε χώρα καμία αισθητή αλλαγή στο σχήμα της κατά τη μεταφορά της. Ωστόσο, η σύγκριση των μετρήσεων ορισμένων αναλογιών (όπως ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου και η σύγκριση με το π) έδειξε ότι το σχήμα της ράβδου πρέπει να τροποποιήθηκε κατά τη μεταφορά της. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο πρέπει να προηγείται η διαδικασία που προσφέρει τον μετρικό ορισμό μέσω συντεταγμένων, αυτής των παρατηρήσεων. Επίσης, αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, για τον Reichenbach, ο ορισμός της ισότητας δεν είναι «θέμα γνώσης, αλλά ζήτημα ορισμού». (Ράιχενμπαχ, 1958).

Ο στόχος ενός συνδυαστικού ορισμού για την ισότητα είναι η εξάλειψη των παγκόσμιων και διαφορικών δυνάμεων και η καθιέρωση της δυνατότητας εμπειρικού προσδιορισμού της γεωμετρίας του φυσικού χώρου. Οι παγκόσμιες δυνάμεις είναι δυνάμεις που επηρεάζουν όλα τα υλικά με τον ίδιο τρόπο. Επιστρέφοντας στον κόσμο της σφαίρας του Poincaré, η ομοιόμορφη αύξηση της θερμοκρασίας είναι ένα αποτέλεσμα που παράγεται από μια καθολική δύναμη. Κάθε σώμα, σε αυτήν την κοσμική σφαίρα, επηρεάζεται εξίσου από τη θερμοκρασία, και αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι κάθε σώμα έχει τον ίδιο συντελεστή διαστολής. Η τοπική σύγκριση των μηκών των μεταφερόμενων ράβδων στη κοσμική σφαίρα δεν ήταν ικανή να κάνει αισθητές αυτές τις μεταβολές, γι 'αυτό ο Reichenbach δήλωσε ότι είναι «θεμελιωδώς αδύνατο να εντοπιστούν αλλαγές που προκλήθηκαν από καθολικές δυνάμεις." (Reichenbach, 1958) Ένας ορισμός μέσω συντεταγμένων της ισότητας αποσκοπεί στην εξάλειψη των οικουμενικών δυνάμεων, που ονομάζεται, από τον Rudolf Carnap, αρχή της εξάληψης των καθολικών δυνάμεων. (Reichenbach, 1958). Αυτό είναι το ακριβές μέρος όπου ο Reichenbach επικρίνει την συμβατικότητα του Poincaré αφού για τον Reichenbach, υπάρχει ένα ανησυχητικό στοιχείο αυθαιρεσίας στην επιλογή μιας συγκεκριμένης γεωμετρικής δομής στον συμβατικό χαρακτήρα του Poincaré, και ήθελε να εξαλείψει αυτό το σημείο αυθαιρεσίας εισάγοντας την αρχή της εξάλειψης των συμπαντικών δυνάμεων. Μόλις οι καθολικές δυνάμεις δεν γίνουν δεκτές, μπορεί να επιλεγεί ένα μοναδικό γεωμετρικό σύστημα για να περιγράψει τις παρατηρήσεις μας. Ο Carnap αναφέρει: «εάν αυτή η αρχή γίνει αποδεκτή, αποφεύγεται η αυθαιρεσία στην επιλογή μιας διαδικασίας μέτρησης και το ζήτημα της γεωμετρικής δομής του φυσικού χώρου έχει μια μοναδική απάντηση». (Reichenbach, 1958) Οι διαφορικές δυνάμεις, από την άλλη πλευρά, είναι δυνάμεις που δεν επηρεάζουν κάθε υλικό με τον ίδιο τρόπο, διαφορετικά υλικά ανταποκρίνονται με διαφορετικό τρόπο στις διαφορικές δυνάμεις. Αυτές οι δυνάμεις πρέπει επίσης να εξαλειφθούν, για να επιτευχθεί η ιδέα του άκαμπτου σώματος. Γιατί διορθώνει τις μικρές διαφορές σε κάθε σώμα που παράγονται από διάφορες εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις. Δια μέσου της εξάλειψης των διαφορικών δυνάμεων, δεν θεωρούμε πλέον αυτές τις λεπτές παραμορφώσεις στα σώματα ως αλλαγή στη γεωμετρική δομή της γεωμετρίας. Αν δεν εξαλείψουμε τις διαφορικές δυνάμεις, τότε θα έχουμε τόσες γεωμετρίες όσα τα υπάρχοντα σώματα που αντιδρούν διαφορετικά στις ίδιες δυνάμεις (όπως η θερμότητα). Αυτό θα περιπλέξει άσκοπα το έργο των φυσικών, οπότε εξ ορισμού, όλες οι διαφορικές δυνάμεις έχουν οριστεί στο μηδέν.

Συμπερασματικά, ο προσδιορισμός της γεωμετρίας του φυσικού κόσμου εξαρτάται από τον ορισμό μέσω συντεταγμένων της ισότητας, μέχρι τότε, η φυσική γεωμετρία παραμένει απροσδιόριστη. "Η γεωμετρία του φυσικού χώρου δεν είναι ένα άμεσο αποτέλεσμα της εμπειρίας, αλλά εξαρτάται από την επιλογή του ορισμού μέσω συντεταγμένες της ισότητας." (Reichenbach, 1958) Τα κριτήρια για την επιλογή του καταλληλότερου ορισμού της ισότητας είναι τα ίδια κριτήρια που ενστερνίστηκε ο Poincaré, η απλότητα και η ευκολία. Ωστόσο, ο Reichenbach υποστηρίζει ότι ο επιστήμονας δεν θα επιλέγει πάντα τη θεωρία που περιλαμβάνει την απλούστερη γεωμετρία, αλλά η οποία περιλαμβάνει συνολικά την απλούστερη δομή. Αυτό έκανε ο Αϊνστάιν στη γενική του θεωρία, επέλεξε τον απλούστερο ορισμό με συντεταγμένες για την ισότητα, και όχι την απλούστερη γεωμετρία για να περιγράψει τις σχέσεις μεταξύ των φαινομένων.

Η μοναδική θέση συμβατικότητας του Reichenbach υποδηλώνει ότι κάποιος είναι ελεύθερος να επιλέξει οποιαδήποτε γεωμετρική δομή επιθυμεί να περιγράψει το φυσικό χώρο εάν γίνονται παραδεκτές οι καθολικές δυνάμεις. Αυτή η ανάλυση μας οδηγεί άμεσα στη σχετικότητα της γεωμετρίας. Επιστρέφοντας στο πείραμα σφαίρας-κόσμου και πάλι, το ίδιο σύνολο παρατηρούμενων σχέσεων μπορούν να εξηγηθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους. Έστω το G_0 = Ευκλείδεια Γεωμετρία, G_1 = Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, F = Καθολικές Δυνάμεις που προκαλούν συρρίκνωση των υλικών ή επέκταση. Μπορούμε είτε να πούμε ότι η γεωμετρία του κόσμου της σφαίρας είναι ευκλείδεια και υπάρχουν παγκόσμιες δυνάμεις που επηρεάζουν όλα τα υλικά σε αυτό (G0 + F), είτε μπορούμε να πούμε ότι η γεωμετρία του κόσμου της σφαίρας είναι μη Ευκλείδεια και δεν υπάρχουν παγκόσμιες δυνάμεις σε αυτό (G1).

Η σχετικότητα της γεωμετρίας έκανε τον Reichenbach να αποκηρύξει την καντιανή θεώρηση ότι η ευκλείδεια γεωμετρία είναι συνθετική a-priori. Δεν πίστευε ότι ο η Ευκλείδεια γεωμετρία προηγείται επιστημολογικά των άλλων γεωμετριών. Ωστόσο, είναι δυνατόν να διατηρηθεί η ευκλείδεια γεωμετρία σε κάθε σενάριο, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να επιλέξουμε μεταξύ του συνόλου των πιθανών ορισμών με συντεταγμένες για την ισότητα, αυτόν που περιλαμβάνει την Ευκλείδεια γεωμετρία. Απαρίθμησε τους λόγους που μας δημιουργούν την προδιάθεση να προσκολληθούμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία σε κάθε πιθανό σενάριο. Θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε αυτούς τους λόγους ως οπτική προτίμηση και ως τοπική ορθότητα(όπου με τον όρο τοπική ορθότητα καλούμε την ορθότητα και την εγκυρότητα της γεωμετρίας μέσα σε μια περιορισμένη περιοχή ολόκληρου του σύμπαντος).

Παρά την επιτυχία αυτών των κριτικών σκέψεων του Poincaré και του Reichenbach, και στον τρόπο που κατέστησαν παρωχημένη τη φιλοσοφία της γεωμετρίας του Καντ, υπήρχαν και άλλες ομάδα φιλοσόφων όπως ο P. F. Strawson και ο Gottlob Frege που υπήρξαν σημαντικοί εκπρόσωποι στη προσπάθεια να σώσουν τη φιλοσοφία του Καντ από αυτά τα θανατηφόρα χτυπήματα. Η θέση του Strawson επικεντρώθηκε στην άποψη ότι παρόλο που η φιλοσοφία της γεωμετρίας του Καντ δεν μπορεί πραγματικά να περιγράψει το χώρο που περιγράφεται από τη φυσική, εξακολουθεί να ισχύει αναγκαστικά και καθολικά για το χώρο της ανθρώπινης οπτικοποίησης και για τον τοπικό χώρο. Στην ουσία, περιόρισε το πεδίο εφαρμογής της θεωρίας για τη γεωμετρία του Καντ για να συμπεριλάβει μόνο τον οπτικό και τοπικό χώρο.

Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι ο Strawson φαινόταν να έχει υποστηρίξει την ύπαρξη του φυσικού χώρου. Δήλωσε ξεκάθαρα ότι έχουμε μια αντίληψη του φυσικού χώρου στο έργο του Bounds of Sense (Όρια της Λογικής). Επίσης, προχώρησε και παραπέρα και ισχυρίστηκε ότι ο χώρος για τον οποίο μίλησε ο Καντ στο The Metaphysical Exposition of Space (Μεταφυσική Έκθεση του Χώρου) είναι στην πραγματικότητα ο φυσικός χώρος. Έγραψε: Έχω ήδη παρατηρήσει ότι ο χώρος που δηλώνεται ως «ουσιαστικά ένας» μπορεί να γίνει κατανοητός μόνο ως φυσικός χώρος, ο χώρος στον οποίο βρίσκονται, αμοιβαία συνδεδεμένα, δημοσίως φυσικά σώματα που γίνονται αντιληπτά από εμάς ως αντικείμενα ανεξάρτητα από τις αντιλήψεις μας για αυτά.

Επιβεβαίωσε επίσης ότι η γεωμετρία που μελετείτο από τους αστρονόμους και τους φυσικούς ήταν διαφορετική από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Τα ακόλουθα λόγια του δείχνουν ότι γνώριζε την απόκλιση μεταξύ των τοπικών και των παγκόσμιων ιδιοτήτων του χώρου:

Η επαλήθευση της ευκλείδειας γεωμετρίας με παρατήρηση και μέτρηση δείχνει ότι τα θεωρήματα της πρέπει να επαληθεύονται με έναν αποδεκτό βαθμό ακρίβειας για εκτάσεις μικρότερες από εκείνες που αφορούν την αστροφυσική. Αλλά για την ίδια την αστροφυσική, μια διαφορετική φυσική γεωμετρία, ασυμβίβαστη με την Ευκλείδεια, ανακαλύφθηκε ώστε να ικανοποιεί την παρατήρηση και τη μέτρηση (Strawson, 1966) Η ευκλείδεια γεωμετρία ισχύει σε μικρές περιοχές. Η καμπυλότητα του χώρου δεν μπορεί εντοπιστεί σε αυτές τις μικρές περιοχές, επομένως η απόκλιση από τον ευκλείδειο χώρο δεν μπορεί να ανιχνευθεί σε μικρές περιοχές. Οι απαραίτητες διορθώσεις που πρέπει να γίνουν για να γίνει η μετάβαση από την Ευκλείδεια στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία εξαρτώνται επίσης από τα σφάλματα παρατήρησης, επομένως δεν είναι υλοποιήσιμα.

Επιπρόσθετα της υποθετικής διχοτόμησης μεταξύ της μαθηματικής γεωμετρίας και της φυσικής γεωμετρίας που υποστήριξαν οι θετικιστές, υποστήριξε την ύπαρξη ενός άλλου είδους γεωμετρίας, το οποίο ονομάζει φαινομενική γεωμετρία, η οποία είναι διακριτή από τη φυσική γεωμετρία και γνωστή εκ των προτέρων. Η φαινομενική γεωμετρία είναι η γεωμετρία των οπτικών εικόνων. "Η οπτική φαντασία δεν μπορεί να μας παρέχει φυσικά σχήματα, αλλά μπορεί να μας παρέχει εκπληκτικά σχήματα", δήλωσε ο Strawson. (Strawson, 1966). Ο Strawson είπε ότι αυτή η τρίτη επιλογή αγνοήθηκε εντελώς από τους θετικιστές. Έγραψε: Αυτό που έπρεπε να παρατηρήσουμε είναι ότι υπάρχει ένας τρίτος τρόπος, διαφορετικός από οποιονδήποτε από τους άλλους, ο οποίος είναι επίσης δυνατός και τον οποίο παραμελεί η θετικιστική άποψη [...] Η ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως ένα σώμα μη αποδείξιμων προτάσεων σχετικά με φαινομενικές ευθείες γραμμές, κύκλους κ.λπ. (Strawson, 1966). Ο Strawson είπε ότι δεν μπορούμε ποτέ να "δούμε" ή να "φανταστούμε" δύο ευθείες γραμμές μεταξύ δύο σημείων. Εάν υπάρχουν δύο γραμμές μεταξύ δύο σημείων, τουλάχιστον μία από αυτές πρέπει να είναι καμπύλη. Δεδομένου ότι στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, δύο ευθείες γραμμές μπορούν να σχεδιαστούν μεταξύ δύο σημείων (συγκεκριμένα, στη γεωμετρία Riemann), τότε φαίνεται ότι μπορούμε να σχηματίσουμε ευκλείδεια αλλά όχι μη Ευκλείδεια ιδεατά σχήματα. Εν ολίγοις, η φαινομενική γεωμετρία του Strawson προσπάθησε να συμπεριλάβει τη θεωρία της γεωμετρίας του Καντ με τις προόδους στη φυσική και τα μαθηματικά. Μια γεωμετρία είναι φαινομενικά αληθής μόνο στο βαθμό που μπορεί να ερμηνευθεί από την αλήθεια φαινομενικών σχημάτων. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η ευκλείδεια γεωμετρία είναι αναγκαστικά και καθολικά αληθής γιατί κάθε γεωμετρική έννοια ερμηνεύεται σύμφωνα με τα φαινομενικά αντικείμενα που αντιστοιχούν σε αυτές τις έννοιες. Τα αξιώματα της φαινομενικής γεωμετρίας είναι φαινομενικά αναλυτικά (Strawson, 1966), δηλαδή είναι αλήθεια λόγω των εννοιών που συνδέονται με τις έννοιες που περιέχουν, και αυτές οι έννοιες είναι οι ίδιες φαινομενικές ή οπτικές. Για παράδειγμα, κάθε φορά που κάποιος σκέφτεται την έννοια της ευθείας γραμμής, το φαινομενικό στοιχείο, η εικόνα μιας ευθείας γραμμής, περιέχεται αναλυτικά σε αυτό. Έτσι, υπάρχει μια απαραίτητη ταυτοτική σχέση μεταξύ της έννοιας και της εικόνας που καθιστά την φαινομενική ερμηνεία της δεδομένης έννοιας αναγκαστικά αληθή.

Αλλά σε ποιο βαθμό η τροποποίηση της γεωμετρίας του Καντ από τον Strawson μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι επιτυχής; Υπάρχουν πολλά κενά που πρέπει να καλυφθούν στην άποψη του Strawson. Πρέπει να επισημανθεί ότι ο Strawson δεν είπε τίποτα για την τριμερή σχέση μεταξύ της φαινομενικής γεωμετρίας, της φυσικής γεωμετρίας και της μαθηματικής γεωμετρίας. Ο Reichenbach αντιμετωπίζει το ζήτημα του οπτικού a-priori στο έργο του The Philosophy of Space and Time (1958) (Η φιλοσοφία του χώρου και του χρόνου). Οι ακόλουθες λέξεις συνοψίζουν έξοχα την άποψη του Reichenbach για το ζήτημα του οπτικού a-priori: «Η θεωρία υποστηρίζει ότι μια έμφυτη ιδιότητα του ανθρώπινου νου, η ικανότητα οπτικοποίησης, απαιτεί να κολλήσουμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Με τον ίδιο τρόπο, καθώς μια συγκεκριμένη αυταπόδειξη μας αναγκάζει να πιστέψουμε τους νόμους της αριθμητικής, μια οπτική αυταπόδειξη μας αναγκάζει να πιστέψουμε στην εγκυρότητα της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή η αυταπόδειξη δεν βασίζεται σε λογικούς λόγους. Εφόσον τα μαθηματικά κατασκευάζουν μια απόδειξη όπου η κατασκευή των μη Ευκλείδειων γεωμετριών δεν οδηγεί σε αντιφάσεις, καμία λογική αυταπόδειξη δεν μπορεί να υπάρξει για την ευκλείδεια γεωμετρία, Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι αυταποδείξεις της ευκλείδειας γεωμετρίας μερικές φορές προέρχονται, με τον καντιανό τρόπο, από την ανθρώπινη ικανότητα της οπτικοποίησης που έχει σχεδιαστεί ως πηγή γνώσης. (Ράιχενμπαχ, 1958)

Ο Reichenbach δηλώνει ότι η υποκειμενική προτίμησή μας για ευκλείδεια γεωμετρία προέρχεται από την επιστημολογική λειτουργία της απεικόνισης (Reichenbach, 1958), η οποία είναι μια λειτουργία υψίστης σημασίας όσον αφορά την ψυχολογική και παιδαγωγική χρησιμότητα που προσφέρει. Αλλά αυτό, για τον Reichenbach, δεν παραβιάζει την αρχή της σχετικότητας της γεωμετρίας, γιατί κάθε γεωμετρία που μπορεί να αντιστοιχηθεί η μία με την άλλη πρέπει να αντιμετωπίζονται επιστημολογικά από κοινού. Ο Reichenbach ισχυρίζεται ότι όσο δύο χώροι είναι τοπολογικά ισοδύναμοι, η αντιστοίχιση μπορεί να πραγματοποιηθεί. Δεν μπορεί κανείς, ωστόσο, να χαρτογραφήσει έναν τοροειδή χώρο ή έναν σφαιρικό χώρο στην Ευκλείδεια γεωμετρία χωρίς να τροποποιήσει αναλόγως το νόμο της αιτιότητας. Σε αυτό το σενάριο, ένας παρατηρητής που στην πραγματικότητα κινείται στην επιφάνεια ενός τόρου θα ερχόταν αντιμέτωπος περιοδικά με το ίδιο σύνολο εντυπώσεων αφού κάλυπτε ορισμένη απόσταση. Αυτό συμβαίνει επειδή ο παρατηρητής περνάει από τις ίδιες περιοχές ξανά και ξανά επειδή η συνεχής θετική καμπυλότητα των τοροειδών και των σφαιρικών χώρων σχηματίζει βρόχους. Αν ο παρατηρητής θέλει να διατηρήσει την Ευκλείδεια γεωμετρία, πρέπει να αλλάξει, μαζί με τους νόμους της φυσικής και τον νόμο της αιτιότητας. Για αυτό ο χώρος φαίνεται να εμφανίζει μια αιτιώδη ανωμαλία που έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την κλασική (Καντιανή) αντίληψη της αιτιότητας σύμφωνα με τον Reichenbach. Έτσι, ένας Καντιανός θα δυσκολευόταν πολύ να εξηγήσει τις αιτιώδης σχέσεις σε αυτόν τον χώρο, γιατί ορισμένες περιοχές που χωρίζονται από μια ορισμένη απόσταση θα παρουσίαζαν πανομοιότυπα αποτελέσματα όταν προτιμάται η κλασική αντίληψη της αιτιότητας. Το συνολικό σύστημα μιας Καντιανής οπτικής θα έχει τη μορφή G_0 + F +

Α, όπου το «Α» αναφέρεται σε μια νεοσυσταθείσα αρχή που ονομάζεται προκαθορισμένη αρμονία. Αυτή η προκαθορισμένη αρμονία έχει ως στόχο να εξηγήσει «τη στιγμιαία σύζευξη μακρινών γεγονότων». (Reichenbach, 1958).Λόγω της επιστημολογικής λειτουργίας της απεικόνισης, γενικά προτιμούμε την Ευκλείδεια γεωμετρία, θεωρούμε τη γεωμετρία ευκλείδεια, και στη συνέχεια, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις και τα πειράματά μας, εισάγουμε την ύπαρξη καθολικών δυνάμεων. Έτσι, το συνολικό μας σύστημα, αν εμείνουμε στην ευκλείδεια γεωμετρία, θα έχει πάντα τη μορφή $G_0 + F$. στα οποία $F = 0$ ή $F \neq 0$, ανάλογα με τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από τα πειράματα και την παρατήρηση.

Είναι αλήθεια ότι μπορούμε να απεικονίσουμε μόνο την Ευκλείδεια γεωμετρία; Αν η απάντηση που δίνεται σε αυτή την ερώτηση είναι αρνητική, τότε οι προσπάθειες του Strawson να σώσει την Καντιανή φιλοσοφία της γεωμετρίας αναπόφευκτα αποτυγχάνει. Μπορούν όμως οι άνθρωποι να απεικονίσουν μη Ευκλείδειες γεωμετρίες; Σύμφωνα με τις απόψεις του Helmholtz και του Poincaré που παρουσιάστηκαν πριν, η απάντηση σε αυτό το ερώτημα φαίνεται να είναι θετική καθώς και οι δύο πίστευαν ότι οι οπτικές μας εντυπώσεις θα άλλαζαν σε διαφορετικά περιβάλλοντα όπου τα σώματα διαδέχονται το ένα το άλλο σύμφωνα με διαφορετικούς νόμους. Αυτό, κατά μία έννοια, θα μας ανάγκαζε να υιοθετήσουμε μια διαφορετική γεωμετρία, η οποία με τη σειρά της θα μας υποχρεώνει να συνδέσουμε διαφορετικές εικόνες με διαφορετικές γεωμετρικές έννοιες. Αλλά δεν αντιμετώπισαν το ζήτημα της απεικόνισης με μεγάλη λεπτομέρεια. Ο Reichenbach προσπάθησε να παρέχει πιο ικανοποιητικές απαντήσεις από τους προκατόχους του όσον αφορά τη δυνατότητα απεικόνισης των μη Ευκλείδειων γεωμετρίων. Για να γίνει αυτό, ξεκίνησε καθορίζοντας τις ιδιότητες του οπτικού χώρου.

Η απεικόνιση είναι «η αναπαραγωγή του συγκεκριμένου αντικειμένου με τη μορφή εικόνας» (Reichenbach, 1958). Η επίτευξη της ακρίβειας της εικόνας απαιτεί περισσότερη προσπάθεια για ένα μέρος του αντικειμένου. Έτσι, ο Reichenbach φαίνεται να διαιρεί την ικανότητα παραγωγής μιας εικόνας σε διαφορετικά επίπεδα. Όταν, για παράδειγμα, προσπαθούμε να απεικονίσουμε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο, ή οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικό αντικείμενο, μια θολή εικόνα εμφανίζεται με κάποιο τρόπο στο μυαλό μας. Αυτή η εικόνα στερείται ζωντάνιας και συγκεκριμένων λεπτομερειών. Ο Reichenbach καλεί αυτές τις εικόνες, σχηματικές εικόνες (Reichenbach, 1958). Οι σχηματικές εικόνες δεν έχουν συγκεκριμένες λεπτομέρειες και ακριβείς μετρικές ιδιότητες, αλλά έχουν γενικές ιδιότητες που ανήκουν στο αντικείμενο. Το ακριβές μήκος των πλευρών ενός τριγώνου, ή η γωνία μεταξύ των κορυφών του, δεν μπορεί να καθοριστεί ακριβώς στη φαντασία. Παρ' όλα αυτά, ποτέ δεν αποτυγχάνουμε στο να συλλάβουμε τον αριθμό των πλευρών του. Το προηγούμενο στάδιο είναι σε θέση να αναπαριστά τις τοπολογικές ιδιότητες, αλλά όχι τις μετρικές ιδιότητες των σχημάτων, δηλαδή είναι σε θέση να μας παρέχει ένα πρόχειρο σκίτσο του αντικειμένου, αλλά δεν μας παρέχει τις ακριβείς ποσοτικές σχέσεις μεταξύ των τμημάτων των αντικειμένων. Ο Ράιχενμπαχ αποκαλεί αυτή την ιδιαίτερη λειτουργία της φαντασίας που είναι σε θέση να παραγάγει σχηματικές εικόνες ως λειτουργία παραγωγής εικόνων (Reichenbach, 1958).

Το δεύτερο στάδιο της απεικόνισης ονομάζεται κανονιστική λειτουργία της απεικόνισης (Reichenbach, 1958), και για αυτόν, είναι το στάδιο που είναι φιλοσοφικά σημαντικό. Η κανονιστική λειτουργία της απεικόνισης χρησιμοποιείται για να καταστήσει σαφέστερες τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων που οραματιστήκαμε στο προηγούμενο στάδιο. Σε σύγκριση με τις εικόνες που μας παρέχονται από τη λειτουργία παραγωγής εικόνων, η κανονιστική λειτουργία είναι σε θέση να παρέχει σαφέστερες εικόνες καθώς και να διορθώσει τα σχέδια που εκτελέσαμε στη φαντασία μας στο πρώτο στάδιο. Το πρόχειρο σκίτσο που δημιουργείται στην προηγούμενη διαδικασία μετατρέπεται σε ένα ακριβές διάγραμμα που είναι ικανό να αναπαριστά τις σχέσεις μεταξύ των εικόνων με μεγαλύτερη ακρίβεια. Όταν μας ζητείται, για παράδειγμα, να μετρήσουμε όλες τις διαγώνιες σε ένα πεντάγωνο, πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στον αριθμό που κατασκευάζουμε στη φαντασία μας, δεδομένου ότι δεν είναι το ίδιο με την καταμέτρηση των πλευρών ενός τριγώνου. Στο πρόχειρο σκίτσο, το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο από το αποτέλεσμα της λειτουργίας παραγωγής εικόνων, ορισμένες ιδιότητες της εικόνας μπορεί να είναι λανθασμένες, δηλαδή, μπορεί να βρούμε τον αριθμό των διαγώνιων που μπορούν να σχεδιαστούν μέσα στο πεντάγωνο μικρότερο ή μεγαλύτερο απ' ότι πραγματικά είναι. Αλλά όταν αναλάβει η κανονιστική λειτουργία, ο συνολικός αριθμός των διαγώνιων σε ένα πεντάγωνο μπορεί να συλληφθεί με σαφήνεια. Παρόλο που η κανονιστική λειτουργία είναι σε θέση να μας παρέχει πιο ακριβείς εικόνες, δεν είναι σε θέση να αντιπροσωπεύει με σαφήνεια τις ακριβείς μετρικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων, καθώς η μέτρηση δεν έχει καμία σχέση με την αίσθηση της όρασης. Κάθε μέτρηση πραγματοποιείται με ράβδους(μονάδες) μέτρησης στο φυσικό χώρο.

Ο Reichenbach ισχυρίζεται ότι "η συνθετική a-priori διαίσθηση του Καντ πηγάζει από τη κανονιστική λειτουργία της απεικόνισης (Reichenbach, 1958), και ότι αυτή είναι η μόνη λειτουργία που ξεχωρίζει την Ευκλείδεια γεωμετρία από άλλες γεωμετρίες. Η προτεραιότητα της απεικόνισης εξηγείται ως η προσαρμογή της φαντασίας σε ορισμένες σιωπηρές συνθήκες κατά την παραγωγή μιας εικόνας. Αυτές οι εν λόγω σιωπηρές συνθήκες είναι οι κανόνες που επιβάλλονται στα σχήματα που σχεδιάζουμε, επομένως η κανονιστική λειτουργία, σύμφωνα με αυτές τις υποτιθέμενες σιωπηρές συνθήκες, κατευθύνουν και περιορίζουν τη φαντασία μας έτσι ώστε να παρέχουν εικόνες που υπακούουν σε ορισμένα οπτικά χαρακτηριστικά. Κατά συνέπεια, η οπτική αδυναμία / δυνατότητα σχετίζεται με αυτές τις σιωπηρές συνθήκες και αυτές οι σιωπηρές συνθήκες, με τη σειρά τους, σχετίζονται με τη γενική προτιμώμενη τοπολογική δομή σύμφωνα με την οποία η φαντασία μας παράγει εικόνες. Όταν μας ρωτούν, για παράδειγμα, αν υπάρχει επιφάνεια με μόνο μία πλευρά, λέμε βιαστικά "όχι". Αλλά "κάθε φοιτητής που έχει παραβρεθεί σε κάποια διάλεξη για την τοπολογία, έχει πάρει μια λωρίδα χαρτιού, στριφογυρισμένη γύρω από τον εαυτό της, την επικολλά στα άκρα της σε μορφή δαχτυλιδιού» (Reichenbach,

1958) για να διαμορφώσει μια μονόπλευρη επιφάνεια. Έτσι, αν τροποποιήσουμε τις υποβόσκουσες τοπολογικές συνθήκες που επιβάλλουμε στο σκηνικό της φαντασίας μας ως κανόνες, μπορούμε να μετατρέψουμε το αδύνατο σε δυνατό.

Η ευκλείδεια γεωμετρία ξεχωρίζει μεταξύ των εναλλακτικών γεωμετρίων με παρόμοιο τρόπο. Τα ιδιαίτερα ευκλείδεια αντικείμενα που κατασκευάζουμε στη φαντασία μας κατασκευάζονται σε ένα χώρο που έχει καθορισμένη τοπολογική δομή και αυτή η τοπολογική δομή λειτουργεί ως κανόνας στην παραγωγή εικόνων. Εξετάστε την ακόλουθη ερώτηση: "Αποκλίνουν οι παράλληλες γραμμές;" Απευθείας, πρέπει να πούμε "όχι", αν η επιφάνεια στην οποία οι γραμμές αυτές κατασκευάζονται θεωρηθεί επίπεδη. Αλλά αν αλλάξουμε την επιφάνεια στην οποία κατασκευάζονται αυτές οι δύο ευθείες γραμμές, η απάντηση σε αυτό το ερώτημα μπορεί στην πραγματικότητα να αποδειχθεί ότι είναι θετικό. Δεν φαίνεται να υπάρχει καμία απαραίτητη σχέση μεταξύ της εικόνας και της έννοιας στην προσέγγιση του Reichenbach, σε αντίθεση με τις προσεγγίσεις του Kant και του Strawson. Ο Καντ σκέφτηκε ότι η εικόνα είναι απαραίτητα συνδεδεμένη με την έννοια μέσω ενός σχήματος και ο Strawson σκέφτηκε ότι οι εικόνες περιέχονται στις έννοιες. Αλλά για τον Reichenbach, η σύνδεση μεταξύ της εικόνας και της έννοιας είναι ευέλικτη και καθοδηγείται από ορισμένες σιωπηρές συνθήκες που μπορούν να τροποποιηθούν. Αυτές οι σιωπηρές τοπολογικές συνθήκες, οι οποίες λειτουργούν ως κανόνας για την παραγωγή μιας εικόνας, τεκμαίρονται σιωπηρά στα εννοιολογικά στοιχεία της συγκεκριμένης γεωμετρικής δομής. Αυτά τα εννοιολογικά στοιχεία είναι οι προτάσεις, οι ορισμοί και τα αξιώματα. Αυτό που κάνουμε είναι να αναπτύσσουμε μια λειτουργία που συνηθίζεται να συνδέει ορισμένες εικόνες και κανόνες κατασκευής με τον εννοιολογικό σκελετό της γεωμετρίας που ασκούμε. Προς υποστήριξη αυτής της άποψης, ο Reichenbach έγραψε:

«Η αξία της απεικόνισης συνίσταται μόνο στο γεγονός ότι μεταφράζει τον λογικό καταναγκασμό της ευκλείδειας γεωμετρίας σε οπτικό καταναγκασμό. Η κανονιστική λειτουργία της απεικόνισης εμφανίζεται ως συσχέτιση του λογικού καταναγκασμού και επιτυγχάνει τα ίδια αποτελέσματα με τα στοιχεία που παρέχει η λειτουργία παραγωγής εικόνων όπως το λογικό συμπέρασμα επιτυγχάνεται μέσω των εννοιολογικών στοιχείων της σκέψης. (Ράιχενμπαχ, 1958)

Η γεωμετρική πρακτική φαίνεται να είναι ουσιαστικά λογική για το Reichenbach, μια άποψη που δεν συμμερίζεται ο Poincaré. Τα διαγράμματα είναι χρήσιμα για να μας βοηθήσουν να πραγματοποιήσουμε την απόδειξη που είναι ουσιαστικά λογικής φύσης. Η κανονιστική λειτουργία της απεικόνισης είναι μια συνάρτηση με την οποία συνδέουμε εικόνες με λογικές έννοιες. Αυτό με τη σειρά του μας βοηθά να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας διαγράμματα.

Παρόλο που ο Poincaré και ο Reichenbach δεν συμφωνούσαν στο περιεχόμενο της γεωμετρίας, συμφώνησαν στη δυνατότητα συσχέτισης διαφορετικών εικόνων με διαφορετικές έννοιες, οι οποίες αντιβαίνουν στην κεντρική θέση της θεωρίας της γεωμετρίας του Καντ. Για αυτούς, οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες είναι εξίσου αληθοφανείς με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Για τον Poincaré, διαφορετικές προσαρμοστικές συνθήκες θα ανάγκαζαν τον οργανισμό να υιοθετήσει μια διαφορετική γεωμετρία. Ομοίως, για τον Reichenbach, η απεικόνιση της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι αποτέλεσμα μιας βιολογικής συνήθειας (Reichenbach, 1958) και πίστευε ότι μπορούμε σταδιακά να αλλάξουμε αυτή τη συνήθεια. Αυτή η συνήθεια μας προέκυψε από την καθημερινή μας εμπειρία από τη συμπεριφορά των στερεών σωμάτων. Αν τα στερεά σώματα συμπεριφέρονταν διαφορετικά, εμείς θα ήμασταν σε θέση να επεκτείνουμε την κανονιστική λειτουργία της απεικόνισης και να υιοθετήσουμε έναν νέο τρόπο φαντασίας και απεικόνισης των γεωμετρικών σχέσεων. Εν ολίγους, αυτό που πραγματικά χρειάζεται είναι μια χειραφέτηση από τις αναλογικές σχέσεις που ανήκουν στην μητρική μας γεωμετρία. Αν ήμασταν τοποθετημένοι σε ένα μη Ευκλείδειο περιβάλλον, αρχικά θα αντιστεκόμασταν στον επαναπροσδιορισμό του ορισμού μας μέσω συντεταγμένων της ισότητας και θα τις ερμηνεύαμε αυτές τις αλλαγές ως αλλαγή στο σχήμα ενός αντικειμένου. Αλλά μετά από λίγο, δεν θα αντιλαμβανόμασταν πλέον αυτές τις αλλαγές ως αλλαγή στο σχήμα ενός αντικειμένου, αλλά μάλλον ως μια αλλαγή στην προοπτική μας. Ο Reichenbach δηλώνει ότι «τη στιγμή που δεν βλέπουμε πλέον καμία αλλαγή στο μεταφερόμενο αντικείμενο, έχουμε επιτύχει μια οπτική προσαρμογή (Reichenbach, 1958).

Υπό το φως αυτών των συζητήσεων, ο Reichenbach απορρίπτει την άποψη ότι υπάρχει μια απεικόνιση που είναι στατική και δεν αλλάζει από τις διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες που παράγουν διαφορετικές οπτικές αισθήσεις σε έναν οργανισμό. Δεν μπορεί να είναι αληθής η υπόθεση ότι υπάρχει μια καθαρή μορφή απεικόνισης η οποία είναι απαραίτητα Ευκλείδεια, όπως ισχυρίστηκε ο Καντ. Η απεικόνιση του Ευκλείδειου χώρου καλλιεργήθηκε ως αποτέλεσμα των παρατηρήσεών μας περί άκαμπτων ράβδων και ακτίνων φωτός. Καλλιεργήθηκε κατά τη διάρκεια της βιολογικής ιστορίας του είδους μας ως μια αναπτυξιακή προσαρμογή. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το ονόμασε βιολογική συνήθεια και τόνισε εμμέσως τον ρόλο που διαδραματίζει η εξέλιξη. Στην πραγματικότητα, παρόμοιες απόψεις μοιράστηκε και ο Poincaré σχετικά με τη δυνατότητα προσαρμογής των διαφορετικών γεωμετρίων. Μια από τις κυρίαρχες δύναμη που είναι πιθανό να έχει διαμορφώσει τον συμβατικό χαρακτήρα του Poincaré είναι η θεωρία της εξέλιξης. Ένα από τα παραδείγματα που παρέχονται από τον Poincaré επικεντρώνεται γύρω από το ρόλο της προσαρμογής και της κληρονομιάς στην απόκτηση της ιδέας του χώρου. Σε αυτό το παράδειγμα, ο Poincaré θέτει σημαντικά ερωτήματα σχετικά με το αν η προέλευση της ιδέας του χώρου λαμβάνει χώρα πραγματικά σε ατομικό επίπεδο ή είναι ένας καρπός που είναι αποτέλεσμα μιας μακράς αλυσίδας συνέχισης των κινήσεων συνήθειας των μελών μιας φυλής και κληρονομείται μέσω της βιολογικής ιστορίας του είδους. Το παράδειγμα που έδωσε ο Poincaré εμφανίζεται ως εξής: «Γίνεται εμφανές ότι αν και η γεωμετρία δεν είναι μια πειραματική επιστήμη, είναι μια επιστήμη που γεννιέται σε συνένωση με την εμπειρία, δημιουργήσαμε τον χώρο που μελετά, αλλά τον προσαρμόσαμε στον κόσμο στον οποίο ζούμε. Έχουμε επιλέξει τον πιο βολικό χώρο, αλλά η εμπειρία είναι αυτή που καθοδήγησε την επιλογή μας.

Καθώς η επιλογή ήταν ασυνείδητη, φαίνεται να μας επιβάλλεται. Μερικοί λένε ότι επιβάλλεται από την εμπειρία, και άλλοι ότι γεννιόμαστε με την ιδέα του χώρου μέσα μας έτοιμη. Μετά από σκέψεις, θα δούμε ποιο ποσοστό αλήθειας και λάθους υπάρχει σε αυτές τις δύο απόψεις. Σε αυτή την προοδευτική εκπαίδευση που έχει ως αποτέλεσμα την κατασκευή του χώρου, είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί ποιο είναι το μερίδιο το ατομικό και πιο του είδους. Σε ποιό βαθμό θα μπορούσε ένας από εμάς, να μεταφερθεί από τη γέννησή του σε έναν εντελώς διαφορετικό κόσμο, όπου, για παράδειγμα, υπήρχαν σώματα εκτοπισμένα σύμφωνα με τους νόμους της κίνησης των μη Ευκλείδειων στερεών - σε ποιο βαθμό, λέω, θα μπορούσε να εγκαταλείψει τον προγονικό αυτόν χώρο για να δημιουργήσει έναν εντελώς νέο χώρο;» (Poincaré, 1914)

Ο Reichenbach απορρίπτει την ιδέα ότι υπάρχει μια ικανότητα μέσα μας, που δίνεται εντελώς πριν από οποιαδήποτε εμπειρία και είναι η προϋπόθεση της ικανότητας δημιουργίας εικόνων. Απορρίπτει ότι υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ της μορφής της εικόνας και του περιεχομένου της. Η μορφή, για τον Reichenbach, δεν είναι πέρα από το περιεχόμενο, το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο εκτός της παρουσίασης των οπτικών ιδιοτήτων ενός αντικειμένου, όπως το χρώμα ή η φωτεινότητα του. Προς υποστήριξη αυτού, ο Reichenbach έγραψε «οι οπτικές μορφές δεν γίνονται αντιληπτές ανεξάρτητα από το χρώμα ή τη φωτεινότητα. Είναι ιδιότητες της αίσθησης και ο οπτικός χαρακτήρας της γεωμετρίας αποτελείται από αυτές τις αισθητηριακές ιδιότητες.» (Reichenbach, 1958).

Επίλογος

Σκοπός της παρούσης πτυχιακής είναι να δώσει μια απάντηση στην δυνατότητα συμφιλίωσης του ρεαλισμού του Καντ για τη φύση της γεωμετρίας με τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, ύστερα από συνεχείς φιλοσοφικές και λογικές επικρίσεις και τροποποιήσεις, ένα ενδεικτικό μέρος των οποίων εκτέθηκε παραπάνω.

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα φαίνεται να είναι αρνητική αφού δεν προκύπτει από την ανωτέρω ανάλυση η δυνατότητα ενσωμάτωσης των μη Ευκλείδειων γεωμετριών στη θεωρία της γεωμετρίας του Καντ, ακόμα και αν υποστεί κατάλληλες τροποποιήσεις. Ο Strawson, ο Frege, και άλλοι προσπάθησαν να διασώσουν τη θεωρία της γεωμετρίας του Καντ μειώνοντας το εύρος της εγκυρότητάς της. Προσπάθησαν να δείξουν ότι η αντίληψη του Καντ για τη γεωμετρία, ότι είναι συνθετική a priori εξακολουθεί να είναι βάσιμη απέναντι στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, γιατί πίστευαν ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία εξακολουθεί να ισχύει απαραίτητα για τον οπτικό μας χώρο, ακόμα και αν δεν εξηγεί τη δομή του κόσμου που μελετήθηκε από φυσικούς και επιστήμονες. Αυτή η τροποποίηση, ωστόσο, δεν μπορούσε να σταθεί απέναντι στις επικρίσεις των Poincaré και Reichenbach, γιατί και οι δύο πίστευαν ότι είναι δυνατόν να απεικονιστούν άλλες γεωμετρίες σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

Ο Ρεαλισμός του Καντ ήταν προγενέστερος επαναστατικών ανακαλύψεων στη λογική, τα μαθηματικά, τη φυσική και τη βιολογία. Για το λόγο αυτό, η φιλοσοφική του στάση απέναντι στη φύση της γεωμετρίας δεν πρέπει να κατηγορηθεί για την άγνοιά της ως προς αυτά τα θέματα. Αν ο Καντ γνώριζε τη θεωρία της εξέλιξης, ίσως να είχε εξετάσει τη δυνατότητα μιας δυναμικής και εξελισσόμενης διαίσθησης, η οποία είναι ικανή να προσαρμοστεί στο περιβάλλον. Αν είχε έρθει σε επαφή ομοίως, με τις νέες λογικές που ανακαλύφθηκαν τον 19ο και 20ο αιώνα, όπως την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, ενδεχομένως να είχε επανεξετάσει τη φιλοσοφική του στάση απέναντι στη φύση των γεωμετρικών κατασκευών και του γεωμετρικού χώρου. Αυτές οι πολύτιμες πληροφορίες δεν αποκλείεται να τον βοηθούσαν να αναθεωρήσει τη δική του φιλοσοφική θέση και τον υπερβατικό ιδεαλισμό του.

Αντίθετα, οι Poincaré και Reichenbach προσπάθησαν να αποδείξουν ότι ο συνθετικός εκ των προτέρων χαρακτήρας της γεωμετρίας δεν είναι ανεκτός στο πλαίσιο αυτών των νέων ανακαλύψεων. Και οι δύο τόνισαν τη σημασία του ρόλου που διαδραματίζουν τα εμπειρικά στοιχεία στο σχηματισμό γεωμετρίας, με τη δυνατότητα ενός είδους να αναπτύσσει νέες βιολογικές συνήθειες σε νέα περιβάλλοντα ως ένα εξαιρετικό παράδειγμα αυτού. Από την άλλη ο Καντ θεώρησε ότι αυτό δεν μπορεί να είναι αληθές, αφού ο προσδιορισμός του χώρου δεν μπορεί να είναι σε συνάρτηση με το περιβάλλον. Ο χαρακτήρας του χώρου είναι αμετάβλητος κάτω από οποιοδήποτε διαφορετικό περιβαλλοντικό πλαίσιο, σύμφωνα με τον Καντ. Παρόλο που ο Poincaré και ο Reichenbach διέφεραν στις απόψεις τους ως προς το ρόλο που παίζει το μυαλό μας στο σχηματισμό της γεωμετρίας, συμφώνησαν ωστόσο ότι είναι μία από τις προϋποθέσεις που καθιστούν δυνατή τη γεωμετρία ως επιστήμη, αλλά όχι με την έννοια που θεωρούσε ο Καντ. Ο Poincaré αναζήτησε το ρόλο που διαδραματίζει το μυαλό μας στον σχηματισμό της γεωμετρίας σε άλλες διανοητικές δυνάμεις που πηγάζουν από την ικανότητά μας για κατανόηση. Ο Reichenbach ανέπτυξε τη θεωρία του περί λογικής, αλλά αυτό που είναι κοινό και στους δύο είναι ότι περιόρισαν τις κανονιστικές διανοητικές διαδικασίες που πραγματοποιούνται στην υποτιθέμενη υπερβατική φαντασία σε ψυχολογικές διαδικασίες. Αυτή η μεταστροφή με τη σειρά της απαλλάσσει την κανονιστική κατασκευαστική διαδικασία και της επιστημολογικής εισαγωγής της μέσω της φαντασίας. Έτσι, ο υπερβατικός ιδεαλισμός του Καντ περιορίζεται εν μέρει στην ψυχολογία και η κανονιστικότητα που βρίσκεται στην κατασκευή μιας γεωμετρικής οντότητας σε μια συνήθεια που αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο όρος «διαίσθηση» έλαβε πολύ διαφορετικές προσεγγίσεις μετά τον Καντ υπό το φως αυτών των εξελίξεων τόσο στα καθαρά μαθηματικά, όσο και στη φυσική και τη βιολογία.

Αν και η διαίσθηση τροποποιήθηκε περισσότερο ως προς τη νόηση παρά ως προς την αισθητικότητα, οι νέες αντιλήψεις διατηρούν αυτούς τους γενικούς καντιανούς ρόλους για τη διαίσθηση. Επιτρέπουν επίσης μια αντίληψη των μαθηματικών που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί Καντιανή με τους ακόλουθους τρόπους. Πρώτον, η διαίσθηση που θεμελιώνει τα μαθηματικά παραμένει a priori, και υποτίθεται ότι είναι κοινή σε όλους τους ανθρώπους. Δεύτερον, η διαίσθηση είναι ανεξάρτητη από τις μετατοπίσεις τόσο στις φυσικές επιστήμες όσο και από τα αντιληπτικά πλαίσια. Τρίτον, η διαίσθηση παρέχει μια περιγραφή των μαθηματικών που είναι ουσιαστική αλλά απαραίτητη, δηλαδή συνθετική a priori. Τέταρτον, και τελευταίο, η διαίσθηση διέπει τη σχέση μεταξύ των εννοιών και των αντικειμένων ή των πεδίων τους. Έτσι, όπως και για τον Καντ, η διαίσθηση παραμένει μέρος μιας εξήγησης της (ανθρώπινης) επιστημικής μας πρόσβασης στα αντικείμενα που εμπίπτουν σε μια δεδομένη μαθηματική έννοια παραμένει επίσης μέρος μιας εξήγησης της σταθερότητας και της οριστικότητας των μαθηματικών πεδίων χωρίς ρεαλισμό. Για παράδειγμα, οι τομείς των πεδίων επανάληψης όπως οι φυσικοί αριθμοί για τους Poincaré και Weyl. Τα χρονικά πεδία τόσο σε συνεχείς όσο και σε διακριτούς τομείς για το Brouwer και η απουσία ξεχωριστής διαίσθησης συνόλων απαγορεύει τομείς όπως το σύνολο όλων των αντικειμένων ή όλων των συνόλων. Τα οφέλη της προσαρμογής της καντιανής διαίσθησης σε σχέση με άλλες φιλοσοφίες των μαθηματικών που την απέρριψαν –όπως η αξιωματική, ο εμπειρισμός και/ή το σχετικό a priori– είναι επομένως σημαντικά. Η διαίσθηση αποφεύγει τις κύριες παγίδες του ρεαλισμού, διατηρώντας παράλληλα την παραδοσιακή αντίληψη των μαθηματικών ως πεδίου αλήθειας που είναι a priori, απόλυτο και ουσιαστικό, με μια εσωτερική μεθοδολογία που την καθιστά αυτόνομη από τη φυσική επιστήμη.

Ο Poincaré, σύμφωνα με τα λόγια της Janet Folina, «επιχείρησε να επαναπροσδιορίσει ή να αναδιαμορφώσει τη διαίσθηση» (Folina, 2018). Για τον Poincaré, η διαίσθηση γίνεται κάτι ψυχολογικό, έγινε μια σχολή που μας επέτρεψε να «δούμε το τέλος από μακριά» (Poincaré, 1958). Δεν το κάνει και δεν μπορεί να μας παρέχει την αναμενόμενη ακαμψία που ο Καντ πίστευε ότι παρείχε, αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί ένα εργαλείο ανακάλυψης. Για τον Reichenbach, από την άλλη, ο όρος καθαρή διαίσθηση σημαίνει απλώς «καθαρή απεικόνιση», η οποία είναι ένα είδος «βιολογικής συνήθειας», που αναπτύχθηκε ως «αποτέλεσμα της προσαρμογής μιας ψυχολογικής ικανότητας στο περιβάλλον». (Reichenbach, 1958). Οι κατάλληλες τροποποιήσεις του όρου «διαίσθηση» είναι ένας τρόπος να αποκηρύξουμε τη θέση ότι η καθαρή διαίσθησή του Καντ για το χώρο παρέχει το έδαφος της αναγκαιότητας και της καθολικότητας των προτάσεων της Ευκλείδειας γεωμετρίας, πλην όμως, ακόμα και μετά την επαναπροσέγγιση του όρου από τις νέες φιλοσοφικές τάσεις, εξακολουθεί να αποτελεί ένα είδος δυναμικής ενόρασης που μας επιτρέπει να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε την αλήθεια των γεωμετρικών προτάσεων σε διαφορετικά περιβάλλοντα και πλαίσια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson, R. L., 2004, "It Adds Up After All: Kant's Philosophy of Arithmetic in Light of the Traditional Logic", Philosophy and Phenomenological Research.

—–, 2015, "Ineliminable Synthetic Truth in Elementary Mathematics", in R.L. Anderson, The Poverty of Conceptual Truth, Oxford: Oxford University Press.

Breitenbach, A., 2015, "Beauty in Proofs: Kant on Aesthetics in Mathematics", European Journal of Philosophy.

Brittan, G., 1992, "Algebra and Intuition" in Posy 1992.

—–, 2006, "Kant's Philosophy of Mathematics", in G. Bird (ed.), A Companion to Kant, Malden, MA: Blackwell.

—–, 2020, "Continuity, Constructibility, and Intuitivity", in Posy and Rechter 2020.

Brouwer, L. E. J., 1913. "Intuitionism and Formalism." Reprinted in Benacerraf and Putnam (1983).

Carson, E., 1997, "Kant on Intuition in Geometry", Canadian Journal of Philosophy.

—–, 1999, "Kant on the Method of Mathematics", Journal of the History of Philosophy.

—–, 2002, "Locke's Account of Certain and Instructive Knowledge", British Journal for the History of Philosophy.

—–, 2004, "Metaphysics, Mathematics and the Distinction Between the Sensible and the Intelligible in Kant's Inaugural Dissertation", Journal of the History of Philosophy.

—–, 2017, "Synthesis, Number and the Mathematical Model", in D. Emundts and S. Sedgwick (eds.), International Yearbook of German Idealism: Logik/Logic, Berlin: DeGruyter.

—–, 2020, "Arithmetic and the Conditions of Possible Experience", in Posy and Rechter 2020.

Carson, E. and L. Shabel (eds.), 2016, Kant: Studies on Mathematics in the Critical Philosophy, New York: Routledge.

Callanan, J., 2014, "Kant on the Acquisition of Geometrical Concepts", Canadian Journal of Philosophy, 44(5/6), 580–604; reprinted in Carson and Shabel 2016.

ÇÖTELİ, CAN (2021). THE RECONCILABILITY OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES WITH KANT'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS, School of Social Sciences of Middle East Technical University.

Domski, M. and M. Dickson (eds.), 2010, Discourse on a New Method: Reinvigorating the Marriage of History and Philosophy of Science, Chicago: Open Court Publishing.

Dunlop, K., 2012, “Kant and Strawson on the Content of Geometrical Concepts”, Noûs.

–––, 2014, “Arbitrary Combination and the Use of Signs in Mathematics: Kant’s 1763 Prize Essay and its Wolffian Background”, Canadian Journal of Philosophy, reprinted in Carson and Shabel 2016.

–––, 2020, “Kant and Mendelssohn on the Use of Signs in Mathematics”, in Posy and Rechter 2020.

Folina, J. (2018). After Non-Euclidean Geometry: Intuition, Truth and the Autonomy of Mathematics. Journal for the History of Analytical Philosophy

Frege, Gottlob, 1884. The Foundations of Arithmetic, translated by J. L. Austin. Evanston, IL: Northwestern University Press, 1968.

Friedman, M., 1985, “Kant’s Theory of Geometry”, The Philosophical Review,

–––, 1992, Kant and the Exact Sciences, Cambridge: Harvard University Press.

–––, 2000, “Geometry, Construction and Intuition in Kant and His Successors”, in G. Scher and R. Tieszen (eds.), Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons, Cambridge: Cambridge University Press.

–––, 2010, “Synthetic History Reconsidered”, in Domski and Dickson 2010.

–––, 2012, “Kant on Geometry and Spatial Intuition”, Synthese.

–––, 2015, “Kant on Geometry and Experience”, in in V. Risi (ed.), Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age, Cham: Springer International.

–––, 2020, “Space and Geometry in the B Deduction”, in Posy and Rechter 2020.

Giandomenico Sica, (2006) What is geometry? Monza, Italy: Polimetrica.

Greenberg Marvin Jay, 1994, “Euclidean and Non-Euclidian Geometry Development and History Hardcover”, W. H. Freeman.

Goodwin, W., 2018, “Conflicting Conceptions of Construction in Kant’s Philosophy of Mathematics”, Perspectives on Science.

Halsted, G. B. (1900). Gauss and the Non-Euclidean Geometry. Mathematical

Monthly, 7(11), 247-252. doi:10.2307/2968396

Heinzmann G, Poincaré on understanding mathematics - Philosophia Scientiae, 1999

Heis, J., 2014, “Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on Real Definitions in Geometry”, Canadian Journal of Philosophy, 44(5/6), 605–630; reprinted in Carson and Shabel 2016.

–––, 2020, “Kant on Parallel Lines: Definitions, Postulates, and Axioms”, in Posy and Rechter 2020.

Helmholtz, Hermann von, 1876/1878. “The Origin and Meaning of Geometrical Axioms.” Reprinted in Ewald (1996).

Hintikka, J., 1965, “Kant's ‘New Method of Thought’ and his Theories of Mathematics”, Ajatus.

–––, 1967, “Kant on the Mathematical Method”, The Monist, 51 (3): 352–375; reprinted in Posy 1992.

–––, 1969, “On Kant's Notion of Intuition (Anschauung)”, in T. Penelhum and J. J. MacIntosh (eds.), The First Critique, Belmont, CA: Wadsworth Publishing.

–––, 1984, “Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics”, Topoi, 3 (2): 99–108; reprinted in Posy 1992.

–––, 2020, “Kant's Theory of Mathematics: What Theory of What Mathematics”, in Posy and Rechter 2020.

Hogan, D., 2020, “Kant and the Character of Mathematical Inference”, in Posy and Rechter 2020.

Jauernig, A., 2013, “The Synthetic Nature of Geometry, and the Role of Construction in Intuition”, in S. Bacin, A. Ferrarin, C. La Rocca, and M. Ruffing (eds.), Akten des XI. Internationalen Kant Kongresses 2010, Berlin/New York: Walter de Gruyter.

Kant, I. (2007). The Critique Pure Reason (N. K. Smith, Trans.) (2nd ed.). Palgrave Macmillan.

Kant, I. (2017). Dissertation on the Form and Principles of the Sensible and the Intelligible World Inaugural Dissertation 1770 by Immanuel Kant - Delphi Classics (Illustrated). NY: Delphi Classics.

Kant, I., & Ellington, J. W. (2001). Prolegomena to any Future Metaphysics: And the Letter to Marcus Herz, February 1772 (2nd ed.). Hackett Publishing.

Leavitt, F., 1991, “Kant's Schematism and His Philosophy of Geometry”, Studies in History and Philosophy of Science (Part A).

Longuenesse, B., 1998, Kant and the Capacity to Judge. Princeton: Princeton University Press.

Nunez, T., 2014, “Definitions of Kant’s Categories”, Canadian Journal of Philosophy, 44(5/6), 63 Friedman, M., 1985, “Kant’s Theory of Geometry”, The Philosophical Review.

–––, 1992, Kant and the Exact Sciences, Cambridge: Harvard University Press.

–––, 2000, “Geometry, Construction and Intuition in Kant and His Successors”, in G. Scher and R. Tieszen (eds.), Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons, Cambridge: Cambridge University Press.

–––, 2010, “Synthetic History Reconsidered”, in Domski and Dickson 2010.

–––, 2012, “Kant on Geometry and Spatial Intuition”, Synthese.

–––, 2015, “Kant on Geometry and Experience”, in in V. Risi (ed.), Mathematizing Space: The Objects of Geometry from Antiquity to the Early Modern Age, Cham: Springer International, pp. 275–309. 1–657; reprinted in Carson and Shabel 2016.

Onof, C. and D. Schulting, 2014, “Kant, Kästner and the Distinction between Metaphysical and Geometric Space”, Kantian Review.

Parsons, C., 1964, “Infinity and Kant’s Conception of the ‘Possibility of Experience’”, The Philosophical Review, 73 (2): 182–197; reprinted in Parsons 1983.

–––, 1969, “Kant’s Philosophy of Arithmetic”, in S. Morgenbesser, P. Suppes, and M. White (eds.), Philosophy, Science and Method: Essays in Honor of Ernest Nagel, New York: St. Martin’s Press; reprinted in Parsons 1983 and in Posy 1992.

–––, 1983, Mathematics in Philosophy: Selected Essays. Ithaca: Cornell University Press.

–––, 1984, “Arithmetic and the Categories”, Topoi, 3 (2): 109–121; reprinted in Posy 1992.

–––, 1992, “The Transcendental Aesthetic”, in Guyer 1992.

–––, 2010, “Two Studies in the Reception of Kant’s Philosophy of Arithmetic”, in Domski and Dickson 2010.

–––, 2012, From Kant to Husserl: Selected Essays, Cambridge: Harvard University Press.

–––, 2014, “The Kantian Legacy in Twentieth-Century Foundations of Mathematics”, in C. Parsons, Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century, Cambridge: Harvard University Press.

Poincaré, H. (1898). On the Foundations of Geometry. The Monist.

Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27899007

–––, (1905). Science and Hypothesis. New York, NY: The Walter Scott Publishing Co.LTD.

–––, (1914). The Science and Method (F. Maitland, Trans.). Thomas Nelson and Sons.

–––, (1958). The Value of Science. New York, NY: Dover Publications.

–––, (1963). Mathematics and Science, Last Essays (J. W. Bolduc, Trans.). New York, NY: Dover Publications.

–––, (2011). Science and Hypothesis (W.J.Greenstreet, Trans.). New York, NY: Dover Publications.

Reichenbach, h. (1958). The Philosophy of Space and Time (M. Reichenbach, & J. Freund, Trans.). New York, NY: Dover Publications.

Risjord, M., 1990, "The Sensible Foundation for Mathematics: A Defense of Kant's View", Studies in History and Philosophy of Science Part A.

–––, 1991, "Further Reflections on the Sensible Foundation: Replies to Leavitt and Griffin", Studies in History and Philosophy of Science Part A.

Rosenfeld, B. A. (1988). A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space. New York: Springer – Verlag.

Russell, Bertrand, 1897. An Essay on the Foundations of Geometry, Cambridge: Cambridge University Press.

Shabel, L., 1998, "Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts", Studies in History and Philosophy of Science.

–––, 2003, Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice, New York: Routledge.

–––, 2004, "Kant's 'Argument from Geometry'", Journal of the History of Philosophy.

–––, 2005, "Apriority and Application: Philosophy of Mathematics in the Modern Period", in S. Shapiro (ed.), Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic, Oxford: Oxford University Press.

–––, 2006, "Kant's Philosophy of Mathematics", in Guyer 2006.

–––, 2017, "Kant's Mathematical Principles of Pure Understanding", in J. O'Shea (ed.), Kant's Critique of Pure Reason: A Critical Guide, Cambridge: Cambridge University Press.

Shapiro Stewart (2000), Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics. Oxford University Press, 2000

Sieg, W. , 2016, “On Tait on Kant and Finitism”, Journal of Philosophy.

Sutherland, D., 2004a, “Kant’s Philosophy of Mathematics and the Greek Mathematical Tradition”, The Philosophical Review.

–––, 2004b, “The Role of Magnitude in Kant’s Critical Philosophy”, Canadian Journal of Philosophy.

–––, 2005a, “Kant on Fundamental Geometrical Relations”, Archiv für Geschichte der Philosophie.

–––, 2005b, “The Point of Kant’s Axioms of Intuition”, Pacific Philosophical Quarterly.

–––, 2006, “Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions”, Journal of the History of Philosophy.

–––, 2010, “Philosophy, Geometry, and Logic in Leibniz, Wolff, and the Early Kant”, in Domski and Dickson 2010.

–––, 2014, “Kant on the Construction and Composition of Motion in the Phoronomy”, Canadian Journal of Philosophy, 44(5/6), 686–718; reprinted in Carson and Shabel 2016.

–––, 2017, “Kant’s Conception of Number”, Philosophical Review.

–––, 2020, “Kant’s Philosophy of Arithmetic: An Outline of a New Approach”, in Posy and Rechter 2020.

–––, 2021, Kant’s Mathematical World: Mathematics, Cognition, and Experience, Cambridge: Cambridge University Press.

Tait, W.W., 2016, “Kant and Finitism”, Journal of Philosophy.

–––, 2020, “Kant on ‘Number’”, in Posy and Rechter 2020.

Tolley, C., 2016, “The Difference Between Original, Metaphysical, and Geometrical Representations of Space”, in D. Schulting, (ed.) Kantian Nonconceptualism, London: Palgrave Macmillan.

van Atten, M., 2012, “Kant and Real Numbers”, in P. Dybjer, S. Lindström, E. Palmgren, and G. Sundholm (eds.), Epistemology versus Ontology (Logic, Epistemology, and the Unity of Science: Volume 27), Dordrecht: Springer.

van Cleve, J. and Frederick, R. (eds.), 1991, The Philosophy of Right and Left: Incongruent Counterparts and the Nature of Space, Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

van Cleve, J., 1999, Problems From Kant, Oxford: Oxford University Press.

von Wolff-Metternich, B., 2012, Die Überwindung des mathematischen Erkenntnisideals, Berlin: DeGruyter.

Voskoglou, Michael. Gr. ( ). IS MATHEMATICS INVENTED OR DISCOVERED BY HUMANS? Graduate Technological Educational Institute of Western Greece

Wolfe, H. E. (1945). Introduction to Non-Euclidean Geometry. New York, NY: The

Dryden Press.

Μακενατζή Μαρία (2020), Συγκριτική Μελέτη Ευκλείδειας και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Kant’s Philosophy of Mathematics First published Fri Jul 19, 2013; substantive revision Wed Aug 11, 2021 Stanford Encyclopedia of Philosophy

http://www.physics.ntua.gr/mourmouras/euclid/common/postulates_465.html#peri

https://mathbooksgr.files.wordpress.com/2012/02/mlexiko2012.pdf

http://euclid.mas.ucy.ac.cy/~georgios/bookfiles/dict1.pdf

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/