

Κλασικά και Σύγχρονα Μοντέλα Διακριτών
Πιθανοτήτων: Από τη Συνδυαστική Ανάλυση στα
Στοχαστικά Φαινόμενα

Ονοματεπώνυμο Φοιτητή: ΑΝΔΡΟΜΑΧΗ ΒΕΡΡΑ

Επιβλέποντες Καθηγητές:

1. ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΟΥΣΗΣ
2. ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΑΡΑΧΑΛΙΟΣ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

25 Σεπτεμβρίου 2026

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	5
1 Ο Χώρος Δειγμάτων και η Έννοια της Πιθανότητας	7
1.1 Το εμπειρικό υπόβαθρο της πιθανοθεωρίας	7
1.1.1 Τυχαιότητα και μαθηματική περιγραφή	7
1.2 Τυχαιά πειράματα και παραδείγματα	8
1.3 Χώρος δειγμάτων	8
1.4 Γεγονότα	8
1.5 Πράξεις και σχέσεις μεταξύ γεγονότων	9
1.6 Διακριτοί χώροι δειγμάτων	9
1.6.1 Γιατί διακριτά μοντέλα;	9
1.7 Κλασικός ορισμός της πιθανότητας	9
1.7.1 Συμμετρία και ισοπιθανότητα	9
1.8 Σχέσεις μεταξύ γεγονότων	10
1.8.1 Γεγονότα και λογική δομή	10
1.9 Όρια του κλασικού ορισμού της πιθανότητας	10
2 Συνδυαστική Ανάλυση και Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού(Inclusion-Exclusion)	11
2.1 Εισαγωγή στη συνδυαστική ανάλυση	11
2.2 Βασικές αρχές απαρίθμησης	11
2.2.1 Η Αρχή του Γινομένου	11
2.3 Συνδυαστική ανεξαρτησία	12
2.3.1 Η Αρχή του Αθροίσματος	12
2.4 Το πρόβλημα της διπλής καταμέτρησης	13
2.4.1 Ένα απλό ενδεικτικό παράδειγμα	13
2.4.2 Αναλυτική περιγραφή της υπερκαταμέτρησης	13
2.4.3 Η πρώτη διόρθωση: αφαίρεση της τομής	13
2.4.4 Γιατί το πρόβλημα επιδεινώνεται σε περισσότερα σύνολα	13
2.4.5 Εννοιολογική σημασία	14
2.5 Διατεταγμένα δείγματα (Ordered Samples)	14
2.5.1 Διατεταγμένες επιλογές χωρίς επανάληψη	14
2.5.2 Διατεταγμένες επιλογές με επανάληψη	14
2.5.3 Σχέση με πιθανοθεωρητικά μοντέλα	15
2.6 Υποπληθυσμοί και διαμερίσεις	15
2.6.1 Υποπληθυσμοί και επιλογές	15
2.6.2 Διαμερίσεις πληθυσμών	15
2.6.3 Σχέση με τα προβλήματα πληρότητας	15
2.6.4 Εννοιολογική σημασία	16

2.7	Όρια της απλής απαρίθμησης	16
2.8	Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού(The principle of Inclusion-Exclusion) . .	16
2.9	Γενική μορφή Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού	16
2.10	Απόδειξη της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού	17
2.11	Η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού ως αναδρομικός μηχανισμός	18
2.11.1	Πιθανοθεωρητική διατύπωση της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού	18
3	Κλασικά Διακριτά Πιθανοθεωρητικά Μοντέλα	19
3.1	Στόχος και θέση του κεφαλαίου	19
3.2	Η δοκιμή Bernoulli	19
3.2.1	Ορισμός και ερμηνεία	19
3.2.2	Ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών	19
3.3	Η διωνυμική κατανομή(Binomial Distribution)	20
3.3.1	Ορισμός και συνδυαστική προέλευση	20
3.4	Η διωνυμική κατανομή	20
3.4.1	Γραφική απεικόνιση της διωνυμικής κατανομής για διαφορετικά n	20
3.4.2	Μέση τιμή και διακυμάνσεις	22
3.4.3	Αναδρομική δομή	23
3.5	Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση: η υπεργεωμετρική κατανομή	23
3.5.1	Συνδυαστική παραγωγή της κατανομής	23
3.5.2	Σχέση με τη διωνυμική κατανομή	24
3.5.3	Απεικόνιση της υπεργεωμετρικής κατανομής	25
3.5.4	Το μοντέλο της κάλπης	25
3.5.5	Μέση τιμή και διακυμάνσεις	25
3.6	Σύγκριση διωνυμικής και υπεργεωμετρικής	27
3.7	Ο τύπος Stirling και ασυμπτωτική συμπεριφορά	27
3.7.1	Ρόλος της συνδυαστικής ανάλυσης	27
3.8	Το πρόβλημα των αποδιατάξεων(derangements)	29
3.8.1	Ασυμπτωτική συμπεριφορά των αποδιατάξεων	29
3.9	Ασυμπτωτική συμπεριφορά των αποδιατάξεων(derangements)	30
3.9.1	Ασυμπτωτική συμπεριφορά των αυτοδιατάξεων (derangements) .	30
3.10	Το πρόβλημα των γενεθλίων	31
3.11	Occupancy Problems και κατανομές αντικειμένων	31
3.11.1	Το βασικό μοντέλο balls into boxes	32
3.11.2	Πιθανότητα όλα τα κουτιά να είναι διαφορετικά	32
3.11.3	Το πρόβλημα των συγκρούσεων	32
3.11.4	Το πρόβλημα των γενεθλίων ως occupancy model	33
3.11.5	Κενά κουτιά	33
3.11.6	Poisson προσέγγιση	34
3.12	Συμπεράσματα	35
4	Επαναλαμβανόμενα πειράματα και το μοντέλο ρίψεων νομίσματος	36
4.1	Εισαγωγή	36
4.2	Το μοντέλο ρίψεων νομίσματος	36
4.3	Ανεξαρτησία των δοκιμών	36
4.4	Ο αριθμός επιτυχιών	37
4.5	Σχετική συχνότητα	38
4.6	Συμπεριφορά για μεγάλο πλήθος δοκιμών	38

4.7	Συγκέντρωση πιθανοτήτων	38
4.8	Τυπικές και μη τυπικές εκβάσεις	38
4.9	Συμμετρία της κατανομής	39
4.10	Η πιο πιθανή τιμή	39
4.11	Σχέση με το τρίγωνο του Pascal	40
4.12	Τυχαιός περίπατος	41
4.12.1	Απεικόνιση τυχαίου περιπάτου	41
4.13	Ρυθμός μείωσης πιθανοτήτων	42
4.14	Σχέση με τον τύπο Stirling	42
4.15	Φιλοσοφική ερμηνεία	42
4.16	Δομή και μοτίβα στις ακολουθίες ρίψεων	42
4.16.1	Ακολουθίες επιτυχιών (runs)	42
4.16.2	Αριθμός αλλαγών	43
4.16.3	Μέγιστη ακολουθία	43
4.16.4	Παρανόηση της τυχαιότητας	43
4.16.5	Τοπική και συνολική συμπεριφορά	43
4.16.6	Σχόλιο	43
4.17	Συμπεράσματα	44
5	Ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων	45
5.1	Εισαγωγή	45
5.2	Σχετική συχνότητα και εμπειρική πιθανότητα	45
5.3	Η βασική εμπειρική παρατήρηση	46
5.4	Η περίπτωση των ρίψεων νομίσματος	46
5.5	Διατύπωση του νόμου των μεγάλων αριθμών	47
5.6	Ερμηνεία του αποτελέσματος	47
5.7	Η μέση τιμή ως κέντρο συγκέντρωσης	47
5.8	Ο ρόλος της διασποράς	48
5.9	Η ανισότητα του Chebyshev ως εργαλείο	48
5.10	Η σημασία του αποτελέσματος για την ερμηνεία της πιθανότητας	49
5.11	Παράδειγμα αριθμητικής ερμηνείας	50
5.12	Γραφική απεικόνιση της σχετικής συχνότητας	50
5.13	Σύνδεση με την προσέγγιση του Feller	51
5.14	Μετάβαση στην κανονική προσέγγιση	51
5.15	Συμπεράσματα	51
6	Διακυμάνσεις και κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής	52
6.1	Εισαγωγή	52
6.2	Τυποποίηση και μελέτη των αποκλίσεων	52
6.3	Τάξη μεγέθους των διακυμάνσεων	52
6.4	Η προσέγγιση De Moivre–Laplace	53
6.5	Η μορφή της κανονικής κατανομής	53
6.6	Διόρθωση συνέχειας	53
6.7	Η πιθανότερη τιμή	53
6.8	Σύνδεση με τα προηγούμενα αποτελέσματα	53
6.8.1	Σύνδεση με τα γραφήματα της διωνυμικής κατανομής	54
6.8.2	Συμπεριφορά στα άκρα της κατανομής	54

6.9	Παράδειγμα	54
6.10	Γραφική απεικόνιση	54
6.11	Ερμηνεία	55
6.12	Συμπεράσματα	55
7	Σύνθεση αποτελεσμάτων και ερμηνεία των στοχαστικών φαινομένων	56
7.1	Εισαγωγή	56
7.2	Από την τυχειότητα στην κανονικότητα	56
7.3	Ο ρόλος της διωνυμικής κατανομής	57
7.4	Σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας	57
7.5	Κατανομή των αποκλίσεων	58
7.6	Τυπική και άτυπη συμπεριφορά	58
7.7	Συνδυαστική ερμηνεία	58
7.8	Ο ρόλος της ανεξαρτησίας	58
7.9	Ο ρόλος της κλίμακας	59
7.10	Η σημασία της συμμετρίας στα στοχαστικά μοντέλα	59
7.11	Η μαθηματική περιγραφή της αβεβαιότητας	60
7.12	Η σημασία της ασυμπτωτικής ανάλυσης	60
7.13	Η προσέγγιση του Feller	60
7.14	Συνολική εικόνα	60
7.15	Συμπεράσματα	61
8	Τελικά συμπεράσματα	62
8.1	Η σημασία της προσέγγισης του Feller	62
8.2	Από τα διακριτά μοντέλα στις στοχαστικές διαδικασίες	62
8.3	Προοπτικές για περαιτέρω μελέτη	63
8.4	Επίλογος	63

Εισαγωγή

Η φύση της θεωρίας πιθανοτήτων

Η θεωρία πιθανοτήτων αναπτύχθηκε αρχικά ως απάντηση σε προβλήματα που προέκυπταν από απλά τυχαία πειράματα, όπως τα παιχνίδια τύχης, οι ρίψεις νομισμάτων και ζαριών και τα προβλήματα κατανομής αντικειμένων σε ομάδες. Στα πρώτα της βήματα, η θεωρία αυτή είχε έντονα συνδυαστικό χαρακτήρα, καθώς η πιθανότητα ενός γεγονότος οριζόταν ως λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων, υπό την παραδοχή ότι αυτές είναι ισοπίθανες.

Η προσέγγιση αυτή, γνωστή ως κλασικός ορισμός της πιθανότητας, αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της διακριτής θεωρίας πιθανοτήτων και παραμένει ιδιαίτερα χρήσιμη όταν μελετώνται φαινόμενα με πεπερασμένο ή αριθμήσιμο χώρο δειγμάτων. Παρά την εισαγωγή της αξιωματικής θεωρίας πιθανοτήτων κατά τον 20ό αιώνα, η κλασική θεωρία διατηρεί τη σημασία της τόσο για παιδαγωγικούς λόγους όσο και για την κατανόηση των μηχανισμών που διέπουν τα στοχαστικά φαινόμενα.

Ιστορικό και εννοιολογικό υπόβαθρο

Τα πρώτα συστηματικά αποτελέσματα στη θεωρία πιθανοτήτων εμφανίζονται τον 17ο αιώνα, με τις εργασίες των Pascal, Fermat και Huygens, οι οποίοι μελέτησαν προβλήματα σχετικά με δίκαιες κατανομές κερδών σε διακοπτόμενα παιχνίδια. Κατά τον 18ο και 19ο αιώνα, η θεωρία επεκτάθηκε σημαντικά με τη συνεισφορά μαθηματικών όπως οι Bernoulli, Laplace και Poisson, οι οποίοι εισήγαγαν έννοιες όπως ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η κανονική προσέγγιση διακριτών κατανομών.

Στο πλαίσιο αυτό, η συνδυαστική ανάλυση διαδραμάτισε κεντρικό ρόλο. Πολλά πιθανοτικά προβλήματα ανάγονται στη μέτρηση τρόπων επιλογής, διάταξης ή κατανομής αντικειμένων, γεγονός που καθιστά τη συνδυαστική ένα αναπόσπαστο εργαλείο της διακριτής πιθανοθεωρίας. Μέσα από τέτοια προβλήματα, η πιθανότητα αναδύεται ως ποσοτικό μέτρο αβεβαιότητας που προκύπτει από συμμετρίες και ισοδυναμίες.

Η προσέγγιση του Feller

Η παρούσα εργασία βασίζεται στην κλασική και αναλυτική προσέγγιση της θεωρίας πιθανοτήτων που παρουσιάζεται στο έργο του William Feller. Στο έργο αυτό, η πιθανότητα δεν εισάγεται αξιωματικά μέσω θεωρίας μέτρου, αλλά οικοδομείται σταδιακά μέσα από διακριτά μοντέλα, συνδυαστικές μετρήσεις και συγκεκριμένα στοχαστικά παραδείγματα.

Η επιλογή αυτής της προσέγγισης επιτρέπει την άμεση σύνδεση των αφηρημένων εννοιών με απτά προβλήματα και διευκολύνει την κατανόηση της μετάβασης από απλά

τυχαία πειράματα σε πιο σύνθετα στοχαστικά φαινόμενα. Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στη μελέτη των διακυμάνσεων, των τυχαίων περιπάτων και των οριακών συμπεριφορών, οι οποίες αποτελούν θεμελιώδη στοιχεία της σύγχρονης θεωρίας στοχαστικών διαδικασιών.

Κλασική και «στατιστική» πιθανότητα

Ένα από τα βασικά σημεία που αναδεικνύονται στην κλασική βιβλιογραφία είναι η διάκριση μεταξύ της θεωρητικής (ή κλασικής) πιθανότητας και της λεγόμενης στατιστικής πιθανότητας. Η πρώτη βασίζεται σε καθαρά μαθηματικές παραδοχές και συμμετρίες, ενώ η δεύτερη σχετίζεται με τη συχνότητα εμφάνισης ενός γεγονότος σε επαναλαμβανόμενα πειράματα.

Η σχέση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών δεν είναι άμεση και απαιτεί προσεκτική θεωρητική θεμελίωση. Τα οριακά θεωρήματα της θεωρίας πιθανοτήτων, και ειδικότερα ο νόμος των μεγάλων αριθμών, παρέχουν το μαθηματικό υπόβαθρο που δικαιολογεί τη σύνδεση μεταξύ θεωρητικών πιθανοτήτων και εμπειρικών συχνοτήτων. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η σύνδεση αυτή εξετάζεται μέσα από διακριτά μοντέλα, χωρίς την εισαγωγή εργαλείων συνεχούς θεωρίας μέτρου.

Στόχος και διάρθρωση της εργασίας

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η συστηματική μελέτη κλασικών και σύγχρονων μοντέλων διακριτών πιθανοτήτων, με αφετηρία τη συνδυαστική ανάλυση και κατάληξη στη μελέτη βασικών στοχαστικών φαινομένων. Η ανάπτυξη βασίζεται κυρίως στα πρώτα κεφάλαια του έργου του Feller και αποσκοπεί στην ανάδειξη της εννοιολογικής συνέχειας που συνδέει τη διακριτή συνδυαστική πιθανότητα με τη σύγχρονη στοχαστική σκέψη.

Η εργασία οργανώνεται ως εξής. Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι βασικές έννοιες του χώρου δειγμάτων και των γεγονότων, καθώς και οι θεμελιώδεις κανόνες της πιθανότητας σε διακριτούς χώρους. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα βασικά εργαλεία της συνδυαστικής ανάλυσης καθώς και η αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται κλασικά διακριτά πιθανοθεωρητικά μοντέλα, όπως η δοκιμή Bernoulli, η διωνυμική και η υπεργεωμετρική κατανομή και επιπλέον παρουσιάζεται η εμφάνιση ασυμπτωτικών φαινομένων μέσω του τύπου Stirling. Το τέταρτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη μελέτη των διακυμάνσεων, των ρίψεων νομισμάτων και των τυχαίων περιπάτων, όπου αναδεικνύεται ο στοχαστικός χαρακτήρας των διακριτών μοντέλων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο νόμος των μεγάλων αριθμών και μελετάται η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων. Στο έκτο κεφάλαιο μελετώνται οι διακυμάνσεις και η κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής. Παρουσιάζεται η προσέγγιση De Moivre–Laplace και αναλύεται η εμφάνιση της κανονικής κατανομής ως φυσικού ορίου της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς. Στο έβδομο κεφάλαιο συντίθενται τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων και επιχειρείται η συνολική ερμηνεία

Κεφάλαιο 1

Ο Χώρος Δειγμάτων και η Έννοια της Πιθανότητας

1.1 Το εμπειρικό υπόβαθρο της πιθανοθεωρίας

Η θεωρία πιθανοτήτων ασχολείται με τη μαθηματική περιγραφή φαινομένων των οποίων το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα, ακόμη και όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται υπό πανομοιότυπες συνθήκες. Η αβεβαιότητα αυτή δεν συνεπάγεται έλλειψη δομής· αντιθέτως, πολλά τυχαία φαινόμενα παρουσιάζουν σταθερότητα σε μακροσκοπικό επίπεδο.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός νομίσματος. Αν και το αποτέλεσμα κάθε μεμονωμένης ρίψης είναι απρόβλεπτο, η σχετική συχνότητα εμφάνισης κάθε όψης παρουσιάζει αξιοσημείωτη κανονικότητα όταν ο αριθμός των δοκιμών αυξάνεται. Η παρατήρηση αυτή αποτέλεσε ένα από τα πρώτα κίνητρα για την ανάπτυξη της πιθανοθεωρίας.

Στην κλασική της μορφή, η πιθανοθεωρία βασίζεται στην ιδέα ότι σε ορισμένα διακριτά πειράματα υπάρχει συμμετρία: οι στοιχειώδεις εκβάσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Η πιθανότητα ενός γεγονότος μπορεί τότε να υπολογιστεί μέσω της καταμέτρησης των ευνοϊκών περιπτώσεων σε σχέση με το σύνολο των δυνατών.

Η προσέγγιση αυτή, η οποία υιοθετείται συστηματικά στο έργο του Feller, δεν στηρίζεται σε αφηρημένα αξιώματα, αλλά σε συνδυαστική ανάλυση και σαφή περιγραφή του δειγματικού χώρου.

1.1.1 Τυχαιότητα και μαθηματική περιγραφή

Η έννοια της τυχαιότητας δεν ταυτίζεται με την έννοια της πλήρους αταξίας. Στην πιθανοθεωρία, η τυχαιότητα περιγράφει την αδυναμία πρόβλεψης μεμονωμένων εκβάσεων, όχι όμως και τη συνολική συμπεριφορά ενός μεγάλου πλήθους επαναλήψεων.

Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης στην προσέγγιση του Feller. Η πιθανοθεωρία δεν επιχειρεί να εξηγήσει την αιτία της τυχαιότητας, αλλά να περιγράψει τις στατιστικές κανονικότητες που αναδύονται μέσα από αυτήν.

Με τον τρόπο αυτό, η πιθανότητα αντιμετωπίζεται ως εργαλείο περιγραφής και όχι ως φυσική ιδιότητα ενός μεμονωμένου πειράματος.

1.2 Τυχαία πειράματα και παραδείγματα

Για τη μαθηματική διατύπωση ενός τυχαίου φαινομένου, απαιτείται πρώτα ο ακριβής προσδιορισμός του πειράματος και των δυνατών εκβάσεων του.

Παράδειγμα: Ρίψη νομίσματος

Το πείραμα συνίσταται σε μία ρίψη νομίσματος. Οι δυνατές εκβάσεις είναι δύο: κορώνα (Κ) και γράμματα (Γ). Σε n διαδοχικές ρίψεις, κάθε στοιχειώδης έκβαση αντιστοιχεί σε μία δυαδική ακολουθία μήκους n .

Παράδειγμα: Ρίψη ζαριού

Σε μία ρίψη ζαριού, οι δυνατές εκβάσεις είναι οι ακέραιοι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Σε δύο ρίψεις, η έκβαση περιγράφεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος (i, j) , με $i, j \in \{1, \dots, 6\}$.

Παράδειγμα: Δειγματοληψία από κάλπη

Θεωρούμε μία κάλπη που περιέχει N σφαίρες, εκ των οποίων M είναι λευκές και $N - M$ μαύρες. Η επιλογή n σφαιρών οδηγεί σε πειράματα με διαφορετική στοχαστική δομή, ανάλογα με το αν επιτρέπεται η επανατοποθέτηση ή όχι.

Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν ότι το πρώτο βήμα στη μαθηματική ανάλυση ενός τυχαίου φαινομένου είναι η κατασκευή του συνόλου όλων των δυνατών εκβάσεων.

1.3 Χώρος δειγμάτων

Χώρος δειγμάτων: Ο χώρος δειγμάτων Ω ενός τυχαίου πειράματος είναι το σύνολο όλων των δυνατών στοιχειωδών εκβάσεων του πειράματος.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, ο χώρος δειγμάτων είναι:

- $\Omega = \{K, G\}$ για μία ρίψη νομίσματος,
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ για μία ρίψη ζαριού,
- $\Omega = \{K, G\}^n$ για n ρίψεις νομίσματος.

Η ακριβής περιγραφή του χώρου δειγμάτων είναι κρίσιμη, καθώς κάθε μεταγενέστερος υπολογισμός πιθανότητας εξαρτάται από αυτήν.

1.4 Γεγονότα

Γεγονός: Ένα γεγονός είναι οποιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq \Omega$. Λέμε ότι το γεγονός A πραγματοποιείται αν η παρατηρούμενη έκβαση $\omega \in \Omega$ ανήκει στο A .

Βέβαιο και αδύνατο γεγονός: Το γεγονός Ω ονομάζεται *βέβαιο*, ενώ το κενό σύνολο $\emptyset$ ονομάζεται *αδύνατο* γεγονός.

Η έννοια του γεγονότος επιτρέπει τη μετάβαση από μεμονωμένες εκβάσεις σε συλλογικές ιδιότητες του πειράματος.

1.5 Πράξεις και σχέσεις μεταξύ γεγονότων

Οι βασικές πράξεις μεταξύ γεγονότων είναι η ένωση, η τομή και το συμπλήρωμα, οι οποίες αντιστοιχούν σε λογικές πράξεις στην περιγραφή των πειραμάτων.

Συμπλήρωμα: Για γεγονός $A \subseteq \Omega$, το συμπλήρωμα A^c ορίζεται ως $A^c = \Omega \setminus A$.

Ασυμβίβαστα γεγονότα: Δύο γεγονότα A και B λέγονται *ασυμβίβαστα*

Οι πράξεις αυτές ικανοποιούν γνωστές ιδιότητες της θεωρίας συνόλων, όπως οι νόμοι De Morgan, οι οποίοι παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση πιθανοτήτων.

1.6 Διακριτοί χώροι δειγμάτων

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με *διακριτούς* χώρους δειγμάτων, δηλαδή χώρους οι οποίοι είναι πεπερασμένοι ή αριθμήσιμοι.

Πεπερασμένος διακριτός χώρος: Ο χώρος δειγμάτων Ω λέγεται πεπερασμένος αν $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$.

Η υπόθεση αυτή επιτρέπει την ανάπτυξη της πιθανοθεωρίας μέσω καθαρά συνδυαστικών επιχειρημάτων, χωρίς τη χρήση μέτρων.

1.6.1 Γιατί διακριτά μοντέλα;

Η επιλογή διακριτών χώρων δειγμάτων δεν είναι τυχαία. Τα διακριτά μοντέλα επιτρέπουν την ανάπτυξη της πιθανοθεωρίας με καθαρά συνδυαστικά μέσα, χωρίς την ανάγκη προχωρημένων αναλυτικών εργαλείων.

Στο έργο του Feller, η διακριτή πιθανοθεωρία αποτελεί το φυσικό σημείο εκκίνησης, καθώς καθιστά σαφή τη σχέση μεταξύ του δειγματικού χώρου και της πιθανότητας. Η μετάβαση σε συνεχή μοντέλα προκύπτει ιστορικά και λογικά ως επόμενο βήμα, όχι ως αφετηρία.

1.7 Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Κλασική πιθανότητα: Έστω Ω πεπερασμένος χώρος δειγμάτων με ισοπίθανες εκβάσεις. Για γεγονός $A \subseteq \Omega$, ορίζουμε

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Ο ορισμός αυτός εκφράζει με μαθηματικό τρόπο την ιδέα της συμμετρίας και αποτελεί το σημείο εκκίνησης για τα περισσότερα κλασικά προβλήματα διακριτής πιθανοθεωρίας.

1.7.1 Συμμετρία και ισοπιθανότητα

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας βασίζεται στην υπόθεση της ισοπιθανότητας των στοιχειωδών εκβάσεων. Η υπόθεση αυτή δεν είναι πάντοτε αυτονόητη, αλλά προκύπτει από συμμετρίες του πειράματος.

Στη ρίψη ενός δίκαιου νομίσματος, η συμμετρία των όψεων δικαιολογεί την απόδοση ίσων πιθανοτήτων. Αντίθετα, σε πιο σύνθετα πειράματα, η αναγνώριση των συμμετριών αποτελεί ουσιώδες βήμα για τον σωστό ορισμό του πιθανοτικού μοντέλου.

Η παρατήρηση αυτή τονίζει ότι η πιθανότητα δεν ορίζεται ανεξάρτητα από το φυσικό ή αφηρημένο πείραμα που μελετάται.

1.8 Σχέσεις μεταξύ γεγονότων

Το παρόν κεφάλαιο θέτει τη γλώσσα και τα βασικά εργαλεία της διακριτής πιθανοθεωρίας. Οι έννοιες του χώρου δειγμάτων, των γεγονότων και της πιθανότητας θα αποτελέσουν το υπόβαθρο για τη συνδυαστική ανάλυση και τα στοχαστικά μοντέλα που αναπτύσσονται στα επόμενα κεφάλαια.

Ασυμβίβαστα γεγονότα: Δύο γεγονότα $A, B \subseteq \Omega$ λέγονται *ασυμβίβαστα* (ή *ξένα*) αν $A \cap B = \emptyset$.

Βασικές ιδιότητες των πράξεων: Για γεγονότα $A, B, C \subseteq \Omega$ ισχύουν:

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ και αναλόγως για $\cap$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. (Νόμοι De Morgan) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Οι αποδείξεις είναι τυπικές και στηρίζονται στις αντίστοιχες ιδιότητες των πράξεων συνόλων. Για παράδειγμα, για τον πρώτο νόμο De Morgan, έχουμε: $\omega \in (A \cup B)^c$ αν και μόνο αν $\omega \notin A \cup B$, δηλαδή $\omega \notin A$ και $\omega \notin B$, ισοδύναμα $\omega \in A^c \cap B^c$.

1.8.1 Γεγονότα και λογική δομή

Η περιγραφή γεγονότων μέσω πράξεων συνόλων αντικατοπτρίζει τη λογική δομή των ερωτημάτων που τίθενται σε ένα τυχαίο πείραμα.

Η ένωση γεγονότων αντιστοιχεί στο λογικό «ή», ενώ η τομή στο λογικό «και». Το συμπλήρωμα εκφράζει την άρνηση ενός γεγονότος. Η αντιστοιχία αυτή καθιστά την πιθανοθεωρία στενά συνδεδεμένη με τη λογική ανάλυση.

Η κατανόηση της δομής αυτής είναι κρίσιμη για την αποφυγή συνηθισμένων λαθών σε προβλήματα πιθανοτήτων.

1.9 Όρια του κλασικού ορισμού της πιθανότητας

Παρά τη χρησιμότητά του, ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας παρουσιάζει περιορισμούς. Απαιτεί πεπερασμένο χώρο δειγμάτων και αυστηρή ισοπιθανότητα, υποθέσεις που δεν ισχύουν σε όλα τα προβλήματα.

Η ανάγκη γενίκευσης του ορισμού αυτού οδήγησε ιστορικά σε πιο αφηρημένες θεωρήσεις της πιθανότητας. Ωστόσο, στο πλαίσιο της διακριτής πιθανοθεωρίας και ειδικά στην προσέγγιση του Feller, ο κλασικός ορισμός διατηρεί κεντρική σημασία, καθώς αναδεικνύει τη συνδυαστική φύση των πιθανοτήτων.

Οι έννοιες που αναπτύχθηκαν στο παρόν κεφάλαιο αποτελούν το θεμέλιο για τη μελέτη των διακριτών πιθανοτικών μοντέλων. Στο επόμενο κεφάλαιο, η συνδυαστική ανάλυση θα λειτουργήσει ως βασικό εργαλείο υπολογισμού πιθανοτήτων, γεφυρώνοντας τη στατική περιγραφή με τη δυναμική στοχαστική συμπεριφορά.

Κεφάλαιο 2

Συνδυαστική Ανάλυση και Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού(Inclusion-Exclusion)

2.1 Εισαγωγή στη συνδυαστική ανάλυση

Η συνδυαστική ανάλυση αποτελεί έναν από τους βασικούς πυλώνες της διακριτής μαθηματικής ανάλυσης και διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της πιθανοθεωρίας. Στόχος της είναι η απαρίθμηση διακριτών δομών και η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο σύνθετα σύνολα και γεγονότα μπορούν να αναλυθούν μέσω απλών κανόνων μέτρησης.

Στην πιθανοθεωρία, η συνδυαστική προσέγγιση εμφανίζεται φυσικά όταν ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένος και οι εκβάσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Σε αυτή την περίπτωση, ο υπολογισμός πιθανοτήτων ανάγεται άμεσα σε πρόβλημα απαρίθμησης.

2.2 Βασικές αρχές απαρίθμησης

Οι βασικές αρχές απαρίθμησης αποτελούν το θεμέλιο της συνδυαστικής ανάλυσης και χρησιμοποιούνται εκτενώς στη διακριτή πιθανοθεωρία. Οι δύο σημαντικότερες αρχές είναι η Αρχή του Γινομένου και η Αρχή του Αθροίσματος, οι οποίες, παρά την απλότητά τους, κρύβουν σημαντικές εννοιολογικές προϋποθέσεις.

2.2.1 Η Αρχή του Γινομένου

Η Αρχή του Γινομένου αναφέρεται σε διαδικασίες που εκτελούνται σε διαδοχικά στάδια. Αν μια διαδικασία αποτελείται από k διαδοχικά βήματα, όπου το πρώτο μπορεί να πραγματοποιηθεί με n_1 τρόπους, το δεύτερο με n_2 τρόπους, και γενικότερα το i -οστό βήμα με n_i τρόπους, τότε η συνολική διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με

$$n_1 n_2 \cdots n_k$$

διαφορετικούς τρόπους.

Η ουσία της αρχής έγκειται στο γεγονός ότι κάθε επιλογή στο πρώτο στάδιο μπορεί να συνδυαστεί με κάθε επιλογή του δεύτερου, και ούτω καθεξής, χωρίς περιορισμούς μεταξύ των σταδίων.

Παράδειγμα

Έστω ότι ένας κωδικός ασφαλείας αποτελείται από ένα γράμμα της λατινικής αλφαβήτου και έναν μονοψήφιο αριθμό. Το γράμμα μπορεί να επιλεγεί με 26 τρόπους και ο αριθμός με 10 τρόπους. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός διαφορετικών κωδικών είναι

$$26 \cdot 10 = 260.$$

Σχόλιο

Η Αρχή του Γινομένου εφαρμόζεται μόνο όταν τα στάδια της διαδικασίας είναι διακριτά και διαδοχικά. Σε προβλήματα όπου οι επιλογές αλληλεξαρτώνται ή δεν υπάρχει σαφής διάκριση σταδίων, η απλή εφαρμογή της αρχής μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

Η Αρχή του Γινομένου δεν αποτελεί απλώς έναν τεχνικό κανόνα απαρίθμησης. Αποτυπώνει τη βασική ιδέα ότι πολύπλοκα αποτελέσματα μπορούν να αναλυθούν ως διαδοχικές ανεξάρτητες επιλογές.

Η ίδια ιδέα εμφανίζεται επανειλημμένα στη διακριτή πιθανοθεωρία, ιδιαίτερα στη μελέτη επαναλαμβανόμενων πειραμάτων, όπου κάθε στάδιο αντιστοιχεί σε μία ανεξάρτητη δοκιμή. Η παρατήρηση αυτή προετοιμάζει τη μετάβαση από τη συνδυαστική απαρίθμηση στη μελέτη στοχαστικών διαδικασιών.

2.3 Συνδυαστική ανεξαρτησία

Πριν την εισαγωγή της έννοιας της ανεξαρτησίας στην πιθανοθεωρία, εμφανίζεται μια αντίστοιχη έννοια σε καθαρά συνδυαστικό επίπεδο. Δύο διαδικασίες επιλογής λέγονται συνδυαστικά ανεξάρτητες όταν ο αριθμός των δυνατών κοινών εκβάσεων τους ισούται με το γινόμενο των επιμέρους πληθικотήτων.

Η έννοια αυτή αποτελεί τη δομική βάση της Αρχής του Γινομένου και προετοιμάζει τον πιθανοθεωρητικό ορισμό της ανεξαρτησίας, ο οποίος θα εισαχθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

2.3.1 Η Αρχή του Αθροίσματος

Η Αρχή του Αθροίσματος αναφέρεται σε διαδικασίες που μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσω εναλλακτικών και ασυμβίβαστων επιλογών. Αν μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με n τρόπους είτε με m τρόπους, και οι δύο περιπτώσεις δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα, τότε ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι

$$n + m.$$

Η κρίσιμη προϋπόθεση της αρχής αυτής είναι η αμοιβαία αποκλειστικότητα των περιπτώσεων. Η παράβλεψη της προϋπόθεσης αυτής αποτελεί συχνό σφάλμα στη συνδυαστική ανάλυση.

Παράδειγμα

Έστω ότι ένας φοιτητής μπορεί να επιλέξει είτε ένα μάθημα μαθηματικών από 5 διαθέσιμες επιλογές είτε ένα μάθημα φυσικής από 4 διαθέσιμες επιλογές, και δεν επιτρέπεται η ταυτόχρονη επιλογή και των δύο. Τότε, ο συνολικός αριθμός επιλογών είναι

$$5 + 4 = 9.$$

Πότε αποτυγχάνει η Αρχή του Αθροίσματος

Αν οι περιπτώσεις δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, η απλή άθροιση οδηγεί σε διπλή καταμέτρηση. Στην περίπτωση αυτή, η Αρχή του Αθροίσματος πρέπει να τροποποιηθεί, γεγονός που οδηγεί φυσικά στην Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού.

Η μετάβαση αυτή αποτελεί ένα από τα βασικά κίνητρα για την εισαγωγή της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού στη συνδυαστική και πιθανοθεωρητική ανάλυση.

2.4 Το πρόβλημα της διπλής καταμέτρησης

Η διπλή καταμέτρηση αποτελεί ένα από τα βασικότερα εννοιολογικά προβλήματα της συνδυαστικής ανάλυσης και εμφανίζεται όταν επιχειρούμε να υπολογίσουμε το πλήθος ενός συνόλου μέσω της ένωσης επιμέρους συνόλων με απλή άθροιση.

Το πρόβλημα αυτό αναδεικνύει τα όρια της Αρχής του Αθροίσματος και λειτουργεί ως βασικό κίνητρο για την εισαγωγή της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού.

2.4.1 Ένα απλό ενδεικτικό παράδειγμα

Έστω ένα σύνολο φοιτητών και θεωρούμε τα σύνολα A και B , όπου A είναι το σύνολο των φοιτητών που παρακολουθούν ένα μάθημα Μαθηματικών και B το σύνολο των φοιτητών που παρακολουθούν ένα μάθημα Φυσικής.

Αν $|A| = 40$ και $|B| = 30$, η απλή εφαρμογή της Αρχής του Αθροίσματος θα οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι $40 + 30 = 70$ φοιτητές παρακολουθούν τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα.

Ωστόσο, αν $|A \cap B| = 10$, τότε οι φοιτητές αυτοί έχουν μετρηθεί δύο φορές. Η υπερεκτίμηση αυτή είναι αποτέλεσμα της μη ασυμβίβαστης φύσης των συνόλων A και B .

2.4.2 Αναλυτική περιγραφή της υπερκαταμέτρησης

Η διπλή καταμέτρηση δεν αποτελεί απλώς τεχνικό σφάλμα, αλλά έχει βαθύτερη εννοιολογική σημασία. Κάθε στοιχείο που ανήκει ταυτόχρονα σε περισσότερα από ένα σύνολα συμμετέχει στον υπολογισμό πολλαπλές φορές.

Η απλή άθροιση των πληθών αγνοεί τη δομή των τομών και συνεπώς δεν μπορεί να αποδώσει σωστά το πλήθος της ένωσης. Η ανάγκη διόρθωσης καθίσταται αναπόφευκτη.

2.4.3 Η πρώτη διόρθωση: αφαίρεση της τομής

Για δύο σύνολα A και B , η φυσική διόρθωση συνίσταται στην αφαίρεση του πλήθους της τομής, οδηγώντας στον τύπο

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Η αφαίρεση αυτή εξασφαλίζει ότι κάθε στοιχείο που ανήκει και στα δύο σύνολα μετρίεται ακριβώς μία φορά.

2.4.4 Γιατί το πρόβλημα επιδεινώνεται σε περισσότερα σύνολα

Όταν ο αριθμός των συνόλων αυξάνεται, η διπλή καταμέτρηση δεν περιορίζεται πλέον σε απλές τομές δύο συνόλων. Στοιχεία που ανήκουν σε τρία ή περισσότερα σύνολα υφίστανται διαδοχικές υπερκαταμετρήσεις και διορθώσεις.

Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι η διόρθωση πρέπει να γίνεται συστηματικά και επαναληπτικά, γεγονός που οδηγεί φυσικά στη γενική μορφή της Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού.

2.4.5 Εννοιολογική σημασία

Το πρόβλημα της διπλής καταμέτρησης αναδεικνύει μια κεντρική ιδέα της συνδυαστικής και πιθανοθεωρητικής σκέψης: η δομή των συνόλων είναι εξίσου σημαντική με το πλήθος τους.

Η ανάγκη για ακριβή περιγραφή της αλληλεπικάλυψης αποτελεί το θεμέλιο πάνω στο οποίο οικοδομείται η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού (The Principle of Inclusion-Exclusion), η οποία παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

Η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού αναπτύχθηκε ακριβώς για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος.

2.5 Διατεταγμένα δείγματα (Ordered Samples)

Η έννοια των διατεταγμένων δειγμάτων αποτελεί βασικό στοιχείο της συνδυαστικής ανάλυσης και εμφανίζεται φυσικά σε προβλήματα όπου η σειρά επιλογής των στοιχείων παίζει καθοριστικό ρόλο. Σε αντίθεση με τις απλές επιλογές, όπου το σύνολο των επιλεγμένων στοιχείων είναι το μόνο που έχει σημασία, στα διατεταγμένα δείγματα διαφορετικές διατάξεις των ίδιων στοιχείων θεωρούνται διαφορετικά αποτελέσματα.

2.5.1 Διατεταγμένες επιλογές χωρίς επανάληψη

Έστω ότι διαθέτουμε ένα σύνολο n διακριτών στοιχείων και επιθυμούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία k στοιχείων χωρίς επανάληψη, λαμβάνοντας υπόψη τη σειρά. Η επιλογή αυτή πραγματοποιείται σε k διαδοχικά στάδια. Στο πρώτο στάδιο υπάρχουν n δυνατές επιλογές, στο δεύτερο $n-1$, και γενικότερα στο i -οστό στάδιο υπάρχουν $n-i+1$ επιλογές.

Εφαρμόζοντας την Αρχή του Γινομένου, ο συνολικός αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων δίνεται από

$$n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Η ποσότητα αυτή είναι γνωστή ως αριθμός των μεταθέσεων k στοιχείων από n στοιχεία.

2.5.2 Διατεταγμένες επιλογές με επανάληψη

Σε πολλές εφαρμογές, η επανάληψη των επιλογών επιτρέπεται. Στην περίπτωση αυτή, κάθε στάδιο επιλογής έχει πάντοτε n δυνατές επιλογές. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων μήκους k είναι

$$n^k.$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί άμεση εφαρμογή της Αρχής του Γινομένου και εμφανίζεται συχνά στη μελέτη επαναλαμβανόμενων πειραμάτων, όπως οι διαδοχικές ρίψεις νομίσματος ή ζαριού.

2.5.3 Σχέση με πιθανοθεωρητικά μοντέλα

Η έννοια των διατεταγμένων δειγμάτων είναι κεντρική στη διακριτή πιθανοθεωρία, καθώς τα περισσότερα πιθανοθεωρητικά μοντέλα βασίζονται σε ακολουθίες εκβάσεων. Για παράδειγμα, στο πείραμα των n ρίψεων νομίσματος, κάθε δυνατή ακολουθία αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο δείγμα μήκους n , γεγονός που οδηγεί σε δειγματικό χώρο με 2^n στοιχεία.

Η παρατήρηση αυτή καθιστά σαφή τη στενή σχέση μεταξύ της συνδυαστικής ανάλυσης και των πιθανοθεωρητικών μοντέλων, η οποία θα αναδειχθεί περαιτέρω στα επόμενα κεφάλαια.

2.6 Υποπληθυσμοί και διαμερίσεις

Πολλά προβλήματα της συνδυαστικής ανάλυσης αφορούν την κατανομή ενός πληθυσμού σε υποσύνολα ή τη διαμέρισή του σε διακριτές κατηγορίες. Οι έννοιες των υποπληθυσμών και των διαμερίσεων εμφανίζονται φυσικά τόσο σε καθαρά συνδυαστικά προβλήματα όσο και σε πιθανοθεωρητικές εφαρμογές.

2.6.1 Υποπληθυσμοί και επιλογές

Έστω ένας πληθυσμός που αποτελείται από n άτομα. Η επιλογή ενός υποπληθυσμού k ατόμων αντιστοιχεί στον υπολογισμό του πλήθους των k -υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, δηλαδή στον διωνυμικό συντελεστή

$$\binom{n}{k}.$$

Η ποσότητα αυτή εκφράζει τον αριθμό των δυνατών υποπληθυσμών και εμφανίζεται εκτενώς στη στατιστική δειγματοληψία και στη διακριτή πιθανοθεωρία.

2.6.2 Διαμερίσεις πληθυσμών

Πέρα από την επιλογή ενός μόνο υποπληθυσμού, συχνά ενδιαφερόμαστε για τη διαμέριση ενός συνόλου σε περισσότερα υποσύνολα, ενδεχομένως με συγκεκριμένα μεγέθη. Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται στη μελέτη πληθυσμιακών ομάδων, στην κατανομή αντικειμένων και στη θεωρία κατανομών.

Οι διαμερίσεις δεν λαμβάνουν υπόψη τη σειρά των υποσυνόλων, αλλά μόνο τη δομή της κατανομής. Η διάκριση αυτή είναι ουσιώδης, καθώς διαφορετικές διατάξεις της ίδιας διαμέρισης θεωρούνται ισοδύναμες.

2.6.3 Σχέση με τα προβλήματα πληρότητας

Τα προβλήματα πληρότητας (occupancy problems), που θα εξεταστούν στην επόμενη ενότητα, μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις διαμερίσεων, όπου αντικείμενα κατανέμονται σε διακριτά κουτιά. Η ανάλυση των υποπληθυσμών και των διαμερίσεων παρέχει το θεωρητικό υπόβαθρο για τη συστηματική αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων.

2.6.4 Εννοιολογική σημασία

Η μελέτη των υποπληθυσμών και των διαμερίσεων αναδεικνύει τη σημασία της δομής σε συνδυαστικά προβλήματα. Η διάκριση μεταξύ διατεταγμένων και μη διατεταγμένων κατανομών, καθώς και η κατανόηση των ισοδυναμιών μεταξύ διαφορετικών περιπτώσεων, αποτελούν βασικά εργαλεία για τη μετάβαση σε πιο σύνθετα πιθανοθεωρητικά μοντέλα.

2.7 Όρια της απλής απαρίθμησης

Η απλή εφαρμογή των βασικών αρχών απαρίθμησης δεν είναι πάντοτε επαρκής. Σε προβλήματα όπου οι δομές αλληλεπικαλύπτονται, η απαρίθμηση μέσω άθροισης ή γινομένου οδηγεί σε συστηματικά σφάλματα.

Η παρατήρηση αυτή αναδεικνύει την ανάγκη ενός μηχανισμού διόρθωσης, ο οποίος να λαμβάνει υπόψη τη δομή των τομών. Η ανάγκη αυτή οδηγεί φυσικά στην Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού.

2.8 Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού(The principle of Inclusion-Exclusion)

Για δύο πεπερασμένα σύνολα A και B ισχύει

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Η αφαίρεση του κοινού μέρους διορθώνει τη διπλή καταμέτρηση που προκύπτει από την απλή άθροιση.

Για τρία σύνολα A, B, C έχουμε

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

2.9 Γενική μορφή Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού

Για n σύνολα $A_1, \dots, A_n$, η γενική μορφή δίνεται από

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Εναλλακτική διατύπωση

Η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού(The principle of Inclusion-Exclusion) μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Η μορφή αυτή καθιστά σαφή τη δομή της εναλλαγής προσήμων και αναδεικνύει τον ρόλο των τομών διαφορετικών τάξεων.

2.10 Απόδειξη της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού

Η απόδειξη βασίζεται στην εξέταση της συνεισφοράς κάθε στοιχείου στο δεξί μέλος του τύπου της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού. Έστω ένα στοιχείο x , το οποίο ανήκει σε ακριβώς k από τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Στο πρώτο άθροισμα, όπου προστίθενται τα πλήθη των μεμονωμένων συνόλων, το στοιχείο x μετράται

$$\binom{k}{1} = k$$

φορές.

Στη συνέχεια αφαιρούνται οι ανά δύο τομές. Από τα k σύνολα στα οποία ανήκει το x , μπορούν να επιλεγούν δύο με

$$\binom{k}{2}$$

τρόπους. Επομένως, το x αφαιρείται $\binom{k}{2}$ φορές.

Αντίστοιχα, στις ανά τρία τομές το x εμφανίζεται σε

$$\binom{k}{3}$$

τομές και συνεπώς προστίθεται ξανά τόσες φορές. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, η συνολική συνεισφορά του x είναι

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}.$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα, χρησιμοποιούμε τη διωνυμική ταυτότητα

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} = (1-1)^k = 0.$$

Επειδή ο όρος που αντιστοιχεί στο $r = 0$ είναι

$$\binom{k}{0} = 1,$$

προκύπτει ότι

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0.$$

Επομένως,

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1.$$

Άρα, κάθε στοιχείο που ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα μετράται τελικά ακριβώς μία φορά. Αντίθετα, ένα στοιχείο που δεν ανήκει σε κανένα από τα σύνολα δεν εμφανίζεται σε κανέναν όρο και επομένως δεν μετράται καθόλου. Συνεπώς, το δεξί μέλος του τύπου μετρά ακριβώς τα στοιχεία της ένωσης

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

γεγονός που αποδεικνύει την Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού.

Για παράδειγμα, αν ένα στοιχείο ανήκει σε ακριβώς τρία σύνολα, τότε η συνολική συνεισφορά του είναι

$$\binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Πράγματι, αρχικά το στοιχείο μετράται τρεις φορές, στη συνέχεια αφαιρείται τρεις φορές μέσω των ανά δύο τομών και, τέλος, προστίθεται μία φορά μέσω της τριπλής τομής. Έτσι, τελικά μετράται ακριβώς μία φορά.

2.11 Η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού ως αναδρομικός μηχανισμός

Η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού μπορεί να ιδωθεί ως αναδρομικός μηχανισμός διόρθωσης υπερκαταμετρήσεων. Κάθε νέος όρος του τύπου διορθώνει μια υπερεκτίμηση που εισήχθη από τους προηγούμενους όρους.

Η εναλλαγή προσήμων δεν είναι τυχαία, αλλά εκφράζει τη διαδοχική προσθήκη και αφαίρεση επικαλύψεων αυξανόμενης τάξης.

2.11.1 Πιθανοθεωρητική διατύπωση της Αρχής Εγκλεισμού–Αποκλεισμού

Η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού δεν περιορίζεται στον υπολογισμό πληθικотήτων, αλλά μεταφέρεται αυτούσια στο πλαίσιο της πιθανοθεωρίας. Για γεγονότα $A_1, \dots, A_n$ ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου, ισχύει

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Η μορφή αυτή δείχνει ότι η Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού δεν αποτελεί ανεξάρτητο εργαλείο της πιθανοθεωρίας, αλλά φυσική συνέπεια της συνδυαστικής δομής του δειγματικού χώρου.

Η διατύπωση αυτή αποτελεί βασικό σύνδεσμο μεταξύ της στατικής απαρίθμησης και των πιθανοθεωρητικών μοντέλων που εξετάζονται στα επόμενα κεφάλαια.

Το παρόν κεφάλαιο παρείχε τα βασικά συνδυαστικά εργαλεία που απαιτούνται για τη μελέτη διακριτών πιθανοθεωρητικών μοντέλων. Στα επόμενα κεφάλαια, τα εργαλεία αυτά θα εφαρμοστούν σε συγκεκριμένες κατανομές και προβλήματα, όπου η τυχαιότητα εκδηλώνεται μέσω στοχαστικών μηχανισμών.

Κεφάλαιο 3

Κλασικά Διακριτά Πιθανοθεωρητικά Μοντέλα

3.1 Στόχος και θέση του κεφαλαίου

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται κλασικά διακριτά πιθανοθεωρητικά μοντέλα τα οποία προκύπτουν άμεσα από τη συνδυαστική ανάλυση που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Η έμφαση δίνεται σε μοντέλα με δύο δυνατές εκβάσεις, καθώς και σε δειγματοληψία με ή χωρίς επανάθεση.

Η φιλοσοφία που ακολουθείται είναι η χαρακτηριστική προσέγγιση του Feller: πρώτα περιγράφεται ο δειγματικός χώρος και η συνδυαστική του δομή, και στη συνέχεια εισάγονται οι πιθανότητες ως φυσική κανονικοποίηση των δυνατών εκβάσεων.

3.2 Η δοκιμή Bernoulli

3.2.1 Ορισμός και ερμηνεία

Θεωρούμε ένα πείραμα με δύο δυνατές εκβάσεις, τις οποίες ονομάζουμε *επιτυχία* και *αποτυχία*. Αν η πιθανότητα επιτυχίας είναι $p \in (0, 1)$, η πιθανότητα αποτυχίας είναι $q = 1 - p$.

Τυχαία μεταβλητή Bernoulli Η τυχαία μεταβλητή X λέγεται *Bernoulli* με παράμετρο p αν

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = q.$$

Η μεταβλητή X αποτελεί το απλούστερο μοντέλο τυχαιότητας και λειτουργεί ως δομικό στοιχείο για πιο σύνθετες κατανομές.

3.2.2 Ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών

Θεωρούμε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $X_1, \dots, X_n$ με κοινή παράμετρο p . Ο δειγματικός χώρος περιγράφεται ως

$$\Omega = \{0, 1\}^n,$$

δηλαδή ως σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών μήκους n . Κάθε στοιχειώδης έκβαση $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ έχει πιθανότητα

$$\mathbb{P}(\omega) = p^{\#\{\omega_i=1\}} q^{\#\{\omega_i=0\}}.$$

3.3 Η διωνυμική κατανομή(Binomial Distribution)

3.3.1 Ορισμός και συνδυαστική προέλευση

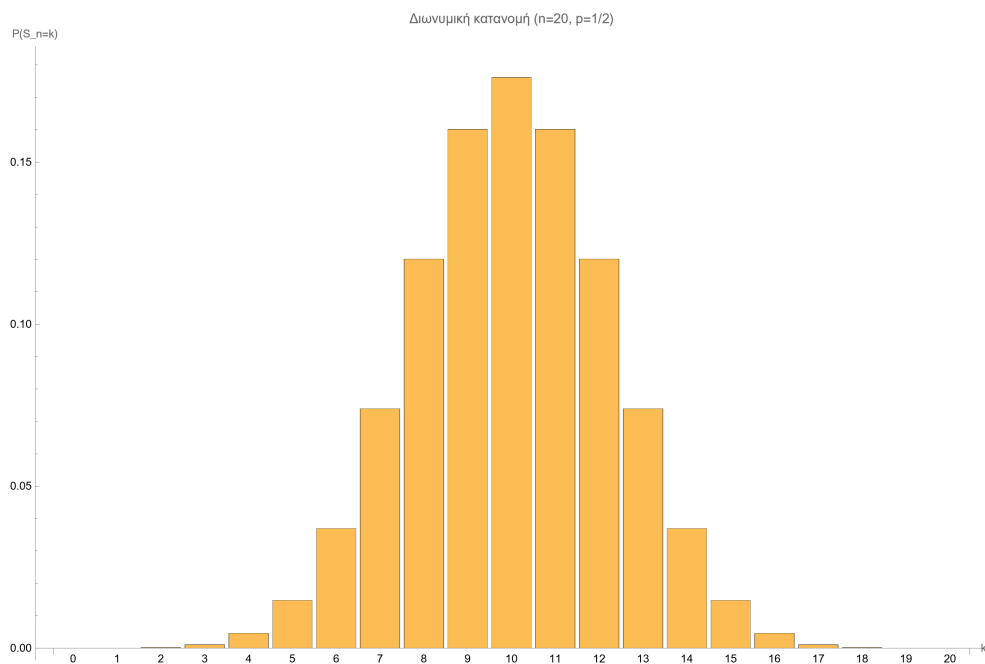
Θέτουμε

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

όπου S_n εκφράζει το πλήθος επιτυχιών σε n δοκιμές Bernoulli.

3.4 Η διωνυμική κατανομή

Το πλήθος επιτυχιών σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές Bernoulli περιγράφεται από τη διωνυμική κατανομή, η οποία αποτελεί θεμελιώδες πρότυπο στη διακριτή πιθανοθεωρία.



Σχήμα 3.1: Διωνυμική κατανομή για $n = 20$ και $p = 1/2$.

Διωνυμική κατανομή: Λέμε ότι S_n ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p) και γράφουμε $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$.

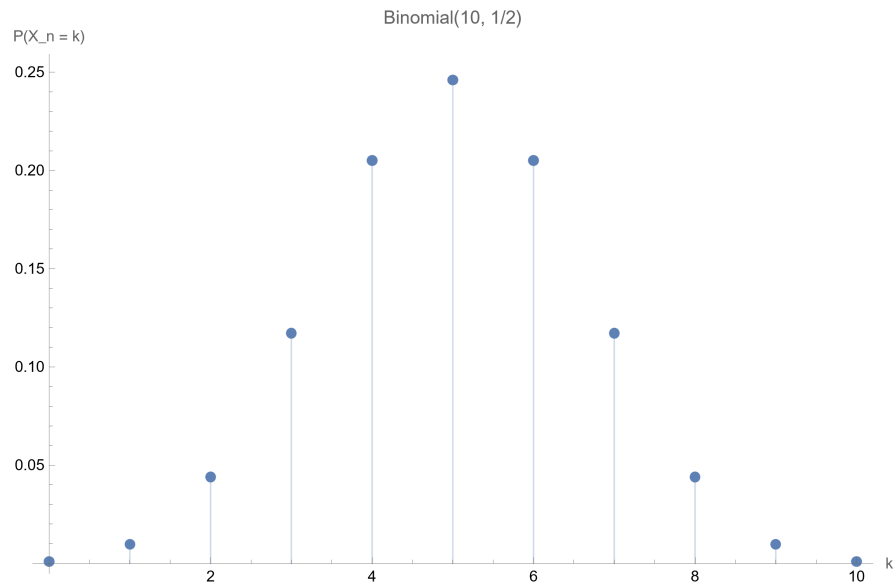
Το γεγονός $\{S_n = k\}$ αντιστοιχεί στο σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών μήκους n με ακριβώς k άσους. Το πλήθος τους είναι $\binom{n}{k}$, και κάθε τέτοια ακολουθία έχει πιθανότητα $p^k q^{n-k}$. Συνεπώς,

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

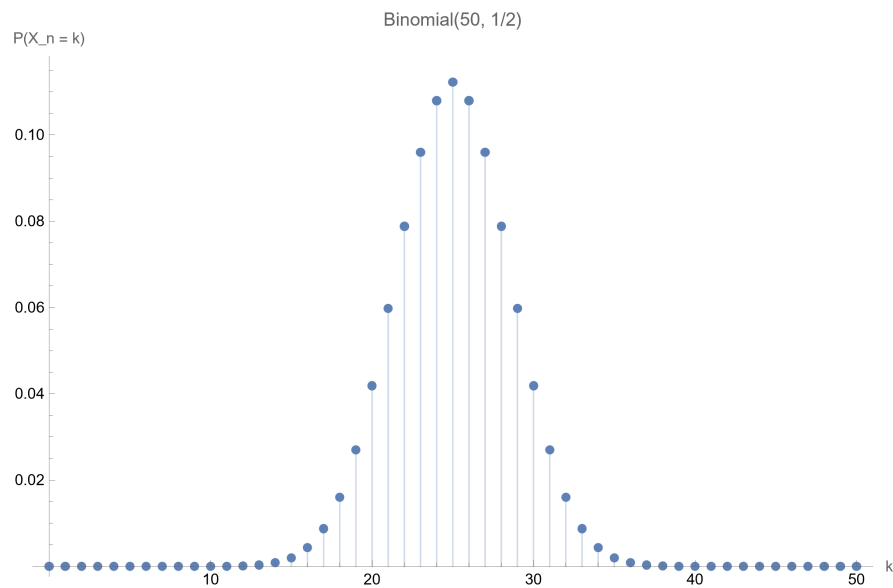
3.4.1 Γραφική απεικόνιση της διωνυμικής κατανομής για διαφορετικά n

Για $X_n \sim \text{Bin}(n, 1/2)$, η κατανομή $P(X_n = k)$ συγκεντρώνεται γύρω από $k = n/2$ καθώς το n μεγαλώνει. Η συγκέντρωση αυτή, η οποία εξηγείται ασυμπτωτικά μέσω Stirling

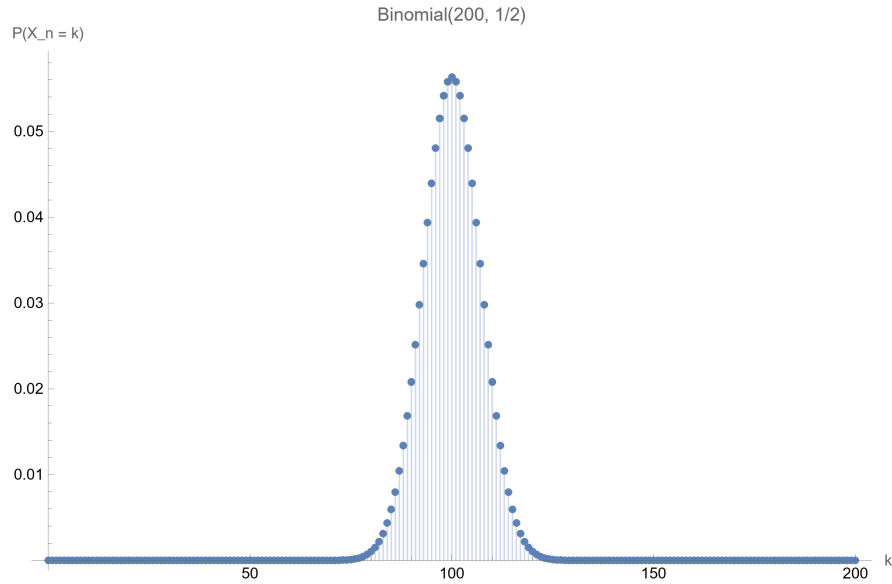
(βλ. προηγούμενο παράδειγμα), αποτυπώνεται καθαρά στα παρακάτω γραφήματα: οι πιθανότητες για τιμές k μακριά από το $n/2$ γίνονται πολύ μικρές, ενώ η μάζα της κατανομής «στενεύει» σχετικά γύρω από την κεντρική περιοχή.



Σχήμα 3.2: Διωνυμική κατανομή Bin(10, 1/2).



Σχήμα 3.3: Διωνυμική κατανομή Bin(50, 1/2).



Σχήμα 3.4: Διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(200, 1/2)$.

3.4.2 Μέση τιμή και διακυμάνσεις

Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X εκφράζει τη μέση τιμή γύρω από την οποία αναμένεται να συγκεντρώνονται οι πραγματοποιήσεις της σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Ορίζεται ως

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \mathbb{P}(X = x),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις δυνατές τιμές της X .

Στην περίπτωση των δοκιμών Bernoulli, αν X_i είναι η μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 σε περίπτωση επιτυχίας και την τιμή 0 σε περίπτωση αποτυχίας, τότε

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

όπου $q = 1 - p$.

Εφόσον

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής προκύπτει

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = np.$$

Επομένως,

$$\boxed{\mathbb{E}[S_n] = np}.$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p , ο αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών είναι np . Για τη μέτρηση των διακυμάνσεων, ο Feller χρησιμοποιεί τη μέση τετραγωνική απόκλιση:

$$\mathbb{E}[(S_n - np)^2] = npq.$$

Η ποσότητα αυτή εκφράζει το μέτρο των διακυμάνσεων του πλήθους επιτυχιών γύρω από τη μέση τιμή.

3.4.3 Αναδρομική δομή

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$\mathbb{P}(S_n = k) = q \mathbb{P}(S_{n-1} = k) + p \mathbb{P}(S_{n-1} = k-1),$$

η οποία έχει σαφή πιθανοθεωρητική ερμηνεία μέσω της τελευταίας δοκιμής.

3.5 Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση: η υπεργεωμετρική κατανομή

Η υπεργεωμετρική κατανομή εμφανίζεται σε προβλήματα δειγματοληψίας χωρίς επανάθεση και αποτελεί το φυσικό πιθανοθεωρητικό μοντέλο των προβλημάτων τύπου κάλ-πης ή υποπληθυσμού.

Έστω ένας πληθυσμός μεγέθους N , ο οποίος περιέχει M στοιχεία τύπου «επιτυχία» και $N - M$ στοιχεία τύπου «αποτυχία». Επιλέγουμε τυχαία, χωρίς επανάθεση, ένα δείγμα μεγέθους n .

Ορίζουμε τυχαία μεταβλητή X ως τον αριθμό των επιτυχιών στο δείγμα.

3.5.1 Συνδυαστική παραγωγή της κατανομής

Συνδυαστική παραγωγή της κατανομής

Για να προσδιορίσουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X , θεωρούμε έναν πληθυσμό N στοιχείων, από τα οποία τα M χαρακτηρίζονται ως «επιτυχίες» και τα υπόλοιπα $N - M$ ως «αποτυχίες». Επιλέγουμε τυχαία, χωρίς επανάθεση, ένα δείγμα μεγέθους n και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως τον αριθμό των επιτυχιών που περιέχονται στο δείγμα.

Για να συμβεί το γεγονός $X = k$, το δείγμα πρέπει να περιέχει ακριβώς k επιτυχίες και, αφού το συνολικό μέγεθος του δείγματος είναι n , ακριβώς $n - k$ αποτυχίες.

Οι k επιτυχίες μπορούν να επιλεγούν από τις M διαθέσιμες με

$$\binom{M}{k}$$

διαφορετικούς τρόπους. Αντίστοιχα, οι $n - k$ αποτυχίες μπορούν να επιλεγούν από τις $N - M$ διαθέσιμες με

$$\binom{N-M}{n-k}$$

τρόπους.

Κάθε επιλογή k επιτυχιών μπορεί να συνδυαστεί με οποιαδήποτε επιλογή $n - k$ αποτυχιών. Επομένως, από την αρχή του γινομένου, ο αριθμός των δειγμάτων μεγέθους n που περιέχουν ακριβώς k επιτυχίες είναι

$$\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}.$$

Από την άλλη πλευρά, ένα οποιοδήποτε δείγμα n στοιχείων μπορεί να επιλεγεί από τον συνολικό πληθυσμό των N στοιχείων με

$$\binom{N}{n}$$

τρόπους. Εφόσον η δειγματοληψία είναι τυχαία, όλα τα δείγματα μεγέθους n θεωρούνται ισοπίθανα. Συνεπώς, η πιθανότητα του γεγονότος $X = k$ προκύπτει ως ο λόγος των ευνοϊκών δειγμάτων προς το σύνολο των δυνατών δειγμάτων:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Μένει να προσδιοριστούν οι δυνατές τιμές του k . Προφανώς, ο αριθμός των επιτυχιών δεν μπορεί να είναι αρνητικός και δεν μπορεί να υπερβαίνει ούτε το μέγεθος n του δείγματος ούτε τον συνολικό αριθμό M των διαθέσιμων επιτυχιών. Επομένως,

$$k \leq \min\{n, M\}.$$

Παράλληλα, επειδή στο δείγμα υπάρχουν $n - k$ αποτυχίες και στον πληθυσμό υπάρχουν συνολικά $N - M$ αποτυχίες, πρέπει να ισχύει

$$n - k \leq N - M.$$

Άρα,

$$k \geq n - (N - M).$$

Επειδή επίσης $k \geq 0$, παίρνουμε τελικά

$$\max\{0, n - (N - M)\} \leq k \leq \min\{n, M\}.$$

Επομένως,

$$k = \max\{0, n - (N - M)\}, \dots, \min\{n, M\}.$$

Η κατανομή αυτή ονομάζεται *υπεργεωμετρική κατανομή* και συμβολίζεται ως

$$X \sim \text{Hypergeometric}(N, M, n).$$

Η βασική ιδέα της υπεργεωμετρικής κατανομής είναι ότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται χωρίς επανάθεση. Έτσι, μετά από κάθε επιλογή μεταβάλλεται η σύνθεση του πληθυσμού που απομένει και, κατά συνέπεια, μεταβάλλεται και η πιθανότητα επιτυχίας στις επόμενες επιλογές.

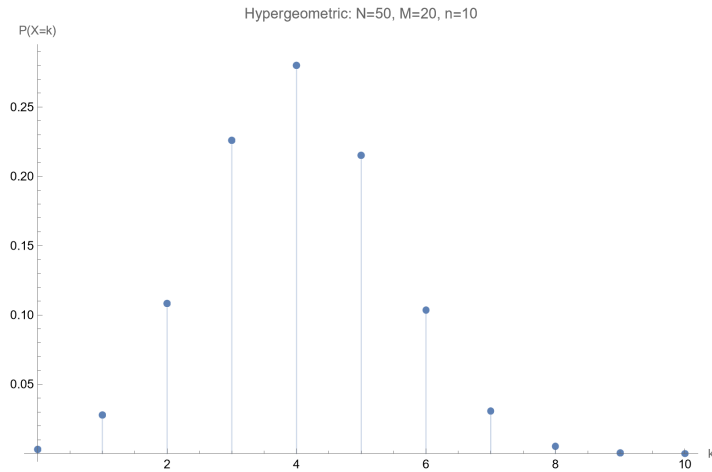
3.5.2 Σχέση με τη διωνυμική κατανομή

Σε αντίθεση με τη διωνυμική κατανομή, η υπεργεωμετρική δεν προϋποθέτει ανεξαρτησία των δοκιμών. Η αφαίρεση στοιχείων από τον πληθυσμό μεταβάλλει τις πιθανότητες στις επόμενες επιλογές.

Όταν όμως ο πληθυσμός N είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με το δείγμα n , η υπεργεωμετρική κατανομή προσεγγίζεται καλά από τη διωνυμική, γεγονός που εξηγεί τη συχνή χρήση της τελευταίας ως μοντέλου προσέγγισης.

3.5.3 Απεικόνιση της υπεργεωμετρικής κατανομής

Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζεται η υπεργεωμετρική κατανομή για παραμέτρους $N = 50$, $M = 20$ και $n = 10$.



Σχήμα 3.5: Υπεργεωμετρική κατανομή για $N = 50$, $M = 20$, $n = 10$.

Η κατανομή είναι διακριτή και συγκεντρώνεται γύρω από την τιμή $\mathbb{E}[X] = n \frac{M}{N}$, η οποία εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό επιτυχιών στο δείγμα.

3.5.4 Το μοντέλο της κάλπης

Θεωρούμε πληθυσμό N αντικειμένων, εκ των οποίων M χαρακτηρίζονται ως επιτυχίες. Επιλέγουμε δείγμα μεγέθους n χωρίς επανάθεση. Αν X είναι το πλήθος επιτυχιών στο δείγμα, τότε X ακολουθεί υπεργεωμετρική κατανομή.

Υπεργεωμετρική κατανομή: Η τυχαία μεταβλητή X λέγεται υπεργεωμετρική με παραμέτρους (N, M, n) αν

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

3.5.5 Μέση τιμή και διακυμάνσεις

Μέση τιμή και μέση τετραγωνική απόκλιση

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε n επιλογές χωρίς επανάθεση από έναν πληθυσμό N στοιχείων, από τα οποία M είναι επιτυχίες.

Για κάθε επιλογή ορίζουμε

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστή επιλογή είναι επιτυχία,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Μέση τιμή. Για κάθε επιλογή ισχύει

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{M}{N},$$

αφού η πιθανότητα επιτυχίας είναι M/N .

Επομένως,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n],$$

και άρα

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = n \frac{M}{N}}.$$

Μέση τετραγωνική απόκλιση. Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Επειδή

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

έχουμε

$$X^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j.$$

Επειδή X_i παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, ισχύει

$$X_i^2 = X_i.$$

Άρα

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \frac{M}{N}.$$

Για δύο διαφορετικές επιλογές i και j , η πιθανότητα να είναι και οι δύο επιτυχίες είναι

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \frac{M}{N} \frac{M-1}{N-1}.$$

Υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη επιλογών. Επομένως,

$$\mathbb{E}[X^2] = n \frac{M}{N} + 2 \binom{n}{2} \frac{M}{N} \frac{M-1}{N-1}.$$

Επειδή

$$2 \binom{n}{2} = n(n-1),$$

παίρνουμε

$$\mathbb{E}[X^2] = n \frac{M}{N} + n(n-1) \frac{M(M-1)}{N(N-1)}.$$

Άρα

$$\text{Var}(X) = n \frac{M}{N} + n(n-1) \frac{M(M-1)}{N(N-1)} - \left(n \frac{M}{N} \right)^2.$$

Με απλοποίηση προκύπτει

$$\boxed{\text{Var}(X) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}}.$$

3.6 Σύγκριση διωνυμικής και υπεργεωμετρικής

Όταν N είναι πολύ μεγάλο και n μικρό σε σύγκριση με N , η εξάρτηση που προκαλεί η μη επανάθεση καθίσταται αμελητέα. Τότε, η υπεργεωμετρική κατανομή προσεγγίζεται από διωνυμική με παράμετρο $p = M/N$.

Η παρατήρηση αυτή αποτελεί βασική μεθοδολογική αρχή στη διακριτή πιθανοθεωρία.

3.7 Ο τύπος Stirling και ασυμπτωτική συμπεριφορά

Για μεγάλα n , ο τύπος Stirling δίνει

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Η χρήση του τύπου επιτρέπει την ανάλυση των διωνυμικών συντελεστών και δείχνει ότι η μάζα της διωνυμικής κατανομής συγκεντρώνεται γύρω από $k \approx np$, με χαρακτηριστική κλίμακα διακύμανσης τάξης $\sqrt{npq}$.

3.7.1 Ρόλος της συνδυαστικής ανάλυσης

Η απόδειξη του νόμου στη διακριτή περίπτωση βασίζεται στη διωνυμική κατανομή και στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των διωνυμικών συντελεστών. Η χρήση του τύπου του Stirling επιτρέπει την εκτίμηση των πιθανοτήτων απόκλισης και αναδεικνύει τον θεμελιώδη ρόλο της συνδυαστικής ανάλυσης στη μελέτη οριακών φαινομένων.

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών, για τον οποίο θα μιλήσουμε στο κεφάλαιο 5, αποτελεί κομβικό σημείο μετάβασης από ακριβείς συνδυαστικούς τύπους σε στοχαστικές κανονικότητες.

Παράδειγμα 3.3 (Χρήση του τύπου Stirling σε διωνυμικούς συντελεστές) Θεωρούμε n ανεξάρτητες ρίψεις ενός ισοπίθανου νομίσματος και X_n τον αριθμό των εμφανίσεων της Κεφαλής. Τότε

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Για μεγάλα n μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας όταν k βρίσκεται κοντά στο $n/2$.

Βήμα 1: Τύπος Stirling. Χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική προσέγγιση του Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Εφαρμόζοντάς τον στον διωνυμικό συντελεστή, παίρνουμε προσεγγιστικά

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi k}(k/e)^k \sqrt{2\pi(n-k)}((n-k)/e)^{n-k}}.$$

Απλοποιώντας τους παράγοντες e και ομαδοποιώντας τους όρους, προκύπτει η κλασική μορφή

$$\binom{n}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Βήμα 2: Η μέγιστη πιθανότητα επιτυχιών. Είναι γνωστό (και προκύπτει και από την παραπάνω έκφραση) ότι ο $\binom{n}{k}$ μεγιστοποιείται περίπου στο $k \simeq n/2$. Θεωρούμε για απλότητα n άρτιο και θέτουμε $k = n/2$. Τότε

$$\binom{n}{n/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(n/2)(n/2)}} \frac{n^n}{(n/2)^{n/2} (n/2)^{n/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n^2/4}} 2^n = \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}.$$

Άρα

$$P\left(X_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Συνεπώς, η πιθανότητα να πάρουμε ακριβώς $n/2$ επιτυχίες μειώνεται με ρυθμό τάξης $n^{-1/2}$.

Βήμα 3: Ποιοτικό συμπέρασμα (συγκέντρωση). Παρότι η πιθανότητα ενός ακριβούς πλήθους επιτυχιών (όπως $X_n = n/2$) τείνει στο μηδέν, οι διωνυμικές πιθανότητες παραμένουν συγκεντρωμένες σε τιμές k γύρω από το $n/2$, δηλαδή οι «μεγάλες αποκλίσεις» από το $n/2$ γίνονται ολοένα και σπανιότερες. Αυτό είναι ακριβώς το φαινόμενο που ποσοτικοποιεί ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών, ο οποίος αφορά τη συμπεριφορά της σχετικής συχνότητας $\frac{X_n}{n}$ για μεγάλα n .

Παράδειγμα 3.4 (Ασυμπτωτική εκτίμηση απόκλισης μέσω Stirling) Θεωρούμε n ανεξάρτητες ρίψεις ισοπίθανου νομίσματος και X_n τον αριθμό επιτυχιών (Κεφαλών). Τότε $X_n \sim \text{Bin}(n, 1/2)$ και

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} 2^{-n}.$$

Στόχος είναι να εκτιμήσουμε ασυμπτωτικά (ποιοτικά) την πιθανότητα μεγάλης απόκλισης

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \geq \varepsilon n\right), \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Βήμα 1: Εκτίμηση ενός όρου $P(X_n = k)$ για $k = (\frac{1}{2} + \delta)n$. Θέτουμε $\delta \in (0, 1/2)$ και $k = (\frac{1}{2} + \delta)n$ (για απλότητα θεωρούμε ότι k είναι ακέραιος). Με χρήση του τύπου Stirling

$$m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \quad (m \rightarrow \infty),$$

προκύπτει η κλασική ασυμπτωτική μορφή για τον διωνυμικό συντελεστή:

$$\binom{n}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \alpha(1-\alpha)}} \frac{1}{\alpha^{\alpha n} (1-\alpha)^{(1-\alpha)n}}, \quad \alpha = \frac{k}{n}.$$

Επομένως,

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} 2^{-n} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \alpha(1-\alpha)}} \exp\left(-n I(\alpha)\right),$$

όπου ο εκθέτης $I(\alpha)$ δίνεται από

$$I(\alpha) = \alpha \ln(2\alpha) + (1-\alpha) \ln(2(1-\alpha)), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Για $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$ έχουμε $I(\frac{1}{2} + \delta) > 0$ για κάθε $\delta \neq 0$, άρα οι πιθανότητες $P(X_n = k)$ για k σε γραμμική απόσταση από $n/2$ είναι εκθετικά μικρές ως προς n .

Βήμα 2: Από τον έναν όρο στην ουρά. Η πιθανότητα απόκλισης γράφεται ως άθροισμα διωνυμικών πιθανοτήτων:

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \geq \varepsilon n\right) = \sum_{k \leq (\frac{1}{2} - \varepsilon)n} P(X_n = k) + \sum_{k \geq (\frac{1}{2} + \varepsilon)n} P(X_n = k).$$

Κάθε άθροισμα περιλαμβάνει το πολύ $n + 1$ όρους. Επιπλέον, για $k \geq (\frac{1}{2} + \varepsilon)n$ ο εκθέτης $I(k/n)$ είναι τουλάχιστον $I(\frac{1}{2} + \varepsilon)$. Άρα, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Βήματος 1 και ένα «χονδρικό» άνω φράγμα, παίρνουμε ποιοτικά

$$\sum_{k \geq (\frac{1}{2} + \varepsilon)n} P(X_n = k) \lesssim (n + 1) \exp\left(-n I(\frac{1}{2} + \varepsilon)\right),$$

και ανάλογα

$$\sum_{k \leq (\frac{1}{2} - \varepsilon)n} P(X_n = k) \lesssim (n + 1) \exp\left(-n I(\frac{1}{2} + \varepsilon)\right),$$

λόγω συμμετρίας της διωνυμικής κατανομής στο $1/2$.

Συνεπώς καταλήγουμε στην ασυμπτωτική ιδέα:

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \geq \varepsilon n\right) \lesssim 2(n + 1) \exp\left(-n I(\frac{1}{2} + \varepsilon)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

δηλαδή η πιθανότητα μεγάλης απόκλισης φθίνει εκθετικά ως προς n .

Σχόλιο. Το αποτέλεσμα αυτό εξηγεί σε ποιοτική βάση γιατί, καθώς n μεγαλώνει, η διωνυμική μάζα «συγκεντρώνεται» σε τιμές k κοντά στο $n/2$, γεγονός που είναι ακριβώς το περιεχόμενο του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών για $\frac{X_n}{n}$.

3.8 Το πρόβλημα των αποδιατάξεων(derangements)

3.8.1 Ασυμπτωτική συμπεριφορά των αποδιατάξεων

Από τον τύπο εγκλεισμού-αποκλεισμού, ο αριθμός των αποδιατάξεων n στοιχείων δίνεται από

$$!n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Διαιρώντας με το συνολικό πλήθος $n!$ των μεταθέσεων, παίρνουμε

$$\frac{!n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Καθώς $n \rightarrow \infty$, το πεπερασμένο αυτό άθροισμα συγκλίνει στη σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Από την ανάπτυξη της εκθετικής συνάρτησης

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

θέτοντας $x = -1$, προκύπτει

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{!n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

Άρα, για μεγάλο n ,

$$!n \sim \frac{n!}{e}.$$

Το αποτέλεσμα έχει άμεση πιθανοτική ερμηνεία. Αν επιλέξουμε τυχαία μία από τις $n!$ μεταθέσεις, η πιθανότητα να είναι αποδιάταξη είναι

$$\mathbb{P}(\text{αποδιάταξη}) = \frac{!n}{n!}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{P}(\text{αποδιάταξη}) \longrightarrow \frac{1}{e} \approx 0,3679.$$

Επομένως, καθώς το n αυξάνεται, η πιθανότητα μια τυχαία μετάθεση να μην αφήνει κανένα στοιχείο στην αρχική του θέση σταθεροποιείται περίπου στο 36,8%.

Σχόλιο και ερμηνεία

Το πρόβλημα των αποδιατάξεων (derangements) αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου η ακριβής συνδυαστική απαρίθμηση οδηγεί σε μη αναμενόμενα αποτελέσματα.

Παρά το γεγονός ότι ο αριθμός των δυνατών διατάξεων αυξάνεται ταχύτατα, η πιθανότητα μιας αποδιάταξης σταθεροποιείται σε μια συγκεκριμένη τιμή. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί πρώιμη ένδειξη ασυμπτωτικής κανονικότητας και προαναγγέλλει τα οριακά θεωρήματα που θα εξεταστούν σε επόμενα κεφάλαια.

Η εμφάνιση του αριθμού e^{-1} σε ένα καθαρά διακριτό πρόβλημα αναδεικνύει τη βαθύτερη σύνδεση μεταξύ συνδυαστικής ανάλυσης και αναλυτικών μεθόδων.

3.9 Ασυμπτωτική συμπεριφορά των αποδιατάξεων (derangements)

3.9.1 Ασυμπτωτική συμπεριφορά των αυτοδιατάξεων (derangements)

Καθώς $n \rightarrow \infty$, ισχύει η προσέγγιση

$$!n \sim \frac{n!}{e}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η πιθανότητα μια τυχαία διάταξη να είναι αυτοδιάταξη τείνει στο e^{-1} , αναδεικνύοντας πρώιμα ασυμπτωτικά φαινόμενα.

3.10 Το πρόβλημα των γενεθλίων

Το πρόβλημα των γενεθλίων αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου η συνδυαστική σκέψη οδηγεί σε μη αναμενόμενα αποτελέσματα.

Έστω n άτομα και υποθέτουμε ότι κάθε ημέρα του έτους είναι ισοπίθανη ως ημερομηνία γέννησης. Το ερώτημα αφορά την πιθανότητα τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν την ίδια ημερομηνία γέννησης.

Ο υπολογισμός της πιθανότητας αυτής πραγματοποιείται αποτελεσματικά μέσω του συμπληρωματικού γεγονότος, δηλαδή της πιθανότητας όλα τα γενέθλια να είναι διαφορετικά. Η ανάλυση αυτή αποτελεί έμμεση εφαρμογή της συνδυαστικής απαρίθμησης και συνδέεται στενά με την Αρχή Ένταξης–Απαλοιφής.

Το παράδοξο αποτέλεσμα ότι για σχετικά μικρές τιμές του n η πιθανότητα σύμπτωσης είναι ήδη μεγάλη αναδεικνύει τη δύναμη της συνδυαστικής προσέγγισης.

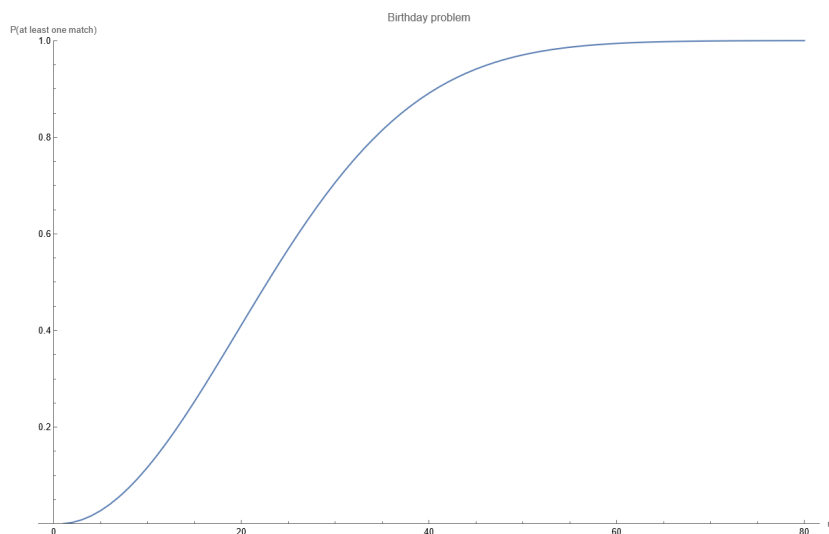
Η πιθανότητα όλα τα γενέθλια να είναι διαφορετικά είναι

$$P_n = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Συνεπώς, η πιθανότητα τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν την ίδια ημερομηνία γέννησης είναι

$$1 - P_n.$$

Το αποτέλεσμα αυτό εξηγεί γιατί η πιθανότητα σύμπτωσης αυξάνεται ταχύτατα ακόμη και για σχετικά μικρές τιμές του n .



Σχήμα 3.6: Πρόβλημα γενεθλίων: $\mathbb{P}$ (τουλάχιστον μία σύμπτωση) ως συνάρτηση του n (365 ισοπίθανες ημέρες).

3.11 Occurancy Problems και κατανομές αντικειμένων

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα της διακριτής θεωρίας πιθανοτήτων είναι η τυχαία κατανομή αντικειμένων σε διακριτές θέσεις ή κατηγορίες. Τα προβλήματα αυτά, γνωστά ως *occupancy problems*, κατέχουν κεντρική θέση στην προσέγγιση του Feller, καθώς συνδυάζουν τη συνδυαστική απαρίθμηση, τη διακριτή πιθανότητα και την ασυμπτωτική ανάλυση.

Η βασική ιδέα είναι η εξής: ένα σύνολο αντικειμένων τοποθετείται τυχαία σε ένα σύνολο θέσεων, και το ζητούμενο είναι η μελέτη της κατανομής των πληροτήτων, των συγκρούσεων και των κενών θέσεων.

Τα προβλήματα αυτά αποτελούν φυσική γενίκευση των κλασικών προβλημάτων δειγματοληψίας και απαρίθμησης και συνδέονται άμεσα με το πρόβλημα των γενεθλίων, τις Poisson προσεγγίσεις και τη μελέτη ασυμπτωτικών φαινομένων.

3.11.1 Το βασικό μοντέλο balls into boxes

Θεωρούμε n διακριτά αντικείμενα (μπάλες) τα οποία τοποθετούνται τυχαία σε m διακριτές θέσεις (κουτιά).

Υποθέτουμε ότι:

- κάθε μπάλα τοποθετείται ανεξάρτητα,
- κάθε κουτί είναι ισοπίθανο.

Ο συνολικός αριθμός δυνατών κατανομών είναι

$$m^n,$$

καθώς κάθε μία από τις n μπάλες μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε από τα m κουτιά.

3.11.2 Πιθανότητα όλα τα κουτιά να είναι διαφορετικά

Ένα από τα βασικά ερωτήματα είναι η πιθανότητα δύο μπάλες να μην καταλήξουν στο ίδιο κουτί.

Για να συμβεί αυτό, η πρώτη μπάλα μπορεί να τοποθετηθεί με m τρόπους, η δεύτερη με $m - 1$, η τρίτη με $m - 2$ κ.ο.κ.

Άρα ο αριθμός ευνοϊκών κατανομών είναι

$$m(m - 1) \cdots (m - n + 1).$$

Συνεπώς, η πιθανότητα είναι

$$P_n = \frac{m(m - 1) \cdots (m - n + 1)}{m^n}.$$

Η ποσότητα αυτή συμπίπτει ακριβώς με το πρόβλημα των γενεθλίων όταν $m = 365$.

3.11.3 Το πρόβλημα των συγκρούσεων

Λέμε ότι εμφανίζεται *σύγκρουση* (collision) όταν δύο ή περισσότερες μπάλες καταλήγουν στο ίδιο κουτί.

Η πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον μία σύγκρουση είναι

$$1 - P_n.$$

Για μεγάλα m και σχετικά μικρά n , χρησιμοποιούμε την προσέγγιση

$$\ln(1 - x) \approx -x, \quad x \ll 1.$$

Τότε:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) \approx \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} k\right).$$

Επειδή

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2},$$

παίρνουμε

$$P_n \approx \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right).$$

Άρα:

$$P(\text{τουλάχιστον μία σύγκρουση}) \approx 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2m}\right).$$

3.11.4 Το πρόβλημα των γενεθλίων ως occupancy model

Το πρόβλημα των γενεθλίων μπορεί να ερμηνευθεί ως ειδική περίπτωση occupancy problem.

- τα κουτιά αντιστοιχούν στις ημέρες του έτους,
- οι μπάλες αντιστοιχούν στα άτομα.

Η εμφάνιση ίδιων γενεθλίων αντιστοιχεί σε σύγκρουση.

Η προσέγγιση

$$P_n \approx \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$$

εξηγεί γιατί η πιθανότητα σύμπτωσης αυξάνεται τόσο γρήγορα.

Για παράδειγμα, για $n = 23$ η πιθανότητα σύμπτωσης υπερβαίνει ήδη το 0.5.

3.11.5 Κενά κουτιά

Ένα άλλο βασικό ερώτημα είναι ο αριθμός των κενών κουτιών.

Έστω I_j η ενδεικτική μεταβλητή που παίρνει τιμή:

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{αν το } j\text{-οστό κουτί είναι κενό,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η πιθανότητα το συγκεκριμένο κουτί να παραμείνει κενό είναι

$$P(I_j = 1) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n.$$

Αν E_m είναι ο συνολικός αριθμός κενών κουτιών, τότε

$$E_m = \sum_{j=1}^m I_j.$$

Από τη γραμμικότητα της προσδοκίας:

$$\mathbb{E}[E_m] = m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n.$$

Για μεγάλα m και $n \sim \lambda m$, παίρνουμε

$$\mathbb{E}[E_m] \approx me^{-\lambda}.$$

3.11.6 Poisson προσέγγιση

Τα occupancy problems συνδέονται στενά με την κατανομή Poisson.

Όταν:

$$m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{m} \rightarrow \lambda,$$

τότε ο αριθμός μπαλών σε κάθε κουτί προσεγγίζεται από Poisson κατανομή με παράμετρο λ .

Συγκεκριμένα:

$$P(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Η εμφάνιση της Poisson κατανομής αποτελεί ένα από τα πρώτα παραδείγματα ασυμπτωτικής κανονικότητας στη θεωρία πιθανοτήτων.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Τα occupancy problems παρουσιάζουν έντονα ασυμπτωτικά φαινόμενα.

Καθώς το πλήθος αντικειμένων αυξάνει:

- οι συγκρούσεις γίνονται αναπόφευκτες,
- η κατανομή πληροτήτων σταθεροποιείται,
- εμφανίζονται προσεγγίσεις τύπου Poisson και Gaussian.

Η μετάβαση αυτή αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της γενικής αρχής που διατρέχει το έργο του Feller: ότι η συλλογική συμπεριφορά μεγάλων στοχαστικών συστημάτων παρουσιάζει κανονικότητα, παρά την τυχαιότητα των επιμέρους μηχανισμών.

Σύνδεση με τα επόμενα κεφάλαια

Τα occupancy problems αποτελούν φυσικό σύνδεσμο μεταξύ:

- της συνδυαστικής ανάλυσης,
- των διακριτών κατανομών,
- της ασυμπτωτικής θεωρίας,
- και της κανονικής προσέγγισης.

Η μελέτη τους προετοιμάζει τη μετάβαση προς τον νόμο των μεγάλων αριθμών και τη μελέτη των διακυμάνσεων σε μεγάλα στοχαστικά συστήματα.

3.12 Συμπεράσματα

Τα occupancy problems αποτελούν από τα σημαντικότερα διακριτά μοντέλα της κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων.

Μέσα από απλές διαδικασίες τυχαίας κατανομής, εμφανίζονται βαθύτερα φαινόμενα, όπως:

- η συγκέντρωση πιθανοτήτων,
- οι συγκρούσεις,
- οι Poisson προσεγγίσεις,
- και η ασυμπτωτική κανονικότητα.

Η μελέτη αυτή αναδεικνύει με χαρακτηριστικό τρόπο τη φιλοσοφία του Feller: ότι πολύπλοκα στοχαστικά φαινόμενα μπορούν να προκύψουν από απλά συνδυαστικά μοντέλα.

Σχόλιο

Τα παραδείγματα του κεφαλαίου ανέδειξαν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο: η πιθανοθεωρία σε διακριτούς χώρους ξεκινά από ένα πρόβλημα απαρίθμησης και ολοκληρώνεται με έναν τύπο για την κατανομή ενός τυχαίου μεγέθους. Ωστόσο, η ουσία πολλών στοχαστικών φαινομένων δεν βρίσκεται μόνο στους ακριβείς τύπους, αλλά στη συμπεριφορά τους όταν οι παράμετροι γίνονται μεγάλες. Το πρόβλημα των αποδιατάξεων και το πρόβλημα των γενεθλίων προϊδεάζουν ήδη για τέτοια οριακά φαινόμενα, όπου εμφανίζονται κανονικότητες μέσα από την τυχειότητα.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε προβλήματα πληρότητας και προσεγγίσεις που απλοποιούν την ακριβή απαρίθμηση, όπως οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις και οι κατάλληλες προσεγγιστικές κατανομές. Η μετάβαση αυτή είναι καθοριστική, διότι οδηγεί από «κλασικά» διακριτά μοντέλα σε πρότυπα που χρησιμοποιούνται στη στατιστική φυσική, όπως οι κατανομές Maxwell–Boltzmann, Bose–Einstein και Fermi–Dirac.

Κεφάλαιο 4

Επαναλαμβανόμενα πειράματα και το μοντέλο ρίψεων νομίσματος

4.1 Εισαγωγή

Η μελέτη των επαναλαμβανόμενων τυχαίων πειραμάτων αποτελεί ένα από τα βασικά βήματα για την κατανόηση της θεωρίας πιθανοτήτων. Ενώ ένα μεμονωμένο πείραμα χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, η επανάληψή του αποκαλύπτει την ύπαρξη κανονικότητας.

Το απλούστερο παράδειγμα είναι η επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός νομίσματος. Παρά την απλότητά του, το μοντέλο αυτό επιτρέπει την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών όπως η ανεξαρτησία, η συνδυαστική απαρίθμηση και η συγκέντρωση των πιθανοτήτων.

4.2 Το μοντέλο ρίψεων νομίσματος

Εξετάζουμε n ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος. Σε κάθε ρίψη υπάρχουν δύο δυνατές εκβάσεις:

- κεφαλή (επιτυχία)
- γράμματα (αποτυχία)

Ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{0, 1\}^n$$

και το πλήθος των δυνατών εκβάσεων είναι:

$$|\Omega| = 2^n$$

Για παράδειγμα, για $n = 3$:

$$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

4.3 Ανεξαρτησία των δοκιμών

Οι δοκιμές θεωρούνται ανεξάρτητες, δηλαδή η έκβαση κάθε ρίψης δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες.

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i)$$

Για ισοπίθανο νόμισμα:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.4 Ο αριθμός επιτυχιών

Θεωρούμε n ανεξάρτητες δοκιμές, σε καθεμία από τις οποίες υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα, «επιτυχία» και «αποτυχία», με ίσες πιθανότητες.

Ορίζουμε

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστή δοκιμή είναι επιτυχία,} \\ 0, & \text{αν η } i\text{-οστή δοκιμή είναι αποτυχία.} \end{cases}$$

Τότε ο συνολικός αριθμός επιτυχιών στις n δοκιμές είναι

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Πράγματι, κάθε μεταβλητή X_i συνεισφέρει 1 στο άθροισμα όταν η αντίστοιχη δοκιμή είναι επιτυχία και 0 όταν είναι αποτυχία. Επομένως, το S_n μετρά ακριβώς το πλήθος των επιτυχιών.

Για να ισχύει $S_n = k$, πρέπει από τις n δοκιμές να υπάρχουν ακριβώς k επιτυχίες και $n - k$ αποτυχίες. Οι θέσεις στις οποίες θα εμφανιστούν οι k επιτυχίες μπορούν να επιλεγούν με

$$\binom{n}{k}$$

διαφορετικούς τρόπους.

Για παράδειγμα, αν $n = 4$ και $k = 2$, μερικές από τις δυνατές ακολουθίες είναι

$$(1, 1, 0, 0), \quad (1, 0, 1, 0), \quad (0, 1, 0, 1).$$

Συνολικά υπάρχουν

$$\binom{4}{2} = 6$$

ακολουθίες με ακριβώς δύο επιτυχίες.

Επειδή οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες και κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα $1/2$, κάθε συγκεκριμένη ακολουθία n αποτελεσμάτων έχει πιθανότητα

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Εφόσον υπάρχουν $\binom{n}{k}$ διαφορετικές ακολουθίες που περιέχουν ακριβώς k επιτυχίες, η πιθανότητα να έχουμε $S_n = k$ είναι

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Επομένως, ο αριθμός των επιτυχιών S_n ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = 1/2$, δηλαδή

$$S_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

Η σχέση αυτή αναδεικνύει τη συνδυαστική δομή του προβλήματος: ο παράγοντας $\binom{n}{k}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν οι k επιτυχίες στις n δοκιμές, ενώ ο παράγοντας $(1/2)^n$ είναι η πιθανότητα κάθε συγκεκριμένης ακολουθίας αποτελεσμάτων.

4.5 Σχετική συχνότητα

Η σχετική συχνότητα επιτυχιών είναι:

$$f_n = \frac{S_n}{n}$$

Η ποσότητα αυτή εκφράζει το ποσοστό επιτυχιών και αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ θεωρητικής πιθανότητας και εμπειρικής παρατήρησης.

Για μικρό n , η σχετική συχνότητα παρουσιάζει σημαντικές διακυμάνσεις. Ωστόσο, καθώς το n αυξάνει, οι διακυμάνσεις αυτές μειώνονται.

4.6 Συμπεριφορά για μεγάλο πλήθος δοκιμών

Καθώς το n αυξάνει, παρατηρείται ότι οι περισσότερες τιμές του S_n βρίσκονται κοντά στο $n/2$.

Η σχετική συχνότητα τείνει προς:

$$\frac{S_n}{n} \approx \frac{1}{2}$$

Αυτό δείχνει ότι η επανάληψη οδηγεί σε σταθερότητα.

4.7 Συγκέντρωση πιθανοτήτων

Οι πιθανότητες δεν κατανέμονται ομοιόμορφα στον δειγματικό χώρο. Αντίθετα, συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση τιμή.

Οι ακραίες τιμές εμφανίζονται με πολύ μικρή πιθανότητα.

4.8 Τυπικές και μη τυπικές εκβάσεις

Οι περισσότερες ακολουθίες περιέχουν περίπου ίσο αριθμό επιτυχιών και αποτυχιών. Έτσι:

- οι τυπικές εκβάσεις κυριαρχούν
- οι μη τυπικές εκβάσεις είναι σπάνιες

4.9 Συμμετρία της κατανομής

Ισχύει:

$$P(S_n = k) = P(S_n = n - k)$$

Η κατανομή είναι συμμετρική γύρω από τη μέση τιμή $n/2$.

4.10 Η πιο πιθανή τιμή

Για να προσδιορίσουμε την πιο πιθανή τιμή του αριθμού των επιτυχιών, εξετάζουμε δύο διαδοχικές πιθανότητες:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

και

$$\mathbb{P}(S_n = k + 1) = \binom{n}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ο λόγος τους είναι

$$\frac{\mathbb{P}(S_n = k + 1)}{\mathbb{P}(S_n = k)} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n - k}{k + 1}.$$

Επομένως, όσο

$$\frac{n - k}{k + 1} > 1,$$

δηλαδή όσο

$$k < \frac{n - 1}{2},$$

οι πιθανότητες αυξάνονται. Αντίστοιχα, μετά το κέντρο της κατανομής οι πιθανότητες μειώνονται.

Συνεπώς, οι μεγαλύτερες πιθανότητες εμφανίζονται στο κέντρο της κατανομής, δηλαδή κοντά στην τιμή

$$\frac{n}{2}.$$

Πιο συγκεκριμένα, αν το n είναι άρτιο, η μοναδική πιο πιθανή τιμή είναι

$$k = \frac{n}{2}.$$

Αν το n είναι περιττό, υπάρχουν δύο εξίσου πιθανές κεντρικές τιμές,

$$k = \frac{n - 1}{2} \quad \text{και} \quad k = \frac{n + 1}{2}.$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί με τη συμμετρία της κατανομής γύρω από τη μέση τιμή $\mathbb{E}[S_n] = n/2$.

4.11 Σχέση με το τρίγωνο του Pascal

Οι διωνυμικοί συντελεστές ικανοποιούν την ταυτότητα του Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Η ταυτότητα αυτή έχει άμεση συνδυαστική ερμηνεία. Για να επιλέξουμε k στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχείων, ξεχωρίζουμε ένα συγκεκριμένο στοιχείο. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- το συγκεκριμένο στοιχείο δεν επιλέγεται, οπότε επιλέγουμε και τα k στοιχεία από τα υπόλοιπα $n-1$, με $\binom{n-1}{k}$ τρόπους,
- το συγκεκριμένο στοιχείο επιλέγεται, οπότε απομένει να επιλέξουμε $k-1$ στοιχεία από τα υπόλοιπα $n-1$, με $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους.

Επομένως,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Η ίδια σχέση εμφανίζεται και στη διωνυμική κατανομή. Εφόσον

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

οι πιθανότητες είναι ανάλογες προς τους διωνυμικούς συντελεστές της n -οστής γραμμής του τριγώνου του Pascal.

Για παράδειγμα, για $n = 4$ η αντίστοιχη γραμμή του τριγώνου του Pascal είναι

$$1, \quad 4, \quad 6, \quad 4, \quad 1.$$

Επομένως, οι πιθανότητες για $k = 0, 1, 2, 3, 4$ επιτυχίες είναι αντίστοιχα

$$\frac{1}{16}, \quad \frac{4}{16}, \quad \frac{6}{16}, \quad \frac{4}{16}, \quad \frac{1}{16}.$$

Έτσι, το τρίγωνο του Pascal παρέχει μια άμεση συνδυαστική αναπαράσταση της κατανομής του αριθμού των επιτυχιών. Η συμμετρία των γραμμών του αντικατοπτρίζει επίσης τη συμμετρία της κατανομής γύρω από το $n/2$. Η σχέση αυτή δείχνει τη δομή της κατανομής.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & & & & & P(S_4 = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{16} & & \frac{4}{16} & & \frac{6}{16} & & \frac{4}{16} & & \frac{1}{16}
 \end{array}$$

Σχήμα 4.1: Σύνδεση του τριγώνου του Pascal με τη διωνυμική κατανομή για $n = 4$.

4.12 Τυχαίος περίπατος

Το μοντέλο μπορεί να ερμηνευτεί ως τυχαίος περίπατος.

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad X_i = \pm 1$$

Κάθε βήμα αντιστοιχεί σε μετακίνηση προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά.

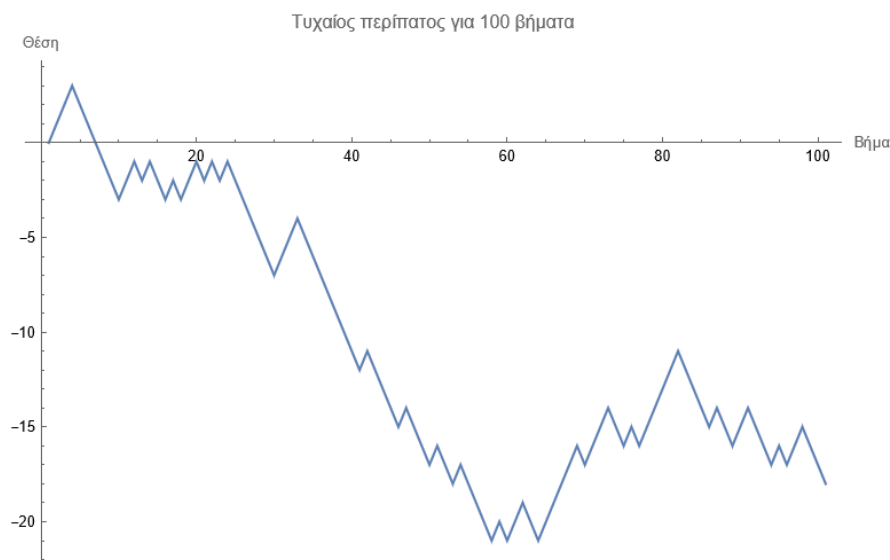
4.12.1 Απεικόνιση τυχαίου περιπάτου

Το μοντέλο των επαναλαμβανόμενων ρίψεων νομίσματος μπορεί να ερμηνευτεί ως τυχαίος περίπατος σε μία διάσταση.

Συγκεκριμένα, σε κάθε ρίψη αντιστοιχίζουμε:

- βήμα $+1$ αν εμφανιστεί κεφαλή
- βήμα -1 αν εμφανιστεί γράμματα

Έτσι, μετά από n ρίψεις, η θέση του περιπάτου δίνεται από το άθροισμα των επιμέρους βημάτων.



Σχήμα 4.2: Μία πραγματοποίηση τυχαίου περιπάτου για $n = 100$ βήματα.

Το παραπάνω γράφημα παρουσιάζει μία ενδεικτική πραγματοποίηση του τυχαίου περιπάτου. Παρατηρείται ότι η πορεία είναι έντονα ακανόνιστη και παρουσιάζει συνεχείς εναλλαγές κατεύθυνσης.

Η συμπεριφορά αυτή αντανακλά την τυχαιότητα των επιμέρους δοκιμών, καθώς κάθε βήμα προκύπτει ανεξάρτητα από τα προηγούμενα.

Ωστόσο, παρά την τοπική ακανόνιστη συμπεριφορά, το μοντέλο παρουσιάζει συγκεκριμένα στατιστικά χαρακτηριστικά όταν εξετάζεται σε μεγάλο αριθμό βημάτων, γεγονός που θα αναλυθεί στα επόμενα κεφάλαια.

Η αναπαράσταση αυτή συνδέει το απλό μοντέλο ρίψεων νομίσματος με πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες και αποτελεί ένα από τα βασικά παραδείγματα της θεωρίας πιθανοτήτων.

4.13 Ρυθμός μείωσης πιθανοτήτων

Καθώς απομακρυνόμαστε από τη μέση τιμή, οι πιθανότητες μειώνονται γρήγορα. Οι ακραίες τιμές είναι εξαιρετικά απίθανες.

4.14 Σχέση με τον τύπο Stirling

Η προσέγγιση Stirling, όπως είδαμε και στην σελίδα 26, δείχνει ότι:

$$P(S_n = n/2) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Η πιθανότητα συγκεντρώνεται γύρω από τη μέση τιμή.

4.15 Φιλοσοφική ερμηνεία

Η τυχαιότητα σε μικρή κλίμακα συνυπάρχει με την κανονικότητα σε μεγάλη κλίμακα.

4.16 Δομή και μοτίβα στις ακολουθίες ρίψεων

Μέχρι τώρα η ανάλυση του μοντέλου ρίψεων νομίσματος επικεντρώθηκε στον αριθμό των επιτυχιών. Ωστόσο, η τυχαιότητα δεν εκφράζεται μόνο μέσω του πλήθους των επιτυχιών, αλλά και μέσω της διάταξης των εκβάσεων μέσα στην ακολουθία.

Η μελέτη της δομής των ακολουθιών αποκαλύπτει πρόσθετα χαρακτηριστικά της στοχαστικής συμπεριφοράς.

4.16.1 Ακολουθίες επιτυχιών (runs)

Μια ακολουθία επιτυχιών (run) είναι μια συνεχόμενη σειρά ίδιων εκβάσεων. Για παράδειγμα, στην ακολουθία:

HHHTTHT

εμφανίζονται:

- μία ακολουθία 3 επιτυχιών (HHH)
- μία ακολουθία 2 αποτυχιών (TT)
- μικρότερες ακολουθίες

Η ύπαρξη τέτοιων δομών δείχνει ότι, παρότι το πλήθος των επιτυχιών μπορεί να είναι το ίδιο, η διάταξή τους διαφέρει σημαντικά.

4.16.2 Αριθμός αλλαγών

Ένα άλλο χαρακτηριστικό μιας ακολουθίας είναι ο αριθμός των αλλαγών από επιτυχία σε αποτυχία και αντίστροφα.

Για παράδειγμα, στην ακολουθία:

HTHTHH

οι αλλαγές είναι:

- $H \rightarrow T$
- $T \rightarrow H$
- $H \rightarrow T$
- $T \rightarrow H$

Ο αριθμός των αλλαγών αποτελεί ένδειξη της «μεταβλητότητας» της ακολουθίας.

4.16.3 Μέγιστη ακολουθία

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το μήκος της μεγαλύτερης συνεχόμενης ακολουθίας επιτυχιών ή αποτυχιών.

Σε μεγάλες ακολουθίες, είναι πιθανό να εμφανιστούν σχετικά μεγάλες συνεχόμενες σειρές ίδιων εκβάσεων, γεγονός που συχνά θεωρείται «παράξενο», αλλά είναι απολύτως συμβατό με το μοντέλο.

4.16.4 Παρανόηση της τυχαιότητας

Ένα χαρακτηριστικό λάθος στην ερμηνεία των τυχαιών φαινομένων είναι η πεποίθηση ότι μετά από πολλές συνεχόμενες επιτυχίες είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί αποτυχία.

Η αντίληψη αυτή είναι γνωστή ως πλάνη του παίκτη.

Στην πραγματικότητα, λόγω της ανεξαρτησίας των δοκιμών, κάθε ρίψη έχει την ίδια πιθανότητα ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματα.

4.16.5 Τοπική και συνολική συμπεριφορά

Η ανάλυση αυτή αναδεικνύει μια σημαντική διάκριση:

- Σε τοπικό επίπεδο, η συμπεριφορά είναι τυχαία και απρόβλεπτη
- Σε συνολικό επίπεδο, εμφανίζεται κανονικότητα

Η διάκριση αυτή αποτελεί βασικό στοιχείο της θεωρίας πιθανοτήτων.

4.16.6 Σχόλιο

Η μελέτη των μοτίβων δείχνει ότι η τυχαιότητα δεν αφορά μόνο τον αριθμό των επιτυχιών, αλλά και τη δομή των ακολουθιών.

Με τον τρόπο αυτό, το μοντέλο ρίψεων νομίσματος αποκτά βαθύτερη ερμηνεία και συνδέεται με πιο σύνθετες στοχαστικές διαδικασίες.

4.17 Συμπεράσματα

Το μοντέλο ρίψεων νομίσματος αποτελεί θεμελιώδες παράδειγμα της θεωρίας πιθανοτήτων.

Μέσα από την ανάλυση αυτή αναδεικνύεται ότι η πιθανότητα δεν αποτελεί απλώς αριθμητικό μέγεθος, αλλά περιγράφει τη δομή των δυνατών εκβάσεων και τη συμπεριφορά τους σε μεγάλα σύνολα.

Η κατανόηση αυτή οδηγεί φυσικά στον νόμο των μεγάλων αριθμών.

Κεφάλαιο 5

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων

5.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πιο εντυπωσιακά χαρακτηριστικά της θεωρίας πιθανοτήτων είναι ότι, ενώ κάθε μεμονωμένη έκβαση ενός τυχαίου πειράματος είναι απρόβλεπτη, η επανάληψη του ίδιου πειράματος πολλές φορές οδηγεί στην εμφάνιση αξιοσημείωτης κανονικότητας.

Η ιδέα αυτή εκφράζεται με τον νόμο των μεγάλων αριθμών, ο οποίος αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, και ακολουθώντας τη λογική του Feller, ο νόμος αυτός δεν εισάγεται αφηρημένα, αλλά προκύπτει φυσικά μέσα από τη μελέτη των επαναλαμβανόμενων ρίψεων νομίσματος και της διωνυμικής κατανομής.

Το βασικό ερώτημα που θα εξεταστεί είναι το εξής: όταν ένα πείραμα με δύο δυνατές εκβάσεις επαναλαμβάνεται πολλές φορές, πώς συμπεριφέρεται η σχετική συχνότητα των επιτυχιών; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό αποτελεί τον πυρήνα του νόμου των μεγάλων αριθμών.

5.2 Σχετική συχνότητα και εμπειρική πιθανότητα

Έστω ότι εκτελούμε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p . Αν S_n είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις n δοκιμές, τότε η σχετική συχνότητα επιτυχιών ορίζεται από τη σχέση

$$f_n = \frac{S_n}{n}.$$

Η ποσότητα αυτή εκφράζει το ποσοστό επιτυχιών μέσα στο σύνολο των δοκιμών και αποτελεί το βασικό εμπειρικό μέγεθος της πιθανοθεωρίας. Σε ένα πραγματικό πείραμα, εκείνο που παρατηρείται άμεσα δεν είναι η θεωρητική πιθανότητα p , αλλά η σχετική συχνότητα f_n .

Για παράδειγμα, αν σε 100 ρίψεις ενός νομίσματος εμφανιστούν 47 κεφαλές, τότε η σχετική συχνότητα είναι

$$f_{100} = \frac{47}{100} = 0.47.$$

Αντίστοιχα, αν σε 1000 ρίψεις εμφανιστούν 503 κεφαλές, τότε

$$f_{1000} = \frac{503}{1000} = 0.503.$$

Με παραδείγματα αυτά παρατηρούμε ότι όσο το πλήθος των δοκιμών αυξάνει, η σχετική συχνότητα τείνει να σταθεροποιείται γύρω από την πιθανότητα επιτυχίας.

5.3 Η βασική εμπειρική παρατήρηση

Η ιδέα ότι οι σχετικές συχνότητες σταθεροποιούνται σε μεγάλες σειρές δοκιμών προηγήθηκε ιστορικά της αυστηρής μαθηματικής θεωρίας. Ήδη από τα πρώτα πειράματα με ρίψεις νομίσματος και ζαριού, ήταν εμφανές ότι οι παρατηρούμενες αναλογίες συγκλίνουν προς συγκεκριμένες τιμές.

Στην περίπτωση του ισοπίθανου νομίσματος, αναμένουμε ότι το ποσοστό των κεφαλών θα βρίσκεται κοντά στο $\frac{1}{2}$. Για μικρό αριθμό ρίψεων, οι αποκλίσεις μπορεί να είναι μεγάλες. Ωστόσο, για μεγάλο αριθμό δοκιμών, οι αποκλίσεις αυτές γίνονται σχετικώς μικρές.

Η παρατήρηση αυτή δεν σημαίνει ότι η σχετική συχνότητα γίνεται ακριβώς ίση με $\frac{1}{2}$, αλλά ότι η πιθανότητα να αποκλίνει σημαντικά από τη θεωρητική τιμή μικραίνει καθώς το n αυξάνει. Αυτή ακριβώς η ιδέα είναι το ουσιαστικό περιεχόμενο του νόμου των μεγάλων αριθμών.

5.4 Η περίπτωση των ρίψεων νομίσματος

Στην ειδική περίπτωση ενός ισοπίθανου νομίσματος έχουμε $p = \frac{1}{2}$. Αν S_n είναι ο αριθμός των κεφαλών σε n ρίψεις, τότε

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Η σχετική συχνότητα των κεφαλών είναι

$$\frac{S_n}{n}.$$

Όπως φάνηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι πιθανότητες της διωνυμικής κατανομής συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση τιμή $\frac{n}{2}$. Κατά συνέπεια, η σχετική συχνότητα $\frac{S_n}{n}$ τείνει να παίρνει τιμές κοντά στο $\frac{1}{2}$.

Το γεγονός αυτό μπορεί να ερμηνευτεί και συνδυαστικά. Οι ακολουθίες στις οποίες ο αριθμός επιτυχιών βρίσκεται κοντά στο $\frac{n}{2}$ είναι πολύ περισσότερες από εκείνες που αντιστοιχούν σε ακραίες αποκλίσεις. Επομένως, οι “τυπικές” εκβάσεις του πειράματος εμφανίζονται με πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα.

5.5 Διατύπωση του νόμου των μεγάλων αριθμών

Με τη γλώσσα των σχετικών συχνοτήτων, ο νόμος των μεγάλων αριθμών διατυπώνεται ως εξής:

Νόμος των μεγάλων αριθμών. Αν S_n είναι ο αριθμός επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \text{όταν } n \rightarrow \infty.$$

Η διατύπωση αυτή σημαίνει ότι η πιθανότητα η σχετική συχνότητα να διαφέρει από την πιθανότητα επιτυχίας κατά περισσότερο από ένα προκαθορισμένο ποσό ε γίνεται αυθαίρετα μικρή όταν το πλήθος των δοκιμών είναι αρκετά μεγάλο.

Στην περίπτωση του ισοπίθανου νομίσματος η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

5.6 Ερμηνεία του αποτελέσματος

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν δηλώνει ότι η τυχαιότητα εξαφανίζεται. Κάθε μεμονωμένο πείραμα παραμένει τυχαίο και αβέβαιο. Εκείνο που αλλάζει είναι η συμπεριφορά του συστήματος σε μεγάλη κλίμακα.

Το ουσιαστικό περιεχόμενο του νόμου είναι ότι οι μεγάλες αποκλίσεις από την αναμενόμενη συμπεριφορά καθίστανται όλο και σπανιότερες. Με άλλα λόγια, η επανάληψη οδηγεί σε σταθερότητα.

Αυτό αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά νοήματα της πιθανοθεωρίας: η τυχαιότητα σε μικρή κλίμακα μπορεί να συνυπάρχει με την κανονικότητα σε μεγάλη κλίμακα.

5.7 Η μέση τιμή ως κέντρο συγκέντρωσης

Για τη διωνυμική κατανομή γνωρίζουμε ότι

$$E[S_n] = np.$$

Άρα η μέση τιμή της σχετικής συχνότητας είναι

$$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = p.$$

Η ποσότητα p λειτουργεί ως το φυσικό κέντρο γύρω από το οποίο συγκεντρώνονται οι πιθανές τιμές της σχετικής συχνότητας. Αυτό ακριβώς εξηγεί γιατί, σε πολλές επαναλήψεις, η εμπειρική πιθανότητα προσεγγίζει τη θεωρητική.

Η σημασία της παρατήρησης αυτής είναι διπλή. Πρώτον, παρέχει μια φυσική ερμηνεία της πιθανότητας. Δεύτερον, συνδέει τη θεωρία με την πειραματική εμπειρία.

5.8 Ο ρόλος της διασποράς

Πέρα από τη μέση τιμή, σημαντικό ρόλο παίζει και η διασπορά. Για τη διωνυμική κατανομή ισχύει

$$\text{Var}(S_n) = np(1 - p).$$

Άρα

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{p(1 - p)}{n}.$$

Η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική. Δείχνει ότι η διασπορά της σχετικής συχνότητας μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το n . Επομένως, όσο αυξάνει ο αριθμός των δοκιμών, τόσο μικρότερη είναι η τυπική απόκλιση της σχετικής συχνότητας από την πιθανότητα p .

Η παρατήρηση αυτή δίνει μια ποσοτική έκφραση της σταθεροποίησης που περιγράφει ο νόμος των μεγάλων αριθμών.

5.9 Η ανισότητα του Chebyshev ως εργαλείο

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Τότε η S_n εκφράζει τον συνολικό αριθμό επιτυχιών στις n δοκιμές, ενώ η ποσότητα

$$\frac{S_n}{n}$$

εκφράζει τη σχετική συχνότητα των επιτυχιών.

Για κάθε X_i έχουμε

$$\mathbb{E}[X_i] = p \quad \text{και} \quad \text{Var}(X_i) = p(1 - p).$$

Επειδή οι μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες,

$$\mathbb{E}[S_n] = np$$

και

$$\text{Var}(S_n) = np(1 - p).$$

Επομένως,

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[S_n] = p,$$

ενώ

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(S_n) = \frac{p(1 - p)}{n}.$$

Η ανισότητα του Chebyshev αναφέρει ότι για μια τυχαία μεταβλητή Y με πεπερασμένη διακύμανση και για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα στη μεταβλητή

$$Y = \frac{S_n}{n},$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] = p,$$

παίρνουμε

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2}.$$

Άρα,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Για σταθερά p και $\varepsilon > 0$, όταν $n \rightarrow \infty$, έχουμε

$$\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow p.$$

Δηλαδή, καθώς ο αριθμός των δοκιμών αυξάνεται, η πιθανότητα η σχετική συχνότητα S_n/n να αποκλίνει από την πραγματική πιθανότητα επιτυχίας p κατά περισσότερο από οποιοδήποτε σταθερό $\varepsilon > 0$ τείνει στο μηδέν. Αυτό αποτελεί την ειδική περίπτωση του ασθενούς Νόμου των Μεγάλων Αριθμών για ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.

5.10 Η σημασία του αποτελέσματος για την ερμηνεία της πιθανότητας

Η πιθανότητα μπορεί να ερμηνευθεί με δύο τρόπους: ως χαρακτηριστικό του μαθηματικού μοντέλου και ως όριο σχετικών συχνοτήτων σε επαναλαμβανόμενα πειράματα.

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών είναι το αποτέλεσμα που γεφυρώνει αυτές τις δύο απόψεις. Δείχνει ότι η θεωρητική πιθανότητα δεν είναι αυθαίρετος αριθμός, αλλά μέγεθος που συνδέεται άμεσα με την εμπειρική παρατήρηση.

Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που ο νόμος των μεγάλων αριθμών κατέχει κεντρική θέση στην πιθανοθεωρία. Δεν αποτελεί μόνο μαθηματικό θεώρημα, αλλά και θεμέλιο της ερμηνείας της πιθανότητας.

5.11 Παράδειγμα αριθμητικής ερμηνείας

Έστω ότι ρίχνουμε ένα ισοπίθανο νόμισμα 1000 φορές. Ο αναμενόμενος αριθμός κεφαλών είναι

$$E[S_{1000}] = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500.$$

Η διασπορά είναι

$$\text{Var}(S_{1000}) = 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 250.$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι

$$\sqrt{250} \approx 15.81.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν και δεν αναμένουμε ακριβώς 500 κεφαλές, είναι πολύ πιθανό το πλήθος των κεφαλών να βρίσκεται σχετικά κοντά σε αυτή την τιμή. Αντίστοιχα, η σχετική συχνότητα θα βρίσκεται κοντά στο 0.5.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν δηλώνει απόλυτη ισότητα, αλλά συγκέντρωση γύρω από τη θεωρητική τιμή.

5.12 Γραφική απεικόνιση της σχετικής συχνότητας

Η σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η πορεία της ποσότητας $\frac{S_n}{n}$ για μια μεγάλη ακολουθία ρίψεων ισοπίθανου νομίσματος.



Σχήμα 5.1: Πορεία της σχετικής συχνότητας επιτυχιών σε διαδοχικές ρίψεις ισοπίθανου νομίσματος.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1, για μικρές τιμές του n οι διακυμάνσεις είναι αισθητές. Ωστόσο, καθώς ο αριθμός των δοκιμών αυξάνει, η σχετική συχνότητα σταθεροποιείται γύρω από την τιμή $\frac{1}{2}$.

Η οπτική αυτή αναπαράσταση αποτυπώνει καθαρά το περιεχόμενο του νόμου των μεγάλων αριθμών.

5.13 Σύνδεση με την προσέγγιση του Feller

Στο έργο του Feller, ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν εμφανίζεται ως απομονωμένο αποτέλεσμα, αλλά ως φυσική συνέχεια της μελέτης των διακυμάνσεων στο coin tossing. Η έμφαση δεν δίνεται μόνο στη διατύπωση του θεωρήματος, αλλά κυρίως στην κατανόηση του γιατί η σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων είναι αναμενόμενη.

Η βασική ιδέα είναι ότι οι πιθανότητες συγκεντρώνονται σε περιοχές που αντιστοιχούν στην τυπική συμπεριφορά του συστήματος. Η εικόνα αυτή αναδεικνύεται πρώτα συνδυαστικά μέσω της διωνυμικής κατανομής και έπειτα ερμηνεύεται ως θεμελιώδης αρχή της στοχαστικής κανονικότητας.

5.14 Μετάβαση στην κανονική προσέγγιση

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών περιγράφει τη σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας, αλλά δεν δίνει από μόνος του λεπτομερή περιγραφή της μορφής της κατανομής γύρω από τη μέση τιμή.

Για την πληρέστερη κατανόηση της δομής των διακυμάνσεων, απαιτείται η μελέτη της κανονικής προσέγγισης της διωνυμικής κατανομής. Η προσέγγιση αυτή, γνωστή ήδη από τα έργα των De Moivre και Laplace, αποτελεί το επόμενο φυσικό βήμα και θα εξεταστεί στο επόμενο κεφάλαιο.

5.15 Συμπεράσματα

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων, καθώς εκφράζει με μαθηματικό τρόπο τη μετάβαση από την αβεβαιότητα της μεμονωμένης δοκιμής στην κανονικότητα της συλλογικής συμπεριφοράς.

Μέσα από το μοντέλο των επαναλαμβανόμενων ρίψεων νομίσματος διαπιστώνεται ότι η σχετική συχνότητα των επιτυχιών σταθεροποιείται γύρω από την πιθανότητα επιτυχίας, ενώ οι μεγάλες αποκλίσεις γίνονται όλο και πιο σπάνιες.

Η ιδέα αυτή αποτελεί το θεμέλιο για τη σύνδεση θεωρίας και εμπειρίας και προετοιμάζει τη μετάβαση στη μελέτη της κανονικής προσέγγισης των διακριτών κατανομών.

Κεφάλαιο 6

Διακυμάνσεις και κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής

6.1 Εισαγωγή

Η διωνυμική κατανομή, η οποία παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιείται εδώ ως αφετηρία για τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των διακυμάνσεων στο μοντέλο επαναλαμβανόμενων δοκιμών.

Ενώ ο νόμος των μεγάλων αριθμών περιγράφει τη σύγκλιση της σχετικής συχνότητας προς την πιθανότητα επιτυχίας, δεν παρέχει πληροφορία για τη μορφή των αποκλίσεων γύρω από τη μέση τιμή. Η κατανόηση της κατανομής αυτών των αποκλίσεων αποτελεί το βασικό αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου.

Η ανάλυση οδηγεί φυσικά στην εμφάνιση της κανονικής κατανομής, η οποία περιγράφει με αξιοσημείωτη ακρίβεια τη συμπεριφορά της διωνυμικής κατανομής για μεγάλες τιμές του n .

6.2 Τυποποίηση και μελέτη των αποκλίσεων

Έστω S_n ο αριθμός επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές με πιθανότητα επιτυχίας p . Για τη μελέτη των διακυμάνσεων εισάγεται η τυποποιημένη μεταβλητή:

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Η ποσότητα αυτή εκφράζει την απόκλιση από τη μέση τιμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης και επιτρέπει τη σύγκριση διαφορετικών τιμών του n σε κοινή κλίμακα.

6.3 Τάξη μεγέθους των διακυμάνσεων

Η διασπορά της S_n είναι $np(1-p)$, γεγονός που συνεπάγεται ότι οι τυπικές αποκλίσεις είναι της τάξης $\sqrt{n}$.

Η παρατήρηση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς δείχνει ότι οι αποκλίσεις αυξάνονται με πολύ μικρότερο ρυθμό σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος. Συνεπώς, η σχετική απόκλιση μειώνεται, γεγονός που εξηγεί τη σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας.

6.4 Η προσέγγιση De Moivre–Laplace

Για μεγάλες τιμές του n , η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή.

Συγκεκριμένα:

$$P(a \leq Z_n \leq b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί ένα από τα πρώτα παραδείγματα εμφάνισης της κανονικής κατανομής και δείχνει ότι οι αποκλίσεις από τη μέση τιμή κατανέμονται συμμετρικά γύρω από το μηδέν.

6.5 Η μορφή της κανονικής κατανομής

Η κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται από:

- συμμετρία ως προς τη μέση τιμή
- μέγιστη πυκνότητα στο κέντρο
- ταχεία μείωση των πιθανοτήτων για μεγάλες αποκλίσεις

Η μορφή αυτή αποτυπώνει τη βασική ιδέα ότι οι “τυπικές” τιμές εμφανίζονται με πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα από τις ακραίες.

6.6 Διόρθωση συνέχειας

Η διωνυμική κατανομή είναι διακριτή, ενώ η κανονική είναι συνεχής. Για τη βελτίωση της προσέγγισης χρησιμοποιείται η διόρθωση συνέχειας:

$$P(S_n = k) \approx P\left(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2}\right).$$

Η διόρθωση αυτή λαμβάνει υπόψη τη διακριτή φύση της αρχικής κατανομής και οδηγεί σε καλύτερη προσέγγιση.

6.7 Η πιθανότερη τιμή

Η πιθανότερη τιμή της διωνυμικής κατανομής είναι κοντά στο np . Πιο συγκεκριμένα, το μέγιστο της πιθανότητας επιτυγχάνεται για τιμές του k που βρίσκονται πλησίον της μέσης τιμής.

Το γεγονός αυτό ενισχύει την παρατήρηση ότι οι περισσότερες πραγματοποιήσεις συγκεντρώνονται γύρω από το np , ενώ οι μεγάλες αποκλίσεις είναι σπάνιες.

6.8 Σύνδεση με τα προηγούμενα αποτελέσματα

Όπως φάνηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, η διωνυμική κατανομή συγκεντρώνεται γύρω από τη μέση τιμή np καθώς το n αυξάνει.

Η κανονική προσέγγιση συμπληρώνει την εικόνα αυτή, περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι αποκλίσεις γύρω από τη μέση τιμή.

Ενώ ο νόμος των μεγάλων αριθμών εξασφαλίζει τη σύγκλιση της σχετικής συχνότητας, η κανονική κατανομή παρέχει λεπτομερή περιγραφή της μορφής των διακυμάνσεων.

6.8.1 Σύνδεση με τα γραφήματα της διωνυμικής κατανομής

Όπως παρατηρήθηκε στα προηγούμενα γραφήματα για διαφορετικές τιμές του n , η διωνυμική κατανομή αποκτά όλο και πιο συμμετρική μορφή καθώς το n αυξάνει.

Η παρατήρηση αυτή ερμηνεύεται θεωρητικά μέσω της κανονικής προσέγγισης, η οποία εξηγεί γιατί η κατανομή τείνει σε καμπύλη Gaussian.

6.8.2 Συμπεριφορά στα άκρα της κατανομής

Η κανονική προσέγγιση είναι ιδιαίτερα ακριβής κοντά στη μέση τιμή, ενώ παρουσιάζει μεγαλύτερες αποκλίσεις στα άκρα της κατανομής.

Το γεγονός αυτό οφείλεται στη διακριτή φύση της διωνυμικής κατανομής και στο ότι οι ακραίες τιμές εμφανίζονται με πολύ μικρή πιθανότητα.

6.9 Παράδειγμα

Έστω $n = 100$ και $p = \frac{1}{2}$. Τότε:

$$E[S_n] = 50, \quad \sigma = 5.$$

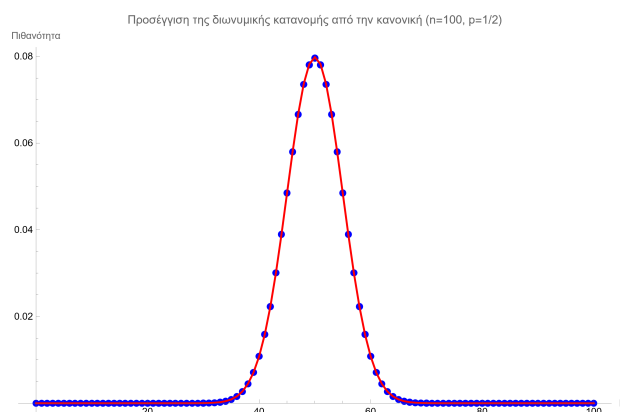
Η πιθανότητα το πλήθος επιτυχιών να βρίσκεται μεταξύ 45 και 55 προσεγγίζεται από:

$$P(-1 \leq Z_n \leq 1).$$

Η πιθανότητα αυτή είναι περίπου 0.68, γεγονός που δείχνει ότι η πλειονότητα των τιμών βρίσκεται κοντά στη μέση τιμή.

6.10 Γραφική απεικόνιση

Η σύγκριση της διωνυμικής κατανομής με την κανονική προσέγγιση παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6.1: Προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κανονική.

Παρατηρείται ότι όσο αυξάνει το n , η κανονική καμπύλη προσεγγίζει όλο και καλύτερα τη μορφή της διωνυμικής κατανομής.

6.11 Ερμηνεία

Η εμφάνιση της κανονικής κατανομής δείχνει ότι η τυχαιότητα σε μικρή κλίμακα οδηγεί σε κανονικότητα σε μεγάλη κλίμακα.

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί μία από τις πιο εντυπωσιακές ιδιότητες της πιθανοθεωρίας και αναδεικνύει τη βαθιά σχέση μεταξύ διακριτών και συνεχών μοντέλων.

6.12 Συμπεράσματα

Η μελέτη των διακυμάνσεων στο μοντέλο ρίψεων νομίσματος οδηγεί στην κανονική κατανομή ως φυσική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής για μεγάλες τιμές του n .

Η προσέγγιση αυτή δεν αποτελεί απλώς τεχνικό εργαλείο, αλλά εκφράζει μια θεμελιώδη αρχή: ότι τα στοχαστικά φαινόμενα εμφανίζουν κανονική συμπεριφορά όταν εξετάζονται σε μεγάλη κλίμακα.

Κεφάλαιο 7

Σύνθεση αποτελεσμάτων και ερμηνεία των στοχαστικών φαινομένων

7.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκαν βασικά διακριτά πιθανοθεωρητικά μοντέλα, με επίκεντρο τη διωνυμική κατανομή, τα επαναλαμβανόμενα πειράματα και τη σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων μέσω του νόμου των μεγάλων αριθμών.

Παράλληλα, εξετάστηκε η κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής και αναδείχθηκε ο τρόπος με τον οποίο τα διακριτά στοχαστικά μοντέλα οδηγούν, για μεγάλες τιμές των παραμέτρων, σε καθολικές μορφές συμπεριφοράς.

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι η σύνθεση των προηγούμενων αποτελεσμάτων και η ερμηνεία των βασικών στοχαστικών φαινομένων μέσα από τη φιλοσοφία της κλασικής προσέγγισης του Feller.

Η έμφαση δεν δίνεται πλέον σε μεμονωμένους υπολογισμούς ή ειδικές κατανομές, αλλά στις γενικές αρχές που αναδύονται από τη μελέτη των διακριτών μοντέλων:

- τη μετάβαση από την τυχαιότητα στην κανονικότητα,
- τη σημασία της ανεξαρτησίας,
- τον ρόλο της συμμετρίας,
- τη σημασία της κλίμακας,
- και τη θεμελιώδη συμβολή της ασυμπτωτικής ανάλυσης.

Το κεφάλαιο αυτό λειτουργεί ως θεωρητική σύνθεση της εργασίας και αναδεικνύει τη βαθύτερη δομή των στοχαστικών φαινομένων που μελετήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

7.2 Από την τυχαιότητα στην κανονικότητα

Κάθε μεμονωμένη δοκιμή σε ένα στοχαστικό πείραμα είναι κατ' ουσίαν απρόβλεπτη. Ωστόσο, η επανάληψη του ίδιου πειράματος οδηγεί στην εμφάνιση σταθερών προτύπων συμπεριφοράς.

Η μετάβαση αυτή από την τοπική αβεβαιότητα στη συνολική κανονικότητα αποτελεί μία από τις πιο θεμελιώδεις ιδέες της θεωρίας πιθανοτήτων.

Στο μοντέλο των ρίψεων νομίσματος, για παράδειγμα, κάθε μεμονωμένη ρίψη είναι τυχαία. Παρ' όλα αυτά, όταν ο αριθμός των δοκιμών αυξάνει, η σχετική συχνότητα των επιτυχιών σταθεροποιείται γύρω από μία συγκεκριμένη τιμή.

Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι η τυχαιότητα δεν συνεπάγεται πλήρη αταξία. Αντίθετα, μέσα από την επανάληψη αναδύεται στατιστική κανονικότητα.

7.3 Ο ρόλος της διωνυμικής κατανομής

Η διωνυμική κατανομή αποτέλεσε το βασικό μαθηματικό πρότυπο της παρούσας εργασίας.

Η σημασία της δεν περιορίζεται στην περιγραφή του πλήθους επιτυχιών σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές, αλλά επεκτείνεται στη βαθύτερη κατανόηση της δομής των διακριτών στοχαστικών μοντέλων.

Οι πιθανότητες της διωνυμικής κατανομής καθορίζονται από τους διωνυμικούς συντελεστές:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Η μορφή αυτή αναδεικνύει τη στενή σχέση μεταξύ συνδυαστικής ανάλυσης και πιθανοθεωρίας.

Οι περισσότερες πραγματοποιήσεις συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση τιμή np , ενώ οι ακραίες αποκλίσεις εμφανίζονται με πολύ μικρότερη πιθανότητα.

7.4 Σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών εκφράζει τη σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας γύρω από τη θεωρητική πιθανότητα επιτυχίας.

Έστω S_n ο αριθμός των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p . Η σχετική συχνότητα των επιτυχιών είναι

$$\frac{S_n}{n}.$$

Όπως αποδείχθηκε στην Ενότητα 5.9 με τη χρήση της ανισότητας του Chebyshev, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Καθώς $n \rightarrow \infty$, το δεξί μέλος τείνει στο μηδέν και, επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Άρα,

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \rightarrow p}.$$

Δηλαδή, καθώς ο αριθμός των δοκιμών αυξάνεται, η πιθανότητα η σχετική συχνότητα S_n/n να αποκλίνει από το p κατά περισσότερο από μια σταθερή ποσότητα ε γίνεται ολοένα μικρότερη.

Με αυτή την έννοια, η σχετική συχνότητα των επιτυχιών σταθεροποιείται γύρω από τη θεωρητική πιθανότητα p . Έτσι, ο νόμος των μεγάλων αριθμών συνδέει τη θεωρητική πιθανότητα με την εμπειρική παρατήρηση: σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, η παρατηρούμενη αναλογία επιτυχιών τείνει να βρίσκεται όλο και πιο κοντά στο p .

7.5 Κατανομή των αποκλίσεων

Παρότι η σχετική συχνότητα σταθεροποιείται γύρω από την πιθανότητα επιτυχίας, εξακολουθούν να υπάρχουν διακυμάνσεις.

Η μελέτη αυτών των αποκλίσεων οδηγεί στην κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.

Η τυποποιημένη μεταβλητή

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

παρουσιάζει για μεγάλα n συμπεριφορά που προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι οι αποκλίσεις κατανέμονται συμμετρικά γύρω από τη μέση τιμή και ότι οι μεγάλες αποκλίσεις είναι εξαιρετικά απίθανες.

7.6 Τυπική και άτυπη συμπεριφορά

Παρότι ο δειγματικός χώρος περιέχει μεγάλο πλήθος δυνατών εκβάσεων, οι περισσότερες πραγματοποιήσεις παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά.

Οι εκβάσεις που βρίσκονται κοντά στη μέση τιμή αποτελούν την τυπική συμπεριφορά του συστήματος, ενώ οι ακραίες αποκλίσεις χαρακτηρίζονται ως άτυπες.

Η διάκριση αυτή αποτελεί βασικό στοιχείο της ασυμπτωτικής θεωρίας πιθανοτήτων και εξηγεί γιατί τα στοχαστικά συστήματα παρουσιάζουν προβλέψιμη συμπεριφορά σε μεγάλη κλίμακα.

7.7 Συνδυαστική ερμηνεία

Η εμφάνιση της κανονικότητας μπορεί να ερμηνευθεί και συνδυαστικά.

Οι τιμές κοντά στη μέση τιμή αντιστοιχούν σε πολύ μεγαλύτερο αριθμό δυνατών διατάξεων σε σχέση με τις ακραίες τιμές.

Για παράδειγμα, στο μοντέλο των ρίψεων νομίσματος, οι ακολουθίες που περιέχουν περίπου ίσο αριθμό κεφαλών και γραμμάτων είναι συνδυαστικά πολύ περισσότερες από εκείνες που περιέχουν σχεδόν αποκλειστικά κεφαλές ή γράμματα.

Η παρατήρηση αυτή εξηγεί γιατί οι “τυπικές” εκβάσεις εμφανίζονται με πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα.

7.8 Ο ρόλος της ανεξαρτησίας

Η έννοια της ανεξαρτησίας αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο της διακριτής πιθανοθεωρίας.

Στα μοντέλα που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία, κάθε δοκιμή πραγματοποιείται ανεξάρτητα από τις προηγούμενες. Η υπόθεση αυτή επιτρέπει την παραγοντοποίηση των πιθανοτήτων:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i).$$

Η ανεξαρτησία εξασφαλίζει ότι οι τοπικές διακυμάνσεις δεν συσσωρεύονται με συστηματικό τρόπο και αποτελεί τον βασικό μηχανισμό που οδηγεί στη σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων.

Χωρίς ανεξαρτησία, η συμπεριφορά του συστήματος θα μπορούσε να παρουσιάζει ισχυρές συσχετίσεις και να αποκλίνει σημαντικά από τα κλασικά πιθανοθεωρητικά πρότυπα.

Η σημασία της ανεξαρτησίας αναδεικνύεται ιδιαίτερα στον νόμο των μεγάλων αριθμών και στην κανονική προσέγγιση.

7.9 Ο ρόλος της κλίμακας

Ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά των στοχαστικών φαινομένων είναι ότι η συμπεριφορά τους εξαρτάται ουσιαστικά από την κλίμακα παρατήρησης.

Σε μικρή κλίμακα, η τυχαιότητα κυριαρχεί και οι διακυμάνσεις εμφανίζονται έντονες και ακανόνιστες.

Αντίθετα, σε μεγάλη κλίμακα εμφανίζεται σταθερότητα και κανονικότητα.

Η παρατήρηση αυτή εκφράζεται μαθηματικά μέσω του γεγονότος ότι:

$$S_n \sim n, \quad S_n - np \sim \sqrt{n}.$$

Οι αποκλίσεις αυξάνονται με ρυθμό πολύ μικρότερο από το ίδιο το μέγεθος του συστήματος.

Έτσι, οι σχετικές αποκλίσεις μειώνονται καθώς το n αυξάνει, οδηγώντας στη σταθεροποίηση της συμπεριφοράς.

Η σημασία της κλίμακας αποτελεί μία από τις πιο χαρακτηριστικές ιδέες της προσέγγισης του Feller.

7.10 Η σημασία της συμμετρίας στα στοχαστικά μοντέλα

Η έννοια της συμμετρίας παίζει καθοριστικό ρόλο στη διακριτή πιθανοθεωρία.

Στη ρίψη ενός δίκαιου νομίσματος, οι δύο εκβάσεις θεωρούνται ισοπίθανες λόγω της συμμετρίας του πειράματος.

Αντίστοιχα, στη διωνυμική κατανομή με $p = \frac{1}{2}$, ισχύει:

$$P(S_n = k) = P(S_n = n - k).$$

Η συμμετρία αυτή εξηγεί γιατί η κατανομή είναι κεντραρισμένη γύρω από τη μέση τιμή.

Παρόμοιες συμμετρικές δομές εμφανίζονται και στον τυχαίο περίπατο, όπου οι πιθανότητες μετακίνησης προς τα δεξιά και προς τα αριστερά είναι ίσες.

Η συμμετρία λειτουργεί ως βασικός μηχανισμός εμφάνισης κανονικότητας και απλοποίησης των στοχαστικών μοντέλων.

7.11 Η μαθηματική περιγραφή της αβεβαιότητας

Η θεωρία πιθανοτήτων δεν εξαλείφει την αβεβαιότητα, αλλά την περιγράφει μαθηματικά.

Η πιθανότητα δεν αναφέρεται στη βεβαιότητα μιας μεμονωμένης έκβασης, αλλά στη δομή ενός μεγάλου συνόλου δυνατών πραγματοποιήσεων.

Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης στη φιλοσοφία της πιθανοθεωρίας.

Στο μοντέλο των ρίψεων νομίσματος, καμία μεμονωμένη ρίψη δεν μπορεί να προβλεφθεί. Ωστόσο, η συλλογική συμπεριφορά παρουσιάζει σταθερότητα.

Η θεωρία πιθανοτήτων επιτρέπει επομένως τη μαθηματική περιγραφή της αβεβαιότητας χωρίς να αναιρεί τον στοχαστικό χαρακτήρα των φαινομένων.

7.12 Η σημασία της ασυμπτωτικής ανάλυσης

Η ασυμπτωτική ανάλυση αποτελεί βασικό εργαλείο της σύγχρονης πιθανοθεωρίας.

Αντί να εξετάζονται μόνο ακριβείς τύποι για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων, μελετάται η συμπεριφορά των μοντέλων όταν το πλήθος των δοκιμών γίνεται πολύ μεγάλο.

Η προσέγγιση αυτή εμφανίστηκε επανειλημμένα στην παρούσα εργασία:

- στον τύπο Stirling,
- στον νόμο των μεγάλων αριθμών,
- στην προσέγγιση De Moivre–Laplace,
- και στην εμφάνιση της κανονικής κατανομής.

Η ασυμπτωτική ανάλυση αποκαλύπτει ότι διαφορετικά στοχαστικά συστήματα παρουσιάζουν κοινές οριακές μορφές συμπεριφοράς.

7.13 Η προσέγγιση του Feller

Η προσέγγιση του Feller χαρακτηρίζεται από τη στενή σύνδεση μεταξύ συνδυαστικής ανάλυσης και πιθανοθεωρίας.

Η πιθανότητα δεν εισάγεται αφηρημένα μέσω θεωρίας μέτρου, αλλά οικοδομείται σταδιακά μέσα από διακριτά μοντέλα, απαρίθμηση και ασυμπτωτική ανάλυση.

Η φιλοσοφία αυτή αναδεικνύει τη βαθύτερη δομή των στοχαστικών φαινομένων και καθιστά σαφή τη μετάβαση:

συνδυαστική δομή $\longrightarrow$ στοχαστική κανονικότητα.

Η προσέγγιση αυτή αποτέλεσε τη βασική θεωρητική κατεύθυνση της παρούσας εργασίας.

7.14 Συνολική εικόνα

Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια αποτελούν διαφορετικές εκφράσεις της ίδιας θεμελιώδους αρχής:

η τυχαιότητα σε μικρή κλίμακα οδηγεί σε κανονικότητα σε μεγάλη κλίμακα.

Η διωνυμική κατανομή, ο νόμος των μεγάλων αριθμών και η κανονική προσέγγιση αποτελούν διαφορετικές όψεις της ίδιας στοχαστικής συμπεριφοράς.

Η μετάβαση αυτή από τη διακριτή τυχαιότητα στη συνεχή κανονικότητα αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα της θεωρίας πιθανοτήτων.

7.15 Συμπεράσματα

Η μελέτη των στοχαστικών φαινομένων δείχνει ότι η τυχαιότητα δεν συνεπάγεται αταξία, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε εξαιρετικά σταθερές μορφές συμπεριφοράς.

Η συνδυαστική ανάλυση, η ανεξαρτησία, η συμμετρία και η ασυμπτωτική ανάλυση αποτελούν τους βασικούς μηχανισμούς μέσω των οποίων αναδύεται η στοχαστική κανονικότητα.

Η παρούσα εργασία ανέδειξε τον τρόπο με τον οποίο απλά διακριτά μοντέλα οδηγούν, μέσω επανάληψης και οριακών διαδικασιών, σε καθολικούς νόμους συμπεριφοράς.

Η κατανόηση της μετάβασης από την τυχαιότητα στη σταθερότητα αποτελεί ένα από τα πιο θεμελιώδη και εντυπωσιακά χαρακτηριστικά της θεωρίας πιθανοτήτων.

Κεφάλαιο 8

Τελικά συμπεράσματα

8.1 Η σημασία της προσέγγισης του Feller

Η παρούσα εργασία βασίστηκε στην κλασική προσέγγιση της θεωρίας πιθανοτήτων που αναπτύχθηκε από τον William Feller.

Στην προσέγγιση αυτή, η πιθανότητα δεν εισάγεται ως αφηρημένο αξιωματικό σύστημα, αλλά οικοδομείται σταδιακά μέσα από συγκεκριμένα διακριτά μοντέλα, συνδυαστικές απαριθμήσεις και ασυμπτωτικές ιδέες.

Η φιλοσοφία αυτή αναδεικνύει τη στενή σχέση μεταξύ συνδυαστικής ανάλυσης και στοχαστικής συμπεριφοράς.

Μέσα από απλά παραδείγματα, όπως οι επαναλαμβανόμενες ρίψεις νομίσματος, η διωνυμική κατανομή και οι τυχαίοι περίπατοι, καθίσταται σαφές ότι τα στοχαστικά φαινόμενα παρουσιάζουν βαθιά μαθηματική δομή.

Η προσέγγιση του Feller δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση των μηχανισμών που οδηγούν στην εμφάνιση κανονικότητας μέσα από την τυχαιότητα.

Η σημασία της ανεξαρτησίας, της συμμετρίας, της κλίμακας και της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς αναδείχθηκε σταδιακά σε όλη την εργασία ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό της διακριτής πιθανοθεωρίας.

8.2 Από τα διακριτά μοντέλα στις στοχαστικές διαδικασίες

Παρότι η εργασία επικεντρώθηκε σε απλά διακριτά μοντέλα, οι βασικές ιδέες που αναπτύχθηκαν αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο για πολύ γενικότερες περιοχές της σύγχρονης πιθανοθεωρίας.

Το μοντέλο των επαναλαμβανόμενων δοκιμών, οι τυχαίοι περίπατοι και η μελέτη των διακυμάνσεων οδηγούν φυσικά στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών.

Η εμφάνιση της κανονικής κατανομής μέσω της ασυμπτωτικής ανάλυσης προαναγγέλλει τη μετάβαση από τα διακριτά μοντέλα σε συνεχείς στοχαστικές θεωρίες, όπως:

- η κίνηση Brown,
- οι αλυσίδες Markov,
- και οι γενικότερες στοχαστικές διαδικασίες.

Η παρατήρηση αυτή αναδεικνύει ότι ακόμη και τα πιο απλά διακριτά μοντέλα περιέχουν τις βασικές ιδέες πολύ πιο σύνθετων στοχαστικών θεωριών.

Η μελέτη των κλασικών αυτών μοντέλων παραμένει επομένως ιδιαίτερα σημαντική, καθώς επιτρέπει την κατανόηση των θεμελιωδών μηχανισμών της θεωρίας πιθανοτήτων.

8.3 Προοπτικές για περαιτέρω μελέτη

Η θεωρία πιθανοτήτων αποτελεί σήμερα μία από τις πιο δυναμικές περιοχές των μαθηματικών και συνδέεται στενά με πλήθος επιστημονικών πεδίων.

Οι ιδέες που παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία μπορούν να επεκταθούν σε πολλές κατευθύνσεις, όπως:

- στη θεωρία Markov,
- στις στοχαστικές διαδικασίες,
- στη στατιστική φυσική,
- στη θεωρία πληροφορίας,
- και στη μαθηματική στατιστική.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη μοντέλων όπου η ανεξαρτησία παύει να ισχύει, καθώς και η μετάβαση από διακριτά σε συνεχή στοχαστικά συστήματα.

Παράλληλα, η σύγχρονη ανάπτυξη των πιθανοθεωρητικών μεθόδων σε εφαρμογές όπως η ανάλυση δεδομένων, η φυσική, η βιολογία και η τεχνητή νοημοσύνη δείχνει τη διαχρονική σημασία των βασικών εννοιών που αναπτύχθηκαν στην εργασία.

8.4 Επίλογος

Η παρούσα εργασία ανέδειξε ότι η θεωρία πιθανοτήτων δεν αποτελεί απλώς ένα σύνολο τεχνικών υπολογισμού πιθανοτήτων, αλλά μία βαθιά μαθηματική θεωρία της συλλογικής συμπεριφοράς στοχαστικών συστημάτων.

Η μετάβαση από τη συνδυαστική δομή στη στοχαστική κανονικότητα αποτελεί μία από τις πιο θεμελιώδεις και εντυπωσιακές ιδέες της μαθηματικής σκέψης.

Μέσα από απλά διακριτά μοντέλα, όπως οι ρίψεις νομίσματος και η διωνυμική κατανομή, αναδεικνύεται ότι η τυχαιότητα δεν συνεπάγεται αταξία, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε εξαιρετικά σταθερές και καθολικές μορφές συμπεριφοράς.

Η κατανόηση αυτής της σχέσης μεταξύ τυχαιότητας και κανονικότητας αποτελεί τον κεντρικό άξονα της παρούσας εργασίας και ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα της θεωρίας πιθανοτήτων.

Βιβλιογραφία

- [1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1968.
- [2] S. Ross, *Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων*, 8η αμερικάνικη έκδοση(ελληνική μετάφραση), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα.