



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

**«Η γενικευμένη εξίσωση των Pell – Fermat:
Ιστορική Αναδρομή, Θεωρητικό Υπόβαθρο, Μέθοδοι
Επίλυσης και Εφαρμογές»**

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΣΠΥΡΟΥΛΙΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΟΝΟΜΑ ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

ΠΟΥΛΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2026

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη της Διοφαντικής εξίσωσης Pell – Fermat και της γενικευμένης μορφής της, με έμφαση στη δομή των λύσεων και στις βαθύτερες αριθμητικές και αλγεβρικές συνδέσεις που προκύπτουν από αυτή. Η εξίσωση Pell – Fermat αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα Διοφαντικής εξίσωσης, καθώς ένα απλό αλγεβρικό πρόβλημα οδηγεί σε πλούσια θεωρητική δομή και συνδέεται με διαφορετικές περιοχές της Θεωρίας Αριθμών. Η ανάλυση που ακολουθεί οργανώνεται σε έξι κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το γενικό πλαίσιο των Διοφαντικών εξισώσεων και η ιστορική εξέλιξη της εξίσωσης Pell – Fermat. Αρχικά μελετάται η κλασική εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$ και στη συνέχεια εισάγεται η γενικευμένη μορφή $x^2 - Dy^2 = N$. Παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες της εξίσωσης και αναδεικνύεται η ιδιαίτερη θέση της μέσα στη Θεωρία Αριθμών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία των συνεχών κλασμάτων και ειδικότερα η ανάπτυξη της $\sqrt{D}$. Μελετάται η σχέση των συγκλινόντων με τις λύσεις της εξίσωσης και παρουσιάζεται ο ρόλος των συνεχών κλασμάτων ως αποτελεσματικού εργαλείου για την εύρεση θεμελιωδών λύσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται συστηματικά η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat $x^2 - Dy^2 = N$. Μελετώνται συνθήκες ύπαρξης λύσεων, μέθοδοι εύρεσης και παραγωγής λύσεων, καθώς και η δομή του συνόλου τους. Μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα αναδεικνύεται η διαφοροποίηση της συμπεριφοράς της εξίσωσης ανάλογα με τις αριθμητικές ιδιότητες των παραμέτρων της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο η μελέτη μεταφέρεται στο πλαίσιο των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων. Εισάγονται οι έννοιες της νόρμας, του συζυγούς στοιχείου και των μονάδων. Η εξίσωση Pell – Fermat ερμηνεύεται πλέον ως εξίσωση νόρμας. Ιδιαίτερη θέση κατέχει το Θεώρημα Μονάδων του Dirichlet, μέσω του οποίου εξηγείται η αλγεβρική δομή των λύσεων και η εμφάνιση άπειρων οικογενειών λύσεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο η αλγεβρική αυτή προσέγγιση προχωρά βαθύτερα με τη μελέτη του ρυθμιστή και του αριθμού κλάσης των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων. Ο ρυθμιστής συνδέεται με τη θεμελιώδη μονάδα, ενώ ο αριθμός κλάσης αποτυπώνει σημαντικές ιδιότητες της αριθμητικής δομής του σώματος. Η μελέτη κορυφώνεται στον τύπο αριθμού κλάσης του Dirichlet, ο οποίος συνδέει τη διακρίνουσα, τον ρυθμιστή και ειδικές τιμές των συναρτήσεων L . Με τον τρόπο αυτό η αρχική Διοφαντική εξίσωση συνδέεται με βαθύτερα αλγεβρικά και αναλυτικά αναλλοίωτα.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο εξετάζονται οι πολυγωνικοί αριθμοί ως φυσικό πεδίο εφαρμογής της θεωρίας που αναπτύχθηκε. Μελετώνται προβλήματα που αφορούν σχέσεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών πολυγωνικών αριθμών και η αναγωγή τους σε Διοφαντικές εξισώσεις και, σε κατάλληλες περιπτώσεις, σε εξισώσεις Pell – Fermat. Μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα και ιδιαίτερα από τη μελέτη πρόσθετων αριθμητικών συνθηκών στις λύσεις της εξίσωσης Pell – Fermat $x^2 - Dy^2 = 1$, αναδεικνύεται ότι η ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης αυτής δεν αρκεί πάντοτε για την επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Συνολικά, η εργασία αναδεικνύει τη βαθιά σύνδεση μεταξύ Διοφαντικών εξισώσεων, συνεχών κλασμάτων, πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων, μονάδων, ρυθμιστών, αριθμών κλάσης και πολυγωνικών αριθμών. Η πορεία από ένα συγκεκριμένο πρόβλημα ακέραιων λύσεων προς τη μελέτη της αλγεβρικής και αριθμητικής δομής που το διέπει και, τελικά, η επιστροφή σε συγκεκριμένα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών, αποτυπώνει τον ενιαίο χαρακτήρα και τη βαθύτερη σύνδεση των διαφορετικών εργαλείων που αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή και Ιστορική Αναδρομή της Εξίσωσης Pell - Fermat

Η Θεωρία Αριθμών αποτελεί έναν από τους αρχαιότερους αλλά και σημαντικότερους κλάδους των μαθηματικών. Από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας ως τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα, οι ακέραιοι αριθμοί και οι μεταξύ τους σχέσεις αποτέλεσαν αντικείμενο συνεχούς μελέτης. Ένα από τα βασικά ερωτήματα που απασχόλησαν διαχρονικά τους μαθηματικούς είναι η εύρεση ακέραιων λύσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις, τα λεγόμενα Διοφαντικά προβλήματα.

Οι Διοφαντικές εξισώσεις παρουσιάζουν μια θεμελιώδη διαφορά σε σχέση με τις εξισώσεις που μελετώνται πάνω στα σώματα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Ενώ στις τελευταίες αναζητούμε γενικά πραγματικές ή μιγαδικές λύσεις, στις Διοφαντικές εξισώσεις ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για ακέραιες ή ρητές λύσεις. Ως αποτέλεσμα, η ύπαρξη λύσεων δεν είναι δεδομένη και η ίδια η δομή του συνόλου των λύσεων αποτελεί μέρος του προβλήματος. Μικρές μεταβολές στους συντελεστές μιας εξίσωσης μπορεί να οδηγήσουν σε ριζικά διαφορετική συμπεριφορά ως προς την ύπαρξη ή τον αριθμό των λύσεων. Το φαινόμενο αυτό καθιστά τη μελέτη των Διοφαντικών εξισώσεων ιδιαίτερα απαιτητική αλλά και βαθιά ενδιαφέρουσα.

Μία Διοφαντική εξίσωση είναι γενικά μια πολυωνυμική εξίσωση της μορφής

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

όπου τα ζητούμενα $x_1, x_2, \dots, x_n$ πρέπει να ανήκουν στους ακέραιους αριθμούς. Η δυσκολία τέτοιων προβλημάτων έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει γενική μέθοδος επίλυσης για όλες τις Διοφαντικές εξισώσεις [1], [2]. Κάθε κατηγορία εξισώσεων απαιτεί ιδιαίτερες τεχνικές και θεωρητικά εργαλεία.

Μεταξύ των σημαντικότερων κατηγοριών Διοφαντικών εξισώσεων ξεχωρίζουν οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού δύο μεταβλητών. Ιδιαίτερη θέση ανάμεσα τους κατέχει η εξίσωση Pell – Fermat, η οποία συνδυάζει απλή αλγεβρική μορφή με εξαιρετικά πλούσια αριθμητική συμπεριφορά.

1.1 Η Εξίσωση Pell - Fermat

Η κλασική εξίσωση Pell – Fermat είναι η Διοφαντική εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

όπου D είναι θετικός ακέραιος μη τέλειο τετράγωνο. Παρά την απλή της μορφή, η εξίσωση αυτή παρουσιάζει πλούσια μαθηματική δομή και συνδέεται με θεμελιώδεις έννοιες της Θεωρίας Αριθμών και της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών. Η εξίσωση διαθέτει πάντοτε τις λεγόμενες τετριμμένες λύσεις $(x, y) = (\pm 1, 0)$. Το

βασικό ερώτημα είναι η ύπαρξη μη τετριμμένων ακέραιων λύσεων, δηλαδή λύσεων με $y \neq 0$. Ένα από τα πιο εντυπωσιακά χαρακτηριστικά της είναι το γεγονός ότι για κάθε θετικό ακέραιο D που δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο, η εξίσωση διαθέτει άπειρες μη τετριμμένες ακέραιες λύσεις [1], [2].

Για παράδειγμα, για $D = 2$ παίρνουμε την εξίσωση $x^2 - 2y^2 = 1$ της οποίας η μικρότερη θετική λύση είναι η $(x, y) = (3, 2)$ καθώς $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$. Η λύση αυτή παίζει θεμελιώδη ρόλο στη δομή όλων των υπόλοιπων λύσεων της εξίσωσης, όπως θα αναπτυχθεί στα επόμενα κεφάλαια.

Κεντρική έννοια στη μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat είναι η έννοια της θεμελιώδους λύσης.

Ορισμός 1.1 Η μικρότερη θετική λύση (x_1, y_1) της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$

με $x_1 > 0$ και $y_1 > 0$ ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης.

Η σημασία της θεμελιώδους λύσης είναι ιδιαίτερα μεγάλη, καθώς από αυτή μπορούν να παραχθούν όλες οι υπόλοιπες λύσεις της εξίσωσης.

Θεώρημα 1.1 Αν (x_1, y_1) είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$

τότε κάθε θετική ακέραια λύση (x_n, y_n) δίνεται από τη σχέση

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Με άλλα λόγια, όλες οι θετικές λύσεις της εξίσωσης παράγονται από τη θεμελιώδη λύση μέσω διαδοχικών δυνάμεων του στοιχείου $x_1 + y_1\sqrt{D}$. Το αποτέλεσμα αυτό αποκαλύπτει ότι το σύνολο των λύσεων διαθέτει ισχυρή αλγεβρική δομή, η οποία θα ερμηνευτεί στη συνέχεια μέσω της θεωρίας μονάδων τετραγωνικών σωμάτων [1], [2].

Επιπλέον, κάθε μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης είναι πρωτογενής με την ακόλουθη έννοια.

Λήμμα 1.1 Έστω ότι (x, y) είναι λύση της εξίσωσης

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

τότε $\gcd(x, y) = 1$.

Απόδειξη: Έστω ότι $d = \gcd(x, y)$. Τότε ο d διαιρεί τόσο το x όσο και το y , άρα διαιρεί και τον αριθμό $x^2 - Dy^2$. Εφόσον όμως $x^2 - Dy^2 = 1$ προκύπτει ότι $d|1$. Συνεπώς $d = 1$ και άρα $\gcd(x, y) = 1$. ■

1.2 Η Γενικευμένη Εξίσωση Pell - Fermat

Η κλασική εξίσωση Pell – Fermat $x^2 - Dy^2 = 1$ μπορεί να γενικευθεί θεωρώντας στο δεύτερο μέλος έναν οποιονδήποτε μη μηδενικό ακέραιο αριθμό N . Έτσι προκύπτει η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

όπου D θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο και $N \in \mathbb{Z}^*$.

Σε αντίθεση με την κλασική εξίσωση η οποία για κάθε D διαθέτει μη τετριμμένες ακέραιες λύσεις, η γενικευμένη μορφή της εξίσωσης εισάγει σημαντικά μεγαλύτερη πολυπλοκότητα. Η ύπαρξη λύσεων εξαρτάται όχι μόνο από τον ακέραιο D , αλλά και από τις αριθμητικές ιδιότητες του N . Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί ειδικά κριτήρια επιλυσιμότητας και αλγόριθμοι που βασίζονται στη θεωρία των συνεχών κλασμάτων και στη δομή των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων.

Μία αναγκαία συνθήκη είναι η εξίσωση να είναι επιλύσιμη ως προς κατάλληλα υπόλοιπα modulo πρώτων αριθμών. Αν η εξίσωση δεν διαθέτει λύση σε κάποιο modulo p τότε δεν μπορεί να διαθέτει ακέραια λύση. Ωστόσο, η τοπική επιλυσιμότητα δεν αρκεί πάντοτε για την ύπαρξη ακέραιων λύσεων. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η εξίσωση διαθέτει λύσεις σε κάθε modulo αλλά δεν διαθέτει καμία ακέραια λύση. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 - 2y^2 = 5$ δεν έχει ακέραιες λύσεις, όπως φαίνεται εξετάζοντας την εξίσωση modulo 8, παρότι η αντίστοιχη εξίσωση $x^2 - 2y^2 \equiv 5 \pmod{5}$ είναι επιλύσιμη για κάθε πρώτο p .

Η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat εμφανίζεται σε πληθώρα προβλημάτων της Θεωρίας Αριθμών και η μελέτη της συνδέεται στενά με έννοιες όπως οι νόρμες σε τετραγωνικά σώματα αριθμών, η δομή της ομάδας των μονάδων, η θεωρία των συνεχών κλασμάτων, οι πολυγωνικοί αριθμοί και γενικότερα η Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.

Η περίπτωση της γενικευμένης εξίσωσης αποτελεί φυσική επέκταση της κλασικής θεωρίας της Pell – Fermat και βρίσκεται στο επίκεντρο της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η σημασία της και οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για τη μελέτη της αποτελούν αποτέλεσμα μιας μακράς ιστορικής εξέλιξης, η οποία παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

1.3 Ιστορική Αναδρομή της Εξίσωσης Pell - Fermat

Η ιστορία της εξίσωσης Pell – Fermat ξεκινά πολύ πριν από την εμφάνιση της σύγχρονης ευρωπαϊκής μαθηματικής σκέψης. Ήδη από τον 7^ο αιώνα μ.Χ. οι Ινδοί μαθηματικοί είχαν μελετήσει εξισώσεις της μορφής

$$x^2 - Dy^2 = N.$$

Ο Brahmagupta εισήγαγε μια μέθοδο σύνθεσης λύσεων, η οποία επιτρέπει τη παραγωγή νέων λύσεων από γνωστές και αποτέλεσε πρόδρομο της σύγχρονης αλγεβρικής προσέγγισης [11].

Ο Bhaskara II, τον 12^ο αιώνα, ανέπτυξε περαιτέρω τη μέθοδο αυτή, γνωστή και ως chakravala, η οποία είναι εντυπωσιακά αποδοτική και σε πολλές περιπτώσεις συγκρίσιμη με τις σύγχρονες μεθόδους.

Στην Ευρώπη, το πρόβλημα επανήλθε στο προσκήνιο τον 17^ο αιώνα περίπου μέσω του Γάλλου μαθηματικού Pierre de Fermat (1601 – 1665). Ο Fermat διατύπωσε τον ισχυρισμό ότι η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

έχει μη τετριμμένες ακέραιες λύσεις, χωρίς ωστόσο να δημοσιεύσει κάποια αντίστοιχη απόδειξη (πρακτική που απαντά και σε άλλους ισχυρισμούς του Fermat, όπως στην περίπτωση του περίφημου τελευταίου θεωρήματος του Fermat, σχετικά με τη λύση της εξίσωσης

$$x^v + y^v = z^v, v \geq 3$$

που τελικά αποδείχθηκε αδύνατη το 1994 από τον Άγγλο μαθηματικό Andrew Wiles (1953 -). Ο Fermat, μελετώντας τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου, σημείωσε στο περιθώριο του έργου ότι είχε βρει μια «θαυμάσια απόδειξη» για τη μη ύπαρξη λύσεων χωρίς, ωστόσο, να την καταγράψει [11].)

Το πρόβλημα απασχόλησε πολλούς ακόμα μαθηματικούς της εποχής, μέχρι που ο Lagrange απέδειξε τελικά ότι η ανάπτυξη του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα είναι περιοδική, γεγονός που εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσεων. Το αποτέλεσμα αυτό αποτέλεσε το πρώτο πλήρες θεωρητικό θεμέλιο για την επίλυση της εξίσωσης. Η σύνδεση με τα συνεχή κλάσματα υπήρξε καθοριστική, καθώς κατέστησε δυνατή την εύρεση της θεμελιώδους λύσης για κάθε τιμή του D . Ωστόσο, η πραγματική θεωρητική ερμηνεία του προβλήματος εμφανίστηκε τον 19^ο αιώνα με τη γέννηση της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

Ο Gauss μέσα από το έργο του Disquisitiones Arithmeticae έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας των δυαδικών τετραγωνικών μορφών, οι οποίες συνδέονται στενά με την εξίσωση Pell – Fermat. Οι ιδέες του επηρέασαν βαθιά την εξέλιξη της θεωρίας και οδήγησαν σε νέες προσεγγίσεις για τη μελέτη Διοφαντικών εξισώσεων [11].

Στη συνέχεια, ο Dirichlet ανέπτυξε τη θεωρία μονάδων αλγεβρικών σωμάτων και απέδειξε το περίφημο θεώρημα μονάδων, το οποίο εξηγεί γιατί η εξίσωση Pell διαθέτει άπειρες λύσεις. Μέσα από το θεώρημα αυτό η ύπαρξη άπειρων λύσεων δεν εμφανίζεται πλέον ως αριθμητική ιδιαιτερότητα αλλά ως φυσική συνέπεια της δομής της ομάδας των μονάδων ενός πραγματικού τετραγωνικού σώματος.

Η θεωρία εξελίχθηκε περαιτέρω μέσω των εργασιών του Dedekind, ο οποίος εισήγαγε την έννοια των ιδεωδών. Η εισαγωγή των ιδεωδών επέτρεψε την αντιμετώπιση προβλημάτων μοναδικής παραγοντοποίησης και συνέβαλε καθοριστικά στη διαμόρφωση της σύγχρονης Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών [7].

Στο σημείο αυτό αξίζει να σχολιάσουμε μια παρανόηση. Η εξίσωση δεν σχετίζεται ουσιαστικά με τον John Pell (1610 – 1685), παρόλο που αναφέρεται με το όνομα του. Ο Leonard Euler (1707 – 1783) εσφαλμένα απέδωσε στον Pell μια μέθοδο λύσης που είχε ανακαλυφθεί σε προγενέστερο χρόνο από τον Άγγλο μαθηματικό William Brouncker (1620 – 1684). Αυτή η μέθοδος βασίζεται σε έναν αλγόριθμο που είχε προταθεί από τον Fermat, χωρίς ωστόσο να διορθωθεί η παρανόηση σχετικά με την ονομασία της εξίσωσης.

Η εξίσωση Pell – Fermat, τόσο στην κλασική όσο και στη γενικευμένη της μορφή, αποτελεί σήμερα βασικό παράδειγμα Διοφαντικού προβλήματος με βαθιές συνδέσεις σε διάφορους τομείς της Θεωρίας Αριθμών. Η μελέτη της λειτουργεί ως γέφυρα μεταξύ ιστορικών μεθόδων, σύγχρονων αλγεβρικών εργαλείων και γενικότερων δομών, προετοιμάζοντας το έδαφος για τη θεωρητική ανάπτυξη που ακολουθεί. Οι σύγχρονες μελέτες εξετάζουν γενικεύσεις της εξίσωσης σε ανώτερους βαθμούς, συνδέσεις με ελλειπτικές καμπύλες, αλγοριθμικές μεθόδους υπολογισμού θεμελιωδών μονάδων και εφαρμογές στη θεωρία υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

Επιπλέον, οι έννοιες που εμφανίζονται στη μελέτη της εξίσωσης, όπως η νόρμα, οι μονάδες και τα τετραγωνικά σώματα αριθμών, αποτελούν σήμερα βασικά εργαλεία σε πολλούς τομείς της Θεωρίας Αριθμών και της Αλγεβρικής Γεωμετρίας.

Στα επόμενα κεφάλαια θα παρουσιαστεί το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη της εξίσωσης. Αρχικά θα δοθούν βασικοί ορισμοί και ιδιότητες που σχετίζονται με την εξίσωση και τις λύσεις της, ενώ στη συνέχεια θα εξεταστούν μέθοδοι που επιτρέπουν τη συστηματική μελέτη τόσο της κλασικής όσο και της γενικευμένης μορφής της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνεχή Κλάσματα και Ανάπτυξη του $\sqrt{D}$

Η θεωρία των συνεχών κλασμάτων αποτελεί βασικό εργαλείο για τη μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat. Μέσω της ανάπτυξης των τετραγωνικών αρρήτων σε συνεχή κλάσματα καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης και, κατ' επέκταση, η παραγωγή όλων των υπόλοιπων λύσεων της.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας των συνεχών κλασμάτων, οι συγκλίνοντες ρητοί και οι κύριες ιδιότητες τους. Στη συνέχεια εξετάζεται η περιοδική ανάπτυξη των τετραγωνικών αρρήτων και αναδεικνύεται η σύνδεση της με την εξίσωση Pell – Fermat. Τέλος, παρουσιάζεται η διαδικασία εύρεσης της θεμελιώδους λύσης μέσω συνεχών κλασμάτων και δίνονται χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής.

2.1 Ορισμός Συνεχούς Κλάσματος

Ένα συνεχές κλάσμα είναι μια παράσταση της μορφής

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

όπου: a_0 είναι ακέραιος αριθμός και οι αριθμοί $a_1, a_2, a_3, \dots$ είναι θετικοί ακέραιοι. Συμβολικά γράφεται $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Οι αριθμοί a_i ονομάζονται μερικοί παρανομαστές του συνεχούς κλάσματος. Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρη. Στην πρώτη περίπτωση το συνεχές κλάσμα αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί σε άρρητο.

2.2 Συνεχή Κλάσματα Ρητών Αριθμών

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένο συνεχές κλάσμα. Η διαδικασία εύρεσης του συνεχούς κλάσματος ενός ρητού αριθμού βασίζεται στον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Έστω για παράδειγμα ο ρητός αριθμός $\frac{43}{19}$, εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο έχουμε:

$$43 = 2 \cdot 19 + 5$$

$$19 = 3 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

Οι ακέραιοι που εμφανίζονται ως πηλικά των διαιρέσεων είναι: 2,3,1,4. Επομένως,
 $\frac{43}{19} = [2; 3,1,4]$

Η ανάπτυξη αυτή είναι πεπερασμένη, γεγονός που συμφωνεί πως πρόκειται για ρητό αριθμό. Η σημασία του παραπάνω αποτελέσματος είναι ιδιαίτερα μεγάλη διότι παρέχει έναν ακριβή και συστηματικό τρόπο αναπαράστασης κάθε ρητού αριθμού.

Λήμμα 2.2 Κάθε ρητός αριθμός διαθέτει μοναδική ανάπτυξη σε πεπερασμένο συνεχές κλάσμα, εφόσον ο τελευταίος μερικός παρονομαστής είναι μεγαλύτερος του 1.

Πράγματι, για κάθε $a_n > 1$ ισχύει

$$[\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n] = [\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n - 1, 1]$$

Επομένως, χωρίς τη παραπάνω σύμβαση ένας ρητός αριθμός διαθέτει ακριβώς δύο πεπερασμένες αναπτύξεις σε συνεχές κλάσμα.

Απόδειξη: Η ανάπτυξη προκύπτει από διαδοχικές εφαρμογές του Ευκλείδειου αλγόριθμου. Σε κάθε βήμα το πηλίκο της διαίρεσης καθορίζεται μονοσήμαντα από το ζεύγος διαιρετέου και διαιρέτη. Επομένως η ακολουθία των μερικών παρονομαστών είναι μοναδική. Η μόνη εξαίρεση εμφανίζεται στο τελευταίο βήμα, αφού $a_n = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$, οπότε προκύπτει και η εναλλακτική ανάπτυξη $[\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n] = [\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n - 1, 1]$. ■

Η παρατήρηση αυτή δεν επηρεάζει τα επόμενα αποτελέσματα, αλλά αναδεικνύει μία λεπτή αριθμητική ιδιότητα των συνεχών κλασμάτων.

2.3 Συνεχή Κλάσματα Άρρητων Αριθμών

Σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς, οι άρρητοι διαθέτουν άπειρη ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα. Η ανάπτυξη ενός άρρητου αριθμού σε συνεχές κλάσμα πραγματοποιείται επαναληπτικά, μέσω της διαδοχικής λήψης του ακέραιου μέρους και της αντιστροφής του κλασματικού μέρους.

Έστω ένας θετικός άρρητος αριθμός α . Αρχικά θέτουμε

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor,$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha = a_0 + (\alpha - a_0).$$

Επειδή ο α είναι άρρητος, ισχύει $0 < \alpha - a_0 < 1$, και επομένως θέτουμε

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_0}.$$

Έτσι,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε το ακέραιο μέρος του α_1 ,

$$a_1 = [\alpha_1]$$

και γράφουμε

$$\alpha_1 = a_1 + (\alpha_1 - a_1).$$

Αντίστοιχα, θέτουμε

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1},$$

οπότε

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Η ίδια διαδικασία συνεχίζεται επαναληπτικά. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι ακέραιοι $a_0, a_1, a_2, \dots$ και η ανάπτυξη του α σε συνεχές κλάσμα γράφεται

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots].$$

Για έναν άρρητο αριθμό η διαδικασία δεν τερματίζεται, επομένως η ανάπτυξη είναι άπειρη.

Παράδειγμα 2.3 Για τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$ έχουμε

$$a_0 = [\sqrt{2}] = 1.$$

Επομένως,

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Επειδή

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1),$$

παίρνουμε

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}.$$

Παρατηρούμε ότι μετά το πρώτο βήμα εμφανίζεται ξανά η ίδια διαδικασία. Επομένως,

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \bar{2}],$$

όπου η γραμμή δηλώνει την περιοδική επανάληψη του 2.

Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να περιγραφούν πλήρως μέσω πεπερασμένης ακολουθίας ακεραίων. Ωστόσο, η ανάπτυξη τους σε συνεχές κλάσμα παρουσιάζει συχνά αξιοσημείωτη κανονικότητα. Ιδιαίτερη κατηγορία αποτελούν οι τετραγωνικοί άρρητοι αριθμοί, δηλαδή οι αριθμοί της μορφής $\sqrt{D}$, όπου D είναι θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Οι αριθμοί εμφανίζουν μία εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα: η ανάπτυξη τους σε συνεχές κλάσμα είναι περιοδική. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3 (Lagrange) Η ανάπτυξη της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τετραγωνικού ακέραιου D σε συνεχές κλάσμα είναι άπειρη και περιοδική. Δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $\sqrt{D} = [\alpha_0; \overline{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}]$, όπου η γραμμή δηλώνει ότι η ακολουθία επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$x_0 = \sqrt{D}$$

και ορίζουμε επαγωγικά τις ακολουθίες

$$\alpha_n = \lfloor x_n \rfloor$$

και

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \alpha_n} \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Η διαδικασία αυτή παράγει την ανάπτυξη του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα.

Θα δείξουμε ότι οι τιμές που εμφανίζονται επαναλαμβάνονται μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Βήμα 1: Αναπαράσταση των x_n

Θα δείξουμε ότι κάθε αριθμός x_n μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + m_n}{d_n},$$

όπου m_n, d_n ακέραιοι με $d_n > 0$ και $d_n | (D - m_n^2)$.

Για $n = 0$ έχουμε

$$x_0 = \frac{\sqrt{D} + 0}{1}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε $m_0 = 0$ και $d_0 = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + m_n}{d_n},$$

τότε

$$a_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{D} + m_n}{d_n} \right\rfloor$$

και

$$x_{n+1} = \frac{d_n(\sqrt{D} - (m_n - a_n d_n))}{D - (m_n - a_n d_n)^2}.$$

Θέτουμε

$$m_{n+1} = a_n d_n - m_n$$

και

$$d_{n+1} = \frac{D - m_{n+1}^2}{d_n}.$$

Τότε

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{D} + m_{n+1}}{d_{n+1}}.$$

Άρα η μορφή διατηρείται για κάθε n .

Βήμα 2: Πεπερασμένος αριθμός δυνατών ζευγών

Από τον ορισμό του a_n προκύπτει ότι

$$a_n \leq x_n < a_n + 1$$

Χρησιμοποιώντας τη μορφή

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + m_n}{d_n}$$

προκύπτει ότι

$$0 \leq m_n < \sqrt{D}.$$

Επίσης,

$$d_{n+1} = \frac{D - m_{n+1}^2}{d_n} > 0$$

Οπότε

$$0 < d_n \leq D - m_n^2.$$

Επομένως τα m_n και d_n μπορούν να πάρουν μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών. Άρα υπάρχουν μόνο πεπερασμένα δυνατά ζεύγη (m_n, d_n) .

Βήμα 3: Εφαρμογή της αρχής του περιστερώνα

Η διαδικασία παράγει άπειρη ακολουθία ζευγών

$$(m_0, d_0), (m_1, d_1), (m_2, d_2), \dots$$

αλλά υπάρχουν μόνο πεπερασμένα δυνατά ζεύγη.

Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, κάποιο ζεύγος θα εμφανιστεί δύο φορές. Αν για κάποιους δείκτες $r < s$ ισχύει $(m_r, d_r) = (m_s, d_s)$ τότε από τις αναδρομικές σχέσεις προκύπτει ότι $(m_{r+t}, d_{r+t}) = (m_{s+t}, d_{s+t})$ για κάθε $t \geq 0$.

Επομένως επαναλαμβάνονται και οι αντίστοιχοι μερικοί παρονομαστές $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots$ και η ανάπτυξη γίνεται περιοδική [4]. ■

Συμπέρασμα: Η ανάπτυξη του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα είναι άπειρη και τελικά περιοδική, δηλαδή

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}].$$

Επιπλέον, για τετραγωνικές ρίζες μη τετραγωνικών ακεραίων η περιοδικότητα αρχίζει αμέσως μετά τον πρώτο όρο a_0 .

Η περιοδικότητα της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$ αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα των τετραγωνικών αρρήτων και δεν εμφανίζεται σε γενικούς άρρητους αριθμούς. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί το βασικό θεωρητικό εργαλείο για την αλγοριθμική εύρεση της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Pell – Fermat, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια του κεφαλαίου.

2.4 Συγκλίνοντες Ρητοί

Ορισμός 2.4 Έστω το συνεχές κλάσμα $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Ο n -οστός συγκλίνων του συνεχούς κλάσματος ορίζεται ως η πεπερασμένη ανάπτυξη

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

για κάθε $n \geq 0$. Οι αριθμοί αυτοί ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

με αρχικές τιμές

$$p_{-1} = 1, p_0 = a_0, q_{-1} = 0, q_0 = 1 \quad [6]$$

Οι συγκλίνοντες ρητοί έχουν μια πολύ σημαντική ιδιότητα: αποτελούν τις καλύτερες δυνατές ρητές προσεγγίσεις ενός αριθμού [4]. Δηλαδή αν $\frac{p_n}{q_n}$ είναι συγκλίνων του πραγματικού αριθμού α τότε δεν υπάρχει άλλος ρητός αριθμός με μικρότερο παρονομαστή που να προσεγγίζει καλύτερα τον α . Η ιδιότητα αυτή καθιστά τα συνεχή κλάσματα πολύτιμο εργαλείο σε προβλήματα αριθμητικών προσεγγίσεων και Διοφαντικών εξισώσεων. Επιπλέον, οι συγκλίνοντες ικανοποιούν τη σχέση

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

η οποία συνεπάγεται ότι διαδοχικοί συγκλίνοντες είναι πάντοτε ανάγωγα κλάσματα.

Θεώρημα 2.4 Για κάθε συγκλίνοντα ισχύει ότι

$$\left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στις αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν οι συγκλίνοντες και μπορεί να βρεθεί στις αναφορές [1], [13]. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι οι συγκλίνοντες αποτελούν εξαιρετικές ρητές προσεγγίσεις ενός πραγματικού αριθμού. Για τετραγωνικούς άρρητους η ιδιότητα αυτή επιτρέπει την παραγωγή λύσεων της εξίσωσης Pell – Fermat.

2.5 Σχέση Συγκλινόντων με την Εξίσωση Pell – Fermat

Η βαθύτερη σύνδεση των συνεχών κλασμάτων με την εξίσωση Pell – Fermat εμφανίζεται στη μελέτη των συγκλινόντων της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$. Για τους συγκλίνοντες $\frac{p_n}{q_n}$ της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$, οι ποσότητες $p_n^2 - Dq_n^2$ λαμβάνουν ακέραιες τιμές οι οποίες παραμένουν σχετικά μικρές σε απόλυτη τιμή. Η περιοδικότητα της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα εξασφαλίζει ότι για κατάλληλο συγκλίνοντα προκύπτει η σχέση $p_n^2 - Dq_n^2 = 1$. Στην περίπτωση αυτή το αντίστοιχο ζεύγος $(x_1, y_1) = (p_n, q_n)$ αποτελεί θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

Η θεωρία των συνεχών κλασμάτων επιτρέπει έτσι έναν πλήρως αλγοριθμικό τρόπο εύρεσης λύσεων της εξίσωσης.

Η διαδικασία είναι η εξής:

1. Υπολογίζεται η ανάπτυξη του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα
2. Προσδιορίζεται το μήκος της περιόδου
3. Υπολογίζονται οι συγκλίνοντες ρητοί
4. Εντοπίζεται ο συγκλίνων που ικανοποιεί τη σχέση

$$p_n^2 - Dq_n^2 = 1$$

Πρόταση 2.5 Έστω

$$\sqrt{D} = [\alpha_0; \overline{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}],$$

όπου k είναι το μήκος της περιόδου της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα. Τότε,

- αν k είναι άρτιος, η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$ προκύπτει από τον συγκλίνοντα $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$,

- αν k είναι περιττός, η θεμελιώδης λύση προκύπτει από τον συγκλίνοντα $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$, οπότε απαιτείται διπλασιασμός της περιόδου.

Απόδειξη: Βλέπε [1].

Η θεμελιώδης λύση παίζει καθοριστικό ρόλο, διότι από αυτήν μπορούν να παραχθούν όλες οι υπόλοιπες λύσεις της εξίσωσης.

Πόρισμα 2.5 Αν (x_1, y_1) είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$, τότε όλες οι λύσεις δίνονται από τη σχέση:

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$$

για κάθε φυσικό αριθμό n .

Απόδειξη: Έστω ότι (x_1, y_1) είναι η θεμελιώδης θετική λύση της εξίσωσης Pell – Fermat

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n.$$

Θα δείξουμε ότι κάθε ζεύγος (x_n, y_n) αποτελεί λύση της εξίσωσης Pell – Fermat.

Για $n = 1$ αυτό ισχύει από την υπόθεση αφού

$$x_1^2 - Dy_1^2 = 1.$$

Έστω τώρα ότι

$$x_n^2 - Dy_n^2 = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας $x_n + y_n\sqrt{D}$ με $x_1 + y_1\sqrt{D}$ λαμβάνουμε

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{D} = (x_n + y_n\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D}),$$

οπότε

$$x_{n+1} = x_n x_1 + D y_n y_1 \text{ και } y_{n+1} = x_n y_1 + x_1 y_n.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - D y_{n+1}^2 &= (x_n x_1 + D y_n y_1)^2 - D (x_n y_1 + x_1 y_n)^2 \\ &= (x_n^2 - D y_n^2)(x_1^2 - D y_1^2) = 1. \end{aligned}$$

Άρα, με επαγωγή, για κάθε $n \geq 1$,

$$x_n^2 - D y_n^2 = 1.$$

Κάθε δύναμη της θεμελιώδους λύσης $x_1 + y_1\sqrt{D}$ παρέχει μία λύση της εξίσωσης Pell – Fermat. Αντίστροφα, έστω (x, y) μία θετική λύση της εξίσωσης. Θέτουμε $\alpha = x + y\sqrt{D}$ και $\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{D}$. Επειδή $\varepsilon > 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $n \in$

$\mathbb{N}$ έτσι ώστε $1 \leq \frac{\alpha}{\varepsilon^n} < \varepsilon$. Με τη χρήση της σχέσης $\frac{1}{\varepsilon} = x_1 - y_1\sqrt{D}$, το πηλίκο $\frac{\alpha}{\varepsilon^n}$ γράφεται επίσης στη μορφή $u + v\sqrt{D}$, όπου $u, v \in \mathbb{Z}$ και ικανοποιεί την εξίσωση Pell – Fermat. Αν είναι μεγαλύτερο από 1 θα έδινε μία θετική λύση μικρότερη από τη θεμελιώδη λύση ε , γεγονός που αντιβαίνει στον ορισμό της θεμελιώδους λύσης. Επομένως, $\frac{\alpha}{\varepsilon^n} = 1$ και συνεπώς $\alpha = \varepsilon^n$. Άρα κάθε θετική λύση της εξίσωσης προκύπτει ως δύναμη της θεμελιώδους λύσης. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως όλες οι θετικές λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τη σχέση

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n, \quad n \in \mathbb{N}^*. \blacksquare$$

Το παραπάνω πόρισμα δείχνει ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης διαθέτει δομή ομάδας και συνδέεται άμεσα με τις μονάδες του αλγεβρικού σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι παρόλο που η ύπαρξη λύσεων είναι εγγυημένη, το μέγεθος της θεμελιώδους λύσης μπορεί να είναι εξαιρετικά μεγάλο, ακόμη και για σχετικά μικρές τιμές του D . Το στοιχείο αυτό καταδεικνύει τόσο τη δυσκολία όσο και τη βαθιά αριθμητική φύση της εξίσωσης Pell – Fermat. Για τον λόγο αυτό η μέθοδος των συνεχών κλασμάτων κρίνεται ιδιαίτερα αποτελεσματική.

Παράδειγμα 2.5 Η εξίσωση $x^2 - 2y^2 = 1$

Υπολογίζουμε πρώτα την ανάπτυξη του $\sqrt{2}$ σε συνεχές κλάσμα:

$$\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$$

Η περίοδος έχει μήκος 1, δηλαδή είναι περιττή. Επομένως, για να βρούμε τη θεμελιώδη λύση, διπλασιάζουμε τη περίοδο και εξετάζουμε τους αντίστοιχους συγκλίνοντες ρητούς. Οι συγκλίνοντες ρητοί του $\sqrt{2}$ είναι:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$$

Παρατηρούμε ότι $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$. Άρα η θεμελιώδης λύση της είναι

$$(x_1, y_1) = (3, 2).$$

Όλες οι λύσεις προκύπτουν από τη σχέση

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

n	x_n	y_n
1	3	2
2	17	12
3	99	70
4	577	408
5	3363	2378
6	19601	13860
7	114243	80782
8	665857	470832
9	3880899	2744210

όπου ο δείκτης n αναφέρεται στην αντίστοιχη δύναμη της παράστασης $(3 + 2\sqrt{2})^n$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει τη διαδικασία εύρεσης της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Pell μέσω των συνεχών κλασμάτων. Από τη θεμελιώδη λύση παράγονται στη συνέχεια όλες οι υπόλοιπες λύσεις με τη σχέση

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η Γενικευμένη Εξίσωση Pell – Fermat

Το παρόν κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στη μελέτη της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat. Αρχικά παρουσιάζεται η σχέση της με την κλασική εξίσωση όπου $N = 1$ και αναδεικνύεται ο τρόπος με τον οποίο οι λύσεις της τελευταίας χρησιμοποιούνται για την παραγωγή νέων λύσεων της γενικευμένης μορφής. Στη συνέχεια εξετάζονται αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης ακέραιων λύσεων και περιγράφεται η μέθοδος εύρεσής τους μέσω συνεχών κλασμάτων. Τέλος, παρουσιάζονται χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής και μελετάται η δομή και η συμπεριφορά του συνόλου των λύσεων.

3.1 Η Κλασική Εξίσωση ως Βάση

Η κλασική εξίσωση Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ αποτελεί τη θεμελιώδη περίπτωση πάνω στην οποία βασίζεται η μελέτη της γενικευμένης μορφής. Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, για κάθε D μη τέλειο τετράγωνο, η εξίσωση διαθέτει άπειρες ακέραιες λύσεις. Αν (x_1, y_1) είναι η θεμελιώδης λύση τότε όλες οι υπόλοιπες λύσεις παράγονται από τη σχέση

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$$

Η σχέση αυτή αποκαλύπτει ότι το σύνολο των λύσεων παρουσιάζει ισχυρή αλγεβρική δομή και επιτρέπει τη συστηματική παραγωγή νέων λύσεων από μία θεμελιώδη λύση.

Η γενικευμένη εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ συνδέεται άμεσα με τη κλασική περίπτωση. Αν η γενικευμένη μορφή διαθέτει μία λύση (x_0, y_0) τότε μπορούμε να παράγουμε νέες λύσεις πολλαπλασιάζοντας με λύσεις της κλασικής εξίσωσης. Πράγματι, αν

$$x_1^2 - Dy_1^2 = 1$$

και

$$x_0^2 - Dy_0^2 = N,$$

τότε θέτουμε

$$x + y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D})^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Η σχέση αυτή οδηγεί σε άπειρες νέες λύσεις της ίδιας εξίσωσης. Έτσι, η κλασική περίπτωση λειτουργεί ως μηχανισμός παραγωγής λύσεων της γενικευμένης μορφής.

Η παραπάνω παρατήρηση οδηγεί στο ακόλουθο θεώρημα, το οποίο περιγράφει τη βασική δομή του συνόλου των λύσεων.

Θεώρημα 3.1 Αν η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ διαθέτει τουλάχιστον μία ακέραια λύση και η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$ διαθέτει θεμελιώδη λύση (x_1, y_1) , τότε η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ διαθέτει άπειρες ακέραιες λύσεις.

Απόδειξη: Έστω (x_0, y_0) μία λύση της γενικευμένης μορφής και (x_1, y_1) η θεμελιώδης λύση της κλασικής εξίσωσης Pell.

Τότε

$$x_0^2 - Dy_0^2 = N$$

και

$$x_1^2 - Dy_1^2 = 1.$$

Θεωρούμε το γινόμενο

$$(x_0 + y_0\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D}) = (x_0x_1 + Dy_0y_1) + (x_0y_1 + x_1y_0)\sqrt{D}.$$

Θέτουμε

$$X = x_0x_1 + Dy_0y_1$$

και

$$Y = x_0y_1 + x_1y_0.$$

Τότε

$$\begin{aligned} X^2 - DY^2 &= (x_0x_1 + Dy_0y_1)^2 - D(x_0y_1 + x_1y_0)^2 \\ &= (x_0^2 - Dy_0^2)(x_1^2 - Dy_1^2) = N. \end{aligned}$$

Άρα το ζεύγος (X, Y) αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης. ■

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία με δυνάμεις του $x_1 + y_1\sqrt{D}$ παράγονται άπειρες διακεκριμένες λύσεις. Επομένως, κάθε αρχική λύση της γενικευμένης εξίσωσης δημιουργεί μία άπειρη οικογένεια λύσεων μέσω της θεμελιώδους λύσης της κλασικής εξίσωσης Pell - Fermat.

3.2 Αναγκαίες Συνθήκες Επιλυσιμότητας

Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat δεν είναι πάντοτε επιλύσιμη στους ακέραιους. Σε αντίθεση με την κλασική εξίσωση για την οποία είναι γνωστό πως διαθέτει πάντοτε μη τετριμμένη λύση όταν ο D δεν είναι τέλειο τετράγωνο, η ύπαρξη λύσεων στη γενικευμένη μορφή εξαρτάται ουσιαστικά τόσο από τη τιμή του D όσο και από αριθμητικές ιδιότητες του N . Για τον λόγο αυτό, πριν επιχειρηθεί η εύρεση λύσεων, είναι απαραίτητο να εξεταστούν ορισμένες αναγκαίες συνθήκες επιλυσιμότητας.

Μία από τις βασικότερες τεχνικές στη Θεωρία Αριθμών είναι η μελέτη της εξίσωσης ως προς διάφορα υπόλοιπα (modulo). Η ιδέα αυτή επιτρέπει να αποκλειστούν πολλές εξισώσεις ως μη επιλύσιμες χωρίς να απαιτείται η αναζήτηση ακέραιων λύσεων. Συγκεκριμένα, αν μία εξίσωση δεν διαθέτει λύση ως προς κάποιο μέτρο m , τότε είναι αδύνατο να διαθέτει ακέραια λύση.

Λήμμα 3.2 Αν η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ δεν διαθέτει λύση modulo m , για κάποιον θετικό ακέραιο m , τότε δεν διαθέτει ακέραια λύση.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν ακέραιοι x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$. Λαμβάνοντας τη παραπάνω σχέση modulo m , προκύπτει

$$x^2 - Dy^2 \equiv N \pmod{m}$$

Επομένως, τα υπόλοιπα των x και y ως προς m αποτελούν λύση της αντίστοιχης εξίσωσης modulo m . Άρα, αν δεν υπάρχει καμία λύση modulo m , δεν μπορεί να υπάρχει ούτε ακέραια λύση. ■

Παράδειγμα 3.2 Εξετάζουμε την εξίσωση $x^2 - 3y^2 = 2$.

Αν υπήρχε ακέραια λύση, τότε λαμβάνοντας την εξίσωση modulo 3 θα είχαμε

$$x^2 \equiv 2 \pmod{3},$$

διότι

$$3y^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Όμως τα τετραγωνικά υπόλοιπα modulo 3 είναι μόνο 0 ή 1. Επομένως η σχέση

$$x^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

είναι αδύνατη. Άρα η εξίσωση

$$x^2 - 3y^2 = 2$$

δεν διαθέτει ακέραιες λύσεις.

Κριτήριο Αναγκαίας Επιλυσιμότητας

Εκτός από τους ελέγχους modulo, υπάρχει ένα σημαντικό και αναγκαίο κριτήριο που χρησιμοποιείται στη μελέτη της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat.

Θεώρημα 3.2.1 Αν η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat

$$x^2 - Dy^2 = N$$

διαθέτει πρωτογενή ακέραια λύση (x, y) , δηλαδή $\gcd(x, y) = 1$, τότε υπάρχει ακέραιος u τέτοιος ώστε

$$u^2 \equiv D \pmod{|N|}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί ισχυρότερο κριτήριο επιλυσιμότητας από τους απλούς ελέγχους modulo και χρησιμοποιείται εκτενώς στη μελέτη της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat. Η απόδειξη είναι άμεση με αναγωγή της εξίσωσης $\pmod{|N|}$.

Εκτός από τα παραπάνω γενικά αναγκαία κριτήρια, για συγκεκριμένες τιμές του N είναι γνωστά ισχυρά αποτελέσματα, τα οποία χαρακτηρίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την επιλυσιμότητα της εξίσωσης. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται οι σημαντικότερες από αυτές τις περιπτώσεις.

3.2.2 Ειδικές Περιπτώσεις Επιλυσιμότητας

Παράδειγμα 3.2.2.1 Η περίπτωση $N = -1$

Η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

ονομάζεται αρνητική εξίσωση Pell. Σε αντίθεση με την κλασική εξίσωση Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

η οποία είναι επιλύσιμη για κάθε D μη τέλειο τετράγωνο, η εξίσωση με $N = -1$ δεν διαθέτει πάντοτε ακέραιες λύσεις. Η συμπεριφορά αυτή ερμηνεύεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.2 Η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η περίοδος του απλού συνεχούς κλάσματος του $\sqrt{D}$ έχει περιττό μήκος.

Απόδειξη: Βλέπε [1].

Για $D = 5$ παίρνουμε

$$\sqrt{5} = [2; \overline{4}].$$

Η περίοδος είναι περιττή και η εξίσωση έχει λύση

$$(x, y) = (2, 1).$$

Πράγματι,

$$2^2 - 5 \cdot 1^2 = -1.$$

Αντίθετα, για $D = 3$ η εξίσωση δεν διαθέτει ακέραιες λύσεις αφού

$$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$$

και η περίοδος του συνεχούς κλάσματος είναι άρτια.

Παράδειγμα 3.2.2.2 Η περίπτωση $N = 4$

Η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = 4$$

συνδέεται άμεσα με την κλασική εξίσωση Pell

$$u^2 - Dv^2 = 1.$$

Πράγματι, αν (u, v) είναι λύση της εξίσωσης Pell, τότε το ζεύγος

$$(x, y) = (2u, 2v)$$

ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 4$, διότι

$$(2u)^2 - D(2v)^2 = 4(u^2 - Dv^2) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Για $D = 5$, η θεμελιώδης λύση της κλασικής εξίσωσης Pell είναι

$$(u, v) = (9, 4).$$

Άρα,

$$(x, y) = (18, 8).$$

Πράγματι,

$$18^2 - 5 \cdot 8^2 = 4.$$

Επομένως η ύπαρξη λύσεων της κλασικής εξίσωσης Pell συνεπάγεται την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 4$.

Παράδειγμα 3.2.2.3 Η περίπτωση $N = -4$

Η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = -4$$

συνδέεται άμεσα με την αρνητική εξίσωση Pell

$$u^2 - Dv^2 = -1.$$

Αν (u, v) είναι λύση της αρνητικής εξίσωσης Pell, τότε το ζεύγος

$$(x, y) = (2u, 2v)$$

ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - Dy^2 = -4$, αφού

$$(2u)^2 - D(2v)^2 = 4(u^2 - Dv^2) = 4(-1) = -4.$$

Για $D = 5$, η θεμελιώδης λύση της αρνητικής εξίσωσης Pell είναι

$$(u, v) = (2, 1).$$

Άρα,

$$(x, y) = (4, 2).$$

Πράγματι,

$$4^2 - 5 \cdot 2^2 = -4.$$

3.3 Κλάσεις Ισοδυναμίας των Λύσεων

Η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat μπορεί να διαθέτει περισσότερες από μία θεμελιώδεις λύσεις, οι οποίες όμως δεν είναι όλες ουσιαστικά διαφορετικές. Για τον λόγο αυτό εισάγεται η έννοια των κλάσεων ισοδυναμίας, η οποία επιτρέπει την

οργάνωση του συνόλου των λύσεων σε διακεκριμένες οικογένειες. Έστω οι πρωτογενείς λύσεις

$$a_1 = x_1 + y_1\sqrt{D} \text{ και } a_2 = x_2 + y_2\sqrt{D}$$

της εξίσωσης

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

όπου $\gcd(x_i, y_i) = 1$ για $i = 1, 2$.

Ορίζουμε τη σχέση

$$a_1 \sim a_2$$

αν και μόνο αν

$$\frac{a_1}{a_2} = u + v\sqrt{D},$$

όπου (u, v) είναι ακέραια λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$.

Η σχέση $\sim$ αποτελεί σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των πρωτογενών λύσεων της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$ και συνεπώς το σύνολο αυτό διαμερίζεται σε διακεκριμένες κλάσεις ισοδυναμίας.

Δύο πρωτογενείς λύσεις ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας όταν η μία προκύπτει από την άλλη μέσω πολλαπλασιασμού με μονάδα του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ νόρμας 1, δηλαδή μέσω λύσης της εξίσωσης Pell $x^2 - Dy^2 = 1$.

Σύμφωνα με τον Matthews [12], κάθε κλάση περιέχει μία μοναδική θεμελιώδη λύση, η οποία επιλέγεται ως εκείνη με το μικρότερο θετικό y . Η λύση αυτή αποτελεί αντιπρόσωπο της κλάσης και αρκεί για την παραγωγή όλων των υπόλοιπων λύσεων της ίδιας οικογένειας.

Η διάσπαση των πρωτογενών λύσεων σε κλάσεις ισοδυναμίας παρέχει έναν φυσικό τρόπο οργάνωσης του συνόλου των λύσεων της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat. Κάθε κλάση αντιπροσωπεύει μία διαφορετική οικογένεια λύσεων, ενώ η θεμελιώδης λύση της λειτουργεί ως αντιπρόσωπος της. Με τον τρόπο αυτό, η μελέτη των θεμελιωδών λύσεων αρκεί για την περιγραφή του συνόλου των λύσεων χωρίς επαναλήψεις.

Πρόταση 3.3 Έστω ότι $x_0 + y_0\sqrt{D}$ είναι η θεμελιώδης λύση μιας κλάσης ισοδυναμίας της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$ και έστω ότι $\eta = u_1 + v_1\sqrt{D}$ η θεμελιώδης μονάδα της εξίσωσης $u^2 - Dv^2 = 1$, τότε όλες οι λύσεις της ίδιας κλάσης ισοδυναμίας δίνονται από τη σχέση

$$x + y\sqrt{D} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{D})\eta^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας αποτελεί άπειρη οικογένεια λύσεων, ενώ διαφορετικές θεμελιώδεις λύσεις αντιστοιχούν σε

διαφορετικές κλάσεις. Κατά συνέπεια, το βασικό πρόβλημα δεν είναι η εύρεση όλων των λύσεων της εξίσωσης αλλά ο προσδιορισμός μιας θεμελιώδους λύσης για κάθε κλάση ισοδυναμίας. Η έννοια της θεμελιώδους λύσης μπορεί να χαρακτηριστεί με ακριβέστερο τρόπο μέσω κριτηρίων που εξαρτώνται από το πρόσημο του N . Ο Robertson [10] δίνει τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις $N > 1$ και $N < 0$.

Θεώρημα 3.3.2 Έστω $N > 1$. Αν $x + y\sqrt{D}$ είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$, τότε αποτελεί θεμελιώδη λύση της κλάσης της αν και μόνο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

$$(i) 0 < y < v_1 \sqrt{\frac{N}{2(u_1+1)}} = \sqrt{\frac{N(u_1-1)}{2D}},$$

$$(ii) y = 0 \text{ και } x = \sqrt{N},$$

$$(iii) y = v_1 \sqrt{\frac{N}{2(u_1+1)}} \text{ και } x = \sqrt{\frac{N(u_1+1)}{2}}$$

όπου $u_1 + v_1\sqrt{D}$ είναι η θεμελιώδης μονάδα της εξίσωσης Pell $u^2 - Dv^2 = 1$.

Θεώρημα 3.3.3 Έστω $N < 0$. Αν $x + y\sqrt{D}$ είναι λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$, τότε αποτελεί θεμελιώδη λύση της κλάσης της αν και μόνο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

$$(i) \sqrt{\frac{|N|}{D}} \leq y < v_1 \sqrt{\frac{|N|}{2(u_1-1)}} = \sqrt{\frac{|N|(u_1+1)}{2D}},$$

$$(ii) y = v_1 \sqrt{\frac{|N|}{2(u_1-1)}} \text{ και } x = \sqrt{\frac{|N|(u_1-1)}{2}}.$$

Τα παραπάνω θεωρήματα παρέχουν κριτήρια για τον χαρακτηρισμό των θεμελιωδών λύσεων των κλάσεων της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat. Η εύρεση των λύσεων αυτών μέσω συνεχών κλασμάτων εξετάζεται στην επόμενη ενότητα.

3.4 Μέθοδος Εύρεσης Λύσεων Μέσω Συνεχών Κλασμάτων

Η βασικότερη μέθοδος εύρεσης λύσεων της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat βασίζεται στη θεωρία των συνεχών κλασμάτων. Όπως αποδείχθηκε στο Θεώρημα 2.3 (Lagrange), η ανάπτυξη της $\sqrt{D}$ είναι περιοδική. Η περιοδικότητα αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό των συγκλινόντων ρητών της $\sqrt{D}$, οι οποίοι αποτελούν τις καλύτερες δυνατές ρητές προσεγγίσεις της.

Στην κλασική εξίσωση Pell οι συγκλίνοντες αυτοί χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της θεμελιώδους λύσης. Στην γενικευμένη εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ η ίδια ιδέα επεκτείνεται κατάλληλα. Σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσιάζει ο

Matthews [12], οι συγκλίνοντες της ανάπτυξης της $\sqrt{D}$ επιτρέπουν τον εντοπισμό των θεμελιωδών λύσεων κάθε κλάσης ισοδυναμίας, χωρίς να απαιτείται η αναζήτηση όλων των ακέραιων ζευγών (x, y) .

Η διαδικασία περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1. Υπολογίζεται η ανάπτυξη του $\sqrt{D}$ σε συνεχές κλάσμα
2. Υπολογίζονται οι συγκλίνοντες ρητοί $\frac{p_n}{q_n}$
3. Εξετάζονται οι τιμές της παράστασης $p_n^2 - Dq_n^2$
4. Οι συγκλίνοντες που ικανοποιούν τη σχέση $p_n^2 - Dq_n^2 = N$ παρέχουν τις αντίστοιχες θεμελιώδεις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat.

Η παραπάνω διαδικασία βασίζεται στο γεγονός ότι οι συγκλίνοντες της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$ παρέχουν τις καλύτερες ρητές προσεγγίσεις της τετραγωνικής ρίζας του D . Σύμφωνα με τον Mollin [13], η ιδιότητα αυτή επιτρέπει τον εντοπισμό των θεμελιωδών λύσεων της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat χωρίς να απαιτείται εξαντλητική αναζήτηση όλων των ακέραιων ζευγών (x, y) . Έτσι, η μέθοδος αυτή αποτελεί μία αποτελεσματική αλγοριθμική διαδικασία εύρεσης λύσεων.

Παράδειγμα 3.4.1 Η εξίσωση $x^2 - 13y^2 = -1$

Θα εξετάσουμε τώρα αναλυτικά την εξίσωση $x^2 - 13y^2 = -1$.

Αρχικά υπολογίζουμε την ανάπτυξη του $\sqrt{13}$ σε συνεχές κλάσμα:

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 6}]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συγκλίνοντες ρητούς:

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \dots$$

Εξετάζουμε τις αντίστοιχες τιμές της παράστασης $p_n^2 - 13q_n^2$, παίρνουμε:

- $3^2 - 13 \cdot 1^2 = -4$
- $4^2 - 13 \cdot 1^2 = 3$
- $7^2 - 13 \cdot 2^2 = -3$
- $11^2 - 13 \cdot 3^2 = 4$
- $18^2 - 13 \cdot 5^2 = 324 - 325 = -1$

Άρα βρίσκουμε λύση $(x_0, y_0) = (18, 5)$.

Η ύπαρξη της παραπάνω λύσης είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι εξασφαλίζει άπειρες νέες λύσεις. Για τη παραγωγή τους χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης $x^2 - 13y^2 = 1$ που είναι $(x_1, y_1) = (649, 180)$.

Επομένως, παράγεται άπειρη οικογένεια λύσεων της εξίσωσης

$$x^2 - 13y^2 = -1$$

η οποία δίνεται από τη σχέση

$$x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})(649 + 180\sqrt{13})^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Παραγωγή νέας λύσης

Για $k = 1$, έχουμε

$$(18 + 5\sqrt{13})(649 + 180\sqrt{13})$$

Υπολογίζοντας το πραγματικό μέρος:

$$18 \cdot 649 + 5 \cdot 180 \cdot 13 = 11682 + 11700 = 23382$$

Και τον συντελεστή του $\sqrt{13}$:

$$18 \cdot 180 + 5 \cdot 649 = 3240 + 3245 = 6485$$

Άρα προκύπτει νέα λύση

$$(x, y) = (23382, 6485).$$

Πράγματι, το μοντέλο επαληθεύεται αφού

$$23382^2 - 13 \cdot 6485^2 = 546.717.924 - 546.717.925 = -1$$

Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο μία μόνο αρχική λύση, σε συνδυασμό με τη θεμελιώδη λύση της κλασικής Pell, οδηγεί σε άπειρη οικογένεια Διοφαντικών λύσεων.

Παράδειγμα 3.4.2 Η εξίσωση $x^2 - 5y^2 = 4$

Η ανάπτυξη του $\sqrt{5}$ σε συνεχές κλάσμα είναι

$$\sqrt{5} = [2; \bar{4}]$$

Οι πρώτοι συγκλίνοντες είναι

$$2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \dots$$

Ελέγχοντας μικρές τιμές παρατηρούμε ότι $3^2 - 5 \cdot 1^2 = 4$, οπότε μία λύση είναι

$$(x_0, y_0) = (3, 1)$$

Η θεμελιώδης λύση της κλασικής εξίσωσης

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

είναι

$$(x_1, y_1) = (9, 4).$$

Επομένως παράγεται άπειρη οικογένεια λύσεων από τη σχέση

$$x + y\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^k.$$

Για $k = 1$,

$$(3 + \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5}) = 47 + 21\sqrt{5}.$$

Άρα νέα λύση είναι η

$$(x, y) = (47, 21).$$

Πράγματι,

$$47^2 - 5 \cdot 21^2 = 2209 - 2205 = 4.$$

Τα παραδείγματα που προηγήθηκαν καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου των συνεχών κλασμάτων για την εύρεση λύσεων της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat. Από μία αρχική λύση και τη θεμελιώδη λύση της αντίστοιχης κλασικής εξίσωσης Pell παράγεται άπειρη οικογένεια λύσεων. Η δομή αυτή αναδεικνύει τη στενή σχέση της γενικευμένης εξίσωσης με τις μονάδες των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων, θέμα που αναπτύσσεται στο επόμενο κεφάλαιο.

3.5 Άλλες Μέθοδοι Επίλυσης της Εξίσωσης Pell – Fermat

Πέρα από τη μέθοδο των συνεχών κλασμάτων, έχουν αναπτυχθεί και άλλες μέθοδοι για την εύρεση λύσεων της εξίσωσης Pell – Fermat. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται ο αλγόριθμος PQa , ο αλγόριθμος Lagrange – Matthews – Mollin (LMM) και το σύστημα αναγωγών του Lagrange. Για τη γενικευμένη εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν η μέθοδος της κυκλικής διαδικασίας (cyclic method) και μέθοδοι που βασίζονται στις δυαδικές τετραγωνικές μορφές, ενώ σε περιπτώσεις όπου τα σχετικά όρια είναι μικρά μπορεί να εφαρμοστεί και άμεση αναζήτηση (brute-force search) [15].

Οι παραπάνω προσεγγίσεις διαφέρουν ως προς τη διαδικασία και την υπολογιστική τους αποτελεσματικότητα. Ειδικότερα, ο αλγόριθμος PQa συνδέεται στενά με την ανάπτυξη τετραγωνικών άρρητων σε συνεχή κλάσματα, ενώ ο LMM αποτελεί τροποποίηση της διαδικασίας αναγωγής του Lagrange και εφαρμόζεται στη γενικευμένη εξίσωση.

Για την παρούσα εργασία, η μέθοδος των συνεχών κλασμάτων αποτελεί την κύρια μέθοδο που αναπτύχθηκε, καθώς προσφέρει έναν άμεσο και συστηματικό τρόπο προσδιορισμού των θεμελιωδών λύσεων. Οι υπόλοιπες μέθοδοι αναφέρονται για πληρότητα, χωρίς να εξετάζονται αναλυτικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η Γενικευμένη Εξίσωση Pell – Fermat και τα Τετραγωνικά Σώματα Αριθμών

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει την αλγεβρική θεμελίωση της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat μέσω της θεωρίας των τετραγωνικών σωμάτων αριθμών. Εισάγονται οι βασικές έννοιες του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, του συζυγούς στοιχείου, του ίχνους και της νόρμας, οι οποίες επιτρέπουν μια βαθύτερη κατανόηση της δομής των λύσεων. Στη συνέχεια μελετώνται οι συνθήκες επιλυσιμότητας της εξίσωσης, οι μονάδες των τετραγωνικών σωμάτων και παρουσιάζεται ο ρόλος της θεμελιώδους μονάδας και του Θεωρήματος Μονάδων του Dirichlet στην ερμηνεία της ύπαρξης άπειρων λύσεων. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται η μετάβαση από τη Διοφαντική ανάλυση στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών και αποκαλύπτεται η βαθύτερη μαθηματική δομή της εξίσωσης.

4.1 Από τη Διοφαντική Ανάλυση στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκαν τόσο η κλασική εξίσωση Pell – Fermat

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

όσο και η γενικευμένη μορφή της

$$x^2 - Dy^2 = N$$

με D θετικό ακέραιο που δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο και $N \in \mathbb{Z}$. Παρουσιάστηκε επίσης η στενή σχέση της εξίσωσης με τα συνεχή κλάσματα και αναπτύχθηκαν μέθοδοι εύρεσης λύσεων μέσω των συγκλινόντων της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$.

Παρά την αποτελεσματικότητα των μεθόδων αυτών, η μελέτη μέσω συνεχών κλασμάτων απαντά κυρίως στο ερώτημα «πως βρίσκουμε λύσεις» και όχι στο βαθύτερο ερώτημα «γιατί οι λύσεις παρουσιάζουν αυτή τη συγκεκριμένη δομή». Για παράδειγμα, η ύπαρξη άπειρων λύσεων στην κλασική εξίσωση ή η δυνατότητα παραγωγής νέων λύσεων από μία αρχική λύση της γενικευμένης μορφής αποτελούν φαινόμενα που δεν εξηγούνται πλήρως από τις τεχνικές των συνεχών κλασμάτων.

Η ανάγκη βαθύτερης κατανόησης των φαινομένων αυτών οδήγησε ιστορικά στην ανάπτυξη νέων μαθηματικών εργαλείων. Κατά τον 18^ο και 19^ο αιώνα οι μεγάλοι μαθηματικοί Euler, Lagrange, Gauss και αργότερα οι Dirichlet και Dedekind συνειδητοποίησαν ότι πολλά Διοφαντικά προβλήματα αποκτούν απλούστερη μορφή όταν μελετηθούν μέσα σε κατάλληλες αλγεβρικές επεκτάσεις του σώματος των ρητών αριθμών.

Η εξίσωση Pell – Fermat αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της φιλοσοφίας. Πράγματι, η παράσταση $x^2 - Dy^2$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}).$$

Η παραγοντοποίηση αυτή μοιάζει εκ πρώτης όψews στοιχειώδης, ωστόσο περιέχει μια βαθιά ιδέα. Όταν το D δεν είναι τέλειο τετράγωνο, η ποσότητα $\sqrt{D}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Επομένως οι παράγοντες $x + y\sqrt{D}$ και $x - y\sqrt{D}$ δεν ανήκουν στο σώμα των ρητών αριθμών. Για να αποκτήσει ουσιαστικό νόημα η παραγοντοποίηση είναι απαραίτητο να επεκταθεί το αριθμητικό περιβάλλον μέσα στο οποίο εργαζόμαστε.

Η μετάβαση αυτή αποτελεί μία από τις κεντρικές ιδέες της σύγχρονης Θεωρίας Αριθμών. Αντί να εξετάζονται αποκλειστικά ακέραιοι ή ρητοί αριθμοί, εισάγονται νέα αριθμητικά αντικείμενα που περιέχουν επιπλέον αλγεβρικά στοιχεία. Στην περίπτωση της Pell – Fermat το φυσικό περιβάλλον είναι το σώμα που περιέχει τη $\sqrt{D}$. Μέσα στο νέο αυτό περιβάλλον η εξίσωση αποκτά μια εντελώς διαφορετική ερμηνεία. Οι λύσεις της δεν θεωρούνται πλέον απλώς ζεύγη ακεραίων αριθμών, αλλά στοιχεία συγκεκριμένης νόρμας ενός τετραγωνικού σώματος αριθμών. Η αλλαγή αυτή επιτρέπει τη χρήση αλγεβρικών μεθόδων και οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση της δομής των λύσεων.

Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι η κλασική εξίσωση συνδέεται με την έννοια των μονάδων ενός δακτυλίου αλγεβρικών ακεραίων. Η σύνδεση αυτή εξηγεί γιατί η εξίσωση διαθέτει άπειρες λύσεις και αποκαλύπτει ότι η εμφάνιση των λύσεων δεν αποτελεί τυχαίο αριθμητικό φαινόμενο αλλά συνέπεια μιας συγκεκριμένης αλγεβρικής δομής.

4.2 Το Τετραγωνικό Σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ και η Αναγκαιότητα Εισαγωγής του

Η εισαγωγή των τετραγωνικών σωμάτων αριθμών προκύπτει φυσικά από τη προσπάθεια παραγοντοποίησης της παράστασης $x^2 - Dy^2$. Όπως ήδη αναφέρθηκε

$$x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}).$$

Η μορφή αυτή υποδεικνύει ότι η μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat απαιτεί την ύπαρξη ενός αριθμητικού συστήματος που να περιέχει το στοιχείο $\sqrt{D}$. Το σύστημα αυτό είναι το τετραγωνικό σώμα αριθμών.

Ορισμός 4.2 Έστω D θετικός ακέραιος που δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο. Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a + b\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Πρόταση 4.2 Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ αποτελεί υποσώμα του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο υποσώματος. Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ είναι μη κενό, αφού

$$0 = 0 + 0\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$$

Έστω

$$\alpha = a + b\sqrt{D}$$

και

$$\beta = c + d\sqrt{D}$$

που ανήκουν στο $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Τότε

$$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$$

και

$$\alpha\beta = (ac + bdD) + (ad + bc)\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}).$$

Αν επιπλέον $\alpha \neq 0$, τότε

$$\alpha^{-1} = \frac{a - b\sqrt{D}}{a^2 - Db^2}$$

Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται αφού διαφορετικά θα είχαμε $a^2 = Db^2$ που θα σήμαινε ότι το $\sqrt{D}$ είναι ρητός αριθμός και είναι άτοπο. Επομένως,

$$\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}).$$

Άρα το $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ είναι υποσώμα του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. ■

Το σύνολο αυτό ονομάζεται τετραγωνικό σώμα αριθμών. Κάθε στοιχείο του σώματος γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων 1 και $\sqrt{D}$ με ρητούς συντελεστές. Η μοναδικότητα της αναπαράστασης αυτής είναι ουσιώδης. Πράγματι, αν

$$a + b\sqrt{D} = c + d\sqrt{D}$$

τότε ισχύει

$$(a - c) + (b - d)\sqrt{D} = 0$$

Επειδή ο αριθμός $\sqrt{D}$ είναι άρρητος, συμπεραίνουμε ότι $a = c$ και $b = d$. Άρα κάθε στοιχείο του σώματος διαθέτει μοναδική αναπαράσταση.

Το τετραγωνικό σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ αποτελεί τη μικρότερη πραγματική τετραγωνική επέκταση του σώματος των ρητών αριθμών και παρέχει το φυσικό αλγεβρικό περιβάλλον για τη μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat. Όπως επισημαίνει ο Mollin [13], πολλές από τις βαθύτερες ιδιότητες της εξίσωσης, όπως η θεωρία των

μονάδων και η δομή του συνόλου των λύσεων, ερμηνεύονται φυσικά μόνο μέσα στο πλαίσιο των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ αποτελεί επέκταση βαθμού δύο του σώματος των ρητών αριθμών. Με άλλα λόγια, κάθε στοιχείο του μπορεί να περιγραφεί μέσω δύο ανεξάρτητων στοιχείων, γεγονός που εξηγεί γιατί τα τετραγωνικά σώματα αποτελούν τις απλούστερες μη τετριμμένες αλγεβρικές επεκτάσεις του $\mathbb{Q}$.

Η εισαγωγή του σώματος αυτού δεν αποτελεί απλώς τεχνική διευκόλυνση. Αντίθετα, επιτρέπει τη μεταφορά του προβλήματος της Pell – Fermat από το πεδίο των Διοφαντικών εξισώσεων στο πεδίο της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών.

4.3 Αλγεβρικοί Ακέραιοι και ο Δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$

Παρότι το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ αποτελεί το φυσικό περιβάλλον της θεωρίας, η μελέτη της Pell – Fermat επικεντρώνεται κυρίως σε στοιχεία που σχετίζονται με ακέραιες λύσεις. Για τον λόγο αυτό ιδιαίτερη σημασία αποκτούν τα στοιχεία με ακέραιους συντελεστές.

Ορισμός 4.3 Έστω D θετικός ακέραιος που δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο.

Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Το σύνολο αυτό αποτελεί υποδακτύλιο του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Η σημασία του δακτυλίου αυτού γίνεται αμέσως εμφανής αν παρατηρήσουμε ότι κάθε ακέραια λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$ αντιστοιχεί στο στοιχείο $x + y\sqrt{D}$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Με τον τρόπο αυτό το Διοφαντικό πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα μελέτης στοιχείων ενός αλγεβρικού δακτυλίου.

Η ιδέα αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική. Στην κλασική Θεωρία Αριθμών μελετώνται οι ιδιότητες των ακέραιων αριθμών. Στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών αντίθετα, οι ακέραιοι αντικαθίστανται από αλγεβρικούς ακεραίους που ανήκουν σε επεκτάσεις του σώματος των ρητών. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα δακτυλίου αλγεβρικών ακεραίων.

Σε αντίθεση με το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ δεν περιέχει πάντοτε αντίστροφα για όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του και συνεπώς δεν αποτελεί σώμα. Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών διότι οι ιδιότητες των μονάδων, της νόρμας και της παραγοντοποίησης διατυπώνονται και μελετώνται μέσα στον δακτύλιο των αλγεβρικών ακεραίων και όχι στο αντίστοιχο σώμα.

Για παράδειγμα, όταν $D = 2$, τα στοιχεία $1 + \sqrt{2}$, $3 + 2\sqrt{2}$, $7 - 5\sqrt{2}$ ανήκουν στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Αντίθετα, το στοιχείο $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ ανήκει στο σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, αλλά όχι στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, καθώς ο πρώτος συντελεστής δεν είναι ακέραιος.

Η διάκριση αυτή είναι ουσιώδης, διότι η εξίσωση Pell – Fermat αφορά αποκλειστικά ακέραιες λύσεις και επομένως τα σχετικά στοιχεία βρίσκονται πάντοτε μέσα στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου θα εισαχθούν οι έννοιες του συζυγούς στοιχείου, του ίχνους και της νόρμας, οι οποίες θα επιτρέψουν τη βαθύτερη αλγεβρική ερμηνεία της εξίσωσης Pell – Fermat και θα αναδείξουν τον τρόπο με τον οποίο η δομή των λύσεων συνδέεται με τις μονάδες του αντίστοιχου τετραγωνικού σώματος.

4.4 Συζυγή Στοιχεία, Ίχνος και Νόρμα

Στην προηγούμενη ενότητα εισήχθη η έννοια του τετραγωνικού σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ και του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, ο οποίος περιέχει τα στοιχεία που σχετίζονται άμεσα με τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης Pell – Fermat. Για να μελετηθεί βαθύτερα η αλγεβρική δομή των στοιχείων αυτών είναι απαραίτητο να εισαχθούν και ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας των αλγεβρικών σωμάτων.

Έστω ένα στοιχείο $\alpha = a + b\sqrt{D}$ του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Ορίζουμε το **συζυγές στοιχείο** του α ως $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{D}$. Η έννοια του συζυγούς εμφανίζεται φυσικά από το γεγονός ότι οι δύο ρίζες του πολυωνύμου $x^2 - D = 0$ είναι οι $\sqrt{D}$ και $-\sqrt{D}$.

Η απεικόνιση

$$a + b\sqrt{D} \mapsto a - b\sqrt{D}$$

διατηρεί τις αλγεβρικές πράξεις και αποτελεί αυτομορφισμό του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Πρόταση 4.4.1 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ισχύουν:

- $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$,
- $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$,
- $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$, $\beta \neq 0$,
- $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Οι ιδιότητες αυτές δείχνουν ότι η συζυγής απεικόνιση είναι ένας αυτομορφισμός τάξης δύο του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ και αποτελούν τη βάση για τον ορισμό του ίχνους και της νόρμας που ακολουθούν.

Ορισμός 4.4.1 Το ίχνος του στοιχείου

$$\alpha = a + b\sqrt{D}$$

ορίζεται ως

$$Tr(\alpha) = \alpha + \bar{\alpha}.$$

Οπότε

$$Tr(\alpha) = (a + b\sqrt{D}) + (a - b\sqrt{D}) = 2a.$$

Το ίχνος ανήκει στο $\mathbb{Q}$ και για στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ είναι ακέραιος αριθμός.

Η δεύτερη και σημαντικότερη έννοια είναι η νόρμα.

Ορισμός 4.4.2 Η νόρμα του στοιχείου

$$\alpha = a + b\sqrt{D}$$

ορίζεται ως

$$Norm(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}.$$

Επομένως,

$$Norm(\alpha) = (a + b\sqrt{D})(a - b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2.$$

Η νόρμα αποτελεί απεικόνιση από το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ προς το $\mathbb{Q}$, ενώ όταν $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ η τιμή της είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός. Η ιδιότητα αυτή εξηγεί γιατί η νόρμα συνδέει φυσικά την Άλγεβρα με τα Διοφαντικά Προβλήματα.

Παρατηρούμε ήδη τη στενή σχέση της νόρμας με τη γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat. Πράγματι, η παράσταση $a^2 - Db^2$ είναι ακριβώς η μορφή που εμφανίζεται στην εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$. Η παρατήρηση αυτή προαναγγέλλει τη βαθύτερη σύνδεση που θα αναπτυχθεί στις επόμενες ενότητες, όπου η θεωρία της νόρμας θα χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της δομής των λύσεων.

4.5 Βασικές Ιδιότητες της Νόρμας

Η σημασία της νόρμας οφείλεται κυρίως στις αλγεβρικές ιδιότητες της. Η σημαντικότερη από αυτές είναι η πολλαπλασιαστικότητα της.

Θεώρημα 4.5 Για κάθε δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ισχύει

$$Norm(\alpha\beta) = Norm(\alpha)Norm(\beta).$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της νόρμας, έχουμε

$$Norm(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}).$$

Επειδή η συζυγής απεικόνιση διατηρεί τον πολλαπλασιασμό $(\overline{\alpha\beta}) = \bar{\alpha}\bar{\beta}$ έχουμε

$$\text{Norm}(\alpha\beta) = \alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

Λόγω της αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού στο σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ παίρνουμε

$$\text{Norm}(\alpha\beta) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}).$$

Άρα, ισχύει

$$\text{Norm}(\alpha\beta) = \text{Norm}(\alpha)\text{Norm}(\beta)$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι θεμελιώδες. Στην πραγματικότητα, ολόκληρη η σύνδεση της Pell – Fermat με τα τετραγωνικά σώματα βασίζεται σε αυτή ακριβώς την ιδιότητα.

Για παράδειγμα, αν δύο στοιχεία έχουν νόρμες Norm_1 και Norm_2 τότε το γινόμενο τους έχει νόρμα $\text{Norm}_1\text{Norm}_2$. Αυτό επιτρέπει την παραγωγή νέων λύσεων Διοφαντικών εξισώσεων από ήδη γνωστές λύσεις.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι για κάθε στοιχείο $\alpha = a + b\sqrt{D}$ ισχύει $\text{Norm}(\alpha) = 0$ αν και μόνο αν $\alpha = 0$. Πράγματι, $a^2 - Db^2 = 0$ θα συνεπαγόταν $\sqrt{D} = \frac{a}{b}$ που είναι άτοπο αφού το D δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει ότι η νόρμα περιέχει ουσιαστική πληροφορία για το στοιχείο στο οποίο εφαρμόζεται.

4.6 Η Εξίσωση Pell – Fermat ως Εξίσωση Νόρμας

Έχοντας πλέον ορίσει τη νόρμα, μπορούμε να δώσουμε μία ερμηνεία της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat.

Θεωρούμε ένα στοιχείο

$$\alpha = x + y\sqrt{D}$$

του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Η νόρμα του είναι

$$\text{Norm}(\alpha) = x^2 - Dy^2.$$

Επομένως η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = N$$

μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$\text{Norm}(x + y\sqrt{D}) = N.$$

Από τη νέα αυτή οπτική, η γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat δεν είναι πλέον μία εξίσωση δύο μεταβλητών αλλά ένα πρόβλημα εύρεσης στοιχείων συγκεκριμένης νόρμας μέσα σε έναν αλγεβρικό δακτύλιο.

Η ερμηνεία αυτή εξηγεί επίσης γιατί η κλασική εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$ κατέχει τόσο ιδιαίτερη θέση στη θεωρία. Πράγματι, οι λύσεις της αντιστοιχούν ακριβώς στα

στοιχεία νόρμας 1. Αυτό οδηγεί φυσικά στην έννοια των μονάδων του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Η παραπάνω διατύπωση επιτρέπει να ερμηνευθεί η επιλυσιμότητα της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat αποκλειστικά μέσω της έννοιας της νόρμας. Πράγματι, η εξίσωση

$$x^2 - Dy^2 = N$$

ισοδυναμεί με τη σχέση

$$Norm(\alpha) = N.$$

Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στην αναζήτηση στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ με προκαθορισμένη νόρμα. Η διατύπωση αυτή επιτρέπει τη χρήση αλγεβρικών εργαλείων και συνδέει την εξίσωση με τη θεωρία ιδεωδών και, γενικότερα, με την Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.

Σχόλιο

Η πλήρης περιγραφή των ακέραιων N για τους οποίους η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = N$ είναι επιλύσιμη αποτελεί βαθύ πρόβλημα της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών. Η μελέτη του οδηγεί στη θεωρία κλάσεων ιδεωδών, στη θεωρία τοπικών σωμάτων και σε γενικεύσεις του Θεωρήματος Μονάδων του Dirichlet. Η ανάπτυξη των θεμάτων αυτών υπερβαίνει τους στόχους της παρούσας εργασίας. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί τα συγγράμματα των Neukirch [7] και Cox [9].

Ωστόσο, η ερμηνεία της εξίσωσης ως εξίσωση νόρμας αναδεικνύει με σαφήνεια ότι το πρόβλημα της επιλυσιμότητας είναι ουσιαστικά αλγεβρικής φύσης και όχι απλώς ένα πρόβλημα εύρεσης ακέραιων λύσεων.

4.7 Μονάδες και Θεμελιώδης Μονάδα

Η έννοια της νόρμας που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα επιτρέπει μία βαθύτερη κατανόηση της δομής των λύσεων της εξίσωσης Pell – Fermat. Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν τα στοιχεία των οποίων η νόρμα είναι ίση με 1 ή -1 καθώς αυτά συνδέονται άμεσα με τις λύσεις της κλασικής εξίσωσης Pell.

Στη θεωρία των δακτυλίων, ένα στοιχείο ονομάζεται μονάδα όταν διαθέτει αντίστροφο μέσα στον ίδιο δακτύλιο. Η έννοια αυτή γενικεύει την έννοια των αριθμών ± 1 στους ακέραιους αριθμούς.

Ορισμός 4.7.1 Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα στοιχείο $u \in R$ ονομάζεται μονάδα αν υπάρχει στοιχείο $v \in R$ τέτοιο ώστε $uv = 1$. Το στοιχείο v ονομάζεται αντίστροφο του u . Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ οι μονάδες χαρακτηρίζονται πλήρως μέσω της νόρμας.

Θεώρημα 4.7.1 Ένα στοιχείο $u = a + b\sqrt{D}$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ είναι μονάδα αν και μόνο αν $Norm(u) = \pm 1$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το στοιχείο u είναι μονάδα. Τότε υπάρχει στοιχείο $v \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ με $uv = 1$. Λαμβάνοντας νόρμες και χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστικότητα της νόρμας, προκύπτει

$$Norm(u)Norm(v) = Norm(1) = 1.$$

Επειδή οι ποσότητες $Norm(u)$ και $Norm(v)$ είναι ακέραιοι αριθμοί, αναγκαστικά $Norm(u) = \pm 1$. Αντίστροφα, έστω ότι

$$Norm(u) = \pm 1.$$

Τότε

$$u\bar{u} = \pm 1.$$

Άρα

$$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{Norm(u)} = \pm \bar{u}.$$

Εφόσον το συζυγές στοιχείο ανήκει επίσης στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, προκύπτει ότι το αντίστροφο του u ανήκει στον ίδιο δακτύλιο. Επομένως το u είναι μονάδα. ■

Το αποτέλεσμα αυτό αποκαλύπτει τη στενή σχέση μεταξύ της εξίσωσης Pell – Fermat και της θεωρίας των μονάδων. Πράγματι, οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$ ταυτίζονται ακριβώς με τα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ που έχουν νόρμα ίση με 1.

Αν (x, y) είναι λύση της εξίσωσης Pell, τότε το στοιχείο $x + y\sqrt{D}$ είναι μονάδα. Αντίστροφα, κάθε μονάδα νόρμας 1 αντιστοιχεί σε λύση της εξίσωσης. Έτσι, η μελέτη των λύσεων της Pell – Fermat ανάγεται στη μελέτη της ομάδας των μονάδων του αντίστοιχου τετραγωνικού σώματος.

Η Θεμελιώδης Μονάδα

Η ύπαρξη άπειρων λύσεων της Pell – Fermat οφείλεται στην ύπαρξη ενός ιδιαίτερου στοιχείου, της θεμελιώδους μονάδας.

Ορισμός 4.7.2 Έστω ότι (x_1, y_1) είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = 1$. Το στοιχείο $\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{D}$ ονομάζεται θεμελιώδης μονάδα του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Η θεμελιώδης μονάδα κατέχει κεντρική θέση στη θεωρία, καθώς όλες οι υπόλοιπες λύσεις της εξίσωσης παράγονται από τις δυνάμεις της. Η παραπάνω περιγραφή αποτελεί συνέπεια του Θεωρήματος Μονάδων του Dirichlet, σύμφωνα με το οποίο η ομάδα των μονάδων ενός πραγματικού τετραγωνικού σώματος παράγεται από μία θεμελιώδη μονάδα μαζί με τις τετριμμένες μονάδες $\{\pm 1\}$. Πράγματι,

$$\varepsilon^n = x_n + y_n\sqrt{D}$$

και τα ζεύγη (x_n, y_n) αποτελούν λύσεις της Pell – Fermat. Το γεγονός αυτό εξηγεί γιατί μία μόνο θεμελιώδης λύση αρκεί για την παραγωγή όλων των υπόλοιπων λύσεων.

4.8 Το θεώρημα Μονάδων του Dirichlet και η Δομή των Λύσεων

Η προηγούμενη ενότητα έδειξε ότι οι λύσεις της Pell – Fermat συνδέονται άμεσα με τις μονάδες του αντίστοιχου τετραγωνικού σώματος. Το ερώτημα που προκύπτει είναι ποια είναι η συνολική δομή αυτών των μονάδων.

Η απάντηση δίνεται από ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών, το θεώρημα Μονάδων του Dirichlet. Στη γενική του μορφή το θεώρημα περιγράφει τη δομή των μονάδων κάθε αλγεβρικού σώματος αριθμών. Στην περίπτωση των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων η διατύπωση του απλοποιείται σημαντικά.

Θεώρημα 4.8 (Dirichlet, Ειδική Μορφή): Αν D είναι θετικός ακέραιος που δεν αποτελεί τέλειο τετράγωνο, τότε το σύνολο των μονάδων του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ έχει τη μορφή $\{\pm \varepsilon^n, n \in \mathbb{Z}\}$, όπου ε είναι η θεμελιώδης μονάδα.

Πόρισμα 4.8 (Περιγραφή των λύσεων της εξίσωσης Pell) Κάθε μονάδα του δακτυλίου $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ έχει τη μορφή

$$\pm \varepsilon^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

όπου ε είναι η θεμελιώδης μονάδα.

Εφόσον οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

αντιστοιχούν ακριβώς στα στοιχεία νόρμας 1, κάθε λύση προκύπτει από κάποια δύναμη της θεμελιώδους μονάδας. Συγκεκριμένα, αν

$$\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{D},$$

τότε όλες οι θετικές λύσεις δίνονται από τη σχέση

$$\varepsilon^n = x_n + y_n\sqrt{D}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

και τα ζεύγη (x_n, y_n) αποτελούν το σύνολο όλων των θετικών λύσεων της εξίσωσης Pell.

Σχόλιο για το Θεώρημα του Dirichlet

Η πλήρης απόδειξη του Θεωρήματος Μονάδων του Dirichlet υπερβαίνει τους στόχους της παρούσας εργασίας, καθώς βασίζεται σε προχωρημένα εργαλεία της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών, της Γεωμετρίας Αριθμών και της θεωρίας πλεγμάτων. Για τον λόγο αυτό το θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη. Για πλήρεις

αποδείξεις του Θεωρήματος Μονάδων του Dirichlet και των γενικεύσεων του στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί τα κλασικά συγγράμματα των Neukirch [7] και Marcus [8].

Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, το αποτέλεσμα δηλώνει ότι όλες οι μονάδες παράγονται από δυνάμεις μίας θεμελιώδους λύσης, γεγονός που εξηγεί την ύπαρξη άπειρων λύσεων της εξίσωσης Pell.

Με άλλα λόγια, η ύπαρξη άπειρων λύσεων δεν είναι αποτέλεσμα κάποιας τυχαίας αριθμητικής ιδιότητας αλλά συνέπεια της αλγεβρικής δομής της ομάδας των μονάδων.

Η σημασία του αποτελέσματος γίνεται ακόμη πιο εμφανής αν συγκριθεί με την περίπτωση των ακέραιων αριθμών. Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ υπάρχουν μόνο δύο μονάδες, οι αριθμοί 1 και -1 . Αντίθετα, στα πραγματικά τετραγωνικά σώματα υπάρχουν άπειρες μονάδες. Αυτή ακριβώς η διαφορά αποτελεί το ουσιώδες χαρακτηριστικό που διακρίνει τα πραγματικά τετραγωνικά σώματα από το σώμα των ρητών αριθμών. Η ύπαρξη αυτής της άπειρης οικογένειας μονάδων αποτελεί την αλγεβρική εξήγηση της συμπεριφοράς της εξίσωσης Pell – Fermat.

4.9 Αναλυτικό Παράδειγμα στο Σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$

Για να κατανοηθεί καλύτερα η προηγούμενη θεωρία, θα εξεταστεί το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, το οποίο συνδέεται άμεσα με το παράδειγμα της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat (ενότητα 3.4.1) που μελετήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

είναι η

$$(x_1, y_1) = (649, 180).$$

Πράγματι,

$$649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1.$$

Άρα η θεμελιώδης μονάδα είναι

$$\varepsilon = 649 + 180\sqrt{13}.$$

Η νόρμα της είναι

$$Norm(\varepsilon) = 649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Dirichlet, κάθε άλλη μονάδα του σώματος παράγεται από δυνάμεις του ε .

Η δεύτερη μονάδα είναι

$$\varepsilon^2 = (649 + 180\sqrt{13})^2.$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\varepsilon^2 = 842401 + 233640\sqrt{13}.$$

Η νόρμα της παραμένει ίση με 1 καθώς

$$Norm(\varepsilon^2) = Norm(\varepsilon)^2 = 1.$$

Ομοίως, $\varepsilon^3, \varepsilon^4 \dots$ παράγουν άπειρες νέες μονάδες.

Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει τη ραγδαία αύξηση των συντελεστών των διαδοχικών μονάδων και δείχνει ότι ακόμη και για σχετικά μικρές τιμές του D , οι λύσεις της εξίσωσης Pell – Fermat μπορούν να αποκτήσουν εξαιρετικά μεγάλα μεγέθη. Η συμπεριφορά αυτή αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της εξίσωσης και αντανakλά την εκθετική αύξηση των διαδοχικών δυνάμεων της θεμελιώδους μονάδας.

4.10 Σύνδεση με τη Γενικευμένη Εξίσωση Pell – Fermat

Η θεωρία που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες ενότητες δεν αφορά την κλασική εξίσωση αλλά επεκτείνεται φυσικά και στη γενικευμένη μορφή $x^2 - Dy^2 = N$. Έστω ότι (x_0, y_0) είναι μία λύση της εξίσωσης αυτής. Τότε το στοιχείο

$$\alpha = x_0 + y_0\sqrt{D}$$

ικανοποιεί

$$Norm(\alpha) = N.$$

Αν ε είναι η θεμελιώδης μονάδα του σώματος, τότε για κάθε ακέραιο k έχουμε

$$Norm(\alpha\varepsilon^k) = Norm(\alpha)Norm(\varepsilon)^k.$$

Επειδή

$$Norm(\varepsilon) = 1$$

προκύπτει ότι

$$Norm(\alpha\varepsilon^k) = N.$$

Άρα κάθε στοιχείο της μορφής $\alpha\varepsilon^k$ αντιστοιχεί σε νέα λύση της ίδιας εξίσωσης.

Η παρατήρηση αυτή εξηγεί αλγεβρικά το αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 3, σύμφωνα με το οποίο μία αρχική λύση της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat οδηγεί σε άπειρη οικογένεια νέων λύσεων.

Η μετάβαση από τις ακέραιες λύσεις στην ομάδα των μονάδων του αντίστοιχου τετραγωνικού σώματος αποτελεί μία από τις σημαντικότερες ιδέες της Αλγεβρικής Θεωρίας Αριθμών και εξηγεί γιατί η μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat συνδέεται τόσο στενά με τη θεωρία των αλγεβρικών σωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμητικά Αναλλοίωτα Πραγματικών Τετραγωνικών Σωμάτων

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκε η εξίσωση Pell – Fermat τόσο από τη Διοφαντική όσο και από την αλγεβρική της πλευρά. Ειδικότερα, είδαμε πως η κλασική εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$ συνδέεται άμεσα με τις μονάδες του πραγματικού τετραγωνικού σώματος $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, ενώ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης καθορίζει τη θεμελιώδη μονάδα του αντίστοιχου σώματος. Στο γενικευμένο πρόβλημα $x^2 - Dy^2 = N$ η δράση των μονάδων νόρμας 1 οδηγεί επιπλέον στη διάκριση των λύσεων σε κλάσεις ισοδυναμίας. Τα δύο αυτά στοιχεία—ομάδα των μονάδων και οι κλάσεις των λύσεων—αποτελούν το φυσικό πέρασμα από την εξίσωση Pell στη βαθύτερη αριθμητική δομή του τετραγωνικού σώματος. Στο παρών κεφάλαιο αναδεικνύεται η σύνδεση αυτή. Κεντρικό αντικείμενο είναι ο Ρυθμιστής (Regulator), ένα αριθμητικό αναλλοίωτο που μετρά, μέσω λογαρίθμων, το μέγεθος της θεμελιώδους μονάδας. Η μελέτη του οδηγεί φυσικά στην ομάδα κλάσεων, στον αριθμό κλάσης και, τελικά, στις ειδικές τιμές των σειρών L του Dirichlet.

5.1 Ο Ρυθμιστής

Στο κεφάλαιο 4 μελετήθηκε η σχέση της εξίσωσης Pell – Fermat με τη θεωρία των μονάδων των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων. Ειδικότερα, για ένα πραγματικό τετραγωνικό σώμα $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, όπου $D > 0$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, η ύπαρξη μιας θεμελιώδους μονάδας ε επιτρέπει την περιγραφή της ομάδας των μονάδων μέσω των δυνάμεων της. Στην περίπτωση της εξίσωσης Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, η θεμελιώδης μονάδα συνδέεται άμεσα με τη θεμελιώδη λύση (x_1, y_1) μέσω της σχέσης $\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{D}$. Το επόμενο φυσικό ερώτημα δεν αφορά πλέον την ύπαρξη των μονάδων αλλά το μέγεθος τους. Πράγματι, η θεμελιώδης μονάδα μπορεί να είναι πολύ μεγάλη ακόμη και όταν ο D είναι σχετικά μικρός. Για τον λόγο αυτό, αντί να μελετούμε απευθείας το μέγεθος του αριθμού ε , εισάγουμε το λογαριθμικό του μέγεθος.

Ορισμός 5.1 – Ρυθμιστής

Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ πραγματικό τετραγωνικό σώμα και έστω $\varepsilon > 1$ θεμελιώδης μονάδα του. Ο Ρυθμιστής (regulator) του K ορίζεται, στην πραγματική τετραγωνική περίπτωση, ως $R_K = \log \varepsilon$.

Επειδή η ομάδα των μονάδων έχει τη μορφή

$$\mathcal{O}_K^\times = \{\pm \varepsilon^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

ο ρυθμιστής αποτελεί ένα αριθμητικό μέτρο του μεγέθους της θεμελιώδους μονάδας. Η επιλογή της θεμελιώδους μονάδας ως γεννήτορα είναι μοναδική μέχρι πρόσημο και αντιστροφή, επομένως η θετική επιλογή $\varepsilon > 1$ καθορίζει τον R_K . Η παραπάνω σχέση μπορεί να ερμηνευτεί πιο φυσικά μέσω των δύο πραγματικών εμφυτεύσεων του K . Αν

$$\alpha = a + b\sqrt{D},$$

τότε οι δύο εμφυτεύσεις είναι

$$\sigma_1(\alpha) = a + b\sqrt{D}$$

και

$$\sigma_2(\alpha) = a - b\sqrt{D}.$$

Για μία μονάδα ε ισχύει

$$Norm_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = \sigma_1(\varepsilon)\sigma_2(\varepsilon) = \pm 1.$$

Επομένως οι λογάριθμοι των απόλυτων τιμών των δύο εμφυτεύσεων δεν είναι ανεξάρτητοι. Στην περίπτωση μονάδας νόρμας 1 έχουμε

$$\log|\sigma_1(\varepsilon)| + \log|\sigma_2(\varepsilon)| = 0.$$

Έτσι, ο λογάριθμος της θεμελιώδους μονάδας δίνει ουσιαστικά όλη τη πληροφορία που απαιτείται για τη περιγραφή της λογαριθμικής εικόνας της ομάδας των μονάδων. Αν

$$\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{D}$$

τότε

$$R_K = \log(x_1 + y_1\sqrt{D}).$$

Κατά συνέπεια, η μελέτη του ρυθμιστή συνδέει άμεσα την εξίσωση Pell – Fermat με ένα βασικό αναλλοίωτο του αντίστοιχου αριθμητικού σώματος.

Σύνδεση με την εξίσωση Pell – Fermat

Η σύνδεση αυτή είναι ιδιαίτερα άμεση. Αν (x_1, y_1) είναι η θεμελιώδης θετική λύση της εξίσωσης

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

τότε

$$\varepsilon = x_1 + y_1\sqrt{D}$$

και επομένως

$$R_K = \log(x_1 + y_1\sqrt{D}).$$

Από την άλλη πλευρά, οι υπόλοιπες λύσεις της εξίσωσης παράγονται από τις δυνάμεις της θεμελιώδους μονάδας

$$\varepsilon^n = x_n + y_n\sqrt{D}.$$

Άρα,

$$\log(\varepsilon^n) = n \log \varepsilon = nR_K.$$

Ο ρυθμιστής επομένως δεν αποτελεί απλώς έναν αριθμό που υπολογίζεται από τη θεμελιώδη λύση. Εκφράζει τη βασική λογαριθμική κλίμακα πάνω στην οποία αναπτύσσεται ολόκληρη η ομάδα των μονάδων. Η παρατήρηση αυτή αποτελεί τη γέφυρα από τη Διοφαντική περιγραφή των λύσεων της Pell στη βαθύτερη αριθμητική δομή του πραγματικού τετραγωνικού σώματος.

Παράδειγμα 5.1 – Το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$

Στο Κεφάλαιο 4 εξετάστηκε αναλυτικά το σώμα

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$$

και βρέθηκε ότι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

είναι

$$(x_1, y_1) = (649, 180).$$

Επομένως, η θεμελιώδης μονάδα είναι

$$\varepsilon = 649 + 180\sqrt{13}$$

με

$$\text{Norm}(\varepsilon) = 649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1.$$

Ο ρυθμιστής του σώματος είναι συνεπώς

$$R_K = \log(649 + 180\sqrt{13}).$$

Επειδή

$$649 + 180\sqrt{13} \approx 1297,99923$$

λαμβάνουμε

$$R_K \approx 7,16858.$$

Το παράδειγμα είναι ενδεικτικό της σημασίας του ρυθμιστή. Παρότι το $D = 13$ είναι σχετικά μικρό, η θεμελιώδης μονάδα έχει ήδη αρκετά μεγάλο μέγεθος και ο αντίστοιχος ρυθμιστής αποτυπώνει αυτή την αύξηση σε λογαριθμική κλίμακα. Το ίδιο φαινόμενο γίνεται ακόμη εντονότερο για μεγαλύτερες τιμές του D , όπου οι θεμελιώδεις μονάδες μπορούν να αποκτήσουν πολύ μεγάλο μέγεθος.

Η παραπάνω παρατήρηση δείχνει γιατί ο ρυθμιστής αποτελεί σημαντικό αναλλοίωτο στη μελέτη των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων. Η πληροφορία που περιέχεται στη θεμελιώδη μονάδα και συνεπώς στη θεμελιώδη λύση της

εξίσωσης Pell – Fermat, μεταφέρεται σε έναν πραγματικό αριθμό μέσω του λογαρίθμου. Με αυτόν τον τρόπο καθίσταται δυνατή η σύγκριση διαφορετικών τετραγωνικών σωμάτων όχι μόνο ως προς την ύπαρξη και τη δομή των μονάδων τους, αλλά και ως προς το λογαριθμικό τους μέγεθος.

5.2 Η Λογαριθμική Απεικόνιση των Μονάδων

Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ένα πραγματικό τετραγωνικό σώμα. Το σώμα K έχει δύο πραγματικές εμφυτεύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στα δύο συζυγή στοιχεία $\alpha = a + b\sqrt{D}$ και $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{D}$. Η ύπαρξη των δύο αυτών εμφυτεύσεων επιτρέπει να μεταφέρουμε τη μελέτη των στοιχείων του K από το αλγεβρικό πλαίσιο σε ένα γεωμετρικό πλαίσιο στον $\mathbb{R}^2$.

Για $\alpha \in K^\times$, ορίζουμε τη λογαριθμική απεικόνιση

$$L : K^\times \rightarrow \mathbb{R}^2$$

με

$$L(\alpha) = (\log|\alpha|, \log|\bar{\alpha}|).$$

Η επιλογή των λογαρίθμων είναι ιδιαίτερα φυσική καθώς μετατρέπει τον πολλαπλασιασμό στο $K^\times$ σε πρόσθεση στο $\mathbb{R}^2$.

Πράγματι, για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in K^\times$ ισχύει

$$L(\alpha\beta) = (\log|\alpha\beta|, \log|\bar{\alpha}\bar{\beta}|)$$

και συνεπώς

$$L(\alpha\beta) = L(\alpha) + L(\beta).$$

Η ιδιότητα αυτή αποτελεί το βασικό πλεονέκτημα της λογαριθμικής απεικόνισης και θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για τη μελέτη της δράσης των μονάδων πάνω στις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat.

Η εικόνα των μονάδων

Έστω τώρα $u \in \mathcal{O}_K^\times$ μονάδα. Επειδή

$$\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(u) = u\bar{u} = \pm 1$$

έχουμε

$$\log|u| + \log|\bar{u}| = \log|u\bar{u}| = \log|\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(u)| = 0.$$

Επομένως η λογαριθμική εικόνα κάθε μονάδας βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x + y = 0$ του $\mathbb{R}^2$. Ιδιαίτερα, αν $u > 1$ είναι μονάδα με $\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(u) = 1$ τότε $\bar{u} = \frac{1}{u}$ και επομένως

$$L(u) = (\log u, \log \frac{1}{u}) = (\log u, -\log u).$$

Άρα,

$$L(u) = (\log u)(1, -1).$$

Η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική. Η θεμελιώδης μονάδα, η οποία στα προηγούμενα κεφάλαια εμφανίστηκε ως το στοιχείο που παράγει την ομάδα των μονάδων, μετατρέπεται μέσω της L σε ένα διάνυσμα της ευθείας $x + y = 0$. Το μήκος της βασικής λογαριθμικής κλίμακας καθορίζεται από το $\log u$, δηλαδή από τον ρυθμιστή που ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Ανάλυση ως προς την λογαριθμική βάση

Η λογαριθμική απεικόνιση επιτρέπει ακόμη πιο λεπτομερή περιγραφή. Τα διανύσματα $(1,1)$ και $L(u) = (\log u)(1, -1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$.

Επομένως, για κάθε $\alpha \in K^\times$ υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1(\alpha)$ και $c_2(\alpha)$ τέτοιοι ώστε

$$L(\alpha) = c_1(\alpha)(1,1) + c_2(\alpha)L(u).$$

Αν

$$L(\alpha) = (\log|\alpha|, \log|\bar{\alpha}|)$$

τότε προσθέτοντας τις δύο συντεταγμένες λαμβάνουμε

$$2c_1(\alpha) = \log|\alpha\bar{\alpha}| = \log|Norm_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|.$$

Άρα,

$$c_1(\alpha) = \frac{1}{2} \log|Norm_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|.$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \log|Norm_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)| (1,1) + c_2(\alpha)(\log u)(1, -1).$$

Η συγκεκριμένη αποσύνθεση αποτελεί βασικό βήμα στην απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

Η δράση των μονάδων στη λογαριθμική εικόνα

Έστω τώρα ότι $\alpha \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ και $Norm_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = n$. Αν $k \in \mathbb{Z}$, από την ιδιότητα

$$L(\alpha u^{-k}) = L(\alpha) - kL(u)$$

προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός της α με δυνάμεις της μονάδας u αντιστοιχεί σε μετατόπιση της λογαριθμικής εικόνας κατά ακέραια πολλαπλάσια του διανύσματος $L(u)$. Επιλέγοντας k ως τον πλησιέστερο ακέραιο στον $c_2(\alpha)$, μπορούμε να γράψουμε

$$c_2(\alpha) = k + \delta \text{ με } |\delta| \leq \frac{1}{2}.$$

Τότε

$$L(\alpha u^{-k}) = \frac{1}{2} \log |n|(1,1) + \delta(\log u)(1, -1).$$

Με αυτόν τον τρόπο, κάθε στοιχείο της ίδιας κλάσης ισοδυναμίας μπορεί να μεταφερθεί σε έναν κανονικό αντιπρόσωπο για τον οποίο

$$|c_2(\alpha)| \leq \frac{1}{2}.$$

Αυτή η παρατήρηση είναι το ουσιαστικό σημείο της λογαριθμικής μεθόδου: η δράση των δυνάμεων της μονάδας επιτρέπει να μεταφέρουμε κάθε λύση της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat σε έναν αντιπρόσωπο της ίδιας κλάσης που βρίσκεται σε ελεγχόμενη περιοχή. Αποδεικνύεται δηλαδή πως οι κλάσεις λύσεων μπορούν να αναζητηθούν σε συγκεκριμένη φραγμένη περιοχή.

Έτσι, η λογαριθμική απεικόνιση δεν αποτελεί απλώς έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης των μονάδων. Μετατρέπει τη δράση της ομάδας των μονάδων σε μετατοπίσεις ενός πλέγματος στο $\mathbb{R}^2$ και παρέχει το βασικό εργαλείο για τον περιορισμό των λύσεων της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat σε μία πεπερασμένη περιοχή.

5.3 Αντιπρόσωποι των Κλάσεων Ισοδυναμίας και Πεπερασμένη Αναζήτηση

Σε προηγούμενες ενότητες μελετήσαμε τη δράση των μονάδων νόρμας 1 στις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat και την έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ λύσεων. Η δράση αυτή επιτρέπει να θεωρήσουμε ως ισοδύναμες λύσεις εκείνες που διαφέρουν κατά πολλαπλασιασμό με κατάλληλη δύναμη μιας μονάδας. Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι η παραπάνω θεωρητική κατασκευή μπορεί να μετατραπεί σε ένα πεπερασμένο πρόβλημα αναζήτησης. Συγκεκριμένα, κάθε κλάση ισοδυναμίας λύσεων διαθέτει έναν αντιπρόσωπο του οποίου οι συντεταγμένες βρίσκονται μέσα σε συγκεκριμένη φραγμένη περιοχή.

Θεωρούμε τη γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat

$$x^2 - Dy^2 = N.$$

Θέτουμε

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$$

και σε κάθε λύση (x, y) αντιστοιχίζουμε το στοιχείο

$$\alpha = x + y\sqrt{D}.$$

Τότε

$$\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = x^2 - Dy^2 = N.$$

Έστω τώρα $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times$ μία μονάδα με $\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$ και $\varepsilon > 1$.

Ο πολλαπλασιασμός μίας λύσης α με οποιαδήποτε δύναμη ε^k , $k \in \mathbb{Z}$, διατηρεί τη νόρμα αφού

$$\text{Norm}(\alpha\varepsilon^k) = \text{Norm}(\alpha)\text{Norm}(\varepsilon)^k = N.$$

Επομένως οι λύσεις $\alpha, \alpha\varepsilon, \alpha\varepsilon^2, \dots$ ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

Θεώρημα 5.3 Έστω $D \in \mathbb{Z}$ θετικός μη τετράγωνος ακέραιος και $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Έστω επίσης $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]^\times$, $\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$ και $\varepsilon > 1$. Τότε κάθε ακέραια λύση (x, y) της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$ είναι ισοδύναμη με μία λύση (x_0, y_0) η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$|x_0| \leq \frac{\sqrt{|N|}(1+\sqrt{\varepsilon})}{2} \text{ και } |y_0| \leq \frac{\sqrt{|N|}(1+\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{D}}.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη λογαριθμική απεικόνιση

$$L : K^\times \rightarrow \mathbb{R}^2$$

που αντιστοιχίζει σε κάθε $\alpha \in K^\times$ το ζεύγος των λογαρίθμων των απολύτων τιμών των δύο συζυγών του. Για τη μονάδα ε , επειδή

$$\text{Norm}(\varepsilon) = 1 \text{ και } \varepsilon > 1,$$

έχουμε

$$L(\varepsilon) = (\log \varepsilon, -\log \varepsilon).$$

Επομένως, ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου με ε^k αντιστοιχεί σε μετατόπιση κατά $kL(\varepsilon)$ στη λογαριθμική εικόνα. Για $\alpha = x + y\sqrt{D}$ με $\text{Norm}(\alpha) = N$, μπορούμε να γράψουμε

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \log |N|(1, 1) + c_2(\alpha) \log(\varepsilon)(1, -1)$$

για κατάλληλο $c_2(\alpha) \in \mathbb{R}$.

Επιλέγουμε έναν ακέραιο k πλησιέστερο στο $c_2(\alpha)$. Τότε

$$c_2(\alpha) = k + \delta \text{ με } |\delta| \leq \frac{1}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την α με ε^{-k} , παίρνουμε

$$\alpha_0 = \alpha\varepsilon^{-k}.$$

Η α_0 ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την α , ενώ η λογαριθμική της εικόνα έχει πλέον τη μορφή

$$L(\alpha_0) = \frac{1}{2} \log|N|(1,1) + \delta \log(\varepsilon)(1,-1), |\delta| \leq \frac{1}{2}.$$

Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας κατάλληλη δύναμη του ρυθμιστή, μπορούμε να μεταφέρουμε κάθε λύση σε έναν αντιπρόσωπο της ίδιας κλάσης που βρίσκεται σε συγκεκριμένη φραγμένη περιοχή. Αυτή ακριβώς είναι η γεωμετρική σημασία της διαδικασίας: οι δυνάμεις της μονάδας μετακινούν τις λύσεις πάνω στην αντίστοιχη υπερβολή, μέχρι να επιλεγεί ένας κατάλληλος αντιπρόσωπος. Γράφουμε $\alpha_0 = x_0 + y_0\sqrt{D}$. Από τη μορφή της λογαριθμικής απεικόνισης προκύπτει ότι

$$|x_0 + y_0\sqrt{D}| \leq \sqrt{|N|\varepsilon}$$

και, για το συζυγές στοιχείο,

$$|x_0 - y_0\sqrt{D}| \leq \sqrt{|N|}.$$

Οι δύο παραπάνω ανισότητες μπορούν να συνδυαστούν με τις σχέσεις

$$2x_0 = (x_0 + y_0\sqrt{D}) + (x_0 - y_0\sqrt{D})$$

και

$$2y_0\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D}) - (x_0 - y_0\sqrt{D}).$$

Άρα,

$$2|x_0| \leq \sqrt{|N|\varepsilon} + \sqrt{|N|}$$

και επομένως

$$|x_0| \leq \frac{\sqrt{|N|(1+\sqrt{\varepsilon})}}{2}.$$

Αντίστοιχα,

$$2|y_0|\sqrt{D} \leq \sqrt{|N|\varepsilon} + \sqrt{|N|},$$

οπότε

$$|y_0| \leq \frac{\sqrt{|N|(1+\sqrt{\varepsilon})}}{2\sqrt{D}}. \blacksquare$$

Έτσι αποδεικνύονται τα ζητούμενα φράγματα. Η ίδια διαδικασία οδηγεί στην αντίστοιχη φραγμένη περιοχή για τους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας.

Συνέπεια του θεωρήματος

Το σημαντικότερο σημείο του αποτελέσματος είναι ότι η αναζήτηση λύσεων της εξίσωσης $x^2 - Dy^2 = N$ δεν χρειάζεται πλέον να πραγματοποιηθεί σε ολόκληρο το άπειρο σύνολο των ακεραίων. Για κάθε κλάση ισοδυναμίας αρκεί να αναζητήσουμε έναν αντιπρόσωπο μέσα στην περιοχή $|x| \leq \frac{\sqrt{|N|(1+\sqrt{\varepsilon})}}{2}$ και $|y| \leq \frac{\sqrt{|N|(1+\sqrt{\varepsilon})}}{2\sqrt{D}}$.

Επομένως, το αρχικά άπειρο πρόβλημα ανάγεται σε πεπερασμένο έλεγχο ακεραίων σημείων. Αφού εντοπισθούν οι αντιπρόσωποι μέσα στη φραγμένη περιοχή, όλες οι

υπόλοιπες λύσεις των αντίστοιχων κλάσεων μπορούν να παραχθούν μέσω του πολλαπλασιασμού με δυνάμεις του ρυθμιστή.

Η αποτελεσματικότητα της διαδικασίας φαίνεται χαρακτηριστικά στην εξίσωση

$$x^2 - 15y^2 = 34.$$

Εδώ μπορούμε να πάρουμε ως μονάδα νόρμας 1 την

$$\varepsilon = 4 + \sqrt{15}.$$

Οι παραπάνω φραγμοί δίνουν $|x| \leq 11,1$ και $|y| \leq 2,9$.

Επομένως, για τον εντοπισμό των αντιπροσώπων αρκεί να εξεταστούν οι ακέραιες τιμές

$$y = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Η άμεση αντικατάσταση στην σχέση

$$x^2 = 34 + 15y^2$$

δείχνει ότι προκύπτουν οι λύσεις

$$(x, y) = (7, 1) \text{ και } (x, y) = (7, -1),$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Όλες οι υπόλοιπες λύσεις παράγονται από αυτές μέσω της δράσης των μονάδων νόρμας 1.

Συμπέρασμα

Το αποτέλεσμα αυτό ολοκληρώνει τη μετάβαση από τη θεωρητική μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat σε μια αποτελεσματική διαδικασία εύρεσης των λύσεων της. Ο ρυθμιστής καθορίζει τη δράση πάνω στις κλάσεις ισοδυναμίας, ενώ η λογαριθμική απεικόνιση επιτρέπει την επιλογή ενός περιορισμένου αντιπροσώπου από κάθε κλάση. Με τον τρόπο αυτό, η αναζήτηση των λύσεων μετατρέπεται από άπειρη διαδικασία σε πεπερασμένο υπολογιστικό έλεγχο.

5.4 Σύνδεση με τις L – σειρές και τον Αριθμό Κλάσης

Η μελέτη των προηγούμενων ενοτήτων ανέδειξε τον ρυθμιστή ως βασικό αναλλοίωτο της ομάδας των μονάδων ενός πραγματικού τετραγωνικού σώματος. Το επόμενο φυσικό ερώτημα είναι πως η ποσότητα αυτή συνδέεται με άλλες βασικές αριθμητικές αναλλοίωτες του σώματος και, ιδιαίτερα, με τον αριθμό κλάσης. Για να περιγραφεί αυτή η σύνδεση, χρειάζεται να περάσουμε από την αλγεβρική στην αναλυτική πλευρά της Θεωρίας Αριθμών, όπου εμφανίζονται οι σειρές L του Dirichlet.

5.4.1 Οι σειρές L του Dirichlet

Ορισμός 5.4.1 Ένας χαρακτήρας Dirichlet modulo q , όπου $q \geq 1$, είναι μία αριθμητική συνάρτηση $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, η οποία είναι περιοδική modulo q , πλήρως πολλαπλασιαστική και ικανοποιεί $\chi(n) = 0$ όταν $\gcd(n, q) > 1$, ενώ για $\gcd(n, q) = 1$ παίρνει τιμές στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών μέτρου 1.

Ορισμός 5.4.2 Έστω D θετική θεμελιώδης διακρίνουσα. Ο τετραγωνικός χαρακτήρας Dirichlet που αντιστοιχεί στη D ορίζεται από

$$\chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right),$$

όπου $\left(\frac{D}{n}\right)$ είναι το σύμβολο Kronecker. Ο χαρακτήρας αυτός είναι πραγματικός χαρακτήρας Dirichlet και παίρνει, για $\gcd(n, D) = 1$, τιμές 1 ή -1 .

Για έναν χαρακτήρα Dirichlet χ , η αντίστοιχη σειρά L , για $\Re(s) > 1$, ορίζεται ως εξής:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

Στην περίπτωση ενός πραγματικού τετραγωνικού σώματος $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, όπου $D > 0$ είναι θεμελιώδης διακρίνουσα, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα ο τετραγωνικός χαρακτήρας του Dirichlet που συνδέεται με τη διακρίνουσα D , τον οποίο συμβολίζουμε με χ_D . Η αντίστοιχη σειρά γράφεται

$$L(s, \chi_D) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_D(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

Ο χαρακτήρας χ_D μεταφέρει στη σειρά L αριθμητική πληροφορία που σχετίζεται με τη διακρίνουσα του τετραγωνικού σώματος. Επομένως, η συνάρτηση $L(s, \chi_D)$ αποτελεί ένα αναλυτικό αντικείμενο το οποίο συνδέεται άμεσα με την αριθμητική του σώματος K . Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ειδική τιμή της συνάρτησης στο σημείο $s = 1$, δηλαδή η ποσότητα $L(1, \chi_D)$. Η συγκεκριμένη τιμή αποτελεί βασικό συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην αναλυτική και την αλγεβρική Θεωρία Αριθμών, καθώς εμφανίζεται στον τύπο αριθμού κλάσης του Dirichlet.

5.4.2 Ο τύπος αριθμού κλάσης

Για ένα αριθμητικό σώμα K , η μελέτη της αριθμητικής του δομής δεν περιορίζεται στις μονάδες και στα στοιχεία του σώματος, αλλά επεκτείνεται και στα ιδεώδη του δακτυλίου ακεραίων $\mathcal{O}_K$. Δύο μη μηδενικά ιδεώδη I, J θεωρούνται ισοδύναμα όταν υπάρχει κάποιο $\alpha \in K^\times$ τέτοιο ώστε $I = \alpha J$.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας των ιδεωδών σχηματίζουν, ως προς τον πολλαπλασιασμό, μια πεπερασμένη ομάδα, την ομάδα κλάσεων του σώματος, η οποία συμβολίζεται με C_K . Ο αριθμός κλάσης του K είναι το πλήθος των στοιχείων αυτής της ομάδας

και συμβολίζεται με $h_K = |C_K|$. Επομένως, ο αριθμός κλάσης μετρά τις διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας ιδεωδών του σώματος. Ειδικότερα, όταν $h_K = 1$, κάθε ιδεώδες του $\mathcal{O}_K$ είναι κύριο, γεγονός που αντιστοιχεί σε ιδιαίτερη απλή αριθμητική δομή του σώματος. Για τις παραπάνω έννοιες ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το σύγγραμμα [7].

Στην περίπτωση του πραγματικού τετραγωνικού σώματος $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, ο αριθμός κλάσης γράφεται $h(D)$. Πρόκειται για μία από τις βασικές αριθμητικές αναλλοίωτες του σώματος και, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, συνδέεται μέσω του τύπου αριθμού κλάσης του Dirichlet με τη διακρίνουσα, τον ρυθμιστή και την ειδική τιμή μιας σειράς L .

Για το πραγματικό τετραγωνικό σώμα $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, με θεμελιώδη διακρίνουσα D , ο τύπος αριθμού κλάσης του Dirichlet δίνει τη σχέση

$$h(D)R = \frac{\sqrt{D}}{2} L(1, \chi_D)$$

όπου:

- $h(D)$ είναι ο αριθμός κλάσης του σώματος,
- R είναι ο ρυθμιστής (regulator)
- χ_D ο τετραγωνικός χαρακτήρας του Dirichlet,
- $L(1, \chi_D)$ η τιμή στο $s = 1$ της αντίστοιχης σειράς L [7].

Η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι ο ρυθμιστής που μελετήθηκε στις προηγούμενες ενότητες εμφανίζεται πλέον ως βασικό συστατικό του αριθμού κλάσης. Λύνοντας ως προς $h(D)$, παίρνουμε $h(D) = \frac{\sqrt{D}}{2R} L(1, \chi_D)$. Επομένως ο αριθμός κλάσης συνδέεται ταυτόχρονα με τη διακρίνουσα του σώματος, τον ρυθμιστή και την ειδική τιμή μιας σειράς L .

Η σύνδεση αυτή αναδεικνύει και τον ρόλο του ρυθμιστή. Η μελέτη των λύσεων των εξισώσεων Pell – Fermat οδηγεί στη μελέτη των μονάδων του πραγματικού τετραγωνικού σώματος. Η θεμελιώδης μονάδα καθορίζει τον ρυθμιστή, ενώ ο ρυθμιστής συμμετέχει στον τύπο αριθμού κλάσης του Dirichlet. Έτσι, η αρχική Διοφαντική εξίσωση συνδέεται τελικά με μία από τις βασικές αλγεβρικές αναλλοίωτες του σώματος.

Μπορούμε επομένως να συνοψίσουμε τη βασική αλυσίδα που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 5 ως:

$$\begin{aligned} \text{Εξισώσεις Pell – Fermat} &\rightarrow \text{Μονάδες} \rightarrow \text{Ρυθμιστής} \rightarrow L - \text{σειρές} \\ &\rightarrow \text{Αριθμός Κλάσης } h(D) \end{aligned}$$

Η μελέτη των εξισώσεων Pell – Fermat δεν περιορίζεται στην αναζήτηση ακέραιων λύσεων. Οι λύσεις τους συνδέονται με τη δομή των μονάδων πραγματικών

τετραγωνικών σωμάτων και, μέσω του ρυθμιστή, με τον αριθμό κλάσης. Παράλληλα, ο τύπος του Dirichlet εισάγει την αναλυτική πλευρά της Θεωρίας Αριθμών μέσω των σειρών L .

Με τον τρόπο αυτό, η μελέτη του ρυθμιστή λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στη Διοφαντική και την Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών από τη μία πλευρά και στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών από την άλλη, ολοκληρώνοντας τη σύνδεση των εννοιών που αναπτύχθηκαν στο παρόν κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πολυγωνικοί Αριθμοί και Αναγωγή σε Εξισώσεις Pell – Fermat

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η θεωρία των πολυγωνικών αριθμών και η σύνδεση τους με τις Διοφαντικές εξισώσεις Pell – Fermat. Αρχικά δίνονται οι βασικοί ορισμοί και οι σημαντικότερες οικογένειες πολυγωνικών αριθμών, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα εύρεσης κοινών πολυγωνικών αριθμών ανάγεται σε γενικευμένες εξισώσεις Pell. Τέλος, παρουσιάζονται χαρακτηριστικές εφαρμογές της θεωρίας σε κλασικά προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

6.1 Πολυγωνικοί Αριθμοί

Οι πολυγωνικοί αριθμοί αποτελούν μια σημαντική κατηγορία αριθμών της Κλασικής Θεωρίας Αριθμών και εμφανίζονται ήδη από την αρχαία ελληνική μαθηματική παράδοση. Η ονομασία τους προέρχεται από το γεγονός ότι μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά ως διατάξεις σημείων που σχηματίζουν κανονικά πολύγωνα.

Ο n -οστός s -γωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $P_s(n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2}$ όπου $s \geq 3$ είναι ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου και $n \geq 1$. Για ειδικές τιμές του s προκύπτουν γνωστές ακολουθίες αριθμών:

- Για $s = 3$ λαμβάνουμε τους τριγωνικούς αριθμούς $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, δηλαδή 1,3,6,10,15,...
- Για $s = 4$ προκύπτουν οι τετραγωνικοί αριθμοί $S_n = n^2$, δηλαδή 1,4,9,16,25,...
- Για $s = 5$ προκύπτουν οι πενταγωνικοί αριθμοί $P_5(n) = \frac{3n^2 - n}{2}$, δηλαδή 1,5,12,22,35,...

Οι πολυγωνικοί αριθμοί έχουν μελετηθεί εκτενώς στη Θεωρία Αριθμών, καθώς πολλά προβλήματα που αφορούν σχέσεις μεταξύ διαφορετικών οικογενειών πολυγωνικών αριθμών οδηγούν σε Διοφαντικές εξισώσεις. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα προσδιορισμού αριθμών που ανήκουν ταυτόχρονα σε δύο διαφορετικές οικογένειες πολυγωνικών αριθμών. Σε πολλές περιπτώσεις τα προβλήματα αυτά ανάγονται στην επίλυση εξισώσεων Pell – Fermat ή γενικευμένων εξισώσεων Pell.

6.2 Διασύνδεση Πολυγωνικών Αριθμών και Γενικευμένων Εξισώσεων Pell - Fermat

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκαν οι πολυγωνικοί αριθμοί και ο γενικός τύπος τους

$$P_s(n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2}.$$

Ένα φυσικό πρόβλημα που προκύπτει στη Θεωρία Αριθμών είναι ο προσδιορισμός αριθμών που ανήκουν ταυτόχρονα σε δύο διαφορετικές οικογένειες πολυγωνικών αριθμών. Δηλαδή αναζητούμε x, y για τους οποίους ισχύει $P_\lambda(x) = P_\mu(y)$ με $\lambda, \mu \geq 3$.

Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα προσδιορισμού αριθμών που είναι ταυτόχρονα λ –γωνικοί και μ –γωνικοί ανάγεται σε μια γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat.

Θεώρημα 6.2 Έστω $\lambda, \mu \geq 3$ και

$$P_\lambda(x) = \frac{(\lambda-2)x^2 - (\lambda-4)x}{2},$$

$$P_\mu(y) = \frac{(\mu-2)y^2 - (\mu-4)y}{2}.$$

Η Διοφαντική εξίσωση

$$P_\lambda(x) = P_\mu(y)$$

που εκφράζει την ισότητα δύο πολυγωνικών αριθμών μετασχηματίζεται, μέσω κατάλληλου γραμμικού μετασχηματισμού, σε γενικευμένη εξίσωση Pell της μορφής

$$U^2 - D(\lambda, \mu)V^2 = N(\lambda, \mu)$$

όπου οι σταθερές $D(\lambda, \mu)$ και $N(\lambda, \mu)$ εξαρτώνται μόνο από τα λ και μ .

Απόδειξη: Από την υπόθεση

$$P_\lambda(x) = P_\mu(y)$$

έχουμε

$$(\lambda - 2)x^2 - (\lambda - 4)x = (\mu - 2)y^2 - (\mu - 4)y.$$

Πολλαπλασιάζουμε με

$$4(\lambda - 2)(\mu - 2)$$

και λαμβάνουμε

$$4(\mu - 2)(\lambda - 2)^2x^2 - 4(\mu - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)x$$

$$= 4(\lambda - 2)(\mu - 2)^2y^2 - 4(\lambda - 2)(\mu - 2)(\mu - 4)y.$$

Προσθέτουμε κατάλληλα τις ποσότητες

$$(\lambda - 4)^2(\mu - 2)$$

και

$$(\mu - 4)^2(\lambda - 2)$$

ώστε να προκύψουν πλήρη τετράγωνα.

Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} & [2(\lambda - 2)x - (\lambda - 4)]^2(\mu - 2) - [2(\mu - 2)y - (\mu - 4)]^2(\lambda - 2) \\ & = (\lambda - 4)^2(\mu - 2) - (\mu - 4)^2(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$U = 2(\lambda - 2)x - (\lambda - 4)$$

και

$$V = 2(\mu - 2)y - (\mu - 4).$$

Έτσι προκύπτει

$$(\mu - 2)U^2 - (\lambda - 2)V^2 = (\lambda - 4)^2(\mu - 2) - (\mu - 4)^2(\lambda - 2).$$

Ορίζουμε

$$N(\lambda, \mu) = (\lambda - 4)^2(\mu - 2) - (\mu - 4)^2(\lambda - 2).$$

Η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(\mu - 2)U^2 - (\lambda - 2)V^2 = N(\lambda, \mu).$$

Η παραπάνω αποτελεί Διοφαντική εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές που εξαρτώνται μόνο από τις παραμέτρους λ και μ .

Η αναγωγή αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση της μεθοδολογίας που αναπτύσσεται από τον W. Chu [5] για τη μελέτη κοινών πολυγωνικών αριθμών.

Συγκεκριμένα, η εξίσωση

$$P_\lambda(x) = P_\mu(y)$$

μετασχηματίζεται σε γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat της μορφής

$$U^2 - D(\lambda, \mu)V^2 = N(\lambda, \mu)$$

όπου

$$D(\lambda, \mu) = (\lambda - 2)(\mu - 2)$$

και οι σταθερές $D(\lambda, \mu)$ και $N(\lambda, \mu)$ εξαρτώνται μόνο από τα είδη των πολυγωνικών αριθμών που εξετάζονται.

Συνεπώς, το πρόβλημα εύρεσης κοινών λ –γωνικών και μ –γωνικών αριθμών ανάγεται στη μελέτη μιας γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat και κάθε λύση της εξίσωσης

$$P_\lambda(x) = P_\mu(y)$$

οδηγεί, μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού, σε λύση της αντίστοιχης γενικευμένης εξίσωσης Pell – Fermat.

6.3 Εφαρμογές σε Προβλήματα Πολυγωνικών Αριθμών

6.3.1 Τετραγωνοτριγωνικοί Αριθμοί

Ένα από τα κλασικότερα προβλήματα που σχετίζονται με τους πολυγωνικούς αριθμούς είναι ο προσδιορισμός των αριθμών που είναι ταυτόχρονα τριγωνικοί και τετραγωνικοί. Όπως αναφέρθηκε, οι τριγωνικοί αριθμοί δίνονται από τον τύπο $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, ενώ οι τετραγωνικοί έχουν τη μορφή m^2 . Ζητούμε λοιπόν τους θετικούς ακέραιους n και m για τους οποίους ισχύει $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$.

Έχουμε διαδοχικά

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

$$\text{ή} \quad 4n(n+1) = 8m^2$$

$$\text{ή} \quad 4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1$$

$$\text{ή} \quad (2n+1)^2 - 8m^2 = 1.$$

Θέτοντας

$$x = 2n + 1 \text{ και } y = m,$$

η τελευταία σχέση μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

οπότε πρόκειται για τη κλασική εξίσωση Pell με $D = 8$.

Άρα το πρόβλημα εύρεσης τετραγωνοτριγωνικών αριθμών ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης Pell – Fermat $x^2 - 8y^2 = 1$.

Η θεμελιώδης λύση είναι $(x_1, y_1) = (3, 1)$ αφού $3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1$.

Από τη θεωρία της εξίσωσης γνωρίζουμε ότι όλες οι λύσεις παράγονται από τη σχέση

$$x_n + y_n \sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^n.$$

Οι πρώτες λύσεις είναι $(3, 1), (8, 6), (49, 35), (288, 204), \dots$ που αντιστοιχούν στους τετραγωνοτριγωνικούς αριθμούς $1, 36, 1225, 41616, \dots$

Πράγματι,

$$1 = T_1 = 1^2$$

$$36 = T_8 = 6^2$$

$$1225 = T_{49} = 35^2$$

$$41616 = T_{288} = 204^2$$

Επομένως υπάρχουν άπειροι αριθμοί που είναι συγχρόνως τριγωνικοί και τετραγωνικοί.

6.3.2 Τριγωνικοί και Πενταγωνικοί Αριθμοί

Στο παράδειγμα αυτό θα αναζητήσουμε αριθμούς που είναι ταυτόχρονα τριγωνικοί και πενταγωνικοί.

Οι πενταγωνικοί αριθμοί δίνονται από τον τύπο $P_5(m) = \frac{3m^2 - m}{2}$.

Ζητούμε επομένως λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3m^2 - m}{2}$$

Ισοδύναμα,

$$n(n+1) = 3m^2 - m.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 12 και συμπληρώνοντας κατάλληλα τετράγωνα προκύπτει

$$(6m-1)^2 - 3(2n+1)^2 = -2.$$

Θέτοντας

$$x = 6m - 1,$$

$$y = 2n + 1$$

καταλήγουμε στη γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat

$$x^2 - 3y^2 = -2.$$

Η εξίσωση αυτή διαθέτει άπειρες λύσεις και συνεπώς υπάρχουν άπειροι αριθμοί που είναι συγχρόνως τριγωνικοί και πενταγωνικοί.

Οι πρώτοι κοινοί τριγωνικοί και πενταγωνικοί αριθμοί είναι

$$1, 210, 40755, 7906276$$

Πράγματι,

$$210 = T_{20} = P_5(12)$$

$$40755 = T_{285} = P_5(165)$$

$$7906276 = T_{3976} = P_5(2296)$$

Τα παραπάνω παραδείγματα καταδεικνύουν ότι η μελέτη των πολυγωνικών αριθμών οδηγεί τόσο στην κλασική εξίσωση Pell – Fermat, όσο και σε γενικευμένες μορφές οι οποίες μπορούν να αντιμετωπισθούν με ανάλογες τεχνικές.

6.3.3 Τριγωνικοί και Επταγωνικοί Αριθμοί

Οι επταγωνικοί αριθμοί δίνονται από τον τύπο

$$P_7(m) = \frac{5m^2 - 3m}{2}.$$

Επομένως, αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{5m^2 - 3m}{2}.$$

Ισοδύναμα παίρνουμε,

$$n(n+1) = 5m^2 - 3m.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 20 και συμπληρώνουμε τετράγωνα, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$20n(n+1) = 100m^2 - 60m$$

$$\text{ή} \quad 20n^2 + 20n + 5 = 100m^2 - 60m + 5$$

$$\text{ή} \quad 5(2n+1)^2 = (10m-3)^2 - 4$$

$$\text{ή} \quad (10m-3)^2 - 5(2n+1)^2 = 4.$$

Θέτοντας $x = 10m - 3$ και $y = 2n + 1$ παίρνουμε τελικά

$$x^2 - 5y^2 = 4.$$

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα εύρεσης αριθμών που είναι συγχρόνως τριγωνικοί και επταγωνικοί ανάγεται στη γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat $x^2 - 5y^2 = 4$, η οποία μελετήθηκε στην ενότητα 3.4 (παράδειγμα 3.4.2). Η ύπαρξη λοιπόν άπειρων λύσεων της εξίσωσης συνεπάγεται την ύπαρξη άπειρων κοινών τριγωνικών και επταγωνικών αριθμών.

6.4 Πολλαπλάσια Πολυγωνικών Αριθμών και Συνθήκες Ύπαρξης Λύσεων

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάσαμε διάφορες περιπτώσεις στις οποίες μια σχέση μεταξύ πολυγωνικών αριθμών οδηγεί σε εξίσωση Pell. Η αναγωγή αυτή ωστόσο δεν αρκεί από μόνη της για να εξασφαλίσει την ύπαρξη λύσεων στο αρχικό πρόβλημα. Για τους ανώτερους πολυγωνικούς αριθμούς, και συγκεκριμένα για $l \geq 5$, απαιτείται επιπλέον οι λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης Pell να ικανοποιούν

κατάλληλες συνθήκες υπολοίπων. Το φαινόμενο αυτό εξετάζεται συστηματικά από τους Chahal, Griffin και Priddis [14].

Θεωρούμε τη σχέση

$$P(l, r) = mP(l, s), \quad m > 1,$$

όπου m δεν είναι τέλειο τετράγωνο και $l \geq 5$. Με την κατάλληλη ολοκλήρωση τετραγώνων, το πρόβλημα ανάγεται σε γενικευμένη εξίσωση Pell – Fermat της μορφής

$$X^2 - mY^2 = (1 - m)(l - 4)^2.$$

Η ύπαρξη λύσης της αρχικής εξίσωσης συνδέεται με την ύπαρξη λύσης (x, y) της κλασικής εξίσωσης Pell $x^2 - my^2 = 1$, η οποία, επιπλέον, πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες modulo q .

Για παράδειγμα, στις περιπτώσεις

$$l \equiv 1, 3 \pmod{4}$$

οι απαιτούμενες συνθήκες είναι

$$x + my \equiv -1 \pmod{q}, \quad x + y \equiv -1 \pmod{q}$$

ή

$$my - x \equiv -1 \pmod{q}, \quad x - y \equiv -1 \pmod{q}.$$

Ο αριθμός q εξαρτάται από την τιμή του l . Εφόσον κάποια λύση της Pell ικανοποιεί μία από τις παραπάνω συνθήκες, τότε προκύπτουν άπειρες λύσεις του αρχικού προβλήματος [14].

Επομένως, εμφανίζεται μια ουσιαστική διάκριση: οι λύσεις της εξίσωσης Pell δεν ταυτίζονται αυτομάτως με τις λύσεις του αρχικού προβλήματος των πολυγωνικών αριθμών. Πρέπει να ικανοποιούνται επιπλέον αριθμητικές συνθήκες, οι οποίες εξασφαλίζουν ότι οι αντίστοιχες τιμές X, Y οδηγούν πράγματι σε ακέραιους δείκτες r, s . Η παραπάνω διάκριση γίνεται ιδιαίτερα σαφής στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.4 Εξαγωνικοί αριθμοί

Ας εξετάσουμε τώρα τη περίπτωση των εξαγωνικών αριθμών, για την οποία $l = 6$. Θα διερευνήσουμε αν υπάρχει εξαγωνικός αριθμός που είναι διπλάσιος ενός άλλου, δηλαδή αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι r, s τέτοιοι ώστε

$$P(6, r) = 2P(6, s).$$

Οι εξαγωνικοί αριθμοί δίνονται από τη σχέση

$$P(6, n) = \frac{(6 - 2)n^2 - (6 - 4)n}{2} = n(2n - 1)$$

και η ζητούμενη σχέση γίνεται

$$r(2r - 1) = 2s(2s - 1).$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 8 και ολοκληρώνοντας τετράγωνα παίρνουμε

$$(4r - 1)^2 - 2(4s - 1)^2 = -1.$$

Θέτουμε

$$x = 4r - 1 \text{ και } y = 4s - 1.$$

Τότε καταλήγουμε στην αρνητική εξίσωση Pell

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

με την επιπλέον απαίτηση

$$x \equiv y \equiv -1 \pmod{4}.$$

Η τελευταία συνθήκη δεν είναι τυπική λεπτομέρεια. Προκύπτει από τους αρχικούς μετασχηματισμούς $x = 4r - 1$ και $y = 4s - 1$ και εξασφαλίζει ότι μία λύση (x, y) της εξίσωσης Pell αντιστοιχεί πράγματι σε ακέραιους r, s .

Επομένως, το αρχικό πρόβλημα δεν ανάγεται απλώς στην εύρεση λύσεων της εξίσωσης $x^2 - 2y^2 = -1$. Απαιτείται να εντοπιστούν εκείνες οι λύσεις οι οποίες ανήκουν ταυτόχρονα στη συγκεκριμένη κλάση υπολοίπων modulo 4.

Η αρνητική εξίσωση Pell

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

συνδέεται με τις μονάδες του τετραγωνικού σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ειδικότερα, οι θετικές λύσεις της προκύπτουν από τις περιττές δυνάμεις της μονάδας $1 + \sqrt{2}$, μέσω της σχέσης

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

Οι πρώτες λύσεις είναι

$$(1,1), \quad (7,5), \quad (41,29), \quad (239,169), \dots$$

και πράγματι ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Ωστόσο, για να αντιστοιχούν σε λύσεις του αρχικού προβλήματος των εξαγωνικών αριθμών, θα πρέπει επιπλέον να ικανοποιούν

$$x \equiv y \equiv -1 \pmod{4}.$$

Για να ελέγχουμε αν η πρόσθετη συνθήκη μπορεί να ικανοποιηθεί, εξετάζουμε τη μορφή των λύσεων της αρνητικής εξίσωσης Pell. Αν $x + y\sqrt{2}$ είναι μία θετική λύση, τότε η επόμενη προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό με

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Επομένως, αν (x, y) είναι μία λύση, η επόμενη λύση (x', y') δίνεται από

$$x' = 3x + 4y \text{ και } y' = 2x + 3y.$$

Για τη θεμελιώδη λύση (1,1) έχουμε

$$y \equiv 1 \pmod{4}.$$

Επιπλέον, από την παραπάνω αναδρομική σχέση, αν x, y είναι περιττοί και $y \equiv 1 \pmod{4}$, τότε

$$y' = 2x + 3y \equiv 1 \pmod{4}$$

ενώ x' παραμένει περιττός. Επαγωγικά, κάθε θετική λύση της εξίσωσης Pell

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

ικανοποιεί

$$y \equiv 1 \pmod{4}.$$

Συνεπώς, καμία θετική λύση της αρνητικής εξίσωσης Pell δεν μπορεί να ικανοποιήσει την απαιτούμενη συνθήκη

$$y \equiv -1 \pmod{4}.$$

Άρα το αρχικό πρόβλημα δεν έχει λύσεις, δηλαδή δεν υπάρχουν δύο θετικοί εξαγωνικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε ο ένας να είναι διπλάσιος του άλλου. Έτσι, το παράδειγμα αναδεικνύει ένα ουσιαστικό σημείο της μελέτης των πολυγωνικών αριθμών: η αναγωγή σε εξίσωση Pell αποτελεί μόνο το πρώτο βήμα. Η ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης Pell δεν συνεπάγεται αυτομάτως την ύπαρξη λύσεων του αρχικού προβλήματος. Απαιτείται επιπλέον έλεγχος των λύσεων ως προς κατάλληλες αριθμητικές συνθήκες, όπως συνθήκες modulo q [14].

Συμπερασματικά, η μελέτη των πολυγωνικών αριθμών ανέδειξε στην πράξη τη σύνδεση μεταξύ Διοφαντικών εξισώσεων, εξισώσεων Pell και της αριθμητικής δομής των πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων. Η αναγωγή των προβλημάτων σε εξισώσεις Pell παρέχει το βασικό αλγεβρικό εργαλείο, ενώ οι πρόσθετες συνθήκες υπολοίπων καθορίζουν ποιες από τις λύσεις της Pell αντιστοιχούν πράγματι σε πολυγωνικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό, οι πολυγωνικοί αριθμοί λειτουργούν ως ένα φυσικό πεδίο εφαρμογής των θεωρητικών εργαλείων που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία.

Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική μελετήθηκε η εξίσωση Pell – Fermat, μία από τις σημαντικότερες Διοφαντικές εξισώσεις της Θεωρίας Αριθμών. Αρχικά παρουσιάστηκαν οι βασικές της ιδιότητες και αποδείχθηκε ότι για κάθε θετικό ακέραιο D που δεν είναι τέλειο τετράγωνο η εξίσωση $x^2 - Dy^2 = 1$ διαθέτει άπειρες ακέραιες λύσεις. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη θεμελιώδη λύση και στον τρόπο με τον οποίο όλες οι υπόλοιπες λύσεις παράγονται από αυτήν.

Στη συνέχεια αναπτύχθηκε η θεωρία των συνεχών κλασμάτων και αναδείχθηκε η στενή σχέση τους με την εξίσωση. Οι συγκλίνοντες της ανάπτυξης του $\sqrt{D}$ παρέχουν έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο εύρεσης της θεμελιώδους λύσης, αναδεικνύοντας παράλληλα τη στενή σχέση μεταξύ της αριθμητικής ιδιότητας της τετραγωνικής ρίζας και της δομής των λύσεων της εξίσωσης.

Ακολούθησε η μελέτη της γενικευμένης μορφής της εξίσωσης Pell – Fermat, $x^2 - Dy^2 = N$, η οποία παρουσιάζει σημαντικά πλουσιότερη συμπεριφορά. Διαπιστώθηκε ότι η ύπαρξη λύσεων εξαρτάται όχι μόνο από το D , αλλά και από τις αριθμητικές ιδιότητες του N . Παρουσιάστηκαν μέθοδοι εύρεσης λύσεων μέσω συνεχών κλασμάτων και αναλύθηκαν χαρακτηριστικά παραδείγματα που καταδεικνύουν τη δομή και τη συμπεριφορά των λύσεων.

Η αλγεβρική προσέγγιση της εξίσωσης οδήγησε στη συνέχεια στα πραγματικά τετραγωνικά σώματα και στη μελέτη του δακτυλίου των ακεραίων τους. Η εισαγωγή των συζυγών στοιχείων, του ίχνους, της νόρμας και, κυρίως, των μονάδων, επέτρεψε μια βαθύτερη ερμηνεία της δομής των λύσεων. Η εξίσωση Pell – Fermat εμφανίζεται πλέον ως εξίσωση νόρμας, ενώ οι λύσεις της κλασικής Pell συνδέονται με μονάδες νόρμας 1. Η σύνδεση αυτή κορυφώνεται στο Θεώρημα Μονάδων του Dirichlet, το οποίο εξηγεί αλγεβρικά την ύπαρξη και τη δομή των άπειρων οικογενειών λύσεων.

Στο πλαίσιο αυτό, η έννοια του αριθμού κλάσης συμπληρώνει την εικόνα της αριθμητικής δομής των τετραγωνικών σωμάτων και αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο οι ιδιότητες του δακτυλίου των ακεραίων επηρεάζουν τη μελέτη των εξισώσεων που εξετάστηκαν.

Το τελευταίο μέρος της εργασίας αφιερώθηκε στους πολυγωνικούς αριθμούς, οι οποίοι αποτέλεσαν ένα φυσικό πεδίο εφαρμογής της θεωρίας που αναπτύχθηκε. Προβλήματα σχετικά με την ταυτόχρονη εμφάνιση ή τη σχέση μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών πολυγωνικών αριθμών ανάγονται σε Διοφαντικές εξισώσεις και, σε κατάλληλες περιπτώσεις, σε εξισώσεις Pell – Fermat. Με τον τρόπο αυτό οι έννοιες και οι μέθοδοι των προηγούμενων κεφαλαίων αποκτούν συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογή.

Ιδιαίτερα χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα των εξαγωνικών αριθμών. Η αρχική Διοφαντική σχέση ανάγεται στην αρνητική εξίσωση Pell, η οποία διαθέτει άπειρες λύσεις. Ωστόσο, η αναγωγή αυτή δεν αρκεί για να εξασφαλίσει λύσεις του αρχικού προβλήματος καθώς απαιτείται επιπλέον έλεγχος των λύσεων μέσω κατάλληλων συνθηκών υπολοίπων modulo. Στην περίπτωση αυτή οι λύσεις της εξίσωσης Pell δεν ικανοποιούν την απαιτούμενη συνθήκη με αποτέλεσμα το αρχικό πρόβλημα να μην έχει λύσεις.

Το παράδειγμα αυτό συνοψίζει ουσιαστικά τη βασική ιδέα της παρούσας εργασίας. Η εξίσωση Pell – Fermat αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη Διοφαντικών προβλημάτων, όμως η αναγωγή ενός προβλήματος σε Pell αποτελεί μόνο το πρώτο βήμα. Η πλήρης επίλυση απαιτεί την κατανόηση της αριθμητικής δομής των λύσεων και, όπου χρειάζεται, την επιβολή πρόσθετων αριθμητικών συνθηκών. Έτσι, η μελέτη της εξίσωσης Pell – Fermat αναδεικνύει στην πράξη τη βαθιά σύνδεση μεταξύ Διοφαντικών εξισώσεων, συνεχών κλασμάτων, πραγματικών τετραγωνικών σωμάτων, μονάδων και πολυγωνικών αριθμών.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] I. Niven, H.S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., J. Wiley & Sons, New York, 1980.
- [2] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1981.
- [3] H.W. Lenstra Jr., "Solving the Pell Equation", Notices of the American Mathematical Society, Vol. 49, no. 2, pp 182-192, 2002.
- [4] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th Edition, Oxford University Press, 2008.
- [5] W. Chu, *Regular Polygonal Numbers and Generalized Pell Equations*, International Mathematical Forum, vol.2, no. 13-16, pp 781-802, 2007.
- [6] Δ. Πουλάκης, *Θεωρία Αριθμών*, Εκδόσεις Ζήτη, 1997.
- [7] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer, Berlin – Heidelberg, 1999.
- [8] D.A. Marcus, *Number Fields*, Universitext, Springer, New York, 1977.
- [9] D.A. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$: Fermat, Class Field Theory and Complex Multiplication*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [10] J.P. Robertson, *Fundamental Solutions to Generalized Pell Equations*, online article, 2014.
- [11] M.J. Jacobson Jr. and H.C. Williams, *Solving the Pell Equation*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2009.
- [12] K.R. Matthews, *The Diophantine Equation $x^2 - Dy^2 = N, D > 0$* , Expositiones Mathematicae, vol.18, no. 4, pp. 323-332, 2000.
- [13] R.A. Mollin, *Fundamental Number Theory with Applications*, CRC Press, New York, 1998.
- [14] J.S. Chahal, M. Griffin and N. Priddis, "When are Multiples of Polygonal Numbers again Polygonal Numbers?", *Hardy-Ramanujan Journal*, vol. 41, pp. 58-67, 2018.
- [15] J.P. Robertson, *Solving the Generalized Pell Equation $x^2 - dy^2 = N$* , online article, 2004.