



«Θετικών Επιστημών»

«Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά»

Διπλωματική Εργασία

*«Έρευνα για τη μαθηματική μοντελοποίηση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση
και εργασία με μαθητές Γ΄ Λυκείου»*

Ιωάννα Τσακνάκη

Επιβλέπων καθηγητής: **Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος**

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Νικολαντωνάκη για την καθοδήγηση του καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης τον Παντελή για όλη την υποστήριξή του σε όλη την κοινή μας πορεία και την οικογένειά μου και τους φίλους μου που στέκονται πάντα δίπλα μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει τον ρόλο και τη σημασία της Μαθηματικής Μοντελοποίησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με εξειδικευμένη έμφαση στο στάδιο της **επικύρωσης (Validation)** κατά τον κύκλο μοντελοποίησης των Blum & Leiß. Ενώ η παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών εστιάζει κυρίως στην αλγοριθμική επάρκεια και την εκτέλεση μηχανικών υπολογισμών, η παρούσα μελέτη επιχειρεί να αναδείξει πώς οι μαθητές διαχειρίζονται τη σύνδεση μεταξύ των μαθηματικών αποτελεσμάτων και της αντικειμενικής πραγματικότητας.

Για τις ανάγκες της εμπειρικής έρευνας, σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε μια ποιοτική έρευνα πεδίου σε δείγμα μαθητών της Γ' Λυκείου. Στους μαθητές διανεμήθηκε ένα ειδικά σχεδιασμένο φυλλάδιο δραστηριοτήτων με δύο προβλήματα Απειροστικού Λογισμού (ρυθμός μεταβολής, ορισμένο ολοκλήρωμα) τα οποία ανήκουν στην κατηγορία

των «Αποτυχιών Μοντελοποίησης» (*Modeling Disasters*). Στα προβλήματα αυτά, ενώ οι αλγόριθμοι οδηγούν σε απόλυτα ορθούς υπολογισμούς, τα τελικά αποτελέσματα είναι φυσικώς ή οικονομικώς αδύνατα στο πραγματικό πλαίσιο (*Context*). Το δείγμα χωρίστηκε σε δύο Ομάδες Προσανατολισμού: την Ομάδα Α (Θετικών & Πολυτεχνικών Σπουδών) και την Ομάδα Β (Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής), με σκοπό τη συγκριτική αξιολόγηση της κριτικής τους στάσης.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αποκάλυψαν μια σαφή, αντίστροφη τάση μεταξύ υπολογιστικής επάρκειας και ικανότητας επικύρωσης. Οι μαθητές του Πολυτεχνικού Προσανατολισμού επέδειξαν εξαιρετικά υψηλή αλγοριθμική επάρκεια (85%), αλλά παγιδεύτηκαν σε μια στάση *αποστοίχισης (de-contextualization)*, αποδεχόμενοι παθητικά εξωπραγματικά μεγέθη επειδή «βγήκαν σωστά οι πράξεις». Αντίθετα, οι μαθητές του Οικονομικού Προσανατολισμού, παρά τα συχνότερα υπολογιστικά τους σφάλματα, ενεργοποίησαν άμεσα το *εξειδικευμένο γνωστικό τους υπόβαθρο (domain-specific knowledge)* γύρω από την αγορά, επιδεικνύοντας υψηλά ανακλαστικά κριτικής αντίστασης και επικύρωσης (70%). Η εργασία καταλήγει σε συγκεκριμένες εκπαιδευτικές προτάσεις για την αναδιάρθρωση των Προγραμμάτων Σπουδών και την ενσωμάτωση αυθεντικών προβλημάτων που καλλιεργούν την κριτική μαθηματική εγγράμματσύνη.

Λέξεις-κλειδιά: Μαθηματική Μοντελοποίηση, Επικύρωση (Validation), Απειροστικός Λογισμός, Αποτυχίες Μοντελοποίησης (Modeling Disasters), Γνωστικό Πλαίσιο, Κριτική Σκέψη

Abstract

This master's thesis investigates the role and significance of Mathematical Modelling in secondary education, with a specific focus on the **validation stage** within the modelling cycle proposed by Blum & Leiß. While traditional mathematics instruction heavily emphasizes algorithmic competence and mechanical computations, this study attempts to highlight how students manage the connection between mathematical outcomes and objective reality.

For the purposes of the empirical study, a qualitative field research was designed and conducted on a sample of 12th-grade (Lyceum) students. Participants were given a specifically designed task sheet consisting of two Calculus problems (rate of change, definite integral) categorized as *Modeling Disasters*. In these tasks, although the algebraic and calculus procedures yield mathematically correct results, the final outputs are physically or economically impossible within the real-world context. The sample was divided into two tracks: Track A (Positive & Polytechnic Studies) and Track B (Economic & Computer Studies), in order to comparatively evaluate their critical validation instincts.

The research findings revealed a distinct, inverse relationship between computational fluency and validation capacity. Polytechnic track students demonstrated exceptionally high algorithmic proficiency (85%), yet they fell into a *de-contextualization trap*, passively accepting unrealistic values simply because the mathematical working was correct. Conversely, despite making more computational errors, economic track students immediately activated their *domain-specific knowledge* regarding market principles, displaying significantly higher critical resistance and validation reflexes (70%). The thesis concludes with specific pedagogical recommendations for curriculum reform and the integration of authentic tasks that foster critical mathematical literacy.

Keywords: Mathematical Modelling, Validation, Calculus, Modeling Disasters, Context, Critical Thinking.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη	vii
Abstract	ix
Συμβολισμός	xiii
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή	1
1.1 Αντικείμενο της Εργασίας	1
1.2 Σκοπός και Στόχος της Εργασίας	2
1.3 Δομή της Εργασίας	3
Κεφάλαιο 2: Θεωρητικό Υπόβαθρο	5
2.1 Η Έννοια, η Εξέλιξη και το Θεωρητικό Πλαίσιο της Μαθηματικής Μοντελοποίησης	5
2.2 Γνωστικές και Μεταγνωστικές Δεξιότητες μέσω της Μοντελοποίησης	6
2.3 Η Μοντελοποίηση στα Προγράμματα Σπουδών, στη Διδακτική Πράξη και στον Ρόλο του Εκπαιδευτικού	7
2.4 Προκλήσεις, Περιορισμοί και Διαθεματικές Προεκτάσεις της Μοντελοποίησης	8
Κεφάλαιο 3: Ερευνητικό Πλαίσιο και Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων Μαθηματικής Μοντελοποίησης	9
3.1 Η Μαθηματική Μοντελοποίηση ως Αντικείμενο Έρευνας και ο Κύκλος Μοντελοποίησης του Blum	9
3.2 Η Έννοια της Επικύρωσης (Validation) στη Μαθηματική Μοντελοποίηση	10
3.3 Σχεδιασμός Αυθεντικών Δραστηριοτήτων Μοντελοποίησης: Κριτήρια Επιλογής και Διδακτική Οργάνωση	11
3.4 Γνωστικά Εμπόδια των Μαθητών και Ερευνητικά Ερωτήματα της Παρούσας Μελέτης	13
Κεφάλαιο 4: Διδακτικός σχεδιασμός και διερεύνηση της ικανότητας μαθηματικής μοντελοποίησης των μαθητών	15
4.1 Περιγραφή δείγματος και ερευνητικής διαδικασίας	15
4.2 Δραστηριότητα 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Ρυθμός Μεταβολής Ταχύτητας & Επικύρωση)	17
4.3 Δραστηριότητα 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οριακό Κόστος & Οικονομική Ερμηνεία)	20
4.4 Το Ερευνητικό Εργαλείο και ο Επιχειρησιακός Σχεδιασμός των Δραστηριοτήτων	22
4.5 Ηθική και Δεοντολογία της Έρευνας	27
4.6 Εγκυρότητα και Αξιοπιστία της Ερευνητικής Διαδικασίας	27
4.7 Σύνοψη Κεφαλαίου	28

Κεφάλαιο 5: Εμπειρική έρευνα – Η ικανότητα επικύρωσης (validation) μαθητών Γ' λυκείου στον απειροστικό λογισμό	31
5.1 Μεθοδολογία της Έρευνας και Ερευνητικά Ερωτήματα	31
5.1.1 Το Δείγμα της Έρευνας	31
5.1.2 Μέθοδος Συλλογής και Ανάλυσης Δεδομένων	32
5.2 Το Σκεπτικό και η Παρουσίαση του Ερευνητικού Εργαλείου	32
5.2.1 Δραστηριότητα 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Φυσικό Πλαίσιο)	33
5.2.2 Δραστηριότητα 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οικονομικό Πλαίσιο)	33
5.3 Ανάλυση Άσκησης 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Φυσικό Πλαίσιο)	33
5.3.1 Ομάδα Πολυτεχνικού Προσανατολισμού	34
5.3.2 Ομάδα Οικονομικού Προσανατολισμού	34
5.4 Ανάλυση Άσκησης 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οικονομικό Πλαίσιο)	35
5.4.1 Ομάδα Πολυτεχνικού Προσανατολισμού	35
5.4.2 Ομάδα Οικονομικού Προσανατολισμού	36
5.5 Συγκεντρωτική Παρουσίαση Ερευνητικών Δεδομένων (Πίνακες Αποτελεσμάτων)	37
5.6 Συνδυαστικά Προφίλ Μαθητών: Σταθερότητα ή Μεταβλητότητα της Κριτικής Στάσης	42
5.7 Απάντηση στα Ερευνητικά Ερωτήματα	43
Γραφήματα Σύγκρισης: Πολυτεχνικό vs Οικονομικό	45
Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα, συζήτηση και μελλοντικές προτάσεις	49
6.1 Σύνοψη και Ανακεφαλαίωση των Ερευνητικών Ευρημάτων	49
6.2 Συζήτηση και Παιδαγωγικές Προεκτάσεις	50
6.3 Εκπαιδευτικές και Διδακτικές Προεκτάσεις	52
6.4 Περιορισμοί της Έρευνας	53
6.5 Μελλοντικές Προτάσεις	53
Βιβλιογραφικές Αναφορές	55
Παράρτημα: Αναλυτικά δεδομένα και ατομικές απαντήσεις μαθητών	59
Ενδεικτικά Αυτούσια Δείγματα Γραπτών Απαντήσεων	60
Σχήμα Κωδικοποίησης	69
Πίνακας 1 — Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι	70
Πίνακας 2 — Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας	73
Πίνακας 3 — Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι	75
Πίνακας 4 — Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας	76

Συμβολισμός

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται οι κυριότεροι μαθηματικοί συμβολισμοί και οι συντομογραφίες που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Σύμβολο / Συντομογραφία	Επεξήγηση
$v(t)$	Συνάρτηση ταχύτητας ως προς τον χρόνο t
$v'(t), a(t)$	Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας (επιτάχυνση)
Δv	Μεταβολή ταχύτητας σε δεδομένο χρονικό διάστημα
$K(x)$	Συνάρτηση συνολικού κόστους παραγωγής x μονάδων
$K'(x)$	Οριακό κόστος (ρυθμός μεταβολής του κόστους)
$\int f(x) dx$	Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο δοθέν διάστημα
N	Μέγεθος δείγματος
ΕΑΠ	Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
ΜΣΜ	Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά
GAIMME	Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education
ICTMA	International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
PISA	Programme for International Student Assessment
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development
κ.ά.	και άλλοι / άλλες
κ.λπ.	και λοιπά
σ. / σσ.	σελίδα / σελίδες

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της Εργασίας

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας επικεντρώνεται στη διερεύνηση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως παιδαγωγικού και γνωστικού εργαλείου στο σύγχρονο εκπαιδευτικό περιβάλλον. Στόχος είναι η συστηματική ανάλυση της έννοιας, των θεωρητικών της θεμελίων και της διδακτικής της αξιοποίησης, με έμφαση στον τρόπο με τον οποίο συμβάλλει στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης, επίλυσης προβλημάτων και διαθεματικής κατανόησης. Η εργασία επιχειρεί να αναδείξει τη μοντελοποίηση όχι ως αποσπασματική δραστηριότητα, αλλά ως οργανικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης, το οποίο συνδέεται με τις σύγχρονες παιδαγωγικές προσεγγίσεις και τις απαιτήσεις της κοινωνίας της γνώσης.

Ειδικότερα, αντικείμενο της μελέτης αποτελεί η ανάλυση των γνωστικών διεργασιών που ενεργοποιούνται κατά τη διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης. Η εργασία εξετάζει πώς οι μαθητές μεταβαίνουν από μια πραγματική κατάσταση σε μια μαθηματική αναπαράσταση, πώς διατυπώνουν υποθέσεις, επιλέγουν μεταβλητές και αξιολογούν τα αποτελέσματα του μοντέλου τους. Μέσα από αυτή τη διερεύνηση αναδεικνύεται ο ρόλος της αφαιρετικής σκέψης, της αναλυτικής ικανότητας και της μεταγνωστικής επίγνωσης, στοιχεία που συγκροτούν τον πυρήνα της ουσιαστικής μαθηματικής κατανόησης.

Παράλληλα, η εργασία εστιάζει στη θέση της μαθηματικής μοντελοποίησης στα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο τα προγράμματα αυτά ενσωματώνουν τη μοντελοποίηση ως βασικό μαθησιακό στόχο, προωθώντας μια λειτουργική και εφαρμοσμένη προσέγγιση των μαθηματικών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη διαθεματική διάσταση, καθώς η μοντελοποίηση λειτουργεί ως γέφυρα μεταξύ μαθηματικών και θετικών επιστημών, ενισχύοντας τη συνοχή και τη συνάφεια της σχολικής γνώσης.

Ένα ακόμη βασικό αντικείμενο της εργασίας αποτελεί η διερεύνηση των διδακτικών στρατηγικών και του ρόλου του εκπαιδευτικού στην εφαρμογή της μοντελοποίησης στην τάξη. Εξετάζονται μεθοδολογικές προσεγγίσεις όπως τα ανοιχτά προβλήματα, η ομαδοσυνεργατική μάθηση και η αξιοποίηση της τεχνολογίας, καθώς και οι προκλήσεις που αντιμετωπίζει ο εκπαιδευτικός κατά τον σχεδιασμό και την υλοποίηση τέτοιων δραστηριοτήτων. Η εργασία επιδιώκει να αναδείξει τη σημασία της παιδαγωγικής ευελιξίας

και της κατάλληλης καθοδήγησης στη διαμόρφωση ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος.

Επιπλέον, στο αντικείμενο της μελέτης εντάσσονται οι δυσκολίες και οι περιορισμοί που ανακύπτουν κατά την εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική πράξη. Η ανάλυση περιλαμβάνει ζητήματα όπως ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος, οι απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος, οι διαφοροποιήσεις στο επίπεδο των μαθητών και οι προκλήσεις της αξιολόγησης. Μέσα από αυτήν τη θεώρηση, η εργασία δεν περιορίζεται σε μια θεωρητική εξύμνηση της μοντελοποίησης, αλλά επιχειρεί μια ρεαλιστική αποτίμηση των συνθηκών εφαρμογής της.

Τέλος, το αντικείμενο της εργασίας αποσκοπεί στη συνολική αποτίμηση της συμβολής της μαθηματικής μοντελοποίησης στη διαμόρφωση μαθητών με κριτική ικανότητα, επιστημονική σκέψη και ικανότητα σύνδεσης της γνώσης με την πραγματικότητα. Μέσα από τη συνθετική προσέγγιση των επιμέρους θεματικών ενοτήτων, η εργασία επιδιώκει να καταδείξει ότι η μαθηματική μοντελοποίηση συνιστά θεμελιώδη άξονα για μια σύγχρονη, λειτουργική και ουσιαστική μαθηματική εκπαίδευση, ανταποκρινόμενη στις απαιτήσεις ενός διαρκώς μεταβαλλόμενου επιστημονικού και κοινωνικού περιβάλλοντος.

1.2 Σκοπός και Στόχος της Εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εις βάθος διερεύνηση της μαθηματικής μοντελοποίησης ως κεντρικής παιδαγωγικής προσέγγισης στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση. Η εργασία επιδιώκει να αναδείξει τη σημασία της μοντελοποίησης όχι μόνο ως διδακτικής τεχνικής, αλλά ως ευρύτερου πλαισίου σκέψης που ενισχύει τη σύνδεση της μαθηματικής γνώσης με την πραγματικότητα. Μέσα από θεωρητική και παιδαγωγική ανάλυση, επιχειρείται να καταδειχθεί ότι η μοντελοποίηση αποτελεί ουσιαστικό μέσο ανάπτυξης κριτικής σκέψης, εννοιολογικής κατανόησης και λειτουργικού μαθηματικού γραμματισμού.

Κεντρικός στόχος της εργασίας είναι η αποσαφήνιση των γνωστικών και διδακτικών διαστάσεων της μαθηματικής μοντελοποίησης, με έμφαση στον τρόπο με τον οποίο αυτή ενσωματώνεται στο σχολικό πλαίσιο. Η μελέτη αποσκοπεί στη συστηματική παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών της μοντελοποιητικής διαδικασίας, των σταδίων που τη συγκροτούν και των δεξιοτήτων που καλλιεργεί στους μαθητές. Παράλληλα, επιδιώκεται η

ανάδειξη του ρόλου του εκπαιδευτικού ως καθοδηγητή και διαμεσολαβητή της γνώσης σε ένα μαθητοκεντρικό και διερευνητικό περιβάλλον μάθησης.

Επιπλέον, στόχος της εργασίας είναι η κριτική αποτίμηση των δυνατοτήτων αλλά και των περιορισμών που συνοδεύουν την εφαρμογή της μαθηματικής μοντελοποίησης στην εκπαιδευτική πράξη. Εξετάζονται οι προκλήσεις που σχετίζονται με το αναλυτικό πρόγραμμα, τον διαθέσιμο διδακτικό χρόνο, την αξιολόγηση και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Μέσα από αυτήν τη θεώρηση, η εργασία επιδιώκει να προτείνει ένα ρεαλιστικό πλαίσιο κατανόησης και εφαρμογής της μοντελοποίησης, λαμβάνοντας υπόψη τις πραγματικές συνθήκες της σχολικής τάξης.

Τέλος, η εργασία στοχεύει στη συμβολή στον επιστημονικό και παιδαγωγικό διάλογο σχετικά με τον μετασχηματισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μέσα από τη σύνθεση των επιμέρους θεματικών ενοτήτων, επιδιώκεται να αναδειχθεί ότι η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να λειτουργήσει ως βασικός άξονας για μια εκπαίδευση που υπερβαίνει τη μηχανική επίλυση ασκήσεων και προάγει την ουσιαστική κατανόηση, τη διαθεματική σκέψη και τη σύνδεση της γνώσης με τα σύγχρονα κοινωνικά και επιστημονικά ζητήματα.

1.3 Δομή της Εργασίας

Προκειμένου να επιτευχθούν οι αντικειμενικοί στόχοι της παρούσας διπλωματικής εργασίας, το κείμενο διαρθρώνεται σε έξι (6) διακριτά κεφάλαια, τα οποία καλύπτουν τόσο το θεωρητικό υπόβαθρο όσο και την εμπειρική διερεύνηση του υπό εξέταση φαινομένου:

- **Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή:** Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται το αντικείμενο της μελέτης, αναλύονται ο σκοπός και οι επιμέρους στόχοι της εργασίας, και παρουσιάζεται η συνολική δομή του κειμένου.
- **Κεφάλαιο 2 – Θεωρητικό Υπόβαθρο:** Πραγματοποιείται μια συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση γύρω από την έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης και την εξέλιξή της στη Διδακτική των Μαθηματικών. Αναλύονται τα υφιστάμενα παιδαγωγικά μοντέλα, η λειτουργία της μοντελοποίησης ως γέφυρας με τον πραγματικό κόσμο, καθώς και οι γνωστικές διεργασίες (όπως η κριτική σκέψη και η επίλυση προβλημάτων) που αναπτύσσονται στους μαθητές. Παράλληλα, εξετάζεται η θέση της μοντελοποίησης στα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα (π.χ. PISA, οδηγίες GAIMME), οι διδακτικές στρατηγικές, ο ρόλος του εκπαιδευτικού, καθώς και τα διδακτικά εμπόδια και η διαθεματική σύνδεση με τις θετικές επιστήμες.

- **Κεφάλαιο 3 – Ερευνητικό Πλαίσιο και Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων:**

Παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας, με κεντρικό άξονα τον κύκλο μοντελοποίησης των Blum & Leiß, με εξειδικευμένη έμφαση στη γνωστική λειτουργία της επικύρωσης (Validation). Επιπλέον, αναλύονται τα κριτήρια επιλογής αυθεντικών προβλημάτων, ο σχεδιασμός των διδακτικών δραστηριοτήτων, καθώς και τα αναμενόμενα γνωστικά εμπόδια και οι στόχοι της παρέμβασης.

- **Κεφάλαιο 4 – Διδακτικός Σχεδιασμός και Διερεύνηση της Ικανότητας Μαθηματικής Μοντελοποίησης:** Περιγράφεται το δείγμα της έρευνας και η ερευνητική διαδικασία, καθώς και το ερευνητικό εργαλείο που αναπτύχθηκε γύρω από δύο ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες «Αποτυχίας Μοντελοποίησης» (Modeling Disasters): το «Ηλεκτρικό Πατίνι» (Φυσικό Πλαίσιο) και το «Κόστος Βιοτεχνίας» (Οικονομικό Πλαίσιο). Παρουσιάζεται ο επιχειρησιακός σχεδιασμός των δραστηριοτήτων, καθώς και τα ζητήματα ηθικής, δεοντολογίας, εγκυρότητας και αξιοπιστίας της ερευνητικής διαδικασίας.

- **Κεφάλαιο 5 – Εμπειρική Έρευνα: Η Ικανότητα Επικύρωσης στον Απειροστικό Λογισμό:** Αποτελεί το κύριο ερευνητικό μέρος της εργασίας, όπου εξετάζονται τα αντανακλαστικά κριτικής σκέψης μαθητών Γ' Λυκείου. Παρουσιάζεται η μεθοδολογία και τα ερευνητικά ερωτήματα που εστιάζουν σε δύο ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες «Αποτυχίας Μοντελοποίησης» (Modeling Disasters), το «Ηλεκτρικό Πατίνι» (Φυσικό Πλαίσιο) και το «Κόστος Βιοτεχνίας» (Οικονομικό Πλαίσιο). Ακολουθεί η ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων ανά Ομάδα Προσανατολισμού (Θετικών/Πολυτεχνικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής), η παρουσίαση των συγκεντρωτικών πινάκων και η επιστημονική συζήτηση (Discussion) των ευρημάτων σε σύνδεση με τη θεωρία.

- **Κεφάλαιο 6 – Συμπεράσματα και Εκπαιδευτικές Προτάσεις:** Πραγματοποιείται η τελική ανακεφαλαίωση των ερευνητικών συμπερασμάτων, κατατίθενται πρακτικές παιδαγωγικές προτάσεις για την ενσωμάτωση της επικύρωσης στη σχολική πράξη και επισημαίνονται οι περιορισμοί της παρούσας μελέτης, καθώς και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2: Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Η Έννοια, η Εξέλιξη και το Θεωρητικό Πλαίσιο της Μαθηματικής Μοντελοποίησης

Η μαθηματική μοντελοποίηση αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία πραγματικές καταστάσεις, φαινόμενα ή προβλήματα μετασχηματίζονται σε μαθηματικές δομές, ώστε να αναλυθούν, να ερμηνευθούν και να προβλεφθούν με συστηματικό τρόπο. Δεν ταυτίζεται με την απλή εφαρμογή έτοιμων μαθηματικών τύπων, αλλά συνιστά δυναμικό, κυκλικό και αναστοχαστικό μηχανισμό που συνδέει το πραγματικό με το μαθηματικό επίπεδο, λειτουργώντας ως καίρια «γέφυρα» μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου (Blum & Niss, 1991). Η θεώρηση αυτή διέκρινε ρητά τη μοντελοποίηση από την απλή «εφαρμογή» μαθηματικών εργαλείων, τοποθετώντας στο επίκεντρο τον αμφίδρομο μετασχηματισμό —από την πραγματικότητα στα μαθηματικά και αντίστροφα.

Καίριο θεωρητικό εργαλείο για την εις βάθος περιγραφή αυτής της διαδικασίας αποτελεί ο «κύκλος της μοντελοποίησης», ο οποίος αποτυπώνει διαδοχικά στάδια: κατανόηση της κατάστασης, απλοποίηση, μαθηματικοποίηση, εργασία εντός του μαθηματικού μοντέλου, ερμηνεία και επικύρωση των αποτελεσμάτων. Η ανάλυση της συμπεριφοράς μαθητών και εκπαιδευτικών κατά τη διαχείριση τέτοιων προβλημάτων ανέδειξε ότι οι μεταβάσεις μεταξύ των σταδίων είναι γνωστικά απαιτητικές και συχνά μη γραμμικές, περιλαμβάνοντας συχνά επιστροφές και αναθεωρήσεις προηγούμενων επιλογών (Blum & Leiß, 2007). Το μοντέλο αυτό λειτούργησε τόσο ως περιγραφικό εργαλείο ανάλυσης όσο και ως βάση σχεδιασμού διδακτικών παρεμβάσεων.

Η εξέλιξη της μοντελοποίησης στη διδακτική των μαθηματικών συνδέεται στενά με διεθνείς συζητήσεις για τον ρόλο των μαθηματικών στην εκπαίδευση. Η 14η Διεθνής Μελέτη της ICMΙ ανέδειξε τη μοντελοποίηση ως κεντρικό άξονα ανανέωσης των προγραμμάτων σπουδών, υποστηρίζοντας ότι η κατανόηση της λειτουργικότητας των μαθηματικών είναι εξίσου σημαντική με την κατανόηση των εννοιών τους (Niss, Blum & Galbraith, 2007). Παράλληλα, διεθνείς συγκριτικές έρευνες κατέδειξαν ότι διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα ενσωματώνουν τη μοντελοποίηση με ποικίλους τρόπους —από ρεαλιστικές και εφαρμοστικές έως κοινωνικοκριτικές και πολιτισμικά εστιασμένες προσεγγίσεις— αντανakλώντας πολιτισμικές και παιδαγωγικές διαφοροποιήσεις (Kaiser & Sriraman, 2006). Μια ιδιαίτερη κατεύθυνση αποτελεί η κοινωνικοκριτική προσέγγιση, όπου τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως εργαλείο κατανόησης και αμφισβήτησης κοινωνικών φαινομένων,

ενισχύοντας τον δημοκρατικό χαρακτήρα της εκπαίδευσης (Skovsmose, 2006). Συμπληρωματική είναι η θεωρία «models and modeling», η οποία υποστηρίζει ότι οι μαθητές μαθαίνουν αποτελεσματικότερα όταν οι ίδιοι κατασκευάζουν και αναθεωρούν δικά τους μοντέλα για να ερμηνεύσουν σύνθετες καταστάσεις, μετατοπίζοντας το ενδιαφέρον από τη «σωστή απάντηση» στη διαδικασία οικοδόμησης νοήματος (Doerr & Lesh, 2003).

Η θεσμική αναγνώριση της μοντελοποίησης επιβεβαιώνει την εδραίωσή της στον πυρήνα της σύγχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης: τα Πρότυπα Μαθηματικής Πρακτικής των Η.Π.Α. τονίζουν το «model with mathematics» ως θεμελιώδη δεξιότητα (Common Core State Standards Initiative, 2010), ενώ το πλαίσιο αξιολόγησης της PISA αναγνωρίζει τη μαθηματική διατύπωση, εφαρμογή και ερμηνεία ως θεμελιώδεις διαστάσεις της μαθηματικής επάρκειας (OECD, 2023). Συνολικά, η μαθηματική μοντελοποίηση έχει εξελιχθεί ουσιαστικά από περιφερειακή εφαρμοσμένη δραστηριότητα σε καίριο πυλώνα της διδακτικής των μαθηματικών, αντανakλώντας τη μετατόπιση της μαθηματικής εκπαίδευσης προς πιο αυθεντικές, διερευνητικές και κοινωνικά συνδεδεμένες μορφές μάθησης.

2.2 Γνωστικές και Μεταγνωστικές Δεξιότητες μέσω της Μοντελοποίησης

Η μοντελοποίηση συνιστά, εις βάθος, πολυδιάστατο μηχανισμό ανάπτυξης σύνθετων γνωστικών και μεταγνωστικών διεργασιών. Μέσα από την εμπλοκή τους σε αυθεντικές ή ημι-αυθεντικές καταστάσεις, οι μαθητές καλούνται να διακρίνουν τα ουσιώδη στοιχεία ενός προβλήματος από τις δευτερεύουσες πληροφορίες, να διατυπώσουν παραδοχές και να ελέγξουν τη λογική συνοχή των συλλογισμών τους, ενεργοποιώντας ανώτερες γνωστικές λειτουργίες —ανάλυση, σύνθεση, αξιολόγηση— που καλλιεργούν κριτική σκέψη και μεταγνωστική επίγνωση.

Η κριτική σκέψη ενισχύεται σε κάθε στάδιο του κύκλου μοντελοποίησης: κατά την κατανόηση και οριοθέτηση του προβλήματος (αναγνώριση ουσιωδών δεδομένων, αιτιολόγηση παραδοχών), κατά τη μαθηματοποίηση (μετάβαση από ποιοτικές περιγραφές σε ποσοτικές σχέσεις), κατά την επεξεργασία του μοντέλου (στρατηγική σκέψη, έλεγχος ορθότητας) και —κυρίως— κατά τη φάση της ερμηνείας και επικύρωσης, όπου οι μαθητές εξετάζουν αν το μαθηματικό αποτέλεσμα έχει νόημα στο πραγματικό πλαίσιο και αν οι αρχικές παραδοχές ήταν ρεαλιστικές. Παράλληλα, καλλιεργείται η μεταγνωστική ικανότητα, δηλαδή η επίγνωση και ρύθμιση των ίδιων των γνωστικών διεργασιών: οι μαθητές ελέγχουν αν το μοντέλο τους ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, εντοπίζουν σφάλματα και

αναστοχάζονται πάνω στη διαδικασία που ακολούθησαν, στοιχεία που ενισχύουν την αυτορρύθμιση και την αυτονομία στη μάθηση.

Η μοντελοποίηση καλλιεργεί επίσης δεξιότητες που εκτείνονται πέρα από το καθαρά γνωστικό πεδίο: δημιουργική σκέψη (παραγωγή πολλαπλών αναπαραστάσεων του ίδιου φαινομένου), συνεργατική ικανότητα (διαπραγμάτευση νοημάτων σε ομαδικό πλαίσιο) και ικανότητα τεκμηριωμένης λήψης αποφάσεων κατά την επιλογή παραμέτρων και μεθόδων. Οι δεξιότητες αυτές είναι εν πολλοίς μεταβιβάσιμες σε άλλα γνωστικά πεδία, ενισχύοντας τόσο τη διαθεματική μάθηση όσο και τη διαμόρφωση αυτόνομων, κριτικά σκεπτόμενων μαθητών.

2.3 Η Μοντελοποίηση στα Προγράμματα Σπουδών, στη Διδακτική Πράξη και στον Ρόλο του Εκπαιδευτικού

Η θέση της μαθηματικής μοντελοποίησης στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών έχει ενισχυθεί σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες, με τα εθνικά πρότυπα (Common Core State Standards Initiative, 2010) και τα διεθνή πλαίσια αξιολόγησης (OECD, 2023) να την αναγνωρίζουν ως βασική μαθηματική πρακτική. Ιδιαίτερη έμφαση έχει δοθεί στην αξιολόγηση της μοντελοποίησης, καθώς πρόκειται για σύνθετη ικανότητα που δεν αποτιμάται επαρκώς με παραδοσιακές δοκιμασίες: οι οδηγίες GAIMME προσφέρουν αναλυτικά κριτήρια για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση σε διαφορετικά εκπαιδευτικά επίπεδα, τονίζοντας ότι η επιτυχία δεν έγκειται αποκλειστικά στην ακρίβεια των υπολογισμών αλλά στην ποιότητα της μαθηματοποίησης και της ερμηνείας (COMAP & SIAM, 2016· Garfunkel & Montgomery, 2019).

Η αποτελεσματική διδακτική εφαρμογή της μοντελοποίησης προϋποθέτει σαφείς μαθησιακούς στόχους, κατάλληλη επιλογή προβλημάτων και συστηματική «διδακτική σκαλωσιά» (scaffolding) που καθοδηγεί τους μαθητές στη μετάβαση από το ρεαλιστικό πλαίσιο στη μαθηματική αναπαράσταση και αντίστροφα, διατηρώντας ισορροπία μεταξύ αυτονομίας και καθοδήγησης (Stender & Kaiser, 2015). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι σε αυτό το πλαίσιο καίριος και καθοριστικός: η έρευνα δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται όχι μόνο μαθηματική επάρκεια αλλά και ικανότητα διαχείρισης αβεβαιότητας, ποικιλίας λύσεων και ανοικτών διαδικασιών, γεγονός που μετατοπίζει τα παιδαγωγικά μοντέλα από την αναπαραγωγή μεθόδων σε στοχαστικές και ευέλικτες πρακτικές διδασκαλίας που απαιτούν συστηματική επιμόρφωση (Borromeo Ferri, 2018). Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας συστηματικής προσπάθειας αποτελεί το ευρωπαϊκό πρόγραμμα LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications), το οποίο ανέπτυξε ολοκληρωμένο

υλικό επιμόρφωσης εκπαιδευτικών γύρω από πέντε άξονες: γνωστικό υπόβαθρο, επιλογή δραστηριοτήτων, σχεδιασμό μαθήματος, αξιολόγηση και αναστοχασμό (Maaß & Gurlitt, 2011). Η μοντελοποίηση, τέλος, δεν αντιμετωπίζεται ως καθαρά ατομική γνωστική διαδικασία αλλά ως κοινωνικά διαμεσολαβημένη δραστηριότητα, όπου η συνεργασία, ο διάλογος και η ευθυγράμμιση με τους στόχους του προγράμματος σπουδών ενισχύουν την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας (Stillman, Blum & Biembengut, 2015· Stillman, Blum & Kaiser, 2017).

2.4 Προκλήσεις, Περιορισμοί και Διαθεματικές Προεκτάσεις της Μοντελοποίησης

Παρά τα αναγνωρισμένα παιδαγωγικά οφέλη της, η ενσωμάτωση της μαθηματικής μοντελοποίησης στη σχολική πράξη συνοδεύεται από ιδιαίτερα σημαντικά εμπόδια: τον περιορισμένο διδακτικό χρόνο, την έλλειψη κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού και επιμόρφωσης, και την κυριαρχία εξετασιοκεντρικών πρακτικών που δυσχεραίνουν την υιοθέτηση ανοιχτών, μη τυποποιημένων προβλημάτων (Maaß, 2005). Τα εμπόδια αυτά επιβεβαιώνουν ότι η μοντελοποίηση δεν αποτελεί απλώς διδακτική τεχνική, αλλά απαιτεί αναπλαισίωση της μαθησιακής κουλτούρας και των αξιολογικών μηχανισμών του σχολείου.

Παράλληλα, η μαθηματική μοντελοποίηση διαθέτει σημαντικό διαθεματικό δυναμικό, καθώς συνδέει τα μαθηματικά με τις φυσικές επιστήμες, την οικονομία και άλλα γνωστικά πεδία μέσα από κοινά εργαλεία ανάλυσης πραγματικών φαινομένων. Η αξιοποίηση αυτής της σύνδεσης μπορεί να ενισχύσει τη βιωματική κατανόηση και τη μεταφερόμενη γνώση, υπό την προϋπόθεση ότι θα υπάρξει συστηματικός ανασχεδιασμός των προγραμμάτων σπουδών προς μια πιο ολιστική, διεπιστημονική προσέγγιση.

Κεφάλαιο 3: Ερευνητικό Πλαίσιο και Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων Μαθηματικής Μοντελοποίησης

3.1 Η Μαθηματική Μοντελοποίηση ως Αντικείμενο Έρευνας και ο Κύκλος Μοντελοποίησης του Blum

Η μαθηματική μοντελοποίηση έχει αναδειχθεί τις τελευταίες δεκαετίες σε ένα από τα σημαντικότερα πεδία έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών, καθώς επέτρεψε την εις βάθος διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές συνδέουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με πραγματικές καταστάσεις. Η ερευνητική κοινότητα στράφηκε ιδιαίτερα προς αυτήν όταν διαπιστώθηκε ότι η επιτυχής εκτέλεση μαθηματικών αλγορίθμων δεν συνεπάγεται απαραίτητα ικανότητα εφαρμογής των μαθηματικών σε αυθεντικά προβλήματα (Blum & Niss, 1991). Συγκριτικές μελέτες σε διαφορετικές χώρες ανέδειξαν ποικίλες προσεγγίσεις ενσωμάτωσής της στα αναλυτικά προγράμματα, οδηγώντας στη διαμόρφωση ενός αυτόνομου ερευνητικού πεδίου (Kaiser & Sriraman, 2006).

Στο πλαίσιο αυτό, κεντρικό θεωρητικό εργαλείο παραμένει ο κύκλος μοντελοποίησης του Blum, όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Ενότητα 2.1, ο οποίος αξιοποιείται εδώ ως αναλυτικό εργαλείο για την κατανόηση των διαδικασιών που ακολουθούν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα από την πραγματική ζωή (Blum & Leiß, 2007). Έρευνες κατέδειξαν ότι οι μεταβάσεις μεταξύ αυτών των σταδίων δεν είναι γραμμικές· οι επιτυχημένοι μαθητές μετακινούνται συχνά μπρος-πίσω μεταξύ πραγματικού και μαθηματικού επιπέδου, ενώ όσοι δυσκολεύονται τείνουν να παραμένουν εγκλωβισμένοι σε ένα μόνο στάδιο (Stender & Kaiser, 2015). Ιδιαίτερη ερευνητική προσοχή έχει δοθεί στην απλοποίηση της πραγματικότητας (Kaiser & Sriraman, 2006) και στη μαθηματοποίηση, το σημείο συνάντησης εμπειρίας και μαθηματικής σκέψης (Niss, Blum & Galbraith, 2007), ενώ η θεωρία «models and modeling» ανέδειξε τη σημασία της κατασκευής και αναθεώρησης προσωπικών μοντέλων από τους ίδιους τους μαθητές, μετατοπίζοντας το ενδιαφέρον από το τελικό αποτέλεσμα στη διαδικασία οικοδόμησης νοήματος (Doerr & Lesh, 2003).

Ο κύκλος του Blum χρησιμοποιείται ευρέως ως ερευνητικό εργαλείο για την ανάλυση επιδόσεων σε δραστηριότητες μοντελοποίησης, επιτρέποντας την κατηγοριοποίηση λαθών και δυσκολιών σε συγκεκριμένα στάδια της διαδικασίας (Garfunkel & Montgomery, 2019). Παράλληλα, η κοινωνικοκριτική οπτική υπενθυμίζει ότι η μοντελοποίηση δεν είναι ουδέτερη

γνωστική διαδικασία, αλλά μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο κατανόησης κοινωνικών και πολιτικών ζητημάτων (Skovsmose, 2006), ενώ η αναγκαιότητα ειδικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών για τη διαχείριση ανοιχτών προβλημάτων αναδεικνύεται σε βασικό πεδίο έρευνας (Borromeo Ferri, 2018). Συνολικά, η μαθηματική μοντελοποίηση συνιστά πλέον πολυδιάστατο ερευνητικό πεδίο που συνδυάζει γνωστικές, παιδαγωγικές, κοινωνικές και αξιολογικές διαστάσεις της μάθησης (OECD, 2023).

3.2 Η Έννοια της Επικύρωσης (Validation) στη Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η έννοια της επικύρωσης κατέχει καίρια και κεντρική θέση στη μαθηματική μοντελοποίηση, καθώς αποτελεί το στάδιο κατά το οποίο ελέγχεται η καταλληλότητα και η αξιοπιστία ενός μαθηματικού μοντέλου σε σχέση με την πραγματική κατάσταση που επιχειρεί να περιγράψει. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μαθηματικές ασκήσεις, όπου η ορθότητα προσδιορίζεται κυρίως από τη μαθηματική συνέπεια των υπολογισμών, στη μοντελοποίηση απαιτείται επιπλέον διερεύνηση του κατά πόσο το αποτέλεσμα έχει νόημα στο πραγματικό πλαίσιο (Blum & Leiß, 2007). Η επικύρωση δεν συνιστά απλή τελική επιβεβαίωση της λύσης, αλλά διαδικασία κριτικής εξέτασης των υποθέσεων που υιοθετήθηκαν: οι μαθητές καλούνται να αναρωτηθούν εάν οι αρχικές παραδοχές ήταν ρεαλιστικές και εάν το μοντέλο αντανakλά ουσιαστικά το φαινόμενο (Blum & Niss, 1991).

Ερευνητικά, η επικύρωση θεωρείται το σημείο όπου αποκαλύπτεται με τον πιο εμφανή τρόπο η διαφορά μεταξύ απλής εφαρμογής μαθηματικών τύπων και αυθεντικής μοντελοποίησης: πολλοί μαθητές κατασκευάζουν σωστά ένα μαθηματικό μοντέλο και εκτελούν σωστά τους υπολογισμούς, αλλά δυσκολεύονται να εξετάσουν αν το αποτέλεσμα είναι λογικό στο πραγματικό περιβάλλον —γεγονός που έχει αναδείξει την επικύρωση ως αυτόνομο αντικείμενο έρευνας (Maab, 2005). Έρευνες δείχνουν ότι οι περισσότεροι μαθητές βασίζονται αρχικά στη μαθηματική ορθότητα της λύσης και δυσκολεύονται να εξετάσουν ποιοτικούς ή ρεαλιστικούς παράγοντες, γεγονός που αναδεικνύει την ανάγκη συστηματικής διδασκαλίας στρατηγικών αξιολόγησης πέρα από τον καθαρά υπολογιστικό έλεγχο (Kaiser & Sriraman, 2006).

Η επικύρωση ενισχύει ιδιαίτερος την ανάπτυξη κριτικής σκέψης: οι μαθητές δεν αποδέχονται μηχανιστικά τα αποτελέσματα του μοντέλου τους, αλλά καλούνται να τα αμφισβητήσουν, να τα συγκρίνουν και να τα αξιολογήσουν (Skovsmose, 2006). Η έρευνα έχει επίσης αναδείξει ότι η επικύρωση συνδέεται στενά με τη μεταγνωστική λειτουργία των

μαθητών — τον αναστοχασμό πάνω στις επιλογές που πραγματοποίησαν και την επανεξέταση των βημάτων που ακολούθησαν, στοιχεία που ενισχύουν την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση (Borromeo Ferri, 2018). Η σύνδεση αυτή μεταξύ επικύρωσης και μεταγνώσης έχει τεκμηριωθεί συστηματικά και σε παρεμβατικές μελέτες, οι οποίες κατέδειξαν ότι η ενίσχυση των αυτορρυθμιστικών δεξιοτήτων των μαθητών βελτιώνει άμεσα την ικανότητά τους να αξιολογούν κριτικά τα αποτελέσματα μαθηματικών μοντέλων (Panaoura, Gagatsis & Demetriou, 2009). Παράλληλα, έχει επισημανθεί ότι οι μαθητές συχνά υπερεκτιμούν την επίδοσή τους και δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τους περιορισμούς της σκέψης τους, γεγονός που ενισχύει την τάση παθητικής αποδοχής λανθασμένων ή εξωπραγματικών αποτελεσμάτων (Panaoura & Philippou, 2007).

Ιδιαίτερα σημαντικός αναδεικνύεται και ο ρόλος του εκπαιδευτικού κατά τη διαδικασία της επικύρωσης: οι κατάλληλες ερωτήσεις και παρεμβάσεις του διδάσκοντα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να εντοπίσουν αδυναμίες στο μοντέλο τους και να προχωρήσουν σε αναθεωρήσεις, χωρίς να τους δίνεται απευθείας η σωστή απάντηση (Stender & Kaiser, 2015). Οι κατευθυντήριες οδηγίες GAIMME προτείνουν η αξιολόγηση να μην περιορίζεται στον τελικό αριθμητικό υπολογισμό, αλλά να εξετάζει κατά πόσο οι μαθητές ελέγχουν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων τους και τεκμηριώνουν τις κρίσεις τους (COMAP & SIAM, 2016). Συνολικά, η επικύρωση αποτελεί τον μηχανισμό μέσω του οποίου η μαθηματική μοντελοποίηση αποκτά ουσιαστικό νόημα, μετατρέποντας τους μαθηματικούς υπολογισμούς σε εργαλείο κατανόησης του κόσμου (Garfunkel & Montgomery, 2019).

3.3 Σχεδιασμός Αυθεντικών Δραστηριοτήτων Μοντελοποίησης: Κριτήρια Επιλογής και Διδακτική Οργάνωση

Η επιλογή των προβλημάτων που αξιοποιούνται στη μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί καίριο και καθοριστικό παράγοντα για την επιτυχία της διδακτικής διαδικασίας. Ένα πρόβλημα θεωρείται αυθεντικό όταν προέρχεται από πραγματική κατάσταση που έχει νόημα για τους μαθητές και διατηρεί τα βασικά χαρακτηριστικά της πραγματικής περίπτωσης, χωρίς να μετατρέπεται σε απλή σχολική άσκηση (Blum & Niss, 1991). Βασικά κριτήρια επιλογής αποτελούν η σύνδεση με αναγνωρίσιμες εμπειρίες των μαθητών (Maaß, 2005), η ανοιχτότητα ως προς τη διαδικασία επίλυσης —ώστε να αφήνει περιθώρια για διαφορετικές στρατηγικές και παραδοχές (Kaiser & Sriraman, 2006)— και η απαίτηση επιλογής και αξιολόγησης πληροφοριών από τους ίδιους τους μαθητές (Blum & Leiß, 2007).

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων αυθεντικών προβλημάτων, ευρέως διαδεδομένα στη διεθνή βιβλιογραφία της μαθηματικής μοντελοποίησης, αποτελούν το πρόβλημα του «Γιγάντιου Παπουτσιού» (The Giant Shoe), όπου οι μαθητές καλούνται να εκτιμήσουν το ύψος ενός ανθρώπου με βάση τις διαστάσεις ενός υπερμεγέθους παπουτσιού (Blum & Niss, 1991), το πρόβλημα «Filling Up», που αφορά τη βελτιστοποίηση της ταχύτητας μετακίνησης σε σχέση με την κατανάλωση καυσίμου (Stillman, Blum & Kaiser, 2017), και το «Πρόβλημα των Λεωφορείων» (Bus Problem), όπου εξετάζεται ο αριθμός λεωφορείων που απαιτούνται για τη μεταφορά συγκεκριμένου αριθμού επιβατών (COMAP & SIAM, 2016). Και τα τρία προβλήματα μοιράζονται το κοινό χαρακτηριστικό ότι δεν παρέχουν έτοιμα δεδομένα ή προκαθορισμένη μέθοδο επίλυσης, απαιτώντας από τους μαθητές να διατυπώσουν παραδοχές, να κατασκευάσουν μαθηματικά μοντέλα και να αξιολογήσουν κριτικά τη ρεαλιστικότητα των αποτελεσμάτων τους.

Η πολυπλοκότητα του προβλήματος πρέπει να είναι επαρκής ώστε να ενεργοποιεί τη μοντελοποιητική διαδικασία χωρίς να υπερβαίνει τις γνωστικές δυνατότητες των μαθητών· η υπερβολική απλοποίηση οδηγεί σε μηχανιστική εφαρμογή, ενώ η υπερβολική πολυπλοκότητα προκαλεί γνωστική υπερφόρτωση (Borromeo Ferri, 2018). Σημαντικό κριτήριο αποτελεί επίσης η δυνατότητα διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων, αφού τα αυθεντικά προβλήματα σπάνια παρέχουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες (Doerr & Lesh, 2003), καθώς και η δυνατότητα του προβλήματος να υποστηρίζει ουσιαστικά τη φάση της επικύρωσης (COMAP & SIAM, 2016). Προβλήματα που αντλούνται από πεδία όπως η οικονομία, η βιολογία ή οι κοινωνικές επιστήμες προσφέρουν επιπλέον ευκαιρίες ουσιαστικής εφαρμογής και διαθεματικής σύνδεσης (OECD, 2023), ενώ ζητήματα με κοινωνική ή περιβαλλοντική διάσταση ενισχύουν την κοινωνική ευαισθητοποίηση των μαθητών (Skovsmose, 2006).

Στο επίπεδο του διδακτικού σχεδιασμού, βασική παράμετρος είναι η δημιουργία προβληματικού πλαισίου που παρουσιάζει πραγματική ανάγκη διερεύνησης, όπου η ποιότητα της αρχικής κατάστασης επηρεάζει άμεσα το επίπεδο συμμετοχής των μαθητών (Maaß, 2005). Οι δραστηριότητες οφείλουν να προβλέπουν ευκαιρίες μαθηματοποίησης και πολλαπλές διαδρομές επίλυσης (Doerr & Lesh, 2003), καθώς και φάσεις συζήτησης, επιχειρηματολογίας και αναστοχασμού, μέσα από τις οποίες ενισχύεται η μεταγνωστική ανάπτυξη (Stillman, Blum & Biembengut, 2015). Απαραίτητη είναι επίσης η πρόβλεψη ρητής φάσης επικύρωσης των αποτελεσμάτων και η αξιοποίηση αυθεντικών δεδομένων (Stillman, Blum & Kaiser, 2017). Τέλος, η σύνδεση των δραστηριοτήτων με τους μαθησιακούς στόχους

του προγράμματος σπουδών και η σταδιακή κλιμάκωση της δυσκολίας τους διευκολύνουν την οργανική ενσωμάτωση της μοντελοποίησης στη διδασκαλία (Niss, Blum & Galbraith, 2007).

3.4 Γνωστικά Εμπόδια των Μαθητών και Ερευνητικά Ερωτήματα της Παρούσας Μελέτης

Η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης, παρά τα μαθησιακά της οφέλη, συνοδεύεται από σημαντικά γνωστικά εμπόδια. Αρχική δυσκολία παρουσιάζεται κατά την κατανόηση του πραγματικού προβλήματος: πολλοί μαθητές, αντί να εστιάζουν στη λογική δομή της κατάστασης, τείνουν να αναζητούν άμεσα αριθμούς ή πράξεις, μεταφέροντας στρατηγικές από τυπικές σχολικές ασκήσεις (Maaß, 2005). Δεύτερο εμπόδιο σχετίζεται με την επιλογή δεδομένων και τη διαμόρφωση παραδοχών σε προβλήματα όπου οι πληροφορίες δεν δίνονται με σαφή τρόπο (Kaiser & Sriraman, 2006). Δυσκολίες παρατηρούνται επίσης στη φάση της μαθηματοποίησης, όπου πολλοί μαθητές αδυνατούν να δημιουργήσουν αναπαραστάσεις που αποδίδουν επαρκώς το πρόβλημα, καταλήγοντας σε υπεραπλουστευμένα μοντέλα (Blum & Niss, 1991).

Ιδιαίτερα απαιτητική είναι η διαχείριση της πολυπλοκότητας και της ανοιχτότητας των πραγματικών προβλημάτων, η οποία προκαλεί γνωστική επιβάρυνση και ανασφάλεια σε μαθητές συνηθισμένους σε προκαθορισμένες διαδικασίες (Niss, Blum & Galbraith, 2007· Borromeo Ferri, 2018). Σημαντικό εμπόδιο εντοπίζεται και στη μετάβαση από το μαθηματικό αποτέλεσμα στην πραγματική ερμηνεία: πολλοί μαθητές θεωρούν τη διαδικασία ολοκληρωμένη μόλις προκύψει αριθμητική απάντηση, χωρίς να ελέγχουν τη ρεαλιστικότητά της (Stillman, Blum & Biembengut, 2015). Τέλος, αρκετοί μαθητές παρουσιάζουν δυσκολία στην αναθεώρηση ενός αρχικού μοντέλου όταν αυτό αποδεικνύεται ανεπαρκές, προτιμώντας να διατηρήσουν τις αρχικές τους επιλογές παρά να τις τροποποιήσουν (Stender & Kaiser, 2015).

Με βάση τα παραπάνω θεωρητικά ευρήματα και τα εντοπισμένα γνωστικά εμπόδια, η παρούσα διδακτική παρέμβαση διαμορφώνει, εις βάθος, το ερευνητικό της πλαίσιο γύρω από τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να διαχειρίζονται αυθεντικά προβλήματα πραγματικού κόσμου, με έμφαση όχι στο τελικό αποτέλεσμα αλλά στη διαδικασία ανάπτυξης και αξιολόγησης του μοντέλου (Blum & Leiß, 2007). Ειδικότερα, η μελέτη επιδιώκει να

διερευνήσει: (α) τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν αυθεντικά προβλήματα χωρίς προκαθορισμένη μέθοδο επίλυσης· (β) την ικανότητά τους να μετατρέπουν πραγματικές καταστάσεις σε μαθηματικές αναπαραστάσεις και να αξιολογούν κριτικά τα αποτελέσματα των μοντέλων τους· (γ) τις μορφές λαθών και παρανοήσεων που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία, με ιδιαίτερη έμφαση στη λειτουργία της επικύρωσης ως γνωστικής διεργασίας· και (δ) τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν καλούνται να λάβουν αποφάσεις υπό συνθήκες αβεβαιότητας, καθώς και την ικανότητά τους να τεκμηριώνουν τις επιλογές τους μέσα από επιχειρηματολογία.

Εν κατακλείδι, τα ερευνητικά ερωτήματα και οι στόχοι της παρούσας παρέμβασης διαμορφώνουν πλαίσιο συστηματικής διερεύνησης της μοντελοποιητικής ικανότητας των μαθητών, εστιάζοντας στην κατανόηση προβλημάτων, στη μαθηματοποίηση, στη λήψη αποφάσεων, στην επιχειρηματολογία και —κυρίως— στην επικύρωση των αποτελεσμάτων (Stillman, Blum & Kaiser, 2017).

Κεφάλαιο 4: Διδακτικός σχεδιασμός και διερεύνηση της ικανότητας μαθηματικής μοντελοποίησης των μαθητών

4.1 Περιγραφή δείγματος και ερευνητικής διαδικασίας

Η παρούσα ερευνητική εργασία σχεδιάστηκε με στόχο τη διερεύνηση της ικανότητας μαθηματικής μοντελοποίησης μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από την επίλυση αυθεντικών προβλημάτων που απαιτούν σύνδεση μαθηματικών γνώσεων (όπως ο Ρυθμός Μεταβολής και το Ορισμένο Ολοκλήρωμα) με πραγματικές καταστάσεις. Η επιλογή της συγκεκριμένης ερευνητικής προσέγγισης βασίστηκε στη διεθνή βιβλιογραφία, η οποία υποστηρίζει ότι η αξιολόγηση της μοντελοποιητικής ικανότητας δεν μπορεί να περιορίζεται στην εκτέλεση αλγοριθμικών υπολογισμών, αλλά πρέπει να εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μετασχηματίζουν πραγματικά προβλήματα σε μαθηματικά μοντέλα, αξιολογούν τις παραδοχές τους και ελέγχουν την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων τους (Blum & Leiß, 2007).

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από τριάντα ($N=30$) μαθητές και μαθήτριες της Γ' Λυκείου, οι οποίοι επιλέχθηκαν λόγω του ότι έχουν ήδη διδαχθεί τις βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού και διαθέτουν το απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο για να εμπλακούν σε δραστηριότητες μοντελοποίησης. Για τις ανάγκες της συγκριτικής ανάλυσης, το δείγμα κατανέμεται σε δύο διακριτές ομάδες προσανατολισμού: δεκαπέντε ($N=15$) μαθητές της Ομάδας Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής («Οικονομικό Τμήμα») και δεκαπέντε ($N=15$) μαθητές της Ομάδας Θετικών Σπουδών («Πολυτεχνικό Τμήμα»). Η συγκεκριμένη εκπαιδευτική βαθμίδα θεωρείται κατάλληλη, καθώς οι μαθητές βρίσκονται σε στάδιο ανάπτυξης αφαιρετικής σκέψης και μπορούν να διαχειριστούν σύνθετα προβλήματα που απαιτούν συνδυασμό μαθηματικής γνώσης και λογικής επιχειρηματολογίας (Niss, Blum & Galbraith, 2007).

Η ερευνητική διαδικασία οργανώθηκε με τρόπο ώστε να δοθεί έμφαση όχι μόνο στις τελικές απαντήσεις αλλά και στις ενδιάμεσες γνωστικές διεργασίες που ενεργοποιούνται κατά τη διάρκεια της επίλυσης. Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στη θέση ότι η ουσία της μαθηματικής μοντελοποίησης βρίσκεται στην πορεία ανάπτυξης του μοντέλου και στην κριτική επικύρωση (validation) των αποτελεσμάτων. Για τον λόγο αυτό καταγράφηκαν οι στρατηγικές, οι αλγεβρικές επιλογές, τα σφάλματα και οι δυσκολίες που εμφανίστηκαν σε κάθε στάδιο της διαδικασίας (Maaß, 2005).

Το ερευνητικό εργαλείο βασίστηκε σε δύο κεντρικές δραστηριότητες μοντελοποίησης, οι οποίες αντλούν τη θεωρητική τους θεμελίωση από τη διεθνή βιβλιογραφία και εστιάζουν στη μελέτη του ρυθμού μεταβολής:

- **Η πρώτη δραστηριότητα («Το Ηλεκτρικό Πατίνι»)** αφορά τη μελέτη της κίνησης ενός οχήματος μικροκινητικότητας, όπου οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τη συνολική μεταβολή ταχύτητας και την τελική ταχύτητα μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος. Η δραστηριότητα αυτή εστιάζει στον έλεγχο της λογικότητας των αποτελεσμάτων και στην επικύρωση, καθώς το μαθηματικό μοντέλο παράγει μια εξωπραγματική τιμή ταχύτητας (11.102 m/s), δοκιμάζοντας κατά πόσο οι μαθητές αξιολογούν κριτικά το αποτέλεσμα (Blum & Niss, 1991).
- **Η δεύτερη δραστηριότητα («Κόστος Βιοτεχνίας»)** σχετίζεται με τη μεταβολή του κόστους παραγωγής μιας βιοτεχνίας. Μέσα από την επεξεργασία του οριακού κόστους $K'(x)$, οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν τον ρυθμό μεταβολής με το συνολικό κόστος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα επιτρέπει τη μελέτη της ικανότητας των μαθητών να συνδέουν ποσοτικές αναλύσεις με συνθήκες της οικονομικής πραγματικότητας, διερευνώντας το παράδοξο του μηδενικού μεταβλητού κόστους παραγωγής (Stillman, Blum & Kaiser, 2017).

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω γραπτών απαντήσεων των μαθητών σε δομημένο φύλλο εργασίας. Οι απαντήσεις καταγράφηκαν με τρόπο που επέτρεψε την ανάλυση τόσο των τελικών αποτελεσμάτων όσο και των ενδιάμεσων βημάτων που ακολούθησαν οι συμμετέχοντες, καθώς η διεθνής βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι οι γνωστικές δυσκολίες συχνά εντοπίζονται στα ενδιάμεσα στάδια της μοντελοποίησης (Borromeo Ferri, 2018). Για την ανάλυση των δεδομένων αξιοποιήθηκε το θεωρητικό πλαίσιο του κύκλου μοντελοποίησης του Blum (Blum & Leiß, 2007), με ιδιαίτερη έμφαση στη διάκριση μεταξύ αλγεβρικής εκτέλεσης (execution) και κριτικής επικύρωσης (validation).

«Για την πληρέστερη κατανόηση του γνωστικού υποβάθρου της έρευνας, η διαδικασία της μαθηματικής μοντελοποίησης αντιμετωπίζεται μέσω του θεωρητικού πλαισίου του **Κύκλου Μοντελοποίησης των Blum & Leiß (2007)**. Ο κύκλος αυτός περιγράφει τη μετάβαση από τον πραγματικό κόσμο στον μαθηματικό και πάλι πίσω, μέσα από επτά (7) αλληλένδετες γνωστικές φάσεις:

1. **Κατανόηση (Understanding):** Ο μαθητής κατανοεί το πρόβλημα του πραγματικού

κόσμου και κατασκευάζει το *Μοντέλο Κατάστασης (Situation Model)*.

2. **Απλοποίηση / Δομή (Simplifying / Structuring):** Απομονώνονται οι ουσιώδεις μεταβλητές και απορρίπτονται οι δευτερεύοντες παράγοντες, διαμορφώνοντας το *Πραγματικό Μοντέλο (Real Model)*.
3. **Μαθηματικοποίηση (Mathematising):** Το πραγματικό μοντέλο μεταφράζεται σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα, παράγοντας το *Μαθηματικό Μοντέλο (Mathematical Model)* (π.χ. διαφορικές εξισώσεις, ορισμένα ολοκληρώματα).
4. **Μαθηματική Επεξεργασία (Working Mathematically):** Εφαρμόζονται αλγεβρικοί κανόνες, τεχνικές ολοκλήρωσης και υπολογισμοί για την εξαγωγή των *Μαθηματικών Αποτελεσμάτων (Mathematical Results)*.
5. **Ερμηνεία (Interpreting):** Τα μαθηματικά αποτελέσματα μεταφράζονται πίσω στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου ως *Πραγματικά Αποτελέσματα (Real Results)*.
6. **Επικύρωση (Validating):** Ο μαθητής αξιολογεί αν τα πραγματικά αποτελέσματα είναι λογικά, ρεαλιστικά και αποδεκτά. Αν το αποτέλεσμα είναι παράλογο, ο κύκλος επαναλαμβάνεται (Garfunkel & Montgomery, 2019).
7. **Έκθεση / Παρουσίαση (Exposing):** Διατυπώνεται η τελική απάντηση και η τεκμηρίωση της λύσης.

Η παρούσα έρευνα εστιάζει ιδιαίτερα στη μετάβαση από το στάδιο 4 (Μαθηματική Επεξεργασία) στα στάδια 5 και 6 (Ερμηνεία & Επικύρωση), διερευνώντας κατά πόσο οι μαθητές "κολλάνε" στην αλγεβρική εκτέλεση ή προχωρούν στην κριτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους.

4.2 Δραστηριότητα 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Ρυθμός Μεταβολής Ταχύτητας & Επικύρωση)

Η πρώτη δραστηριότητα του ερευνητικού εργαλείου βασίστηκε στη μελέτη της κίνησης ενός ηλεκτρικού πατινιού, ενός μέσου μικροκινητικότητας της καθημερινής ζωής, το οποίο χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία της μαθηματικής μοντελοποίησης ως παράδειγμα αυθεντικού προβλήματος που απαιτεί τη σύνδεση πραγματικών δεδομένων με μαθηματικές αναπαραστάσεις του Απειροστικού Λογισμού.

Η δραστηριότητα παρουσιάστηκε στους μαθητές μέσω της συνάρτησης του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας $v'(t) = 33t^2 + 2t$ σε m/s^2 για $t \in [0, 10]$ και της αρχικής συνθήκης $v(0) = 2 \text{ m/s}$. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ζητά τον υπολογισμό της συνολικής μεταβολής της

ταχύτητας μέσω ορισμένου ολοκληρώματος, την εύρεση της τελικής ταχύτητας $v(10)$ και τον κριτικό σχολιασμό του αποτελέσματος, γεγονός που το καθιστά ιδιαίτερα κατάλληλο για την αξιολόγηση της μοντελοποιητικής σκέψης (Blum & Niss, 1991).

Κατά το αρχικό στάδιο της δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να κατανοήσουν το πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος και να προσδιορίσουν ποιες πληροφορίες θα χρειαζόντουσαν για να υπολογίσουν τη μεταβολή και την τελική ταχύτητα. Η φάση αυτή ήταν ιδιαίτερα σημαντική, καθώς η βιβλιογραφία επισημαίνει ότι η κατανόηση της κατάστασης αποτελεί το πρώτο κρίσιμο βήμα του κύκλου μοντελοποίησης (Blum & Leiß, 2007). Οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ότι το ζητούμενο δεν ήταν απλώς ένας αριθμητικός υπολογισμός, αλλά η ανάπτυξη μιας λογικής σχέσης μεταξύ του ρυθμού μεταβολής (παράγωγος), της συνολικής συσσώρευσης μεταβολής (ορισμένο ολοκλήρωμα) και της αρχικής τιμής της ταχύτητας (Blum & Leiß, 2007). Στη συνέχεια, οι συμμετέχοντες οδηγήθηκαν στη διατύπωση παραδοχών σχετικά με την κίνηση του πατινιού. Επειδή το πρόβλημα παρείχε έτοιμο μαθηματικό τύπο, οι μαθητές χρειάστηκε να αξιοποιήσουν γνώσεις Απειροστικού Λογισμού για να μεταβούν από τον ρυθμό μεταβολής στη συνάρτηση της ταχύτητας. Η διαδικασία αυτή αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της φάσης μαθηματοποίησης, κατά την οποία επιλέγονται οι κρίσιμες μεταβλητές (Maaß, 2005).

Καθοριστικό στοιχείο της δραστηριότητας ήταν η εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt$. Οι μαθητές κλήθηκαν να χρησιμοποιήσουν ποσοτικές σχέσεις και να μετατρέψουν τις αρχικές τους παραδοχές σε μαθηματικές εκφράσεις. Μέσα από αυτή τη διαδικασία εξετάστηκε η ικανότητά τους να μεταβαίνουν από μια πραγματική κατάσταση κίνησης σε ένα μαθηματικό πλαίσιο ανάλυσης, δεξιότητα που θεωρείται θεμελιώδης στη μοντελοποίηση (Kaiser & Sriraman, 2006). Μετά την κατασκευή και την εφαρμογή του μοντέλου, ακολούθησε η μαθηματική επεξεργασία των δεδομένων. Οι μαθητές πραγματοποίησαν υπολογισμούς με βάση την εύρεση αρχικής συνάρτησης $v(t) = 11t^3 + t^2 + c$ και κατέληξαν σε υπολογισμό της τελικής ταχύτητας $v(10) = 11.102 \text{ m/s}$. Η συγκεκριμένη φάση επέτρεψε την παρατήρηση των αλγεβρικών στρατηγικών που ακολούθησαν οι μαθητές κατά την επίλυση και ανέδειξε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τις μαθηματικές γνώσεις τους σε μη τυποποιημένα πλαίσια (Doerr & Lesh, 2003).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η ποικιλία των ερμηνειών που παρήγαγαν οι μαθητές στο

ερώτημα κριτικής σκέψης. Η ύπαρξη μιας εξωπραγματικής τιμής $v(10) = 11.102 \text{ m/s}$ (περίπου 40.000 km/h) επιβεβαίωσε ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων μοντελοποίησης: ότι οι μαθητές δεν πρέπει να αρκούνται στην παρουσίαση ενός αριθμού, αλλά καλούνται να εξετάσουν κατά πόσο η ταχύτητα που υπολόγισαν θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό ηλεκτρικό πατίνι (Stillman, Blum & Kaiser, 2017). Η παρατήρηση αυτή διαφοροποιεί ουσιαστικά τη μοντελοποίηση από τις παραδοσιακές μαθηματικές ασκήσεις που οδηγούν σε μια ουδέτερη σωστή απάντηση (Stillman, Blum & Kaiser, 2017). Ένα από τα σημαντικότερα στάδια της δραστηριότητας αφορούσε την ερμηνεία των αποτελεσμάτων, επιτρέποντας τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να συνδέουν το μαθηματικό αποτέλεσμα με το αρχικό πρόβλημα και να αποδίδουν νόημα στους υπολογισμούς τους (Borromeo Ferri, 2018).

Η φάση της επικύρωσης (validation) αποτέλεσε το πιο κρίσιμο στοιχείο της δραστηριότητας. Οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν εάν το αποτέλεσμά τους ήταν ρεαλιστικό ή αν οδηγούσε σε παράλογα συμπεράσματα. Για παράδειγμα, οφείλαν να αναρωτηθούν εάν ένα ηλεκτρικό πατίνι θα μπορούσε να κινηθεί με ταχύτητα που υπερβαίνει την ταχύτητα διαφυγής από τη Γη, ή αν το αποτέλεσμα υποδεικνύει την ανάγκη αμφισβήτησης του ίδιου του μαθηματικού μοντέλου. Η συγκεκριμένη διαδικασία θεωρείται βασικός δείκτης αυθεντικής μοντελοποίησης στη διεθνή βιβλιογραφία (COMAP & SIAM, 2016).

Μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων κατέστη δυνατό να εντοπιστούν ορισμένα επαναλαμβανόμενα γνωστικά εμπόδια. Αρκετοί μαθητές επικεντρώθηκαν αποκλειστικά στους αριθμητικούς υπολογισμούς χωρίς να εξετάσουν τη λογικότητα των αποτελεσμάτων τους. Η συμπεριφορά αυτή έχει καταγραφεί συχνά στη βιβλιογραφία και συνδέεται με τη συνήθεια των μαθητών να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως διαδικασία παραγωγής αριθμητικών απαντήσεων και όχι ως εργαλείο κατανόησης της πραγματικότητας (Stillman, Blum & Biembengut, 2015). Η δραστηριότητα προσέφερε επίσης τη δυνατότητα καταγραφής των μορφών επιχειρηματολογίας που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την αιτιολόγηση των σχολίων τους. Η ανάγκη εξήγησης των παραδοχών τους επέτρεψε την αξιολόγηση της ικανότητάς τους να τεκμηριώνουν λογικά τις αποφάσεις τους και να υποστηρίζουν τις εκτιμήσεις που διατύπωσαν, διάσταση ιδιαίτερα σημαντική για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (Stender & Kaiser, 2015).

Από παιδαγωγική άποψη, το πρόβλημα του Ηλεκτρικού Πατινιού λειτούργησε ως

αποτελεσματικό εργαλείο πρόκλησης γνωστικής σύγκρουσης. Η αντίφαση μεταξύ του μαθηματικά "σωστού" υπολογισμού και της φυσικής αδυναμίας του αποτελέσματος ανάγκασε τους μαθητές να αναζητήσουν προσωπικές στρατηγικές επικύρωσης και να αξιοποιήσουν συνδυαστικά γνώσεις από τη Φυσική και τα Μαθηματικά. Το χαρακτηριστικό αυτό συνάδει με τις σύγχρονες θεωρήσεις της μοντελοποίησης που δίνουν έμφαση στην οικοδόμηση νοήματος μέσω διερευνητικών δραστηριοτήτων (Skovsmose, 2006). Καταληκτικά, η συγκεκριμένη δραστηριότητα ανέδειξε με σαφή τρόπο τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής μοντελοποίησης, καθώς ενεργοποίησε διαδικασίες κατανόησης, μαθηματικοποίησης, ερμηνείας και επικύρωσης. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών αναμένεται να προσφέρει πολύτιμα δεδομένα για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζουν αυθεντικά προβλήματα και για τον εντοπισμό των παραγόντων που επηρεάζουν την ανάπτυξη της μοντελοποιητικής τους ικανότητας (Garfunkel & Montgomery, 2019).

4.3 Δραστηριότητα 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οριακό Κόστος & Οικονομική Ερμηνεία)

Η δεύτερη δραστηριότητα του ερευνητικού εργαλείου εστιάζει στην εφαρμογή του Απειροστικού Λογισμού σε ένα οικονομικό πλαίσιο και συγκεκριμένα στη μελέτη του κόστους λειτουργίας μιας βιοτεχνίας παραγωγής θηκών κινητών τηλεφώνων. Το πρόβλημα βασίζεται στην έννοια του οριακού κόστους (ρυθμός μεταβολής του κόστους $K'(x) = 15 - 0,1x$, με γνωστά σταθερά έξοδα $K(0) = 400$ €). Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τη μεταβολή του κόστους για τις πρώτες 300 θήκες μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$. να προσδιορίσουν το συνολικό κόστος $K(300)$ και να σχολιάσουν κριτικά το αποτέλεσμα. Η δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία ως χαρακτηριστικό παράδειγμα σύνδεσης ποσοτικών οικονομικών μοντέλων με την πραγματική λήψη αποφάσεων (Stillman, Blum & Kaiser, 2017).

Κατά το αρχικό στάδιο της δραστηριότητας, οι μαθητές κλήθηκαν να αναλύσουν τη δομή του προβλήματος και να διακρίνουν τις έννοιες του σταθερού κόστους, του μεταβλητού κόστους και του ρυθμού μεταβολής. Η φάση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς η κατανόηση της πραγματικής κατάστασης συνιστά τη βάση για τη σωστή μαθηματικοποίηση (Blum & Leiß, 2007). Οι συμμετέχοντες έπρεπε να αναγνωρίσουν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα της παραγώγου του κόστους δεν εκφράζει το συνολικό κόστος, αλλά αποκλειστικά τη συνολική

μεταβολή του μεταβλητού κόστους για την παραγωγή 300 μονάδων (Blum & Leiß, 2007). Στη συνέχεια, οδηγήθηκαν στη διατύπωση παραδοχών σχετικά με τη συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους. Η διαδικασία αυτή απαιτεί τη μετάβαση από το περιγραφικό πλαίσιο της επιχείρησης σε ένα αυστηρό μαθηματικό μοντέλο, αποτελώντας ένα κλασικό παράδειγμα της φάσης απλοποίησης και δομής του προβλήματος (Maaß, 2005).

Καθοριστικό στοιχείο της δραστηριότητας ήταν η μαθηματική επεξεργασία του ολοκληρώματος $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$. $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = [15x - 0,05x^2]_0^{300} = [15x - 0,05x^2]_0^{300} 4.500 - 4.500 = 0 \text{ €}$. Οι μαθητές κλήθηκαν να εφαρμόσουν τους αλγεβρικούς κανόνες ολοκλήρωσης και να συνδέσουν το αποτέλεσμα με τη συνολική συνάρτηση κόστους $K(x) = 15x - 0,05x^2 + 400$, υπολογίζοντας ότι $K(300) = 400 \text{ €}$. Μέσα από τη διαδικασία αυτή εξετάστηκε η ικανότητα των μαθητών να εκτελούν ακριβείς αλγεβρικούς υπολογισμούς και να διαχειρίζονται τις αρχικές συνθήκες $K(0) = 400 \text{ €}$ (Kaiser & Sriraman, 2006). Η φάση αυτή επέτρεψε την καταγραφή των αλγεβρικών στρατηγικών αλλά και των υπολογιστικών σφαλμάτων που εμφανίστηκαν κατά την αντικατάσταση των ορίων ολοκλήρωσης (Doerr & Lesh, 2003).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η φάση ερμηνείας των αποτελεσμάτων, καθώς το μαθηματικό μοντέλο οδηγεί σε ένα παράδοξο οικονομικό συμπέρασμα: το μεταβλητό κόστος για την παραγωγή 300 θηκών μηδενίζεται, με αποτέλεσμα το συνολικό κόστος $K(300)$ να ισούται ακριβώς με τα αρχικά σταθερά έξοδα 400 €. Οι μαθητές δεν έπρεπε να αντιμετωπίσουν το 0 € απλώς ως έναν ουδέτερο αριθμό, αλλά όφειλαν να διερευνήσουν κατά πόσο είναι οικονομικά βιώσιμο για μια βιοτεχνία να παράγει 300 προϊόντα χωρίς κανένα επιπλέον κόστος υλικών ή εργασίας (Stillman, Blum & Kaiser, 2017). Η διαδικασία αυτή επέτρεψε τη μελέτη της ικανότητας των συμμετεχόντων να αποδίδουν φυσικό και οικονομικό νόημα στους μαθηματικούς υπολογισμούς τους (Borromeo Ferri, 2018).

Η φάση της επικύρωσης (validation) αποτέλεσε και σε αυτή τη δραστηριότητα το πλέον κομβικό σημείο αξιολόγησης. Οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν εάν η συνάρτηση $K'(x) = 15 - 0,1x$ αποτελεί ένα ρεαλιστικό μοντέλο για παραγωγή 300 μονάδων, παρατηρώντας ότι για $x > 150$ ο ρυθμός μεταβολής γίνεται αρνητικός ($K'(300) = -15$), δηλαδή η παραγωγή επιπλέον θηκών "μειώνει" το κόστος. Η κριτική αξιολόγηση αυτού του ευρήματος θεωρείται βασικός δείκτης ουσιαστικής μαθηματικής μοντελοποίησης, καθώς απαιτεί από τον μαθητή να αμφισβητήσει τα όρια ισχύος του μοντέλου (COMAP & SIAM, 2016).

Μέσα από την ανάλυση των απαντήσεων κατέστη δυνατό να εντοπιστούν οι διαφορετικές στάσεις των μαθητών απέναντι στο οικονομικό παράδοξο. Ορισμένοι μαθητές εγκλωβίστηκαν στην αλγοριθμική εκτέλεση και αποδέχτηκαν τυφλά το αποτέλεσμα, ενώ άλλοι ανέπτυξαν αυθαίρετα σενάρια (δικαιολόγηση) ή επισήμαναν ορθά την οικονομική παραλογότητα της κατάστασης. Η συμπεριφορά αυτή επιβεβαιώνει τη σχετική βιβλιογραφία, που επισημαίνει ότι οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να συνδέσουν τους μαθηματικούς τύπους με τους πραγματικούς περιορισμούς της οικονομίας (Stillman, Blum & Biembengut, 2015). Η απαίτηση αιτιολόγησης στο τελευταίο ερώτημα επέτρεψε την αξιολόγηση της κριτικής σκέψης και της μαθηματικής επικοινωνίας των μαθητών (Stender & Kaiser, 2015).

Από παιδαγωγική άποψη, το πρόβλημα της Βιοτεχνίας λειτούργησε ως ισχυρός μοχλός ενεργοποίησης της κριτικής στάσης. Η αντίφαση ανάμεσα στην αλγεβρική ορθότητα του υπολογισμού και στην οικονομική πραγματικότητα ανάγκασε τους μαθητές να αναζητήσουν επιχειρήματα πέρα από τους τύπους (Skovsmose, 2006). Καταληκτικά, η δραστηριότητα αυτή προσέφερε πολύτιμα δεδομένα για τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές της Γ' Λυκείου αντιλαμβάνονται τη σημασία των οριακών μεγεθών και των ορισμένων ολοκληρωμάτων σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου (Garfunkel & Montgomery, 2019).

4.4 Το Ερευνητικό Εργαλείο και ο Επιχειρησιακός Σχεδιασμός των Δραστηριοτήτων

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τη χορήγηση του δομημένου φύλλου εργασίας στους τριάντα (N=30) μαθητές της Γ' Λυκείου (N=15 Οικονομικού Τμήματος και N=15 Πολυτεχνικού Τμήματος). Η διαδικασία διεξήχθη υπό συνθήκες ατομικής γραπτής εξέτασης, χωρίς τη χρήση εξωτερικών βοηθημάτων ή υπολογιστή γραφικών, με μοναδική οδηγία την αναλυτική αποτύπωση όλων των αλγεβρικών βημάτων και την αιτιολόγηση των απαντήσεων στα ερωτήματα κριτικού σχολιασμού.

Για την ανάλυση και κατηγοριοποίηση των γραπτών απαντήσεων υιοθετήθηκε ένα συνδυαστικό θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο εστιάζει σε τρεις κεντρικούς ερευνητικούς άξονες (Borromeo Ferri, 2018; Stillman et al., 2015):

- **1ος Άξονας: Αλγεβρικά & Υπολογιστικά Σφάλματα (Execution Errors):**
Εξετάζεται η τεχνική επάρκεια των μαθητών στην εκτέλεση του Απειροστικού

Λογισμού, όπως η εύρεση αρχικών συναρτήσεων, οι υπολογισμοί δυνάμεων/πράξεων και η αριθμητική αντικατάσταση των ορίων ολοκλήρωσης στο Θεμελιώδες Θεώρημα.

- **2ος Άξονας: Εννοιολογικά Σφάλματα & Μοντελοποίησης (Conceptual Errors):**

Εξετάζεται ο βαθμός κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, όπως η σύγκριση μεταξύ του ρυθμού μεταβολής $f(t)$, της συνολικής μεταβολής Δf (ορισμένο ολοκλήρωμα) και της στιγμιαίας τιμής $f(t)$, καθώς και η εννοιολογική αποσύνδεση του ολοκληρώματος από τη φυσική/οικονομική σημασία του.

- **3ος Άξονας: Στάση Επικύρωσης & Αλγοριθμικός Εγκλωβισμός (Validation Stance):** Αξιολογείται η κριτική στάση των μαθητών απέναντι στα εξωπραγματικά αποτελέσματα (11.102 m/s στο Πατίνι και 0 € μεταβλητό κόστος στη Βιοτεχνία). Η στάση αυτή κωδικοποιήθηκε σε πέντε διακριτά επίπεδα (κλίμακα 0–4) (Stillman et al., 2017):

1. *Επίπεδο 0 (Απουσία) & Επίπεδο 1 (Εκτός Θέματος):* Καμία κωδικοποιήσιμη απάντηση, ή απάντηση χωρίς καμία μαθηματική/λογική αναφορά στο ζητούμενο — ο μαθητής παραμένει πλήρως εγκλωβισμένος στην αλγοριθμική εκτέλεση, χωρίς κανέναν έλεγχο λογικότητας του αποτελέσματος.
2. *Επίπεδο 2 (Περιγραφική) & Επίπεδο 3 (Διαισθητική):* Ο μαθητής είτε απλώς σχολιάζει το αποτέλεσμα χωρίς αμφισβήτηση (επίπεδο 2), είτε αντιλαμβάνεται διαισθητικά την παραδοξότητά του — ενίοτε κατασκευάζοντας δημιουργικά σενάρια δικαιολόγησης — χωρίς όμως πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση (επίπεδο 3).
3. *Επίπεδο 4 (Τεκμηριωμένη):* Ο μαθητής χρησιμοποιεί πλήρως την κριτική του σκέψη, αμφισβητεί ρητά το αποτέλεσμα και τεκμηριώνει με ποσοτικά ή οικονομικά επιχειρήματα τη φυσική ή οικονομική αδυναμία του μοντέλου.

Δραστηριότητα 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Φυσικό Πλαίσιο)

Ένας μαθητής χρησιμοποιεί ένα ηλεκτρικό πατίνι για να πάει στο σχολείο του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το πατίνι έχει ήδη μια ταχύτητα $v(0) = 2$ m/s. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του (επιτάχυνση) για τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα της κίνησης περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$a(t) = v'(t) = 33t^2 + 2t \text{ σε m/s}^2$$

Ερωτήματα:

1. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ταχύτητας του πατινιού από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως $t = 10$ s υπολογίζοντας το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\Delta v = \int_0^{10} a(t) dt$.
2. Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι $v(0) = 2$ m/s, ποια είναι η ταχύτητα του πατινιού τη χρονική στιγμή $t = 10$ s;
3. Με βάση το αποτέλεσμα που βρήκατε για την ταχύτητα στο $t = 10$ s, θεωρείτε ότι το συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο περιγράφει ρεαλιστικά την κίνηση ενός κοινού ηλεκτρικού πατινιού; Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Στόχος και Μαθηματική Πρόβλεψη:

Η παράγουσα συνάρτηση της επιτάχυνσης είναι η

$$v(t) = 11t^3 + t^2 + c.$$

Η συνολική μεταβολή της ταχύτητας στο διάστημα $[0,10]$ ισούται με:

$$\Delta v = \int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt = 11.100$$

Κατά συνέπεια, η τελική ταχύτητα προκύπτει ίση με $v(10) = 11.102$ m/s.

Το αποτέλεσμα αυτό ισοδυναμεί με περίπου 40.000 km/h (ταχύτητα διαστημικού πυραύλου). Η σκόπιμη αυτή υπερβολή στοχεύει στο να ελεγχθεί αν ο μαθητής θα αναγνωρίσει το φυσικό άτοπο ή αν θα αποδεχθεί τυφλά το νούμερο επειδή προέκυψε από σωστές πράξεις.

Δραστηριότητα 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οικονομικό Πλαίσιο)

Μια βιοτεχνία κατασκευάζει θήκες για κινητά τηλέφωνα. Το οριακό κόστος παραγωγής (ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K'(x) = 15 - 0,1x \quad (\text{σε ευρώ ανά θήκη})$$

όπου x είναι ο αριθμός των θηκών.

Τα σταθερά έξοδα της βιοτεχνίας (ενοίκιο, ρεύμα κ.λπ.) ανέρχονται σε $K(0) = 400$ ευρώ.

Ερωτήματα:

1. Υπολογίστε τη μεταβολή του Κόστους από 0 έως 300 θήκες από το ολοκλήρωμα $\Delta K = \int_0^{300} K'(x) dx$.
2. Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος για την παραγωγή 300 θηκών.
3. Κριτική Σκέψη: Συγκρίνετε το κόστος για τις 300 θήκες που βρήκατε, με τα σταθερά έξοδα (400€). Σας φαίνεται λογικό το αποτέλεσμα για μια επιχείρηση που παράγει προϊόντα;

Στόχος και Μαθηματική Πρόβλεψη:

Η παράγουσα συνάρτηση του οριακού κόστους είναι η $K(x) = 15x - 0,05x^2 + c$

Η μεταβολή του κόστους για τις πρώτες 300 μονάδες είναι:

Επομένως, το συνολικό κόστος προκύπτει $K(300) = 400 + 0 = 400$ €.

Το μαθηματικό αυτό μοντέλο παρουσιάζει μια οικονομική «αποτυχία» (disaster), καθώς εμφανίζει τη βιοτεχνία να παράγει 300 θήκες με μηδενικό μεταβλητό κόστος (δωρεάν πρώτες ύλες, εργασία, ρεύμα).

Επιπλέον, για παραγωγή άνω των 150 μονάδων, το οριακό κόστος γίνεται αρνητικό ($K'(x) < 0$). Ζητούμενο είναι να διαπιστωθεί αν οι μαθητές θα αντιληφθούν το παράλογο της δωρεάν παραγωγής ή της μείωσης του συνολικού κόστους σε συνθήκες πραγματικής αγοράς.

Στον Πίνακα 4.1 που ακολουθεί συνοψίζεται η αντιστοίχιση των ερωτημάτων του φύλλου εργασίας με τις φάσεις του κύκλου μοντελοποίησης των Blum & Leiß (2007) και τις προσδοκώμενες κατηγορίες σφαλμάτων.

Δραστηριότητα & Ερώτημα	Μαθηματικός / Διδακτικός Στόχος	Φάση Κύκλου Blum	Προσδοκώμενες Δυσκολίες & Κατηγορίες Σφαλμάτων
Πατίνι - Ερώτημα (α)	Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος ρυθμού μεταβολής ταχύτητας: $\int_0^{10} a(t)dt.$	Μαθηματική Επεξεργασία	Αλγεβρικά λάθη ολοκλήρωσης, υπολογιστικά σφάλματα δυνάμεων (10^3), λάθη πράξεων
Πατίνι - Ερώτημα (β)	Σύνδεση συνολικής μεταβολής Δν με την αρχική συνθήκη $v(0) = 2 \text{ m/s}$ για την εύρεση της $v(10)$	Μαθητικοποίηση & Δομή	Εννοιολογική σύγχυση μεταβολής ταχύτητας Δν με τη στιγμιαία τελική ταχύτητα $v(10)$
Πατίνι - Ερώτημα (γ)	Κριτική αξιολόγηση και επικύρωση της εξωπραγματικής τιμής $v(10) = 11.102 \text{ m/s}$	Ερμηνεία & Επικύρωση	Τυφλή αποδοχή παράλογης τιμής (Γ1) vs Ουσιαστική Επικύρωση φυσικού αδύνατου (Γ3).
Βιοτεχνία - Ερώτημα (α)	Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος οριακού κόστους: $\int_0^{300} K'(x)dx.$	Μαθηματική Επεξεργασία	Αριθμητικά λάθη αντικατάστασης ορίων, λάθη προσήμων (αρνητικό μεταβλητό κόστος).
Βιοτεχνία - Ερώτημα (β)	Υπολογισμός συνολικού κόστους $K(300) = \Delta K + K(0)$ με ενσωμάτωση σταθερών εξόδων (400 €)	Μαθητικοποίηση & Δομή	Παράλειψη προσθήκης σταθερού κόστους $K(0)$, σύγχυση μεταβλητού και συνολικού κόστους.
Βιοτεχνία - Ερώτημα (γ)	Οικονομική ερμηνεία και επικύρωση του μεταβλητού κόστους 0 € για 300 θήκες	Ερμηνεία & Επικύρωση	Στρεβλή/Δημιουργική δικαιολόγηση (Γ2) vs Αμφισβήτηση οικονομικής λογικής του μοντέλου (Γ3).

Πίνακας 4.1: Αντιστοίχιση Ερωτημάτων Φύλλου Εργασίας με τον Κύκλο Μοντελοποίησης & τις Κατηγορίες Σφαλμάτων

Ο παραπάνω σχεδιασμός εξασφαλίζει τη σφαιρική διερεύνηση των μαθησιακών δυσκολιών των μαθητών, συνδέοντας την αλγεβρική εκτέλεση με την εννοιολογική κατανόηση και την κριτική στάση επικύρωσης.

Η συστηματική αυτή αντιστοίχιση των προσδοκώμενων σφαλμάτων με τις φάσεις του κύκλου μοντελοποίησης παρέχει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την αντικειμενική κωδικοποίηση των γραπτών απαντήσεων. Παράλληλα, θέτει τις βάσεις για την αξιολόγηση

της τήρησης των κανόνων επιστημονικής δεοντολογίας και εγκυρότητας κατά τη συλλογή των δεδομένων, οι οποίοι αναλύονται στις ενότητες που ακολουθούν

4.5 Ηθική και Δεοντολογία της Έρευνας

Σε κάθε ερευνητική διαδικασία που εμπλέκει ανθρώπινο δυναμικό, και ιδιαίτερα μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η τήρηση των αρχών της εκπαιδευτικής δεοντολογίας αποτελεί πρωταρχική υποχρέωση (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Για τη διασφάλιση της ηθικής διεξαγωγής της παρούσας έρευνας ακολουθήθηκαν αυστηρά τα παρακάτω στάδια:

- 1. Ενημερωμένη Συναίνεση (Informed Consent):** Πριν από τη χορήγηση του φύλλου εργασίας, οι μαθητές/τριες και των δύο τμημάτων (N=30) ενημερώθηκαν ενδελεχώς για τον σκοπό της έρευνας, τον εθελοντικό χαρακτήρα της συμμετοχής τους, καθώς και για το γεγονός ότι οι επιδόσεις τους στο φύλλο εργασίας δεν θα επηρέαζαν στο ελάχιστο τη σχολική τους βαθμολογία ή την ακαδημαϊκή τους αξιολόγηση.
- 2. Ανωνυμία και Προστασία Προσωπικών Δεδομένων (Anonymity & Confidentiality):** Τα φύλλα εργασίας διανεμήθηκαν χωρίς να ζητηθούν ονοματεπώνυμα. Για την επεξεργασία των ευρημάτων χρησιμοποιήθηκαν ψευδώνυμα (π.χ. *Michael Scofield*, *McQueen*, *Nick*) ή κωδικοποιημένα αναγνωριστικά (π.χ. 2Π, 8Π, 15). Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίστηκε η πλήρης ανωνυμία των συμμετεχόντων και η μη ταυτοποίησή τους κατά τη δημοσίευση των αποτελεσμάτων.
- 3. Δικαίωμα Αποχώρησης:** Διευκρινίστηκε στους μαθητές ότι είχαν τη δυνατότητα να αποχωρήσουν από τη διαδικασία ή να μην παραδώσουν το γραπτό τους σε οποιοδήποτε στάδιο, χωρίς καμία απολύτως επίπτωση.
- 4. Ασφαλής Διαχείριση Δεδομένων:** Τα φυσικά γραπτά φύλλα εργασίας και τα ψηφιοποιημένα αρχεία ανάλυσης αποθηκεύτηκαν σε ασφαλές περιβάλλον προσβάσιμο αποκλειστικά από τον ερευνητή και θα καταστραφούν μετά την ολοκλήρωση και υποστήριξη της διπλωματικής εργασίας.

4.6 Εγκυρότητα και Αξιοπιστία της Ερευνητικής Διαδικασίας

Η διασφάλιση της επιστημονικής εγκυρότητας (validity) και αξιοπιστίας (reliability) αποτελεί θεμελιώδη άξονα για τη θεμελίωση των συμπερασμάτων μιας διερευνητικής έρευνας (Creswell & Creswell, 2018). Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, η επιστημονική αυστηρότητα ενισχύθηκε μέσω των ακόλουθων μηχανισμών:

1. **Εγκυρότητα Περιεχομένου (Content Validity):** Το ερευνητικό εργαλείο (φύλλο εργασίας) σχεδιάστηκε με βάση το ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου και το θεωρητικό πλαίσιο της μαθηματικής μοντελοποίησης του Blum. Οι δραστηριότητες αξιολογήθηκαν από έμπειρους εκπαιδευτικούς Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης ως προς τη σαφήνεια των διατυπώσεων, τον βαθμό δυσκολίας και την καταλληλότητά τους για τη μέτρηση του ρυθμού μεταβολής και του ορισμένου ολοκληρώματος.
2. **Πιλοτική Εφαρμογή (Pilot Testing):** Πριν από την τελική χορήγηση, πραγματοποιήθηκε δοκιμαστική εφαρμογή του φύλλου εργασίας σε περιορισμένο αριθμό μαθητών εκτός του τελικού δείγματος, προκειμένου να εντοπιστούν τυχόν ασαφείς διατυπώσεις, να εκτιμηθεί ο απαιτούμενος χρόνος συμπλήρωσης και να βελτιστοποιηθούν τα ερωτήματα κριτικού σχολιασμού.
3. **Τριγωνοποίηση Ανάλυσης (Investigator Triangulation / Cross-checking):** Για την αποφυγή υποκειμενικότητας στην κατηγοριοποίηση των σφαλμάτων (αλγεβρικά, εννοιολογικά) και των στάσεων επικύρωσης (κλίμακα 0–4), η κωδικοποίηση των γραπτών απαντήσεων πραγματοποιήθηκε με διασταυρούμενο έλεγχο (cross-checking) βάσει προκαθορισμένου οδηγού διόρθωσης.
4. **Οικολογική Εγκυρότητα (Ecological Validity):** Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε στο φυσικό εκπαιδευτικό περιβάλλον των μαθητών (τάξη) κατά τη διάρκεια της κανονικής εκπαιδευτικής περιόδου, εξασφαλίζοντας ότι οι αντιδράσεις και οι συλλογισμοί των μαθητών αποτυπώνουν τις πραγματικές τους γνωστικές συνήθειες.

4.7 Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε ο ολοκληρωμένος μεθοδολογικός σχεδιασμός της έρευνας. Αρχικά, αναλύθηκε ο σκοπός της μελέτης και η συγκρότηση του δείγματος των τριάντα (N=30) μαθητών/τριών της Γ' Λυκείου (15 Οικονομικού και 15 Πολυτεχνικού Τμήματος).

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε το θεωρητικό πλαίσιο του κύκλου μοντελοποίησης του Blum, αναλύθηκαν οι δύο δραστηριότητες του ερευνητικού εργαλείου («Το Ηλεκτρικό Πατίνι» και

«Κόστος Βιοτεχνίας»), και παρατέθηκε ο πίνακας αντιστοίχισης των ερωτημάτων με τις προσδοκώμενες κατηγορίες σφαλμάτων.

Τέλος, τεκμηριώθηκε η τήρηση των κανόνων ηθικής και δεοντολογίας, καθώς και οι διαδικασίες διασφάλισης της εγκυρότητας και αξιοπιστίας των ευρημάτων.

Κεφάλαιο 5: Εμπειρική έρευνα – Η ικανότητα επικύρωσης (validation) μαθητών Γ΄ λυκείου στον απειροστικό λογισμό

5.1 Μεθοδολογία της Έρευνας και Ερευνητικά Ερωτήματα

Όπως αναλύθηκε διεξοδικά στα προηγούμενα θεωρητικά κεφάλαια της παρούσας εργασίας, η παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση τείνει να εστιάζει μονομερώς στην αλγοριθμική επάρκεια και την εκτέλεση μηχανικών υπολογισμών. Το γεγονός αυτό δημιουργεί σταδιακά στους μαθητές την πεποίθηση ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα αποκομμένο, τεχνητό περιβάλλον κανόνων, οι οποίοι δεν επικοινωνούν με την αντικειμενική πραγματικότητα. Προκειμένου να διερευνηθεί η έκταση αυτού του φαινομένου στο επίπεδο της σχολικής τάξης, σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε μια πρωτογενής, ποιοτική έρευνα πεδίου (Empirical Study).

Κεντρικός σκοπός της έρευνας είναι η αποτίμηση των αντανακλαστικών κριτικής σκέψης των μαθητών και, ειδικότερα, της ικανότητάς τους να ενεργοποιούν το στάδιο της επικύρωσης (Validation) στον κύκλο μοντελοποίησης των Blum & Leiss. Το στάδιο αυτό αποτελεί τον συνδετικό κρίκο που επιτρέπει στον λύτη να ελέγξει αν τα μαθηματικά αποτελέσματα που παρήγαγε συμβαδίζουν με τη λογική του πραγματικού κόσμου ή αν πρέπει να αναθεωρηθούν.

Με βάση τον σκοπό αυτό, διαμορφώθηκαν τα ακόλουθα **κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα**:

1. **E.E.1:** Σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου, έχοντας διδαχθεί τις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού (παράγωγοι, ορισμένα ολοκληρώματα), είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τη φυσική ή οικονομική αστοχία ενός μαθηματικού μοντέλου (Modeling Disaster) που οδηγεί σε εξωπραγματικά αποτελέσματα;
2. **E.E.2:** Πώς διαφοροποιείται η ικανότητα μοντελοποίησης, η χρήση βιωματικών γνώσεων και η στάση επικύρωσης (Validation) ανάμεσα σε μαθητές Θετικού/Πολυτεχνικού Προσανατολισμού και μαθητές Οικονομικού Προσανατολισμού;

5.1.1 Το Δείγμα της Έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές και μαθήτριες της Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου, οι οποίοι είχαν ήδη ολοκληρώσει τη διδασκαλία των βασικών εννοιών του Διαφορικού και

Ολοκληρωτικού Λογισμού, με έμφαση στον ρυθμό μεταβολής και τις εφαρμογές του. Οι συμμετέχοντες επιλέχθηκαν σκόπιμα ώστε να αντιπροσωπεύουν δύο διακριτές Ομάδες Προσανατολισμού με διαφορετικές ακαδημαϊκές βλέψεις:

- **Ομάδα Α (Θετικών & Πολυτεχνικών Σπουδών):** Μαθητές με υψηλό υπόβαθρο στα καθαρά Μαθηματικά και τη Φυσική, προσανατολισμένοι σε Πολυτεχνικές και Θετικές σχολές.
- **Ομάδα Β (Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής):** Μαθητές προσανατολισμένοι σε Οικονομικές επιστήμες, οι οποίοι έρχονται σε επαφή με έννοιες της αγοράς και της επιχειρηματικότητας.

Για τη διασφάλιση των κανόνων της επιστημονικής δεοντολογίας, η συμμετοχή των μαθητών ήταν εθελοντική, ενώ εξασφαλίστηκε η πλήρης ανωνυμία τους κατά την επεξεργασία των δεδομένων. Στους μαθητές ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν ένα **ψευδώνυμο** στην κορυφή του φυλλαδίου τους, καθώς και να δηλώσουν την ομάδα προσανατολισμού τους. Η χρήση ψευδωνύμων επιλέχθηκε ερευνητικά καθώς α) μειώνει το άγχος της βαθμολόγησης, ενθαρρύνοντας την ειλικρινή έκφραση στο ερώτημα της Κριτικής Σκέψης, και β) επιτρέπει στον ερευνητή να αναφέρεται ποιοτικά σε συγκεκριμένες αποκρίσεις κατά το στάδιο της ανάλυσης (π.χ. «ο μαθητής με το ψευδώνυμο *Nick* ανέφερε...»).

5.1.2 Μέθοδος Συλλογής και Ανάλυσης Δεδομένων

Ως ερευνητικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε ένα ειδικά σχεδιασμένο γραπτό δοκίμιο (φυλλάδιο δραστηριοτήτων) δύο θεμάτων (Φυσικού και Οικονομικού πλαισίου), το οποίο διανεμήθηκε στους μαθητές εντός του σχολικού ωραρίου. Η ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τη συλλογή των γραπτών είναι κατά βάση **ποιοτική**, εστιάζοντας στην κατηγοριοποίηση των απαντήσεων με βάση τα επίπεδα κατανόησης του πλαισίου, ενώ συνοδεύεται από στοιχειώδη **ποσοτικά δεδομένα** (συχνότητες και ποσοστά εμφάνισης) προκειμένου να αναδειχθούν οι στατιστικές τάσεις μεταξύ των δύο δειγμάτων.

5.2 Το Σκεπτικό και η Παρουσίαση του Ερευνητικού Εργαλείου

Για τις ανάγκες της εμπειρικής έρευνας σχεδιάστηκε ένα στοχευμένο φυλλάδιο δραστηριοτήτων, το οποίο περιλαμβάνει δύο προβλήματα βασισμένα στην εύρεση της

συνολικής μεταβολής και της τελικής τιμής ενός μεγέθους μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος. Τα προβλήματα αυτά ανήκουν στην κατηγορία των «Αποτυχιών Μοντελοποίησης» (Modeling Disasters). Αυτό σημαίνει ότι, ενώ οι μαθηματικοί τύποι και οι δοθείσες συναρτήσεις οδηγούν σε απόλυτα ορθούς αλγοριθμικούς υπολογισμούς (Mathematical Working), τα αποτελέσματα που παράγονται είναι πρακτικά αδύνατα, εξωπραγματικά ή αντιφατικά όταν μεταφραστούν πίσω στο αρχικό τους πλαίσιο (Context).

Η επιλογή δύο διαφορετικών πλαισίων (ενός φυσικού και ενός οικονομικού) έγινε με σκοπό να ελεγχθεί αν το θεματικό υπόβαθρο της άσκησης ενεργοποιεί διαφορετικά τη βιωματική ή την εξειδικευμένη γνώση των μαθητών ανάλογα με την κατεύθυνσή τους.

5.2.1 Δραστηριότητα 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Φυσικό Πλαίσιο)

Η πρώτη δραστηριότητα του ερευνητικού εργαλείου, όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Ενότητα 4.2, αφορά τον υπολογισμό της τελικής ταχύτητας ενός ηλεκτρικού πατινιού μέσω ορισμένου ολοκληρώματος. Η αναμενόμενη «σωστή» απάντηση $v(10) = 11.102 \text{ m/s}$ αντιστοιχεί σε ταχύτητα διαστημικού πυραύλου — μια σκόπιμη υπερβολή που στοχεύει στο να ελεγχθεί αν ο μαθητής θα αναγνωρίσει το φυσικό άτοπο ή θα αποδεχθεί τυφλά το αποτέλεσμα επειδή προέκυψε από σωστές πράξεις.

5.2.2 Δραστηριότητα 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οικονομικό Πλαίσιο)

Η δεύτερη δραστηριότητα, όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Ενότητα 4.3, αφορά το οριακό κόστος παραγωγής μιας βιοτεχνίας θηκών κινητών. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα $K(300) = K(0) = 400 \text{ €}$ αποτελεί οικονομικό παράδοξο: η παραγωγή 300 θηκών κοστίζει, μαθηματικά, ακριβώς όσο η παραγωγή καμίας μονάδας, αφού για παραγωγή άνω των 150 μονάδων το οριακό κόστος γίνεται αρνητικό.

5.3 Ανάλυση Άσκησης 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι (Φυσικό Πλαίσιο)

Στην παρούσα ενότητα εξετάζονται οι αποκρίσεις των μαθητών αναφορικά με το πρώτο πρόβλημα, το οποίο πραγματεύεται την κίνηση ενός ηλεκτρικού πατινιού. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη σύγκριση της αλγοριθμικής επάρκειας και της ικανότητας επικύρωσης (Validation) μεταξύ των δύο ομάδων προσανατολισμού.

5.3.1 Ομάδα Πολυτεχνικού Προσανατολισμού

Οι μαθητές με προσανατολισμό τις Θετικές και Πολυτεχνικές Σπουδές επέδειξαν εξαιρετικά υψηλή **αλγοριθμική επάρκεια**. Η συντριπτική πλειονότητα των συμμετεχόντων (άνω του 85%) εφάρμοσε με απόλυτη τεχνική ακρίβεια το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, προσδιορίζοντας ορθά τη συνολική μεταβολή της ταχύτητας στα 11.100 m/s και, κατ' επέκταση, την τελική ταχύτητα στα 11.102 m/s.

Ωστόσο, στο επίπεδο της επικύρωσης (Validation) και της κριτικής προσέγγισης του πλαισίου (Context), καταγράφηκε μια σαφής τάση **«αποστοίχισης» (de-contextualization)**. Οι μαθητές της κατηγορίας αυτής έτειναν να αντιμετωπίζουν τη δραστηριότητα ως ένα «κλειστό» μαθηματικό παιχνίδι, όπου η εγκυρότητα του αποτελέσματος εξαρτάται αποκλειστικά από την ορθότητα της υπολογιστικής διαδικασίας. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του μαθητή «Σκλαβενίτης», ο οποίος δήλωσε ότι πρόκειται για «λογικά αποτελέσματα» επειδή παρήγαγαν «ωραία νούμερα», αγνοώντας πλήρως τη φυσική αδυναμία του γεγονότος. Παράλληλα, ο μαθητής «Ιβίσκος» περιόρισε την κριτική του σκέψη στην εσωτερική μαθηματική επαλήθευση των πράξεων. Η αντίδραση αυτή αναδεικνύει μια βαθύτερη αντίληψη περί των μαθηματικών ως αυτοδύναμου, τυπικού συστήματος κανόνων, αποκομμένου από την εμπειρική πραγματικότητα — ακριβώς τη διάκριση που επισημαίνουν οι Blum & Niss (1991) ανάμεσα στην απλή «εφαρμογή» τύπων και την ουσιαστική μοντελοποίηση.

Στις περιπτώσεις όπου οι μαθητές αντιλήφθηκαν το εξωπραγματικό μέγεθος της ταχύτητας (η οποία ξεπερνά κατά πολύ την ταχύτητα του ήχου), προτίμησαν να επιστρατεύσουν το χιούμορ ή την ειρωνεία, παρά να αμφισβητήσουν τη δομή του ίδιου του μαθηματικού μοντέλου. Ενδεικτικά, ο μαθητής «Vazelos13» σχολίασε ότι «το πατίνι εκτοξεύθηκε στο διάστημα», ενώ το «Αγγούρι» σημείωσε ότι η ταχύτητα αυτή δεν προκύπτει «ούτε με την ταχύτητα του φωτός». Η ρητή και δομική απόρριψη του μοντέλου με επιστημονικά κριτήρια («δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα») παρατηρήθηκε σε ελάχιστα γραπτά της ομάδας αυτής (π.χ. «Μήτσος», «Σώτος»)

5.3.2 Ομάδα Οικονομικού Προσανατολισμού

Σε πλήρη αντίθεση με την πολυτεχνική ομάδα, οι μαθητές του Οικονομικού Προσανατολισμού παρουσίασαν αισθητά χαμηλότερη αυτοματοποίηση και συχνά

υπολογιστικά σφάλματα κατά τη διαχείριση του ορισμένου ολοκληρώματος. Αρκετοί μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην εύρεση της παράγουσας ή στην αντικατάσταση των ορίων ολοκλήρωσης (π.χ. «Λίνα», «Mcqueen», «Μαρίκα»).

Παρά την υπολογιστική αυτή υστέρηση, η συγκεκριμένη ομάδα εμφάνισε σημαντικά υψηλότερη κριτική αντίσταση απέναντι στο παράλογο φυσικό αποτέλεσμα. Οι μαθητές δεν εγκλωβίστηκαν στην αυθεντία του τύπου. Η μαθήτρια «Μαρίκα», παρά το αριθμητικό της λάθος, εξέφρασε άμεση απορία («Πώς γίνεται να έχει τόση μεγάλη ταχύτητα το πατίνι;»), ενώ το «επώνυμο» απέρριψε κατηγορηματικά τη μαθηματική συνθήκη δηλώνοντας ότι «δεν υπάρχει καμία περίπτωση».

Το πιο αξιοσημείωτο εύρημα, ωστόσο, προέκυψε από τη μετα-γνωστική τοποθέτηση του μαθητή «Nick». Ο μαθητής, αποτυπώνοντας με ακρίβεια το δομικό πρόβλημα της παραδοσιακής διδασκαλίας των Μαθηματικών, σημείωσε: «Παρ' όλους τους υπολογισμούς, το αντιλαμβάνομαι στα πλαίσια των μαθημάτων και όταν κάτι αντίστοιχο πρέπει να το αντιμετωπίσω στη ζωή κολλάω». Η δήλωση αυτή επιβεβαιώνει ότι οι μαθητές έχουν εκπαιδευτεί να διαχωρίζουν τα σχολικά μαθηματικά από τη βιωματική τους πραγματικότητα, θεωρώντας τα δύο αυτά πεδία ως μη επικοινωνούντα δοχεία.

5.4 Ανάλυση Άσκησης 2: Κόστος Βιοτεχνίας (Οικονομικό Πλαίσιο)

Η δεύτερη δραστηριότητα του ερευνητικού εργαλείου πραγματεύεται τον ρυθμό μεταβολής του κόστους (οριακό κόστος) μιας βιοτεχνίας παραγωγής θηκών κινητών τηλεφώνων. Το συγκεκριμένο πρόβλημα σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε η μαθηματικά ορθή επίλυση του ολοκληρώματος να παράγει μια οικονομική αντίφαση (μηδενικό μεταβλητό κόστος για 300 μονάδες προϊόντος), θέτοντας υπό δοκιμασία τα αντανεκλαστικά επικύρωσης (Validation) των μαθητών σε ένα καθαρά επιχειρηματικό πλαίσιο.

5.4.1 Ομάδα Πολυτεχνικού Προσανατολισμού

Σε αντιστοιχία με την πρώτη άσκηση, οι μαθητές του Πολυτεχνικού Προσανατολισμού ανταποκρίθηκαν με μεγάλη ευκολία στο αλγοριθμικό μέρος της δραστηριότητας. Εντόπισαν την κατάλληλη παράγουσα συνάρτηση και υπολόγισαν ορθά ότι η μεταβολή του κόστους ισούται με 0 €, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το συνολικό κόστος $K(300)$ παραμένει ίσο με τα σταθερά έξοδα της επιχείρησης (400 €).

Όταν κλήθηκαν να σχολιάσουν την αξιοπιστία του μοντέλου (Κριτική Σκέψη), η πλειονότητα των μαθητών επιχείρησε να **εκλογικεύσει μαθηματικά** το παράδοξο αποτέλεσμα, προκειμένου να μην έρθει σε ρήξη με την εγκυρότητα των πράξεών της. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μαθήτρια «NASA», η οποία, για να δικαιολογήσει τη δωρεάν παραγωγή 300 θηκών, ανέφερε δημιουργικά ότι «τα υλικά τα παρείχε η μητέρα φύση». Από την άλλη πλευρά, ο μαθητής «Σκλαβενίτης» εξέφρασε την τυφλή του εμπιστοσύνη στο μοντέλο δηλώνοντας με χιούμορ ότι θα ήθελε να εργαστεί σε αυτή τη βιοτεχνία, ενώ ο μαθητής «Μαλόκ» εμφάνισε τόσο έντονη αναστολή κριτικής σκέψης που δέχτηκε ένα αρνητικό συνολικό κόστος (-4.100 €, λόγω υπολογιστικού σφάλματος) χωρίς να προβληματιστεί. Η δημιουργική αυτή εξήγηση της «NASA» συνιστά μια μορφή γνωστικής διαπραγμάτευσης: αντί να αμφισβητήσει το ίδιο το μαθηματικό μοντέλο, η μαθήτρια κατασκεύασε μια εναλλακτική αφήγηση πραγματικότητας που «σώζει» το ήδη υπολογισμένο αποτέλεσμα, αποφεύγοντας τη γνωστική σύγκρουση ανάμεσα στην αλγεβρική ορθότητα και την οικονομική παραλογία. Αντίστοιχα, η περίπτωση του «Μαλόκ» καταδεικνύει πόσο ισχυρή μπορεί να είναι η εμπιστοσύνη στην αλγοριθμική διαδικασία, ώστε ακόμη και ένα εξόφθαλμα παράλογο αρνητικό κόστος να μη λειτουργήσει ως έναυσμα αμφισβήτησης.

Μόνο οι μαθητές που επέδειξαν το ανώτατο επίπεδο μοντελοποίησης (π.χ. «*Ηλιος*», «*Σώτος*», «*Μήτσος*») κατάφεραν να διαχωρίσουν τη μαθηματική ορθότητα από την οικονομική πραγματικότητα. Ο μαθητής «*Ηλιος*» προχώρησε αυτόβουλα στον υπολογισμό του κόστους για την 301η μονάδα διαπιστώνοντας ότι αυτό μειώνεται, και πρότεινε τεκμηριωμένα το κλείσιμο της επιχείρησης, ενώ ο «*Σώτος*» προέβλεψε την άμεση χρεοκοπία της βιοτεχνίας λόγω της μη ρεαλιστικής φύσης των δεδομένων.

5.4.2 Ομάδα Οικονομικού Προσανατολισμού

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, οι μαθητές του Οικονομικού Προσανατολισμού βρέθηκαν στο γνωστικό τους «γήπεδο». Παρά το γεγονός ότι καταγράφηκαν αρκετά υπολογιστικά σφάλματα κατά την εκτέλεση του ολοκληρώματος (π.χ. από τους μαθητές «*Αίνα*», «*Αν η γιαγιά μου είχε ρόδες*», «*επώνυμο*»), η ενεργοποίηση του **εξειδικευμένου γνωστικού τους υπόβαθρου (domain-specific knowledge)** ήταν άμεση και καθολική.

Οι μαθητές αυτής της ομάδας αρνήθηκαν να αποδεχθούν παθητικά το αποτέλεσμα και χρησιμοποίησαν αυστηρά οικονομική ορολογία για να ασκήσουν κριτική. Η μαθήτρια «*Μαρίκα*» εξέφρασε ρητή άρνηση δηλώνοντας: «Δεν γίνεται το συνολικό κόστος για 300

θήκες να είναι ίσο με τη μηδενική παραγωγή». Ο μαθητής «Τσούρος» σχολίασε ειρωνικά τη μαθηματική συνθήκη, σημειώνοντας ότι θα ήθελε να ανοίξει και ο ίδιος μια τέτοια επιχείρηση στην οποία θα μπορούσε να αυξάνει την παραγωγή «χωρίς να επιβαρύνεται με κόστος παραγωγής».

Το πιο ενδιαφέρον ερευνητικό εύρημα προέκυψε από γραπτά μαθητών (όπως της «Άριελ» και του «Nick») οι οποίοι, παρά τις δυσκολίες τους στις πράξεις, προσπάθησαν να προσεγγίσουν το πρόβλημα με εμπορικούς όρους, υπολογίζοντας το μέσο κόστος ανά μονάδα προϊόντος και την ελάχιστη τιμή πώλησης που θα έπρεπε να οριστεί στην αγορά για να υπάρξει κέρδος. Η προσέγγιση αυτή αποδεικνύει ότι το οικονομικό πλαίσιο λειτούργησε ως καταλύτης, επιτρέποντας στους μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές επικύρωσης (Validation) που βασίζονται στην κατανόηση του πλαισίου και όχι στην τυφλή καθοδήγηση των μαθηματικών τύπων.

5.5 Συγκεντρωτική Παρουσίαση Ερευνητικών Δεδομένων (Πίνακες Αποτελεσμάτων)

Προκειμένου να αποτυπωθεί με μεθοδολογική ακρίβεια η ποιότητα των απαντήσεων στο ερώτημα της κριτικής σκέψης, οι αποκρίσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σε μια κλίμακα (0–4), η οποία παρουσιάζεται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 5.1: Συνοπτική κλίμακα κωδικοποίησης (0–4) των απαντήσεων στο ερώτημα κριτικής σκέψης.

Επίπεδο	Κατηγορία
0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός χωρίς μαθηματική αναφορά
2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος
3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση

Επίπεδο	Κατηγορία
4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση

Στη συνέχεια, τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν και συγκεντρώθηκαν προκειμένου να αναδειχθούν οι τάσεις των δύο ομάδων.

Η συνολική εικόνα της τεχνικής και αλγεβρικής επάρκειας των δύο τμημάτων, όπως αποτυπώθηκε στους υπολογισμούς των δύο ασκήσεων, συνοψίζεται στον ακόλουθο συγκεντρωτικό πίνακα:

Πίνακας 5.2: Σύγκριση της ορθότητας των μαθηματικών υπολογισμών μεταξύ των δύο ομάδων προσανατολισμού, ανά άσκηση..

Άσκηση	Πολυτεχνικό (N=15)			Οικονομικό (N=15)		
	Σωστές (N)	Λάθος (N)	% Σωστές	Σωστές (N)	Λάθος (N)	% Σωστές
Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι	13	2	86.7%	3	12	20.0%
Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας	12	3	80.0%	6	9	40.0%
Σύνολο (και οι δύο ασκήσεις)	25	5	83.3%	9	21	30.0%

Στην Άσκηση 1 (Ηλεκτρικό Πατίνι), το Πολυτεχνικό τμήμα πέτυχε ορθότητα 86,7% έναντι μόλις 20,0% στο Οικονομικό — διαφορά 66,7 ποσοστιαίων μονάδων. Στην Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας) η διαφορά παραμένει σημαντική αλλά μικρότερη (80,0% έναντι 40,0%, διαφορά 40,0 ποσοστιαίων μονάδων). Συνολικά, το Πολυτεχνικό τμήμα εμφανίζει ορθότητα 83,3% έναντι 30,0% στο Οικονομικό.

Για να διερευνηθεί συγκριτικά ο τρόπος με τον οποίο ενεργοποιήθηκε το στάδιο της επικύρωσης (Validation) στις δύο ομάδες, ο παρακάτω πίνακας καταγράφει τις απόλυτες συχνότητες και τα ποσοστά των απαντήσεων σε ολόκληρο το εύρος της κλίμακας κριτικής σκέψης:

Πίνακας 5.3: Κατανομή των απαντήσεων στο ερώτημα «Κριτική Σκέψη» ανά επίπεδο κωδικοποίησης (0–4) και ομάδα προσανατολισμού.

Επίπεδο	Κατηγορία	Πολυτεχνικό (N=15 / 30 απαντήσεις)		Οικονομικό (N=15 / 30 απαντήσεις)	
		N	%	N	%
0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση	3	10.0%	3	10.0%
1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο	3	10.0%	9	30.0%
2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη	6	20.0%	5	16.7%
3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας	16	53.3%	7	23.3%
4	Αιτιολογημένη / ποσοτική / οικονομικά τεκμηριωμένη αξιολόγηση	2	6.7%	6	20.0%
Σύνολο		30	100.0%	30	100.0%

Μέσο επίπεδο Κριτικής Σκέψης: Πολυτεχνικό = 2.37, Οικονομικό = 2.13

(κλίμακα 0–4).

Το Πολυτεχνικό τμήμα συγκεντρώνεται έντονα στο επίπεδο 3 (53,3%) — διαισθητική αναγνώριση μη ρεαλιστικότητας χωρίς πλήρη τεκμηρίωση — ενώ το Οικονομικό τμήμα εμφανίζει πιο ομοιόμορφη κατανομή σε όλα τα επίπεδα, με σαφώς υψηλότερο ποσοστό τόσο στο κατώτερο επίπεδο 1 (30,0% έναντι 10,0%) όσο και στο ανώτερο επίπεδο 4 (20,0% έναντι 6,7%). Το εύρημα αυτό υποδηλώνει μεγαλύτερη διασπορά στην ποιότητα της κριτικής σκέψης στο Οικονομικό τμήμα σε σχέση με το Πολυτεχνικό.

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 5.4, το Πολυτεχνικό τμήμα πέτυχε ιδιαίτερα υψηλή ορθότητα και στις δύο ασκήσεις, γεγονός που επιβεβαιώνει την ισχυρή αλγοριθμική επάρκεια της ομάδας αυτής.

Πίνακας 5.4: Ορθότητα Υπολογισμών ανά Άσκηση (Πολυτεχνικό)

Άσκηση	Σωστές (N)	Λάθος/Μερικώς (N)	% Σωστές
Άσκηση 1 (Πατίι)	13	2	86.7%
Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)	12	3	80.0%

Ο Πίνακας 5.5 εστιάζει αποκλειστικά στο Πολυτεχνικό τμήμα, αναλύοντας την κατανομή των επιπέδων κριτικής σκέψης ανά άσκηση. Όπως προκύπτει, η πλειοψηφία των απαντήσεων συγκεντρώνεται στο επίπεδο 3, γεγονός που επιβεβαιώνει τη διαισθητική, αλλά μη πλήρως τεκμηριωμένη, αναγνώριση της μη ρεαλιστικότητας των αποτελεσμάτων.

Πίνακας 5.5: Κατανομή Επιπέδων Κωδικοποίησης Κριτικής Σκέψης(Πολυτεχνικό)

Επίπεδο	Κατηγορία	Άσκηση 1 (N)	Άσκηση 2 (N)	Σύνολο (N)	% επί Συνόλου
0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση	2	1	3	10.0%
1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός χωρίς μαθηματική αναφορά	2	1	3	10.0%
2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος	3	3	6	20.0%
3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση	8	8	16	53.3%
4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση	0	2	2	6.7%
Σύνολο		15	15	30	100.0%

Συνοψίζοντας τα παραπάνω ευρήματα σε δείκτες κεντρικής τάσης, ο Πίνακας 5.6 παρουσιάζει τους μέσους όρους επιπέδου κριτικής σκέψης για το Πολυτεχνικό τμήμα, τόσο συνολικά όσο και διασταυρωμένους με την ορθότητα των υπολογισμών.

Πίνακας 5.6: Μέσοι Όροι & Διασταύρωση με Ορθότητα (Πολυτεχνικό)

Δείκτης	Τιμή
Μέσος όρος επιπέδου (όλες οι απαντήσεις, N=30)	2.37
Μέσος όρος επιπέδου — Άσκηση 1	2.13
Μέσος όρος επιπέδου — Άσκηση 2	2.60
Μ.Ο. επιπέδου σε απαντήσεις με ΣΩΣΤΟΥΣ υπολογισμούς	2.48
Μ.Ο. επιπέδου σε απαντήσεις με ΛΑΘΟΣ/ΜΕΡΙΚΩΣ υπολογισμούς	1.80

Ερμηνευτικό Σχόλιο (Πολυτεχνικό)

Η πλειοψηφία των απαντήσεων (53,3%) εντάσσεται στο επίπεδο 3 — διαισθητική/ποιοτική αναγνώριση μη ρεαλιστικότητας, συχνά μέσω σαφούς λεκτικής διατύπωσης όπως «δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα», χωρίς όμως ποσοτική τεκμηρίωση. Μόλις 2 από τους 15 μαθητές/τριες (στην Άσκηση 2) έφτασαν στο ανώτερο επίπεδο 4, πραγματοποιώντας αυθόρμητα πρόσθετο υπολογισμό (εύρεση οριακού κόστους ή ελαχίστου της συνάρτησης $K(x)$) για να τεκμηριώσουν την κρίση τους. Η ορθότητα των βασικών μαθηματικών υπολογισμών (86,7% στην Άσκηση 1, 80,0% στην Άσκηση 2) δεν φαίνεται να συνδέεται γραμμικά με το βάθος της κριτικής σκέψης — ο μέσος όρος επιπέδου είναι μόλις οριακά υψηλότερος στις σωστές λύσεις (2,48) σε σχέση με τις λανθασμένες/μερικώς σωστές (1,80).

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 5.7 παρουσιάζει τα ίδια στοιχεία ορθότητας για το Οικονομικό τμήμα. Όπως φαίνεται, η ορθότητα είναι σημαντικά χαμηλότερη σε σχέση με το Πολυτεχνικό, γεγονός που επιβεβαιώνει τη δυσκολία της ομάδας αυτής στην αλγοριθμική εκτέλεση.

Πίνακας 5.7: Ορθότητα Υπολογισμών ανά Άσκηση (Οικονομικό)

Άσκηση	Σωστές (N)	Λάθος/Μερικώς (N)	% Σωστές
Άσκηση 1 (Πατίσι)	3	12	20.0%
Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)	6	9	40.0%

Ο Πίνακας 5.8 αναλύει την κατανομή επιπέδων κριτικής σκέψης αποκλειστικά για το Οικονομικό τμήμα. Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με το Πολυτεχνικό, οι απαντήσεις κατανέμονται πιο ομοιόμορφα σε όλο το φάσμα της κλίμακας, με αξιοσημείωτη παρουσία και στο ανώτερο επίπεδο 4.

Πίνακας 5.8: Κατανομή Επιπέδων Κωδικοποίησης Κριτικής Σκέψης(Οικονομικό)

Επίπεδο	Κατηγορία	Άσκηση 1 (N)	Άσκηση 2 (N)	Σύνολο (N)	% επί Συνόλου
0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση	1	2	3	10.0%
1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο	7	2	9	30.0%
2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη / παρατήρηση	4	1	5	16.7%
3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση	3	4	7	23.3%
4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση	0	6	6	20.0%
Σύνολο		15	15	30	100.0%

Τέλος, ο Πίνακας 5.9 συνοψίζει τους αντίστοιχους μέσους όρους για το Οικονομικό τμήμα, από όπου συμπεραίνουμε ότι η διαφορά στο επίπεδο κριτικής σκέψης ανάμεσα σε σωστές και λανθασμένες απαντήσεις είναι εδώ σημαντικά μεγαλύτερη απ' ό,τι στο Πολυτεχνικό.

Πίνακας 5.9: Μέσοι Όροι & Διασπαύρωση με Ορθότητα (Οικονομικό)

Δείκτης	Τιμή
Μέσος όρος επιπέδου (όλες οι απαντήσεις, N=30)	2.13
Μέσος όρος επιπέδου — Άσκηση 1	1.60
Μέσος όρος επιπέδου — Άσκηση 2	2.67
Μ.Ο. επιπέδου σε απαντήσεις με ΣΩΣΤΟΥΣ υπολογισμούς	2.89
Μ.Ο. επιπέδου σε απαντήσεις με ΛΑΘΟΣ/ΜΕΡΙΚΩΣ υπολογισμούς	1.81

Ερμηνευτικό Σχόλιο & Σύγκριση με Πολυτεχνικό

Στο Οικονομικό τμήμα (N=15) η ορθότητα των μαθηματικών υπολογισμών ήταν σημαντικά χαμηλότερη απ' ό,τι στο Πολυτεχνικό (Άσκηση 1: 20.0% έναντι 86,7%. Άσκηση 2: 40.0% έναντι 80,0%). Παρά τα συχνά λάθη στους υπολογισμούς, αρκετοί μαθητές/τριες ανέπτυξαν πλούσια, οικονομικά τεκμηριωμένα σχόλια Κριτικής Σκέψης (επίπεδο 4) — αναφερόμενοι σε κόστος ανά μονάδα, τιμολόγηση, νεκρό σημείο ή δυναμική ζήτησης/προσφοράς — ακόμη κι όταν το ίδιο το αριθμητικό αποτέλεσμα ήταν λανθασμένο. Αυτό υποδηλώνει ότι η οικονομική/επιχειρηματική οπτική των μαθητών οικονομικής κατεύθυνσης μπορεί να παράγει ποιοτικά βαθύτερη κριτική σκέψη ανεξάρτητα από την τεχνική ορθότητα της λύσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορά στο μέσο επίπεδο Κριτικής Σκέψης ανάμεσα σε σωστές και λάθος/μερικώς σωστές απαντήσεις είναι μεγαλύτερη στο Οικονομικό (2,89 έναντι 1,81, διαφορά 1,08 μονάδων) απ' ό,τι στο Πολυτεχνικό (2,48 έναντι 1,80, διαφορά 0,68 μονάδων). Αυτό υποδηλώνει ότι στο Οικονομικό τμήμα η ορθότητα του υπολογισμού συνδέεται πιο στενά με το βάθος της κριτικής σκέψης, ενώ στο Πολυτεχνικό οι δύο διαστάσεις (ορθότητα και κριτική σκέψη) φαίνεται να λειτουργούν πιο ανεξάρτητα μεταξύ τους.

5.6 Συνδυαστικά Προφίλ Μαθητών: Σταθερότητα ή Μεταβλητότητα της Κριτικής Στάσης

Πέρα από τη συγκεντρωτική ανάλυση ανά άσκηση, είναι διαφωτιστικό να εξεταστεί πώς η ίδια μαθήτρια ή ο ίδιος μαθητής ανταποκρίθηκε και στις δύο δραστηριότητες. Η σύγκριση αυτή επιτρέπει να διαπιστωθεί αν η ικανότητα επικύρωσης λειτουργεί ως σταθερό ατομικό χαρακτηριστικό ή αν ενεργοποιείται επιλεκτικά, ανάλογα με το κατά πόσο το θεματικό πλαίσιο της κάθε άσκησης «μιλάει» στον συγκεκριμένο μαθητή.

Ο μαθητής «Ήλιος» (Πολυτεχνικό): Χαρακτηριστικό παράδειγμα μεταβλητότητας αποτελεί ο μαθητής «Ήλιος» (Πολυτεχνικό τμήμα). Στην Άσκηση 1 (Πατίνι) η απάντησή του κωδικοποιήθηκε στο επίπεδο 1 (εκτός θέματος: «δεν έχω ηλεκτρικό πατίνι»), χωρίς καμία

μαθηματική αναφορά στο εξωπραγματικό μέγεθος της ταχύτητας. Στην Άσκηση 2 (Κόστος), όμως, ο ίδιος μαθητής έφτασε στο ανώτατο επίπεδο 4, υπολογίζοντας αυτόβουλα ότι $K(301) = 384,95$ €, διαπιστώνοντας τη μείωση του κόστους και προτείνοντας τεκμηριωμένα το κλείσιμο της επιχείρησης. Η άλματος αυτή διαφορά (1→4) εντός του ίδιου ατόμου υποδηλώνει ότι η κριτική στάση δεν είναι απαραίτητα σταθερό γνώρισμα, αλλά ενδέχεται να ενεργοποιείται επιλεκτικά όταν το πλαίσιο κινητοποιεί περισσότερο τον μαθητή.

Ο μαθητής «Σώτος» (Πολυτεχνικό): Αντίθετα, ο μαθητής «Σώτος» (Πολυτεχνικό τμήμα) επέδειξε σταθερά υψηλή επίδοση και στις δύο ασκήσεις: επίπεδο 3 στο Πατίνι («δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα για κανένα κινούμενο όχημα») και επίπεδο 4 στο Κόστος, όπου μάλιστα υπολόγισε ανεξάρτητα τη συνθήκη $K'(x) = 0 \Rightarrow x = 150$ θήκες. Η συνέπεια αυτή σε διαφορετικά θεματικά πλαίσια υποδεικνύει την ύπαρξη και μιας πιο γενικευμένης, διαθεματικής ικανότητας κριτικής επικύρωσης, ανεξάρτητης από το συγκεκριμένο περιεχόμενο.

Ο μαθητής «Τσούρος» (Οικονομικό): Ανάλογο μοτίβο με τον «Ηλιο» παρατηρείται και στο Οικονομικό τμήμα, στον μαθητή «Τσούρος»: επίπεδο 2 στο Πατίνι (επιφανειακός σχολιασμός: «στρογγυλό νούμερο, λίγο μεγάλο αλλά στρογγυλό»), αλλά επίπεδο 4 στο Κόστος, με τη γνωστή πλέον ειρωνική αλλά οικονομικά τεκμηριωμένη παρατήρηση: «να ανοίξω μια τέτοια βιοτεχνία χωρίς να επιβαρύνομαι με κόστος παραγωγής!!». Η επανάληψη αυτού του μοτίβου σε μαθητές και των δύο τμημάτων ενισχύει την ερμηνεία ότι το εξειδικευμένο, οικείο θεματικό πλαίσιο λειτουργεί ως καταλύτης ενεργοποίησης της κριτικής σκέψης, πέρα από το τμήμα προέλευσης του κάθε μαθητή.

Συνολικά, τα συνδυαστικά αυτά προφίλ υποδεικνύουν ότι η ικανότητα επικύρωσης δεν είναι πάντα ενιαία και σταθερή ιδιότητα του μαθητή, αλλά αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε ατομικά χαρακτηριστικά και στο βαθμό στον οποίο το συγκεκριμένο πλαίσιο ενεργοποιεί οικείες, βιωματικές γνώσεις.

5.7 Απάντηση στα Ερευνητικά Ερωτήματα

Με βάση το σύνολο των ποιοτικών και ποσοτικών ευρημάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω, είναι πλέον δυνατόν να δοθεί ρητή, τεκμηριωμένη απάντηση στα δύο ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης.

Αναφορικά με το Ε.Ε.1 (βαθμός αναγνώρισης αστοχίας μοντέλου), τα δεδομένα δείχνουν ότι η ικανότητα αυτή είναι σαφώς περιορισμένη: μόνο 2 στους 15 μαθητές/τριες του

Πολυτεχνικού (6,7%) και 6 στους 15 του Οικονομικού (20,0%) έφτασαν στο ανώτερο επίπεδο 4 της κλίμακας, όπου η αστοχία τεκμηριώνεται πλήρως με ποσοτικά ή οικονομικά επιχειρήματα. Η πλειονότητα των απαντήσεων στο Πολυτεχνικό (53,3%) περιορίστηκε σε διαισθητική αναγνώριση χωρίς τεκμηρίωση (επίπεδο 3), ενώ ένα μη αμελητέο ποσοστό (10,0% στο Πολυτεχνικό, 30,0% στο Οικονομικό) δεν αναγνώρισε καθόλου το πρόβλημα ή απάντησε εκτός θέματος. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει ότι, ακόμη και μετά τη διδασκαλία των βασικών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού, η πλειονότητα των μαθητών της Γ' Λυκείου δεν διαθέτει αυθόρμητα ενεργοποιήσιμο μηχανισμό επικύρωσης — η κριτική στάση απέναντι σε εξωπραγματικά αποτελέσματα παραμένει η εξαίρεση και όχι ο κανόνας.

Αναφορικά με το Ε.Ε.2 (διαφοροποίηση μεταξύ ομάδων προσανατολισμού), τα ευρήματα αποκαλύπτουν μια σαφή, αντίστροφη σχέση μεταξύ αλγοριθμικής επάρκειας και ικανότητας επικύρωσης: το Πολυτεχνικό τμήμα, παρά την υπεροχή του στην ορθότητα των υπολογισμών (83,3% έναντι 30,0%), εμφάνισε χαμηλότερο ποσοστό στο ανώτερο επίπεδο κριτικής σκέψης (6,7% έναντι 20,0%) και ισχυρή τάση αποστοίχισης, ενώ το Οικονομικό τμήμα, παρά τα συχνά υπολογιστικά του λάθη, ενεργοποίησε αμεσότερα το εξειδικευμένο γνωστικό του υπόβαθρο γύρω από την αγορά, παράγοντας πλουσιότερη οικονομική επιχειρηματολογία. Η διαφορά αυτή ενισχύεται από το εύρημα ότι, στο Οικονομικό τμήμα, η ορθότητα του υπολογισμού συνδέεται πιο στενά με το βάθος της κριτικής σκέψης (διαφορά μέσου όρου 1,08 μονάδων μεταξύ σωστών και λανθασμένων απαντήσεων) απ' ό,τι στο Πολυτεχνικό (διαφορά 0,68 μονάδων), υποδεικνύοντας ότι στο Πολυτεχνικό τμήμα η αλγοριθμική ικανότητα λειτουργεί σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητα από την κριτική στάση, ενώ στο Οικονομικό οι δύο διαστάσεις είναι περισσότερο αλληλένδετες.

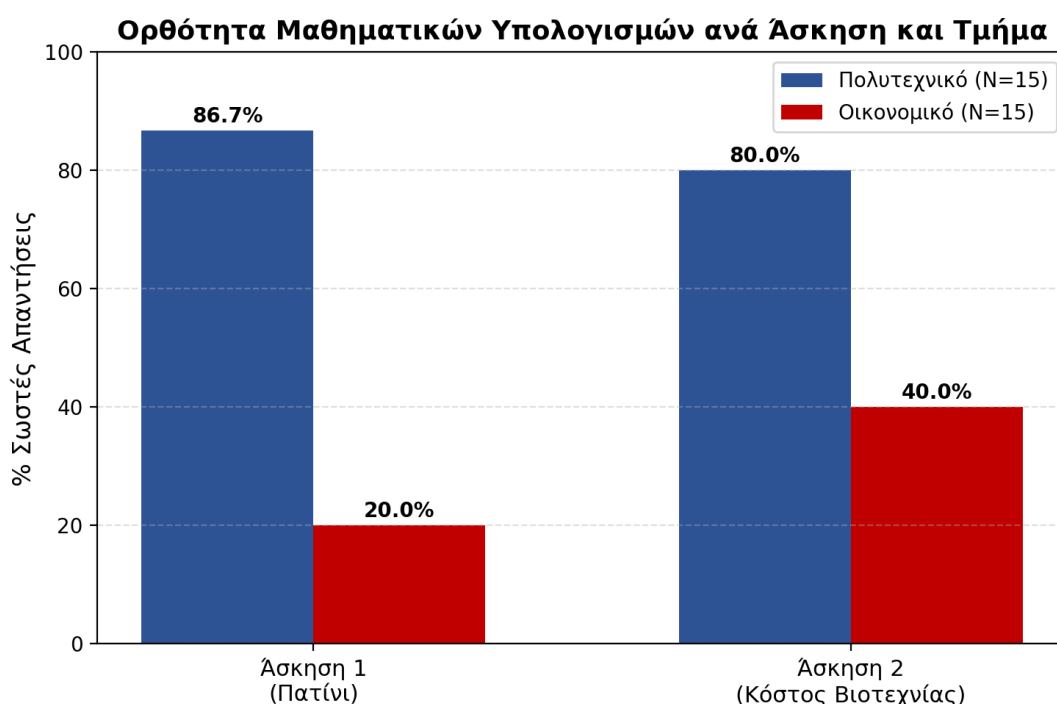
Συνολικά, τα ευρήματα υποστηρίζουν την υπόθεση ότι το θεματικό πλαίσιο (Context) και το συναφές γνωστικό υπόβαθρο του μαθητή λειτουργούν ως καθοριστικός παράγοντας ενεργοποίησης της κριτικής σκέψης, ανεξάρτητα από την καθαρά τεχνική επάρκειά του στα Μαθηματικά — εύρημα που συνάδει με τη θεωρητική θέση ότι η επικύρωση δεν αποτελεί καθαρά μαθηματική δεξιότητα, αλλά διεπιστημονική ικανότητα διαχείρισης νοήματος (Borromeo Ferri, 2018).

Ποσοτική Συσχέτιση Ορθότητας και Κριτικής Σκέψης: Για να διερευνηθεί περαιτέρω αυτή η σχέση, υπολογίστηκε ο συντελεστής συσχέτισης Pearson ανάμεσα στην ορθότητα του υπολογισμού (0/1) και το επίπεδο κριτικής σκέψης (0–4), ξεχωριστά για κάθε άσκηση (N=15 ανά τμήμα και άσκηση, ώστε κάθε μαθητής/τρια να συνεισφέρει μία μόνο ανεξάρτητη παρατήρηση ανά υπολογισμό). Στο Πολυτεχνικό τμήμα η συσχέτιση ήταν ασθενής και στις

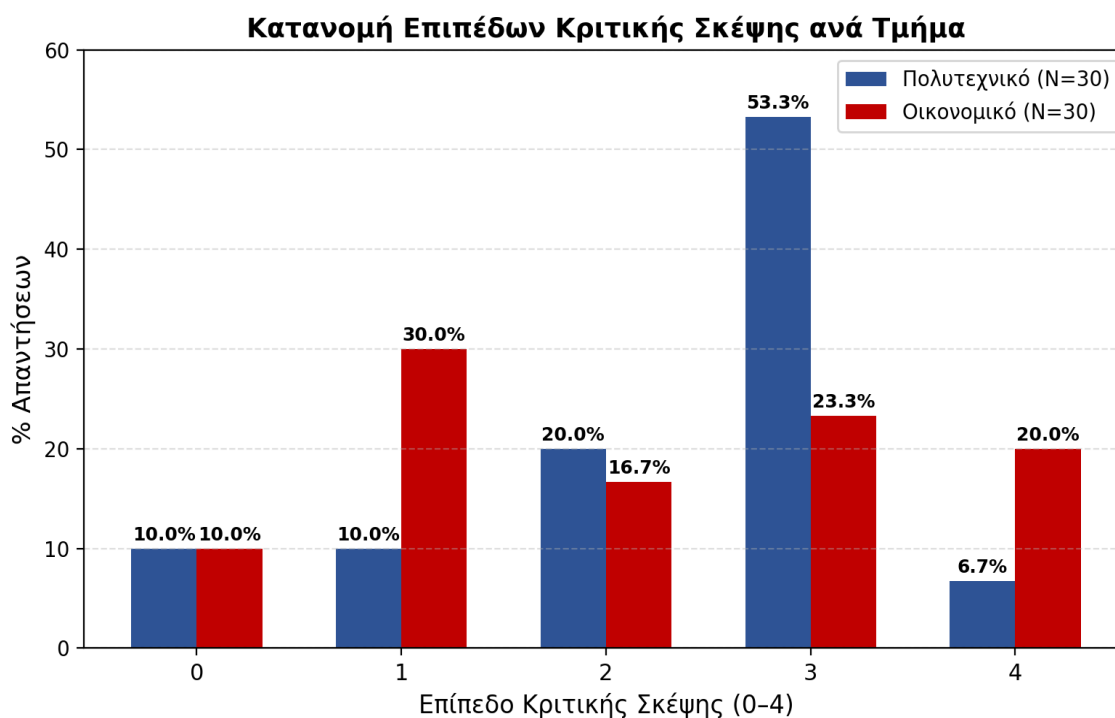
δύο ασκήσεις ($r = 0,23$ στο Πατίνι, $r = 0,29$ στο Κόστος). Στο Οικονομικό τμήμα, αντίθετα, παρατηρήθηκε αξιοσημείωτη διαφοροποίηση: η συσχέτιση ήταν σχεδόν μηδενική στο Πατίνι ($r = 0,04$) αλλά μέτρια στο Κόστος ($r = 0,47$). Η διαφοροποίηση αυτή ενισχύει με μεγαλύτερη ακρίβεια το εύρημα που περιγράφηκε ποιοτικά: η σύνδεση ανάμεσα σε ορθότητα και κριτική σκέψη στο Οικονομικό τμήμα δεν είναι γενικό χαρακτηριστικό της ομάδας, αλλά εμφανίζεται ειδικά όταν το θεματικό πλαίσιο της άσκησης ενεργοποιεί οικείο γνωστικό υπόβαθρο. Πρέπει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι, με $N=15$ ανά υπολογισμό, οι συσχετίσεις αυτές έχουν περιγραφικό και διερευνητικό χαρακτήρα και δεν επιτρέπουν γενικεύσεις με στατιστική βεβαιότητα.

Γραφήματα Σύγκρισης: Πολυτεχνικό vs Οικονομικό

Τα παρακάτω γραφήματα οπτικοποιούν τα δύο συγκεντρωτικά στοιχεία που παρουσιάστηκαν στους αντίστοιχους πίνακες: την ορθότητα των μαθηματικών υπολογισμών και την κατανομή των επιπέδων Κριτικής Σκέψης, ανά ομάδα προσανατολισμού.



Γράφημα 1: Ορθότητα μαθηματικών υπολογισμών ανά άσκηση και τμήμα.

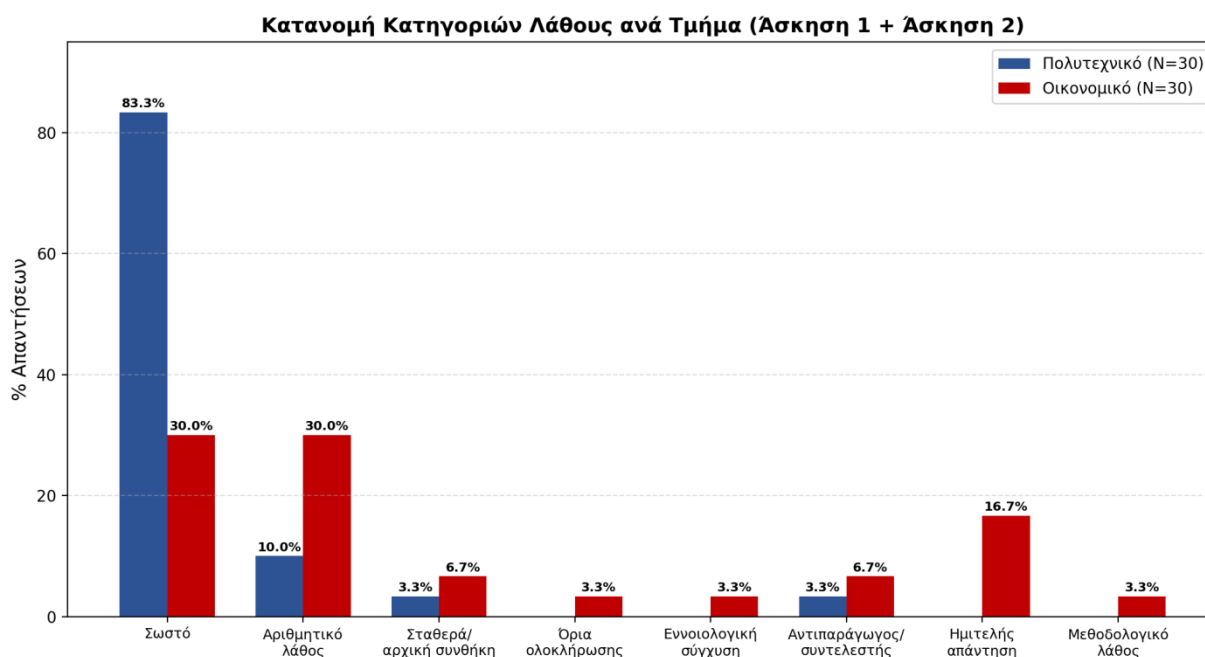


Γράφημα 2: Κατανομή επιπέδων Κριτικής Σκέψης (0-4) ανά τμήμα.

Το πρώτο γράφημα αναδεικνύει καθαρά τη σημαντικά χαμηλότερη ορθότητα υπολογισμών στο Οικονομικό τμήμα και στις δύο ασκήσεις. Το δεύτερο γράφημα δείχνει ότι το Πολυτεχνικό τμήμα συγκεντρώνεται έντονα γύρω από το επίπεδο 3, ενώ το Οικονομικό τμήμα εμφανίζει πιο «διπολική» κατανομή, με ενισχυμένα ταυτόχρονα τόσο το κατώτερο (1) όσο και το ανώτερο (4) επίπεδο κριτικής σκέψης.

Γράφημα 3: Κατανομή Κατηγοριών Λάθους ανά Τμήμα

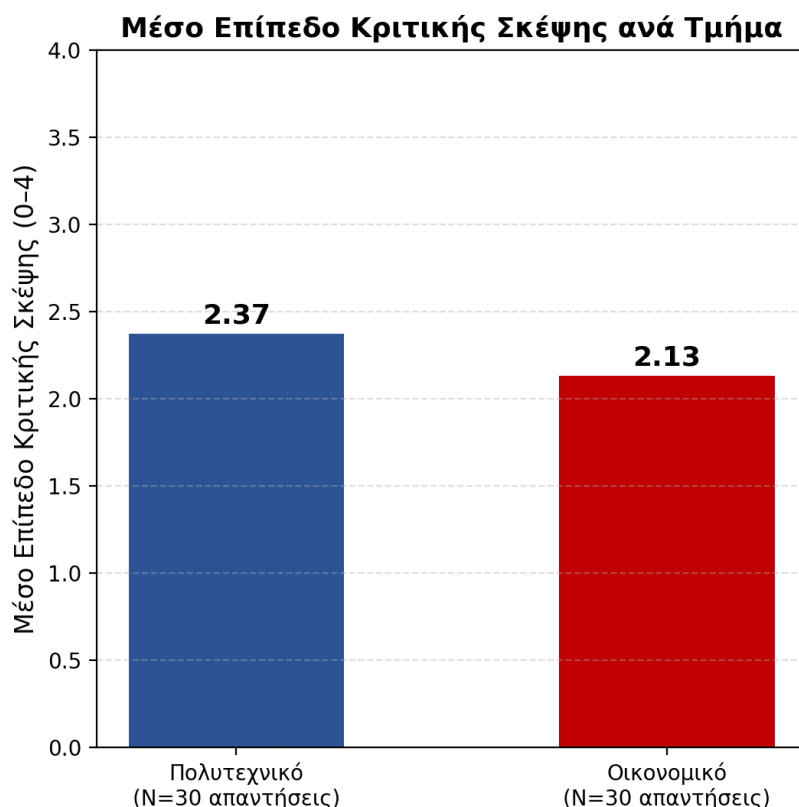
Το γράφημα δείχνει το ποσοστό κάθε κατηγορίας λάθους (συμπεριλαμβανομένου του «Σωστό») επί του συνόλου των απαντήσεων ανά τμήμα (N=30, δηλ. και οι δύο ασκήσεις μαζί). Φαίνεται καθαρά ότι το Πολυτεχνικό τμήμα συγκεντρώνεται σχεδόν αποκλειστικά στο «Σωστό» (83,3%), ενώ το Οικονομικό τμήμα εμφανίζει σημαντική διασπορά σε πολλαπλές κατηγορίες λάθους — με τρεις κατηγορίες (Όρια ολοκλήρωσης, Εννοιολογική σύγχυση, Μεθοδολογικό λάθος) να εμφανίζονται αποκλειστικά σε αυτό.



Γράφημα 3: Κατανομή κατηγοριών λάθους ανά τμήμα (Άσκηση 1 + Άσκηση 2, N=30 ανά τμήμα).

Γράφημα 4: Μέσο Επίπεδο Κριτικής Σκέψης ανά Τμήμα

Το γράφημα συνοψίζει σε μία τιμή ανά τμήμα το μέσο επίπεδο κωδικοποίησης της Κριτικής Σκέψης (κλίμακα 0–4), υπολογισμένο επί όλων των απαντήσεων (N=30 ανά τμήμα). Παρά τη μικρή διαφορά στον μέσο όρο (2,37 έναντι 2,13), η κατανομή πίσω από αυτούς τους αριθμούς είναι ποιοτικά διαφορετική: το Πολυτεχνικό συγκεντρώνεται γύρω από το επίπεδο 3, ενώ το Οικονομικό είναι πιο διάσπαρτο σε όλο το εύρος 0–4 (βλ. Γράφημα 2).



Γράφημα 4: Μέσο επίπεδο Κριτικής Σκέψης ανά τμήμα (κλίμακα 0-4).

Για μια πληρέστερη και αναλυτικότερη αποτύπωση των ατομικών αποκρίσεων, καθώς και για την κατηγοριοποίηση των επιμέρους μαθηματικών λαθών ανά μαθητή και ανά ομάδα προσανατολισμού, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στους αναλυτικούς πίνακες του Παραρτήματος.

Τα αναλυτικά στοιχεία των ατομικών επιδόσεων και η λεπτομερής καταγραφή των σφαλμάτων (όπως τα αριθμητικά, τα μεθοδολογικά ή τα λάθη στα όρια ολοκλήρωσης) παρατίθενται αυτούσια στο Παράρτημα της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα, συζήτηση και μελλοντικές προτάσεις

6.1 Σύνοψη και Ανακεφαλαίωση των Ερευνητικών Ευρημάτων

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστίασε τη διερεύνησή της στον καίριο ρόλο και τη σημασία της μαθηματικής μοντελοποίησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, εστιάζοντας μεθοδολογικά στην ικανότητα των μαθητών της Γ' Λυκείου να ενεργοποιούν το κρίσιμο στάδιο της επικύρωσης (Validation) εντός του κύκλου μοντελοποίησης των Blum & Leiß.

Μέσα από τον σχεδιασμό και την υλοποίηση ποιοτικής έρευνας πεδίου σε δείγμα τριάντα (N=30) μαθητών, κατανεμημένων ισότιμα σε δύο διακριτές ομάδες προσανατολισμού (Πολυτεχνικό και Οικονομικό Τμήμα), επιχειρήθηκε η σε βάθος αποτίμηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές διαχειρίζονται περιπτώσεις «αποτυχιών μοντελοποίησης» (Modeling Disasters) σε προβλήματα Απειροστικού Λογισμού φυσικού και οικονομικού πλαισίου.

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εμπειρική ανάλυση παρέχουν τεκμηριωμένες απαντήσεις στα τεθέντα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Αναφορικά με τον βαθμό αναγνώρισης αστοχιών και τη στάση επικύρωσης (E.E.1):

Τα εμπειρικά δεδομένα κατέδειξαν ότι, παρά την υψηλή τεχνική και αλγεβρική επάρκεια που καταγράφηκε –ιδίως στο Πολυτεχνικό τμήμα–, η ικανότητα κριτικής επικύρωσης των παραγομένων αποτελεσμάτων υπολείπεται δραματικά. Η πλειονότητα των συμμετεχόντων τείνει να προσκολλάται στην «αυθεντία του τύπου», αποδεχόμενη αβασάνιστα εξωπραγματικά μεγέθη (όπως ταχύτητα 11.102 m/s στο ηλεκτρικό πατίνι) ή κατάφορα οικονομικά παράδοξα (μηδενικό μεταβλητό κόστος για την παραγωγή 300 μονάδων προϊόντος). Όταν εκδηλώθηκε κριτική στάση, αυτή περιορίστηκε κατά κανόνα σε διαισθητικές επισημάνσεις ή χιουμοριστικά σχόλια (π.χ. αναφορές σε πυραύλους ή ταχύτητες φωτός), ενώ η αυστηρή, τεκμηριωμένη επιστημονική απόρριψη του μοντέλου εντοπίστηκε σε ελάχιστα, μεμονωμένα γραπτά. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά ως ένα κλειστό, τυπικό σύστημα κανόνων αποκομμένο από την εμπειρική πραγματικότητα.

2. Αναφορικά με τη σύγκριση των Ομάδων Προσανατολισμού και τον ρόλο του πλαισίου (E.E.2):

Αναδείχθηκε μια σαφής και καθοριστική διαφοροποίηση στη γνωστική συμπεριφορά των δύο ομάδων, γεγονός που υπογραμμίζει την καταλυτική επίδραση του θεματικού πλαισίου (Context):

Το **Πολυτεχνικό Τμήμα** υπερείχε καταφανώς στο αλγοριθμικό σκέλος (με συνολική ορθότητα 83,3%), πλην όμως εκδήλωσε έντονη τάση «αποστοίχισης» (de-contextualization). Οι μαθητές αυτοί αντιμετώπισαν τις δραστηριότητες ως τυπικές σχολικές ασκήσεις, επιχειρώντας συχνά να εκλογικεύσουν τεχνητά τα παράδοξα αποτελέσματα (π.χ. υποθέτοντας ότι τα υλικά «τα παρείχε η φύση») προκειμένου να διασφαλίσουν την εσωτερική εγκυρότητα των πράξεών τους.

Το **Οικονομικό Τμήμα**, παρότι αντιμετώπισε πολυπληθέστερα υπολογιστικά σφάλματα (με συνολική ορθότητα 30 %), επέδειξε **ουσιαστικά υψηλότερα αντανakλαστικά κριτικής αντίστασης** όταν το πρόβλημα μεταφέρθηκε στο οικείο γνωστικό του πεδίο. Η άμεση ενεργοποίηση της εξειδικευμένης γνώσης πλαισίου (domain-specific knowledge) λειτούργησε ως ισχυρός γνωστικός καταλύτης, επιτρέποντας στους μαθητές να απορρίψουν κατηγορηματικά τις παράλογες παραδοχές και να προσεγγίσουν το πρόβλημα με όρους πραγματικής αγοράς, μέσου κόστους και βιωσιμότητας.

6.2 Συζήτηση και Παιδαγωγικές Προεκτάσεις

Τα παραπάνω ευρήματα εναρμονίζονται πλήρως και τεκμηριώνονται επιστημονικά από τα κεντρικά πορίσματα της διεθνούς βιβλιογραφίας (π.χ. Blum & Leiß, 2007; Niss, Blum & Galbraith, 2007; Stillman et al., 2017; Skovsmose, 2006). Ειδικότερα, η ανάλυση των δεδομένων συσχετίζεται άμεσα με τέσσερις βασικούς άξονες που αναδεικνύονται διεθνώς:

1. **Το Χάσμα μεταξύ Αλγοριθμικής Επάρκειας και Πραγματικότητας:** Όπως καταγράφεται ευρέως στη βιβλιογραφία, οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εκπαιδεύονται κυρίως στην εκτέλεση μηχανικών αλγορίθμων και τυπικών υπολογισμών. Η τάση αυτή αποτυπώθηκε ξεκάθαρα στα ευρήματα της παρούσας έρευνας, όπου οι συμμετέχοντες αντιμετώπισαν τα μαθηματικά ως ένα κλειστό σύστημα κανόνων, αποκομμένο από την αντικειμενική πραγματικότητα.

2. **Η Υποβάθμιση του Σταδίου της Επικύρωσης (Validation):** Σύμφωνα με τον κύκλο μοντελοποίησης των Blum & Leiß, ενώ οι μαθητές –κυρίως του Πολυτεχνικού Τμήματος– μπόρεσαν να φέρουν εις πέρας τη μαθηματική επεξεργασία, η φάση της ερμηνείας και κυρίως της επικύρωσης παραμελήθηκε. Οι μαθητές έπεσαν στην «παγίδα της αποστοίχισης» (de-contextualization), αποδεχόμενοι παθητικά παράλογα αποτελέσματα (Modeling Disasters) επειδή απλώς προέκυψαν από «σωστές πράξεις». Η συμπεριφορά αυτή συνάδει πλήρως με τα ευρήματα της βιβλιογραφίας γύρω από τη μεταγνώση, όπου η αδυναμία ενεργοποίησης αυτορρυθμιστικών μηχανισμών ελέγχου οδηγεί τους μαθητές να ταυτίζουν την ορθότητα μιας λύσης αποκλειστικά με την τυπική ακολουθία των πράξεων, χωρίς ουσιαστική αξιολόγηση του τελικού αποτελέσματος (Panaoura & Philippou, 2007· Panaoura, Gagatsis & Demetriou, 2009).
3. **Ο Καταλυτικός Ρόλος του Πλαισίου (Context) και η Ειδική Γνώση:** Η βιβλιογραφία υπογραμμίζει ότι η κριτική σκέψη ενεργοποιείται σημαντικά όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με οικεία πλαίσια (domain-specific knowledge). Αυτό ακριβώς επιβεβαιώθηκε από τη σύγκριση των δύο τμημάτων: οι μαθητές του Οικονομικού Τμήματος, αξιοποιώντας βιωματικές και εξειδικευμένες γνώσεις αγοράς, υπερέβησαν την τυφλή αυθεντία των τύπων, σε αντίθεση με τους συμμαθητές τους.
4. **Η Αναγκαιότητα Αλλαγής Διδακτικής Πρακτικής:** Τα παραπάνω συγκλίνουν με τις επιταγές σύγχρονων διεθνών πλαισίων (όπως τα GAIMME / COMAP), τα οποία τονίζουν την ανάγκη ανασχεδιασμού των προγραμμάτων σπουδών με έμφαση σε ανοιχτά προβλήματα ρεαλιστικού πλαισίου, προκειμένου να καλλιεργηθεί η κριτική μαθηματική εγγραμματοσύνη (critical mathematical literacy).

Από θεωρητική άποψη, η έρευνα κατέδειξε ότι η επιτυχής εκτέλεση ενός αλγορίθμου (Working Mathematically) δεν εγγυάται την κατανόηση ούτε τη δυνατότητα ερμηνείας (Interpreting) και επικύρωσης (Validating).

Σύνδεση με την τυπολογία μοντελοποιητών: Το εύρημα αυτό συνάδει και με την τυπολογία μοντελοποιητών των Kaiser & Sriraman (2006), οι οποίοι διακρίνουν ανάμεσα σε μαθητές που προσεγγίζουν τη μοντελοποίηση με αμιγώς «ρεαλιστική-εμπειρική» οπτική και σε άλλους που την αντιμετωπίζουν με «διδακτική-εννοιολογική» οπτική, εστιασμένη στην εκμάθηση της τεχνικής παρά στη σύνδεση με την πραγματικότητα — μια διάκριση που

αντιστοιχεί ακριβώς στην αντίθεση που παρατηρήθηκε ανάμεσα στις δύο ομάδες της παρούσας έρευνας.

Σύνδεση με τη διδακτική σκαλωσιά: Παράλληλα, η έννοια της «διδακτικής σκαλωσιάς» (scaffolding) που περιγράφουν οι Stender & Kaiser (2015) προσφέρει μια πιθανή εξήγηση για τη διαφορά που εντοπίστηκε στα συνδυαστικά προφίλ μαθητών (Ενότητα 5.6): όταν το πλαίσιο της άσκησης παρέχει στον μαθητή έμμεση «σκαλωσιά» μέσω οικείων εννοιών (όπως το κόστος και η τιμολόγηση για τους μαθητές Οικονομικής κατεύθυνσης), η μετάβαση από το πραγματικό στο μαθηματικό επίπεδο διευκολύνεται σημαντικά, ακόμη και για μαθητές που σε άλλο πλαίσιο επέδειξαν χαμηλότερη κριτική επίδοση.

Σύνδεση με τη θεωρία «Models and Modeling»: Τέλος, το εύρημα αυτό ενισχύει και τη θεωρητική θέση των Doerr & Lesh (2003) περί «μοντέλων και μοντελοποίησης» (models and modeling perspective), σύμφωνα με την οποία η μάθηση δεν προκύπτει από την απλή εφαρμογή έτοιμων μαθηματικών εργαλείων, αλλά από την ενεργό κατασκευή και αναθεώρηση προσωπικών ερμηνευτικών μοντέλων εκ μέρους του μαθητή — μια διαδικασία που, όπως φάνηκε, ευνοείται περισσότερο όταν το πλαίσιο του προβλήματος παρέχει στον μαθητή ήδη διαμορφωμένα ερμηνευτικά εργαλεία.

6.3 Εκπαιδευτικές και Διδακτικές Προεκτάσεις

Τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης κομίζουν σημαντικές παιδαγωγικές και διδακτικές προεκτάσεις για τον σχεδιασμό της μαθηματικής εκπαίδευσης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση:

Αναμόρφωση της Διδακτικής Πρακτικής: Κρίνεται επιτακτική η ανάγκη μετατόπισης από τη μονομερή εστίαση στην αλγοριθμική εξάσκηση προς μια ολιστική προσέγγιση της μαθηματικής μοντελοποίησης. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να εντάσσουν στη διδ. καθημερινότητά τους ανοιχτά προβλήματα και καταστάσεις «αποτυχίας μοντελοποίησης» (Modeling Disasters), οι οποίες λειτουργούν ως ισχυρά εργαλεία γνωστικής σύγκρουσης.

Ανάδειξη του Σταδίου της Επικύρωσης: Η διαδικασία του ελέγχου και της αξιολόγησης της ρεαλιστικότητας των αποτελεσμάτων πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ισότιμο και αδιαπραγμάτευτο στάδιο της επίλυσης προβλημάτων, και όχι ως δευτερεύουσα ή προαιρετική διαδικασία.

Αξιοποίηση του Θεματικού Πλαισίου (Context): Τα σχολικά εγχειρίδια και οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να αξιοποιούν το γνωστικό υπόβαθρο και τα ιδιαίτερα ενδιαφέροντα των μαθητών (αντλώντας παραδείγματα από διαφορετικές επιστήμες και την καθημερινή ζωή), ώστε να γεφυρώνεται το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πράξης και να καλλιεργείται η κριτική μαθηματική εγγραμματοσύνη (critical mathematical literacy).

6.4 Περιορισμοί της Έρευνας

Κατά την ερμηνεία και αξιολόγηση των συμπερασμάτων της παρούσας μελέτης, κρίνεται σκόπιμο να επισημανθούν ορισμένοι εγγενείς περιορισμοί:

1. **Μέγεθος και Σύνθεση Δείγματος:** Το δείγμα περιορίστηκε σε τριάντα ($N=30$) μαθητές συγκεκριμένου σχολικού περιβάλλοντος, γεγονός που δεν επιτρέπει την ασφαλή στατιστική γενίκευση των ευρημάτων στο σύνολο του μαθητικού πληθυσμού της χώρας.
2. **Ερευνητικό Εργαλείο:** Η συλλογή δεδομένων βασίστηκε αποκλειστικά σε γραπτά δοκίμια περιορισμένης έκτασης (δύο δραστηριότητες). Η απουσία συμπληρωματικών ποιοτικών εργαλείων, όπως οι ημιδομημένες προφορικές συνεντεύξεις (clinical interviews) ή η παρατήρηση τάξης, δεν επέτρεψε την εις βάθος αποκρυπτογράφηση των υποκείμενων γνωστικών μηχανισμών και των προφορικών διαπραγματεύσεων των μαθητών κατά τη στιγμή της επίλυσης.

6.5 Μελλοντικές Προτάσεις

Λαμβάνοντας υπόψη τα συμπεράσματα και τους περιορισμούς της έρευνας, διατυπώνονται οι ακόλουθες προτάσεις για μελλοντικές μελέτες και εκπαιδευτικές παρεμβάσεις:

- **Συστηματική Ενσωμάτωση Μοντελοποίησης στα Αναλυτικά Προγράμματα:** Προτείνεται ο ανασχεδιασμός των διδακτικών πρακτικών με έμφαση σε ανοιχτά προβλήματα ρεαλιστικού πλαισίου και καταστάσεις «αποτυχίας μοντελοποίησης», ώστε οι μαθητές να εκπαιδεύονται συνειδητά και επαναλαμβανόμενα στη διαδικασία της κριτικής επικύρωσης.
- **Διεπιστημονική Διασύνδεση και Συνδιδασκαλία:** Η προώθηση διαθεματικών δράσεων μεταξύ των Μαθηματικών, των Φυσικών Επιστημών και της Οικονομίας

δύναται να αμβλύνει τα στεγανά μεταξύ των τμημάτων προσανατολισμού, ενισχύοντας τη βιωματική κατανόηση και τη μεταφερόμενη γνώση.

- **Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως Αυθεντικού Πλαισίου:** Πέρα από τα φυσικά και οικονομικά πλαίσια που μελετήθηκαν στην παρούσα έρευνα, προτείνεται η διερεύνηση ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων ως πρόσθετης πηγής αυθεντικών, ρεαλιστικών καταστάσεων μοντελοποίησης. Η ιστορική διάσταση μπορεί να προσφέρει στους μαθητές ένα πολυδιάστατο πλαίσιο αναφοράς, ενισχύοντας τη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με το ευρύτερο πολιτισμικό και επιστημονικό τους υπόβαθρο.
- **Επέκταση Ερευνητικού Πεδίου:** Προτείνεται η υλοποίηση ευρύτερων ερευνών με πολυπληθέστερα δείγματα, σε διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές, και με συνδυασμό ποιοτικών μεθοδολογιών (π.χ. συνεντεύξεις ανάκλησης σκέψης - think-aloud protocols), προκειμένου να αποτυπωθεί πληρέστερα η δυναμική εξέλιξη της μοντελοποιητικής και κριτικής ικανότητας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68. doi:10.1007/BF00302716

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-68072-9

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). London: Routledge.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Standards for mathematical practice: MP4 Model with mathematics*. Ανακτήθηκε από <https://www.thecorestandards.org/Math/Practice/MP4/>

COMAP, & SIAM. (2016). *GAIMME: Guidelines for assessment and instruction in mathematical modeling education* (1st ed.). Bedford, MA / Philadelphia, PA: COMAP / SIAM. Ανακτήθηκε από <https://www.comap.org/resources/free-resources/gaimme>

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5th ed.). Los Angeles, CA: SAGE Publications.

Doerr, H. M., & Lesh, R. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds.). (2019). *Guidelines for assessment and instruction in mathematical modeling education (GAIMME)* (2nd ed.). Philadelphia, PA / Bedford, MA: SIAM / COMAP. Ανακτήθηκε από <https://www.siam.org/publications/reports/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-mathematical-modeling-education/>

- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 38(3), 302–310. doi:10.1007/BF02652813
- Maaß, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: Results of an empirical study. *Teaching Mathematics and its Applications*, 24(2–3), 61–74. doi:10.1093/teamat/hri019
- Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling (ICTMA 14)* (pp. 629–639). Dordrecht: Springer.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-0-387-29822-1
- OECD. (2023). PISA 2022 mathematics framework. In *PISA 2022 assessment and analytical framework*. Paris: OECD Publishing. Ανακτήθηκε από https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-assessment-and-analytical-framework_dfe0bf9c-en/full-report/component-3.html
- Panaoura, A., & Philippou, G. (2007). The development of students' metacognitive ability in mathematics. *Cognitive Development*, 22(2), 149–164.
- Panaoura, A., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2009). An intervention to the metacognitive performance: Self-regulation in mathematics and mathematical modeling. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, (9), 63–79.
- Skovsmose, O. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM – Mathematics Education*, 38(3), 293–301.
- Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding complex modelling processes: An in-depth study. *ZDM – Mathematics Education*, 47(7), 1255–1267.

Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S. (Eds.). (2015). *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-18272-8

Stillman, G. A., Blum, W., & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education*. Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-62968-1

Stillman, G., Kaiser, G., Blum, W., & Brown, J. (Eds.). (2013). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*. Dordrecht: Springer. doi:10.1007/978-94-007-6540-5

Παράρτημα: Αναλυτικά δεδομένα και ατομικές απαντήσεις μαθητών

Στο παρόν παράρτημα παρατίθενται τα αναλυτικά στοιχεία και οι κατηγοριοποιημένες απαντήσεις των τριάντα ($N=30$) μαθητών της Γ΄ Λυκείου που συμμετείχαν στην έρευνα (15 από το Πολυτεχνικό Τμήμα και 15 από το Οικονομικό Τμήμα).

Τα δεδομένα αυτά υποστηρίζουν την ποιοτική ανάλυση που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5.

Ενδεικτικά Αυτούσια Δείγματα Γραπτών Απαντήσεων

Για την ενίσχυση της διαφάνειας και της αξιοπιστίας της ποιοτικής ανάλυσης, παρατίθενται παρακάτω αυτούσια αντίγραφα (σαρωμένα) των γραπτών απαντήσεων τεσσάρων μαθητών/τριών, αντιπροσωπευτικά των βασικών μοτίβων που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 5. Τα ψευδώνυμα των μαθητών/τριών είναι ήδη γνωστά από την υπόλοιπη ανάλυση· τα πραγματικά ονόματα δεν αποκαλύπτονται πουθενά.

Δείγμα 1: Ο μαθητής «Ήλιος» (7Π) — Άσκηση 1 (Ηλεκτρικό Πατίνι)

Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ ενός πατινιού δίνεται από τη συνάρτηση $v'(t) = 33t^2 + 2t$ για $t \in [0, 10]$. Η αρχική ταχύτητα είναι $v(0) = 2$ m/s.

- Υπολογίστε τη συνολική μεταβολή της ταχύτητας v λύνοντας το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt$
- Βρείτε την τελική ταχύτητα $v(10)$.
- Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

① $v(0) = 2 \text{ m/s}$.
Η συνάρτηση $v'(t) = 33t^2 + 2t$ είναι συνεχής στο $[0, 10]$ ως πολυωνυμική.

$$\text{Συνεπώς, } \int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt = \int_0^{10} v'(t) dt = [v(t)]_0^{10} = v(10) - v(0) = v(10) - 2 \quad (1)$$

Συνολική μεταβολή:

$$\int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt = \left[\frac{33t^3}{3} + t^2 \right]_0^{10} = \frac{33 \cdot 10^3}{3} + 100 - \left(\frac{33 \cdot 0^3}{3} + 0 \right) =$$

$$= 11 \cdot 10^3 + 100 = 110 \cdot 10^2 + 10^2 = 10^2 (110 + 1) = 10^2 \cdot 111 = 11.100 \text{ m/s}$$

②

$$(1) \Rightarrow 11.100 = v(10) - 2 \Leftrightarrow v(10) = 11.102 \text{ m/s}$$

③ Δας αρέσουν τα γραμμάτια μου;

Δεν ξέρω για εσάς αλλά δεν έχω ηλεκτρικό πατίνι.

Παρατηρήστε ότι ο μαθητής ολοκληρώνει σωστά τους υπολογισμούς ($v(10) = 11.102$ m/s), όμως στην Κριτική Σκέψη (ερώτημα 3) απαντά εκτός θέματος: «Δεν ξέρω για εσάς αλλά δεν έχω ηλεκτρικό πατίνι» — κωδικοποιήθηκε στο Επίπεδο 1.

Δείγμα 2: Ο ίδιος μαθητής «Ήλιος» (7Π) — Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)

Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(x)$ μιας βιοτεχνίας που παράγει θήκες για κινητά τηλέφωνα,

είναι $K'(x) = 15 - 0,1x$.

Τα σταθερά έξοδα είναι $K(0) = 400$ €.

- Υπολογίστε τη μεταβολή του κόστους K για τις πρώτες 300 θήκες: $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$.
- Βρείτε το συνολικό κόστος για 300 θήκες
- Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

Είναι $K'(x) = 15 - 0,1x$.

Άρα, $(K(x))' = (15x - 0,05x^2)' \Leftrightarrow K(x) = 15x - 0,05x^2 + C$ (1)

Για $x=0$ η (1): $K(0) = 0 + 0 + C \Leftrightarrow C = 400$.

Άρα, η $K(x) = 15x - 0,05x^2 + 400$.

1. $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = \int_0^{300} K'(x) dx = [K(x)]_0^{300} = K(300) - K(0) =$
 $= 4.500 - 4.500 + 400 - 400 = 0$.

2. $K(300) = 4.500 - 4.500 + 400 = 400$.

3. Τι φάση αν τα σταθερά του έξοδα είναι 400€ και όταν πουλήσει 300 θήκες ακόμη να χρωστέι 400€ ως την κλείσει την επιχείρηση. Κρίμα ο κόσμος του δηλαδή να πουλήσει 301 θήκες για να βγάλει $(K(301) = 4.515 - 4.530,05 + 400 = 384,95$ €) 15€.

Στη δεύτερη δραστηριότητα, ο ίδιος μαθητής προχωρά αυτόβουλα στον υπολογισμό $K(301) = 384,95$ €, διαπιστώνει τη μείωση του κόστους και προτείνει το κλείσιμο της επιχείρησης — κωδικοποιήθηκε στο ανώτατο Επίπεδο 4. Η αντίθεση αυτή (1→4) τεκμηριώνει το εύρημα της Ενότητας 5.6 για τη μεταβλητότητα της κριτικής στάσης ανάλογα με το θεματικό πλαίσιο.

Δείγμα 3: Ο μαθητής «Σκλαβενίτης» (4Π) — Άσκηση 1 (Ηλεκτρικό Πατίνι)

Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ ενός πατινιού δίνεται από τη συνάρτηση $v'(t) = 33t^2 + 2t$ για $t \in [0, 10]$. Η αρχική ταχύτητα είναι $v(0) = 2$ m/s.

1. Υπολογίστε τη συνολική μεταβολή της ταχύτητας v λύνοντας το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt$
2. Βρείτε την τελική ταχύτητα $v(10)$.
3. **Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

$$1) \int_0^{10} (33t^2 + 2t) dt = \left[33 \frac{t^3}{3} + t^2 \right]_0^{10} = [11t^3 + t^2]_0^{10} = 11 \cdot 10^3 + 10^2$$

$$2) v'(t) = (33 \frac{t^3}{3} + t^2)' \Rightarrow v(t) = 11t^3 + t^2 + C$$

$$t=0: v(0) = 0 + 0 + C \Rightarrow C=2$$

$$v(t) = 11t^3 + t^2 + 2$$

$$t=10: v(10) = (11 \cdot 10^3 + 10^2) \text{ m/s}$$

3) Λογικά αποτελέσματα (ωραία νούμερα)

Ο μαθητής ολοκληρώνει σωστά τους υπολογισμούς, αλλά στην Κριτική Σκέψη σχολιάζει απλώς: «Λογικά αποτελέσματα (ωραία νούμερα)» — τυπικό παράδειγμα Επιπέδου 2 (τυφλή αποδοχή χωρίς αμφισβήτηση).

Δείγμα 4: Ο μαθητής «Μαλόκ» (8Π) — Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)

Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(x)$ μιας βιοτεχνίας που παράγει θήκες για κινητά τηλέφωνα,

είναι $K'(x) = 15 - 0,1x$.

Τα σταθερά έξοδα είναι $K(0) = 400$ €.

1. Υπολογίστε τη μεταβολή του κόστους K για τις πρώτες 300 θήκες: $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$.
2. Βρείτε το συνολικό κόστος για 300 θήκες
3. **Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

$$1) \int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = \left[15x - 0,1 \frac{x^2}{2} \right]_0^{300} = 15 \cdot 300 - 0,1 \cdot \frac{300^2}{2} = 0 =$$

$$= 4.500 - 9.000 = -4.500$$

$$2) K'(x) = 15 - 0,1x$$

$$K'(x) = (15 - 0,1x)'$$

δηλαδή, $K(x) = 15x - 0,05x^2 + C$

Για $x=0 \Rightarrow K(0) = C =$

$$C = 400$$

Άρα $K(x) = 15x - 0,05x^2 + 400$

$$K(300) = -4.500 + 400 = -4.100 \text{ €}$$

- ③ Το κόστος θα είναι πολύ μεγαλύτερο από τα έσοδα.

Λόγω υπολογιστικού σφάλματος στο πρόσημο, ο μαθητής καταλήγει σε αρνητικό κόστος $K(300) = -4.100$ € και σχολιάζει απλώς «Το κόστος θα είναι πολύ μεγαλύτερο από τα έσοδα» — χωρίς να αναγνωρίσει το ίδιο το αρνητικό πρόσημο ως ένδειξη σφάλματος (Επίπεδο 0).

Δείγμα 5: Ο μαθητής «Τσούρος» (80, Οικονομικό) — Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)

Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(x)$ μιας βιοτεχνίας που παράγει θήκες για κινητά τηλέφωνα,

είναι $K'(x) = 15 - 0,1x$.

Τα σταθερά έξοδα είναι $K(0) = 400$ €.

- Υπολογίστε τη μεταβολή του κόστους K για τις πρώτες 300 θήκες: $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$.
- Βρείτε το συνολικό κόστος για 300 θήκες
- Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

- $K'(x) = 15 - 0,1x$ $K(0) = 400$
 $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = \int_0^{300} (15x - \frac{x^2}{20})' dx$
 $= [15x - \frac{x^2}{20}]_0^{300} = 15 \cdot 300 - \frac{(300)^2}{20} - 15 \cdot 0 + \frac{0^2}{20} =$
 $= 4500 - \frac{90000}{20} = 4500 - 4500 = 0$
- Συνολικό κόστος = σταθερό κόστος + μεταβολή του κόστους
για 300 θήκες = $400 + 0 = 400$
- Οι 300 θήκες για κινητά τηλέφωνα φτιάχτηκαν τζάμπα; Να ανοίξω μια εργοστάσιο τέτοια βιοτεχνία όπου να μπορώ να αυξήσω τη παραγωγή μου με συνεπώς το κέρδος μου χωρίς να επιβαρύνομαι με κόστος παραγωγής!!

Χαρακτηριστικό παράδειγμα. Επιπέδου 4: ο μαθητής αναγνωρίζει πλήρως το οικονομικό παράδοξο και το εκφράζει με έντονη ειρωνεία: «Οι 300 θήκες για κινητά τηλέφωνα φτιάχτηκαν τζάμπα; Να ανοίξω μια τέτοια βιοτεχνία όπου να μπορώ να αυξήσω την παραγωγή μου [...] χωρίς να επιβαρύνομαι με κόστος παραγωγής!!»

Δείγμα 6: Η μαθήτρια «Μαρίκα» (50, Οικονομικό) — Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)

Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(x)$ μιας βιοτεχνίας που παράγει θήκες για κινητά τηλέφωνα,

είναι $K'(x) = 15 - 0,1x$.

Τα σταθερά έξοδα είναι $K(0) = 400$ €.

1. Υπολογίστε τη μεταβολή του κόστους K για τις πρώτες 300 θήκες: $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$.
2. Βρείτε το συνολικό κόστος για 300 θήκες
3. **Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

$$1) \int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = \left[15x - 0,1 \frac{x^2}{2} \right]_0^{300}$$

$$= 15 \cdot 300 - 0,1 \cdot \frac{300^2}{2} = 4500 - 0,1 \cdot 45000$$

$$= 4500 - 4500 = 0$$

$$2) \int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{300} K'(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow [K(x)]_0^{300} = 0 \quad \Rightarrow K(300) - K(0) = 0$$

$$\Rightarrow K(300) - 400 = 0$$

$$\Rightarrow K(300) = 400$$

3) Δεν δίνεται το κόστος για την παραγωγή 300 θηκών να είναι ίσο με τα σταθερά έξοδα δηλαδή ίσο με την παραγωγή μηδέν θηκών.

Η μαθήτρια υπολογίζει σωστά $K(300)=400$ € και διατυπώνει καθαρά τη διαισθητική της αμφισβήτηση: «Δεν γίνεται το κόστος για την παράδοση 300 θηκών να είναι ίσο με τα σταθερά έξοδα, δηλαδή ίσο με την παράδοση μηδέν θηκών» — αναγνωρίζει το παράδοξο, χωρίς όμως πλήρη ποσοτική επέκταση (Επίπεδο 3).

Δείγμα 7: Ο μαθητής «Nick» (12Ο, Οικονομικό) — Άσκηση 2 (Κόστος Βιοτεχνίας)

Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(x)$ μιας βιοτεχνίας που παράγει θήκες για κινητά τηλέφωνα,

είναι $K'(x) = 15 - 0,1x$.

Τα σταθερά έξοδα είναι $K(0) = 400$ €.

1. Υπολογίστε τη μεταβολή του κόστους K για τις πρώτες 300 θήκες: $\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx$.
2. Βρείτε το συνολικό κόστος για 300 θήκες
3. **Κριτική Σκέψη:** Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2.

$$\int_0^{300} (15 - 0,1x) dx = \left[15x - \frac{0,1x^2}{2} \right]_0^{300} = 300 \cdot 15 - \frac{1}{10} \cdot \frac{900}{2} =$$

$$300 \cdot 15 - 45 = 4500 - 45 = 4455$$

$$\text{Άρα } K(0) + 4455 = 400 + 4455 \\ = 4.855$$

Άρα για να παραχθεί 300 θήκες

δαπάνη 4855.

Άρα κάθε μια πρέπει να την πουλά πάνω από 16,1 χρημ. μονάδες

να είναι λογική τιμή.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 300 \\ \hline 45 \\ 4500 \\ - 45 \\ \hline 4500 \\ - 45 \\ \hline 4455 \\ + 400 \\ \hline 4855 \end{array} \quad \begin{array}{r} 300 \\ \cdot 16,1 \\ \hline 1800 \\ 161 \\ \hline 4850 \end{array}$$

Παρά ένα αλγεβρικό σφάλμα στην αντικατάσταση ($K(300)=4.845€$ αντί για 400€), ο μαθητής προχωρά σε ουσιαστικό οικονομικό συλλογισμό: υπολογίζει ότι, για να είναι βιώσιμη η παραγωγή, η τιμή πώλησης πρέπει να είναι «πάνω από 16,1 χρηματικές μονάδες» — τεκμηριωμένη οικονομική επιχειρηματολογία (Επίπεδο 4), παρά το υπολογιστικό σφάλμα.

Αναλυτικοί Πίνακες Λαθών Μαθητών/τριών

Κατηγοριοποιημένη καταγραφή των μαθηματικών λαθών ανά ομάδα προσανατολισμού

Υπόμνημα Κατηγοριών Λάθους

Κατηγορία Λάθους	Ορισμός
Λάθος σταθεράς/αρχικής συνθήκης	Εσφαλμένος υπολογισμός ή παράλειψη της σταθεράς ολοκλήρωσης C από τη δοσμένη αρχική τιμή.
Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Λάθος σε αριθμητική πράξη (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, δεκαδικά) με σωστή κατά τα άλλα μέθοδο.
Λάθος όρια ολοκλήρωσης	Χρήση εσφαλμένων ορίων στο ορισμένο ολοκλήρωμα.
Εννοιολογική σύγχυση	Σύγχυση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών εννοιών/συναρτήσεων (π.χ. παράγωγος vs αρχική συνάρτηση).
Λάθος αντιπαράγωγος/συντελεστής	Εσφαλμένη εύρεση της αντιπαράγωγου ή λάθος αριθμητικός συντελεστής σε αυτήν.
Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	Η λύση διακόπτεται πριν την ολοκλήρωσή της, χωρίς τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα.
Μεθοδολογικό λάθος	Εσφαλμένη επιλογή μεθόδου/προσέγγισης επίλυσης (π.χ. λάθος πράξη μεταξύ σωστά υπολογισμένων μεγεθών).

Λάθη — Πολυτεχνικό Τμήμα (5 περιστατικά)

Στο Πολυτεχνικό τμήμα, η πλειοψηφία των μαθητών/τριών έλυσε σωστά τις ασκήσεις. Καταγράφονται παρακάτω μόνο οι περιπτώσεις με λάθος ή ελλιπές αποτέλεσμα.

A/A	Ψευδώνυμο	Άσκηση	Κατηγορία	Περιγραφή Λάθους	Λάθος Αποτ.	Σωστό Αποτ.
2	Σενιόρ Βάκιλος	Άσκηση 1	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Στο ερώτημα 1 δεν απλοποίησε το κλάσμα $33/3=11$, με αποτέλεσμα λανθασμένο ενδιάμεσο αποτέλεσμα. Το ερώτημα 2 λύθηκε ανεξάρτητα και σωστά, χωρίς να διορθωθεί η ασυνέπεια.	Ερώτ.1: 33.000 m/s (αντί 11.100)	11.100 m/s
8	Μαλόκ	Άσκηση 2	Λάθος αντιπαράγωγος /συντελεστής	Χρησιμοποίησε λανθασμένο συντελεστή στην αντιπαράγωγο ($0,1x^2$ αντί για $0,05x^2$), οδηγώντας σε αρνητικό συνολικό κόστος.	K(300) = -4.100 €	K(300) = 400 €
13	Μαρκ	Άσκηση 1	Λάθος σταθεράς/αρχικής συνθήκης	Δεν ολοκλήρωσε τον υπολογισμό της σταθεράς C από τη συνθήκη $v(0)=2$ · το ερώτημα 2 (τελική ταχύτητα) έμεινε ημιτελής.	$v(10)$ δεν υπολογίστηκε	$v(10) = 11.102$ m/s
13	Μαρκ	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Λάθος στην αριθμητική πράξη κατά την αντικατάσταση στο $x=300$ (υπολογισμός της παράστασης $0,05 \cdot 300^2$).	K(300) = 4.455 €	K(300) = 400 €
14	Σπύρος	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Λάθος στην αριθμητική πράξη της αντιπαράγωγου στο $x=300$ (πολύ αχνό/δυσανάγνωστο γραπτό, αλλά το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι λανθασμένο).	K(300) = 4.885 €	K(300) = 400 €

Λάθη — Οικονομικό Τμήμα (20 περιστατικά)

Στο Οικονομικό τμήμα η συχνότητα λαθών ήταν πολύ υψηλότερη. Καταγράφονται παρακάτω όλα τα λάθη ανά μαθητή/τρια και άσκηση.

A/A	Ψευδώνυμο	Άσκηση	Κατηγορία	Περιγραφή Λάθους	Λάθος Αποτ.	Σωστό Αποτ.
1	«Αν η γιαγιά μου είχε ρόδες»	Άσκηση 1	Λάθος σταθεράς/αρχικής συνθήκης	Παρέλειψε τη σταθερά ολοκλήρωσης $C=2$ από τη συνθήκη $v(0)=2$ στο τελικό αποτέλεσμα.	$v(10) = 11.100$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
1	«Αν η γιαγιά μου είχε ρόδες»	Άσκηση 2	Μεθοδολογικό λάθος	Υπολόγισε σωστά τη μεταβολή ΔΚ, αλλά στη συνέχεια πολλαπλασίασε ξανά επί 300 για το «συνολικό κόστος», οδηγώντας σε εξωπραγματικά μεγάλο αποτέλεσμα.	Συνολικό κόστος $\approx 12.390.000$ α.μ.	$K(300) = 400$ €
2	Κροκόδειλος	Άσκηση 1	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Σωστή μέθοδος και σωστά ενδιάμεσα βήματα· λάθος στην τελική πρόσθεση ($2+11.100$).	$v(10) = 21.102$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
3	Mcqueen	Άσκηση 1	Λάθος όρια ολοκλήρωσης	Χρησιμοποίησε όρια ολοκλήρωσης 0 έως 1 αντί για 0 έως 10· στη συνέχεια δήλωσε άκυρα $v(10)=v(0)=2$, χωρίς πραγματικό υπολογισμό.	$v(10) = 2$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
4	Άριελ	Άσκηση 1	Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	Βρήκε σωστά τη σταθερά $C=2$ και διατύπωσε σωστά τον τύπο $v(t)$, αλλά δεν αντικατέστησε ποτέ $t=10$ για να δώσει αριθμητική απάντηση.	Δεν δόθηκε τελικός αριθμός	$v(10) = 11.102$ m/s
4	Άριελ	Άσκηση 2	Λάθος αντιπαράγωγος /συντελεστής	Έγραψε εσφαλμένη αντιπαράγωγο της μορφής $0,1x^2/x$ αντί για $0,05x^2$, καταλήγοντας σε λανθασμένη μεταβολή κόστους.	$K(300) = 4.870$ €	$K(300) = 400$ €
5	Μαρίκα	Άσκηση 1	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Στο τελευταίο βήμα αφαίρεσε αντί να προσθέσει τη σταθερά $v(0)=2$ στο ολοκλήρωμα.	$v(10) = 10.998$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
6	Λίνα	Άσκηση 1	Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	Έστισε σωστά τη σχέση $v(10)-v(0)=\int \dots$, αλλά δεν υπολόγισε ποτέ αριθμητικά το ολοκλήρωμα· δήλωσε απλώς $v(10)=v(0)$.	$v(10) = 2$ m/s (χωρίς υπολογισμό)	$v(10) = 11.102$ m/s
6	Λίνα	Άσκηση 2	Λάθος αντιπαράγωγος /συντελεστής	Χρησιμοποίησε συντελεστή 0,5 αντί για 0,05 στην αντιπαράγωγο του $-0,1x$.	$\Delta K = 3.650$ €	$\Delta K = 0$ €
8	Τσούρος	Άσκηση 1	Λάθος σταθεράς/αρχικής συνθήκης	Υπολόγισε λανθασμένα τη σταθερά ως $C=0$ αντί για $C=2$ από τη συνθήκη $v(0)=2$.	$v(10) = 11.100$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
9	Κρις	Άσκηση 1	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Σοβαρό αριθμητικό λάθος κατά την τελική αντικατάσταση, με αποτέλεσμα εξωπραγματικά μεγάλη τιμή.	$v(10) = 111.000$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
9	Κρις	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Λάθος στην αφαίρεση κατά την αντικατάσταση $x=300$ ($4.500-15$ αντί για $4.500-4.500$).	$\Delta K = 4.485$ €	$\Delta K = 0$ €
11	Θύρα 7	Άσκηση 1	Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	Δεν πραγματοποιήθηκε κανένας υπολογισμός· δηλώθηκε αδυναμία κατανόησης της εκφώνησης.	Δεν δόθηκε αποτέλεσμα	$v(10) = 11.102$ m/s
11	Θύρα 7	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Λάθος υπολογισμοί σε δυσανάγνωστο τμήμα του γραπτού, με λανθασμένο τελικό αποτέλεσμα.	$\Delta K \approx 4.050$ €	$\Delta K = 0$ €
12	Nick	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Αριθμητικά λάθη στις πράξεις οδήγησαν σε λανθασμένο συνολικό κόστος, αν και η μέθοδος (εύρεση C, αντικατάσταση) ήταν σωστή.	$K(300) \approx 4.895$ €	$K(300) = 400$ €
13	Michael Scoffield	Άσκηση 1	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Συστηματικό λάθος στην απλοποίηση του κλάσματος $33/3$ (υπολογίστηκε ως 77), με ασυνεπείς και εξωπραγματικές τελικές τιμές.	$v(10) \approx 77.000-77.008$ m/s	$v(10) = 11.102$ m/s
13	Michael Scoffield	Άσκηση 2	Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	Η άσκηση εγκαταλείφθηκε πριν την ολοκλήρωση, χωρίς τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα.	Δεν δόθηκε τελικό αποτέλεσμα	$K(300) = 400$ €
15	Πεπόνι	Άσκηση 1	Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	Δεν ολοκληρώθηκε αριθμητικά ούτε το ορισμένο ολοκλήρωμα ούτε ο υπολογισμός του $v(10)$.	Δεν δόθηκε τελικό αποτέλεσμα	$v(10) = 11.102$ m/s
15	Πεπόνι	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Λάθος στην αντικατάσταση οδήγησε σε αρνητικό συνολικό κόστος.	$K(300) = -35$ €	$K(300) = 400$ €

A/A	Ψευδώνυμο	Άσκηση	Κατηγορία	Περιγραφή Λάθους	Λάθος Αποτ.	Σωστό Αποτ.
16	Πετρόμπεης	Άσκηση 1	Εννοιολογική σύγχυση	Υπολόγισε την τιμή της παραγώγου $v'(10)$ αντί για την τιμή της συνάρτησης $v(10)$ — σύγχυση ρυθμού μεταβολής και μεγέθους.	$v'(10) = 3.320$ (λάθος μέγεθος)	$v(10) = 11.102$ m/s
16	Πετρόμπεης	Άσκηση 2	Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	Σοβαρό λάθος πρόσθεσης/μεγέθους κατά την αντικατάσταση, με αποτέλεσμα υπερβολικά μεγάλο συνολικό κόστος.	$K(300) = 49.900$ €	$K(300) = 400$ €

Συνοψίζοντας τα επιμέρους λάθη ανά κατηγορία, ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει το ποσοστό εμφάνισης κάθε τύπου σφάλματος ανά άσκηση και τμήμα, επιτρέποντας την άμεση σύγκριση της συχνότητάς τους.

Ποσοστά Κατηγοριών Λάθους ανά Άσκηση και Τμήμα

Κατηγορία	Πολυτ. Άσκ.1	Πολυτ. Άσκ.2	Οικον. Άσκ.1	Οικον. Άσκ.2
Σωστό	86.7%	80.0%	20.0%	40.0%
Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος	6.7%	13.3%	26.7%	33.3%
Λάθος σταθεράς/αρχικής συνθήκης	6.7%	0.0%	13.3%	0.0%
Λάθος όρια ολοκλήρωσης	0.0%	0.0%	6.7%	0.0%
Εννοιολογική σύγχυση	0.0%	0.0%	6.7%	0.0%
Λάθος αντιπαράγωγος/συντελεστής	0.0%	6.7%	0.0%	13.3%
Ημιτελής / εγκαταλελειμμένη απάντηση	0.0%	0.0%	26.7%	6.7%
Μεθοδολογικό λάθος	0.0%	0.0%	0.0%	6.7%

Η πιο συχνή κατηγορία λάθους και στα δύο τμήματα ήταν το «Αριθμητικό/υπολογιστικό λάθος». Στο Οικονομικό τμήμα εμφανίστηκαν επιπλέον, σε σημαντικό βαθμό, ημιτελείς απαντήσεις και λάθη αντιπαραγώγου/συντελεστή — κατηγορίες σπάνιες στο Πολυτεχνικό — υποδηλώνοντας δυσκολίες όχι μόνο αριθμητικής ακρίβειας αλλά και θεμελιωδέστερης κατανόησης της διαδικασίας ολοκλήρωσης.

Σχήμα Κωδικοποίησης

Κλίμακα 0–4 που χρησιμοποιήθηκε για την ποιοτική αξιολόγηση/βαθμολόγηση των ανοιχτών απαντήσεων στο ερώτημα «Κριτική Σκέψη» και των δύο ασκήσεων (Ηλεκτρικό Πατίνι, Κόστος Βιοτεχνίας).

Επίπεδο	Κατηγορία	Περιγραφή / Κριτήρια	Ενδεικτικό Παράδειγμα
0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση	Δεν υπάρχει γραπτή απάντηση στο ερώτημα 3, ή η υπάρχουσα σημείωση αφορά σύγχυση για τον ίδιο τον υπολογισμό (όχι αξιολόγηση ρεαλιστικότητας/νόηματος του αποτελέσματος).	Μαθητής 3Π (NASA), Άσκηση 1: μόνο η σημείωση «Τι νούμερο είναι αυτό;» δίπλα σε δικό του υπολογισμό· Μαθητής 6Π (Τζίζιος), Άσκηση 1: δεν γράφτηκε καμία απάντηση.
1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός χωρίς μαθηματική αναφορά	Η απάντηση δεν αναφέρεται καθόλου στο αν το αποτέλεσμα είναι λογικό/ρεαλιστικό· είναι αστείο, προσωπικό σχόλιο ή εντελώς άσχετο με το ερώτημα.	Μαθητής 7Π (Ηλιος), Άσκ.1: «Σας αρέσουν τα γράμματά μου; Δεν έχω ηλεκτρικό πατίνι»· Μαθητής 4Π (Ευλαβίτης), Άσκ.2: «Θέλω να με προσλάβουν στη βιοτεχνία».

Επίπεδο	Κατηγορία	Περιγραφή / Κριτήρια	Ενδεικτικό Παράδειγμα
2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος	Ο/Η μαθητής/τρια απλώς επαναλαμβάνει/περιγράφει το αριθμητικό αποτέλεσμα με άλλα λόγια, χωρίς να κρίνει αν είναι ρεαλιστικό ή λογικό στο πλαίσιο του προβλήματος.	Μαθητής 1Π (Αχούρι), Άσκ.2: «Το κόστος παραμένει σταθερό είτε για 0 είτε για 300 θήκες». Μαθητής 4Π, Άσκ.1: «Λογικά αποτελέσματα (ωραία νούμερα)».
3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση	Ο/Η μαθητής/τρια αντιλαμβάνεται εμμέσως ότι το αποτέλεσμα είναι ασυνήθιστο, υπερβολικό ή αντιφατικό με την πραγματικότητα (συχνά μέσω μεταφοράς/χιούμορ ή απλού οικονομικού σχολίου), αλλά δεν το τεκμηριώνει με σύγκριση, υπολογισμό ή αναλυτικό επιχείρημα.	Μαθητής 1Π, Άσκ.1: «...ούτε ταχύτητα του φωτός να πήγαινε». Μαθητής 5Π, Άσκ.1: «Το πατίνι έχει εκτοξευθεί στο διάστημα!». Μαθητής 8Π, Άσκ.1: «Πάει σφαίρα». Μαθητής 6Π, Άσκ.2: «Πρέπει να έχουν πολύ καλούς οικονομολόγους».
4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση	Ο/Η μαθητής/τρια αξιολογεί το αποτέλεσμα με βάση κάποιο κριτήριο, σύγκριση, πρόσθετο υπολογισμό ή συνεπές οικονομικό/πρακτικό επιχείρημα — δείχνει πραγματική επαλήθευση της «λογικής» του μοντέλου.	Μαθητής 7Π (Ηλιος), Άσκ.2: υπολογίζει επιπλέον το $K(301)=384,95€$ για να δείξει ότι η οριακή μεταβολή είναι μόλις 15€, τεκμηριώνοντας γιατί το αποτέλεσμα «βγαίνει» λογικό.

Πίνακες Κριτικής Σκέψης(Πολυτεχνικό τμήμα)

Ο Πίνακας 1 τεκμηριώνει αναλυτικά, σε επίπεδο μεμονωμένου/ης μαθητή/τριας, τα ευρήματα ορθότητας και κριτικής σκέψης του Πολυτεχνικού τμήματος στην Άσκηση 1, στα οποία βασίστηκε η συγκεντρωτική ανάλυση του Πίνακα 5.4.

Πίνακας 1 — Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι

Όλες οι απαντήσεις (N=15) στο ερώτημα «Κριτική Σκέψη» της Άσκησης 1.

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης»	Επίπεδο	Κατηγορία
1	Αγγούρι	1Π	Σωστό	«Αδιάφορο ερώτημα, πάει γρήγορα το πατίνι, πατίνι· ούτε ταχύτητα του φωτός να πήγαινε.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
2	Σενιόρ Βάκιλος	2Π	Μερικώς λάθος	«Τελική ταχύτητα για την χρονική στιγμή $t=10s$ είναι η $v(10)$ που είναι [δυσανάγνωστο] της... κίνησης. Ελπίζω και μην είναι μ^{***} [αυτολογοκριμένη/δυσανάγνωστη λέξη].»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός χωρίς μαθηματική αναφορά
3	NASA	3Π	Σωστό	(Δεν υπάρχει σαφής απάντηση· μόνο η σημείωση «Τι νούμερο είναι αυτό; Formula είναι το πατίνι» δίπλα σε επανάληψη του υπολογισμού.)	0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
4	Σκλαβενίτης	4Π	Σωστό	«Λογικά αποτελέσματα (ωραία νούμερα).»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης»	Επίπεδο	Κατηγορία
5	Βάζελος 13	5Π	Σωστό	«Το πατίνι έχει εκτοξευθεί στο διάστημα!»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
6	Ιβίσκος	6Π	Σωστό	(Δεν γράφτηκε απάντηση στο ερώτημα 3.)	0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
7	Ηλιος	7Π	Σωστό	«Σας αρέσουν τα γράμματά μου; Δεν ξέρω για σας, αλλά δεν έχω ηλεκτρικό πατίνι.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός χωρίς μαθηματική αναφορά
8	Μαλόκ	8Π	Σωστό	«Το ηλεκτρικό πατίνι πάει σφαίρα.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
9	Μήτσος	9Π	Σωστό	«Κατά την προσωπική μου άποψη δεν θα υπάρξει ποτέ πατίνι που θα μπορεί να κινείται με τέτοια ταχύτητα, δηλαδή κινούμενο για λίγα δευτερόλεπτα.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
10	Μαυρούλης	10Π	Σωστό	«Το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2 είχε ασυνήθιστο αποτέλεσμα, καθώς μιλάμε για την ταχύτητα ενός ηλεκτρικού πατινιού, εκτός αν έπαιζε νίτρο.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
11	Σώτος	11Π	Σωστό	«Η ταχύτητα που παρατηρείτε μετά την πάροδο $t=10\text{sec}$ δεν είναι εφικτή σε ένα ηλεκτρικό πατίνι και γενικότερα δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα για κανένα κινούμενο όχημα.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
12	Κριστόφ Βαζέχα	12Π	Σωστό	«Το αποτέλεσμα του ερωτήματος 2 παρατηρώ ότι είναι κατά δύο μονάδες από το αποτέλεσμα του 1ου, άρα και από το ζητούμενο. Το ποσό είναι εξωπραγματικό.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης»	Επίπεδο	Κατηγορία
13	Μαρκ	13Π	Μερικώς λάθος	«Η μεταβολή της ταχύτητας είναι πολύ [δυσανάγνωστη λέξη, πιθανώς 'μεγάλη'].»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος
14	Σπύρος	14Π	Σωστό	(Κείμενο εξαιρετικά αχνό/δυσανάγνωστο στο πρωτότυπο — αναφέρεται πιθανώς σε «ρεαλιστική ταχύτητα» σε σχέση με το χρονικό διάστημα και την τιμή, αλλά δεν μπορεί να μεταγραφεί με βεβαιότητα.)	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος
15	Dennis	15Π	Σωστό	«Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ αρχικής ταχύτητας και τελευταίας ταχύτητας είναι τεράστια και ότι η τελευταία ταχύτητα είναι πολύ μεγάλη και δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 2 παρουσιάζει το σύνολο των ατομικών απαντήσεων του Πολυτεχνικού τμήματος στην Άσκηση 2.

Πίνακας 2 — Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Όλες οι απαντήσεις (N=15) στο ερώτημα «Κριτική Σκέψη» της Άσκησης 2.

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης» (μεταγραφή)	Επίπεδο	Κατηγορία
1	Αγγούρι	1Π	Σωστό	«Για να καταλάβω... [σβησμένο/δυσανάγνωστο τμήμα]. Το κόστος παραμένει σταθερό είτε για 0 θήκες είτε για 300 θήκες.»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος
2	Σενιόρ Βάκιλος	2Π	Σωστό	«Είναι μια πολύ ανεπιτυχής βιοτεχνία αφού ούτε έχει κέρδη από τα αρχικά έξοδα ούτε έχει και χρέη. Γι' αυτό είναι και θα παραμείνει βιοτεχνία.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
3	NASA	3Π	Σωστό	«Λογικά, [δ]ια την παραγωγή αυτών των θηκών απαιτούνταν υλικά που παρείχε η μητέρα φύση και δεν χρειάστηκε να χρεωθεί η βιοτεχνία ούτε για ένα 1€... κυριολεκτικά.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
4	Σκλαβενίτης	4Π	Σωστό	«Θέλω να με προσλάβουν στη βιοτεχνία.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός χωρίς μαθηματική αναφορά
5	Βάζελος 13	5Π	Σωστό	«Οι πρώτες 300 θήκες δεν κοστίζουν (κυριολεκτικά) τίποτα στην βιοτεχνία.»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος
6	Ιβίσκος	6Π	Σωστό	«Πρέπει αυτή η βιοτεχνία να έχει πολύ καλούς οικονομολόγους για να μη μεταβάλλεται το κόστος.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
7	Ήλιος	7Π	Σωστό	«Τι φάση, αν τα σταθερά έξοδα είναι 400€ και όταν πουλήσει 300 θήκες ακόμη να χρωστάει 400€, ας κλείσει την επιχείρηση. Κρίμα ο κόπος του δηλαδή· να πουλήσει 301 θήκες για να κερδίσει $(K(301)=4.515-4.530,05+400=384,95€)$ 15€.»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης» (μεταγραφή)	Επίπεδο	Κατηγορία
8	Μαλόκ	8Π	Λάθος	«Το κόστος θα είναι πολύ μεγαλύτερο από τα έσοδα.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
9	Μήτσος	9Π	Σωστό	«Θεωρώ πως τα δεδομένα του προβλήματος δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
10	Μαυρούλης	10Π	Σωστό	«Το συνολικό κόστος για τις 300 θήκες είναι πολύ λίγο και ο επιχειρηματίας δεν θα μπορεί να ζήσει ευφορίας. Θα πρέπει να αυξήσει την τιμή της θήκης.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
11	Σώτος	11Π	Σωστό	«Τα έσοδα από την παραγωγή των θηκών δεν θα ανταποκρίνονται στα αναγκαία έξοδα. Επομένως η βιοτεχνία θα χρειαστεί [δανειοδότηση/χρηματοδότηση]. $K'(x)=0 \Rightarrow x=150$ θήκες.»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
12	Κριστόφ Βαζέχα	12Π	Σωστό	«Παρατηρώ ότι οι 300 θήκες ισούνται χρηματικά με τις 0, το οποίο δεν στέκει.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
13	Μαρκ	13Π	Λάθος	«Το $K(300)$ έχει αριθμητικά μεγαλύτερη τιμή από το $K(0)$, όμως όχι υπερβολικά μεγάλη σε αντίθεση με το άσκηση 1. Άρα η μεταβολή του κόστους γίνεται σε φυσιολογικά πλαίσια. Είναι πιθανό να πραγματικό μέσο.»	3	Διαισθητική / δημιουργική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας, χωρίς ποσοτική τεκμηρίωση
14	Σπύρος	14Π	Λάθος	(Κείμενο εξαιρετικά αγνό/δυσανάγνωστο στο πρωτότυπο — δεν μπορεί να μεταγραφεί με βεβαιότητα.)	0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
15	Dennis	15Π	Σωστό	«Ότι το κόστος είναι σταθερό για οποιαδήποτε [ποσότητα] θήκη[ς].»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη του αποτελέσματος

Πίνακες Κριτικής Σκέψης(Οικονομικό τμήμα)

Ο Πίνακας 3 τεκμηριώνει τις ατομικές απαντήσεις του Οικονομικού τμήματος στην Άσκηση 1, στις οποίες βασίστηκε η ανάλυση του Πίνακα 5.7.

Πίνακας 3 — Άσκηση 1: Το Ηλεκτρικό Πατίνι

Όλες οι απαντήσεις (N=15) στο ερώτημα «Κριτική Σκέψη» της Άσκησης 1.

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης» (μεταγραφή)	Επίπεδο	Κατηγορία
1	«Αν η γιαγιά μου είχε ρόδες»	10	Λάθος	«Το αποτέλεσμα και των δύο ερωτημάτων είναι ίσο με αυτό του πρώτου ερωτήματος.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
2	Κροκόδειλος	20	Μερικώς λάθος	«Καλό! Θα μπορούσε να είναι και καλύτερο.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
3	Mcqueen	30	Λάθος	«Βλέπουμε ότι $v(10)=v(0)=2$ m/s. Άρα η ταχύτητα είτε παρέμεινε σταθερή είτε αυξομειώνεται από 0-10.»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη / παρατήρηση
4	Άριελ	40	Λάθος (ημιτελής)	«Η λύση του ρυθμού μεταβολής απαιτεί σωστή ερμηνείωση των πληροφοριών... κάνοντας τα αρκετά πιο δύσκολο για τα οικονομικά τμήματα.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
5	Μαρίκα	50	Λάθος	«Πώς γίνεται να έχει τόση μεγάλη ταχύτητα το πατίνι»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
6	Λίνα	60	Λάθος (ημιτελής)	«Δεν ξέρω αν είναι σωστό το αποτέλεσμα, αλλά βγαίνει το ίδιο. Το $v(0)$ με το $v(10)$.»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη / παρατήρηση
7	Χαρούμενη κούκλα	70	Σωστό	«Δεν μ' αρέσει το αποτέλεσμα. Το 2 είναι λίγο άκυρο αλλά δεν παράφει.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
8	Τσούρος	80	Λάθος	«Βατό θα ναι το αποτέλεσμα του 2, στρογγυλό νούμερο, λίγο μεγάλο αλλά στρογγυλό.»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη / παρατήρηση
9	Κρις	90	Λάθος	«Το ολοκλήρωμα $\neq V(10)$ »	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη / παρατήρηση
10	Μαρία	100	Σωστό	«Δεν ξέρω τι να σχολιάσω.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
11	Θύρα 7	110	Λάθος (κενό)	«Δεν ξέρω [διαγραμμένο] τι ακριβώς θέλετε»	0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
12	Nick	120	Σωστό	«Ακόμα και τώρα δεν μπορώ να το συνδυάσω με την καθημερινή ζωή... θέλει να το αμφισβητούμε στη ζωή, κολλάω.»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
13	Michael Scoffield	130	Λάθος	«...Είτε βρήκε σωστό ή λάθος. Δεν το κρίνω εγώ αυτό.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
14	Πεπόνι	150	Λάθος (ημιτελής)	«Δεν υπάρχει καμία περίπτωση η μεταβολή της ταχύτητας του πατινιού να γίνει [ημιτελής πρόταση]...»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
15	Πετρόμπεης	160	Λάθος	«Ο,τι κάνω εγώ δεν είναι αρκετό... Με αγάπη»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο

Τέλος, ο Πίνακας 4 παρουσιάζει τις ατομικές απαντήσεις του Οικονομικού τμήματος στην Άσκηση 2, οι οποίες τεκμηριώνουν τα ευρήματα του Πίνακα 5.9.

Πίνακας 4 — Άσκηση 2: Κόστος Βιοτεχνίας

Όλες οι απαντήσεις (N=15) στο ερώτημα «Κριτική Σκέψη» της Άσκησης 2

A/A	Ψευδώνυμο	Κωδ. Ομάδας	Ορθότητα Υπολ.	Απάντηση «Κριτικής Σκέψης» (μεταγραφή)	Επίπεδο	Κατηγορία
1	«Αν η γιαγιά μου είχε ρόδες»	1Ο	Λάθος	«Δεν κατάλαβα καν, με γράση!!»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο
2	Κροκόδειλος	2Ο	Σωστό	«Μας φαίνεται περίεργο διότι και K(300) και K(0) είναι 400€.»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
3	Mcqueen	3Ο	Σωστό	«Φαίνεται πως δεν παρουσιάστηκε καθόλου μεταβολή στην αγορά, είτε από την πλευρά της ζήτησης είτε από την πλευρά της προσφοράς.»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
4	Άριελ	4Ο	Λάθος	«Η επιχείρηση έχει πολλά έξοδα, καθώς εάν μια θήκη για να παραχθεί χρειάζεται 16,2€ (4870/30). Επιπλέον μπορεί στην αγορά να πωλείται για τη τριπλάσια τιμή, όμως είναι ανάλογα τη ζήτηση που έχει στην αγορά.»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
5	Μαρίκα	5Ο	Σωστό	«Δεν γίνεται το κόστος για την παράδοση 300 θηκών να είναι ίσο με τα σταθερά έξοδα δηλαδή ίσο με την παράδοση μηδέν θηκών.»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
6	Λίνα	6Ο	Λάθος	«Το κόστος βγαίνει πολύ μεγάλο αριθμό.»	2	Επιφανειακή περιγραφική επανάληψη / παρατήρηση
7	Χαρούμενη κούκλα	7Ο	Σωστό	«Παρατηρώ ότι τα σταθερά έξοδα είναι ίδια με το συνολικό κόστος. Δεν θα μείνουν άλλα χρήματα... για να πάρει και άλλες θήκες, κρίμα.»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
8	Τσούρος	8Ο	Σωστό	«Οι 300 θήκες για κινητά τηλέφωνα φτιάχτηκαν τσάμπα;! Να ανοίξω μια εγώ μια τέτοια βιοτεχνία... χωρίς να επιβαρύνομαι με κόστος παραγωγής!!»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
9	Κρις	9Ο	Λάθος	«4485 δεν δίνεται να είναι τόσο μεγάλο το ποσό για το συνολικό κόστος 300 θηκών.»	3	Διαισθητική αναγνώριση (μη) ρεαλιστικότητας ή αξιολογή ερμηνεία, χωρίς πλήρη ποσοτική τεκμηρίωση
10	Μαρία	10Ο	Σωστό	«Δε γίνεται το κόστος παραγωγής των 300 θηκών να είναι ίσο με τα σταθερά έξοδα, γιατί αυτό σημαίνει ότι το κόστος παραγωγής είναι 0.»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
11	Θύρα 7	11Ο	Λάθος	(Ασαφές/διαγραμμένο κείμενο, μη αναγνώσιμο με βεβαιότητα.)	0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
12	Nick	12Ο	Λάθος	«Άρα για να παραχθεί 300 θήκες δαπάνα 4855. Άρα η τιμή πρέπει να την πουλάει πάνω από 16,1 χρηματικές μονάδες να είναι λογική τιμή.»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
13	Michael Scoffield	13Ο	Λάθος (ημιτελής)	«Πού κολλάει ο ρυθμός μεταβολής εδώ;» [εγκαταλελειμμένη απάντηση]	0	Απουσία / Μη κωδικοποιήσιμη απάντηση
14	Πεπόνι	15Ο	Λάθος	«Αν ο υπολογισμός είναι σωστός (που δεν το νομίζω), τότε η βιοτεχνία θα κλείσει σύντομα...»	4	Αιτιολογημένη, ποσοτική ή οικονομικά τεκμηριωμένη κριτική αξιολόγηση
15	Πετρόμπεης	16Ο	Λάθος	«Αυτό είναι και το κόστος της ζωής.»	1	Εκτός θέματος / Αστεϊσμός / Προσωπικό σχόλιο